SOMMAIRE DU Nº 99

SMF

Mot du Président 3
Vie de la société 4

MATHÉMATIQUES

Solutions du problème des n corps joignant deux configurations, *A. Chenciner* .. 5
Vers la conjecture de Poincaré, *J. Milnor* 13
Le prix Abel décerné à Jean-Pierre Serre, *A. Chambert-Loir* 26

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Modèles et Systèmes complexes, le changement climatique global, *M. Armatte* .. 35

MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE
Débat du 11 octobre 2003

Enseigner les mathématiques en primaire, un défi à relever, *V. Durand-Guerrier* .. 41
Les nouveaux programmes pour l'école primaire, *R. Charnay* 45
Les programmes 2002 et la division, *C. Houdement* 50
Une réévaluation des contenus et des méthodes pédagogiques, *J.-P. Demailly* 57
Débat sur l'enseignement primaire, *M. Delord* 61

FRANCOPHONIE

Francophonie au Canada , *C. Rousseau* 69

INFORMATIONS

Pourquoi adhérer à la SME, *L. Lemaire* 71
Une brève histoire de la Société Mathématique de Belgique, *L. Lemaire* 74
La Société Mathématique Australienne, *A. Guttmann* 78
Le premier congrès Canada-France 82
Les recrutements 2003, *M. Audin* 84
Section 01 du Comité National, *P. Gille* 95
Faites don de vos livres ! Faites don d'un peu plus ! *H. Fleischner et T.S. Tsun* .. 97
Déclaration de Berlin 98
Prix Maurice Audin, *G. Tronel* 101

CARNET

Martine Babillot (1959–2003), *Y. Guivarc'h* 105

LIVRES 107

Éditorial

La conjecture de Poincaré est-elle démontrée ? Les travaux de Grigory Perelman relatifs au programme de géométrisation de Thurston semblent en contenir la preuve. De part le monde des groupes de travail se sont mis en place pour étudier ces articles. En attendant leurs conclusions vous trouverez dans ce numero un panorama de la situation par John Milnor.

Vous recevez aussi le numéro spécial en hommage à Laurent Schwartz. En effet celui-ci nous quittait le 4 juillet 2002, laissant orphelins plus d'une génération de mathématiciens, tant ce grand mathématicien était aussi un grand humaniste et un grand professeur. Nul ne pouvait mieux que Jean-Pierre Bourguignon réaliser cet hommage et nous le remercions d'avoir pris la responsabilité de ce numéro.

Reste qu'un numéro spécial est une charge supplémentaire pour le secrétariat de la SMF, c'est peut-être l'occasion de rappeler qu'il ne se compose que de quatre personnes. Bravo donc à Claire Ropartz, à Marielle Randria-Riou, et à Stéphane Aicardi qui la remplaça le temps d'une naissance.

Bonne année 2004 à tous, et bonne lecture.

— Colette Anné

Mot du Président

Quelle est la place de la recherche dans la construction européenne ? La réponse du Traité de Maastricht est sans ambiguïté : les sciences fondamentales ne sont dans le champ de compétence de la Commission que dans la mesure où elles contribuent au développement économique. C'est ce qui fait la trame du Programme-Cadre de l'Union Européenne (6ème PCRDT) organisé autour de 7 domaines d'actions prioritaires, tous en interaction avec l'industrie.

Ainsi ce n'est donc pas seulement sur le plan national, mais aussi au niveau européen, que le financement de la recherche fondamentale est à l'encan. Au même moment les principaux pays industrialisés d'autres continents intensifient leur effort dans ce domaine. La compétitivité de notre vieux continent est menacée à moyenne échéance. On ne peut pas prétendre soutenir le développement sans se préoccuper du maintien des structures de recherche performantes.

Si elle veut jouer un rôle de premier plan sur la scène internationale, l'Europe ne peut négliger d'investir dans tous les domaines de la recherche, sans oublier les sciences de bases. Elle a encore les moyens de le faire, mais il faut beaucoup moins de temps pour mettre à bas une infrastructure existante performante que pour en construire une nouvelle. Les orientations prises aussi bien par notre gouvernement que par les responsables politiques au niveau européen laissent présager un affaiblissement considérable du potentiel de recherche dont nous disposons actuellement. Quel message envoient-ils aux nouvelles générations qui hésitent déjà à se lancer dans cette aventure ?

Les réalisations de l'Europe des sciences sont le fruit d'initiatives le plus souvent bi- ou multi-latérales : si l'action de la Commission a été considérable dans la constitution de réseaux, Bruxelles ne joue pas aujourd'hui le rôle qui devrait être le sien.

Créer un Conseil ou un Fonds Européen de la Recherche doté de crédits collectés au niveau européen, par exemple provenant de la Commission Européenne, est une des voies explorées pour donner à la recherche fondamentale la place qu'elle doit avoir afin que l'Europe puisse rester compétitive. Les choix de ces conseils devraient être faits selon des critères d'excellence scientifiques, à la suite du travail de panels d'experts compétents. Les scientifiques doivent être étroitement associés à la définition des processus de décision de la Commission Européenne dans le domaine de la Science.

La faiblesse du soutien financier européen à la recherche fondamentale n'est pas le seul défaut du système. Le principe de programmation généralisée n'est pas celui qui est le mieux adapté à la recherche : il ne laisse pas suffisamment de place à la liberté. Pouvons-nous oublier la quantité de documents administratifs à remplir qui est un autre frein au financement de la recherche au plus haut niveau ? Les scientifiques qui produisent les résultats les plus importants ne

sont pas prêts à se transformer en bureaucrates, à passer un temps fou pour répondre à une kyrielle de questions n'ayant rien à voir avec la science, puis à se frotter aux questions déstabilisantes des juristes qui maintenant dominent à Bruxelles. Il résulte de ce processus mal contrôlé que ce ne sont pas forcément les équipes les plus performantes sur le plan scientifique qui obtiennent les financements dont elles ont besoin et qui conditionnent le développement de la recherche.

En concertation avec les sociétés mathématiques nationales, parmi lesquels bien sûr la SMF, la Société Mathématique Européenne œuvre pour que soit mis en place un véritable Espace Européen de la Recherche. L'Europe ne peut pas faire l'impasse sur la Science.

Michel Waldschmidt

Vie de la société

Un accord de réciprocité a été signé avec la Société Mathématique Iranienne

Une réunion commune des conseils d'administration de la SMF et de la SMAI a eu lieu le samedi 11 octobre sur les mathématiques dans l'enseignement primaire. Modéré par Michèle Artigue, ce débat a bénéficié de la participation de :

– Roland Charnay et Catherine Houdement qui ont participe à l'élaboration des nouveaux programmes,

– Michel Delord (membre du conseil de la SMF) qui a plaidé pour l'organisation d'un tel débat,

– Jean-Pierre Demailly qui a écrit de nombreux textes sur la dégradation des mathématiques enseignées,

– Viviane Durand-Guerrier qui est présidente de l'ARDM (Association pour la recherche en didactique des mathématiques).

Un Colloque international de mathématiques s'est tenu sous l'égide de la Société Mathématique de France et de la Société Mathématique Tunisienne du 19 au 25 Octobre 2003 à Hammamet (SMF-SMT). Le thème en était : Analyse et Probabilités. À cette occasion s'est tenue une table ronde sur la francophonie dont la Gazette fera bientôt état.

La SMF a été représentée à différentes manifestations, notamment les journées de l'APMEP à Pau du 23 au 25 octobre, aux journées Sciences et Citoyens organisées par le CNRS à Poitiers du 24 au 26 octobre, aux festivités organisées à Nancy en octobre à l'occasion du cinquantenaire de l'Institut Elie Cartan, au Forum « Enseignement des Sciences et Coopération dans les Pays en Développement » qui s'est tenu à Orsay le 26 novembre, organisé par le Comité pour les Pays en Développements (COPED) de l'Académie des Sciences.

Le troisième Colloque « mathématiques et formation des ingénieurs » s'est tenu à Nantes les 27 et 28 novembre, sous le patronage de la SMF. Il a mis en lumière la diversité des mathématiques a l'œuvre dans les domaines intéressant les ingénieurs et a permis une rencontre des enseignants de mathématiques intervenant dans les formations d'ingénieurs.

Solutions du problème des n corps joignant deux configurations : l'idée de Christian Marchal et ce qui s'en suit[1]

Alain Chenciner

La méthode variationnelle directe a été récemment utilisée pour démontrer l'existence de nouvelles classes de solutions, périodiques ou quasi-périodiques, du problème classique des n corps dans le cas newtonien ([CV],CM],[C3],[M]). Contrairement à ce qui se produit dans la recherche de géodésiques en géométrie riemannienne, la minimisation sous contraintes d'homologie ou d'homotopie est rarement utilisable car les minima présentent le plus souvent des collisions et ne sont donc pas d'« honnêtes solutions ». La minimisation sous contraintes de symétrie, au contraire, est extrêmement féconde. Le texte qui suit explique la raison de ce fait (pour plus de détails, voir [C4] et [C6]).

Un résultat étonnant.

Théorème ([Ma], [C4]). — *Soient* $x' = (\vec{r}_1', \vec{r}_2', ..., \vec{r}_n')$ *et* $x'' = (\vec{r}_1'', \vec{r}_2'', ..., \vec{r}_n'')$ *deux configurations arbitraires de* n *points matériels de masses positives* $m_1, m_2, ..., m_n$ *dans l'espace. Quel que soit l'intervalle de temps* $T > 0$*, il existe une solution* (sans collision !) $x(t) = (\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), ..., \vec{r}_n(t))$ *des équations de Newton telle que* $x(0) = x'$ *et* $x(T) = x''$*. Si de plus* x' *et* x'' *appartiennent à un même plan, il existe une telle solution dans le plan.*

Ce théorème est étonnant, en particulier dans le plan. Il était en effet légitime de croire que pour certains couples des configurations initiale et finale, tout choix des vitesses initiales susceptible de conduire au but dans le temps T impliquerait une collision (figure 2 qui, pas plus que la figure 1 n'est réaliste).

La méthode de démonstration est variationnelle : les équations de Newton

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = g \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\| \vec{r}_i - \vec{r}_j \|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i),$$

[1] Ce texte est une version (très) légèrement remaniée d'une communication présentée aux « Journées 2003 de l'IMCCE » à l'Observatoire de Paris. Il est reproduit ici avec l'aimable autorisation de William Thuillot, directeur de l'IMCCE.

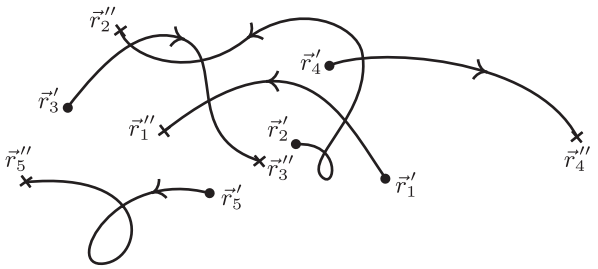


FIG. 1. Une solution sans collision : les passages par les points d'intersection se produisent à des instants différents.

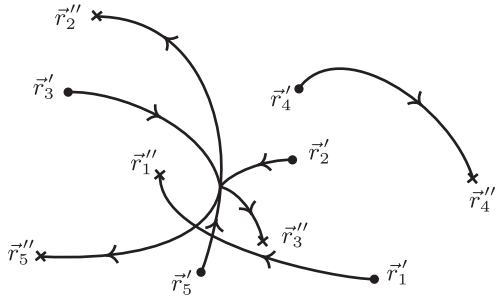


FIG. 2. Une solution avec collision triple.

sont les équations d'Euler-Lagrange de l'*action* qui, à un chemin $x(t)$, $0 \le t \le T$, de configurations suffisamment régulier, associe l'intégrale du Lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T\left(x(t)\right) &= \int_0^T L\left(x(t), \dot{x}(t)\right) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \parallel \dot{\vec{r}}_i(t) \parallel^2 + g \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_i m_j}{\parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel} \right) dt.\end{aligned}$$

Un chemin pour lequel cette action est stationnaire, en particulier un chemin réalisant le minimum de l'action parmi ceux qui vérifient $x(0) = x'$ et $x(T) = x''$, fournit une des solutions dont le théorème affirme l'existence. L'existence d'un tel chemin est certes une conséquence de la théorie classique de Tonelli, qui date des années vingt, mais... cette théorie ne s'applique justement qu'à la condition d'admettre des chemins qui comportent éventuellement des collisions ! Ceci vient de ce que la force newtonienne est suffisamment faible pour que l'action d'une solution commençant ou se terminant par la collision d'un certain nombre de corps ait une valeur finie : pour les corps participant à l'instant t_0 à la collision, on a en effet les estimations suivantes, dues à Sundman, et analogues à celles que l'on obtient élémentairement dans le cas du problème des 2 corps :

$$\parallel \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \parallel = O(\mid t - t_0 \mid^{\frac{2}{3}}), \quad \parallel \dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t) \parallel = O(\mid t - t_0 \mid^{-\frac{1}{3}}).$$

Bloqué par cette difficulté, Poincaré [P] n'avait su appliquer la méthode variationnelle à la recherche de solutions périodiques relatives du problème plan des trois corps qu'au prix du remplacement du potentiel newtonien par le potentiel de Jacobi en $1/r^2$. Dans [Ma], Christian Marchal montre qu'un chemin $x(t)$ qui minimise l'action parmi ceux qui vérifient $x(0) = x'$ et $x(T) = x''$ ne peut avoir de collision et est donc l'honnête solution des équations de Newton dont le théorème affirme l'existence. Sa démonstration ne vaut cependant que si deux conditions techniques sont réalisées. J'ai pu compléter dans [C4] cette belle démonstration en utilisant des résultats de Richard Montgomery, Susanna Terracini et Andrea Venturelli.

Le problème des collisions.

La théorie issue des travaux de Sundman (voir [C2] pour une présentation conceptuelle dans le cas des collisions totales) ne se contente pas de fournir des estimations sur les distances mutuelles ou leurs variations au voisinage d'une collision, elle affirme également que la configuration des corps qui participent à la collision tend vers un ensemble bien particulier, celui des *configurations centrales*. Ce sont (voir [W], [C1]) les configurations qui, lâchées sans vitesse initiale, s'effondrent homothétiquement sur leur centre de gravité sous l'action de la gravitation. L'une des difficultés du problème qui nous occupe — montrer qu'un chemin $x(t)$ minimisant l'action ne peut avoir de collision — est la faiblesse de notre compréhension de ces configurations dès que le nombre de corps dépasse 3 et la beauté de l'idée de Marchal est de permettre de se passer totalement d'une telle compréhension.

L'idée de Marchal et la démonstration du théorème.

Supposons qu'un chemin réalisant le minimum de l'action $\mathcal{A}_T$ possède à l'instant t_0 une collision. Si aucune autre collision ne se produit en les instants voisins de t_0 (on parle alors de collision isolée), la propriété de minimisation implique que, pour $t < t_0$ et $t > t_0$, le chemin $x(t)$ est solution des équations de Newton tant qu'un autre instant de collision n'est pas rencontré. La démons-

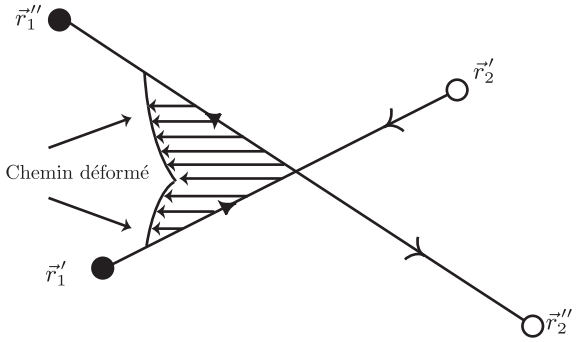


FIG. 3. Une perturbation qui fait décroître l'action (2 corps).

tration proposée par Marchal permet de prouver que si $x(t)$ minimise l'action, il ne peut présenter de collision isolée dans laquelle la configuration des corps en collision aurait une forme limite à l'instant t_0.

L'idée est d'une belle simplicité : supposons qu'un chemin $x(t)$ présentant une telle collision minimise l'action et cherchons à obtenir une contradiction en exhibant une petite déformation de ce chemin qui supprime la collision — ou tout au moins diminue le nombre de corps qu'elle implique — et diminue l'action. Au lieu de chercher une « bonne » façon de perturber le chemin, ce que notre méconnaissance de la forme limite nous empêche d'imaginer dès que le nombre de corps est supérieur à 3 (figure 3 dans le cas de 2 corps), on choisit l'un des corps et l'on modifie sa position au voisinage de l'instant t_0 dans toutes les directions possibles puis on propage ces déformations en en diminuant l'intensité proportionnellement à $\mid t - t_0 \mid$ comme sur la figure 3. On calcule alors la moyenne des actions des chemins ainsi perturbés. Plaçons-nous dans l'espace car le caractère harmonique du potentiel newtonien simplifie les calculs. Une interversion des intégrations sur l'intervalle de temps $[\,0, T\,]$ et sur la sphère des directions de perturbation du corps choisi montre que la moyenne des actions des chemins perturbés n'est autre que l'action que l'on obtient en remplaçant le corps considéré par une petite sphère homogène dont le rayon décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'instant t_0, dans le futur ou dans le passé (figure 4).

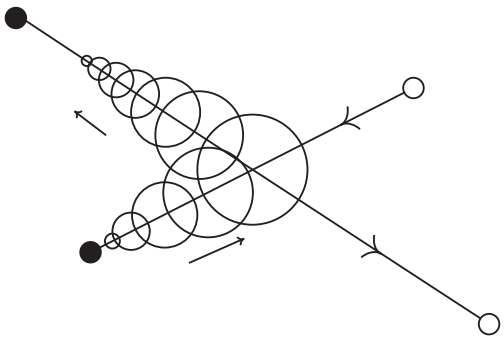


FIG. 4

Mais ceci revient à tronquer le potentiel à l'intérieur de la sphère (figure 5) et implique une diminution de la partie de l'action associée à l'énergie potentielle dominant largement la petite augmentation due à la modification de l'énergie cinétique.

C'est dans ce calcul que l'on doit supposer que la forme prise par les corps entrant en collision possède une limite, c'est-à-dire que les distances mutuelles $\mid \vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \mid$ sont non seulement de l'ordre de $\mid t - t_0 \mid^{\frac{2}{3}}$ comme l'indique la théorie de Sundman mais qu'elles sont équivalentes (au sens mathématique) à $r_{ij} \mid t - t_0 \mid^{\frac{2}{3}}$, où les r_{ij} sont des constantes.

Pour démontrer complètement le théorème, deux difficultés doivent être surmontées. Il faut montrer que :

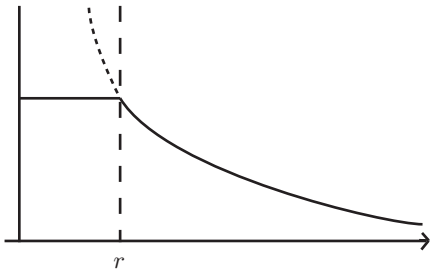


FIG. 5. Potentiel d'une sphère homogène de rayon r.

1) si un chemin $x(t)$ qui minimise l'action présente des instants de collision, au moins l'un de ces instants est isolé,

2) si $x(t)$ présente en t_0 une collision isolée, on peut se ramener au cas où existe une forme limite (ce problème ne se poserait pas si l'on savait montrer que pour un nombre de corps donné les formes des configurations centrales sont en nombre fini).

Pour le premier point, on montre qu'une collision en t_0 faisant intervenir le nombre minimum de corps est nécessairement isolée. La raison de ce fait, développée dans sa thèse par Andrea Venturelli à partir d'une idée de Richard Montgomery, est que l'énergie totale de l'amas qui subit la collision (définie uniquement en dehors des instants de collision) reste bornée au voisinage d'un tel instant t_0. On déduit alors facilement de l'*identité de Lagrange-Jacobi* (qui contrôle la dérivée seconde du moment d'inertie par rapport au centre de gravité, voir [C1]) que l'accumulation en t_0 d'instants de collision conduirait à une contradiction.

Pour le deuxième point, on utilise la technique du « blow up », introduite par Susanna Terracini et également développée dans sa thèse par Andrea Venturelli. C'est une technique de renormalisation qui exploite l'homogénéité du potentiel newtonien dans le même esprit que la théorie de Sundman : la remarque fondamentale est que si $x(t)$ est une solution des équations de Newton, il en est de même de $\lambda^{-\frac{2}{3}}x(\lambda t)$, quel que soit $\lambda > 0$. Si de plus $x(t)$ présente en t_0 une collision isolée, un passage à la limite le long d'une suite λ_k bien choisie tendant vers 0 fournit une solution *homothétique* (collision suivie d'éjection, figure 6) $y(t)$ d'énergie nulle du problème des p corps concernés par la collision (les autres ont été envoyés à l'infini par le passage à la limite).

De plus, si $x(t)$ minimisait l'action $\mathcal{A}_T$ du problème des n corps parmi les chemins de configurations à extrémités fixées, il en est de même de $y(t)$ pour le problème des p corps. Mais dans ce dernier cas, la forme de la configuration ne change pas au cours du mouvement ! Rafael de la Llave m'a fait remarquer que ce genre de technique a été utilisé dans la théorie des surfaces minimales pour montrer qu'en basse dimension (inférieure à 7), une telle surface n'a pas de singularité (le blow-up ramène ici le problème à celui des singularités coniques).

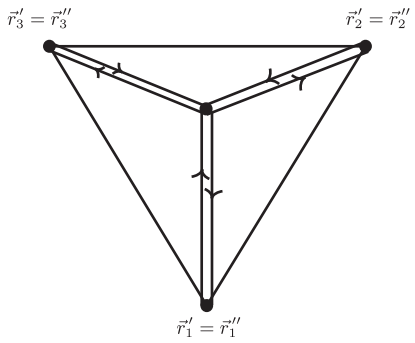


FIG. 6. $p = 3$.

Applications et généralisations

Non content de répondre à une question très naturelle, le théorème de Marchal permet de démontrer l'existence de nouvelles familles de solutions périodiques du problème des n corps. J'illustrerai ceci sur un exemple : l'existence de ce que j'ai appelé les *Hip-Hops généralisés*, qui sont en quelque sorte les solutions périodiques les plus simples du problème des n corps qui ne soient pas planes [C5].

Parmi les mouvements képlériens, le plus simple est incontestablement le mouvement circulaire. On peut le caractériser par le fait qu'au bout d'une demi-période le corps mobile occupe une position symétrique par rapport au centre attractif de celle qu'il occupait initialement. Cherchons donc des solutions périodiques $x(t)$ de période T du problème des n corps possédant une propriété analogue, c'est-à-dire telles que $x(t + T/2) = -x(T)$ (on a supposé que le centre de gravité du système est fixé à l'origine). Les « plus simples » seront obtenues en minimisant l'action $\mathcal{A}_T$ parmi tous les lacets $x(t)$ de période T (*i.e.* tels que $x(t + T) = x(t)$) qui vérifient de plus la condition ci-dessus. On déduit immédiatement du théorème de Marchal qu'un lacet réalisant le minimum de l'action ne peut avoir de collision. En effet, un simple raisonnement de symétrisation montre que la restriction d'un tel lacet à n'importe quel intervalle $[\,t, t + T/2\,]$ doit minimiser l'action parmi les chemins ayant les mêmes extrémités. Le théorème implique qu'aucune collision ne peut se produire, sauf peut être aux extrémités (on montre en effet facilement que le théorème s'applique même lorsque les configurations initiale et finale x' et x'' présentent des collisions). Mais celles-ci ont été choisies arbitrairement, d'où la conclusion.

J'ai pu montrer ([C4], [C5]) qu'*un lacet réalisant le minimum de l'action sous ces contraintes ne correspond jamais à un mouvement dans un plan fixe dès que le nombre de corps est supérieur à 3.* L'intérêt d'un tel résultat est que les seules solutions « explicites » du problème des n corps sont les solutions *homographiques* ([C1]) dans lesquelles les corps se meuvent nécessairement dans un plan fixe (les guillemets viennent de ce qu'on ne sait pas déterminer les configurations centrales qui, seules, admettent de tels mouvements). Jouant le rôle d'ersatz d'*équilibres relatifs* (= rotation uniforme d'une configuration centrale) dont la configuration ne serait pas plane, les solutions périodiques

obtenues ci-dessus sont en quelque sorte les plus simples qui ne soient pas planes. Dans le cas du *Hip-Hop* de 4 masses égales (figure 7), dont Andrea Venturelli et moi avons prouvé l'existence ([CV], [C3]), la configuration hésite périodiquement entre l'équilibre relatif d'un carré qui ne minimise pas l'action et celui d'un tétraèdre qui ne peut exister dans R^3 (mais existe dans R^4, voir [AC]).

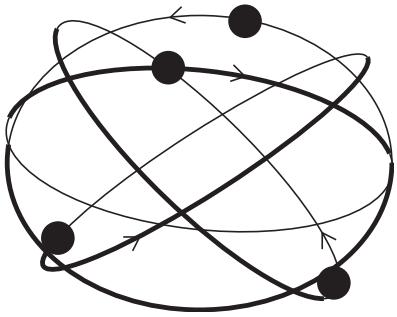


FIG. 7. Le Hip-Hop de 4 masses égales.

Le théorème de Marchal a récemment été généralisé par Davide Ferrario et Susanna Terracini ([FT]) à certaines situations invariantes sous l'action d'un groupe de symétrie, à d'autres potentiels homogènes et à des espaces de dimension supérieure à 3. Ceci a considérablement accru l'efficacité de la méthode variationnelle directe dans la recherche de nouvelles classes de solutions périodiques ou quasi-périodiques du problème des n corps. Je renvoie à [C6] pour un état des lieux.

Références

[AC] A. ALBOUY et A. CHENCINER – *Le problème des n corps et les distances mutuelles*, Inventiones Mathematicæ, **131** (1998), 151-184.

[C1] A. CHENCINER – *Introduction to the N-body problem*, notes of the Ravello summer school (1997), `http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/preprints/prep.1997/Ravello.1997.pdf`

[C2] A. CHENCINER – *Collisions totales, Mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des n corps*, Regular and chaotic dynamics, V.3, **3** (1998), 93-106.

[C3] A. CHENCINER – *Action minimizing periodic solutions of the n-body problem*, « Celestial Mechanics, dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday », A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson, Z.J. Xia ed., Contemporary Mathematics **292** (2002), 71-90.

[C4] A. CHENCINER – *Action minimizing solutions of the n-body problem : from homology to symmetry*, Proceedings ICM Beijing, vol. III (2002) 279-294.

[C5] A. CHENCINER – *Simple non-planar periodic solutions of the n-body problem*, Proceedings of the NDDS Conference, Kyoto (2002).
`http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/preprints/prep.2002/Kyoto.2002.pdf`

[C6] A. CHENCINER – *Symmetries and « simple solutions » of the classical n-body problem*,

ICMP, Lisbonne juillet 2003, Proceedings à paraître chez World Scientific.
http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/preprints/prep.2003/Chenciner-ICMP03.pdf

[CM] A. Chenciner et R. Montgomery – *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Annals of Mathematics **152** (2000) , 881-901.

[CV] A. Chenciner et A. Venturelli – *Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de* 4 *corps de masses égales dans* R^3 *: orbites « hip-hop »*, Celestial Mechanics and Dynamica Astronomy **77** (2000), 139-152.

[FT] D. Ferrario et S. Terracini – *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n-body problem*, to appear at Inventiares Mathematicae (2003).
http://www.matapp.unimib.it/~suster/preprint/invent.pdf

[Ma] C. Marchal – *How the method of minimization of action avoids singularities, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **83** (2002) 325-353.

[M] R. Montgomery – *A New Solution to the Three-Body Problem*, Notices of the A.M.S. Vol. 48, n° 5 (May 2001) 471-481.

[P] H. Poincaré – *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. t. 123, 915-918 (1896).

[V] A. Venturelli, – *Thèse*, Paris VII (décembre 2002).

[W] A. Wintner – *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press (1941).

Vers la conjecture de Poincaré et la classification des variétés de dimension 3[1]

John Milnor

La Conjecture de Poincaré a été énoncée il y a 100 ans, et a peut-être été démontrée ces derniers mois. Cette note se veut un survol des résultats des cent dernières années qui ont ouvert la voie vers une preuve de cette conjecture, et vers le projet beaucoup plus ambiteux de classifier toutes les variétés compactes de dimension 3. Le dernier paragraphe donne une brève description des derniers progrès dus à Grigory Perelman. Une discussion plus détaillée des travaux de Perelman fera l'objet d'une note de Michael Anderson (à paraître dans les *Notices of the American Mathematical Society* et en français dans la *Gazette*).

Le problème de Poincaré

Au tout début du 20e siècle, Henri Poincaré (1854-1912) affirmait d'une façon quelque peu imprudente ce qui peut être énoncé en language moderne de la façon suivante. Voir [Poincaré 1900][2]

Si une variété fermée de dimension 3 *a l'homologie de la sphère* S^3*, alors elle est homéomorphe à* S^3*.*

Cependant, le concept de « groupe fondamental », qu'il avait introduit dès 1895, fournissait l'outil nécessaire pour réfuter cette affirmation. Dans [Poincaré 1904], il présentait un contre-exemple qui peut être décrit comme le quotient $\mathrm{SO}(3)/\mathrm{I}_{60}$. Ici, $\mathrm{SO}(3)$ est le groupe des rotations de l'espace euclidien de dimension 3, et I_{60} est le sous-groupe des rotations qui laissent invariant un icosaèdre ou un dodécaèdre régulier (l'unique groupe simple d'ordre 60). Cette variété a l'homologie de la sphère de dimension 3, mais son groupe fondamental

$$\pi_1\Big(\mathrm{SO}(3)/\mathrm{I}_{60}\Big)$$

est un groupe parfait d'ordre 120. Il concluait en demandant, ce que nous avons encore une fois traduit en language moderne :

Si une variété fermée de dimension 3 *a un groupe fondamental trivial, est-elle homéomorphe à la sphère ?*

La conjecture, connue de nos jours sous le nom de *Conjecture de Poincaré*

[1] Publié dans les Notices de l'AMS (novembre 2003) sous le titre *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, ce texte a été traduit par L. Funar et H. Pajot (Institut Fourier, Grenoble I).

[2] La terminologie de Poincaré pourrait dérouter un lecteur moderne qui a l'habitude d'utiliser l'expression « simplement connexe » pour désigner un espace dont le groupe fondamental est trivial. En effet, « simplement connexe » signifiait pour lui homéomorphe au modèle le plus simple, à savoir la sphère de dimension 3.

affirme que la réponse est « oui ». Celle-ci s'est avérée être une question extraordinairement difficile, encore plus délicate que la question correspondante dans les dimensions 5 et plus[3], et représente un obstacle majeur à la classification des variétés de dimension 3.

Pendant les cinquante années suivantes, la topologie est passée de l'état embryonnaire à celui de discipline bien structurée. Cependant, je me restreindrai aux quelques aspects qui ont joué un rôle important dans le problème de la classification des variétés de dimension 3. Pour plus de détails, voir [Gordon] pour une histoire de la théorie des variétés de dimension 3 jusqu'en 1960 ; [Hempel] pour une présentation de cette théorie jusqu'en 1976 ; [Bing] pour une description de quelques unes des difficultés en topologie de dimension 3 ; [James] pour une histoire générale de la topologie ; [Whitehead] pour celle de l'homotopie ; et [Devlin] pour la conjecture de Poincaré comme « Millennium Prize Problem ».

Résultats fondés sur les méthodes PL.

Comme le problème de caractérisation de la sphère de dimension 3 paraissait trop difficile, Max Dehn (1878-1952) s'attaqua au problème plus simple de la caractérisation du nœud trivial dans S^3.

Théorème énoncé par Dehn (1910). — *Un nœud*[4] $K \subset S^3$ *est trivial si et seulement si le groupe fondamental* $\pi_1(S^3 \setminus K)$ *est libre et cyclique.*

Cette affirmation est juste. Cependant, Kneser, 19 ans plus tard, a signalé qu'il y avait une lacune importante dans l'argument de Dehn. Ce problème est resté ouvert pendant près de 50 ans, jusqu'aux travaux de Papakyriakopoulos.

Des progrès importants sont dus à James Waddel Alexander (1888-1971). En 1919, [Alexander] a démontré que l'homologie et le groupe fondamental seuls ne suffisent pas à caractériser une variété de dimension 3. En effet, il a décrit deux espaces lenticulaires qui ne peuvent être distingués que par leurs invariants d'enlacement. En 1924, il démontra le résultat suivant.

Théorème d'Alexander. — *Une sphère de dimension* 2 *plongée linéairement par morceaux (PL) dans* S^3 *découpe la sphère* S^3 *en deux cellules PL, fermées, de dimension* 3.

Alexander démontra aussi qu'un tore PL plongé doit border un tore solide d'un des deux côtés.

Helmut Kneser (1898-1973) accomplit une étape décisive qui joua un rôle important dans les développements ultérieurs[5]. [Kneser] appellait *irréductible* toute variété PL de dimension 3 fermée dont chaque sphère PL plongée borde une cellule. Dans le cas contraire, elle est dite *réductible*.

Supposons que nous partions d'une variété M^3 connexe et réductible. Si nous découpons M^3 le long d'une sphère plongée qui ne borde pas une cellule, nous obtenons une nouvelle variété (qui n'est pas connexe en général) dont le bord

[3] Voir [Smale 1960], [Stallings], [Zeeman], et [Wallace] pour les dimensions 5 et plus, et [Freedman] pour la dimension 4.

[4] Par nœud, on comprend un plongement linéaire par morceaux (PL) dans S^3 (NdT).

[5] Une partie du papier de Kneser reposait sur les travaux de Dehn. Dans un commentaire, il signalait que l'argument de Dehn était faux, d'où certaines parties de son propre papier n'étaient plus entièrement justifiées. Cependant, le résultat précédent n'était pas concerné.

est formé de deux sphères de dimension 2. Nous pouvons obtenir de nouveau une variété de dimension 3 fermée (peut-être non connexe) en recollant un cône sur chacune des sphères. Alors, si une des composantes de la nouvelle variété est réductible, nous pouvons répéter cette procédure.

Théorème de Kneser (1929). — *Cette procédure se termine toujours au bout d'un nombre fini d'itérations, produisant une variété $\widehat{M}^3$ dont toutes les composantes connexes sont irréductibles.*

En fait dans le cas orientable, la variété connexe de départ M^3 peut s'obtenir comme *somme connexe* des composantes de $\widehat{M}^3$ et de n copies de l'anse $S^1 \times S^2$ (voir [Seifert 1931], [Milnor 1962]). Ici, n est le nombre de sphères non séparantes le long desquelles nous avons découpé.

En 1933, Herbert Seifert (1907-1966) introduisit une classe de fibrations qui va jouer un rôle important dans la suite. Une *fibration de [Seifert]* d'une variété de dimension 3 peut être définie comme une action du cercle qui est libre partout sauf sur un nombre fini de fibres « courtes » comme ci-dessous. Une telle action est décrite par une application $(x,t) \mapsto x^t$ de $M^3 \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans M^3 vérifiant les conditions usuelles $x^0 = x$ et $x^{s+t} = (x^s)^t$. Nous demandons que chaque fibre $x^{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ soit un cercle, et que l'action de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ soit libre en dehors d'un nombre fini de telles fibres.
Un modèle canonique d'une fibration de Seifert dans un voisinage d'une fibre courte est le suivant. Soit α une racine n-ième primitive de l'unité, et soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. Considérons le produit $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ et identifions chaque (z,t) avec $(\alpha z\,,\, t + 1/n)$. La variété quotient obtenue est difféomorphe au produit $\mathbb{D} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; mais la fibre centrale de l'action $(z,t)^s = (z\,,\, t+s)$ est plus courte que les fibres voisines, qui s'enroulent n fois autour d'elle, puisque $(0,t)^{1/n} \equiv (0,t)$.

Il y eut ensuite des développements spectaculaires dans la théorie des variétés de dimension 3, débutant à la fin des années 1950 avec un papier de Christos [Papakyriakopoulos] (1914-1976). Celui-ci était quelqu'un de réservé qui a travaillé seul à Princeton pendant des années sous le parrainage de Ralph Fox. (J'étais en train de travailler avec Fox à cette époque, mais je n'étais pas au courant que Papakyriakopoulos était en train de réaliser des progrès sur un projet d'une telle importance.) Sa démonstration du « Lemme de Dehn », qui était resté non résolu depuis que Kneser avait signalé la lacune dans l'argument de Dehn est un tour de force. Son énoncé est le suivant :

Lemme de Dehn (Papakyriakopoulos 1957). — *Soit f une application PL d'un disque (de dimension 2) dans un variété de dimension 3, qui peut avoir des points doubles dans l'intérieur, mais pas sur le bord. Alors, il existe un disque plongé non singulier qui coïncide avec f sur un voisinage du bord.*

Il a démontré ceci en construisant une tour de revêtements, d'abord en simplifiant les singularités relevées du disque au revêtement universel d'un voisinage, ensuite en passant au revêtement universel d'un voisinage du disque simplifié, et en itérant cette construction, jusqu'à l'obtention (après un nombre fini d'étapes) d'un disque non singulier. En utilisant des méthodes similaires, il a démontré un résultat qui a été amélioré plus tard comme suit.

Théorème de la Sphère. — *Si le second groupe d'homotopie $\pi_2(M^3)$ d'une variété orientable de dimension 3 n'est pas trivial, alors il existe une sphère PL (de dimension 2) plongée qui représente un élément non trivial de ce groupe.*

Il s'en déduit immédiatement que $\pi_2(S^3 \setminus K) = 0$ pour un nœud quelconque $K \subset S^3$. Plus généralement, $\pi_2(M^3)$ est trivial pour toute variété orientable de dimension 3 qui est *irréductible* au sens de Kneser.

Quelques années après la percée de Papakyriakopoulos, Wolfgang Haken effectuait des progrès substanciels dans la compréhension des variétés assez générales de dimension 3. En 1961, [Haken] résolvait le *problème de trivialité* pour les nœuds ; c'est-à-dire qu'il décrivait une procédure effective qui permettait de décider si un cercle PL plongé dans la sphère de dimension 3 est réellement un nœud non trivial (voir [Schubert 1961] pour d'autres résultats, et une présentation plus détaillée).

Friedhelm Waldhausen faisait ensuite de gros progrès en s'appuyant sur les idées de Haken. Dans [1967a], il démontrait qu'il existe une forte connexion entre les espaces fibrés de Seifert et les variétés dont le groupe fondamental a un centre trivial. Dans [1967b] il introduisait et étudiait la classe des *variétés graphées*. Par définition, ce sont des variétés qui peuvent être scindées le long de tores plongés et disjoints en morceaux, chacun de ceux-ci étant un fibré en cercle au-dessus d'une surface. Deux idées principales des approches de Haken et de Waldhausen semblent parfaitement banales, mais sont en fait très puissantes.

Définitions. — Pour notre propos, une surface plongée PL à deux côtés F dans une variété fermée M^3 sera appelée *incompressible* si le groupe fondamental $\pi_1(F)$ est infini, et s'injecte dans $\pi_1(M^3)$. La variété M^3 est dite *variété de Haken* si elle contient une surface incompressible.

Pour illustrer la force de ces idées, signalons que Waldhausen a démontré en 1968 que, si deux variétés de Haken fermées, orientables et irréductibles ont le même groupe fondamental, alors elles sont homéomorphes. Il existe un énoncé similaire pour les variétés à bord. Ces idées ont été ensuite développées en 1979 par [Jaco et Shalen] et par [Johannson], qui ont souligné l'importance de la décomposition d'un espace par des tores incompressibles.

Un autre résultat important durant ces années a été la démonstration que toute variété topologique de dimension 3 a une unique structure PL (voir [Moise]), et essentiellement une unique structure différentiable (voir [Munkres] ou [Hirsch], ainsi que [Smale 1959]). Ceci est radicalement différent de ce qui se passe en dimensions supérieures, où il est essentiel de préciser s'il s'agit de variétés différentielles, PL ou topologiques[6].

[6] Le fait qu'une variété PL ait essentiellement une unique structure différentiable reste vrai jusqu'à la dimension 6 (voir [Cerf]). Cependant, [Kirby et Siebenmann] ont démontré qu'une variété topologique de dimension 4 ou plus peut avoir plusieurs structures PL incompatibles. Le cas de la dimension 4 est particulièrement délicat. Freedman, en utilisant les travaux de Donaldson, a démontré que la variété topologique $\mathbb{R}^4$ admet un ensemble non dénombrable de structures lisses ou PL non équivalentes (voir [Gompf]).

Variétés à courbure constante.

La première classe intéressante de variétés (de dimension 3) à classifier sont les variétés riemanniennes *plates* — celles qui sont localement isométriques à l'espace euclidien. Le 18$^{\text{e}}$ des célèbres problèmes de David Hilbert demandait s'il y avait seulement un nombre fini de groupes discrets d'isométries de l'espace euclidien dont le domaine fondamental est compact. Ludwig Bieberbach (1886-1982) a démontré ce résultat en 1910 ([Bieberbach]), et en fait, il a donné une classification complète de tels groupes. Ceci a eu une application immédiate aux variétés riemanniennes plates. Voici une version moderne de son résultat.

Théorème (d'après Bieberbach). — *Une variété riemannienne plate et compacte M^n est caractérisée, à difféomorphisme affine près, par son groupe fondamental. De tels groupes fondamentaux Γ sont exactement les groupes finiment engendrés, sans torsion et ayant un sous-groupe abélien d'indice fini. Un tel Γ contient un unique sous-groupe abélien* maximal *d'indice fini.*

Il s'ensuit facilement que ce sous-groupe abélien maximal N est normal, et que le groupe quotient $\Phi = \Gamma/N$ agit fidèlement sur N par conjugaison. De plus, $N \cong \mathbb{Z}^n$ où n est la dimension. Ainsi le groupe fini Φ se plonge naturellement dans le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ des automorphismes de N. En particulier, ceci implique que toute variété M^n est le quotient T^n/Φ, où T^n est un tore plat, où Φ est un groupe fini d'isométries qui agit librement sur T^n, et où le groupe fondamental $\pi_1(T^n)$ s'identifie au sous-groupe abélien maximal $N \subset \pi_1(M^n)$. Dans le cas des variétés de dimension 3 orientables, il y a seulement 6 variétés de ce type. Le groupe $\Phi \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ est soit cyclique d'ordre 1, 2, 3, 4, ou 6, soit isomorphe à $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Pour plus de détails, voir [Charlap], ainsi que [Zassenhaus], [Milnor 1976a], ou [Thurston 1997].

Les variétés compactes de dimension 3 à courbure constante *positive* ont été classifiées en 1925 par Heinz [Hopf] (1894-1971). Voir aussi [Seifert 1933], [Milnor 1957]. Celles-ci incluent, par exemple, la variété icosaédrale de Poincaré qui a été mentionnée plus haut. Vingt-trois ans plus tard, Georges de [Rham] (1903-1990) a démontré que la classification de Hopf à isométrie près coïncide avec la classification à difféomorphisme près.

Les *espaces lenticulaires*, avec un groupe fondamental fini cyclique, constituent une sous-famille particulièrement intéressante. Les espaces lenticulaires avec un groupe d'ordre 5 avaient déjà été considérés par [Alexander] en 1919 comme des exemples de variétés de dimension 3 qui ne peuvent pas se distinguer par leur holonomie et leur groupe fondamental seulement. Les espaces lenticulaires ont été classifiés à homéomorphisme PL près en 1935 par Reidemeister, Franz, et de Rham, en utilisant un invariant qu'ils ont appelés *torsion*. Voir [Milnor 1966] ainsi que [Milnor et Burlet 1970] pour un survol de ces idées. L'invariance topologique de la torsion pour un complexe simplicial arbitraire a été démontrée beaucoup plus tard par [Chapman]. Un surprenant sous-produit de cette classification a été la classification des nœuds à « deux ponts » par Horst [Schubert en 1956], c'est-à-dire des nœuds qui peuvent être positionnés dans $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que la fonction hauteur a seulement deux maxima et deux minima. Il a démontré qu'un tel nœud est uniquement déterminé par son revêtement double ramifié associé qui est un espace lenticulaire.

Bien qu'il existe une grande diversité de variétés de dimension 3 à courbure constante négative, peu d'exemples étaient connus avant les travaux de Thurston à la fin des années 1970. Un exemple intéressant avait été déjà considéré en 1912 par [H. Gieseking]. À partir d'un simplexe régulier (de dimension 3) de longueur de côté infini dans l'espace hyperbolique, il identifie les faces par paires de façon à obtenir une variété hyperbolique non orientable, complète de volume fini. [Seifert et Weber] ont décrit un exemple compact en 1933. À partir d'un dodécaèdre régulier de taille convenablement choisie dans l'espace hyperbolique, ils identifient les faces opposées à l'aide d'une translation suivie d'une rotation d'angle $3\pi/5$ afin d'obtenir une variété hyperbolique compacte et orientable. Une construction analogue utilisant une rotation d'angle $\pi/5$ fournit la variété de Poincaré, avec la sphère comme revêtement de degré 120.

Une propriété importante des variétés à courbure négative a été obtenue par Alexandre Preissmann (1916-1990). [Preissmann], un étudiant de Heinz Hopf, a plus tard changé de domaine et est devenu un expert en hydrodynamique.

Théorème de Preissmann (1942). — *Si M^n est une variété riemannienne fermée de courbure strictement négative, alors tout sous-groupe abélien non trivial de $\pi_1(M^n)$ est libre et cyclique.*

Cette théorie connut un élan nouveau en 1975, quand Robert [Riley] (1935-2000) a étudié les représentations d'un groupe de nœud $\pi_1(S^3 \setminus K)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Notons que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ peut être vu soit comme le groupe des isométries préservant l'orientation de l'espace hyperbolique, soit comme le groupe conforme de sa sphère à l'infini. En utilisant ces représentations, Riley a pu produire quelques exemples de nœuds dont le complémentaire admet une structure de variété hyperbolique complète de volume fini.

S'inspirant de ces exemples, Thurston a développé une théorie riche des variétés hyperboliques. Voir la discussion dans le paragraphe suivant ; ainsi que [Kapovich 2001] ou [Milnor 1982].

La conjecture de géométrisation de Thurston.

La conjecture proposant un panorama complet des variétés de dimension 3 a été proposée par William [Thurston] en 1982. Elle s'énonce ainsi.

L'intérieur de toute variété compacte de dimension 3 *peut être scindé, de façon essentiellement unique, par des sphères (de dimension* 2*) et des tores disjoints et plongés en divers morceaux qui ont une structure géométrique. Ici, une* « structure géométrique » *peut être définie*[7] *comme une métrique riemannienne complète qui est localement isométrique à un des huit modèles donnés ci-dessous.*

Pour simplifier, je ne considérerai que le cas des variétés de dimension 3 fermées. Alors, nous pouvons dans un premier temps exprimer la variété comme

[7] Plus formellement, le modèle canonique pour une telle structure géométrique est une des huit paires possibles (X, G) où X est une variété (de dimension 3) simplement connexe, et G est un groupe transitif de difféomorphismes tel que G admet une forme volume invariante à droite et à gauche, de sorte que le sous-groupe fixant tout point de X est compact, et que G est le groupe maximal de difféomorphismes ayant cette propriété.

la somme connexe de variétés qui sont *premières* (c'est-à-dire, qui ne sont pas elle-mêmes décomposables en une somme connexe non trivale). Ceci implique que chaque variété première soit admet une telle structure géométrique, soit peut être scindée en ouverts admettant une telle structure. Les huit structures geométriques possibles permises sont représentées par les exemples suivants :

• la sphère S^3, de courbure constante $+1$,

• l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, de courbure constante 0,

• l'espace hyperbolique H^3, de courbure constante -1,

• le produit $S^2 \times S^1$,

• le produit $H^2 \times S^1$ du plan hyperbolique et du cercle,

• une métrique riemannienne invariante à gauche[8] sur le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,

• une métrique riemannienne invariante à gauche sur le groupe résoluble de *Poincaré-Lorentz* $E(1, 1)$, qui est formé des mouvements rigides sur un espace-temps de dimension $1 + 1$ muni d'une métrique plate $dt^2 - dx^2$,

• une métrique invariante à gauche sur le *groupe de Heisenberg*, qui est le groupe nilpotent formé des matrices 3×3 de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans chaque cas, le revêtement universel de la variété considérée fournit un modèle canonique pour la géométrie correspondante. Nous avons discuté des trois premiers exemples dans le paragraphe sur la courbure constante. Une variété orientable fermée qui est localement isométrique à $S^2 \times S^1$ est nécessairement difféomorphe (mais pas nécessairement isométrique) à la variété $S^2 \times S^1$ elle-même ; d'un autre côté, tout produit d'une surface de genre deux ou plus avec S^1 admet la structure géométrique donnée par $H^2 \times S^1$. Le fibré tangent unitaire d'une surface de genre deux ou plus admet la structure géométrique donnée par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Un tore fibré au-dessus d'un cercle représente la géométrie SOL de Poincaré-Lorentz à condition que sa monodromie soit représentée par une transformation du tore de matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dont une des valeurs propres est plus grande que 1. Enfin, tout cercle non trivial fibré au-dessus d'un tore représente la nilgéométrie. Six de ces huit géométries, c'est-à-dire toutes sauf la géométrie hyperbolique et la géométrie SOL, correspondent à des variétés qui ont une structure d'espace fibré de Seifert.
Deux cas sont particulièrement intéressants. La conjecture impliquerait que :

Une variété fermée de dimension 3 *a un groupe fondamental fini si et seulement si elle possède une métrique à courbure constante positive. En particulier, toute variété* M^3 *avec un groupe fondamental trivial doit être homéomorphe à* S^3.

[8] Voir [Milnor 1976b] §4 pour la liste des métriques invariantes à gauche en dimension 3.

C'est une version très forte de la conjecture de Poincaré. Une autre conséquence serait la suivante :

Une variété fermée M^3 est hyperbolique si et seulement si elle est première et possède un groupe fondamental infini qui ne contient pas de copie de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Dans le cas particulier des variétés de Haken, Thurston lui-même a démontré le dernier résultat, et en fait a démontré complètement la conjecture de géométrisation (toujours dans le cas des variétés de Haken). Voir [Morgan], [Thurston 1986], et [McMullen 1992]. Un autre résultat important de Thurston est qu'une surface fibrée au-dessus d'un cercle est hyperbolique si et seulement si

(1) sa monodromie à isotopie près est pseudo-Anosov, et
(2) la caractéristique d'Euler de sa fibre est négative.
Voir [Sullivan], [McMullen 1996], ou [Otal].

En ce qui concerne la conjecture de géométrisation de Thurston, les cas de la géométrie sphérique et de la géométrie hyperbolique sont extrêmement difficiles. Cependant, les autres géométries sont maintenant bien comprises. De nombreux auteurs y ont contribué par exemple [Gordon and Heil], [Auslander et Johnson], [Scott], [Tukia], [Gabai], [Casson and Jungreis] et [Thurston 1997] ou [Scott 1983b] pour d'excellentes présentations.

Le flot de Ricci.

Une méthode assez différente a été introduite par Richard [Hamilton 1982]. Considérons une variété riemannienne de coordonnées locales $u^1, \ldots, u^n$ et munie d'une métrique $ds^2 = \sum g_{ij} du^i\, du^j$. Le *flot de Ricci* associé est une famille à un paramètre de métriques riemanniennes $g_{ij} = g_{ij}(t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$\partial g_{ij}/\partial t = -2\, R_{ij}\,,$$

où $R_{ij} = R_{ij}(\{g_{hk}\})$ est le tenseur de Ricci associé. Cette équation différentielle a été choisie par Hamilton pour essentiellement les mêmes raisons que celles qui ont amené Einstein à introduire le tenseur de Ricci en théorie de la gravitation[9] — il avait besoin d'un tenseur symétrique d'indice 2 qui provienne naturellement du tenseur métrique et de ses dérivées $\partial g_{ij}/\partial u^h$ et $\partial^2 g_{ij}/\partial u^h \partial u^k$. Le tenseur de Ricci est essentiellement le seul possible. Le facteur 2 dans cette équation est plus ou moins arbitraire, mais le signe négatif est essentiel. En effet, l'équation du flot de Ricci est une espèce de généralisation non linéaire de l'équation de la chaleur

$$\partial \Phi/\partial t = \Delta \Phi$$

de la physique mathématique. Par exemple, lorsque g_{ij} varie sous l'action du flot, la *courbure scalaire* associée $R = \sum g^{ij} R_{ij}$ varie suivant une version non linéaire

$$\partial R/\partial t = \Delta R + 2 \sum R^{ij} R_{ij}$$

de l'équation de la chaleur. Comme pour l'équation de la chaleur, l'équation du flot de Ricci se comporte bien en temps positif et agit comme une sorte d'opérateur régularisant, mais est impossible à résoudre en temps négatif. Si

[9] Pour les liens entre le problème de géométrisation et la relativité générale, voir [Anderson].

certaines parties d'un objet solide sont chaudes et d'autres froides, alors, sous l'action du noyau de la chaleur, la chaleur va diffuser du chaud vers le froid de sorte que l'objet va peu à peu atteindre une température uniforme. D'une certaine façon, le flot de Ricci a le même type de comportement, ainsi la courbure « tente » de devenir plus uniforme ; mais il y a bien d'autres difficultés qui ne peuvent pas être surmontées facilement.

Pour donner un exemple de flot de Ricci, considérons une sphère de rayon r dans l'espace euclidien de dimension $(n+1)$. Alors, le tenseur de la métrique est de la forme

$$g_{ij} = r^2 \widehat{g}_{ij}$$

où $\widehat{g}_{ij}$ est la métrique de la sphère unité, alors que le tenseur de Ricci

$$R_{ij} = (n-1)\widehat{g}_{ij}$$

est indépendant de r. L'équation du flot de Ricci se réduit à

$$dr^2/dt = -2(n-1) \quad \text{avec comme solution} \quad r^2(t) = r^2(0) \, - \, 2(n-1)\, t \ .$$

Ainsi, la sphère s'effondre en un point en temps fini. Plus généralement, Hamilton a démontré le résultat suivant.

Théorème de Hamilton. — *Supposons que nous partions d'une variété compacte de dimension* 3 *dont le tenseur de Ricci est partout défini positif. Alors, lorsque la variété s'effondre en un point sous l'action du flot de Ricci, elle devient de plus en plus ronde. Si nous normalisons la métrique de sorte que le volume reste constant, alors elle converge vers une variété à courbure constante positive.*

Hamilton a tenté d'appliquer cette méthode à des variétés de dimension 3 plus générales, en analysant les singularités qui peuvent apparaître, mais il ne put que démontrer la conjecture de géométrisation sous des hypothèses supplémentaires très fortes (pour un survol de ces résultats, voir [Cao et Chow]).

Dans une suite de trois papiers remarquables, Grigory [Perelman] a annoncé qu'il avait surmonté ces difficultés, et a promis une solution complète de la conjecture de Thurston à l'aide des idées d'Hamilton ; les détails devront suivre dans un quatrième preprint. Une façon pour les singularités d'apparaître sous le flot de Ricci est qu'une sphère de dimension 2 dans M^3 peut s'effondrer en un point en temps fini. Perelman a démontré que de tels effondrements peuvent être éliminés en utilisant une sorte de « chirurgie » sur la variété qui est analogue à celle utilisée par Kneser et que nous avons décrite plus haut. Après un nombre fini de telles chirurgies, il affirme que chaque composante soit :

(1) converge vers une variété à courbure constante positive qui se contracte en un point en temps fini, ou encore,

(2) converge vers un $S^2 \times S^1$ qui se contracte sur un cercle en un temps fini, ou

(3) admet une décomposition « mince-épaisse » de Thurston, où la partie « épaisse » correspond à des variétés hyperboliques et la partie « mince » correspond aux autres géométries de Thurston.

Je ne vais pas essayer de commenter en détails les arguments de Perelman, qui sont ingénieux et d'une grande technicité. Cependant, il est clair qu'il a introduit de nouvelles méthodes qui sont à la fois puissantes et belles, et il a ainsi contribué largement à améliorer notre compréhension de ces problèmes.

Références

J. W. Alexander 1919, *Note on two three-dimensional manifolds with the same group*, Trans. Amer. Math. Soc. **20**, 339-342.

——— 1924, *On the subdivision of 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10**, 6-8.

M. T. Anderson 1997, *Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds*, M.S.R.I Publ. **30**.

——— 2001, *On long-time evolution in general relativity and geometrization of 3-manifolds*, Comm. Math. Phys. **222**, no. 3, 533–567.

——— (in preparation).

L. Auslander and F.E.A. Johnson 1976, *On a conjecture of C.T.C. Wall*, J. Lond. Math. Soc. **14**, 331-332.

L. Bieberbach 1910, *Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich*, Gött. Nachr., 75-84.

——— 1911/12, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, II*, Math. Ann. **70**, 297-336 and **72**, 400-412.

R. H. Bing 1964, *Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture*, in "Lectures on Modern Mathematics II", Wiley, edit. T. L. Saaty.

H.-D. Cao and B. Chow 1999, *Recent developments on the Ricci flow*, Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 59–74.

A. Casson and D. Jungreis 1994, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, Invent. Math. **118**, 441–456.

J. Cerf 1968, "Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$)", Lecture Notes in Mathematics **53**, Springer-Verlag.

T. A. Chapman 1974, *Topological invariance of Whitehead torsion*, Amer. J. Math. **96**, 488–497.

L. Charlap 1986, "Bieberbach Groups and Flat manifolds", Springer. (See also his : *Compact flat riemannian manifolds, I*, Ann. of Math. **81** (1965) 15–30.)

M. Dehn 1910, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. **69**, 137-168.

K. Devlin 2002, "The Millennium Problems", Basic Books.

M. H. Freedman 1982, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17**, 357-453.

D. Gabai 1992, *Convergence groups are Fuchsian groups*, Annals of Math. **136**, 447-510.

H. Gieseking 1912, *Analytische Untersuchungen ueber topologische Gruppen*, Thesis, Muenster.

R. Gompf 1993, *An exotic menagerie*, J. Differential Geom. **37**, 199-223.

C. McA. Gordon 1999, *3-dimensional topology up to 1960*, pp. 449-490 of James 1999.

C. McA. Gordon and W. Heil 1975, *Cyclic normal subgroups of fundamental groups of 3-manifolds*, Topology **14**, 305-309.

W. Haken 1961a, Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **76**, 427–467.

———1961b, Theorie der Normalflächen. Acta Math. **105**, 245–375.

——— 1962, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten I*, Math. Z. **80**, 89-120.

R. S. Hamilton 1982, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17**, no. 2, 255–306.

——— 1995, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136, Internat. Press, Cambridge, MA.

——— 1999, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds* Comm. Anal. Geom. **7**, no. 4, 695–729.

J. Hempel 1976, "3-Manifolds", Annals Math. Studies **86**, Princeton U. Press.

M. Hirsch 1963, *Obstruction theories for smoothing manifolds and maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 352-356.

H. Hopf 1925, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Annalen **95**, 313-319.

W. Jaco and P. Shalen 1979, *Seifert fibered spaces in* 3*-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 21, no. **220**.

I. M. James (editor) 1999, "History of Topology", North-Holland, Amsterdam.

K. Johannson 1979, *Homotopy equivalences of* 3*-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics **761**, Springer.

M. Kapovich 2001, "Hyperbolic manifolds and discrete groups", Progress in Mathematics **183**, Birkhäuser.

R. Kirby and L. Siebenmann 1969, *On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung*, Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 742–749.

H. Kneser 1929, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung. **38**, 248-260.

J. Milnor 1957, *Groups which act on* S^n *without fixed points*, Amer. J. Math. **79**, 623-630 ; reprinted in Milnor 1995.

——— 1962, *A unique decomposition theorem for* 3*-manifolds* Amer. J. Math. **84**, 1–7 ; reprinted in Milnor 1995.

——— 1966, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 358-426 ; reprinted in Milnor 1995.

——— 1976a, *Hilbert's problem 18 : on crystallographic groups, ...*, pp. 491-506 of "Mathematical Developments arising from Hilbert Problems", Proc. Symp. Pure Math. **28**, Part 2, A.M.S. ; reprinted in Milnor 1994.

——— 1976b, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Advances in Math. **21**, 293-329 ; reprinted in Milnor 1974.

——— 1982, *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, Bull. A.M.S. **6**, 9-24 ; also in "Proc. Symp. Pure Math. **39** A.M.S. 1983 ; and in Milnor 1995 (see also : '*How to compute volume in hyperbolic space*' in this last collection).

——— 1994, "Collected Papers **1**, Geometry", Publish or Perish.

——— 1995, "Collected Papers **2**, The Fundamental Group", Publish or Perish.

——— and O. Burlet 1970, *Torsion et type simple d'homotopie*, pp. 12-17 of Essays on Topology and Related Topics", Springer ; reprinted in Milnor 1995.

C. McMullen 1992, *Riemann surfaces and geometrization of 3-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **27**, 207-216.

——— 1996, "Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle", Annals of Mathematics Studies **142**, Princeton U. Press.

E. E. Moise 1977, "Geometric Topology in Dimensions 2 and 3", Springer.

J. Morgan 1984, *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*, pp. 37-125 of "The Smith Conjecture", edit : Bass and Morgan, Pure and Appl. Math. **112**, Ac. Press.

J. Munkres 1960, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms,* Annals Math. **72**, 521-554. (See also : *Concordance is equivalent to smoothability*, Topology **5** (1966) 371-389.)

J.-P. Otal 1996, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque **235** ; translated in SMF/AMS Texts and Monographs **7**, American Mathematical Society and Société Mathématique de France, Paris, 2001.

C. Papakyriakopoulos 1957, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots* Ann. of Math. **66**, 1–26. (See also : Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43** (1957) 169–172.)

——— 1960, *The theory of three-dimensional manifolds since 1950* Proc. Internat. Congress Math. 1958 pp. 433–440 Cambridge Univ. Press, New York

G. Perelman 2002, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* (available on the net from : arXiv :math.DG/0211159 v1, 11 Nov).

——— 2003, *Ricci flow with surgery on three-manifolds* ; and *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds* (available from : arXiv :math.DG/0303109 v1, 10 Mar ; and 0307245, 17 Jul).

H. Poincaré 1895, *Analysis situs*, Journal de l'École Polytechnique **1**, 1-121. (See Œuvres, Tome VI, Paris 1953, 193-288.)

——— 1900, *Second complément a l'analysis situs*, Proc. Lond. Math. Soc. **32**, 277-308. (See Œuvres, Tome VI, Paris 1953, p. 370.)

——— 1904, *Cinquième complément a l'analysis situs*, Rendiconti Circ. mat. Palermo **18**, 45-110. (See Œuvres, Tome VI, Paris 1953, p. 498.)

A. Preissmann 1942, *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann*, Comment. Math. Helv. **15**, 175-216.

G. de Rham 1950, *Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiables*, Ann. Inst. Fourier **2**, 51-67.

R. Riley 1975, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77**, 281–288.

——— 1979, *An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures*, "Topology of low-dimensional manifolds" (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate), pp. 99–133, Lecture Notes in Math., **722**, Springer, Berlin.

——— 1982, *Seven excellent knots*, Low-dimensional topology (Bangor), pp. 81–151, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **48**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York.

H. Schubert 1956, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65**, 133–170.

——— 1961, *Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen*, Math. Z. **76**, 116–148.

P. Scott 1980, *A new proof of the annulus and torus theorems*, Amer. J. Math. 102, 241-277.

——— 1983a, *There are no fake Seifert fibre spaces with infinite* π_1, Annals of Math. **117**, 35-70

—— 1983b, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **15**, 401–487.

H. Seifert 1931, *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume*, Berichte Verh. Sächs. Akad. Wiss. zu Leipzig **83**, 26-66.

——— 1933, *Topologie dreidimensionales gefaserter Raum*, Acta Math. **60**, 147-288 ; translated in "Pure and Applied Mathematics **89**" Academic Press 1980.

——— and W. Threlfall 1934, "Lehrbuch der Topologie", Teubner ; translated in "Pure and Applied Mathematics **89**" Academic Press 1980.

——— and C. Weber 1933, *Die beiden Dodekaederräme*, Math. Z. **37** 237-253.

S. Smale 1959, *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10**, 621–626.

——— 1960, *The generalized Poincaré conjecture in higher dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. **66**, 373–375. (See also : *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Annals Math. **74** (1961) 391-406 ; as well as : *The story of the higher dimensional Poincaré conjecture* (*What actually happened on the beaches of Rio*), Math. Intelligencer **12** (1990) 44-51.)

J. Stallings 1960, *Polyhedral homotopy spheres,* Bull. Amer. Math. Soc. **66**, 485-488.

D. Sullivan 1981, *Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et sur les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur le cercle,* Sém. Bourbaki 554, Lecture Notes Math. 842.

W. P. Thurston 1982, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, 357-381. (Also in "The Mathematical heritage of Henri Poincaré", Proc. Symp. Pure Math. **39** (1983), Part 1.)

——— 1986, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, I, deformation of acyclic manifolds* , Annals of Math. **124**, 203-246

——— 1997, "Three-Dimensional Geometry and Topology", Vol. 1. edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series **35**. Princeton University Press.

P. Tukia 1988, *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. Reine Angew. Math. **391**, 1-54.

F. Waldhausen 1967a, Gruppen mit Zentrum und 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Topology **6** 1967 505–517.

——— 1967b, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I, II, Invent. Math. **3** (1967), 308–333 ; ibid. 4 1967 87–117.

textsc——— 1968, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Annals of Math. **87**, 56-88.

A. Wallace 1961, *Modifications and cobounding manifolds, II*, J. Math. Mech **10**, 773-809.

G. W. Whitehead 1983, *Fifty years of homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **8**, 1–29.

H. Zassenhaus 1948, *Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen,* Comment. Math. Helv. **21**, 117–141.

E. C. Zeeman 1962, *The Poincaré conjecture for* $n \geq 5$, pp. 198-204 of "Topology of 3-Manifolds and Related Topics" Prentice-Hall 1962. (See also Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961) p. 270.)

Le prix Abel décerné à Jean-Pierre Serre

Antoine Chambert-Loir

En 2003, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décerné le premier prix Abel au mathématicien français Jean-Pierre Serre, « pour avoir joué un rôle clef en donnant à de nombreux domaines des mathématiques leur forme moderne, notamment la topologie, la géométrie algébrique et la théorie des nombres ».

Quelques mots tout d'abord à propos du mathématicien norvégien dont le nom est attaché à ce nouveau prix. Bien qu'emporté très jeune par la tuberculose, Niels Henryk Abel (1802–1829) a révolutionné les mathématiques et, pour reprendre le mot de Hermite, « laissé aux mathématiciens de quoi s'occuper pendant cinq cents ans. » Par exemple, l'étude qu'il fit des intégrales elliptiques et de leur généralisation, aujourd'hui appelées *intégrales abéliennes*, est encore au cœur de la géométrie algébrique moderne, sous une forme à peine modifiée par l'introduction, due à Riemann, du langage géométrique.

Mais revenons à notre sujet. Jean-Pierre Serre est né en 1926 dans la région de Nîmes, de parents pharmaciens. Il entre à l'École normale supérieure en 1945 puis au CNRS en 1948. Il soutient sa thèse d'État en Sorbonne en 1951 sur un sujet de topologie ; les résultats qu'il y établit font immédiatement grand bruit et trois ans plus tard, il reçoit la médaille Fields, un prix qui, jusqu'à la création du prix Abel, était considéré comme équivalent au prix Nobel, lequel n'existe pas en mathématiques, et dont il reste à ce jour le plus jeune récipiendaire ! Après avoir enseigné quelques années à Nancy, il est élu professeur au Collège de France en 1956 où il y enseigne jusqu'à sa retraite en 1994. Pendant toutes ces années, il a aussi enseigné dans de nombreuses universités étrangères, notamment Harvard. Il est membre de l'Académie des sciences, ainsi que de plusieurs Académies étrangères (américaine, suédoise, hollandaise,...).

Tout au long de sa carrière, Serre a reçu de nombreux prix ; outre la médaille Fields et ce prix Abel, je mentionnerai le prix Steele (1995) de la Société mathématique américaine récompensant l'exceptionnelle qualité de l'exposé mathématique de son *Cours d'arithmétique*, et le prix Wolf (2000) pour « ses nombreuses contributions fondamentales à la topologie, la géométrie algébrique, l'algèbre et la théorie des nombres, ainsi que pour ses cours et ses écrits qui ont été une grande source d'inspiration. »

L'œuvre mathématique de Serre est immense. La plupart des articles qu'il a écrits, environ 200, ont été regroupés dans quatre gros volumes édités par Springer-Verlag, à l'exception notable de plusieurs rédigés avec Armand Borel.

Il a aussi publié une dizaine de livres tirés souvent de cours à l'École normale, au Collège de France, ou à Harvard : chacun, quel que soit le niveau où il se

Je voudrais remercier D. Bertrand, P. Colmez et J. Oesterlé pour leurs remarques et suggestions. Je voudrais aussi profiter de ces lignes pour remercier P. Colmez et J.-P. Serre de l'aide qu'ils m'ont apportées lors de la rédaction de la notice sur J. Tate, parue dans le dernier numéro de la *Gazette*.

place, est aujourd'hui un classique incontournable. Sans compter les livres qu'il a contribué à publier au sein de Bourbaki, ce groupe de mathématiciens qui, en adoptant une méthode axiomatique, entreprit à partir des années 1935 d'asseoir les mathématiques contemporaines sur des bases rigoureuses, en procédant « le plus souvent du général au particulier ».

En mathématiques comme dans beaucoup d'autres disciplines scientifiques, l'apprentissage est *oral* ; dans les séminaires tels que ceux que Henri Cartan organisa de 1948 à 1964 et dont le principe est toujours en vigueur, il est en outre *collectif*. Serre a fait, tout au long de sa carrière, un très grand nombre d'exposés dans des séminaires variés : du séminaire Cartan qui développait la topologie algébrique, la géométrie analytique, l'algèbre homologique, les fonctions automorphes, etc. aux séminaires Sophus Lie, ou Chevalley sur la théorie des groupes de Lie, mais aussi, bien sûr, au séminaire qu'organise N. Bourbaki pour favoriser la diffusion des mathématiques les plus actuelles... Les rédactions de ces exposés proposent souvent un point de vue nouveau et restent d'une valeur inappréciable. Certaines sont publiées dans ses Œuvres complètes, d'autres dans un volume édité en 2001 par la Société Mathématique de France.

Serre a écrit de très nombreuses lettres. Il y explique ce qu'il est en train de faire, et l'on peut voir s'ébaucher des mathématiques. Certaines d'entre elles furent même aussitôt publiées, comme la lettre à Weil sur les « analogues kählériens de certaines conjectures de Weil » (*Annals of maths* **71** (1960), p. 392–394 ; *Œuvres,* n° 45) qui ont inspiré les conjectures standard de Grothendieck ! Il répond aussi à des questions qu'on lui a posées. Une partie de cette correspondance occupe une place à part, ne serait-ce que parce qu'elle a été rendue publique : celle avec Alexander Grothendieck, qu'ont éditée Serre et P. Colmez ; correspondance fabuleuse et joliment recensée par M. Raynaud dans le dernier numéro de la *Gazette des mathématiciens*.

En sus d'une profusion de thèmes et de théorèmes, toute l'œuvre de Serre est marquée par un style d'une clarté incomparable. Il est économe de ses mots, et de ses moyens, et cela lui permet d'aller droit à l'essentiel. La clarté de ses textes se retrouve dans ses exposés oraux. Ses cours au Collège de France ont ainsi été pendant trente ans un moment unique pour tous ceux qui eurent la chance de les suivre.

Il est impossible de rendre compte d'une telle œuvre en quelques pages. Je voudrais pourtant expliquer quelques uns des thèmes que Serre a abordés en essayant de montrer en quoi il a, à chaque fois, révolutionné la façon d'envisager un problème.

Je dois hélas en omettre de nombreux autres : multiplicités d'intersection, anneaux locaux réguliers, compactification de quotients, formes modulaires p-adiques, ou plus récemment les sous-groupes finis des groupes de Lie simples... La liste est longue des nouveaux outils que Serre a forgés et qui ont modifié en profondeur le développement de ces théories.

Topologie algébrique : groupes d'homotopie des sphères

Dit grossièrement, la *topologie*, du grec *topos*, est l'étude des « lieux », des « formes ». Font par exemple partie de ses ambitions la classification des nœuds

dans l'espace, définis comme l'image du cercle par une application continue injective, ou de manière imagée comme la disposition d'un lacet (de chaussure) placé dans l'espace et recollé en ses extrémités. Comme il y a beaucoup trop de latitude, on décide de négliger leurs déformations (le terme mathématique est *homotopies*) et de considérer comme équivalents deux nœuds qui pourraient se déformer l'un en l'autre. Plus généralement, la *topologie algébrique* associe à tout « espace » (topologique) des objets de nature algébrique (groupes, entiers), invariants par ces déformations ; ce sont les groupes d'homotopies. Cependant, il est souvent très difficile de les calculer, c'est même parfois *indécidable*.

Appelons sphère de dimension n l'ensemble $\mathbf{S}_n$ des solutions dans l'espace à $n+1$ dimensions de l'équation $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$; on obtient un cercle pour $n = 1$, une sphère pour $n = 2$. Cette sphère possède des groupes d'homotopies $\pi_1(\mathbf{S}_n)$, $\pi_2(\mathbf{S}_n)$, et ainsi de suite. Il est facile de calculer les premiers groupes : $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ est nul si $i < n$, mais la détermination de $\pi_n(\mathbf{S}_n)$ (isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs) permet de démontrer des résultats tout à fait non triviaux en topologie (théorèmes de Brouwer, d'invariance du domaine, etc.). Le premier exemple d'entiers (i, n) avec $i > n$ où l'on sache que le groupe $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ n'est pas nul a été donné par H. Hopf en 1931 ! (Il s'agit de $\pi_3(\mathbf{S}_2)$, égal à $\mathbf{Z}$.)

C'est dans ce contexte que s'insère la thèse de Jean-Pierre Serre, « Homologie singulière des espaces fibrés » (*Œuvres*, n° 9), publiée en 1951, dans laquelle il démontre que les groupes d'homotopies de tout espace raisonnable (simplement connexe et d'homologie de type fini) ont un nombre fini de générateurs. Concernant les groupes d'homotopie des sphères, il montre qu'ils sont tous *finis*, à deux familles d'exceptions près. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a déjà dit que le groupes $\pi_n(\mathbf{S}_n)$ est égal au groupe infini $\mathbf{Z}$. Toujours pour $n \geqslant 1$, Serre démontre que $\pi_{4n-1}(\mathbf{S}_{2n})$ est égal à la somme du groupe $\mathbf{Z}$ et d'un groupe fini ; pour $n = 1$, il s'agit précisément du groupe étudié par Hopf.

En un certain sens, la démonstration de Serre est très simple ; elle est de fait emblématique de ce qu'ont permis les mathématiques (« modernes » !) de la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle. Elle procède par récurrence, en combinant deux idées.

La première provient des travaux qu'avait réalisés Jean Leray, alors qu'il était prisonnier pendant la seconde guerre mondiale, précisément la *suite spectrale des espaces fibrés*. Contentons nous de dire que c'est une machinerie de nature algébrique qui « calcule » les groupes d'*homologie* d'un espace fibré en fonction de ceux de sa base et de sa fibre. On voit ainsi l'apparition de méthodes algébriques modernes en topologie ; ces méthodes *homologiques* ont d'ailleurs joué un rôle sans cesse grandissant dans les mathématiques contemporaines (de la géométrie aux équations aux dérivées partielles, en passant par l'algèbre et l'arithmétique). Et il n'est presque pas d'article de Serre qui n'y fasse référence.

La seconde idée vient de ce que l'on peut calculer les groupes d'homotopie d'un espace en termes des groupes d'homologie d'autres espaces, obtenus par deux constructions : le revêtement universel et l'espace des lacets. Peu de temps auparavant, Henri Cartan avait établi l'existence d'une suite spectrale qui permet d'analyser ce qui se passe lorsqu'on passe au revêtement universel. Il restait à en faire de même pour l'espace des lacets. Serre constate alors que cet espace, même s'il n'est pas un espace fibré au sens antérieur, en possède

la propriété essentielle de « relèvement des homotopies » et cela lui permet de démontrer l'existence de la suite spectrale dans le cas qui l'intéresse.

Géométrie algébrique, géométrie analytique

Après avoir développé un peu plus encore ces techniques homologiques, Serre les utilise dans le contexte de l'analyse complexe à plusieurs variables. En effet, homologie, cohomologie et théorie des faisceaux (aussi inventée par Jean Leray) permettent de formuler de façon très compacte certains énoncés (comme le problème de Cousin ou les théorèmes d'Oka), mais permettent aussi d'aborder leurs *démonstrations*, car elles se prêtent bien à des raisonnements par récurrence sur la dimension de l'espace, *cf.* par exemple les fameux théorèmes A et B de H. Cartan. Un résultat fondamental, démontré par Cartan et Serre, est que les groupes de cohomologie d'une variété analytique compacte sont de dimension finie (*Œuvres,* n° 24, 1953). En 1955, Serre démontre aussi un important théorème de dualité (*Œuvres,* n° 28). Il donne aussi une formulation et une démonstration cohomologiques du théorème classique (XIX^{e} siècle) de Riemann-Roch. Avec cette formulation, la preuve devient très simple, se généralise « facilement » du cas des courbes au cas des surfaces (établi par Kodaira peu de temps auparavant), et sera généralisée au cas des variétés de dimension arbitraire par Hirzebruch six mois plus tard.

Sur ce modèle, Serre développe alors une nouvelle approche de la géométrie algébrique : c'est l'article « Faisceaux algébriques cohérents » (*Œuvres,* n° 29, 1955), parfois cité simplement FAC. Tout d'abord, Serre montre dans cet article que la « topologie de Zariski » sur une variété algébrique, de prime abord assez éloignée de la topologie usuelle, permet une théorie des faisceaux tout à fait semblable à la théorie usuelle. Il y démontre en particulier les analogues des théorèmes A et B.

Dans « Géométrie algébrique et géométrie analytique » (*Œuvres,* n° 32, 1956), souvent cité GAGA, Serre montre même que les groupes de cohomologie d'une variété algébrique projective complexe s'identifient à ceux définis par la géométrie analytique. Cela fournit en particulier une démonstration *cohomologique* d'un théorème de Chow selon lequel toute sous-variété analytique d'un espace projectif complexe est algébrique, c'est-à-dire est définie par des équations polynomiales. En outre, Serre dégage dans cet article la notion algébrique de *platitude* ; elle joue depuis un rôle fondamental en algèbre et en géométrie algébrique.

Ces années-là voient aussi l'irruption de Grothendieck sur la scène mathématique française. Après des travaux en analyse fonctionnelle, Grothendieck suit plus ou moins les pas de Serre à travers l'algèbre homologique. Dans le but de démontrer les conjectures de Weil sur le nombre de solutions d'équations polynomiales à coefficients dans des corps finis, Grothendieck se lance alors dans une fantastique refonte de la géométrie algébrique. C'est la théorie des schémas à laquelle la contribution de Serre est fondamentale. Non seulement le point de vue adopté (faisceaux, cohomologie) généralise-t-il ses travaux, mais l'influence de Serre se révèle aussi à la lecture de la correspondance nourrie que poursuivront les deux mathématiciens pendant de nombreuses années. C'est aussi d'un exposé de Serre sur les *espaces fibrés algébriques* (Séminaire Claude

Chevalley, 1957/58, n° 1, reproduit dans les *Exposés de séminaires*), qu'est née la topologie étale des schémas et la cohomologie du même nom.

Théorie des nombres : courbes elliptiques et formes modulaires

Née au XIX^e siècle de l'étude des intégrales elliptiques, ainsi appelées parce qu'elles permettent de paramétrer les ellipses par longueur d'arc, puis de l'étude des fonctions méromorphes possédant deux périodes indépendantes, la théorie des courbes elliptiques a pris au XX^e siècle une nette couleur arithmétique. Une courbe elliptique est définie par une équation polynomiale en deux variables, de degré 3, de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$. Si l'on considère deux points d'une telle courbe, la droite qui les joint recoupe la courbe en un troisième, d'où la possibilité de construire des points par cordes (et tangentes). Modifions cette procédure en considérant non pas le troisième point d'intersection, mais son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À condition d'adjoindre à la courbe un point « à l'infini », on peut montrer que cela munit l'ensemble des points de la courbe elliptique d'une loi d'addition, tout à fait semblable à celle des nombres entiers.

Certains points ont alors une propriété particulière, en ce que si on les ajoute suffisamment de fois à eux-mêmes, on tombe au bout d'un certain nombre d'itérations sur le point à l'infini. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut en outre écrire un polynôme en une variable x dont les racines sont les abscisses des points pour lesquelles l'itération aboutit au point à l'infini à la n-ième étape ; c'est l'analogue du polynôme cyclotomique dont les racines sont les racines primitives n-ièmes de l'unité, longuement étudié par C.-F. Gauss au début du XIX^e siècle.

Supposons maintenant que les deux paramètres a et b qui définissent la courbe elliptique que nous étudions soient des nombres rationnels. En adjoignant alors les coordonnées (x, y) de ces « points de division par n », on définit un corps de nombres algébriques que Serre a étudié en détail. Son groupe de Galois est naturellement un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans l'anneau des entiers modulo n, et un des résultats fondamentaux de Serre sur ce sujet est que si n est un nombre premier assez grand, ces deux groupes sont *égaux*, pourvu que la courbe elliptique n'ait pas de multiplication complexe (« Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques », *Œuvres,* n° 94, 1972). Ce théorème peut être vu comme une généralisation de l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques de Gauss.

Un peu avant, dans *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves* (Benjamin Publ., 1968 ; 2^e édition, A. K. Peters, 1998), Serre avait étudié comment s'organisent ces groupes de Galois lorsque l'on fait varier n parmi les puissances d'un nombre premier ℓ fixé. Toujours lorsque la courbe n'a pas de multiplication complexe, on obtient des « sous-groupes de Lie ℓ-adiques » ouverts du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans l'anneau des entiers ℓ-adiques, presque toujours égaux au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$.

Les résultats précédents correspondent en fait à des *représentations* de dimension 2 du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ (à coefficients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_\ell$). Selon

la philosophie de Langlands, de telles *représentations galoisiennes* doivent correspondre à des *formes modulaires*. On sait en effet attacher aux deux types d'objets des fonctions holomorphes définies par une série de Dirichlet (*séries L*) que l'on peut décomposer en produit eulérien (par définition dans le cas des représentations galoisiennes, via un théorème de Mordell dans le cas des formes modulaires). Dans le cas des formes modulaires, ces séries L possèdent une équation fonctionnelle remarquable, due à Hecke.

En 1974, Deligne et Serre (« Formes modulaires de poids 1 », *Œuvres,* n° 101) ont construit, pour toute forme modulaire de poids 1, une représentation du groupe $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ à coefficients complexes. Le cas du poids $k = 2$ avait été traité par Shimura (1961), celui des poids plus grands par Deligne quelques années auparavant ; les coefficients des représentations construites sont alors les entiers ℓ-adiques. Ces constructions sont importantes, non seulement parce qu'elles confirment la philosophie de Langlands, mais aussi parce qu'elles permettent de majorer les coefficients de Fourier des formes modulaires (c'est ainsi que Deligne démontra la conjecture de Ramanujan sur la fonction τ).

Il restait la question de savoir si les réprésentations galoisiennes, telle celle associée à une courbe elliptique, proviennent effectivement de ces constructions, autrement dit si la série L attachée à une courbe elliptique vérifie une certaine équation fonctionnelle. La conjecture précise porte, suivant les auteurs, les noms de Taniyama, Shimura et Weil et a connu un regain d'intérêt au début des années quatre-vingts quand G. Frey a suggéré que cette conjecture pourrait permettre de démontrer — enfin ! — le grand théorème de Fermat.

Cette nouvelle approche du théorème de Fermat a été rendue possible grâce à une conjecture très précise de Serre, publiée en 1987, sur la nature modulaire des représentations galoisiennes à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, ℓ étant un nombre premier (« Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ », *Œuvres,* n° 143). En fait, autant il arrive fréquemment à Serre de poser des *questions*, autant rares sont ses *conjectures*. En l'occurrence, ce sont des vérifications numériques effectuées par J.-F. Mestre qui ont convaincu Serre de la justesse de cette conjecture.

Ainsi se trouvait précisée l'intuition de Frey que « Weil + ε $\Rightarrow$ Fermat ». C'était la prise nécessaire à l'ascension de ce sommet récalcitrant ! Le ε est devenu peu après un théorème de K. Ribet (1990). Dans le cas nécessaire pour Fermat, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil a ensuite été démontrée par A. Wiles (avec la collaboration de R. Taylor) en 1995, puis étendue au cas général par Breuil, Conrad, Diamond et Taylor (2001).

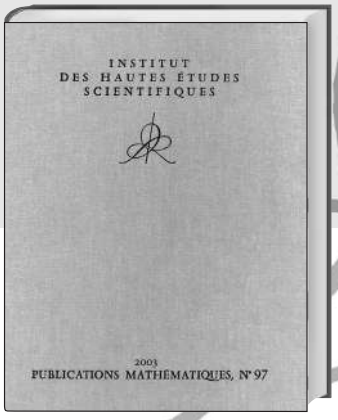
Il est difficile d'imaginer ce que seraient les mathématiques aujourd'hui sans l'œuvre de Jean-Pierre Serre.

Références bibliographiques

Jean-Pierre Serre. — *Œuvres. Collected papers,* volume I (1949–1959), II (1960–1971), III (1972–1984), IV (1985–1998). Springer-Verlag, 2000.

Jean-Pierre Serre. — *Exposés de séminaires (1950–1999),* Documents mathématiques **1**, Société Mathématique de France, 2001.

Pierre Colmez, Jean-Pierre Serre (éditeurs). — *Correspondance Grothendieck–Serre,* Documents mathématiques **2**, Société Mathématique de France, 2001.
Jean-Pierre Serre. — *Cours d'arithmétique,* Presses universitaires de France, 1970. (Trad. anglaise, Springer-Verlag, 1978.)
C. T. Chong, Y. K. Leong. — « An interview with J-P. Serre », *Intelligencer* **8** (1986), p. 8–13.
Michel Raynaud. — « Jean-Pierre Serre : une certaine éthique des mathématiques », *Gazette des mathématiciens* **98**, octobre 2003.
Michel Raynaud. — Recension de la *correspondance Grothendieck-Serre*, *Gazette des mathématiciens* **98**, octobre 2003. (Trad. anglaise : *Notices of the AMS*, octobre 2003.)
Marian Schmidt. — « Entretien avec Jean-Pierre Serre », *in Hommes de sciences*, p. 218–227, Hermann, 1990 ; reproduit dans *Wolf Prize in Mathematics*, édité par S. S. Chern et F. Hirzebruch, vol. 2, p. 523–551, World Scientific Publishing (2001).



PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES

de l'Institut des Hautes Études Scientifiques

Editeur-en-chef:

Étienne Ghys, Lyon, France

Comité éditorial:

J. Bourgain, Princeton, NJ
A. Connes, Bures-sur-Yvette
P. Deligne, Princeton, NJ
É. Ghys, Lyon
M. Gromov, Bures-sur-Yvette
M. Kontsevitch, Bures-sur-Yvette
L. Lafforgue, Bures-sur-Yvette
D. Sullivan, Stony Brook, NY

Les Publications Mathématiques de l'IHÉS sont une revue internationale qui publie des articles du plus haut niveau scientifique. Grâce à sa distribution mondiale (on la trouve dans les bibliothèques des plus grandes institutions mathématiques du monde entier), à sa tradition de publier des articles qui font date et au champ très large qu'elle couvre, elle a gagné une grande reconnaissance internationale. Les membres du comité de rédaction de la revue ont reçu des prix internationaux, dont pour plusieurs d'entre eux la Médaille Fields.

En 2002, **Laurent Lafforgue** a reçu la **Médaille Fields** et **Mikhael Gromov** a reçu le célèbre **Prix Kyoto** de la Fondation Inamori au Japon.

Information pour souscrire en 2004:

Volumes 97 et 98 (2 volumes)
incluant l'accès au serveur SpringerLink
€ 298 plus frais de port
ISSN 0073-8301 (version imprimée)
ISSN 1618-1913 (version électronique)
Titre N° 10240

Copie électronique consultable gratuitement à

springerlink.com

Les commandes sont à passer à
Springer • Customer Service
Haberstrasse 7, D-69126 Heidelberg, Allemagne
Tél.: +49 6221 - 345 - 0
Fax: +49 6221 - 345 - 4229
Mél : subscriptions@springer.de
ou à votre distributeur habituel.

010153x

Springer

Œuvres choisies de Jacques-Louis Lions

Ces trois volumes des *Œuvres choisies* rassemblent une sélection d'articles et de monographies représentatifs des travaux de recherche de Jacques-Louis Lions, regroupés par grands thèmes.



Jacques-Louis Lions a été professeur au Collège de France, professeur à l'École Polytechnique, président de l'INRIA, président du CNES et président de l'Académie des Sciences. Il est décédé le 17 mai 2001.

Son influence sur les mathématiques appliquées a été considérable en France et dans le monde. Il a publié plus de 20 livres et près de 600 articles dans les principales revues internationales de mathématiques. La SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) et la SMF (Société Mathématique de France) se devaient de publier ces *Œuvres choisies*.

Chaque volume est précédé d'une brève introduction rédigée par un membre du Comité Scientifique (Alain Bensoussan, Philippe G. Ciarlet, Roland Glowinski et Roger Temam) qui a sélectionné les œuvres retenues.

Le volume I traite des équations aux dérivées partielles et de l'interpolation.
Le volume II porte sur le contrôle et l'homogénéisation.
Le volume III est consacré à l'analyse numérique, au calcul scientifique et aux applications.

Découpez ou photocopiez ce bon de commande et renvoyez-le à :
EDP Sciences – BP 112 – 91944 Les Ulis Cedex A – Tél. : 33 (0)1 69 18 75 75 – Fax : 33 (0)1 69 86 06 78
ou par internet : service-client@edpsciences.com – www.edpsciences.com

Nom : ..... Prénom : ..... Téléphone : .....

E-mail : ..... Adresse : .....

Code Postal : ..... Ville : ..... Pays : .....

	Prix Unitaire	Quantité	TOTAL €
Équations aux dérivées partielles et interpolation (Vol. 1)	**70 €**	x	=
Contrôle et homogénéisation (Vol. 2)	**70 €**	x	=
Analyse numérique, calcul scientifique et applications (Vol. 3)	**70 €**	x	=
Les 3 volumes des Œuvres choisies (Vol. 1 + Vol. 2 + Vol. 3)	~~210 €~~ **170 €**	x	=

Frais de port	1 livre	Livre supplémentaire	Plus de 5 livres	
France métropolitaine	4 €	+ 1 €	nous consulter	+
DOM et Europe	7 €	+ 2 €		
TOM et reste du monde	9 €	+ 3 €		
			TOTAL	=

LIONS/SMF/10-03

Paiement :

– par chèque à l'ordre d'EDP Sciences (à joindre à la commande)

– par carte bancaire :

❑ *VISA* ❑ *Eurocard* ❑ *American Express*

N° de Carte :

|_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| *Date d'expiration :* ..... /..... *Date et signature :*

Modèles et Systèmes complexes, le changement climatique global

(Histoire, Épistémologie, Anthropologie, Politique)

Michel Armatte

Les modélisations du changement climatique ont été l'objet d'un atelier organisé par Amy Dahan et Michel Armatte dans la semaine du 14 au 20 septembre dernier à Lalonde les Maures, dans le cadre du projet « Modélisation, Simulation et Gestion des Systèmes Complexes » de l'ACI Terrains Techniques Théories. Ce projet, consultable sur le site du Centre Koyré (laboratoire d'histoire des sciences mixte CNRS – École des hautes études en sciences sociales (EHESS) – Muséum national d'histoire naturelle) vise à étudier les nouvelles formes de la modélisation mathématique et de la simulation de systèmes. Michel Armatte a bien voulu, à notre demande, faire un compte rendu des travaux de cet atelier pour la Gazette.

Le projet « Modélisation, Simulation et Gestion des Systèmes Complexes » de *l'ACI Terrains Techniques Théories* prend la suite de 4 années d'un séminaire EHESS/Koyré sur « Modèle et Modélisation dans les sciences physiques et les sciences sociales ». Il vise à étudier les nouvelles formes de la modélisation mathématique et de la simulation de systèmes dont l'étude scientifique tout autant que la gestion collective ne peuvent plus se faire dans le cadre classique d'une science unifiée[1]. Le climat de notre Terre, qui est maintenant l'enjeu non seulement de spéculations théoriques mais aussi de négociations internationales intenses, en particulier depuis les accords de Kyoto en 1997, et dont les organisateurs avaient fait le thème unique de cet atelier, est l'exemple paradigmatique de tels systèmes dits complexes. Sa complexité résulte aussi bien des nombreux sous-systèmes interconnectés qui le constituent (soleil, atmosphère, océans, biosphère, activités humaines), que de la très grande hétérogénéité de leur nature (les uns « naturels » les autres « sociaux »), de leurs échelles spatiales et temporelles allant de la particule à l'atmosphère et de la minute (tornade) à la centaine de milliers d'année (cycles climatiques), du type de connaissance que l'on en possède (des lois théoriques bien connues pour les uns, des comportements empiriques partiellement identifiés pour les autres), et de leurs nombreuses interactions avec feedbacks qui aboutissent à des non linéarités et des comportements chaotiques.

[1] Michel Armatte et Amy Dahan-Dalmedico, « Modèles, Modélisation 1950-2000 : nouvelles pratiques, nouveaux enjeux », à paraître dans la *Revue d'Histoire des Sciences*.

L'atelier a rassemblé une vingtaine de personnes de différentes disciplines comme en témoigne la vocation des trois laboratoires de recherche associés dans le projet *ACI* – un laboratoire d'histoire des sciences (Centre Koyré), un laboratoire de recherche sur la physique de l'atmosphère (Laboratoire de Météorologie Dynamique) et le Centre International de Recherche sur l'Environnement et le Développement (CIRED) qui regroupe essentiellement des économistes – comme en témoignent aussi les spécialités des chercheurs associés à cette recherche à titre individuel : des chercheurs en hydrodynamique, en physico-chimie, en génie rural (ENGREF), en sciences de la communication, voire des personnes engagées plus directement dans la négociation politique au titre d'institutions internationales (Agence Internationale de l'Énergie). Car la première originalité de cet atelier était l'approche résolument interdisciplinaire de la question de la modélisation du changement climatique.

Les historiens ont eu la charge de reconstituer la genèse des modèles du changement global depuis la seconde guerre mondiale : une première filiation se trouve dans l'histoire de lamétéorologie numérique des années 1950 (Amy Dahan[2]) qui prend racine dans l'*Electronic Computer Project et le Meteorological Project*, conduits entre 1946 et 1953 au célèbre *Institute for Advanced Study* de Princeton sous la haute autorité de John Von Neumann et sous la direction scientifique de Jules Charney. L'objectif du second projet est « le développement d'une méthode numérique d'intégration des équations météorologiques en conjonction avec l'ordinateur en construction à l'Institut », ce qui révèle l'intégration des deux projets et le rôle central de l'ordinateur comme instrument de calcul capable de traiter des modèles physiques de complexité croissante, et comme « machine inductive » permettant de sélectionner des hypothèses alors même que les lois de l'atmosphère sont imparfaitement connues. Dès 1950 un modèle barotropique bidimensionnel permet après 12h de calcul sur l'ENIAC des prévisions à 24, voire 36 heures, bientôt généralisables à tout le territoire des États-Unis. Le MIT a hébergé d'autres expériences consistant à projeter par des équations de régression linéaires des cartes météo établies par intégration numérique d'équations différentielles non linéaires et qui ont permis au météorologue Edward Lorenz, d'étudier la stabilité de ces prévisions. Il devait en résulter un débat assez riche sur la possibilité d'un modèle déterministe de l'atmosphère, et sur l'impossibilité de poursuivre à la fois les deux objectifs de la prévision assez fine et de la compréhension profonde des phénomènes en jeu. Plusieurs expériences de Lorenz sur des modèles conceptuels très simplifiés qui devaient lui permettre de mettre en évidence dès 1963, les éléments d'un comportement chaotique, première brique peu connue avant 1970 d'une théorie du Chaos mais aussi d'une approche de la turbulence.

Von Neumann est certainement le personnage central de cette préhistoire de la modélisation des systèmes complexes puisqu'on lui doit non seulement les principes des premiers ordinateurs et leurs usages en météorologie, mais aussi une épistémologie des modèles affirmée par exemple dans la contribution de

[2] Amy Dahan, « History and epistemology of models : Meteorology (1946-1963) as a Case-Study », *Archive for History of Exact Sciences,* 55 (2001)

1955[3] : « ...the sciences do not try to explain, they mainly make models. By model is meant a mathematical construct with the addition of certain verbal interpretatios, describes observed phenomena ». On lui doit par ailleurs en économie une des premières formulations d'un modèle de l'équilibre général (1937) et une participation reconnue par Koopmans aux travaux de recherche opérationnelle sur l'analyse d'activité (cf. infra).

Les modèles de circulation générale (GCM) de l'atmosphère construits après 1980 et analysés à l'atelier de Lalonde les Maures, ont profité à la fois d'un affinage du maillage spatial et temporel lié à la puissance accrue des ordinateurs (une maille de GCM fait environ 200km de côté et 20km en altitude), des études physiques spécifiques menées dans les laboratoires de phénomènes comme la turbulence des écoulements, la convection nuageuse, les échanges verticaux, les interfaces océan-atmosphère et biosphère-atmosphère, et de l'amélioration de la dynamique toujours fondée sur les équations d'Euler. De tels modèles intègrent aujourd'hui circulation atmosphérique, bilan chimique, échange avec océan et glace de mer, échanges avec végétation, sol et hydrologie, et ils articulent plusieurs couches ou niveaux (à la façon des réseaux informatiques) – phénoménologie des apparences, théorie physique, chimique, biologique ou économique, modèle mathématique, modèle numérique et modèle informatique – un élément quelconque du système possédant une représentation différente à chaque niveau. L'Institut Pierre-Simon Laplace regroupe 5 laboratoires (dont le Laboratoire de Météorologie Dynamique) ayant chacun compétence à traiter deux ou trois des composantes d'un tel GCM. La journée de l'atelier consacrée aux travaux du LMD vus de l'intérieur (Hervé Le Treut, Jean-Yves Grandpeix) et vus de l'extérieur par une démarche de type anthropologie de laboratoire (Hélène Guillemot) ou par des approches alternatives aux modèles intégrés plus « théoriques » (Manneville, Schmitt), ont permis de mieux situer le cadre stratégique de ces travaux, leur organisation en réseau, la tension entre petits modèles fondamentaux et gros modèles de simulation qui anime ce cadre stratégique et qui recouvre en partie une tension entre désir de comprendre, et nécessité de produire des prévisions et des scénarios à plus long terme.

L'intégration d'un couplage de ces modèles physiques avec une modélisation économique des activités humaines semble relever de la prise de conscience assez récente de l'origine anthropique du changement climatique via le rejet de gaz à effet de serre. En fait une origine plus lointaine de cette approche se situe dans la réflexion sur la croissance de long terme des économies et sur ses limites. Michel Armatte et Pierre Matarasso ont retracé la longue histoire de cette réflexion et des modèles qu'elle a suscités de Malthus (début XIXème) au Club de Rome (1973). Le modèle World3 de Jay Forrester (MIT) qui a servi de base aux rédacteurs du rapport « Halte à la croissance » est un moment fort de cette histoire à la fois pour ses conclusions très radicales et prémonitoires sur les limites d'un développement fondé sur les énergies fossiles, pour le simplisme des raisonnements démographiques et économiques mis en jeu, mais aussi pour un style de modélisation dynamique et systémique dont la notion clé est celle de feedback héritée de l'ingénierie militaire et de la recherche opérationnelle.

[3] J. Von Neumann, « Methods in the Physical Sciences », in *The Unity of Knowledge*, L. Leary ed., Doubleday, New York , 1955.

World3 décrit les interactions causales entre quelques dizaines de variables démographiques, économiques et écologiques (des stocks et des flux) par un jeu de boucles de rétroactions, positives ou négatives, chacune traduite par un schéma et par une équation, en général non linéaire puisque dans une telle boucle, le résultat d'une action passée agit avec ou sans délai via le système de contrôle sur le taux de variation de l'action future (ou encore le stock résultant d'un certain flux d'entrée modifie à chaque pas ce flux). Forrester a diffusé cette méthodologie des systèmes dynamiques tout au long de son propre trajet, de la science des ordinateurs au projet militaire SAGE puis à la dynamique urbaine et la dynamique industrielle, et pour finir à la modélisation de la croissance mondiale. L'atelier s'est concentré un long moment sur deux traditions de modélisation incorporées aux modèles économiques de long terme qui ont succédé à World3 : d'une part la tradition des modèles de croissance optimale top-down à la Ramsey (1928) dans lesquels on optimise de façon inter-temporelle les utilités des générations successives – à l'aide d'un arbitrage qui peut prendre la forme d'un calcul d'actualisation dont Cédric Philibert a montré toute la difficulté et les enjeux – et que l'on retrouve au centre des modèles de Nordhaus et de la Banque Mondiale ; d'autre part la tradition des modèles bottom-up de type « analyse d'activité » au sens de Koopmans qui permettent des prévisions et des simulations tenant compte assez finement des processus de production. Les travaux de Koopmans ont été motivés par un problème de programmation de transports dès 1947 et ont culminé dans la conférence de la Cowles Commission de 1949 dont les actes ont été publiés en 1950 sous le titre « Activity Analysis of Production and Allocation ». Mais lui-même reconnaît que cette théorie doit beaucoup aux travaux de Wassily Leontieff sur les modèles input-output d'échange inter-industriels dans les années 1930, à l'invention de la programmation linéaire par Dantzig qui commence au Pentagone entre 1941 et 1945 et se poursuit dans de nombreux échanges avec Von Neumann, Arrow, Kuhn et Tucker jusqu'à la publication de la méthode du simplexe, et enfin aux travaux sur l'économie du bien-être et l'équilibre général de Hicks, Hotelling, Lange et Von Neumann[4].

L'atelier s'est également attaché à rechercher la trace de ces traditions et leur renouvellement dans des modèles dits d'évaluation intégrée d'utilisation plus récente comme DICE (Nordhaus), IMAGE (de Vries), et RAINS (IIASA)[5].

Il est alors apparu qu'une notion importante jouait un rôle considérable dans la modélisation du climat aujourd'hui, celle de *scénario* comme intermédiaire entre modèle et récit, entre explication et décision, entre science et politique. La notion de scénario est depuis 5 ans le cadre politique imposé par l'IPCC dans lequel se font les études de prospectives du climat. Dans l'acception de l'IPCC tel que défini dans son rapport spécial de 1999 qui en définit 4 grandes classes A1, B1 A2, B2, un scénario est une configuration d'hypothèses sur les évolutions futures des principaux indicateurs exogènes du développement

[4] Voir M. Armatte « Les sciences économiques reconfigurées par la pax americana », in Pestre & Dahan (eds), *les sciences dans et pour la guerre, 1940-1960*, Paris, Presses de l'EHESS, à paraître en 2004

[5] Voir P. Matarasso, « Les origines des méthodes de modélisation dans le champ du changement climatique : de la Cowles Commission aux modèles MARKAL, MERGE et DICE », texte présenté à l'atelier

(démographie, consommation, technologie ...) qui sont à la fois de nature positive (elles résultent de lois d'évolution) et normatives (elles résultent aussi de choix éthiques et politiques sur la société que l'humanité se choisira), ces hypothèses s'intégrant à l'intérieur d'un récit qui leur donne une cohérence à la fois synchronique et diachronique. L'origine et le rôle de cette notion de scénario (associée parfois à celle de « story lines ») dans les études de prospective, dans les « wargames » et les jeux de simulation de gestion, son éclairage par les travaux de Paul Ricœur sur temps et récit, son rôle essentiel dans les « futures studies », dans les forums qui décident de notre avenir environnemental, dans la co-construction avec les acteurs les plus divers de politiques de gestion, dans les projections énergétiques, le point de passage obligé qu'elle constitue parfois à regret pour les scientifiques, ont constitué les nombreuses facettes du débat sur cette notion ambiguë, qui apparaît comme centrale dans l'épistémologie (et la sociologie) de la modélisation de systèmes complexes en avenir incertain, mais aussi dans la gestion de ces systèmes (L. Mermet, H. Kieken).

Par le biais de cette notion de scénario, les participants de cet atelier ont dérivé sur le dernier thème important de la rencontre à savoir le rôle des modèles dans la négociation et la décision internationales. Des interventions sur l'historique de cette négociation (Venance Journé) en particulier dans le cadre de l'IPCC, mais aussi sur le statut et la fonction des images dans la médiatisation par les chercheurs eux-mêmes ou par les journalistes (Emmanuel Paris) ont complété une réflexion menée tout au long de l'atelier sur la confrontation des connaissances savantes dans la communauté scientifique des quelques centaines de chercheurs engagés sur ce terrain. La divergence des résultats des modélisations concurrentes pose un problème d'évaluation des modèles et de gestion d'une seconde incertitude (après celle du climat lui-même) qui est celle de nos outils de connaissance, et d'une construction collective de résultats et scénarios avérés, probables ou vraisemblables. La réflexion sur l'articulation de ces travaux et le relais politique qui leur est donné au sein des différents « sommets » et « conférences des parties » ou au sein des multiples ONG, syndicats, partis et groupes de pression qui vulgarisent cette connaissance, la transforment et la déforment, mais lui donnent aussi son efficacité, n'a été qu'ébauchée. Le modèle de la courroie de transmission implicite chez les scientifiques voudrait que la décision politique suive temporellement et logiquement les résultats de la connaissance scientifique. Mais ce schéma semble bien inadéquat si l'on considère l'importance des choix politiques déjà intégrés dans les hypothèses de travail des modélisateurs sous la forme de scénarios à considérer, d'objectifs de réduction à atteindre, d'échelles régionales à considérer, d'instruments de politique économique (taxes, droits à polluer) à intégrer. Leur réticence bien compréhensible à ce mélange des genres, à la pollution de leurs hypothèses par des choix politiques est cependant à questionner du point de vue de l'intérêt collectif car le but ultime de ces études, ou pour le moins leur urgence, est bien de maîtriser collectivement les causes anthropiques et les conséquences socio-économiques du changement climatique. Si le doublement du CO2 rejeté dans l'atmosphère est déjà atteint, si en 2050 le climat de Paris devient celui de Rabat aujourd'hui, si une émission de gaz à effet de serre réduite à quelques % de son niveau actuel est le seul objectif raisonnable, selon les travaux de modélisation

menés depuis une douzaine d'années, une réflexion critique sur l'élaboration et le rôle des modèles pourrait être cruciale non seulement pour réformer nos vieux modèles épistémologiques mais aussi pour inventer des modes de décision dans lesquels l'expert et le citoyen ont des rôles complémentaires, dans lesquels l'agenda politique des décideurs et le programme de recherche des modélisateurs sont intimement liés.

L'atelier n'était qu'un moment d'une réflexion dont on pourra trouver trace dans un numéro spécial de la *Revue d'Histoire des Sciences* à paraître, et qui devrait se poursuivre dans le cadre de l'ACI et du séminaire « Modèles, Modélisation » (programme sur le site `http://www.ehess.fr/centres/koyre/Centre_A_KOYRE.html`).

MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Débat du 11 octobre 2003

Enseigner les mathématiques à l'école primaire Un défi à relever

Viviane Durand-Guerrier[1]

À la suite de la demande de Michel Delord, membre du Conseil d'administration de la SMF et à l'origine, entre autres, d'une pétition sur « les nouveaux programmes de l'école primaire » (`http://www.sauv.net/prim.php`), la SMF a organisé le 11 octobre dernier, un débat sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. Vous trouverez ci-après les textes des interventions de Viviane Durrand-Guerrier, Roland Charnay, Catherine Houdement, Jean-Pierre Demailly et Michel Delord.

Le 10 octobre 2003, la SMF a organisé un débat sur la réforme des programmes de l'école primaire, auquel j'ai été conviée en tant que présidente de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques[2]. Nouvellement élue dans cette fonction, j'ai accepté avec plaisir de répondre à cette invitation, considérant qu'il y avait là une opportunité d'engager un dialogue sur cette question difficile de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Une caractéristique essentielle du travail des didacticiens des mathématiques en relation avec la question qui nous occupe ici est une interrogation forte sur la dimension épistémologique des savoirs de l'école. Nécessaire à tous les niveaux de l'enseignement, ce questionnement de nature épistémologique est particulièrement crucial à l'école. En effet, au cœur de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire se trouve posée la question de la signification des objets mathématiques, question difficile s'il en est, mais incontournable si l'on veut bien considérer que l'apprentissage des mathématiques ne se résume pas à l'appropriation d'un formalisme opératoire. Or la tentation est grande de considérer que cette appropriation d'un formalisme opératoire est l'objectif essentiel de l'enseignement des mathématiques, d'autant plus que, si cet apprentissage est reconnu comme étant difficile pour les élèves, on pourrait considérer qu'il facilite grandement le travail du professeur. En effet, celui-ci dispose alors d'un texte du savoir bien délimité et bien organisé, tandis que, comme le montre

[1] IUFM de Lyon, LIRDHIST Université Lyon I, `vdurand@univ-lyon1.fr`

[2] `http://www.ardm.asso.fr`

un certain nombre de travaux de recherche, mettre la question de la signification au cœur des apprentissages nécessite pour le professeur de retravailler profondément ses propres savoirs.

Intervenant depuis octobre 1998 dans la formation des professeurs d'école à l'IUFM de Lyon, je vais régulièrement dans les classes visiter des professeurs stagiaires et je travaille fréquemment avec des professeurs d'école titulaires. Concernant les mathématiques, on rencontre fréquemment deux illusions tenaces. La première consiste à penser que les mathématiques sont un langage dont la maîtrise assure l'expertise, avec comme corollaire l'illusion que les mathématiques commencent avec le symbolisme. Dans ce cas, l'essentiel du travail proposé aux élèves sur les nombres va concerner l'apprentissage du symbolisme et des techniques opératoires : on insistera davantage et précocement sur l'acquisition et la reconnaissance des écritures des nombres ; on considérera que définir l'addition, c'est introduire le signe opératoire, et que la technique de la retenue doit être apprise plutôt que comprise. La deuxième illusion, a contrario, consiste à penser que les objets mathématiques émergent « tous seuls » d'une activité libre ou de l'observation. On propose des activités qui sont censées donner du sens aux concepts ; par exemple, pour travailler sur la symétrie, on va multiplier à l'envi les activités d'observation et de reproduction sur papier quadrillé. Ceci pourrait sembler en conformité avec les programmes qui, depuis de nombreuses années, mettent la question du sens au cœur des apprentissages. Cependant, ce qui fait défaut en général dans ce cas, c'est un travail sur *l'articulation* entre les observations et les manipulations conduites et les objets mathématiques introduits, *articulation* qui est le plus souvent remplacée par une *déclaration d'adéquation*. Or les objets mathématiques sont, d'une part, ancrés dans notre expérience sensorielle du monde ; d'autre part, ils se constituent en autant d'outils permettant d'agir dans et sur le monde. C'est ce que nous dit, par exemple, Longo (1997) : « *La cohérence et l'objectivité de la construction conceptuelle que [...] nous proposons, dans ce cas la géométrie, se fonde sur l'efficacité de notre action dans le monde car le monde ses symétries, sa connexion, ses régularités s'imposent à nous ou font résistance quand nous agissons ainsi que quand nous proposons une théorie (...)* » [3] On peut rattacher cette prise de position à une longue tradition épistémologique dont nous évoquons ici trois jalons qui éclairent selon nous le débat. Le premier est la constitution par Piaget d'une d'épistémologie génétique qui met en évidence l'importance de prendre en compte la genèse des concepts et leur épaisseur dans une perspective de construction des connaissances par le sujet. Le second est la nécessité défendue par Gonseth[4] de penser les rapports entre mathématiques et réalité. Le troisième jalon est celui initier par les logiciens, en particulier Frege et Tarski, qui consiste à s'interroger la nature des objets mathématiques, leur mode de donation et de construction ainsi que leurs relations mutuelles. Nous pouvons tirer de ce qui précède un certain nombre de

[3] Longo, G. Géométrie, Mouvement, Espace, Cognition et mathématiques *Intellectica* 1997/2, pp.195-218

[4] Gonseth, F. *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*. Alcan, Paris (1936) et Blanchard, Paris (1974) ; p. 386

conséquences didactiques, en considérant en particulier, comme le montre Artigue, que l'épistémologie aide le didacticien des mathématiques à se déprendre de *l'illusion de transparence des objets qu'il manipule*[5]. Nous en retiendrons ici deux.

La première est l'affirmation de la nécessité d'un ancrage sensoriel des objets mathématiques. Dans l'article déjà cité, Longo écrit par exemple que « *(...) le segment, la courbe, le cercle ne sont pas la "forme abstraite" d'un objet matériel, ni des "figures idéales", mais plutôt la prévision d'un parcours. Et la prévision est déjà une abstraction : la trajectoire prévue ou anticipée par le regard et le geste est abstraite (...)* » (p.217). Ceci est en résonance avec l'insistance des programmes actuels sur la nécessité de ne pas substituer un travail sur fichier aux activités corporelles, manipulatoires et langagières. Cette dimension spatiale dans les apprentissages déborde en outre largement le cadre de la géométrie pour se retrouver au cœur de la genèse du nombre. On peut s'en convaincre en examinant cette description par Vergnaud[6] du schème du dénombrement : « *Le schème du dénombrement d'une petite collection chez un enfant de cinq ans a beau varier dans ses formes (...), il n'en comporte pas moins une organisation invariante (...) : coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets, énoncé coordonné de la suite numérique, cardinalisation de l'ensemble dénombré par soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.* » On peut citer également sur le même sujet les travaux de Briand[7], qui a mis en évidence une compétence nécessaire au dénombrement, qu'il appelle *énumération*, et qui consiste, en particulier, à planifier l'activité de manière à s'assurer que chaque objet de la collection a été compté une fois et une seule. Ses travaux montrent l'importance des organisations spatiales parmi les stratégies de réussite élaborées par les élèves et ouvrent de nombreuses pistes vers la suite des apprentissages numériques.

La deuxième concerne la pertinence et la possibilité d'un travail de modélisation avec les élèves dès l'école élémentaire, en accord avec les programmes[8], en un sens précisé ci-dessous : « *Assimiler une culture des "modèles" c'est donc se rendre capable de considérer le modèle, non dans un rapport mimétique à la réalité (...) ; mais comme un système de signification susceptible de nous apprendre des choses sur la réalité, et par là même, de nous rendre susceptible d'agir sur elle. (...) La "culture des modèles" est aussi une "culture de l'expérimental" où l'on apprend à "négliger ce qui est négligeable" en fonction*

---

[5] Artigue, M. Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1991) 10/2.3, pp.241-285

[6] Vergnaud, G. La théorie des Champs Conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1991) 10/2.3 pp.133-169

[7] Briand, J. Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* (1999) 19/1 pp.41-75

[8] « Là [à l'école élémentaire] commencent vraiment les mathématiques et leurs modèles. D'une part, l'élève prend conscience du pouvoir que donnent les nombres pour choisir, décider ou agir dans des situations réelles, d'autre part (...) il accède à l'intelligence du système d'écriture des nombres, aux relations que ce dernier permet d'expliciter et aux possibilités de calcul qu'il ouvre. » (B.O. Hors - Série N°1, 14 février 2002, p.40)

du modèle qu'on se propose d'étudier. » [9] Un exemple éclairant, selon nous, de cette problématique à l'école élémentaire est fourni par une situation de recherche élaborée autour des solides de Platon. On peut proposer à des élèves de fin de cycle 3 de déterminer tous les polyèdres réguliers convexes, après en avoir donné une définition accessible à ce niveau. On peut voir alors émerger des questions telles que : *peut-on réaliser un polyèdre régulier dont les faces sont des hexagones ?* ou encore : *peut-on construire un polyèdre régulier tel que chaque sommet soit commun à cinq faces ?* Au cycle 3, la résolution de ce problème peut se faire avec du matériel permettant de « faire et de défaire » facilement les polyèdres. Une telle situation permet de percevoir la résistance du réel, de questionner la pertinence du matériel fourni (plus ou moins grande rigidité), de faire émerger une condition sur les angles au sommet, et fournit une validation de type expérimental. Elle permet en outre de travailler sur le passage de l'espace au plan, l'impossibilité d'obtenir un polyèdre régulier dont les faces sont des hexagones étant validée par le constat que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers isométriques. De ce travail peuvent émerger de nouvelles questions : *peut-on réaliser un polyèdre dont les faces sont des hexagones ou des pentagones réguliers ? peut-on paver le plan avec des pentagones réguliers etc...* Un autre exemple bien connu de cette problématique est *l'agrandissement du Puzzle*[10]. L'organisation de la situation didactique proposée aux élèves, qui comprend des phases d'action, des phases de formulation et des phases de validation, permet de mettre en défaut la procédure additive pour agrandir en « respectant la forme », et fournit en outre une première rencontre avec ce qui fonde le théorème de Thalès qui sera étudié au collège, à savoir la reconnaissance de l'articulation entre la conservation du parallélisme et la relation de proportionnalité pour les mesures des côtés du triangle.

J'espère avoir pu faire apercevoir à travers ce texte, nécessairement trop bref, la richesse potentielle, dans le cadre des programmes actuels, de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Cependant, il n'échappera à personne que relever ce défi, pour un enseignant polyvalent, ne va pas de soi. Ceci nous amène à la question de la formation qui doit absolument permettre aux futurs enseignants de l'école primaire de faire ce travail de retour sur les savoirs fondamentaux et, pour un nombre non négligeable d'entre eux, de se réconcilier par là même avec une discipline dont les aspects formels avaient pu les détourner à un certain moment de leur cursus scolaire ou universitaire.

---

[9] Mercier,A. & Sensevy,G. Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école *Le Télémaque* n°15 - Enseigner les sciences - mai 1999 pp.69-78

[10] Brousseau, G. *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage (1998) pp.237-241

Les nouveaux programmes pour l'école primaire. Quels enjeux ? Quels choix ?

Roland Charnay[1]

Le nouveau programme pour l'école primaire a été publié au terme du long travail d'un groupe d'experts présidé par le Recteur Philippe Joutard, en tenant compte des avis donnés par le Conseil National des Programmes et des résultats de la consultation de tous les enseignants. Les parties relatives aux mathématiques, ainsi que les documents qui les accompagnent[2] et qui en sont indissociables, ont été élaborées par une commission spécifique, rattachée au groupe d'experts. Cette élaboration a été accompagnée d'une réflexion approfondie sur les enjeux de l'enseignement à l'école primaire, sur les informations apportées par diverses études portant sur les connaissances des élèves à diverses étapes de la scolarité et sur les pratiques des enseignants. D'autres références importantes ont été prises en compte, issues de travaux en psychologie cognitive ou en didactique.

Les enjeux de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Quatre points essentiels peuvent être retenus dans le cadre de cet article.

(1) Les connaissances mathématiques enseignées à l'École Primaire le sont dans le cadre d'une scolarité prolongée pour tous les élèves jusqu'à la fin du collège. Les choix doivent donc être pensés dans cette perspective, avec le souci d'une bonne articulation avec l'enseignement donné au collège. Une grande attention a donc été portée à la cohérence et à la progressivité des apprentissages sur cette longue période.

(2) Les mathématiques enseignées à l'École Primaire, puis au collège, fournissent les connaissances indispensables à tout futur acteur de la vie sociale aussi bien comme citoyen que comme acteur économique.

(3) Les mathématiques enseignées à l'école primaire contribuent à la formation générale des individus : imagination, réflexion, raisonnement, souci de la justification, argumentation, esprit critique, formulation utilisant différents types de langage...

(4) Les mathématiques enseignées à l'École Primaire sont l'occasion pour les élèves d'un premier contact avec une pratique « mathématisante » ... et, sans prétention excessive, avec la culture mathématique. Dès l'école primaire, certains élèves acquièrent le goût (ou le dégoût) pour les mathématiques.

---

[1] Membre du Groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire

[2] Les programmes et les documents d'application sont consultables sur le site du CNDP. Des documents complémentaires d'aide à la mise en œuvre des programmes sont consultables sur le site EDUSCOL (rubrique École).

En particulier, une réflexion a été conduite sur l'importance à accorder aux différents moyens de calcul et à leurs apports respectifs. Elle a rejoint celle conduite au même moment par la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, et a pu bénéficier des conclusions consignées dans son rapport d'étape sur le calcul, avec la prise en compte des trois moyens de calculer utilisés aujourd'hui : calcul mental exact et calcul approché (mémorisation de résultats, capacité à en élaborer d'autres par le calcul réfléchi ou raisonné), calcul posé (algorithmes usuels), calcul instrumenté (recours à une calculatrice ou à un ordinateur). Le fait qu'aujourd'hui la plupart des calculs qui ne peuvent pas être réalisés mentalement le sont à l'aide d'une machine conduit à s'interroger sur le rôle et les finalités de l'apprentissage du calcul posé. Son importance n'est pas contestée dans les programmes. Au contraire, son apprentissage s'y trouve justifié, avec des objectifs réorientés dans une double direction :

– la capacité pour chacun d'avoir une bonne maîtrise de ces calculs, dans des cas raisonnables, lui permet de « dominer » ce que fait la machine ;

– la compréhension des algorithmes et de leurs différentes étapes permet d'enrichir celle des nombres et de leur écriture, celle du calcul et celle des propriétés des opérations.

Dans cette perspective, l'étude des techniques opératoires n'est pas conçue comme indépendante du travail sur le sens des nombres et des opérations (notamment à travers le travail visant à la compréhension et à la justification de ces techniques). Enfin, une meilleure compréhension de ces techniques prépare leur extension à d'autres objets mathématiques (calcul sur les polynômes, par exemple).

Les connaissances des élèves

Trois regards complémentaires peuvent être portés, à partir des informations disponibles.

– Que savent les élèves au sortir de l'école primaire ? Où se situent principalement leurs difficultés ?

– Quelle comparaison peut être faite avec la situation d'autres pays ?

– Quelle comparaison peut être faite avec des situations antérieures ?

Situation actuelle (analysée à partir des évaluations à l'entrée en Sixième)

Dans deux domaines les difficultés des élèves sont importantes.

– La résolution de problèmes D'une part, les élèves ont des difficultés à mobiliser leurs connaissances pour résoudre des problèmes non habituels : les connaissances, même maîtrisées, ne sont pas suffisamment disponibles. D'autre part, les problèmes qui demandent d'organiser un raisonnement par étapes sont trop faiblement réussis.

– Le calcul mental Les élèves ne maîtrisent pas tous les résultats élémentaires qui devraient être connus (notamment pour ce qui concerne la table de multiplication) et éprouve des difficultés à mener à bien un calcul réfléchi (ainsi le calcul mental du quotient de 52 par 4 n'est réussi que par un peu plus d'un tiers des élèves).

Ce constat nous a conduit à pointer deux priorités : la résolution de problèmes et le calcul mental sous ses diverses formes (mémorisation de résultats et

calcul réfléchi). Les insuffisances en calcul mental expliquent sans doute nombre de difficultés ou de lenteurs dans les apprentissages au collège et au-delà. La situation n'est pas franco-française puisque les britanniques ont dû prendre des mesures draconiennes pour améliorer la situation dans le domaine du calcul mental. Ces deux priorités (résolution de problèmes et calcul mental) ont été largement approuvées par les enseignants au moment de la consultation.

Comparaison avec d'autres pays

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude qui permette des comparaisons fiables au sortir de l'école primaire. Il est cependant possible de se référer à l'étude PISA (effectuée par l'OCDE en 1995)[3]. Elle fait apparaître, pour la France, des résultats un peu au-dessus de la moyenne des pays concernés, loin du catastrophisme souvent évoqué. Les résultats globaux situent la France en 8^{e} position (sur 22 pays), significativement au-dessus de la moyenne internationale. Mais certains aspects peuvent interroger, comme en témoigne cette phrase extraite de l'analyse faite par la DPD « Les résultats français sont supérieurs à la moyenne de l'OCDE lorsqu'il s'agit d'exercices purement scolaires, mais cela n'est pas le cas lorsque la situation nécessite une prise d'initiative » (ce qui rejoint le constat fait à l'entrée en 6^{e} sur la résolution de problèmes)... On note également, dans ce cas là, des taux de non réponses importants.

Comparaison avec des résultats antérieurs

Une autre étude de la DEP, publiée en février 1996[4] vise à comparer les performances des élèves des années 20 à celles des élèves d'aujourd'hui du même âge (à partir d'épreuves de Certificat d'Études). Elle conclut que :

– les élèves des années 20 ont mieux réussi les problèmes retenus (mais il faut noter, à l'époque, un entraînement à certains types de problèmes « de certificat » et souligner le fait que ce type de problèmes est moins travaillé au collège que dans les anciennes classes de fin d'études) ;

– concernant les compétences calculatoires, les élèves des deux époques ont des réussites analogues sur l'addition, la soustraction et la division de nombres entiers, la réussite sur les multiplications étant un peu plus faible aujourd'hui (environ 70% contre 80%).

Les auteurs de l'étude notent qu'une comparaison entre les années 60 et les années 90 concluait, à la charnière CM2-6^{e}, à une stabilité des capacités calculatoires, ce que relevait déjà une enquête de l'INRP en 1977 qui comparait des résultats obtenus entre 1957 et 1977 ! Il convient d'être conscient des limites de ce type d'étude, malgré toutes les précautions méthodologiques prises :

– en 1920, peu d'élèves entraient en Sixième ; en 1959 ils n'étaient encore que 40% alors qu'ils sont 100% (99% pour être exact) aujourd'hui ;

– il est possible de faire subir aux élèves d'aujourd'hui des épreuves antérieures... ; l'inverse est évidemment impossible, ce qui interdit d'identifier des compétences maîtrisées aujourd'hui qui ne l'auraient pas été hier ;

– de plus, les enjeux du collège sont différents de ceux des classes de fin d'étude, tout comme le contexte d'enseignement.

---

[3] Note d'information de la DPD, 01.52

[4] Les dossiers, n° 62

Les pratiques des enseignants

Les données « objectives » sur les pratiques effectives d'enseignement des mathématiques sont peu nombreuses. On peut se référer à quelques études ou rapports des Inspecteurs Généraux qui font apparaître quelques éléments préoccupants :

– une étude de la DEP consacrée aux « pratiques d'enseignement en classe de CE2 » [5], montre que le temps consacré effectivement aux mathématiques peut varier dans des proportions de 1 à 3 ;

– un rapport de l'Inspection Générale[6] consacré aux manuels scolaires souligne que les élèves travaillent souvent sur des photocopies (de plus ou moins bonne qualité) et n'ont pas toujours un manuel, l'usage abusif des photocopies est fortement dénoncé ;

– l'analyse des manuels et l'observation des pratiques de classes par les inspecteurs et les formateurs révèle une diminution importante du temps consacré au calcul mental, depuis les années soixante-dix ;

– enfin, beaucoup regrettent un enseignement trop centré sur la technicité, pas suffisamment préoccupé du sens, de la compréhension et de l'initiation au raisonnement.

Les orientations

À partir de cette analyse, comme cela a déjà été indiqué, deux priorités sont affichées par les programmes : la résolution de problèmes et le calcul mental. L'accent a également été mis sur la progressivité des apprentissages et, notamment, sur la question des articulations entre les différentes étapes du cursus scolaire. À l'issue de leur scolarité primaire, les élèves doivent avoir une bonne maîtrise des nombres entiers : numération décimale, quatre opérations, premiers éléments d'arithmétique. Avant d'entrer au collège, ils doivent avoir une première compréhension des écritures fractionnaires et une première maîtrise des nombres décimaux : compréhension des écritures à virgule, ordre sur ces nombres, calcul (addition, soustraction, multiplication par un entier). Ces connaissances seront complétées pendant les premières années du collège, où la notion de quotient occupe une place centrale. La capacité à traiter des données numériques constitue l'objectif principal de cet apprentissage des nombres et du calcul : problèmes relevant des quatre opérations, situations de proportionnalité, représentations usuelles (tableaux, diagrammes, graphiques). L'apprentissage de la géométrie ne doit pas se limiter à celui d'un vocabulaire et de techniques de tracé. Il doit fournir aux élèves une bonne maîtrise de l'espace ordinaire, une première connaissance des propriétés qui permettent de caractériser les objets géométriques et peut déjà donner lieu à des raisonnements élémentaires. L'étude de la mesure a longtemps été centrée sur la connaissance du système métrique et sur l'utilisation de formules. Sans nier l'importance de ces connaissances, les difficultés rencontrées par les élèves soulignent la nécessité d'accorder une place importante à l'identification des grandeurs... avant de les mesurer et d'effectuer des calculs à leur sujet. Une bonne connaissance des longueurs, des masses, des contenances et des durées est visée. Le travail

[5] Note d'information, 96-28 de juillet 1996

[6] Rapport Borne, 1998, Documentation Française

sur les aires est amorcé et sera poursuivi au collège où sera également travaillée la notion de volume. Au cœur de ce programme se trouve la volonté d'offrir à tous les élèves l'accès aux premiers éléments d'une culture mathématique caractérisée par un système de connaissances solides et cohérentes, par une bonne disponibilité de ces connaissances pour résoudre des problèmes, par la capacité à mettre en œuvre des raisonnements appropriés et à argumenter à propos de la validité d'une proposition ou d'une solution. Quelques repères historiques peuvent compléter cette entrée dans la culture mathématique (par exemple à propos de différents systèmes d'écriture des nombres). Les pratiques d'enseignement doivent être au service de cette ambition. Tout en mettant l'accent sur la résolution de problèmes, les recommandations fournies par les programmes ne négligent ni la part de l'entraînement, ni celle de la mémorisation, comme en témoigne cet extrait : « *L'élaboration des connaissances se réalise au travers de la résolution de problèmes, leur maîtrise nécessite des moments d'explicitation et de synthèse, et leur efficacité est conditionnée par leur entraînement dans des exercices qui contribuent à leur mémorisation* ».

Conclusion

Ces programmes affichent une grande ambition pour l'école primaire. Ils sont un élément important qui oriente l'enseignement donné aux élèves. Mais leur rôle et leur impact ne peuvent pas être isolés d'autres éléments du contexte :

– les incitations institutionnelles : depuis environ 15 ans, le discours officiel évoque rarement les mathématiques et privilégie la question de la maîtrise de la langue (le « lire-écrire » est très commenté, le « compter-raisonner » l'est beaucoup moins) ; il faut cependant noter que la publication des programmes 2002 s'accompagne de la diffusion de documents (d'application, d'accompagnement) susceptibles d'attirer l'attention des enseignants sur l'importance de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ;

– les enseignants et leur formation, notamment la formation continue et l'accompagnement par les inspecteurs (animations pédagogiques) ;

– les exercices d'évaluation proposés à l'entrée au CE2 et en 6^{e} : ils sont une autre façon pour l'institution d'afficher ses attentes (ainsi, pendant plusieurs années, aucune question ne concernait le calcul mental, ce qui est aujourd'hui corrigé) ;

– les manuels proposés aux maîtres : ils orientent leur action au moins autant que les programmes. C'est en effet ce que relève le rapport Borne, déjà cité, à propos de la situation de l'école primaire, lorsqu'il affirme : « Mais, contrairement à la situation observée au collège et au lycée, de très nombreux manuels présents dans les classes ont été rédigés antérieurement à la mise en application des programmes de 1995. L'enquête fait apparaître que, pour l'échantillon observé, seuls 20 % en moyenne des manuels utilisés sont conformes aux programmes en vigueur. (...) Cette situation illustre la difficulté à faire pénétrer, jusque dans la classe, l'innovation pédagogique. De toute évidence la publication de nouveaux programmes n'y suffit pas ».

Les programmes 2002 et la division

Catherine Houdement[1]

J'aborderai trois points dans ce texte : la nécessaire transformation du savoir des mathématiciens en savoir à enseigner à tel niveau ; la programmation de la division sur l'école primaire ; le point de vue 2002 sur les techniques de division.

Point 1 – Transposition et niveau de conceptualisation

Le fait de donner un libellé comme *division* ne suffit pas seul à préciser le contenu d'un enseignement pour un professeur, ni a fortiori la forme et la signification pour l'élève. Dans le monde mathématique, ce libellé fait référence à l'objet savant qui regroupe entre autres,

les propriétés de $\mathbb{Z}$ comme anneau euclidien. — pour les nombres a et b non nuls dans $\mathbb{Z}$, l'existence d'un couple (q, r) vérifiant $a = b \times q + r$ avec $| r | < | b |$; et l'unicité du couple (q, r) dans $\mathbb{N}$ pour (a, b) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$;

la structure de corps de $\mathbb{Q}$. — toute équation de type $ax = b$ pour a et b dans $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ a une solution unique b/a ;

la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$. — pour tous (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe m dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$m \leqslant a/b \times 10^n < m + 1.$$

Ces propriétés sont en effet nécessaires pour définir et préciser les « différentes divisions » selon les ensembles de nombres considérés et/ou le degré d'approximation souhaité du quotient : la division euclidienne dans $\mathbb{N}$; les divisions décimales de deux entiers ; les divisions de deux décimaux.

Pour enseigner à l'école, il est nécessaire de croiser ces savoirs avec ce qu'on sait des modes cognitifs des élèves et d'ancrer ces savoirs « dans leur expérience sensorielle du monde », bref de les transposer en savoirs à enseigner[2]. Les programmes concernant la division contiennent donc

– les problèmes où la division intervient comme outil (mais surgissent alors de nouvelles questions : quels problèmes sont susceptibles de garantir la signification de la division ? de quelles divisions ?) ;
– les procédures de résolution raisonnablement attendues ;
– le langage et les écritures licites ;
– les techniques de calcul du quotient, algorithmes à la main et techniques instrumentées (mais lesquelles privilégier ? pourquoi ?).

[1] Maître de conférences en didactique des mathématiques à l'IUFM de Haute Normandie. Membre de la Commission Mathématiques des programmes 2002 de l'école primaire.

[2] Y. Chevallard (1985), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Le principe qui a présidé à l'élaboration des programmes 2002 a été d'essayer, compte tenu de l'état connu du système d'enseignement, de concilier la logique du savoir mathématique à venir (mais quels niveaux prendre en référence ?) et la logique de la signification pour l'élève, sachant que si elles ne sont pas a priori opposées, elles ne sont pas non plus a priori confondues (*cf.* déjà en 1785 Condorcet[3]). Ainsi, comme l'affirme depuis toujours G. Brousseau[4], à chaque niveau scolaire, les mathématiques enseignées sont une transposition des mathématiques connues, elles en diffèrent d'autant plus que le niveau est plus bas ; elles doivent donc être organisées spécifiquement, puis utilisées et répétées, reprises et réorganisées aux niveaux suivants, ce qui en change le sens.

Les textes des *programmes*, du fait des contraintes de lisibilité globale, ne peuvent prendre toutes ces précisions en charge. C'est pourquoi il existe en 2002 des textes complémentaires dits *documents d'application* (et *fiches d'accompagnement*) qui précisent les exigences attendues autour des problèmes relevant de cette opération (*cf.* la rubrique *Exploitation de données numériques*), du calcul exact ou approché des quotients et des restes, à la main ou à l'aide d'un instrument de calcul (*cf.* la rubrique *Calcul* subdivisée en sous rubriques *Calcul automatisé* (calcul posé et résultats mémorisés), *Calcul réfléchi* et *Calcul instrumenté*).

Point 2 – Répartition sur l'école primaire

Nous allons parcourir rapidement sur ce thème de la division les documents précités. Rappelons tout d'abord que ces documents consistent, pour les mathématiques, en

• deux livres « blancs »[5] format de poche, dits *Programmes* respectivement de l'école maternelle [PEM] et de l'école élémentaire [PEE], ce dernier condensant les savoirs du CP au CM2 dans toutes les disciplines[6] ;

• deux cahiers dits *Documents d'application*[7] (*Mathématiques cycle 2* [DA2] 37 pages et *Mathématiques cycle 3* [DA3] 48 pages) précisant les compétences mathématiques que doivent maîtriser tous les élèves à la fin de chaque cycle avec de larges commentaires ;

• des *Fiches d'accompagnement*[8] [FA] développant par thème des indications plus précises.

Il est parfois reproché que, dans les programmes 2002, « l'apprentissage de

---

[3] Condorcet (1799), *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, publié à titre posthume. Réédité en 1998. Paris : ACL

[4] Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In *Didactique des mathématiques* (1996, J. Brun dir.). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

[5] *Qu'apprend-on à l'école maternelle ?* et *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* Ministère de l'Éducation nationale LCNDP/XO 2002 puis 2003.

[6] Au cycle 3 ces disciplines recouvrent langue française (6h à 7h30 hebdomadaires), langue étrangère (entre 1h30 à 2h), histoire-géographie-éducation civique (3h30 à 4h), **mathématiques (5h à 5h30)**, sciences expérimentales et technologie (2h30 à 3h), éducation artistique (3h), EPS (3h).

[7] Disponibles en CRDP ou téléchargeables sur le site du CNDP.

[8] Téléchargeables sur le site Eduscol/Ecole primaire. En novembre 2003 sont disponibles 5 fiches : Calculatrices ; Calcul mental ; Calcul posé ; Articulation école collège ; Problèmes pour chercher.

la division » ne soit envisagé que dans les dernières années de l'école primaire, voire même exclu. En réalité une lecture fine des documents d'application et des fiches d'accompagnement montre que d'une part, l'apprentissage de la division est réparti tout au long de l'école primaire : il commence dès la fin du cycle 1 (5 ans) ; se poursuit au cycle 2 (CP et CE1) ; se structure et se consolide au cycle 3 (CE2 au CM2). Dans les deux premiers cycles les élèves sont confrontés à des problèmes « de division » qu'ils résolvent sans faire appel explicitement à cette opération. La division, en tant qu'opération reconnue, est étudiée au cycle 3 ; son apprentissage s'appuie alors sur cette compréhension des problèmes, déjà sollicitée les premières années ; certaines techniques, élaborées préalablement par les élèves, sont systématisées et enrichies, le but étant qu'en fin de cycle 3, les élèves utilisent une technique de division euclidienne efficace. D'autre part, cette programmation de la division est en accord avec celle du collège (qui est aussi un passage de la scolarité obligatoire) : au collège, l'apprentissage de la division euclidienne est renforcé ; une technique de division de deux décimaux est systématisée.

Voici quelques extraits relevant l'insistance sur la résolution de problèmes et le calcul mental.

En cycle 1, PEM page 130

À l'école maternelle, l'enfant peut être confronté à des problèmes portant sur des quantités. Pour des tâches de comparaison, égalisation, distribution, partage, il fait appel à une estimation perceptive et globale (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup), plus tard à la correspondance terme à terme et à la quantification.(...)

À la fin de l'école maternelle, l'enfant est également confronté à des problèmes où les nombres peuvent être utilisés pour anticiper le résultat d'une action sur des quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) ou sur des positions (déplacements en avant ou en arrière).

En cycle 2

DA2, page 17, dans le paragraphe Exploitation de données numériques, sous-paragraphe Problèmes résolus par une procédure personnelle.

Compétences	Commentaires
Dans des situations de partage ou de distribution équitables, déterminer le montant de chaque part ou le nombre de parts. Dans des situations où des objets sont organisés en	Certains élèves peuvent d'eux-mêmes, par un raisonnement approprié, trouver directement l'opération qui permet de résoudre le problème. Mais l'objectif essentiel reste que chacun puisse élaborer au moment de la résolution, puis choisir au moment d'une éventuelle trace écrite finale, une solution qu'il comprend.
Suite page suivante	

Compétences	Commentaires
rangées régulières, déterminer le nombre total d'objets, le nombre d'objets par rangées ou le nombre de rangées. Dans des situations où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer la quantité (ou la valeur) totale, l'une des quantités (ou des valeurs) ou le nombre de quantités (ou de valeurs).	L'explicitation des diverses solutions, la mise en évidence des erreurs dans le choix des procédures (distinguées des erreurs de calculs), la reconnaissance d'éléments corrects dans une solution, les relations établies entre diverses solutions, constituent autant de moyens de faire progresser les élèves. L'utilisation du calcul réfléchi (mental ou aidé d'un écrit) est ici privilégiée. Dans certains problèmes, l'utilisation de calculatrices permet aux élèves d'avoir recours à des calculs qu'ils ne mobiliseraient pas sans cela, faute de pouvoir les mener à bien.

DA2, page 23 dans le paragraphe Calcul, sous-paragraphe Calcul réfléchi.

Compétences	Commentaires
Savoir trouver mentalement le résultat numérique d'un problème à données simples.	La résolution mentale de problèmes constitue une aide à la construction du sens des opérations. En effet, lorsque la résolution met en œuvre des nombres et des calculs bien maîtrisés, les élèves peuvent concentrer leur attention sur les raisonnements nécessaires à cette résolution. D'autre part, pour des problèmes comportant des nombres plus importants, les élèves peuvent trouver un appui dans le fait de penser au même problème avec des données numériques plus simples.

En cycle 3, extrait du paragraphe Calcul de DA3

Compétences	Commentaires
Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé.	Le calcul (à la main) de divisions (quotient entier et reste) doit être limité à des cas « raisonnables » : dividende ayant au plus 4 chiffres, avec pose effective des soustractions intermédiaires et possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient.

Suite page suivante

Compétences	**Commentaires**
Extrait de Calcul réfléchi page 27	
Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul de division en s'appuyant sur les résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. (...) Évaluer un ordre de grandeur d'un résultat, en utilisant un calcul approché. Évaluer le nombre de chiffres d'un quotient entier.	Exemples de calculs : • $65 \div 5 = (50 \div 5) + (15 \div 5) = 13$; • pour le calcul du quotient entier et du reste de 127 par 15, on peut essayer d'atteindre 127 en additionnant des multiples simples de 15 : 2 fois 15, c'est 30, 4 fois 15 c'est 60, 8 fois 15, c'est 120, donc le quotient est 8 et le reste est 7. Ce type de calcul, qui s'appuie implicitement sur l'égalité fondamentale de la division euclidienne ($a = b \times q + r$, avec $r < b$), sera repris au collège. Il fait donc l'objet d'une première approche.
Extrait de Calcul instrumenté page 29	
Utiliser une calculatrice pour déterminer le quotient entier ou décimal (exact ou approché) de deux entiers ou d'un décimal par un entier.	Dans le cas de la division, on s'intéresse en particulier aux méthodes utilisables pour obtenir, avec une calculatrice ordinaire, le quotient et le reste de la division euclidienne de deux nombres entiers. Par exemple, pour 456 divisé par 25, la calculatrice affiche $18,24$. La partie entière du nombre affiché fournit directement le quotient (18), et le reste peut être obtenu par le calcul suivant : $456 - (18 \times 25)$; il peut l'être aussi par le calcul du produit $0,24 \times 25$, mais cette procédure ne sera pas favorisée à l'école primaire (elle ne donne un reste exact que si la partie décimale du quotient est entièrement affichée). À cette occasion, une première distinction peut être faite entre quotient entier issu de la division euclidienne et quotients décimaux, à l'occasion de la résolution simultanée de problèmes qui permettent de leur donner du sens, par exemple : « quelle est la part d'une personne dans le partage équitable de 258 objets entre 12 personnes ? » ou « quelle est la longueur d'un morceau de ruban de 258 cm partagé en 12 morceaux de même longueur ? ».

Collège : sixième et cinquième (programmes 1997)

Compétences exigibles en 6e	Compétences exigibles en 5e
Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres ; effectuer, dans des cas simples, la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier.	Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier.

Point 3 – Retour sur la technique de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Le lecteur sera convaincu qu'une telle technique est bien au programme de l'école, comme le précise encore la fiche d'accompagnement *Calcul posé* dont voici un extrait :
« *Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites [concernant le calcul à la main du quotient de deux entiers] :*

– commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient (ce qui permet un premier moyen de contrôle sur le quotient) ;
– s'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient (la production de la totalité de « la table du diviseur » ne doit pas être encouragée) ;
– encourager la pose effective des soustractions (sans interdire toutefois aux élèves qui le souhaitent de s'en dispenser).

L'exemple suivant montre ce qui peut être attendu en fin d'école primaire. »

	7	8	0	5	2	7				2	7				2	7	
−	5	4			2	8	9		×		9		×		8		
	2	4	0		*c*	*d*	*u*		2	4	3		2	1	6		
−	2	1	6														
		2	4	5													
	−	2	4	3													
				2													

• Pourquoi déconseiller d'enseigner une technique de façon uniquement ostensive ?
Parce que l'acquisition d'une technique et le contrôle qu'on a de son exécution dépend de la compréhension *intuitive ou apprise* qu'on peut avoir d'une stratégie globale de division.

• Pourquoi ne pas exiger des élèves en fin de primaire l'algorithme connu de nos parents et grands-parents ?
Parce que la technique ci-dessus est plus ergonomique, aussi efficace et qu'elle repose sur les mêmes propriétés mathématiques. Elle permet également un meilleur contrôle a posteriori par un retour sur les traces laissées pour les différentes étapes du calcul. Et rien n'empêche, pour les élèves qui le peuvent, de minimiser encore l'écrit qui l'accompagne.

• Pourquoi ne pas exiger de tous les élèves en fin d'école primaire la connaissance de techniques de calcul à la main de la division décimale de deux entiers et celle de la division de deux décimaux ?
Parce que ces techniques ne sont que des *extensions* de la première[9] : si la première est bien comprise/acquise, les autres le seront rapidement, mais à une condition : que *l'écriture à virgule décimale ait un sens pour l'élève*, qu'il comprenne le prolongement du principe de numération décimale de position, qu'il reconnaisse comme erronées les écritures du type $3,21 > 3,7$ ou $4,3 \times 4,3 = 16,9$. Et ces connaissances sont encore mal assurées pour de nombreux élèves à la fin de l'école primaire (ce qui n'est pas un fait nouveau).

Rappelons l'analyse de G. Brousseau qui déclare que la communauté souhaite ignorer que l'activité de celui qui apprend a parfois pour résultats des erreurs légitimes (souvent indicatrices d'obstacles) quelle que soit la qualité de l'enseignement reçu ; elle accepte mal ces écarts au « vrai savoir ».

Conclusion

Il est normal et sain que les contenus de l'école obligatoire soient l'enjeu d'un débat. Il est stimulant que les mathématiques de l'école primaire intéressent les « vrais mathématiciens ».

Restons cependant vigilants sur le fait de ne pas analyser ces mathématiques du point de vue de celles à atteindre pour une certaine élite scientifique, mais, au moins dans un premier temps, des connaissances nécessaires à la culture du citoyen éclairé. Les mathématiques ne sont pas nécessairement immortelles dans l'enseignement : regardons l'exemple du latin, pilier du système éducatif il y a 20 ans, moribond aujourd'hui.

Étudions et respectons le décalage entre les mathématiques, savoirs immuables, avérés, puis organisés, et l'enseignement des mathématiques, où des savoirs choisis et déterminés par la société via notamment les associations de spécialistes (bien que ce choix varie peu en primaire[10]) sont découpés, repensés, retravaillés selon des analyses épistémologiques, cognitives et didactiques contemporaines pour être transmis par des individus (à former) à des individus (à convaincre), soumis à des contraintes sociales et institutionnelles.

L'enjeu de l'amélioration de l'enseignement des mathématiques réside peut-être dans des recherches de réponses aux questions suivantes :
Pourquoi est-il intéressant socialement de faire, et donc de faire faire des mathématiques à l'école obligatoire, et surtout comment ? Quel bienfait peut en tirer l'individu ? le citoyen ? Comment supprimer et rendre honteux « l'illettrisme mathématique » de notre société ? Comment former les professeurs à cette révolution ?

Dans ce vaste ensemble, un texte de programmes, aussi détaillé, précis, consensuel dans la communauté scientifique et didactique soit-il, ne représente malheureusement qu'une infime partie du processus.

---

[9] Extension du quotient à sa partie décimale pour la division décimale de deux entiers ou d'un décimal par un entier, extension des propriétés pour se ramener à une division par un entier pour la division par un décimal.

[10] Mais dans certains pays notamment au Royaume-Uni, en primaire sont appris par exemple des éléments de statistique.

Une indispensable réévaluation des contenus et des méthodes pédagogiques

Jean-Pierre Demailly

Le cycle primaire joue un rôle beaucoup plus décisif qu'il n'est reconnu actuellement dans les difficultés des enseignements situés en aval, en particulier les études scientifiques. L'inadéquation et l'incohérence des programmes est une des causes majeures probables de la désaffection des étudiants dans les filières scientifiques, sans parler des conséquences plus visibles et plus mediatisées que sont la montée de l'illettrisme, la moindre maîtrise de l'orthographe, de la langue et du calcul au collège et au lycée. En effet, c'est au plus jeune âge que commencent à se forger, en s'appuyant sur le formidable appétit de connaissances des jeunes enfants, les processus mentaux à la base de l'activité scientifique. L'agilité calculatoire, la compréhension numérique et dimensionnelle du calcul arithmétique, la perception de l'espace, des ordres de grandeur, l'aptitude au raisonnement logique sont – tout le monde en conviendra – particulièrement décisifs pour l'enseignement et la compréhension des sciences. Tout comme pour l'apprentissage des langues, il y a des étapes qu'il convient de franchir à un certain âge : une langue apprise à un très jeune âge peut-être parlée sans accent, mais au delà, le même apprentissage demande des efforts beaucoup plus grands pour des résultats souvent plus modestes.

Or, force est de constater que les programmes du primaire ont subi une importante érosion en termes de contenu qualitatif et quantitatif. Après une période de grande stabilité (disons 1923-1970, mais on pourrait sans doute remonter jusqu'en 1882), des évolutions considérables ont eu lieu. Une de celles-ci a été l'abandon des méthodes syllabiques pour l'apprentissage de la lecture, au profit de méthodes dites globales, puis semi-globales, qui sévissent encore aujourd'hui malgré la défiance exprimée parfois par l'institution depuis quelques années[1].

Un autre changement crucial a été le passage de l'enseignement simultané des 4 opérations au Cours Préparatoire, à une progression très ralentie introduisant d'abord la seule addition, puis graduellement les autres opérations. Ainsi, les programmes publiés en février 2002 par la commission Joutard sous le Ministère de Jack Lang indiquent « À la fin du cycle 2 (Cycles des apprentissages dits fondamentaux, CP, CE1), seule la technique opératoire de l'addition est exigible. »

Je peux rapporter ici le témoignage de ma mère, institutrice de 1947 à 1984 dans une zone rurale peu favorisée du Nord de la France. Les principales réformes sont intervenues au début des années 1970, imposées par l'Institution et ses relais comme le nouveau dogme devant balayer l'expérience ancienne. Je me rappelle très bien les exclamations désabusées de ma mère et de ses collègues

[1] Rachel Boutonnet, « Premier Poste », `http://sauv.net/premposte.php`, « Journal d'une institutrice clandestine », Ramsay – Marc Le Bris, « Ecole : ce que vos enfants n'apprennent pas », `http://sauv.net/figaro021207.php`

constatant d'une année sur l'autre la perte de sens induite chez les élèves du cours préparatoire par l'apprentissage de la seule addition. Alors que les problèmes de différence (gains, pertes) ou de partage (bonbons) apparaissent dans la vie de tous les jours dès la prime enfance, les programmes scolaires viennent polariser les esprits sur l'usage systématique d'une opération dont le sens ne peut plus percer puisque c'est l'unique option permise [2].

Là où autrefois le sens se construisait dans la diversité opératoire grâce à un accroissement progressif de la technicité et de la taille des nombres mis en jeu (et aussi grâce à la possibilité de multiples répétitions des concepts au fil des années), les programmes Joutard prétendent introduire d'abord le sens des opérations, puis seulement ensuite les techniques opératoires une fois que « le sens est construit ». Incroyable paradoxe que de vouloir développer le sens de concepts qu'il est interdit de manipuler concrètement !

Ces glissements dans le temps, qui retardent les apprentissages fondamentaux à l'école primaire, se répercutent naturellement au Collège et au Lycée. Ainsi, la technique de l'addition des fractions, qui figurait autrefois au programme du CM1-CM2 a été repoussée en classe de 4ème. Et encore ne s'agit-il à ce niveau que d'une version allégée de l'addition des fractions, c'est-à-dire seulement au moyen du produit des dénominateurs. En effet, après que l'enseignement de l'arithmétique ait été supprimé de tout le secondaire à partir de 1985, il a été réintroduit très partiellement à partir de la troisième avec la détermination du PGCD par l'algorithme d'Euclide, sans définition des nombres premiers ; le PPCM est maintenant rejeté au niveau de la Terminale S, et pour les seuls élèves choisissant la spécialité Mathématiques. Toute la construction des nombres et de leurs propriétés est donc devenue lacunaire et incohérente. Ainsi, les nombres réels sont introduits en classe de seconde comme étant en correspondance avec les points d'une droite (« propriété admise »), sans aucune définition bien claire qui puisse les distinguer par exemple des nombres décimaux ou rationnels. La pratique manuelle de la division avait pourtant l'intérêt fondamental de faire observer dès l'école primaire ou le début du collège qu'une division entière produit une suite de restes périodiques, et il n'est dès lors pas très coûteux de définir les nombres réels comme des développements décimaux quelconques non nécessairement périodiques (en mentionnant si possible le cas des développements impropres). Les élèves sont certes amenés encore aujourd'hui en 4ème-3ème à manipuler des racines carrées, mais c'est surtout comme le résultat de calculs avec les calculettes. Le manque de repères numériques des élèves contraint les enseignants et les programmes à des rythmes de progression très lents.

Les programmes de géométrie ne permettent guère de compenser cette vision très pauvre du nombre, puisque la géométrie n'est plus traitée dans les faits que comme un catalogue de propriétés admises, avec très peu de démarches déductives permettant de donner des preuves et de déduire les résultats géométriques les uns des autres. Un manuel de 5ème très répandu se borne par

[2] Michel Delord : « Michèle Artigue et l'âge du capitaine », `http://michel.delord.free.fr/captain1-0.pdf`

exemple à donner dogmatiquement l'aire du triangle[3], sans la relier à celle du parallélogramme et du rectangle, qui apparaissent d'ailleurs plus loin dans le manuel. À la fin du Lycée, l'Analyse a été pareillement dépouillée de ce qui en permettait une véritable compréhension. Il est devenu impossible de faire des raisonnements précis alors que l'on n'a en général pas défini ce dont on parle, et que l'idée de limite est plus inaccessible que jamais à des élèves ayant une très faible maîtrise des nombres, de leurs encadrements ou approximations décimales. Dans le même temps, les programmes du Lycée continuent à présenter de grandes ambitions si l'on en juge par l'étendue des programmes et par la définition qui est donnée de la fonction exponentielle (unique solution d'une équation différentielle...)[4]. Ces ambitions sont certes légitimes, mais sont devenues incohérentes avec les savoirs réellement acquis par la très grande majorité les élèves. La faiblesse des horaires (5h30 par semaine en mathématiques) est de toute façon un handicap rédhibitoire qui interdit tout approfondissement.

Le grand écart s'accentue encore au niveau des classes préparatoires et de l'université, où on observe un décalage très important entre les objectifs affichés par les programmes et ce que les étudiants peuvent réellement en tirer. Si le caractère sélectif du cursus et le labeur intense peuvent permettre à certaines classes préparatoires d'élite de rattraper une partie du temps perdu, la démagogie et la tricherie dans l'évaluation sont devenues la règle à l'université. La formation des enseignants du secondaire, qui se passe pour l'essentiel à l'université et dans les IUFM, ne peut plus être assurée de manière satisfaisante.

Dans le domaine des sciences expérimentales, les lacunes de l'enseignement primaire sont également patentes. Ainsi, dans l'alinea « Système métrique, calcul de périmètres et d'aire », les programmes Joutard stipulent « Les conversions systématiques d'aires ne sont pas au programme du Cycle 3 ; elles seront traitées au Collège », « Aucune compétence relative aux volumes (autres que les contenances) n'est exigée », « Les élèves peuvent être confrontés à la détermination, par des procédures personnelles ou à l'aide d'une calculatrice, d'aires de rectangles dont les dimensions ne sont pas entières (...) mais aucune compétence n'est exigée à ce sujet ». La régression par rapport aux programmes 1945 du Cours Moyen, qui mentionnaient par exemple « Calcul des volumes : prisme droit à base triangulaire, cube, cylindre » est flagrante. Comment s'étonner dans ces conditions que les programmes de sciences expérimentales du Collège soient devenus essentiellement qualitatifs ? Les sciences de la matière sont, de façon constitutive, une modélisation théorique de la réalité expérimentale. Il est donc très important dès le collège, et même sans doute dès l'école primaire, d'accrocher cette réalité expérimentale à la possibilité d'évaluations numériques quantitatives. Les programmes actuels ne le permettent plus. Je renvoie ici aux rapports circonstanciés de l'Inspecteur Pédagogique Régional André Vaschalde, détaillant les effets néfastes de la dé-mathématisation de la Physique dans l'enseignement secondaire. Ces observations sont le fruit d'une grande expérience,

[3] J.P. Demailly : « Analyse des prérequis éducatifs nécessaires pour l'enseignement des Sciences », `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/prerequis.pdf`

[4] Un échange de courrier entre J.P. Demailly et P. Arnoux, `http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/echange1.pdf`

puisqu'elles s'étalent sur de nombreuses années et sur plusieurs pays francophones (France, anciennes colonies françaises)[5].

La responsabilité des glissements éducatifs est très diffuse, mais il y a souvent à la base une volonté aveugle de mettre en oeuvre des idéologies politiques ou sociétales sans aucune considération pour les contenus. Ces derniers mois, la grande affaire est, au choix, en fonction des circonstances, la politique de décentralisation ou la mise en place du *Licence/Master/Doctorat*. Tout ceci se passe dans une optique purement gestionnaire et administrative, sans que jamais les savoirs ou les méthodes d'enseignement ne soient pris en compte. Il est symptomatique de voir que très peu des questions posées à l'occasion du Grand Débat « Quelle Ecole pour demain » portent sur les contenus. Il n'y en a aucune portant sur le bilan des programmes et des filières actuelles. L'intervention de Michel Delord montre pourtant que les rapports des organismes officiels d'évaluation (DEP, HCEE) sont entachés d'erreurs de méthodologie et de biais considérables – conséquence probable de leur manque d'indépendance par rapport à l'administration. Il est urgent de mettre en place des instances d'évaluation de l'école réellement indépendantes, d'instituer des mécanismes permettant de faire un bilan objectif des réformes ou de pérenniser le savoir-faire pédagogique – ceci à une époque où la plupart des maîtres qui ont connu l'enseignement primaire avant les grandes réformes sont partis à la retraite. Le but du GRIP (Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes), récemment créé, est de permettre une telle réflexion indépendante [6]. J'espère que la SMF se donnera de son côté les moyens d'action nécessaires sur ces questions vitales à long terme pour l'enseignement des mathématiques, le développement de la science et de la technologie.

[5] André Vaschalde : « Lettre à François Bayrou », `http://smf.emath.fr/Forum`, message 212

[6] Site du GRIP : `http://grip.ujf-grenoble.fr`

Débat sur l'enseignement primaire. Ce ne doit être qu'un début ...

Michel Delord

Conformément au mandat sur lequel j'ai été élu au Conseil d'administration de la SMF et dans la droite ligne de la pétition contre les nouveaux programmes du primaire dont j'ai été un des initiateurs, j'ai été le demandeur depuis mon élection en juin 2002 de cette réunion que j'ai préparée par la publication de plusieurs textes :

Précisons nos divergences (sur les algorithmes)[1]

En trois parties :

– La première tente de montrer que la justification pédagogique de l'apprentissage des algorithmes opératoires n'est pas simplement qu'ils permettent de « trouver le résultat ». Il montre que cette problématique — utilitariste — n'a pas toujours été dominante puisque l'on pouvait enseigner l'algorithme de l'extraction de la racine cubique tout en considérant que ce n'était pas la procédure utilisée à l'école ou dans un cadre professionnel puisqu'on utilisait les tables de logarithmes.

– La deuxième fait le point sur les programmes actuels et montre que les algorithmes opératoires n'y sont plus appris puisque n'est jamais mentionné la nécessité, y compris au collège, de savoir faire les opérations « dans tous les cas ». Je m'appuie aussi sur les conclusions de la commission de l'AMS qui avait eu à traiter ce sujet.

– La troisième critique l'opposition biaisée calcul automatisé/calcul pensé défendue depuis les années 80 par Ermel[2] lui préférant la traditionnelle opposition calcul mental/calcul écrit défendue par René Taton[3].

Globalement, au travers de sa position sur les algorithmes pour le calcul posé et pour le calcul mental, la position de la commission Joutard consiste à nier la nécessité de l'apprentissage d'un *moyen uniforme de résoudre une classe entière de problèmes*[4], c'est-à-dire en fait à nier l'apprentissage d'une loi scientifique.

---

[1] Partie I (2 Oct. 2003) : *Jules Ferry et les calculettes* :
`http://michel.delord.free.fr/ferry_calc1.pdf`
Partie II (9 Oct. 2003) : *Sur les algorithmes* :
`http://michel.delord.free.fr/ferry_calc2.pdf`
Partie III (18 Oct. 2003) *À propos du calcul mental*
`http://michel.delord.free.fr/ferry_calc3.pdf`

[2] Ermel , Apprentissage des calculs à l'école élémentaire Cycle Moyen , INRP, Sermap-Hatier, Paris, 1982. T. 2, page 145. `http://michel.delord.free.fr/ermel-cm.pdf`

[3] René Taton, Calcul mental, Que sais-je ? N°605 . 1953, 2ème Ed. 1957. Extraits.
`http://michel.delord.free.fr/taton.pdf`

[4] Expression empruntée au *Report of AMS Association Resource Group*, Notices of the AMS, Vol. 45, N° 2, Feb. 1998. `http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf`

Michèle Artigue et l'âge du capitaine[5]

À partir de l'article de Michèle Artigue « *Mathématiques : les leçons d'une crise* »[6], je critique l'abandon du calcul sur les grandeurs en montrant son influence négative sur les capacités des élèves dans la résolution des problèmes (notamment abandon de l'enseignement des rudiments du calcul dimensionnel).

Commentaires sur l'étude de la DEP de 1996[7]

La DEP a fait repasser en 1995 des épreuves de certificats d'études primaire des années 20. Les résultats de cette comparaison montrent, sur des problèmes extrêmement simples dont la maîtrise est nécessaire à toute époque, une baisse drastique du niveau : 60% d'une classe d'âge (c'est-à-dire plus que la proportion — 50% — qui obtenait le certificat d'études) réussissait intégralement ce type de problèmes et 20% soit ne le commençait pas soit n'avait rien de juste. En 1995, la proportion s'inverse et seulement 21% le réussissent intégralement tandis que 60% sont en échec total. De plus ces résultats sont obtenus non pas en refaisant passer les problèmes donnés au certificat d'études mais :

1) en limitant le choix aux problèmes qui correspondent au programme en cours en 1995 considérablement réduit par rapport à ceux de 1920 ;

2) en supprimant tout problème de géométrie sous le prétexte — faux — qu'il n'y avait pas de géométrie au programme du CEP.

L'étude de la DEP prétend que le niveau de maîtrise des opérations s'est conservé mais une étude attentive montre que ces bons résultats sont liés au choix des opérations proposées et aux consignes de correction recommandées. De plus, si l'on veut estimer l'évolution du niveau de 1992 à 2000, on peut s'appuyer sur les chiffres fournis par Xavier Darcos[8] : « *38% des élèves ne maîtrisent pas les compétences de base en techniques opératoires, alors qu'ils étaient 17,4% en 1992.* »

Il n'est pas inintéressant de connaître les positions de M. Joutard, notamment celles antérieures à sa nomination à la tête de la commission qui porte son nom, chargée d'écrire les programmes du primaire parus en février 2002 : ceci nous permettra de comprendre pourquoi il a été choisi et l'orientation qu'il souhaitait donner aux programmes. On trouve ces positions dès 1999 dans *Réussir l'école, Pour une politique éducative*[9].

« *Les compétences et les comportements sont en quelque sorte derrière les connaissances : c'est à travers ces dernières, et à travers elles seulement, qu'on les maîtrise ... Seconde conséquence, une matière est certes importante en elle-même, il n'est pas question de lui contester sa légitimité, mais, contrairement à ce que croient beaucoup de professeurs, elle n'est pas, elle ne doit pas être sa*

---

[5] `ttp://mic`el.delord.free.fr/captain1-0.pdf

[6] *Sciences et Vie* Hors Série N° 180 de septembre 92, pages 46-59

[7] `http://michel.delord.free.fr/cep96.pdf`

[8] Xavier Darcos, *L'école est un marché de dupes* , Le Figaro Magazine, 9 septembre 2000. `http://appy.ecole.free.fr/articles/20000909a.htm`

[9] Philippe Joutard et Claude Thélot, *Réussir l'école, Pour une politique éducative*, Le Seuil, 1999, 292pages. Le fait que ce livre soit cosigné par Claude Thélot, longtemps responsable du système d'évaluation de l'Éducation nationale et actuellement président de la commission du Grand Débat ne peut donner que plus de poids aux opinions qui y sont exprimées.

propre fin. On pourrait même prétendre à la limite qu'elle n'est qu'un moyen, le moyen précisément de faire acquérir ces compétences et ces comportements nécessaires à cette personne autonome que l'école s'efforce de former. « La culture, c'est ce qui reste quand on a tout oublié » : la fameuse phrase d'Édouard Herriot doit se comprendre ainsi. Après être sorti de l'école, les savoirs que l'on y a appris s'estompent, mais c'est ce qu'on a appris grâce à eux et à travers eux qui reste de façon indélébile, ou du moins de façon bien plus durable [. . .] Vous ne savez plus extraire manuellement les racines carrées, bien que cette connaissance vous ait été enseignée au collège il y a trente ans, et qu'éventuellement vous y ayez été expert ; mais vous avez gardé ce que fournit l'enseignement des mathématiques, l'habitude et la capacité à ordonner les problèmes et les questions, à les analyser de façon rigoureuse, à les résoudre progressivement. [. . .] Que l'enseignement d'une discipline trouve une justification non en elle-même mais dans les compétences et comportements que les élèves peuvent acquérir à travers elle, est éclatant dans le cas des sciences. Améliorer notre enseignement des sciences au cours des années et décennies futures est alors indispensable, pour trois raisons qui illustrent les propos précédents.

La première est directement liée à la connaissance scientifique elle-même : il faut que nous formions une élite scientifique de la meilleure qualité possible pour alimenter notre recherche scientifique et, par là, « décrocher » des brevets : que l'on songe à l'Institut Pasteur, à l'extrême importance scientifique, symbolique, économique, pour un pays, d'avoir breveté tel ou tel vaccin. Dans le prochain siècle, la compétition entre pays reposera en large partie sur leur capacité à avoir des chercheurs scientifiques féconds, en biologie et ailleurs, faisant des découvertes qui aient en outre des retombées économiques. . . . Que permet l'enseignement scientifique, en effet ? Il doit permettre aux jeunes qui en bénéficient de se heurter au réel, et c'est aujourd'hui fondamental. Plus fondamental qu'autrefois, dans la mesure où la socialisation des jeunes repose désormais pour une part sur le virtuel. . . Se frotter directement au réel est essentiel, car l'on comprend qu'il résiste, qu'il n'est pas une simple modalité du virtuel, susceptible de toutes les souplesses et de toutes les adaptations. Et c'est parce que le réel résiste, parce que le jeune s'y heurte, qu'il peut s'y adosser. Rien de plus formateur que cette expérience du monde réel, rien de plus nécessaire que de l'avoir éprouvée. L'enseignement scientifique, dès lors qu'il est fondé sur l'observation et l'expérience et qu'il n'est pas réduit à des mathématiques au tableau noir, permet cette expérience [. . .]. La troisième raison pour laquelle il faut développer un enseignement scientifique expérimental tient aux occasions de raisonnement et de dialogue avec l'autre qu'il donne. »

Vous avez bien lu et *il n'y a pas d'autres raisons évoquées* pour *améliorer notre enseignement des sciences*. Il doit donc *décrocher des brevets* et ne doit donc pas être *réduit à des mathématiques au tableau noir* : deux raisons qui font que ni Lafforgue ni Andrew Wiles n'auraient du être subventionnés. C'est bien normal puisque la recherche mathématique ne permet pas l'expérience de la *résistance du réel* puisque l'on sait que les conjectures ne résistent pas. De toute façon, dans l'enseignement, les mathématiques comme les autres matières *ne trouvent pas leurs justifications en elles-mêmes*. Avant de poursuivre, il n'est pas inutile de se vacciner, avec Henri Poincaré, contre ceux qui détruisent les

possibilités même des résultats immédiats au nom des résultats immédiats : « *On vous a sans doute souvent demandé à quoi servent les mathématiques et si ces délicates constructions que nous tirons tout entières de notre esprit ne sont pas artificielles et enfantées par notre caprice. Parmi les personnes qui font cette question, je dois faire une distinction ; les gens pratiques réclament seulement de nous le moyen de gagner de l'argent. Ceux-là ne méritent pas qu'on leur réponde [...] D'ailleurs, une science uniquement faite en vue des applications est impossible ; les vérités ne sont fécondes que si elles sont enchaînées les unes aux autres. Si l'on s'attache seulement à celles dont on attend un résultat immédiat, les anneaux intermédiaires manqueront, et il n'y aura plus de chaîne*[10]. »

Je voudrais maintenant mentionner quelques points qui me semblent fondamentaux pour la tenue de ce débat, points qui le rendent difficile et qui expliquent que rien ne pourra être tranché cet après-midi :

(1) Complexité de la situation

La situation est extrêmement complexe puisque l'on doit traiter de questions historiques portant au moins sur une période de trente ans. Ce n'est pas un hasard si, dans de nombreux textes et en particulier dans « Michèle Artigue et l'âge du capitaine » je fais référence à des textes datant des années 60. Ce n'est pas un hasard justement puisque les effets réels et complets d'une réforme ne se constatent que sur une génération complète qui a eu comme enseignants des élèves qui ont subi le cursus complet de cette réforme[11].

(2) Ambiguïtés des programmes et des évaluations

Je cite seulement un exemple d'ambiguïté dans les programmes, renforcée par les types d'évaluations effectuées, celui portant sur la maîtrise des algorithmes d'opérations. On ne trouvera nulle part dans les programmes l'affirmation que l'on ne doit pas savoir faire une division. Roland Charnay affirme même qu'il « *serait pédagogiquement et culturellement inacceptable ... d'arrêter ou réduire fortement l'enseignement des techniques opératoires*[12] ». Mais :

a) lorsque l'on consulte les programmes, on constate :

– que les programmes du primaire disent explicitement « *Pour la division, on se limitera à des calculs posés simples à la fin du cycle 3 (du type 432 divisé par 7 ou 432 divisé par 35)* » et tout aussi explicitement que toute opération posée sur les décimaux est hors programme (alors que la division d'un décimal par un entier était au programme précédent, celui de 1995) ;

– que le programme de sixième — actuel, c'est-à-dire celui de 1995 — dit tout aussi explicitement : « *Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier par un nombre entier d'un ou deux chiffres. Effectuer, dans des cas simples, la division décimale d'un nombre entier ou décimal par un nombre entier... Aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux.* »

[10] Henri Poincaré, in *La valeur de la Science*, Chapitre V : L'analyse et la physique

[11] Un élève qui subit le programme de maths du BO de 1970 à 5 ans, devient enseignant en gros en 1990. S'il a à ce moment là des élèves de 5 ans , ceux-ci atteignent le bac en ... 2003. D'autre part, les décisions prises actuellement prendront leurs effets complets en 2030.

[12] `http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/Commission-Joutard/RCarticleAPMEP-4.pdf`

– que le programme de cinquième ne mentionne la division que dans la phrase suivante « *Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier.* »

Nulle part n'est donc affirmé qu'il faut savoir faire une division. De plus les évaluations non seulement ne testent pas les capacités des élèves sur une division du type 4312 par 543 mais se maintiennent en dessous des normes du programme. Pour les évaluations en sixième, les *seules* divisions posées sont :

en 2000,

287 divisé par 2	1000 divisé par 9	247 divisé par 23
Réussite : 77,6%	Réussite : 67,8%	Réussite : 61,7%

mais les quotients 143, 111 et 10 sont donnés et l'on demande seulement de déterminer le reste.

En 2001, même consigne mais seulement deux divisions.

287 divisé par 2	247 divisé par 23
Réussite : 74,4%	Réussite : 58,3%

En 2002 et 2003, il n'y a plus ni multiplications ni divisions dans l'évaluation sixième. Pour la dernière rentrée, pas d'évaluation obligatoire mais on peut repasser celle de l'année précédente. Le niveau ne peut plus baisser puisqu'il n'est pas évalué.

b) lorsque l'on consulte la version grand-public, celui-ci peut croire que les élèves apprennent complètement les divisions puisque toutes ces subtilités disparaissent :
– Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?[13] (page 231) « *Les connaissances en calcul concernent... la division euclidienne de deux nombres entiers.* »
– Qu'apprend-on au collège ?[14] (page 126) « *Au collège, il est également nécessaire de poursuivre l'apprentissage du calcul numérique (calcul mental, écrit ou instrumenté)...* »

(3) Contexte historique et cohérence des positions

Nous avons à traiter des questions qui ne peuvent être interprétées que dans leur contexte historique : par exemple, il est tout à fait vrai, en général, que l'enseignement n'a pas à se centrer sur la virtuosité technique, ce que clament tous les programmes. Mais quel est le sens de cette affirmation si nous sommes dans une phase de déclin des capacités techniques des élèves ?
Autre exemple révélateur des liens entre positions pédagogiques et analyse historique : d'un coté, Roland Charnay faisait partie de l'équipe qui a écrit en 1981 « *Il n'est pas inutile de rappeler ici que la division de deux nombres décimaux ne relève pas des programmes du Cycle Moyen [...]. Cette décision est de notre point de vue pleinement justifiée dans la mesure où [...], les enseignants savent d'expérience que (son) apprentissage raisonné pose de sérieux*

[13] Publiées sous la responsabilité du Conseil National des Programmes, co-édition CNDP et XO éditions, 2002
[14] Publiées sous la responsabilité du Conseil National des Programmes, co-édition CNDP et XO éditions, 2002

problèmes théoriques et pédagogiques, qu'une infime minorité d'élèves peut réellement dominer à l'âge de onze ans. ». D'un autre coté, la position dominante notamment dans les médias syndicaux[15] était que seulement 10% des élèves réussissaient le certificat d'études, en majorité à l'âge de onze ans, examen au programme duquel se trouvait la division des décimaux.
Cette double affirmation confortait le fait « *qu'une infime minorité d'élèves peut réellement (la) dominer à l'âge de onze ans* ». Mais si, en réalité 50% d'une classe d'âge obtient le CEP à partir des années 20 — et plus ensuite —, on doit au contraire questionner la validité de théories pédagogiques qui démontrent le *contraire* de ce qui est.

Cet ensemble volontairement réduit de points nodaux extrêmement complexes montre, à mon sens, que le débat ne sera pas tranché cet après-midi. Ce serait donc déjà une avancée importante d'arriver à ce que nous précisions nos divergences au moins sur un nombre réduit de points.
Il est donc indispensable que le débat se poursuive par exemple sur le Forum de la SMF, avec publications des textes les plus importants sur la tribune libre et dans la *Gazette*.
D'autre part, il serait souhaitable que la SMF organise une réunion publique sur le sujet et je souhaite toujours que la SMF prenne position publiquement, même si ce comportement ne fait pas partie de la tradition de cette société savante, contre le « *processus catastrophique ancien qui dénature l'enseignement*[16] », conformément à la profession de foi sur laquelle j'ai été élu au Conseil d'administration.

Brefs compléments : au cours du débat, les membres présents de la commission Joutard ont asséné deux contrevérités :

– *Affirmation qu'il n'y avait pas eu de nouveaux programmes en 1995.* Il suffit pour se convaincre du contraire de lire le n° 2 de la revue *Puissance* de l'académie de Créteil [17] : « *La publication de nouveaux programmes, aussi bien pour l'école que pour le collège [...] ont motivé l'organisation, le 8 novembre 1995, d'un après-midi d'information sur les lignes de force de ces divers programmes et la clarification de certains points. [...]. Le texte qui suit est issu de notes prises au cours de l'exposé de Roland Charnay. Celui-ci a participé à l'élaboration des programmes aussi bien de l'école primaire que de sixième* »

– *Affirmation que les élèves apprennent l'algorithme de la division en collège* : je renvoie à ce qui est dit supra sur les programmes et aux programmes eux-mêmes. Je ne peux renvoyer à une évaluation des capacités des élèves par les organismes officiels tels que la DEP puisqu'il n'existe aucune évaluation sur la capacité des élèves à faire des divisions d'un niveau supérieur à celui d'une division euclidienne par un entier à deux chiffres et d'un décimal par un entier à 1 chiffre. Les seules que nous ayons, à ce très bas niveau, effectuées en cinquième en septembre 2002 sont :

---

[15] Cf. *Commentaires sur l'étude de la DEP de 1996*, Chapitre II) Quelques Poncifs A) « Seule une minorité d'élèves avait le certificat d'études », pages 7 à 9 de (op. cit.)
[16] Profession de foi de Michel Delord
`http://smf.emath.fr/Instances/Conseil2002/Delord.html`
[17] `http://www.ac-creteil.fr/maths/puissances/N2/ecol-six.html`

3978 divisé par 13 : 6 élèves sur 10 de cinquième échouent.
178,8 divisé par 8 : les trois-quarts des élèves de cinquième échouent[18].

J'avais donc de bonnes raisons de dire que ce serait déjà « *une avancée importante d'arriver à ce que nous précisions nos divergences* ».

[18] Michel Delord, 1920 – 2002 : *De l'enseignement à la remédiation*
`http://michel.delord.free.fr/remed.html`
Michel Delord, N comme niveau `http://michel.delord.free.fr/propter.pdf`

Mathador

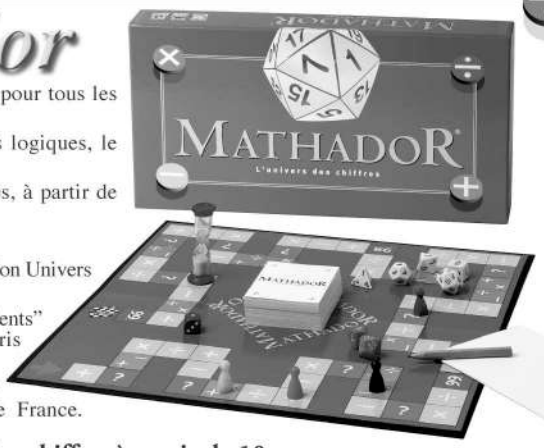
MATHADOR : le jeu de société idéal pour tous les passionnés des nombres.

Calcul mental et résolution d'énigmes logiques, le "trivial poursuit" des chiffres.

De 2 à 12 joueurs et pour tous les âges, à partir de 10 ans.

Mathador a obtenu :

- La coupe du concours Lepine au salon Univers d'Enfants de Paris 2001.
- Le premier prix des "Nouveaux Talents" au salon Univers d'Enfants de Paris 2001.
- Le prix Anatole Decerf 2002 remis par la Société Mathématique de France.



L'univers des chiffres à partir de 10 ans

MATHADOR JUNIOR

L'UNIVERS DES CHIFFRES

Calculer en s'amusant ou s'amuser en calculant, MATHADOR Junior : le jeu qui va faire adorer les maths à toute la famille.



Départ : Choisis une quille et déplace-toi sur le parcours avec le dé bleu.
But : Arriver le 1er à la fin du parcours sur le drapeau.
Principe : En se déplaçant sur le parcours, le joueur peut tomber sur 2 types de cases. A chaque coup, tout le monde joue et c'est le premier qui a trouvé qui reprend la main et qui relance le dé bleu.
Les 2 types de cases :
Case rouge : il faut trouver la solution d'une énigme sur une carte.
Case jaune, verte ou bleue : il faut réaliser un calcul avec les 7 dés.
Les 2 dés rouges forment le nombre qu'il faut trouver et les 5 dés blancs donnent les nombres avec lesquels on calcule.
Rassemblez vos neurones et à vous de jouer…

De 2 à 12 joueurs, pour tous les âges à partir de 8 ans

Bon de commande :

A compléter (éventuellement en photocopiant ce bon) et à adresser par fax : 03 84 93 66 57, par courrier à L2D : 60, rue Georges Moulimard, BP 62, 70300 Luxeuil-les-Bains ou encore par e-mail : louis.publilux@wanadoo.fr

OFFRE :

1 jeu = 35 euros (+ 5euros de port)
2 jeux = 70 euros (port offert)
3 jeux = 100 euros (port offert)

Livraison COLISSIMO SUIVI sous 48H

Adresse à laquelle la commande doit parvenir : .....

.....

.....

Tél : .....

Nombre de jeux : Mathador……, Mathador Junior……

Francophonie au Canada : un équilibre délicat entre l'épanouissement des différentes cultures et l'anglais langue internationale de la science

Christiane Rousseau[1]

La société mathématique du Canada (`www.smc.math.ca`) fonctionne de manière bilingue. Cela signifie que les textes officiels, les annonces et affiches, ainsi que tout le matériel éducatif qui vise les jeunes et les enseignants dans les écoles sont traduits dans les deux langues. Les Notes de la SMC servent de bulletin de liaison des membres. Les textes du président ou du directeur exécutif et l'éditorial apparaissent dans les deux langues. Pour le reste chaque membre est libre d'y écrire dans la langue de son choix mais en pratique les contributions en français sont rares. Même si nos journaux de recherche acceptent des articles dans les deux langues il n'y a à peu près pas d'articles en français. Lors des rencontres de la SMC l'utilisation du français se limite principalement aux activités sociales, sauf lorsque Robert Langlands décide de donner sa conférence plénière en français lors de la rencontre de juin 2002 à Québec. Il a alors déridé l'atmosphère, si bien que lors du banquet beaucoup de congressistes ont échangé l'anglais pour le français. La SMC est très impliquée dans toutes sortes d'activités éducatives. L'utilisation du français devient alors essentielle puisqu'on doit travailler avec les enseignants des écoles et les élèves. Ainsi dans notre revue de problèmes Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem les problèmes apparaissent maintenant en français et en anglais. Nous avons organisé en mai 2003 un Forum canadien sur l'enseignement des mathématiques réunissant des universitaires, des enseignants des écoles et des membres des ministères de l'éducation des différentes provinces : les activités se sont déroulées dans les deux langues avec traduction simultanée. La société mathématique du Canada encourage l'épanouissement des cultures au Canada. Qui dit cultures dit plus que français et anglais. Lors du Forum canadien sur l'enseignement des mathématiques nous avons ouvert un nouveau front d'action sur l'enseignement des mathématiques pour les élèves des communautés aborigènes. Contrairement aux communautés francophones et anglophones dont l'âge moyen est élevé, ces communautés sont très jeunes. Le taux de décrochage scolaire y est très élevé. Pourtant ces communautés n'ont d'autre choix que de promouvoir l'enseignement pour pouvoir créer des emplois pour leurs jeunes sur leurs territoires. L'école doit donc s'adapter à la culture et aux valeurs de ces communautés si l'on veut pouvoir contrer le taux de décrochage.

[1] Présidente de la société mathématique du Canada

En ce qui concerne le réseau des universités canadiennes, il existe des universités anglophones, des universités francophones (principalement au Québec) et quelques universités bilingues où coexistent des versions anglaises et françaises des cours de premier cycle. Comme partout dans le monde, la langue de la recherche est principalement l'anglais, bien qu'il existe des exceptions dans certains groupes de chercheurs qui entretiennent des liens très étroits de collaboration avec la France. Dans toutes les universités canadiennes, y compris les universités francophones, les étudiants peuvent écrire leur thèse en anglais. La première raison justifiant ce fait est la grande pression pour que les étudiants publient les résultats de leur thèse dès la fin de leur doctorat. Plusieurs universités encouragent la rédaction de thèses par articles, le corps de la thèse étant constitué d'articles auxquels l'étudiant attache une introduction, une conclusion et parfois un chapitre de généralités. Une partie importante des étudiants des cycles supérieurs proviennent de l'étranger. Historiquement, les universités francophones accueillaient surtout des étudiants africains qui possédaient déjà le français à leur arrivée. C'est de moins en moins le cas et on reçoit aussi des étudiants asiatiques qui ont déjà du mal à parler l'anglais à leur arrivée. Leur imposer de fonctionner en français est une lourde contrainte qui ralentit leur progression : comme le marché de l'emploi qui les attend est principalement anglophone ces étudiants écrivent presque tous leur thèse en anglais. Si l'on veut dresser un portrait complet de la situation il faut aussi mentionner qu'il existe aussi quelques universités anglophones qui permettent aux étudiants d'écrire leur thèse en français.

Les programmes de co-tutelle de thèse France-Québec permettent à un étudiant d'obtenir un diplôme de doctorat décerné conjointement par une université française et une université canadienne. C'est une option très intéressante pour un étudiant, mais à ne recommander que si les deux directeurs de thèse collaborent déjà étroitement.

Dans les écoles québécoises du pays, les manuels sont produits par des maisons d'édition québécoises. Par contre, le marché universitaire francophone est trop petit pour permettre que beaucoup des manuels soient produits sur place et les étudiants doivent souvent utiliser des manuels de référence anglais, même pour leurs cours de premier cycle. Parmi les pistes de collaboration, on peut certainement compter la mise en commun de matériel en français pour l'enseignement : par exemple des notes de cours sur Internet.

L'anglais comme langue de recherche est là pour rester. Ceci ne signifie pas que le français n'ait plus de rôle à jouer, notamment sur le plan de l'enseignement, de la communication avec le public et pour promouvoir une culture scientifique à l'intérieur du plus vaste volet de la culture en général. Une collaboration internationale a eu lieu lors des activités de l'an 2000. Ainsi les affiches du métro de Montréal ont été reprises dans plusieurs pays européens. Toulouse 2004 sera une occasion de réunir les mathématiciens français et canadiens et, espérons-le, de faire des mathématiques en français. La table ronde sur la francophonie permettra de planifier d'autres actions. Verra-t-on un jour des rencontres mathématiques francophones ? La société mathématique du Canada sera heureuse de se joindre à la communauté mathématique francophone mondiale pour promouvoir les mathématiques dans la culture universelle.

INFORMATIONS

Pourquoi adhérer à la SME ?

Luc Lemaire

La Société Mathématique Européenne (SME), créée en 1990, représente aujourd'hui 52 sociétés nationales ou régionales et environ 2 400 membres individuels.

Son but est le développement de tous les aspects des mathématiques, et d'un sentiment d'identité pour les mathématiciens européens.

Son action est de plus en plus visible et efficace, et j'espère que de nombreux mathématiciens — purs ou appliqués — continueront à la rejoindre.

Les membres de la SMF ou de la SMAI peuvent devenir membres de la SME pour un complément de cotisation de 20 euros par an.

Les publications

Les membres reçoivent la *Newsletter* de la société (quatre volumes par an), qui inclut des annonces de conférences, des articles d'intérêt général sur les mathématiques, les mathématiciens et les problèmes sociétaux de notre discipline, des interviews, des analyses de livres, etc...

La société publie également un journal (JEMS) et les membres bénéficient d'une réduction sur le prix de l'abonnement. Elle lance également des séries de livres dans le cadre de la EMS-Publishing House, récemment créée. EMS Publishing House édite aussi le journal *Interfaces and free boundaries*.

Les congrès et rencontres

La SME organise diverses séries de congrès, écoles d'été et conférences.

Tous les quatre ans, le Congrès européen de mathématiques réunit un bon millier de participants. Ce fut le cas à Paris (1992), Budapest (1996) et Barcelone (2000).

En 2004, le congrès aura lieu à Stockholm, ce qui sera l'occasion d'y intégrer trois conférences Nobel (en physique, chimie et biologie) où des grands noms du sujet présenteront les enjeux mathématiques de leur discipline.

Douze réseaux du cinquième programme cadre de la Commission européenne présenteront également leurs travaux (voir `http://www.math.kth.se/4ecm` pour le programme).

Chaque année, la SME organise deux écoles d'été, visant un équilibre entre mathématiques pures et appliquées.

Une initiative récente — qui a attiré plus de 500 mathématiciens à Nice — a été le congrès AMAM (Applied Mathematics and Applications of mathematics) en collaboration SMF–SMAI–SME.

Les *EMS lectures* sont des cours de haut niveau donnés par un expert prestigieux, les *EMS mathematical week-end* sont des réunions en collaboration avec des sociétés ou des départements de différents lieux d'Europe (le premier a eu lieu à Lisbonne en septembre 2003), les Forums Mathématiques Diderot sont des réunions sur trois sites sur des sujets liant les mathématiques et un autre thème (mathématiques et musique, mathématiques et pollution de l'eau, mathématiques comme moteur de l'évolution culturelle...)

Chaque membre de la société peut introduire des propositions de réunion, qui sont examinées par un comité d'organisation et un comité scientifique (les appels à proposition figurent sur le site de la SME : `http//:www.emis.de`).

La SME comme porte-parole des mathématiciens européens

La SME a développé une action peut-être moins visible mais tout aussi importante en se faisant le porte-parole de la communauté mathématique auprès des instances européennes.

Cela a pris quelques années, mais la SME est maintenant régulièrement consultée sur les grands programmes de l'Union européenne.

La SME a ainsi présenté sa position sur l'espace européen de la recherche, sur la définition des programmes cadres successifs, sur la communication de la Commission européenne, sur le rôle (et le financement) des universités.

Comme les besoins de la recherche mathématique diffèrent de ceux des sciences expérimentales, il importe que les programmes européens soient suffisamment souples pour que chacun ait la chance d'y concourir. On peut voir comme des progrès importants (et partiellement liés aux efforts de la SME) que depuis le cinquième programme cadre les centres mathématiques soient éligibles comme « infrastructures », et que dans le sixième le budget des « Ressources humaines et mobilité » ait augmenté.

L'aspect transdisciplinaire des mathématiques n'est toutefois pas encore bien pris en compte et fait l'objet des efforts de la SME.

Le soutien de la base de donnée Zbt-MATH et de l'équipe française qui y collabore (Cellule Math Doc) est également une priorité de la société.

Pourquoi être membre ?

Les mathématiciens français ont eu depuis 1990 une influence importante dans la SME.

Le comité exécutif de dix membres qui est à la base de nombreuses initiatives de la société a toujours inclus un mathématicien actif en France : Pierre-Louis Lions, Eva Bayer, Jean-Pierre Bourguignon (président de la SME de 1995 à 1998), Doina Cioranescu actuellement.

Chaque membre de la société bénéficie des avantages décrits ci-dessus (Newsletter, réductions diverses). Mais surtout il permet à la SME de développer ses activités (congrès, interventions dans la politique scientifique européenne) au

profit de tous. Et si chacun se disait que sa propre participation n'est pas cruciale, il n'y aurait plus ni société, ni action en faveur de chacun.

En étant membre, vous permettez l'organisation de congrès ou le développement de programmes de mobilité européenne qui peuvent vous intéresser personnellement.

4e Congrès Européen 4ecm

Tous les quatre ans la Société Mathématique Européenne organise un Congrès européen.

Le 4e Congrès des mathématiques se déroulera du 27 juin au 2 juillet 2004 à Stockholm en Suède.

Le thème du Congrès est

« Les Mathématiques en sciences et technologie »

Pour plus d'informations vous pouvez consulter la page web du Congrès : `http://www.math.kth.se/4ecm/`

Une brève histoire de la Société Mathématique de Belgique en deux chapitres et demi.[1]

Luc Lemaire[2]

Au moment de la conférence conjointe avec la Société Mathématique de France (SMF), son président Michel Waldschmidt a pris l'initiative d'écrire une histoire de la SMF, laquelle était publiée dans la Newsletter de la Société Mathématique de Belgique. En 2005 les partenaires du congrès (les trois sociétés mathématiques BeNeLux et la SMF) seront au courant de l'histoire et des activités mutuelles. En même temps le Président de la SMF m'a demandé d'écrire un texte équivalent. C'était une tâche très facile parce que Luc Lemaire, à présent vice président de l'EMS, et ancien président de la BMS, a rédigé il y a quelques années un tel résumé pour la Newsletter de l'EMS. Ce résumé a été mis sur le site web de la SMB et il ne m'a pas fallu faire beaucoup d'adaptations pour ce texte.

La BMS est une petite société, en comparaison avec d'autres sociétés mathématiques en Europe, donc l'histoire et la liste des activités et publications peuvent paraître plutôt modestes, mais de cette manière on a l'avantage que les choses peuvent s'arranger par un simple coup de téléphone ; autrefois la direction de la BMS était exécutée par une seule personne comme on peut le découvrir dans le texte de Luc Lemaire.

A.Bultheel
Président actuel de la SMB

Le début (1921–1946)

J'ai devant moi deux manuscrits volumineux datés de 1921 jusqu'à 1946 avec les comptes-rendus des réunions de la Société Mathématique de Belgique.[3] Ces notes nous donnent un point de vue intéressant et nostalgique sur la naissance de la Société et le contexte de la recherche mathématique de ce temps. La première page est datée du 14-03-1921, et présente la décision de créer « un cercle mathématique où toutes questions concernant les mathématiques pures et appliquées peuvent être traitées, par conférences, communications et discussions ». Il y avait 9 personnes présentes, entre autres les plus connus Th. De Donder, L. Godeaux et A. Errera. La réunion suivante rassembla 22 membres qui adoptèrent un règlement provisoire et suivirent deux exposés par A. Errera

[1] Cette histoire brève a été publiée originalement dans *the European Mathematical Society Newsletter* (29 septembre 1998). Ils ont gentiment donné leur accord pour le réemploi.

[2] Vice-président de la Société Mathématique Européenne.
Ancien président de la Société Mathématique de Belgique

[3] Ces manuscrits sont conservés au Fonds Hirsch, une section de la Bibliothèque de l'Institut de Statistique et Recherche Opérationnelle de l'U.L.B. (Campus Plaine, bâtiment NO, 9^{e}étage, tel. 32(0)2 650.58.98). Parce qu'il s'agit de manuscrits uniques, ils ne peuvent être enlevés de la bibliothèque. Une photocopieuse est disponible.

et Th. De Donder. Les statuts officiels ont été définis en novembre et en janvier 1922, le nom « cercle »était remplacé par « Société ». Voici quelques extraits des statuts.
« *Article 2 : Le but de la Société est la contribution au progrès et à la diffusion de la mathématique en Belgique, pure et appliquée dans le sens le plus large. La Société cherche à établir un rapport permanent entre l'école secondaire et l'université.* » Ces buts pourraient probablement être exprimés aujourd'hui de la même façon et les relations entre mathématique pure et appliquée, ou entre les différents niveaux d'enseignement sont toujours des questions actuelles.

L'Article 3 prévoit que chaque mois il y a une réunion (sauf en août et septembre), et l'article 7 prévoit que la cotisation est de 10 francs belges (un quart d'euro) pour les membres habitant à Bruxelles, mais 5 francs pour les autres ! Ces articles survivaient aux changements de statuts en 1923 et 1936. À mon avis, ils n'ont été modifiés qu'en ... 1998. En fait, personne ne tenait compte de ces statuts (ni n'en connaissait l'existence) – même quand les réunions mensuelles disparurent par manque de participants dans les années soixante-dix, ou quand la cotisation augmentait jusqu'à la somme (toujours modeste) de 18 euros – pour tous. Le dernier article spécifie que dans le cas où la Société est dissoute, « l'avoir est remis aux pauvres ». Cette phrase veut dire tous les pauvres – aucune définition ou algorithme n'étant donné pour les identifier. À cette époque, la Société n'avait pas encore de journal, mais les comptes rendus des séances étaient publiés dans le supplément bref d'un journal de cette époque : *Mathesis.*

Les procès verbaux manuscrits de chaque réunion décrivent le sujet de la conférence et résument la discussion. La plupart des conférences étaient données par des mathématiciens belges, qui avaient besoin de ces contacts mensuels, et les ont maintenus pendant de nombreuses années. Il va de soi que des conférenciers étrangers ont aussi été invités. Souvent, les conférences sont complétées par des rapports de résultats annoncés aux congrès internationaux, où un membre (peut-être un seul) avait eu l'occasion d'aller.

Deux aspects sont frappants. Ces réunions mensuelles ont continué longtemps (excepté pendant la deuxième Guerre Mondiale) et ceci reflète une période où la distribution d'information n'était pas évidente et les réunions étaient plutôt rares. Les sujets traités étaient vraiment variés – et ont en effet établi un rapport entre mathématique pure et appliquée, et entre l'université et l'école secondaire, dans un sens inconnu à présent. En effet, nous trouvons des conférences en physique mathématique (avec par exemple De Donder), en astronomie (Lemaître), géométrie algébrique (Godeaux), analyse (de la Vallée-Poussin, Lepage), science de l'ingénieur (van den Dungen), mathématique actuarielle, et mathématique de l'école secondaire (avec A. Mineur – dont se souviennent des générations d'écoliers belges à cause de ses cours de géométrie descriptive). Parmi les conférenciers étrangers, je choisis deux curiosités. En plus de conférences sur l'intégration, Lebesgue donnait une conférence en 1925 sur les constructions à la règle et au compas. En 1922, Millikan donnait une conférence, comparant ses idées sur l'électron avec celles de Planck et De Donder. Le procès verbal précise qu'Henriot lui a posé une question sur le spin de l'électron et qu'il ne connaissait pas la réponse. Les notes s'arrêtent en juin 1946. Je ne sais

pas si d'autres livres ont été perdus ou si les notes ont été interrompues. Ceci serait possible parce que la Société a commencé la publication de son Bulletin l'année suivante.

La période Guy Hirsch

Le premier volume du *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, un seul fascicule de 46 pages, a paru en 1947-48, mais ne portait pas le numéro 1, peut-être parce qu'on n'était pas sûr qu'il y aurait d'autres volumes. En fait, la numérotation ne commence qu'avec le volume 6 en 1953. En 1947, Guy Hirsch était élu comme secrétaire adjoint, le début d'un engagement perpétuel avec la Société. Hirsch, un topologiste renommé (théorème de Leray-Hirsch) et philosophe des sciences, s'occupait tellement de la Société, qu'on pourrait dire qu'il était la Société. En fait, de 1953 à 1993, l'adresse officielle de la Société était celle de son appartement, d'où il s'occupait de toute l'administration, aidé par sa femme et son fils, agissant comme secrétaire et comme trésorier. De 1951 jusqu'à 1955, le Bulletin avait un petit Conseil Éditorial, mais le conseil fut dissout à ce moment, laissant Guy Hirsch contrôler totalement l'édition du Bulletin – une situation qui va durer jusqu'en 1977 ! Puis le Bulletin fut divisé en deux séries, Hirsch contrôlant la première série jusqu'à sa mort en 1993. Par sa seule énergie, il a réussi à développer la Société, grâce à son immense culture mathématique et son travail patient. Une curiosité de cette époque est un article de Lucien Godeaux : « Les recherches mathématiques en Belgique dans ces dernières années », (1949-50) pp. 32-40, dans lequel il énumère ce qu'il considère comme le meilleur travail de ce temps en Belgique. Je suppose que si un tel article était écrit aujourd'hui, un comité se chamaillerait pendant deux ans à propos du choix du meilleur travail et finalement il n'y aurait pas d'article.

Dans les années soixante-dix, la situation commence à changer. Les réunions mensuelles disparaissent par manque de participants, car tout simplement les réunions ne remplissaient plus les besoins des mathématiciens. La communauté mathématique voulait s'engager beaucoup plus dans la Société, et ainsi la seconde série du Bulletin initiée par A. Warrinier et continuée par Y. Felix et J.P. Tignol, mit sur pied un système rigoureux de Conseil Éditorial. P. Henrard et après J. Leroy et S. Caenepeel comme trésorier, commencèrent à transformer le système administratif très personnel de G. Hirsch en un système bien réglé et informatisé. Dans les années quatre-vingt, une réunion annuelle était mise sur pied, avec grand succès au début. Mais une fois de plus, après quelques années, l'assistance diminuait. Avec l'horaire surchargé de la population universitaire entre l'enseignement, la recherche et l'administration, entre les réunions fréquentes et spécialisées, les grandes conférences internationales, de telles réunions nationales non-spécialisées n'avaient évidemment pas la priorité. Ainsi la Société dut chercher de nouvelles formules.

La période contemporaine (jusqu'à présent)

Depuis 1994, la Société a une nouvelle série pour son Bulletin, résultat de la fusion des deux séries et d'un autre journal, Simon Stevin (la globalisation se manifeste en Europe tout entière). Le Bulletin utilise un processus d'arbitrage rigoureux et des articles aux sujets mathématiques de toutes

sortes peuvent être envoyés à l'éditeur principal, Hendrik Van Maldeghem bull.bms@cage.rug.ac.be. Le Bulletin publie 5 volumes par an, et en moyenne un supplément. En collaboration avec le Comité National de Mathématique, la Société produit une Newsletter pour ses membres, et sur le site web de la Société on en trouve une version électronique. Les congrès ont repris grâce au commencement d'une série de réunions conjointes. La première avec les sociétés mathématiques des États-Unis, des Pays-Bas et du Luxembourg, amenait 500 mathématiciens à Anvers en 1996 (un record pour la Belgique). Une réunion avec la London Mathematical Society (LMS), avait lieu à Bruxelles les 14-16 mai 1999. En 2001, une réunion conjointe avec la Deutsche Mathematiker Vereinigung (DMV) avait lieu à Liège. S'il y a quelque chose qu'il faut retenir de cette histoire brève, c'est probablement le fait que quand des situations changent, les sociétés mathématiques doivent s'adapter. Aujourd'hui la BMS joue son rôle comme elle l'a fait en 1921, mais ce rôle a changé. Une structure moderne ne le reste que pour une période limitée. La fonction d'une Société est d'abord la communication, et aujourd'hui rien ne change aussi vite que la façon de communiquer.

Certainement, le chapitre 4 de cette histoire sera important pour chaque éditeur, et concerne l'impact et le bon usage des possibilités de l'édition électronique. Une évolution va avoir lieu, mais je doute que quelqu'un puisse prévoir avec certitude quelle situation se présentera dans 20 ans. En tout cas, à présent nous nous trouvons toujours au milieu du chapitre 3.

Épilogue

Il y a peu à ajouter à l'histoire de Luc Lemaire. Afin de compléter la liste de conférences, nous pouvons encore signaler une journée de « Mathematics and Genomics » » en 2003, un congrès conjoint avec la société mathématique des Pays-Bas (WG) en 2004, et un congrès conjoint avec la SMF et les trois partenaires BeNeLux en 2005. Comme Luc Lemaire prédit, la publication électronique a pris sa place manifestement. Depuis 2003, le Bulletin est publié électroniquement par le projet Euclid `http://projeteuclid.org`. *En plus, on a décidé de mettre sur le site web les volumes du Bulletin qui ont plus de 5 ans avec accès gratuit. La BMS a une tradition de conventions d'échange avec d'autres sociétés mathématiques (EMS, AMS, SMF, WG, LMS, RSME). Tous les détails sont disponibles sur le site de la BMS* `http://bms.ulb.ac.be`, *lequel vient d'être rénové.*

Adhemar Bultheel

La Société Mathématique Australienne

Anthony Guttmann[1]

La Société

Les mathématiques ont, en Australie, une courte histoire comparativement à celle des mathématiques européennes. Le premier professeur de mathématiques fut Morris Pell, qui fut recruté à l'université de Sydney en 1851 à l'âge de 24 ans, suivi de près par William Wilson, âgé de 28 ans lorsqu'il fut recruté à l'université de Melbourne. Il s'agissait des deux premières universités australiennes et ces deux mathématiciens furent parmi les premiers recrutements de ces deux universités. Aucune de ces deux universités ne recruta de femmes avant 1881.

Le congrès inaugural de la Société Mathématique Australienne (AustMS) eut lieu à l'université de Melbourne en août 1956. Le professeur Thomas M. Cherry, membre de la Royal Society, en fut le premier président jusqu'en 1958. La Société Mathématique Australienne comptait à l'origine 121 membres, et en compte, à l'heure actuelle, un millier, dans un pays de tout au plus 20 millions d'habitants. Les buts de la Société Mathématique Australienne sont la promotion et le développement des connaissances mathématiques, de leurs applications, ainsi que de l'enseignement des sciences mathématiques.

La première publication du Journal de la Société Mathématique d'Australie (Journal of Australian Mathematical Society) date de 1960. Son premier éditeur fut T.G. Room. En 1969, une seconde revue fut créée, le Bulletin de la Société Mathématique d'Australie (Bulletin of the Australian Mathematical Society), consacré à des publications rapides dans tous les domaines des mathématiques, sous la houlette éditoriale de B.H. Neumann membre de la Royal Society. La Gazette de la Société Mathématique d'Australie (Australian Mathematical Society Gazette) débuta ses publications en 1974, A.J. van der Poorten étant son premier éditeur. Le professeur A.J. van der Poorten a un doctorat honoris causa de l'université de Bordeaux. Tout comme son équivalent français, la Gazette publie un large spectre de textes mathématiques allant de revues de livres mathématiques, à des exposés introductifs, en passant par des informations sur les conférences en mathématiques.

Au sein de la Société Mathématique d'Australie, une branche de mathématiques appliquées (Division of Applied Mathematics) fut créée en 1975 et V.T. Buchwald en fut le premier président. Quelques vingt ans plus tard, cette division de mathématiques appliquées changea de nom pour devenir la branche industrielle et de mathématiques appliquées d'Australie et de Nouvelle-Zélande de la Société (Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics division, ANZIAM) afin de mieux refléter son activité commune avec la Nouvelle-Zélande. En 1975, le Journal de la Société Mathématique d'Australie se scinda en deux revues : une revue de mathématique pures et statistiques

[1] Président de la Société Mathématique Australienne

(Series A, Pure mathematics and Statistics) et une revue de mathématiques appliquées (Series B, Applied Mathematics). Plus tard la revue de mathématiques appliquées changea d'intitulé pour s'appeler ANZIAM journal et la revue de mathématique pures et statistiques repris l'intitulé original.

La Société de Mathématique d'Australie publie aussi depuis 1985 les Australian Mathematical Society Lecture Series. Quatorze volumes de cette série ont déjà été publiés, sur une variété de sujets allant de l'Algèbre et les Groupes de Lie, aux mathématiques pour l'industrie ou aux mathématiques dans le sport. Cette série est publiée aux Cambridge University Press. La Société de Mathématique d'Australie a enfin réalisé un répertoire administratif donnant la liste exhaustive de tous ses membres.

Peu à peu, nous entrons dans l'ère électronique et informatique. L' ANZIAM journal est également publié sous une version électronique, dont A.J. Roberts est l'éditeur, et les premiers volumes de nos journaux sont peu à peu scannés et mis en consultation sur le net.

Congrès

Deux congrès annuels sont organisés par la Société de Mathématique d'Australie. Le congrès d'été est d'ordinaire un congrès de l'ANZIAM. Il se tient en février, le plus souvent loin des centres académiques traditionnels, dans des lieux tels que les bords de mer, les sites de montagne, ou proches de vignobles australiens. Le congrès d'hiver se tient en septembre, d'ordinaire au sein d'une université. Il correspond au grand meeting annuel de la Société Mathématique d'Australie. Les deux événements durent de quatre à cinq jours. Ce ne sont pas des conférences à thèmes, mais plutôt des sessions spécialisées, la liste des orateurs invités définissant la tendance dominante de chaque congrès. Lors de la conférence d'hiver nous décernons le prix B.H. Neumann au plus remarquable exposé d'étudiant (graduate ou undergraduate).

D'autres prix sont également décernés comme la médaille de la Société de Mathématique d'Australie, attribuée à un mathématicien de moins de quarante ans pour des travaux de recherches de grandes qualités en sciences mathématiques, et la médaille Georges Szekeres consacrant des contributions remarquables dans les quinze dernières années.

Il s'agit là d'une nouvelle récompense décernée pour la première fois en 2002, à I.H. Sloan et A.J. van der Poorten.

Tous les deux ans, nous organisons les Mahler Lecture Series, grâce à un don de feu Kurt Mahler. Il s'agit d'une suite d'exposés réalisés au travers de l'Australie, par un conférencier étranger éminent. En 1995, le conférencier Mahler fut Michel Mendès-France.

Occasionnellement, nous organisons des conférences jointes avec d'autres sociétés savantes, telle par exemple la conférence conjointe de 1999 avec l'American Mathematical Society. En 2003, la conférence d'hiver sera insérée au sein de l'International Congress for Industrial and Applied Mathematics, qui se tiendra à Sydney.

Éducation

La Société Mathématique Australienne dispose d'un sous-comité chargé des questions d'éducation, mais nous avons eu un succès et un impact très limité sur les programmes des écoles. Ces programmes sont établis au niveau des états, et non au niveau national, et les bureaucraties de chaque état qui gèrent ces comités n'apprécient que très modérément l'intrusion de mathématiciens professionnels dans le champs des questions d'éducation. Les choses changent quelque peu, mais avec des constantes de temps quasi-géologiques. La Société maintient un site web des carrières et développe, dans le but d'attirer des étudiants, une active campagne d'information sur les études en mathématiques, et de promotion des futures carrières dans ces domaines.

Instituts de recherches

Bien que l'Australie ne dispose pas de centres semblables à ceux du CIRM à Luminy, ou de celui d'Oberwolfach, l'Australian Mathematical Sciences Institute (AMSI) a été créé en 2002. Il s'agit d'une première initiative disposant d'un premier financement modeste, le gouvernement de l'état de Victoria contribuant à hauteur de 600 000 euros sur trois ans, qui s'ajoutent à la contribution de 900 000 euros émanant de vingt des trente huit universités australiennes existantes. Malgré ses ressources modestes, l'AMSI a de conséquentes ambitions, incluant l'émergence d'un Institut de recherche pure, ainsi qu'une synergie avec la sphère industrielle, et un désir d'influer sur l'impact des mathématiques dans l'éducation. On pourra trouver plus d'informations sur le site : `www.amsi.org.au`. A.J. Guttmann a été, en 2002, le directeur par intérim de cette structure et G. Gaudry en est, depuis 2003, le premier directeur appointé.

Une activité importante de l'AMSI en matière d'éducation est l'école d'été (Summer School) pour étudiant graduate et undergraduate de quatrième année. La première de ces écoles d'été s'est tenue en janvier-février 2003, et fut un franc succès, attirant plus de cent étudiants de tous les coins d'Australie. La prochaine école d'été se tiendra en 2004 à la même période, les détails pouvant être obtenus sur le site web de l'AMSI. Cette école d'été est particulièrement utile et profitable pour les étudiants (graduate students) compte tenu du fait qu'il n'y a pas, dans le système de PhD australien, de cours obligatoires dans le cadre de la thèse. Ces cours avancés permettent à ces étudiants d'entreprendre des études formelles reliées à leur travail de thèse, ou encore dans d'autres domaines qui auraient stimulé leur curiosité.

Nous espérons, dans un futur proche, pouvoir accroître considérablement cette activité au travers d' Access Grid Rooms (voir le site `www.accessgrid.org`). Ceci devrait aussi permettre une ouverture efficace sur un programme plus international.

Une autre création d'envergure est le Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems (MASCOS) qui a vu le jour au milieu de l'année 2003. Il s'agit d'un centre de recherche financé par le gouvernement Australien. Il est situé sur le site de l'université de Melbourne et il conduit un énergique programme d'invitation de chercheurs étrangers et de programmes de conférences. Il dispose de treize « chief investigators », provenant de cinq des

universités majeures d'Australie. Le MASCOS a des liens étroits avec l'AMSI, partageant personnel et financement commun pour certaines conférences. De plus amples détails sont disponibles sur le site `www.complex.org.au`. Le professeur Anthony Guttmann est le directeur de ce centre et le professeur Peter Hall (membre de la Royal Society) de l'Australian National University, en est le directeur adjoint.

Relations avec d'autres sociétés savantes

La Société Mathématique Australienne a des relations bilatérales avec de nombreuses autres sociétés savantes, vingt-sept au total, incluant, bien évidemment, la SMF.

Nos liens avec la France sont particulièrement forts et étroits. À titre personnel, je rends régulièrement visite, et collabore, avec des chercheurs de Bordeaux et de Paris et accueille en retour des chercheurs venant de France. L'ambassade de France, en liaison avec l'Académie des Sciences Australienne, a mis en place un nombre important d'actions pour inciter les visites mutuelles de scientifiques de tous niveaux dans les deux pays. Un accord de co-tutelle de thèses existe entre un grand nombre d'universités australiennes et françaises, et, même en l'absence de tels accords spécifiques, les possibilités d'études dans nos deux pays restent importantes. Sur les six de mes derniers étudiants en thèse (PhD), deux ont passé une année à travailler sur leur thèse dans une université française, comme partie de leur thèse (PhD), et un troisième a pu disposer de deux positions post-doctorales en France. De nombreux mathématiciens français sont attirés par l'Australie non seulement par les mathématiques australiennes, mais également par la douceur de notre climat, le rugby, nos excellents vins, nos truffes, et la variété de nos excellents fromages qui peuvent séduire même un français. Soyez-en sûrs, vous êtes les bienvenus chez nous. Notre site web `ww.austms.org.au` donne de plus amples informations sur notre société, des informations concernant nos publications, nos conférences, nos colloques, des conseils en matière de choix de carrière, d'emploi et bien plus encore ...

Nos deux sociétés, la Société Mathématique de France et la Société Australienne de Mathématique, ont des accords réciproques. Les membres de la SMF sont plus que bienvenus s'ils veulent devenir membres de la Société Australienne de Mathématique au titre de cette réciprocité.

Le premier congrès Canada-France des sciences mathématiques

Toulouse, 12-15 juillet 2004

Après le succès du congrès franco-américain de Lyon en 2001 et du colloque européen de Nice de février 2003, les sociétés mathématiques canadiennes et françaises organisent une conférence commune, qui aura lieu du 12 au 15 juillet 2004 à Toulouse. Ce congrès sera une occasion de rencontres et d'échanges entre les mathématiciens de toutes les disciplines, en particulier canadiens et français. Il permettra de faire le point sur les avancées les plus marquantes de ces dernières années.

Les conférenciers pléniers seront :

- Grégoire Allaire (École Polytechnique, Palaiseau)
- Michèle Artigue (Jussieu)
- Maïtine Bergounioux (Orléans)
- Jon Borwein (Simon Fraser)
- David Brillinger (Berkeley)
- Alain Connes (IHÉS) (à confirmer)
- Walter Craig (McMaster)
- Henri Darmon (McGill)
- Emmanuel Giroux (ENS-Lyon)
- Laurent Lafforgue (IHÉS)
- Gabor Lugosi (Barcelona)
- Mikhail Lyubich (Toronto)
- Christophe Reutenauer (UQAM)
- Alain-Sol Sznitman (ETH Zurich)
- Murrad Taqqu (Boston)
- Henry Wolkowitz (Waterloo).

Les sessions parallèles :

- Algèbres d'opérateurs (SS1)

organisée par : C. Anantharaman (Orléans) et I. Putnam (UBC)

- Topologie et géométrie symplectiques (SS2)

organisée par : D. Auroux (MIT/École Polytechnique) et F. Lalonde (Montréal)

- Théorie des nombres (SS3)

organisée par : D. Roy (Ottawa) et M. Waldschmidt (Paris)

- Le programme de Langlands (SS4)

organisée par : W. Casselman (UBC) et J-.P. Labesse (Marseille)

- Analyse géométrique et spectrale (SS5)

organisée par : O. Hijazi (Nancy) et N. Kamran (McGill)

- Équations aux dérivees partielles (SS6)

organisée par : M. Esteban (Paris) et C. Sulem (Toronto)

- Systèmes dynamiques (SS7)

organisée par : R. Roussarie (Dijon) et C. Rousseau (Montréal)

– Équations différentielles et commande (SS8)
organisée par : F. Clarke (Lyon) et R. Stern (Concordia)
– Analyse variationnelle et optimisation (SS9)
organisée par : J-B. Hiriart-Urruty (Toulouse) et A. Lewis (Simon Fraser)
– Analyse stochastique (SS10)
organisée par : M. Barlow (UBC) et D. Bakry (Toulouse)
– Processus multifractals et à longue mémoire (SS11)
organisée par : J.-M. Azaïs (Toulouse) et B. Remillard (HEC, Montréal)
– L'interface entre les probabilités et la statistique (SS12)
organisée par : P. Besse (Toulouse) et L. Devroye (McGill)
– Analyse statistique des données fonctionnelles (SS13)
organisée par : J. Ramsay (McGill) et H. Cardot (INRA Castanet-Tolosan)
– Analyse numérique (SS14)
organisée par : A. Fortin (Laval) et J. Blum (Nice)
– Éducation mathématique (SS15)
organisée par : J.-L. Dorier (IUFM Lyon) et E. Muller (Brock)
– Topologie de petite dimension et théorie géométrique des groupes (SS16)
organisée par : M. Boileau (Toulouse) et S. Boyer (UQAM)
– Biologie mathématique (SS17)
organisée par : O. Arino (Pau) et G. Wolkowicz (McMaster)
– Systèmes dynamiques complexes (SS18)
organisée par : X. Buff (Toulouse), A. Cheritat (Toulouse) et M. Yampolsky (Toronto)

Les participants pourront aussi profiter de leur séjour pour découvrir les charmes de la ville de Toulouse et de sa région. Toutes les informations sont disponibles à `http://cms.math.ca/Reunions/Toulouse2004`

Les recrutements universitaires de jeunes mathématiciens, suite : le cru 2003

Michèle Audin[1]

Ce document présente un bilan succinct du recrutement de jeunes mathématiciens en 2003, comme

– maîtres de conférences, sur les 105 postes qui n'ont pas été pourvus en mutation,
– chargés de recherches au CNRS, section 01 (mathématiques)[2], sur les 13 postes mis au concours (concours 102, 103, 104).

Cette étude est la suite de celle parue dans le numéro de janvier 2003 de la Gazette[3]. Comme la précédente, elle a été suscitée par la section 01 du Comité National de la Recherche Scientifique. Les questions que nous nous étions posées l'année dernière étaient les suivantes

– comparer les recrutements au CNRS et les recrutements universitaires,
– rapports hommes/femmes (parmi les candidats et parmi les recrutés), voir le § 6,
– âge, pyramide d'âge, des recrutés, vivier, durée d'attente, voir le § 2,
– réalité et importance des recrutements locaux, voir le § 5.

Nous avons essayé cette année d'aborder aussi un bilan des « non-recrutements » (§ 3) et d'aller voir d'un peu plus près ce qui se passait dans le vivier (§ 6).

Ceux qui l'auraient ignoré l'apprendront en lisant ce texte, le recrutement est très inégalitaire. Certaines de ces inégalités seront explicitées ici (les inégalités dues au genre, étudiées au § 6). Pour les inégalités dues à l'origine sociale des candidats, une étude reste à faire, qui va au-delà des compétences et des moyens d'un(e) mathématicen(ne).

Il serait intéressant de faire aussi une étude des recrutements de professeurs.

1. Les données

Qualification 2003

En 2003, 385 jeunes mathématiciens ont été qualifiés en 25ème section, 26ème section, ou dans les deux (contre 343 en 2002).

[1] CNRS, Université Louis Pasteur (Strasbourg)

[2] Il aurait été pertinent d'inclure les postes attribués par les nouvelles commissions interdisciplinaires (CID), mais aucun de ces postes n'a été attribué à des personnes qualifiées en section 25 ou 26.

[3] On peut aussi en trouver les résultats sur ma page personnelle, `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`.

La liste de candidats

J'ai obtenu la liste (approximative[4], mais sans doute moins que l'année dernière) des candidats (liste sur laquelle j'ai travaillé) par concaténation :

(1) de la liste (complète) des 162 candidats au CNRS,
(2) de la liste (complète) des 218 candidats aux trois postes 25ème section dans mon université,
(3) des listes de tous les candidats auditionnés et/ou classés recensés dans l'opération « postes » de la SMAI et de la SMF
(4) de la liste des candidats effectivement nommés sur les postes, qui m'a été communiquée par la DPE du Ministère en octobre 2003.

C'est cette liste approximative que j'appelle « liste des candidats ». Elle comporte 473 noms. L'année dernière, j'avais travaillé sur une liste de 399 noms. Je ne suis pas certaine qu'il y ait eu effectivement 80 ou 100 candidats de plus cette année, le point (2) de l'énumération précédente étant une nouveauté (nous n'avions pas de postes 25ème à Strasbourg en 2002). Remarquons toutefois qu'il y avait 40 nouveaux qualifiés en plus et, on le verra, une accumulation de candidats multi-récidivistes et donc qu'il est à peu près certain que le nombre de candidats a vraiment augmenté.

Les postes

Il y avait en tout 118 postes (95 l'an dernier), répartis entre

- 13 postes CNRS,
  - 11 sur le concours « normal »
  - 2 sur des concours « spéciaux », l'un fléché en EDP pour Lille, l'autre en mécanique
- 105 postes de maîtres de conférences, à répartir en
  - 47 en 25ème section
  - 58 en 26ème section[5]
- ou en
  - 85 postes en université ou école normale supérieure
  - 20 postes dans d'autres établissements (IUT, IUFM, CNAM,...)

Les données

Pour l'âge et le lieu d'obtention de la thèse des recrutés, j'ai pillé les fiches MARS et, comme l'année dernière, j'ai demandé personnellement ces renseignements à ceux qui les détenaient, quand j'ai été capable de trouver leur adresse électronique.

2. L'âge des candidats

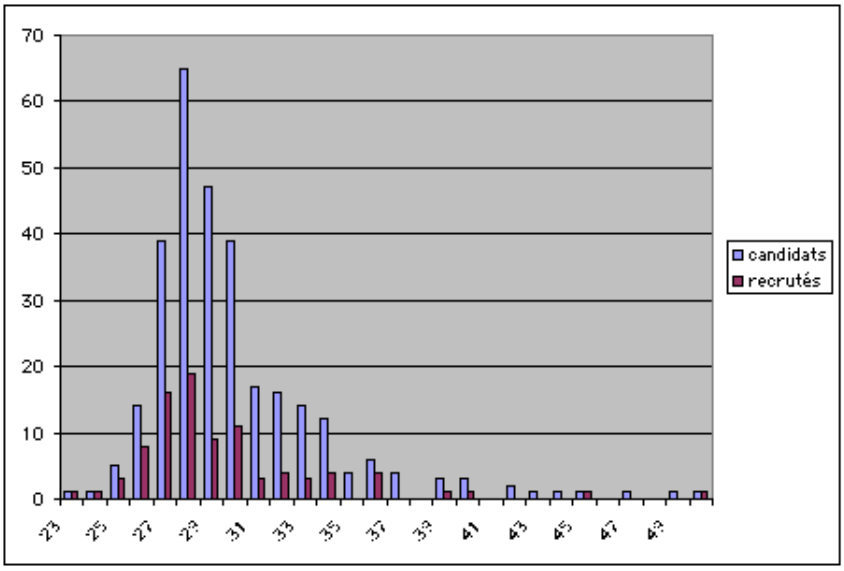
[4] Je renvoie les lecteurs aux commentaires que j'ai faits l'année dernière sur l'établissement d'une telle liste.
[5] Il s'agit de la section que le ministère a attribuée en nommant les heureux élus, c'est pourquoi les postes publiés « 25/26 » n'apparaissent plus comme tels.

Les âges biologiques

Il est très difficile de déterminer l'âge des candidats. Cette année, en plus des données assez complètes que j'avais sur les candidats au CNRS, j'ai pu disposer des âges de tous ceux qui étaient candidats à Strasbourg. Finalement, je connaissais les âges de 319 candidats, ce qui m'a semblé suffisant pour faire des statistiques[6].

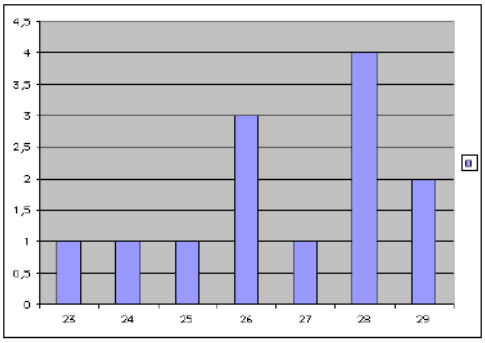
Ces âges s'échelonnent entre 23 et 50 ans, 233 de ces candidats ont 30 ans ou moins, 297 ont 35 ans ou moins. La moyenne est d'environ 30,5 ans.

Pour les recrutés, ces chiffres deviennent 70 jusqu'à 30 ans, 83 jusqu'à 35, et une moyenne de 29 ans.



Les âges au CNRS

Les âges des recrutés au CNRS sont lisibles dans le graphique suivant :



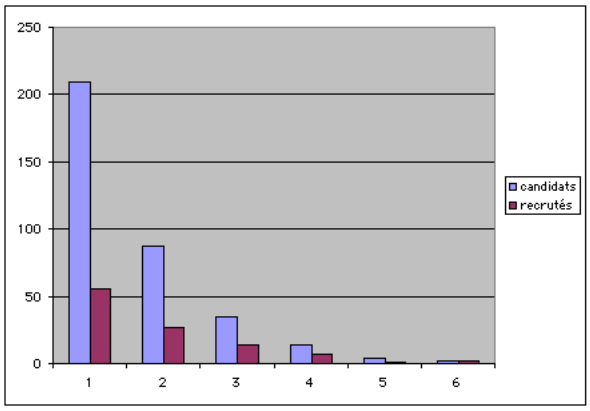
[6] Biaisées par le fait que tous les candidats au CNRS sont comptés dans cette liste et avaient, par obligation, moins de 31 ans, mais peut-être aussi par le fait que j'ai intégré les âges de la plupart des recrutés.

La moyenne d'âge des recrutés CR2 est particulièrement basse cette année (26 ans et demi), plus basse, donc que l'année dernière, surtout grâce à deux très jeunes nouveaux CR, dont l'un est d'ailleurs une chargée de recherches.

Les âges comme qualifiés

Comme l'an dernier, j'ai voulu savoir si les heureux élus ont attendu longtemps avant d'être recrutés, en m'aidant de la date de leur qualification. Je connaissais l'année de qualification de 351 des candidats et de 107 des recrutés (plus quelques-uns dont je savais qu'ils n'étaient pas qualifiés, soit parce qu'ils arrivaient de l'étranger et ne postulaient qu'au CNRS, soit parce qu'ils n'avaient pas encore soutenu leur thèse).

Comme je l'avais remarqué l'an dernier, il y a une prime à la « fraîcheur », 54% des recrutés sont des qualifiés de l'année en cours, 25% de l'année précédente, le reste étant des multi-récidivistes.



L'axe des abscisses indique la date de qualification (1 pour cette année, 2 pour l'année dernière, etc)

Comme le montre ce graphique, le rapport recrutés/candidats pour une année de qualification donnée est 27% pour 2003, 30% pour 2002, 40% pour 2001, 47% pour 2000. Les chiffres pour 1999 et 1998, qui apparaissent dans la figure ci-dessous, sont trop faibles pour être réellement significatifs).

Remarque. Les deux recrutés les plus anciens sont des qualifiés de 1998 dont la qualification a été renouvelée en 2003.

Il y a donc peut-être aussi, d'une certaine façon, une prime à la persévérance, puisque 3/6 des candidats qualifiés en 98 et 99 ont été recrutés et une proportion analogue (7/15) des candidats qualifiés en 2000. Ces chiffres sont certainement ceux qui sont le plus biaisés par le fait que je ne connaissais pas toutes les années de qualification.

Je le montrerai plus bas, au § 6, le recrutement tardif défavorise les femmes (comme on pouvait s'y attendre).

Au CNRS

En 2002, *tous* les recrutés au CNRS qui étaient qualifiés l'avaient été pendant la campagne 2002. Cette année, la section a recruté 3 qualifiés de 2001 (deux ans d'ancienneté), les autres étaient des primo-arrivants. Un peu plus d'« anciens », donc — comme on l'a vu, ça n'a pas fait monter l'âge moyen, au contraire.

3. Les multi-récidivistes

J'ai essayé de savoir ce que faisaient cette année (2003-2004) les 31 personnes qualifiées en 1999, 2000 ou 2001, candidates en 2002 et 2003 et pas recrutées[7]. J'ai eu des informations sur 24 d'entre eux, soit par leur directeur de thèse, soit par des connaissances, soit par interrogation directe.

– L'un d'entre eux avait en fait été recruté en 63ème section (électronique).
– Un autre est agrégé-préparateur (caïman) dans une ENS.
– Trois sont professeurs en CPGE ou dans le secondaire.
– Dix sont en post-doc à l'étranger.
– Cinq sont ATER dans des universités ou IUT en France (dont 3 à Lille).
– Un est au chômage.

L'un de ceux-ci a répondu à ma question « que faites-vous cette année » en m'expliquant que c'était son troisième poste d'ATER, qu'il avait passé le CAPES... pour pouvoir être ATER quatre fois et qu'après « ce serait le collège ».

Beaucoup, donc, s'apprêtent à « re »-postuler. Seuls les trois qui ont pris des postes dans l'enseignement secondaire peuvent être considérés comme ayant abandonné. Au moins un cherche un poste aux États-Unis. Une seule me dit qu'elle cherche un emploi dans le privé. On évoque parfois les intermittents du spectacle... La précarité des situations faites à ces jeunes hautement qualifiés dans un grand pays industrialisé (!) est une autre tragédie. Il est bien clair que tous les docteurs n'ont pas vocation à être recrutés sur les postes dont il est question ici. Beaucoup trouvent d'ailleurs d'autres débouchés (mais ils arrêtent sans doute de postuler bien avant les trois années dont il est question ici[8]). On peut quand même se demander :

– Comment un jeune peut se concentrer et travailler sur un programme de recherche un peu sérieux en changeant de poste d'ATER (de demi-ATER en fait) tous les ans (déménagement, nouvel enseignement, nouveau cadre de travail) et en se livrant au cirque des candidatures (dossiers tous azimuts, tour de France des auditions) chaque année.

– Comment fonctionneraient les universités sans ce volant de main d'œuvre déplaçable qui occupe les postes d'ATER devenus, en peu d'années, indispensables.

Au moins 23 de ces multi-récidivistes sont encore en course.

---

[7] Il y a sans doute d'autres multi-récidivistes dans la liste des candidats, à savoir des qualifiés de 1998 qui se sont fait requalifier en 2003.

[8] Les services *ad hoc* du ministère seraient bien inspirés d'enquêter sur les débouchés réels des thésards, en répondant au moins à la question : « Quelle est la situation professionnelle, l'année $x + n$, des étudiants ayant soutenu une thèse en mathématiques au cours de l'année x ? » — une question vraiment pertinente et que nous n'avons pas les moyens d'aborder ici.

4. Les inégalités

Comme on peut s'y attendre, le recrutement tardif (augmentation de l'âge auquel on trouve un poste) accentue les inégalités. Il joue son rôle dans la petite proportion de femmes parmi les recrutés (voir le § 6). Il le joue certainement aussi dans l'origine sociale des heureux élus. Une étude reste à faire.

Il est à craindre que les nouvelles dispositions qui limitent à *une* les bourses sur critères universitaires pour un étudiant donné (concrètement, une bourse l'année de préparation à l'agrégation *ou* une bourse l'année du DEA) ne limitent plus encore, pour les jeunes issus de milieux populaires, l'accès à la recherche (et n'améliore pas la situation décrite dans la note 12 ci-dessous).

5. Endo- *vs* exo-recrutements

J'appelle « recrutement local » le recrutement par un établissement d'un candidat ayant fait sa thèse dans un laboratoire de cet établissement ou dans le laboratoire le plus proche de la même ville. Par exemple, un docteur de l'université de Pétaousheim recruté à l'IUFM de Pétaousheim pour enseigner en préparation au CAPES aux étudiants de Pétaousheim (il y en a au moins deux sur la liste). La localité n'est pas une notion strictement géographique. Comme l'an dernier, j'ai considéré comme non locaux les traditionnels recrutements semi-locaux parisiens (qui biaisent sérieusement les résultats) — mais qui n'empêchent pas qu'il y ait eu, comme toujours, des recrutements strictement locaux à Paris.

Les recrutements locaux ne sont pas que le fait des petits établissements, comme le montre l'exemple de Paris-centre. Il n'y a que 91 des recrutés dont j'ai pu savoir où ils ont fait leur thèse. Sur ces 91 postes, 14 ont été attribués localement, soit 15%. Les chiffres que je donne ici sont sans doute les plus biaisés de toute cette étude, puisque les recrutés pour lesquels je n'ai pas trouvé où ils avaient fait leur thèse sont les moins visibles sur la ouèbe et donc sans doute les plus susceptibles d'être « locaux » [9].

En affinant entre les sections, on trouve le tableau suivant :

section	nb de postes	nb de recr. loc.	%
26	47	6	13%
25	44	8	18%

TAB. 1. Recrutements locaux par sections

L'an dernier, j'avais noté 24% de recrutements locaux sur les postes de maîtres de conférences. Il y en a vraiment peu en 26ème section cette année. À noter toutefois que les maîtres de conférences recrutés en IUFM ont tous été nommés en 25ème section par le ministère.

Une évolution ? À suivre en tout cas.

Qu'il soit bien clair ici que je ne jette aucune pierre sur aucun jeune collègue recruté localement. Ni sur les recrutements locaux dans l'absolu. Chaque

[9] Une indication de ce biais est le fait que les réponses que j'ai reçues très tardivement, après l'écriture d'une première version de ce texte, émanaient de recrutés « locaux ».

département aura, une fois ou l'autre, une excellente raison de faire un recrutement local. Par exemple (et il y en a parmi les recrutements locaux décomptés ci-dessus) pour donner à un PRAG menant une activité de recherche de qualité un poste lui permettant de travailler dans des conditions plus raisonnables. Inversement, on peut se demander quel avenir en recherche ont les candidats recrutés dans de petits IUFM très excentrés et très éloignés de tout centre de recherche en mathématiques.

Il n'en reste pas moins qu'il y a, aussi, des universités qui sont des multi-récidivistes du recrutement local, certaine grosse université de Paris-centre comme certaines petites universités de province.

Remarque (Et après ?). Imaginons la situation de Dominique Tchang, élève de terminale dans un lycée de la ville A, puis d'une classe préparatoire de la capitale locale B, de l'ENS ou du magistère de C, puis à l'université de D pour y faire une thèse, à E comme ATER, à F pour un post-doc, enfin maître de conférences à G... et on ne s'étonnera, même s'il arrive parfois que A = B ou même que D = E,

– ni que Dominique souhaite un recrutement « local » comme professeur à G,

– ni qu'il y ait si peu de maîtres de conférences formés dans ce système qui soient candidats aux postes de professeurs de l'université de H.

L'exogamie du CNRS

Deux des quinze CR2 recrutés au CNRS sont des étrangers (au sens de « formés à l'étranger »). Il n'y en a qu'une (étrangère) cette année parmi les recrutés sur les postes de maîtres de conférences.

6. Le sexe des élus

Comme l'an dernier, j'ai utilisé les prénoms pour déterminer le sexe des candidats et des qualifiés. Ce qui m'a été rendu plus difficile cette année par celui qui a transmis à l'opération postes une liste « Kalif MCF25 » sans prénoms, prouvant ainsi, pour le moins, un désintérêt complet pour ce qui nous intéresse ici. Je le répète,

IL N'Y A PAS ASSEZ DE JEUNES FEMMES QUI FONT DES THÈSES EN MATHÉMATIQUES PURES.

S'en désintéresser ou le dissimuler[10] ne fera rien pour améliorer la situation. J'ai donc dû aller chercher la liste sur le *Journal Officiel*.

Je reproduis ici les tableaux de l'année dernière, auxquels j'ai intégré les résultats de cette année. Le nombre total 375 est obtenu en retirant à la liste des 385 qualifiés les 10 personnes dont je n'ai pas été capable de déterminer le sexe.

[10] Il n'est sans doute pas inutile de signaler ici qu'il a été bien plus difficile, ces quatre dernières années, de se faire qualifier comme maître de conférence en 25ème section, quand on était une femme que quand on était un homme : de 2000 à 2003, 75% des hommes candidats ont été qualifiés contre seulement 64% des femmes. Drôlement incitative, pour une jeune femme, la 25ème section...

Les recrutements de femmes sur les postes 25 et 26

Voici d'abord le tableau général, dans lequel le recrutement semble cette année favorable aux femmes (à celles qui ont survécu jusque là) : elles ne sont en effet que 19% parmi les qualifiés de 2003 (proportion assez semblable à celles des deux années précédentes), 21% parmi les candidats, mais 27% parmi les recrutés.

liste	femmes	total	%
qualif 25/26 2003	71	375	19%
qualif 25/26 2002	63	343	18%
qualif 25/26 2001	64	306	21%
candidats	67	400	17%
recrutés 25/26	29	105	28%
recrutés CNRS	3	13	23%
total recrutés	32	118	27%

TAB. 2. Les femmes dans le concours

Les recrutements suivant les sections

Que personne ne crie, ni victoire, ni au scandale. Plus encore que l'année dernière, ces chiffres cachant des disparités et des inégalités importantes. Examinons d'abord les disparités entre 25 ème et 26 ème section. Je renvoie les lecteurs intéressés aux commentaires que j'ai faits dans le rapport de 2002 et qui me semblent toujours pertinents.

liste	femmes	total	%
qualif 25 2003	25	193	13%
qualif 25 2002	27	190	14%
qualif 25 2001	21	152	14%
recrutés 25	9	47	19%
qualif 26 2003	50	226	22%
qualif 26 2002	42	194	22%
qualif 26 2001	47	194	24%
recrutés 26	19	58	33%

TAB. 3. Les femmes dans les concours 25 et 26

Les recrutements suivant les établissements

Étonnant, non ? Mais je ne crois pas aux miracles (un tiers de femmes parmi les recrutés en 26ème ! !), et je ne suis pas assez statisticienne dans l'âme pour admettre que les chiffres soient si différents d'une année sur l'autre (10% de femmes en 2002 parmi les recrutés en 25ème section, contre 19% cette année). Regardons le type d'établissement. Dans le tableau suivant, la première ligne représente les postes dans des universités ou des ENS, la deuxième représente les postes IUT, IUFM et autres écoles (un poste au CNAM notamment).

établissements	femmes	total	%
universités	19	85	22%
autres	13	20	65%

TAB. 4. Les femmes selon le type d'établissement

Je suppose que tout le monde est rassuré. On a recruté un peu plus de femmes cette année, mais elles sont à leur juste place ! Sans doute leurs qualités spécifiquement féminines seront-elles mieux utilisées pour le maternage des étudiants d'IUT et la préparation à des métiers, féminins eux aussi, comme ceux de l'enseignement secondaire.

Remarque. Selon une de mes interlocutrices, les PRAG en IUT seraient majoritairement des hommes — les « meilleurs » postes du secondaire (PRAG, CPGE), comme les « meilleurs » postes du supérieur, seraient pour les hommes.

Les femmes face aux recrutements tardifs

Le tableau suivant montre la proportion de femmes parmi les recrutés suivant l'année de qualification.

année de qualif	femmes recrutées	total recrutés	%
2003	16	56	29%
2002	10	27	37%
2001 ou avant	4	24	16%

TAB. 5. Les femmes face aux recrutements tardifs

Les femmes semblent donc être les premières à pâtir de la situation de généralisation de la précarité ou tout simplement de l'âge élevé auquel les candidats sont recrutés, comme le montre le tableau suivant, portant sur les 90 recrutés dont je connaissais à la fois l'âge et le sexe.

âge	femmes recrutées	total recrutés	%
27 ou moins	9	30	30%
28, 29 ou 30	12	40	30%
31 ou plus	5	22	22%

TAB. 6. Les femmes face à l'âge du recrutement

Ces chiffres sont confirmés par le « sexage » des multi-récidivistes considérés au § 3. Les 31 candidats en question étaient 4 femmes et 27 hommes (seulement 13% de femmes). Parmi les 24 qui n'ont pas pris de poste dans le secondaire et ne cherchent pas dans le privé, *une seule* est une femme.

Les femmes au CNRS

Cette année, nous avons recruté trois femmes au CNRS. Là encore, une année « faste ». Regardons-y de plus près.

– L'une de ces femmes a été recrutée sur un concours fléché (vers un laboratoire de mécanique)
– et les deux autres sur le concours ordinaire. Parmi celles-ci,
  – l'une arrivait de l'étranger
  – et l'autre du système français (jeune et brillante ancienne élève de l'ENS-Paris).

Il n'est pas très fatigant de considérer *toutes* les femmes recrutées par l'actuelle « commission » du CNRS (c'est-à-dire pendant ces trois dernières années), puisqu'il n'y en a que 5. Nous avons recruté en tout 44 CR2, ce qui fait 11% de femmes.

– Sur le concours ordinaire (postes non fléchés), 34 postes, dont 3 femmes (moins de 9%).
  – Sur ces 3 femmes, une seule a fait toutes ses études en France.
  – Les deux autres sont arrivées en France, l'une pour faire une thèse et l'autre après l'avoir faite.
– Sur les 10 postes fléchés (logique, mécanique, physique, calcul formel, génome, Lille, etc), nous avons recruté 2 femmes (20%).

Le vivier

Le gros problème est, répétons-le, qu'il n'y a pas assez de femmes qui font des thèses en mathématiques, et en particulier en mathématiques pures.

Regardons un peu en amont. Parmi les réservoirs où l'on peut espérer aller piocher de brillants jeunes mathématiciens figurent les ENS de Paris, de Lyon et de Cachan. Bon an mal an, il était de tradition de trouver 4 ou 5 femmes dans les promotions de mathématiciens[11] entrant dans chacun de ces illustres établissements. Et donc quelques excellentes jeunes femmes pourvues d'une thèse en mathématiques et candidates aux postes dont il est question ici.

Par exemple, les promotions de l'ENS-Lyon concernées par les recrutements récents (entrées de 1992 à 95) comportaient en tout 15 femmes, parmi lesquelles 8 sont MCF et 1 est CR (recrutée en section 7 (informatique)). La promotion 1995 comportait trois femmes dont deux ont été recrutées MCF cette année. A contrario, la promotion 96 de l'ENS-Paris comportait quatre femmes, dont une seule s'est dirigée vers la recherche en mathématiques (et a été recrutée CR).

Je pense très sincèrement que ce n'est pas assez. Mais il y a plus grave. Dans la promotion entrant à l'ENS-Paris en 2002, si 4 femmes étaient admises, seules 2 d'entre elles ont choisi d'entrer à l'ENS. Dans celle de 2003, elles étaient 3 admises, *une seule* est entrée. Il peut s'agir de fluctuations normales. Une chose est à peu près certaine, les jeunes femmes qui ont préféré intégrer l'École polytechnique ne souhaitaient pas s'engager vers la recherche en mathématiques.

[11] En gros 15% de femmes à l'ENS-Lyon, 10% à l'ENS-Paris, avec des fluctuations importantes d'une année sur l'autre, inévitables avec des effectifs peu importants.

À noter, du côté positif de la balance, que les femmes sont traditionnellement plus nombreuses à intégrer l'ENS-Cachan en troisième année (environ 29% des effectifs en moyenne — avec là aussi une très mauvaise année 2003, avec seulement 3 femmes sur les 19 reçus) de même que dans les magistères[12].

Comment imaginer un recrutement massif de femmes en mathématiques au CNRS ou dans les universités (à supposer qu'il y ait encore des recrutements dans les années 2009) si les filières d'excellence produisent si peu de femmes docteurs en mathématiques ?

7. Remerciements

Je remercie

– les collègues cachés sous le sigle « opération postes » pour l'irremplaçable service qu'ils rendent à la collectivité,

– à travers eux, indirectement, tous ceux qui ont transmis les résultats des CSE,

– parmi eux, en particulier Olivier Garet pour son aide rapide et efficace lorsque j'ai eu besoin d'une liste « Kalif MCF25 » un peu sérieuse, ainsi que pour les précisions sur le « troisième concours » de l'ENS-Cachan,

– les candidats qui ont rempli une fiche MARS,

– ceux qui ne l'avaient pas fait mais m'ont donné directement les renseignements demandés,

– ceux que j'appelle les multi-récidivistes et qui ont rapidement répondu à mes questions, parfois avec des commentaires éclairants,

– M. P. Rossi, de la DPE au ministère, pour m'avoir gentiment envoyé la liste des personnes effectivement nommées sur les postes MCF,

– Thomas Delzant et tous les membres de la CSE 25ème section à Strasbourg,

– François Loeser, Michel Pierre, Jean-Claude Sikorav et Patricia Reynaud pour les informations et les commentaires sur les normaliennes,

– Gilles Godefroy, Frédérique Petit, Virginie Régnier et Jacques-Arthur Weil pour des commentaires et questions pertinentes qui m'ont permis d'enrichir une première version de ce texte,

– Marc Herzlich, pour les mêmes raisons et pour m'avoir proposé et envoyé les chiffres sexués des qualifications en 25ème section (voir la note 10),

– tous les collègues qui m'ont transmis des informations et des adresses,

– et les membres de la section 01 qui m'ont aidée, par des questions, remarques, suggestions, ou simplement en corrigeant les erreurs manifestes d'une version préliminaire.

[12] ... desquels, semble-t-il, une proportion importante de femmes se contentent de l'agrégation et d'un DEA — là aussi, une enquête précise reste à faire.

Section 01 du Comité National Compte-rendu de la session d'automne 2003

Philippe Gille[1]

La section « Mathématiques et Outils de modélisation » du Comité National a tenu sa session d'automne du 28 au 30 octobre 2003. La direction scientifique du CNRS était représentée par Christian Peskine, directeur scientifique adjoint pour les mathématiques (SPM), par Michel Enock-Levi, chargé de mission, et Stéphane Cordier, chargé de mission (calcul scientifique). Ce rapport concerne principalement la politique générale du CNRS suite à la nomination de Bernard Larroutourou, qui a succédé en septembre à Geneviève Berger à la direction générale du CNRS. Nous rendons donc peu compte ici des autres journées de la session dévolues à l'examen des groupements de recherche (GDR), propositions de promotion des chercheurs, propositions de subventions de colloques et revues. Enfin, nous faisons le point sur les délégations et les détachements.

Intervention de Michel Lannoo, directeur scientifique SPM

Michel Lannoo s'est longuement exprimé sur la période actuelle que vit le CNRS, c'est-à-dire une période de transition où le projet de la nouvelle direction se conçoit en fonction des choix gouvernementaux, en particulier la suppression de 119 emplois permanents, qui devraient être remplacés par des contrats à durée déterminée. Du coté des ITA (Ingénieurs, Techniciens, Administratifs), les choses sont encore plus nettes puisque 227 emplois sont supprimés, avec là aussi le recours aux CDD.

Michel Lannoo s'est expliqué sur le gel des postes rouges (postes d'accueil) pour début 2004. Il s'agit pour la direction générale du CNRS de se ménager une marge de manœuvre budgétaire pour ses projets.

Enfin, Michel Lannoo a présenté la campagne de postes 2004 pour les mathématiques : un poste de DR1 (Géométrie et EDP et ouverture sur la physique), 4 postes de DR2, 11 postes de CR2. Il faut ajouter que de jeunes docteurs très impliqués en biologie peuvent postuler dans la section interdisciplinaire 44 (Bioinformatique, mathématiques et modélisation des systèmes biologiques).

Réactions et points de vue du comité

C'est donc un (resp. deux) poste de DR2 en moins par rapport à 2002 (resp. 2001) et deux postes CR2 (resp. 4) en moins par rapport à 2002 (resp. 2001), c'est-à-dire une baisse nette, homothétie de l'ensemble du CNRS. La nouveauté est évidemment le poste de DR1, qui vise au recrutement d'un cadre de premier plan. Bien qu'en comprenant l'intérêt scientifique, il nous semble cependant que les moyens doivent être prioritairement affectés au recrutement de CR2.

[1] Université Paris-Sud

La section a rappelé qu'elle n'est pas intéressée par les emplois de chercheurs à durée déterminée. En effet, de tels postes existent déjà très largement (Ater, post-docs européens,..) et n'offrent aux jeunes chercheurs qu'un statut d'intermittent difficilement compatible avec la durée que demande un travail de recherche original. Nous avons apprécié que Michel Lannoo ne mette pas sur le même plan les postes de chercheurs et les bourses de post-doctorats, autre nom des CDD.

La section a souligné le fait qu'il était illusoire d'espérer que des personnels ITA en CDD puissent conserver un niveau de compétence comparable à celui des personnels ITA actuellement permanents. Les carrières perdront en effet toute attractivité, et la gestion d'un laboratoire, d'un réseau d'informatique ou d'une bibliothèque ne nous semble pas compatible avec ces statuts mal définis.

Enfin, le gel des postes rouges pour le premier semestre 2004 nous paraît inacceptable dans la mesure où il annule des décisions et des invitations déjà faites, notamment dans le cadre des semestres thématiques de l'Institut Henri Poincaré. De façon plus précise, l'Institut Henri Poincaré, pourtant prioritaire, disposera d'une enveloppe « postes rouges » en 2004 de 30 pour 100 inférieure à celle de l'année 2003. Le gel des postes rouges remet en question un moyen d'accueil de chercheurs étrangers qui est très apprécié par la communauté mathématique ; il est en contradiction avec la politique d'ouverture internationale prônée par le nouveau directeur du CNRS.

Point sur les délégations-détachements

Les nouvelles alarmantes du rapport de la session de printemps ne se sont pas réalisées. S'il n'y a en effet presque plus de détachements, le poste budgétaire des délégations (accueil d'enseignants-chercheurs au CNRS) a été finalement conservé pour l'année 2003. De plus, le projet de transfert des délégations aux universités ne s'est pas réalisé et ne concerne que quelques universités pilotes. La section souhaite que toutes les délégations soient gérées nationalement.

En ce qui concerne 2004-2005, le nombre de demandes a été légèrement plus faible que les années précédentes. En effet, la direction des ressources humaines du CNRS a décidé de demander les dossiers de candidature avant le 14 juillet 2003, soit 15 mois avant le début possible des délégations ! La section insiste sur le fait que ce délai est évidemment bien trop long.

[1] Traduit par K. Mallick

Faites don de vos livres ! Faites don d'un peu plus ![1]

Herbert Fleischner et Tsou Sheung Tsun[2]

Dans le numéro 44 de la *Newsletter de l'EMS* (juin 2002), le Comité pour les pays en voie de développement (Committee for Developing Countries ou CDC), a lancé une campagne de dons de livres sous le titre « Faites don de vos livres ». Cette initiative a reçu un accueil très favorable de nos collègues du monde entier (cf. le rapport du CDC dans le numero 46 de décembre 2002).

Nous poursuivons bien sûr ce projet, forts des encouragements appuyés du président et de la CEE, d'une aide matérielle conséquente de l'ICTP (Trieste) et d'une petite subvention de la London Mathematical Society. Nous sommes donc plus que jamais intéressés par les livres (même du niveau du premier cycle universitaire) et les journaux donnés par des collègues et des institutions qui ne s'en servent plus. Cependant, nous aimerions que cette initiative puisse également profiter à nos collègues des pays en voie de développement dans leur domaine de recherche spécifique. Aussi voudrions-nous demander un petit effort supplémentaire à nos collègues des pays développés.

De temps à autre, une maison d'édition nous propose de recenser un ouvrage avant d'accepter de le publier. Comme stimulant, on nous verse parfois un honoraire sous forme d'argent liquide ou de bons d'achats de livres. La somme d'argent ne sert guère qu'à compliquer notre déclaration d'impôts tandis que les bons d'achats (souvent plus substantiels) ne font qu'accroître le nombre de livres que nous donnerons au projet EMS-CDC en partant à la retraite. En revanche, ces bons, offerts à une bibliothèque qui ne peut se permettre d'acheter des livres onéreux, se révèleront d'une utilité providentielle (les taux de change de plus en plus défavorables sont un cauchemar quotidien pour de nombreux pays pauvres). Nous pensons à de petites équipes de recherche travaillant dans des domaines pointus dont les bibliothèques ne peuvent acheter des ouvrages hautement spécialisés (et chers) de niveau 3^{e} cycle ou recherche. Une demi-douzaine de livres peut faire la différence ! Ainsi, dernièrement, nous avons pu persuader les éditions Princeton University Press d'augmenter de 30 % l'honoraire versé à l'un de nos collègues et cela nous a permis d'envoyer 8 livres classiques ou récents à un département de Mathématiques en Amérique du Sud. Le point essentiel est que l'équipe bénéficiaire peut choisir directement dans le catalogue de l'éditeur les livres qui lui seront les plus utiles.

La prochaine fois que l'on vous demande de faire la recension d'un ouvrage, pensez à nous ! D'une part, cela vous encouragera à accepter cette tâche et d'autre part vous rendrez *doublement* service à la communauté mathématique.

[2] Herbert Fleischner (Wien) : fleisch@dbai.tuwien.ac.at
Tsou Sheung Tsun (Oxford) : tsou@maths.ox.ac.uk

Déclaration de Berlin sur le Libre Accès à la Connaissance en Sciences exactes, Sciences de la vie, Sciences humaines et sociales[1]

L'Internet a fondamentalement transformé les réalités matérielles et économiques de la diffusion de la connaissance scientifique et du patrimoine culturel. Pour la toute première fois, l'Internet nous offre la possibilité de constituer une représentation globale et interactive de la connaissance humaine, y compris son patrimoine culturel, et la garantie d'un accès mondial.

Nous, signataires, ressentons l'obligation de relever les défis que nous pose l'Internet, support fonctionnel émergeant pour la diffusion de la connaissance. À l'évidence, ces évolutions seront en mesure de changer sensiblement l'édition scientifique tout comme le système actuel d'assurance de la qualité.

Conformément à l'esprit de la Déclaration de Budapest pour l'accès ouvert, de la charte ECHO et de la Déclaration de Bethesda pour l'édition en libre accès, nous avons élaboré la déclaration de Berlin pour promouvoir un Internet qui soit un instrument fonctionnel au service d'une base de connaissance globale et de la pensée humaine, et de définir des mesures qui sont à envisager par les responsables politiques en charge de la science, les institutions de recherche, les agences de financement, les bibliothèques, les archives et les musées.

Objectifs

Nous remplissons par trop imparfaitement notre mission de diffusion de la connaissance si l'information n'est pas mise rapidement et largement à la disposition de la société. De nouvelles possibilités de diffusion de la connaissance, non seulement sous des formes classiques, mais aussi, et de plus en plus, en s'appuyant sur le paradigme du libre accès via l'Internet, doivent être soutenues. Nous définissons le libre accès comme une source universelle de la connaissance humaine et du patrimoine culturel ayant recueilli l'approbation de la communauté scientifique.

Dans le but de concrétiser cette vision d'une représentation globale et accessible de la connaissance, le web du futur doit être durable, interactif et transparent. Le contenu, comme les outils logiciels, doivent être librement accessibles et compatibles.

[1] version française de la Déclaration de Berlin signée ce 22 octobre 2003 en faveur du modèle du Libre Accès.

Définition d'une contribution au libre accès

Dans l'absolu, pour être une procédure avantageuse, le libre accès requiert l'engagement de tout un chacun en tant que producteur de connaissances scientifiques ou détenteur du patrimoine culturel. Les contributions au libre accès se composent de résultats originaux de recherches scientifiques, de données brutes et de métadonnées, de documents sources, de représentations numériques de documents picturaux et graphiques, de documents scientifiques multimédia.

Les contributions au libre accès doivent satisfaire deux conditions :

– leurs auteurs et les propriétaires des droits afférents concèdent à tous les utilisateurs un droit gratuit, irrévocable et mondial d'accéder à l'œuvre en question, ainsi qu'une licence les autorisant à la copier, l'utiliser, la distribuer, la transmettre et la montrer en public, et de réaliser et de diffuser des œuvres dérivées, sur quelque support numérique que ce soit et dans quelque but responsable que ce soit, sous réserve de mentionner comme il se doit son auteur (les règles usuelles de la collectivité continueront à disposer des modalités d'attribution légitime à l'auteur et d'utilisation responsable de l'œuvre publiée, comme à présent), tout comme le droit d'en faire des copies imprimées en petit nombre pour un usage personnel ;

– une version complète de cette œuvre, ainsi que de tous ses documents annexes, y compris une copie de la permission définie dans ce qui précède, est déposée (et, de fait, publiée) sous un format électronique approprié auprès d'au moins une archive en ligne, utilisant les normes techniques appropriées (comme les définitions des Archives Ouvertes [Open Archives]), archive gérée et entretenue par une institution académique, une société savante, une administration publique, ou un organisme établi ayant pour but d'assurer le libre accès, la distribution non restrictive, l'interopérabilité et l'archivage à long terme.

Soutenir le passage au paradigme du libre accès électronique

Il est de l'intérêt de nos organismes que le nouveau paradigme du libre accès soit encouragé pour le plus grand profit de la science et de la société. Pour cette raison, nous souhaitons progresser en encourageant nos chercheurs et boursiers à publier leurs travaux selon les principes du paradigme du libre accès ; encourageant les détenteurs du patrimoine culturel à soutenir le libre accès en mettant leurs ressources à disposition sur l'Internet ; développant les moyens et les modalités pour évaluer les contributions au libre accès et les revues scientifiques en ligne pour maintenir les critères d'assurance de qualité et d'éthique scientifique ; agissant favorablement pour que les publications en libre accès soient jugées lors des évaluations intervenant dans le cadre de la promotion professionnelle et académique ; illustrant les mérites intrinsèques du libre accès et des contributions à une telle infrastructure par le développement d'outils logiciels, la fourniture de contenus, la création de métadonnées et la publication d'articles.

Nous sommes conscients que cette évolution vers le libre accès entraîne des mutations dans la diffusion de la connaissance sur les plans juridique et financier. Nos organismes ont pour but de trouver des solutions aptes à soutenir le

développement des cadres juridique et financier actuels en vue de faciliter un accès et un usage optimaux.

Signataires

Pour les organismes de recherche allemands :

Hans-Jörg Bullinger Président (Société Fraunhofer), *Karl Max Einhäupl* Président (Conseil des sciences Wissenschaftsrat), *Peter Gaethgens* Président (Conférence des recteurs d'université – HRK), *Peter Gruss* Président (Société Max Planck), *Hans-Olaf Henkel* Président (Association Leibniz), *Walter Kröll* Président (Association Helmholtz), *Ernst-Ludwig Winnacker* Président (Fondation allemande pour la recherche – DFG).

Autres signataires internationaux :

Bernard Larrouturou Directeur Général (Centre national de la recherche scientifique CNRS), *Jürgen Mittelstraß* Président (Academia Europaea), *Paolo Galluzzi* Directeur (Institut et musée d'histoire des sciences – Istituto e Museo di Storia della Scienza – Florence), *Friedrich Geisselmann* Président (Association des bibliothèques allemandes – Deutscher Bibliotheksverband), *Yehuda Elkana* Président et Recteur (Université d'Europe centrale –CEU – Budapest), *Jean-Claude Guédon* (Institut pour une société ouverte –Open Society Institute), *Martin Roth* Directeur Général (Collections d'art de l'État – Staatliche Kunstsammlungen - Dresde), *Christian Bréchot* Directeur Général (Institut national de la santé et de la recherche Médicale – INSERM), *José Miguel Ruano Leon* Ministre de l'éducation de la culture et des sports (Gouvernement des Canaries), *Dieter Simon* Président (Académie des sciences de Berlin-Brandebourg – Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften), *Jens Braarvig* Directeur (Institut norvégien de paléographie et de philologie historique), *Peter Schirmbacher* Président-Directeur-Général (Initiative allemande pour l'information en réseau – Deutsche Initiative für Netzwerkinformation).

Prix Maurice Audin

Gérard Tronel

Plus de quarante après la fin de la guerre d'Algérie et plus de quarante-six ans après son « évasion », nous ne savons toujours pas où est Maurice Audin. Pour honorer la mémoire de notre collègue, certainement mort sous la torture, un certain nombre d'initiatives ont été lancées. Très récemment le Conseil municipal de la Ville de Paris a voté une résolution par laquelle il décide de donner le nom de Maurice Audin à un lieu de Paris – il s'agit d'une petite place au droit de la rue des Écoles, proche de la Mutualité et du campus de Jussieu. L'inauguration de cette place, par le Maire de Paris, est prévue prochainement, dès que certains problèmes seront réglés.

Peu avant la disparition de Laurent Schwartz, j'avais évoqué avec lui une relance du Prix Maurice Audin, il m'avait vivement encouragé à le faire et, après discussions avec des mathématiciens et des membres du Comité Maurice Audin, Madeleine Rebérioux et Pierre Vidal-Naquet, j'ai contacté des collègues susceptibles de constituer un jury de cinq membres. Pierre-Louis Lions a accepté d'en être le Président ; il sera assisté du Président de la Société Mathématique de France, du Président de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et de deux collègues algériens. Il est envisagé, sous une forme à préciser, d'associer à cette initiative l'Association des Mathématiciens Algériens.

En fait un Prix Audin avait été créé en 1958, pendant la guerre d'Algérie, à l'initiative du Comité Audin dont Laurent Schwartz avait été un fondateur ; à l'époque ce comité était représenté par des personnalités du monde universitaire : Pierre Vidal-Naquet et Madeleine Rebérioux, déjà cités, Luc Montagnier et Michel Crouzet, mais le comité a aussi compté à une époque près de trois mille membres. À l'époque, les fonds nécessaires avaient été collectés par le Comité, le montant était plutôt symbolique. Les lauréats successifs ont été : J.-L. Lions, J.-P. Kahane, B. Néron, M. Lazard, M. Berger et P.-A. Meyer. Il semble que P. Cartier ait été également lauréat. Le prix a cessé d'être décerné car la guerre d'Algérie avait pris fin, les fonds étaient épuisés, le Comité Audin s'était mis en sommeil.

Les candidats au prix doivent être âgés de quarante ans au plus, titulaires d'une thèse et auteurs de quelques articles : les candidatures devront être présentées par parrainages - directeurs de thèses, responsables de laboratoires, etc. Le montant du prix sera de trois mille euros à répartir, en parts égales, entre deux lauréats : l'un exerçant ses activités en France, l'autre en Algérie. Pour tenir compte du contexte qui a abouti à la création de ce prix, une condition a été formulée : le lauréat exerçant en France devra présenter son travail en Algérie et le lauréat exerçant en Algérie devra présenter son travail en France. Le montant de mille cinq cent euros par lauréat correspond au financement de frais de voyage et de séjour pendant une semaine. Compte tenu de dates liées à la vie de Maurice Audin et des délais de mise en route, la remise du prix est prévue pour le mois de juin 2004.

Pour recueillir des fonds couvrant l'organisation et le financement du prix, une souscription est ouverte. En attendant la création d'une association « Prix Audin » qui verra le jour dans quelques semaines, la souscription est ouverte au nom de : *Tronel Gérard – 40, rue de l'Alma – 92600 Asnières. CCP Paris 1456063H* (Préciser au dos du chèque « Prix Audin »). Des collègues souhaitent que le prix puisse être pérennisé, ce qui implique que la souscription permette d'envisager cette possibilité, nécessairement par le canal d'une association « Prix Audin ». De toute manière, les lecteurs seront tenus informés de la suite des opérations de remise du prix et des décisions qui seront prises pour l'avenir. Je termine en comptant sur votre aide et votre générosité. Merci.

La face cachée des mathématiques

Journée consacrée aux mathématiques
au centre Beaubourg à Paris

jeudi 18 mars 2004

organisée par L'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS)
La Société Mathématique de France (SMF)
La Société de Mathématiques Pures et Appliquées (SMAI)
La Revue *Pour la Science*

Au-delà du calcul, faire des mathématiques, c'est ouvrir la porte à l'imagination. Ce pouvoir de la pensée et de l'intelligence des structures fournit des clés pour comprendre le monde. C'est en tout cas son ultime ambition. L'histoire a montré que les mathématiques ont des applications aussi inévitables qu'inattendues. Inévitables parce qu'elles suivent les règles de la logique, inattendues parce qu'elles s'appliquent à la réalité.

Les mathématiciens vous invitent
à découvrir certaines des inventions récentes de leur discipline.

Les mathématiques promettent plus que la Lune car elles permettent d'observer sa face cachée, l'inattendu logique derrière le réel compliqué. Nombre des développements récents des mathématiques sont présents dans notre vie quotidienne pour peu qu'on regarde bien : aujourd'hui, dans les moyens techniques mis en œuvre dans notre quotidien, presque rien ne peut s'imaginer sans mathématiques. Elles sont tout autour de nous, bien vivantes, étonnamment attrayantes. Vos collègues mathématiciennes et mathématiciens viennent au Centre Beaubourg présenter des aspects insoupçonnés ou peu connus de la sphère mathématique. Venez les rejoindre dans cette fête mathématique. Parmi les sujets abordés, relevons :

- Comment se préparer à une négociation, et l'éclairer de la lumière crue de la théorie des jeux ?
- Comment optimiser la compression d'une image pour accélérer sa transmission et en réduire le coût ?
- Quels sont les rapports de la science et de l'art ? L'examen des peintures d'Escher nous propose une visite de l'Univers hyperbolique.
- Comment les mathématiciens appréhendent-ils la complexité pour mieux la dominer ? En la classifiant, que ce soit dans le contexte du séquençage du génome ou des réseaux de transport aérien ou de télécommunications.

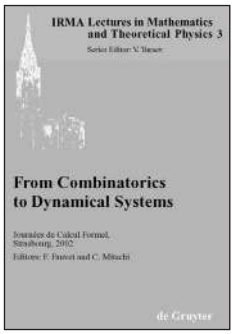
Les mathématiques contribuent grandement à la richesse, à la substance du monde et offrent des moyens multiples de l'apprivoiser.

Faites partager notre émerveillement
en faisant connaître cette manifestation.

Renseignements :
`http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/Beaubourg2004.html`

de Gruyter *Mathematics*

IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics



Volume 3

■ From Combinatorics to Dynamical Systems

Journées de Calcul Formel, Strasbourg, March 22–23, 2002

Edited by Frédéric Fauvet and Claude Mitschi

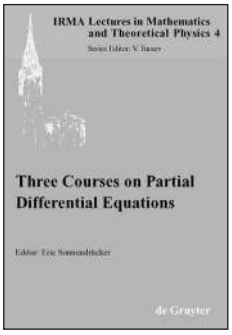
2004. xii, 241 pages. Paperback.
€ 36,95 / sFr 59,– / for USA, Canada, Mexico
US$ 36.95 • ISBN 3-11-017875-3

Topics covered include irregular connections, rank reduction and summability of solutions of differential systems, asymptotic behaviour of divergent series, integrability of Hamiltonian systems, multiple zeta values, quasi-polynomial formalism, Padé approximants related to analytic integrability, hybrid systems.

Volume 4

■ Three Courses on Partial Differential Equations

Edited by Eric Sonnendrücker



2004. viii, 162 pages. Paperback.
€ 36,95 / sFr 59,– / for USA, Canada, Mexico
US$ 36.95 • ISBN 3-11-017958-X

Modeling, in particular with partial differential equations, plays an ever growing role in the applied sciences. Hence its mathematical understanding is an important issue for today's research.

W DE G de Gruyter
Berlin · New York

Please place your order with your bookseller or order directly from us. Prices are subject to change.

www.deGruyter.de · Newsletter: www.deGruyter.de/Newsletter

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG · Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Phone +49-(0)30-2 60 05-0 · Fax +49-(0)30-2 60 05-251 · Email wdg-info@deGruyter.de

CARNET

Martine Babillot (1959–2003)



Après une courte maladie, Martine Babillot nous a quittés en juillet dernier, en pleine activité et en pleine force mathématique. L'un de ses derniers travaux, consacré aux actions de groupes discrets et à l'utilisation des méthodes ergodiques en géométrie des nombres, venait d'être publié par la S.M.F. dans la collection *Panoramas et synthèses*.

Après ses études à l'E.N.S. et un DEA en théorie des représentations à Paris VII au début des années quatre-vingt, Martine s'est orientée, sur la suggestion de L. Elie, vers des problèmes d'analyse harmonique et de calcul des probabilités liés aux marches aléatoires sur les groupes de Lie. À la suite de Dynkin et Spitzer notamment, Martine s'est intéressée au problème de la compactification de Martin pour ces marches aléatoires. Dans ce cadre, elle a en particulier développé l'asymptotique du renouvellement multidimensionnel pour les chaînes de Markov fibrées, chaînes qui peuvent être considérées comme l'analogue probabiliste des produits croisés de la théorie ergodique. Elle a illustré sa méthode dans plusieurs situations géométriques, en particulier dans le cas des groupes résolubles et des espaces symétriques.

À la fin des années quatre-vingt, Martine a été attirée par plusieurs aspects géométriques de la dynamique. En particulier, elle a été inspirée par les résultats de Furstenberg, Dani, Ratner, Margulis sur les flots unipotents dans les espaces homogènes de volume fini, riches d'applications potentielles en géométrie des nombres. Une autre source d'inspiration pour elle a résidé dans les travaux de Lalley sur le formalisme thermodynamique et le codage des géodésiques en courbure négative ; ces travaux relient géométrie hyperbolique, asymptotique du renouvellement, méthodes de la théorie analytique des nombres. En pleine cohérence avec ses orientations initiales, elle a alors développé l'asymptotique des géodésiques fermées ainsi que l'étude connexe des flots unipotents, en collaboration notamment avec F. Ledrappier, M. Peigné. Elle a aussi poursuivi brillamment l'étude des sujets de ses débuts, en collaboration notamment avec P. Bougerol, L. Elie. Son article récent, où elle établit la propriété de mélange dans des situations géométriques nouvelles, ouvre une voie originale en dynamique faiblement hyperbolique et est une belle illustration de ses méthodes et de son style mathématique.

Pendant les années où elle exerçait à Paris les fonctions de maître de conférences, Martine a su mener de front son enseignement et une activité scientifique intense ; elle s'y est montrée, à tous les niveaux, une enseignante dévouée et talentueuse. Pendant sa courte carrière de professeur à l'université d'Orléans et dans son département de mathématiques qu'elle affectionnait particulièrement, Martine a formé plusieurs élèves dans les directions transversales qu'elle développait. Par sa présence, son enthousiasme, son style mathématique, elle a été le moteur de collaborations et d'activités nouvelles. Durant cette période, Martine a écrit ou suscité plusieurs articles ou travaux de synthèse sur des sujets avancés, de la plus grande utilité pour ses collègues et la communauté mathématique, parmi lesquels : une série d'exposés à Strasbourg à « État de la recherche » sur les points entiers et les groupes discrets, un cours « CIMPA »à Bombay sur les fonctions harmoniques sur les groupes de Lie, un volume sur la théorie ergodique des actions de groupes, écrit en collaboration avec ses collègues d'Orléans, et en voie d'achèvement.

Ceux qui l'ont connue gardent le souvenir d'une mathématicienne brillante et d'une collègue chaleureuse.

Yves Guivarc'h

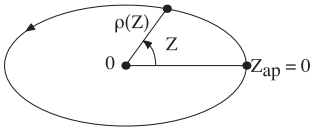
LIVRES

Œuvres complètes de Jean Le Rond D'Alembert : premiers textes de mécanique céleste 1747 - 1749
sous la direction de Michelle Chapront-Touzé
CNRS Éditions, 2002. ISBN : 2-271-06013-3. 536 p. 60 €.

Il n'est pas inutile de rappeler les travaux antérieurs quand ils émanent d'hommes de génie ; plus d'une tentative récente vient se souder aux travaux antérieurs et se trouve ainsi mieux mise en valeur » — *Tisserand*
Préface du troisième volume du Traité de mécanique céleste
Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune.

1. Petit exercice en guise d'introduction

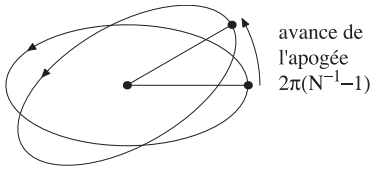
i) L'équation polaire $\rho(z) = a(1-e^2)/(1-e\cos z)$ — dans laquelle j'adopte pour l'angle la notation z de d'Alembert — représente une ellipse d'excentricité e dont le foyer est à l'origine et dont les angles sont mesurés depuis l'*apogée*, c'est-à-dire le point le plus éloigné du foyer O (disons la Terre). Posons



$$u(z) = \rho(0)^2/\rho(z) = -H(1-e\cos z), \quad \text{avec } H = -a\frac{1+e}{1-e}\cdot$$

La fonction $u(z)$ est la solution qui vérifie $u(0) = a(1+e), u'(0) = 0$, de l'équation différentielle linéaire du second ordre $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}z^2 + u + H = 0$, que d'Alembert écrit $\mathrm{d}^2u + u\mathrm{d}z^2 + H\mathrm{d}z^2 = 0$. La solution présente un unique minimum local (et donc global) $z_{\mathrm{ap}} = 0$ modulo 2π, qui définit l'apogée de $\rho(z)$.

ii) Le remplacement de cette équation différentielle par $\mathrm{d}^2u + N^2u\mathrm{d}z^2 + H\mathrm{d}z^2 = 0$ introduit une *avance de l'apogée* uniforme de $2\pi[N^{-1}-1]$, c'est-à-dire environ $\pi\alpha$ radians par période si $N^2 = 1-\alpha$ avec α petit : à chaque tour, l'angle z du nouveau maximum local se décale de $2\pi[N^{-1}-1]$. La solution ayant les mêmes conditions initiales est en effet donnée par $u = -(H/N^2)(1-e\cos Nz)$.



iii) Si enfin H est remplacé par une fonction $M(z)$ (d'une détermination réelle) de z, i.e. si l'équation différentielle devient $\mathrm{d}^2u + N^2u\mathrm{d}z^2 + M(z)\mathrm{d}z^2 = 0$, la solution obtenue par la méthode de la variation des constantes s'écrit $u = -\frac{1}{N}\mathrm{Im}\left[e^{iNz}\int e^{-iNz}M(z)dz\right]$.

Si en particulier $M(z) = K\cos(pz+A)$ avec $p \neq N$, l'unique solution u_0 telle que $u_0(0)$ et $u_0'(0)$ s'annulent peut s'écrire

$$u_0(z) = -\frac{K\cos(pz+A)}{N^2-p^2} + \frac{K\cos(A-Nz)}{2N(N+p)} + \frac{K\cos(A+Nz)}{2N(N-p)}\cdot$$

Merci aux membres de l'équipe A.S.D. pour leurs commentaires et relectures ; merci à Michelle Chapront-Touzé pour des éclaircissements sur l'« équation » de l'apogée.

Si $M(z) = H + K\cos(pz + A) + \cdots + L\sin(Rz + C) + \cdots$, à l'avance moyenne de l'apogée se superpose donc, en l'absence de résonance, une modulation quasi-périodique qu'on appelle, au dix-huitième siècle, l'*équation*. Notons que $N - p$ peut être arbitrairement petit : c'est le problème des *petits dénominateurs*, dus aux *quasi-résonances*, qui peuvent rendre très grands certains termes. En cas de *résonance*, c'est-à-dire si $M(z) = K\cos(Nz + A)$, la solution u_0 précédente devient

$$u_0(z) = \frac{K\cos(A - Nz)}{4N^2} - \frac{K\cos(A + Nz)}{4N^2} - \frac{Kz}{2N}\sin(A + Nz).$$

Elle présente des termes non périodiques, les *arcs de cercle*, aujourd'hui appelés *termes séculaires*. Dans ce cas, l'avance moyenne de l'apogée n'est pas bornée.

2. La théorie de la Lune de 1748

C'est dans les années 1740 qu'Euler, Clairaut et d'Alembert, utilisant le formalisme leibnizien, constituent le *Problème de trois corps* comme celui de la résolution approchée d'un système d'équations différentielles traduisant l'attraction mutuelle. Le volume qui vient de paraître est une référence centrale pour la compréhension de cette période remarquable de l'histoire de la mécanique céleste. Il s'organise autour du manuscrit de la *Théorie de la Lune de 1748*[1] qui en forme environ les trois-cinquièmes. Publié (et remis en ordre) ici pour la première fois, ce traité, qui est à la base du Livre I des *Recherches sur différents points importans du systême du monde* paru en 1754, est une théorie complète de la Lune « au premier ordre de la théorie des perturbations ». C'est en fait la première théorie « littérale » du mouvement de la Lune : ce n'est qu'à la fin des calculs que les paramètres sont remplacés par leur valeur numérique.

La petitesse du rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil est telle que l'action du Soleil sur l'orbite lunaire peut être considérée comme une perturbation de l'attraction de la Terre sur la Lune. Cette dernière décrit donc autour de la Terre une orbite qui, pendant une révolution lunaire est presque elliptique et peut être identifiée en première approximation à une ellipse dont l'excentricité ($\sim 0{,}05$) et l'inclinaison sur le plan de l'écliptique ($\sim 5°$) varient très peu, dont le plan tourne lentement (le mouvement de la ligne des nœuds, intersection du plan de l'ellipse avec le plan de l'écliptique) et qui tourne lentement dans son plan (le mouvement de l'apogée, point de l'orbite le plus éloigné de la Terre pendant une révolution). D'Alembert caractérise l'orbite par trois éléments : sa projection sur le plan de l'écliptique, son inclinaison à chaque instant et le mouvement de la ligne des nœuds.

Le mouvement sur le plan de l'écliptique est obtenu en décomposant la force à laquelle est soumise la projection de la Lune sur ce plan en la somme d'une force centrale en l'inverse du carré de la distance due à la Terre et d'une « perturbation », due à la fois à la projection sur l'écliptique et à l'action du Soleil. La perturbation est elle-même décomposée en la somme d'une force φ dirigée vers la Terre et d'une force π dirigée perpendiculairement. À ceci s'ajoute la force qui tend à faire sortir la trajectoire du plan de l'écliptique et dont la considération permettra de comprendre le mouvement de la ligne des nœuds. Comme Clairaut et plus tard Laplace, il prend

[1] Le titre en a été choisi par l'éditeur

comme variable indépendante non pas le temps mais la « longitude vraie » (ou « anomalie vraie »), c'est-à-dire l'angle polaire mesuré à partir de l'apogée.[2] J'ai rappelé dans l'introduction qu'il note z cet angle. Ne tenant compte que de l'ordre 1 des termes perturbatifs, d'Alembert cherche tout d'abord, une fois fixées la position et la vitesse de la Lune à un instant initial, une équation différentielle ayant pour solution l'équation polaire $\rho = \rho(z)$ de la projection de sa trajectoire sur le plan de l'écliptique ou plutôt, comme dans l'introduction, la fonction $u(z) = \rho(z_0)^2/\rho(z)$. Pour ce faire, il calcule, comme le faisait Newton, la modification de la loi des aires causée par la petite force π et applique la loi de conservation de l'énergie à une force centrale qui fournirait la même orbite géométrique (pas la paramétrisation en temps). Il obtient ainsi une équation de la forme

$$\mathrm{d}\mathrm{d}u + F(u, du/dz, \pi, \varphi)\mathrm{d}z^2 = 0.$$

Aujourd'hui, l'obtention de ce type d'équation se réduit à un changement de variables des coordonnées cartésiennes $(\rho\cos z,\ \rho\sin z,\ \rho s)$ aux coordonnées cylindriques (ρ, z, s), suivi du passage aux variables $(u = 1/\rho, z, s)$ qu'utilise Laplace (aux notations près) dans sa théorie de la Lune. Il vient :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{z}^2 &= -\frac{\mu\rho}{r^3} + \varphi, \\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\tau}(\rho^2\dot{z}) &= \pi, \\ \frac{d^2}{d\tau^2}(\rho s) &= -\frac{\mu z}{r^3} + \psi, \end{aligned}$$

où les points désignent la dérivation par rapport au temps τ, $r = \rho\sqrt{1+s^2}$ est la distance de la Terre à la Lune, μ une constante et ψ la composante de la force perturbatrice normale au plan de l'écliptique. On élimine le temps à l'aide de l'équation $\rho^2\dot{z} = H$, ou encore $\mathrm{d}\tau = \rho^2 dz/H$, qui donne la composante du moment cinétique orthogonale au plan (x, y) de l'écliptique, dont la dérivée dépend de π. Les deux premières équations fournissent alors l'équation cherchée (pour les détails du calcul, on peut se reporter au Chapitre V du premier volume du *Traité de Mécanique Céleste* de Tisserand après avoir remplacé z par v et la latitude par z).

Mais revenons à d'Alembert ; il lui faut maintenant exprimer les forces π et φ en fonction de u et z. Arguant de la faible excentricité de l'orbite lunaire, il simplifie le problème en posant $u = K + t$, où K est une constante et t (qui n'a rien à voir avec le temps, que nous avons pris soin de noter τ) mesure la (faible) non-circularité de la projection de l'orbite sur le plan de l'écliptique, ce qui permet de négliger t^2. L'équation que vérifie t prend la forme

$$\mathrm{d}\mathrm{d}t + N^2 t\mathrm{d}t\mathrm{d}z^2 + M(t, dt/dz, \cos(pz + A), \ldots) = 0.$$

Attardons-nous sur le coefficient N^2, dont nous avons rappelé dans l'introduction qu'il donne l'avance moyenne de l'apogée. Il provient d'un terme en $1/u$ dans l'expression de la composante φ de la perturbation, auquel correspond un terme en $1/u^3$, que d'Alembert remplace par $1/K^3 - 3t/K^4$, dans l'équation différentielle dont u est solution. Que seule la composante φ intervienne n'est pas pour nous étonner puisqu'une telle avance peut être obtenue par une légère modification de la loi (toujours

[2] Ce n'est qu'au début du XIX^e siècle que l'origine passera de l'apoastre au périastre qui a l'avantage d'exister non seulement pour l'ellipse mais également pour la parabole et l'hyperbole. Merci à Alain Albouy qui m'a montré la remarque au début du *Theoria Motus* dans laquelle Gauss écrit « *Nous craignons d'autant moins de rétablir l'analogie entre tous les genres de sections coniques que les astronomes français les plus récents en ont déjà donné l'exemple* ».

centrale) de l'attraction (voir le paragraphe suivant). Le calcul donne $N^2 = 1 - \frac{3n^2}{2}$, où n^2 est le produit du rapport des distances moyennes (Terre-Lune)/(Soleil-Lune) par le rapport de la force exercée par le Soleil sur la Lune à la force exercée par la Terre sur celle-ci. Dans l'hypothèse d'orbites keplériennes circulaires, la troisième loi de Kepler (le cube r^3 du rayon est proportionnel au carré T^2 de la période) implique que la force en $1/r^2$ exercée par un corps sur un autre en orbite circulaire autour de lui est proportionnelle au rapport r/T^2. Dans cette approximation, n est donc simplement le rapport de la période de révolution de la Lune autour de la Terre à celui de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire $n^2 \sim \frac{1}{178+\frac{29}{40}}$ si, comme d'Alembert, on adopte la valeur utilisée par Newton.

Les quantités t et dt/dz sont de l'ordre de l'excentricité de la Lune. Si δ et ε sont les valeurs qu'elles prennent à l'instant origine, la solution de l'équation différentielle sans second membre obtenue en oubliant la perturbation M est simplement $t = \delta \cos Nz + (\varepsilon/N) \sin Nz$. Remplaçant dans M les termes t et dt/dz respectivement par cette expression et sa dérivée, utilisant une approximation de la distance variable de la Terre au Soleil et négligeant les termes d'ordre supérieur[3], d'Alembert obtient une équation du type de celles que nous avons étudiées dans l'introduction. Il ramène l'équation différentielle du second ordre à un système du premier ordre et résout ce dernier comme nous l'avons fait, après diagonalisation, par « variation des constantes » (une technique publiée par Jean Bernouilli en 1697 dans les *Acta Eruditorum*)[4]. Les calculs sont systématiquement effectués en complexe à l'aide de l'« identité d'Euler » sur l'exponentielle complexe, publiée seulement quelques années auparavant par Euler mais déjà connue de Robert Cotes (*Philosophical Transactions, 1714*)[5]. Le résultat contient un certain nombre de termes mais, en vue du calcul de l'« équation de l'apogée », une première approximation est obtenue en ne gardant que ceux dont le dénominateur est suffisamment petit pour qu'ils dominent les autres. D'Alembert obtient ainsi la formule approchée

$$u \sim 1 - \frac{1}{20}(\cos Nz - 1) + \frac{1}{180}\cos(2z + 2A - 2nz) - \frac{1}{180}\cos(Nz - 2z - 2A + 2nz)$$

dans laquelle 1/20 est l'excentricité de la Lune, A est, comme il le dit joliment, « l'élongation de la Lune au Soleil lorsqu'elle commence à décrire son orbite » (i.e. lorsque $z = 0$) et $z + A - nz = Z$ est cette élongation au temps correspondant à une valeur donnée de z (en effet, la Terre parcourt un angle nz sur l'écliptique pendant que la Lune parcourt l'angle z). Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

C'est la méthode de résolution d'une telle équation différentielle linéaire du second ordre à second membre quasi-périodique qui est l'objet du premier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748*. En commençant par décrire cette résolution, je ne faisais donc que suivre d'Alembert. Tisserand commencera de même le troisième volume de son *Traité de Mécanique Céleste* par la résolution de l'équation de Gylden-Lindstedt, cas particulier de l'équation de Hill.

Il est intéressant de comparer ce que dit d'Alembert à 20 ans d'intervalle sur la méthode qui consiste à supposer que u s'écarte peu d'une constante K. En 1748, il écrit

---

[3] Plus précisément, les « petits » paramètres dont on néglige les termes quadratiques sont le rapport n des périodes de révolution lunaire et terrestre, la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, l'excentricité de la Lune et celle du Soleil.

[4] Leibniz connaissait déjà la formule donnant la solution par quadratures. Merci à Daniel Bennequin de cette précision qu'il doit à la note au bas de la page 21 du livre *Ordinary differential equations* de E.L. Ince.

[5] Merci à Alain Albouy de cette précision qu'il doit à l'*History of mathematics* de Cajori.

> « *Tout l'artifice dont je me sers pour déterminer l'orbite lunaire eu égard aux deux excentricités, consiste à substituer $K + t$ au lieu de u dans l'équation générale ... Par la substitution de $K+t$ au lieu de u dans l'équation de l'orbite, on donne au terme tdz^2 un coefficient différent de l'unité, & on évite les arcs de cercle qui se rencontreroient dans l'équation de l'orbite, et qu'il faudrait faire disparoître par quelque addresse particulière, ce qui engageroit dans un calcul assés délicat.* »

En 1768, dans le XXXIX^e^ mémoire *De l'intégration de l'équation de l'orbite lunaire, (& en général du problême des trois Corps) & des difficultés qui s'y rencontrent* du cinquième des *Opuscules mathématiques*, il évoque la difficile question de la stabilité du mouvement sur le long terme :

> « *La première de ces imperfections consiste à supposer $x = a + t$, t étant une quantité fort petite par rapport à a. C'est supposer, au moins tacitement, ce qui est en question, savoir que l'orbite de la lune, après tant de révolutions qu'on voudra, ne doit jamais s'écarter beaucoup d'un cercle. Il est vrai que cette supposition est justifiée par les observations ; mais on doit sentir que ce moyen de la justifier est indirect, & n'est pas pris dans la solution même comme il le doit être.* »

Les « arcs de cercle » sont ceux qui s'introduisent si l'on résout sans précaution une équation différentielle du type $ddt + N^2 t dz^2 + M(t, z)dz^2 = 0$ par approximations successives. Dans l'ordre choisi par l'éditeur, c'est le dernier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748* qui est consacré à ce problème. Choix naturel, puisque cette étude donne la manière théorique de résoudre un telle équation à un ordre d'approximation arbitraire. Pour illustrer ceci par un exemple très (trop) simple, prétendons résoudre par approximations successives l'équation $ddt + (1-\nu)tdz^2 = 0$ lorsque ν est très petit en l'écrivant $ddt + tdz^2 = \nu t dz^2$. On commence par remplacer le second membre par 0, ce qui donne $t = \alpha \cos z + \beta \sin z$. Remplaçant t par cette fonction dans le second membre, on obtient l'équation « résonnante » $ddt + tdz^2 = \nu(\alpha \cos z + \beta \sin z)dz^2$ dont la solution est

$$t = \alpha \cos z + \beta \sin z + (\nu\alpha/2)z \sin z - (\nu\beta/2)z \cos z.$$

Les « arcs de cercle » de cette solution sont manifestement des artefacts qui proviennent du remplacement de la solution $t = \alpha \cos \sqrt{1-\nu}z + \beta \sin \sqrt{1-\nu}z$ par le début de son développement limité en ν. Faire disparaître les « arcs de cercle » en faisant varier les fréquences est une idée importante : elle est à la base des « séries de Lindstedt », dont on trouvera la théorie dans le deuxième volume des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* d'Henri Poincaré. Quant à la stabilité sur le très long terme, c'est un problème qui n'est toujours pas résolu : on aura une idée des difficultés qu'il présente (dans le cas planétaire mieux compris) en lisant le « survey » de Jacques Laskar *La stabilité du système solaire*, qui forme le chapitre 7 du livre *Chaos et déterminisme* édité au Seuil en 1992 sous la direction d'Amy Dahan, Jean-Luc Chabert et Karine Chemla.

3) D'Alembert, Clairaut, Euler et le problème de l'apogée

Rappelons que l'apogée de l'orbite lunaire est le point le plus éloigné de la Terre atteint par la Lune au cours d'une révolution. Nous le confondrons ici avec l'apogée de la projection de cette orbite sur le plan de l'écliptique près duquel a approximativement lieu le mouvement de la Terre autour du Soleil (d'Alembert étudie bien entendu la différence entre les deux notions). Puisque $N^2 = 1 - 3n^2/2$, l'avance moyenne de l'apogée de la projection de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique donnée par le calcul est approximativement de $2\pi \times 3n^2/4$. À cette avance moyenne se superpose

l'« équation » qui provient des termes quasi-périodiques. Comme Euler et Clairaut à la même époque, d'Alembert ne trouve que la moitié de la valeur observée. C'est le « problème de l'apogée » qu'il décrit ainsi :

> *« Nous avons fait voir dans le chapitre précédent que le mouvement de l'apogée de la lune n'étoit que de* $1°31'$ *suivant la théorie au lieu de* $3°3'$ *dont il est suivant les observations, & que la plus grande équation de ce mouvement n'étoit aussy suivant la théorie, que la moitié de ce qu'elle est réellement ; ces deux points de la théorie de la Lune, savoir le mouvement de son apogée, et l'équation de ce mouvement, sont les deux seuls que M. Newton n'ait pas déduits de la théorie de la gravitation, c'est seulement par les observations qu'il les a déterminés ; est-ce faute d'avoir pu le déduire de la théorie, ou parce qu'il a reconnu qu'en effet ils ne pouvoient s'en déduire ? C'est une question sur laquelle il ne nous est pas aisé de prononcer. Cependant nous allons faire icy quelques réflexions qui pourront aider à la résoudre. »*

L'avance moyenne de l'apogée n'est pas un petit effet : les $3°3'$ par révolution lunaire font environ $44°$ par an, c'est-à-dire un tour complet en moins de 9 ans (3233 jours) ! Or à l'époque de l'écriture de la *Théorie de la Lune de 1748*, Euler, Clairaut et d'Alembert s'accordent pour trouver que la théorie de l'attraction en l'inverse du carré de la distance ne fournit que la moitié de cette quantité et, le 15 novembre 1747, Clairaut soutient devant l'Académie des Sciences que la théorie de Newton doit être révisée par l'addition à l'attraction d'un terme en l'inverse du cube de la distance. Mais, coup de théâtre, s'apercevant que le calcul des perturbations au deuxième ordre fournit un terme de taille comparable à celui fourni par le premier ordre, Clairaut rétracte le 17 mai 1749 ses thèses et annonce les résultats d'un texte déposé sous pli cacheté en janvier de la même année qui réconcilie théorie newtonienne et observations (ce texte ne sera publié qu'en 1752 sous le titre *De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*). C'est le lendemain de cette rétractation de Clairaut que d'Alembert confie, pour prendre date, son manuscrit au secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences Grandjean de Fouchy. Dans *Recherches sur différens points importans du systême du monde*, il donne le moyen de faire le calcul des perturbations aux ordres suivants sans faire apparaître d'« arcs de cercle » en suivant le dernier chapitre du manuscrit de 1748, que nous avons déjà évoqué. D'après l'éditeur du volume, cette méthode serait déjà contenue dans un pli cacheté déposé à la fin de 1747 et aujourd'hui perdu ; il n'aurait donc manqué à d'Alembert que d'appliquer numériquement sa méthode pour faire la même découverte que Clairaut. Il en retire une amertume qui s'exprimera dix ans plus tard dans le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) :

> *« Je ne dois pas oublier d'ajouter 1°). que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ; 2°). que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné cidessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la* lune *que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire. Je ne dois pas non plus passer sous silence la manière élégante dont M. Euler intègre l'équation de l'orbite lunaire ;*

méthode plus simple & plus facile que celle de M. Clairaut & que la mienne ; & cette observation jointe à ce que j'ai dit plus haut des travaux de ce grand géometre, par rapport à la lune*, suffira pour faire voir qu'il a aussi travaillé très utilement à cette théorie, quoiqu'on ait aussi cherché à le mettre à l'écart autant qu'on a pû. L'Encyclopédie faite pour transmettre à la postérité l'histoire des découvertes de notre siecle, doit par cette raison rendre justice à tout le monde ; & c'est ce que nous croyons avoir fait dans cet article. Comme ce manuscrit est prêt à sortir de nos mains pour n'y rentrer peut-être jamais, nous ajouterons par la suite dans les supplémens de l'Encyclopédie ce qui aura été ajouté à la théorie de la* lune*, depuis le mois de Novembre 1759, où nous écrivons cet article. »*

Pour calculer l'avance de l'apogée, d'Alembert commence par utiliser la formule approchée de $u(z)$ que nous avons donnée plus haut. En annulant la dérivée de u par rapport à z et en utilisant le fait qu'en une apogée z_{ap}, le nombre réel Nz_{ap} est proche d'un multiple entier de 2π, il trouve l'équation approchée

$$\sin(Nz_{\mathrm{ap}}) \sim \frac{1}{9}\sin(2z_{\mathrm{ap}} - 2nz_{\mathrm{ap}}).$$

Il obtient ainsi une avance moyenne de l'apogée de $1°30'$ modulée par une « équation » périodique d'une amplitude de $6°20'$ qui est l'angle dont le sinus vaut $1/9$. Il constate alors que les *Principia* donnent le double pour la valeur observée de l'avance moyenne mais aussi pour l'équation, avec de plus dans ce cas une différence de signe. La discussion de ce qu'il en est vraiment de l'« équation » est délicate et je renvoie aux notes 89 et 106 de Madame Chapront-Touzé pour une discussion complète. Disons seulement que d'Alembert calcule l'apogée de l'orbite de la Lune (en projection sur l'écliptique) alors que Newton étudie les mouvements « séculaires » d'une ellipse approchée. Les $6°20'$ de d'Alembert correspondent en gros à l'addition de deux « inégalités » :

– d'une part *l'équation semestre* de Newton dont l'amplitude (observée et non calculée par Newton) est de $12°18'$ (ramené aujourd'hui à $9°39'$) et le signe opposé à celui de d'Alembert ; c'est une inégalité de type « séculaire », faisant intervenir un angle à longue période, l'angle du Soleil avec l'apogée de la Lune ;

– d'autre part une inégalité du même signe que celle de d'Alembert et d'amplitude $15°27'$ qui fait intervenir un angle dont la période est essentiellement celle de la Lune.

C'est ce dernier terme qui manque à Newton et qui, additionné au premier, montre que le calcul par d'Alembert de l'« équation » de l'apogée est essentiellement correct.

Tout un chapitre est consacré à la recherche de causes qui pourraient compléter la gravitation newtonienne et fournir ainsi une valeur correcte de l'avance moyenne de l'apogée : l'action d'un ether et une lune oblongue sont successivement écartées à la suite de calculs précis et seule l'existence d'une autre force, peut-être magnétique et due à la Terre, est finalement retenue. Notons que contrairement à Clairaut et Euler, mais comme Buffon, d'Alembert ne considère pas la théorie newtonienne comme sérieusement mise à mal par le problème de l'avance de l'apogée de la Lune. Voici ce qu'il écrit dans l'article *Attraction* du premier volume de l'*Encyclopédie* paru en 1751 :

« Ajoutons qu'on devrait être très circonspect à changer la loi du quarré des distances, quand même, ce qui n'est pas encore arrivé, on trouveroit quelque phénomene céleste, pour l'explication duquel cette loi du quarré ne suffiroit pas. Les différens points du systême du monde, au moins ceux que nous avons examinés jusqu'ici, s'accordent avec la loi du quarré des distances : cependant comme cet accord n'est qu'un à-peu-près, il est clair qu'ils s'accorderoient de même avec une loi qui seroit un peu différente de celle du quarré des distances : mais on sent bien qu'il seroit ridicule d'admettre une pareille loi pour ce seul motif.

Reste donc à savoir si un seul phénomène qui ne s'accorderoit point avec la loi du quarré, seroit une raison suffisante pour nous obliger à changer cette loi dans tous les autres ; & s'il ne seroit pas plus sage d'attribuer ce phénomène à quelque cause ou loi particulière. »

Le mouvement du nœud ne pose pas de problème analogue à celui de l'apogée. Le calcul au premier ordre des pertubations suffit à en donner une bonne approximation $-3n^2/4$ (l'observation montre qu'une révolution complète du nœud sur l'écliptique se fait en 18 ans 2/3 avec une petite « équation » périodique d'amplitude $1°26'$). Ce mouvement est rétrograde et, dans le calcul au premier ordre, exactement opposé à l'avance moyenne de l'apogée. Bien que noté par Delaunay et Poincaré, ce fait n'a été remarqué dans toute sa généralité que par Michel Herman comme l'annulation de la trace du linéarisé du *système séculaire* du problème des $n+1$ corps dans l'espace, au point singulier correspondant à n mouvements circulaires, coplanaires et de même sens. Cette propriété est reliée au caractère harmonique du potentiel newtonien en dimension trois dans l'article *On a strange resonance noticed by Michel Herman* de Khaled Abdullah et Alain Albouy (*Regular and Chaotic Dynamics*, $V.6, N^o\ 4, 2001$, pages 421-432).

4. À suivre...

Le volume est extrêmement cohérent puisque la *Théorie de la Lune de 1748* est précédée de textes qui, à l'exception du premier, sont consacrés au problème de la Lune ou plus généralement à la théorie de la résolution par approximations (méthode des perturbations) des équations différentielles qui régissent le mouvement des planètes. C'est le cas de la *Méthode générale pour déterminer les orbites de toutes les planètes, eu égard à leur action mutuelle*. Il est rendu lisible — ce qui concernant d'Alembert ne va pas de soi — par le remarquable travail d'édition et d'explicitation de Madame Chapront-Touzé ainsi que par sa passionnante introduction à l'ensemble du volume, dans laquelle elle décrit en détail l'histoire du problème de l'apogée.

Ce premier volume, de 532 pages, inaugure superbement l'entreprise audacieuse qu'est l'édition critique des œuvres complètes de d'Alembert sous la coordination générale d'Irène Passeron. Bruno Morando, chaleureusement évoqué par Michelle Chapront-Touzé, est mort trop tôt pour le voir. Il l'aurait aimé.

Cinq séries sont prévues, totalisant près de cinquante volumes. Pour plus de détails, se reporter au site `http://maply.univ-lyon1.fr/dalembert/` qui contient en particulier, pour le volume qui vient de paraître, une « présentation des éditeurs » donnant en deux pages un résumé précis de la crise de la gravitation dans les années 1747-1749 :

Série I : TRAITÉS ET MÉMOIRES MATHÉMATIQUES, 1736 - 1756
(11 volumes dont celui qui paraît est le sixième)
Série II : ARTICLES DE L'*ENCYCLOPÉDIE* (6 volumes)
Série III : *OPUSCULES* ET MÉMOIRES MATHÉMATIQUES, 1757 - 1783
(11 volumes)
Série IV : *MÉLANGES*, ÉLOGES ET ESSAIS (environ 10 volumes)
Série V : CORRESPONDANCE GÉNÉRALE (environ 11 volumes)

On ne peut que souhaiter que les volumes suivants soient édités avec autant de rigueur et de compétence.

Alain Chenciner, Institut de mécanique céleste et Université Paris 7

Introduction to Prehomogeneous Vector Spaces
Tatsuo Kimura
Translations of Mathematical Monographs, **215**. American Mathematical Society, 2003. 288 pp. $ 99.00. ISBN 0-8218-2767-7.

Tatsuo Kimura est l'un des pionniers de la théorie des espaces vectoriels préhomogènes (en abrégé nous dirons parfois PV comme le veut maintenant une certaine tradition). Cette théorie a été créée par Mikio Sato lors d'un cours au RIMS de Kyoto en 1970 (il existe maintenant une traduction en anglais de ce cours due à M. Muro) dans le but de produire de nouvelles fonctions zêta, généralisant notamment la fonction zêta de Riemann par leur construction et par leur équation fonctionnelle. Je pense qu'il peut être utile au lecteur intéressé que je rappelle pour commencer une démonstration de l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ (fonction zêta de Riemann) qui, au prix quand même de considérables difficultés techniques, se généralise au cadre des PV. Cette esquisse me permettra aussi de situer dans le livre de Kimura les principales étapes de la définition et de l'équation fonctionnelle des fonctions zêta des espaces préhomogènes.

On pose donc $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ (pour $\mathrm{Re}(s) > 1$) et on voudrait prouver le prolongement méromorphe de cette fonction ainsi que son équation fonctionnelle. Voici une manière de procéder. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction de Schwartz, on définit alors la *fonction zêta locale*

$$Z(f,s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)|x|^s d^*x \tag{1}$$

où $d^*x = \frac{dx}{|x|}$ est la mesure de Haar multiplicative. Rien n'empêche d'appeler cette expression la transformée de Mellin de f. Ce qui est sûr c'est que cette intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. On peut obtenir son prolongement analytique et son équation fonctionnelle grâce à la remarque suivante due à Tate. Considérons f et g deux fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$ et désignons par $\hat{f}$ et $\hat{g}$ leurs transformées de Fourier ($\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2i\pi xy}dx$). Alors le produit

$$Z(f,s)Z(\hat{g},1-s) \tag{2}$$

est bien défini pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. La remarque fondamentale de Tate est que l'expression (2) est symétrique en f et g :

$$Z(f,s)Z(\hat{g},1-s) = Z(g,s)Z(\hat{f},1-s), \tag{3}$$

ce qui permet, après avoir calculé le facteur de Tate

$$\rho(1,s) = \frac{Z(g,s)}{Z(\hat{g},1-s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$$

grâce à une fonction g sympathique ($g(x) = e^{-\pi x^2}$ en l'occurrence), de prouver que $Z(f,s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, ayant des pôles aux entiers négatifs pairs, et vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$Z(f,s) = \rho(1,s)Z(\hat{f},1-s). \tag{4}$$

Evidemment, tous les spécialistes savent que Tate, dans sa thèse, a fait ce qui précède sur un corps local k quelconque et que sa définition de la fonction zêta locale comprend également un caractère χ du groupe des unités de k, que nous avons pris trivial ($\chi = 1$) dans notre exemple. Ce qui est essentiel ici, c'est que l'équation fonctionnelle

(4) permet de prolonger analytiquement la fonction zêta de Riemann et de donner son équation fonctionnelle, sans avoir recours aux adèles. Pour cela posons :

$$\zeta(f,s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} f(tn)dt. \tag{5}$$

Un premier calcul sans difficulté montre que

$$\zeta(f,s) = \zeta(s)Z(f,s). \tag{6}$$

L'utilisation classique de la formule de Poisson mène alors à :

$$\zeta(f,s) = \int_1^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} f(tn)dt + \int_1^{+\infty} t^{-s} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \hat{f}(tn)dt + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s}, \tag{7}$$

qui prouve que

$$\zeta(f,s) = \zeta(\hat{f}, 1-s) \tag{8}$$

et en utilisant l'équation fonctionnelle de Tate ((4) ci-dessus), on obtient enfin

$$\zeta(1-s) = \rho(1,s)\zeta(s). \tag{9}$$

Il semble que la remarque de M. Sato qui est au départ de la théorie des espaces préhomogènes a été de comprendre que dans bon nombre de cas connus de séries de Dirichlet possédant une équation fonctionnelle (comme la fonction zêta de Riemann, la fonction zêta d'Epstein, les fonctions zêta de Siegel, les fonctions zêta d'une algèbre simple), le point clé sous-jacent était la présence d'un groupe algébrique G et d'une représentation rationnelle ρ de G dans un espace vectoriel de dimension finie V, *qui possédait une orbite Zariski ouverte*. Un tel triplet (G,ρ,V) sera appelé espace vectoriel préhomogène (ou PV). Dans le cas bien connu de la fonction zêta de Riemann, l'espace préhomogène associé sera simplement donné par la représentation naturelle de $\mathbb{C}^* = GL(1,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$. Après son cours au RIMS sur le sujet, M. Sato publiera en collaboration avec T. Shintani un article sur les fonctions zêta associées aux espaces préhomogènes, puis en collaboration avec T. Kimura un article sur la classification de ces espaces. A partir de là la théorie s'est considérablement développée ; je renvoie à la bibliographie du présent livre pour avoir un aperçu assez complet de la littérature existante.

Venons en au livre de Kimura.

Le chapitre 1 contient les notions de base de la géométrie algébrique, ainsi qu'un aperçu sur les groupes algébriques et sur leur algèbre de Lie.

Le chapitre 2 contient la théorie de base des espaces préhomogènes. Comme nous l'avons déjà dit un espace préhomogène est la donnée d'un triplet (G,ρ,V) où G est un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{C}$, ρ une représentation rationnelle de G dans un espace vectoriel complexe V, *admettant une orbite Zariski ouverte* Ω (les points de Ω sont dits génériques, ceux de $S = V \setminus \Omega$ sont dits singuliers). Un invariant relatif P de (G,ρ,V) est une fraction rationnelle sur V qui vérifie :

$$\forall x \in V, \quad \forall g \in G, \quad P(gx) = \chi(g)P(x),$$

où χ est un caractère rationnel de G .

On introduit la notion importante d'espace préhomogène régulier, on étudie la cas particulier important où le groupe G est réductif, et dans ce cas on introduit la fonction b (parfois appelée polynôme de Bernstein-Sato de l'invariant relatif P). Le chapitre 2 se termine par une longue liste de trente exemples qui constitue en fait la classification par Sato et Kimura des PV irréductibles réguliers et réduits. Cette

énumération un peu aride, et nécessitant de connaître la théorie des poids dominants, peut être laissée de coté lors d'une première lecture.

Le chapitre 3 contient les préliminaires analytiques nécessaires dans la suite. On y parle de mesure relativement invariante sur un espace homogène, de distributions tempérées, de formes différentielles. L'auteur donne aussi la démonstration d'un théorème d'Harish-Chandra (dû aussi à Laurent Schwartz) sur l'existence de moyennes sur les fibres d'une application submersive.

Le chapitre 4 entre dans le vif du sujet avec la démonstration de ce que Kimura appelle le théorème fondamental. Les hypothèses sont les suivantes : (G, ρ, V) est un PV tel que le lieu singulier S est une hypersurface irréductible d'équation $P = 0$, qui de plus est défini sur $\mathbb{R}$. Sous ces hypothèses, le triplet dual (G, ρ^*, V^*) correspondant à la représentation contragrédiente est aussi un PV vérifiant les mêmes hypothèses avec un lieu singulier définit par un polynôme irréductible P^*. On désigne par $G_{\mathbb{R}}$ le groupe des points réels de G et par $V_{\mathbb{R}}$ (resp. $V^*_{\mathbb{R}}$) l'espace vectoriel réel des points réels de V (resp. V^*). On désigne par d le degré commun des polynômes P et P^* et par n la dimension de $V_{\mathbb{R}}$ et $V^*_{\mathbb{R}}$. Les hypothèses font que le groupe $G_{\mathbb{R}}$ (je n'entre pas dans les détails de connexité) possède ℓ orbites ouvertes $\Omega_1, \ldots, \Omega_\ell$ dans $V_{\mathbb{R}}$ et aussi ℓ orbites ouvertes $\Omega^*_1, \ldots, \Omega^*_\ell$ dans $V^*_{\mathbb{R}}$. Pour $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ et $g \in \mathcal{S}(V^*_{\mathbb{R}})$ on définit alors les fonctions zêta locales par

$$Z_i(f,s) = \int_{\Omega_i} f(x)|P(x)|^s dx \text{ et } Z^*_i(g,s) = \int_{\Omega^*_i} g(y)|P^*(y)|^s dy. \tag{10}$$

Dans l'exemple de base on prend $(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ comme forme réelle de $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ et à peu de choses près les fonctions ci-dessus généralisent les fonctions zêta locales de (1). Le théorème fondamental dit alors que ces fonctions (définies par des intégrales convergentes pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$) se prolongent en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$Z^*_i(\hat{f}, s - \frac{n}{d}) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij}(s) Z_j(f, -s) \tag{11}$$

où les γ_{ij} sont des fonctions méromorphes (en général inconnues) et où naturellement la transformée $\hat{f}$ de f est une fonction de Schwartz sur $V^*_{\mathbb{R}}$. Cette équation fonctionnelle généralise (4), mais ici le « trick » (3) de Tate ne fonctionne plus : il n'y a plus de domaine commun de convergence entre les membres de droite et de gauche de l'équation fonctionnelle, d'où la nécessité d'une démonstration plus compliquée. Le chapitre 4 contient aussi plusieurs exemples, dont la transformée de Mellin décrite au début de ce texte, et le cas des groupes « orthogonaux » $O(p,q) \times \mathbb{R}^*_+$ opérant sur $\mathbb{R}^{p+q}$, pour lesquels l'invariant relatif P est une forme quadratique de signature (p,q).

Le chapitre 5 contient le coeur de la théorie : les fonctions zêta généralisant celle de Riemann. On suppose de plus ici que le triplet (G, ρ, V) est défini sur $\mathbb{Q}$ et on se donne un réseau L dans $V_{\mathbb{R}}$ ainsi que le réseau dual L^* dans $V^*_{\mathbb{R}}$. On considère le sous-groupe discret $\Gamma \subset G_{\mathbb{R}}$ des points du groupe stabilisant L (encore une fois je ne donne ici qu'une description grossière, dans les faits les questions de connexité sont très importantes). Pour $i = 1, \ldots, \ell$ on définit alors les fonctions zêta comme étant les séries de Dirichlet

$$\zeta_i(L,s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash (L \cap \Omega_i)} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \quad \zeta^*_i(L^*,s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash (L^* \cap \Omega^*_i)} \frac{\mu^*(x)}{|P^*(x)|^s} \tag{12}$$

où μ et μ^* sont des « densités » qu'il serait trop long de détailler ici. La convergence de ces séries pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, sous certaines conditions, est un problème important de la théorie. Kimura y consacre le chapitre suivant. Le résultat central du chapitre,

et du livre, dit alors que ces fonctions zêta se prolongent méromorphiquement à $\mathbb{C}$ et vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\zeta_i^*(L^*, \frac{n}{d} - s) = \mathrm{vol}(L) \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_{ji}(s)\zeta_j(L, s). \tag{13}$$

Ceci généralise bien sûr l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann (voir (9)). Ce qui est frappant c'est que la démonstration de Sato et Shintani détaillée dans ce livre suit le même plan que celle pour le cas classique rappelée au début de ce rapport. On définit d'abord une fonction $\zeta(f, s)$ analogue à (5), et on prouve que

$$\zeta(f, s) = \sum_{i=1}^{\ell} \zeta_i(s, L)Z_i(f, s - \frac{n}{d}). \tag{14}$$

Ceci est bien sûr à rapprocher de (6). Le passage de (14) à (13) est alors obtenu en utilisant la formule de Poisson, via une étape intermédiaire analogue à (7) où les termes $f(0)$ et $\hat{f}(0)$ sont remplacés par des sommations sur les points singuliers des réseaux L et L^*.

Le chapitre 6 traite de la convergence pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ des fonctions zêta définies en (12). Ceci est un résultat délicat qui nécessite une excursion p-adique. Dans ce chapitre est aussi définie la fonction zêta additive (adélique) qui est au coeur du travail fondamental de H. Saito prouvant la convergence des fonctions zêta de type (12) pour une classe très large de PV. Ces resultats ne sont qu'évoqués dans ce livre.

Le chapitre 7 donne un aperçu, la plupart du temps sans démonstrations, des résultats de classification des espaces préhomogènes. On y définit notamment les « castling classes » des PV ainsi que leur unique représentant « réduit ». Par ailleurs (mais aussi par nécessité) ce chapitre contient aussi un résumé de la classification des algèbres de Lie simples et de la théorie des représentations de dimension finie de ces algèbres.

Ce livre me semble réellement intéressant car il donne un panorama d'ensemble de ce que j'appellerais la théorie classique des espaces préhomogènes et de leurs fonctions zêta à une variable à un mathématicien désireux de la découvrir. L'auteur fait notamment le point sur les questions de convergence des fonctions zêta, qui est une question difficile et qui est passée par des stades de généralisations successives. Il n'aborde pas du tout ou peu, mais ce n'est pas un reproche, les travaux de F. Sato sur les fonctions zêta de plusieurs variables et d'autre développements comme par exemple l'aspect « parabolique » de la plupart des exemples d'espaces préhomogènes, les liens avec les représentations des groupes, certains résultats arithmétiques (Y. Hironaka, F. Sato, A. Yukie), ainsi que l'utilisation de la micro-analyse pour le calcul des polynômes de Bernstein-Sato (M. Sato, Kashiwara, Kimura, Oshima). Cependant la bibliographie est très complète, même sur ces points non abordés, et elle est assortie de commentaires qui seront plus qu'utiles au lecteur vraiment intéressé. Cet ouvrage a sa place dans une bonne bibliothèque de département de mathématiques.

Hubert Rubenthaler, Université Louis Pasteur, Strasbourg

$\mathcal{D}$-modules and Microlocal Calculus
Masaki Kashiwara
Translations of Mathematical Monographs, Vol. **217**. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, 2003. 254 p. $ 49. ISBN : 0-8218-2766-9

Les éditions de l'AMS publient en 2003 un ouvrage de Masaki Kashiwara qui fut d'abord édité en japonais en 2000. Au passage, l'auteur en a changé le titre.

Le sujet principal du livre est l'étude des propriétés de la *b-fonction* (que d'autres auteurs appellent *polynôme de Bernstein-Sato*) qu'on associe à une fonction holomorphe f.

Ce polynôme est utile dans la situation suivante, qui a inspiré Mikio Sato : si f est une fonction analytique réelle sur $\mathbf{R}^n$, la fonction f_+^s, définie par

$$f(x)_+^s = f(x)^s \text{ si } f(x) > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

est alors continue en x et holomorphe en s sur le demi-plan $\Re(s) > 0$.

Si on dispose d'une équation fonctionnelle

$$P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$$

où P est un opérateur différentiel en x à coefficients dépendant de x et s, et b un polynôme en s non nul, alors, par intégration par parties, on peut prolonger f_+^s en une distribution en x, méromorphe en s, dont les pôles sont contenus dans l'ensemble des translatés par les entiers négatifs des racines de b.

L'ensemble des polynômes $b \in \mathbf{C}[s]$ pour lesquels il existe une telle équation fonctionnelle est un idéal non trivial de $\mathbf{C}[s]$: c'est un des résultats principaux de la théorie. La b-fonction (ou polynôme de Bernstein-Sato) de f est le générateur unitaire de cet idéal.

L'exemple le plus simple est obtenu pour $f(x) = x$, avec l'équation fonctionnelle

$$\frac{d}{dx}x^{s+1} = (s+1)x^s$$

La distribution x_+^s a des pôles aux entiers strictement négatifs et son résidu en -1 est égal (toujours à cause de l'équation fonctionnelle) à la dérivée de x_+^0 (fonction de Heavyside), *i.e.* à la distribution de Dirac δ en $x = 0$. Le résidu en $-1-n$ est égal à $\frac{(-1)^n}{n\,!}\delta^{(n)}$.

Pour établir l'existence de la b-fonction d'une fonction holomorphe f, il est nécessaire de développer la théorie des (faisceaux de) modules sur le (faisceau d') anneaux des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ sur une variété complexe X. C'est ce qui est fait dans les cinq premiers chapitres du livre : propriétés algébriques, filtration par l'ordre de dérivation et variété caractéristique, propriétés (co)homologiques et fonctorielles, modules holonomes et *modules holonomes réguliers*. Ces chapitres constituent une introduction directe et remarquablement synthétique à cette théorie des $\mathcal{D}_X$-modules qui en a connu de plus laborieuses.

Une fois démontrée les deux résultats capitaux : existence de la b-fonction et rationalité de ses zéros (le lien avec la *monodromie* de f, étudié notamment par B. Malgrange n'est pas abordé ici), la deuxième partie du livre est consacrée au point de vue *microlocal* sur les systèmes différentiels. On y définit d'abord le faisceau $\hat{\mathcal{E}}_X$ des opérateurs microdifférentiels formels (faisceau d'anneaux sur le fibré cotangent à X). Une propriété essentielle de ce faisceau est que pour tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ on a égalité entre la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ et le support de l'extension $\hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$.

Le théorème de Gabber sur l'involutivité du support d'un $\hat{\mathcal{E}}_X$-module cohérent est important puisqu'il s'applique aux variétés caractéristiques des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents et montre par exemple le caractère lagrangien des variétés caractéristiques des $\mathcal{D}_X$-modules artiniens. On en trouvera une preuve dans le livre.

L'équation fonctionnelle qui définit la b-fonction montre qu'elle est le polynôme minimal de la multiplication par s agissant sur le conoyau de l'opérateur t induit par le décalage $s \longmapsto s+1$ sur le module $\mathcal{D}_X[s]f^s$.

De même, la multiplication par s agit sur le quotient analogue après microlocalisation (on remplace $\mathcal{D}_X[s]f^s$ par $\hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X[s]f^s$). Kashiwara définit donc la b-fonction microlocale au point générique d'une variété lagrangienne Λ. Dans certains

cas particuliers, il montre que la b-fonction de f peut être reconstituée à partir des b-fonctions microlocales calculées aux points génériques d'un nombre fini de variétés lagrangiennes associées à f. Il traite ensuite des exemples où f est une fonction sur un espace préhomogène, notamment celui de la fonction *déterminant* sur l'espace des matrices $M_n(\mathbf{C})$. Le polynôme de Bernstein-Sato du déterminant est le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(s+\nu)$.

Au total, les 250 pages de ce livre remplissent le contrat annoncé : une présentation du polynôme de Bernstein-Sato depuis les résultats clés de la théorie des $\mathcal{D}_X$-modules jusqu'à des exemples non triviaux calculés explicitement.

Un regret : on attend d'un tel ouvrage une bibliographie complète avec de nombreux renvois dans le texte. Celle qui figure à la fin du texte est des plus sommaires et les renvois fort rares. Une restriction qui n'empêche pas de recommander chaudement ce texte à qui — étudiant de troisième cycle, chercheur — souhaite un exposé direct et autonome du domaine.

Michel Merle, Université de Nice

Voyages aux confins de la démocratie (un mathématicien chez les politiques)

Michel Zisman

L'Harmattan, ouverture philosophique, 2003. 304 p. 24,4€. ISBN : 2-7475-4035-9

Michel Zisman a le sens du dévouement pour la collectivité. Il l'a exercé pour le plus grand bénéfice de la Société Mathématique de France : ayant été chargé de mission pour les affaires juridiques après avoir été membre du bureau, il la connaît mieux que personne, et ses avis se sont toujours révélés pertinents.

Il s'est aussi engagé politiquement en étant pendant 12 ans adjoint au Maire d'Auxerre, chargé des finances et de la culture. La fréquentation de cet univers ne lui a pas fait perdre sa rigueur, mais lui a donné l'occasion d'exercer sa perspicacité. Il nous livre quelques réflexions que suscite son regard lucide sur ce monde de la politique. Cela permet au lecteur de découvrir un univers surprenant. Dans leur vie publique les politiques ont un comportement dont la logique ne saute pas toujours aux yeux.

La France compte environ 500 000 élus locaux, nous dit-il. Chacun d'eux tirerait un bénéfice certain de la lecture de ce livre. L'auteur n'utilise pas la langue de bois, mais il en parle — il en fait même l'éloge.

Un mot revient souvent sans ce livre : mépris. Celui de l'élu pour ses électeurs, celui d'un scientifique (qui allait devenir Ministre de l'Éducation Nationale) pour les personnalités politiques par exemple.

Ce texte contient de nombreux enseignements, notamment sur ce qu'est et ce que devrait être la démocratie. Il remet en place certains concepts — par exemple connaissez-vous le sens des mots « démocratiser l'enseignement » ?

La leçon n'est pas austère, grâce à de multiples anecdotes qui émaillent l'ouvrage. La distance entre deux êtres humains (en termes de poignées de mains échangées — notion qu'il attribue à Laurent Schwartz, une variante du nombre d'Erdös) met l'auteur à une distance au plus 3 de personnages comme Tito, Hitler ou Staline. Vous saurez aussi comment Georges Poitou a obtenu en 1968 les moyens lui permettant de recruter des jardiniers chargés d'entretenir le parc de la Faculté des Sciences d'Orsay dont il était alors le doyen.

Ce livre contient de nombreuses illustrations de comportements d'élus qui traduisent des dysfonctionnements du système. Néanmoins ce n'est pas un constat

d'échec qu'en tire Michel Zisman, au contraire, il conclut sur une vision plutôt optimiste de l'évolution de notre système politique.

Michel Waldschmidt, Université Pierre-et-Marie-Curie

La recherche mathématique en Afrique. Une nécessité pour le développement ?

Claude Lobry (préface de Jean-Pierre Kahane)
L'Harmattan, 2003. 156 p. 14€. ISBN : 2-7475-4122-3

Développer la recherche mathématique en Afrique est une nécessité vitale pour ce continent. À l'appui de cette thèse, l'auteur apporte un témoignage provenant de sa connaissance personnelle à la fois des mathématiques et de l'Afrique. Il a acquis son expérience du terrain d'abord comme Directeur du cimpa, puis par l'organisation d'activités scientifiques franco-africaines impliquant des mathématiques à la pointe de la recherche.

Élever le niveau d'éducation de tous les habitants de notre planète est une des responsabilités des scientifiques des pays les plus développés. Jusqu'où doit se porter cet effort ? Donner à chacun la chance d'apprendre à lire, à écrire et à compter est clairement une exigence minimale. Est-il vraiment indispensable, et même possible, de créer et de développer des équipes de recherche de niveau international concernant des domaines abstraits dans des pays où le niveau de vie est très bas ? Ne vaudrait-il pas mieux se restreindre à des thèmes dont les applications pour le développement économique des pays concernés sont plus immédiates ? Les ressources étant limitées, ne conviendrait-il pas de les consacrer aux questions de première urgence, et laisser le luxe de la recherche de haut niveau, sans conséquence pratique prévisible à court terme, aux pays qui en ont les moyens ?

Ces questions sont pertinentes et l'auteur ne les élude pas. Il est de notre devoir de pays ex-colonisateur, dit-il, d'aider les pays africains à acquérir la maîtrise des sciences et des techniques. Même s'il argumente son propos à partir de son expérience à la fois des mathématiques et de l'Afrique, son raisonnement s'applique aussi à d'autres domaines scientifiques, plus généralement à toutes les sciences de base, et à d'autres pays en développement en dehors de l'Afrique.

L'importance pour les pays pauvres de maîtriser les questions de modélisation des écosystèmes ne saurait être mise en doute. À partir de cet exemple Claude Lobry explique, en termes compréhensibles par tous, la nécessité pour ces pays de participer à des travaux de recherche mathématique qui sont actuellement développés par différentes équipes internationales. Laisser les pays en développement à l'écart de ces recherches, c'est les maintenir en état de dépendance. Limiter le niveau des centres de formation de ces pays, ne leur permettre de former que des ingénieurs ou des enseignants du secondaire sans leur donner les moyens de développer des structures de recherche, c'est leur refuser le droit de participer pleinement à des prises de décision les concernant. Les pays en développement ont un rôle à jouer dans la communauté mondiale qui produit des résultats scientifiques originaux, ils ont leur place au sein des réseaux internationaux de chercheurs qui sont amenés à donner des avis d'experts.

Des réalisations interafricaines sont possibles et peuvent donner de remarquables résultats. Imagine-t-on un cnu au niveau européen qui serait chargé des inscriptions sur les listes d'aptitude ? C'est pourtant ce qui se passe depuis 1968 avec un certain nombre de pays d'Afrique grâce aux comités consultatifs inter africains (cci) du Conseil africain et malgache pour l'enseignement supérieur (cames), qui contribue à l'harmonisation des systèmes d'enseignement supérieur dans les universités africaines.

Claude Lobry évalue le programme qu'il préconise en le comparant avec ce qui est financé par les organismes spécialisés dans la coopération internationale, comme

l'IRD et le CIRAD. Ces organismes n'attribuent presque rien pour les sciences de base ; pourtant le montant qui est estimé nécessaire par l'auteur est très faible comparé au budget de la coopération. La qualité de ce qui est réalisé avec des moyens dérisoires (notamment par le CIMPA) est un des meilleurs arguments pour plaider à une meilleure répartition des crédits destinés au développement durable. L'auteur cite les exemples de l'ISP en Suède et de l'ICTP en Italie.

Parer au plus pressé pour améliorer la situation des pays les plus pauvres de la planète est clairement une urgence. Mais on sait bien en mathématiques que les grands progrès apparaissent souvent quand on s'attaque à un problème plus général. Créer une infrastructure scientifique de haut niveau en Afrique est un objectif ambitieux, mais, comme le dit Jean-Pierre Kahane dans sa préface, *l'urgence se relie à une vision à long terme.*

Sigles et URL.

CIMPA : Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (Nice) — `http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/CIMPA/`

ICTP : International Center for Theoretical Physics (Centre Abdu Salam, Trieste) — `http://www.ictp.trieste.it`

ISP : Institute Science Programme (Uppsala Suède) — `http://www.isp.uu.se/`

AIMS : African Institute for Mathematical Sciences (Le Cap, Afrique du Sud) — `http://www.aimsforafrica.org`

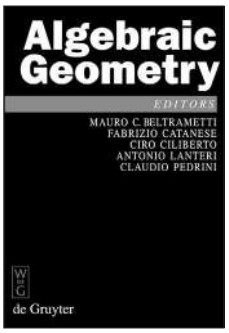
IRD : Institut de recherche pour le développement (ex-Orstom) — `http://www.ird.fr/`

CIRAD : Centre de coopération internationale en recherche agronomique pour le développement — `http://www.cirad.fr/`

CAMES : Conseil africain et malgache pour l'enseignement supérieur — `http://www.refer.sn/article372.html` — `http://www.refer.mg/boi/cames.htm`

L'Harmattan — `http://www.editions-harmattan.fr/`

Michel Waldschmidt, Université Pierre-et-Marie-Curie



Algebraic Geometry

A Volume in Memory of Paulo Francia

Ed. by M. C. Beltrametti, F. Catanese, C. Ciliberto, A. Lanteri, C. Pedrini

2002. X, 356 pages. Hardcover.
€ 148,– [D] / sFr 237,– / for USA, Mexico and Canada US$ 148.95 • ISBN 3-11-017180-5

de Gruyter *Mathematics*

The volume consists of invited refereed research papers. The contributions cover a wide spectrum in algebraic geometry, from motives theory to numerical algebraic geometry and are mainly focused on higher dimensional varieties and Minimal Model Program and surfaces of general type. A part of the articles grew out a Conference in memory of Paolo Francia (1951–2000) held in Geneva in September 2001 with about 70 participants.

Table of Contents

Lucian Bădescu and *Michael Schneider:* Formal functions, connectivity and homogeneous spaces · *Luca Barbieri-Viale:* On algebraic 1-motives related to Hodge cy-cles · *Arnaud Beauville:* The Szpiro inequality for higher genus fibrations · *Giuseppe Borrelli:* On regular surfaces of general type with $p_g = 2$ and non-birational bicanonical map · *Fabrizio Catanese* and *Frank-Olaf Schreyer:* Canonical projections of irregular algebraic surfaces · *Ciro Ciliberto* and *Margarida Mendes Lopes:* On surfaces with $p_g = 2$, $q = 1$ and non-birational bicanonical map · *Alberto Conte, Marina Marchisio* and *Jacob Murre:* On unirationality of double covers of fixed degree and large dimension; a method of Ciliberto · *Alessio Corti* and *Miles Red:* Weighted Grassmannians · *Tommaso de Fernex* and *Lawrence Ein:* Resolution of indeterminacy of pairs · *Vladimir Guletskiĭ* and *Claudio Pedrini:* The Chow motive of the Godeaux surface · *Yujiro Kawamata:* Francia's flip and derived categories · *Kazuhiro Konno:* On the quadric hull of a canonical surface · *Adrian Langer:* A note on Bogomolov's instability and Higgs sheaves · *Antonio Lanteri* and *Raquel Mallavibarrena:* Jets of anti-multicanonical bundles on Del Pezzo surfaces of degree ≤ 2 · *Margarida Mendes Lopes* and *Rita Pardini:* A survey on the bicanonical map of surfaces with $p_g = 0$ and $K^2 \geq 2$ · *Francesco Russo:* The antibirational involutions of the plane and the classification of real del Pezzo surfaces · *Vyacheslav.V. Shokurov:* Letters of a birationalist IV. Geometry of log flips · *Andrew J. Sommese, Jean Verschelde* and *Charles Wampler:* A method for tracking singular paths with application to the numerical irreducible decomposition



Please place your order with your bookseller or order directly from us. Price is subject to change.

www.deGruyter.com · Newsletter: www.deGruyter.de/Newsletter

WALTER DE GRUYTER GMBH & CO. KG · Genthiner Straße 13 · 10785 Berlin
Phone +49-(0)30-2 60 05-0 · Fax +49-(0)30-2 60 05-251 · Email wdg-info@deGruyter.de