SOMMAIRE DU N^{o} 97

Éditorial

Le prix 2002-2003 de la Fondation Wolf pour les mathématiques, d'un montant de 100 000 $, a été attribué conjointement à Mikio Sato « pour sa création de l'analyse algébrique, incluant la théorie des hyperfonctions et des microfonctions, la théorie des champs quantiques holonômes et une théorie unifiée des équations de solitons » et à John T. Tate « pour sa création de concepts fondamentaux en théorie algébrique des nombres ». Par ailleurs l'Académie des Sciences et des Lettres de Norvège a décerné le prix Abel, créé en 2003 et d'un montant d'environ 750 000 €, à Jean-Pierre Serre « pour son rôle central dans l'élaboration de la forme moderne de nombreux domaines des mathématiques, notamment la topologie, la géométrie algébrique et la théorie des nombres ». Nous reviendrons bien entendu sur ces lauréats prestigieux, vous trouverez déjà dans ce numéro de la Gazette une présentation de Mikio Sato.

— Colette Anné

Erratum

Une erreur s'est glissée malencontreusement dans le précédent numéro de la Gazette en page 3 : le conseil scientifique d'AMA n'était pas présidé par Jacques-Louis Lions mais par Pierre-Louis Lions.

Nos aimables lecteurs voudront bien nous excuser pour cette erreur.

SMF

Mot du Président

Le lauréat du premier Prix Abel est Jean-Pierre Serre. La Société Mathématique de France est heureuse d'adresser ses plus vives félicitations à celui qui la présida en 1970, année où se tenait à Nice le Congrès International des Mathématiciens.

L'attribution de ce premier Prix Abel a été l'occasion pour les médias de parler de mathématiques. Même si les journalistes se sont attachés principalement à des aspects futiles de l'événement, on peut se réjouir que notre discipline fasse l'objet d'une telle publicité. Il n'arrive pas encore assez fréquemment qu'il soit question de mathématiques dans les journaux : la communication n'est pas notre point fort. Quelques collègues dépensent beaucoup d'énergie pour faire connaître la vitalité de notre science, et l'impact de leurs réalisations est remarquable. Je pense notamment aux lauréats des Prix d'Alembert de la SMF, aux activités d'associations qui sont nos partenaires comme Femmes et Mathématiques, Animath, et quelques autres. Ces collègues sont encore trop peu nombreux, mais on commence à voir émerger plusieurs initiatives qui permettront au grand public de connaître notre existence. La SMF les encourage vivement et participe elle-même à plusieurs actions dans cette direction.

Les mises en doute répétées de la qualité de la science française finissent par créer un mouvement d'opinion hostile. Or la pertinence des indicateurs utilisés, comme les indices d'impact ou de citations, est loin d'être établie. Avec plusieurs autres sociétés savantes (Biologie, Chimie, Physique,...) la SMF a entrepris une étude de la situation, d'abord pour permettre d'évaluer l'état de la science française, ensuite pour élaborer des propositions. En faisant mieux connaître les réussites de la communauté mathématique française, nous contribuerons à rétablir une plus juste image de marque de la recherche scientifique de notre pays.

Michel Waldschmidt

Vie de la société

À la suite du tremblement de terre meurtrier qui a frappé l'Algérie, le Président de la SMF a envoyé des messages de sympathie à nos collègues algériens, notamment au président de l'Association Algérienne de Mathématiques avec laquelle nous avons des accords de réciprocité.

Avec d'autres partenaires, la SMF apportait son soutien moral au colloque « Pour plus de femmes scientifiques » qui s'est tenu à l'IHP le 17 mai. Ce colloque, dont Juliane Unterberger était l'une des principales organisatrice, a été un vrai succès.

Au salon des jeux et de la culture mathématique qui s'est tenu Place St Sulpice les 29, 30 et 31 Mai 2003, la SMF a partagé un stand avec la SMAI et l'Association Femmes et Mathématiques ; le thème retenu était « Les métiers des maths ». La permanence a été assurée par Gérard Tronel avec l'aide de quelques autres adhérents.

La journée annuelle 2003 s'est tenue à l'IHP le samedi 14 juin. Vous trouverez dans ce numéro de la Gazette le rapport moral qui a été adopté par l'Assemblée Générale. Sur le thème « Groupes et Géométrie », la partie scientifique de cette journée a été coordonnée par François Labourie et a permis d'écouter Pierre Pansu, Michel Boileau et Gregor Masbaum. De plus Laurent Guillopé a fait le point sur le programme de numérisation de documents mathématiques NUMDAM. Les prochaines journées annuelles le 19 juin 2004 seront consacrées à la recherche opérationnelle. Le prix d'Alembert de la SMF y sera décerné.

Avec plusieurs sociétés savantes scientifiques françaises, la SMF a adressé une lettre ouverte au Président de la République pour l'alerter sur les conséquences désastreuses qu'aurait le maintien des restrictions budgétaires annoncées par le gouvernement pour le financement de la recherche publique. Voici le texte de cette lettre.

Paris, le 26 juin 2003
Monsieur le Président de la République
Palais de l'Élysée
55, rue du Faubourg Saint-Honoré
75008 Paris

Lettre ouverte des Sociétés Savantes Scientifiques Françaises au Président de la République

Monsieur le Président,

La recherche fondamentale française est en danger. Les enjeux sont considérables, et le devoir des sociétés savantes que nous représentons est de vous alerter.

Les nations développées s'accordent toutes pour considérer que leurs économies reposent désormais de manière essentielle sur la qualité de leur recherche, sur la capacité de leurs industries à innover, à s'adapter, à développer des technologies nouvelles et sur leur niveau d'éducation qui est corrélé à la qualité de leurs laboratoires. Cette capacité dépend principalement des découvertes de la recherche fondamentale en Biologie, en Chimie, en Mathématique et en Physique.

Les progrès spectaculaires récents des Sciences de l'Information ou de la Médecine, proviennent des travaux réalisés en amont par toutes les sciences de base. Une recherche fondamentale dynamique est indispensable à la génération d'innovations véritables qui sont, par essence, imprévisibles. Elle est aussi absolument nécessaire à la formation des futurs spécialistes de haut niveau dont l'industrie et la technologie ont besoin. Toutes les grandes questions qui préoccupent légitimement nos *concitoyens, qu'il s'agisse d'environnement ou de santé par exemple, demandent un accroissement très important de nos connaissances. Les enjeux de la recherche scientifique sont énormes et se traduisent de plus en plus rapidement dans la vie quotidienne de chacun. Ils sont la clé de notre économie de demain.*

D'autres pays l'ont bien compris qui font de la recherche scientifique une priorité absolue. La France doit continuer à être un acteur de premier plan. Les difficultés sociales et économiques que traverse notre pays et dont nous sommes conscients ne doivent pas nous entraîner à sacrifier les intérêts à long terme de la Nation. Si nous perdons notre compétitivité dans ce domaine, il sera long et coûteux, voire impossible, d'y remédier. Nous ne sommes pas le seul pays à connaître de telles difficultés, mais nous sommes le seul où des décisions aussi dangereuses pour notre avenir aient été prises.

La tradition scientifique française a permis à notre pays d'atteindre un très haut niveau dans le concert mondial. L'État est quasiment en France le seul à soutenir la recherche fondamentale. Quelle que puisse être leur bonne volonté, les entreprises ne prendront pas le relais de la recherche publique car elles sont soumises à des contraintes économiques le plus souvent à très court terme qui les empêchent d'investir dans l'avancement de la connaissance.

Le potentiel scientifique des organismes de recherche français est très élevé, comme en témoigne la qualité des recrutements. Certes, il doit être possible d'améliorer le fonctionnement de notre appareil de recherche. Nous souhaitons qu'une réflexion soit engagée, pour examiner sereinement et sans a priori les avantages et défauts de notre système. Les sociétés que nous représentons sont prêtes à jouer un rôle dynamique, d'abord dans ce processus d'évaluation, ensuite pour la mise en œuvre des réformes qui pourraient s'avérer nécessaires. Mais il ne faut surtout pas détruire un patrimoine aussi précieux que le nôtre.

Les difficultés que nous traversons ne sont rien en comparaison de celles que nous connaîtrons si l'absence de politique scientifique claire et ambitieuse nous condamne à l'appauvrissement, faute de pouvoir développer les technologies nouvelles qui seront notre richesse de demain. Notre recherche régressera rapidement si nos meilleurs chercheurs, après avoir fait leurs preuves, ne reçoivent qu'à l'étranger les moyens nécessaires au développement de leurs projets.

C'est dans ce contexte que notre devoir est d'appeler l'attention de tous nos concitoyens, sur tant de décisions budgétaires qui mettent notre tissu de recherche en péril : loi de finances en forte baisse, annulations de crédits, non versement de crédits votés, suppression de postes. Les restrictions de crédits effectives en 2003 et prévues en 2004 menacent gravement le fonctionnement de nos laboratoires au moment où nos concurrents directs, USA, Japon, principalement, maintiennent ou augmentent fortement leurs efforts.

Nous, qui représentons ici les associations professionnelles scientifiques, et n'avons pour objectif que la qualité de la science de notre pays au service de nos concitoyens, attirons votre attention sur les conséquences désastreuses de cette politique. L'Etat doit insuffler un élan indispensable à la recherche fondamentale en la finançant au niveau de ce qui est fait dans les grands pays développés. L'avenir scientifique, technologique et industriel de notre pays en dépend.

En espérant que vous serez sensible à la gravité de ce message, nous vous adressons, Monsieur le Président, l'expression de notre plus haute considération,

Édouard Brézin, Président de la Société Française de Physique
Jean-Yves Cahn, Président de la Société d'Hématologie
Alain Cozzone, Président de la Société Française de Biochimie et de Biologie Moléculaire
Jean-Antoine Lepesant, Président de la Société Française de Biologie du Développement
François Mathey, Président de la Société Française de Chimie
Colette Picard pour Michel Théra, Président de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
Geneviève Rougon, Présidente de la Société des Neurosciences
Catherine Sautes-Fridman, Présidente de la Société Française d'Immunologie
Michel Waldschmidt, Président de la Société Mathématique de France.

Rapport Moral
Période de juin 2002 à juin 2003

Affaires générales, par Michel Waldschmidt, Président

Ce rapport annuel est l'occasion de présenter quelques unes des activités de la société.

Activités Scientifiques

La journée annuelle de notre société a eu lieu le samedi 15 Juin 2002. Daniel Claude en a organisé la partie scientifique sur le thème « Mathématiques et Biologie ». Celle de juin 2003 sera consacrée au thème « Groupes et Géométrie » et coordonnée par François Labourie.

Les sessions des États de la Recherche bénéficient du soutien financier du Ministère de la Recherche et du CNRS. Une session eu lieu du 3 au 6 juin 2002 à l'Université Paris XIII : « Opérateurs de Schrödinger aléatoires : méthodes, résultats et perspectives ». La prochaine est prévue au CMLA, Cachan du 23 au 25 juin 2003 : « Aspects probabilistes de l'imagerie mathématique ». Une autre session devrait avoir lieu à Dijon en 2003 : « Dynamique presque hyperbolique ».

La SMF a participé :

– À une rencontre à Besançon le 14 octobre 2002 organisée par le Comité National d'Évaluation (CNE) sur les « formations nationales en mathématiques orientées vers les applications ».
– Aux journées nationales de l'APMEP qui se sont tenues à Rennes en octobre 2002.
– À la journée Mathenligne à l'IHP le 22 novembre 2002.
– Au Festival des Sciences à Marseille en décembre 2002.
– Au colloque national sur les études scientifiques universitaires « Les études scientifiques en question » à Bordeaux du 3 au 5 février 2003.
– Au congrès annuel de « MATh.en.JEANS » à Orsay du 23 au 25 mars 2002.

La SMF a parrainé plusieurs manifestations :

– Le congrès de Mathématiques Appliquées à la mémoire de Pierre-Louis Lions au Collège de France du 1 au 5 juillet 2002.
– La Journée du 18 décembre 2002 à l'IHP « Il y a 100 ans, la science et l'hypothèse » organisée par les Archives Poincaré (Nancy) et Philippe Nabonnand à l'occasion du 100ème anniversaire de la parution de Sciences et Hypothèse de Henri Poincaré.

– Un colloque à l'École Polytechnique à la mémoire de Laurent Schwartz en juillet 2003 (un numéro spécial de la Gazette y sera consacré).

– Le Colloque « Pour plus de femmes scientifiques » organisé par Femmes et Mathématiques à l'Institut Henri Poincaré le 17 mai 2003.

La SMF a aussi manifesté son attachement au Palais de la Découverte et son inquiétude devant les menaces qui pèsent sur son avenir au moment de la rénovation et de la restructuration du Grand Palais.

La SMF est aussi intervenue auprès de différents responsables pour les encourager à soutenir les mathématiques, aussi bien pour les questions concernant la recherche que l'enseignement. La SMF se préoccupe de l'évolution des effectifs des étudiants s'orientant vers les domaines scientifiques ; elle le fait en concertation avec d'autres associations et en liaison avec des scientifiques d'autres disciplines.

Enfin une rencontre amicale avec l'équipe - metteur en scène et acteurs - de la pièce de David Auburn, « La Preuve », qui se joue au théâtre des Mathurins à Paris a été organisée par l'IHP et la SMF le 20 janvier 2003.

Affaires Internationales

Un des principaux événements de cette année a été la tenue à Nice en février 2003 du congrès AMAM2003 organisé par la SMF, la SMAI et la SME. Cette manifestation a mobilisé de nombreuses énergies. Mireille Martin-Deschamps, Doina Cioanescu et Alain Damlamian y ont consacré une très grande partie de leur temps pour le préparer et équilibrer le budget. Le conseil scientifique, présidé par Pierre Louis Lions et Serguei Novikov, et le comité d'organisation local, composé de Denise Chenais, Jacques Blum et Charles Walter, ont permis que ce congrès soit réussi sur le plan scientifique aussi bien que pour l'organisation matérielle.

Un congrès franco-canadien (`http://smc.math.ca/Reunions/Toulouse2004/`) est en préparation. Organisé par la SMF, la SMAI, la SFdS (Société Française de Statistique) avec nos collègues canadiens de la SMC (Société Mathématique du Canada) et de la SSC (Société de Statistique du Canada), il se tiendra à Toulouse en juillet 2004. À cette occasion Jean-Jacques Risler mettra en place une structure mathématique francophone ; une réunion préliminaire pour préparer ce projet se tiendra au cours d'une rencontre avec la Société Mathématique Tunisienne en octobre 2003.

À la suite d'une réunion du COPED (Comité pour les Pays en Développement de l'Académie des Sciences) début 2002, la SMF, la SMAI et la SFP (Société Française de Physique) ont mis en place le 5 octobre 2002 une cellule de coordination pour les actions concernant les pays en développement. Présidée par Jean-Pierre Kahane, avec Claude Lobry comme secrétaire, elle a pour objectif de mener des actions afin d'attirer l'attention des tutelles sur l'insuffisance des moyens consacrés à la coopération avec les pays en développement dans les sciences de base.

Une réunion organisée le 5 septembre 2002 par Mireille Martin-Deschamps a permis aux membres des conseils de la SMF et de la SMAI de mieux connaître la SME (Société Mathématique Européenne). La SMF a été représentée lors de diverses rencontres avec la SME, en particulier lors de l'AG à Oslo en juillet 2002. La SMF était membre de la délégation officielle du CNFM à l'Assemblée Générale de l'Union Mathématique Internationale à Shanghai en août 2002, juste avant le Congrès International des Mathématiciens de Beijing. Lors de cette Assemblée Générale et de ce congrès ICM2002 un dossier de presse, réalisé par Francine Delmer et Claire Ropartz, a été diffusé. Ces événements internationaux ont été l'occasion de développer des contacts avec un certain nombre de sociétés savantes de divers pays.

Un article présentant la SMF a été envoyé pour publication dans les bulletins internes des sociétés mathématiques avec lesquelles nous avons des accords de réciprocité : DMV (Deutsche Mathematische Vereinigung - Société Mathématique Allemande), DMF (Dansk Matematisk Forening - Société Mathématique Danoise), RSME (Real Sociedad Mathematica Española), LMS (London Mathematical Society), UMI (Unione Matematica Italiana). Avec la DMV nous avons également plusieurs autres projets d'échanges et d'actions communes - une page commune aux sites web de chacune des deux sociétés a été préparée par Volker Heiermann. Enfin des actions communes avec la Société Mathématique de Moscou sont en projet.

La ville de Prague a subi en Août 2002 une inondation catastrophique qui a dévasté la Bibliothèque Vaclav Hlavaty de l'Université Charles. La SMF a remplacé gracieusement des périodiques perdus, tels que le Bulletin et les Mémoires de la Société Mathématique de France, Astérisque, les séminaires Bourbaki, ainsi qu'un certain nombre d'ouvrages. La SMF et la SMAI se sont associées pour lancer un appel commun à la solidarité en faveur de nos collègues pragois et pour organiser une collecte d'argent destiné à reconstituer le fonds bibliographique. Je remercie Jan Nekovar d'avoir coordonné cette action.

La bibliothèque d'Orsay avait mis à la disposition de la SMF des locaux pour entreposer une cinquantaine de collections des 100 premières années du Bulletin de la SMF. Les responsables ont demandé que ces locaux soient libérés. Grâce à l'action efficace de Jean Ecalle à Orsay, et avec l'aide de diverses institutions dont le CIMPA, le Centre Abdu Salam de Trieste (ICTP) et le Comité pour les Pays en Développement de la Société Européenne de Mathématiques, ces collections ont pu être distribuées à des bibliothèques, principalement dans des pays en développement.

Le Président de la SMF est intervenu près des autorités de l'Université de Nijmegen qui veulent fermer le département de mathématiques. Diverses autres interventions ont été faites par la SMF, par exemple près de la Game Theory Society et de la Palestinian Mathematical Society.

CIRM

La SMF est responsable de la gestion du CIRM ; avec le CNRS et le Ministère elle est l'une de ses trois tutelles. Étant donnée la situation du CIRM à côté de l'Université de la Méditerranée, nous souhaitons signer une convention avec cette université pour formaliser les relations entre nous et résoudre des questions liées au personnel et à la bibliothèque.

Le projet de rénovation du CIRM et d'extension de la maison de la SMF à Luminy sont en cours de réalisation (voir la partie du rapport moral rédigée par Paul-Jean Cahen).

Le bail emphytéotique qui doit expirer fin juillet 2004 doit être remplacé par une autorisation d'occupation temporaire dont la signature est imminente. Nous continuerons à prévoir une provision dans le budget pour l'amortissement du risque encouru.

La question du statut fiscal du CIRM continue de faire l'objet de négociations entre la SMF et l'administration fiscale, avec le concours d'un avocat de la SOFIDEEC.

Adhésions

Le nombre d'adhérents de la SMF reste inférieur à 2000. La pyramide des âges des adhérents montre aussi que nous n'attirons pas suffisamment de jeunes mathématiciens. Cette faiblesse numérique de notre Société est bien contrariante. Pour l'enrayer, il nous faudra probablement mieux valoriser nos actions en développant notre communication ; il ne suffit apparemment pas d'agir utilement pour la communauté mathématique, il faut encore le faire savoir, et je compte sur tous les adhérents pour cela. L'effort qui a été entrepris pour que la SMF ait plus d'activité au niveau local dans chaque université doit être poursuivi, et pour cela le rôle des correspondants doit être renforcé.

Collaboration avec la SMAI

De nombreuses actions sont menées en collaboration avec la SMAI.

– La brochure « Explosion des Mathématiques », parue juste avant le Congrès International ICM 2002 a été tirée à 15 000 exemplaire, elle continue à être largement diffusée et rencontre un réel succès. Elle aussi disponible sur le site de la SMF. Rappelons que sa réalisation a été possible grâce à des subventions du Ministère de la Recherche (Brigitte Vogler) et du CNFM. Des traductions en différentes langues sont à l'étude.

– La SMF et la SMAI disposent d'un portail commun `http://www.emath.fr/`. Ce portail est maintenu par le groupe webmath (`http://www.emath.fr/web-math.php`), qui est constitué de membres de la SMAI, de la SMF, de la Cellule Mathdoc et de personnalités compétentes. Dans ce groupe, Laurent Koelblen s'occupe plus précisément du serveur de la SMF.

Parmi les autres actions communes avec la SMAI, notons aussi :

– Le débat : « Les mathématiques dans les nouveaux cursus universitaires (licence master doctorat) » du 18 janvier 2003 (voir la section Enseignement)

– L'organisation du congrès de Nice (avec l'EMS en février 2003) et la préparation de celui de Toulouse (avec nos collègues canadiens en juillet 2004).

– La participation à l'annuaire de la communauté mathématique française (`http://annuaire.math.cnrs.fr/`) mis en place par le CNRS à l'Institut Mathématique de Jussieu.

– La mise en place d'une cellule de coordination pour des actions concernant les pays en développement (voir ci-dessus)

– Une coordination des correspondants locaux de nos deux associations.

– Différentes interventions ont été faites conjointement par Michel Théra (président de la SMAI) et le président de la SMF. Par exemple nous avons interviewé Jean-Marc Deshouillers sur les Primes d'Encadrement Doctoral, nous avons rédigé un appel (avec Etienne Guyon, président de la SFP) pour le soutien de la coopération internationale dans les sciences de base et nous avons cosigné un communiqué de presse le 19 octobre 2002 avec une dizaine d'autres associations concernées par la désaffection des jeunes pour les études scientifiques.

Personnel

Michel Zisman a poursuivi avec toujours autant d'efficacité la mission qui lui a été confiée depuis plusieurs années par la SMF pour s'occuper de toutes les questions de gestion du personnel. J'ai continué aussi à solliciter les conseils d'Emmanuel Hermand, secrétaire général de l'IHÉS, dont la compétence en ce domaine m'a été précieuse.

L'année en cours a vu des changements concernant la situation du personnel. Monique Michel, qui gérait les finances de la Société depuis de nombreuses années, a cessé ses activités. Catherine Branger a été recrutée en CDD pour 9 mois, et il est prévu de signer un CDI avec elle ensuite.

Alexis Argyroglo a été recruté sur un emploi jeune pour aider le secrétariat général et assurer diverses tâches administratives. À la fin de son contrat il a été remplacé par Nessim Marzouk.

Marielle Randria-Riou, assistante d'édition, a bénéficié d'un congé de maternité, pendant lequel elle est remplacée par Stéphane Aicardi.

Un recrutement d'une personne à mi-temps a été fait sur un CDD pour la cellule de Luminy (d'abord Isabelle Camblanne, puis Réjane Laval). Il faudra embaucher une personne en CDI dans un avenir proche, et nous étudions actuellement la définition précise du profil de ce poste.

Ce recrutement augmente les charges salariales - c'est indispensable avec le passage aux 35 heures, mais cela nous oblige à augmenter notre vigilance sur l'état financier de la société.

Sylvie Berlinguez, expert comptable à Sud Est Gestion (Marseille), nous conseille pour mettre en place de nouvelles procédures comptables. Le contrat qui nous liait avec KPMG n'a pas été renouvelé.

Je voudrais souligner l'extrême dévouement dont fait preuve tout le personnel de la SMF, aussi bien à Paris qu'à Luminy. Travailler avec des personnes fortement motivées facilite grandement la tâche, et je les remercie tous et toutes pour la qualité de leur travail.

Rapport financier par Alain Jacquemard, trésorier

Le résultat de l'année 2002 est positif, en légère baisse : le bilan (hors CIRM) présente un bénéfice de 40 k€ contre 44 k€ en 2001.

Rappelons que le bénéfice de 2000 était de 73 k€.

Cette baisse du bénéfice trouve son origine dans la baisse des revenus financiers et dans l'augmentation de la masse salariale, mais on assiste par contre à une augmentation substantielle de la production vendue. Il faut noter qu'une partie de cette augmentation de la masse salariale n'est pas récurrente.

Grandes masses de l'exécution du budget

Les recettes et dépenses se trouvent diminuées cette année, suite à la décision de ne pas présenter des mouvements (comme ceux relatifs à la subvention MENRT pour le CIRM) dans ce bilan SMF hors CIRM.

Produits d'exploitation

Les recettes représentent environ 1,016 M€ (1,257 M€ en 2001) :

(1) recettes dues aux deux principales revues : 356 k€ contre 294 k€ en 2001, mais le volume de fabrication a augmenté dans une proportion analogue).

(2) cotisations, abonnement à la *Gazette* : stables à 111 k€.

(3) produits financiers : 27,5 k€ contre 31,6 k€ en 2001 (baisse des taux d'intérêts).

Subventions

Les subventions pour l'activité d'édition se montent à 32 k€ (contre 39 k€). Figure aussi à ce poste le solde de la subvention du MENRT (15 k€) pour la brochure Explosion des Mathématiques.

Charges d'exploitation

En baisse à 1,004 M€ (contre 1,262 M€ en 2001).

(1) masse salariale en nette hausse, comme prévu, à 323 k€ (contre 241 k€ en 2001) : prise en charge du salaire de G.Mora sur toute l'année 2002, embauches en intérim à la cellule de Marseille, frais de départ de Mme Monique Michel. Enfin, une provision de 13 k€ a été constituée pour les congés payés des salariées du CIRM. Cette hausse de la masse salariale est génératrice de déficits dans la plupart des revues.

(2) les frais de fabrication sont stables, à 104 k€.

(3) l'augmentation des impôts et taxes est forte (nous passons de 6 k€ en 2001 à 17 k€ en 2002), essentiellement à cause de l'augmentation de la taxe sur salaires.

(4) on doit noter une augmentation des honoraires (+10 k€), en raison du non-réglement de la situation fiscale du CIRM (provisions pour honoraires d'avocat) et de la réorganisation comptable.

Astérisque, Bulletin et Mémoires

Nos deux principales revues ont augmenté sensiblement leurs ventes, même si les volumes de production croissent aussi. Mais l'augmentation de la masse salariale (qui est répercutée dans le bilan propre à chaque revue) entraîne un déficit supplémentaire. Sans cet effet, on constaterait une amélioration de la situation financière des principales revues.

– le déficit d'*Astérisque* se creuse à 37 k€ contre 10 k€ en 2001. Mais l'effet de l'augmentation de la masse salariale est de 45 k€.

– le déficit de *Bulletin* et *Mémoires* est de 25 k€ contre 21,5 k€ en 2001. Mais ici aussi, l'effet de l'augmentation de la masse salariale est très important, à 26 k€.

Autres publications

Les variations sont toujours plus difficiles à analyser, étant donné la dispersion des volumes produits d'une année sur l'autre. L'effet de l'augmentation de la masse salariale est ici aussi non négligeable.

(1) *RHM* : en déficit à 2 k€ (mais en excédent si la masse salariale est constante).
(2) *Cours Spécialisés* : en déficit à 1,4 k€ (à l'équilibre si la masse salariale est constante).
(3) *Séminaires et Congrès électroniques* : est parvenu, après les difficultés de ces dernières années, à un quasi-équilibre (bénéficiaire à masse salariale constante).
(4) *Panoramas et Synthèses* : l'excédent passe à 11 k€ (contre 5,5 k€).

Quelques remarques

La situation financière de la SMF reste bonne. Le résultat est encore bénéficiaire cette année malgré la nette augmentation des charges salariales, qui affecte l'équilibre de l'ensemble des revues. La réorganisation de la comptabilité et de la gestion a aussi induit des coûts supplémentaires mais transitoires (par exemple la rémunération de conseils). Mais elle devrait permettre dans le futur une gestion des ventes de nos publications plus performante, et occasionner des économies. D'autre part le niveau des cotisations reste stable. Par contre il est à craindre une diminution forte de nos subventions, et cela risque de mettre en difficulté certaines revues.

Publications, par Claude Sabbah

Réalisations de l'année 2002

Situation du secrétariat des publications

Le congé de maternité de Marielle Riou, assistante d'édition, se prolonge en un congé parental jusqu'à septembre 2003. Le CDD de Stéphane Aicardi sera renouvelé pour assurer l'interim.

Explosion des mathématiques

La SMF et la SMAI ont réalisé en juillet 2002 une brochure intitulée « L'explosion des mathématiques ». Cette initiative de promotion des mathématiques, a été lancée il y a deux ans et a reçu le soutien financier du Ministère de la Recherche et du Comité National Français des Mathématiciens. Elle a bénéficié de la collaboration de nombreux collègues et a pour but de montrer à un large public l'intérêt et la modernité des mathématiques, et d'expliquer les enjeux de la recherche. L'écho rencontré par cette initiative est important. Plusieurs demandes de traduction ont été sollicitées.

Anthologie de textes mathématiques parus dans la *Gazette*

Ce volume, sous la direction de Jean-Michel Kantor, est sorti aux éditions Vuibert au printemps 2002. Il a reçu un très bon accueil (« [...] In this critic's judgement : highly recommended ! », V. Guillemin, Math. Intelligencer) et les ventes Vuibert sont bonnes. Par contre, la diffusion par la SMF est encore insuffisante (la SMF doit vendre au moins 100 exemplaires).

Mise en ligne de la *RHM*

Suite à la décision du Conseil prise en octobre 2002, les articles de la *Revue d'histoire des mathématiques* sont mis en ligne, depuis le premier numéro de la revue, et sont accessibles librement aux abonnés de la version papier (même formule que pour le *Bulletin*).

Mise en ligne de deux volumes de *Panoramas & Synthèses*

Deux volumes de *Panoramas & Synthèses* épuisés dans leur version en français (et réédités en anglais dans le cadre de la série *SMF/AMS Texts & Monographs*) ont été mis en ligne avec accès libre à l'automne 2002.

NUMDAM

Bien que NUMDAM (`www.numdam.org`) ne soit pas une réalisation de la SMF, ce programme de numérisation concerne la SMF, puisque l'ensemble des articles du *Bulletin* et des volumes des *Mémoires*, depuis leur origine jusqu'à l'année 2000 incluse, a été numérisé par la cellule MathDoc dans le cadre de ce programme. Il faut souligner le travail remarquable effectué dans ce cadre, et remercier tous les acteurs pour l'énergie qu'ils ont déployée, fournissant par là un outil inappréciable pour l'ensemble de la communauté. Les articles numérisés du *Bulletin* sont accessibles librement avec un seuil mobile de 10 ans (en 2003, les articles publiés antérieurement à 1993 sont accessibles). Suite à la déeision du Conseil d'avril 2003, il en sera de même des volumes des *Mémoires*.

Traduction de la correspondance Grothendieck-Serre

Un contrat a été signé avec l'AMS pour la publication d'une version bilingue (sortie prévue : premier semestre 2004). L'AMS et la SMF partagent les frais et les bénéfices. La SMF a fait une demande de subvention auprès du CNL.

Réédition de SGA1

Il a été décidé de publier dans la série *Documents Mathématiques* la réédition, dirigée par Bas Edixhoven et librement disponible sur `arXiv.org`, du Séminaire de Géométrie Algébrique 1.

Édition des actes du colloque en l'honneur de Pierre Cartier

Ce colloque sera publié sous la forme d'un numéro spécial de la nouvelle revue « Moscow Mathematical Journal ». La SMF en achètera à prix réduit une centaine d'exemplaires pour les diffuser, et participe ainsi à la promotion de ce nouveau journal mathématique de haut niveau.

Contrat avec EDP Sciences

Le contrat de coédition pour la série *Cours Spécialisés* a été dénoncé et remplacé par un contrat de diffusion. Ainsi, EDP Sciences diffuse *Panoramas & Synthèses*, *Cours Spécialisés* et *Documents Mathématiques*.

Publicité

Outre les actions usuelles, des envois de lettres personnalisées accompagnées d'un catalogue ont été effectués auprès de mathématiciens anglais (une centaine), espagnols (environ 200) et allemands (environ 600).

Bilan de l'année 2002

Je renvoie au bilan des revues individuelles (disponibles auprès du secrétariat SMF) pour plus de précisions.

État de la publication des périodiques

- *Astérisque*, *Bulletin*, *Mémoires*, *Gazette*, *Officiel*

– La situation d'*Astérisque* est bonne. Il y a eu un petit retard de publication en fin d'année 2002. Il est possible que cela se reproduise en 2003. Étant données les fluctuations au niveau des textes et des auteurs, ce phénomène semble normal. Il reste bien contrôlé.

– La situation du *Bulletin* est excellente : les fascicules sont publiés très tôt sur le serveur, et la publication papier suit environ deux mois plus tard. La situation des *Mémoires* est bonne.

– La *Gazette* a une sortie régulière. Depuis quelques années, un numéro spécial supplémentaire paraît quand l'actualité l'impose. Il est prévu deux numéros spéciaux (consacrés respectivement à L. Schwartz et R. Thom).

– L'*Officiel* est disponible en accès gratuit sur le serveur SMF depuis novembre 1998. Un gros effort a été fait par son responsable, A. Chambert-Loir, pour simplifier l'envoi et le traitement des annonces.

- *Panoramas & Synthèses* et *RHM*

Les revues *Panoramas & Synthèses* et *RHM* ont un retard de publication, toujours dû au fait que le nombre de textes soumis est encore assez faible et que le travail éditorial sur chaque texte est très long et très soigné. Ce retard est dommageable pour le développement de ces revues. Les comités de rédaction en sont bien conscients, et il faut souligner l'effort important fait par ceux-ci et le secrétariat des publications pour résorber le retard antérieur.

Il faut souligner aussi l'ambiguïté de la série *Panoramas & Synthèses* : elle apparaît à l'extérieur comme une série de monographies ou d'ouvrages multi-auteurs, mais la SMF la traite comme une revue périodique. Ceci impose une parution périodique régulière, encore difficile à assurer par le comité de rédaction. Mais en contre-partie, la revue bénéficie de subventions. Si le nombre d'abonnés est stationnaire, la formule de vente par abonnement assure une vente minimale de chaque numéro. Par contre, EDP Science préfère la présenter, dans sa politique de diffusion, comme une série de volumes séparés. Il semble que la revue puisse survivre à cette ambiguïté.

État des publications non périodiques

- *Cours Spécialisés*

Deux livres sont sortis en 2001. Deux livres étaient prévus en 2002. L'un est sorti en décembre 2002, l'autre fin mars 2003. La série est maintenant bien alimentée, et semble être arrivée à maturité.

• *Séminaires & Congrès*

La série commence à trouver un rythme régulier de publication (un volume par an depuis 2000). La consultation électronique prend de l'ampleur (environ 900 téléchargements d'articles entre mars 2002 et mars 2003).

• *Documents Mathématiques*

Le succès des deux premiers volumes est acquis, et augure bien de la suite. Il est prévu la publication de la réédition de SGA1 et celle d'un cours de A. Douady et J.H. Hubbard. L'existence d'une version électronique libre de SGA1, entièrement identique à la version publiée, permettra de mesurer l'intérêt et les problèmes d'une telle formule.

Publications électroniques

L'utilisation, par la communauté, des publications électroniques de la SMF prend de l'ampleur. Les téléchargements d'articles de la *RHM*, nouvellement mise en accès électronique, sont encore faibles. Entre mars 2002 et mars 2003, on compte 365 téléchargements d'articles du *Bulletin* (libres pour les abonnés papier), de pays variés, et 900 téléchargements (libres) d'articles de *Séminaires & Congrès* (sans tenir compte des téléchargements sur les sites miroirs EMIS).

L'introduction de NUMDAM devrait accentuer cette évolution.

Quelques constatations :

– Les articles des numéros ayant plus de 10 ans du *Bulletin* sont encore téléchargés (environ 50/365).

– Le site est visité dès la mise à disposition des articles, donc avant la publication papier.

– La série *Séminaires & Congrès* devient de plus en plus connue, ce qui ne porte pas trop préjudice à la version papier. On rencontre aussi plusieurs téléchargements de volumes complets et quelques téléchargements de la série complète.

État des ventes des publications périodiques en 2002

Le nombre d'abonnés aux revues reste stationnaire, à de petites fluctuations près.

Les revues *Astérisque*, *Bulletin & Mémoires* et *Panoramas & Synthèses* ont encore bénéficié de la subvention du contrat quadriennal signé avec CNRS-périodiques. La *RHM* et *Panoramas & Synthèses* ont aussi bénéficié de subventions du Ministère de la Culture (Délégation générale à la langue française), subventions qui ne devraient pas pouvoir être renouvelées, en principe.

Les ventes de volumes séparés de ces revues (hors abonnement) sont un peu en baisse, aussi bien par la SMF que par l'AMS, sans que la raison en soit bien claire.

État des ventes des publications non périodiques

• Coédition *SMF/AMS Texts & Monographs*

Les conclusions du rapport sur les publications de juin 2002 sont confirmées : cette collection correspond à un besoin réel et est appréciée par les non francophones ; elle permet aux auteurs d'ouvrages en français de bénéficier d'une bien meilleure diffusion. Par exemple, le volume 3 de la série (Astérisque 229) a fait l'objet d'un compte-rendu dans le Bulletin de l'AMS, ce qui est très rare pour une publication française. J'indique toutefois que Pierre Colmez (Astérisque) émet des réserves sur la nécessité de traduire les volumes d'Astérisque. En effet, cette série contrarie un peu la diffusion de l'ouvrage en français dans les pays non francophones (surtout pour *Panoramas & Synthèses*). Au total, 8 volumes sont sortis dans cette série jusqu'à présent, soit

– 4 *Panoramas & Synthèses*,

– 3 *Astérisque*

– 1 *Cours Spécialisés*

On peut faire plusieurs constatations sur les chiffres :

– En deux ou trois ans, les ventes de chaque volume sont entre 300 et 400 exemplaires (exception : le volume 1 a atteint 715 exemplaires, dont encore 43 en 2002, et le volume 8, paru en 2002, a déjà atteint plus de 300 exemplaires). L'AMS a vendu 800 volumes en 2002, avec seulement une parution nouvelle.

La SMF vend peu de volumes de cette série. Le bénéfice pour la SMF est donc faible.

• Autres publications

Les ventes des derniers numéros de *Séminaires & Congrès* sont encore faibles, mais le tirage des volumes est réduit, pour prendre en compte l'existence d'une version électronique gratuite.

Les ventes de la série *Cours Spécialisés* sont un peu décevantes, surtout de la part de notre diffuseur EDP Sciences.

Par contre, les deux premiers numéros de la série *Documents Mathématiques* ont un très bon résultat, y compris par l'AMS.

Évolution des tarifs

Le Conseil de janvier 2001 a décidé de faire subir aux tarifs une augmentation annuelle faible mais non nulle, de l'ordre de 2 à 3%, pour faire face à l'augmentation du prix du papier. Une augmentation du nombre de pages publiées par *Astérisque* en 2002 induit aussi une augmentation spécifique du tarif de l'abonnement pour cette revue, de l'ordre de 6%.

Par ailleurs, le Conseil avait aussi décidé de ramener progressivement le taux de réduction pour les membres de 50% à 30%, pourcentage qui sera atteint en 2004 (ceci concerne essentiellement les abonnements *Astérisque* et *Bulletin & Mémoires*).

Les dossiers qui vont évoluer en 2003

Action publicitaire pour la *RHM*

La *RHM* devrait évoluer à partir du numéro 9 (2003), en utilisant notamment les mêmes procédés de composition que les autres revues et unifiant ainsi le travail du secrétariat des publications. Un effort va être fait pour implanter la revue de manière plus importante aux États-Unis : sous-titre en anglais, traduction de l'éditorial, mais aussi envoi de lettres personnalisées en Amérique du Nord. L'existence d'une version électronique devrait aider à l'implantation de la revue.

Publications électroniques/publications papier

Un des enjeux majeurs de ces prochaines années pour la SMF va être la maîtrise de l'équilibre financier entre publications papier et électronique.

Les comportements des mathématiciens évoluent, et la mise en place d'outils performants comme le serveur `arXiv.org` ou les programmes comme NUMDAM accélèrent ce processus. Le grand projet « Digital Mathematical Library », où la SMF est représentée par Laurent Guillopé, va sans doute façonner les comportements, et des utilisateurs et des éditeurs, académiques ou commerciaux.

Plusieurs problèmes n'auront sans doute pas une solution rapide :

– Que faut-il faire payer, sous quelle forme ?

– Faut-il publier électroniquement les monographies ?

– Comment utiliser au mieux l'existence d'une publication électronique pour valoriser la publication papier correspondante, et ne pas mettre en péril sa viabilité financière ?

Difficulté des actions de partenariat

L'absence d'une structure commerciale au sein de la SMF rend peu rentables certaines actions de partenariat éditorial, pourtant initiées par la SMF. Par exemple, la série *SMF/AMS Texts & Monographs* ou l'Anthologie en collaboration avec Vuibert. La SMF ne réalise que peu de ventes par elle-même, face à des structures de diffusion plus efficaces. Le risque est analogue pour la diffusion du numéro spécial du « Moscow Mathematical Journal ».

Ce type d'actions ne pourra être poursuivi que si la SMF réussit à l'accompagner de mesures de diffusion importantes.

Subventions

Il ne semble pas, pour le moment, que la SMF soit en mesure de se passer de subventions, ponctuelles ou contractuelles, pour ses publications. Certains volumes se vendent bien pour diverses raisons, la SMF doit aussi assurer, par elle-même ou par ses diffuseurs, une vente raisonnable aux autres, ce qui reste difficile dans le cadre de sa structure, plus adaptée aux revues périodiques.

Il reste donc nécessaire d'être à l'affût de toute possibilité dans ce domaine.

Pôle des revues académiques françaises en mathématiques

Face à l'existence de consortia d'universités gérant globalement des accords avec de gros éditeurs, les petits éditeurs risquent de se voir mis à la marge par les bibliothèques. La SMF pousse à une certaine coordination des revues académiques françaises, dans le domaine de la fabrication comme dans celui de la diffusion, pour mettre en commun les ressources et leur savoir-faire d'une part, et pour proposer aux bibliothèques de mathématiques ou universitaires des propositions intéressantes et visibles d'autre part. L'interlocuteur principal est ici le CNRS, dans la mesure où les revues sont subventionnées par CNRS-périodiques, et la cellule MathDoc.

Enseignement, par Nicole Berline

En ce qui concerne les questions d'enseignement, deux sujets importants ont marqué l'année écoulée pour la SMF : la mise en place des nouveaux cursus universitaires LMD : licence, master, doctorat, d'une part, la désaffection désormais indéniable pour les études scientifiques universitaires, d'autre part. Sur ces sujets comme sur d'autres, nous sommes associés à la SMAI et cela rend nos efforts bien plus pertinents et utiles.

Le débat public du 18 janvier 2003 « Les mathématiques dans les nouveaux cursus universitaires (licence master doctorat) »

Le nouveau schéma licence – master – doctorat (LMD) doit être mis en œuvre dans les contrats quadriennaux des universités, au fur et à mesure de leur renouvellement. Une première vague d'universités s'est trouvée concernée dès l'automne 2002. Les autres universités devront faire des propositions dans les deux années qui viennent et de nombreuses interrogations se sont exprimées sur la manière d'intégrer les enseignements de mathématiques dans ce nouveau schéma.

Pour favoriser un échange d'informations, la SMF et la SMAI ont organisé une rencontre qui s'est tenue le 18 janvier 2003 à l'Institut Henri Poincaré.

Les actes de ce débat ont été publiés dans la Gazette d'avril 2003.

Comme les débats des années précédentes, celui-ci a été préparé par les commissions enseignement de la SMF et de la SMAI. Nous avions demandé aux correspondants de la SMF de nous renseigner sur les projets de leurs universités. Nous remercions celles et ceux qui ont répondu. Pierre Arnoux a dessiné une synthèse des questions qui se posent et des projets en cours, à l'aide de leurs réponses et des renseignements qu'il avait pu se procurer lui-même, en particulier sur les sites Internet des établissements.

La mise en place des cursus LMD va affecter la vie universitaire pendant plusieurs années. A cette occasion la SMF souhaite continuer à se mettre au service de la communauté mathématique en offrant des possibilités d'information et de débat, en particulier sur son site Internet (forum, tribune libre, pages enseignement). Il serait bon d'actualiser régulièrement le gros travail de synthèse commencé par Pierre Arnoux : évaluer, commenter, critiquer la réforme LMD, et faire des propositions *du point de vue des mathématiciens*.

Un échange d'opinions s'est ainsi tenu à propos des concours de recrutement (CAPES et agrégation) et des masters. Affaire à suivre.

La désaffection pour les études scientifiques universitaires

Le nombre des bacheliers scientifiques augmente, le nombre d'étudiants à l'université augmente, et le nombre d'étudiants dans les filières scientifiques diminue. Le phénomène touche tous les pays développés. En France, de nombreux rapports et colloques se penchent sur cette évolution préoccupante. La SMF contribue bien sûr aux efforts multiples destinés à la redresser, en premier lieu par ses actions générales de promotion des mathématiques, comme la brochure « l'explosion des mathématiques », réalisée avec la SMAI, ainsi que par sa participation aux colloques mentionnés.

Le manifeste *Action sciences*

À l'initiative de l'UDP (union des physiciens) et de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), dix associations et sociétés savantes de chercheurs et d'enseignants de différentes disciplines scientifiques, dont la SMF, ont adressé à la presse, courant octobre, un communiqué dans lequel

« Elles attirent l'attention sur la désaffection des jeunes pour les études et carrières scientifiques de tous ordres, et des conséquences, tant pour le recrutement des futurs enseignants que pour celui des ingénieurs, chercheurs et techniciens qui exerceront demain une activité scientifique dans notre pays. Elles demandent des mesures urgentes pour redresser la situation. »

Le communiqué est en ligne sur la page `http://smf.emath.fr/Enseignement/`

Colloques

– colloque national sur les études scientifiques universitaires qui s'est tenu à Bordeaux les 3, 4, 5 février dernier qui a réuni plusieurs centaines de participants des diverses disciplines scientifiques, faisant suite à celui de Lille l'an dernier. La brochure « Explosion des mathématiques » a été distribuée à tous les participants et a obtenu un accueil très favorable. Le conseiller du ministre pour les mathématiques et l'informatique l'a baptisée « le petit livre bleu » pour montrer son enthousiasme.

– la SMF participera au colloque « Réussir avec les sciences » organisé par le Conseil national des programmes le 25 avril 2003.

– colloque de Besançon Comité National d'Evaluation : Débouchés des mathématiques. Guy Chassé y a représenté la SMF.

– journées APMEP de Rennes : Alain Jacquemard y a représenté la SMF

Rencontre avec la Commission du Titre d'Ingénieur

Une délégation de la SMF et de la SMAI a été reçue par Louis Castex, président de la commission des titres d'ingénieur (CTI) le mardi 18 février. La discussion a porté sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs. Le rapport du CNE met en évidence le fait que ces enseignements sont de moins en moins souvent assurés par des mathématiciens. Cette rencontre a montré qu'il était important de dialoguer avec la CTI, et les contacts vont être développés.

Relations avec d'autres institutions

Animath

Il faut trouver un nouveau représentant de la SMF pour remplacer Anne Queguiner-Mathieu.

Conseil scientifique des IREM

Nicole Bopp représente la SMF. Le fonctionnement des commissions inter-IREM a été analysé ainsi que leur rôle dans le réseau des IREM.

Convention DESCO

L'inspection générale a demandé à la SMF de fournir des listes de personnes-ressources pour participer au jury du CAPES, au jury du Bac, aider les professeurs à monter des Travaux Personnels Encadrés ; et suggéré que la SMF passe une convention avec la DESCO [1] et autres demandes de l'inspection générale) à ce sujet. Nous ne voyons pas bien quel profit retirerait la SMF d'une telle convention.

CREM

Les quatre associations à l'origine de la CREM ont écrit au ministre pour demander le renouvellement de la CREM. Nous demandions que la CREM soit perennisée afin qu'elle puisse travailler à long terme sur les questions qui le méritent. Le conseiller du ministre nous a répondu en termes contradictoires, il ne voit dans cette commission qu'une aide à la décision pour gouvernement, mais il semble que le mission de la CREM sera renouvelée, J.-C. Yoccoz acceptant d'en prendre la présidence.

Perspectives

– Pour janvier 2003 on pourrait envisager une table ronde sur *Mathématiques, informatique et modélisation.*

– Rencontre avec la commission de l'enseignement primaire.

Secteur diffusion, par Paul-Jean-Cahen

On pourrait remettre en question la présentation du rapport moral de notre société scindé en paragraphes dont divers rédacteurs assument (presque) l'entière responsabilité. Cette présentation devrait néanmoins me permettre, après six années au service de la S.M.F. et la charge de la « cellule de diffusion », de livrer quelques réflexions, sorte de bilan, au moment de passer le relais pour les années à venir.

Alors que le Conseil de la S.M.F. a décidé en 2001 de considérer plutôt le Vice-Président en charge de la cellule comme responsable du *secteur diffusion*, avec la volonté de répartir les tâches au sein de la Société, on pourrait trouver paradoxal que je questionne la présentation du rapport moral en parties distinctes correspondant chacune à un secteur d'activité. Mais cette apparente contradiction est au cœur même de la réflexion qui accompagne ce rapport sur l'activité de la dernière année (inscrite bien évidemment dans une continuité avec les précédentes).

Toute l'année passée a notablement été marquée par des renouvellements de personnels. C'est un processus long et difficile et c'est un processus qui a engagé l'ensemble du bureau. Avec le départ à la retraite de la comptable de Paris, la S.M.F. a dû procéder à son remplacement ; auparavant, il y a déjà un an, une personne avait été recrutée à Marseille, à mi-temps et en contrat d'intérim, pour assurer la comptabilité des activités de diffusion (en remplacement d'un personnel en cessation progressive d'activité, qui fait désormais tout son service au CIRM). La répartition des devoirs et prérogatives entre ces deux

[1] Direction de l'Enseignement Scolaire

postes n'allait pas de soi et le bureau a engagé une réflexion en profondeur, qui n'est d'ailleurs pas terminée. La secrétaire en intérim n'ayant pas donné entière satisfaction a du être remplacée, dans l'urgence, à l'automne. Aujourd'hui, une secrétaire est en CDD, jusqu'aux vacances d'été, à mi-temps, à Marseille. Nous apprécions tous ses qualités bien qu'elle apparaisse comme surqualifiée pour l'emploi qui lui est confié. Tous ensemble, nous devons définir soigneusement le profil du poste à pourvoir de manière définitive, sans aucun doute d'avantage pour des activités de gestion commerciale que de comptabilité. Mes six années à la S.M.F. m'ont confirmé une évidence : les questions de personnels sont délicates, et les amateurs que nous sommes n'y sont pas nécessairement bien préparés. Le bureau se doit d'assurer collectivement son autorité mais je crois pouvoir dire que nous avons bien progressé en ce sens.

Le secteur publication semble aujourd'hui bien défini, en revanche le secteur diffusion reste en partie à bâtir. Le logiciel de Gestion commerciale, pourtant acquis en 1998, n'est toujours pas exploité au mieux de ses possibilités. En fait, la décision de l'installer à Paris n'a été prise qu'au printemps de cette année. Les bilans globaux, les synthèses, qui relèvent plus d'une vision centrale de la société pourront ainsi être faits au siège. Les routages et diverses travaux de manutention sont assurés de manière efficace par Gilbert Mora ; la poste nous donne maintenant entière satisfaction : enlèvement des colis, tarifs, envois par avion, tout cela marche bien. Par contre l'articulation entre fichier, impression des étiquettes, routage, réclamations reste à préciser. Nous procédons à un essai de routage par un nouvel imprimeur, c'est sans doute l'occasion d'avancer sur toutes ces questions. Encore une fois, si l'identité du secteur doit se développer, ceci reste l'affaire de la S.M.F. dans son ensemble. Un pas très positif est la décision que nous avons prise de deux voyages par an de la secrétaire générale à Marseille, pour assurer la nécessaire coordination de nos activités. En tout état de cause, le secteur diffusion ne trouvera son régime de croisière qu'à l'issue du processus de recrutement.

Parmi les objectifs prioritaires laissés par mon prédécesseur était celui de résoudre la question du local de stockage, mis à notre disposition par l'Université de la Méditerranée à plusieurs centaines de mètres, avec tous les problèmes que cela pose, notamment la précarité de cet « arrangement ». Mission presque accomplie. Les financements sont obtenus (la ville de Marseille nous a accordé une subvention d'environ 225k€, l'assemblée générale de la SMF a voté l'an dernier un crédit de 30k€). En avril se termine l'ouverture des enveloppes pour l'appel d'offre aux entrepreneurs, réparti en 8 lots (gros œuvre, étanchéité, menuiserie extérieure, ascenseur, chauffage, électricité). Ce projet s'inscrit dans le cadre de l'opération CIRM 2000, pour lequel nous avons obtenu des subventions des collectivités locales (CG13 et Région PACA) et dont les travaux ont déjà commencé. Le responsable de la cellule s'est vu confier un rôle d'ambassadeur auprès des partenaires locaux : CIRM, Université, Ville, Département, Région. C'est un grand sujet de satisfaction de voir l'aboutissement de nos démarches avec la réalisation de ces grands travaux.

MATHÉMATIQUES

Mikio Sato, un visionnaire des mathématiques

Pierre Schapira[1]

Comme les singularités, les idées se propagent, mais leur vitesse de propagation dépend fortement de l'énergie mise dans leur promotion, et l'on ne peut pas dire que Sato ait fait des efforts démesurés pour populariser les siennes. Espérons que l'attribution du prix Wolf 2002/2003 aidera à faire connaître une œuvre profonde et sans doute trop originale pour être immédiatement acceptée. Sato écrit très peu, ne communique pas facilement, ne fréquente qu'épisodiquement les congrès et pas du tout les institutions. Mais Sato a inventé une nouvelle manière de faire de l'analyse, l'« Analyse Algébrique », et a créé une école, l'École de Kyoto.

Si Mikio Sato est né en 1928[2], il ne s'est fait connaître qu'en 1959-60, avec sa théorie des hyperfonctions. Sa scolarité a en effet été fortement perturbée par la guerre et en particulier par les bombardements américains sur Tokyo. Il doit travailler comme livreur de charbon pour aider sa famille dont la maison a brûlé, puis est professeur d'école à 19 ans et ce jusqu'en 1958, date à laquelle il devient assistant à l'Université de Tokyo. Il étudie les mathématiques et la physique, seul.

Pour comprendre l'originalité de la théorie des hyperfonctions de Sato, il faut se souvenir de l'ambiance mathématique de l'époque. L'Analyse Mathématique dans les années 50-70 était sous l'influence directe de l'analyse fonctionnelle et fortement marquée par le succès de la théorie des distributions. On cherchait essentiellement des théorèmes d'existence et la plupart des démonstrations consistaient à définir « le bon espace fonctionnel », à démontrer une « inégalité a priori », et à appliquer le théorème de Hahn-Banach. C'est dans ce contexte que Mikio Sato définit en 59-60 les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes, découverte qui lui permettra d'obtenir un poste à l'Université de Tokyo, et ce, grâce à la protection éclairée du Professeur Iyanaga, personnalité d'une ouverture d'esprit exceptionnelle et grand ami de la culture française. Sato part ensuite deux ans aux États-Unis, à New York et à Princeton, où il essaie sans succès de convaincre André Weil de la pertinence de son approche cohomologique de l'analyse.

La méthode de Sato est radicalement nouvelle car elle n'utilise en aucune manière la notion de limite. Ses hyperfonctions ne sont des limites de fonctions dans aucun sens raisonnable, et l'espace des hyperfonctions n'a

[1]Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France, schapira@math.jussieu.fr, http://www.math.jussieu.fr/~schapira/

[2]Nous avons utilisé le texte d'un entretien accordé par Mikio Sato en 1990 à Emmanuel Andronikof, tristement disparu en 1994. Ce texte devrait néanmoins voir prochainement le jour, grâce aux efforts de A. D'Agnolo. Nous avons aussi bénéficié des commentaires scientifiques de J-B. Bost et de A. Chambert-Loir, ce dont nous les remercions chaleureusement.

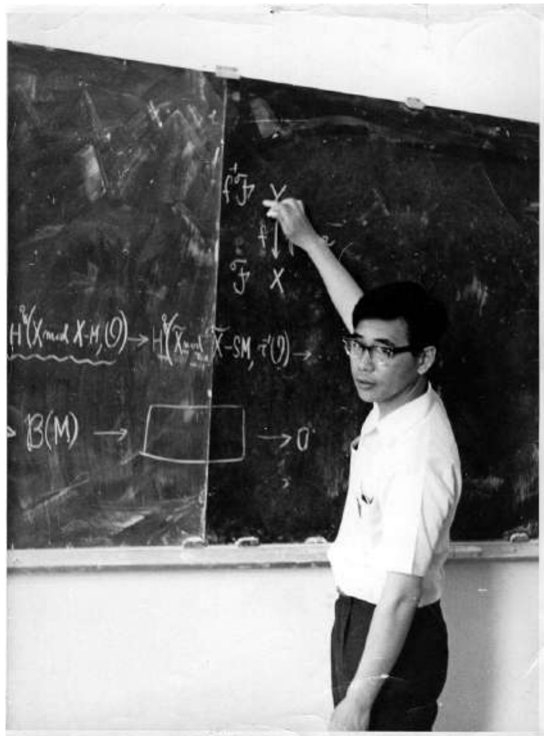


Fig. 1. Mikio Sato vers 1972

Fig. 2. Mikio Sato et Pierre Schapira vers 1972

aucune topologie naturelle autre que grossière. Pour sa construction Sato invente en parallèle avec Grothendieck la cohomologie locale, un outil purement algébrique. Il s'agit vraiment d'un regard révolutionnaire sur l'analyse, une rupture épistémologique, dirait-on dans les années 70. Mais outre son originalité incontestable, l'approche de Sato a des implications profondes car elle débouche naturellement sur l'analyse microlocale, comme je vais tenter de l'expliquer.

La théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires à coefficients variables en était à ses tout débuts dans les années 65-70, et était sous le choc de l'exemple de Hans Lewy qui montrait que l'équation linéaire du premier ordre $(-\sqrt{-1}\partial_1+\partial_2-2(x_1+\sqrt{-1}x_2)\partial_3)u=v$ n'a pas de solution, même locale, même dans l'espace des distributions [3]. Le fait qu'une équation n'ait pas de solution était à l'époque un peu choquant. On pensait que c'était un défaut de la théorie, que les espaces que l'on avait construit n'étaient pas assez gros pour contenir ces solutions. Bien sûr, c'est au contraire souvent quand il y a une obstruction cohomologique qu'il se passe des choses intéressantes : l'absence de solutions est la manifestation d'un phénomène géométrique caché et profond. Dans le cas de l'équation de Hans Lewy, la géométrie cachée est « microlocale » et cette équation est microlocalement équivalente à une équation de Cauchy-Riemann induite sur une hypersurface réelle de l'espace complexe.

En mathématique comme en physique, pour traiter un problème dans un espace (affine), on est amené à calculer dans l'espace dual. Une méthode pour cela, celle employée en analyse, est la transformée de Fourier. Mais cette transformation est fort peu locale, et se prête très mal au passage aux variétés. La méthode de Sato au contraire est beaucoup plus adaptée à ce passage : une variété réelle se complexifie, et au lieu de regarder le comportement à l'infini de la transformée de Fourier, on peut regarder « d'où viennent » les valeurs au bord. En termes techniques, on regarde le fibré cotangent (plus exactement, $\sqrt{-1}$-fois le fibré cotangent) comme le fibré conormal au réel dans le complexe. Sato définit ainsi le front d'onde analytique des hyperfonctions (donc en particulier des distributions), un fermé conique du cotangent, et montre que si une hyperfonction u est solution d'une équation $Pu=0$, alors son front d'onde est contenu dans la variété caractéristique réelle de l'opérateur P. C'est le début de l'Analyse Microlocale, inventée donc par Sato, et qui a révolutionné l'analyse.

Bien sûr, d'autres mathématiciens et physiciens ont eu à cette période (si ce n'est bien avant, avec Hadamard et Leray) l'intuition de ce qu'il fallait travailler dans l'espace cotangent, et les opérateurs pseudo-différentiels existaient avant le front d'onde. Mais Sato est le premier à faire vivre les objets de l'analyse (comme les distributions) dans l'espace cotangent et il construit pour cela un outil fondamental de la théorie des faisceaux, le foncteur de microlocalisation, « transformé de Fourier-Sato » du foncteur de spécialisation. C'est le point de départ de la théorie microlocale des faisceaux de [3]. Sato et ses deux étudiants de l'époque, Kashiwara et Kawai, publient en 73 un traité sur l'analyse microlocale des EDP, traité qui a certainement eu une influence considérable, même

[3] L'équation un peu plus simple $(\partial_1+\sqrt{-1}x_1\partial_2)u=v$ n'a pas non plus de solutions dans l'espace des germes de distributions à l'origine dans $\mathbb{R}^2$, pas plus d'ailleurs que dans l'espace des germes d'hyperfonctions.

si la plupart des analystes n'y ont pas compris grand chose et, entraînés par Hörmander, ont su adapter la transformée de Fourier classique à ces nouvelles idées.

Dès les années 60, Sato avait l'intuition de la théorie des $\mathcal{D}$-modules, des systèmes holonômes et de la b-fonction (dite de Bernstein-Sato). Il donne une série de conférences sur ce thème à l'Université de Tokyo, mais celles-ci doivent s'interrompre, faute de combattants. Ces idées sont reprises systématiquement et développées par Masaki Kashiwara dans sa thèse de 1969 ([1], [2]). Comme son nom l'indique, un $\mathcal{D}$-module est un module sur l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels, et un module sur un anneau veut essentiellement dire « un système d'équations linéaires » à coefficients dans cet anneau. Il s'agit donc de traiter les systèmes (généraux) d'EDP linéaires. Cette théorie qui est aussi apparue simultanément à Moscou dans un cadre plus algébrique avec J. Bernstein, élève de Gelfand, a rapidement eu un succès considérable dans plusieurs branches des mathématiques. Dans les années 70-80, Kashiwara obtient d'ailleurs à lui seul l'essentiel des résultats fondamentaux de la théorie, en particulier ceux concernant les systèmes holonômes, avec le théorème de constructibilité (en 1975), le théorème de l'indice, le théorème sur la rationalité des zéros de la b-fonction et sa théorie des systèmes holonômes réguliers.

Le paysage mathématique des années 70-80 a donc considérablement changé : non seulement on traite les équations à coefficients variables, mais on traite des systèmes et on travaille microlocalement, *i.e.*, dans l'espace cotangent, l'espace de phase des physiciens. Mais il y a vraiment deux écoles dans le monde : l'école C^∞ issue de l'analyse classique, et dont le chef de file est Hörmander qui a mis au point le calcul des opérateurs intégraux de Fourier, et l'école analytique, derrière Sato et fort peu representée en dehors du Japon et de la France.

La France était particulièrement bien placée pour comprendre les idées de Sato car celles-ci s'appuient à la fois sur celles de Jean Leray et de Alexandre Grothendieck. Comme Leray, Sato a compris qu'il faut chercher les singularités dans le domaine complexe (même pour comprendre les phénomènes purement réels) et l'analyse algébrique de Sato repose sur la théorie des faisceaux, inventée par Leray en 1944 alors qu'il était prisonnier de guerre, clarifiée par Cartan, et rendue d'une efficacité redoutable par Grothendieck avec son formalisme des catégories dérivées et des « six opérations ».

Sato, toujours motivé par la physique, aborde ensuite l'analyse de la matrice S à la lumière de l'analyse microlocale, puis, avec ses deux élèves Jimbo et Miwa, construit explicitement la solution de la fonction à n-points du modèle de Ising en dimension 2 en utilisant la théorie classique de Schlesinger des déformations isomonodromiques des équations différentielles ordinaires. Cela l'amène naturellement aux équations différentielles non linéaires du type KdV. En 81, en collaboration avec sa femme Yasuko Sato, il interprète les solutions des hiérarchies K-P comme des points d'une Grassmannienne de dimension infinie et introduit sa fameuse fonction τ. Ces travaux seront appliqués à d'autres classes d'équations et auront un grand impact en physique mathématique dans l'étude des systèmes intégrables et dans la théorie des champs en dimension 2.

Parallèlement à ses travaux d'analyse ou de physique mathématique, Sato a obtenu des résultats remarquables en théorie des groupes. Il introduit notamment une théorie des « espaces vectoriels préhomogènes », c'est-à-dire des représentations linéaires d'un groupe réductif complexe ayant une orbite dense. Le cas important où le complémentaire de cette orbite est une hypersurface fournit de très jolis exemples de b-fonctions.

On doit aussi à M. Sato d'avoir découvert en 1962 comment déduire la conjecture de Ramanujan sur les coefficients de la forme modulaire Δ des conjectures de Weil concernant le nombre de solutions d'équations polynomiales sur les corps finis. Ses idées ont permis à Kuga et Shimura de traiter le cas des quotients compacts du demi-plan de Poincaré et il faudra attendre encore 10 ans avant que P. Deligne ne démontre définitivement que les conjectures de Weil impliquent la conjecture de Ramanujan-Petersson.

Outre ce prix Wolf, Sato partage avec J. Tate une célèbre conjecture en théorie des nombres à propos de la répartition des angles de Frobenius. Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients entiers, à racines simples ; Hasse a démontré que pour tout nombre premier p qui ne divise pas le discriminant de P, le nombre de solutions de la congruence $y^2 = P(x) \pmod p$ est de la forme $p - a_p$, avec $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$. On peut écrire $a_p = 2\sqrt{p}\cos\theta_p$, avec $0 \leqslant \theta_p \leqslant \pi$ et la conjecture de Sato–Tate prédit que ces angles θ_p ont pour loi $(2/\pi)\sin^2\theta$. Si Tate est arrivé à cette conjecture par l'étude des cycles algébriques, Sato, lui, l'a découverte expérimentalement, par des calculs sur ordinateur !

Les derniers travaux de Sato sont essentiellement non publiés et ont donné lieu à quelques exposés semi-confidentiels. Ils portent sur une approche algébrique des systèmes d'équations non linéaires, en particulier sur les systèmes holonômes non linéaires dont par exemple les fonctions thêtas seraient solutions.

On voit ainsi que si finalement (c'est-à-dire, avec 40 ans de recul) l'approche de Sato des mathématiques n'est sans doute pas si différente de celle de Grothendieck, Sato a eu l'audace assez inouie de traiter l'Analyse comme de la géométrie algébrique, et a eu le génie de forger des outils algébriques et géométriques adaptés à ses problèmes. Son influence sur les mathématiques est et restera considérable.

Références

[1] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial diffential equations,* Thesis, Tokyo Univ. (1970), translated by A. D'Agnolo and J-P. Schneiders, Mémoires Soc. Math. France **63** (1995)

[2] M. Kashiwara, *D-modules and Microlocal Calculus,* Translations of Mathematical Monographs, **217** American Math. Soc. (2003)

[3] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds,* Grundlehren der Math. Wiss. **292** Springer (1990)

[4] M. Sato, *Theory of hyperfunctions,* I & II Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** 139–193 487–436 (1959–1960)

[5] M. Sato, *D-modules and nonlinear systems,* Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math.,**19** 417–434, Academic Press, (1989)

[6] M. Sato, *The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds,* Theta functions—Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), 51–66, Proc. Sympos. Pure Math., 49, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989

[7] M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations,* in Komatsu (ed.), *Hyperfunctions and pseudo-differential equations,* Proceedings Katata 1971, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **287** p. 265–529 (1973)

[8] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants,* Nagoya Math. J. **65** 1–155, (1977)

[9] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, *Holonomic quantum fields,* I–V Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16**, 531–584 (1980), **15**, 871–972 (1979), **15**, 577–629 (1979), **15**, 201–278 (1979), **14**, 223–267 (1978)

[10] M. Sato and Y. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold,* in Nonlinear partial differential equations in applied science, 259–271, North-Holland Math. Stud., **81**, (1983)

[11] M. Sato and T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces,* Ann. of Math. **100** 131–170, (1974)

Born 1928, Tokyo, Japan

Education

1952 - B.Sc., University of Tokyo 1963 - Ph.D., University of Tokyo

Major Positions

1960 - Lecturer, Tokyo University of Education 1963 - Professor, Osaka University 1968 - Professor, University of Tokyo 1970 - Professor, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 1987/91 - Director, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University 1992 - Professor Emeritus, Kyoto University

Major Honors and Awards

1969 - Asahi Prize of Science 1976 - The Japan Academy Prize 1984 - Person of Cultural Merits (Ministry of Education, Japan) 1987 - Fujiwara Prize 1997 - Schock Prize (Sweden)

Nombres premiers et chaos quantique

Andrew Granville

Cet article est la transcription d'une conférence donnée devant un public d'amis des mathématiques le 6 février 2002. Il a été publié initialement dans sa version originale en juin 2002, dans l'Emissary, le bulletin d'information du Mathematical Sciences Research Institute (`www.msri.org/publications/emissary`*). Nous remercions les Pr. Singer et Hoffman de leur autorisation.*

Les figures sont dues à Andrew Odlyzko (dernière figure) et Silvio Levy (autres figures).

Pour la traduction, merci à Marc Yor et Frédérique Petit, ainsi qu'à quelques collègues volontairement anonymes qui se reconnaîtront.

Andrew Granville est un spécialiste bien connu et enthousiaste des nombres premiers.

La répartition des nombres premiers est l'un des sujets les plus anciens des mathématiques. Depuis cent cinquante ans, il fait l'objet de recherches intensives au moyen des méthodes les plus modernes. Malgré cela et en dépit de la grande qualité des chercheurs qui s'y sont consacrés, il est désespérant de constater que nous savons encore très peu de choses sur les questions les plus fondamentales. Comme on peut s'y attendre dans un domaine aussi ancien et respectable, les progrès des dernières décennies ont été lents, et, comme le sujet a été si profondément étudié, les avancées apparemment les plus mineures nécessitent des idées profondes et difficiles, et bien souvent une grande virtuosité technique.

Mais récemment notre compréhension du phénomème a connu un progrès extraordinaire en provenance d'une direction inattendue. Les idées en question viennent d'un domaine qui semblait n'avoir rien à voir avec les nombres premiers, celui des mathématiques de la physique quantique.

Je suis un spécialiste de la théorie analytique des nombres, et je n'ai pas été formé à la physique : en fait, les cours de physique quantique que j'ai suivis comme étudiant, ne m'ont guère éclairé et m'ont laissé plutôt perplexe. À cause des progrès récents dans mon propre domaine, j'ai dû m'y replonger et essayer de me faire une idée des points clés de la physique quantique. Je vais essayer ici de vous faire partager le peu que j'en ai compris, de parler des conséquences troublantes de la mécanique quantique et des origines de la célèbre phrase d'Einstein :

Dieu ne joue pas aux dés avec l'univers.

Pour une bonne introduction à l'usage des profanes, voir *The Ghost in the Atom* [5].

Mais je vais commencer par un sujet avec lequel je me sens bien plus à l'aise :

Que sont les nombres premiers et pourquoi avons-nous besoin d'eux ?

Cette année, 2002, se décompose en produit de nombres premiers sous la forme $2 \times 7 \times 11 \times 13$. À l'année prochaine correspondra une autre factorisation, et en fait, chaque nombre entier se décompose à sa façon sous forme de produit de nombres premiers. « Et alors ? » me direz-vous ; eh bien chacun se sert sans arrêt du fait qu'il est difficile de factoriser les grands nombres... Avez-vous déjà acheté quelque chose sur la toile et été inondé de petites fenêtres qui s'étendent à longueur de pages sur « les systèmes de cryptage RSA » ?

C'est la théorie des nombres qui est derrière tout cela - c'est la difficulté qu'il y a à factoriser les grands nombres qui permet de conserver vos informations à l'abri des regards indiscrets !

Aussi, les nombres premiers valent-ils la peine d'être étudiés attentivement. De plus, tout comme les atomes sont les briques dont la nature est fabriquée, de même les nombres premiers sont les briques qui constituent les nombres ; ainsi, pour étudier la théorie des nombres, nous devons avoir une bonne connaissance des nombres premiers. Ensuite, je voudrais aborder l'une des questions fondamentales pour la compréhension des nombres premiers.

Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à un million ? inférieurs à un milliard ? à n'importe quel nombre donné ?

En 1849, Carl Friedrich Gauss écrivait :

Lorsque j'étais adolescent, en 1792 ou 1793, j'ai réfléchi à ce problème et ai trouvé que la densité des nombres premiers autour de t est $\frac{1}{\log t}$*, si bien que le nombre de nombres premiers inférieurs à un x donné est approximativement* $\int_2^x \frac{dt}{logt}$.

Gauss, qui avait tout juste 15 ans à l'époque de cette découverte, fit cette conjecture en étudiant les tables de nombres premiers jusqu'à trois millions. Une estimation extraordinaire, qui s'est révélée d'une étonnante précision.

x	nombre de nombres premiers inférieurs à x	surestimation de Gauss
10^8	5761455	754
10^9	50847534	1701
10^{10}	455052511	3104
10^{11}	4118054813	11588
10^{12}	37607912018	38263
10^{13}	346065536839	108971
10^{14}	3204941750802	314890
10^{15}	29844570422669	1052619
10^{16}	279238341033925	3214632
10^{17}	2623557157654233	7956589
10^{18}	24739954287740860	21949555
10^{19}	234057667276344607	99877775
10^{20}	2220819602560918840	223744644

Peut-on estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de Gauss ? Après un rapide coup d'œil à la table ci-dessus, nous voyons que le nombre de chiffres de l'erreur est environ la moitié de celui du nombre de nombres premiers, c'est-à-dire de l'ordre de sa racine carrée. En d'autres termes, on peut émettre la conjecture que

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} - \text{cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à } x$$

est borné supérieurement par une fonction comme $\sqrt{x}$. Une autre caractéristique surprenante de ces données est que l'erreur est toujours positive, indiquant que, au moins dans les données calculées jusqu'à présent, l'estimation de Gauss est trop grande. Ceci peut nous amener à penser qu'en introduisant un terme supplémentaire, on pourrait obtenir une estimation plus précise. Or ce n'est pas le cas : l'erreur change de signe une infinité de fois, comme l'a montré Littlewood en 1914.

Trouver le moment où l'erreur devient négative pour la première fois n'est pas chose aisée. La première borne concernant un tel x (appelons-le x_0) fut donnée en 1933 par Skewes,

$$x_0 < 10^{10^{10^{34}}}.$$

Pendant longtemps, ce nombre était considéré, selon plusieurs sources, comme le plus grand nombre connu ayant une propriété distinctive. Cette borne a été réduite petit à petit à $x_0 < 1,39822 \times 10^{316}$, et on peut trouver dans [1] des arguments convaincants indiquant qu'il s'agit là à peu près de la bonne valeur de x_0 ! (Pour plus de détails, voir mon article à paraître [8]).

On peut facilement modifier l'énoncé de Gauss et obtenir un modèle probabiliste pour les nombres premiers, comme le fit Cramér en 1936 [4] : soit X_3, X_4, ... une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{\log n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{\log n}.$$

On peut considérer comme élément « typique » de cet espace de probabilité la suite π_3, π_4, etc., où $\pi_n = 1$ si et seulement si n est premier, et s'il est possible de faire un énoncé dans cet espace dont la probabilité soit 1, alors on peut s'attendre à ce qu'il soit vrai pour les nombres premiers (c'est-à-dire pour la suite π_3, π_4, ...). Certainement,

$$\sum_{n \leqslant x} X_n \sim \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad \text{quand } x \to +\infty \text{ avec une probabilité égale à } 1\,;$$

en d'autres termes, la valeur attendue pour le dénombrement des nombres premiers par le modèle de Gauss-Cramér est conforme à la réalité. De plus, dans de petits intervalles (ce qui correspond mieux à ce que Gauss regardait)

$$\sum_{x < n \leqslant x+y} X_n \sim \int_x^{x+y} \frac{dt}{\ln t} \qquad \text{quand } x \to +\infty, \text{ avec probabilité 1,}$$

où y est une petite puissance fixée de x.

La seconde statistique que les gens ont tendance en général à considérer est la variance :

$$\text{la moyenne de } \left| \sum_{x<n\leqslant x+y} X_n - \int_x^{x+y} \frac{dt}{\ln t} \right|^2 .$$

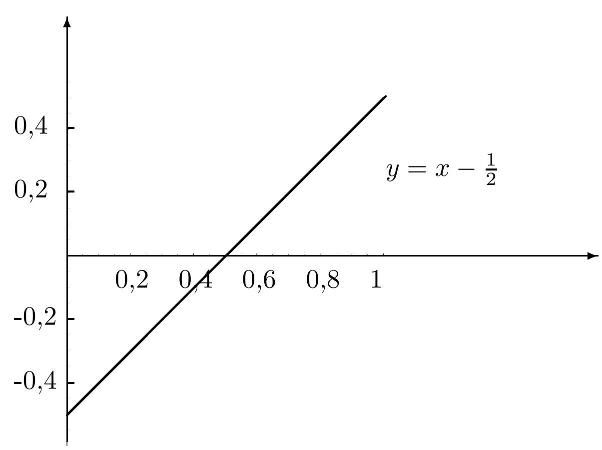
Et là, se produit une grosse surprise : on peut montrer que la valeur prédite par le modèle de Gauss-Cramér ne peut en aucun cas être la variance du dénombrement des nombres premiers ! Alors que le modèle de Gauss marchait si bien jusque-là, le fait qu'il s'effondre sur cette question est tout à fait inattendu, comme l'a remarqué Paul Erdös :

Dieu ne joue peut-être pas aux dés avec l'univers, mais il se passe quelque chose d'étrange avec les nombres premiers.

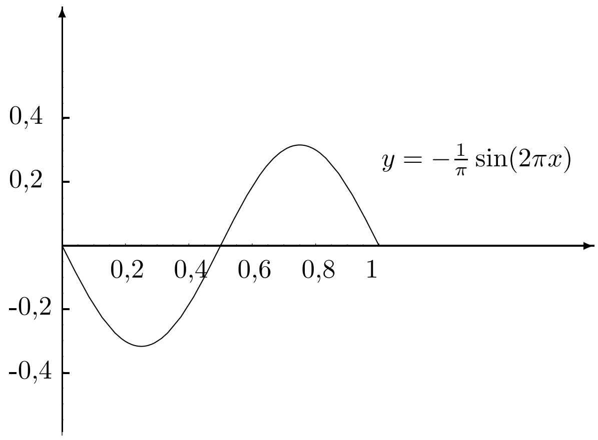
La prédiction de Gauss n'est qu'une prédiction, ce n'est pas une preuve du tout, et on aimerait bien en avoir une preuve, après tout. Trouver une méthode qui donne une estimation des nombres premiers que l'on puisse prouver s'est révélé très difficile. Quand une telle méthode est enfin apparue, elle est venue d'une direction complètement inattendue.

Les nombres premiers et la musique

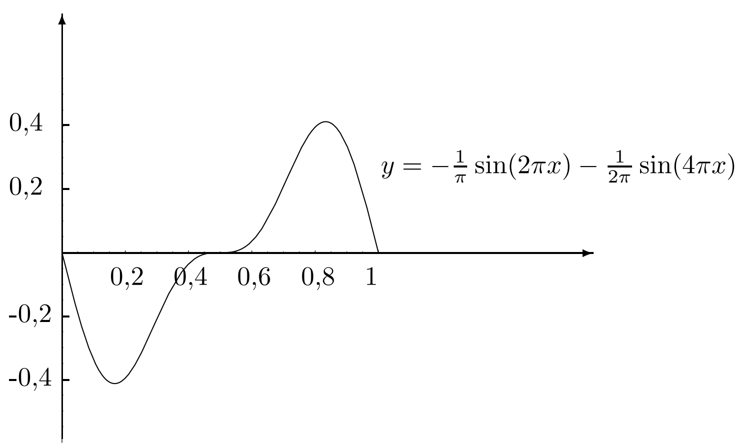
Nous commençons par un sujet qui apparemment n'a pas de rapport : comment transmet-on des signaux qui ne sont pas des « ondes » ? Nous avons tous entendu parler des « ondes radios » et des « ondes sonores », et en effet, le son se transmet sous la forme d'une onde, mais le son que nous produisons ne me semble pas très ondulatoire ; au contraire, il apparaît comme brisé, morcelé, entrecoupé d'arrêts et de soubresauts. Comment s'opère la conversion sous forme d'onde ? À titre d'exemple, considérons une ligne qui monte progressivement :



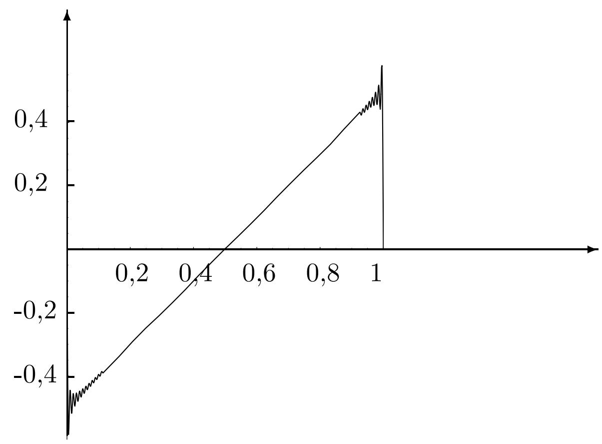
Si nous l'approchons à l'aide d'une sinusoïde, le mieux que nous puissions faire ressemble à ceci :



La partie centrale constitue une bonne approximation de la ligne droite, mais l'approximation est mauvaise pour $x < \frac{1}{4}$ et $x > \frac{3}{4}$. Comment faire pour améliorer les choses ? L'idée est « d'ajouter » à la première sinusoïde une seconde qui effectue deux cycles complets au lieu d'un à l'intérieur de notre intervalle. En ajoutant une telle sinusoïde à celle de la figure précédente, on obtient l'approximation améliorée suivante :



On peut continuer ainsi, en superposant de plus en plus de sinusoïdes afin d'améliorer sans cesse notre approximation de la ligne droite. Voici la superposition de 100 ondes sinusoïdales soigneusement choisies :



C'est une bonne approximation de la droite de départ, même si on voit qu'aux extrêmités, l'approximation n'est pas tout à fait aussi bonne (ce problème ennuyeux et incontournable est connu sous le nom de « phénomène de Gibbs »).

Comme on peut s'en douter à partir des figures ci-dessus, l'approximation obtenue sera d'autant meilleure que l'on utilisera un grand nombre de sinusoïdes. Pour le son, peut-être une centaine d'ondes fera l'affaire ; pour les transferts de données, il en faudra peut-être plus. De toute façon, pour obtenir une transmission « parfaite », il faudrait utiliser une infinité d'ondes sinusoïdales, ce que l'on obtient à l'aide de la formule

$$x - \frac{1}{2} = -2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \quad \text{pour } 0 < x < 1.$$

Une magnifique formule, quoique sans utilité pratique (puisqu'en pratique, nous ne pouvons pas additionner une infinité de termes) !

La formule révolutionnaire de Riemann

Le grand géomètre Riemann n'a écrit qu'un seul article qui puisse être considéré comme relevant de la théorie des nombres, mais l'impact de ce court mémoire s'est exercé pendant 140 ans, et les idées qu'il contient sont le fondement de ce que nous appelons aujourd'hui la théorie analytique des nombres. Traduite dans notre langage, l'idée de Riemann est simple, quoique plutôt surprenante : *essayer de compter les nombres premiers comme une somme de* *sinusoïdes.* Sa formule précise est un peu trop technique pour cet exposé, mais on peut s'en faire une bonne idée à partir de l'approximation suivante :

$$(*) \quad \frac{\text{cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs à } x - \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t}}{\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}} \approx -1 - 2 \sum_{\substack{\gamma>0 \text{ et } \frac{1}{2}+i\gamma \\ \text{est un zéro de } \zeta}} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma}$$

Remarquez que le membre de gauche de cette formule est suggéré par la conjecture de Gauss : c'est le terme d'erreur quand on compare la conjecture de Gauss au nombre effectif de nombres premiers inférieurs à x, divisé par ce qui, d'après nos données, ressemble à l'ordre de grandeur de l'erreur commise, à savoir $\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ (ce qui est proche de $\sqrt{x}$, notre première conjecture).

Le membre de droite de la formule ressemble beaucoup à notre formule pour $x-\frac{1}{2}$. Il fait intervenir une somme de fonctions sinusoïdales où $2\pi n$ est remplacé en deux endroits par γ : dans le sinus (l'inverse de la « longueur d'onde ») et au dénominateur (l'inverse de « l'amplitude »). Il y a aussi le facteur -2 dans les deux formules. Cependant, la définition des γ ici, est bien plus subtile que les simples $2\pi n$, et nécessite une explication.

La fonction zêta de Riemann est définie par :

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...$$

où $s = \sigma + it$ est un nombre complexe. La série converge absolument quand $\sigma > 1$; et il n'est pas évident au premier abord de savoir s'il s'agit là d'une vraie borne pour le domaine de définition d'une fonction de ce type. En fait, la très belle théorie du « prolongement analytique » nous dit qu'il est souvent possible de définir de façon raisonnable une fonction pour tout $s \in \mathbb{C}$ à condition qu'elle soit déjà définie dans une partie de $\mathbb{C}$; et c'est ce qui se passe ici pour ζ. En d'autres termes, il est possible de définir ζ dans le plan complexe tout entier (voir [17] pour les détails).

Nous allons maintenant nous intéresser aux « zéros » de ζ, c'est-à-dire aux valeurs de s pour lesquelles $\zeta(s) = 0$. On peut montrer que :

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = ... = 0$$

(que l'on appelle les « zéros triviaux »), et que tous les autres $s = \sigma + it$ pour lesquels $\zeta(\sigma + it) = 0$ satisfont à la condition $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Dans son mémoire, Riemann a énoncé une conjecture remarquable (« l'hypothèse de Riemann ») :

$$\text{si} \quad \zeta(\sigma + it) = 0 \text{ avec } 0 \leqslant \sigma \leqslant 1 \text{ alors } \quad \sigma = \frac{1}{2} \ ;$$

c'est-à-dire que les zéros non triviaux de ζ se trouvent sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$. Cela conduit à la définition des γ dans notre formule ; ce sont les valeurs de γ

pour lesquelles $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$. On a démontré qu'il existe une infinité de tels γ, aussi, pourriez-vous vous demander de quelle façon on calcule cette somme infinie. C'est simple : additionnez selon les valeurs croissantes de $|\gamma|$ et cela marchera.

La formule (*) ci-dessus est valide si et seulement si l'hypothèse de Riemann l'est aussi. Sinon, il existe une formule analogue, mais elle est plutôt compliquée, et techniquement beaucoup moins sympathique, puisque les coefficients $\frac{1}{\gamma}$, qui sont des constantes, sont remplacés par des fonctions de x.

Aussi, nous voudrions que l'hypothèse de Riemann soit vraie, car elle donne la formule ci-dessus et que cette formule est une vraie merveille. Enrico Bombieri, l'un des grands spécialistes contemporains des nombres premiers remarque :

Que la distribution des nombres premiers puisse être [ainsi] représentée de façon aussi précise est absolument stupéfiant et d'une beauté incroyable. Voilà qui évoque une musique mystérieuse et une harmonie secrète qui composeraient les nombres premiers.

Si l'on veut, ce serait un peu comme la formule qui décompose le son en ondes sinusoïdales. Ainsi, on peut proposer une paraphrase de l'hypothèse de Riemann : *il y a de la musique dans les nombres premiers.*

L'hypothèse de Riemann : les pièces à conviction

L'hypothèse de Riemann. *Tous les zéros s de ζ tels que* $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(s) \leqslant 1$ *satisfont à la condition* $\mathrm{Re}\ (s) = \frac{1}{2}$.

Le mémoire de Riemann (1859) ne comporte aucune indication sur la façon dont il est parvenu à cette remarquable conjecture. Il s'est contenté d'écrire : « il est très probable que tous vérifient [$\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$]. Il est certain qu'on pourrait souhaiter une démonstration plus rigoureuse : j'ai temporairement mis de côté mes recherches dans ce sens, après quelques brèves et vaines tentatives. » Pendant de nombreuses années, cette conjecture a servi d'illustration pour montrer quels sommets il est possible d'atteindre par la seule force de l'intelligence pure. C'était comme si Riemann était parvenu à cette prédiction, de nature très numérique, à partir d'une profonde intuition non révélée, plutôt qu'à l'aide d'un calcul terre à terre, ultime conclusion du pouvoir de la seule pensée pure.

En 1929, bien des années après la mort de Riemann, le grand théoricien des nombres Siegel apprit que la veuve de Riemann avait légué ses brouillons à la bibliothèque de l'université de Göttingen. Ce fut une vaste entreprise que de déchiffrer les vieilles notes de Riemann, mais Siegel y découvrit plusieurs perles rares. Tout d'abord, il trouva une formule d'une utilité fantastique, que Riemann n'avait pas encore complètement mise au point (et donc omise lors de la publication de son mémoire) qu'il fit alors éclore (bien qu'il lui fallût trois ans pour la démontrer, tout en ayant constamment la formule sous les yeux). En second lieu, Siegel découvrit des pages entières de calculs effectifs, dont plusieurs où il avait calculé les premiers zéros avec plusieurs décimales. Autant pour « la seule pensée pure ».

L'histoire du calcul des zéros de ζ est longue, et la question est intimement liée à plusieurs grands événements de l'histoire de la science. Lorsque les premiers ordinateurs sont devenus opérationnels, quelle est l'une des premières tâches qui leur fut confiée ? Calculer les zéros de la fonction zêta de Riemann. (Ce calcul, effectué sur l'ordinateur Mark 1 de l'université de Manchester, fut la dernière publication d'Alan Turing). Quand le Clay Math Institute a créé sept prix d'un million de dollars chacun pour la résolution de certains problèmes au cours du nouveau millénaire, c'est l'hypothèse de Riemann qui est arrivée en tête de liste (bien que, soyez-en sûrs, il existe bien des façons plus aisées de gagner un million de dollars). En novembre dernier, les premiers dix milliards de zéros avaient été calculés (par Stephan Wedeniwski de IBM, Allemagne) et chacun des derniers d'entre eux se trouve sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$. Cela semble être un assez bon gage en faveur de la véracité de l'hypothèse de Riemann, mais qui sait ? Peut-être le dix milliard et unième zéro n'est-il pas sur cette droite. Suis-je trop prudent ? Peut-être que oui, peut-être que non... Souvenez-vous que la prédiction de Gauss sur le dénombrement des nombres premiers ne devient une valeur par défaut qu'au delà de 10^{316}, qui est un nombre bien plus grand que 10^{10} (dix milliards).

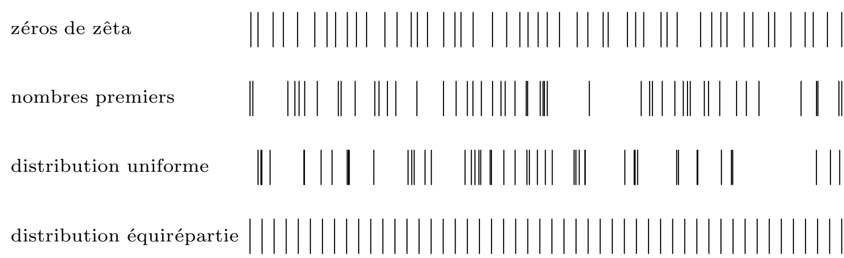
De mon point de vue personnel, la formule de Riemann évoquée plus haut est bien trop belle pour ne pas être vraie : oui, je crois qu'il y a bien une musique dans les nombres premiers.

La variance associée au dénombrement des nombres premiers : un nouveau commencement

Dans sa thèse soutenue en 1976, Julia Mueller, suivant par là un conseil de son directeur, Pat Gallagher, a repris la vieille question de la variance pour le dénombrement des nombres premiers (comparée à la prédiction de Gauss). Se souvenant que le modèle de Gauss-Cramér donne une prédiction qui ne peut être correcte, Mueller a développé l'approche de Riemann pour obtenir une meilleure idée, en considérant la question un peu plus fine de la distribution des nombres premiers dans de petits intervalles autour de x (par exemple entre x et $x+x^\delta$ pour des valeurs de δ comprises entre 0 et 1, ce qui est en fait plus proche de l'énoncé original de Gauss), et a établi une relation importante. À partir de son travail, Golston et Montgomery, ont fait la découverte remarquable selon laquelle une bonne compréhension de la variance *équivaut* à une compréhension préalable de l'espacement entre les couples de zéros de ζ.

Riemann a montré qu'il était équivalent de comprendre le dénombrement des nombres premiers ou de connaître les zéros de ζ, et que ce dénombrement est prévisible à partir d'une belle formule naturelle à condition que tous les zéros non triviaux soient sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$. Ces idées nouvelles permettent de penser un peu plus que l'hypothèse de Riemann est vraie. C'est en étudiant les couples de zéros et la distance qui les sépare que l'on peut comprendre en gros l'amplitude des variations dans le dénombrement des nombres premiers.

Si l'on admet l'hypothèse de Riemann, les zéros sont de la forme $\frac{1}{2} \mp i\gamma_1$, $\frac{1}{2} \mp i\gamma_2$, ... avec $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_3 \leqslant ...$ jusqu'à la hauteur T (c'est-à-dire, les γ_n tels que $0 \leqslant \gamma_n \leqslant T$). On pourrait se demander comment ces γ_j sont répartis sur le segment $[0, T]$. Ressemblent-ils à des nombres choisis au hasard sur cet intervalle ? Ou semblent-ils suivre un autre modèle ? Dans le diagramme ci-dessous, nous comparons les données correspondant aux zéros de ζ avec des ensembles de points dont la répartition correspond à d'autres phénomènes mathématiques.



Cinquante zéros consécutifs de la fonction zêta ; cinquante nombres premiers consécutifs à partir du millionième ; cinquante nombres distribués aléatoirement selon une loi uniforme ; cinquante nombres espacés régulièrement. D'après « Chaotic motion and random matrix theories », par O. Bohigas et M. J. Giannoni, dans Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics, Springer-Verlag, 1984.

Il n'est pas difficile de constater que les données correspondant aux γ_j ne ressemblent guère à une distribution aléatoire (schéma de Poisson). En fait, dans la distribution uniforme, on voit que les points s'agglomèrent de temps en temps (les rendant alors plus ou moins impossibles à distinguer), alors que les γ_j n'ont pas l'air de s'agglomérer du tout, et apparaissent mieux répartis que dans le cas uniforme. On a même plutôt l'impression que les γ_j se repoussent les uns les autres.

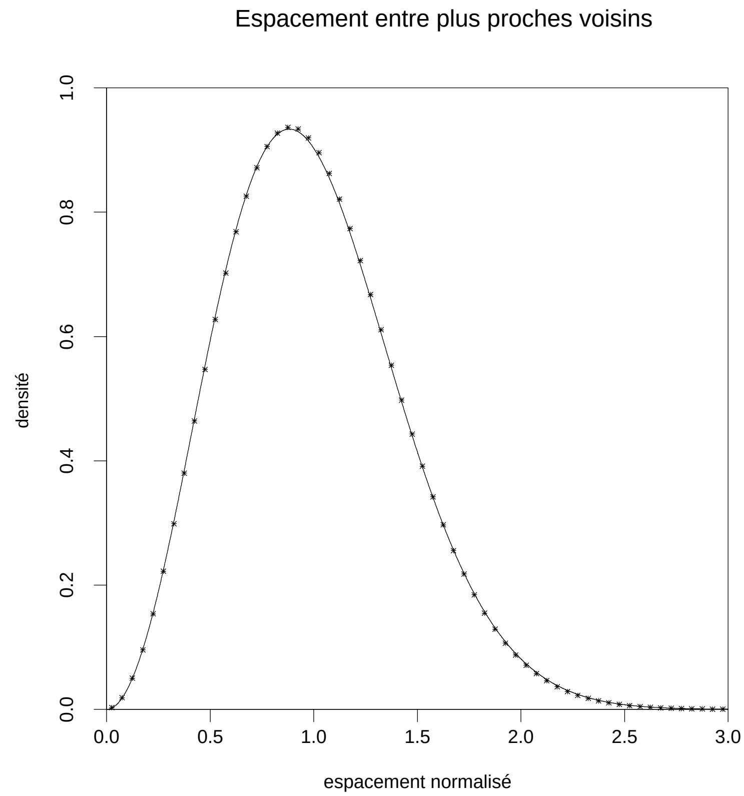
À peine deux ans plus tôt, motivé par un tout autre problème de théorie des nombres, Montgomery avait tenté de comprendre cette répartition, et énoncé pour cela une conjecture précise sur les sauts entre les zéros.

Conjecture de Montgomery (1973). Le nombre attendu de zéros dans un intervalle de longueur T multiplié par la longueur moyenne du saut qui suit un zéro, vaut

$$\int_0^T \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{u}\right)^2\right) du.$$

Si les zéros étaient répartis selon une distribution uniforme, alors cette valeur vaudrait simplement T ; en fait, un examen attentif de cette conjecture montre qu'elle affirme la répulsion des zéros observée dans les quelques données de la figure précédente. Par exemple, pour des zéros obéissant à une distribution uniforme, on s'attendrait à trouver une fois sur 100 un zéro à une distance $\frac{1}{100}$ d'un zéro donné, alors que cette fréquence est d'une fois sur 911963 si la conjecture de Montgomery est vraie.

Voyons comment se comporte la conjecture de Montgomery face aux données rassemblées par Andrew Odlyzko au cours des quinze dernières années. Le graphe ci-dessous, tiré de [14], mesure en fait les « espacements entre plus proches voisins », c'est-à-dire la distribution de $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ divisé par l'espacement moyen. La ligne continue suit la prédiction de Montgomery ; les points représentent les données rassemblées par Odlyzko (un graphe éparpillé). Les données reposent sur un milliard de zéros à proximité du $1,3.10^{16}$-ième zéro.



Comme cela colle bien ! On croit sûrement que la conjecture de Montgomery est vraie. Montgomery a même prouvé en partie que sa conjecture est vraie (techniquement, il a montré que la transformée de Fourier de sa fonction de répartition est la bonne dans un petit domaine, si l'hypothèse de Riemann est vraie).

La mécanique quantique entre en scène

Les progrès scientifiques se produisent parfois d'étrange manière. Quelquefois, on dirait que la même idée révolutionnaire jaillit en même temps chez deux personnes, bien qu'elles ne se soient jamais rencontrées, et sans qu'aucun changement visible ne soit apparu récemment dans le domaine ou des domaines voisins. Alors pourquoi cette simultanéité ? Les grandes idées nouvelles résultent parfois de rencontres fortuites, et c'est ce qui s'est produit dans notre domaine. Peu après avoir développé son nouveau point de vue sur le dénombrement des zéros, Montgomery est passé à Princeton, désireux en particulier de débattre de son idée avec deux grands experts de la théorie analytique des nombres, Selberg et Bombieri, tous les deux à l'Institute for Advanced Study. Pendant la semaine a lieu chaque jour à l'Institut, un thé où des gens de disciplines différentes peuvent se rencontrer et discuter d'intérêts communs. Freeman Dyson, le grand théoricien de la physique mathématique (bien qu'à l'origine théoricien des nombres), était venu au thé, et Montgomery lui expliqua ce qu'il faisait. Montgomery fut surpris de découvrir que Dyson connaissait très bien la fonction compliquée qui apparaît dans la conjecture de Montgomery, et même qu'il la connaissait dans un contexte de comparaison de sauts entre points avec le saut moyen. Cependant, et c'est ce qui est étonnant, ce n'est pas par la théorie des nombres que Dyson connaissait cette fonction, mais par la mécanique quantique. C'était précisément la fonction que Dyson avait découverte lui-même dix ans plus tôt en modélisant, du point de vue de la physique quantique, les niveaux d'énergie d'un système dynamique complexe. On pense maintenant que la même statistique décrit les niveaux d'énergie d'un système chaotique : en d'autres termes, le chaos quantique !

Pouvait-il s'agir d'une coïncidence ? Sûrement pas. Est-ce le signe de quelque chose de plus profond ? Ces questions demandent des réponses et fournissent le point de départ d'une bonne part des progrès récents.

D'un point de vue mathématique, les équations du chaos quantique sont relativement simples à développer si on les compare à celles de la théorie des nombres premiers, et par conséquent, on en savait (et on en sait toujours) beaucoup plus à leur sujet. Les observations de Montgomery et Dyson réclamaient des mathématiciens qu'ils développent de nouvelles formules pour les zéros de la fonction zêta de Riemann et qu'ils les comparent à celles du chaos quantique. Les premières choses à étudier étaient les modèles mis au point par les physiciens pour comparer les zéros proches, pas seulement deux à la fois, mais aussi trois, quatre, ou même n à la fois (ce que l'on appelle les « corrélations à n niveaux »).

Bien qu'on ait été ainsi conduit à formuler des conjectures précises sur les zéros de ζ, prouver ces conjectures, au moins en partie, constituait un obstacle sérieux que beaucoup ont tenté de franchir malgré la difficulté et les déceptions... Il a fallu plus de vingt ans pour que Rudnick et Sarnack réalisent leur percée en 1996, et démontrent que le résultat de Montgomery n'était pas une simple analogie (si l'on admet l'hypothèse de Riemann, la transformée de Fourier de la fonction des corrélations à n niveaux prévue est la bonne fonction, dans un petit domaine : en fait, ce domaine est l'analogue exact de celui de Montgomery). Désormais, les théoriciens des nombres étaient bien obligés de croire qu'au moins certaines des prédictions issues d'analogies avec le chaos quantique devaient être correctes, et tout un flot de recherches s'en est suivi.

Toujours en 1996, deux mathématiciens physiciens, Bogolmony et Keating, ont redécouvert la prédiction de Montgomery et Dyson (pour les corrélations à n niveaux sans aucune restriction sur le domaine), à partir d'un nouveau point de vue (qui avait été envisagé par [12] dans le cas $n = 2$). Ils sont partis d'une conjecture classique de théorie analytique des nombres, la version de Hardy-Littlewood de la conjecture sur les k-uplets de nombres premiers, pour montrer qu'elle conduisait à la même conclusion. Maintenant, le doute n'était plus permis, il fallait que ces conjectures soient correctes !

Les mathématiciens au travail : l'école de Sarnak

Les conjectures de Montgomery et Dyson nous disent que les zéros de la fonction ζ de Riemann se « comportent » plutôt comme des nombres qui apparaissent dans certaines questions sur le chaos quantique. Bien que les niveaux d'énergie quantique varient selon les systèmes chaotiques, il est remarquable d'observer que ces niveaux d'énergie sont distribués selon seulement une poignée de possibilités.

Il y a beaucoup de types de fonctions zêta qui apparaissent en théorie des nombres : non seulement pour compter les nombres premiers, mais aussi, au cœur de certains problèmes algébriques, arithmétiques et analytiques. Par exemple, la preuve de Wiles du théorème de Fermat repose entièrement sur un certain type de fonction zêta. Toutes ces fonctions zêta ont des propriétés communes avec l'originale : elles ont des zéros « triviaux » faciles à identifier, et tous les autres zéros sont situés dans une « bande critique » (comme $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(s) \leqslant 1$). Pour citer une propriété supplémentaire, la plus importante, nous pensons que tous leurs zéros non triviaux se trouvent sur une droite critique (comme $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$), c'est-à-dire une « Hypothèse de Riemann ». Sarnak a été intrigué par la question de savoir si les sauts entre les zéros des autres fonctions zêta sont également prévisibles à l'aide de cette même poignée de distributions issues du chaos quantique.

Avec Rubinstein, ils ont effectué des calculs à grande échelle et ont découvert une excellente corrélation entre la répartition des zéros de plusieurs fonctions zêta et les niveaux d'énergie de divers systèmes chaotiques. Ensuite, Katz et Sarnak ont imaginé se livrer à des expériences sur d'autres données, plutôt différentes, mais intéressantes pour des théoriciens des nombres : par exemple, que dire du plus petit zéro de chacune des fonctions zêta ? Pourraient-ils être distribués selon l'une de ces distributions magiques ? Les données expérimentales imposaient un modèle chaotique quantique pour cette question et plusieurs autres (voir [9]). Enfin, ils ont étudié les analogies des fonctions zêta qui apparaissent en géométrie algébrique, domaine bien éloigné du chaos quantique. Ces fonctions ont un nombre fini de zéros, et elles vérifient l'analogue approprié de l'Hypothèse de Riemann (certains optimistes pensent que les preuves de ces résultats pourraient indiquer la direction à suivre pour l'Hypothèse de Riemann : beaucoup d'entre nous ont des doutes). Katz et Sarnak se sont dits que, puisque l'Hypothèse de Riemann est vraie pour ces fonctions zêta (résultat dû à Deligne), ils pourraient peut-être aller un peu plus loin en démontrant l'analogue de la conjecture de Montgomery sur la corrélation entre couples (de zéros), ou même la conjecture de Montgomery et Dyson.

Dans l'un des travaux récents de théorie des nombres les plus remarquables, Katz et Sarnak ont accompli leur programme ([10]), en utilisant les résultats de Deligne de façon peut-être inattendue mais extrêmement ingénieuse. Les quatre cents pages de leur livre feront date : motivés par des prévisions incertaines à partir du chaos quantique, ils ont démontré un résultat profond sur les fonctions zêta dans un domaine complètement indépendant. C'est merveilleux !

Les physiciens au travail : l'école de Berry

Au même moment où une nouvelle génération de théoriciens des nombres, conduite par Peter Sarnak, apprenait à exploiter ces connexions de façon nouvelle et passionnante, la nouvelle génération de physiciens-mathématiciens, avec à sa tête Sir Michael Berry et ses collaborateurs de l'université de Bristol, a adopté une approche nouvelle et plus agressive pour développer les analogies entre les deux domaines. Leur philosophie est de prendre des risques et de pousser les analogies bien au-delà de ce que les mathématiciens oseraient faire. C'est une attitude complètement différente, que je trouve très séduisante et un peu provoquante. Ils regardent des équations dont ils savent qu'elles ne peuvent être justifiées rigoureusement, mais dont ils tirent néanmoins beaucoup d'informations utiles.

Les principaux développements sont parus dans une séries d'articles de Michael Berry et Jon Keating, et peut-être contiennent-ils la carte des progrès futurs sur les nombres premiers. Ce qu'ils affirment n'est pas toujours d'une grande exactitude, mais je suis sûr qu'ils sont près de la vérité, et, sur plusieurs questions, ils formulent des conjectures là où nous-autres, théoriciens des nombres, n'avions aucune idée.

Le flot des idées ne coule pas non plus dans une direction unique. Plus prudemment, la théorie des nombres premiers permet d'énoncer plusieurs formules assez précises (comme la formule de Riemann-Siegel citée plus haut), qui ont permis de corriger et de modifier les formules analogues du chaos quantique obtenues de façon plus informelle.

La dernière génération de physiciens-mathématiciens, conduite par Jon Keating et Nina Snaith va encore un peu plus loin, et cela peut-être très utilement. Ils visent l'un des plus grands mystères de la fonction zêta de Riemann : quelle est sa borne supérieure sur un grand intervalle de la droite $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$? En procédant avec grand soin, ils formulent des conjectures concernant des questions importantes sur lesquelles les spécialistes de théorie des nombres étaient restés impuissants.

En résumé, le côté plus intuitif du chaos quantique permet de faire des prédictions plus fructueuses sur la répartition des nombres premiers (et au-delà). D'autre part, le développement plus prudent de la théorie des nombres premiers conduit à des conjectures plus précises dans le domaine du chaos quantique. Cette intéraction mutuellement bénéfique entre deux domaines jusqu'ici indépendants, est une nouvelle tendance passionnante, et de nombreux chercheurs se tournent désormais vers ces questions dans chacun des deux domaines. C'est là exactement la raison d'être d'une institution comme le Mathematical Sciences Research Institute : le moment venu, nous avons l'occasion de rassembler les deux communautés en personne, ce qui autrement serait impossible, et d'accélérer ainsi les progrès.

Beaucoup de bruit pour rien ?

Oublions un instant tous ces progrès, ces généralisations, ces nouvelles formules passionnantes. Et le problème à un million de dollars ? Parmi ces nouvelles idées, y en a-t-il une qui nous permette de mieux attaquer l'Hypothèse de Riemann ? Avons-nous amélioré nos chances de voir enfin ce problème succomber ? Il y a seulement quelques années, en 1995, le grand Atle Selberg, en théorie analytique des nombres, déclarait :

Il y a eu très peu de tentatives pour prouver l'Hypothèse de Riemann parce que personne n'a jamais eu réellement une bonne idée à son sujet.

Il y a une vieille idée de Hilbert et Pólya pour prouver l'Hypothèse de Riemann, qui consiste à trouver un système de chaos quantique dans lequel tout zéro de la fonction zêta de Riemann correspondrait à un niveau d'énergie (ils l'ont énoncé dans un langage assez différent). Si un tel système de chaos quantique existe, il doit posséder plusieurs propriétés très particulières. Récemment, Berry et Keating ont même donné des conditions plus restrictives pour un tel système (en associant les nombres premiers aux orbites périodiques du système chaotique), ce qui pourrait bien indiquer la voie pour le trouver. C'est ce qui a peut-être poussé Berry, un preu chevalier s'il en est, à affirmer en 2000 :

j'ai le sentiment que l'Hypothèse de Riemann tombera dans les prochaines années. Je vois les fils s'assembler.

Il se peut qu'il ait raison bien que je soupçonne la preuve d'être encore loin. Néanmoins, ces nouvelles découvertes sont les plus passionnantes qui soient apparues depuis longtemps et promettent, à tout le moins, une bien meilleure compréhension de la fonction zêta de Riemann.

Remerciements

Merci à Malcolm Adams, Bob Anderson, Steve Donnelly, Cari Gervin, Dan Goldston, Will Kazez, Jon Keating, Gene and Rebecca McCarthy and K. Soundararajan pour leur aide dans la préparation de cet exposé et de cet article.

Références

[1] C. Bays and R. H. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > li(x)$*, Math. Comp. **69**, (2000), 1285–1296.

[2] M.V. Berry and J.P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Rev. **41**, (1999), 236–266.

[3] E.B. Bogomolny and J.P. Keating, *Random matrix theory and the Riemann zeros, II : n-point correlations*, Nonlinearity **9**, (1996), 911–935.

[4] H. Cramér, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arith. **2**, (1936), 23–46.

[5] P.C.W. Davies and J.R. Brown, *The ghost in the atom.* Cambridge University Press, 1986.

[6] C.F. Gauss, *Letter to Encke.* Reproduced in L.J. Goldstein's "*A history of the prime number theorem*" Amer. Math. Monthly **80**, (1973), 599–615.

[7] D.A. Goldston and H.L. Montgomery, *Pair correlation of zeros and primes in short intervals*, in *Analytic number theory and Diophantine problems*, (Stillwater. OK. 1984), Prog. Math. **70**, 183–203, Birkhäuser, 1987.
[8] A. Granville, *Prime races*, to appear.
[9] N.M. Katz and P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **36**, (1999), 1–26.
[10] N.M. Katz and P. Sarnak, *Random matrices. Frobenius eighenvalues and monodromy*, AMS Colloquium Publications **45**, Amer. Math. Soc., 1999.
[11] J.P. Keating and N.C. Snaith, *Random matrix theory and* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Comm. Math. Phys. **214**, (2000), 57–89.
[12] H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Symp. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc., (1973), 181–193.
[13] J.H. Mueller, *Primes and zeros in short intervals.* Thesis, Columbia University, (1976).
[14] A.M. Odlyzko, *The* 10^{20}*−th zero of the Riemann zeta function and* 70 *million of its neighbors*, (1989), to appear.
[15] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der berliner Akademie, November 1859.
[16] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The* n*-level correlations of* L*-functions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319**, (1994), 1027–1032.
[17] E.C. Titchmarsh. *Theory of functions.* Oxford University Press, 1938.

Pour en savoir plus, voici une petite liste non exhaustive de références sur le sujet.

P. Biane, *La fonction zêta de Riemann et les probabilités.* In *La fonction zêta*. Édité par Nicole Berline et Claude Sabbah. Éditions de l'École Polytechnique, 2003. (Voir la liste de références qui figure à la fin de cet article).

J. Brian Conrey, *The Riemann hypothesis*, Notices Amer. Math. Soc. **50** (2003), no. 3, p. 341–353.

M. Demazure, *Cours d'algèbre*, Nouvelle bibliothèque mathématique. Éd. Cassini, 1997.

W. Ellison, M. Mendès France, *Les nombres premiers*. Actualités scientifiques et industrielles. Éd. Hermann, 1975.

J. P. Kahane, *Une formule de Fourier sur les nombres premiers*. Gazette des mathématiciens **67**, janvier 1996.

M. Mendès France, G. Tenenbaum, *Les nombres premiers*. Que sais-je ? vol. **571**. Presses Universitaires de France, 1997.

W. Neudecker, D. Williams, *The 'Riemann hypothesis' for the Hawkins random sieve*, Compositio Math. **29**, p. 197–200, 1974.

S. J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **14**. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

W. Sierpinski, 250 *problèmes de théorie élémentaire des nombres*, Éd. Jacques Gabay, 1970.

Pascal et les problèmes du chevalier de Méré

De l'origine du calcul des probabilités aux mathématiques financières d'aujourd'hui

Yves Derriennic [1]

Résumé.— La solution donnée par Pascal au problème des partis, posé par le chevalier de Méré, contient non seulement la notion d'espérance mathématique mais aussi celle d'espérance conditionnelle, et de façon presque évidente celle de « martingale ». Dans la seconde moitié du XX^e^ siècle la notion de martingale a été établie comme une des notions centrales du calcul des probabilités. Le raisonnement de Pascal fondé sur une récurrence rétrograde est aussi analogue au raisonnement qui conduit au calcul du prix d'une « option » sur le marché boursier et en particulier à la célèbre formule de Black et Sholes établie en 1973 pour laquelle ses auteurs reçurent le prix Nobel d'économie en 1997.

De tous les chapitres des mathématiques celui dont la date de naissance est la mieux marquée historiquement est le calcul des probabilités. En 1654, durant l'été, Pascal et Fermat échangent une correspondance sur des problèmes posés par le chevalier de Méré. Ce dernier est un homme du monde ; ses problèmes portent sur des jeux de hasard pour lesquels on mise de l'argent, des jeux de casino. La plupart des ouvrages consacrés au calcul des probabilités rapportent cet épisode comme le point de départ de ce chapitre des mathématiques. Par exemple on peut lire sous la plume de Poisson, l'illustre spécialiste de physique mathématique de la première moitié du XIX^e^ siècle : « Un problème relatif aux jeux de hasard proposé à un austère janséniste par un homme du monde a été à l'origine du calcul des probabilités ».

L'un des problèmes, celui qui est rapporté le plus souvent mais auquel Pascal ne fait qu'une allusion en passant, est le suivant : combien de fois faut-il jeter deux dés pour avoir a priori au moins une chance sur deux d'obtenir un double six ? est-ce 24 ou 25 ? La solution est un exercice d'analyse combinatoire.

C'est le second problème du chevalier de Méré qui fut véritablement à l'origine du calcul des probabilités. Il est connu sous le nom de « problème des partis ». Mais peu de traités en donnent un exposé significatif. Une exception notable est Albert Jacquard qui donne un aperçu résumé dans son Que Sais-Je « les Probabilités » de 1974 ; le problème est rapporté en détail dans le livre de Todhunter, datant de 1865, et mentionné dans les exercices du traité de Renyi. Pour ce problème Pascal établit ce qu'il appelle la « règle des partis », et envisage la rédaction d'un petit traité intitulé « Géométrie du Hasard ». Bien qu'il signale par avance ce travail dans son adresse à l'Académie Parisienne, académie fondée en 1635 par Mersenne, comme l'une de ses plus importantes

[1] Université de Bretagne Occidentale, Laboratoire de Mathématiques, Unité CNRS FRE 2218, 6 av. V. Le Gorgeu, B.P. 809, 29285 BREST
Mél : derrienn@univ-brest.fr

contributions à la science, Pascal ne rédigera jamais ce traité. Le 23 novembre 1654, deux mois tout juste après l'échange de correspondance avec Fermat, c'est la « nuit de feu » ou nuit du Mémorial. Pascal, alors âgé de trente et un ans, consacrera les huit années qui lui restent à vivre presque exclusivement à ses réflexions mystiques ; il ne reviendra aux mathématiques que pour traiter le problème de la cycloïde dont il fera un argument de lutte contre les jésuites.

Aujourd'hui l'étude du travail de Pascal, exposé dans deux lettres à Fermat et dans le Traité du triangle arithmétique, présente un intérêt renouvelé (le triangle arithmétique est appelé aujourd'hui triangle de Pascal). Tout d'abord parce qu'il y apparaît la notion d'espérance mathématique, comme l'indiquent depuis longtemps les historiens du calcul des probabilités, mais aussi la notion d'espérance conditionnelle et la notion moderne de « martingale ». Cette notion, qui sera expliquée de façon simple plus loin, est considérée comme centrale dans le calcul des probabilités depuis les travaux de Paul Lévy, vers 1940, et ceux de J.L. Doob, vers 1950. Ce qui sera montré ici c'est que la « règle des partis » contient le premier exemple lumineux de martingale (et même de martingale arrêtée à un « temps d'arrêt » ou temps Markovien). De plus le raisonnement de Pascal est fondé sur une récurrence rétrograde qui est analogue à celle qu'il faut effectuer pour le calcul du prix d'une option sur le marché boursier. La célèbre formule de mathématiques financières, la formule de Black et Scholes, établie en 1973, repose sur un tel raisonnement. Pour cette formule Scholes et Merton, dont les idées étaient à l'origine de la formule, reçurent le prix Nobel d'économie en 1997, Black étant décédé peu auparavant.

I La règle des partis

Voici la situation : deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard en plusieurs parties, chacun misant au départ 32 pistoles. La règle du jeu dit que le premier des deux qui aura remporté trois parties emportera la totalité du pot, soit 64 pistoles ; celui-ci aura donc gagné 32 pistoles alors que l'autre aura perdu 32 pistoles.

Le jeu n'est pas précisément désigné dans les écrits de Pascal, mais c'est un jeu de pur hasard c'est-à-dire qu'à chaque partie les deux joueurs possèdent la même chance de gagner. On peut penser que c'est un jeu de dés.

Une petite remarque de terminologie est ici nécessaire. Pascal parle des parties du jeu et du ou des partis à faire : le parti est le partage du pot ; les parties sont les manches successives. Pour la clarté de l'exposé il semble préférable de n'employer que les termes manche et partage et de ne plus parler de parti, au masculin ou au féminin, ce qui sera fait dans la suite.

Le problème posé est le suivant. Pour une raison inconnue les deux joueurs sont obligés de s'interrompre avant que l'un ou l'autre n'ait gagné trois manches ; par exemple le joueur A a gagné deux manches et le joueur B en a gagné une. Comment faut-il alors répartir le pot entre les deux joueurs ? Quel est le partage juste en cette circonstance ? Une solution satisfaisante au point de vue juridique serait de rendre à chacun ses 32 pistoles initiales puisque le contrat n'a pas été respecté. Ceci est banal et sans intérêt. Ce n'est évidemment pas de cela que Pascal et Fermat discutent. Ce qu'ils cherchent c'est le partage fondé sur l'évaluation rigoureuse des chances de gain de chacun des joueurs.

Pour expliquer sa solution Pascal considère d'abord l'exemple déjà cité : le joueur A a gagné deux manches et le joueur B seulement une. Que devrait être la fortune de A à ce moment ? Et bien si la manche suivante avait été jouée, puisque le jeu est de pur hasard, il y aurait eu une chance sur deux pour chaque joueur de remporter cette manche additionnelle ; une chance sur deux donc pour que l'on se trouve dans la situation où A possède trois manches et B une, et aussi une chance sur deux pour que l'on se trouve avec égalité de A et B chacun ayant gagné deux manches. Dans le premier cas la règle du jeu donne le pot de 64 pistoles à A. Dans le second cas il faudrait jouer encore une manche et avec égalité des chances A ou B l'emporterait ; donc dans ce second cas la fortune de A doit être la moitié du pot, soit 32 pistoles. Puisque ces deux éventualités ont la même chance de se produire, la fortune de A à présent doit être la moyenne de ces ceux sommes. Autrement dit dans l'exemple considéré le partage juste est :

- pour le joueur A, $(1/2)(64 + 32) = 48$ pistoles ;
- pour le joueur B, $64 - 48 = 16$ pistoles.

Aujourd'hui on dirait que la part de A est l'espérance mathématique de la variable aléatoire prenant les valeurs 64 et 32 avec la même probabilité $1/2$. Les historiens des mathématiques s'accordent en effet à reconnaître que la notion d'espérance mathématique est apparue pour la première fois dans ce raisonnement de Pascal, bien que l'expression elle-même, ni d'ailleurs le mot probabilité, n'apparaisse jamais dans ses écrits. Cette expression sera créée quelques années plus tard par Huygens, auteur du premier ouvrage publié consacré au calcul des probabilités, faisant référence à Pascal et au problème des partis.

Une fois cet exemple traité, Pascal présente la solution pour le cas où le joueur A possède deux manches et le joueur B aucune. Il obtient pour A, 56 pistoles et pour B, 8. De même pour le cas où A possède une manche et B aucune, il obtient pour A, 44 pistoles et B, 20. À chaque fois il opère comme dans le premier exemple : à partir des valeurs finales, 64 ou 0, il calcule de façon récursive les espérances mathématiques correspondant aux situations rencontrées en remontant vers le début du jeu. On peut dire qu'il effectue un raisonnement par récurrence « rétrograde ». Ce point essentiel sera repris dans la suite.

Pour comprendre complètement le raisonnement précédent, aujourd'hui, il est naturel de construire l'arbre binaire représentant a priori les différents résultats possibles des manches successives à jouer. Celui-ci est figuré en annexe I. La hauteur de cet arbre est cinq, car il ne sera jamais nécessaire de jouer plus de cinq manches en raison de la règle du jeu « trois manches gagnant ». Alors pour calculer la fortune du joueur A dans chaque situation c'est-à-dire en chaque embranchement de l'arbre, appelé aussi sommet de l'arbre même quand il n'est pas à l'extrémité, on doit partir des extrémités pour lesquelles les valeurs 64 ou 0 sont données par la règle du jeu, puis on doit faire les moyennes en remontant chaque branche jusqu'à la racine de l'arbre. Le passage des sommets de la 5^{e} génération à ceux de la 4^{e} obéit à la même règle que celui des sommets de la 4^{e} génération à ceux de la 3^{e}, etc. C'est pour cela que l'on peut parler de récurrence, rétrograde car partant des valeurs finales on retrouve les valeurs initiales (voir figure en annexe I).

Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet Pascal donne aussi un tableau des valeurs de chaque manche dans un tel jeu : voir l'annexe II. Dans une seconde lettre datée du 24 août il revient sur sa méthode et montre qu'elle s'applique aussi si les probabilités de gain à chaque manche sont différentes de 1/2 ou s'il y a plus de deux joueurs. Sur ce point une controverse courtoise s'engage, mais Pascal retirera rapidement l'objection qu'il avait portée initialement au raisonnement de Fermat. L'exemple suivant est traité : trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu de pur hasard en trois manches gagnant ; la mise initiale de chacun est 9 pistoles. Sachant que A a remporté deux manches, B et C chacun une, le partage juste du pot de 27 pistoles est le suivant : 17 pistoles pour le joueur A, 5 pistoles pour chacun des joueurs B et C. En annexe III est présenté l'arbre ternaire qui justifie ce résultat.

Dans le Traité du triangle arithmétique, la règle des partis est reprise de façon générale et exposée de façon systématique ; on pourrait presque dire « à la Bourbaki ». Dans un jeu de pur hasard à deux joueurs, le nombre de manches demandé pour gagner, fixé par la règle, étant un nombre entier N arbitraire, si le joueur A possède k manches et le joueur B, l manches, avec k et $l \leqslant N$, soit $f(k,l)$ la fraction du total du pot qui doit revenir au joueur A dans le partage. La fraction du joueur B est alors $1 - f(k,l)$. Le raisonnement par récurrence rétrograde impose aux nombres $f(k,l)$ la relation :

$$f(k,l) = \frac{1}{2}(f(k+1,l) + f(k,l+1)) \text{ si } k \text{ et } l < N.$$

La règle du jeu donne les « conditions aux limites » :

$$f(k,l) = 1 \text{ si } l < k = N \text{ et } f(k,l) = 0 \text{ si } k < l = N$$

qui sont les valeurs finales.

La solution est unique et vaut :

$$f(k,l) = 2^{-2N+k+l+1} \sum_{i=0}^{N-l-1} C^i_{2N-k-l-1},$$

où C^j_N est le nombre de combinaisons d'ordre j de N éléments qui vaut $C^j_N = N!/j!(N-j)!$.

Pascal en fait la démonstration par récurrence, partant des valeurs finales et remontant vers la valeur initiale $f(0,0)$, à l'aide de la formule qui est à la base du triangle arithmétique :

$$C^j_N + C^{j+1}_N = C^{j+1}_{N+1}.$$

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur à titre d'exercice. En fait Pascal ne dispose pas des notations qui viennent d'être utilisées ; il est contraint de se restreindre à des petites valeurs mais il le fait en montrant la complète généralité de son argument. En annexe IV sont présentés des extraits du Traité du triangle arithmétique contenant l'énoncé et la démonstration de la formule donnée ci-dessus.

Plusieurs auteurs ont jugé la solution de Pascal longue et estimé meilleure celle de Fermat fondée sur un calcul direct d'un nombre de combinaisons. Cependant il ne semble pas que Fermat ait donné une formule générale comparable à celle que l'on vient de rencontrer. D'autre part le style de Fermat est elliptique. Comme pour d'autres problèmes restés fameux il procède par affirmations et courtes indications ; le détail des raisonnements reste caché. Au contraire Pascal développe ; il énonce définitions, propositions, lemmes comme dans un traité du XX^e^ siècle (voir annexe IV). Mais surtout la solution de Pascal possède une valeur remarquable si on la compare aux idées actuelles du calcul des probabilités et des mathématiques financières.

Aujourd'hui, depuis les travaux de Paul Lévy, entre 1930 et 1950, ceux de J.L. Doob, entre 1940 et 1960, et ceux de nombreux autres mathématiciens, une notion très importante dans le calcul des probabilités est celle de « martingale ». Cette notion est couramment enseignée au niveau de la maîtrise de mathématiques. Et bien voici un exemple typique de martingale, en ce sens mathématique, donné par le tableau des valeurs $f(k,l)$ réparties sur les sommets de l'arbre binaire de hauteur $2N-1$. Il s'agit d'ailleurs d'une martingale qui est, comme on dit, « arrêtée » au temps d'arrêt T qui vaut le nombre de manches jouées jusqu'au moment où la règle « N manches gagnant » stoppe le jeu ; c'est un nombre aléatoire a priori qui sera compris entre N et $2N-1$. Au lecteur qui ignore ces développements du calcul des probabilités au XX^e^ siècle l'arbre de ces valeurs, présenté à l'annexe I, donne une idée valable de cette notion. Cet exemple de « martingale » sera appelé ici la martingale de Pascal. Le paragraphe V contiendra quelques indications mathématiques plus détaillées. On sera amené aussi à comparer le sens « mathématique » et le sens courant du mot martingale, c'est-à-dire celui du dictionnaire, suivant lequel une martingale est une stratégie pour gagner dans un jeu de hasard. Ne trouve-t-on pas sous la plume de Balzac : « Pour les ambitieux, Paris est une immense roulette et tous les jeunes gens croient y trouver une victorieuse martingale ».

La suite du présent article sera consacrée essentiellement à montrer que la règle des partis de Pascal est un premier exemple d'un raisonnement fondamental aujourd'hui dans les mathématiques financières qui utilisent les concepts probabilistes. Ceci demande un petit détour.

II Le problème imaginaire du chevalier de Méré : où l'on reparle de stratégie au jeu

Imaginons qu'un troisième problème ait été posé à Pascal par l'homme de jeu qu'était le chevalier de Méré. Deux joueurs Y et Z vont s'affronter dans un jeu d'adresse ou d'intelligence : Borg contre McEnroe au tennis ou Karpov contre Kasparov aux échecs, l'imagination autorisant tous les anachronismes. Le jeu doit se dérouler suivant la règle « trois manches gagnant », c'est-à-dire que le premier vainqueur de trois manches sera champion. Les bookmakers prennent les paris en faveur du joueur Y à « un contre un ». Le chevalier de Méré qui met toute sa confiance dans ce joueur souhaite déposer la mise de 32 pistoles, à un contre un donc, sur la victoire finale de celui-ci : ainsi le chevalier attend 64 pistoles à la victoire finale de son joueur préféré Y ; si, à sa surprise totale, Y est finalement vaincu il n'attend rien, c'est-à-dire zéro (la locution « x contre un » signifie que pour la mise unité le parieur attend en cas de succès un gain égal à x plus le remboursement de sa mise, donc la somme totale x+1). Mais le bookmaker refuse de prendre ce genre de pari : il n'accepte que les paris déposés pour chaque manche individuellement. Le chevalier ne pourra donc miser à un contre un, en faveur de Y, que pour chaque manche tour à tour, la première, la seconde etc. Le chevalier se tourne alors vers Pascal et lui demande s'il est possible de calculer les valeurs des mises à déposer à chaque manche, au fur et à mesure que le championnat progresse, de façon à garantir le résultat qu'il souhaitait initialement : 64 pistoles si son préféré Y l'emporte finalement, 0 sinon. Il est bien entendu que le bookmaker ne fait pas crédit et que la fortune initiale du chevalier est 32 pistoles.

Ce problème n'a pas été posé à Pascal. Il aurait pu l'être.

Au premier abord il est naturel de douter qu'une telle stratégie de mise existe et une réponse de Pascal, déjà abandonné au mysticisme, aurait pu être la suivante : « Dans cette nouvelle situation le jeu est de pure adresse ou sagacité, aucun hasard n'intervient. Le vainqueur sera le meilleur en adresse ou sagacité. Aussi je ne peux que vous recommander de bien vous renseigner sur la forme physique et mentale de votre favori pour le jour du championnat. Ma "géométrie du hasard" n'a de prise que sur les jeux de hasard et ne peut vous éclairer en rien ».

Cette réponse que l'on pourrait qualifier de métaphysique, est sans profondeur ; on pourrait la dire triviale. On peut imaginer qu'elle n'aurait pas été celle de Pascal et qu'au contraire celui-ci aurait répondu au chevalier : « Pourquoi me posez-vous une deuxième fois le même problème ? Ne voyez-vous pas que la règle des partis que je vous ai déjà montrée, répond à votre demande ? En effet la stratégie de mise que vous cherchez existe. Reprenez la martingale définie auparavant pour le jeu de pur hasard. Fixez le montant de la mise à engager à un contre un en faveur de votre favori Y, pour la prochaine manche à jouer, en calculant la différence entre la valeur de ma martingale en l'état du jeu que vous connaissez déjà et la valeur qu'elle prendrait à l'issue de cette prochaine manche au cas où votre favori y serait vaincu. Alors vous obtiendrez avec certitude le résultat que vous souhaitiez initialement ».

En effet en suivant cette recommandation le parieur est sûr d'avoir dans sa poche à l'issue de chaque manche une fortune égale à la valeur de la martingale de Pascal. En annexe V les valeurs des mises ainsi calculées sont reportées sur l'arbre binaire. À l'issue du championnat, après le nombre T de manches nécessaire pour décider du résultat, qui est a priori un nombre incertain compris entre trois et cinq, la martingale prend la valeur 64 si Y est champion et 0 sinon : c'est le résultat souhaité initialement par le parieur.

L'habileté du parieur consiste à savoir économiser sur sa fortune. À la première manche il ne doit engager que 12..., mais s'il le faut au cours du jeu il doit être prêt à engager la totalité de la fortune qui lui reste. Par exemple si les trois premières manches ont donné les vainqueurs ZYZ, la fortune du parieur n'est plus que 16 ; mais il peut encore atteindre son but si son favori Y refait son retard et emporte les deux manches suivantes, à la condition d'engager à ce moment la totalité de son avoir (se reporter à l'annexe V). Il est facile de se convaincre que cette méthode de jeu pourrait s'appliquer dans des situations plus générales : « douze manches gagnant », tournoi à plus de deux joueurs...

Il faut souligner que la stratégie du parieur ne peut être déterminée que par le raisonnement par récurrence rétrograde. La valeur à miser à la première manche ne peut pas être calculée en premier ; elle ne peut l'être qu'après le calcul des mises pour les manches suivantes en commençant par les dernières.

Enfin dans ce problème il apparaît clairement que la martingale de Pascal, suivant la terminologie introduite ci-dessus, peut être regardée comme une stratégie à suivre par un parieur dans un jeu de hasard pour atteindre un but déterminé. Mais ici ce but n'est pas toujours un gain garanti.

Avant d'entrer dans l'étude du prix d'une option, il est nécessaire de souligner encore que dans le problème qui vient d'être traité il n'y a objectivement aucune probabilité, aucun hasard à intervenir. Ni jeu de dé, ni pile ou face, ni loterie... Cependant la solution est la même que celle du jeu de pur hasard envisagé dans le paragraphe précédent. Supposer a priori que dans une situation déterministe mais incertaine à l'avance, la décision sera prise au sort suivant une règle de hasard, c'est entrer dans le domaine des probabilités « subjectives ». Cette démarche peut sembler paradoxale, surtout d'un point de vue positiviste. Mais pourtant c'est elle qui rend le calcul des probabilités et la statistique mathématique si fructueux dans de nombreux champs scientifiques. Cette discussion sera reprise dans la suite.

III Le prix d'une « option » : le problème de Bachelier ; le problème de Black et Scholes

Le marché des « options » s'est ouvert sur la place boursière de Paris vers 1986, sous la houlette de M. Pierre Bérégovoy, ministre des finances, dans le cadre de la modernisation du fonctionnement du système capitaliste qui s'opérait en France à cette époque. Il avait débuté à Chicago en 1973, l'année de la publication de la plus célèbre formule de ce qu'on appelle aujourd'hui « mathématiques financières », la formule de Black et Scholes. Cette formule a pour objet le calcul du prix d'une option. Ce que tente de montrer la suite du présent article c'est qu'il existe un lien profond entre cette formule, qui sera écrite plus loin, et la « règle des partis » de Pascal, expliquée ci-dessus.

Tout d'abord qu'est ce qu'une option ? La réponse complète serait longue et prendrait de multiples formes. Pour le raisonnement qui est en vue, un seul exemple est suffisant. Nous allons considérer un exemple d'une option d'achat de type européen sur le marché des devises, dans un cas très simplifié.

Voici l'exemple. Il y a deux devises en présence : la pistole et l'écu. Le cours de l'écu contre la pistole varie au cours du temps. Ce cours est fixé chaque jour à midi ; d'un midi au suivant il est constant. Un certain lundi à midi un écu vaut exactement une pistole. Pierre et Jean vivent au royaume de la pistole. Pierre est entrepreneur et sait qu'il aura besoin de 32 écus le jeudi après-midi suivant, donc dans trois jours, pour régler une commande. Jean est agent de change ; il peut réaliser les opérations financières librement, il peut en particulier emprunter de l'argent d'un jour à l'autre à un certain taux d'intérêt qui est fixe. Ce lundi Jean propose à Pierre un contrat suivant lequel il s'engage à lui vendre jeudi après-midi 32 écus au cours présent, c'est-à-dire pour 32 pistoles, au cas où Pierre le lui demanderait. Il est évident que si le jeudi le cours de l'écu avait baissé depuis lundi, Pierre pourrait se procurer les 32 écus nécessaires pour moins de 32 pistoles directement sur le marché et il n'aurait donc aucun intérêt à demander l'exécution du contrat. Pierre ne demandera donc à Jean l'exécution du contrat que si on constate le jeudi une hausse du cours de l'écu par rapport au cours du lundi.

En raison de cette possibilité de choix un tel contrat est appelé une « option ». Dans le présent exemple il s'agit d'une option d'achat sur le cours de l'écu, dont le prix d'exercice est une pistole pour un écu et dont le délai d'exercice est fixé à trois jours. Quand le délai d'exercice est ainsi fixé a priori, on dit que l'option est de type européen.

Le problème est alors le suivant : à quel prix est-il raisonnable pour Pierre de passer un tel contrat, autrement dit d'acheter une telle option ? Ou bien à quel prix est-il raisonnable pour Jean de vendre une telle option à Pierre ? Ce problème se décompose en deux questions essentiellement différentes.

La première de ces deux questions porte seulement sur la nature des variations du cours de l'écu. Dans le problème il est admis que nul n'est devin et donc nul ne peut prédire avec certitude le lundi ce que sera le cours de l'écu le jeudi. Il est admis aussi que les décisions de Pierre et Jean ne peuvent pas influencer les variations de ce cours. Cependant on peut concevoir qu'en s'appuyant sur la connaissance des variations dans le passé il soit possible de connaître le lundi les valeurs du cours qui seront possibles le jeudi, en quelque sorte une fourchette de valeurs possibles, avec aussi peut-être une indication sur les vraisemblances respectives de ces valeurs dans la fourchette. Comment établir une telle fourchette de valeurs possibles pour le cours de l'écu pour le jeudi suivant, avec une pondération des vraisemblances ? Telle est la première question. Le premier à l'avoir abordée avec un certain succès a été Louis Bachelier vers 1900. Il a eu l'idée de comparer l'évolution d'un cours en bourse à celle d'une quantité qui subirait constamment des accroissements aléatoires indépendants et distribués suivant une loi normale ou gaussienne ; ce processus stochastique s'est révélé être celui du « mouvement brownien ». Depuis lors cette question a fait l'objet d'innombrables études et modélisations, utilisant les ressources de la statistique mathématique et de la théorie des processus stochastiques. Mais ce n'est pas cela le sujet du présent article, aussi pour cette première question qu'il semble justifié d'appeler le problème de Bachelier, le lecteur est renvoyé aux références données en bibliographie.

La seconde question est alors la suivante : en supposant que les variations possibles du cours durant les trois jours à venir soient connues le lundi, comment faut-il calculer le prix de l'option ? Attention les variations sont seulement connues dans leur ensemble, nul ne peut prédire laquelle des variations possibles aura effectivement lieu. Ainsi dans l'exemple introduit ci-dessus, on va supposer que le cours de l'écu peut varier chaque jour de 50% à la hausse ou à la baisse, c'est-à-dire qu'il peut être multiplié par un facteur égal à $3/2$ ou $1/2$. Alors les valeurs possibles du cours pour le jeudi sont les 4 nombres $(3/2)^3 = 27/8$, $(3/2)^2(1/2) = 9/8$, $(3/2)(1/2)^2 = 3/8$, $(1/2)^3 = 1/8$ (prix en pistoles d'un écu). Comment faut-il dans ce cas calculer le prix de l'option que Pierre se propose d'acheter à Jean ? L'originalité principale que l'on reconnaît au travail de Black et Scholes porte sur la réponse qu'ils ont apportée à cette seconde question. Cette question sera donc appelée ici le problème de Black et Scholes.

En résumé le problème posé initialement du calcul du prix de l'option a été décomposé en deux : d'une part le problème de Bachelier qui est un problème de statistique et de modélisation de l'évolution d'un cours boursier ; d'autre part le problème de Black et Scholes qui va se révéler comme un problème de pur raisonnement comparable aux problèmes du chevalier de Méré.

IV La solution du problème de Black et Scholes : où l'on reparle de la règle des partis

Cette solution sera exposée seulement dans le cadre de l'exemple introduit au paragraphe précédent, avec les choix des valeurs numériques posés et avec aussi la supposition que le vendeur Jean peut emprunter au taux d'intérêt constant égal à 0%. Cette supposition n'est pas réaliste mais l'exposé du raisonnement est plus simple dans ce cas ; de plus par une méthode de changement de coordonnées, tout à fait classique en mathématiques, le cas où le taux est positif s'y ramène. Bien entendu toute somme empruntée doit être finalement, intégralement remboursée.

L'évolution du cours de l'écu contre la pistole entre le lundi et le jeudi se représente naturellement comme un arbre binaire de hauteur 3. Celui-ci est figuré dans l'annexe VI. Les valeurs du cours dans chaque éventualité sont attachées aux différents embranchements de l'arbre. Elles forment de façon évidente une martingale analogue à la martingale de Pascal. Ceci est dû au choix des deux facteurs 3/2 et 1/2, et peut sembler particulier, mais en fait ne l'est pas : pour d'autres valeurs il faudrait comparer à une martingale de Pascal correspondant au cas d'un jeu qui n'est pas de pur hasard (voir le paragraphe V). Ici la martingale s'arrête au temps fixe 3 et non plus en un temps aléatoire T comme dans le problème du chevalier.

Le jour d'exercice de l'option, c'est-à-dire le jeudi, Pierre acheteur de l'option se trouvera devant un choix : exercer ou pas son option.

Ou bien le cours de l'écu aura monté et pour se procurer les 32 écus qui lui sont nécessaires il exercera l'option en demandant à Jean de les lui vendre pour 32 pistoles, suivant les termes du contrat, ce qui lui donnera un gain par rapport au prix du marché le jeudi. Ce gain sera de 32(C-1) pistoles où C représente le cours de l'écu le jeudi. Ce gain se réalise aux dépens de Jean pour qui donc la perte, le jeudi, sera de 32(C-1) pistoles.

Ou bien le cours de l'écu aura baissé, alors l'intérêt de Pierre est de ne pas exercer l'option et d'acheter ses 32 écus directement sur le marché au cours du jour. Dans ce cas Jean n'est pas sollicité et n'assume aucune perte.

Les valeurs représentant les pertes de Jean, vendeur de l'option, le jeudi dans les différentes éventualités sont indiquées sur l'arbre en annexe VI. Elles vont de zéro à 76 pistoles dans le cas où l'écu n'aurait subi que des hausses.

Pour établir le prix à demander le lundi pour l'option le vendeur, Jean, cherche un montant x en pistoles à demander à Pierre qui lui permettrait de suivre une stratégie de change et d'emprunt, entre le lundi et le jeudi, lui garantissant de disposer finalement, le jeudi, dans tous les cas, de la valeur de la perte qu'il doit éventuellement assumer ce jour. Tout d'abord il est naturel de douter de l'existence d'un tel nombre x. On conviendra cependant que s'il existe, alors ce nombre x a de fortes prétentions au qualificatif de « juste » prix pour l'option.

Et bien ce nombre existe et pour le découvrir il faut de nouveau suivre un raisonnement par récurrence rétrograde. La fortune que doit posséder Jean le jeudi dans chaque éventualité devrait égaler sa perte contre Pierre : ces valeurs sont connues, elles sont indiquées sur l'arbre de l'annexe VI. Quelle fortune devrait-il alors posséder le mercredi, pour que seulement par des opérations d'emprunt ou de change, il soit certain d'avoir le jeudi la fortune requise ? La réponse est donnée par la martingale de Pascal calculée à partir des valeurs finales connues. Pour le voir, on considère l'éventualité où le mercredi le cours de l'écu est $9/4$ (voir annexe VI) ; alors la valeur de la martingale est $(1/2)(76+4) = 40$. Si Jean possède 40 pistoles ce mercredi, il peut emprunter 32 pistoles, puis changer en écus ses 72 pistoles. Le lendemain si le cours de l'écu a monté il aura en changeant à nouveau $(3/2)72 = 108$ pistoles. Il pourra rembourser l'emprunt de 32 pistoles et il lui restera la fortune requise $108 - 32 = 76$ pistoles. Si le cours a baissé il aura $(1/2)72 = 36$ pistoles, il pourra rembourser l'emprunt de 32 pistoles et comme dans le cas précédent il lui restera la fortune requise $36 - 32 = 4$ pistoles. Cette coïncidence n'est évidemment pas fortuite ; on a cherché un nombre y qui soit simultanément solution des deux équations linéaires :

$$\begin{aligned}(3/2)(40+y) &= 76+y\\(1/2)(40+y) &= 4+y.\end{aligned}$$

Cette solution existe et vaut $y = 32$, car la valeur $40 = (1/2)(76+4)$ est celle de la martingale dans ce cas. Toute autre valeur aurait conduit à une impossibilité. Le raisonnement qui vient d'être fait peut être répété pour le mercredi dans chacune des trois autres éventualités, et ainsi les valeurs requises de la fortune de Jean sont connues pour le mercredi dans tous les cas. On répète alors par récurrence le même raisonnement pour remonter du mercredi au mardi, puis du mardi au lundi. Ainsi le nombre x cherché doit être la valeur prise à la racine de l'arbre par la martingale correspondant aux valeurs finales posées au début. Ici c'est évidemment la moyenne arithmétique de ces valeurs finales :

$$x = \frac{1}{8}(76+4+4+0+4+0+0+0) = 11.$$

En résumé, si Jean, vendeur de l'option, dispose de $x = 11$ pistoles le lundi, il peut suivre la stratégie d'emprunt et de change guidée par la martingale et dont les valeurs sont portées sur l'arbre en annexe VI. Alors il est certain de pouvoir finalement assumer sa perte éventuelle vis-à-vis de Pierre, l'acheteur de l'option, et rembourser ses emprunts. Donc le prix qu'il doit demander à Pierre doit être cette valeur (ou une valeur supérieure) s'il ne veut pas risquer de perte. En demandant un petit supplément à titre de frais de dossier, il peut obtenir un bénéfice.

L'avantage de Pierre, acheteur de l'option, est d'une nature différente. Il s'est garanti, en payant $x = 11$ pistoles le lundi, contre l'éventualité d'avoir à débourser 108 pistoles le jeudi pour acquérir les 32 écus dont il a besoin. Il aura finalement dépensé au plus $11 + 32 = 43$ pistoles, et ainsi, peut-être aura-t-il évité la faillite. Sa motivation est comparable à celle d'un souscripteur d'une assurance. Par contre, comme on l'a vu, Jean ne court aucun risque ; chaque option qu'il vent au prix calculé par la méthode expliquée ci-dessus, s'équilibre d'elle-même. La démarche du vendeur de l'option n'a donc rien à voir avec celle d'un assureur qui, lui, espère compenser les pertes causées par les sinistres à couvrir, importantes mais peu nombreuses, par les très nombreuses primes encaissées.

Peut-on estimer le gain global ou moyen de Pierre ? A posteriori la question n'a pas de sens. Le cours de l'écu le jeudi a déterminé la dépense exacte de Pierre au cours de l'opération. C'est a priori que la question se pose. Autrement dit, on demande quelle est l'espérance mathématique de gain de Pierre. Mais cette question a-t-elle un sens ? Comme dans le problème imaginaire du chevalier de Méré, il n'y a ici aucun hasard objectif ; les différentes éventualités du jeudi ne sont pondérées d'aucune probabilité et le calcul d'une espérance mathématique n'est pas possible. Poser des valeurs pour les probabilités de ces éventualités reviendrait à construire un modèle probabiliste pour l'évolution du cours de l'écu et ramènerait donc au problème de Bachelier expliqué au paragraphe précédent. Cependant il est évident que si l'on suppose les fluctuations du cours soumises à un pur hasard, donc des probabilités égales pour la hausse et la baisse, alors l'espérance de gain de Pierre est nulle. Cette valeur nulle est inhérente au raisonnement expliqué ci-dessus, que l'on peut donc comprendre comme fondé sur l'usage de probabilités subjectives supposées équiréparties sur les évolutions du cours de l'écu. Pour des hausses ou baisses différentes de plus ou moins 50%, il faudrait utiliser des nouvelles valeurs de ces probabilités subjectives ; celles-ci devraient être choisies de façon que l'évolution du cours forme encore une martingale.

La méthode de la récurrence rétrograde inventée par Pascal pour établir la règle des partis permet donc de résoudre aussi bien les problèmes réel ou imaginaire du chevalier de Méré que le problème de Black et Scholes. En fait le problème imaginaire, présenté au paragraphe II, et celui du prix de l'option ne forment qu'un seul problème ; la seule différence est que dans le premier le bookmaker ne fait pas crédit alors que dans le second l'emprunt est possible. Une autre différence apparente est due aux valeurs numériques utilisées ; mais le raisonnement est en réalité indépendant du choix de ces valeurs comme on l'a indiqué brièvement et comme on peut le vérifier en détail facilement.

V La martingale de Pascal : quelques développements mathématiques

Revenons au problème du chevalier de Méré, exposé au paragraphe I, dans le cas général où la règle du jeu dit « N manches gagnant » et où le montant des mises est quelconque.

Numérotons les manches jouées successivement : $1, 2, \ldots, t, \ldots, 2N-1$. C'est le temps qui s'écoule par instants discrets. À la t^{e} manche, une fois celle-ci jouée, l'état du jeu est le mot X_t écrit avec les deux lettres A et B, de longueur t, qui indique les vainqueurs successifs depuis le début du jeu. Ce mot est aléatoire, parmi les 2^t mots possibles. La fortune du joueur A à l'issue de la t^{e} manche est S_t une variable aléatoire numérique qui est déterminée par X_t. Le nombre de manches qui seront effectivement jouées, la règle étant « N manches gagnant », est aussi a priori un nombre aléatoire ; notons le T. Il doit vérifier : $N \leqslant T \leqslant 2N-1$, avec une probabilité égale à 1. Ce qui importe c'est évidemment l'état du jeu et la fortune de A avant et jusqu'à l'instant T. Autrement dit ce que l'on cherche c'est la valeur de la suite $S_1, S_2, \ldots, S_T$, ce que l'on peut noter $(S_{T\wedge t})_{1\leqslant t\leqslant 2N-1}$, où $a \wedge b$ désigne le plus petit des deux entiers a et b. La relation sur laquelle Pascal s'appuie pour établir la règle des partis est :

$$S_{T\wedge t} = E\left\{S_{T\wedge(t+1)} \mid X_{T\wedge t}\right\}.$$

Ce symbole désigne l'espérance de la variable aléatoire $S_{T\wedge(t+1)}$ sachant le mot aléatoire $X_{T\wedge t}$; c'est l'espérance de la valeur de la fortune du joueur A à l'instant suivant $t+1$, conditionnellement à la connaissance de l'état du jeu à l'instant présent t. Depuis une cinquantaine d'années une suite de variables aléatoires vérifiant une telle relation est appelée une « martingale » ; ici la suite $(S_{T\wedge t})_{1\leqslant t\leqslant 2N-1}$ est une « martingale relativement à la suite $(X_{T\wedge t})_{1\leqslant t\leqslant 2N-1}$ ». Puisqu'ici la martingale est arrêtée au temps T qui est borné, sa valeur au temps t est donnée par :

$$S_{T\wedge t} = E\left\{S_T \mid X_{T\wedge t}\right\}$$

c'est-à-dire par l'espérance conditionnelle de la variable terminale S_T sachant l'état du jeu $X_{T\wedge t}$ au temps t.

Cette construction utilise de façon essentielle le fait que le temps aléatoire T, le nombre de manches effectivement jouées, est ce qu'on appelle un temps d'arrêt ou un temps markovien. Ceci signifie que lorsque ce temps arrive il est possible aussitôt de s'en apercevoir : ici lorsqu'un joueur gagne sa N^{e} manche avant l'autre il le sait sur l'instant, une manche supplémentaire est inutile. Une règle de jeu obéit toujours à ce principe qui peut sembler aller de soi. Mais imaginons, par exemple le temps $T' = T-1$ défini par le nombre de manches effectivement jouées moins une ; quand ce temps arrive on ne peut pas s'en apercevoir, dans le cas où il est inférieur à $2N-2$, et jouer encore une manche est indispensable.

Pour approfondir encore cette mise en forme du problème des partis on peut préciser l'espace des épreuves ou univers sur lequel on se place : c'est l'ensemble Ω formé des mots de longueur $2N-1$, écrits avec les deux lettres A et B. Cet ensemble a 2^{2N-1} éléments qui s'identifient aux branches de l'arbre binaire sous-jacent (voir annexe I). Les variables aléatoires T et X_t se définissent de façon évidente comme des fonctions définies sur cet ensemble : $X_t(\omega)$ est le mot de longueur t écrit au début du mot $\omega \in \Omega$. La connaissance de X_t détermine les valeurs précédentes $X_0, \ldots, X_{t-1}$.

On peut vérifier facilement qu'un temps d'arrêt relatif à la suite $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant 2N-1}$ est toujours associé à une « coupure » de l'arbre binaire Ω. On appelle ainsi un sous-ensemble de Ω qui rencontre chaque branche de l'arbre une fois et une seule. Quand un tel sous-ensemble est choisi, on peut alors distribuer des valeurs numériques sur ses éléments (les sommets de l'arbre qui lui appartiennent) de façon arbitraire et ensuite former la martingale correspondante en calculant en chaque sommet antérieur à la coupure l'espérance conditionnelle des valeurs distribuées. Pour le lecteur qui sait qu'une fonction harmonique est une fonction définie dans un domaine du plan qui prend en chaque point une valeur égale à sa moyenne sur tout cercle centré en ce point, il n'est pas difficile de voir ici une analogie avec la solution du problème classique de Dirichlet. En effet ce problème consiste à chercher la fonction harmonique dans un disque connaissant ses valeurs au bord. Depuis 50 ans les liens entre martingales et fonctions harmoniques n'ont cessé de s'approfondir.

Tout ce qui vient d'être exposé est valide quand le jeu est supposé de pur hasard ou quand il ne l'est pas. Il est donc naturel d'introduire un paramètre réel p, avec $0 < p < 1$, représentant la probabilité a priori du joueur A de gagner une manche. Ce paramètre détermine une unique mesure de probabilité sur l'espace Ω pour laquelle les manches sont indépendantes. Alors la martingale correspondant aux valeurs finales 1 quand le joueur A gagne le tournoi suivant la règle « N manches gagnant » et 0 sinon, s'écrit : $M_t = f(X_{T\wedge t})$ où f est la fonction numérique ne dépendant que des nombres k de lettres A et l de lettres B que le mot $X_{T\wedge t}$ comporte, suivant la formule :

$$f(k,l) = \sum_{i=0}^{N-l-1} C^i_{2N-k-l-1}(1-p)^i p^{2N-k-l-i-1} \text{ si } k \text{ et } l < N,$$

les valeurs finales étant $f(k,l) = 1$ si $l < k = N$ et $f(k,l) = 0$ si $k < l = N$. Les formules précédentes généralisent de peu celles données par Pascal lui-même comme on l'a expliqué à la partie I. La martingale M_t, avec $0 \leqslant t \leqslant 2N-1$, représente la fraction du pot qui devrait revenir au joueur A en cas d'interruption prématurée du tournoi, comme dans le problème du chevalier de Méré.

Il est donc justifié de proposer d'appeler cette martingale, « martingale de Pascal » de paramètre p. Il semblerait aussi naturel de se référer à cet exemple dans une introduction à la notion de martingale en particulier si l'on veut donner une perspective historique.

VI Remarques finales

a) sur les mathématiques financières

À ce point le lecteur peut légitimement se demander ce qu'est la formule de Black et Scholes si souvent citée mais pas encore écrite une seule fois. En fait cette formule n'est pas unique : elle peut prendre de multiples formes. Dans la situation la plus simplifiée, correspondant à l'exemple étudié au paragraphe IV, elle s'exprime par l'intégrale :

$$x = \frac{2S}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\sigma\sqrt{t})/2} e^{-(s^2/2)} ds.$$

Ici x désigne le prix de l'option comme ci-dessus ; t est le délai d'exercice de l'option, le temps étant supposé varier continûment ; S est le prix initial de la devise ou de l'actif sur lequel porte l'option. Le prix d'exercice de l'option, qui est souvent noté K, et le taux d'intérêt mathématique, souvent noté r, n'apparaissent pas ici car, pour simplifier, comme dans l'exemple du paragraphe 4, il est supposé que $K = S$ et que $r = 1$. Enfin σ est un paramètre qui quantifie la variabilité possible de l'actif sous-jacent. On reconnaît évidemment la loi normale réduite de densité $(e^{-(s^2/2)})/\sqrt{2\pi}$, appelée aussi loi de Laplace-Gauss ou loi de Gauss.

En fait la formule précédente repose à la fois sur le raisonnement du paragraphe IV et sur une modélisation probabiliste du cours de l'actif. Le passage du résultat obtenu en temps discret à la formule correspondant au temps continu, est dû à Cox et Rubinstein. Ce passage utilise le théorème de convergence vers une loi Gaussienne, appelé aussi théorème limite central du calcul des probabilités, appliqué aux variations successives du cours de l'actif sous-jacent supposées stochastiquement indépendantes. Cette supposition n'était en rien nécessaire pour le raisonnement du paragraphe IV. En d'autres termes, on suppose que les cotations peuvent avoir lieu à tout instant et on fait la modélisation probabiliste consistant à représenter a priori les variations du cours de l'actif par le processus le plus simple dont les trajectoires soient continues et cependant les accroissements indépendants, à savoir le processus du mouvement brownien. Les axiomes de ce processus ont été posés par Einstein en 1905 ; ils avaient été entrevus par Bachelier en 1900 justement dans le but d'une telle modélisation boursière. La construction mathématiquement rigoureuse de ce processus a été faite par Wiener en 1921. Le paramètre σ de la formule fait partie de la modélisation.

À toute autre modélisation correspond une autre version de la formule de Black et Scholes, mais le raisonnement justifiant le calcul du prix x reste le même. C'est celui expliqué au paragraphe IV, celui de la règle des partis de Pascal. Bien entendu la supposition que le vendeur de l'option est libre d'emprunter et de déplacer les valeurs de son porte-feuille, est essentielle pour la formule à temps continu comme elle l'était au paragraphe IV. Ne dit-on pas, d'ailleurs, que Tobin est aujourd'hui opposé à l'instauration de la taxe qui porte son nom en raison de la perte de liberté que celle-ci entraînerait et qui s'opposerait au fonctionnement rationnel de la bourse régi par la formule de Black et Scholes ?

Le problème de la modélisation du cours de l'actif, celui appelé au paragraphe III problème de Bachelier, est très difficile et passionnant de multiples points de vue.

Même sans parier pour le sens de l'histoire, comme le personnage de Rohmer de l'annexe VII dont nous parlerons plus loin, on peut trouver paradoxal de supposer les actions humaines surgissant du hasard. Mais cette objection n'est pas nécessairement profonde ; comme on l'a vu les probabilités subjectives peuvent nous aider même dans les situations déterministes !

Souvent aussi pour justifier leur modèle probabiliste des auteurs invoquent le grand nombre des agents économiques et leur indépendance. Mais dans le contexte du mouvement brownien un grand nombre est de l'ordre de 10^{23}, l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro. Dans le contexte économique qu'est ce qu'un grand nombre ? À combien peut-on estimer le nombre d'agents qui contribuent de façon non négligeable à l'établissement d'un cours boursier ?

L'étude statistique des cours du passé doit aussi nous éclairer. Mais l'interprétation d'une série temporelle demande, sous une forme ou une autre, une hypothèse de stationnarité, c'est-à-dire une hypothèse suivant laquelle la loi probabiliste qui régira le futur est similaire à celle qui a régi le passé.

Vaste domaine de réflexion dans lequel nous n'irons pas plus loin. Cependant il nous semble indispensable pour comprendre de séparer modélisation et raisonnement ; problème de Bachelier et problème de Black et Scholes. Ceci n'est pas toujours fait de manière satisfaisante.

Par exemple pour rédiger les paragraphes III et IV, l'auteur s'est servi de l'excellent livre de Cox et Rubinstein « Options markets », datant de 1985 ; dans ce livre (page 178) la formule de Black et Scholes est posée d'abord dans un problème à temps discret, comme au paragraphe IV ci-dessus. Cox et Rubinstein sont d'ailleurs connus comme les initiateurs de cette approche. Puis la formule classique, celle que nous venons d'écrire, apparaît (page 205). Le passage de l'une à l'autre relève de l'art du passage à la limite que les mathématiciens cultivent depuis trois siècles ; il utilise le théorème limite central du calcul des probabilités. Mais entre les deux formules il y a une grande différence ; elles ne se situent pas sur le même plan ; dans la première aucun hasard, aucune probabilité ; dans la seconde, le modèle brownien est postulé, et donc une certaine forme d'indépendance stochastiques des variations successives du cours de l'actif. Les explications des auteurs, prenant plusieurs pages, sont claires, mais un lecteur pressé, ne lisant que les formules encadrées, pourrait manquer cette différence essentielle.

b) sur Pascal et l'argument du Pari

Il est difficile de parler de Pascal et de son travail fondateur du calcul des probabilités sans dire un mot du fameux argument du Pari. Le Pari de Pascal, pièce inaltérable de la culture classique française, est mentionné dans tous les dictionnaires et expliqué dans tous les manuels de littérature distribués aux lycéens. Plutôt que de reprendre cette fameuse page... « *partout où est l'infini et où il n'y a pas infinité de hasard de perte contre celui de gain il n'y a point à balancer, il faut tout donner* »...nous préférons citer l'intéressante interprétation du pari inventée par Rohmer en 1969 (voir annexe VII). Celle-ci a l'avantage de dégager l'argument de l'idée de paradis « *infinité de vie infiniment heureuse à gagner* » qui semble désuète aujourd'hui. La page du Pari apparaît dans les Pensées, c'est-à-dire dans le recueil des ébauches et brouillons préparés en vue d'une Apologie du christianisme. Le recueil et le classement des papiers laissés par Pascal ont été réalisés après sa mort par ses proches. Depuis lors parler de la fondation du calcul des probabilités par Pascal n'a jamais cessé d'évoquer aussitôt, et chez les mathématiciens aussi, l'argument du Pari.

De nombreux auteurs, croyant ou non, ont critiqué cet argument. Plusieurs historiens des sciences ont d'ailleurs exprimé leur regret que Pascal ait abandonné son travail scientifique si remarquable pour des réflexions mystiques. Il semble pourtant juste de souligner aujourd'hui que l'entreprise de l'Apologie du christianisme n'était pas, à son époque, un projet conformiste et bigot. En 1654 la question religieuse est l'une des questions principales de la vie sociale. Le traité de Westphalie mettant une fin de compromis aux guerres de religion en Europe a été signé en 1648. Bien qu'ils ne soient pas hors de l'église catholique, les jansénistes reprennent plusieurs thèses du calvinisme. Cela leur vaut l'hostilité des jésuites qui forment la brigade d'élite du catholicisme romain contre les idées de la Réforme. L'Édit de Nantes est encore en vigueur, cependant la répression contre les protestants est vive. Après sa majorité en 1661, Louis XIV ne fera qu'aggraver ce processus jusqu'à la révocation en 1685 de l'Édit d'Henri IV, l'exil pour les protestants, les dragonnades...

Mais que vaut du point de vue du raisonnement l'argument du Pari ? Il semble bien que l'espérance de gain de l'incroyant ne soit rien d'autre que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui prend certes une valeur infinie mais ceci avec une probabilité nulle ! Sur ce point c'est le petit ingénieur catholique mis en scène par Rohmer qui a raison (voir l'annexe VII) : « l'argument ne vaut rien... ».

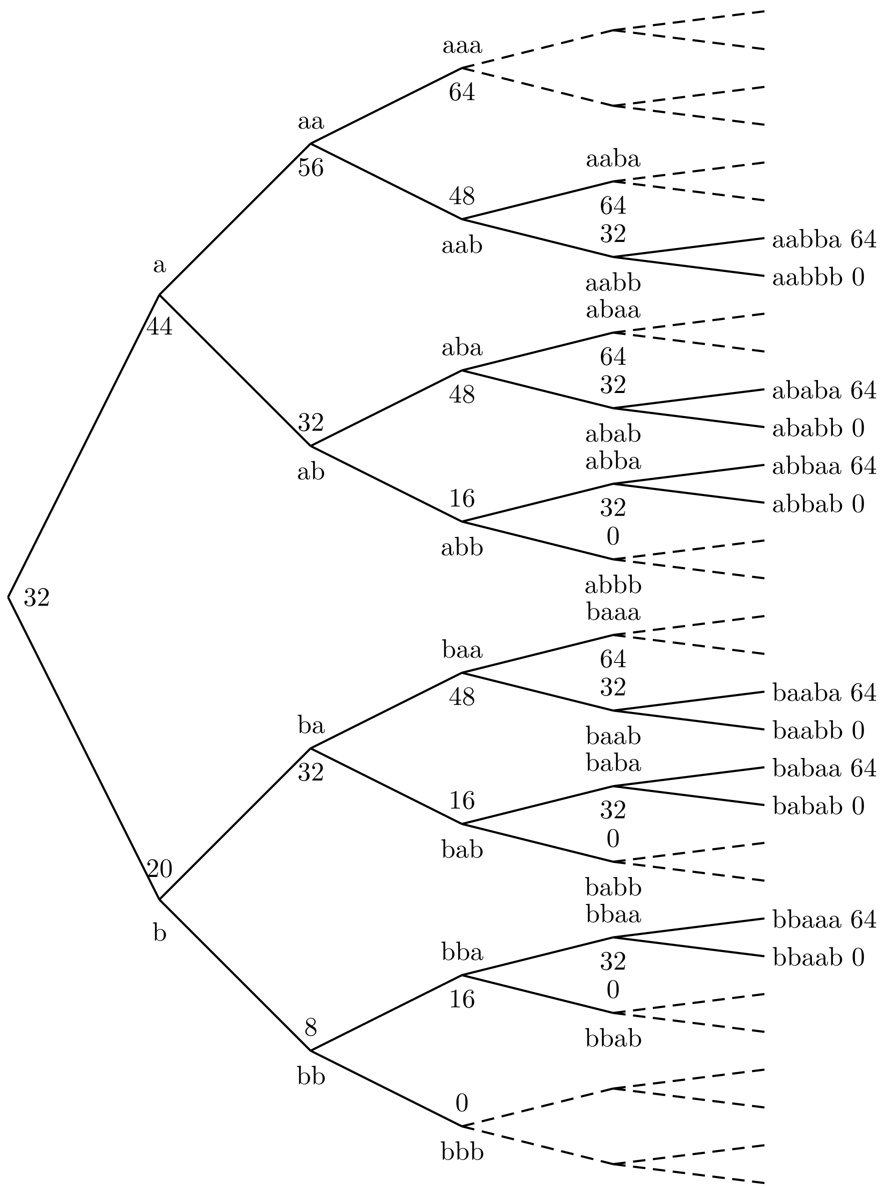
Bien entendu il n'y a pas de règle mathématique universelle justifiant l'affirmation « l'infini multiplié par zéro égale zéro ». Mais dans le présent contexte cette affirmation est valide et ne relève pas d'une convention. Pour le comprendre on peut penser au problème de la valeur de l'aire d'une droite tracée dans le plan. Cette droite forme un rectangle de longueur infinie et de largeur nulle. Son aire doit être posée égale à zéro car il est possible de la recouvrir par une suite infinie dénombrable de rectangles non dégénérés, c'est-à-dire de largeurs et longueurs positives et finies, dont la somme totale des aires est arbitrairement petite. On vient de se référer à la notion d'ensemble négligeable au sens de Lebesgue, établie il y a cent ans, pour montrer que l'argument du Pari ne donne qu'une espérance de gain nulle à l'incroyant ! À l'époque de Pascal les conceptions de l'infini étaient évidemment loin d'être aussi avancées.

Dans leur pamphlet de 1997 intitulé « Impostures intellectuelles », Sokal et Bricmont dénoncent des transpositions abusives et triviales de certains concepts scientifiques effectuées par quelques grands noms contemporains de la philosophie et des sciences humaines. En transposant les notions de probabilité et d'espérance mathématique dans une discussion de l'existence de dieu et de la foi, Pascal tombe aussi sous cette critique ; le paradoxe étant qu'à son époque il était l'homme qui comprenait le mieux ces notions scientifiques. Il est permis d'imaginer que s'il avait pu mener à bien lui-même son ouvrage, Pascal n'y aurait pas gardé cette page du Pari dépourvue de rigueur.

Même si l'on ne partage pas l'opinion qui vient d'être exprimée, on peut s'accorder avec l'auteur du présent article, pour reconnaître que le travail fondateur du calcul des probabilités dû à Pascal ne doit pas être masqué par l'écran de l'argument du Pari, et qu'il mérite encore aujourd'hui non seulement d'être cité mais d'être compris.

Annexe I

La règle des partis.



En chaque sommet de l'arbre est indiquée la part revenant au joueur a. Cet arbre de valeurs forme une martingale, qu'on pourrait appeler « martingale de Pascal ».

Annexe II

TABLE

DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRECEDENTE

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

	6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
1$^{\rm re}$ partie	63	70	80	96	128	256
2$^{\rm e}$ partie	63	70	80	96	128	
3$^{\rm e}$ partie	56	60	64	64		
4$^{\rm e}$ partie	42	40	32			
5$^{\rm e}$ partie	24	16				
6$^{\rm e}$ partie	8					

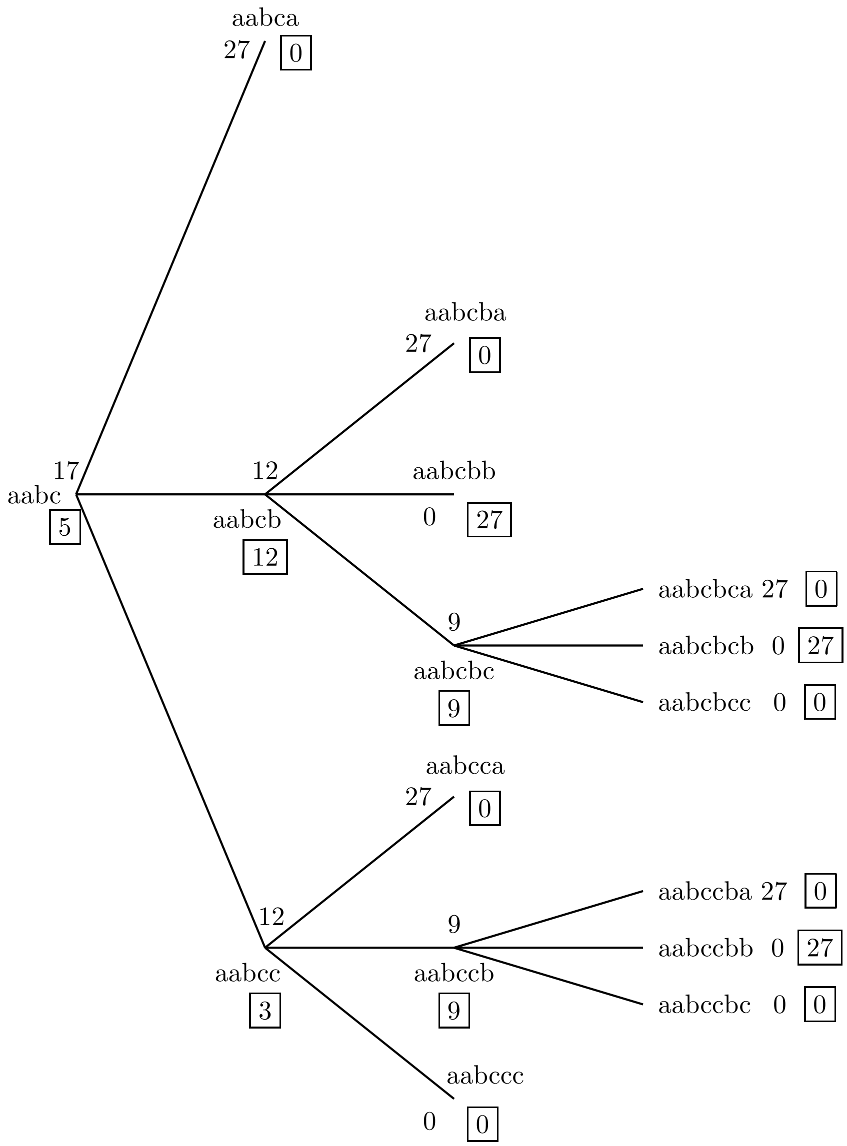
Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour

	6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
la 1$^{\rm re}$ partie	63	70	80	96	128	256
les 2 1$^{\rm res}$ parties	126	140	160	192	256	
les 3 1$^{\rm res}$ parties	182	200	224	256		
les 4 1$^{\rm res}$ parties	224	240	256			
les 5 1$^{\rm res}$ parties	248	256				
les 6 1$^{\rm res}$ parties	256					

Annexe III

Jeu à 3 joueurs a, b, c. Mise initiale de chacun 9.

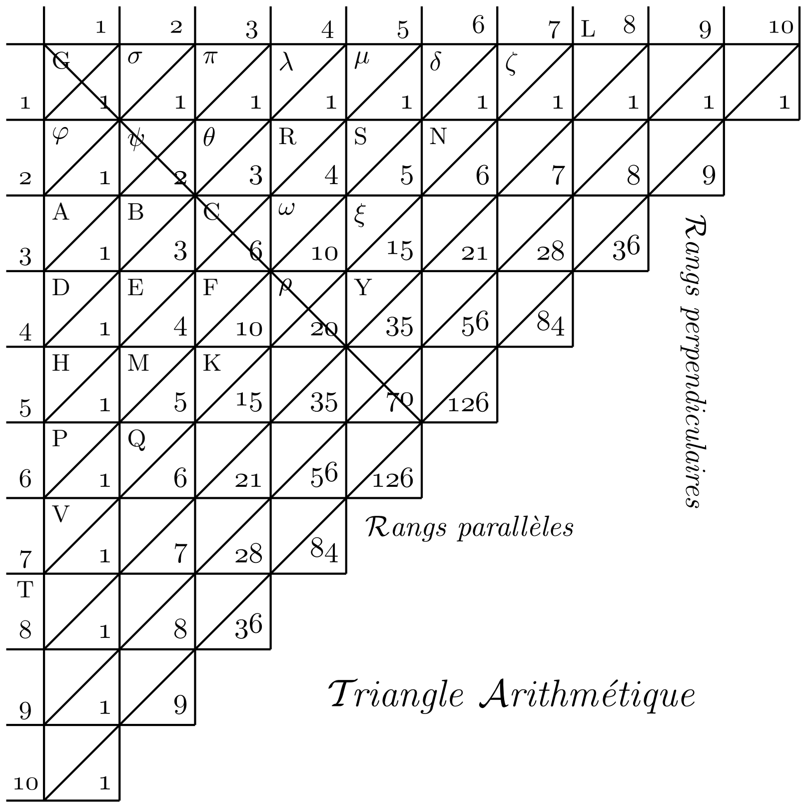


Règle des partis pour a : chiffres non encadrés.

Règle des partis pour b : chiffres encadrés.

On part de la situation où a possède 2 manches, b et c chacun 1. Le jeu est de pur hasard.

Annexe IV



Le triangle arithmétique, tel que présenté par Pascal.

Annexe IV

Dans le 1[er] alinéa Pascal énonce la formule de la page 48
$f(k,l) = 2^{-2N+k+l+1} \sum_{i=0}^{N-l-1} C^i_{2N-k-l-1}$.

PROBLÈME I - PROPOSITION I

Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble ; ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement ; de sorte que si la somme qu'ils jouent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre ; et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple, qu'il y ait deux joueurs, au premier desquels il manque deux parties, et à l'autre 4 : il faut trouver le parti.

Soient ajoutés ces deux nombres 2 et 4, et soit leur somme 6 ; soit prise la sixième base du Triangle arithmétique $P\delta$ dans laquelle il y a par conséquent six cellules P, M, F, ω, S, δ. Soient prises autant de cellules, à commencer par la première P, qu'il manque de parties au premier joueur, c'est-à-dire les deux premières P, M ; donc il en reste autant que de parties à l'autre, c'est-à-dire 4, F, ω, S, δ.

Je dis que l'avantage du premier est à l'avantage du second, comme $F + \omega + D + \delta$ à $P + M$, c'est-à-dire que, si la somme qui se joue est égale à $P + M + F + \omega + S + \delta$, il en appartient à celui à qui il manque deux parties la somme des quatre cellules $\delta + S + \omega + F$ et à celui à qui il manque 4 parties, la somme des deux cellules $P + M$. Et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartient à proportion.

Annexe IV

Démonstration de la formule par récurrence.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1er, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.

Le 2e, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire qu'elle contiendra aussi les partis des joueurs auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus, en un mot, que toutes les bases du Triangle arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier lemme ; donc par le second lemme, la troisième l'a aussi, et par conséquent la quatrième ; et à l'infini. C. q. f. d.

Il faut donc seulement démontrer ces 2 lemmes.

Le 1er est évident de lui-même ; car s'il manque une partie à l'un et une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ, c'est-à-dire comme 1 à 1, et qu'il appartient à chacun cette fraction :

$$\frac{\sigma}{\varphi+\sigma} \text{ qui est } \frac{1}{2}.$$

Le 2e se démontrera de cette sorte.

Si une base quelconque, comme la quatrième $D\lambda$, contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire que, s'il manque une partie au premier, et trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ qui a pour dénominateur la somme des cellules de cette base, et comme numérateur ses trois premières ; et que s'il manque deux parties à l'un, et deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$; et que, s'il manque trois parties au premier, et une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{D}{D+B+\theta+\lambda}$, etc.

Annexe IV

Fin de la démonstration. Au dernier pas usage de $C_N^j + C_N^{j+1} = C_{N+1}^{j+1}$.

Je dis que la cinquième base contient aussi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties ; et que s'il manque par exemple, deux parties au premier, et trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue est exprimée par cette fraction :

$$\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}.$$

Car pour savoir ce qui appartient à deux joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendrait au premier en cas de gain, et celle qui lui appartiendrait en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n'y sont pas, et en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, et le dénominateur double de l'autre, par le lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendraient à notre premier joueur en cas de gain et de perte.

Si le premier, à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, et à l'autre toujours trois ; donc il leur manque quatre parties en tout : donc, par l'hypothèse, leur parti se trouve en la base quatrième, et il appartiendra au premier cette fraction $\dfrac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$.

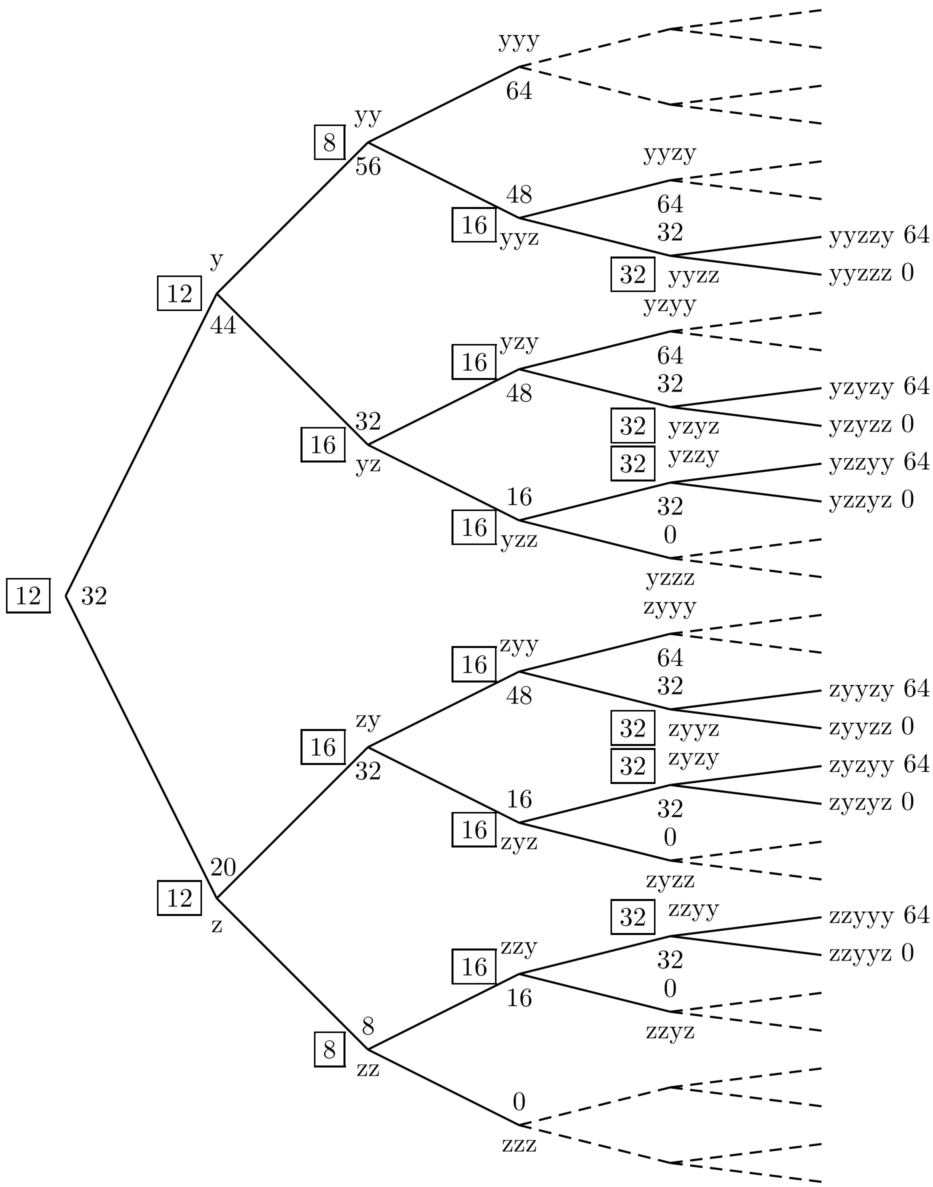
Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, et deux seulement à l'autre, donc, par l'hypothèse, la fraction du premier sera $\dfrac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$. Donc, en cas de parti, il appartiendra au premier cette fraction :

$$\frac{D+B+\theta+D+B,\ \text{c'est-à-dire,}}{2D+2B+2\theta+2\lambda,\ \text{c'est-à-dire,}}\ \frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}.$$

C. q. f. d.

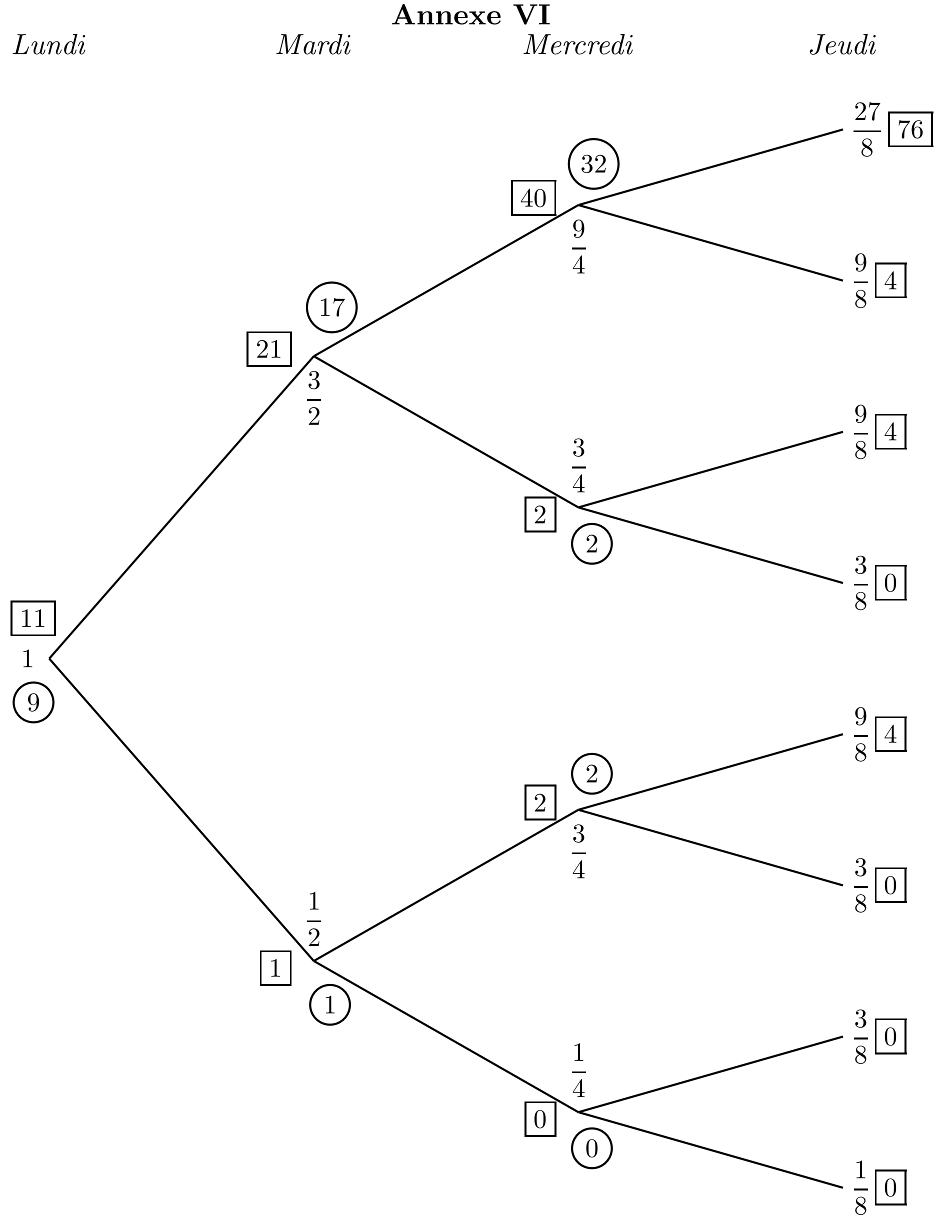
Ainsi cela se démontre entre toutes les autres bases sans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente par la septième conséquence, et que, par la dixième conséquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même base sont égales à autant de la base précédente (qui est toujours le numérateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui est le numérateur de la fraction en cas de perte) ; ce qui étant vrai généralement partout, la démonstration sera toujours sans obstacle et universelle.

Annexe V



Encadrées les valeurs des mises dans le problème « imaginaire ». Non encadrées la règle des partis ou martingale de Pascal, ou fortune du parieur au cours du jeu.

Annexe VI



Problème du prix de l'option.

Chiffres non encadrés : le cours de l'écu.

Chiffres encadrés : la fortune nécessaire au vendeur Jean (martingale de Pascal).

Chiffres entourés : l'emprunt à effectuer par le vendeur Jean en chaque éventualité.

Annexe VII

Version 68+1 du Pari de Pascal, inventée par Eric Rohmer pour « Ma nuit chez Maud ».

L'histoire se passe à Clermont-Ferrand. Celui qui dit « je » le premier est ingénieur. L'autre (Vidal) est professeur de philosophie à la fac. Ils ont été amis il y a une douzaine d'années lorsqu'ils étaient étudiants. Ils se rencontrent par hasard dans un café.

– Ah, tiens ! dis-je, Pascal !

– Ca t'étonne ?

– C'est curieux. Je suis justement en train de le relire, en ce moment.

– Et alors ?

– Je suis très déçu.

– Dis, continue, ça m'intéresse.

– Ben, je ne sais pas. D'abord, j'ai l'impression de le connaître presque par cœur. Et puis ça ne m'apporte rien : je trouve ça assez vide. Dans la mesure où je suis catholique, ou tout au moins j'essaie de l'être, ça ne va pas du tout dans le sens de mon catholicisme actuel. C'est justement parce que je suis chrétien que je m'insurge contre ce rigorisme. Ou alors, si le christianisme c'est ça, moi je suis athée !... Tu es toujours marxiste ?

– Oui, précisément : pour un communiste, ce texte du pari est extrêmement actuel. Au fond, moi, je doute profondément que l'histoire ait un sens. Pourtant, je parie pour le sens de l'histoire, et je me trouve dans la situation pascalienne. Hypothèse A : la vie sociale et toute action politique sont totalement dépourvues de sens. Hypothèse B : l'histoire a un sens. Je ne suis absolument pas sûr que l'hypothèse B ait plus de chances d'être vraie que l'hypothèse A. Je vais même dire qu'elle en a moins. Admettons que l'hypothèse B n'a que dix pour cent de chances et l'hypothèse A quatre-vingt-dix pour cent. Néanmoins, je ne peux pas ne pas parier pour l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui me permette de vivre. Admettons que j'aie parié pour l'hypothèse A et que l'hypothèse B se vérifie, malgré ses dix pour cent de chances, seulement : alors j'ai absolument perdu ma vie... Donc je *dois* choisir l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui justifie ma vie et mon action. Naturellement, il y a quatre-vingt-dix chances pour cent que je me trompe, mais ça n'a aucune importance.

– C'est ce qu'on appelle l'espérance mathématique, c'est-à-dire le produit du gain par la probabilité. Dans le cas de ton hypothèse B, la probabilité est faible, mais le gain est infini, puisque c'est pour toi le sens de ta vie, et pour Pascal le salut éternel.

Deux jours plus tard

Dès qu'elles sont sorties, Vidal se lève et va vers la bibliothèque.

– Il doit bien y avoir un Pascal, ici. On a beau être franc-maçon...

Il s'accroupit et découvre sur le rayon inférieur, une édition scolaire des *Pensées*. Il la feuillette. Je me suis levé et m'approche de lui.

– Pourrais-tu me dire, me demande-t-il, s'il y a une référence précise aux mathématiques dans le texte sur le pari. (Il lit) : « Partout où est l'infini et où il n'y a pas infinité de hasard de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer : il faut tout donner... et ainsi, quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison pour garder la vie », etc.

Il me tend le livre. J'y jette un coup d'oeil.

– C'est exactement ça, « l'espérance mathématique », dis-je. Dans le cas de Pascal, elle est toujours infinie... À moins que la probabilité de salut ne soit nulle. Puisque l'infini multiplié par zéro égale zéro. Donc l'argument ne vaut rien pour quelqu'un qui est absolument incroyant.

Note. Sur le thème de cet article l'auteur a donné une conférence le 20 mars 2003 dans le cadre du Séminaire ouvert au public organisé par l'IREM et la librairie Dialogues de Brest. Il tient à remercier pour leurs remarques et indications : Sandrine Bourgeais, Rainer Buckdahn, Pierre Crépel, Jérôme Depauw, Michael Keane, Shige Peng et Catherine Rainer.

Références

[1] Pascal, *Œuvres Complètes*, Éd. du Seuil, 1963.
[2] Fermat, *Précis des œuvres mathématiques*, Toulouse 1853, (Gabay, 1989).

sur le calcul des probabilités

[3] Jacquard A. *Les Probabilités*, Que Sais-Je, n° 1571, (1974).
[4] Renyi A. *Calcul des Probabilités*, Dunod (traduction),1965.
[5] Todhunter I. *A history of the mathematical theory of probability*, Cambridge, 1865.

sur les martingales et le mouvement brownien

[6] Doob J.L. *Stochastic processes*, Wiley, 1953.
[7] Lévy Paul. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937.
[8] Lévy Paul. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, 1948.
[9] Rogers L.C.G., Williams D. *Diffusions, Markov processes and martingales* (2 vol.), Wiley, 1994.
[10] Encyclopædia universalis, article « Martingale » (1978).

sur les probabilités et les mathématiques financières

[11] Almgren R. *Financial derivatives and partial differential equations*, American Math. Monthly, Vol. **109**, n° 1, (2002), p.1–12.
[12] Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy, Vol. **81**, (1973), p. 637–654.
[13] Cox J.C., Rubinstein M. *Options Markets*, Prentice Hall, 1985.
[14] Mandelbrot B. *Fractales, hasard et finance*, Champs, Flammarion, 1997.
[15] Pagès G., Bouzitat C. *En passant par hasard*, Vuibert, 2000.

autres références

[16] Bell E.T. *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937.
[17] Bricmont J., Sokal A. *Impostures intellectuelles*, Odile Jacob, 1997.
[18] Horville R. *Itinéraires littéraires* XVII^e *siècle*, Hatier, 1988.
[19] Lagarde et Michard. *Collection littéraire* XVII^e *siècle*, Bordas, 1963.
[20] Rohmer Eric, *Six contes moraux*, Petite bibliothèque des cahiers du cinéma (Ma nuit chez Maud, 1969).

INFORMATIONS

Bientôt dix ans pour la revue Panoramas et Synthèses

B. Helffer, Directeur

Cela va bientôt faire dix ans que la revue *Panoramas et Synthèses* a été lancée par la SMF sous la responsabilité de Michèle Audin. Son dynamisme a conduit à la production de très bons numéros et je pense qu'elle a su donner à la collection un style original. Sans doute, certains d'entre vous se souviennent du numéro zéro : « Séries divergentes et théories asymptotiques » écrit par Ramis qui servit de rampe de lancement ou du volume épuisé sur la théorie de Hodge, mais peut-être que les objectifs de la revue vous restent encore mal connus. Cet article est donc une invitation à faire ou refaire connaissance.

Quels sont donc les objectifs de la revue ? Le titre est assez explicite mais peut paraître rébarbatif. Les créateurs ont sûrement (?) pensé un instant au titre « Panoramix » en référence à Astéri(x)sque. Il s'agit en fait d'inviter le lecteur à la découverte d'un sujet « chaud » où il trouvera une bonne idée (un parfum) des techniques qui y sont utilisées. Les états de la Recherche organisés par la SMF ont souvent été à la base de la préparation d'un volume de la collection. Le principe de ces journées est en effet de rassembler sur quelques jours des mathématiciens autour de quelques séries de conférences faisant le point sur un sujet donné. C'est ainsi que nous avons publié ces deux dernières années les volumes « Nouveaux invariants en géométrie et en topologie », « Milieux aléatoires » et « Rigidité, groupe fondamental et dynamique ». Il n'y a bien entendu pas de modèle unique pour un *Panoramas et Synthèses*. Un auteur unique peut aussi réaliser un volume pour présenter un point de vue nouveau sur un sujet. Ce fut par exemple le cas du volume « Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles » écrit par W. Craig. Il peut aussi, comme P. Dehornoy dans un volume que nous allons bientôt publier, coopter des collaborateurs pour présenter différentes approches d'un même sujet. Un panorama peut aussi être le fruit d'un séminaire annuel dédié à un thème (ce fut par exemple le cas du volume « Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques » rédigé par des doctorants de Toulouse sous la direction de D. Bakry et M. Ledoux) ou l'émanation d'un semestre thématique à l'IHP. Notre seule exigence, une fois l'intérêt du thème reconnu, est qu'il y ait un réel effort de présenter le sujet à des non-spécialistes, ce qui suppose parfois un rappel (bref) des outils de base utilisés pour éviter le découragement du lecteur (par exemple les éditeurs F. Comets et E. Pardoux du volume « Milieux aléatoires » ont accepté de rédiger pour faciliter la lecture du volume un court chapitre introductif). Pour répondre à des questions qui nous sont souvent posées, je dirai que les volumes que nous souhaitons publier ne sont ni des actes de congrès (nous souhaitons une plus grande cohérence entre les contributions) ni des ouvrages de vulgarisation grand public. Le lecteur de *Panoramas et Synthèses* trouvera pour les résultats présentés des éléments de démonstration. Par contre, il ne trouvera pas une exposition complète et linéaire d'un sujet avec toutes les démonstrations, comme dans des cours détaillés de type troisième cycle. Une autre collection de la SMF (*Cours spécialisés*) travaille par exemple dans cette optique.

Le rôle du comité de rédaction est important et original. Ses membres participent non seulement à la recherche de projets et à la mise en place de leur évaluation, mais ils acceptent aussi de jouer le rôle du relecteur non spécialiste (avec parfois l'aide de jeunes chercheurs). Susciter des vocations d'auteur est pour le comité de rédaction une mission à la fois passionnante et délicate. Elle est passionnante car nous avons cette possibilité de rêver des projets de panoramas et de chercher qui pourrait les réaliser. Elle est délicate car nous sommes conscients que nous demandons beaucoup aux auteurs sollicités. La transformation par exemple de notes préparées pour des exposés en un chapitre d'un livre s'harmonisant avec d'autres chapitres écrits par des collègues prend du temps mais elle a aussi le caractère stimulant du travail collectif. Certes il est vrai que cette activité n'est pas encore assez reconnue dans l'évaluation de la carrière d'un chercheur ou enseignant chercheur, mais c'est aussi un travail très gratifiant pour son auteur. Il pourra trouver plaisir à remettre en perspective certains résultats ou présenter son approche originale d'un théorème ou d'une théorie et notre diffusion lui assure sans doute beaucoup plus de lecteurs que pour d'autres articles qu'il a pu écrire. Enfin, il participe ainsi à une tâche fondamentale. La multiplication des revues et des publications rend en effet de plus en plus nécessaire le travail de présentation et de sélection des résultats les plus importants et ce ne sont pas les moteurs de recherche qui peuvent assurer cette fonction.

Deux volumes annuels, c'est insuffisant. Le nombre de sujets traités est très loin de rendre compte de toute la vitalité de la recherche en mathématique. C'est très peu, car au delà de son rôle de bien rendre compte des développements des mathématiques, la revue souhaiterait publier des volumes présentant les interfaces des mathématiques avec les autres disciplines. Jusqu'à présent, le comité de rédaction n'a pas encore pu finaliser des projets s'inscrivant clairement dans cette perspective.

Vous qui avez pu apprécier un ou plusieurs numéros de la revue, encouragez votre bibliothèque à s'y abonner et faites la connaître autour de vous !

Et si un sujet que vous aimez vous paraît entrer dans le cadre de notre revue, n'hésitez pas à nous envoyer votre projet !

Un peu d'histoire et d'information sur la revue.

Au départ née de la réflexion et des recommandations du Comité des Publications qui siégeait auprès de la DIST, la série a reçu comme mission de publier des monographies de synthèse de haut niveau, en visant un public de doctorants ou de mathématiciens professionnels non nécessairement spécialistes dans le sujet présenté. Elle bénéficie depuis du soutien du CNRS et du ministère de la culture. C'est Michèle Audin qui lança la revue entourée par N. Berline, J.B. Bost, M. Chaperon, *J.J. Duistermaat, J.P. Kahane et P. Schapira. Il y a quatre ans, B. Helffer a pris le relais. L'équipe qui l'accompagne est maintenant constituée d'A. Bonami, P. Biane, L. Manivel, J.F. Mestre, J.P. Otal et M. Yor. C. Sorger et E. Ullmo devraient bientôt joindre le comité pour assurer la relève. Enfin, c'est Nathalie Christiaen qui assure toute la supervision technique de la revue ainsi que son secrétariat. Quatorze numéros ont été publiés avec, depuis deux ans, le passage de la revue à l'abonnement et l'engagement de publier au moins deux volumes par an.*

La documentation mathématique à l'ère du numérique [*]

J.-B. Bost [†], G. Sureau [‡], B. Teissier [§]

Au cours des derniers mois de l'année 2002, les problèmes liés à l'évolution de la documentation scientifique universitaire - et, tout particulièrement, à l'accès en ligne - ont fait l'objet d'études par divers « comités de réflexion ». Citons notamment le groupe de travail *Couperin* et le tandem constitué du *Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques* (RNBM) [1] et de la *Cellule MathDoc* (CMD) [2]. Rappelons aussi que la Mission Scientifique Universitaire (MSU) projetait de mettre en place en 2002 un comité de réflexion sur la « bonne gouvernance » de la documentation universitaire, qui devait établir un état des lieux et étudier divers projets, avant qu'aucune décision importante ne soit prise concernant la documentation numérique.

Cette note, issue des discussions au sein du RNBM, rassemble diverses réflexions sur les problèmes actuels de la documentation mathématique. Leur prise en compte dans les décisions à venir sur la documentation scientifique paraît essentielle pour la communauté mathématique.

Ces réflexions s'appliquent toutefois à un champ de disciplines plus large que les seules mathématiques : une partie d'entre elles restent valables pour la physique théorique et l'informatique.

---

[*] Ce texte a été écrit fin 2002. Le débat sur la documentation numérique est toujours d'actualité ; voir, par exemple, l'article : « Documentation électronique : logique d'établissements contre logique monodisciplinaire ? » de M. Mashaal dans la lettre SPM n° 41 (mars-avril 2003)

[†] `Jean-Benoit.Bost@math.u-psud.fr`

[‡] `GenevieveSureau@math.u-psud.fr`

[§] `Teissier@math.jussieu.fr`

[1] Créé il y a plus de 25 ans, le Réseau national des bibliothèques de mathématiques (`http://www.biblio.math.jussieu.fr/reseau.html`) est une structure informelle qui fédère plus de 50 bibliothèques.

[2] La cellule MathDoc, UMS 5683 CNRS - université Joseph Fourier (`http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr`) a été créée en 1995.

Les spécificités de la documentation mathématique

Si la documentation joue un rôle primordial dans tous les domaines scientifiques, c'est particulièrement vrai en mathématiques.

Cela tient au fait que l'aboutissement de l'activité scientifique du mathématicien est contenu *intégralement* dans ses publications : celles-ci constituent non pas le compte-rendu d'un ensemble d'observations ou de savoir-faire, mais présentent la totalité des démonstrations de nouveaux résultats. Ceux-ci se trouvent donc aussitôt vérifiables et utilisables par la communauté scientifique.

Deux caractères spécifiques à la documentation mathématique s'ajoutent à son importance toute particulière pour les mathématiciens :

– Sa *pérennité* : la référence à des articles « anciens » datant de plus de quinze ans, voire de plusieurs décennies, est courante en mathématiques.

– La *fluidité* de l'*information*, assurée pour l'essentiel par des moyens électroniques d'accès libre.

Avec la physique théorique, les mathématiques ont constitué un « banc d'essai » pour l'utilisation des nouvelles technologies pour la documentation scientifique. Mise en place dans les années 1980, le système d'archive électronique de Los Alamos a évolué en le système arXiv [3] qui assure un accès fiable et gratuit aux prépublications mathématiques.

Depuis le milieu des années 1990, la communication électronique, à partir de sources libres, telles que arXiv et les pages personnelles ou institutionnelles, représente ainsi pour les mathématiciens le mode d'accès principal à l'information. Les journaux scientifiques apparaissent aujourd'hui comme des archives, plutôt que comme des moyens de communication.

La coordination nationale de la documentation mathématique

Le tandem RNBM/MathDoc

Bien consciente de la valeur de cet outil de travail fondamental qu'est la documentation, la communauté mathématique française s'est depuis longtemps organisée pour coordonner – au niveau national – l'ensemble du dispositif de documentation recherche en mathématiques avec pour objectifs d'assurer la pérennité des archives, de faciliter l'accès à la documentation et de simplifier sa diffusion : c'est le rôle d'un réseau de bibliothèques spécialisées (RNBM) et de deux unités mixtes de service à vocation nationale (la cellule MathDoc et la bibliothèque Jacques Hadamard [4]), de création plus récente. Les catalogues fusionnés de périodiques et d'ouvrages, les index nationaux de littérature grise en mathématiques (d'accès libre), et un service de sommaires (consortium national), d'accès réservé, font partie des services fédératifs proposés.

---

[3] `http://arxiv.org/`

[4] La bibliothèque Jacques Hadamard est devenue l'UMS 1786 CNRS - université Paris Sud en 1998 (`http://www.math.u-psud.fr/~biblio`).

Accords de consortium et accès électronique

Dès 1996, la communauté mathématique a négocié des accords de consortium. Les premiers ont concerné l'accès à la base de données Zentralblatt–MATH et ont été conclus dans l'optique de transformer cette base de données en un grand instrument européen de recherche. Depuis 1998, l'accès à la base de données MathSciNet de l'American Mathematical Society a également été négocié à des conditions avantageuses pour le RNBM.

Un accord national, conclu en 1999 pour trois ans et financé pour partie par une action spécifique de la Direction de la Recherche, permet à l'ensemble des chercheurs des laboratoires français de mathématiques et assimilés de bénéficier d'un service de sommaires couplé aux outils fédératifs mis en place par le RNBM et la cellule MathDoc. Cet accord a été reconduit de 2003 à 2006.

La signature en 2001 d'un accord avec Springer-Verlag a marqué une nouvelle étape des efforts du RNBM dans le domaine des consortiums. Cet accord, soutenu par la Direction de la Recherche et par le CNRS, a été financé par le CNRS pour une durée de quatre ans. Il prévoit une limitation des augmentations des tarifs d'abonnement et permet à l'ensemble des chercheurs des laboratoires de mathématiques d'accéder, *sans aucun surcoût pour les laboratoires ni pour les universités*, aux versions électroniques de plus de 60 revues de mathématiques du service LINK. Ce consortium – thématique et national – se donne pour objectif de concilier les questions budgétaires et la qualité scientifique, tout en restant à l'écoute des utilisateurs finaux. La conclusion du contrat a été l'occasion de discussions fructueuses entre une communauté scientifique, ses centres de documentation et un grand éditeur commercial. D'autres négociations sont en cours.

Quelques remarques sur les accords de consortium

Cette approche *thématique* et *nationale* des accords de consortium est différente de celle qui est choisie par certains organismes ou universités. Très bien adaptée à notre discipline, elle constitue de façon plus large une possibilité intéressante à explorer pour établir des relations de confiance entre communautés scientifiques et éditeurs. Elle permet aussi de discuter ensemble de la question, fondamentale en mathématiques, de la pérennité des documents sur le très long terme.

Notre approche des accords de consortium s'efforce également de préserver l'intérêt scientifique des utilisateurs dans cette période de transition que connaît la documentation, dont il est bien difficile de prévoir l'aboutissement. L'intérêt scientifique doit s'exprimer avec force à chaque prise de décision et primer sur l'intérêt commercial des grands éditeurs, dont certains se trouvent dans des situations de quasi-monopole, tout à fait inquiétantes pour l'avenir de la documentation. Ces éditeurs vont-ils continuer à n'offrir que l'alternative entre des abonnements électroniques à la carte, à des tarifs prohibitifs, et des « packages » (tout ou rien [5]) qui permettent, moyennant un prix global finalement assez élevé, d'accéder à un grand supermarché des revues où le client est libre

[5]Voir l'article de Kenneth Frazier sur le « Big Deal » sur http://www.dlib.org/dlib/march01/frazier/03frazier.html.

de lire ce qu'il veut, de l'économie à la cristallographie, en passant par l'anthropologie... ?

Il est vrai que différents pays ont eu recours aux accords de consortia pour faire front à l'inflation documentaire mais l'analyse des résultats est fort mitigée comme en témoignent les prises de position de responsables de grandes universités américaines (Wisconsin Madison et Cornell notamment) et le débat récent lancé par la Chronicle of Higher Education [6]. Pour brièvement résumer les arguments qui y apparaissent, après une expérience de plusieurs années avec IDEAL (Academic Press) et ScienceDirect (Elsevier), ces bibliothèques expriment des opinions très critiques concernant :

– la situation monopolistique que les gros groupes d'édition scientifique cherchent à atteindre au moyen de ces « packages » ;

– l'opacité et la rigidité dans les négociations avec ces groupes ; notamment les « packages » conduisent à souscrire l'accès à des journaux onéreux, mais de qualité médiocre, de façon non négociable ;

– le décalage entre l'attitude « commerciale pure » des grands groupes d'édition et le développement de moyens de diffusion de l'information scientifique libres de droits (l'exemple du système arXiv, concernant mathématiques et physique théorique, n'est pas mentionné, mais ne fait que renforcer les positions développées dans la dernière partie de l'article de K. Frazier).

En résumé, les offres commerciales récentes de grands groupes comme Elsevier peuvent sembler utiles à court terme, mais solidifient le système en pleine période de transition et menacent la survie des éditeurs académiques et des petits éditeurs commerciaux. On peut sérieusement se demander si elles constituent vraiment la meilleure voie vers une documentation transdisciplinaire de qualité, alors que l'évaluation scientifique des revues par les utilisateurs y trouve de moins en moins l'occasion de s'exprimer.

À propos de Couperin

Le document produit en septembre par le groupe de travail Couperin avait suscité de la part du RNBM plusieurs remarques que nous souhaitons reprendre brièvement.

Nous avions rappelé que la communauté mathématique française avait entrepris depuis des années un travail de réflexion sur la documentation numérique et avait obtenu, grâce au tandem RNBM/Mathdoc, des résultats substantiels sur les problèmes évoqués dans le document. Notamment, la politique de négociation thématique au niveau national avait permis particulièrement d'obtenir un accord de consortium, dans des conditions financières et scientifiques correctes (accès électronique sans aucun surcoût pour les laboratoires ni pour les universités).

Nous avions insisté sur sa réflexion permanente et l'implication constante des scientifiques... et les contacts établis avec les autres disciplines et les autres pays.

Enfin, avant de procéder à des montages complexes (GIP, ...), il importerait d'établir des projets clairement définis, tant sur le plan scientifique que sur le

[6] `http://chronicle.com/free/v49/i04/04a03101.htm` et `http://chronicle.com/colloquylive/2002/09/ejournal/`

plan financier, qui pourraient être soumis à des expertises au niveau international. L'avis de collègues américains responsables d'importants projets documentaires électroniques, ayant une expérience de plusieurs années d'accords de consortia, pourrait par exemple être sollicité.

Pérennité et archives numériques

La numérisation rétroactive des livres et des journaux est un progrès fantastique, qui permet de faciliter l'accès aux fonds anciens, grâce en particulier à des moteurs de recherche. Encore faut-il que les coûts d'accès soient abordables et la pérennité des fonds numérisés assurée. Insistons sur le fait que, s'il est impossible d'envisager l'avenir – même à court terme – d'une revue mathématique sans version électronique, il est également difficile de concevoir l'avenir à long terme d'une revue dont le fonds ancien n'aura pas été numérisé. Étendre cette facilité d'accès suppose de numériser les documents anciens, et la préserver impose de réfléchir sur l'archivage à long terme des documents numériques. Tout projet sérieux de documentation électronique doit évoquer ces problèmes autrement que sous forme de souhaits ou d'intentions.

1) Les programmes de numérisation rétroactives

Différents programmes dans le monde sont consacrés à la numérisation systématique de fonds anciens.

Ces programmes peuvent répondre à plusieurs objectifs : souci patrimonial, mise à disposition des fonds anciens auprès d'une communauté élargie de lecteurs, et création d'un ensemble scientifique cohérent par insertion de liens croisés entre les fonds anciens numérisés et les fonds nativement numériques, ou entre fonds numérisés et base de données. Le programme pluridisciplinaire JSTOR [7] permet par exemple d'accéder (sur abonnement) aux fonds anciens de plus d'une vingtaine de revues mathématiques. La société américaine de physique a, quant à elle, numérisé l'intégralité du fonds des Physical Reviews (1893-1997). En France, le programme NUMDAM, soutenu par la Direction de la Recherche et par le CNRS, et piloté par la cellule MathDoc, a été lancé avec comme objectif la numérisation des grandes revues mathématiques françaises. Les universités de Göttingen et Cornell et la Bibliothèque Nationale de France mènent aussi des programmes de numérisation de livres et de journaux [8].

2) Le projet **numdam** *(NUMérisation de Documents Anciens Mathématiques)* [9]

Le programme NUMDAM, soutenu par la direction de la Recherche et par le CNRS, et piloté par la cellule MathDoc, a été lancé avec comme objectif la numérisation des grandes revues mathématiques françaises.

Une première phase significative, financée par le CNRS, a démarré en septembre 2000 (dépouillement des revues, rédaction d'un cahier des charges techniques, alimentation de la base de données) ; elle permettra de numériser près de 220 000 pages (soit environ 8 000 articles). Cinq revues généralistes et une

[7] `http://www.jstor.org`
[8] `http://prola.aps.org` et `http://gallica.bnf.fr`
[9] `http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/NUMDAM/` et `http://www.numdam.org`

série d'actes de colloques [10], toutes de niveau international incontesté, sont concernées. Cette phase est en cours d'achèvement.

Le programme NUMDAM est conçu pour s'intégrer dans une action de la communauté scientifique internationale ; il collaborera, autant que faire se peut, avec les institutions qui développent des programmes similaires (en mathématiques ou dans d'autres domaines).

La base de données NUMDAM (notices bibliographiques des articles, avec résumé quand il existe et plein texte caché) est librement accessible sur la Toile. Des liens croisés seront introduits entre les articles des fonds numérisés et les notices des bases de données mathématiques : Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Mathematical Reviews et Zentralblatt–MATH.

Les articles eux-mêmes (en mode image) sont accessibles, aussi librement que possible, dans le respect des contraintes économiques des revues. Leur intégration dans le flux des articles nativement numériques est prévue.

Les phases ultérieures du programme NUMDAM devraient être rapidement programmées. Elles permettront de traiter d'autres revues mathématiques publiées en France, ainsi que des documents importants (séminaires, cours, etc.)

L'archivage : problèmes et perspectives

La numérisation des fonds documentaires pose d'importants problèmes de pérennité.

L'interrogation est claire : *qui sera garant, sur le très long terme, de la conservation des archives numériques et des conversions régulières des formats, nécessaires pour permettre une utilisation de ces archives à tout moment ?* Les éditeurs sont-ils des opérateurs fiables ? Comment s'assurer, en cas de rachats successifs, que les archives sont bien sauvegardées et, si tel est le cas, à quel coût pour l'utilisateur ? Faut-il demander à des institutions, publiques ou privées, de prendre en charge cet archivage d'un type nouveau ? Parmi les pistes possibles, mentionnons la collaboration de certaines bibliothèques de référence avec les éditeurs sur les problèmes d'archivage ; cela leur permettrait de participer à la conservation du patrimoine collectif, ce qu'elles ont toujours fait.

La communauté mathématique a entamé un travail de fond sur ces questions, au niveau international, sous la forme du projet EMANI (*Electronic Mathematical Archiving Network Initiative*) consacré au développement d'un système mondial, non commercial, d'archivage pour la documentation en mathématique. Les partenaires actuels sont, en plus de Springer-Verlag, les bibliothèques universitaires de Cornell (Ithaca, NY), Göttingen, Tsing-Hua (Beijing), MathDoc et le RNBM.

Ce projet prévoit que les données, issues de l'« ingestion » régulière des journaux courants (avec un « moving wall » probable de 5 ans), issues de la rétronumérisation et peut-être de l'apport direct de la part des mathématiciens, seront stockées et interrogeables sur le site de chacun des participants et mises à disposition de la communauté mathématique pour un coût minimal.

---

[10] Annales de l'Institut Fourier, Bulletin et mémoires de la Société Mathématique de France, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, Journées équations aux dérivées partielles, ainsi qu'une autre revue importante pour laquelle des négociations sont en cours.

Conclusions

Le débat en cours sur les problèmes de documentation numérique nous amène à insister à nouveau sur les spécificités de la documentation mathématique.

Il nous semble indispensable que les tutelles prennent en considération les différentes approches documentaires thématiques ; les solutions ne sont pas forcément semblables.

La communauté mathématique a mené depuis longtemps une réflexion collective et s'est dotée d'outils performants (RNBM/CMD) pour trouver des solutions et optimiser la gestion de la documentation mathématique au niveau national. Elle continue à « aller de l'avant » à la satisfaction de ses membres. La documentation joue, pour les mathématiciens, le rôle vital des grands équipements dans les autres disciplines. Il importe que la communauté mathématique puisse continuer à piloter, au plus près de ses intérêts scientifiques et financiers, sa politique documentaire.

Recherche, thèses, mathématiques : l'exemple du groupe Total

Entretien avec Claude Jablon

Le 23 décembre 2002, j'ai rencontré M. Claude Jablon, directeur scientifique du groupe Total, pour évoquer avec lui le fonctionnement de la recherche dans un grand groupe industriel, le rôle des thèses en entreprise, et la place que peuvent y occuper les mathématiques. Voici, légèrement remaniée, une retranscription de cet entretien. — *Antoine Chambert-Loir*

Gazette des mathématiciens. — M. Jablon, bonjour. Pourrions-nous commencer par évoquer votre parcours professionnel : de l'École normale supérieure à un groupe industriel tel que Total. Était-ce « évident » ?

Claude Jablon. — Non, ce n'était pas du tout évident. Je n'avais pas de plan de carrière particulier. Et d'ailleurs, aujourd'hui, on peut se demander si les plans de carrières ont un sens, tellement le monde du travail est mouvant.

Donc j'ai commencé par faire de la recherche en physique des plasmas. J'avais un rêve de gosse : la fusion thermonucléaire contrôlée. Je suis rentré à l'École normale supérieure en 1965 puis ai fait une thèse aux États-Unis pour intégrer le CNRS à mon retour en France. Au bout d'une dizaine d'années, j'ai eu l'impression d'avoir apporté à ce domaine tout ce que je pouvais y apporter. J'ai mis le nez à la fenêtre, et c'est ainsi que je suis entré à Matra en 1979, puis quelques années plus tard chez Elf, devenu depuis TotalFinaElf, puis Total.

Gazette. — Comment fonctionne la recherche en entreprise ?

C.J.— Il faut commencer par dire que le but essentiel de l'entreprise, c'est de faire du profit ; c'est cela qui peut assurer sa pérennité. Ainsi, la recherche en entreprise s'inscrit dans cette mission et a pour but de préparer son avenir. Elle ne se substitue donc pas à la recherche publique : elle n'a pas pour but de faire progresser la connaissance. Ça, c'est le rôle de la recherche académique.

Cependant, même si ce n'est pas sa vocation première, une partie significative de la recherche industrielle a besoin de recherches de connaissance : c'est presque évident sur la recherche à long terme, en sciences de la terre ou en chimie. Pour cette compréhension au fond, nous nous appuyons sur la recherche académique.

Gazette. — Comment ?

C.J.— Par des contrats. Nous avons de l'ordre de 80 thésards, en sciences de la terre, en chimie, en génie des procédés. Mais cela implique une contrainte temporelle : il s'agit de sujets dont il est certain qu'ils seront d'actualité trois ans après. Nous avons aussi des contrats d'étude, des collaborations avec d'autres pays (Allemagne, Amérique du nord, Japon). Et nous finançons aussi des séjours dans des universités étrangères pour des coopérants en volontariat international. Cela concerne une vingtaine d'ingénieurs pour des missions de quinze mois.

Gazette. — Des post-doc ?

C.J.— Non. Faire un post-doc revient à différer d'un an ou deux la recherche d'un poste définitif. À 27 ans, c'est acceptable, à partir de 30 ans, c'est une stratégie risquée. Nous nous refusons donc à la pratiquer, sauf lorsqu'il s'agit d'un programme de qualification complémentaire avant un recrutement parfaitement défini chez nous.

L'association Bernard Grégory se préoccupe du devenir des post-docs, trop souvent laissés à eux-mêmes par leurs anciens directeurs qui évacuent ainsi le problème de l'insertion professionnelle de leurs thésards.

Gazette. — Concrètement, quel statut ont vos thésards ?

C.J.— Nous utilisons le statut CIFRE qui a l'avantage de fournir une position claire vis à vis du droit du travail. Mais la thèse se fait dans un laboratoire universitaire. Ainsi, le thésard peut nouer des contacts avec le monde entier. Il baigne dans le système universitaire, dans une culture à la fois d'échange et de compétition qui me semble très précieuse. C'est un milieu très différent du milieu professionnel ultérieur.

Pour autant, je ne peux pas dire que nous n'avons aucun thésard en interne, mais en tout cas peu.

Gazette. — Dans quels cas ?

C.J.— Le thésard ne travaille chez nous que s'il doit accéder à des données (carottes d'exploration pétrolière, par exemple) ou des appareillages (chimie du soufre ou du fluor) qu'il ne trouvera pas à l'université. Mais je le répète, ces cas sont l'exception. Et cette position est très généralement admise par les industriels.

Gazette. — Comment est organisée la recherche dans le groupe Total ?

C.J.— Le groupe est divisé en trois branches : Exploration-production, Raffinage-marketing et Chimie. Cette dernière regroupe d'ailleurs de nombreuses entreprises très différentes. Chacune de ces branches a sa propre division recherche qui a la responsabilité des programmes, des laboratoires de recherches, des budgets. Il y a aussi une direction scientifique globale, que je dirige, qui anime des réseaux d'échange entre les branches, par exemple en génie des procédés. C'est aussi elle qui s'occupe de la coopération avec la recherche académique.

Gazette. — Est-ce que la situation à Total est représentative de celle d'autres grands groupes industriels ?

C.J.— Chaque groupe industriel a ses structures, dans lesquelles l'histoire joue un rôle non négligeable. Néanmoins, tous assurent, sous des formes différentes, les fonctions indiquées : recherches à court terme proches des centres de profit, recherche à long terme en « corporate » et au niveau du groupe, coordination technique et liens avec la recherche académique.

Gazette. — Parlons des mathématiques.

C.J.— C'est un sujet difficile. Pour tout résumer caricaturalement, ce n'est pas notre métier d'en développer, pas plus que de l'informatique. Il y a eu de la recherche en informatique, et aussi en mathématiques (financement de thésards, jusqu'à 10 ou 15, en mathématiques appliquées). Mais ce n'est pas un de nos métiers de base, et nous n'avons d'ailleurs jamais embauché un seul thésard en mathématiques, alors que la proportion va de 30 à 40% dans les autres disciplines.

Gazette. — Et les statistiques ?

C.J.— Là c'est encore autre chose, et un sujet de frustration pour moi. J'ai essayé d'en faire parler il y a une quinzaine d'années, dans le colloque *Mathématiques à venir* qui s'était tenu en 1987 à l'École polytechnique. Les mathématiques appliquées étaient à l'époque uniquement centrées sur les EDP ou la modélisation. Mais en gros, nous avons aujourd'hui moins besoin de modélisation : les problèmes que nous rencontrons nécessitent plus un regard d'utilisateur que de développeur de modèles.

Nous avons des activités de type statistique, par exemple en collaboration avec une équipe de géo-statistique à l'École des Mines à Fontainebleau, mais ce sont des gens qui ont une formation de base en sciences de la terre. Pour la plupart, nos ingénieurs ont d'abord une spécialité technique au cœur de nos métiers, certains d'entre eux ont ensuite choisi de s'investir dans l'utilisation des statistiques au service de leur spécialité d'origine.

Les statistiques devraient être un lieu de dialogue entre entreprises et université, bien plus qu'elles ne le sont. La situation est compliquée par la division du milieu universitaire en chapelles. C'est probablement mieux dans d'autres pays.

Gazette. — Il y a pourtant eu des mathématiques à Elf ?

C.J.— Oui, et je crois même du bon travail ! Par exemple, en thermodynamique des équations d'états, nous avons travaillé, avec Arnol'd, sur une formulation de la thermodynamique via la géométrie différentielle. C'étaient des mathématiques intéressantes, mais je ne suis pas entièrement certain que c'était à nous, industriels, de les développer.

Gazette. — Comment sont valorisées les thèses, une fois achevées ?

C.J.— Nous avons un accord cadre avec le CNRS. Dans ces cas exceptionnels, elles sont soutenues à huis-clos. Parfois, nous retardons la soutenance pour avoir le temps de déposer des brevets. Mais notre intérêt est de financer des travaux universitaires de bonne qualité, et ils doivent donc être publiés. Le but est bien de permettre une publication de qualité sans mettre en danger les intérêts industriels. Lorsque l'on montre des coupes géologiques extrêmement précises, il peut suffire de ne pas dire où est le puits.

Le cas le plus difficile, c'est lorsque on ne peut ni publier, ni breveter, parce que ce sont des travaux difficiles à protéger.

Gazette. — Quel regard avez-vous sur le système éducatif ?

C.J.— Je trouve qu'il manque de visibilité et qu'il doit mieux faire sa propre promotion. Les recruteurs d'entreprises connaissent naturellement bien la formation d'école d'ingénieurs ; elle offre un produit bien défini. Concernant l'université, la suppression des thèses d'État et de troisième cycle a été une bonne chose car elle a permis de construire un produit unique, assez bien défini : la thèse en trois ans (pour les sciences « dures » en tout cas, c'est plus compliqué en sciences humaines). Le système universitaire doit donc continuer à mieux se faire connaître, mais il y a eu beaucoup de progrès depuis 20 ans.

Gazette. — Doit-il se « professionaliser » plus ?

C.J.— Il aurait aussi intérêt à mieux faire connaître le monde de l'entreprise à ses étudiants, et pour cela, il faudrait qu'il le connaisse par lui-même, ce qui est très loin d'être le cas partout. C'est dans cette meilleure connaissance respective qu'on peut parler de « professionalisation », beaucoup plus qu'en demandant aux entreprises de préciser leurs besoins qui ne sont connus qu'à des échelles de temps trop courtes par rapport aux temps de réponse du système universitaire.

Gazette. — Et sur le manque de culture scientifique ?

C.J.— Évidemment, je regrette l'inculture scientifique croissante, et j'incrimine – comme tout le monde – l'enseignement primaire et secondaire. Face au discours ascientifique, voire anti-scientifique, qui se développe, l'enseignement devrait fournir les clefs pour décoder ce qui se raconte. Nous avons besoin de citoyens capables d'avoir une réflexion autonome sur le discours scientifique et technique.

Gazette. — Vous présidez aussi l'Association Bernard Grégory. [1]

C.J.— Cette association porte le nom d'un physicien des particules qui, de par ses fonctions à la tête du CNRS, du CERN et de la DGRST, s'était personnellement engagé pour favoriser l'emploi scientifique en France. En 1977, peu de temps avant sa mort, il créa un groupe de travail sur l'insertion professionnelle des jeunes scientifiques formés par la recherche : la future association Bernard Grégory.

Ses activités sont très variées : elle centralise propositions de thèse, offres d'emplois, curriculum vitae ; elle organise aussi les *Doctoriales* qui sont des stages de préparation des doctorants à l'après-thèse ; elle édite aussi des plaquettes pour les doctorants ou pour les entreprises, et une lettre trimestrielle, *Formation par la recherche*. Elle a aussi lancé en 2000 une expérience originale : « le nouveau chapitre de la thèse ».

Gazette. — Pouvez-vous nous en parler ?

C.J.— Nous avions repris le principe des *Doctoriales* aux anglais mais là, c'est une idée originale, venue au départ de la communauté des astrophysiciens. Il s'agit pour le doctorant en fin de thèse, de rédiger une analyse critique de la manière dont il a conduit et géré son projet de recherche, un véritable bilan de compétences qui va plus loin que le simple constat qu'il a fait de la bonne recherche. Pour cela, les doctorants sont encadrés par des spécialistes en recrutement qui leur apportent un regard extérieur. Après deux phases d'expérimentation, la campagne 2003 vient de débuter !

[1] www.abg.asso.fg

Compte rendu de la rencontre CTI-SMF-SMAI du 18 février 2003

À l'initiative des mathématiciens, une rencontre a eu lieu le 18 février 2003 dans les locaux de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris entre le président de la CTI (Commission du Titre d'Ingénieur) Monsieur Louis Castex (par ailleurs directeur de l'INSA de Toulouse) et une délégation de la SMAI et de la SMF. Cette dernière, comprenait Michel Waldschmidt (président de la SMF), Gilles Pagès (membre du bureau de la SMAI), Yves Caumel et Guy Chassé (membres du conseil de la SMF).

L'un des buts de cette rencontre pour les sociétés savantes représentant les mathématiques était de se faire connaître comme interlocutrices près d'une institution qui a la charge d'accorder l'autorisation de délivrer le titre d'ingénieur diplômé.

La discussion s'est engagée à partir du récent rapport du CNE (Comité National d'Évaluation) sur les mathématiques à finalités appliquées qui comporte une importante annexe sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs. Louis Castex a voulu savoir pourquoi les mathématiciens – contrairement à des scientifiques d'autres spécialités – étaient représentés par deux sociétés distinctes SMF et SMAI. Les raisons historiques en ont été expliquées par Michel Waldschmidt et Gilles Pagès.

Louis Castex a beaucoup insisté sur la désaffection des jeunes pour les études scientifiques, donnant de nombreux exemples alarmants. Sans vouloir nier cet état de fait, les mathématiciens ont souligné que leur discipline faisait preuve de dynamisme, notamment dans les nouveaux secteurs liés aux services. On voit apparaître depuis quelques années de nouveaux métiers qui illustrent la pertinence des mathématiques à finalité professionnelle. Monsieur Castex a confirmé qu'à son avis les entreprises recherchent des gens susceptibles d'appliquer les mathématiques et qu'il fallait arriver à attirer les jeunes vers ce type d'activité. D'après son expérience les filières « mathématiques » de certaines écoles d'ingénieurs ne conviennent qu'à une petite partie des élèves.

La SMAI et la SMF ont fait état de leurs préoccupations au sujet de l'enseignement des mathématiques dans les écoles tels que l'on peut les percevoir à la lecture du rapport du CNE, en particulier le fait que, dans bon nombre de cas, les mathématiques sont souvent enseignées par des non mathématiciens dans les écoles d'ingénieurs. Elles ont insisté sur l'importance, à leurs yeux, que cette discipline soit enseignée par des enseignants-chercheurs en mathématiques même lorsqu'il s'agit d'une « discipline de service ». Louis Castex est d'avis que les mathématiques soient enseignées de manière globale et non par chaque discipline utilisatrice. Il est par ailleurs préoccupé de ne pas étendre les volumes horaires. Il pense qu'un dialogue est nécessaire entre les disciplines permettant la compréhension mutuelle et que ce dialogue n'est pas entré dans les traditions. Il a beaucoup mis en avant la « pédagogie par projet ». Yves Caumel et Gilles Pagès ont fait part de leur intérêt et de leur expérience pour ce type d'innovation mais aussi de certaines limites.

Il y a eu accord entre tous les participants à cette rencontre pour dire que l'essor de l'informatique a mis les mathématiques en avant. Monsieur Castex est très préoccupé par l'enseignement de l'informatique en école d'ingénieurs. Il pense que l'informatique est trop souvent enseignée comme de la bureautique. Il souhaiterait que l'enseignement de cette discipline soit davantage lié aux mathématiques.

Rebondissant sur un propos de Louis Castex affirmant n'avoir aucun doute sur l'utilité des mathématiques, Guy Chassé a annoncé qu'il avait pour projet avec Nicole Burger, l'une de ses collègues de Nantes, d'organiser à l'automne 2003 un colloque sur « mathématiques et formation des ingénieurs » qui se placerait dans la lignée de plusieurs rencontres qui ont eu lieu sur ce thème ces dernières années. Répondant à une question de Michel Waldschmidt, Louis Castex a assuré de la participation de la CTI aux débats qui ne manqueront pas d'avoir lieu dans ce cadre.

Entretien avec Jean-Marc Deshouillers[1] concernant les PEDR[2]

Michel Théra, Michel Waldschmidt

L'analyse des campagnes d'attribution des primes d'encadrement doctoral et de recherche de ces quatre dernières années soulèvent de nombreuses questions. Michel Théra et moi en avons posé quelques-unes à Jean-Marc Deshouillers, dont voici les réponses.

Vous verrez que le pourcentage d'universitaires qui bénéficient d'une prime d'encadrement doctoral est plus faible chez les mathématiciens que dans d'autres disciplines. Jean-Marc Deshouillers propose comme premier objectif de reconquérir des parts de marché : il faut combattre l'autocensure et accroître le nombre de dossiers déposés. La mise en œuvre de ce plan doit être faite par la communauté. Remplir un dossier et joindre un bref CV ne prend que quelques dizaines de minutes. J'espère que les mathématiciens sauront se montrer militants pour redresser la situation. Je compte sur les adhérents de la SMF pour passer le message à tous les candidats potentiels. Merci.

Michel Waldschmidt

[1] J.-M. Deshouillers était Directeur Scientifique à la MSU (Mission Scientifique Universitaire) du Ministère de la Recherche

[2] Primes d'encadrement doctoral et de recherche

M. Théra, M. Waldschmidt : Plusieurs adhérents de nos deux sociétés nous ont interpellés sur la question des primes d'encadrement doctoral et de recherche (PEDR). Alors que les mathématiciens - terme désignant les mathématiciennes et mathématiciens - ont le sentiment de n'avoir pas démérité (surtout au moment où plusieurs d'entre eux reçoivent des prix prestigieux : la médaille Fields, le prix Clay, le prix Crafoord, le prix Kyoto de la fondation Inamori, le prix Abel...), on entend dire que le pourcentage d'universitaires recevant cette prime est plus faible en mathématiques que dans d'autres disciplines. *Est-ce vrai ? Avez-vous une justification ? Comment y remédier ?*

J.-M. Deshouillers : Tout d'abord, un mot sur l'expression que vous avez employée ; elle est au cœur du problème : « *le sentiment de n'avoir pas démérité* ». Le volume des PEDR attribuées est contingenté budgétairement : l'attribution des primes relève donc d'une logique de *concours*, mais la non satisfaction d'une demande est vécue dans une logique d'*examen*. Les dossiers ne satisfaisant manifestement pas les critères d'attribution sont très peu nombreux, autour de 10% des dossiers reçus.

Votre question est multiple : je vous propose de répondre dans un premier temps à vos deux premières interrogations, factuelles ; nous reviendrons ultérieurement sur la troisième. Comment sont ventilées les primes entre les disciplines ? Proportionnellement au nombre de dossiers déposés : de ce point de vue, les mathématiciens (selon l'usage grammatical, ce vocable désigne les mathématiciennes et les mathématiciens) ne sont ni mieux ni moins bien traités que leurs collègues. En revanche, si on rapporte le nombre de bénéficiaires de PEDR au nombre d'enseignants-chercheurs relevant d'une discipline, il y a d'assez grandes disparités : cette proportion est de l'ordre du quart en mathématiques (sans différence significative entre les sections 25 et 26), elle est équivalente en informatique, elle est bien inférieure en sciences humaines et sociales, mais de l'ordre du tiers en physique et sciences de l'ingénieur, chimie, sciences de la Terre et de l'Univers.

Pourquoi cette proportion est-elle plus faible en mathématiques que dans les sciences « dures », alors que ce fait n'a pas de justification scientifique : la mathématique française n'est pas, sur le plan international, d'un niveau inférieur à celui des autres sciences françaises[3]. La raison fondamentale est due, à mon avis, à la différence dans la nature de l'activité de recherche, reflétée dans le mode de publication des résultats. La production mathématique est le fait d'individus et même si elle est, de plus en plus, celui de toutes petites équipes, les publications à plus de trois auteurs sont exceptionnelles dans notre discipline. Ce que nous venons de constater sur le plan des publications a son pendant sur les activités d'encadrement doctoral. Ainsi, *à participation égale à la vie scientifique, il est plus difficile à nos collègues d'étoffer un dossier, ce qui induit un taux d'auto-censure plus élevé.*

[3]Ce fait est attesté par de nombreux indicateurs (cf. en particulier les travaux de l'Observatoire des sciences et des techniques) ; la conclusion de l'article de Claude Allègre dans la livraison commémorative 300, d'octobre 2002, de la revue *Pour la Science* (numéro 300), est également intéressante.

M. T., M. W. : On entend dire qu'il arrive que le nombre de primes que doit distribuer la commission est parfois inférieur au nombre de demandes de renouvellement. *Est-ce vrai ?* Peux-tu expliquer la différence du niveau de difficulté *suivant les années ?*

J.-M. D. : Le rapport entre le nombre de « sortants » et celui des primes attribuées était particulièrement élevé pour la campagne 2002 (légèrement inférieur à 1) ; le taux de satisfaction (rapport du nombre de primes attribuées au nombre de demandes) était de 53% cette année contre 60% en 2001, 66% en 2000, 63% en 1999, mais 52% en 1998. La raison en est que 2002, comme 1998, est congru à 1990 modulo 4 : lors de la première campagne de primes, en 1990, cinq mille primes ont été attribuées, soit la moitié du nombre total de primes ; depuis la première vague quadriennale, des efforts de lissage ont été accomplis, avec pour effet des campagnes 1998 et 2002 plus difficiles.

M. T., M. W. : Quelle est dans ces conditions la place que peuvent occuper de jeunes mathématiciens fraîchement recrutés ? *Doivent-ils attendre de diriger des recherches (comme le laisse penser l'appellation de la prime) avant de postuler ?*

J.-M. D. : Les critères retenus prennent en compte un souci de n'exclure du bénéfice de la PEDR aucune catégorie de personnel, en particulier les jeunes maîtres de conférences. Ainsi, les maîtres de conférences fraîchement recrutés peuvent être éligibles pour une PEDR sans que leur dossier ne fasse apparaître d'activité d'encadrement de recherche. Pour les autres maîtres de conférences, la participation à l'encadrement d'activités de formation par la recherche prend en compte les co-encadrements de mémoires de DEA (magister recherche à l'avenir), de thèses.

M. T., M. W. : *Les membres chevronnés* (PRCE[4], par exemple) *ont-ils presque automatiquement la prime ?*

Les matheux ont eux la réputation de privilégier les jeunes : plus on monte et plus c'est dur de garder la PEDR. Rumeurs ou réalités ?

J.-M. D. : Une des catégories prises en compte pour la définition des critères d'évaluation est celle des « professeurs mûrs » qui ne comporte pas de sous-catégorie PRCE ; je considère que l'ensemble de cette catégorie a été traité chaque année de façon homogène par le jury. De fait, le taux de satisfaction des PRCE est très élevé, mais cette corrélation n'est pas surprenante : la grande majorité des collègues promus à la classe exceptionnelle l'ont été en raison d'une activité d'encadrement doctoral et de recherche, forte et continue ; de plus, il est vraisemblable que la plupart de ceux qui ont été promus au titre d'activités de nature plus administrative bénéficient de primes ou de rémunérations complémentaires incompatibles avec la PEDR. Enfin, n'ayant connaissance que des dossiers déposés, je n'ai pas les moyens de mesurer le degré d'autocensure et encore moins de le comparer entre les différentes catégories.

Quant à la seconde partie de la question, je n'ai pas vraiment les moyens d'y répondre par une argumentation numérique : je ne pense pas que le taux de satisfaction soit un paramètre pertinent, mais c'est essentiellement le seul dont je

[4]Professeur de Classe Exceptionnelle

dispose. J'ai cependant deux commentaires : le premier est qu'au fil des années (de la campagne n à la campagne $n+4$, pour limiter l'effet de la discrépance modulo 4) l'obtention de la PEDR est intrinsèquement plus difficile : le nombre total de PEDR est essentiellement constant, mais la population active s'accroît ; ce dernier fait est une conséquence positive de l'effort de structuration de la recherche mathématique accompli dans les trente dernières années. Le second commentaire est que, sur le plan psychologique, plus on monte, plus c'est dur de perdre la prime.

M. T., M. W. : De manière plus générale, quels sont les critères d'attribution ?

J.-M. D. : À la fin des années 80, différents mécanismes ont été mis en place pour développer la formation doctorale, alors insuffisante. La PEDR a été créée, en partie, comme l'un de ces mécanismes : en témoigne le fait que dans son intitulé l'encadrement doctoral précède la recherche. Le développement de la formation doctorale à un niveau satisfaisant, le souci d'accroître le nombre de maîtres de conférences et jeunes professeurs bénéficiaires d'une PEDR, ont conduit à une évolution de la pratique, confirmée dans la note d'information concernant la campagne 2003 [`http://dr.education.fr/Pedr/noteinfo.pdf`] où trois conditions sont énoncées ; dans l'ordre : l'appartenance à une équipe de recherche reconnue, l'activité de publication, l'encadrement doctoral.

Les critères employés par le jury de mathématiques, approuvés par le chef de la MSU, figurent dans les rapports qu'Edwige Godlewski et moi vous avons adressés après chaque campagne. Ils ont peu évolué d'une année sur l'autre. Je reprends ceux de la campagne 2002, tels qu'indiqués aux experts pour les guider dans leur travail d'évaluation.

« Les critères à prendre en compte, avant de les moduler par d'autres éléments du dossier, sont :
MC jeunes — Qualité scientifique de la production après thèse,
MC mûrs — Qualité et quantité de la production, existence d'encadrement (DEA, co-encadrement de thèses),
PR jeunes — Qualité et quantité de la production, encadrement de thèses,
PR mûrs — Qualité et quantité de la production, thèses soutenues, thèses en cours.

La production s'analyse essentiellement en terme de publications. Les autres formes de production (logicielle par exemple) sont plus rares dans notre discipline, mais doivent être également prises en compte.

Les autres éléments du dossier concernent notamment la participation à la vie de la recherche mathématique (direction de laboratoire, d'école doctorale, rayonnement, ...) ; ces points ne doivent pas être négligés : si les activités d'administration de la recherche ne peuvent être substituées en totalité aux activités de publication et d'encadrement, elles doivent être impérativement prises en compte en complément de ces activités. »

M. T., M. W. : *Quel est le pourcentage de refus dans la procédure d'appel ?*

J.-M. D. : Les chiffres correspondant à la procédure de recours sont également publiés dans le rapport annuel, avec un décalage d'un an, dû au calendrier.

La procédure de recours est statutaire et quelques dizaines de primes (toutes disciplines confondues) sont réservées à cette fin. La commission de recours, commission unique pour toutes les disciplines, est indépendante des directions scientifiques ; elle est composée de représentants d'organisation syndicales et d'enseignants-chercheurs nommés. S'il est d'usage que les directions scientifiques attirent l'attention de la commission de recours sur quelques dossiers, celle-ci travaille en toute indépendance, selon ses propres critères (dont je n'ai pas été informé, et que l'ingénierie inverse ne m'a pas permis de découvrir). Le seul chiffre qui me semble signifiant est celui des recours déposés : pour les maths, il représente entre 20% et 23% des candidats malheureux pour les campagnes 1999, 2000 et 2001 : ce chiffre est faible en comparaison des quelque 75% de candidats malheureux que le jury aurait retenus si l'attribution des PEDR n'était pas contingentée.

Il importe que nos collègues sachent que l'identité des candidats ayant déposé un recours n'est connue, ni du jury de l'année n, ni de celui de l'année $n+1$; en outre, compte tenu de la difficulté du concours, la direction scientifique ne considère pas qu'un dépôt de recours est une critique de son travail ou de celui du jury : bien au contraire, elle encourage le dépôt de recours.

M. T., M. W. : Le budget attribué à une discipline dépendant de l'effectif des postulants à la PEDR, le malthusianisme et l'élitisme aristocratique professé dans notre discipline doivent faire des ravages.

J.-M. D. : J'ai fourni au début de l'entretien des chiffres et une explication « objective » prenant en compte le mode de production et de publication de notre discipline, et je ne pense pas qu'il y ait un a priori élitiste propre aux mathématiciens.

J'ai en revanche le sentiment que le mécanisme d'attribution des primes peut être perçu comme hyperélitiste (ne nous cachons pas le fait qu'il est relativement élitiste), et qu'il peut de ce fait, engendrer un comportement d'autocensure qui est injustifié - j'ai donné des chiffres le prouvant - et contreproductif. En effet, si, au vu des résultats de l'année n, la réaction générale est « oh là là, s'il faut un tel niveau pour avoir la PEDR, il est inutile que je postule pour l'année $n+1$ », il est bien évident que la barre sera placée encore plus haut l'année $n+1$...

Pour ce qui est du comportement malthusien, je ne pense pas qu'il concerne les individus, mais il peut être celui de laboratoires qui visent plus à maximiser leur taux de succès que leur propre nombre de PEDR.

Une autre question avant qu'on aborde les remèdes ?

M. T., M. W. : De nombreux collègues ayant une certaine ancienneté sont profondément vexés de se voir opposer un refus, et cela a des effets dévastateurs, à l'opposé du but initialement poursuivi par les promoteurs de cette prime. Un grand nombre de mathématiciens pratiquent l'auto-censure ; peut-être est-ce un manque d'habitude (ou de goût) à être évalué. *Aurais-tu un message à adresser* *aux candidats malheureux : le refus de leur accorder cette prime est-il pour eux un signe qu'ils feraient mieux d'arrêter leur recherche ?*

J.-M. D. : Le mot « refus » n'est pas adapté à une logique de concours. Je comprends tout à fait la déception, voire la vexation de ne pas voir sa demande satisfaite, d'autant plus que cette demande est justifiée dans 90% des cas. Je ne peux hélas que répéter que le nombre de primes accordées en mathématiques est faible par rapport à l'ensemble de la communauté mathématicienne et que la non satisfaction d'une demande ne peut et ne doit pas être interprétée comme un jugement d'insuffisance de l'activité de recherche et d'encadrement doctoral. Fort heureusement, la PEDR n'est pas la seule motivation pour une activité de recherche et le découragement est très rarement durable.

Je pense, qu'après ce tour du problème, nous pouvons tenter d'élaborer des remèdes.

Un premier point, que nous n'avons pas encore abordé, est la lutte contre les dégâts collatéraux de la PEDR. Celle-ci est parfois utilisée, hors de son but initial, comme indicateur, pour la comparaison des laboratoires au sein d'un établissement, d'une école doctorale : il convient de préciser aux responsables des établissements, des ED [5]... les pourcentages comparés de bénéficiaires de la PEDR et les raisons de cet état de fait.

Le point qui m'interpelle le plus est le pourcentage de mathématiciens bénéficiaires de la PEDR, particulièrement faible, comparé à celui des spécialistes d'autres sciences exactes. Plutôt que d'entrer dans un cercle vicieux où la difficulté du concours favorise l'auto-censure qui mécaniquement renforce la difficulté du concours, je pense que le premier objectif de notre communauté doit être de reconquérir résolument des parts de marché et je ne vois pas d'autre solution que de *combattre l'auto-censure et accroître le nombre de dossiers déposés*. Pour la mise en œuvre, la balle est dans le camp de la communauté, et bien évidemment dans celui des sociétés savantes qui la représentent.

Une piste positive est d'associer davantage les maîtres de conférences à l'encadrement de la formation par la recherche (stages de masters, thèses).

Une autre piste est la « gestion de la pénurie ». Si nous avons tenté d'avoir un minimum de mémoire, nous ne sommes pas allés très loin : nous avons essayé, sans y parvenir de façon satisfaisante, d'éviter qu'un collègue se retrouve deux années de suite juste au-dessous de la barre. Faut-il aller plus loin dans cette direction en admettant des « quotités » de primes (4 ans sur 4, sur 5, voire sur 6) ? Formulé autrement, le jury pourrait introduire trois sous-catégories A0, A1 et A2, les candidats A0 bénéficiant directement d'une PEDR, les candidats A1 ne restant pas 2 ans de suite dans cette catégorie et les candidats A2 ne restant pas 3 ans de suite dans cette catégorie.

Pour conclure, je tiens à dire que la question des PEDR est de loin l'aspect le plus frustrant de l'activité d'un directeur scientifique et le seul qui soit

[5] Écoles Doctorales

réellement douloureux. En raison de la sensibilité du sujet, j'ai tenu, depuis la première campagne dont j'ai été chargé, à ce que l'attribution des PEDR soit moins opaque : diffusion de la liste des membres du jury, des critères retenus, des modes opératoires et des résultats sous forme statistique. Je n'ai en revanche pas jugé opportun de diffuser la liste des bénéficiaires.

Propos recueillis en avril 2003

Section 01 du Comité National Compte-rendu de la session de printemps 2003 et du concours

P. Gille

La section « Mathématiques et Outils de modélisation » du Comité National a tenu sa session de printemps du 26 au 28 février 2003. La direction scientifique du département SPM était représentée par Christian Peskine, directeur scientifique adjoint pour les mathématiques (SPM), Michel Enock-Levi, chargé de mission pour les mathématiques et Jacques Dupont-Roc, directeur scientifique adjoint pour la physique (lois fondamentales) a également suivi une partie de la réunion. La mission scientifique universitaire (MSU) était représentée par Robert Eymard, puis par Jean-Marc Couveignes. Le nouveau directeur scientifique SPM, Michel Lannoo, nous a fait l'honneur d'une première visite.

Suite à l'inversion du calendrier des sessions, la session a été principalement consacrée à l'évaluation des unités et des chercheurs et au classement des demandes de délégation-détachement. Le débat avec les tutelles a évidemment porté sur les importantes restrictions budgétaires au CNRS.

Intervention de C. Peskine

Christian Peskine a concentré son intervention sur les très grandes difficultés que traverse le CNRS actuellement, dues à un budget 2003 déjà en diminution, puis à des des gels de précaution et des annulations de crédit. Il s'agit pour le CNRS de 41,1 millions d'euros annulés sur 317 pour les autorisations de programme, auquels il faut ajouter 38 milions d'euros de crédits. Pour le département SPM, il s'agit de 2,5 millons d'euros de crédits annulés, le département SPM est donc fortement touché (-29% par rapport à -20% pour l'ensemble du CNRS).

Plusieurs conséquences sont déjà connues : les unités de SPM ont eu en 2003 leur dotation diminuée en moyenne de 35%, les accueils de chercheurs (postes rouges, détachements, délégations) vont être très sérieusement diminués et de nombreux engagements vont être difficiles à tenir. Cependant, une priorité sera donnée aux chantiers en cours.

Intervention de M. Lannoo

Michel Lannoo s'est tout d'abord félicité du premier prix Abel attribué à Jean-Pierre Serre. Il a aussitôt plaidé en faveur d'une remise à sa juste place de la physique et des mathématiques au CNRS, en particulier par une définition claire et une meilleure visibilité des coopérations interdisciplinaires avec les départements des Sciences de l'Information et des Communications (STIC) et des Sciences de la Vie (SDV). Étant intervenu avant les récentes décisions sur le dégel de certains crédits gelés et également sans le rapport d'audit sur la recherche publique, Michel Lannoo ne s'est pas exprimé sur sa gestion future de la crise.

Jean-Luc Sauvageot est intervenu afin d'exprimer les fortes inquiétudes de la communauté dans ce contexte où, pour faire bref, le CNRS apparaît de plus en plus comme un sigle sur une coquille vide. Il s'est étonné de l'absence de réaction de la direction du CNRS (organisme de 24000 personnes), qui est ressentie par la communauté comme un désengagement.

Délégations et détachements

Après avoir expertisé les nombreuses demandes, la section a fait des propositions de détachements et de délégations à la direction scientifique en n'ayant absolument aucune idée sur les ressources humaines qui vont être allouées au département dans ce but. Nous souhaitons mentionner que cette situation sans précédent est non seulement anormale, mais préjudiciable au bon fonctionnement des universités.

Bien que tout ne soit pas encore décidé, il est probable que les délégations-détachements ne passeront plus dès l'année prochaine par le Comité National mais par des accords entre les universités et les directions scientifiques. Nous comprenons mal que le CNRS renonce de cette façon à une politique réussie d'échanges entre le CNRS et l'Université fondée sur une expertise scientifique nationale.

Les postes d'accueil du CNRS (postes rouges, délégations-détachements) sont en effet un élément essentiel de la politique du CNRS vis-à-vis des universités, et leur diminution annoncée est non seulement dommageable à cette politique, mais surtout aux rencontres et collaborations, souvent déterminantes dans la recherche en mathématiques.

Concours

Le concours s'est déroulé du 28 avril au 2 mai, il comprenait en fait 4 sous-concours : 11 chargés de recherche (CR2), 1 CR2 « Équations aux dérivées partielles » fléché sur Lille, 1 CR2 « Applications numériques de la mécanique des fluides » fléché sur un laboratoire de la section 10 (Mécanique) et 5 directeurs de recherche (DR2).

À ces concours se sont présentés respectivement 161 et 62 candidats ; pour les chargés de recherche, il s'agit d'une légère diminution par rapport à l'année précédente due à la moindre attractivité des concours fléchés, pour les directeurs de recherche, c'est le statu quo. Il est à noter que la part des candidatures féminines au concours CR est revenue à 15% (12% en 2001, 8% en 2002). Nous avons constaté que certains candidats au concours CR ont des publications issues de leur thèse, cosignées par leur directeur de thèse. Nous profitons de ce rapport de jury pour indiquer que cette pratique n'est pas celle de la communauté mathématique, où la thèse constitue le travail personnel du doctorant.

Une fois de plus, le jury a constaté le très haut niveau de ces deux concours.

CARNET

Huguette Delavault (1924–2003)

Huguette Delavault est décédée, le 2 avril 2003, à l'âge de 79 ans.

Sa disparition laisse un vide immense dans tous les organismes, associations et réseaux qui ont, ces dernières années, œuvré pour la parité et en particulier pour développer et améliorer la place et le rôle des femmes en sciences et en technologie. Elle a aussi profondément touché toutes celles et tous ceux qui ont travaillé, que ce soit dans le passé ou très récemment, avec Huguette Delavault.

Un hommage solennel lui a été rendu le 3 juin 2003 au siège de l'Association française des femmes diplômées des universités (Affdu) par ses camarades de promotion, par ses collègues, par ses amies et amis, par toutes celles et par tous ceux qui l'ont connue durant sa vie exemplaire, dans laquelle les activités scientifiques, pédagogiques et associatives, ainsi que la défense des intérêts des femmes, ont tenu une si large place.

Toutes les interventions lors de cet hommage ont mis en évidence l'extraordinaire capacité à mobiliser des équipes et des énergies d'Huguette. Elles ont aussi rappelé ses qualités d'exigence et de rigueur intellectuelle, sa générosité et sa sensibilité dissimulées par une grande réserve. Elles ont enfin fait l'éloge de son courage et de sa ténacité. Les textes des interventions et messages délivrés lors de cet hommage figureront dans le numéro 205 de la revue Diplômées éditée par l'Affdu.

Née à Andilly (Charente-Maritime) en 1924, fille d'un couple d'instituteurs, Huguette Delavault fut d'abord élève de l'école normale d'institutrices de La Rochelle de 1940 à 1943, puis de l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses de 1946 à 1949. Elle obtint l'agrégation de mathématiques en 1952, après une interruption d'études pour raison de santé.

Elle a soutenu son doctorat d'Etat ès sciences mathématiques à l'Université de Paris, le 30 novembre 1957, devant un jury composé de Messieurs Villat et Pérès et de Madame Dubreil. Le sujet de sa thèse était « Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques ». Cette thèse a été publiée intégralement [3] et a fait l'objet d'un article [4].

N'étant pas spécialiste du sujet, je ne retiendrai de cette thèse que deux choses : la dédicace faite à son directeur de thèse Henri Villat « qui à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, comme au CNRS, m'a éclairée et aidée de toute sa science, qui, pas à pas, a guidé mon travail avec une constante sollicitude, qui, peut-être même, a orienté ma vie en m'apprenant que la vraie culture ne consiste pas seulement à résoudre un problème de mathématiques, si difficile soit-il, mais encore à aimer la musique et la poésie, et tout ce qui honore l'esprit et le cœur de l'homme », où l'on devine déjà la générosité et l'ouverture d'esprit si caractéristiques d'Huguette ; et le fait que son domaine de recherche, la physique mathématique, lui a certainement donné, dès le début, son aptitude à travailler en relation avec des chercheurs d'autres disciplines, des physiciens à cette époque, des sociologues et des historiens ou des juristes plus tard.

Huguette Delavault fut d'abord chercheuse au CNRS de 1952 à 1958 ; durant cette période et les quelques années qui suivirent, elle réalisa l'essentiel de son oeuvre mathématique dont le dernier travail est un mémoire sur les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications.

Elle fut ensuite enseignante-chercheuse à la faculté des sciences de Rennes de 1958 à 1970. Elle s'y investit énormément dans l'enseignement des mathématiques ; elle rédigea un cours « Techniques Mathématiques de la Physique », d'une grande utilité pour les physiciens, prit la direction de l'IPES (Institut de préparation à l'enseignement secondaire), puis celle du Centre pédagogique régional pour les mathématiques et la physique, ce qui lui donna plus tard l'opportunité d'initier des projets de coopération avec l'Afrique. C'est encore à la faculté des sciences de Rennes qu'elle est nommée professeure des Universités en 1962.

Chargée dès 1969 d'une mission de coordination des actions de rénovation de l'enseignement des mathématiques en Afrique noire francophone et à Madagascar par le ministère de la Coopération, elle fut plus tard à l'origine d'une convention – entre l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses et l'Institut de mathématiques et de sciences physique (IMP) de l'Université de Ouagadougou (Haute-Volta / Burkina Faso) – qui permettait des échanges d'étudiants et d'enseignants. A ce titre elle effectua de nombreuses missions en Afrique et organisa maintes formations pour les enseignants africains et les coopérants. Elle gardera un profond attachement pour l'Afrique et suivra le devenir des contrats et projets jusqu'à la fin de ses jours.

Professeure à l'École nationale supérieure d'électronique et d'électromécanique de Caen jusqu'en 1984, Huguette Delavault fut, durant cette période, détachée (1976-1980) comme directrice adjointe de l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses.

C'est à cette époque que se confirma sa vocation à défendre la cause des femmes, notamment dans le domaine scientifique. Consciente du « plafond de verre » qui limite les carrières universitaires des femmes – elle alla même jusqu'à dire lors d'un colloque à Bruxelles en 1998 « J'ai été nommée professeur, peut-être parce que c'était une période d'expansion de l'enseignement supérieur et qu'il n'y avait pas assez d'hommes pour le nombre de postes ! »– elle vécut le drame du premier concours d'entrée mixte à l'Ecole normale supérieure de Fontenay-aux-Roses en 1981 : une seule femme est admise en mathématiques (sur dix admis), aucune ne l'est à l'École normale supérieure de Saint-Cloud. Ce désastre annoncé ne fut que la répétition de celui du premier concours mixte de l'agrégation de mathématiques en 1975.

Déjà impliquée dans des actions en faveur de la parité hommes-femmes, Huguette s'engagea alors dans la recherche sociologique pour essayer de comprendre les origines du problème et tenter de proposer des solutions pour y remédier.

Huguette Delavault participa activement aux réunions qui aboutirent à la création, en 1987, de l'association « femmes et mathématiques ». Ses activités au sein de cette association ne représentent qu'une partie de son engagement associatif.

Huguette fut d'abord secrétaire et trésorière, de 1973 à 1976, de l'Association des anciennes élèves de l'Ecole normale supérieure de Fontenay-aux-Roses, qu'elle présida ensuite de 1985 à 1988.

Elle adhéra à l'Association française des femmes diplômées des universités (Affdu) en 1977, entra au conseil d'administration en 1983, présida l'Affdu en 1984 et 1985, puis de 1988 à 1994. Huguette représenta l'Affdu dans le réseau d'associations Demain la parité, mis en place en 1994 par Françoise Gaspard et Colette Kreder afin de promouvoir une stratégie commune en matière d'égalité des chances dans la prise de décision.

En 2000, treize ans après avoir participé à la création de l'association Femmes et mathématiques, elle fut, avec Claudine Hermann, Françoise Gaspard, Colette Kreder, Françoise Cyrot-Lackmann, et l'association Femmes et mathématiques, membre fondatrice de l'association Femmes et sciences, dont les objectifs sont les suivants : renforcer la position des femmes exerçant des carrières scientifiques et techniques dans les secteurs publics et privés, promouvoir l'image des sciences chez les femmes et l'image des femmes dans les sciences et inciter les jeunes filles à s'engager dans les carrières scientifiques et techniques.

Depuis 1990, Huguette Delavault a réalisé par ses travaux, publications et conférences, une œuvre importante et novatrice de recherche scientifique en sociologie. Elle a notamment écrit en 2000, en collaboration, deux rapports commandés par Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur : l'un sur les femmes dans les filières de l'enseignement supérieur [g], l'autre sur les enseignantes-chercheuses à l'Université [h]. L'année 2002 vit l'achèvement de cette œuvre avec la publication du livre : Les Enseignantes-chercheuses à l'Université : demain la parité ?

La dernière des très nombreuses manifestations à l'organisation desquelles Huguette participa fut le colloque Cedaw (Convention sur l'élimination de toutes les formes de discrimination à l'égard des femmes), que l'Affdu organisa, le 15 mars 2002, à l'Assemblée nationale. Cette importante convention de l'ONU pourrait être un instrument juridique efficace pour défendre la cause des femmes.

Officière des Palmes académiques depuis 1967, Huguette Delavault fut nommée chevalière de la Légion d'honneur en 1995 et promue officière de l'ordre national du Mérite en 2002.

Huguette a été inhumée en Charente-Maritime, sa terre natale.

Une bourse scientifique à la mémoire d'Huguette Delavault a été créée. Elle est destinée à aider des étudiantes de niveau fin de thèse ou post-doctoral à réaliser un projet de recherche impliquant une mobilité de ou vers l'étranger. Les dons sont reçus par l'Affdu, 4 rue de Chevreuse, 75006 Paris.

Danielle Gondard-Cozette

Travaux de mathématiques :

[1] Delavault, Huguette, « Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications » (French), *Mémor. Sci. Math.*, fasc. 148, Paris, Gauthier-Villars, 1961, 95 p.
[2] Delavault, Huguette, « Détermination d'une fonction $F(t)$ dont on connaît la transformée de Laplace en une infinité de points. Application » (French), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 247 (1958), p. 1284-1287.
[3] Delavault, Huguette, « Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques » (French), préface de H. Villat, Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, n° 71, Paris, Tech. Ministère de l'Air, 1957, 99 p. Publication de la thése de Doctorat d'Etat, soutenue à l'Université de Paris le 30 novembre 1957 devant le jury suivant : Henri Villat, président, M. Pérès et Mme Dubreil examinateurs.
[4] Delavault, Huguette, « Sur la résolution des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques au moyen de transformations de Laplace et de transformations finies de Fourier et de Hankel » (French), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 244 (1957), p. 1146-1149.
[5] Delavault, Huguette, « Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace » (French), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237 (1953), p. 1067-1068.
[6] Delavault, Huguette, « Sur un problème de la théorie de la chaleur, et sa solution au moyen des transformations de Hankel » (French), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236 (1953), p. 2484-2486.

Principaux travaux de sociologie :

[a] Huguette Delavault, *Les femmes dans les cadres de l'enseignement supérieur et de la recherche*. Diplômées N°138, septembre 1986
[b] Huguette Delavault, *Vers la Parité dans les instances de décision. La place des filles dans une filière de formation des cadres. Du lycée aux grandes écoles scientifiques*, exemplaire multigraphié, Paris, Association française des femmes diplômées des universités et Demain la parité, 1997, 60 p.
`http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/lyceeauxgrandesecoles.pdf`
[c] Huguette Delavault, *Vers la Parité dans les instances de décision. La place des filles dans une filière de formation des cadres. Les grandes écoles scientifiques*, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 1998, 115 p. Mise à jour des données en 1999.
`http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/grandesecoles.htm`
[d] Huguette Delavault, *Femmes et sciences*, in Ch. III des actes du colloque, Bruxelles, 28-29 avril 1998, Annalisa Colosimo et Nicole Dewandre ed., publication de la Commission européenne, DG 12, Sciences recherche et développement, ISBN 9282857530.

http://www.cordis.lu/tser/src/1an_en.htm;
http://europa.eu.int/comm/research/press/1998/pr294en.html
[e] Huguette Delavault, *Comment les filles vont à la science ? Le difficile parcours des combattantes.* Revue de l'Office Universitaire de Recherche Socialiste (OURS), n° 9 décembre 1999.
[f] Huguette Delavault, *Sciences où sont les femmes ?* Diplômées, n°191, Décembre 1999, p. 221-225.
[g] Laurence Broze, Huguette Delavault, Julianne Unterberger, *Les Femmes dans les filières de l'enseignement supérieur*, rapport à Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur au ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 2000, 139 p.
http://www.education.gouv.fr/rapport/femsup/defaultb.htm
http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/pdfexposes/ffespdf.pdf
[h] Noria Boukhobza, Huguette Delavault, Claudine Hermann (avec la coll. de Françoise Cyrot-Lackmann), *Les Enseignants-chercheurs à l'Université : la place des femmes*, rapport à Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur au ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 2000, 95 p.
www.education.gouv.fr/rapport/femme/defaultb.htm;
http://www.ladocumentationfrancaise.fr/brp_pages/actu/recherche.shtml
[i] Huguette Delavault, Noria Boukhobza, Claudine Hermann (avec la coll. de Corinne Konrad), *Les Enseignantes-chercheuses à l'Université, Demain la parité ?*, préface de Françoise Gaspard, Paris, L'Harmattan, 2002, 193 p.

LIVRES

An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis
André Martinez
Springer-Verlag, 2002. 190 p. ISBN 0-387-95344-2. 69,95 €

Le livre d'André Martinez présente de manière agréable et efficace les techniques microlocales semi-classiques. Dans cette théorie, les objets considérés dépendent d'un petit paramètre $h \in]0,1]$, appelé paramètre semi-classique (ou constante de Planck par abus d'écriture), qui tend vers 0. Issue de la mécanique quantique, dont elle tire son nom, et de l'analyse microlocale, elle est utilisée tant comme outils en mathématiques que pour la résolution de problèmes physiques tels que la théorie de la diffusion, l'effet tunnel, l'approximation de Born–Oppenheimer pour deux particules de masse très différente, la physique statistique, l'approximation champ magnétique fort ...

La première partie du livre est consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques qui sont de la forme

$$\mathrm{Op}_h(p)u\ (x;h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi/h} p(x,y,\xi;h) u(y)\, dy\, d\xi,$$

pour u une distribution de classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En fait, cette théorie ne coïncide pas exactement avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques : par exemple, un opérateur est considéré comme négligeable s'il est régularisant dans le cas classique et s'il est petit lorsque $h \to 0$ dans le cas semi-classique. Après avoir étudié les espaces de symboles et rappelé quelques résultats sur les intégrales oscillantes, Martinez donne les propriétés usuelles des opérateurs pseudo-différentiels tels que les règles de composition ou la construction d'inverses approchés. Le théorème de Calderón–Vaillancourt et l'inégalité de Gårding sont ensuite démontrés. Comme dans le reste du livre, de nombreux exemples et remarques illustrent les résultats.

La deuxième partie de l'ouvrage traite de l'analyse microlocale analytique. L'auteur se sert d'une transformation de Fourier, Bros et Iagolnitzer (FBI) qui permet d'étudier une fonction à la fois dans les variables habituelles (en x) et après transformation de Fourier (en ξ). Cette technique puissante et flexible a été utilisée de manière intensive dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires, notamment par Sjöstrand [4], mais aussi pour des problèmes non linéaires, comme dans le livre de Delort [1] par exemple. En général, elle s'avère difficile et très technique, mais Martinez limite son étude à la transformation de Bargman qui est la transformation de FBI type. Grâce à cette astuce, l'auteur conserve les propriétés essentielles des transformations FBI mais en réduit considérablement les aspects techniques. Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cette transformation s'écrit

$$Tu\ (x,\xi;h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/2h} u(y)\, dy.$$

Après avoir démontré les propriétés standard de T, son action sur les opérateurs pseudo-différentiels et sur certains opérateurs intégraux de Fourier, il obtient des estimations exponentielles microlocales. Ces estimations lui permettent d'étudier, de façon limpide et originale, le microsupport des fonctions, la propagation des singularités et la microhyperbolicité.

Martinez termine son exposé par des éléments de géométrie simplectique tels que les transformations canoniques, les variétés lagrangiennes et le théorème d'Egorov. Un appendice reprend les formules les plus importantes du livre.

A la fin de chaque chapitre, l'auteur propose un nombre conséquent de petits problèmes très détaillés et bien choisis. Ils prolongent l'exposé en donnant des résultats complémentaires et en présentant des applications importantes de la théorie (calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudo-différentiel, théorie spectrale, estimations d'Agmon). Enfin d'autres exercices relient ces résultats aux autres branches des équations aux dérivées partielles (états cohérents, mesures semi-classiques).

En conclusion, cet ouvrage présente de manière originale, assez complète et surtout très claire les techniques pseudo-différentielles et microlocales en limite semi-classique. Il est donc particulièrement recommandé à tous ceux qui souhaitent aborder et comprendre cette théorie. Mais même les spécialistes du domaine en tireront, principalement dans sa seconde partie, des informations très utiles.

Références

[1] J.M. Delort, *F.B.I. transformation, second microlocalization and semi-linear caustics*, Springer, Lecture Notes in Math. **1522** (1992).
[2] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semiclassical limit*, Cambridge University Press, London Math. Soc. Lecture Notes Series **268** (1999).
[3] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Birkhäuser, Progress in Mathematics **68** (1987).
[4] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

Jean-François Bony, Université de Bordeaux I

L'enseignement des sciences mathématiques — La géométrie
sous la direction de J.-P. Kahane
Odile Jacob, 2002. 284 p. ISBN 2738111386. 22 €

Ce rapport accorde une grande place à la géométrie et c'est bien normal, car beaucoup de mathématiciens ont découvert les premiers aspects de la beauté des mathématiques au travers les bijoux enseignés au collège que sont les théorèmes de Pythagore et de Thalès, à ces résultats que l'on voit ou que l'on ne voit pas sur le dessin et qu'on redécouvre ou découvre grâce à un raisonnement logique s'appuyant sur quelques définitions et axiomes.

Ce rapport s'articule autour de plusieurs questions ; la première est « faut-il encore enseigner la géométrie au collège et au lycée aujourd'hui ? », la deuxième est d'analyser l'évolution de la géométrie enseignée à l'école, d'identifier la place de la géométrie élémentaire (celle enseignée jusqu'au lycée) dans les mathématiques d'aujourd'hui et les propositions que l'on peut faire au vu de cette analyse.

A la première question, les auteurs répondent par un vibrant plaidoyer pour la géométrie. Ils donnent plusieurs justifications :

– Pour appréhender l'espace, pour savoir lire une carte, pour évaluer l'échelle d'une carte, pour ne pas se perdre dans un bâtiment *(construit suivant les plans d'un architecte facétieux)*[1], il est utile d'avoir manipulé un minimum d'objets géométriques : savoir reproduire un croquis à une échelle donnée, savoir représenter le symétrique d'une figure par rapport à une droite, connaître quelques solides et certaines de leurs sections planes. Toutes ces activités aident les élèves à acquérir une vision de l'espace où ils vivent.

[1]Dans cette partie, mes remarques personnelles sont en italique

– La géométrie élémentaire est un excellent apprentissage du raisonnement. Et tout le monde s'accorde à dire combien il est crucial pour un citoyen de savoir raisonner, sans quoi il ne pourra participer à la vie démocratique *(au moins dans une société beaucoup plus ouverte, ce qui est loin d'être le cas aujourd'hui).* Mais de toute façon, il est fondamental que les scientifiques et les ingénieurs sachent raisonner. Certes la géométrie n'est pas la seule branche des mathématiques ni même des sciences qui est utile pour l'apprentissage du raisonnement, mais le raisonnement géométrique a une spécificité : on peut argumenter sur une figure et formaliser ensuite ce qu'on a décrit, c'est un mélange de logique pure et d'intuition. De plus la géométrie élémentaire est un bon aperçu des sciences mathématiques, elle n'est pas dépourvue d'esthétique (*au moins pour ceux qu'elle n'a pas rebutés*) et elle n'est pas dénuée de complexité, chacun peut faire l'expérience de sécher devant un exercice de géométrie élémentaire.

– Ce rapport souligne aussi que la géométrie élémentaire est présente en art moderne, en peinture, en architecture. Une partie de cette géométrie appartient à notre patrimoine culturel depuis très longtemps ; certaines règles ou outils géométriques sont très utiles : règle des 3-4-5 des charpentiers, splines en CAO, surfaces réglées pour les architectes bétons... Des objets géométriques apparaissent naturellement dans d'autres sciences (coniques dans l'étude du mouvement des planètes, réseaux dans l'étude des cristaux, polyèdres réguliers et certaines molécules).

– Enfin, la géométrie est une école de rigueur et de précision qui est fondamentale pour la formation des scientifiques et des ingénieurs. Et c'est pour cela qu'elle avait été introduite dans le cursus des futurs élèves et des élèves des grandes écoles.

Ensuite le rapport compare ce qui a été enseigné au collège et au lycée depuis 1966 : la période antérieure aux maths modernes, la période des maths modernes et enfin la période actuelle. Les auteurs sont visiblement émerveillés (*un peu de nostalgie ?*) par la richesse et la complexité de ce qui était enseigné en 1966 (des géométries non-euclidiennnes, le théorème de Feuerbach..). Il y aura toujours de nouveaux théorèmes de géométrie du triangle et du cercle, mais pour Bourbaki, la géométrie élémentaire était devenue une science morte. Car d'après le programme d'Erlangen de F. Klein et la théorie des invariants, on a un moyen mécanique, automatique de démontrer des théorèmes de géométrie élémentaire. Je vais maladroitement vous décrire cela et je vous invite à lire ce rapport pour un éclairage brillant, étayé d'exemples simples [2]. Selon F. Klein une géométrie est la donnée d'un groupe agissant sur un ensemble (espace affine, euclidien, projectif...) et la théorie des invariants nous permet de trouver (par exemple) les fonctions polynomiales invariantes par ce groupe. Ce sont en fait des fonctions polynomiales en certains invariants (angle, produit scalaire, aire, longueur...). On peut de plus trouver toutes les relations entre ces invariants et chacune de ces relations produit un théorème géométrique.

La réforme des maths modernes inspirée par Bourbaki a donc préféré mettre l'accent sur l'algèbre linéaire et les transformations (groupes). Cependant l'importance que la théorie donne aux invariants avait été négligée, d'ailleurs les programmes actuels minorent encore leur importance.

Basés sur cette brillante étude, les auteurs proposent :

– de développer la géométrie dans l'espace (étude des polyèdres, formule d'Euler, aire des triangles sphériques...).

– renforcer le rôle des invariants et réhabiliter le cas d'égalité (isométrie) des triangles.

– insister sur l'étude et la construction de lieux géométriques.

[2]On peut regretter que l'éditeur ait sabordé la bibliographie

– initier les élèves de terminale S à une géométrie riche (par exemple la géométrie anallagmatique associée au groupe $PGL_2(\mathbf{C})$ agissant sur la sphère de Riemann) pour confronter les élèves à une réelle complexité.

Pour mener cela à bien, il faudra développer la pensée géométrique, par exemple définir l'intégrale comme une aire, apprendre aux élèves à voir dans l'espace avec des outils informatiques ou avec des ciseaux et du carton pour construire des polyèdres, apprendre aux élèves à raisonner. Et surtout pour arriver à mettre en œuvre ces propositions, il faudra développer la formation initiale et continue en géométrie des enseignants de mathématiques, en commençant par exemple par réintroduire de la géométrie en DEUG *(où on se focalise énormément sur l'algèbre linéaire routinière).*

Les auteurs ont fait une analyse scientifique très intéréssante des programmes de mathématiques et de leurs évolutions. Je ne suis pas compétent pour évaluer s'il faut renforcer le rôle des invariants, réhabiliter le cas d'égalité (isométrie) des triangles. . ., mais leurs arguments me semblent justes.

Il me semble néanmoins que ce rapport a plusieurs défauts, dont un au moins est inhérent à la mission de la commission Kahane. Ce rapport est en quelque sorte une réponse aux attaques proférées à l'encontre des mathématiques et à l'inquiétude face à la faiblesse des programmes et des manuels de mathématiques. Ces manuels où les théorèmes n'avaient pas de démonstration, ni même la mention « admis », ne faisaient pas clairement la distinction entre une définition et un théorème. Et pour beaucoup d'élèves de collège et de lycée, les maths pouvaient réellement devenir une matière où l'on répète des exercices de style sans queue ni tête. Avec de tels programmes et des exigences si faibles, les mathématiques ne finiraient-elles pas par connaître le même sort que le latin et grec d'autrefois ?

Cette commission avait des limites implicites fixées par les ministres. Elle ne devait pas parler du volume horaire, ni d'une réforme du collège unique, ni des 80% d'une classe d'age au bac... Bref elle ne devait pas critiquer la politique de l'Éducation nationale. Pourtant il suffit de lire le programme de terminale S, pour se rendre compte qu'il est impossible d l'enseigner décemment en 5h par semaine. Et il faut aux enseignants beaucoup de virtuosité pour trouver le temps de faire des démonstrations, d'exhiber des contre-exemples qui montrent la justesse des hypothèses, d'ailleurs pour certains inspecteurs ces contre exemples et démonstrations sont inutiles. Je pense que la commission aurait dû se pencher un peu sur ce problème, il faut avoir le courage de dire qu'avec 5 heures par semaine il faut réellement alléger le programme et pas comme on l'a fait jusqu'alors en allégeant les exigences, les démonstrations, mais en supprimant réellement certaines parties du programme ; par exemple les nombres complexes de terminale S ne servent qu'à étudier les similitudes et on ne s'en sert pas pour résoudre les équations du second degré... Ce problème de l'inadéquation entre la rigueur nécessaire à l'enseignement des mathématiques et le volume horaire est un exemple parmi d'autres qui fait qu'à mon avis la faiblesse des étudiants en mathématiques n'est pas seulement le fait du programme mais (peut-être surtout) d'un manque de moyens horaires et donc humains. La commission a pointé le manque de moyens matériels dédiés à l'enseignement des mathématiques et a proposé la création de véritables laboratoires de sciences mathématiques dotés de moyens comparables à ceux de physique et c'est là une très bonne proposition.

Les attaques contre les mathématiques ont (paraît-il) été proferées à l'encontre du conservatisme et du corporatisme des mathématiciens et donc cette commission n'avait pas le droit d'apparaître comme éloignée des réalités du collège et du lycée. Cependant dans cette commission, il n'y a pas de professeur de collège (et a fortiori de professeur des écoles). Certaines propositions des rapporteurs sur la géométrie sont très ambitieuses, audacieuses mais irréalisables et irréalistes voire dangereuses.

Beaucoup d'enseignants de collèges et de lycée restent dubitatifs ... Combien d'enseignants d'université sont capables d'expliquer sans préparation la classification des polyèdres réguliers, combien peuvent prétendre connaître la géométrie anallagmatique, sans doute très peu et pas moi en tout cas, même si je trouve qu'il s'agit là de belles maths. Enfin, je ne pense pas que j'aurais été capable de comprendre cela au lycée.

Un autre point corporatiste est la proposition « [d']établir le principe d'un crédit de formation que tous les professeurs pourraient utiliser au cours de leur carrière (pour les professeurs de spéciales, ce crédit formation pourrait prendre la forme d'une année sabbatique, avec affectation dans une université ou un centre de recherche de façon à assurer leur cohérence avec l'enseignement supérieur). » Je suis plutôt pour la partie de la proposition qui n'est pas entre parenthèses. Je pense que la proposition entre parenthèses est soit cynique (seuls les étudiants de classe prépa peuvent réussir en second cycle universitaire, et l'enseignement supérieur commencerait en second cycle), c'est faire d'une réalité malheureuse un projet éducatif. Soit corportatiste (les professeurs de spéciales sont des professeurs qui jouissent déjà de beaucoup d'avantages et leurs cours s'arrêtent fin avril), et que je sache, on en compte très peu qui au printemps viennent peupler les IREM et salle de séminaires.

J'ai dit ce qui m'irritait dans ce rapport et je vais finir par ce qui me plaît. Mon opinion alors pas très étayée était qu'il fallait continuer à enseigner la géométrie et j'adhère complètement au plaidoyer pour la géométrie dont la première vertu pédagogique est d'être le moyen d'un apprentissage à la rigueur et au raisonnement. Aussi, ce rapport n'est pas fermé, on sent à la lecture de la conclusion (« les termes des débats ») qu'il y a encore un travail considérable à faire et que cette conclusion et les propositions qui y sont faites feront avancer la réflexion et nourriront les prochains programmes. On sent d'ailleurs dans le nouveau programme de terminale S un retour à des définitions de limites de suites et de continuités de fonctions, et de théorèmes que l'on prouve avec ces définitions. Peut-être le pire est-il derrière nous !

Gilles Carron, Université de Nantes

Diophantine Geometry. An introduction
Marc Hindry, Joseph Silverman
Graduate Texts in Mathematics **201**, Springer-Verlag, 2000. 558 p. 35,82 €.
ISBN 0-387-98981-1

La géométrie diophantienne se donne pour but d'étudier les solutions d'équations polynomiales en nombres entiers ou rationnels avec les méthodes que fournissent la théorie algébrique des nombres et la géométrie algébrique. Ce livre en propose un certain point de vue (celui de l'approximation diophantienne) et culmine avec la démonstration de la conjecture de Mordell (1922) : *une courbe de genre au moins deux n'a qu'un nombre fini de points rationnels.* Dit plus élémentairement, considérons un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X, Y, Z]$, homogène de degré d, tel que la courbe projective plane définie par P dans $\mathbf{CP}^2$ ait r points doubles et aucune singularité d'ordre supérieur ; supposons que $r \leqslant \frac{1}{2}(d-1)(d-2)-2$. Alors, l'équation $P(x, y, z) = 0$ n'a, à homothétie près, qu'un nombre fini de solutions en nombres rationnels.

Ce théorème, dû à Faltings (1983), fait l'objet de la cinquième partie du livre de Hindry et Silverman où est présentée la démonstration de Vojta, simplifiée par Bombieri (1990). En fait, la première démonstration de Faltings, de même que la démonstration par Wiles du « dernier théorème de Fermat », sort techniquement un peu du cadre de l'approximation diophantienne : dans ce livre, il n'est quasiment pas question de représentations galoisiennes ou de formes modulaires.

Même si l'approximation diophantienne peut être d'une sophistication calculatoire voire conceptuelle redoutable, les idées mises en œuvre proviennent très souvent de quelques idées très simples comme le fait qu'un entier non nul est de valeur absolue au moins 1. C'est ce qui fait fonctionner la méthode de « descente infinie » popularisée par Fermat (mais la démonstration antique que $\sqrt{2}$ est irrationnel en est un parfait exemple). C'est aussi ce qui empêche un nombre algébrique d'être trop bien approché par un nombre rationnel.

Il revient à Dirichlet d'avoir prouvé que pour tout irrationel α, il existe une infinité de fractions irréductibles p/q avec $|\alpha - p/q| < 1/q^2$. Liouville (1844) a démontré que si α irrationnel est solution d'une équation polynomiale de degré d à coefficients entiers, on a une inégalité dans l'autre sens : pour p et q premiers entre eux, $|\alpha - p/q| \geqslant c/q^d$, où $c > 0$ est un réel explicite dépendant de α. (Cela lui a permis d'exhiber les premiers nombres transcendants explicites.) Le théorème optimal est dû à Roth (1955), et fait suite à des travaux de Thue (1909), Siegel (1921), Gelfand, Dyson (1947). Il affirme l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un réel $c(\varepsilon) > 0$ de sorte que pour tout rationnel p/q, on ait l'inégalité $|\alpha - p/q| \geqslant c(\varepsilon)/q^{2+\varepsilon}$.

Ce théorème de Roth fait l'objet de la partie D du livre de Hindry et Silverman. Son importance vient de ce qu'il permet de décider de la finitude d'un grand nombre d'équations diophantiennes en nombres entiers. On peut en déduire le théorème de Siegel dont un cas particulier s'énonce ainsi : *si $P \in \mathbf{Z}[X]$ est un polynôme à coefficients entiers de degré au moins 3 et à racines distinctes, l'équation $Y^m = P(X)$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbf{Z}$.* Cependant, par une limitation fondamentale du raisonnement par l'absurde qui débute la démonstration, la constante $c(\varepsilon)$ n'est pas connue effectivement, si bien que dans la pratique, on ne peut pas obtenir par cette méthode une majoration de la norme d'une solution $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$. Les « minorations de formes linéaires en logarithmes » que fournit la méthode de Baker (1966) sont en revanche effectives et permettent de majorer la norme d'une solution d'une telle équation. (Pour le théorème de Siegel général, la question est encore ouverte.)

La démonstration par Bombieri de la conjecture de Mordell repose sur un autre théorème de finitude fondamental en géométrie arithmétique que je veux expliquer maintenant. Si le cas des courbes de genre $\geqslant 2$ ne fut élucidé qu'à la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle, Mordell établit en 1922 un thèorème de structure fondamental concernant les points rationnels des courbes elliptiques, qui sont de genre 1. Une telle courbe a une équation de la forme $Y^2 = X^3 + aX + b$, donc de degré 3. Ainsi, une droite du plan coupe la courbe elliptique en 3 points (éventuellement confondus, ou à l'infini) ; on en déduit un mécanisme de construction de points « par sécante ou tangente » : la droite passant par deux points coupe la cubique en un troisième. Cela fournit une loi de groupe commutatif canonique sur l'ensemble des points rationnels de la courbe elliptique, dont l'élément neutre est le point à l'infini, c'est-à-dire sur l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ tels que $y^2 = x^3 + ax + b$ auquel on rajoute le point à l'infini. Le théorème de Mordell affirme que ce groupe est un groupe abélien de type fini. Il a été généralisé par Weil (1928) au cas des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et, plus important, au cas des variétés abéliennes.

Le cas des variétés jacobiennes est crucial et on peut le décrire en termes de courbes. Si $\mathcal{C}$ est une courbe projective lisse, disons sur le corps des rationnels, on peut considérer les diviseurs sur $\mathcal{C}$. Ce sont les combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers de points de $\mathcal{C}$; il faut considérer non seulement des points rationnels, mais aussi la somme des conjugués de points dont les coordonnées appartiennent à des extensions algébriques. Le degré d'un diviseur est la somme des coefficients. Parmi les diviseurs de degré 0 figurent les diviseurs de fonctions rationnelles (la somme des zéros moins la somme des pôles). Le théorème de Mordell–Weil affirme que le groupe des diviseurs de degré 0 modulo le sous-groupe des diviseurs de fonctions rationnelles est un groupe abélien de type fini.

Voilà les théorèmes auxquels ce livre est consacré et détaillons-en un peu le plan. Il se divise en une cinquantaine de chapitres, répartis en 6 parties. La partie A est un long survol (160 p.) des résultats de géométrie algébrique mis en jeu à un moment ou à un autre du livre : il y est essentiellement question de courbes, de variétés abéliennes et de la jacobienne. Les théorèmes ne sont le plus souvent pas démontrés mais il y a de nombreux renvois précis à la littérature ; certains résultats comme la construction de la jacobienne sont assez longuement expliqués.

La partie B introduit la notion de *hauteur* : c'est ce qui mesure la taille d'une solution d'un système d'équations polynomiales ou, plus géométriquement, d'un point algébrique d'une variété algébrique projective. Le point de vue adopté part de la description explicite de la hauteur sur l'espace projectif puis détaille son comportement par changement de repère projectif, morphisme, en particulier Veronese, etc. Le point de vue plus moderne que permet la géométrie d'Arakelov est évoqué en quelques pages. On y trouvera aussi l'inégalité de Mumford, point de départ aux preuves de la conjecture de Mordell qu'ont données Vojta et Bombieri.

La partie C est consacrée au théorème de Mordell–Weil. Classiquement, la démonstration est séparée en deux parties. Au cœur de la première (dite « Mordell–Weil faible ») figurent des théorèmes de théorie algébrique des nombres, dûs à Hermite et Minkowski ; ils sont démontrés en appendice. La seconde partie de la démonstration repose sur un argument de descente qui fait usage de la théorie des hauteurs.

La partie D démontre le théorème de Roth et ses applications à certaines équations en nombres entiers (théorème de Siegel, équation $x + y = 1$ en S-unités, etc.). La partie E donne la preuve de la conjecture de Mordell proposée par Bombieri.

Enfin, une dernière partie décrit, sans prétendre les démontrer, des travaux plus avancés tels que la démonstration par Faltings d'une généralisation de la conjecture de Mordell qu'avait énoncée Lang. Cette preuve est d'ailleurs inspirée de l'approche de Vojta. On y trouvera aussi une agréable présentation d'un réseau de conjectures et de résultats, initiés par Batyrev et Manin, visant à comprendre le comportement (nombre, répartition) des points de hauteur $\leqslant B$, lorsque B tend vers l'infini.

Ce livre contient aussi de nombreux exercices. Certains sont de pure routine, d'autres sont de jolis théorèmes pas forcément élémentaires. Une longue table des notations et un index de près de 30 pages closent un livre qui propose ainsi un parcours accessible et détaillé à travers un grand nombre de résultats cruciaux et difficiles de la géométrie arithmétique du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Une note un peu négative pour finir. Dans ce livre, Hindry et Silverman ont pris le parti d'un exposé le plus élémentaire possible, essayant de supposer du lecteur le moins de connaissances préliminaires possibles. Les longs rappels de géométrie algébrique de la partie A, même s'ils sont plutôt bien faits et seront sûrement utiles aux lecteurs de ce livre, ne permettront à mon avis pas à un étudiant, disons en thèse, l'économie d'un apprentissage indépendant de la théorie des courbes et des variétés abéliennes. De même, j'aurais bien aimé qu'un point de vue moderne soit plus systématiquement employé. C'est le cas pour la démonstration du théorème de Chevalley–Weil proposée en exercice. Il aurait aussi été possible de présenter entièrement la théorie des hauteurs via la théorie d'Arakelov. Certes, tout ceci nécessite le langage des schémas, notamment sur $\mathbf{Z}$, mais les travaux futurs en géométrie arithmétique pourront-ils réellement s'en passer ?

C'est un travail immense que les auteurs de ce livre ont accompli, offrant à quiconque intéressé par ces développements majeurs de la géométrie diophantienne la possibilité d'en pénétrer les arcanes. Il s'insérera avec profit dans toute bibliothèque, par exemple à côté des livres de Silverman sur les courbes elliptiques !

Antoine Chambert-Loir, École polytechnique

Spectral Methods of Automorphic Forms, Second Edition
Henryk Iwaniec
Graduate Studies in Mathematics, Volume 53, American Mathematical Society, Revista Matemática Iberoamericana, 2002. 220 p. ISBN 0-8218-3160-7. 49 \$.

Pour obtenir une forme automorphe, on commence par fabriquer une variété riemannienne G/K à l'aide d'un groupe de Lie G et d'un sous-groupe K fermé dans G. On fait agir là dessus, discrètement, un groupe Γ. Une *fonction* automorphe est une fonction sur G/K invariante par l'action de Γ. C'est une *forme* automorphe si, en plus, elle est vecteur propre de tous les opérateurs différentiels invariants par G.

Dans le présent ouvrage, Iwaniec considère le cas relativement simple où $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. La variété G/K est alors isomorphe au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ muni de la métrique hyperbolique fournie par

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et tous les opérateurs différentiels invariants par G sont des polynômes à coefficients constants de l'opérateur de Laplace

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Le groupe Γ est un groupe fuchsien de première espèce, dont l'exemple le plus courant est le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Parmi ceux-ci, les sous-groupes dits « de congruence » sont particulièrement intéressants car ils permettent de considérer les opérateurs de Hecke qui constituent un outil puissant en théorie des nombres. On note F un domaine fondamental de Γ dans $\mathbb{H}$, c'est-à-dire, approximativement, un domaine de $\mathbb{H}$ qui est un système de représentants de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Il peut avoir ce qu'on appelle des « pointes », dans la direction $\operatorname{Im} z = \infty$ ou sur le bord réel de $\mathbb{H}$. Une fonction automorphe admet un développement de Fourier au voisinage de chaque pointe.

Ces objets sont présentés dans les deux premiers chapitres. Ensuite, on s'intéresse à l'espace de Hilbert des fonctions automorphes de carré intégrable :

$$\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \left\{ f \,:\, \Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad | \quad \int_F |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_F f(z)\bar{g}(z)d\mu(z)$$

qui est stable sous l'action de Δ, et on étudie la décomposition spectrale de Δ dans $\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. On démontre que $\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est la somme orthogonale de la complétion hilbertienne de deux sous-espaces stabilisés par Δ :

$$\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \oplus \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

$\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est l'ensemble des fonctions cuspidales, c'est-à-dire les fonctions automorphes pour lesquelles le terme constant du développement de Fourier est nul en chaque pointe de F. Le spectre de Δ sur cet espace est discret.

$\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est un ensemble de fonctions qu'on appelle les « séries d'Eisenstein tronquées ». Il se décompose lui-même en une somme orthogonale de sous espaces stabilisés par Δ :

$$\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \mathcal{R}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des pointes de F. Le spectre de Δ dans $\mathcal{R}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est discret et contenu dans $[0, \frac{1}{4}[$. Le spectre de Δ sur $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est absolument continu et décrit uniformément le segment $[\frac{1}{4}, \infty[$ avec multiplicité un.

Nous arrivons alors au chapitre 8, où l'on majore les coefficients de Fourier des formes automorphes. Ces considérations techniques seront utiles dans la suite du livre, pour vérifier la congruence de diverses séries. Dans le cas où Γ est un groupe de congruence, on peut améliorer les majorations déjà obtenues en utilisant les opérateurs de Hecke. Le chapitre 9 nous initie aux sommes de Kloosterman.

Au chapitre 10, on démontre la formule des traces de Selberg. C'est une application de ce qui précède dans la mesure où l'on commence par réaliser la décomposition spectrale d'un certain opérateur. En parallèle, on définit la fonction zêta de Selberg associée à Γ, on la prolonge et on compte ses zéros et ses pôles.

Les trois derniers chapitres décrivent des problèmes en pleine évolution et donnent quelques exemples de l'état de la recherche en la matière.

Au chapitre 11, en appliquant la formule des traces, on évalue le nombre de valeurs propres du Laplacien qui sont inférieures à un réel T. On discute ensuite de l'existence et de la répartition, dans le spectre discret, de valeurs propres comprises entre 0 et $\frac{1}{4}$, qui sont malvenues car elles perturbent les résultats.

Au chapitre 12, on considère un domaine D de $\mathbb{H}$ et on compte le nombre de points d'une orbite donnée de Γ qui se trouvent dans D. C'est encore une application de la décomposition spectrale.

Le chapitre 13 enfin, est consacré à une question qui passionne les physiciens : dans le cas où Γ est un sous-groupe de congruence, on considère un système orthonormé $\{u_j(z)\}$ de fonctions cuspidales qui sont à la fois des vecteurs propres du Laplacien, associées la valeur propre λ_i, et des vecteurs propres des opérateurs de Hecke, et on majore $|u_j|$ en fonction de $|\lambda_j|$ lorsque $|\lambda_j|$ tend vers ∞. Curieusement, on obtient plus facilement une majoration en moyenne qu'une majoration individuelle. Ce phénomène est dû au fait que l'on dispose d'une formule des traces. On décrit alors une méthode d'amplification qui permet de raffiner ces majorations, et on termine en décrivant la conjecture ergodique.

Comme Iwaniec le dit lui-même dans la préface, ce livre n'a pas la prétention d'être exhaustif sur le sujet, sans quoi il serait devenu désagréablement gros. Pour la même raison, Iwaniec ne fournit pas toujours tous les détails des démonstrations, « détails » qui ne sont parfois pas évidents à reconstituer, mais il indique les références permettant au lecteur perplexe de remonter à la source.

L'ensemble constitue un ouvrage très intéressant et bien structuré. Il commence par des considérations assez simples et débouche sur des problèmes ouverts très actuels. Il s'agit donc d'une bonne passerelle vers la recherche pour toute personne qui voudrait s'initier à la théorie analytique des nombres.

Louise Nyssen, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1)

Les publications de l'Académie royale des sciences de Paris (1666-1793)
R. Halleux, J. Mc Clellan, D. Berariu, G. Xhayet, éd.
2 tomes, coll. de travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences « De diversis artibus » dir. par Emmanuel Poulle et Robert Halleux, Turnhout : Brepols, 2001.

Ce livre constitue un précieux outil de travail pour tous les chercheurs qui s'intéressent à la science académique des XVII^e et XVIII^e siècles. Il se présente en deux volumes, dont le premier est consacré à la description bibliographique (en 556 pages) des ouvrages publiés par l'Académie royale des sciences et des mémoires qu'ils contiennent. Le second comprend une étude quantitative par James Mc Clellan ainsi que les index des auteurs, des personnages cités dans les titres et des sujets traités. Cette publication est l'aboutissement d'un projet, déjà ancien, mis en œuvre sous la direction de René Taton au Centre Alexandre Koyré. Elle a aussi bénéficié de la recherche menée naguère par Anne-Sylvie Guénoun[3], dont les classifications ont été utilisées pour la description bibliographique des publications de l'Académie.

Chronologiquement, les auteurs distinguent deux périodes : celle de l'« Ancienne Académie », antérieure à la réforme des statuts de 1699 ; celle allant de 1699 à 1793, date de la suppression de l'Académie, caractérisée par l'existence de collections déjà répertoriées.

Le mathématicien trouvera, dans la première partie, une description bibliographique complète de recueils rares, comme *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693), contenant les travaux de mathématiciens aussi prestigieux que Frénicle, Roberval, Huygens ou La Hire. Il sera ravi d'avoir sous la main la description de l'ouvrage que Thévenot a tiré des manuscrits de la bibliothèque du roi et intitulé *Veterum mathematicorum ... opera* (1693) ou encore les *Observations physiques et mathématiques* (1688 et 1692) effectuées en Asie par les Jésuites émissaires de Louis XIV. On y trouve également des publications qui préfigurent les futurs *Histoire et Mémoires,* comme celles de Jean-Baptiste Du Hamel portant sur les activités quasi journalières au sein de l'Académie ou les volumes de mémoires tirés des registres de l'Académie (1692 et 1693). En effet, si la discrétion semble avoir été de rigueur dans les premières décennies de son existence, l'Académie commence à partir de 1690 à donner une certaine publicité à ses travaux.

La deuxième partie, consacrée aux publications du XVIII^e siècle, est subdivisée en 8 sections dont celle présentant la série des *Histoire et mémoires de l'Académie royale des sciences* (1699-1790) est de loin la plus volumineuse puisqu'elle décrit 3405 mémoires rassemblés en 93 volumes. Seule l'édition originale a été prise en compte, alors que l'histoire éditoriale de cette série est extrêmement compliquée. Il existe des éditions ultérieures, y compris étrangères (imprimées à La Haye ou à Amsterdam). De façon générale, il n'est pas facile de s'y retrouver. La salle des catalogues de la Bibliothèque nationale de France, tient à la disposition de ses lecteurs un fascicule (tapuscrit) mettant de l'ordre dans les diverses éditions de cette série.

En 1727, l'Académie des sciences a pris la décision de rendre publics certains de ses travaux menés avant l'instauration de la série dite *Histoire et mémoires* et a fait paraître, de 1729 à 1734, onze tomes en quatorze volumes. L'inventaire de ces volumes, dont le contenu, hétéroclite, va de l'histoire de l'Académie (tomes I et II) à la reproduction de près d'une centaine d'articles du Journal des savants (tome X), est

[3]Cette recherche a été publiée dans le très utile guide des Archives de l'Académie : *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences.* Guide de recherches, sous la direction d'Eric Brian et de Christiane Demeulenaere- Douyère, Paris : Lavoisier. Tec&doc, 1996.

bien sûr précieux, comme aussi celui d'un certain nombre de volumes indépendants (on en compte 19 sans que la liste soit complète), approuvés par l'Académie et imprimés sur les presses de l'Imprimerie royale au format de la collection *Histoire et mémoires.* Les problèmes bibliographiques posés par ce dernier ensemble sont considérables et ne sont pas tous résolus dans le volume sous examen.

Quatre autres séries de publications sont décrites en détail : les recueils des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie (9 volumes couvrant la période 1720 à 1772) ; les *Machines et inventions* approuvées par l'Académie (7 volumes couvrant la période de 1666 à 1754) ; les *Mémoires* dits des « savants étrangers » (11 volumes, publiés entre 1750 et 1786, réunissant les mémoires présentés en séance par des auteurs n'appartenant pas à la Compagnie) et finalement la fameuse *Description des arts et métiers,* dont l'idée remonte à Colbert et dont l'histoire éditoriale est d'une grande complexité (et non élucidée ici). Si la série *Histoire et mémoires* était réservée aux travaux des académiciens, ces dernières collections étaient plus ouvertes et on trouve parmi les auteurs beaucoup de membres de sociétés savantes de province ou du public cultivé, mais aussi des artisans et inventeurs dont les noms ne nous disent plus grand'chose.

James Mc Clellan a inclus dans le second tome (t. 2, p. 7-36) une étude statistique des *Mémoires annuels de l'Académie royale des sciences,* mettant en œuvre une approche globale de la production de cette institution scientifique prestigieuse. Pour lui, il s'agit de : « the most significant corpus of scientific research produced in the period » (p. 7). Excepté quatre, les mémoires de ce corpus sont écrits en français. Sur les 713 académiciens que comptait l'institution de 1699 à 1790, 253, c'est-à-dire un peu plus d'un tiers, ont publié dans les *Mémoires.* Or, 55% des académiciens sont des correspondants non résidants à Paris. Lorsqu'on les exclut, le pourcentage d'académiciens ayant publié dans les Mémoires monte à 71%. L'analyse statistique montre que le périodique est dominé par un noyau de pensionnaires qui l'utilisent pour diffuser les résultats de leur recherche. Jacques Cassini avec 149 mémoires, Philippe de la Hire avec 148 et Jérôme de Lalande avec 133 mémoires publiés sont les auteurs les plus prolifiques. McClellan a mis en évidence l'existence de 17 dynasties familiales (dont les Cassini), composées de 44 individus, responsables pour un tiers de toutes les publications.

Lorsqu'on classe les mémoires par disciplines, en suivant le classement contemporain effectué par les secrétaires de l'Académie, on constate une forte prédominance de l'astronomie (plus d'un tiers), les mathématiques ne représentant que 8,7%. Le tableau change si l'on regroupe les disciplines en deux classes, celle des sciences physiques (regroupant depuis 1699 l'anatomie, la botanique et la chimie) et celle des sciences mathématiques (comprenant la géométrie, l'astronomie et la mécanique). Ces dernières représentent alors 71% des mémoires. De manière générale, la productivité de l'Académie connaît une baisse sensible entre 1710 et 1730. Pour les mathématiques, après un pic au début des années 1730, elles déclinent jusqu'à devenir pratiquement invisibles dans les années 1750 et 1760. À partir de 1765, le nombre de mémoires de mathématiques commence à croître et reste relativement élevé jusqu'à la fin de la période considérée. Aucun effort n'est fait pour expliquer ces variations.

Cet outil de recherche, dont la présence dans les bibliothèques est indispensable, vient un peu tard, si l'on considère que la collection complète d'*Histoire et Mémoires* est accessible en ligne. Il rendra cependant des services non négligeables pour les autres collections, moins bien constituées et répertoriées. Avec le guide des archives déjà mentionné, nous disposons ainsi d'instruments valables rendant les collections manuscrites et publiées de l'Académie royale des sciences aisément accessibles.

Jeanne Peiffer, CNRS, Centre Alexandre Koyré, Paris

Floer homology groups in Yang-Mills theory
S. K. DONALDSON
Cambridge University Press, 2002. 244 p. ISBN 0521808030. 67,24 €.

L'homologie de Floer (dans sa version Yang-Mills ou de Donaldson-Floer, la seule dont on parlera ici) associe des « groupes d'homologie » $HF_*(Y^3)$ aux variétés de dimension 3. Or, depuis les années 80, une abondance d'invariants topologiques dans cette dimension ont été mis en évidence, comme par exemple les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev, ou le volume hyperbolique. Parmi eux, la construction de Floer a cette specificité d'être liée à la topologie en quatre dimensions.

Du point de vue de la géométrie différentielle, l'idée de base est assez simple. Le point de départ est une des équations célèbres de la théorie de jauge sur une variété X^4 ; pour la théorie de Donaldson-Floer, ce sera l'équation d'antiautodualité

$$F_{\mathbf{A}} = - *_X F_{\mathbf{A}}, \tag{1}$$

où $\mathbf{A}$ est une connexion sur un fibré donné, dont le groupe structural est $SU(2)$ ou $SO(3)$ (en principe, tout autre groupe de Lie compact semi-simple pourrait être utilisé, mais la théorie devient alors beaucoup moins maniable, et elle n'est que peu développée). Pour utiliser cette équation dans la topologie en 3 dimensions, on pose $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$. Seules les solutions de (1) d'énergie finie,

$$E(\mathbf{A}) = \int_X |F_{\mathbf{A}}|^2 < \infty, \tag{2}$$

sont retenues. Dans le cas des variétés X^4 compactes, la théorie de Donaldson décrit la structure de l'espace de modules de toutes les solutions de (1), en s'appuyant sur des résultats d'analyse de Uhlenbeck et Taubes. Le projet naturel est de généraliser cette description au cas des variétés non compactes $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$. On peut aussi également admettre n'importe quelle autre variété avec le même type de structure de produit $\mathbb{R}^+ \times Y^3$ à l'infini (du point de vue topologique, c'est pratiquement la même chose que les variétés compactes à bord). Même dans le cas compact, cette situation apparaît comme cas limite : l'exemple typique est le théorème de Donaldson sur les sommes connexes $X = X_1 \# X_2$, dont la démonstration repose sur l'utilisation des métriques riemanniennes sur X admettant un plongement (isométrique ou conforme) de $[-R; R] \times S^3$, avec $R \gg 0$.

Revenons au cas initial de $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$: il convient de transformer les connexions antiautoduales $\mathbf{A}$ en « jauge temporelle ». Elles sont alors données par une famille de connexions A_t sur Y. Pour $E(\mathbf{A}) = 0$, la famille est constante, et toute connexion A_t est plate. Le lien avec le groupe fondamental de Y qui s'établit ainsi est assez peu utilisé dans le développement de la théorie elle-même, mais il s'avère néanmoins important dans les applications topologiques. Les autres solutions, avec $E(\mathbf{A}) > 0$, sont les véritables instantons. Ce sont aussi les orbites du gradient de la fonctionnelle de Chern-Simons,

$$\theta(A_t) = \int_Y Tr(A_t \wedge dA_t + \tfrac{2}{3} A_t \wedge A_t \wedge A_t),$$

dont les connexions plates sont les points critiques. Cela explique que la théorie de Floer soit calquée sur le modèle de la théorie de Morse en dimension finie. En particulier, les invariants topologiques qu'on obtiendra ne seront plus des « nombres d'intersection » comme le sont les invariants de Donaldson, mais plutôt des « groupes d'homologie » $HF_*(Y)$. Le premier article de Floer sur le sujet [6] était consacré à la définition de ces groupes pour les variétés avec $H_1(Y) = 0$. Plus tard, il en avait introduit une version modifiée, pour les variétés avec $H_1(Y) \neq 0$, qui utilise des fibrés $SO(3)$ dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney satisfait $\langle w_2(P), [S]\rangle \neq 0$ pour au moins une surface orientée S dans Y.

Une autre approche de l'homologie de Floer passe par sa structure formelle idéalisée. Le cadre naturel serait alors la définition d'une théorie quantique des champs topologique (TQCT) selon Atiyah [1]. Si on suppose que les invariants de Donaldson font partie d'une TQCT (ce qui est fortement motivé par la physique), il doit leur être adjoints nécéssairement des invariants topologiques $\mathcal{H}(Y^3)$ en dimension 3, qui sont des espaces vectoriels, ou plus généralement des objets dans une catégorie tensorielle avec dualité. Pour une variété à bord $\partial X^4 = Y^3$, on aurait alors des invariants « relatifs »

$$Z(X) \in \mathcal{H}(Y),$$

dont la propriété essentielle est une formule de recollement. Pour les invariants de Donaldson, les $HF_*(M)$ devraient jouer le rôle de $\mathcal{H}(Y)$. En fait, les instantons ne se comportent jamais exactement comme le requiert le formalisme de TQCT. Tout d'abord, il n'existe pas de définition de $HF_*(Y)$ et $Z(X)$ qui soit satisfaisante dans tous les cas. C'est loin d'être une question technique : la formule de recollement dans sa forme la plus simple serait en contradiction avec certains résultats profonds des invariants de Donaldson, notamment la formule d'éclatement de Fintushel et Stern [5]. D'autre part, les axiomes d'Atiyah ne recouvrent pas toutes les propriétés fondamentales de l'homologie de Floer.

À la lecture du livre de Donaldson, on s'aperçoit assez vite qu'il est scindé en deux parties, qui s'adressent à des publics légèrement différents. La première partie (chapitres 2 à 5) avait été esquissée lors d'un groupe de travail organisé par Donaldson, Furuta et Kotschick en 1988. Des versions préliminaires du manuscrit, distribuées aux étudiants en thèse à Oxford, ont déjà contribué à la formation de plusieurs générations de géomètres. Cette partie rassemble tous les résultats nécessaires pour comprendre en détail la construction de Floer. Elle aboutit à la définition de $HF_*(Y)$ dans les deux versions introduites par Floer. Les connaissances nécéssaires pour aborder sa lecture sont assez limitées : des bonnes bases de géométrie différentielle, et une familiarité avec les éléments de la théorie des instantons (les premiers chapitres de [3] suffiront largement). Comme dans ses autres écrits, Donaldson nous offre souvent plusieurs points de vue sur le même phénomène. J'en donne un exemple élémentaire. On sait que les connexions antiautoduales sont aussi des solutions de l'équation de Yang-Mills,

$$d^*_{\mathbf{A}} F_{\mathbf{A}} = 0.$$

Ce qui est beaucoup moins évident est que dans le cas de $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$, on peut ramener ce fait à une propriété générale de la mécanique classique : pour une particule dans un potentiel $V(x) = -\frac{1}{2}|\nabla_x f|^2$, les orbites du gradient $x' = \nabla f$ sont aussi des solutions de l'équation de Newton $x'' = -\nabla V$. Les nombreuses observations de ce type, dont l'intention est d'amener le lecteur à une compréhension plus complète des bases de la théorie de jauge, ne constituent quand même pas le contenu principal de cette partie du livre, qui est essentiellement consacrée à l'analyse linéaire (théorie de l'indice pour les opérateurs elliptiques) et non linéaire (analyse du comportement des instantons) sur les variétés $\mathbb{R} \times Y^3$. Une question fondamentale est le comportement des instantons à l'infini. Si $\mathbf{A}$ est en jauge temporelle et satisfait (2), les A_t pour $t \to \infty$ convergent vers une connexion plate A_∞. Si la représentation ρ_∞ de $\pi_1(Y)$ associée à A_∞ est non dégénerée, ce qui veut dire que $H^1(Y_3; \rho_\infty) = 0$, la convergence $A_t \to A_\infty$ est à vitesse exponentielle dans toute topologie raisonnable. Dans le cas dégéneré, la vitesse peut n'être que polynomiale, et la convergence elle-même est beaucoup plus difficile à démontrer. Avant la parution du livre de Donaldson, on trouvait des résultats de ce type principalement dans les livres de Morgan, Mrowka, Ruberman [8] et Taubes [9], dont le but était de pousser l'analyse à ses limites, et qui s'adressaient surtout aux spécialistes. Les arguments de Donaldson sont toujours exceptionnellement clairs, ce qui devrait faciliter une adaptation eventuelle aux autres théories semblables (Seiberg-Witten ou Gromov-Witten).

La deuxième partie du livre (chapitres 6 à 8) étudie les limites de la théorie établie par Floer, en relation avec le formalisme des TQCT. La plupart du contenu est nouveau, ou au moins n'avait jamais été publié avant. Par exemple, le chapitre 7 approfondit la discussion du rôle de la connexion triviale en théorie de Floer. En partant de l'analyse des espaces de modules des instantons qui sont asymptotiques à cette connexion, on est amené vers une nouvelle définition de l'homologie de Floer pour les variétés avec $H_1(Y) = 0$, qui est à mi-chemin entre celle de Floer et la théorie équivariante de Austin et Braam. Cette nouvelle « homologie » est un objet dans une catégorie tensorielle introduite à propos, la catégorie des « $(\mathcal{F}, \sigma)$-complexes ». Le produit tensoriel des $(\mathcal{F}, \sigma)$-complexes correspond à la somme connexe des trois-variétés. Cette observation est une version très nette des formules trouvées par Fukaya *et al.* pour l'homologie de Floer des sommes connexes. Le dernier chapitre, moins complet que les autres, traite de la relation entre recollement des instantons et la formule d'éclatement pour les invariants de Donaldson. Il contient des indications précises pour des travaux futurs, dont le but serait d'obtenir une homologie de Floer pleinement satisfaisante. Cette théorie devrait surtout nous révéler pourquoi des fonctions elliptiques paraîssent dans la formule d'éclatement et ailleurs en théorie de Donaldson (la démonstration de Fintushel et Stern est indirecte, et n'explique pas le lien entre ces fonctions et la géométrie des espaces de modules des instantons).

Comme Donaldson le souligne lui-même au début, il y a plusieurs propriétés importantes de l'homologie de Floer dont le livre ne parle pas. Je n'en vais mentionner qu'une : la suite exacte de Floer [2]

$$\cdots \to HF_*(Y) \longrightarrow HF_*(Y_{K,0}) \longrightarrow HF_*(Y_{K,1}) \to HF_{*+1}(Y) \to \dots \tag{3}$$

pour K un nœud dans une variété Y avec $H_1(Y) = 0$, et $Y_{K,k}$ les variétés obtenues de (Y, K) par chirurgie de Dehn. Comme cette suite est exacte, on voit que (sauf dans le cas où tous les groupes de Floer sont triviaux) au moins une des flèches doit être non nulle. Ces flèches étant données par des invariants de Donaldson relatifs, on en déduit l'existence d'instantons sur certaines quatre-variétés (non compactes). Si on réflechit à la démonstration de (3), on voit que la construction de ces instantons passe par des voies bien connues (homotopie et recollement), en partant des connexions plates. Quand même, le formalisme algébrique rend cette méthode assez efficace, ce que nous ont appris Fintushel et Stern [4] en l'appliquant au calcul des invariants de Donaldson d'une surface $K3$. A mon avis, c'est la seule démonstration de l'existence d'instantons sur une surface algébrique qui n'utilise pas du tout la géométrie algébrique. Parmi les autres résultats récents en théorie de Donaldson-Floer, il faut absolument mentionner ceux de Frøyshov et Muñoz sur la condition de « type fini » ; l'article de Frøyshov [7] peut très bien servir comme complément à la lecture du livre de Donaldson. Enfin, je voudrais signaler les travaux en cours de Kronheimer et Mrowka sur la propriété P pour les nœuds. Soit K un nœud dans $Y = S^3$ de genre supérieur à 1. En utilisant les feuilletages tendues à la Gabai, et leur relation avec les structures de contact tendues, on peut montrer que l'homologie de Seiberg-Witten-Floer de $Y_{K,0}$ ne s'annule jamais. Un lien tentatif entre cette homologie et celle de Donaldson-Floer a été établi par les travaux de Pidstrigach-Tyurin et Feehan-Leness. L'idée de Kronheimer et Mrowka est d'en déduire que $HF_*(Y_{K,0}) \neq 0$. Par (3) on aurait alors $HF_*(Y_{K,1}) \neq 0$, donc $Y_{K,1}$ n'est jamais simplement connexe, ce qui est un cas particulier de la propriété P pour K. Si j'ai donné une description un peu hâtive et imprécise de ce programme, ce n'est que pour mettre en évidence l'importance de l'homologie de Donaldson-Floer, même dans le moment actuel où l'enseignement de la théorie de jauge se réduit souvent à l'étude des équations de Seiberg-Witten. Avec la parution du livre de Donaldson, l'accès aux mystérieux $HF_*(Y)$ est devenu beaucoup plus facile. J'espère qu'une nouvelle génération d'étudiants va savoir en tirer profit.

Références

[1] M. Atiyah – « Topological quantum field theories », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 68, p. 175–186 (1989).

[2] P. J. Braam & S. K. Donaldson – « Floer's work on instanton homology, knots and surgery », in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 195–256.

[3] S. K. Donaldson & P. B. Kronheimer – *The geometry of four-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990, Oxford Science Publications.

[4] R. Fintushel & R. J. Stern – « Using Floer's exact triangle to compute Donaldson invariants », in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 435–444.

[5] ———, « The blowup formula for Donaldson invariants », *Ann. of Math. (2)* **143** (1996), no. 3, p. 529–546.

[6] A. Floer – « An instanton-invariant for 3-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), no. 2, p. 215–240.

[7] K. A. Frøyshov – « Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory », *Topology* **41** (2002), no. 3, p. 525–552.

[8] J. W. Morgan, T. Mrowka & D. Ruberman – *The L^2-moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants*, Monographs in Geometry and Topology, II, International Press, Cambridge, MA, 1994.

[9] C. H. Taubes – *L^2 moduli spaces on 4-manifolds with cylindrical ends*, Monographs in Geometry and Topology, I, International Press, Cambridge, MA, 1993.

Paul Seidel, Imperial College (Londres)