SOMMAIRE DU N^{o} 96

SMF

Mot du Président

Lors de l'inauguration du congrès international des mathématiciens ICM2002 à Beijing l'été dernier, les autorités chinoises ont affirmé leur volonté de faire de leur pays un des meilleurs sur les plans scientifique et technologique et, pour atteindre cet objectif, de donner priorité aux mathématiques.

Au même moment, on apprend que des universités aux Pays Bas vont fermer leur département de mathématiques, imposant une retraite anticipée aux enseignants et une reconversion aux chercheurs. Les raisons invoquées sont le manque d'étudiants et la nécessité d'assurer une gestion rentable. La Société Mathématique de France, en liaison avec d'autres sociétés savantes, notamment la Société Mathématique Européenne, ne se contente pas de témoigner sa solidarité envers nos collègues hollandais : nous intervenons près des autorités de ce pays en leur montrant à quel point de telles orientations ont des conséquences désastreuses à long terme pour le développement scientifique et technologique. Les mathématiques sont indispensables, elles interviennent partout, leur évolution ne cesse de s'amplifier : ce n'est certainement pas le moment de renoncer à les développer.

Pour que la France garde sa place enviée parmi les nations qui assurent un développement des mathématiques de tout premier niveau, il faut convaincre ceux qui détiennent des responsabilités de l'importance de maintenir leur soutien à notre discipline. La SMF s'y emploie - elle serait encore plus efficace si le nombre d'adhérents augmentait.

Michel Waldschmidt

Vie de la société

La réunion publique organisée par la commission de l'enseignement de la SMF le samedi 18 janvier sur le thème : « Les Mathématiques dans les nouveaux cursus universitaires (Licence Master Doctorat) » a rassemblé un grand nombre de participants. Un compte-rendu en est publié dans cette Gazette.

Une lettre cosignée par la SMF, la SMAI, l'APMEP et l'UPS a été adressée en janvier 2003 au Ministre de l'Education Luc Ferry pour lui demander de pérenniser la commission chargée de mener une réflexion sur les programmes de mathématiques.

Une rencontre amicale avec l'équipe de la pièce de théâtre « La Preuve » a eu lieu à l'Institut Henri Poincaré le lundi 20 janvier. Vous en saurez plus en consultant le serveur de la SMF.

Le congrès AMAM2003, organisé conjointement par la SMF, la SMAI et l'EMS, s'est tenu à Nice du 10 au 13 février 2003. Son organisation a mobilisé les énergies d'un grand nombre de collègues. Mireille Martin-Deschamps, Doina Ciroanescu et Alain Damlamian ont consacré une très grande partie de leur temps pendant plusieurs mois à le préparer et aussi à équilibrer le budget. Le conseil scientifique, présidé par Jacques Louis Lions et Serguei Novikov, et le comité d'organisation local, composé de Denise Chenais, Jacques Blum et Charles Walter, ont permis que ce congrès soit réussi sur le plan scientifique aussi bien que pour l'organisation matérielle.

Groupes et géométrie

Journée Annuelle

de la

Société Mathématique de France

Samedi 14 juin 2003

Programme :

9h	Assemblée générale
10h45	Pierre Pansu *Groupes aléatoires*
12h	Laurent Guillopé *NUMDAM, le programme*
14h	Michel Boileau *Géométrisation des actions de groupes en dimension 3*
15h15	Laurent Guillopé *NUMDAM, portrait de groupes*
15h45	Gregor Masbaum *Représentations quantiques de « Mapping Class Groups »*

Institut Henri Poincaré - Amphithéâtre Hermite

11 rue Pierre et Marie Curie 75005 Paris - `http://smf.emath.fr`

CARNET

Stanisław Łojasiewicz (1926-2002)

S. Łojasiewicz est mort le 14 novembre dernier. Je crois bien qu'alors, j'ai d'abord pensé à son rire, sonore et inimitable, que je n'entendrai plus ; j'ai ensuite associé son nom à celui de deux autres grands mathématiciens disparus peu de temps auparavant, Laurent Schwartz et René Thom, tant son œuvre se rattache à la leur.

S. Łojasiewicz était né à Varsovie le 9 octobre 1926. Je ne sais guère ce que fut sa vie avant 1945 ; nous n'en avions guère parlé ; il m'a juste dit une fois que, pendant la guerre, en Pologne, les lycées avaient été fermés par les nazis, et que les études étaient organisées de manière clandestine, dans des appartements privés.

À partir de 1945, il est étudiant, puis chercheur, à l'Université de Cracovie, où il demeurera toute sa vie ; il passe sa thèse en 1950 sous la direction de Ważewski sur le sujet suivant : « Sur l'allure asymptotique des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier » (Ce renseignement ainsi que d'autres m'a été fourni par K. Kurdyka, ce dont je le remercie très vivement).

Il s'intéresse ensuite à la théorie des distributions. Le travail qui le rendra célèbre et déterminera la suite de son activité, est la solution qu'il donne en 1957 du problème de la division des distributions posé par L. Schwartz.

Je rappelle ce dont il s'agit : étant donné un ouvert U de R^n, une fonction analytique réelle f sur U, et une distribution T sur U, existe-t-il une distribution S telle qu'on ait $fS = T$? Chez L. Schwartz, l'origine de ce problème était la suivante : soit P un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants ; existe-t-il une distribution E (dite « solution élémentaire de E »), telle qu'on ait $PE = \delta$?

Il est naturel de chercher E tempérée (en fait, ce n'est pas le plus simple ; si l'on cherche seulement une distribution sans condition de croissance à l'infini la réponse est plus facile ; mais ceci sort de notre sujet). Pour trouver E tempérée, il est naturel de travailler sur les transformées de Fourier, et de résoudre l'équation $\hat{P}\hat{E} = 1$, $\hat{P}$ un polynôme, $\hat{E}$ une distribution tempérée ; en fait, le problème est local, car une distribution tempérée n'est rien d'autre qu'une distribution sur R^n, prolongeable à la sphère S^n (ou à l'espace projectif réel) ; il est alors naturel de ne pas se limiter à $T = 1$, ni à $f =$ un polynôme.

Le problème, qui paraissait très difficile à l'époque, fut résolu simultanément en 1957 par S. Łojasiewicz et L. Hörmander, ce dernier se limitant toutefois au cas des polynômes. Leurs méthodes diffèrent sur plusieurs points : tandis que Łojasiewicz traite directement le problème de la division, Hörmander montre un résultat équivalent par dualité : la multiplication par f a une image fermée dans les fonctions C^∞. Une autre différence est dans la stratification utilisée :

Hörmander utilise simplement la stratification par l'ordre des zéros, tandis que Łojasiewicz démontre et utilise une stratification beaucoup plus détaillée des zéros de f. Le point commun est l'inégalité reliant la croissance d'une fonction analytique à la distance à l'ensemble de ses zéros (inégalité triviale dans le cas complexe, beaucoup moins évidente dans le cas réel) ; dans le cas des polynômes elle peut se démontrer à l'aide d'un théorème d'élimination algébrique réelle de Tarski-Seidenberg ; dans le cas analytique, elle est plus délicate à établir et porte à juste titre le nom d'« inégalité de Łojasiewicz ».

Pendant que j'y suis, je signale une autre « inégalité de Łojasiewicz » plus subtile qui est relative à la comparaison d'une fonction analytique et de son gradient au voisinage de ses zéros (si bien que la terminologie donne quelquefois lieu à des confusions). Cette dernière inégalité a été notamment utilisée par Thom pour donner des majorations des nombres de Betti des variétés algébriques réelles. Dans le cas algébrique, les exposants intervenant dans les deux inégalités sont rationnels ; leur étude a donné lieu à de nombreux travaux.

Personnellement, j'ai eu à me servir de ce travail de deux manières ; d'une part pour une extension du théorème de division à des systèmes $f_iS = T_i$ (les T_i doivent alors vérifier une condition de compatibilité *i.e.* satisfaire les relations analytiques satisfaites par les f_i) ; d'autre part, dans le « théorème de préparation différentiable » conjecturé par R. Thom ; en gros dans les fonctions C^∞, il s'agit de remplacer une division exacte $\varphi = f\psi$ (φ et ψ de classe C^∞, et f analytique ; ceci est essentiellement un problème dual de la division des distributions) par une division avec reste. Dans les deux cas, le dévissage des ensembles analytiques donné par Łojasiewicz est si bien fait que ses méthodes s'appliquent presque sans changement. Je signale aussi que Łojasiewicz a donné ultérieurement une autre démonstration du théorème de préparation différentiable dans sa version forte due à J. Mather (dépendance linéaire du quotient et du reste). Cette démonstration repose sur une version du « théorème de Newton différentiable » dans le domaine complexe. De toutes les démonstrations qui ont été données de ce théorème c'est sans aucun doute celle que je préfère.

Comme je le disais plus haut, son travail sur la division des distributions a été le point de départ de ses travaux ultérieurs. En 1964, il publie une démonstration de l'existence d'une triangulation semi-analytique des ensembles semi-analytiques, travail fait en grande partie à Pise en 1962, où il avait été invité par A. Andreotti (pour être juste, je dois dire qu'une autre démonstration de ce théorème a été donnée simultanément par B. Gieseke). En 1964-65, il passe une année à Orsay et y donne un cours où il expose ses connaissances sur les ensembles semi-analytiques devant un auditoire passionné, incluant R. Thom et l'auteur de ces lignes. Ce cours ronéotypé par les soins de l'I.H.E.S, est resté la référence de base du sujet ; il n'a jamais été publié sous une autre forme.

Nous devions le revoir ensuite souvent en France notamment lors d'un séjour à l'I.H.E.S. en 1967-68. Il aimait voyager en Europe, Amérique du Nord et du Sud notamment ; il sillonnait infatigablement l'Europe en voiture allant surtout en Espagne, Italie et France (pendant longtemps, ces voyages se faisaient à bord d'une vieille Fiat polonaise qui rendait perplexe les garagistes occidentaux). Cependant il était très attaché à la Pologne et à Cracovie, malgré ses désaccords avec les gouvernements communistes, et aussi malgré des conditions de vie, en particulier de logement, assez difficiles. À ma connaissance, il n'a jamais envisagé de quitter son poste en Pologne et à Cracovie ; vu sa réputation, cela lui aurait été facile.

Depuis 1970, ses travaux se sont poursuivis dans la même direction et ont été prolongés par les travaux de ses nombreux élèves en Pologne et à l'étranger. Après l'introduction des ensembles sous analytiques par Gabrielov et Hironaka ce sujet a été aussi l'objet de son attention ; en particulier lui-même et ses élèves se sont attachés à étudier les ensembles sous analytiques en évitant autant que possible de se servir de la désingularisation. Il travaillait ces dernières années en collaboration, avec M.A. Zurro, à un exposé d'ensemble de ces sujets ; une première version résumée, en espagnol, a été publiée à Valladolid en 1992. Sa disparition brutale laisse ce travail inachevé; mais si j'ai bien compris, la première partie est essentiellement terminée, et devrait être publiée prochainement ; cette publication sera le meilleur hommage à sa mémoire.

Bernard Malgrange

Disparition de Paul-André Meyer

Jeudi 30 janvier 2003, Paul-André Meyer est décédé d'un infarctus foudroyant. Cette disparition est celle d'un grand mathématicien, qui a transformé le paysage de la théorie des processus stochastiques en France et dans le monde.

Souvenirs

Lorsque j'ai appris la nouvelle le lendemain matin, par un courrier électronique de sa fille Thérèse, j'ai bien entendu été très triste, assommé par le caractère complètement inattendu de cet événement. Il y a quelques semaines à peine je conversais encore avec lui et il était comme toujours vif et gai.

Mais c'est surtout lorsque je me suis rendu à Strasbourg pour la cérémonie que j'ai été profondément bouleversé. En arrivant à Strasbourg même, au département de mathématiques ou en refaisant le chemin à pied jusque chez lui, tous les souvenirs sont revenus avec énormément de poids.

Je repensais à ce séminaire du mardi matin. Toutes les semaines nous nous retrouvions devant le tableau du quatrième étage de la tour I.R.M.A. Nous étions parfois 10 personnes, parfois 3 personnes, et nous écoutions Meyer. Il venait chaque fois avec un nouveau texte dactylographié : il avait démontré un résultat nouveau, ou alors il avait lu et entièrement réécrit un article d'un autre, ou encore il nous dispensait le 10$^{\text{e}}$ chapitre de son cours sur les algèbres de von Neumann, les algèbres de Lie ou la théorie quantique des champs.

Je repensais à l'intérêt et à l'enthousiasme constant qu'il avait pour tout ce que je faisais. Je devais sûrement être la millième personne à lui montrer fièrement ses résultats, mais je crois bien que son intérêt était sincère, intact. Une joie permanente à voir les mathématiques avancer, à voir un jeune progresser.

Je me souvenais de ce chemin que nous faisions souvent ensemble à midi, je l'accompagnais à pied vers chez lui et nous parlions. Nous parlions de mathématiques bien sûr, mais aussi de voyages (en particulier de l'Inde), des langues, de musique classique.

Je repensais à ces séminaires où il écoutait l'invité pendant les cinq premières minutes, puis fermait les yeux ou lisait son courrier pendant le reste de l'exposé, et, à la fin, posait de nombreuses questions très pertinentes, proposait des directions de développement qui émerveillaient l'orateur.

Je me souvenais du premier congrès où je fus invité pour présenter mes résultats, il a tenu à m'accompagner. On a fait une marche en forêt et il m'a raconté ses débuts. Je crois qu'il était ému comme moi.

Je me souvenais de la fois où je n'ai pas été retenu comme professeur sur un poste et il m'a dit « C'est une très bonne nouvelle ! Tu ne dois pas quitter le C.N.R.S. avant d'avoir effectué encore de nombreux voyages dans des départements de mathématiques ou de physique à l'étranger ! »

Je me disais que tout cela avait été un bagage extraordinaire pour un jeune chercheur et que je ne le revivrai sans doute plus jamais.

Je me sentais orphelin en ce mardi matin pluvieux devant l'église St Maurice de Strasbourg.

Parcours

Je vais maintenant retracer les grandes lignes du parcours personnel et scientifique de Paul-André Meyer. Je ne l'ai moi-même côtoyé que durant sa période « Probabilités Quantiques ». Pour les autres périodes je me suis appuyé sur des renseignements de Michel Émery, Claude Dellacherie et Michel Weil, mais aussi de Martin Meyer pour les étapes personnelles. Je les en remercie. J'ai aussi eu à ma disposition un texte privé de Paul-André Meyer lui-même, retraçant son parcours.

Paul-André Meyer est né en 1934 dans la région parisienne, dans une famille de négociants qui s'appelaient à l'époque Meyerowitz. Entre 1940 et 1946 sa famille se réfugie en Argentine. Il gardera toute sa vie une connaissance parfaite et beaucoup d'amour pour la langue espagnole. Sa femme Geneviève a aussi vécu son enfance à Buenos Aires et a fréquenté le même lycée français. Mais ils ne se sont rencontrés que beaucoup plus tard sur les bancs de la Sorbonne.

De retour à Paris, il entre au lycée Janson de Sailly et découvre un vrai goût pour les mathématiques au contact d'un professeur qui l'a marqué, M. Heilbronn. Il passe le bac en 1952 et à la même époque son père fait changer le nom de leur famille en Meyer. Il entre à l'E.N.S. en 1954, en s'y préparant seul.

Meyer, dans ses notes personnelles, ne se présente pas comme un élève particulièrement brillant, reçu parmi les derniers à l'E.N.S. et à l'Agrégation ; mais il est au moins certain que sa progression, à partir du moment où il a entamé sa thèse, a été fulgurante.

À ses débuts de normalien, il suit le séminaire de Théorie du Potentiel avec ses professeurs Choquet et Deny. Sur le conseil de Brelot, il s'intéresse à des travaux récents de Hunt qui montre des résultats importants de théorie du potentiel par des méthodes probabilistes. Meyer rencontre Loève qui passe une année à Paris, puis le suit aux États-Unis (Berkeley). Il entre en contact avec Doob, dont il avait lu le grand traité, alors tout récent. Il s'agit là d'une période qui va vraiment déclencher sa carrière.

Ses premiers résultats importants dans les années 60 furent de caractériser les fonctions excessives qui se représentent comme potentiel d'une fonctionnelle additive. Puis en appliquant ces méthodes à la théorie des martingales, il caractérise les surmartingales qui sont différences d'une martingale et d'un processus croissant. C'est la fameuse « Décomposition de Doob-Meyer ». En appliquant cela au carré d'une martingale la voie est ouverte à toute la théorie de l'intégration stochastique pour les martingales de carré intégrable (en particulier grâce à la définition des crochets droits).

Dans ces années sa vie personnelle s'accélère : conversion au catholicisme puis mariage en 1957, naissance de 3 enfants entre 1959 et 1962 (la quatrième naîtra en 1969), prix et cours Peccot en 1963 et surtout installation de la nouvelle famille dans la région de Strasbourg en 1964.

Meyer dit qu'ils ont tellement aimé Strasbourg, l'Alsace, les Vosges et la Forêt Noire, qu'ils n'ont plus bougé. Et cela malgré de très nombreuses propositions qui lui seront faites de revenir à Paris (ce qui n'empêchera pas Meyer de garder des contacts très étroits avec les collègues probabilistes parisiens, en particulier avec Neveu). C'est le début de « l'École strasbourgeoise des probabilités ».

Très vite, Meyer va développer une équipe avec ses étudiants, en particulier Doléans, Dellacherie, Maisonneuve, Weil. Il va recevoir de nombreux visiteurs Doob, Ito, Chung, Spitzer, Walsh, Knight, Getoor, etc. En quelques années, Paul-André Meyer et son groupe vont étendre tous les résultats décrits ci-dessus et vraiment créer la « Théorie générale des processus ».

Ils posent la théorie définitive de l'intégration stochastique avec intégrant prévisible et intégrateur semi-martingale (Schwartz a un jour suggéré qu'elles étaient bien mal nommées et qu'elles devraient s'appeler « meyergales »).

La théorie des temps d'arrêts va y jouer un rôle crucial et offre un langage naturel qui n'a pas d'équivalent en analyse. Associée à ces temps d'arrêts est la théorie des différentes mesurabilités pour les processus (progressifs, optionnels, prévisibles). C'est une théorie extrêmement subtile (cf. les fameux théorèmes de « Début » ou de « Section ») mais maintenant tellement clarifiée que l'on a du mal à imaginer que des notions aussi simples que la tribu prévisible engendrée par les processus continus à gauche, ou les temps d'arrêts prévisibles annoncés par une suite de temps d'arrêts, ont demandé énormément de temps et d'efforts pour arriver à une telle efficacité. Meyer écrit : « Ces travaux sont destinés à rester, j'en suis persuadé et de la meilleure manière qui soit : en devenant des trivialités, que l'on utilise comme on respire. »

C'est aussi l'époque du premier livre de Meyer (1966), « *Probabilités et Potentiels* », qui sera ensuite repris et enrichi en 5 volumes avec C. Dellacherie (le 5^{e} volume en collaboration avec B. Maisonneuve aussi). Véritable bible de la théorie générale des processus stochastiques, de l'intégration stochastique, des processus de Markov..., ces volumes ont connu un succès décroissant avec le numéro du volume. Le premier volume est dans le bureau de presque tout probabiliste, le cinquième n'a pas dépassé 100 ventes. C'est certainement une bien grande injustice pour une série inégalée encore aujourd'hui, et il semble que Paul-André Meyer en avait gardé une certaine amertume.

C'est aussi l'époque où démarre la série des « *Séminaires de Probabilités* ». Commencée en 1967 cette série de volumes chez Springer continue encore aujourd'hui avec le volume XXXVI qui vient de paraître.

Cette édition annuelle a constitué à une époque une véritable référence. Certains articles ou cours qui y figurent ont influencé toute une génération de mathématiciens. C'est une publication, originale à plus d'un titre, à laquelle Meyer était très attaché. D'abord parce que c'était son enfant, mais aussi pour le vent de liberté qui y soufflait. Ces volumes contenaient bien entendu des articles fondamentaux qui restent des références 30 ans plus tard, mais aussi des remarques, des mises au point, des cours, et tout un joyeux mélange qui a été le ferment de la progression des idées et de la communication entre chercheurs de toute une époque.

Ce mélange a aussi porté du tort à l'image de cette publication auprès des mathématiciens non probabilistes, qui l'ont considérée comme une publication pas très sérieuse. On connaît des exemples de commissions de spécialistes qui ne comptent pas les articles publiés dans cette série comme de véritables publications.

Il est certainement dommage que l'esprit scientifique au sens large de cette revue, cette liberté d'écrire ce que l'on jugeait important, loin de la pression des commissions, du comptage des publications, aient été contraints de reculer.

Cette période pour l'équipe strasbourgeoise culmine dans les années 70 avec le fameux « *Cours sur les Intégrales Stochastiques* » auquel participaient Chou, Dellacherie, Émery, Pratelli, Stricker, Yan, Yœurp mais aussi, à distance, Azéma, El Karoui, Jacod, Lenglart, Lépingle, Mémin, Métivier, Pellaumail, Yor.

Parallèlement à ces travaux en théorie générale des processus, Meyer poursuit les applications de la théorie des martingales en analyse. En théorie des espaces homogènes et des intégrales singulières, les martingales lui donnent des résultats à la fois profonds et valables sur des espaces très généraux. Par exemple, 10 ans après ses apports à la théorie de Littlewood-Paley, les analystes travaillaient encore à des extensions à $\mathbf{R}^n$, ignorant, parce que sa modestie lui interdisait de le leur signaler, que Meyer avait obtenu les inégalités avec des constantes universelles, indépendantes de la dimension, ou même de la nature euclidienne ou non de l'espace.

Vers la fin des années 70 Meyer s'intéresse aux martingales continues sur les variétés différentiables et à l'intégration stochastique intrinsèque dans ce contexte. Il a beaucoup discuté avec Schwartz sur ce sujet, mais ils ont rédigé séparément. On doit à Meyer sur ce sujet l'introduction et l'étude des martingales dans une variété, riemannienne ou non, mais pourvue d'une connexion, la classification des transports stochastiques.

En 1980 il fait connaissance avec le calcul de Malliavin, au congrès de Durham. Ce thème rejoint son goût pour les « chaos de Wiener ». Meyer sera au départ de nombreux développements. En particulier ses équivalences de normes Sobolev en dimension infinie donneront lieu à toute une série de travaux fameux de Bakry, et aussi dans un autre registre de Hu et Yan.

Ce goût pour les chaos de Wiener trouvera un écho très fort en 1984 quand Meyer écoute un exposé de Parthasarathy à Pise sur le tout nouveau calcul stochastique quantique. Meyer est tellement enthousiasmé qu'il décide fermement de consacrer le reste de sa carrière à ce sujet. Pendant plus de 14 ans Meyer va explorer le monde des probabilités quantiques de fond en comble. Il a contribué à de nombreux développements importants (bien qu'il s'en défendît). J'en cite quelques uns qui me viennent à l'esprit, sans être exhaustif : introduction et développement de la théorie des noyaux de Maassen à 3 arguments, contre-exemple célèbre à la représentation en intégrales stochastiques quantiques des opérateurs bornés (avec Journé), une nouvelle définition des intégrales stochastiques quantiques (avec moi-même) permettant de s'abstraire du domaine des vecteurs cohérents de Hudson et Parthasarathy. Il a aussi beaucoup fait de propagande et de travail de réécriture sur ces sujets, donnant lieu au Lecture Notes « *Quantum probability for probabilists* » qui reste un succès et une référence.

Ce travail de réécriture permanent est une autre caractéristique du travail de Paul-André Meyer. Il disait lui-même qu'il ne pouvait rien lire sans le rédiger à sa manière et l'exposer. Ainsi, en plus de ses travaux originaux considérables, Meyer a réécrit de très nombreux articles. Mais il faut savoir que les articles repris par Meyer pouvaient être très différents de l'article original (nouvelles démonstrations, simplifications, extensions, rédaction enfin lisible) et devenaient parfois la référence plutôt que l'article original.

Ce travail de réécriture et de compilation est une composante aussi importante du travail de Meyer que ses articles originaux. Mais parfois ce double rôle a été mal compris et Meyer a été parfois plus perçu comme un encyclopédiste que comme un mathématicien original. Il est bien évident que cela est totalement faux et que son œuvre dépasse même sûrement ce que l'on en connaît. En effet sa très grande modestie naturelle l'a souvent conduit à s'effacer derrière d'autres personnes. Son œuvre originale est considérable et elle a changé le paysage des mathématiques de ces 40 dernières années.

D'ailleurs, je me souviens d'un jour où je me plaignais devant lui du manque de reconnaissance dont souffraient les probabilités quantiques en France. Il me répondit : « J'ai passé tout le début de ma carrière à faire des probabilités en m'abritant sous le parapluie de la théorie du potentiel, ça m'a ouvert des portes. Tu n'as qu'à faire de même et faire des probabilités quantiques en t'abritant sous le parapluie de la théorie des probabilités ! »

Comme les temps ont changé ! La théorie des probabilités et des processus stochastiques est passée en 40 ans du statut de théorie mineure, appliquée et inavouable, à un statut de théorie à part entière, reconnue et développée. Et ça, Paul-André Meyer y est pour beaucoup.

Durant sa carrière, Paul-André Meyer a été souvent récompensé : prix Peccot, prix Maurice Audin, puis le fameux prix Ampère. Il fut deux fois nommé au Comité National du C.N.R.S et élu correspondant de l'Académie des Sciences. Mais il n'a jamais fait grand cas de toutes ces distinctions, allant même jusqu'à partager financièrement un de ses prix avec un co-auteur, ou encore ne jamais mentionner à sa famille l'obtention de certaines distinctions.

Caractère

Je voudrais terminer ce portrait en parlant de l'homme, de son caractère, de l'impression qu'il laissait à ceux qui le côtoyaient.

Paul-André Meyer était un mathématicien très important, reconnu dans le monde entier, une véritable référence et pourtant il était d'une incroyable modestie. Je parle là d'une modestie sincère et non pas des habituels discours « Mais non, mais non, je n'y suis pas pour grand chose ! » que l'on entend souvent. Un souvenir personnel illustre ce trait de caractère.

Il s'agit de la seule fois où il s'est (un peu) fâché contre moi. Je finissais de rédiger ma thèse et récupérais un chapitre à l'imprimante. Il passe et voit que j'y parle de *noyaux de Maassen-Meyer*. Il me dit : « Je ne veux pas que tu les appelles ainsi, appelle-les *noyaux de Maassen* ! » Je lui explique que les opérateurs à noyaux sur l'espace de Fock quand ils sont à deux arguments sont effectivement de Maassen mais que c'est bien à lui, Meyer, que l'on doit d'avoir montré la nécessité d'introduire le troisième argument et que depuis tout le monde dit *noyaux de Maassen-Meyer*. Il me répond qu'il ne veut pas que des objets mathématiques soient nommés d'après son nom. Je lui demande alors comment il fait pour parler de la *décomposition de Doob-Meyer*. Alors il se retourne, part et me lance en criant « Je n'ai JAMAIS appelé cela *décomposition de Doob-Meyer* ! » et il claque violemment la porte derrière lui.

Tous ses anciens étudiants témoignent que Meyer s'est beaucoup occupé d'eux. Il a toujours été très présent, tapant souvent lui-même des articles, avec sa machine à écrire que tout le monde savait reconnaître (avant l'arrivée de TeX). Il portait aux travaux des autres, en particuliers de ses étudiants, un enthousiasme communicatif. Il débordait d'idées et de commentaires. Et puis, il mettait lui-même une telle énergie dans tout ce qu'il faisait, il avait une telle capacité de travail et de concentration, que ceux qui travaillaient avec lui ne pouvaient qu'être portés, poussés par cet élan.

Dans toute sa carrière Paul-André Meyer a attaché relativement peu d'importance aux applications que pouvaient avoir ses travaux (comme en physique ou en mathématiques financières). Je le cite :

« Rien dans notre imagination ordinaire ne nous prépare à concevoir la vitesse de la lumière comme une vitesse limite, et la transformation de Lorentz peut être manipulée mais non *comprise*. C'est pire encore pour la mécanique quantique. Bien entendu, l'esprit d'un physicien qui manipule ces choses tous les jours finit par les connaître parfaitement, mais je ne crois pas qu'il réalise plus qu'un court-circuit du langage mathématique, une constitution sommaire d'images à partir de celui-ci. Feynman n'écrit-il pas que la mécanique quantique restait toujours aussi stupéfiante au bout de 40 ans d'expériences ? Ou que la question : Qu'est-ce qui fait que les masses s'attirent ? est sans réponse jusqu'à maintenant et sans doute pour toujours. En ce sens la science ne nous explique rien, elle nous dit : C'est comme ça ! »

Pourtant, dans les toutes dernières années de sa carrière, il semble avoir regardé la physique d'un autre œil. En effet, nous sommes nombreux à l'avoir vu faire des efforts en direction de la physique quantique. Il m'a répété sans cesse que faire des probabilités quantiques n'avait pas de sens sans s'intéresser aussi à la physique qu'il y avait derrière. Il me disait que les probabilistes (quantiques ou non) avaient sûrement beaucoup de choses à dire aux physiciens mais que pour cela il fallait faire l'effort d'aller vers eux, de comprendre leurs problèmes, leurs besoins.

Je terminerai en évoquant les passions de Meyer en dehors des sciences. Les quatre principales étaient je crois sa famille, la musique, les langues et la littérature.

Paul-André Meyer était en effet très proche de sa famille, qu'il faisait souvent passer avant tout. Il écrit : « J'ai toujours donné à ma famille une certaine priorité sur le travail, et je me suis senti un jour récompensé quand une de mes filles m'a dit : Quand nous étions petits, nous avions un peu honte, car nous pensions que tu ne faisais rien ! »

Paul-André Meyer était un grand mélomane et un très bon musicien. Il jouait lui-même du violon, de l'alto et surtout de la flûte traversière. Toute sa famille a grandi dans cette passion de la musique (deux filles musiciennes professionnelles). Le soir, la « petite famille Meyer » jouait à la maison des sonates, des trios, des quatuors avec piano.

Paul-André Meyer était aussi un impressionnant connaisseur de langues étrangères. Il parlait très bien espagnol, anglais, allemand, mais aussi chinois, bengali. Il avait de bonnes connaissances de japonais, hindi, sanscrit, russe. Cet amour des langues s'accompagnait naturellement d'un amour des voyages. Sa carrière de mathématicien lui a d'ailleurs permis d'en effectuer beaucoup. Il a par exemple beaucoup travaillé aux relations scientifiques entre la France et la Chine, faisant de nombreux voyages et cours, formant de nombreux étudiants chinois en France.

Paul-André était beaucoup plus qu'un grand mathématicien ou même qu'un grand scientifique. Toutes les personnes qui le côtoyaient ne pouvaient qu'être frappées par son immense culture. Parmi les auteurs qu'il a le plus aimé, il faut citer : Pouchkine, Saint Simon (le mémorialiste), Borges, Tchekhov, les poètes de la Chine des Tang et des Song. Ses livres de chevet étaient les Essais de Montaigne et le Zhuangzi, texte taoïste de l'antiquité chinoise.

Il avait aussi une vie spirituelle intense, une réflexion profonde sur son engagement religieux, tout en gardant une grande ouverture d'esprit. Il a en particulier voué une véritable passion à l'hindouisme. Allant même jusqu'à prendre sa retraite pour achever une œuvre qui le « travaillait depuis l'enfance » : apprendre le bengali, le hindi et le sanscrit, pour traduire en français les œuvres du disciple de Ramakrishna, Mahendranath Gupta, en particulier le volumineux Kathamrita. Cette œuvre immense (environ 950 pages de traduction), qu'il a achevée juste avant de nous quitter, représentait un jardin secret, une passion de toute sa vie, qui n'étaient connus que de ses très proches, mais qui montre encore une fois combien Paul-André Meyer pouvait être déterminé et fidèle dans tout ce qu'il faisait.

Paul-André Meyer part en laissant derrière lui près de 200 publications, une dizaine de livres, de nombreux élèves, « petits-élèves » et même « arrières-petits-élèves ». Il en est de certains hommes comme des grandes œuvres, ils ne disparaissent jamais vraiment.

Stéphane Attal

Nouvelle méthode de résolution des équations du 3ème degré [1]

Sylvain Poirier [2]

Le texte présenté au jury du prix Fermat junior était un exposé de cinq pages, plus un dessin fait à la main. Il commençait par une approche géométrique (en termes de forme trilinéaire symétrique dans l'espace $\mathbb{C}^2$), qui pouvait être déroutante à première vue. Suivait une approche trigonométrique, puis la méthode algébrique, et enfin un lien entre ces méthodes, et un calcul passant de la présente solution à celle de Cardan.

Par négligence, le fichier avait été perdu. En voici une nouvelle rédaction plus courte, présentant les deux aspects les plus importants en pratique : les approches algébrique et trigonométrique. L'approche algébrique consiste à effectuer une transformation homographique de l'inconnue.

Résolution algébrique

On se propose de résoudre l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0 \tag{1}$$

en la mettant sous la forme :

$$(x-u)^3 + \lambda(x-v)^3 = 0. \tag{2}$$

avec $u \neq v$. On développe :

$$(1+\lambda)x^3 - 3(u+v\lambda)x^2 + 3(u^2+v^2\lambda)x - (u^3+v^3\lambda) = 0,$$

et on veut identifier à un facteur près les coefficients de cette équation avec ceux de (1). On remarque que la suite $(1+\lambda, u+v\lambda, u^2+v^2\lambda, u^3+v^3\lambda)$ est une suite de termes consécutifs d'une suite récurrente d'équation :

$$u_{n+2} - (u+v)u_{n+1} + (uv)u_n = 0$$

La condition sur u et v pour qu'il existe un λ tel que les deux équations soient proportionnelles, est donc que la suite $(1, -a, b, -c)$ vérifie la même équation de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} b + (u+v)a + uv & = & 0 \\ c + (u+v)b + uva & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

[1]Mention spéciale du jury du prix Fermat junior de mathématiques 1995
[2]`http://spoirier.lautre.net`

Ce système linéaire d'inconnues $(u+v)$ et (uv) se résout immédiatement :

$$\begin{aligned} u+v &= \frac{c-ab}{a^2-b} \\ uv &= \frac{b^2-ac}{a^2-b} \end{aligned}$$

Ainsi u et v sont les deux solutions de l'équation

$$(a^2-b)y^2+(ab-c)y+(b^2-ac)=0 \tag{4}$$

Avant de continuer, on va noter ici les deux types d'exceptions possibles :

D'une part, on peut avoir $a^2-b=0$. Cela traduit le fait que l'équation (1) est de la forme $(x+a)^3=a^3-c$, que l'on sait résoudre.

D'autre part, l'équation (4) peut avoir une racine double. Dans ce cas, cette racine double est également racine au moins double de (1).

En effet, faisons le changement de variable

$$X = x - \frac{u+v}{2} = x - \frac{c-ab}{2(a^2-b)}. \tag{5}$$

On voit à l'allure de (2) qu'une même translation appliquée à u et v doit globalement préserver le système (3). On se ramène donc au cas où $u+v=0$. Alors, la racine double de (4) ainsi transportée devient $u=v=0$ ce qui réduit (3) à $b=c=0$. Ce résultat substitué dans (1) donne immédiatement 0 racine au moins double. Comme c'est la même translation qui a été appliquée et qui donne la même racine double pour les deux systèmes, les deux racines doubles étaient donc égales au départ.

Nous supposerons dorénavant que l'on n'est dans aucune des exceptions ci-dessus.

L'équation (1) aura trois racines réelles si et seulement si l'équation (4) n'a aucune racine réelle : car alors on travaille dans l'ensemble des nombres complexes, et l'opération racine cubique que l'on va introduire aura trois résultats à traiter de la même manière ; par contre, si (4) a ses racines réelles, alors, comme on travaille dans l'ensemble des réels, l'opération racine cubique a un résultat privilégié (celui qui est réel), qui donnera l'unique solution réelle de (1). On peut remarquer que cette situation est exactement la même que dans la résolution de Cardan des équations du troisième degré (bien que l'équation de degré 2 à résoudre soit différente de celle-ci).

Continuons la résolution : ayant trouvé u et v, on calcule λ :

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & u+\lambda v \\ 1 & -a \end{vmatrix} = 0 \iff (a+v)\lambda + (a+u) = 0$$

L'équation (1) s'écrit donc

$$\left(\frac{x-u}{x-v}\right)^3 = -\lambda = \frac{a+u}{a+v}$$

et la solution finale s'écrit

$$x = v + \frac{u-v}{1+\sqrt[3]{\lambda}} \tag{6}$$

Remarque : on choisit arbitrairement quelle solution de (4) sera nommée u, l'autre étant nommée v. Dans les deux cas, les trois valeurs de la racine cubique figurant dans (6) donnent les trois racines de (1), mais dans un ordre différent.

Rappel de la méthode trigonométrique usuelle

À cette méthode algébrique correspond une méthode trigonométrique de la même manière qu'à la méthode algébrique de Cardan correspondait également une méthode trigonométrique que nous rappelons ici (cette méthode pouvant notamment servir à résoudre ces équations au moyen d'une calculatrice qui ignore les nombres complexes).

Voici donc d'abord un rappel de la version trigonométrique de la méthode de Cardan :

Pour le cas d'une équation dont les trois racines seraient réelles, on rappelle l'identité

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

On cherche alors à mettre une équation du troisième degré réduite :

$$x^3 + px + q = 0$$

sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha\cos\theta \\ \cos(3\theta) & = & \gamma \end{array} \right.$$

En développant, on trouve

$$4(\alpha^{-1}x)^3 - 3(\alpha^{-1}x) - \gamma = 0$$

et l'identification des coefficients à un facteur près donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \dfrac{-3\alpha^2}{4} \\ q & = & \dfrac{-\gamma\alpha^3}{4} \end{array} \right.$$

soit finalement

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \sqrt{\dfrac{-4p}{3}} \\ \gamma & = & \dfrac{-4q}{\alpha^3} \end{array} \right.$$

La solution s'exprime au moyen des fonctions cos et Arccos.

Cette méthode ne fonctionne plus dans les situations suivantes, correspondant aux cas où il n'y a qu'une racine réelle (on exclut le cas $p = 0$ qu'on sait résoudre) :

Premier cas : $p > 0$. Il faut alors se servir de la fonction sinus hyperbolique :

$$\mathrm{sh}(3\theta) = 4\,\mathrm{sh}^3\theta + 3\,\mathrm{sh}\,\theta$$

Deuxième cas : $p < 0$ et $\gamma = \frac{-4q}{\alpha^3} > 1$. On utilise alors la fonction cosinus hyperbolique :

$$\mathrm{ch}(3\theta) = 4\,\mathrm{ch}^3\theta - 3\,\mathrm{ch}\,\theta,$$

et si $\gamma < -1$, on utilise la fonction $(-\,\mathrm{ch})$, qui obéit à la même formule.

Version trigonométrique de la nouvelle solution

On part de l'identité suivante (si l'équation à résoudre possède trois racines réelles distinctes) : en posant $t = \tan\theta$, on a

$$t^3 - 3t + (1 - 3t^2)\tan(3\theta) = 0$$

ce qui s'obtient facilement en considérant la partie imaginaire de $(1 - it)^3(1 + i\tan(3\theta))$.

A partir de l'équation (1), on se ramène au cas où $c = ab$ à l'aide du changement de variable (5).

Puis on cherche à exprimer l'équation obtenue

$$X^3 + 3AX^2 + 3BX + AB = 0 \tag{7}$$

sous forme du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & \alpha\tan\theta \\ \tan(3\theta) & = & \gamma \end{array}\right.$$

En développant suivant l'identité ci-dessus, on trouve

$$(\alpha^{-1}X)^3 - 3(\alpha^{-1}X) + \gamma(1 - 3(\alpha^{-1}X)^2) = 0.$$

et l'identification des coefficients à un facteur près donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & -\alpha\gamma \\ B & = & -\alpha^2 \end{array}\right.$$

soit finalement

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \sqrt{-B} \\ \gamma & = & \dfrac{-A}{\alpha} \end{array}\right.$$

La solution s'exprime au moyen des fonctions tan et Arctan.

Cette méthode ne fonctionne plus dans les cas où il n'y a qu'une racine réelle. Alors, on remplace l'usage de la fonction tangente par celui d'une des deux fonctions tangente hyperbolique ou cotangente hyperbolique, qui vérifient la même identité :

$$\operatorname{th}^3\theta + 3\operatorname{th}\theta - (3\operatorname{th}^2\theta + 1)\operatorname{th}(3\theta) = 0$$
$$\coth^3\theta + 3\coth\theta - (3\coth^2\theta + 1)\coth(3\theta) = 0.$$

Équations aux q-différences

L. Di Vizio, J-P. Ramis, J. Sauloy*, C. Zhang†

1. Introduction

Une équation différentielle ordinaire est une relation $G(x; f, \ldots, f^{(n)}) = 0$ entre une fonction inconnue f et ses transformées par itération de « l'automorphisme infinitésimal » $f \mapsto \frac{d}{dx} f$. De façon analogue on peut s'intéresser au cas où l'automorphisme infinitésimal est remplacé par un véritable automorphisme φ d'un domaine en x. Le cas le plus simple et le seul que nous considérerons ici, est celui où x varie dans la sphère de Riemann (ou plus généralement un ouvert de celle-ci invariant par φ ou un germe de voisinage d'un point fixe de cet automorphisme) et où de plus l'automorphisme φ est une homographie. On obtient alors des équations fonctionnelles $G(x; f, \ldots, \sigma^n f) = 0$ (où l'on a posé $\sigma f(x) = f(\varphi(x))$). Nous nous intéresserons uniquement au cas où $G(x; y_0, \ldots, y_n)$ est analytique en toutes les variables sur un domaine réel ou complexe ou p-adique. Nous parlerons alors d'équations « aux différences » analytiques. Par conjugaison homographique sur x on se ramène immédiatement aux deux cas suivants :

– $\varphi(x) = qx$, où $q \in C^*$ (C est le corps de base) : on a une équation aux q-différences ;

– $\varphi(x) = x + 1$: on a une équation aux différences (on dit aussi aux différences finies).

Le premier cas correspond à une homographie φ à deux points fixes distincts, le second à une homographie φ à point fixe double. Le cas générique est donc le premier et il est raisonnable qu'il soit (bien que moins classique) plus simple que le second. Nous noterons

$$\sigma_q f(x) = f(qx) \quad \text{et} \quad \tau_\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon).$$

On retrouve le cas différentiel par « passage à la limite continue » ou « confluence » :

$$\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q - 1} \longrightarrow x\frac{d}{dx}, \text{ lorsque } q \to 1,$$

et

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\tau_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \longrightarrow \frac{d}{dx}, \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

* * *

*Lucia Di Vizio, Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, Laboratoire Émile Picard, U.F.R. M.I.G., 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse CEDEX 4

†Changgui Zhang, Laboratoire AGAT, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

L'étude des équations aux q-différences commence au XVIII^{e} siècle avec Euler dans le cadre de problèmes de dénombrement en théorie des nombres (*partitio numerorum*). Une étape importante est due à Heine qui introduit les q-analogues des fonctions hypergéométriques d'Euler et Gauss : les fonctions hypergéométriques basiques qui sont solutions d'équations aux q-différences linéaires algébriques du second ordre, analogues des équations différentielles hypergéométriques classiques (*cf.* 2.2). Il faut citer ensuite les travaux de Jacobi : ses fonctions thêta et sa célèbre formule du triple produit jouent un rôle central dans la théorie (*cf.* §3 et §4).

Considérons, par exemple, la série binomiale, que nous écrivons ici en utilisant la notation classique des séries hypergéométriques :

$$ {}_1F_0(\alpha; -; x) \underset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, $$

où $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ est le symbole de Pochhammer. Elle est solution de l'équation différentielle

$$ (1-x)y' - \alpha y = 0, \tag{1.0.1} $$

ce qui permet de démontrer le théorème binomial :

$$ {}_1F_0(\alpha; -; x) = (1-x)^{-\alpha}. $$

Il existe un q-analogue de cette identité (Cauchy 1843, Heine, *cf.* [GR90, 1.3]). En effet la série ${}_1F_0(\alpha; -; x)$ peut être « déformée » de la façon suivante :

$$ {}_1\Phi_0(a; -; q, x) \underset{def}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n, $$

où l'on a posé, pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$ (a;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i). $$

Cette série fait partie de la famille des séries hypergéométriques basiques introduites par Heine. C'est une déformation de la précédente en ce sens que, si l'on impose $a = q^\alpha$, alors les coefficients de ${}_1\Phi_0$ tendent terme à terme vers ceux de ${}_1F_0$ lorsque $q \to 1$. Par ailleurs, elle est solution de l'équation aux q-différences

$$ (1-ax)y(qx) - (1-x)y(x) = 0, \tag{1.0.2} $$

tout comme la fonction méromorphe définie par

$$ \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \underset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n}, $$

ce qui permet de démontrer le théorème q-binomial :

$$ {}_1\Phi_0(a; -; q, x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}. $$

L'idée de « déformation » peut être précisée comme suit : pour $|x| < 1$, la *fonction* ${}_1\Phi_0(a; -; q, x)$ tend vers la *fonction* ${}_1F_0(\alpha; -; x)$ lorsque $q \to 1$. On peut aussi remarquer que l'équation fonctionnelle (1.0.2), réécrite en utilisant l'opérateur δ_q, tend vers l'équation (1.0.1) lorsque $q \to 1$ (toujours avec $a = q^\alpha$). Le lien général entre ces deux « confluences » (des équations et de leurs solutions) sera explicité plus loin.

* * *

Reprenons notre bref historique. Après Jacobi, on retrouve les équations aux q-différences chez Poincaré et Picard, puis Ramanujan (cf. en particulier le *Lost Notebook*), G. Watson... puis un peu plus tard (et apparemment dans le cadre de motivations assez différentes) chez G. Birkhoff et certains de ses élèves. On aura une bonne idée de l'histoire du sujet, de son intérêt et de l'ampleur du travail qu'il a suscité au cours des siècles en feuilletant la considérable bibliographie de [GR90]. Ceci étant, il est clair que ce thème a été largement oublié et a presque totalement disparu du courant dominant des mathématiques pendant un bon demi-siècle après la fin des années quarante.

La situation a commencé à changer il y a environ dix ans et apparemment pour des raisons très variées, dans le cadre de divers courants de recherche émergents (ou réémergents...) :
– q-combinatoire, q-analogues des polynômes orthogonaux ;
– phénomènes aléatoires discrets ;
– groupes quantiques, représentations ;
– physique théorique (travaux de Baxter, discrétisations, déformations...) ;
– arithmétique (q-identités, transcendance, exponentielles en caractéristique positive) ;
. . . .
Il y a ainsi aujourd'hui un foisonnement impressionnant de travaux en mathématique et physique faisant intervenir des équations aux q-différences (souvent à plusieurs variables et parfois non linéaires). Il est donc assez paradoxal de constater que le sujet manquait jusqu'à une date très récente de fondations solides, même dans le cas le plus simple des équations linéaires ordinaires. Ceci est en fait similaire à ce qui s'est passé pour les équations différentielles ordinaires au XX$^{\text{e}}$ siècle : entre la fin des années quarante et le début des années soixante-dix le sujet fut considéré comme clos et sans grand intérêt autre qu'historique (cf. par exemple sa « densité bourbachique » presque nulle). La théorie des équations différentielles ordinaires analytiques a été d'abord renouvelée par la « redécouverte » des équations du type de Fuchs, puis par celle des équations à singularités irrégulières et de tous les problèmes difficiles et non résolus qu'elles posaient. Un retour à des idées essentielles de Birkhoff (en particulier à son article de 1913 sur le célèbre problème de Riemann-Hilbert [Bir13]) a joué un rôle central dans les progrès très importants faits à la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle sur le sujet. Pour les équations aux q-différences l'histoire se répète avec quelque retard. Là aussi le retour à Birkhoff a joué un rôle essentiel. Nous nous proposons d'expliquer dans cet article comment la récente résolution complète d'une série de questions posées par G. Birkhoff en 1941 (peu avant sa mort) fournit une base raisonnable pour la théorie des équations aux q-différences linéaires analytiques et ouvre une série d'interrogations que nous trouvons assez passionnantes vers la théorie

de Galois, l'arithmétique, la géométrie non-commutative... Nous voudrions en particulier convaincre le lecteur qu'au delà de formules que l'on peut trouver un peu décourageantes (faute d'avoir le talent de Ramanujan ou des outils performants de calcul formel [Chy98]) se dessine une assez jolie géométrie nouvelle greffée sur la géométrie algébrique classique.

> Up to the present time, the theory of linear q-difference equations has lagged noticeably behind the sister theories of linear difference and differential equations. In the opinion of the authors, the use of the canonical system, as formulated above in a special case, is destined to carry the theory of q-difference equations to a comparable degree of completeness. This program includes in particular *the complete theory of convergence and divergence of formal series, the explicit determination of the essential transcendental invariants (constants in the canonical form), the inverse Riemann theory both for the neighborhood of $x = \infty$ and in the complete plane (case of rational coefficients), explicit integral representation of the solutions, and finally the definition of q-sigma periodic matrices, so far defined essentially only in the case* $n = 1$. Because of its extensiveness this material cannot be presented here.
>
> G.D. Birkhoff et P.E. Guenther, 1941

Au delà de l'achèvement de ce programme, pour $|q| \neq 1$, se posent de nombreuses questions naturelles. En voici deux :

– Quelle est la relation entre les invariants algébriques et transcendants « de Birkhoff » (invariants locaux, matrice de connection de Birkhoff, q-Stokes) et la théorie de Galois aux q-différences ([vdPS97]) ? (Rappelons que dans le cas différentiel la question est totalement élucidée : caractère galoisien de la monodromie et des multiplicateurs de Stokes, théorèmes de Zariski-densité de Schlesinger et Ramis [Ram93].)
– Y a-t-il confluence des q-invariants vers les invariants différentiels quand on « passe à la limite continue » pour $q \to 1$ dans des conditions raisonnables.

Ces deux problèmes sont complètement résolus dans le cas fuchsien. (Notons par exemple que dans ce cas la q-monodromie locale en 0 ou ∞ s'interprète à l'aide d'un fibré plat sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ [Sau02c].) La théorie reste incomplète dans le cas irrégulier.

* * *

Dans la dernière partie de cet article, nous changeons de point de vue et dirigeons notre attention vers des problèmes de nature arithmétique. L'étude arithmétique des séries solutions d'équations aux q-différences n'est pas complètement nouvelle ; cependant, nous ne disposons pas d'une théorie systématique. La question a été soulevée récemment par Y. André dans [And00a], [And00b], où plusieurs questions dans cette direction restent sans réponse. Les résultats dont nous parlerons au §5 signifient qu'un analogue naïf de la théorie différentielle ne donne que des objets triviaux. En autres termes, une théorie arithmétique des équations aux q-différence ne peut être un simple analogue de la théorie différentielle. Un objectif serait d'avoir un cadre dans lequel étudier la série de Kontsevitch

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$$

ou des séries provenant du *Lost Notebook* de Ramanujan, comme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{n(n-1)/2}}{(1+q)\dots(1+q^n)}.$$

2. Bréviaire

Nous considérerons des équations aux q-différences linéaires d'ordre n :

$$P.f(x) \underset{def}{=} a_0(x)f(q^n x) + a_1(x)f(q^{n-1}x) + \cdots + a_n(x)f(x) = 0, \tag{2.0.3}$$

où P désigne l'opérateur aux q-différences

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\ \sigma_q^{n-i},$$

que l'on suppose, sans perte de généralité, non dégénéré : $a_0 a_n \neq 0$. Les a_i sont éléments d'un anneau de fonctions K : fractions rationnelles sur un corps de coefficients C, fonctions analytiques ou méromorphes sur un domaine convenable, voire séries de Laurent formelles... et cet anneau est muni de l'automorphisme σ_q qui, à $f(x)$, associe $f(qx)$.

Les éléments σ_q-invariants de K, *i.e.* les solutions de l'équation $\sigma_q f = f$ forment un sous-anneau K^{σ_q}, appelé l'*anneau des constantes* de K. Lorsque K est un corps, K^{σ_q} en est un sous-corps. Ce sera le cas aux §3 et §4, et l'on aura alors $K^{\sigma_q} = \mathbb{C}$, le corps des coefficients. Il en est de même dans les deux exemples suivants, où l'on considère le corps $K = \mathbb{C}(x)$.

Exemple 2.1. L'équation $\sigma_q f = f$, équivalente à l'équation $\delta_q f = 0$, est un q-analogue (et une déformation) de l'équation différentielle $x\frac{dy}{dx} = 0$: il s'agit d'un cas particulier des équations (1.0.1) et (1.0.2) obtenu en posant respectivement $\alpha = 0$ et $a = 1$.

Si l'on s'impose (comme nous le ferons aux §3 et §4) de chercher les solutions dans le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, on obtient pour corps des constantes le corps $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$ des fonctions méromorphes σ_q-invariantes; celui-ci s'identifie naturellement au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann $\mathbf{E}_q = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Par le choix d'un « logarithme » τ dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$, tel que $e^{-2\imath\pi\tau} = q$, la surface $\mathbf{E}_q$ s'identifie à la courbe elliptique $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$. Le corps des constantes de la théorie est un corps de fonctions elliptiques : ce n'est donc pas le corps des coefficients $K^{\sigma_q} = \mathbb{C}$, contrairement à ce qui se passe pour les équations différentielles. $\square$

Exemple 2.2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}^*$. La série hypergéométrique *basique* :

$$\text{(2.2.1)} \qquad {}_2\Phi_1(a,b,c;q,x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(a;q^{-1})_n (b;q^{-1})_n}{(c;q^{-1})_n (q^{-1};q^{-1})_n} x^n$$

est une série convergente, et elle est solution de l'équation aux q-différences linéaire rationnelle d'ordre 2 :

$$\text{(2.2.2)} \qquad \sigma_q^2 f - \lambda \sigma_q f + \mu f = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} \lambda = \dfrac{(a+b)x - (1+c/q)}{abx - c/q} \\ \mu = \dfrac{x-1}{abx - c/q} \end{cases}$$

La série ${}_2\Phi_1$ a été définie par Heine, puis étudiée par Ramanujan. C'est un q-analogue (et une déformation) de la série hypergéométrique *classique* d'Euler-Gauss :

$$\text{(2.2.3)} \qquad {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} x^n.$$

On retrouve cette dernière par limite continue (ou « confluence ») des coefficients lorsque $q \to 1$, avec les contraintes $a = q^{\alpha},\ b = q^{\beta},\ c = q^{\gamma}$. On verra plus loin en quel sens précis on peut faire confluer l'équation fonctionnelle (2.2.2) elle-même vers une équation différentielle. Cependant, en remplaçant σ_q par $1 + (q-1)\delta_q$ et en faisant (comme le suggère l'introduction) confluer δ_q vers $\delta = x\frac{d}{dx}$, le lecteur retrouvera sans peine l'équation hypergéométrique classique :

$$\text{(2.2.4)} \qquad \delta^2 y - \widetilde{\lambda}\delta y + \widetilde{\mu} y = 0, \ \text{avec} \begin{cases} \widetilde{\lambda} = \dfrac{(\alpha+\beta)x + (1-\gamma)}{1-x} \\ \widetilde{\mu} = \dfrac{\alpha\beta x}{1-x}. \end{cases}$$

□

2.3. **Équations et systèmes.** Comme dans le cas des équations différentielles, l'équation (2.0.3) permet de définir un système de rang n :

$$\text{(2.3.1)} \qquad \sigma_q X = AX,$$

où $A \in GL_n(K)$ est une matrice inversible de fonctions. Par exemple en posant $X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \end{pmatrix}$ dans (2.2.2), on trouverait le système de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}(x)).$$

2.4. **Transformation de jauge.** Pour un système différentiel $\delta X = AX$, on sait que toute transformation de jauge linéaire inversible $X = FY$ définit un nouveau système $\delta Y = BY$, où $B = -F^{-1}\delta F + F^{-1}AF$. Un rapide calcul montre que la même transformation de jauge ramène le système (2.3.1) au système $\sigma_q Y = BY$, où

$$\text{(2.4.1)} \qquad B = (\sigma_q F)^{-1} AF.$$

Ceci justifie de définir une relation d'équivalence entre de tels systèmes : on parlera d'équivalence globale (ou rationnelle) si F est à coefficients rationnels, d'équivalence locale (en 0) si les coefficients de F sont analytiques dans un voisinage de 0, d'équivalence formelle si les coefficients sont des séries de Laurent formelles. Comme dans la théorie des équations différentielles, un « lemme du vecteur cyclique », valable sur un corps de base quelconque, implique que tout système (2.3.1) de rang n est équivalent à une équation d'ordre n ([Sau00a] dans le cas complexe, [DV02a] en général). On peut donc indifféremment parler d'équivalence (locale ou globale) entre systèmes ou équations.

2.5. **Modules aux q-différences.** Les solutions du système (2.3.1) sont les invariants de l'application $X \mapsto A^{-1}\sigma_q X$. C'est l'analogue multiplicatif de la caractérisation des solutions du système différentiel $\delta X = AX$ comme éléments du noyau d'une connexion $X \mapsto \delta X - AX$. Dans ce dernier cas, l'objet algébrique intrinsèque qui modélise la situation est le module à connexion ou le module différentiel associé. Nous sommes ainsi conduits à définir un *module aux q-différences* comme un couple (M, Φ) formé d'un K-espace vectoriel de dimension finie et d'un automorphisme σ_q-linéaire de M ; autrement dit, Φ vérifie le q-analogue de la relation de Leibniz :

$$\forall a \in K,\ x \in M,\ \Phi(ax) = \sigma_q(a)\Phi(x).$$

Alternativement, c'est un module à gauche de longueur finie sur l'anneau (non-commutatif) $\mathcal{D}_q = K\left\langle \sigma_q, \sigma_q^{-1} \right\rangle$ des opérateurs aux q-différences. Le système (2.3.1) est ainsi modélisé par le module (K^n, Φ_A), où $\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma_q X$ et tout module est de cette forme modulo le choix d'une base ; de plus, l'équivalence entre systèmes correspond à l'isomorphisme entre les modules aux q-différences associés. Par exemple, en partant de la matrice constante identité $A = I_n$, on obtient un *module banal*, c'est-à-dire un module (isomorphe à) (K^n, Φ) où Φ est définie par l'action de σ_q composante par composante.

2.6. **Prolongement méromorphe.** Un des buts de la théorie est la classification locale et globale des équations à coefficients rationnels. Dans le cas complexe, sous l'hypothèse $|q| \neq 1$, on peut remarquer que toute matrice F d'équivalence locale entre deux tels systèmes admet automatiquement un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ en vertu de l'équation fonctionnelle (2.4.1) :

$$F(qx) = A(x)F(x)\left(B(x)\right)^{-1},$$

qui permet, itérativement, d'agrandir le disque de définition de F. Ce phénomène de propagation de la méromorphie est caractéristique des équations aux q-différences complexes, mais aussi p-adiques, et est en contraste marqué avec la théorie des équations différentielles.

3. Classification et confluence des systèmes fuchsiens rationnels

Dans le §3, le nombre complexe q est de module > 1 et les a_i sont des fonctions rationnelles de la variable complexe x. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\lambda q^{\mathbb{Z}} = [\lambda; q]$ la q-spirale discrète $\{\lambda q^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Résolution et classification locale

Les seuls points invariants de l'automorphisme $x \mapsto qx$ sur la sphère de Riemann $\mathbf{S}$ sont 0 et ∞ et ils jouent un rôle symétrique. Nous aborderons donc l'étude locale en 0, celle en ∞ s'en déduisant par le changement de variable $w = 1/x$. La plupart des résultats locaux gardent un sens (et restent valides) pour des opérateurs et des équations à coefficients analytiques.

À l'opérateur aux q-différences P ou mieux, à l'équation correspondante

$$P.f(x) = a_0(x)f(q^n x) + a_1(x)f(q^{n-1}x) + \cdots + a_n(x)f(x) = 0,$$

on peut associer un *polygone de Newton en* 0, qui est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ de

$$\{(i,j) \mid i = 0, 1, \ldots, n,\ j \geqslant v_0(a_i)\}$$

où $v_0(a)$ désigne la valuation x-adique de a, c'est-à-dire son ordre d'annulation en 0. Ce polygone est invariant par équivalence locale. On peut ainsi définir le polygone de Newton d'un système, ou d'un module aux q-différences, ainsi que ses pentes : ce sont les pentes des segments finis qui bordent le convexe ci-dessus.

On parle de système ou de module *pur* lorsqu'il y a une seule pente et de système ou de module *fuchsien (en* 0*)* lorsqu'elle est de plus nulle. Les systèmes fuchsiens sont précisément ceux pour lesquels on peut supposer, à équivalence rationnelle près, que $A(0) \in GL_n(\mathbb{C})$[1]. C'est ici l'analogue des équations fuchsiennes de la théorie différentielle, dont les points singuliers sont *réguliers* [In56], [Was65] : à équivalence rationnelle près, un système différentiel $\delta X = AX$ supposé fuchsien en 0 serait tel que $A(0) \in M_n(\mathbb{C})$.

La théorie des équations aux q-différences suit alors assez fidèlement la théorie différentielle. En alternant des transformation de jauge constantes, qui permettent de se ramener au cas où $A(0)$ est triangulaire supérieure, et des « transformations de cisaillement » (*shearing transformations*), c'est-à-dire de transformation de jauge de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & & \\ & xI_{r_2} & \\ & & I_{r_3} \end{pmatrix}, \text{ où } r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N} \text{ et } r_1 + r_2 + r_3 = n,$$

on obtient un système non résonnant : cela signifie que le quotient de deux valeurs propres *distinctes* de $A(0)$ n'est pas une puissance entière de q (la condition analogue pour un système différentiel serait que la différence de deux valeurs propres distinctes ne soit pas un entier).

Dans les deux théories, les valeurs propres de $A(0)$ jouent un rôle spécial et sont appelées *exposants* du système. Les exposants (en fait, leurs classes modulo $\mathbb{Z}$ dans le cas différentiel, modulo $q^{\mathbb{Z}}$ dans notre cas) sont des invariants importants. Plus généralement, on peut attacher à chaque pente du polygone de Newton une *équation caractéristique* : il s'agit d'une équation polynomiale dont les racines sont les *exposants attachés à cette pente*. Elles servent en général

[1]On peut également caractériser de tels systèmes par la croissance modérée de solutions locales, ou par l'existence, dans le module (M, Φ) associé, d'un réseau stable par Φ et Φ^{-1}.

à produire des solutions formelles (comme au §4). Sans surprise, dans le cas fuchsien, ces solutions formelles convergent.

Exemple 3.1.

(1) L'équation différentielle (1.0.1) est fuchsienne en 0, d'exposant 0 et l'équation aux q-différences (1.0.2) est fuchsienne en 0 d'exposant 1 : elles sont en fait *régulières* en 0. Il en est de même dans l'exemple 2.1.

(2) Dans l'exemple 2.2, l'équation différentielle est fuchsienne en 0, d'exposants 0 et $1-\gamma$ et l'équation aux q-différences est fuchsienne en 0 d'exposants 1 et q/c. On peut de même (par le changement de variables $z = 1/x$) constater qu'elles sont fuchsiennes à l'infini (exposants respectifs : α, β et a, b).

Lemme 3.2. [Sau00a] *Pour un système fuchsien $\sigma_q X = AX$ non résonnant, il existe une unique transformation de jauge formelle tangente à l'identité :*

$$F(x) = I_n + xF_1 + \cdots ,$$

telle que $(\sigma_q F)^{-1} AF = A(0)$. De plus elle est convergente (donc prolongeable en une matrice méromorphe sur $\mathbb{C}$).

Les coefficients de la matrice $F(x)$ sont construits inductivement à partir de la relation $AF = (\sigma_q F)A(0)$. Il s'ensuit qu'une matrice Y de rang maximal vérifie l'équation $\sigma_q Y = A(0)Y$ si et seulement si la matrice $X = FY$ est solution du système $\sigma_q X = AX$. Ce lemme permet donc de ramener la résolution des systèmes fuchsiens à celle des systèmes à coefficients constants. En fait, associé aux considérations précédentes, il permet facilement de démontrer que, comme pour les équations différentielles, *tout système fuchsien est localement équivalent à un système à coefficients constants.*

Nous nous sommes donc finalement ramenés à résoudre un système aux q-differences $\sigma_q X = AX$ *à coefficients constants*, *i.e.* tel que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour ce faire, écrivons $A = DU$ la décomposition de Dunford multiplicative de A, autrement dit, D est semi-simple, U est unipotente et elles commutent. Il suffit, pour conclure, de construire deux matrices $e_{q,D}$ et $e_{q,U}$ qui commutent entre elles et avec D et U et telles que $\sigma_q e_{q,D} = De_{q,D}$, $\sigma_q e_{q,U} = Ue_{q,U}$: en fait $e_{q,A} = e_{q,D}e_{q,U}$ est alors une solution de $\sigma_q X = AX$. Le lecteur est invité à essayer les cas les plus simples dans chaque classe :

(1) Si $A = D$ et $n = 1$, A est une constante $c \in \mathbb{C}^*$ et l'on veut savoir résoudre l'équation $\sigma_q f = cf$.

(2) Si $A = U$ est unipotente de rang 2, on peut prendre par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'on voit qu'il faut savoir résoudre l'équation $\sigma_q f = f + 1$.

Cela peut se faire à l'aide de la fonction thêta de Jacobi :

$$\theta_q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{-n(n-1)/2} x^n.$$

La fonction θ_q est donc holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Elle vérifie de plus l'équation fonctionnelle :

$$\theta_q(qx) = qx\theta_q(x).$$

Cette équation, qui s'écrit $\sigma_q f = qxf$, n'est pas fuchsienne : elle a une seule pente, qui vaut 1. On peut donc considérer θ_q comme l'un des q-analogues de l'exponentielle, car celle-ci vérifie l'équation différentielle $\delta y = xy$ qui n'est pas fuchsienne en 0, où elle a pour seule pente 1. L'algorithme est maintenant le suivant :

(1) Soit $D = P\ \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n)P^{-1}$. Pour chaque exposant c_i, c'est-à-dire chaque valeur propre de A, l'équation $\sigma_q f = c_i f$ est fuchsienne, d'exposant c_i. Elle admet pour solution non triviale le « q-caractère »

$$e_{q,c_i}(x) = \frac{\theta_q(-x)}{\theta_q(-c_i^{-1}x)}.$$

Son analogue différentiel est la solution x^γ de l'équation différentielle $\delta f = \gamma f$ (fuchsienne d'exposant γ) : la différence essentielle étant que cette dernière est en général ramifiée. On obtient une solution de $\sigma_q X = DX$ en posant $e_{q,D} = P\ \mathrm{diag}(e_{q,c_1}, \cdots, e_{q,c_n})P^{-1}$. On vérifie aisément que cette matrice ne dépend pas du choix de la diagonalisation de D.

(2) Soit $U = I_n + N$ (donc N est une matrice nilpotente). On pose $e_{q,U} = U^{l_q} = \exp(l_q \log(I_n + N))$ (qui est donc un polynôme en N et en U), où l_q est solution de $\sigma_q f = f + 1$. Nous prendrons pour l_q le « q-logarithme » :

$$l_q(x) = -x\frac{\theta_q'(-x)}{\theta_q(-x)}.$$

Son analogue classique est la solution $\log\, x$ de l'équation différentielle $\delta f = 1$. Chacune des équations $\sigma_q f - f = 1$ et $\delta f = 1$ est une variante non homogène d'une équation linéaire d'ordre 2, fuchsienne, d'exposant double 1 (cas d'une équation aux q-différences) ou 0 (cas d'une équation différentielle).

Les premiers auteurs (Adams, Birkhoff, Carmichael...) utilisaient d'ailleurs pour q-caractères et q-logarithme des fonctions ramifiées et pouvaient résoudre le système à coefficients constants $\sigma_q X = AX$ en posant $X = x^{\log_q A}$, où $\log_q A$ est une matrice constante telle que $q^{\log_q A} = A$. Notre matrice $e_{q,A}$ n'est pas ramifiée, mais elle est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$: c'est cette propriété, et plus précisément le contrôle de son lieu singulier, qui nous permettra d'obtenir une bonne caractérisation du phénomène de confluence. Pour conclure, revenons au cas général :

Théorème 3.3. *Tout système $\sigma_q X = AX$ fuchsien en 0 admet une solution $X = Me_{q,A^{(0)}}$ méromorphe sur $\mathbb{C}^*$. En particulier, la matrice M est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $A^{(0)}$ est une matrice constante non résonnante.*

Si de plus le système $\sigma_q X = AX$ est non résonnant, il y a un choix canonique de X caractérisé par $A^{(0)} = A(0)$ et $M(0) = I_n$.

Appelons singularités de la solution fondamentale X les pôles de X et de ceux de son inverse X^{-1}. En vertu de la formule du triple produit de Jacobi :

$$\theta_q(x) = (q^{-1};q^{-1})_\infty(-x;q^{-1})_\infty(-\frac{q^{-1}}{x};q^{-1})_\infty,$$

où on a posé $(a;q^{-1})_\infty = \prod_{n\geqslant 0}(1-q^{-n}a)$, tous les zéros de θ_q sont des zéros simples et sont situés sur la spirale discrète $[-1;q]$. On en déduit aisément les zéros et les pôles de $e_{q,c}$ ainsi que les pôles de l_q. Les singularités de $e_{q,A^{(0)}}$ s'organisent en q-spirales discrètes $[c;q]$ (pour chaque exposant c) plus, si $A^{(0)}$ n'est pas semi-simple, la q-spirale discrète $[1;q]$. Les singularités de M s'organisent en demi-q-spirales discrètes $aq^{\mathbb{N}}$ causées par les singularités de A, en vertu de l'équation fonctionnelle

$$\sigma_q M = \sigma_q(Me_{q,A^{(0)}}e_{q,A^{(0)}}^{-1}) = AM\left(A^{(0)}\right)^{-1}.$$

Une solution (matricielle) fondamentale X ayant ainsi été obtenue, les solutions (vectorielles) méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ sont alors toutes de la forme XV, où V est un vecteur méromorphe q-constant, c'est-à-dire à coefficients dans $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$, d'après l'exemple 2.1. Il ne serait pas difficile d'exploiter ces solutions locales pour classifier les systèmes fuchsiens, mais une description plus intrinsèque est possible.

Rappelons que, dans le cas des équations différentielles, la classification locale des systèmes fuchsiens en 0 (par exemple) est totalement spécifiée par la matrice de monodromie d'une solution fondamentale lors d'un prolongement analytique le long d'un petit lacet entourant la singularité 0. La matrice de monodromie se calcule d'ailleurs à partir de $A(0)$. Génériquement (si $A(0)$ est semi-simple) les exposants forment un système complet d'invariants locaux. Dans tous les cas, l'objet géométrique sous-jacent est le germe $(\mathbb{C}^*, 0)$: ce sont les représentations de son groupe fondamental qui interviennent.

Pour les q-différences, une telle description géométrique est encore possible. Remarquons d'abord que tout système est localement équivalent à un système à coefficients constants (c'est le contenu du lemme 3.2). Pour une matrice constante $A \in GL_n(\mathbb{C})$, le système (2.3.1) peut s'interpréter comme définissant une section équivariante du fibré vectoriel trivial de rang n sur $\mathbb{C}^*$. Précisément, en quotientant $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n$ par la relation d'équivalence engendrée par les relations $(x, X) \sim (qx, AX)$, on construit un fibré vectoriel holomorphe F_A sur la courbe elliptique $\mathbf{E}_q$.

Théorème 3.4. *On obtient ainsi une bijection entre les classes d'équivalence locale de systèmes rationnels fuchsiens en* 0 *et les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes plats sur* $\mathbf{E}_q$.

Remarque 3.5. La correspondance de Weil [W38] dit que ces dernières sont en bijection avec les classes de représentations du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{E}_q)$, mais il faut prendre garde que l'équivalence entre représentations considérée ici n'est pas la similitude à coefficients constants. On peut démontrer que la bijection ci-dessus provient en fait d'une équivalence entre catégories tannakiennes.

Celle-ci fournit une interprétation géométrique limpide de la théorie de Galois locale des équations fuchsiennes, avec une notion de groupoïde de monodromie et un théorème de densité de type Schlesinger [Sau02c]. Cette interprétation peut d'ailleurs être poursuivie dans le cas global (cf. *infra* la remarque 3.9).

Confluence des solutions locales

Nous voudrions donner un sens à l'idée que, « lorsque $q \to 1$, la q-dérivation $\delta_q = \frac{\sigma_q - 1}{q-1}$ tend vers la dérivation $\delta = x\, \frac{d}{dx}$ ». Cette idée a été la source, depuis Heine, de nombreuses q-analogies. Nous considérerons donc une famille de systèmes

$$\sigma_q X = A_q X,$$

où les coefficients de A_q dépendent de q. Pour respecter l'analogie, on peut réécrire ces systèmes à l'aide de l'opérateur δ_q :

$$\delta_q X = B_q X, \text{ avec } B_q = \frac{A_q - I_n}{q-1},$$

ce qui nous conduit à supposer que B_q tend vers la matrice $\widetilde{B}$ définissant le système différentiel

$$x\frac{d}{dx}X = \widetilde{B}X.$$

Si l'on suppose ce dernier fuchsien non résonnant en 0 (au sens expliqué précédemment), il en est de même de A_q pour q assez proche de 1. Il y a alors une solution canonique $X_q = M_q e_{q,A_q(0)}$ du système (2.3.1) et une solution canonique $\widetilde{X} = \widetilde{M}(-x)^{\widetilde{B}(0)}$ du système différentiel, cette dernière étant fournie par la théorie de Fuchs-Frobenius[2].

Lorsque q varie, le comportement numérique des solutions est « chaotique » au voisinage de leurs lieux singuliers. Pour assurer la convergence de X_q vers $\widetilde{X}$ sur un domaine raisonnable lorsque q tend vers 1, nous nous laisserons donc guider par la géométrie des singularités. La convergence de B_q entraîne que les exposants de A_q tendent vers 1. Nous supposerons que q tend vers 1 le long d'une q_0-spirale continue

$$q_0^{\mathbb{R}} = e^{-2\imath\pi\tau_0\mathbb{R}}, \text{ où } q_0 = e^{-2\imath\pi\tau_0},\ Im(\tau_0) > 0\ ;$$

autrement dit, $q = e^{-2\imath\pi\tau}$ et $\tau = \tau_0\varepsilon$, $\varepsilon \to 0^+$. Ainsi les lieux singuliers des $e_{q,A_q(0)}$ se condensent en $q_0^{\mathbb{R}}$. Nous supposerons de plus que les singularités de A_q (et donc de B_q) tendent vers les pôles $x_1, x_2, \ldots$ de $\widetilde{B}$, de sorte que les lieux singuliers des M_q se condensent en des demi-spirales continues $x_i q_0^{\mathbb{R}^+}$. Soit

$$U_0 = \mathbb{C}^* \setminus \left(\bigcup x_i q_0^{\mathbb{R}^+}\right) \setminus q_0^{\mathbb{R}}$$

l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{C}^*$ de la réunion de toutes ces demi-spirales et spirales continues.

---

[2]La détermination de $\log(-x)$ utilisée ici est celle qui s'annule en -1 et dont la coupure est la spirale continue $q_0^{\mathbb{R}}$ introduite plus bas.

Théorème 3.6. [Sau00a] *On suppose que $B_q \to \widetilde{B}$ uniformément sur tout compact de U_0. On suppose, de plus, que « la structure de Jordan en 0 varie continûment », autrement dit, qu'une matrice de passage de $B_q(0)$ à sa forme de Jordan converge vers une matrice de passage de $\widetilde{B}(0)$ à sa forme de Jordan. Alors la solution canonique X_q converge vers $\widetilde{X}$ uniformément sur tout compact de U_0.*

Pour le prouver, on étudie séparément les composantes M_q et $e_{q,A_q(0)}$ de la solution canonique X_q. La première est solution de l'équation aux q-différences

$$\sigma_q M_q = A_q M_q \left(A_q(0)\right)^{-1},$$

avec condition initiale $M_q(0) = I_n$. C'est essentiellement la méthode d'Euler d'intégration numérique d'une équation différentielle (ici, avec pas géométrique) qui garantit sa convergence vers la solution $\widetilde{M}$. Pour la deuxième composante, on utilise des formules asymptotiques :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} e_{q,q^\gamma}(x) = (-x)^\gamma, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} (q-1)l_q(x) = \log(-x).$$

Ces formules se prouvent en étudiant le comportement de θ_q lorsque $q \to 1$, à l'aide de l'équation fonctionnelle satisfaite par

$$\Theta(\tau, z) = \theta_{e^{-2\imath\pi\tau}}(e^{2\imath\pi z}),$$

qui relie $\Theta(-1/\tau, z/\tau)$ à $\Theta(\tau, z)$ [Lan87], [Mum82] :

$$\Theta(\tau, z) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(z-(\tau+1)/2)^2}} \Theta(-1/\tau, z/\tau).$$

Sous les hypothèses du théorème, on en tire la convergence de $e_{q,A_q(0)}$ vers $(-x)^{\widetilde{B}(0)}$. L'importance de la géométrie des singularités (les q-spirales discrètes de singularités se condensent en des coupures en forme de q_0-spirales continues) justifie le terme de « confluence » appliqué à cette situation.

Exemple 3.7.
Tous les exemples précédents rentrent dans le cadre de ce théorème, qui permet ainsi d'expliquer et de préciser de nombreuses formules « bien connues ». L'exemple de la série binomiale (*cf.* (1.0.1) et (1.0.2)) est traité dans [Sau00b], l'exemple 2.2 est détaillé dans [Sau00a]. □

Classification globale

Avant d'énoncer le résultat général, revenons à l'exemple 2.2 des séries hypergéométriques et étudions le d'un point de vue global, c'est-à-dire sur la sphère de Riemann **S**. On constate que l'équation hypergéométrique de Gauss

$$\delta^2 y - \widetilde{\lambda}\delta y + \widetilde{\mu} y = 0, \text{ avec } \begin{cases} \widetilde{\lambda} = \dfrac{(\alpha+\beta)x + (1-\gamma)}{1-x} \\ \widetilde{\mu} = \dfrac{\alpha\beta x}{1-x}. \end{cases}$$

y admet pour seules singularités 0, 1 et ∞ et que ces singularités sont régulières. La méthode de Frobenius en fournit des systèmes fondamentaux de solutions en 0 et en ∞ :

$$\begin{cases} {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) \\ x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/x)^{\alpha}\ {}_2F_1(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1;1/x) \\ (1/x)^{\beta}\ {}_2F_1(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;1/x) \end{cases}$$

On peut de même en donner une base de solutions explicites en 1, mais nous n'en aurons pas l'usage. Le prolongement analytique d'un système fondamental de solutions au voisinage d'une singularité fournit encore un système fondamental de solutions et s'exprime donc à partir d'un autre système fondamental par une matrice de constantes : ce sont les fameuses *formules de connexion* de la théorie classique [In56], [Was65], [WW27]. Par exemple, on peut relier 0 à l'infini par l'une des matrices suivantes, selon que l'on reste dans le demi-plan de Poincaré ou dans son opposé :

$$\widetilde{P}^{+} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{i\pi(\alpha-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ e^{i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{i\pi(\beta-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \end{pmatrix} \tag{3.7.1}$$

$$\widetilde{P}^{-} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi(\alpha-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta)} \\ e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{-i\pi(\beta-\gamma+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha)} \end{pmatrix} \tag{3.7.2}$$

La matrice de monodromie en le pôle 1 est $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$: elle représente l'effet sur le système fondamental choisi du prolongement analytique le long d'un petit lacet simple autour de 1 [IKSY91], [Sau00a].

La correspondance de Riemann-Hilbert est née de la caractérisation par Riemann de l'équation hypergéométrique à partir de ses invariants locaux (les exposants) et des matrices de connexion [IKSY91]. En termes modernes, on reconnaît que l'objet classifiant est la *représentation de monodromie* : ceci est dû au fait que les matrices qui interviennent ci-dessus ne dépendent en fait que des classes d'homotopie des chemins le long desquels se fait le prolongement analytique. Ces chemins doivent éviter les singularités et l'on obtient ici une représentation du *groupe fondamental de la droite projective moins trois points* (donc d'un groupe libre à deux générateurs), objet célèbre dans de nombreux domaines ! Dans l'exemple ci-dessus, la classe du petit lacet simple autour de 1 a pour image (dans cette représentation) $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$. Nous allons tenter, suivant Birkhoff [Bir13], d'adapter cette démarche au cas des équations aux q-différences.

Supposons donc maintenant le système (2.3.1) fuchsien en 0 et en ∞ (ceci, relativement à la variable $w = 1/x$). On démontre qu'à équivalence rationnelle près, on peut supposer $A(0), A(\infty) \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut alors définir des solutions locales en 0 et en ∞ comme ci-dessus, respectivement méromorphes sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbf{S} \setminus \{0\}$ (sphère de Riemann privée de l'origine), soient $X^{(0)} = M^{(0)} e_{q,A^{(0)}}$ et $X^{(\infty)} = M^{(\infty)} e_{q,A^{(\infty)}}$. Ces solutions sont reliées par la *matrice de connexion de Birkhoff* :

$$P = \left(X^{(\infty)}\right)^{-1} X^{(0)},$$

qui est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ et σ_q-invariante. On peut donc la considérer comme une matrice (inversible) de fonctions elliptiques (« q-sigma periodic » dans la terminologie de Birkhoff). Elle joue ici le rôle des matrices de monodromie dans la théorie de Riemann-Hilbert, mais il faut prendre garde qu'elle n'est pas à coefficients complexes ! C'est l'une des difficultés et l'un des charmes de la théorie.

Reprenons l'exemple 2.2. Pour l'équation hypergéométrique basique

$$\sigma_q^2 f - \lambda \sigma_q f + \mu f = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{(a+b)x - (1 + c/q)}{abx - c/q}, \\ \mu = \dfrac{x-1}{abx - c/q}, \end{cases}$$

en se basant sur les formules de connexion de Barnes-Mellin-Watson (*voir* [GR90] p. 106), on calcule explicitement la matrice de Birkhoff [Sau00a] :

$$P = (D^{(\infty)})^{-1} M D^{(0)}, \tag{3.7.3}$$

où

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{q,q/c}(x) \end{pmatrix}, \; D^{(\infty)} = \begin{pmatrix} e_{q,a}(1/x) & 0 \\ 0 & e_{q,b}(1/x) \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} {}_2\Phi_1(\dfrac{c}{b}, a; c; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{bx}{cq}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} & {}_2\Phi_1(\dfrac{q}{b}, \dfrac{aq}{c}; \dfrac{q^2}{c}; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{bx}{q^2}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} \\ {}_2\Phi_1(\dfrac{c}{a}, b; c; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{ax}{cq}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} & {}_2\Phi_1(\dfrac{q}{a}, \dfrac{bq}{c}; \dfrac{q^2}{c}; q, q) \dfrac{\Theta_q\left(\frac{ax}{q^2}\right)}{\Theta_q\left(\frac{abx}{cq}\right)} \end{pmatrix}$$

De même que dans la théorie de Riemann une équation est caractérisée (à équivalence près) par la nature de ses singularités et sa représentation de monodromie, Birkhoff démontre que la donnée de la matrice de connexion P et des structures de Jordan du système en 0 et en ∞ (*i.e.* des structure de Jordan de $A^{(0)}$ et de $A^{(\infty)}$), fournit un système complet d'invariants, et il résout le problème inverse. Une version précisée de ce théorème est donnée dans [Sau00a]. Nous en donnerons plutôt ici une version intrinsèque, dans l'esprit du théorème 3.4. Remarquons que les composantes $e_{q,A^{(0)}}$ et $e_{q,A^{(\infty)}}$ des solutions locales fournissent des repères (méromorphes) pour les fibrés holomorphes plats $F^{(0)}$ et $F^{(\infty)}$ introduits précédemment (théorème 3.4). Par ailleurs, la q-invariance de

$$P = \left(e_{q,A^{(\infty)}}\right)^{-1} M e_{q,A^{(0)}} \quad \text{où l'on a posé : } M = \left(M^{(\infty)}\right)^{-1} M^{(0)},$$

dit que la composante centrale M de la matrice de connexion P peut s'interpréter comme un isomorphisme méromorphe $F^{(0)} \to F^{(\infty)}$ entre fibrés holomorphes.

Théorème 3.8. *On obtient ainsi une bijection entre les classes d'équivalence globale de systèmes rationnels fuchsiens sur* $\mathbf{S}$ *et les classes d'isomorphie de triplets* $(F^{(0)}, \varphi, F^{(\infty)})$, *où* $F^{(0)}$ *et* $F^{(\infty)}$ *sont des fibrés vectoriels holomorphes plats sur* $\mathbf{E}_q$ *et* $\varphi : F^{(0)} \to F^{(\infty)}$ *est un isomorphisme méromorphe entre ces fibrés. Un isomorphisme entre deux tels triplets* $(F^{(0)}, \varphi, F^{(\infty)})$ *et* $(G^{(0)}, \psi, G^{(\infty)})$ *est un couple* $(u^{(0)}, u^{(\infty)})$ *d'isomorphismes (holomorphes)* $u^{(0)} : F^{(0)} \to G^{(0)}$ *et* $u^{(\infty)} : F^{(\infty)} \to G^{(\infty)}$ *qui forment un carré commutatif avec* φ *et* ψ, *i.e.* $\psi \circ u^{(0)} = u^{(\infty)} \circ \varphi$.

L'avantage de cette description est qu'elle est compatible au produit tensoriel et admet une interprétation galoisienne agréable [Sau02c], alors que la matrice de connexion ne commute pas au produit tensoriel. Ceci vient du fait qu'il est impossible de définir une famille de q-caractères $e_{q,c}$ méromorphes tels que $e_{q,cd} = e_{q,c}e_{q,d}$. Ce problème avait été surmonté par van der Put et Singer dans [vdPS97] à l'aide de solutions symboliques, mais celles-ci ne permettent ni une interprétation géométrique claire, ni de décrire la confluence.

Remarque 3.9. De la description ci-dessus, on peut tirer une description du groupe de Galois et même, sous certaines hypothèses, de l'analogue d'un groupe de monodromie Zariski-dense dans le groupe de Galois [Sau02c]. Ceci est dans la droite ligne de la théorie de Galois différentielle classique, que l'on trouvera, par exemple, dans [vdPS03].

Confluence de la matrice de connexion

Nous reprenons ici les hypothèses du théorème 3.6, que nous supposons symétriquement vérifiées en ∞ (après changement de variable $w = 1/x$). Autrement dit, nous supposons que les singularités de B_q tendent vers les pôles $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de $\widetilde{B}$, que $B_q \to \widetilde{B}$ uniformément sur tout compact de l'ouvert

$$U = U_0 \cap U_\infty = \mathbb{C}^* \smallsetminus \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant r} x_i q_0^{\mathbb{R}}, \text{ où l'on a posé } x_0 = 1,$$

et que les structures de Jordan de $B_q(0)$ et $B_q(\infty)$ « varient continûment » (cf. le théorème 3.6). On supposera de plus que les spirales continues $x_i q_0^{\mathbb{R}}$ sont deux à deux disjointes, ce qui est vrai pour un choix générique de q_0. Les solutions canoniques $X_q^{(0)}$ et $X_q^{(\infty)}$ du système $\sigma_q X = A_q X$ convergent respectivement vers les solutions $\widetilde{X}^{(0)}$ et $\widetilde{X}^{(\infty)}$ du système différentiel de matrice $\widetilde{B}$ sur les ouverts U_0 et U_∞. La matrice de connexion

$$P_q = \left(X_q^{(\infty)}\right)^{-1} X_q^{(0)}$$

converge donc, sur l'ouvert U, vers la matrice

$$\widetilde{P} = \left(\widetilde{X}^{(\infty)}\right)^{-1} \widetilde{X}^{(0)}.$$

Cette dernière relie deux solutions fondamentales d'un même système différentiel, elle est donc constante sur chaque composante connexe de l'ouvert U. De la définition de U on déduit qu'il admet $r+1$ composantes connexes U_i. Nous les indexons de manière à ce que la frontière de U_i soit formée de $x_i q_0^{\mathbb{R}}$ et de $x_{i+1} q_0^{\mathbb{R}}$. Comme indiqué ci-dessus, $\widetilde{P}$ est constante sur U_i, de valeur $P_i \in GL_n(\mathbb{C})$: P_i est une matrice de connexion au sens de la théorie de Riemann.

Théorème 3.10. [Sau00a] *La transformation de monodromie locale du système différentiel fuchsien de matrice $\widetilde{B}$ en le point singulier régulier x_i $(i = 1, \ldots, r)$, exprimée dans la base $X^{(0)}$, admet pour matrice $(P_i)^{-1} P_{i-1}$.*

On trouvera dans [Sau00a] des exemples traités complètement, dont celui de la confluence des fonctions hypergéométriques basiques de Heine vers les fonctions hypergéométriques classiques. On y prouve par exemple que la matrice de connexion que nous avons calculée en (3.7.3) converge vers la matrice de monodromie $(\widetilde{P}^{+})^{-1}\widetilde{P}^{-}$ décrite à l'aide de (3.7.1) et (3.7.2).

Le théorème 3.10 admet une interprétation galoisienne [Sau02c]. Il fournit une variante explicite d'un théorème beaucoup plus général de déformation du groupe de Galois obtenu par Yves André [And01a],[And02a].

Classification locale des équations irrégulières

Nous considérons ici une équation

$$P.f(x) = a_0(x)f(q^n x) + a_1(x)f(q^{n-1}x) + \cdots + a_n(x)f(x) = 0$$

à coefficients analytiques, que nous ne supposons plus fuchsienne. Nous supposerons cependant, pour simplifier, que toutes les pentes de son polygone de Newton sont entières. On trouvera alors dans [Zha99] et dans [MZ00] la preuve de l'existence d'une *factorisation analytique de l'opérateur P en facteurs de degré* 1. Ce résultat est étonnant, comparé à ce que l'on sait des opérateurs différentiels : pour ceux-ci, on ne peut espérer en général qu'une factorisation formelle. Ce théorème de factorisation n'est autre qu'une version moderne et précisée du « canonical system » mentionné par Birkhoff.

Une variante abélienne de ce théorème dit que le module aux q-différences correspondant admet une filtration canonique à quotients purs de pentes décroissantes ([Sau02a] et [Sau02b]). On montre même que le gradué associé est l'unique invariant formel. Ces résultats sont d'ailleurs valables sans supposer les pentes entières. La classification des sommes directes de modules purs est aisée à partir de ce que nous avons vu sur les modules fuchsiens : on retrouve ainsi la classification formelle obtenue par Praagman ([Pr83], [vdPS97]). La détermination des classes analytiques isoformelles revient alors à la détermination des classes de modules filtrés à gradué fixé.

Concrètement, un module M de gradué associé :

$$gr(M) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k,$$

(M_i est pur de rang r_i, de pente μ_i) peut être décrit par un système dont la matrice A est *triangulaire supérieure par blocs*. Notons $A_1, \ldots, A_k$ ses blocs diagonaux. La matrice A_i est de rang r_i et le système de matrice A_i est associé au module pur M_i. Comme nous avons supposé les pentes entières, on peut même exiger que A_i soit de la forme $x^{\mu_i} \times$ une matrice de $GL_{r_i}(\mathbb{C})$. Avec ces notations, un isomorphisme respectant la graduation de M vers un module M' (associé à la matrice A') est donné par une matrice F telle que $(\sigma_q F)\, A = A'F$, et, de plus, triangulaire supérieure par blocs et dont les blocs diagonaux sont $I_{r_1}, \dots, I_{r_k}$.

Exemple 3.11.
Le module à deux pentes correspondant à la matrice d'équation $A_u(x) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & x \end{pmatrix}$ est formellement isomorphe à son gradué, autrement dit, il existe une transformation de jauge formelle $F_u(x)$ telle que $F_u(qx)A_u(x) = A_0(x)F_u(x)$. Si l'on exige de plus que l'isomorphisme soit compatible à la graduation, c'est-à-dire que F_u soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \widehat{y}_u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il y a même unicité de la série formelle $\widehat{y}_u$, qui doit alors satisfaire l'équation fonctionnelle $\widehat{y}_u(x) = u(x) + x\widehat{y}_u(qx)$. On vérifie que deux telles matrices A_u et A_v sont analytiquement isomorphes si et seulement si $\widehat{y}_u - \widehat{y}_v$ est convergente. Par exemple, $\widehat{y}_1$ n'est autre que la série de Tschakaloff citée dans l'introduction, qui diverge, de sorte que A_1 n'est pas isomorphe à A_0. Nous reverrons cette série au paragraphe 4. □

En vue de définir les « essential transcendental invariants » demandés par Birkhoff, on est donc conduit, comme dans la théorie des équations différentielles, à étudier les moyens de sommer de telles séries divergentes : c'est l'objet du paragraphe 4.

4. Sommabilité des solutions formelles d'équations aux q-différences et classification locale des systèmes irréguliers

Dans ce paragraphe, on notera $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ la surface de Riemann du logarithme, log *la détermination principale de celui-ci, et $\log_q x = \frac{\log x}{\log q}$ pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$, où* $\log q$ *est fixé une fois pour toutes (comme précédemment, on suppose $|q| > 1$). On notera $q^\alpha = e^{\alpha \log q}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. La notation $[\lambda; q]$ du paragraphe 3 est étendue au cas où $\lambda \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$.*

Si $\mathbf{C}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ et $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, on notera $\mathcal{O}_{\mathbf{C},0}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathbf{C},0}$) l'ensemble des fonctions holomorphes (resp. méromorphes) dans un « disque ouvert de $\mathbf{C}$ centré en 0 » $\{x \in \mathbf{C} : |x| < R\}$.

Conformément à nos notations antérieures, pour $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous avons

$$(a; q^{-1})_m = \prod_{0 \le n \le m-1} (1 - aq^{-n}).$$

Quelques généralités

Dans la théorie des équations différentielles linéaires dans le champ complexe, il y a des séries formelles divergentes qui sont solutions formelles. L'exemple « modèle » est la (variante de) série d'Euler :

$$\widehat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} n!\, x^{n+1}. \tag{4.0.1}$$

Elle est solution formelle de l'équation :

$$x^2 y' - y = -x \tag{4.0.2}$$

Le type de divergence d'une solution formelle $\widehat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ d'une équation différentielle analytique (linéaire ou non) n'est pas du tout arbitraire ; il est Gevrey : $\mid a_n \mid \leq A^n n!^s$; $A > 0,\ s \geq 0$. (C'est un résultat de Maillet 1904, précisé plus tard par Ramis et Malgrange, [Ram93].)

Les équations linéaires aux q-différences admettent aussi des solutions séries formelles divergentes. Par exemple, la série de Tschakaloff (qui est, rappelons le, un q-analogue de la série d'Euler (4.0.1)) :

$$\widehat{y}(x) = \sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2} x^n \tag{4.0.3}$$

est de rayon de convergence nul (car $|q| > 1$), et elle vérifie formellement l'équation fonctionnelle

$$xy(qx) - y(x) = -1. \tag{4.0.4}$$

La suite $\{q^{n(n-1)/2}\}_{n\geq 0}$ augmente beaucoup plus vite qu'une suite Gevrey de la forme $\{A^n n!^s\}_{n\geq 0}$, quelles que soient les constantes positives A et s choisies. Autrement dit, la série $\widehat{y}$ définie par (4.0.3) n'appartient à aucun espace de séries entières Gevrey habituel. On est alors conduit à une nouvelle famille de séries entières divergentes, que, depuis [Béz92] et [Ram93], on a baptisée famille des *séries q-Gevrey.*

Définition 4.1. Étant donné $s \geq 0$, on dit qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est *q-Gevrey d'ordre s* si

$$\sum_{n\geq 0} a_n q^{-sn(n-1)/2} x^n$$

admet un rayon de convergence non nul. On notera $\mathbb{C}[[x]]_{q;s}$ l'ensemble des séries q-Gevrey d'ordre s.

Toute solution série formelle d'une équation aux q-différences linéaire analytique est q-Gevrey d'ordre s pour un s optimal rationnel convenable [Béz92]. La situation est ainsi analogue à celle du cas différentiel et il est alors raisonnable de se poser le problème de la (multi)sommabilité de ces solutions séries formelles puisqu'il est résolu dans le cas différentiel [Ram93]. Nous allons donner une idée de la (ou plutôt des) solution(s) de ce problème.

Dans le cas différentiel les théories de la k-sommabilité et plus généralement de la multisommabilité sont orchestrées par les transformations de Borel et Laplace.

Définition 4.2. Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$, on appelera *transformée de Borel formelle (d'ordre un) de* $\widehat{f}$ la série entière

$$\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!}\xi^{n-1}.$$

Exemple 4.3. Si $\widehat{y}$ est la série d'Euler, on a $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{y} = \dfrac{1}{1-\xi}$.

Si l'on veut une version q-analogue de la méthode de sommation de Borel-Laplace, il est raisonnable de commencer par la transformée de q-Borel formelle modèle suivante ([Ram93], p. 22).

Définition 4.4. Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on appelera *transformée de q-Borel formelle (d'ordre un) de* $\widehat{f}$ la série entière

$$\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n.$$

Exemple 4.5.

(1) Si $\widehat{y}$ est la série de Tschakaloff, on a $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{y} = \frac{1}{1-\xi}$.

(2) Si $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(q^{-1};q^{-1})_n}$, on a $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{f} = (\xi;q^{-1})_\infty$ et c'est le développement d'une fonction entière.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons d'abord examiner la sommabilité de la série (4.0.3), considérant cette dernière comme un q-analogue de la série d'Euler (4.0.1). En résolvant l'équation (4.0.4) par variation des constantes, nous arriverons à (au moins) deux intégrales de q-Laplace différentes. Cette « souplesse » est liée au caractère suivant de l'opérateur aux q-différences σ_q : le corps de ses constantes (i.e. des fonctions invariantes par l'opérateur de dilatation σ_q) , n'est pas $\mathbb{C}$, contrairement à ce qui se passe pour la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$. L'ambiguïté des processus de q-sommation est reliée à la taille des corps de q-constantes. Le choix judicieux esquissé à la fin de ce paragraphe nous a permis de réduire cette ambiguïté au corps des fonctions elliptiques de $\mathbf{E}_q$. (On comparera avec la démarche décrite au paragraphe précédent pour obtenir une matrice de Birkhoff à coefficients elliptiques.)

Nous passerons ensuite à l'étude de la sommabilité du carré $\widehat{y}^2$ de la série (4.0.3). Là un phénomène nouveau apparaît : $\widehat{y}^2$ n'a pas le même ordre de sommabilité que la série initiale $\widehat{y}$. On verra que ce défaut de sommabilité pour la multiplication est essentiellement dû au fait que $\frac{\sigma_q(fg)}{fg} = \frac{\sigma_q f}{f} \times \frac{\sigma_q g}{g}$, par opposition à l'égalité $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$ dans le cas de la dérivation usuelle $' = \frac{d}{dx}$. Nous terminerons ce paragraphe par une description très sommaire de la multisommabilité des solutions formelles d'une équation linéaire analytique aux q-différences.

Étude de l'équation $xy(qx) - y(x) = -1$

Comme nous venons de le remarquer, la formule de Leibniz est remplacée par la relation $(fg)(qx) = f(qx)g(qx)$. On va appliquer la méthode de la variation des constantes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et soit y_λ une solution de l'équation $xy(qx) - \lambda y(x) = 0$; si $y(x) = y_\lambda(x)C(x)$, l'équation (4.0.2) devient

$$\lambda C(qx) - C(x) = -\frac{1}{y_\lambda(x)}. \tag{4.5.1}$$

Nous allons regarder les cas suivants : $\lambda = 1$ et $y_1 = q^{-(\log_q x)(\log_q x - 1)/2}$ (*cf.* 4.6) ; $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$ et $y_\lambda = \frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$ (*cf.* 4.8).

4.6. **Cas où** $\lambda = 1$ **et** $y_1 = q^{-(\log_q x)(\log_q x-1)/2}$**.**
Si $t = \log_q x$ et $z(t) = C(q^t)$, l'équation (4.5.1) donne celle-ci :

$$z(t+1) - z(t) = -q^{-t(t-1)/2}, \tag{4.6.1}$$

qui se résout par transformation de Fourier. En effet, avec la relation $\mathcal{F}(z(t+1)) = e^\chi \mathcal{F}z$, on a

$$(e^\chi - 1)\mathcal{F}z(\chi) = -\mathcal{F}q^{-t(t-1)/2}(\chi),$$

ce qui correspond, par transformation de Fourier inverse, aux solutions z^α de (4.6.1) :

$$z^\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \, \log q}} \int_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha} \frac{q^{-\frac{1}{2}(\chi/\log q + 1/2)^2}}{1 - e^\chi} \, e^{\chi t} \, d\chi,$$

où $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. De là, les solutions suivantes de l'équation (4.0.2) :

$$y^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \, \log q}} \int_0^{\infty e^{i\alpha}} q^{-\frac{1}{2}(\log_q(\xi/x) + 1/2)^2} \, \varphi(\xi) \, \frac{d\xi}{\xi}, \tag{4.6.2}$$

où $\varphi = \frac{1}{1-\xi}$.

Théorème 4.7. *On suppose que q est un nombre réel > 1 et soit $\alpha \neq 0$* $\pmod{2\pi}$. *La fonction y^α définie dans $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ par (4.6.2) est l'*unique *solution analytique sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de (4.0.2) possédant la propriété suivante : il existe des constantes C, A, R, $\delta > 0$ telles que, quels que soient $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$ et $x \in \widetilde{\mathbb{C}}^*$ avec $|x| < R$, on ait :*

$$|y^\alpha(x) - \widehat{y}_n(x)| < CA^n q^{\frac{1}{2}[n^2 + (\arg_q(xe^{-i\varepsilon}))^2]} |x|^{n+1}, \tag{4.7.1}$$

$\widehat{y}_n$ désignant la somme partielle d'ordre n de $\widehat{y}$.

4.8. **Cas où** $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$ **et** $y_\lambda = \frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$**.**
Remplaçons y_λ par $\frac{1}{\theta_q(\lambda/x)}$ et substituons à $C(x)$ une série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n x^n$ dans l'équation (4.5.1) ; on a $C_n = \frac{\lambda^{-n} q^{-n(n+1)/2}}{1 - \lambda q^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui donne la solution suivante de l'équation (4.0.2) :

$$y^{[\lambda;q]}(x) = \sum_{\xi \in [\lambda;q]} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_q(\xi/x)}, \tag{4.8.1}$$

où $\varphi = \frac{1}{1-\xi}$.

Théorème 4.9. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus [1;q]$. *La fonction* $y^{[\lambda;q]}$ *définie dans* $\mathbb{C}^* \setminus [-\lambda;q]$ *par (4.8.1) est l'*unique *solution méromorphe sur* $\mathbb{C}^*$ *de (4.0.2) possédant les propriétés suivantes : il existe des constantes* C, A, $R > 0$ *telles que pour tout* $\rho > 0$, *on ait :*

$$|y^{[\lambda;q]}(x) - \widehat{y}_n(x)| < \frac{C}{\rho} A^n |q|^{n(n-1)/2} |x|^n \tag{4.9.1}$$

si $0 < |x| < R$, $\sup_{\xi \in [\lambda;q]} |1 + \frac{\xi}{x}| \geq \rho$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

En effet, si y' est une autre solution qui vérifie également la condition (4.9.1), alors la différence $y'(x) - y^{[\lambda;q]}$ sera de la forme $\frac{h(x)}{\theta_q(q^m\lambda/x)}$, avec h holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ ([RC02]). Avec l'équation $xy(qx) = y(x)$ et l'hypothèse que $\lambda \notin \mathbb{Z}$, on déduit que $h \equiv 0$.

Sommations de Borel-Laplace q-analogues

Rappelons que la transformée de Laplace de la fonction φ dans la direction $d = \mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$, d'argument α, issue de l'origine dans le plan complexe de la variable ξ, est (sous réserve d'existence) $\mathcal{L}^d\varphi(x) = \int_d e^{-\xi/x}\, \varphi(\xi)\, d\xi$.

La méthode classique de sommation de Borel-Laplace est décrite par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f} = \sum_{n \geq 1} a_n x^n & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}} & \varphi = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} \xi^{n-1} \\ & \xrightarrow{\mathcal{L}^\alpha} & f^\alpha = \int_0^{\infty e^{i\alpha}} e^{-\xi/x} \varphi(\xi)\, d\xi. \end{array} \tag{4.9.2}$$

Elle fonctionne pour la série formelle $\widehat{f}$ si celle-ci est Gevrey 1, ce qui équivaut à la convergence de φ, et si cette dernière se prolonge analytiquement le long de d avec une croissance convenable.

Si l'on appelle *transformée de q-Laplace de φ dans la direction d'argument* α l'intégrale de (4.6.2), le théorème 4.7 fait apparaître la version q-analogue suivante de la méthode de sommation exponentielle de Borel-Laplace (version continue) :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}} & \varphi = \sum_{n \geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n \\ & \xrightarrow{\mathcal{L}^\alpha_{q;1}} & f^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{\infty e^{i\alpha}} q^{-\frac{1}{2}(\log_q(\xi/x)+1/2)^2}\, \varphi(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi}. \end{array} \tag{4.9.3}$$

De manière analogue, le théorème 4.9 nous conduit au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}} & \varphi = \sum_{n \geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n \\ & \xrightarrow{\mathcal{L}^{[\lambda;q]}_{q;1}} & f^{[\lambda;q]} = \sum_{\xi \in [\lambda;q]} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_q(\xi/x)}, \end{array} \tag{4.9.4}$$

qui permet de définir une version q-analogue discrète de la sommation de Borel Laplace. Dans les diagrammes ci-dessus, la série φ doit être convergente (i.e. $\widehat{f}$ doit être q-Gevrey d'ordre 1) et le prolongement analytique de φ doit exister dans la direction d'argument α et admettre à l'infini au plus une croissance du type $\theta_{|q|}(A|\xi|)$ ou, de façon équivalente, du type $|\xi|^{\mu}e^{\frac{(\ln|\xi|)^2}{2\ln|q|}}$: c'est ce que l'on appelle une *croissance q-exponentielle d'ordre un*. S'il en est ainsi, on note $f^{[\lambda;q]} = S_{[\lambda;q]}\widehat{f}$. C'est cette q-somme de $\widehat{f}$ dans la q-direction $[\lambda;q]$ (que l'on peut identifier à un point de la courbe elliptique $\mathbf{E}_q$) que nous privilégierons.

Définition 4.10. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non borné et φ une fonction définie dans U. Soit $k > 0$. On dit que f admet à l'infini dans U *une croissance q-exponentielle d'ordre* k si, pour tout $\rho > 0$, il existe des constantes C, $A > 0$ telles que, pour tout $\xi \in U \setminus \{0\}$ vérifiant $\inf_{\chi\in\mathbb{C}\setminus U} |1 - \frac{\chi}{\xi}| \geq \rho$, on ait $|\varphi(\xi)| < C\theta_{|q|^{\frac{1}{k}}}(A|\xi|)$.

Exemple 4.11.

(1) Avec la formule de Cauchy, on vérifie qu'une fonction entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est à croissance q-exponentielle d'ordre un si et seulement si

$$|a_n| < CA^n|q|^{-n(n-1)/2},$$

où C, $A > 0$ sont des constantes [Ram92].

(2) En particulier, la fonction $\xi \mapsto \prod_{n\geq 0}(1 - q^{-n}\xi)$ est à croissance q-exponentielle d'ordre un, car son développement de Taylor à l'origine est $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(q^{-1};q^{-1})_n} q^{-n(n-1)/2}\xi^n$.

Soit maintenant $\Delta \in \mathbb{C}\{x\}[\sigma_q]$ un opérateur linéaire aux q-différences à coefficients convergents. Nous supposerons que le polygone de Newton de Δ n'a qu'une pente non nulle et que celle-ci vaut 1. Ceci équivaut (c'est un exercice facile à partir des définitions du paragraphe 3) à dire qu'il s'écrit :

$$\Delta = P(x\sigma_q) + x\widetilde{\Delta} \tag{4.11.1}$$

où $\widetilde{\Delta} \in \mathbb{C}\{x\}[x\sigma_q]$. L'équation $P(X) = 0$ peut alors être considérée comme *l'équation caractéristique de* Δ pour la pente 1.

On démontre [Zha02] que toute solution formelle de $\Delta\widehat{y} = c$ (avec c convergent) est sommable par la sommation de q-Borel-Laplace discrète $S_{[\lambda,q]}$ si λ n'est pas dans la q-orbite d'une racine de l'équation caractéristique. La somme y vérifie l'équation $\Delta y = c$. Dans la situation analogue pour un système, une solution fondamentale formelle (bien écrite...) $\widehat{F}$ est sommable dans les même conditions. Deux sommes $S_{[\lambda,q]}\widehat{F}$ et $S_{[\mu,q]}\widehat{F}$ se correspondent par multiplication à droite par une matrice elliptique $S_{\lambda,\mu}$ (qui, par analogie avec le cas différentiel [Ram93] mérite de s'appeler q-multiplicateur de Stokes). On notera que les images de λ et μ dans $\mathbf{E}_q$ doivent éviter un nombre fini de valeurs.

On peut appliquer ces résultats aux séries hypergéométriques confluentes basiques du type ${}_2\Phi_0$ [Zha02] :

$$
{}_2\Phi_0(a,b;-;q,x) \underset{def}{=} \sum_{n\geq 0} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n} q^{n(n-1)/2}(-x)^n \tag{4.11.2}
$$

Posons $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$ et $x=z/(1-q)$. La série divergente ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ converge formellement, lorsque $q\to 1$, vers la série hypergéométrique confluente classique ${}_2F_0(\alpha,\beta;-;-z)$, qui est également divergente.

Nous avons introduit, dans l'exemple 2.2, la série hypergéométrique basique ${}_2\Phi_1(a,b;c;q,x)$ et son équation fonctionnelle. Posons $z=cx$ et supposons que $c\to\infty$ dans (2.2.1). On obtient la série divergente ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ et l'équation (2.2.2) devient

$$
\big\{(c-abqx){\sigma_q}^2-(1-(a+b)qx)\sigma_q-qx\big\}{}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)=0. \tag{4.11.3}
$$

Soit φ la transformée de q-Borel de ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$. On a

$$
\varphi(\xi)={}_2\Phi_1(a,b;0;q,-\xi)\in\mathbb{C}\{\xi\}. \tag{4.11.4}
$$

La série ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ est sommable par l'opérateur $S_{[\lambda,q]}$ si $\lambda\in\mathbb{C}^*\setminus[-1;q]$.

En jouant sur des formules de connection et leurs q-analogues, on peut montrer que la $S_{[\lambda,q]}$ somme de la série divergente ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ tend, quand q tend vers 1 ($x=z/(1-q)$), vers la somme de Borel de la série divergente ${}_2F_0(\alpha,\beta;-;-z)$ dans la direction passant par λ. On en déduit que « le » multiplicateur de Stokes [Ram93] associé à ${}_2F_0(\alpha,\beta;-;-z)$ peut être interprété comme limite du q-multiplicateur de Stokes $S_{\lambda,\mu}$ associé à ${}_2\Phi_0(a,b;-;q,x)$ pourvu que les nombres complexes λ et μ, ni réels négatifs, ni nuls, ne soient pas sur une même direction issue de 0.

La série $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ n'est pas sommable d'un seul niveau !

Posons $\widehat{Y}=(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ et considérons sa transformée de q-Borel $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{Y}$. Par un calcul simple, on peut vérifier la formule suivante : si $\widehat{f}=\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ et $\widehat{g}\in\mathbb{C}[[x]]$, alors

$$
\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}(\widehat{f}\widehat{g})=\sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2}\xi^n\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{g}(q^{-n}\xi).
$$

Il s'ensuit que, si $P(\xi)=\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\widehat{Y}(\xi)\prod_{n\geq 0}(1-q^{-n}\xi)$, alors P est une fonction entière telle que

$$
P(q^m)=(-1)^m q^{m(3m+1)/2}(q^{-1};q^{-1})_m(q^{-1};q^{-1})_\infty. \tag{4.11.5}
$$

On en déduit que P admet à l'infini une croissance q-exponentielle d'ordre ≥ 3.

Remarque 4.12. La transformée de q-Borel de $(\sum_{n\geq 0} q^{n(n-1)/2}x^n)^2$ représente une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles (simples) dans $q^{\mathbb{N}}$ et ayant à l'infini dans $\mathbb{C}\setminus q^{\mathbb{N}}$ une croissance q-exponentielle d'ordre exactement deux.

Par conséquent, la série $(\widehat{y})^2$ n'est pas q-Borel-Laplace sommable comme $\widehat{y}$ elle-même. Ce phénomène est lié au fait suivant : l'équation de $(\widehat{y})^2$ contient deux pentes non triviales alors que (4.0.2) n'en a qu'une seule. En effet, avec l'équation (4.0.2), on peut écrire $\sigma_q \widehat{Y}$ – *qui n'est autre que* $(\sigma_q \widehat{y})^2$ – en termes de $\widehat{Y}$ et $\widehat{y}$; cela nous conduit à l'équation suivante :

$$\Delta \widehat{Y} = 1 + x, \quad \Delta = q^2 x^3 \sigma_q^2 - x(1+x)\sigma_q + 1. \tag{4.12.1}$$

Théorème 4.13. *Dans (4.12.1), on a* $\Delta = (x\sigma_q - 1)(x^2\sigma_q - 1)$ *et la série* $\widehat{Y}$ *est* $(1, 1/2)$*-sommable par le procédé suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n & \overset{\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}}{\longrightarrow} & \varphi = \sum_{n\geq 0} a_n q^{-n(n-1)/2} \xi^n \\ \overset{\mathcal{A}^*_{q;1,1/2}}{\longrightarrow} & f_1^* & \overset{\mathcal{L}^*_{q;1/2}}{\longrightarrow} \quad f^*_{(1,1/2)}. \end{array} \tag{4.13.1}$$

Ici, $\mathcal{A}_{q;1,1/2} = \mathcal{L}_{q^{\frac{1}{2}};1} = \mathcal{L}_{q;1/2}$ *et, si l'on suit la méthode (4.9.3) (resp. (4.9.4)), on pose* $* = \alpha$ *(resp.* $* = [\lambda; q^{\frac{1}{2}}]$*).*

Dans [MZ00] et [RSZ03], on démontre que toutes les séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique sont multisommables par des procédés généralisant celui évoqué ci-dessus. Ce résultat utilise de façon essentielle la factorisation analytique des opérateurs analytiques aux q-différences (cf. §3). L'utilisation du procédé de multisommation basé sur des transformations de Laplace q-analogues discrètes donne naissance à un phénomène de Stokes q-analogue (par comparaison entre des sommations dans des q-directions $[\lambda; q]$ différentes). Comme dans le cas de la sommation simple décrit ci-dessus, les multiplicateurs de Stokes ne sont plus constants mais à coefficients elliptiques, comme ceux de la matrice de Birkhoff (cf. §3). Ces multiplicateurs de Stokes sont, dans le cas irrégulier, parmi les « transcendental invariants » souhaités par Birkhoff (cf. §1). Inversement on peut reconstituer un germe d'équation aux q-différences linéaire analytique locale (à transformation de jauge près) à partir des invariants formels et des q-multiplicateurs de Stokes. C'est la solution du problème de Riemann-Hilbert q-analogue local dans le cas irrégulier qui répond à une autre question de Birkhoff (« inverse Riemann theory for the neighborhood of $x = \infty$ »). Pour passer au cas global irrégulier, il suffit d'ajouter aux invariants locaux en 0 et ∞ une généralisation convenable de la matrice de Birkhoff.

5. Équations aux q-différences arithmétiques

L'étude des équations aux q-différences complexes a déjà porté ses fruits, même si beaucoup reste à faire. Lorsque l'on pense aux développements récents de la théorie p-adique et arithmétique des équations différentielles, il est clair que, relativement aux équations aux q-différences, ces points de vue sont moins avancés.

La littérature sur les équations aux q-différences p-adiques est assez pauvre. Lorsque $|q| \neq 1$ les résultats existants (*cf.* les théorèmes d'indice dans [BB92] et la construction des solutions canoniques dans [Sau00b]) indiquent que la théorie est plutôt semblable à la théorie complexe. La grande différence avec le cas complexe est que, en vue de l'étude de la confluence, on est obligé de traiter le cas $|q| = 1$: en effet dans un corps ultramétrique la norme de q est 1 lorsque q est proche de 1. Le travail ne fait que commencer mais il est clair que la théorie p-adique des équations aux q-différences avec $|q| = 1$ est une parfaite déformation de la théorie des équations différentielles p-adiques, ce qui laisse entrevoir d'intéressantes implications géométriques [And02c].

Ici, nous parlerons plutôt du point de vue arithmétique et en particulier du problème « schwarzien » de la recherche des solutions algébriques d'équations fonctionnelles linéaires. Dans ce contexte on obtient plutôt des résultats de rationalité. En particulier, pour les équations hypergéométriques, on démontre :

Théorème 5.1. ([Gou36], Ch. III, et [DV02a], Appendix) *Soit $q \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non racine de l'unité. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'équation hypergéométrique basique (2.2.2) de paramètres a, b, c admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*

(2) *Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $c = q^\gamma$ et l'équation hypergéométrique classique (2.2.4) de paramètres α, β, γ admet une base de solutions dans $\mathbb{C}(x)$.*

(3) *Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$ et $c = q^\gamma$ et $|1-\gamma|$, $|\gamma-\alpha-\beta|$ et $|\alpha-\beta|$ sont les longueurs des côtés d'un triangle.*

Dans la suite q est un nombre algébrique non nul et il n'est pas une racine de l'unité : à notre connaissance, ce choix de q est déterminant pour tous les résultats qui se situent autour des problèmes d'algébricité et rationalité liés aux équations aux q-différences. En effet, cela implique qu'il existe une norme (archimédienne ou ultramétrique) telle que $|q| \neq 1$ et permet d'utiliser les fortes propriétés des équations aux q-différences, que nous avons vues plus haut. C'est, par exemple, le cas du théorème de Bézivin et Boutabaa :

Théorème 5.2. ([BB92]) *Soit $y(x)$ une série formelle à coefficients dans la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, solution d'un système d'equations $\mathcal{L}_1 y(x) = \mathcal{L}_2 y(x) = 0$, tel que $\mathcal{L}_i y(x) = 0$, pour $i = 1, 2$, est une équation aux q_i-différences linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(x)$, avec $q_1, q_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$ multiplicativement indépendants*[3]*. Alors $y(x)$ est la série de Taylor d'une fonction rationnelle.*

Dans [Béz91] Bézivin conjecture un énoncé pour les équations aux q-différences dans le sillage de la célèbre conjecture de Grothendieck sur l'algébricité des solutions des équations différentielles :

Conjecture 5.3. (Grothendieck) *L'équation différentielle*

$$a_\mu(x)\frac{d^\mu y}{dx^\mu}(x) + a_{\mu-1}(x)\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0,$$

[3]Cela signifie que pour tous $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $q_1^{m_1} = q_2^{m_2}$ on a $m_1 = m_2 = 0$, ce qui équivaut à : $q_1^{\mathbb{Z}} \cap q_2^{\mathbb{Z}} = 1$ et q_1, q_2 non racines de l'unité.

avec $a_i(x) \in \mathbb{Q}(x)$, admet un système complet des solutions algébriques, i.e. *dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}(x)$, si et seulement si sa réduction modulo p admet un système complet de solutions dans $\mathbb{F}_p(x)$, pour presque tout p.*

La conjecture peut être reformulée de plusieurs façons, en apparence plus générales que l'énoncé 5.3, mais toutes équivalentes entre elles. En particulier elle est équivalente à une caractérisation arithmétique de l'algèbre de Lie du groupe de Galois générique, conjecturée par N. Katz [Kat82]. De nombreux travaux sont consacrés à la conjecture de Grothendieck (*cf.* par exemple les travaux de T. Honda, D.V. et G.V. Chudnovsky, N. Katz, Y. André, J.-B. Bost), mais elle n'a été prouvée que dans des cas particuliers. Pour les équations aux q-différences le problème est plus simple et nous disposons d'un théorème qui peut être considéré comme un q-analogue de (5.3).

Considérons un nombre rationnel $q \neq 0, 1, -1$ et une équation aux q-différences

$$\mathcal{L}y = a_\mu(x)y(q^\mu x) + a_{\mu-1}(x)y(q^{\mu-1}x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0,\ a_0(x)a_\mu(x) \neq 0,$$

à coefficients $a_i(x)$ dans $\mathbb{Q}(x)$[4]. Pour presque tout nombre premier p, la réduction $\overline{q}$ de q modulo p est différente de zéro et engendre un sous-groupe cyclique de $\mathbb{F}_p$ d'ordre κ_p. Pour presque tout p, il existe donc un entier positif maximal ℓ_p et deux entiers g, h tels que $1 - q^{\kappa_p} = p^{\ell_p}\frac{g}{h}$ et que $p \not| gh$, et on peut considérer la réduction $\mathcal{L}_p y = 0$ de $\mathcal{L}y = 0$ modulo p^{ℓ_p}. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{P(q^i x)}, i \geqslant 1\right]$, avec $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, une sous-$\mathbb{Z}$-algèbre de $\mathbb{Q}(x)$, telle que $a_i(x) \in \mathcal{A}$ pour tout $i = 0, \ldots, \mu$. Le résultat est le suivant :

Théorème 5.4. [DV02a] *L'équation aux q-différences $\mathcal{L}y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathbb{Q}(x)$ si et seulement si, pour presque tout nombre premier p, l'équation $\mathcal{L}_p y = 0$ admet un système complet de solutions dans $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Le théorème 5.4 répond partiellement à la conjecture de Bézivin, qui prédit le même type de résultat en considérant la réduction modulo p à la place de la réduction modulo p^{ℓ_p}.

Les techniques employées dans la preuve du théorème 5.4 sont empruntées à la théorie des G-fonctions (*cf.* [And89] et [DGS94]). Le fait que l'on puisse prouver un tel énoncé dans le cas des q-différences, alors que le cas différentiel est ouvert, tient encore une fois aux étonnantes propriétés des équations aux q-différences lorsque $|q| \neq 1$ et au fait que q est un nombre rationnel non racine de l'unité : en effet, il existe toujours une norme sur $\mathbb{Q}$ telle que $|q| \neq 1$ et l'on peut alors construire une solution ayant un rayon de méromorphie infini pour cette norme.

Comme indiqué au §2, nous pouvons considérer un module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Phi)$ sur $\mathbb{Q}(x)$. Pour un choix convenable du polynôme $P(x)$, il existe

[4]Pour simplifier les notations (mais cela ne simplifie pas les démonstrations !) nous ne considérerons que des équations aux q-différences à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. En fait, les énoncés qui suivent sont prouvés dans [DV02a] pour des équations aux q-différences définies sur $\overline{\mathbb{Q}}(x)$.

un réseau $\widetilde{M}$ de M défini sur l'algèbre $\mathcal{A}$, stable par Φ. Le théorème 5.4 est équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème 5.5. *Le module aux q-différences $\mathcal{M} = (M, \Phi)$ est banal si et seulement si pour presque tout nombre premier p l'opérateur Φ^{κ_p} induit l'identité sur $\widetilde{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^{\ell_p}\mathbb{Z}$.*

Comme dans la théorie différentielle, nous pouvons attacher au module aux q-différences $\mathcal{M}$ un sous-groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ de $GL(M)$, qu'on appelle groupe de Galois (générique). Il s'agit du stabilisateur dans $GL(M)$ des modules aux q-différences qui sont sous-quotients de sommes finies de la forme $\oplus_{i,j}(M^{\otimes^i} \otimes_{\mathbb{Q}(x)} (M^*)^{\otimes^j})$, où M^* est le dual de M, munis de l'opérateur induit par Φ. Le choix du réseau $\widetilde{M}$ permet définir la réduction modulo p^{ℓ_p} de $Gal(\mathcal{M})$ et de donner encore un autre énoncé équivalent à 5.4 :

Théorème 5.6. *Le groupe algébrique $Gal(\mathcal{M})$ est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(M)$, dont la réduction modulo p^{ℓ_p} contient la réduction de Φ^{κ_p} modulo p^{ℓ_p} pour presque tout p.*

La nature multiplicative de l'opérateur Φ permet parfois de calculer tous les opérateurs Φ^n et, donc, de déterminer par voie arithmétique le groupe de Galois générique.

6. Références

[Ada29] C. R. Adams. On the linear ordinary q-difference equations. *Ann. Math. Ser. II*, 30(2), 195–205, 1929.

[And89] Y. André. *G-functions and geometry.* Aspects of Mathematics, E13. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[And00a] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2), 705–740, 2000.

[And00b] Y. André. Séries Gevrey de type arithmétique. II. Transcendance sans transcendance. *Annals of Mathematics. Second Series*, 151(2), 741–756, 2000.

[And01a] Y. André. Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 34, 685–739, 2001.

[And02a] Y. André. On Galois theory of q-deformations of differential equations. Prépublications de l'Institut de Mathématiques de Jussieu n° 333, 2002.

[And02b] Y. André. Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork. Prépublications n° 02-28 du Département de mathématiques et applications de l'École Normale Supérieure, Paris, 2002.

[And02c] Y. André. Monodromie des connexions p-adiques, et q-déformations. Ramification en Géométrie et Arithmétique, Conférence du 23 au 27 Septembre 2002, Institut Galilée, Université Paris 13, France. `http://zeus.math.univ-paris13.fr/~ramifica/notes.html`.

[BB92] J.-P. Bézivin et A. Boutabaa. Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences. *Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica*, 43(2), 125–140, 1992.

[Béz91] J.-P. Bézivin. Les suites q-récurrentes linéaires. *Compositio Mathematica*, 80(3), 285–307, 1991.

[Béz92] J.-P. Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Math.*, 43(2-3), 159–176, 1992.

[BG41] G. D. Birkhoff et P. E. Guenther. Note on a canonical form for the linear q-difference system. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 27, 218–222, 1941.

[Bir13] G. D. Birkhoff. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. *Proc. Amer. Acad.*, 49, 521–568, 1913.

[Bos01] J.-B. Bost. Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93), 161–221, 2001.

[Chy98] F. Chyzak. Fonctions holonomes en calcul formel, *Thèse de l'École Polytechnique*, INRIA.

[CC85a] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions. In *Number theory (New York, 1983–84)*, volume 1135 of *Lecture Notes in Math.*, pages 9–51. Springer, Berlin, 1985.

[CC85b] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations. In *Number theory (New York, 1983–84)*, volume 1135 of *Lecture Notes in Math.*, pages 52–100. Springer, Berlin, 1985.

[DGS94] B. Dwork, G. Gerotto, et F. J. Sullivan. *An introduction to G-functions*, volume 133 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[DV02a] L. Di Vizio. On the arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of the Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Invent. Math.*, 150(3), 517–578, 2002.

[DV02b] L. Di Vizio. Introduction to p-adic q-difference equations (weak Frobenius structure and transfer theorems). Prépublication du Laboratoire Émile Picard n° 250, `arXiv:math.NT/0211217`, 2002.

[GR90] G. Gasper et M. Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. With a foreword by Richard Askey.

[Gou36] E. Goursat *Leçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent*. Hermann, Paris, 1936.

[Hon81] T. Honda. Algebraic differential equations. In *Symposia Mathematica, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979)*, pages 169–204. Academic Press, London, 1981.

[In56] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1956.

[IKSY91] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura et M. Yoshida. *From Gauss to Painlevé*, Braunschweig, Vieweg, 1991.

[Kat82] N. M. Katz. A conjecture in the arithmetic theory of differential equations. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2), 203–239, 1982. et Bull. Soc. Math. France, 110(2), 347-348.

[Kat87] N. M. Katz. On the calculation of some differential Galois groups. *Invent. Math.*, 87(1), 13–61, 1987.

[Lan87] S. Lang. *Elliptic Functions*, Springer Verlag, 1987.

[MZ00] F. Marotte et C. Zhang. Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(6), 1859–1890, 2000.

[Mum82] D. Mumford. *Tata Lectures on Theta, I.* Birkhäuser, 1982.

[Pr83] C. Praagman. The formal classification of linear difference equations. *Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. ser. a,86.*

[vdPS97] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois Theory of Difference Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[vdPS03] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois Theory of Linear Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Ram92] J.-P. Ramis. About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 1(1), 53–94, 1992.

[Ram93] J.-P. Ramis. Séries divergentes et théories asymptotiques. *Bull. Soc. Math. France*, 121(Panoramas et Syntheses, suppl.), 74, 1993.

[RC02] J.-P. Ramis et C. Zhang. Développement asymptotique q-gevrey et fonction thêta de jacobi. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 335, 899–902, 2002.

[RSZ03] J.-P. Ramis, J. Sauloy, et C. Zhang. Classification analytique locale des équations aux q-différences linéaires et irrégulières, *en préparation*, 2003.

[Sau00a] J. Sauloy. Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie. *Annales de l'Institut Fourier*, 50(4), 1021–1071, 2000.

[Sau00b] J. Sauloy. Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes. Thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2000.

[Sau02a] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(1), 11–14, 2002.

[Sau02b] J. Sauloy. La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences. Prépublication du Laboratoire Émile Picard n° 249. `arXiv:math.QA/0210430`, 2002.

[Sau02c] J. Sauloy. Galois theory of fuchsian q-difference equations. Prépublication du Laboratoire Émile Picard n° 246. `arXiv:math.QA/0210221`, 2002, *À paraître aux Annales de l'École Normale Supérieure*.

[Was65] W. Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, 1965.

[W38] A. Weil. Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. pures et appl.*, t. 17, 47-87, 1938.

[WW27] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.

[Zha99] C. Zhang. Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(1), vi–vii, x, 227–261, 1999.

[Zha02] C. Zhang. Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples *in « Differential Equations and the Stokes Phenomenon »* , edited by B. L. J. Braaksma, G. K. Immink, M. van der Put and J. Top, World Scientific, 2002.

Les Mathématiques dans les nouveaux cursus universitaires (Licence, Master, Doctorat)

Débat organisé par la SMF et la SMAI le 18 janvier 2003

Le nouveau schéma licence – master – doctorat doit être mis en œuvre dans les contrats quadriennaux des universités, au fur et à mesure de leur renouvellement. Une première vague d'universités s'est trouvée concernée dès l'automne 2002. Les autres universités devront faire des propositions dans les deux années qui viennent et de nombreuses interrogations se sont exprimées sur la manière d'intégrer les enseignements de mathématiques dans ce nouveau schéma.

Pour favoriser un échange d'informations, la SMF et la SMAI ont organisé une rencontre qui s'est tenue le 18 janvier 2003 à l'Institut Henri Poincaré.

Cette rencontre a été divisée en trois parties dont chacune était introduite par une intervention très courte. Malgré leur brièveté, imposée pour laisser du temps au débat, ces introductions ont bien montré l'importance de la réflexion et des projets suscités par la réforme en cours. Leurs auteurs les développent dans le dossier qui suit. De plus, Jean-Pierre Korolitski, adjoint au Directeur de l'Enseignement Supérieur, a bien voulu participer à cette rencontre pour expliciter les rôles respectifs des universités et du ministère dans la mise en place du nouveau schéma.

– *Les nouveaux cursus et l'Europe*
Jean-Yves Mérindol, professeur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg et ancien président de cette université, a évoqué les motivations d'harmonisation européenne, tant anciennes que récentes. Martine Bellec, directrice de l'UFR de Mathématiques de la Décision, université de Paris-Dauphine, a présenté les travaux du groupe de travail européen « Tuning Educational Structures in Europe ». Christian Duhamel, maître de conférences à l'université de Paris-Sud, chargé de mission au ministère de l'éducation nationale (délégation aux relations internationales et à la coopération) a décrit un projet de master européen.

– *La mise en place des nouveaux cursus en France*
Pierre Arnoux, professeur à l'université de la Méditerranée, Marseille-Luminy, membre du Groupe d'Experts pour les Programmes Scolaires (GEPS) de mathématiques et de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), a présenté une synthèse des propositions faites par certaines universités et explicité les questions auxquelles les mathématiciens se trouvaient confrontés. Certains éléments de réponse ont été donnés par J.-P. Korolitski. Plusieurs collègues ont fait part de leur expérience et de leurs interrogations, que leurs universités fassent partie de la première vague

de contractualisation (Bordeaux, Grenoble, Poitiers, Limoges) ou des suivantes (Toulouse, Amiens, Paris 6, Paris 7, etc). On trouvera ci-dessous un compte-rendu plus détaillé de ce moment du débat.

– *Les mathématiques dans les formations professionnalisantes*
Monique Pontier (professeure à l'université Paul Sabatier de Toulouse) a commenté la partie consacrée aux *débouchés* du rapport du Comité National d'Evaluation sur *Les mathématiques orientées vers les applications.* Jean Fonlupt, professeur à l'université de Paris 6, a plaidé pour une intégration de la recherche opérationnelle dans les formations de mathématiques appliquées et Yves Escoufier, professeur à l'université de Montpellier 2, ancien président de cette université et membre de la CREM, a parlé de la place des mathématiques dans les licences professionnelles.

Nous sommes heureuses que cette rencontre ait attiré de nombreux collègues, en particulier des représentants de plusieurs universités de province et nous remercions tous ceux qui ont permis aux débats de se tenir dans de bonnes conditions, nous semble-t-il. Nous tenons en particulier à remercier Jean-Pierre Kahane qui a efficacement rythmé le déroulement de l'après-midi.

À la suite des questions posées par P. Arnoux, J.-P. Korolitski a exposé la position du ministère.

La volonté de mettre en œuvre la construction de l'espace européen de l'enseignement supérieur en Europe avait au départ deux objectifs :

– mobilité à l'intérieur de l'Europe ;
– attractivité des formations européennes pour l'extérieur de l'Europe.

Ce projet a rencontré un succès rapide auprès des différents gouvernements. En effet, il donne à chaque pays l'occasion de surmonter ses propres blocages : par exemple, en Allemagne et en Italie, le manque de niveaux intermédiaires dans le cursus universitaire. En ce qui concerne la France, divers avantages sont attendus de la réforme :

– une meilleure lisibilité des dispositifs diplômants actuellement trop dispersés : par exemple, entre bac+3 et bac+5, maîtrises diverses, MST, MIAGE, MSG, IUP, DEA, DESS, Magistère, etc.
– assurer la cohérence internationale entre les deux systèmes classes prépa–grandes écoles et universités ;
– flexibilité de l'offre de formation, articulation entre formation initiale et formation continue, enseignement présentiel et à distance (crédits, validation des acquis) ;
– visibilité des hautes qualifications (niveau master) et de la formation par la recherche ;
– une procédure alliant les initiatives locales et une régulation nationale : les établissements disposant d'une liberté de proposition pour les contenus des formations (comme pour les programmes de recherche) et le ministère évaluant la compétence des équipes (évaluation dont est chargée la mission scientifique, technique et pédagogique) mais aussi l'adéquation des contenus proposés avec les publics hétérogènes au niveau licence et avec les débouchés recherche ou

professionnels au niveau master. Cette évaluation garantit et même renforce la valeur nationale des diplômes.

En conclusion, il n'y a pas de « norme cachée » du ministère, les grands objectifs sont fixés, pas le détail des modalités. Les universités ne devraient pas se focaliser sur ce que va peut-être répondre le ministère, mais élaborer des projets dans le cadre très large de l'arrêté.

Nous poursuivons ce compte-rendu par une liste, très probablement incomplète, des questions abordées lors de ce débat :

– *Les débouchés pour les étudiants de mathématiques*
Benoît Chevallier (Bordeaux) évoque la désaffection pour les études scientifiques. Nos étudiants sont cependant ceux qui ont déjà les meilleurs taux d'insertion dans la vie professionnelle (95%, voir la revue de l'étudiant, novembre 2002). Il nous faut développer les débouchés professionnels (voir les interventions de M. Pontier, J. Fonlupt et Y. Escoufier) et faire la promotion de ces débouchés auprès des étudiants de DEUG et des conseillers d'orientation. Jean-Pierre Borel (Limoges) regrette qu'on n'ait pas repéré de débouchés professionnels au niveau Licence de mathématiques, car la perspective de cinq années d'études décourage beaucoup d'étudiants. Or le problème actuel est d'attirer les étudiants vers les DEUG scientifiques. G. Pagès (Paris 6) attire l'attention sur le succès, après un stage en entreprise, d'étudiants aux résultats universitaires jugés jusque-là médiocres : heureuse conséquence de la confrontation avec le concret. Il souhaite aussi qu'on mette en valeur les qualités des étudiants qui leur permettront de devenir de bons ingénieurs ; certains possèdent de telles qualités, différentes et complémentaires de celles qui font un bon mathématicien.

– *La pluridisciplinarité*
En théorie elle devrait être développée et cette réforme est l'occasion de rencontres interdisciplinaires. Il semble cependant qu'il y a peu de projets de licences bidisciplinaires, hormis les licences pluridisciplinaires à destination des professeurs des écoles. Un risque de repli sur elles-mêmes des disciplines existe : par exemple la part de l'enseignement des mathématiques dans les cursus à dominante physique, chimie, biologie ou même informatique semble baisser. Un tel repli ne correspond pas aux objectifs du LMD. « Les matheux cependant oublient de s'intéresser aux étudiants qui ne se destinent pas à faire des mathématiques » (J.-P. Borel, Limoges) et « il nous faut faire des efforts dans notre manière d'enseigner aux étudiants des autres disciplines » (Gilles Raby, Poitiers).

J.-P. Korolitski signale qu'on peut profiter du dispositif majeure/mineure pour sortir du monodisciplinaire en licence, mais que les universités sont libres d'adopter d'autres schémas (50/50 ou autre...).

– *La pédagogie et le contrôle des connaissances*
Il faudra tenir compte des disparités énormes à l'entrée à l'université. En mathématiques, on voit des lacunes persister jusqu'en maîtrise. Il y a des efforts à faire en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques aux étudiants des autres disciplines. Il faut poursuivre la réflexion sur la place de l'enseignement des statistiques et des probabilités. À ce sujet, Gérard Tronel (Paris 6) signale

qu'en Grande-Bretagne, l'enseignement des statistiques au lycée est remis en cause par les statisticiens eux-mêmes.

J.-P. Borel (Limoges), avec d'autres, se demande comment éviter les effets funestes du morcellement. Va-t-on évaluer des unités valant 2 crédits ?

J.-Y. Mérindol regrette que les filières scientifiques restent frileuses quant à l'ouverture internationale. Par contraste, en économie-gestion et finance, une partie de la scolarité s'effectue obligatoirement à l'étranger.

– *Les crédits*

Que représente au juste un crédit ? La valeur en crédits d'une unité d'enseignement est-elle proportionnelle à sa durée, en comptant en moyenne 2 crédits par semaine de travail ?

J.-P. Korolitski distingue le temps nécessaire à différents publics pour acquérir les connaissances sanctionnées par un diplôme et la valeur en crédits de ce diplôme qui est un invariant. En principe, la licence ou le master garantissent un niveau, pas une durée d'études. J.-P. Borel (Limoges) regrette qu'il semble cependant s'instaurer une proportionnalité entre crédits et heures d'enseignement et souhaite surtout qu'on ne passe pas trop de temps à effectuer le contrôle de connaissances. À la suite d'une question de P. Arnoux sur la relation entre coefficients et crédits, J.-P. Korolitski répond que la valeur en crédits d'une unité est proportionnelle à son coefficient.

J.-Y. Mérindol insiste sur le fait que la reconnaissance de crédits par une université n'est pas automatique.

– *Les places respectives de l'école doctorale et des départements d'enseignement dans la mise en place des masters*

J.-P. Korolitski estime que le LMD permet de concevoir une offre articulant davantage master recherche et master professionnel que dans le système actuel DEA/DESS. Diverses formules existent, par exemple des masters en **T** permettant d'intégrer des élèves d'école d'ingénieur en 2ème année (Bordeaux, Grenoble). Selon lui, l'École Doctorale doit participer au montage, et les étudiants doivent être préparés pour entrer en École Doctorale.

Jean-François Méla (Paris 13) s'inquiète qu'un excès d'ambition ne déstabilise le système : « Ce n'est pas le grand soir de l'Université ». Selon lui, la force des universités réside dans leur potentiel de recherche qui doit être exploité dans des formations de haut niveau.

– *Les grandes écoles*

Pourront-elles décerner le grade de master (J. Fonlupt, Paris 6) ? Le grade de master est d'ores et déjà décerné aux titulaires du titre d'ingénieur. Certaines écoles se rapprochent aussi des universités pour « produire » des masters et des docteurs, dit J.-P. Korolitski.

– *Un master enseignement ?*

J.-P. Korolitski répond très fermement qu'il n'est pas envisagé que le ministère accepte des masters enseignement car le ministère ne veut pas de master en sciences de l'éducation. En revanche une offre master dans un domaine peut parfaitement comporter des parcours préparant aux concours. Il indique que, pour le moment, les conditions de recrutement pour le CAPES et l'agrégation sont inchangées. Certaines universités proposent de mettre en place un master professionnel en mathématiques pures (qui correspondrait à l'année de préparation à l'agrégation). Jean-François Jaulent (Bordeaux) note que c'est un choix politique car il y a actuellement dans leur université beaucoup plus d'étudiants suivant la préparation à l'agrégation de mathématiques (60) que d'étudiants préparant un DEA (une douzaine). Jean Fresnel (Bordeaux) signale qu'à côté des 24 DESS de leur université il y a place pour un master professionnel de qualité à destination de l'enseignement. À Limoges on souhaite en discuter avec l'employeur éventuel comme pour tout master professionnel. J.-P. Kahane souhaite qu'on envisage un « master de mathématiques orienté vers l'enseignement » plutôt qu'un « master d'enseignement ».

– *Les moyens*

René Cori (Paris 7) s'interroge sur les moyens dont les universités disposeront pour mettre en œuvre cette réforme ainsi que sur les problèmes financiers que pose la mobilité aux étudiants des classes moyennes. J.-P. Korolitski lui répond qu'actuellement les mathématiques ne sont pas sous-encadrées dans les universités et que, dans ces circonstances, les primes de responsabilité pédagogique peuvent être utilisées pour décharger les enseignants qui consacreraient du temps à la mise en œuvre du LMD. Pour ce qui est des étudiants, des bourses de mobilité sont prévues pour les étudiants déjà boursiers.

J.-P. Kahane conclut la séance à 17 heures, en indiquant que ces débats seront utiles à la CREM, dans le cadre des groupes « mathématiques dans les enseignements professionnels » et « mathématiques en relation avec les autres disciplines ». Nous espérons que cet échange d'informations pourra se poursuivre, en particulier sur le forum de discussion de la SMF (`http://smf.emath.fr`).

Nicole Berline[1] *et Nicole Bopp*[2]

Une réforme européenne

L'équivalence des grades, une idée ancienne

La réforme du L-M-D (Licence-Master-Doctorat) actuellement mise en place par les pouvoirs publics, s'insère dans un mouvement européen. Si l'impulsion du mouvement actuel est récente (mai 1998), les préoccupations de fond sont anciennes. En témoigne cet extrait d'un compte rendu d'une réunion tenue fin octobre 1894 à Lyon. Il s'agit d'un congrès international de l'enseignement supérieur, dont les trois thèmes d'étude restent d'une certaine actualité :

« - Du mode de recrutement des professeurs à Paris et en province, comparé à ce qui existe à l'étranger, »

« - De l'équivalence des études et des grades dans les universités françaises et étrangères, »

« - Des moyens de soustraire les universités françaises à l'uniformité des programmes en favorisant le développement de chacune selon ses aptitudes, ses tendances et le caractère de la région. »

[1]École Polytechnique, `berline@math.polytechnique.fr`
[2]IUFM d'Alsace, `bopp@math.u-strasbg.fr`

Le préambule de l'exposé du rapporteur du second thème pourrait probablement être repris aujourd'hui :

« La question de l'équivalence internationale des études et des grades n'est pas une question nouvelle ; presque tous les Congrès de l'enseignement supérieur, soit en France, soit à l'étranger, l'ont examinée et elle a donné lieu à de nombreuses résolutions. Nous ne croyons pas qu'elle puisse être considérée comme vaine et oiseuse : il nous semble qu'elle est toujours pendante. Les propositions votées au Congrès de Paris en 1889, bien que le procès-verbal de l'assemblée générale constate qu'elles ont été toutes adoptées à l'unanimité, n'ont pas mis un terme aux discussions et n'ont rien changé à l'état de choses préexistant. Il ne faut pas en être surpris puisque c'est seulement à la condition de s'en tenir à des formules très générales qu'on peut arriver à obtenir cette adhésion unanime. Les controverses reparaissent dès que l'on essaie de préciser les conséquences et d'entrer dans le détail de l'application des principes. »

La proposition principale que retient le congrès d'octobre 1894 est la suivante :

« Que les équivalences de scolarité, admises déjà dans un grand nombre de pays, soient généralisées, et notamment :

1) que l'étudiant d'une nationalité soit admis à imputer sur la durée de la scolarité universitaire exigée dans son pays un certain temps d'études passé dans une université étrangère ;

2) que l'étudiant étranger soit autorisé à se prévaloir de la totalité du temps passé dans une université étrangère. »

La loi de 1896 sur l'enseignement supérieur se donne comme ambition de développer les facultés, et sa mise en œuvre permet de faire le point sur le retard français en matière d'accueil des étudiants étrangers. Ainsi, Ernest Lavisse, dans un rapport sur un décret de 1897 sur le « régime scolaire et disciplinaire des universités », signale que si l'université de Berlin accueille 200 étudiants américains, l'université de Paris en compte moins de 30. Il demande des assouplissements qui ne sont pas accordés : les pouvoirs publics n'acceptent pas d'ouvrir largement les portes des facultés aux étudiants étrangers. En revanche, les facultés sont autorisées à créer des diplômes propres. Elles utiliseront cette possibilité pour délivrer aux étudiants étrangers ces titres spécifiques[1], souvent de moindre valeur que les grades d'État, et non reconnus en France pour l'exercice d'une profession ou pour la poursuite des études.

Presqu'au même moment les universités américaines les plus prestigieuses cherchent à s'organiser collectivement : en janvier 1900, les présidents de Harvard University, Columbia University, Johns Hopkins University, The University of Chicago et University of California, adressent une lettre à huit de leurs collègues (Clark University, Cornell University, University of Michigan, University of Pennsylvania, Princeton University, Leland Stanford Junior University, University of Wisconsin et Yale University) pour discuter de sujets d'intérêt commun lors d'une conférence à Chicago (les 27 et 28 février 1900). Voici l'extrait principal de la lettre d'invitation :

[1]Ceci subsistera d'ailleurs, dans quelques disciplines, jusqu'en 1984 à travers les doctorats d'universités (à ne pas confondre avec les doctorats « usuels », d'État, de troisième cycle ou actuel).

« The invitation is prompted by a desire to secure in foreign Universities, where it is not already given, such credit as it legitimately due to the advanced work done in our Universities of high standing, and to protect the dignity of our Doctor's degrees. It seems to us, for instance, that European Universities should be discouraged from conferring the degree of Doctor of Philosophy on american students who are not prepared to take the degree from our best Universities, and from granting degrees to Americans on lower terms than their native students.

There is reason to believe that among other things the deliberations of such a conference, as has been proposed, will

- result in a greater uniformity of the conditions under which students may become candidates for higher degrees in different American Universities, thereby solving the question of migration, which has become important issue with the Federation of Graduate Clubs ;

- raise the opinion entained abroad of our own Doctor's Degree ;

- raise the standard of our weaker institutions. »

Cette rencontre a abouti à la création de l'AAU (Association of American Universities), association qui réunit maintenant 62 universités qui se définissent comme les « universités de recherche » d'Amérique du Nord. Les objectifs mis en avant en 1900 semblent avoir été atteints. En tout cas, le site web de l'AAU présente cette réunion de fondation en utilisant un vocabulaire plus direct, signe de l'assurance acquise depuis 1900 :

« Weighing on their minds were three things : that the lack of consistency and standards in American higher education was hurting the reputation of the stronger institutions, that US students were going to Europe to earn graduate degrees rather than staying home to attend US institutions, and that European universities had little respect for US academic degrees and, in some cases, were "dumbing down" graduate programs for American students. »

On verra que le processus européen actuel, dit d'harmonisation, présente quelques ressemblances avec ce programme déjà centenaire.

Le vingtième siècle

Le choc de la défaite de 1870 conduit, à la fin du dix-neuvième siècle, à plusieurs tentatives pour créer en France des universités sur le modèle international, en grande partie inspiré par ce que l'Allemagne avait réalisé depuis quelques dizaines d'années (von Humboldt) : les textes à ce sujet sont nombreux dont le célèbre « universités allemandes et universités françaises » de E. Lavisse. Ce projet, soutenu par les réformateurs universitaires de l'époque (dont Louis Liard est le représentant le plus connu), échoue. Cet échec, consommé vers 1890 et confirmé dans la loi de 1896, provient en partie de la résistance des petits centres universitaires, soutenus par les édiles locaux, qui craignaient de voir disparaître leurs facultés isolées.

Cependant, malgré le maintien de cette exception française, une volonté commune de rapprochement continue d'animer les discussions internationales comme en témoignent les congrès internationaux sur l'enseignement supérieur. La première guerre mondiale, et ses conséquences, vont anéantir cet état d'esprit. L'Europe est en ruine et le nationalisme s'exacerbe dans chaque pays. Les universités et la recherche n'échappent pas à l'air du temps. Il suffit de penser au boycott des universitaires allemands que de nombreux universitaires français ont demandé (et obtenu) après 1918 pour comprendre que les débats de la fin du dix-neuvième siècle sur le rapprochement des études universitaires en Europe n'étaient plus d'actualité. La montée du fascisme et du nazisme a apporté le coup de grâce.

Après la seconde guerre mondiale, des résistants français et allemands, et en particulier des scientifiques, ont décidé de relancer les coopérations. Le but était très politique : il s'agit d'éviter les erreurs de 1918 pour ne pas provoquer le retour des chauvinismes, et donc de favoriser les échanges internationaux, en particulier ceux qui concernent les jeunes, les étudiants, et les chercheurs. Certains mathématiciens français ont eu un rôle éminent dans ces efforts : le plus connu est Henri Cartan, dont la famille a été durement éprouvée pendant la guerre, et qui a multiplié les contacts internationaux dans un esprit résolument pro-européen. Les années 45-55 sont marquées par le dialogue franco-allemand et par les premiers pas de la longue marche de la construction européenne. Mais la guerre froide amène de nouvelles difficultés : l'Europe est coupée entre l'Est et l'Ouest et chaque pays est tenu de choisir son camp. Les plus ardents partisans de la construction européenne sont souvent très atlantistes, d'où de nouvelles oppositions et de nouveaux blocages. En France, les gaullistes, favorables à tout ce qui symbolise la grandeur nationale, considèrent avec circonspection toute convergence européenne. Des initiatives existent pourtant dans le domaine de la recherche (dès les années 50) mais elles concernent principalement les très grands équipements comme le CERN, les projets spatiaux de l'ESA ou ceux pilotés par les météorologues. Pour l'enseignement supérieur, les initiatives sont isolées, voire individuelles, et peu soutenues par les pouvoirs publics. Les efforts institutionnels sont plus récents (à partir des années 70) et d'abord consacrés à la mobilité des étudiants et des universitaires (Socrates/Erasmus, bourses Marie Curie, chaires Monnet). Les compétences de l'Union européenne, même avec le nouveau traité de Maastricht, restent d'ailleurs très réduites sur ces sujets. Les projets qui aboutissent sont plutôt bilatéraux : un exemple type est celui des diplômes communs à des universités de plusieurs pays, qui se multiplient à partir des années 90.

Ce n'est donc pas un hasard si la relance politique ne se produit qu'après la fin de la guerre froide, elle-même conséquence de la chute des régimes communistes. Ce grand changement modifie de fond en comble les façons nationales d'apprécier la construction politique européenne. Chaque pays remet à l'ordre du jour des questions universitaires internationales sur lesquelles aucun progrès d'ampleur n'avait été réalisé depuis près de 100 ans. Les initiatives sont nombreuses et variées. De nombreuses sociétés savantes européennes, dont la SME, se créent. Les présidents d'université fusionnent leurs deux conférences européennes dans l'Association Européenne des universités (EUA) qui rassemble autour de 600 établissements. L'Union européenne lance vers 1998 un projet ambitieux « d'espace européen de la recherche » qui dépasse largement le cadre des traités de Rome et de Maastricht.

Le processus de Paris-Bologne-Prague :

vers une harmonisation

C'est dans ce nouveau contexte qu'il faut situer la déclaration signée le 25 mai 1998 à Paris par quatre ministres en charge de l'enseignement supérieur (Claude Allègre, France ; Tessa Blackstone, Royaume Uni ; Jürgen Rüttgers, Allemagne ; Luigi Berlinguer, Italie). Cette initiative, due à la partie française, se fonde à la fois sur les considérations internationales précédentes, sur une analyse des spécificités nationales (par exemple la dualité écoles-universités) et sur la perte d'attractivité du système universitaire européen. On peut prendre l'exemple de l'Asie : les étudiants de ces pays vont d'abord vers les USA. L'ouverture internationale de plus en plus marquée de l'Inde et de la Chine, le développement économique et social des pays asiatiques, tout ceci se fait sans que les pays européens, et leurs universités, n'arrivent à jouer un rôle de premier plan. Il est illustratif de savoir que si une majorité des enfants des membres de l'actuel bureau politique du parti communiste chinois a suivi une formation supérieure aux USA, aucun n'est allé étudier en Europe. Certes le seul membre du comité permanent du bureau politique qui ait étudié à l'étranger l'a fait en Europe : il s'agit du chef de la sécurité qui a suivi un cursus en Allemagne de l'Est.

La déclaration signée par les quatre ministres s'intitule : *« L'harmonisation de l'architecture du système européen de l'enseignement supérieur »* . En voici deux extraits significatifs :

« La reconnaissance internationale et le potentiel attractif de nos systèmes sont directement liés à leur lisibilité en interne et à l'extérieur. Un système semble émerger, dans lequel deux cycles principaux — pré-licence et post-licence — devraient être reconnus pour faciliter comparaisons et équivalences au niveau international. Une grand part de l'originalité et de la souplesse d'un tel système passera, dans une large mesure, par l'utilisation de « crédits » (comme dans le schéma ECTS) et de semestres. »

[...]

« Nous lançons un appel aux autres États-membres de l'Union, aux autres pays de l'Europe pour nous rejoindre dans cet objectif, à toutes les universités européennes pour consolider la place de l'Europe dans le monde en améliorant et en remettant sans cesse à jour l'éducation offerte à ses citoyens. »

Cet appel est entendu puisque, le 19 juin 1999, la rencontre de Bologne aboutit à une déclaration signée par les ministres de 29 pays. On y lit :

« - adoption d'un système de diplômes facilement lisibles et comparables, entre autres par le biais du « Supplément au diplôme », afin de favoriser l'intégration des citoyens européens sur le marché du travail et d'améliorer la compétitivité du système d'enseignement supérieur européen à l'échelon mondial.

- adoption d'un système qui se fonde essentiellement sur deux cursus, avant et après la licence. L'accès au deuxième cursus nécessitera d'avoir achevé le premier cursus, d'une durée minimale de trois ans. Les diplômes délivrés au terme du premier cursus correspondront à un niveau de qualification approprié pour l'insertion sur le marché du travail européen. Le second cursus devrait conduire au mastère et-ou au doctorat comme dans beaucoup de pays européens.

- mise en place d'un système de crédits — comme celui du système ECTS — comme moyen approprié pour promouvoir la mobilité des étudiants le plus largement possible. Les crédits pourraient également être acquis en dehors du système de l'enseignement supérieur, y compris par l'éducation tout au long de la vie, dans la mesure où ceux-ci sont reconnus par les établissements d'enseignement supérieur concernés.

- promotion de la mobilité en surmontant les obstacles à la libre circulation, en portant une attention particulière à :

pour les étudiants, l'accès aux études, aux possibilités de formation et aux services qui leur sont liés,

pour les enseignants, les chercheurs et les personnels administratifs, la reconnaissance et la valorisation des périodes de recherche, d'enseignement et de formation dans un contexte européen, sans préjudice pour leurs droits statutaires.

- promotion de la coopération européenne en matière d'évaluation de la qualité, dans la perspective de l'élaboration de critères et de méthodologies comparables.

- promotion de la nécessaire dimension européenne dans l'enseignement supérieur, notamment en ce qui concerne l'élaboration de programmes d'études, la coopération entre établissements, les programmes de mobilité et les programmes intégrés d'étude, de formation et de recherche. »

Le rendez-vous suivant est celui de Prague (19 mai 2001) qui associe 33 pays. Les ministres confirment leur soutien à la déclaration de Bologne, ajoutant notamment que :

« les ministres se sont félicités que l'objectif visant à fonder l'architecture des diplômes d'enseignement supérieur sur deux cursus s'articulant au niveau de la licence ait pu être abordé et faire l'objet d'un débat. Certains pays se sont ralliés à ce type d'architecture et beaucoup d'autres l'envisagent avec grand intérêt. Il faut noter que, dans nombre de pays, la licence (« bachelor degree ») et le mastère (« master degree ») ou des diplômes comparables, peuvent aussi bien être obtenus dans les universités que dans d'autres établissements d'enseignement supérieur. »

Le suivi du processus associera les pays signataires, le Conseil de l'Europe, la Commission Européenne et l'État exerçant la présidence de l'Union : les instances politiques européennes deviennent partie prenante de ces démarches ministérielles. L'Association Européenne des universités (EUA), l'Association européenne des établissements d'enseignement supérieur (EURASHE) et les Unions nationales d'étudiants d'Europe (ESIB) seront consultées. On est passé en trois ans d'une déclaration de quatre ministres à un dispositif associant 33 pays, le Conseil de l'Europe, l'Union européenne (le parlement a d'ailleurs délibéré sur ces sujets en septembre 2002) et plusieurs associations internationales. Un tel succès provient de l'intérêt direct pour cette démarche mais aussi de ce que les gouvernements se donnent ainsi un levier pour pousser certaines réformes plus « nationales » : ce nouveau cadre leur donne une référence pour aborder des questions difficiles à traiter dans le cadre habituel. C'est pourquoi les pays qui ont fait des réformes en cohérence avec ces objectifs (Allemagne, Autriche, Belgique, France, Italie, Pays-Bas, Suisse, ...) ont au passage, et bien logiquement, répondu à des préoccupations plus nationales, très différentes d'un pays à l'autre. De la même façon, les universités qui mettent en place ces nouveaux cursus sont amenées à s'intéresser à d'autres sujets (orientation, taux d'échec, réforme du contenu des études ...). Mais il serait grave de perdre de vue les objectifs d'ouverture européenne et d'attractivité internationale de nos formations : la nouvelle architecture est à concevoir dans cette perspective là.

Sites web

1–Les textes principaux, et contemporains, sur le thème abordé ici sont rassemblés sur le site de la conférence des présidents d'université. On y trouvera des fichiers téléchargeables donnant les textes de base (déclarations, textes réglementaires...).

`http://www.cpu.fr/TextesRef/Default.asp?Th=3`

`http://www.cpu.fr/Dossier/C3ES/C3ES.asp`

2–La prochaine réunion internationale, suite de celles de Paris-Bologne-Prague, aura lieu à Berlin et son site, enrichi au fur et à mesure de la préparation de cette conférence, est :

`http://www.bologna-berlin2003.de/`

3–Le site de l'EUA est : `http://www.unige.ch/eua/`

La prochaine conférence de l'EUA, sur le rôle des universités dans l'espace européen de la recherche, aura lieu à Bristol les 28 et 29 mars 2003 : `http://www.bristol.ac.uk/eua2003`

Jean-Yves Mérindol[2]

Travaux du groupe « Tuning Educational Structures in Europe »

Au moment où commence à se manifester une profonde mutation des systèmes éducatifs et en particulier de l'enseignement supérieur, le projet « Tuning Educational Structures in Europe » qui s'inscrit dans la mouvance du processus de Bologne a pour ambition de fournir un espace de réflexion et de débats entre universitaires. Ce projet a obtenu le soutien de la Commission Européenne à la fin de l'année 2000, il est coordonné par les universités de Groningen aux Pays-Bas et de Deusto (Bilbao) en Espagne qui en ont eu l'initiative.

Cinq groupes pilotes d'une quinzaine de membres de nationalités différentes ont ainsi été constitués dans les disciplines suivantes : mathématiques, géologie, gestion, histoire, et sciences de l'éducation.

Dans un souci de synergie, deux autres disciplines, physique et chimie, sélectionnées à partir des réseaux ERASMUS ont été associées au projet.

Lors des cinq réunions de travail qui se sont tenues entre mai 2001 et juin 2002, quatre thèmes ont été abordés de façon systématique :

[2]Université Louis Pasteur, Strasbourg, `merindol@math.u-strasbg.fr`

(1) compétences générales et/ou spécifiques attendues d'une formation universitaire ;
(2) connaissances/cursus/contenus ;
(3) ECTS (European Credit Transfer System) ;
(4) méthodes d'enseignement, d'apprentissage, habilitation, et validation.

Compétences générales et/ou spécifiques attendues d'une formation universitaire.

Pour traiter cette question, un même questionnaire portant sur la nature des compétences attendues, leur degré d'importance et le niveau atteint a été soumis à trois types de populations : les étudiants diplômés, les employeurs et les professeurs.

De cette enquête, il ressort une image positive des diplômés en mathématiques, de leurs possibilités d'embauche, plus de 60 % trouvent un emploi correspondant à leur niveau de formation.

Les employeurs leur reconnaissent des qualités d'analyse et de synthèse, d'autonomie dans le travail, de bonnes capacités à apprendre et à résoudre les problèmes. Les diplômés se jugent bien formés sur les connaissances et les outils de base mais insuffisamment dans tous les domaines de la communication : communication orale ou écrite, ou communication avec des spécialistes d'autres domaines. Ils ne se sentent pas non plus suffisamment formés au travail en équipe, ni à l'organisation de leur propre travail. Les employeurs souhaiteraient une amélioration de leur capacité à prendre des décisions et à s'adapter ainsi qu'à mettre en pratique leurs connaissances.

Il est intéressant de rapprocher ce questionnaire du document du CNE sur les qualités attendues d'un cadre recruté dans le domaine des applications des mathématiques. On retrouve des thèmes analogues et des réactions très voisines.

Parmi les cinq compétences jugées comme les plus utiles, l'esprit d'analyse et de synthèse, la capacité à apprendre et à mettre en pratique les connaissances sont cités par tous. Diplômés et employeurs évoquent aussi le travail en équipe et l'aptitude à résoudre les problèmes alors que les universitaires privilégient la créativité et le sens critique.

Connaissances-Cursus-Contenus

C'est le thème qui a été privilégié par le groupe des mathématiciens car il était perçu comme fondamental et que la logique même de la discipline permettait d'espérer définir un cadre commun pour l'enseignement des mathématiques à travers les différents pays.

Cependant la difficulté est très grande de faire des comparaisons car beaucoup de facteurs sont en jeu, le niveau initial, le rythme, la durée des études, le comportement des étudiants, les modes d'évaluation, ...

Ces discussions ont donné lieu à une déclaration commune « Towards a common framework for mathematics degrees in Europe » approuvée à l'unanimité.

Pourquoi se donner un cadre commun pour les diplômes de mathématiques en Europe ?

L'une des raisons principales est d'aider à la reconnaissance automatique qui permettrait de favoriser la mobilité étudiante. Ce cadre commun devrait être associé à un système d'habilitation et s'appuyer sur deux principes : des structures similaires (mais non nécessairement identiques) et un tronc commun (autorisant une certaine flexibilité locale) pour le premier cycle. Il y a en effet une trop grande variété dans le champ des mathématiques pour espérer aller plus loin.

À côté des notions mathématiques de base, (dont la liste reste à compléter), le premier cycle devrait inclure un enseignement d'informatique et l'introduction à un domaine majeur d'application des mathématiques (physique, biologie, économie).

Dans les filières de deuxième cycle de mathématiques une quantité significative de travail personnel devrait être demandée aux étudiants et donc un minimum de 90 crédits ECTS devrait être requis pour l'attribution d'un Master.

Enfin, il faut signaler que les recommandations énoncées ne concernent que les formations universitaires et, parmi elles, celles qui souhaiteraient bénéficier d'un label européen, ce qui en aucun cas ne pourrait être une obligation.

Les travaux du groupe se sont appuyés notamment sur un document (MSOR : Mathematics, Statistics and Operational Research) publié par un organisme officiel britannique QAA : Quality Assurance Agency for higher Education.

Les ECTS

C'est un système qui se développe en Europe depuis une dizaine d'années dans l'enseignement supérieur. L'idée générale est que le niveau d'étude qui devrait être atteint par un étudiant-type à temps plein durant une année académique vaut 60 crédits ECTS. C'est pourquoi la charge de travail correspondante doit également être de 60 crédits.

Pour donner quelques exemples, l'attribution de crédits à un cours peut se faire en fonction du nombre d'heures d'enseignement, ou en fonction de l'importance de la discipline ou de la difficulté du cours, ou encore en fonction de la charge de travail que représente ce cours pour l'étudiant moyen. Ce dernier choix est celui du système européen qui place ainsi l'étudiant au cœur du dispositif.

Les discussions ont essentiellement porté sur les principes d'attribution et les difficultés d'interprétation de ce système de crédits mais il n'y a pas eu de remise en cause de l'intérêt et de la nécessité d'un tel système.

De l'avis unanime, le crédit en lui-même n'a pas grande signification, il n'est utile que dans le cadre d'un cursus bien défini qui doit être validé en tenant compte du niveau et de la cohérence d'ensemble. Alors les ECTS peuvent être non seulement un système de transfert mais aussi d'accumulation.

La pratique de l'enseignement par crédits est déjà ancienne dans certains pays. En Espagne, un système de crédits (75 crédits par an) a été mis en place il y a quelques années. En Italie, une réforme de l'enseignement universitaire est intervenue en 2001 dont l'un des objectifs était d'accorder la durée théorique et la durée réelle (beaucoup plus longue) des formations. Cette distorsion entre durée officielle et durée effective rend évidemment difficile l'attribution des crédits.

Méthodes d'enseignement, d'apprentissage, habilitation, et validation

Sur les méthodes d'enseignement, des expériences diverses ont été échangées.

Quant aux procédures d'habilitation, elles sont très variées. Dans certains pays, le système d'habilitation fait appel à des universitaires étrangers, dans d'autres des experts non universitaires font partie des équipes d'évaluateurs.

La question d'un système général n'a pas été approfondie dans le cadre des travaux du groupe de mathématiques.

Sites à consulter :

Les sites officiels du projet *Tuning educational structures in Europe* :

`http://www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm`

`http://www.let.rug.nl/TuningProject/index.htm`

Le document « Towards a common framework for mathematics degrees in Europe » :

`http://smf.emath.fr/Enseignement/EspaceEuropeen/TUNINGMaths.pdf`

Les sites européens :

`http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/bologna_declaration.pdf`

`http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/Prague_communiquTheta.pdf`

`http://europa.eu.int/comm/education/tuning.html`

Martine Bellec[1]

Les « masters européens »

La Commission Européenne souhaite favoriser la définition de nouveaux masters construits sur deux années (années 4 et 5) d'étude au sein de réseaux d'universités de plusieurs pays européens. L'appellation proposée est celle de « master européen », qui ne fait toutefois pas l'unanimité. L'EUA, association des universités européennes, sur mandat de la Commission, a déjà lancé un appel à propositions pour démarrer 10 masters en septembre 2002. Onze propositions ont été sélectionnées et financées. Il s'agit pour le moment de domaines très liés à l'intégration européenne, mais a priori *toute discipline est éligible*, donc aussi les mathématiques, pures ou appliquées. Il est important d'y penser lors du montage de nouveaux cursus.

Le réseau d'universités ne doit pas se limiter à 2 ou 3 établissements, même si un « noyau » peut exister ayant déjà une expérience de partenariat, et dont l'opération serait une extension plus large, comme pourrait l'être un double diplôme établi dans le cadre franco-allemand.

La place est faite à la plus large inventivité dans les propositions. Le but est de favoriser :

[1]Université Paris-Dauphine, `Martine.bellec@dauphine.fr`

– la définition commune du programme des études suivant la Déclaration de Bologne ;
– la complémentarité des compétences des partenaires ;
– leur coopération dans un cadre européen ;
– la mobilité des étudiants et des enseignants ;
– le transfert des crédits des différents modules entre établissements partenaires ;
– la possible insertion d'étudiants de pays tiers.

Un second appel devrait paraître en mars 2003, dans les mêmes conditions, bien que le contrat CE-EUA ne soit pas encore signé.

Puis le programme ERASMUS-World devrait être lancé en 2004 pour lequel ces masters pourraient devenir autant de points de référence privilégiés. Ce programme vise à favoriser les mobilités :

– d'étudiants ou d'enseignants de pays tiers venant pour étudier ou enseigner en Europe ;
– d'étudiants ou d'enseignants européens pour étudier ou enseigner dans des établissements partenaires de pays tiers.

Les bourses étudiantes seraient de 2500 euros/mois (il est possible que ce montant soit revu).

Exemple (mais non référence). Construire un master de mathématiques appliquées (120 crédits) commun à Limoges, Leeds, Mannheim, Stockholm, Barcelone et Naples, avec pour obtenir le label européen, au moins deux mobilités d'au moins deux mois chacune dans au moins deux pays différents du sien propre pour y suivre et obtenir des modules optionnels non enseignés dans sa propre université et totaliser en mobilité au moins 30 crédits. Ce master serait en partenariat direct avec trois masters, l'un à Rabat, un autre à Rio de Janeiro et un troisième à Manille, établi sur le même modèle et dont les étudiants auraient la possibilité grâce à des bourses européennes, de venir suivre des modules dans le master européen et de transférer chez eux les crédits obtenus, avec réciprocité pour les étudiants européens et mobilité enseignante dans les deux sens.

Christian Duhamel[1]

[1] Christian.duhamel@education.gouv.fr

L'application des nouveaux cursus (L-M-D) dans les universités

Quelques faits

J'ai contacté, au nom de la commission enseignement de la SMF, plusieurs universités pour connaître l'état de la réflexion sur les nouveaux cursus, et sur l'application de la réforme “3-5-8” ou “L-M-D”.

Un premier point : dans la plupart des cas, les informations que j'ai reçues sont des documents de travail préliminaires, susceptibles de modification. C'est pourquoi, sauf exceptions, je citerai peu d'universités.

La date d'application de la réforme dépend de la date de contractualisation de l'université. À ma connaissance, une seule université (Valenciennes) a déjà basculé dans le nouveau cursus. Bordeaux commencera en 2003, et leur maquette est pratiquement dans l'état définitif. Beaucoup d'autres universités se préparent pour 2004 ; d'après certaines informations (?) les universités parisiennes devanceraient leur date de contractualisation et démarreraient en 2004.

J'insiste surtout ici sur la licence ; rappelons qu'il s'agit de la grande majorité des heures d'enseignement, dont une bonne partie en dehors des enseignements de mathématiques, en mathématiques de service.

La dénomination des diplômes

L'impression générale est d'une grande variété. Une partie des universités organise une licence unique de sciences, ou sciences et technologie, avec des mentions et des spécialités, ou des majeures et mineures ; d'autres organisent plusieurs licences (maths, maths-info, info, physique, MASS...). La lisibilité de l'ensemble n'est pas claire au final...

Dans certains cas, l'organisation est très peu avancée, et « confisquée » au niveau de l'université, (« les propositions ne sont pas dans l'esprit de la réforme », donc reconduction de l'existant à l'identique).

La structure des diplômes (modules et unités d'enseignements)

Dans la licence elle-même, on voit des structures très variées. Un rappel d'abord, seulement pour fixer les ordres de grandeur : un crédit ECTS (European Credit Transfert System) peut correspondre à environ 10 heures, donc un module de 5/6 ECTS correspond à environ 4 heures de cours par semaine sur un semestre. Certaines universités ont fixé une « brique de base » de 6 ECTS : Aix-Marseille 2 (et, semble-t-il, les autres universités d'Aix-Marseille, par décision conjointe des 3 présidents), Orsay, Poitiers. Dans ce cadre, les UE (unités d'enseignement) peuvent se composer de plusieurs modules (Orsay), ou être fixées à 1 (Aix-Marseille 2, dans l'état actuel de la réflexion). Dans beaucoup d'autres, cette structure de base n'est pas fixée. Cela peut varier suivant les universités de petites UE (de 2 à 6 ECTS) à de grosses UE (15 ECTS en maths au semestre 2) ; Bordeaux est intermédiaire, avec des UE de 3, 6, 8 ou 9 ECTS.

Une conséquence est que le nombre d'UE de mathématiques par semestre, dans les deux premières années, va de 1 à 3 ou 4 : dans certains cas, un étudiant peut rencontrer jusqu'à 8 enseignants de mathématiques différents sur un semestre !

L'organisation des parcours est aussi très diverse : quand il y a des licences individualisées, les parcours semblent assez figés, avec peu de « mutualisation » (utilisation d'un même enseignement pour des orientations finales différentes), c'est moins le cas dans d'autres telles que Bordeaux (signalons les documents remarquables, très clairs et précis, de présentation des diplômes dans cette université). Peu d'universités semblent fonctionner vraiment par majeure/mineure (Orsay, Bordeaux).

Certaines universités proposent un premier semestre plus court que les autres, s'arrêtant à Noël.

La pluridisciplinarité

Quelques universités organisent une licence scientifique pluridisciplinaire, destinée en particulier à la formation des professeurs des écoles. On note aussi quelques licences Math/Info.

En dehors de ces cas, je n'ai pas vu de véritables licences bi-disciplinaires. Il semble que les possibilités d'organisation en majeure/mineure soient très peu utilisées ; cependant, certaines universités (Bordeaux, Orsay, Tours) semblent prévoir cette possibilité.

Les masters

En général, il y a une division master recherche/master professionnel. Signalons que, dans tous les cas où c'est explicité, les masters sont organisés entièrement par les composantes, sans intervention formelle de l'école doctorale. Les diverses tentatives de master enseignement semblent pour le moment bloquées.

Quelques sites où récupérer des informations

Pour savoir les dates de contractualisation :

`http://www.cnrs.fr/DRES/`

Pour avoir les arrêtés du 3-5-8 :

`http://www.cpu.fr/textesref`

(demander « tous les textes », chercher en avril 2002)

Il faut signaler le site de la conférence des doyens d'UFR scientifiques :

`http://www.cdus.asso.fr/`

On y trouve plusieurs motions tout-à-fait intéressantes sur la structure des licences scientifiques. Ces motions recommandent en particulier de ne faire, par université, qu'un seul domaine « sciences et technologie », et de limiter à 3 ou 4 le nombre d'unités d'enseignement par semestre.

Le site de Bordeaux :

`http://www.ufr-mi.u-bordeaux.fr/UFR-Direction/cellule-3-5-8.html`

On y trouve une description très claire de la maquette proposée par Bordeaux pour la contractualisation, par des gens qui ont visiblement beaucoup réfléchi.

Quelques remarques

Les réorientations en cours de diplôme (changement de mention) semblent très faibles là où on a des chiffres : moins de 5%. Vaut-il vraiment le coup de construire des passerelles complexes ?

Certaines universités ont des semestres de longueurs différentes : gare aux problèmes d'organisation !

Signalons un point pas toujours visible : dans beaucoup de cas, il y a un coefficient (pour la compensation) qui est distinct des crédits ECTS. Ce coefficient, d'après l'arrêté, ne peut varier que de 1 à 3 ; il n'est pas précisé s'il doit être entier. Il faut lire l'arrêté dans le détail pour comprendre ce point !

Dans certains cas, le choix des modules, quand on a laissé une grande liberté, est difficile pour les étudiants, et entraîne de gros problèmes d'organisation.

Quelques questions

Est-il souhaitable de tenter d'unifier un peu ? Quelle lisibilité pour des diplômes si variés ?

Que devient la licence MASS (question posée par Toulouse 1 en particulier) ?

Le morcellement des mathématiques

Ce morcellement se manifeste de deux façons.

(1) Dans la filière mathématique, la multiplication de petites unités d'enseignement a plusieurs conséquences nocives : disparition de l'unité des mathématiques, travail éclaté entre de multiples enseignants, ce qui est peu propice à un travail suivi, grandes difficultés d'organisation (la multiplicité des examens augmente beaucoup, sans aucun bénéfice, le travail administratif ; par ailleurs, on s'investit moins dans de tels enseignements). Une structure telle que celle prévue à Avignon ou à Orsay semble meilleure de ce point de vue.

(2) La multiplication d'enseignements de mathématiques spécialisés pour telle ou telle matière conduit à la disparition d'une culture scientifique de base commune. Certaines licences d'informatique semblent ne contenir aucun enseignement d'analyse !

D'autre part, il est frappant de voir que, dans de nombreuses universités, l'enseignement des probabilités (et encore plus des statistiques) reste, suivant un modèle bien français, relégué dans des modules à part, voire des options. N'est-il pas temps de le faire entrer dans l'enseignement mathématique de base ? Il ne faudrait pas négliger le fait que, dans beaucoup d'autres disciplines, c'est la partie la plus visible des mathématiques !

L'enseignement des mathématiques a été entièrement refondé dans les années 60, avec la parution des manuels bien connus de Dixmier, Godement, Dieudonné... On a l'impression que ce modèle arrive maintenant à bout de souffle, sans avoir été remplacé. La réforme qui se présente est la plus importante depuis les années 60. N'est-ce pas l'occasion de renouveler cet enseignement, en l'adaptant au nouveau public et aux nouveaux diplômes ?

– si on passe beaucoup de temps sur l'analyse des fonctions d'une variable réelle, les subtilités de la convergence des suites, l'algèbre linéaire mécanisée, les tribus et la mesurabilité, sans faire de fonctions de plusieurs variables, de séries, de probabilités... alors nous perdrons la plupart de notre public ;

– faire une part consistante aux applications (internes et externes) ;

– intégrer les probabilités dans l'enseignement de l'analyse ;

– faire une large part aux mathématiques discrètes, nécessaires à l'informatique, sans oublier leur lien profond avec l'analyse (séries génératrices, par exemple) ;

– repenser l'enseignement en pensant aux autres disciplines. Nous savons enseigner des choses utiles (et d'autres qui le sont moins) ; mais si nous sommes incapables d'en convaincre nos collègues des autres disciplines, nous disparaîtrons.

La pluridisciplinarité

On est étonné de l'inexistence de mention bi-disciplinaire maths-physique. Alors que l'on parle partout d'objet quantique, pourquoi les mathématiciens n'ont-ils pas droit d'aborder cela en licence ou maîtrise ? On étudie en deuxième ou troisième année des formes quadratiques de signature (p, q) ; ne peut-on montrer à nos étudiants que la forme $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ a un certain intérêt pratique ? Nous avons, dans beaucoup d'universités, des enseignants capables de le faire. Or, il est évident qu'il est souhaitable que les futurs enseignants de mathématiques des lycées, par exemple dans le cadre des TIPE, aient un minimum de compétence en physique pour pouvoir travailler avec leur collègues (et réciproquement pour les physiciens).

La question des concours de recrutement

Que deviennent les concours de recrutement dans le nouveau modèle ? En particulier :

Est-il clair que la licence est toujours l'unique prérequis du CAPES ?

Que devient l'agrégation, alors que la maîtrise cesse d'être un grade ?

Il est nécessaire que le Ministère fixe clairement les règles du jeu.

De nombreuses universités ont proposé des « masters enseignement ». Ici aussi, il est nécessaire de fixer les règles du jeu. Il a semblé à la commission enseignement de la SMF qu'un tel master risquait de faire dériver la préparation aux concours, en remplaçant le contrôle continu purement indicatif actuel par un contrôle diplômant. C'est pourquoi elle a proposé un master « agrégation » donné par l'admissibilité. On pourrait aussi imaginer que le jury puisse fixer une barre « master », ce qui aurait l'avantage de ne plus faire dépendre ce diplôme du nombre de postes ; cela semble légalement possible.

Une suggestion : le prérecrutement

Il a été suggéré, en particulier par la CREM, de faire passer le prérequis du CAPES à bac+4. Dans l'état actuel des choses, cela semble poser de graves problèmes. Une telle réforme semble inenvisageable hors d'un prérecrutement.

De façon plus générale, on est amené à penser que, pour de nombreuses raisons, il faudrait rétablir un prérecrutement sur critère scientifiques à bac+1, avec engagement décennal, dans toutes les disciplines :

– pénurie prévisible de candidats ;

– raisons sociales ;

– reconstitution d'une tête de classe formée d'étudiants motivés dans les universités.

C'est l'une des recommandations qui ont été discutées par la CREM ; le coût de cette mesure peut-être évalué à 0,5 milliards d'euros par an environ (en supposant 10 000 étudiants prérecrutés chaque année pour une durée de 3 ans avec un salaire mensuel de 1200 euros).

Pierre Arnoux[1]

Débouchés pour les étudiants en mathématiques orientées vers les applications

(d'après le rapport du CNE.)

Nous avons eu deux sources d'information pour connaître ces débouchés :

(1) les compte-rendus des experts (30 collègues) qui ont fait le tour de France et qui ont interrogé, université par université, les responsables de DESS et de DEA en mathématiques appliquées pour savoir ce que deviennent leurs anciens étudiants ([1] page 6),

(2) l'enquête auprès des employeurs (15), et les entretiens avec quelques responsables de DESS ou DEA, de la SMF, de la SMAI et de la SfdS, menés essentiellement par Dominique Nicolle, chargée de mission auprès du CNE et membre du comité de pilotage « mathématiques appliquées », plus évidemment les publications des sociétés savantes susdites, ainsi que la brochure « Les mathématiques dans la vie quotidienne » de la SME (cf.[1] pages 6 et 7).

Les renseignements recueillis par la première procédure sont rassemblés dans le CD afférent au rapport, et ceux de la seconde figurent dans le chapitre de ce rapport intitulé l'« étude complémentaire 1 » (cf.[1] pages 73 et sq.).

I. L'impression générale qui prévaut pour moi après cette collaboration de près de deux ans (l'étude a été commencée en 2000, année des mathématiques, et j'ai rejoint le comité de pilotage en février 2001) est que nos étudiants trouvent du travail après leurs études, du travail intéressant, et qu'ils sont appréciés par les gens qui les emploient, ceci pour ceux qui s'arrêtent à « bac plus cinq ». En effet, nous n'avons pratiquement rien su en ce qui concerne le devenir des étudiants en thèse... Peut-être n'est-il pas dans les habitudes des écoles doctorales de tenir de telles statistiques ? En revanche, ce travail de suivi est parfois fait pour les diplômés d'un DESS, par le/la responsable, secrétaire ou association d'anciens... mais ce n'est pas systématique ; dans la négative, la réponse est : à quoi bon ? Puisqu'ils trouvent tous du travail ! !

II. Que tirer de cette étude ?

Tout d'abord, les secteurs demandeurs de nos étudiants sont très variés et ils apparaissent très clairement dans les tableaux récapitulatifs du rapport, pages 74 et sq. À titre d'exemples, citons : la banque, l'assurance, les

[1] Faculté des sciences de Luminy, arnoux@iml.univ-mrs.fr

instituts de sondage, le secteur médical et biomédical (industrie pharmaceutique), le conseil en ingénierie (SSII), marketing, vente par correspondance, télécommunications, audiovisuel (traitement de l'image), météo, écologie, agroalimentaire, aérospatiale, aéronautique, automobile, secteur des matériaux et de la chimie, environnement, pollution, domaine de l'énergie, etc.
Les jeunes mathématiciens sont ainsi accueillis dans de nombreux corps de métiers.

Ensuite, précisons en regard de ces secteurs les compétences attendues, les métiers offerts (et exercés !). Ils couvrent une large palette avec, entre autres :

– bonne connaissance des outils informatiques,
– conception et exploitation de banque de données,
– aide à la décision,
– optimisation, autant en gestion de stocks que pour la production (concept de « flux tendu »), ou bien optimisation de formes,
– calcul de risque,
– tests de fiabilité,
– traitement de l'information,
– simulations pour effectuer des essais virtuels ou donner des modèles,
– calcul scientifique, exploitation de codes de calculs,
– mécanique des fluides numérique,
– élaboration de modèles physiques, sociologiques,
– etc.

Il s'agit donc de métiers de conception, de modélisation et de traitement des modèles conçus, adaptés, ajustés à la réalité étudiée.

Enfin, quelle est la perception des employeurs ? D'après ceux que nous avons rencontrés, contrairement à une idée trop répandue, en particulier chez certains universitaires, les employeurs n'attendent pas des étudiants qu'ils soient *directement* opérationnels, mais qu'ils soient *rapidement* opérationnels ! Ils s'accordent à dire, tout secteur confondu, que les jeunes à « bac plus cinq » sont très bien formés et rapidement opérationnels, ils sont adaptables, se forment vite « sur le tas », la formation continue ne leur est pas nécessaire. Notons au passage qu'ils n'emploient pas pour ces métiers des « bac+quatre », ils ignorent tout des IUP. Ils trouvent aux formations « bac+cinq » (et aux diplômés des écoles d'ingénieurs à forte coloration mathématique) un caractère professionnel et novateur : c'est-à-dire que la formation anticipe des méthodes non encore utilisées en entreprise, ils voient là le gros intérêt des enseignements liés à la recherche.

Certaines de nos formations sont connues nationalement telles l'option finance du DEA de Paris VI, le DEA finance de Paris IX, le DESS stat-éco de Toulouse I-Toulouse III, le DESS d'économétrie d'Aix en Provence...

A priori, la formation est adéquate, *sauf en statistique* ! ! et c'est le secteur biologie qui semble en souffrir le plus... Les écoles d'ingénieurs semblent être moins performantes que les filières de mathématiques en université pour la formation aux outils informatiques et de ce fait, ces outils sont un atout dans la recherche d'un emploi pour nos étudiants. Enfin, la pluridisciplinarité est particulièrement appréciée et sa généralisation (sans que l'on en vienne à un « saupoudrage » de micro-modules...) leur parait souhaitable.

III. En conclusion, j'aimerais rappeler les recommandations que le CNE a tirées de ce rapport, puisqu'aussi bien c'est l'une des missions fondamentales de ce comité... (cf.[1] page 118)

(1) l'introduction d'une sensibilisation aux applications des mathématiques dès les premières années, du moins le plus tôt possible dans le cursus,
(2) l'introduction de façon significative des mathématiques pour les applications dans la formation des enseignants ; concrètement, cela peut vouloir dire : introduire une épreuve d'application dans les épreuves du CAPES comme cela a été fait pour l'agrégation,
(3) l'augmentation de la pratique et de la durée des stages, des interventions plus systématiques de professionnels dans les formations,
(4) la prise en compte (effective et pas théorique!) du suivi et de l'encadrement des stages dans les services des enseignants,
(5) un accroissement des interventions des professeurs de mathématiques dans les formations d'autres disciplines (cf. mathématiques, discipline de "service"),
(6) la mise en place de structures pour le suivi du devenir des étudiants,
(7) une augmentation substantielle des moyens humains pour la gestion des équipements informatiques,
(8) et puis il y a le domaine de la statistique... les filières de formation ne mettent pas à disposition du marché du travail les compétences en statistique, tant au niveau quantitatif (on manque de statisticiens) qu'au niveau qualitatif (on manque de statisticiens bien formés aux applications), et le CNE rejoint là les conclusions du rapport de l'Académie des Sciences sur la statistique,
(9) les doubles voire triples compétences (math+info, info+éco, maths+info+éco...) peuvent être favorisées, elles sont porteuses de débouchés,
(10) et enfin ! ! plus de lisibilité dans les diplômes... Puisse cette réforme du « L.M.D. » nous y aider...

Monique Pontier[1]

Références

[1] *Les formations supérieures en mathématiques orientées vers les applications*, Comité National d'Évaluation, juillet 2002. www.cne-evaluation.fr

[1]L.S.P., Université Paul Sabatier, Toulouse, pontier@lsp.ups-tlse.fr

Mathématiques et licences professionnelles

La licence professionnelle a été créée par un arrêté du 17 novembre 1999. Dès son premier article, cet arrêté précise que « la licence professionnelle est conçue dans un objectif d'insertion professionnelle ». Alors que l'on commençait à parler du modèle L-M-D pour l'organisation des études universitaires, il s'agissait d'offrir aux étudiants une possibilité de choisir une sortie professionnelle au niveau de la licence. De même qu'au niveau du Master, les étudiants ont le choix entre une sortie professionnelle (l'ex-DESS) et une sortie recherche donc préparant l'accès au niveau doctoral (l'ex-DEA), la licence professionnelle vient offrir une voie d'insertion dans le milieu du travail à côté des licences classiques préparant à l'accès au niveau du Master. Pour l'année universitaire 2002-2003, les licences professionnelles accueilleront entre 12000 et 13000 étudiants. Cet effectif peut être comparé au 180000 étudiants inscrits dans les licences traditionnelles.

Le caractère professionnel de la formation

Le caractère professionnel de la formation revient plusieurs fois dans le texte de l'arrêté. L'article 2 dit « La formation conduisant à la licence professionnelle est conçue et organisée dans le cadre de partenariats étroits avec le monde professionnel ». Ceci a eu trois conséquences. Une première, qu'on peut dire formelle, qui fait qu'il n'y a pas de programmes nationaux pour les licences professionnelles mais simplement un cadrage sur lequel nous reviendrons plus loin. En effet, sans exclure l'idée de l'existence de viviers nationaux d'emplois, les initiateurs du projet de licence professionnelle avaient clairement en tête de pouvoir répondre à des besoins plus locaux ou régionaux dont la prise en compte était laissée à l'initiative des universités. L'expérience a montré que l'intuition était bonne puisqu'à coté de licences visant des emplois dont la répartition est bien nationale ou même internationale (banque, commerce, informatique), on a vu naître des licences plus liées à l'activité de certaines régions (activités maritimes, activités viticoles, plasturgie...). On peut considérer comme une seconde conséquence la volonté de ne pas définir a priori des dénominations nationales. Ce fut l'un des rôles du Comité de Suivi mis en place à l'automne 2000 de faire des propositions à ce sujet. Il l'a fait en ne retenant que des dénominations relevant du secteur de la production ou du secteur des services, ce qui est parfaitement en accord avec l'objectif d'insertion professionnelle mais qui exclut a priori des dénominations purement disciplinaires, les mathématiques par exemple.

La troisième conséquence de cet article 2 concerne le fonctionnement de la commission nationale d'expertise. Son premier critère de choix a toujours été de vérifier l'existence d'un vivier d'emplois, l'adéquation du niveau licence à ces emplois et la validation de ces emplois et de leur niveau par un engagement fort des professionnels. Si l'on s'étonne alors du faible nombre des licences professionnelles formant à des métiers dans lesquels les mathématiques sont très présentes, la question à se poser est donc : y a-t-il un milieu professionnel revendiquant des emplois de mathématiciens au niveau de la licence ? Le tableau 1 montre que seule la Statistique a réussi une percée sous la forme d'option dans des dénominations nationales variées. Ce tableau est extrait de la liste exhaustive des 610 licences professionnelles habilitées pour les rentrées 2000, 2001, 2002. Bien sûr les mathématiques interviennent comme discipline plus ou moins importante dans d'autres licences. Ceci est traité dans la suite. On notera la forte présence des IUT, en particulier des départements STID (Statistique et Traitement Informatique des Données) dans ces licences.

Le cadrage des programmes

Nous l'avons dit, il n'y a pas de programmes nationaux. L'article 7 fixe les objectifs de la formation de la manière suivante :

« La licence professionnelle offre à l'étudiant :

– un approfondissement des connaissances et un élargissement des compétences dans les secteurs concernés ;

– un apprentissage de la mise en œuvre de ces connaissances et compétences dans les métiers visés ;

– une formation générale visant, notamment, à faciliter la maîtrise et l'utilisation de l'expression écrite et orale, d'au moins une langue vivante étrangère et des outils informatiques ainsi qu'à améliorer la connaissance de l'entreprise. »

L'arrêté précise que le cursus est « organisé, sauf dispositions particulières, sur une année », qu'il comporte un stage de 12 à 16 semaines et un projet tutoré et que l'un ou l'autre « implique l'élaboration d'un mémoire qui donne lieu à une soutenance orale ».

L'arrêté ne fixe pas un nombre d'heures d'enseignement. Ce fut un des points importants des discussions entre le ministre et le groupe de travail mis en place par le CNESER pour préparer l'arrêté. Les habitués de la formation à finalité professionnelle défendaient la nécessité d'un encadrement lourd donc d'un nombre d'heures important. Le ministre avait une autre vision. Elle apparaît dans l'article 4 « La formation fait, en tant que de besoin, appel aux nouvelles technologies de l'enseignement et à des modalités pédagogiques innovantes. La pédagogie doit faire une large place à l'initiative de l'étudiant et à son travail personnel... ». Il réussit à convaincre en s'engageant à financer les licences professionnelles au taux des filières professionnelles existantes : IUT et IUP.

Les circulaires envoyées chaque année aux universités pour les campagnes d'habilitation ont introduit un cadrage horaire plus précis en fixant un horaire maximal de 550 heures, projet tutoré compris, stage en plus.

Quelle place prennent les mathématiques dans l'ensemble des licences professionnelles ? Faute de pouvoir donner un état exhaustif des 610 licences habilitées, on a retenu les 34 projets soumis pour habilitation par les établissements de la région parisienne pour la rentrée 2002. Outre la dénomination nationale et l'option de la licence proposée, on donne l'unité d'enseignement dans laquelle l'enseignement des mathématiques figure et le coefficient donné aux mathématiques dans l'examen final. Lorsque cela a été possible, on a précisé les domaines des mathématiques traités (Tableau 2). 18 projets ne font aucune référence à un enseignement identifié de mathématiques. Pour des raisons de place, ils ne sont pas cités ici. On retiendra cependant que certains de ces projets concernent les mêmes dénominations nationales que celles données dans le tableau.

La diversité des choix faits par les universités et les équipes pédagogiques apparaît bien dans ce tableau. Les mathématiques ne sont pas toujours explicitement présentes dans la maquette. Quand elles le sont, elles apparaissent soit dans des unités d'enseignement général (outils scientifiques et techniques, formation scientifique et méthodologique, enseignement général, apport de connaissances en sciences et techniques industrielles, outils et méthodes, formation générale) soit dans des unités d'enseignement finalisé (traitement du signal, mécanique appliquée, sécurité et qualité, calcul actuariel et analyse financière, prévenir le risque, production automatisée). Dans plus de la moitié des projets soumis à l'habilitation, les mathématiques n'apparaissent pas. Faut–il en déduire qu'aucun enseignement de mathématiques ne sera fait ? Pas forcément car, les chapitres jugés nécessaires par l'informaticien, le gestionnaire ou le spécialiste de l'industrie agro–alimentaire peuvent être inclus dans le cours d'informatique, de gestion ou de production industrielle. On retrouve là une situation classique qui conduit les mathématiciens à s'interroger sur Qui enseigne Quoi ? et à s'inquiéter du danger que peuvent représenter des enseignements de mathématiques faits par des enseignants qui les dominent peu. On peut aussi s'interroger sur la capacité des mathématiciens à partager des projets de formation dont la finalité n'est pas les mathématiques. Doivent–ils le faire ? Sont-ils prêts à le faire ? Et si les réponses sont positives quelles en sont les conséquences pour la gestion des individus et de la discipline ?

Yves Escoufier[1]

[1]Université Montpellier II, `yes@univ-montp2.fr`

Secteur Professionnel	**Dénomination Nationale**	**Établissement**	**Option**
Communication et information	Systèmes informatiques et logiciels	Bretagne Sud (IUT, UFR Sciences et Sciences de l'Ingénieur)	Statistique décisionnelle en marketing
Communication et information	Systèmes informatiques et logiciels	Marne La Vallée (IUT de Paris V)	Décision et traitement de l'information : data mining
Communication et information	Systèmes informatiques et logiciels	Paris V (IUT de Paris V)	Décision et traitement de l'information : data mining
Échange et gestion	Management des organisations	Lille II (IUT, École supérieure des affaires)	Mathématiques de la décision
Service aux personnes	Santé	Grenoble I (UFR IMA, médecine, pharmacie)	Biostatistique : statistique et traitement informatique des données biologiques, médicales et pharmaceutiques
Service aux personnes	Santé	Grenoble II (IUT)	Biostatistique : statistique et traitement informatique des données biologiques, médicales et pharmaceutiques
Échange et gestion	Management des organisations	Nice (UFR Sciences, IUT)	Statistique et Informatique décisionnelle
Mécanique, électricité, électronique	Mécanique	Artois (UFR de sciences appliquées-lycées)	CAO et modélisation numérique
Communication et Information	Ressources documentaires et bases de données	Le Mans (UFR LLHS, IUP micro informatique, IUT)	Analyse de Données Géoréférencées appliquées à la distribution et aux services

TAB. 1. Licences professionnelles pouvant relever des mathématiques

Dénomination	**Option**	**UE**	**Sujets de mathématiques**	**Coeff.**
Automatique et informatique industrielle	Mesures et instrumentation	1) Traitement du signal 2) Métrologie	1) Connaître les méthodes d'analyse du signal et les outils mathématiques, utiliser un logiciel de simulation 2) Connaître les outils mathématiques de la métrologie, les normes et les appliquer, savoir étalonner un capteur	0,18
Gestion de la production industrielle		1) Outils scientifiques et techniques 2) Applications industrielles de la qualité et de la métrologie	1) Mathématiques, statistique, métrologie 2) Métrologie, statistiques industrielles	0,16
Le groupe motopropulseur et son environnement		Mécanique appliquée		0,13
Mécanique	CAO et FAO	Formation scientifique et méthodologique	Mathématiques appliquées à la conception	0,09
Réseaux et télécommunications	Sécurité et qualité en télécommunications	Sécurité et qualité	Cryptage	0,07
Assurance, banque, finance		Calcul actuariel et analyse financière		0,07
Protection de l'environnement		Enseignement général	Statistiques et exploitation informatique des données	0,06
Santé	Instrumentation et maintenance biomédicales	Apport de connaissances en sciences et techniques industrielles	Statistique	0,05
Industries chimiques et pharmaceutiques		Acquisition des savoir et des savoir faire biotechniques	Outils statistiques de la qualité	0,05
Tourisme		Organisation de l'entreprise et gestion des activités	Techniques quantitatives et modélisation	0,04
Commerce		Outils et méthodes	Aide à la décision	0,04
Instrumentation optique et visualisation		Formation générale	Résolution d'équations diff. ; transformée de Fourier et de Laplace, calcul matriciel, méthodes numériques, statistiques, transformée en Z, filtrage numérique	0,04
Industries chimiques et pharmaceutiques	Formulation		Méthodes et démarches statistiques	0,04
Gestion des risques à l'international		Prévenir le risque	Quantification en avenir certain, probabilité en avenir aléatoire, méthodes théoriques utilisées pour la gestion des risques d'un projet (RO, chaînes de Markov et applications en terme de graphe)	0,03 0,03
Intervention sociale	Remise en forme et loisirs sportifs associés		Savoir construire une enquête, des questionnaires et savoir analyser et interpréter les résultats	0,03
Production industrielle	Informatique industrielle et productique	Production automatisée	Maîtrise statistique des procédés	0,01

TAB. 2. La part des mathématiques dans les programmes de quelques projets de licences professionnelles.

L'enseignement de la Recherche Opérationnelle en France

Qu'est ce que la Recherche Opérationnelle ?

La Recherche Opérationnelle est née et s'est développée aux États-Unis dans la fin des années 1950. Voici une définition qui en a été donnée par la Société de Recherche Opérationnelle de Grande Bretagne :

« La Recherche Opérationnelle consiste en l'application de méthodes scientifiques pour résoudre les problèmes complexes rencontrés dans la direction et la gestion de grands systèmes d'hommes, de machines, de matériaux, et d'argent dans l'Industrie, le Commerce, l'Administration et la Défense. La caractéristique de l'approche est le développement d'un modèle scientifique (incluant la mesure de facteurs tels que le hasard et le risque) avec lequel on tente de prévoir et de comparer les résultats de diverses décisions ou stratégies. Le but est d'aider la direction à déterminer sa politique de manière scientifique. »

Les domaines d'application de la Recherche Opérationnelle se situent donc autour de l'aide à la décision, l'amélioration de la productivité, la gestion de production, l'optimisation dans les choix stratégiques des organisations. Une caractéristique tout à fait particulière de la Recherche Opérationnelle réside dans le fait que la modélisation fait partie intégrante de la démarche scientifique, en opposition avec d'autres branches des mathématiques appliquées (Équations aux dérivées partielles, Économie Mathématique) où les modèles à étudier sont formulés à partir d'autres disciplines (Mécanique, Physique, Économie). La Recherche Opérationnelle a donc une vocation interdisciplinaire très marquée autour des Mathématiques Appliquées mais aussi de l'Économie, des Sciences de Gestion, sans oublier les relations très fortes avec l'Informatique Scientifique. Cependant la conséquence négative de cette vocation interdisciplinaire a été pour la Recherche Opérationnelle la difficulté de pouvoir se structurer comme discipline scientifique. Aussi l'appellation Recherche Opérationnelle existe assez peu dans les programmes d'enseignement ; on trouve plutôt des filières d'enseignement dénommées : Aide à la décision, Productique, Gestion de Production, Génie Industriel, Logistique, Méthodes quantitatives de Gestion. Souvent les enseignements de Recherche Opérationnelle apparaissent comme des options ou des cours spécifiques de cursus qui couvrent un plus large spectre d'enseignements.

Les Mathématiques de la Recherche Opérationnelle

Les problèmes rencontrés en Recherche Opérationnelle sont soit de nature stochastique, soit de nature déterministe. Un enseignement de Techniques Mathématiques de la Recherche Opérationnelle comprend en général les enseignements suivants :

(1) Probabilités Appliquées (Files d'attente, Chaînes de Markov). Plus spécifiquement, tournés vers la Recherche Opérationnelle on trouve les enseignements suivants : Processus de décision en avenir incertain, Programmation dynamique, Théorie des Jeux, Fiabilité, Simulation aléatoire.

(2) Modèles déterministes : on trouve tout naturellement l'Optimisation Continue (Programmation Convexe), l'Optimisation Combinatoire (Programmation Linéaire, Programmation linéaire en nombres entiers, Théorie des Graphes et Optimisation dans les réseaux).

(3) On peut développer également des enseignements plus spécialisés à partir des cours de base précédents : Programmation stochastique, Théorie des ordonnancements, logistique, etc.

(4) Enfin citons des enseignements spécifiques qui ne figurent pas nécessairement dans tous les cursus de Recherche Opérationnelle : un cours sur les choix multicritères par exemple.

(5) Un programme d'enseignement en Recherche Opérationnelle doit comprendre également des cours de Statistiques, d'Informatique (Algorithmique et Programmation), et d'Économie et Gestion.

La plupart des disciplines que nous venons de citer existent en dehors de la Recherche Opérationnelle; il faut cependant mettre à part l'Optimisation et surtout l'Optimisation Combinatoire qui se sont développées à partir des applications de la Recherche Opérationnelle; on peut donc considérer que l'Optimisation Combinatoire et dans une moindre mesure l'Optimisation Continue forment l'ossature principale de ce qu'il est convenu d'appeler les Mathématiques de la Recherche Opérationnelle.

L'enseignement de la Recherche Opérationnelle

La plupart des Grandes Écoles d'Ingénieurs proposent des enseignements de Recherche Opérationnelle comme cours d'option; citons l'École des Mines, l'École des Ponts et Chaussées, l'École Centrale, l'ENSAE, l'École des Télécommunications, l'ENSTA, l'Ensimag à Grenoble et les Écoles d'Informatique sans oublier le Conservatoire National des Arts et Métiers qui dispose d'une chaire de Recherche Opérationnelle.

Les filières en Économie (Gestion, Sciences Économiques, Miage, Mass) proposent souvent (mais de manière très limitée) des enseignements en Recherche Opérationnelle (essentiellement la Programmation Linéaire).

Il n'existe pratiquement pas d'enseignements de Recherche Opérationnelle dans les filières de second cycle en Mathématiques Appliquées (sauf exception), ce qui est de toute évidence une anomalie. Deux raisons peuvent expliquer cette situation :

(1) tout d'abord, les cursus actuels s'organisent autour de disciplines bien identifiées; la Recherche Opérationnelle par son aspect interdisciplinaire a des difficultés à se structurer dans un tel cadre;

(2) la deuxième raison est le statut des Mathématiques Discrètes par rapport aux Mathématiques : les Mathématiques Discrètes et donc l'Optimisation Combinatoire sont en France principalement rattachées à l'Informatique; en conséquence, les enseignants-chercheurs en Recherche Opérationnelle, dans leur grande majorité, appartiennent à la discipline Informatique; on pourrait penser que l'enseignement de la Recherche Opérationnelle trouve une place naturelle dans les filières d'enseignement en Informatique; en fait, la Recherche

Opérationnelle est assez marginalisée là aussi et peu d'étudiants en Informatique choisissent l'option Recherche Opérationnelle quand celle-ci est offerte.

Au niveau des Formations Doctorales, il existe une douzaine de DEA et DESS couvrant des activités de Recherche Opérationnelle (en général partiellement) ; deux formations sont rattachées à des UFR de Mathématiques : à Paris 6, le DEA « Optimisation, Jeux et Modélisation en Économie » que l'on peut considérer comme un DEA de Mathématiques de la Recherche Opérationnelle, et à Bordeaux un DESS de Recherche Opérationnelle. La plupart des autres DEA sont rattachés à des UFR d'Informatique. Les deux DEA les plus importants du point de vue de la Recherche Opérationnelle sont à Grenoble (INPG et Université de Grenoble) avec un rattachement secondaire en Mathématiques, et Paris 6 (cohabilitation avec le CNAM).

Applications et Recherche

Le plus grand domaine d'applications des Mathématiques Appliquées est celui de l'Aide à la Décision et la Recherche Opérationnelle trouve tout naturellement sa place dans ce secteur à côté des Probabilités et des Statistiques ; il est évident que dans ce contexte, le nombre de formations en Recherche Opérationnelle est notoirement insuffisant dans l'Enseignement Supérieur. À titre d'illustration, une enquête récente de la Société Scientifique américaine SIAM montrait que le logiciel scientifique le plus utilisé au monde était l'algorithme du simplexe en Programmation Linéaire, très largement devant tous les autres logiciels.

Il faut éviter de considérer la Recherche Opérationnelle uniquement sous l'aspect d'une formation professionnalisante ; certes peu d'enseignants-chercheurs en Recherche Opérationnelle se réfèrent à la Recherche Opérationnelle dans leurs activités de Recherche. Ceci est tout à fait logique puisque la Recherche Opérationnelle n'existe pas vraiment en tant que discipline scientifique. Il faut cependant insister sur le fait que de nouveaux axes de Recherche en Mathématiques se sont créés ou développés à partir de la Recherche Opérationnelle : citons la Théorie des Jeux, l'optimisation continue (ces dernières années les méthodes de points intérieurs, la programmation semi-définie en connexion avec l'optimisation combinatoire). Citons surtout l'Optimisation Discrète qui a donné un essor considérable à la Théorie des Graphes à partir des années 1960. Ce sont également les chercheurs opérationnels spécialistes d'Optimisation Combinatoire qui se sont intéressés les premiers aux classes de complexité algorithmique des problèmes, domaine considéré aujourd'hui comme étant l'un des plus importants de l'Informatique fondamentale. Tous les domaines de recherche que nous venons de citer sont parmi ceux qui connaissent actuellement le plus grand essor. Ainsi la Recherche Opérationnelle à cause de sa nature interdisciplinaire a su développer de nouveaux concepts et favorisé l'émergence de nouveaux axes de recherche fondamentale.

En conclusion, il n'est pas toujours facile de situer la Recherche Opérationnelle ; cependant s'il fallait choisir, la Recherche Opérationnelle devrait être considérée comme une des branches des Mathématiques Appliquées car c'est à partir des

Mathématiques, discipline généraliste, que l'on peut le mieux appréhender les problèmes de modélisation (qui est toujours une modélisation mathématique), que l'on peut le mieux développer la résolution de ces modèles par une bonne connaissance des outils mathématiques, et que l'on peut le mieux interpréter et valider ces modèles.

On pourra consulter le cite Internet : `http://www.roadef.org`

Jean Fonlupt[1]

[1]Université Paris 6, `Jean.Fonlupt@ecp6.jussieu.fr`

Réflexions sur la désaffection pour les études scientifiques

D. Duverney

Daniel Duverney (`http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsite`) *a enseigné à des publics d'horizons divers : CNAM, lycée, IREM, prépa HEC technique puis option générale. Il est actuellement professeur de mathématiques spéciales Adaptation Technicien Supérieur à Lille. Sa réflexion sur les systèmes éducatifs l'a conduit à écrire un rapport sur la désaffection des étudiants en sciences, rapport dont nous publions ici une version « courte », la version intégrale étant disponible sur le serveur de la SMF* (`http://smf.emath.fr/Enseignement/Duverney.pdf`).

Introduction

On constate depuis 1995 une diminution, parfois spectaculaire, des effectifs d'étudiants dans certaines filières de l'enseignement supérieur scientifique. Cette situation a conduit à une inquiétude marquée chez les différents acteurs de l'enseignement et de la recherche scientifique. Elle a donné lieu à des rapports au Ministre de l'Education Nationale, des colloques, des manifestes, des articles de presse. Citons notamment :

Le rapport de Guy Ourisson, Président de l'Académie des Sciences : *Désaffection des étudiants pour les études scientifiques*, mars 2002. Ce rapport est disponible, avec ses annexes, sur le site Internet du Ministère de l'Éducation Nationale (`http://www.education.gouv.fr/rapport/ourisson`)

Le rapport de Maurice Porchet, Professeur à l'université de Lille 1 : *Les jeunes et les études scientifiques*, avril 2002 (`http://www.education.gouv.fr/rapport/porchet`).

Le colloque de Lille : *Les études scientifiques en question*, s'est tenu du 28 février au 2 mars 2002. Il a été suivi du **Colloque de Bordeaux** : *L'enseignement des sciences*, qui s'est tenu du 3 au 5 février 2003 (`http://www.u-bordeaux1.fr/Colloque-Sciences/index.html`).

Le Monde du 23 avril 2002 s'est fait l'écho auprès du grand public du rapport Porchet, sous le titre : *Les étudiants délaissent de plus en plus les études scientifiques* (`http://www.lemonde.fr/article/0,5987,3226--272727-00.html`). Le Monde de l'Éducation d'octobre 2002 a également consacré un dossier spécial à ce problème.

Récemment, un **communiqué de presse** commun à plusieurs sociétés savantes et associations d'enseignants scientifiques a pressé le Ministre de l'Education Nationale de placer la baisse du nombre des étudiants en sciences en tête des priorités du Ministère (`http://www.apmep.asso.fr/apmsci02.html`). Ce communiqué met en avant, à juste titre, les conséquences dramatiques de cette baisse sur l'avenir de l'enseignement et de la recherche dans des domaines d'importance économique vitale.

Tout ceci crée une atmosphère plutôt déprimante! Pourtant, l'enseignement scientifique supérieur français, bien appuyé par l'enseignement primaire et secondaire, a de beaux succès à son actif, par exemple le *doublement* du nombre annuel d'ingénieurs diplômés entre 1985 et 2000. Cet aspect du problème est largement occulté à l'heure actuelle. Un travail considérable a été accompli depuis 15 ans, dans des conditions souvent difficiles, par tous les acteurs du système d'enseignement, et il serait juste aussi de leur rendre hommage pour les résultats positifs obtenus pendant cette période.

À partir de ces considérations, dans le but de me faire une opinion personnelle, je me suis livré à un travail d'étude sur le sujet, et les pages qui suivent rendent compte de cette étude. Je pense qu'elle apporte un point de vue complémentaire aux rapports Ourisson et Porchet.

J'ai été constamment encouragé dans cette tâche par Michel Waldschmidt, Président de la Société Mathématique de France, que je tiens à remercier ici.

Jean-Louis Piednoir, Inspecteur Général de Mathématiques, m'a fait bénéficier de son expérience et m'a communiqué un texte qu'il avait rédigé sur l'orientation scientifique [9]. Il a notamment attiré mon attention sur l'effet probable de la réforme des lycées sur les effectifs universitaires, effet confirmé par les statistiques. Ce travail lui doit beaucoup.

Je remercie enfin Chantal Payras, de la Direction de la Programmation et du Développement (DPD), et M. Gossart et Mme Laurent, du service des statistiques du rectorat de Lille, qui m'ont aidé à me procurer les statistiques que j'ai exploitées dans cette étude.

Y a-t-il une baisse spécifique aux sciences ?

Le tableau 1 ci-contre présente une synthèse de l'évolution des effectifs de l'enseignement supérieur dans son ensemble, établie à partir des données fournies par trois notes de la DPD [4,6,7].

Ce tableau montre que la baisse des effectifs touche essentiellement, depuis 1995, les disciplines générales et de santé de l'université *dans leur ensemble* (et pas seulement les sections scientifiques, bien que celles-ci soient davantage touchées, comme nous le verrons plus loin). D'autres secteurs de l'université se portent bien ; c'est le cas des IUT et des écoles d'ingénieurs universitaires, qui ont enregistré dans la décennie une progression spectaculaire, ainsi que le montre la figure 1.

Cependant, si la baisse des *effectifs* est celle qui frappe le plus parce qu'elle se traduit directement en termes d'organisation matérielle (postes, crédits, nombre de divisions), ce n'est pas ce point de vue qui doit être adopté pour étudier la « désaffection » des étudiants pour les études scientifiques. En effet, toute variation du taux de redoublement affecte les effectifs ; en particulier, un taux de redoublement élevé augmente les effectifs, sans que cela puisse être considéré comme un point positif. C'est ainsi que de nombreux pays en développement

Année	1990-1991	1991-1992	1992-1993	1993-1994	1994-1995	1995-1996	1996-1997	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002
Université (hors IUT et ingénieurs)	1091,2	1139,9	1204,4	1295,8	1330,1	1358,3	1336	1305,2	1282,3	1272,8	1276,9	1264,3
Instituts Universitaires de Technologie	74,3	78,8	85	92,9	98,6	103,1	108,6	112,9	114,6	117,4	119,2	118,1
Écoles d'ingénieurs universitaires	17,3	18,9	21,2	22,3	23,3	24,2	24,8	26	27,5	29,4	30,8	31,7
Écoles d'ingénieurs indépendantes des universités	40,3	42,9	45,9	49	50,5	51,5	52	53,1	55,4	56,4	58,6	60
Classes préparatoires	64,5	68	67,7	66,9	65,4	70,3	72,7	73,1	71,4	70,9	70,3	70,7
Sections de Techniciens Supérieurs	203,8	226,8	240,8	242,6	238,9	236,3	241,9	245,3	246,6	248,8	248,8	246,9
Écoles Supérieures de Commerce	46,1	54,1	59,8	57,4	54,6	50,7	47,3	47	51,3	56,3		
Écoles Normales Supérieures	2,7	2,7	2,7	2,8	3	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2		
Autres écoles de spécialités diverses	172,5	225,6	237,5	260,6	269,3	272	269,4	266,6	267	270,4		
Ensemble	1712,7	1857,7	1965	2090,3	2133,7	2169,5	2155,8	2132,4	2119,3	2125,6		

TAB. 1. Effectifs de l'enseignement supérieur (en milliers)

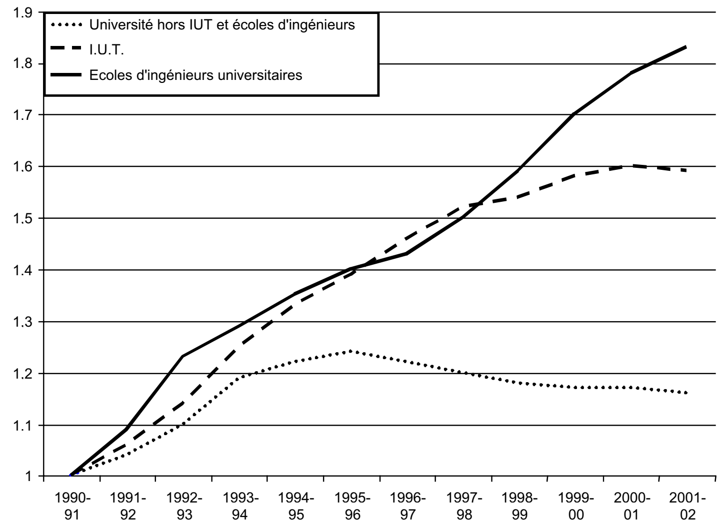

FIG. 1. Effectifs universitaires (base 1 en 1990-91)

affichent un taux de scolarisation brut supérieur à 100% dans l'enseignement primaire [12, p. 46-47].

Il nous faut donc raisonner en termes de *flux d'entrée* pour évaluer plus précisément si les bacheliers scientifiques et technologiques se détournent des études supérieures scientifiques et techniques. Ce point de vue permet en outre de prendre en compte les effets éventuels de l'évolution démographique.

Production de l'enseignement secondaire

Le flux d'entrée dans l'enseignement supérieur dépend évidemment du flux de sortie de l'enseignement secondaire. A priori, celui-ci est conditionné par deux grands facteurs : l'*évolution démographique*, qui fournit le « matériau brut », et la *politique éducative*, qui fixe les niveaux de formation souhaitables et, en principe, les moyens matériels et pédagogiques pour les atteindre.

Pour évaluer les effets de l'évolution démographique, on peut examiner l'évolution de la classe d'âge 18 ans (âge « normal » d'obtention du baccalauréat). Ces chiffres sont disponibles, par exemple, sur le site Internet de l'Institut National d'Etudes Démographiques (`http://www.ined.fr`) et sont résumés dans la figure 2.

Ainsi, la croissance des effectifs de l'enseignement supérieur entre 1990 et 1995 s'est-elle produite en période de baisse démographique (de 878 000 à 744 000, soit 15 %), tandis que la baisse des effectifs universitaires entre 1995 et 2000, telle qu'elle apparaît dans le tableau 1, a eu lieu en période de hausse démographique (de 744 000 à 797 000, soit 7%). Ce qui est évidemment inquiétant, c'est que la population des 18 ans va tendre à décroître dans les années à venir, pour tomber à 727 000 individus en 2015, soit une baisse de 9 % par rapport à 1999. Il est donc à prévoir que les effets de la démographie

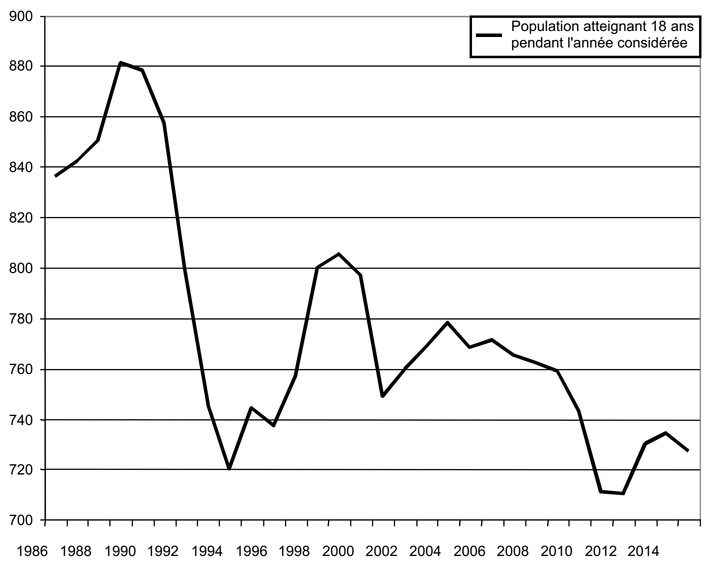

Fig. 2. Population atteignant 18 ans pendant l'année considérée (en milliers)

s'ajoutent, dans le futur proche, aux causes en action dans la période 1995-2000, pour provoquer une *nouvelle baisse* des effectifs universitaires.

Considérons maintenant l'évolution du nombre de bacheliers entre 1985 et 2000. Les chiffres suivants m'ont été fournis par Chantal Payras, de la DPD :

Session	Bacs S	Bacs STI	Bacs S + STI	Tous bacs	Bacs autres que S	Population des 18 ans
1985	83 479	21 465	104 945	253 050	169 571	840 568
1986	86 067	21 407	107 475	264 989	178 922	835 796
1987	90 694	22 934	113 629	278 224	187 530	842 245
1988	99 204	23 568	122 773	312 636	213 432	850 381
1989	109 787	25 556	135 344	347 770	237 983	881 284
1990	123 394	26 958	150 353	383 950	260 556	877 506
1991	131 529	28 563	160 094	416 246	284 717	857 186
1992	134 117	27 934	162 053	435 800	301 683	799 200
1993	138 083	30 998	169 083	445 752	307 669	745 065
1994	140 497	33 755	174 254	460 204	319 707	720 395
1995	136 553	34 429	170 984	479 494	342 941	744 744
1996	125 656	36 933	162 591	463 399	337 742	737 062
1997	122 148	33 256	155 405	469 121	346 973	757 354
1998	118 532	33 739	152 272	488 054	369 522	800 476
1999	125 133	35 329	160 463	489 358	364 225	805 483
2000	133 006	36 062	169 070	501 941	368 935	797 223
2001	123 448	34 811	158 260	484 176	360 728	748 525

Tab. 2. Évolution du nombre de bacheliers scientifiques et technologiques, 1985-2001 (France métropolitaine)

Rappelons que, jusqu'au bac 1994 inclus, le baccalauréat « scientifique » était divisé en trois filières : C, D, E ; elles sont regroupées sous la dénomination unique S dans le tableau 2. À partir de celui-ci, on peut par exemple étudier l'évolution du nombre de bacheliers scientifiques, et la comparer à celle de l'ensemble des baccalauréats.

Le tableau 2 fait apparaître une baisse du nombre des bacheliers S dès 1995 : il passe de 140 497 en 1994 à 118 532 en 1998, soit une baisse de 15 %. Malgré une légère remontée en 1999 et 2000 (nous y reviendrons plus loin), le nombre de bacheliers S a rechuté en 2001, pour retomber à son niveau de 1990. Par contre, les bacheliers autres que S ont continué à augmenter après 1995, passant de 319 707 en 1994 à 369 522 en 1998, soit une hausse de 15 %. Entre 1990 et 2001, le nombre des bacheliers autres que S a augmenté de 38 % !

De nouveau, on notera que cette diminution du nombre de bacheliers S a eu lieu en période de hausse démographique. Pour évaluer les effets de la démographie, on peut, en regroupant les données du tableau 2, obtenir le graphique suivant :

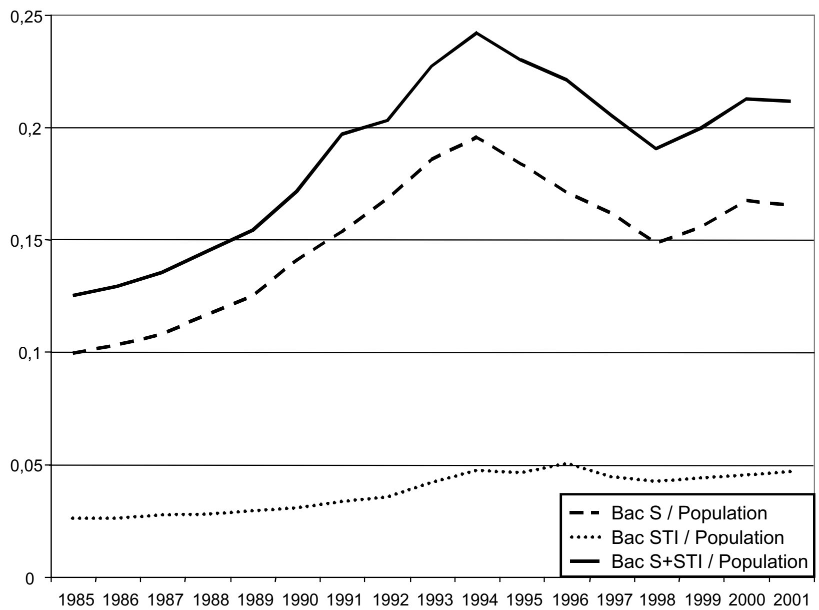

FIG. 3. Proportion d'une classe d'âge obtenant un baccalauréat scientifique ou technologique, 1985-2001

Ce graphique montre clairement le *décrochement* de la section S dès 1995 : alors que la proportion des scientifiques dans une classe d'âge n'avait cessé d'augmenter entre 1985 et 1994, passant de 10 à 19 % environ, cette proportion chutait à moins de 15 % en quatre ans !

On peut ainsi se poser la question de l'influence de la réforme de 1995 (dont une des principales dispositions était la disparition des terminales C, D, E) sur l'orientation scientifique. Selon Jean-Louis Piednoir, Inspecteur Général de Mathématiques, « il n'est pas exagéré de dire que la réforme des lycées a effacé les efforts faits les années précédentes pour développer les sections scientifiques » [9]. Nous reviendrons sur l'organisation pédagogique de la section S plus loin.

Pour terminer, signalons que le rebond du nombre de bacheliers S en 2000 est un phénomène purement technique : le taux de réussite au bac S a bondi à 82 % cette année-là, alors qu'il oscillait autour de 74-75 % les années précédentes. Dès 2001, le taux de réussite retombait à 79 %, et le nombre de bacheliers S rechutait. Pour 2002, les résultats provisoires publiés par la DPD font état de 123 213 bacheliers S en 2002, ce qui correspond à un taux de réussite de 80 %, et à une nouvelle baisse [7] ; l'évolution démographique joue ici à plein.

Que se passe-t-il en DEUG ?

Étudions d'abord le flux d'entrée des nouveaux bacheliers S dans les différentes sections de l'université. En regroupant les données extraites de différents numéros des *Tableaux Statistiques* publiés par la DPD, on obtient le tableau suivant (l'appellation « Sciences et structure de la matière » regroupe les DEUG MIAS, MASS et SM) :

	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Sciences et structure de la matière	34 651	29 857	26 442	25 313	24 251	24 438	22 151
Sciences de la nature et de la vie	17 827	14 315	13 953	14 172	12 056	12 442	10 795
Sous-total orientation scientifique	52 478	44 172	40 395	39 485	36 307	36 880	32 946
Sciences et techniques de l'ingénieur	1 968	1 889	1 952	2 262	2 786	3 236	2 961
IUT	15 602	16 170	16 442	18 484	18 551	19 805	18 994
Sous-total orientation technologique	17 570	18 059	18 394	20 746	21 337	23 041	21 955
Médecine	15 699	13 767	13 574	14 544	13 175	13 283	13 046
Pharmacie	4 450	4 012	3 981	3 952	3 475	3 375	2 986
Sous-total orientation santé	20 149	17 779	17 555	18 496	16 650	16 658	16 032
Droit et sciences Politiques	3 838	3 466	3 279	3 656	3 214	3 686	3 510
Sciences économiques hors AES	4 019	3 401	3 347	3 363	3 669	4 169	3 823
AES	472	366	345	335	368	398	378
Lettres et sciences du langage	1 518	1 472	1 460	1 606	1 636	1 799	1 643
Langues	1 895	1 774	1 689	1 860	1 787	1 843	1 851
Sciences humaines et sociales	3 954	3 327	3 358	3 597	3 497	3 767	3 848
STAPS	2 810	3 915	4 078	4 668	4 709	5 032	4 437
Sous-total autres orientations	18 506	13 806	17 556	19 085	18 880	20 694	19 490
Total	108 703	97 731	93 900	97 812	93 174	97 273	90 423

TAB. 3. Flux d'entrée des nouveaux bacheliers S à l'université, 1995-2001 (France métropolitaine)

Ce tableau fait apparaître une baisse importante de l'orientation des bacheliers S dans les sections scientifiques (-37 %) et de santé (-20 %) de l'université entre 1995 et 2001. Malgré une augmentation de 25 % de l'orientation technologique, l'orientation des bacheliers S vers l'université dans son ensemble diminue lourdement (-18 000 étudiants, soit 17 %). Contrairement à ce qu'on pourrait attendre, les autres sections de l'université de profitent pas de cette baisse : leur recrutement augmente de moins de 1 000 étudiants sur la période considérée, et encore cette augmentation est-elle due au DEUG STAPS.

Pour résumer, entre 1995 et 2001 :

– l'orientation scientifique diminue de 19 500 étudiants ;
– l'orientation technologique augmente de 4 500 étudiants ;
– l'orientation santé diminue de 4 000 étudiants ;
– les autres orientations augmentent de 1 000 étudiants.

Manifestement, la plus grande part de la baisse de l'orientation vers les sections scientifiques de l'université doit être imputée à la diminution du nombre de bacheliers scientifiques : selon le tableau 2, il passe de 136 553 en 1995 à 123 448 en 2001, soit une diminution de plus de 13 000 !

Cependant, il est à noter que les sections sélectives ont peu pâti de cette baisse. Examinons d'abord le flux d'entrée des bacheliers S dans les classes préparatoires :

	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Maths Sup.	14037	14136	13571	16492	15254	15578	14895	14726	15175	14850
Maths Sup Bio	2068	1929	2032	2378	2077	2015	1965	1926	1892	1868
Maths Sup Techno	3183	3187	3253	2960	2842	2619	2456	2445	2496	2483
Prépa véto	712	834	781	901	832	816	827	873	793	765
Autres	19	34	205	369	301	31	31	37	32	41
Total CPGE Sciences	20019	20120	19842	23100	21306	21059	20174	20007	20388	20007
CPGE Littéraires	1446	1337	1693	1220	1221	1183	1086	1014	1117	1221
CPGE Éco. et Com.	5616	4918	4176	3972	3688	3681	3805	3965	4118	3876
Total CPGE	27081	26375	25711	28292	26215	25923	25065	24986	25623	25104

TAB. 4. Flux d'entrée des nouveaux bacheliers S en classes préparatoires, 1992-2001 (France métropolitaine)

Il apparaît que ce flux reste approximativement constant dans les sections scientifiques, malgré un pic en 1995, qui correspond manifestement à la réforme des lycées et des classes préparatoires (et à la disparition de la section C).

Ainsi, s'il y a bien eu une baisse de l'orientation des bacheliers S en CPGE, elle a beaucoup moins touché les prépas scientifiques que les prépas commerciales. Du reste, si on écarte l'année 1995, qui peut être considérée comme exceptionnelle, et les évidents soubresauts qui l'ont suivie, l'orientation scientifique en prépas a augmenté depuis 1992, et semble provisoirement stabilisée.

Une partie relativement peu importante des bacheliers scientifiques s'oriente également vers les sections de Techniciens Supérieurs des lycées. Depuis 1995, l'orientation des bacheliers S en STS a augmenté d'environ 500 individus, mais reste inférieure à son niveau de 1994.

Pour résumer l'ensemble de ces données statistiques, nous récapitulons dans le tableau 5 le flux de bacheliers S, les entrées à l'université, en classes préparatoires et en BTS pour les années 1995-2001. Comme je n'ai pas pu me procurer les flux d'entrée dans les écoles d'ingénieurs et de commerce qui recrutent au niveau du Bac, ni dans d'autres formations éventuelles, je l'ai estimé, sur la base de [3], à 7 % du nombre total de bacheliers S, bien que ce taux ne soit sûrement pas constant. Ce tableau fait apparaître l'importance des doubles inscriptions dans les statistiques : il y a plus de nouveaux bacheliers S inscrits à Bac + 1 qu'il n'y a réellement de nouveaux bacheliers S !

	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Université	108,7	97,7	93,9	97,8	93,2	97,3	90,4
CPGE	28,3	26,2	25,9	25,1	25,0	25,6	25,1
STS	6,6	6,6	6,8	7,1	7,2	7,5	7,1
Autres	9,6	8,8	8,5	8,3	8,8	9,3	8,6
Total entrées	153,2	139,3	135,1	138,3	134,2	139,7	131,2
Bacheliers S	136,6	125,7	122,1	118,5	125,1	133,0	123,4
Doubles inscriptions	16,6	13,6	13	19,8	9,1	6,7	7,8
Doubles inscriptions (taux)	12,2 %	10,8 %	10,6 %	16,7 %	7,3 %	5,1 %	6,3 %

TAB. 5. Sorties du secondaire et « entrées » dans le supérieur, Titulaires du Bac S, 1995-2001, en milliers

Le nombre de doubles inscriptions s'obtient en retranchant le nombre de bacheliers S de l'année du flux total d'entrée dans le supérieur, c'est-à-dire de la somme des quatre premières lignes du tableau. Nous obtenons le taux de doubles inscriptions en effectuant le rapport du nombre de doubles inscriptions au nombre de bacheliers S. Le problème des doubles inscriptions apparaît ici nettement. Il nous conduit à relativiser la valeur des statistiques que nous avons données. Si nous voulons estimer la baisse réelle de l'orientation scientifique, il nous faut résoudre, au moins approximativement, ce problème des doubles inscriptions.

En effet, le taux des doubles inscriptions paraît varier très fortement. Pour l'année 2000, le taux que nous avons calculé est en accord avec celui donné par Clotilde Lixi dans [2, page 8] ; il semble en revanche être trois fois plus élevé en 1998 !

A priori, les étudiants en double inscription sont inscrits en classes préparatoires et à l'université. Nous sommes conduits à faire quelques hypothèses sur le nombre de ceux qui sont réellement en CPGE, c'est-à-dire qui ne partent pas à l'université en cours d'année scolaire.

Première hypothèse. Les doubles inscriptions sont essentiellement le fait d'étudiants de prépas s'inscrivant à l'université pour disposer d'un filet de sécurité et leur nombre est réparti dans les différentes sections des CPGE au prorata des effectifs de ces sections.

Deuxième hypothèse. Les étudiants inscrits en maths sup, maths sup bio et maths sup techno qui prennent une double inscription la prennent dans les sections scientifiques de l'université (ligne 3 du tableau 3).

Troisième hypothèse. Parmi les étudiants en double inscription inscrits dans les sections scientifiques des CPGE et de l'université, 80 % sont de vrais étudiants de prépa (ils suivent leur scolarité en CPGE) et 20 % sont de vrais étudiants de l'université (ils suivent leur scolarité en DEUG). Cette répartition peut se justifier en remarquant que les effectifs des prépas sont comptabilisés vers le mois d'octobre ; les absences étant contrôlées en CPGE, on sait que les abandons en cours d'année sont peu importants.

À partir de ces hypothèses, qui semblent raisonnables, on obtient par un calcul facile une estimation des flux réels d'entrée en CPGE et dans les sections scientifiques des universités.

	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Doubles inscriptions	12,6	10,5	10,1	15,3	7,0	5,1	6,0
Entrées en prépas scientifiques	19,3	18,1	18,2	16,2	17,7	18,6	18
Entrées en sections scientifiques de l'université	42,3	35,8	32,3	27,3	30,7	32,8	28,1
Bacheliers S (rappel)	136,6	125,7	122,1	118,5	125,1	133,0	123,4

TAB. 6. Estimation du flux « réel » d'entrée en prépas scientifiques et dans les sections scientifiques des universités, 1995-2001, en milliers

Bien que ce tableau ne présente qu'une estimation, réalisée à partir d'hypothèses qui peuvent être discutées, il paraît plus fiable que les statistiques brutes fournies par la DPD. En effet, le tableau 5 est parfaitement contradictoire, comme nous l'avons vu, puisque le flux d'entrée dans le supérieur excède le flux de sortie du secondaire !

Le tableau 6 permet de comparer les variations par rapport à l'année 1995 des flux d'entrée en prépas scientifiques et en sections scientifiques des universités au nombre de bacheliers S. On obtient le graphique suivant :

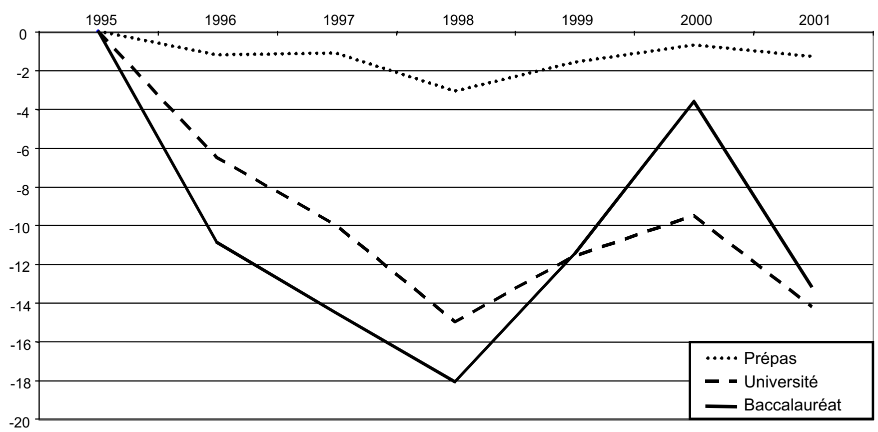

FIG. 4. Variation par rapport à 1995 du flux « réel » d'entrée en prépas scientifiques et dans les sections scientifiques des universités, 1995-2001, en milliers

Ce graphique nous permet de conclure cette section. Il n'y a pas de désaffection pour les études scientifiques au niveau de l'enseignement supérieur. *La principale cause de diminution des effectifs universitaires est la diminution spectaculaire du nombre de baccalauréats scientifiques.* Quand le nombre de bacheliers augmente, le nombre d'étudiants en DEUG augmente avec lui (1998-2000). Il en est de même en CPGE. Dans ce cas, les variations sont très amorties, mais elles sont visibles sur la figure 4.

Dans le cadre de cette diminution du flux des bacheliers S, les sections technologiques des universités, plus professionnalisées, enregistrent une progression positive, comme le montre le tableau 3 et le signale Maurice Porchet [10]. Mais ce phénomène, certainement significatif d'une recherche accrue de débouchés professionnels, n'est pas la cause principale de la chute de l'orientation scientifique en DEUG.

Néanmoins, le fait que les sections scientifiques des universités soient la principale victime de la baisse du nombre des bacheliers scientifiques en dit long sur leur niveau d'attractivité. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Le troisième cycle et la recherche

Examinons le tableau 7, extrait du rapport Ourisson, qui présente l'évolution des effectifs en DEA et en DESS entre 1993 et 2000.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
DEA		15 807	15 103	14 657	13 596	12 800	12 054	12 121
DESS	4 123	4 159	4 541	4 902	5 529	5 822		
Total		19 966	19 644	19 559	19 125	18 622		

TAB. 7. Évolution des effectifs au niveau Bac + 5, 1993-2000

Entre 1994 et 1998, ce tableau fait apparaître une baisse de 24% des effectifs en DEA scientifique, pour une augmentation de 40% des effectifs en DESS. Globalement, la baisse des effectifs au niveau Bac+5 universitaire est de 1344 individus, c'est-à-dire 7%. Mais cette baisse doit être relativisée par ce qui se passe à l'autre niveau Bac+5, c'est-à-dire les écoles d'ingénieurs. Selon le CEFI (http ://www.cefi.org/), le nombre d'ingénieurs diplômés est passé de 22 500 en 1994 à 26 000 en 2000. Ainsi globalement, le nombre de diplômés en sciences et techniques au niveau Bac+5 a-t-il augmenté de 42 500 environ en 1994 à 44 600 en 1998, soit 5 % en 4 ans.

Ceci dit, si nous revenons au problème de la recherche théorique en sciences, il est clair que la baisse est importante. Mais à ce niveau comme à celui du DEUG, il paraît tout à fait normal que les étudiants se dirigent vers les études leur assurant un débouché professionnel et un emploi. Par exemple, l'enquête « jeunes diplômés 1999 » du CEREQ donne les résultats suivants (disponibles sur le site du CEFI) :

Diplôme	CDI	Fonctionnaire	CDD, intérim, emploi jeune
DEA-DESS sciences exactes/naturelles	80,7 %	5,3 %	13,6 %
École d'ingénieurs	94 %	1,4 %	4,1 %
Doctorat sciences exactes	56,9 %	23,8 %	18,4 %
Doctorat sciences naturelles	41,6 %	20,3 %	35,6 %

TAB. 8. Débouchés au niveau Bac + 5 et au-delà (1999)

Le tableau duquel ces données sont extraites ne distingue malheureusement pas les cas du DEA et du DESS. Cependant, si on compare le taux d'emplois stables (CDI + Fonctionnaire) à l'issue d'un DEA-DESS à celui que l'on obtient à l'issue d'une thèse en sciences exactes ou naturelles, on se doute que le taux d'emploi à la sortie d'un DESS est plus proche de celui des écoles d'ingénieurs que de celui des doctorats. L'intérêt personnel des étudiants, en terme d'emploi, leur commande donc de se diriger plutôt vers des filières professionnalisées (ingénieur ou DESS) que vers des filières académiques (DEA + thèse). On retrouve le même phénomène qu'au niveau du DEUG.

Néanmoins, on peut se poser la question de savoir si cette baisse des effectifs dans les filières académiques ne va pas être préjudiciable, à terme, pour l'avenir (« Nous sommes convaincus que ces facteurs négatifs risquent d'être très dommageables pour notre pays, qui ne peut se contenter de devenir une nation de second rang sur le plan scientifique et technologique », [8, page 9]). Pour essayer d'y voir plus clair, j'ai consulté le World Science Report 1998 de l'UNESCO [13]. Les deux tableaux suivants, qui concernent la « triade » USA-Europe-Japon, m'ont semblé intéressants.

	1995 (%)			1995 (base 100 = 1990)		
	UE	USA	Japon	UE	USA	Japon
Biologie fondamentale	33,2	39,3	9,1	106	99	108
Recherche médicale	37,9	36,9	7,4	105	97	115
Biologie/Écologie appliquées	28,8	33,7	7,6	112	91	117
Chimie	31,6	23,3	12,2	111	99	109
Physique	29,7	27,4	9,9	109	91	103
Sciences de la terre et de l'espace	30,1	38,3	3,6	117	95	113
Sciences de l'ingénieur/Technologie	26,1	35,7	8,2	105	93	91
Mathématiques	31,4	33,1	4,2	106	93	88
Toutes disciplines	32,7	34,1	8,3	108	96	109

TAB. 9. Production scientifique de la triade, mesurée en publications

On observe dans le tableau 9 que, entre 1990 et 1995, la production scientifique en Europe (mesurée en nombre de publications) a augmenté de 8 points, avec une faiblesse marquée dans le domaine des sciences de l'ingénieur et de la technologie. Durant la même période, la production scientifique des USA a baissé de 4 points. Le tableau 10, à l'inverse, montre que le nombre de brevets déposés par les européens en Europe a baissé de 9 points, tandis que le nombre des brevets américains a augmenté de 25 points. Pour les brevets déposés aux USA, la part européenne a baissé de 22 points, la part américaine a augmenté de 8 points.

Cette chute du nombre de brevets reste valable pour la France : entre 1991 et 1995, la part française des brevets déposés à l'office européen des brevets est passée de 8% à 6,9%. En ce qui concerne l'office des brevets US, elle est passée de 3,1% à 2,8% [13, Table 4, p. 83].

Certes, la production scientifique n'est pas entièrement mesurée par le nombre de publications dans des revues. De même, le nombre de brevets déposés n'est pas non plus un indicateur parfait du niveau d'innovation technologique [11].

	1995 (%)			1995 (base 100 = 1990)		
BREVETS EUROPEENS	UE	USA	Japon	UE	USA	Japon
Électronique/Appareils électriques	34,9	35,1	24,2	90	121	85
Instrumentation	36,5	38,9	17,0	88	131	79
Chimie/Pharmacie	37,3	40,3	15,4	91	121	78
Procédés industriels/Métallurgie	48,2	29,4	13,6	95	119	85
Ingénierie mécanique/Transport	55,3	22,9	12,5	92	129	90
Biens de consommation	59,2	21,1	6,2	90	132	93
Ensemble	43,9	32,1	15,9	91	125	84

	1995 (%)			1995 (base 100 = 1990)		
BREVETS US	UE	USA	Japon	UE	USA	Japon
Électronique/Appareils électriques	11,0	47,3	34,6	66	104	104
Instrumentation	14,8	51,7	27,2	80	114	91
Chimie/Pharmacie	23,4	51,9	18,3	87	106	101
Procédés industriels/Métallurgie	22,0	49,8	20,2	83	106	105
Ingénierie mécanique/Transport	23,2	46,4	21,3	84	112	92
Biens de consommation	18,0	51,7	11,8	76	105	102
Ensemble	18,0	49,2	24,5	78	108	102

TAB. 10. Production technologique de la triade, mesurée en brevets

Cependant, les chiffres fournis plus haut suggèrent que l'augmentation de la production scientifique pure en Europe entre 1990 et 1995 (sans doute corrélée à l'augmentation des effectifs d'étudiants, qui a permis d'accroître mécaniquement le nombre d'enseignants-chercheurs) n'a pas entraîné le développement de la recherche industrielle appliquée. Ceci était signalé déjà dans le rapport Guillaume (Le Monde du 13 Mars 1998).

Or la recherche industrielle paraît au moins aussi importante pour l'avenir que la recherche académique (qui d'ailleurs ne peut être financée que par une économie dynamique et innovante). A priori, l'augmentation des filières en prise sur l'industrie au niveau Bac+5 (ingénieurs + DESS) qui se met en place depuis le début des années 90 pourrait aider à inverser la tendance actuelle en formant des chercheurs soucieux des applications industrielles. Néanmoins, le nœud du problème réside dans l'affectation des crédits de recherche. Une augmentation de ces crédits paraît nécessaire (y compris de la part des entreprises) et devrait être affectée à la recherche industrielle et à sa valorisation, notamment en direction des PME.

Signalons, en effet, que l'organisation institutionnelle de la recherche est très différente aux USA, dans l'Union Européenne et au Japon, comme le montre le tableau 11, extrait également de [13] :

On notera essentiellement, au niveau de la mise en oeuvre, la faiblesse européenne en recherche industrielle ; cette faiblesse pourrait largement expliquer la perte de compétitivité technologique de l'Union Européenne mesurée par la diminution du nombre des brevets déposés. Les dirigeants européens sont bien conscients de ce problème ; citons Claudie Haigneré, ministre déléguée à la recherche et aux nouvelles technologies : « La part du secteur privé dans le financement de la recherche n'est aujourd'hui que de 54 %. Cette part doit augmenter fortement pour atteindre 66 %, conformément aux objectifs que s'assigne l'Union Européenne. À terme, je souhaite que pour un euro de l'État, les entreprises en mettent deux. Pour y parvenir, il faut une dynamique d'ensemble,

Financement	Union Européenne	USA	Japon
Public civil	32,7	18,6	25,4
Militaire	8,2	22,4	1,1
Étranger	6,4	0,0	0,1
Industrie	52,8	59,0	73,4
Total	100,0	100,0	100,0
Volume (milliards de dollars)	125,0	168,5	69,7
Mise en oeuvre	**Union Européenne**	**USA**	**Japon**
Institutions de recherche publique	18,4	13,4	14,8
Université	19,7	15,6	14,1
Industrie	61,9	71,0	71,1
Total	100,0	100,0	100,0
Volume (milliards de dollars)	125,0	168,5	69,7

Tab. 11. Financement et mise en oeuvre des activités de recherche et développement, 1994 (en pourcentage de la dépense globale en recherche et développement)

un cercle vertueux. Si les entreprises sont incitées à investir davantage dans la recherche par des exonérations de TVA, elles seront encouragées à continuer. Nous présenterons d'ici à la fin de l'année en conseil des ministres, avec mon collègue de l'industrie, une politique en faveur de l'innovation » (Le Monde du 2 octobre 2002).

Les facteurs psychologiques

Le rapport Ourisson [8] insiste sur les aspects psychologiques du problème :

« Les études scientifiques et techniques dans les collèges et lycées restent trop souvent un pensum pour les élèves » (page 6) ; « La désaffection des jeunes envers certaines carrières scientifiques (...) est certainement liée à la réputation de difficulté de ces études » (page 6) ; « La pratique de la science est une activité ludique par excellence. Malheureusement, ceci ne se révèle que tard... » (page 7) ; « Les jeunes peuvent avoir l'impression tout à fait fausse que les études scientifiques les éloigneraient des 'vrais' problèmes du monde d'aujourd'hui . » (page 8) ; « Les études scientifiques ont la réputation d'être difficiles, exigeantes en durée et en intensité de travail ; cette réputation est justifiée, et il faut l'accepter. Plus tard, dans les classes préparatoires ou en université, c'est encore plus vrai : peu de week-ends pour s'amuser... » (page 8).

Même si ces affirmations sont partiellement justifiées, la difficulté des études scientifiques apparaît ici comme un fait immuable : la pédagogie, la réflexion sur les contenus, le problème du degré de technicité utile et des niveaux d'approfondissement ne sont pas mentionnés. Or, depuis les années 80, une grande part des réformes engagées (souvent malheureusement sans concertation avec les enseignants) a eu pour but de rendre les sciences plus attrayantes et d'assimilation plus facile. Ceci s'est payé par une baisse évidente du niveau du baccalauréat ; en même temps, ces réformes ont permis d'augmenter le nombre annuel de bacheliers scientifiques de 83 500 environ à 133 000 environ (+ 59

%) entre 1985 et 2000. Pourtant, le baccalauréat S actuel n'est pas une coquille vide, et son contenu scientifique est loin d'être ridicule : on peut construire dessus. La preuve, c'est que le nombre annuel de diplômes d'ingénieurs délivrés est passé de 13 000 à 27 000 durant la même période, et ces ingénieurs sont parfaitement compétents.

En fait, il semblerait, comme on l'a signalé plus haut après étude des statistiques, que de gros problèmes se rencontrent à l'université. Indépendamment de l'aspect économique et professionnel, dont nous avons également parlé, l'organisation pédagogique de l'université se révèle inadaptée à un enseignement scientifique supérieur de masse. Je cite Stéphane Beaud [1] :

« Au bas de la hiérarchie [du système d'enseignement supérieur français], le DEUG, sauf dans les rares disciplines protégées de la concurrence des IUT et BTS, occupe le dernier rang dans les choix d'orientation des bacheliers. « Tout sauf la fac », entend-on souvent dans la bouche des élèves de terminale (certains ajoutant même, instruits par l'expérience de leurs camarades de quartier : « On n'est pas assez bien tenu, il faut savoir travailler seul »), si bien que le premier cycle universitaire accueille de plus en plus d'étudiants « par défaut », mal armés scolairement, sans autonomie personnelle et sans « motivation », donc peu préparés aux exigences universitaires » (page 311).

« L'université est toujours le parent pauvre de l'Éducation Nationale, la pénurie y est structurelle. En accueillant dorénavant en DEUG des étudiants d'origine populaire sous-sélectionnés scolairement, elle produit un échec scolaire de masse qui devrait être considéré comme intolérable à ceux qui se réclament d'une « école républicaine ». On ne peut pas non plus nier que l'institution universitaire a aussi sa part de responsabilité dans la désaffection croissante dont font preuve les bacheliers à son égard : d'une part, en matière d'organisation pédagogique et, d'autre part, par sa politique de décentralisation » (page 313).

Ce point est également signalé par Maurice Porchet dans son rapport : « Les DEUG scientifiques résistent mal à la concurrence car leur image dans le public persiste à évoquer l'anonymat, les amphis surchargés, et l'absence de lisibilité professionnelle (...). Le DEUG Sciences et Technologies est en cause. Il doit intégrer les attentes des bacheliers ou accepter de voir ses effectifs continuer à baisser. » [10, page 20]

Par ailleurs, l'espérance de réussite joue certainement un rôle. En ce qui concerne les étudiants scientifiques, une enquête de la DPD [5] a été réalisée sur un panel de bacheliers de 1996 ; elle a montré que, deux ans après le début de leurs études universitaires, ils étaient dans les situations suivantes :

Ont obtenu leur diplôme	33,4 %
Font une troisième année	41,7 %
Se sont réorientés	18,2 %
Ont arrêté leurs études	6,7 %

TAB. 12. Taux de réussite en DEUG sciences, 1998

Il est clair que des taux d'échec élevés en DEUG scientifique peuvent inciter certains élèves à se diriger vers d'autres voies (technologiques courtes, écoles d'ingénieurs intégrées, voire STAPS, par exemple, où le taux de réussite en deux ans est de 55 % [5]).

On peut ainsi remarquer qu'une amélioration du taux de réussite de 10% seulement au DEUG assurerait 3000 étudiants scientifiques de plus par an au niveau Bac+3 (compte tenu d'un flux de 30 000 entrants en DEUG Sciences par an, voir tableau 3). Il est certainement possible d'agir au niveau pédagogique et organisationnel pour améliorer ce taux de réussite. Nous en reparlerons plus loin.

L'encyclopédisme de la section S des lycées

Revenons au problème central : la diminution du nombre de bacheliers scientifiques et la réforme de 1995. Il est tout à fait possible que l'orientation scientifique diminue à cause de l'encyclopédisme de la section S (suivant le mot de Pierre Legrand, Doyen honoraire de l'Inspection Générale de Mathématiques). Qu'on en juge dans le tableau qui suit, voici l'horaire hebdomadaire de la classe de Terminale S (source : B.O. n° 29 du 27/07/2000, disponible en ligne sur `http://www.education.gouv.fr/bo/default.htm`).

Enseignements obligatoires	Mathématiques	4,50 h + 1 h en groupe
	Physique Chimie	3 h + 2 h en groupe
	Sciences de la vie et de la terre	2 h + 1,50 h en groupe
	Philosophie	2 h + 1 h en groupe
	Langue vivante 1	1 h + 1 h en groupe
	Langue vivante 2	1 h + 1 h en groupe
	Histoire Géographie	2 h + 0,50 h en groupe
	E.P.S.	2 h
	E.C.J.S.	0,50 h en groupe
+ 1 Enseignement de spécialité obligatoire	Mathématiques ou	2 h
	Physique Chimie ou	2 h
	Sciences de la vie et de la terre	2 h

Tab. 13. Horaires de la classe de terminale S

Si nous ajoutons à cela 2 heures hebdomadaires de Travaux Personnels Encadrés, nous en arrivons à 30 heures hebdomadaires pour 9 matières obligatoires (Mathématiques, Physique, Chimie, SVT, Philosophie, LV 1, LV 2, Histoire, Géographie). À titre de comparaison, l'horaire de terminale L est de 26,5 heures (28,5 avec l'option latin), pour 6 matières obligatoires (Philosophie, Littérature, Histoire, Géographie, LV 1, LV 2). L'horaire de terminale ES est de 28,5 heures ou 29,5 (si l'enseignement de spécialité est la LV 2), pour 7 matières obligatoires (Sciences économiques et sociales, Histoire, Géographie, Philosophie, Mathématiques, LV 1 et LV 2).

En Première S, l'horaire est de 28,5 heures hebdomadaires pour 9 matières obligatoires : Mathématiques, Physique, Chimie, SVT, Français, Histoire, Géographie, LV 1, LV 2. En Première L, l'horaire est de 25,5 à 27,5 heures hebdomadaires (suivant les options obligatoires choisies) pour 7 matières obligatoires : Français, Histoire, Géographie, LV 1, LV 2 (ou latin), Mathématiques-Informatique, Enseignement Scientifique (Physique, Chimie, Biologie). En Première ES, l'horaire est de 28,5 à 29,5 heures hebdomadaires (si la LV 2 est choisie en option obligatoire) pour 8 matières obligatoires : Sciences économiques et sociales, Français, Histoire, Géographie, LV 1, LV 2, Mathématiques, Enseignement Scientifique (Biologie).

Il faut noter par ailleurs que la classe de Première S, par son encyclopédisme, est la seule qui ne permette pas de renforcer, par le choix d'une option obligatoire, une matière de prédilection. En Première L, l'élève peut choisir de renforcer sa langue vivante 1, sa langue vivante 2 ou le latin. Il peut aussi choisir d'étudier une troisième langue vivante. En Première ES, il peut choisir de renforcer les mathématiques, les sciences économiques et sociales, la LV 1 ou la LV 2. En Première S, il n'y a pas d'option obligatoire pour cause de surcharge, et l'élève doit étudier toutes les matières au programme, quelles que soient ses préférences et son projet professionnel.

Au moment des décisions d'orientation, en troisième et en seconde, il est tout à fait possible que cette forte disparité (qui ne provient pas des études scientifiques en elles-mêmes !) dissuade certains élèves peu courageux ou peu motivés, mais capables, de s'engager dans une voie scientifique. Ceci demanderait à être confirmé par une enquête auprès des collégiens et lycéens.

Ce qui paraît certain en tout cas, c'est que cet encyclopédisme a été renforcé par la disparition des sections C, D, E en terminale, et leur remplacement par la Terminale S. Un autre phénomène s'est renforcé lors de cette réforme : la prépondérance donnée aux sciences expérimentales dans la philosophie des programmes.

Quelques propositions

La pénurie de scientifiques va être importante durant les prochaines années, notamment par suite du départ à la retraite de la génération du baby-boom. Comme nous l'avons montré, les problèmes se posent à trois niveaux : le problème démographique, le nombre de bacheliers scientifiques, l'échec massif au niveau du DEUG. Il serait souhaitable d'agir d'urgence à ces trois niveaux.

Le problème démographique

Il ne peut être résolu que par l'immigration. Celle-ci est déjà en train de s'organiser ; par exemple le programme communautaire de bourses « Alban », mis en place récemment et doté d'un budget de 88,5 millions d'euros, vise à accorder des bourses à 4000 étudiants d'Amérique Latine pour venir dans les universités européennes (Le Monde du 18 Mai 2002). Les pays de l'ex-bloc soviétique, le sous-continent indien, l'Afrique, seront un réservoir de choix de futurs scientifiques, ingénieurs et techniciens. Ceci ressemble néanmoins à du pillage intellectuel ; en outre, pour d'évidentes raisons sociales, il sera préférable de limiter l'immigration au maximum.

La classe de terminale S

On pourrait la rééquilibrer en supprimant les deux heures et demie obligatoires d'Histoire-Géographie et en les remplaçant par deux heures d'enseignement de spécialité. Ceci correspondrait bien à l'esprit de l'arrêté du 19/06/2000 (B.O. n° 29 du 27/07/2000), qui stipule dans l'article 2 : *En classe terminale,* *les élèves choisissent obligatoirement un enseignement de spécialité dans la perspective d'études supérieures en fonction de leur projet personnel.* Les élèves désireux d'entreprendre des études supérieures en haut enseignement commercial pourraient ainsi choisir la spécialité Histoire-Géographie, sans que cette matière soit imposée à tous. En Première S, l'Histoire-Géographie pourrait être évaluée en contrôle continu et n'interviendrait au baccalauréat qu'au moment de l'oral, sous forme de bonus, par l'intermédiaire du livret scolaire.

Il ne serait pas absurde d'utiliser une des deux heures et demie ainsi récupérées en terminale S pour étoffer l'horaire de LV 1 (qui est vraiment très faible), et le porter à 3 heures hebdomadaires.

En outre, il me semble nécessaire de poser la question du caractère *obligatoire* de la langue vivante 2 en première et terminale S. Il y a quelques années, elle était facultative, ce qui permettait aux élèves plus lents de l'abandonner pour récupérer un peu de marge de manœuvre. Ne serait-il pas souhaitable de revenir à cette situation ?

À plus long terme, il est sans doute nécessaire de réfléchir à la philosophie d'ensemble du projet pédagogique des sections S. Mais ceci sera un travail de longue haleine, semé d'embûches, car il conduira inévitablement à des querelles disciplinaires. Par contre, les mesures proposées ci-dessus peuvent faire l'objet d'un relatif consensus chez les scientifiques (sinon chez les historiens) et être mises en place rapidement.

Le premier cycle universitaire

Je crois que le principal problème de l'université, au niveau du premier cycle, est celui de l'organisation des enseignements. Avec le public actuel, *un système d'enseignement qui n'organise pas de contrôle des absences est voué à l'échec*, quelle que soit par ailleurs la qualité de ses programmes et de ses enseignants. Dans les lycées, les conseillers d'éducation bataillent tous les jours pour assurer au moins la présence en cours d'une partie de la population scolaire.

À l'université, l'absentéisme est *massif*. Il est synonyme de découragement et d'échec. Or, il est impossible de contrôler les absences dans des amphis de 100 personnes et plus, où on entre et on sort comme dans un moulin. Il est nécessaire de revenir à un groupe-classe où les absences et les retards soient gérés, avant qu'ils ne soient sanctionnés finalement, durement, par l'échec aux partiels et aux examens. *Ce contrôle des absences est de la responsabilité de l'enseignant.* Le seul fait, d'ailleurs, d'être conscient de l'absence d'un étudiant et de se renseigner à son sujet, au moins auprès de ses camarades ou, à défaut, en lui téléphonant (comme le font les conseillers d'éducation dans les lycées), permettrait de lever l'anonymat dont se plaignent les étudiants à l'université.

Il ne m'appartient pas de dire quelle nouvelle forme devrait prendre l'organisation de la première année d'université, mais je crois qu'il faut le répéter avec force : sans contrôle des absences, il est vain d'espérer une amélioration substantielle de la réussite en première année d'université et, partant, de son attractivité.

Sensibilisation aux sciences et techniques

On peut espérer qu'un allègement de la charge globale de travail dans les sections scientifiques permettrait d'augmenter le flux d'élèves s'orientant en première S à l'issue de la classe de seconde. Ce dispositif pourrait être complété par une meilleure promotion des études scientifiques.

Il ne me paraît pas certain, comme le propose le rapport Ourisson, qu'une campagne de publicité télévisée ou des clips permette d'attirer plus d'élèves vers les sciences.

Par contre, « l'implication directe et institutionnelle des établissements dans les activités de culture scientifique et technique » [8, page 11] paraît une bonne idée. Ces activités pourraient être organisées directement par les établissements scolaires sous forme de *demi-journées banalisées*. Elles pourraient être au nombre de 4 par an, en classe de troisième et en classe de seconde ; au programme, visites d'entreprises de haute technologie, de musées scientifiques, de laboratoires de recherche. Il serait nécessaire de prévoir un centre de ressources par académie, avec un personnel permanent chargé d'organiser les différents contacts (notamment avec les entreprises et les laboratoires). En ce qui concerne les jeunes filles, par exemple, il est clair que des *contacts* directs, sur leur lieu de travail, avec des jeunes femmes *ordinaires* engagées dans des activités scientifiques et techniques pourrait avoir un effet positif.

Références bibliographiques

[1] Stéphane Beaud, 80% au bac... et après ?, Editions La Découverte, Série Enquêtes de Terrain.

[2] Les études scientifiques en question, Actes du colloque de Lille, mars 2002.

[3] Note d'information n° 98-05, DPD, 1998.

[4] Note d'information n° 98-34, DPD, 1998.

[5] Note d'information n° 00-25, DPD, 2000.

[6] Note d'information n° 01-09, DPD, 2001.

[7] Note d'information n° 02-38, DPD, 2002.

[8] Guy Ourisson, Désaffection des étudiants pour les études scientifiques, Rapport au ministre de l'Education Nationale, mars 2002.

[9] Jean-Louis Piednoir, L'orientation scientifique, Inspection Générale de Mathématiques.

[10] Maurice Porchet, Les jeunes et les études scientifiques, Rapport au ministre de l'Education Nationale, avril 2002.

[11] Frédéric et Jean-Michel Wagret, Brevets d'invention, marques et propriété industrielle, PUF, Que sais-je, 7ème édition, 2001.

[12] World Educational Report 2000, UNESCO Publishing.

[13] World Science Report 1998, UNESCO Publishing.

La version complète de ce rapport « Réflexions sur la désaffection pour les études scientifiques » est disponible sur le site de la SMF à l'adresse `http://smf.emath.fr/Enseignement/Duverney.pdf`.

INFORMATIONS

Compte-rendu des activités du groupe web-math

Comme suite au Conseil d'Administration de la SMF du 18 octobre 2002 et à la demande d'Antoine Chambert-Loir, nous rendons compte ici des activités du groupe *web-math* en essayant de détailler le bilan de la première année, transmis le 23 septembre 2002 aux présidents de la SMAI et de la SMF ainsi qu'aux responsables du MENRT et du CNRS. Ce bilan est disponible depuis le 24/09/02 sur la toile à l'adresse :

`http://www.emath.fr/bilan01.php`.

Le groupe *web-math* a été créé en septembre 2001. Ses objectifs sont décrits sur la page

`http://www.emath.fr/web-math.php`.

Il s'agit d'un groupe de réflexion chargé notamment d'améliorer le domaine `emath.fr` et de gérer les pages communes de ce domaine. Il est composé d'une vingtaine de personnes dont la liste est disponible à `http://www.emath.fr/membre.php`. S. Cordier, animateur, L. Koelblen, webmestre de la SMF, J. Marchand, responsable du serveur principal et A. Prignet, webmestre de la SMAI, en sont les chevilles ouvrières.

Le domaine `emath.fr`

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est bon de préciser quelques notions concernant le réseau Internet. Le domaine `emath.fr` appartient aux sociétés savantes SMAI et SMF. On peut le vérifier sur la page `http://www.nic.fr` en entrant `emath` dans la case en haut à droite et en cliquant sur « la société » dans la page de réponse.

Un domaine peut servir à nommer plusieurs ordinateurs (appelés aussi serveurs) qui eux-mêmes peuvent héberger des sites Web, ainsi que la gestion du courrier électronique. Le premier service que comporte un domaine est le service DNS (abréviation de *Domain Name Server*), qui sert à nommer les objets figurant sur le réseau, et donc permettre le fonctionnement du réseau. Lorsqu'un ordinateur connecté sur Internet cherche à contacter le serveur Web `http://www.emath.fr/`, il doit préalablement trouver l'adresse IP (adresse Internet composée de quatre nombres compris entre 0 et 255, notée sous la forme x.y.z.t) du serveur `www.emath.fr`, pour émettre une requête à destination de cet ordinateur. Car en effet sur les câbles, ne circulent que des adresses IP sous forme numérique, et pas d'adresses « symboliques ».

Comme il est brièvement expliqué sur la page `http://www.emath.fr/info.php` le domaine `emath.fr` a été créé en 1995 grâce à une subvention importante du MENRT destinée à développer des revues électroniques. Les revues qui ont ainsi été créé sont COCV (Contrôle optimal et calcul des variations), PS (Probabilités et Statistiques) et Proc. (Proceedings) de la série ESAIM (European Series in Applied and Industrial Mathematics). Depuis 2000, la gestion des revues ainsi créées a été confié à la société d'édition EDP Sciences (`http://www.edpsciences.com`), mais les pages web officielles et le courrier électronique restent sur `emath.fr`.

Notons qu'il serait aujourd'hui beaucoup plus difficile pour les sociétés savantes d'obtenir un domaine finissant en `.fr` [1], les règles d'attribution des noms de domaines étant maintenant plus strictes. Sauf opportunité, il est donc inutile de chercher à en changer. Par exemple, le domaine `math.fr` qui appartient aux éditions Odile Jacob pourrait être demandé car il n'est pas utilisé. Cependant, il est à craindre qu'une entreprise commerciale ne cherche à profiter de cet investissement spéculatif. De plus, le domaine `emath.fr` est désormais entré dans les mœurs (et les favoris/signets/bookmarks!) des membres de la communauté mathématique française.

Le domaine `emath.fr` a été successivement géré à l'INRIA (Sophia-Antipolis), puis à l'École polytechnique (Palaiseau), au sein du laboratoire de mathématiques appliquées (CMAP). Jusqu'à cette époque, c'était sur un serveur Sun financé par le projet du ministère. Il a été ensuite géré par EDP Sciences.

Depuis le mois d'avril, le service DNS du domaine `emath.fr` est hébergé sur l'un des serveurs du réseau `math.jussieu.fr` de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ) et de l'UFR de Mathématiques de Paris 7. À cet effet, une convention a été signée entre la SMAI, la SMF et l'IMJ.

Le transfert de la gestion du domaine de EDP Sciences à l'IMJ s'est déroulé sans problème, en tout cas du point de vue des utilisateurs. Ce transfert a été transparent et il n'y a pas eu d'interruption de service. Il a permis d'économiser les frais de gestion que réclamait EDP Sciences, d'un montant de 15 000 F par société savante.

Ses serveurs

Le domaine `emath.fr` comprend les serveurs suivants :

– `cantorII.jussieu.fr` qui héberge les sites web des revues électroniques ESAIM, des pages communes, de la SMAI et la SMF, de l'annuaire (ACMF) ;
– `smai2.emath.fr` qui héberge une partie du site web de la SMAI, celui de l'opération Postes, et les listes de diffusions de la SMAI ;
– `acm.emath.fr` qui héberge le site web de ACM, de MATEXO, la gestion du courrier électronique du domaine, l'archivage de plusieurs listes de diffusion ;
– `math-kalahari.ujf-grenoble.fr` qui héberge le site web de MathDoc.

[1] Pour plus d'informations à ce sujet, consulter le site de l'AFNIC, `http://www.afnic.fr`, organisme qui gère les noms de domaines en France.

Ses sites Web

Le domaine `emath.fr` comprend les sites Web suivants.

Sauf celui de l'opération Postes qui est lié à l'actualité des concours et connaît donc un pic de fréquentation en mai-juin, la plupart de ces sites ont une audience régulière. En cliquant sur la petite icône représentant une courbe rouge sur un fond bleu, on peut accéder aux statistiques de connexions réalisées (gratuitement) par le serveur `nedstat`.

Revues ESAIM

Les pages web des revues ESAIM sont actuellement éparpillées sur le serveur et en cours de réorganisation par la SMAI.

SMAI

Le site de la SMAI, dont le webmestre actuel est A. Prignet.

SMF

Le site de la SMF, dont le webmestre actuel est L. Koelblen.

Pages communes

Il s'agit d'un site dit « portail » qui ne propose pas réellement de contenu propre mais renvoie sur les autres sites et permet éventuellement des recherches par mots clefs, à l'instar de nombreux autres portails généralistes ou spécialisés. La présence d'un portail de ce genre sur un domaine est courante, mais pas obligatoire.

La gestion de ces pages est confiée au groupe *web-math*, comme indiqué sur la page d'accueil.

Agenda des Conférences de Mathématiques (ACM)

ACM diffuse des informations sur les séminaires réguliers (environ 200 en France) à la fois par son site Web et par un système d'abonnement hebdomadaire, ce qui permet éventuellement aux organisateurs de séminaires référencés de se décharger de cette tâche. Il a été créé grâce à une subvention du MENRT soutenue par la SMAI et la SMF en 1998. Son initiateur, animateur et webmestre est S. Cordier.

Postes

Aussi connu sous le nom d'Opération Postes, c'est une initiative créée en 1998 par A. Prignet sur le serveur SMAI. Il s'agit de diffuser les informations concernant les concours de recrutements d'enseignants-chercheurs (en particulier de maîtres de conférences et professeurs pour les sections 25, 26 et désormais 27). Cette opération a lieu avec la collaboration de la SMF, des sociétés savantes d'informatique (SPECIF et AFIT) et de la Guilde des Doctorants (GDD). Il est géré par une équipe d'une dizaine de personnes.

MATEXO

Il s'agit d'une base d'échange d'exercices de mathématiques (initialement en TEX) qui permet aux enseignants de mathématiques du supérieur d'échanger des ressources pédagogiques. Le développement de ce site a été soutenu par le laboratoire Jacques-Louis Lions et par l'UFR 921 de l'Université Pierre et Marie Curie. Il compte actuellement plus de 500 utilisateurs. Initialement lancé par S. Cordier et T. Lachand-Robert, la version actuelle du site a été réalisée par A. Chambert-Loir. Ses coordinateurs sont L. Boudin et F. Lagoutière.

Annuaire de la Communauté Mathématique Française (ACMF)

Créé initialement sur le domaine `math.cnrs.fr`, cet annuaire contient désormais outre les informations (nom, prénom, email, téléphone, page Web personnelle) des membres de 40 laboratoires associés au CNRS, celles des annuaires de la SMAI et de la SMF. Cet annuaire consultable sur le serveur web peut également être interrogé directement par la plupart des logiciels de messagerie. Son initiateur, animateur et webmestre est J. Marchand, avec un fort soutien de plusieurs personnes, dont notamment L. Koelblen pour l'aspect programmation des outils de traitement et d'affichage.

MathDoc

Il s'agit du serveur Web de l'UMS 5638 du CNRS et de l'Université Joseph-Fourier de Grenoble. Il est dirigé par Y. Laurent et L. Guillopé. Ce serveur est situé à Grenoble et diffuse de la documentation (notamment prépublications, thèses...). Il participe également au développement de Zentralblatt et à de nombreux projets en particulier européens (par exemple, EULER). Un service permet de recevoir par courrier électronique les sommaires de nombreuses revues.

Le groupe *web-math*

Afin de dynamiser le domaine `emath.fr`, S. Cordier a proposé en juillet 2001, aux présidents nouvellement élus des sociétés savantes SMAI et SMF de créer le groupe *web-math* afin d'essayer de rendre le domaine `emath.fr` plus attractif, plus dynamique, et notamment son portail `http://www.emath.fr`. Le groupe a été créé en septembre 2001 et compte désormais une vingtaine de membres, choisis en raison de leur appartenance aux instances de décisions des sociétés savantes ou de leur compétence concernant le réseau (parfois les deux, l'un n'empêchant pas l'autre).

Le groupe *web-math* fonctionne essentiellement par courrier électronique (même s'il n'est bien entendu nullement interdit de se téléphoner, ni même de se voir) et vous pouvez envoyer un message à l'ensemble de ses membres à `web-math@acm.emath.fr`. Les messages sont archivés et consultables à `http://acm.emath.fr/archives/web-math/`, protégés par une authentification par *login* et *password*. Suivant le même principe que pour la fenêtre d'authentification de l'opération Postes, ceux-ci (`web-math` et `2` respectivement) sont indiqués à l'internaute. Cette protection permet la consultation de ces messages tout en empêchant qu'ils ne soient archivés par les moteurs de recherche.[2] Cette liste contient plus de 300 messages.

[2]... et que cela n'augmente encore les problèmes de courriers indésirables (*spams*)

Les activités du groupe *web-math*

Le portail

Le portail intéresse naturellement le groupe *web-math*. La première version a été réalisée au début de l'année 1998 par S. Cordier après une réunion commune SMAI-SMF en janvier 1998 à l'IHP à ce sujet. Il s'agissait d'une première page souhaitant la bienvenue sur le « serveur de l'école mathématique française », expression qui après un débat animé avait fait l'objet d'un consensus comme traduction du domaine `emath.fr`. Ensuite, plusieurs rubriques étaient proposées : institutions, journaux, pédagogie, emplois, divers. Une version anglaise était également disponible en cliquant sur un drapeau britannique.

Mis à part quelques corrections de liens, cette version n'a pas été modifiée jusqu'en mars 2002. N'ayant aucun accès au machines d'EDP Sciences qui gérait alors le serveur, cela n'était pas en effet pas aisé.

Une proposition a été faite orientant les visiteurs suivant leur profil : *chercheur* renvoyant sur les sites destinés à la recherche, *enseignant* pour les serveurs à vocation pédagogique et *amateur* pour les sites « grand public ». Cette proposition qui est visible à `http://acm.emath.fr/web-math/emath/index2.html` n'a pas obtenu de consensus et n'a donc pas été soumise aux sociétés savantes.

Une mise à jour des anciennes pages a été effectuée.

Logo

Un logo a été dessiné. Avec l'accord de M.-C. Vergne (I.H.É.S), il reprend celui qu'elle avait réalisé pour l'année mathématique mondiale 2000, en remplaçant 2000 par EMATH. Les voyelles sont retournées pour rappeler les quantificateurs logiques universels.

La mention *École Mathématique Française* pour définir le domaine `emath.fr` a été supprimée car cette expression ne faisait pas l'unanimité. De nombreuses personnes préfèrent considérer le *e* comme l'abréviation de électronique comme dans les expressions email, e-business... Il nous a semblé plus simple de ne pas imposer de signification au nom de domaine et laisser chacun le comprendre selon sa sensibilité.

Le bandeau. Vers une charte graphique

En attendant une réorganisation profonde du portail, ses pages ont simplement été « relookées ». Plus précisément, les différentes rubriques ont été placées dans un bandeau de couleur inspiré fortement du style mis au point par L. Koelblen pour le serveur SMF. Ce système a été ensuite adopté par tous les sites du domaine `emath.fr`. Chaque site reste bien sûr libre de placer ou non ces éléments sur ses pages.

Il s'agit en quelque sorte d'une charte graphique bien que chacun des sites soit totalement indépendant et libre de respecter ou non cette unité de présentation. Il n'est pas du tout question d'uniformiser le domaine en imposant des contraintes, mais plutôt de faciliter la navigation aux visiteurs en rendant aisément identifiables les principales rubriques du portail. Par ailleurs, une ligne est placée au-dessus de ce bandeau avec des liens sur les différents sites du domaine `emath.fr`. Ce bandeau permet aux visiteurs de mieux connaître les sites du domaine qui se font ainsi mutuellement de la « publicité ».

Il s'agit de notre point de vue d'un système discret et qui permet de renforcer l'esprit d'appartenance au domaine `emath.fr`. À nouveau, cette ligne peut être considérée comme un élément d'une mini-charte graphique qui, pour le moment, est informelle. Il ne nous semble pas souhaitable de formaliser cette charte car celle-ci est appelée à évoluer et cela ne ferait qu'ajouter des contraintes et rendre plus difficile les nécessaires évolutions.

L'annuaire

Il a également été discuté de la participation de la SMAI et la SMF à l'ACMF, que J. Marchand avait créé sur `math.cnrs.fr`, en mars 2001. Le principe retenu initialement était d'ajouter les informations uniquement pour les membres des sociétés qui ne faisaient partie d'un laboratoire ayant fourni ses données à l'ACMF. Pour simplifier, et dans un premier temps, il a été préféré d'ajouter systématiquement les données (pour les membres n'ayant pas demandé à ne pas figurer dans l'annuaire) quitte à ce que celles-ci apparaissent donc en double si la personne est dans un laboratoire participant et une société savante (voire en triple s'il/elle fait partie des deux sociétés savantes). Les membres de la SMAI et de la SMF ont été informés du fait qu'ils étaient désormais dans l'ACMF et de la possibilité de ne plus l'être. Rares furent les demandes de ne plus apparaître.

Comme le président de la SMF l'a rappelé récemment, il est nécessaire de déclarer cet annuaire à la CNIL. Comme l'a expliqué J. Marchand[3], c'est essentiellement parce qu'une telle déclaration est extrêmement compliquée qu'elle n'a pas encore été faite : autant il est facile pour un organisme (société, association...) de remplir la déclaration simplifiée, disponible en ligne sur le site de la CNIL[4], pour son annuaire autant cela devient délicat lorsqu'il faut réunir la signature de directeurs de laboratoires (40 pour l'instant, et la liste ne cesse de s'allonger).

Aux dernières nouvelles (28 novembre), la déclaration pourrait être finalisée directement par la Direction des affaires juridiques du CNRS et c'est le CNRS qui en serait le déclarant.

Moteur de recherche

Notons aussi la présence d'un *moteur de recherche*, réalisé avec l'aide de P. Havé, qui permet de transmettre des mots clefs à l'un des quatre moteurs suivants : google, yahoo/math, math.cnrs.fr, anneau des mathématiques francophones. Comme indiqué sur le site (en cliquant sur *avertissement*), les requêtes sont enregistrées ce qui permettra de savoir ce que cherchent les visiteurs et donc de proposer des sites adaptés au profil des visiteurs.

---

[3] `http://acm.emath.fr/archives/web-math/msg00312.html`
[4] `http://www.cnil.fr/`

Sites pédagogiques

L'un des derniers arrivés des sites sur le domaine emath.fr est MATEXO. Le domaine `emath.fr` n'avait pas jusqu'alors de sites à vocation pédagogique. Le groupe *web-math* a été contacté en juillet par les animateurs d'un site similaire, EXEMAALT, qui demandait à être hébergé sur le domaine `emath.fr`.

Il nous a semblé que cela posait une question importante sur le rôle du domaine. Est-il souhaitable d'héberger de nombreux sites ? Faut-il au contraire, comme c'est le cas jusqu'ici, essayer que les sites du domaine couvrent des domaines complémentaires (séminaires pour ACM, annuaire pour ACMF, pédagogie pour MATEXO, Documentation pour MathDoc, recrutement pour postes) ? Pour le moment, cette question n'a pas encore été étudiée en détail par le groupe *web-math*. Il a été répondu aux responsables d'EXEMAALT qu'un rapprochement avec MATEXO serait sans doute souhaitable pour les deux sites et des contacts ont été pris. Les conseils des sociétés savantes ont peut-être des recommandations à ce sujet.

Site « grand public »

Il nous semble que ce qui manque actuellement le plus est un site destiné au « grand public », dans l'esprit du programme européen *Raising Public Awareness* que l'on pourrait traduire, en gardant le même acronyme par *Rendre au Public Accessible*. Une proposition a été faite auprès de la SMF et du MENRT par M. Chaleyat-Maurel pour essayer de continuer les actions engagées lors de l'année mondiale mathématique 2000. Le projet n'a pas été soutenu.

Avant qu'un groupe commercial ne se lance dans cette voie, il nous paraît cependant important qu'un site à destination du public soit développé, car cette carence entretient sans doute dans l'esprit du public l'image du chercheur isolé dans sa tour d'ivoire et se désintéressant de la société. La difficulté n'est pas tant de proposer une maquette permettant notamment de conserver les réalisations de l'année 2000 (affiches, timbres, brochure,...) que de trouver une solution pérenne pour un site actualisé régulièrement. Ceci nécessite des moyens notamment humains : s'ils ne reposent que sur du bénévolat, on prend le risque que le site arrête d'évoluer lorsque les bonnes volontés seront « fatiguées ».

Collaborations européennes

Notons enfin qu'après la diffusion du bilan, le groupe a été consulté à propos de la participation des sociétés savantes au projet *math-net*. Ce projet d'origine allemande à vocation mondiale entend proposer des standards de présentations pour les sites destinés aux mathématiciens. L'idée est qu'une présentation unifiée rend la recherche d'information plus facile. L'avis émis a été réservé en raison de la rigidité des règles proposées, qui fonctionne bien dans les pays germaniques mais ne correspond pas à la culture française, malgré quelques tentatives discutées sur la liste mathrice, qui regroupe les informaticiens (ou personnes en charge de l'informatique) des laboratoires de mathématiques associés au CNRS. De plus, la SMAI, la SMF et l'EMS ont proposé en mai 2000 une collaboration entre *math-net* et ACM, proposition qui n'a depuis pas obtenu de réponse, ni positive, ni négative. Il nous paraît important d'obtenir une réponse sur cette proposition avant d'accepter de participer à cette initiative.

Conclusion

Nous espérons que ces clarifications sur le bilan du groupe *web-math* susciteront des propositions constructives voire des vocations pour que le domaine `emath.fr` devienne un outil toujours plus utile à la communauté mathématique française et soit bénéfique à l'image que nous offrons sur le réseau internet dont l'importance tant pour la recherche, mais aussi pour l'enseignement et la promotion des mathématiques sera de plus en plus importante.

Quelques pages à consulter

Objectifs : `http://www.emath.fr/web-math.php`

Membres : `http://www.emath.fr/membre.php`

Bilan : `http://www.emath.fr/bilan01.php`

Archives : `http://acm.emath.fr/archives/web-math`

Société mathématique du Canada

C.Rousseau

Malgré la multitude des langues parlées dans le monde nous parlons tous la même langue mathématique et nous pensons mathématiques de la même manière. C'est pourquoi, comme beaucoup d'autres sociétés mathématiques nous accordons la plus grande importance à resserrer nos liens avec nos sociétés sœurs. Un lien privilégié nous unit à la Société mathématique de France, soit celui de la langue française. Une manière de resserrer ces liens est d'organiser un colloque conjoint permettant de joindre sciences mathématiques et échanges amicaux. C'est ainsi qu'est née l'idée du colloque conjoint entre nos sociétés, lequel se tiendra à Toulouse les 12-15 juillet 2004. Nous sommes heureux d'avoir élargi le programme du colloque aux membres des sociétés de mathématiques appliquées et industrielles et de statistique de nos pays respectifs.

En préparation de cet événement nous avons jugé utile que chacune de nos sociétés soit présentée aux membres de l'autre. Je vous présenterai donc brièvement la Société mathématique du Canada (SMC), alors que votre président, Michel Waldschmidt, présentera la SMF à nos membres dans les Notes de la SMC.

La SMC

La Société mathématique du Canada (SMC) a vu le jour en 1945. L'objectif de ses fondateurs était de créer un organisme qui servirait de tremplin à l'épanouissement du milieu mathématique canadien. En anglais, la Société était connue sous le nom de Canadian Mathematical Congress. Or, comme cette appellation était souvent confondue avec celle des congrès quadriennaux, on a songé pendant longtemps à la changer. En 1979, l'organisme s'est constitué en société à but non-lucratif. On a alors profité de l'occasion pour modifier l'appellation anglaise, qui est devenue Canadian Mathematical Society. L'appellation française, elle, est demeurée la même.

La SMC oriente constamment ses activités vers l'avenir. Un avenir où il faudra miser encore davantage sur les partenariats, et en former de nouveaux avec les utilisateurs de mathématiques du monde des affaires, des gouvernements et des universités, des écoles et des collèges, et d'autres associations mathématiques, pour ainsi partager des expériences, collaborer à des projets et, de façon générale, rehausser l'image des mathématiques au Canada.

La SMC a pour mission de regrouper et appuyer les mathématiciens canadiens, d'encourager la recherche mathématique en favorisant les conditions de recherche et en diffusant les résultats de recherche. Le volet éducation veut favoriser l'apprentissage des mathématiques au niveau scolaire. La SMC s'est aussi donnée pour mission de défendre la discipline en créant des initiatives visant à expliquer, à promouvoir et à mieux faire connaître la discipline, en organisant des activités parascolaires et en encourageant les partenariats avec les sociétés privées, les gouvernements et les organismes à but non-lucratif.

L'infrastructure mathématique au pays

Ces dernières années ont vu la naissance de trois instituts nationaux de recherche en mathématiques : le Centre de recherches mathématiques fondé en 1969 a accédé au niveau de centre national en 1984, l'Institut Fields a été fondé en 1992 et le Pacific Institute for Mathematical Sciences en 1996. Tous trois coopèrent avec la SMC pour soutenir la recherche en sciences mathématiques au pays. En plus d'organiser leurs années thématiques et activités scientifiques les instituts subventionnent des sessions spéciales lors des réunions de la SMC. En février 2003 nous aurons l'occasion d'inaugurer le Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery (BIRS), soit le pendant nord-américain du CIRM de Luminy, créé à l'initiative du Pacific Institute of Mathematical Sciences et du Mathematical Sciences Research Institute de Berkeley et soutenu financièrement par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie) au Canada et la NSF (National Science Foundation) aux États-Unis.

Publications

C'est un des volets les plus importants de nos activités.

Le Journal canadien de mathématiques (JCM) a été fondé en 1949 et le Bulletin canadien de mathématiques (BCM) en 1958. Ce sont les publications maîtresses de la SMC. On y publie des travaux de recherche de haute gamme.

Le JCM publie les travaux longs, le BCM les travaux plus courts. Notre prix G. de B. Robinson récompense chaque année un article exceptionnel paru dans le JCM ou dans le BCM.

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem est un magazine international de résolution de problèmes. Il s'adresse aux élèves du secondaire et aux étudiants du premier cycle universitaire. Ceux qui se préparent pour une épreuve d'envergure apprécieront la chronique "Olympiade". Depuis 2002 tous les problèmes proposés le sont à la fois en anglais et en français et les solutions en français sont encouragées.

Les Notes de la SMC constituent l'instrument de communication principal entre la SMC et ses membres. On y traite de recherche, de pédagogie, des réunions, des conférences, des travaux des comités, des remises de prix et des possibilités d'emploi.

La SMC assiste la Société Royale du Canada pour la publication des Comptes-Rendus.

Il y a déjà plus d'une dizaine de titres dans notre collection des Ouvrages de mathématiques de la SMC et ceux-ci sont publiés par Springer. Privilégiant les travaux originaux la série de livres de mathématiques supérieures de la SMC n'est pas réservée aux auteurs canadiens.

Tous nos journaux sont maintenant en ligne et la SMC est intéressée à jouer un rôle de leader, tant au niveau national qu'international, dans le projet international de la Digital Mathematical Library. Dans un premier temps nous commençons le travail de lobbying pour obtenir les fonds permettant la rétro-digitalisation de l'ensemble des publications de notre société. Un deuxième volet couvrira l'ensemble de la littérature mathématique canadienne.

Rencontres

Notre pays est immense, ce qui ne facilite pas la cohésion : il y a 4,5 heures de décalage horaire d'un bout à l'autre du pays, si bien que, même pour une conférence téléphonique, il faut préciser dans quel fuseau horaire est l'heure de la conférence ! Pour faciliter les contacts des membres de la communauté mathématique canadienne, la SMC organise deux rencontres annuelles de trois jours, précédées de rencontres de l'exécutif et du Conseil d'administration. L'agenda de ces rencontres est constitué de conférences plénières, de conférences de prix, d'une conférence grand public et de sessions spéciales, dont au moins une en éducation. Certaines de ces rencontres se tiennent conjointement avec d'autres sociétés canadiennes comme MATH 2000 à Mc Master, lequel avait réuni la SCMAI (Société canadienne de mathématiques appliquées et industrielles), la SSC (Société statistique du Canada), la SCRO (Société canadienne de recherche opérationnelle), le congrès canadien des étudiants en mathématiques (CCEM), le 14e Symposium canadien sur la dynamique des fluides, et la Société canadienne d'histoire et de philosophie des mathématiques (SCHPM). Le congrès de juin 2004 à l'Université Dalhousie de Halifax sera organisé conjointement avec plusieurs de ces mêmes sociétés.

La SMC collabore régulièrement avec l'AMS mais la conférence *Toulouse 2004* organisée conjointement avec la SMF, la SMAI et la SFdS en France et la SSC et la SCMAI au Canada est une première. Nous espérons que ce n'est pas la dernière.

Éducation

La SMC est très présente au pays dans ce volet. Depuis des années la SMC organise des concours mathématiques dont l'Olympiade canadienne, laquelle sert entre autres à sélectionner l'équipe qui nous représente à l'Olympiade internationale. À l'occasion de notre cinquantenaire en 1995 nous avons accueilli l'Olympiade internationale au Canada. Plus récemment nous avons créé des camps mathématiques à l'intention des élèves du secondaire et il y a maintenant au moins un camp par province.

La SMC est très impliquée dans la vulgarisation mathématique auprès des jeunes et du public : affiches mathématiques dans les écoles, camps mathématiques, expositions mathématiques, soutien de la conférence canadienne des étudiants en mathématiques (destinée aux étudiants du premier cycle universitaire), conférences grand public, ressources mathématiques sur l'Internet pour les élèves et leurs enseignants, dont le sentier mathématique virtuel, expositions mathématiques. Lors de l'année mathématique mondiale, Montréal a été la première ville du monde où les mathématiques ont « roulé dans le métro ». Les affiches du métro de Montréal, conçues par Stéphane Durand qui s'est mérité le premier prix du concours d'affiches de la Société mathématique européenne ont d'ailleurs été reprises dans plusieurs pays d'Europe et plusieurs langues.

L'enseignement est de juridiction provinciale au Canada si bien que les programmes et les critères de formation des maîtres diffèrent d'une province à l'autre. Les différents intervenants en enseignement mathématique sentent néanmoins le besoin de créer des liens à l'échelle du pays. La SMC organise donc des Fora canadiens en enseignement mathématique. Le premier a eu lieu en 1995. Deux autres Fora auront lieu en 2003 et 2005. Ils regrouperont des participants de toutes les provinces et territoires du Canada, représentant les différents groupes ayant un intérêt ou un impact au niveau de la formation mathématique au niveau élémentaire et secondaire. Le forum de 2003 sera une occasion d'échanger sur les objectifs et les meilleures réalisations à l'échelle du pays. On y identifiera des directions de travail sur lesquelles des sous-groupes feront des recherches en préparation du deuxième forum.

Relations avec d'autres sociétés savantes

Nous entretenons des liens étroits avec les autres sociétés canadiennes : la SCMAI (Société canadienne de mathématiques appliquées et industrielles), la SSC (Société statistique du Canada), la SCRO (Société canadienne de recherche opérationnelle), la Société canadienne d'histoire et de philosophie des mathématiques (SCHPM) la CIPS (Canadian Information Processing Society) et collaborons avec elles lorsqu'il faut représenter le Canada sur la scène internationale. En particulier ces sociétés ont, comme nous, des liens avec l'Union mathématique internationale. Nous venons de poser notre candidature pour devenir membre associé d'ICIAM (International Council of Industrial and Applied Mathematics).

Outre notre entente avec la SMF nous avons des ententes de réciprocité avec plusieurs autres sociétés nationales en Europe et dans le monde, ainsi qu'avec la Société mathématique européenne. En 2003 nous rejoignons la Combined Membership List de l'AMS. Nos principaux outils de communication avec nos membres sont les Notes de la SMC et notre site Internet : `http://smc.math.ca`, sur lequel on peut trouver de l'information sur toutes nos activités et publications. Un lien particulier nous unit à la France et à nos collègues français avec qui nous partageons la langue et de nombreux intérêts de recherche et nous espérons que plusieurs de nos collègues français décideront de se prévaloir de l'entente de réciprocité entre nos sociétés et de devenir membre de la SMC.

Nous nous réjouissons de vous rencontrer lors du « Premier congrès Canada/France des sciences mathématiques » à Toulouse en juillet 2004 lors duquel nous pourrons discuter des prochains rendez-vous. Pourquoi ne viendriez-vous pas au Canada la prochaine fois ?

Christiane Rousseau
Présidente de la Société mathématique du Canada

COURRIER DES LECTEURS

Un modèle pour nous tous

J'ai donné à Colette Anné, sur son insistance, le texte que l'Académie des Sciences m'avait demandé sur l'œuvre mathématique de Laurent Schwartz. Ce texte a été violemment critiqué dans le numéro suivant de la Gazette. Le passage incriminé,

« L'éclat de son œuvre, son talent légendaire de conférencier et d'enseignant, son engagement incessant pour la qualité de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, font de Laurent Schwartz l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il restera un modèle pour nous tous »

y est jugé comme « manquant singulièrement d'émotion, de chaleur, et même simplement d'humanité ». Allons donc, soyons francs, ce qui m'est reproché est de ne pas parler de son engagement politique. Était-il si difficile de comprendre que c'eût été hors sujet ?

Alain Connes
Professeur au Collège de France
et à l'IHÉS

LIVRES

Theory and Applications of Nonviscous Fluid Flows
R. Kh. Zeytounian
Physics and Astronomy, Springer-Verlag, 2002. 294 p. 74,95 €(HT).
ISBN 3-540-41412-6

Ce livre présente un grand nombre de modèles mathématiques rendant compte de différents phénomènes physiques que peuvent présenter des fluides newtoniens non visqueux. L'objectif de cet ouvrage n'est pas de dériver rigoureusement ces équations ni de les étudier d'un point de vue mathématique, mais plutôt de présenter un large éventail de méthodes asymptotiques permettant de les obtenir, et d'étudier quelques–unes de leurs propriétés.

Le livre s'ouvre sur un chapitre présentant les équations de Boltzmann et la dérivation formelle des équations de la mécanique des fluides, Euler compressible en particulier. À l'instar du reste de l'ouvrage, aucun théorème précis n'est énoncé, mais de nombreuses références à des travaux mathématiques sont proposées (y compris à des résultats récents, jusqu'en 2000). Le court chapitre suivant présente les équations des fluides newtoniens, en particulier les différents choix de paramètres et d'échelles physiques permettant d'obtenir les équations de "Navier–Stokes–Fourier". Le livre traitera en fait surtout de versions non visqueuses de ces équations, à commencer par les équations d'Euler. L'auteur présente ensuite différentes méthodes asymptotiques utilisées en modélisation, en indiquant pour chacune, outre des références précises, des exemples d'applications et leurs limitations. De nombreuses nouvelles équations apparaissent ainsi, modélisant des phénomènes physiques variés : fluides peu compressibles, fluides à viscosité variable, équations de Burgers. Des propriétés qualitatives de leurs solutions sont également présentées. Suit alors le chapitre central du livre, traitant de nombreuses variantes des équations d'Euler : équations de Boussinesq, KdV, KP, Schrödinger, Steichen... Les arguments physiques et asymptotiques menant à toutes ces équations sont expliqués, encore une fois avec des références à des articles physiques, numériques et mathématiques. Un chapitre est ensuite consacré aux flots atmosphériques, avec notamment l'analyse de l'influence de la force de Coriolis et la présentation des systèmes quasigéostrophique et de Boussinesq. Un court chapitre traite des fluides peu compressibles, suivi d'un autre sur les fluides en "turbo machines". Enfin les nappes de tourbillon et l'étude d'ondes de choc font l'objet du huitième chapitre. Le neuvième et dernier chapitre de ce livre présente quelques résultats mathématiques sur les équations d'Euler ainsi que sur la limite incompressible notamment.

Ce livre n'est pas un ouvrage de mathématiques : ni le passage à la limite entre différents modèles, ni même l'existence de solutions à ces modèles ne sont en général montrés. Mais c'est justement une source de problèmes ouverts pour l'étude mathématique de la mécanique des fluides, ainsi qu'un excellent moyen offert aux mathématiciens de comprendre l'origine physique de certaines équations, avec la présence de nombreuses références, tant physiques que mathématiques. Signalons au passage qu'un deuxième ouvrage de l'auteur vient de paraître, intitulé *Asymptotic Modelling of Fluid Flow Phenomena* (Kluwer Academic Publishers, Fluid Mechanics and its Applications, Vol. 64). À peu près deux fois plus volumineux que le premier, il en présente en particulier certains chapitres de manière plus détaillée, et offre un panorama impressionnant de différents modèles asymptotiques : là encore sans raisonnements mathématiques rigoureux, mais avec un très grand éventail de phénomènes physiques modélisés.

Isabelle Gallagher, CNRS, École polytechnique

Torsors and rational points
A.N. Skorobogatov
Cambridge Tracts in Mathematics, **144**, Cambridge University Press. 187 p.
£ 37,50. ISBN 0-521-80237-7

Une des questions les plus anciennes de la théorie des nombres consiste à déterminer si un système d'équations $P_i(x_1,...,x_n) = 0, 1 \leqslant i \leqslant r$, où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels, possède une solution dans $\mathbf{Q}^n$. Ce problème est a priori très difficile ; de fait Matjasevic (s'appuyant sur des travaux de Davies, Putnam, et Robinson) a montré il y a plus de trente ans que le problème analogue pour les équations en nombres entiers était indécidable. On est donc amené à rechercher des conditions nécessaires, si possibles « calculables », pour qu'un système d'équations polynomiales ait une solution (resp. une solution non triviale si on prend des polynômes homogènes ; dans ce dernier cas l'existence d'une solution non triviale entière ou rationnelle revient au même). On espère ensuite pouvoir montrer dans des cas particuliers que ces conditions nécessaires sont suffisantes.

Dans le langage de la géométrie algébrique, on s'intéresse à l'ensemble $X(\mathbf{Q})$ des points rationnels d'une variété algébrique X (affine ou projective) définie sur $\mathbf{Q}$ (plus généralement, on peut remplacer $\mathbf{Q}$ par un corps de nombres). Une condition nécessaire à l'existence d'un point rationnel sur X est que X possède des points réels, et des points sur tous les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$. Mais ces condition dites locales (qui sont faciles à tester algorithmiquement) ne sont suffisantes que pour très peu de classes de variétés (les quadriques par exemple ; on dit dans ce cas que le *principe de Hasse* est vérifié).

Un *torseur* Y sur X sous un groupe algébrique G est une variété munie d'un morphisme $f : Y \to X$ et d'une action de G qui respecte les fibres de f, satisfaisant en plus la condition suivante : pour tous points y_1, y_2 de Y (points géométriques, i.e. à valeurs dans une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$; ne pas oublier que $X(\mathbf{Q})$ peut être vide !), il existe un unique élément g de G tel que $g.y_1 = y_2$. Cette notion est l'analogue de la notion de fibré principal en géométrie différentielle ou analytique. Son utilité pour obtenir un lien plus fin entre $X(\mathbf{Q})$ et l'ensemble des points « locaux » $X(\mathbf{A_Q}) := \prod_p X(\mathbf{Q}_p)$ est apparue dans les années soixante-dix, entre autres dans les travaux de Manin, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer. Cette idée trouve son inspiration dans la théorie classique de la descente sur les courbes elliptiques, et aussi dans les travaux de Châtelet sur l'arithmétique de certaines surfaces rationnelles qui portent son nom.

Le livre de Skorobogatov est le premier à rendre compte de façon très détaillée des travaux les plus importants sur le sujet, tout en donnant des preuves complètes pour les résultats principaux. Une des forces de l'ouvrage est que le point de vue est sans cesse double : l'auteur n'hésite pas à utiliser des machineries sophistiquées (cohomologie étale, catégories dérivées) pour donner des démonstrations élégantes et aider le lecteur à mieux comprendre les phénomènes ; mais il illustre aussi la théorie générale de nombreux exemples (souvent donnés par des équations explicites ou de jolies constructions géométriques). Un effort tout particulier a également été fait pour avoir une présentation « self-contained » des résultats principaux. Ainsi l'étudiant peut-il très vite comprendre les bases de la théorie avec ses applications, au besoin en sautant les détails techniques des démonstrations. Au contraire le spécialiste se plongera avec délice dans celles-ci, en remarquant les généralisations et simplifications apportées parfois par Skorobogatov par rapport aux articles originaux. Quelques exercices et questions ouvertes permettent de se faire la main, et chaque chapitre se termine par un petit historique des questions abordées.

Décrivons maintenant brièvement le contenu des différents chapitres. Après une introduction assez détaillée, les chapitres 2 et 3 (qui présentent un intérêt indépendamment de leurs applications arithmétiques) exposent la théorie générale des torseurs, en particulier leur classification via des ensembles de cohomologie et le lien avec la théorie géométrique des invariants. Dans le chapitre 4, on s'intéresse au cas où le groupe G du torseur est un groupe de type multiplicatif, i.e. un groupe commutatif extension d'un groupe fini par un tore. C'est dans ce cadre que Colliot-Thélène et Sansuc ont développé leur théorie de la descente. En particulier on a une description

$$X(\mathbf{Q}) = \bigcup_Y f_Y(Y(\mathbf{Q})) \tag{6.0.1}$$

où Y décrit l'ensemble des torseurs $f_Y : Y \to X$ d'un certain « type ». On voit immédiatement alors que pour que $X(\mathbf{Q})$ soit non vide, il est nécessaire que l'un des Y possède des points dans tous les $\mathbf{Q}_p$ (on convient que $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$), et cette condition est suffisante si on peut démontrer que les torseurs Y de ce type satisfont le principe de Hasse. Ce programme a été mené à bien par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer notamment dans le cas des surfaces de Châtelet, et dans ce chapitre Skorobogatov explique comment on obtient des équations explicites pour les torseurs, ce qui est indispensable pour obtenir de tels résultats concrets.

Les chapitres 5 et 6 font le lien entre l'existence de points locaux sur les torseurs d'un certain type, et une obstruction cohomologique à l'existence d'un point rationnel introduite par Manin en 1970. Grosso modo, il est possible, au moyen du *groupe de Brauer* de X (il s'agit du groupe de cohomologie étale $H^2(X, \mathbf{G}_m)$) de définir un sous ensemble $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}}$ de $X(\mathbf{A_Q})$, qui contient $X(\mathbf{Q})$. Ce sous-ensemble a l'avantage par rapport à $X(\mathbf{Q})$ d'être (au moins en théorie) calculable. La propriété $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}} = \varnothing$ est ainsi une obstruction, dite de Manin, à l'existence d'un point rationnel sur X. Manin avait montré que pour une courbe de genre 1, la non-vacuité de $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}}$ impliquait celle de $X(\mathbf{Q})$ pourvu que le groupe de Tate-Shafarevitch de la jacobienne de X soit fini (on conjecture que c'est toujours le cas). Skorobogatov démontre de manière détaillée comment l'existence d'un élément dans $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}}$ implique l'existence de torseurs Y (dits universels) pour lesquels l'obstruction de Manin disparaît, et tels que l'un d'eux possède des points dans tous les $\mathbf{Q}_p$. Ces résultats (dus à Colliot-Thélène et Sansuc quand G est un tore et généralisés par lui-même à tout groupe de type multiplicatif) constituent le noeud de la théorie. A contrario le fait que dans l'équation (1) aucun des Y n'ait de points dans tous les complétés s'interprète aussi comme $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}} = \varnothing$. Dans le chapitre 7, ces résultats généraux sont appliqués aux fibrés en coniques ; par exemple l'étude des torseurs universels sur les surfaces de Châtelet permet de conclure que pour une telle surface, l'existence d'un élément dans $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}}$ implique l'existence d'un point rationnel sur X : en effet dans ce cas précis ces torseurs vérifient le principe de Hasse, et comme l'un d'eux possède des points dans tous les complétés, il possède un point rationnel qu'il ne reste plus qu'à projeter sur X.

Les chapitres 8 et 9 sont consacrés au cas où le groupe G n'est plus supposé abélien. Skorobogatov y explique de manière détaillée son célèbre exemple (datant de 1997) de variété avec $X(\mathbf{Q}) = \varnothing$ et $X(\mathbf{A_Q})^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ (un tel exemple était cherché depuis l'introduction de l'obstruction de Manin en 1970). Il interprète également ce type d'exemples en termes d'une obstruction liée aux torseurs non-abéliens. Pour les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires, on voit également comment le problème de descente d'un torseur de $\overline{\mathbf{Q}}$ à $\mathbf{Q}$ peut fournir des obstructions à l'existence d'un point rationnel. Ceci est lié aux H^2 non-abéliens déjà utilisés par Springer dans les années soixante.

Pour conclure, ce livre me semble être appelé à devenir la référence sur le sujet, et il devrait aussi donner envie à quelqu'un qui a envie de s'y lancer de poursuivre. Puisse-t-il susciter quelques vocations !

David Harari, CNRS, École Normale Supérieure

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius
CLAUDE SABBAH
EDP Sciences/CNRS Éditions, 2002. 306 p. 42 €. ISBN 2-86883-306-1

Ce livre a comme principal sujet les connexions méromorphes. Il est écrit pour les étudiants et les non-spécialistes. Rédigé dans un langage moderne, il expose un grand nombre de résultats anciens et nouveaux. Dans le dernier chapitre, point culminant du livre, C. Sabbah donne des résultats sur les variétés de Frobenius du point de vue des déformations isomonodromiques. Ce chapitre utilise intégralement le matériel développé dans les chapitres antérieurs, ce qui sert aussi bien de motivation pour une étude intégrale du livre que d'application.

Les variétés de Frobenius ont été introduites dans les travaux de K. Saito à la fin des années soixante-dix. Il a étudié des déploiements de singularités isolées et leurs connexions de Gauß-Manin. Il suggère une structure très riche sur l'espace de base d'un déploiement semiuniversel. Une variété complexe avec une telle structure est aujourd'hui appelée variété de Frobenius. Une telle variété a essentiellement deux ingrédients : une multiplication commutative et associative sur le fibré tangent holomorphe et une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée, appelée métrique, qui satisfait plusieurs conditions très naturelles. L'une de ces conditions est la platitude de la connexion de Levi-Civita de la métrique. Par conséquent, Saito appelle cette structure une structure plate.

La notion de variété de Frobenius est due à Dubrovin. Sa définition en 1991 a été motivée par les travaux des physiciens Witten, Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde et d'autres. Ce travail a amené le développement mathématique de la cohomologie quantique par Kontsevich et Manin et beaucoup d'autres, qui est une deuxième source de variétés de Frobenius. En fait, l'isomorphie, partiellement conjecturale, partiellement prouvée, entre certaines variétés de Frobenius provenant de la cohomologie quantique et certaines construites dans la théorie des singularités est une version de la symétrie miroir. Le travail de Dubrovin et d'autres, a permis de trouver une troisième source de variétés de Frobenius. Elles sont construites grâce aux hiérarchies de systèmes intégrables d'équations aux dérivées partielles. Ainsi, les variétés de Frobenius forment un sujet riche et fascinant qui met en relation des structures très différentes.

La relation avec les connexions méromorphes était inhérente dans la construction de K. Saito par la théorie des singularités. C. Sabbah en extrait une méthode pour construire des variétés de Frobenius en partant de certaines connexions méromorphes (chapitre VII, théorème 3.6). Cette méthode rend la construction originelle par la théorie des singularités beaucoup plus facilement accessible et elle est aussi applicable dans d'autres situations. C. Sabbah a le mérite d'avoir explicité cette méthode et de l'étudier point par point dans le chapitre VII.

Cette méthode donne un deuxième point de vue sur les variétés de Frobenius. La structure du fibré tangent TM d'une variété de Frobenius M donne naissance à une connexion méromorphe sur le relèvement du fibré tangent $\pi^\star TM$ où $\pi : \mathbb{P}^1 \times M \to M$. Cette connexion a un pôle logarithmique le long de $\{\infty\} \times M$ et un pôle de rang de Poincaré un le long de $\{0\} \times M$ (un certain pôle irrégulier) et est plate sur $\mathbb{C}^\star \times M$. On peut aussi exhiber un accouplement sur $\pi^\star TM$ avec des bonnes propriétés qui provient de la métrique sur M. Alors cette structure sur $\pi^\star TM$ est équivalente à la donnée d'une structure de Frobenius sur M.

La méthode commence par une variété complexe M et un fibré vectoriel abstrait, de rang la dimension de M, sur $\mathbb{P}^1 \times M$ avec une connexion méromorphe, qui vérifie les conditions ci-dessus et tel que la restriction de ce fibré vectoriel à chaque $\mathbb{P}^1 \times \{t\}$ pour $t \in M$ soit trivial. Alors une section globale qui satisfait certaines propriétés, une forme primitive de K. Saito, donne une application de périodes qui rend ce fibré abstrait isomorphe au fibré $\pi^\star TM$. Elle envoie la connexion méromorphe sur $\pi^\star TM$ et induit sur M une structure de variété de Frobenius (théorème VII.3.6.). Le désir d'expliquer cette construction, avec tous les outils nécessaires, pour des étudiants et des non-experts est une des motivations de ce livre. Les chapitres 0-VI présentent, de manière systématique et précise, une énorme quantité de résultats sur les connexions méromorphes. La plupart sont connus et figurent dans des articles de recherche (Malgrange, Bolibruch et beaucoup d'autres), mais peu ont été incorporés dans des livres.

Le chapitre 0 expose beaucoup de résultats connus sur les fibrés vectoriels holomorphes et méromorphes, sur les fibrés de Higgs et les systèmes locaux. Ce chapitre donne des références précises et fixe les notations pour la suite. Il est très utile pour les étudiants. C'est le seul chapitre du livre où beaucoup de preuves sont omises en faisant référence à la littérature. Dans les autres chapitres, presque tous les résultats sont prouvés clairement.

Le chapitre 1 parle des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^1$. Le théorème de Birkhoff-Grothendieck est prouvé. Les familles de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^1$ sont traitées et le résultat que la condition d'être trivial est une condition ouverte pour un fibré sur $\mathbb{P}^1$ est aussi prouvée.

Le chapitre 2 est en deux parties. Dans la première partie (1-3), C. Sabbah explique la correspondance de Riemann-Hilbert pour les fibrés vectoriels méromorphes munis d'une connexion à singularité régulière. Dans la deuxième partie (4-5), on y trouve des résultats concernant les singularités irrégulières et le phénomène de Stokes.

Le chapitre 3 explique un point qui n'est souvent pas assez apprécié. Un fibré vectoriel holomorphe avec une connexion méromorphe le long d'un diviseur est une donnée plus riche que le fibré méromorphe correspondant avec la connexion. Dans le cas où l'espace de base est un germe $(\mathbb{C}, 0)$, le premier est un $\mathbb{C}\{z\}$-module tandis que le second est un $\mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ espace vectoriel, ainsi on appelle le premier un *réseau*. Le chapitre 3 analyse et classe de tels réseaux avec une connexion méromorphe et leur associe un certain polynôme caractéristique.

Le chapitre 4 discute du problème classique de Riemann-Hilbert intimement lié au problème de Birkhoff. Ce chapitre donne différentes formulations et interprétations et explique les vieilles et nouvelles contributions. Il donne un résultat positif de Bolibruch et Kostov et un autre de M. Saito qui est très utiles dans le cas des singularités.

Le chapitre 5 explique de façon algébrique une transformation de Fourier pour les fibrés vectoriels méromorphes sur $\mathbb{P}^1$ à connexion méromorphe. L'autre le raffine pour les réseaux, ce qui permet de relier directement le problème de Riemann-Hilbert au problème de Birkhoff du chapitre 4.

Le chapitre 6 traite des déformations isomonodromiques de solutions des problèmes du chapitre 4. Sous des conditions de semi-simplicité, on a des déformations universelles. Dans le cas du problème de Riemann-Hilbert, ceci nous conduit aux équations de Schlesinger. Dans le cas du problème de Birkhoff, ces déformations universelles sont traitées d'une manière qu est motivée par des travaux de Dubrovin et Givental.

Le chapitre 7 donne la méthode expliquée ci-dessus avec plusieurs exemples de variétés de Frobenius : la construction de Dubrovin d'une variété de Frobenius semi-simple d'après le chapitre 6, deux manières de voir la variété de Frobenius A_n, quelques aperçus d'autres variétés de Frobenius et un schéma approximatif pour construire les variétés de Frobenius à partir de la théorie des singularités.

Pour compléter ce schéma, il faudrait utiliser la connexion de Gauß-Manin sur le déploiement de singularités, sa transformée de Fourier partielle et ses relations avec des filtrations de Hodge, pour une solution du problème de Birkhoff. Mais ceci n'est pas l'objet de ce livre. C. Sabbah l'a élaboré dans plusieurs articles de recherche [1][5][6]. Dans [3], on trouve une version un peu différente, sans transformation de Fourier, qui est adaptée au cas spécial et originel des germes de singularités. Les deux références [2] et [4] expliquent d'autres aspects sur les variétés de Frobenius.

Le livre de C. Sabbah donne des explications complètes, les motivations et les preuves. Beaucoup de ses preuves et de ses énoncés ne sont pas formulés comme ça dans la littérature même s'ils sont bien connus des experts. Les notations sont bien choisies. La bibliographie est excellente. Ce livre comporte aussi beaucoup d'exercices. Il s'adresse aux étudiants avancés et aux personnes intéressées par les connexions méromorphes. Bien sûr, avec 289 pages et tellement de matériaux, cela demande du travail, mais ça vaut la peine de faire cet effort.

Références

[1] A. Douai, C. Sabbah : Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures (I). Preprint (52 pages), math.AG/0211352.

[2] B. Dubrovin : Geometry of 2D topological field theories. In : Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M Francoviglia, S. Greco, eds.). Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120–348.

[3] C. Hertling : Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities. Cambridge Tracts in Mathematics **251**. Cambridge University Press, 2002.

[4] Yu. Manin : Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces. American Math. Society, Colloquium Publ. v. **47**, 1999.

[5] C. Sabbah : Monodromy at infinity and Fourier transform. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997), 643–685.

[6] C. Sabbah : Hypergeometric period for a tame polynomial. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 603–608, and (42 pages) math.AG/9805077.

C. Hertling, MPIM Bonn

La pensée mathématique contemporaine
Frédéric Patras
PUF, 2001. 135 p. 21,04 €. ISBN 2-130-516-785

Que reste-t-il des débats passionnés des débuts du siècle dernier (le XX^{e}) concernant les fondations des mathématiques, les axiomes de l'arithmétique ou de la théorie des ensembles ? Qui s'intéresse encore aux *Grundlagen der Arithmetik* de Gottlob Frege, et les compare à la *Philosophie de l'arithmétique* de Edmund Husserl ? Ou aux recherches épistémologiques, auxquelles un Hermann Weyl n'a pas dédaigné de consacrer une part importante de son travail ? À ce propos, Claude Chevalley et André Weil, dans une notice de ses travaux publiée en 1957 dans *L'Enseignement Mathématique*, deux ans après sa mort, ont écrit ce qui suit [1] :

[1]cité par Patras, p. 88.

> « *Quant aux préoccupations philosophiques de Weyl pendant cette période d'intense fermentation [vers 1918], elles ne tardèrent pas (heureusement, serions nous tentés de dire) à se couler dans un moule plus étroitement mathématique* »

reflétant, semble-t-il, l'opinion dominante des mathématiciens français : la crise est terminée, les guerres en Occident sont achevées, il est grand temps de faire des maths, « *pour l'honneur de l'esprit humain*[2] ».

Ce n'est pas l'opinion de Patras qui a écrit ce beau livre pour persuader ses lecteurs (pas uniquement des mathématiciens) que le débat philosophique a toujours sa place dans notre société, mais qui doit constater au départ « *l'extraordinaire appauvrissement du débat philosophique autour des mathématiques* » (p. 1).

Les deux premiers chapitres de *La pensée mathématique contemporaine* (Le style en mathématique, De Platon à Husserl) sont donc prioritairement consacrés à une présentation philosophique des problèmes qu'il traitera plus loin. Mais le lecteur peu (ou plutôt souvent pas du tout, d'après ce qui précède!) habitué au langage des philosophes, à la logique interne de leur discours, ne doit pas craindre d'être abandonné en terrain inconnu dès les premières pages. Au contraire, car Patras lui apporte sans jargonner ce qui est nécessaire à son propos, et qu'il puise dans les écrits des grands philosophes, les fonctionnaires de l'humanité, comme les désigne Husserl : le lecteur découvrira donc, en plus de l'argumentation brillante de l'auteur, le plaisir de s'introduire agréablement dans l'univers d'Aristote, Descartes, Kant, Hegel, Husserl, et bien d'autres que je ne cite pas ici, tout en restant d'un bout à l'autre de l'ouvrage sur le terrain de la science, des mathématiques, et non celui de la vulgarisation.

Les deux chapitres suivants (Les origines des mathématiques modernes, Axiomes et intuitions) nous convient à une étude historique des mathématiques depuis Gauss, sur le chemin du formalisme. Ni une galerie de portraits, ni une collection ordonnée de théorèmes datés et nommés suivant leur ou leurs auteurs. Une histoire non pas des mathématiques, mais de la *pensée* mathématique, en particulier aux antipodes de la conception de Dieudonné[3]. Une histoire qui nous conduira au structuralisme.

La base rassurante sur laquelle repose la sérénité des mathématiciens d'après la seconde guerre mondiale est le *structuralisme*, ou plus exactement le *structuralisme mathématique*, à ne pas confondre avec le structuralisme des sciences humaines, et le mathématicien le plus célèbre professant cette doctrine, c'est Bourbaki. Le chapitre 5 (Le courant structuraliste) lui est consacré en grande partie. Écrire une étude critique sur Bourbaki n'est pas un exercice facile, surtout pour un Français, car tous les mathématiciens français, autant que nous sommes (sauf peut-être les plus jeunes), nous avons non seulement subi son influence générale, mais nous avons, de plus, souvent eu pour maître l'un ou l'autre des savants membre du groupe Bourbaki. La réflexion profonde de Pierre Cartier (dans *Vie et mort de Bourbaki*[4]) facilite cependant le travail. La critique philosophique essentielle se trouve dans le chapitre suivant, Structures et catégories, mais est déjà annoncée page 29, lorsque, après avoir dit que Bourbaki était le promoteur d'une refonte de la pensée mathématique, utilisant un nouveau style, le structuralisme, Patras écrit :

> « *Or, Bourbaki, au moment même où il s'attaquait à cette tâche, admirable tout à la fois historiquement et conceptuellement, indépendamment des critiques qui peuvent lui être adressées rétrospectivement,*

[2]comme diraient Lagrange, Jacobi et Dieudonné.

[3]par exemple dans J. Dieudonné *History of Algebraic and Differentiable Topology* 1900-1960, Birkhaüser 1989.

[4]IHÉS 1997, voir aussi *The continuing silence of Bourbaki* — an interview with Pierre Cartier, The Mathematical Intelligencer, Vol 20, Number 1.

s'opposait de toute son autorité à la constitution d'un style de pensée catégorique, dont il était déjà manifeste dans les années 1960, qu'il ne pouvait que l'emporter sur le style structuraliste. »

L'erreur de Bourbaki, ainsi qu'elle est décrite avec beaucoup de finesse, est d'avoir considéré que les fondements, une fois « rigoureusement » établis, restaient immuables (Cartier, dans son article, relie cette attitude à l'ambiance générale des années 30-50). Il est plus proche de la réalité de concevoir l'univers des mathématiques muni d'une structure moins rigide, permettant aux développements nouveaux de la science de réagir sur ses fondements. Le style catégorique possède aujourd'hui cette qualité, qui lui permet aussi de s'avérer utile pour la connaissance de la pensée en général et des fondements de la philosophie, un thème que Patras a aussi abordé dans de nombreux articles [5]. Je laisse au lecteur le plaisir de découvrir ces analyses, ainsi que les belles pages que l'auteur consacre, dans les deux derniers chapitres, à Alexandre Grothendieck et à René Thom, qui ont justement su, de manière fort différente d'ailleurs, consacrer aussi à la réflexion sur les objets de leur travail, une partie de leurs recherches. Retenons que ce livre a pour première ambition de rapprocher les mathématiciens que nous sommes du débat philosophique. Mais, au delà de nous même, c'est au destin de toute notre discipline qu'il s'intéresse, ainsi qu'il est écrit (page 109) :

« [...] *il faut en finir avec un discours pragmatique et restaurer, aux côtés de la recherche, le débat philosophique. La mathématique a tout à y gagner : c'est pour elle le seul moyen de reconquérir une audience. Les succès médiatiques de la physique, sa concurrente immédiate dans le panthéon des sciences pures, tiennent à ce que ses questions les plus fondamentales ont su frapper l'imagination collective.* »

Michel Zisman
Université Paris 7

Quantum calculus
Victor Kac, Pokman Cheung
Universitext, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002. 112 p.
34,95 €(HT). ISBN 0-387-95341-8

C'est un *divertimento* d'une centaine de pages que Victor Kac [6] et P. Cheung nous offrent à la suite de cours donnés par le premier aux *undergraduates* du MIT. Les prémisses en sont très simples : au lieu de considérer la dérivée d'une fonction f (dépendant d'une variable réelle x), on considère sa « q-dérivée »

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

[5] *Catégories et foncteurs*, Dict. Histoire et Philosophie des Sciences, Ed. D. Lecourt. PUF (1999) ;

Phénoménologie et théorie des catégories. New Interaction of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities. L. Boi Ed. Springer Verlag, *à paraître* ;

L'horizon sémantique et catégorial de la méthode axiomatique Noesis, *à paraître*.

[6] Prononcez *Katz* ou *Kats*. Une translittération savante de la forme cyrillique du nom de Kac est souvent à l'origine de prononciations erronées.

où q est un nombre fixé différent de 1, et l'on pousse *andante scherzando* aussi loin que possible avec des étudiants de première ou de deuxième année. C'est ainsi que la q-dérivée $D_q x^n = [n]x^{n-1}$ du monôme x^n donne naissance au q-analogue

$$[n] = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

de l'entier n et, pour tout réel a et tout polynôme f de degré N, on a une formule de Taylor du type

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} D_q^k f(a)\, \frac{(x-a)_q^k}{[k]!} \tag{1}$$

où l'on a posé $[k]! = [1][2]\ldots[k]$ ($[0]! = 1$) et

$$(x-a)_q^k = (x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{k-1}a).$$

On prendra garde que l'exposant k dans l'expression $(x-a)_q^k$ ne se comporte pas exactement comme un exposant puisqu'on a

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m\,(x-q^m a)_q^n.$$

Ceci donne une petite idée des subtilités et des charmes de ce calcul différentiel particulier qu'on nomme en anglais *q-calculus*. De (1) les auteurs dérivent un certain nombre d'identités entre produits et sommes telles que le développement du polynôme $(x-a)_q^n$ lui-même :

$$(x-a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} a^k x^{n-k} \tag{2}$$

où

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

est le q-coefficient binomial de Gauss, qui, comme on sait, est égal au nombre de sous-espaces de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps fini $\mathbf{F}_q$.

Lorsqu'on remplace x par 1 dans (2) et qu'on fait tendre n vers l'infini, on obtient l'identité suivante, déjà connue d'Euler, dont les deux membres convergent pour $|q| < 1$:

$$\prod_{k \geqslant 0}^{\infty} (1 - q^k a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k(k-1)/2} \frac{a^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

De là Kac et Cheung déduisent quelques applications amusantes en théorie des nombres, comme la formule de Gauss pour le nombre de partitions d'un entier en somme de deux carrés ou celle de Jacobi pour le nombre de partitions d'un entier en somme de quatre carrés, ou encore des formules pour le nombre de partitions d'un entier en somme de deux ou quatre nombres triangulaires, c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$. Tous ces jeux sur la q-dérivation occupent une soixantaine de pages ; ils sont plaisants, et les démonstrations sont élémentaires et courtes, à l'exception de celle d'une formule du produit de Ramanujan qui prend quatre pages et requiert un peu de théorie des fonctions analytiques complexes.

Qui dit dérivation, dit intégration. Il est donc naturel que les auteurs poursuivent leur promenade avec un q-analogue des primitives. L'outil central est ici l'intégrale de Jackson définie par

$$\int f(x)d_q x = (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k x). \tag{3}$$

Sous de bonnes conditions le membre de droite de (3) converge vers une fonction dont la q-dérivée est f. L'intégrale de Jackson permet aux auteurs de définir des q-analogues des fonctions Gamma et Beta classiques.

Les vingt dernières pages de l'opuscule sont consacrées à des variations élémentaires sur l'opérateur aux différences finies

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

appelé ici « h-dérivée » (h est un réel fixé, différent de 0). La formule de Taylor prend dans ce cas la forme

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} D_h^k f(a) \, \frac{(x-a)_h^k}{k!}$$

où $(x-a)_h^k = (x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(k-1)h)$. Dans cette dernière partie on voit apparaître la transformée d'Abel, la formule d'interpolation de Newton, les polynômes de Bernouilli et la formule d'Euler-Maclaurin.

Le livre de Kac et Cheung est sans prétention ; ce qu'on y trouve apparaît dans des ouvrages classiques nettement plus ambitieux comme [1] ou [2]. Mais c'est cette légèreté et le style lumineux qui le rendent si plaisant. Ce petit bijou se lit d'un seul trait et se glisse facilement dans un sac de voyage. Je ne puis qu'en recommander la lecture. On pourra accessoirement y trouver de l'inspiration pour un bout de cours de DEUG ou de licence qui sort des sentiers battus.

Références

[1] G. E. Andrews, *q-series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics and computer algebra*, CBMS Regional Conference Lecture Series in Mathematics, vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[2] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1990.

Christian Kassel, CNRS, Université Louis Pasteur, Strasbourg