

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Hommage à Edmond Combet

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 7-13

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__7_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Hommage à Edmond Combet

par

André LICHNEROWICZ
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

Nous voici donc réunis ici, aujourd'hui, dans ce Département de Mathématique qu'il a tant aimé et animé, pour rendre à Edmond COMBET l'hommage qui lui est dû.

Exposée dans une vingtaine de publications denses et profondes, son oeuvre a toujours été à l'avant-garde des progrès dans les champs auxquels il avait choisi de s'intéresser. Il a été l'un des premiers à œuvrer systématiquement dans ce qu'on nomme désormais l'Analyse Globale sur les variétés, et ce pour des raisons venues essentiellement de la Physique Mathématique. Il est un analyste profond, un excellent géomètre et s'est toujours passionné pour la Physique Quantique. Quelle que soit notre volonté commune à Bourguignon et à moi-même, il nous sera impossible, faute d'une compétence étendue à tout le champ labouré par Combet, faute de temps aussi, d'analyser exhaustivement une oeuvre pleine à la fois de magnificence et d'humilité. Je me propose ici, avec partialité, d'évoquer seulement quelques-uns des articles de Combet qui m'ont le plus intéressé.

C'est en 1960 que j'ai eu le privilège de connaître Edmond Combet. Malgré sa jeunesse, il révélait déjà une personnalité humaine entièrement formée et fort attachante. Quant à la personnalité scientifique, elle devait se développer à une vitesse foudroyante. A l'époque, je m'intéressais à la quantification des champs physiques sur un espace-temps courbe et j'exposais au Collège de France ma problématique d'alors, et les résultats de certaines de mes recherches, ce qui eut le don d'intéresser Combet. Je me bornerai à esquisser cette problématique pour un champ scalaire, parce qu'elle est étroitement liée aux premiers grands travaux de Combet des années 1961-1965.

Prenons pour espace-temps une variété lorentzienne V_4 globalement hyperbolique ; un champ scalaire u vérifie l'équation de Klein-Gordon :

$$(1) \quad Lu \equiv (\Delta - m)u = 0$$

où Δ est le laplacien de G. de Rham sur les scalaires ; L est self-adjoint en un sens évident. A chaque point x de V_4 sont associées deux solutions élémentaires en x' (au sens de Schwartz) *uniques* $G^\pm(x, x')$ à supports dans le demi-conoïde caractéristique futur (resp. passé) de sommet x . La différence $G(x, x') = G^+(x, x') - G^-(x, x')$ est solution de l'équation homogène définie par L et est antisymétrique en (x, x') parce que L est self-adjoint. On peut montrer que G joue un rôle essentiel pour décrire par composition de Volterra les solutions du problème de Cauchy. J'ai nommé G le *propagateur antisymétrique de L* parce qu'il est l'exacte généralisation sur un espace hyperbolique courbe du célèbre propagateur D de Jordan-Pauli du cas plat, défini en termes de transformation de Fourier. Si u est à valeurs opératorielles relativement à un espace de Hilbert, c'est $(1/i)G(x, x')I_d$ qui donne le commutateur $[u(x), u(x')]$.

La définition d'une généralisation du propagateur D_1 est beaucoup plus délicate. Ce doit être une solution $G_1(x, x')$ de l'équation homogène définie par L, symétrique en x, x' qui, outre une condition de positivité de l'énergie, vérifie

$$(2) \quad G(x, x') = \int_{\sigma} [G_1(x, y)\partial_{\lambda}G_1(x', y) - G_1(x', y)\partial_{\lambda}G_1(x, y)]d\sigma^{\lambda}(y)$$

où ce produit de Volterra est pris sur une hypersurface spatiale σ .

Le noyau G_1 définit une application $J : u \rightarrow u_1$ dans l'espace des solutions de (1) avec

$$u_1(x') = \int_{\sigma} [u(y)\partial_{\lambda}G_1(x', y) - G_1(x', y)\partial_{\lambda}u(y)]d\sigma^{\lambda}(y)$$

Si l'on pose pour 2 solutions de (1)

$$b(u, v) = \int_{\sigma} [u(y)\partial_{\lambda}v(y) - \partial_{\lambda}u(y)v(y)]d\sigma^{\lambda}(y)$$

on doit avoir $b(u, u_1) \geq 0$. S'il en est ainsi $G \pm iG_1$ sont les noyaux définissant pour le champ les opérateurs de création-annihilation.

Un fait remarquable concernant les solutions élémentaires et G : ceci s'étend aux p-formes et à leur laplacien de G. de Rham. Alors que dans le cas plat seul G (et G_1) importe, on obtient pour les p-formes des propagateurs antisymétriques $G_{(p)}$ qui sont

reliées par de remarquables relations différentielles $d_x G_{(p)}(x, x') = \delta_x G_{(p+1)}(x, x')$. Ces relations sont précisément celles qui permettent d'évaluer rigoureusement les commutateurs de formes à valeurs opératorielles. On a ainsi pour les mésons scalaires et vectoriels, par le champ électromagnétique des commutateurs rigoureux sur un espace-temps courbe.

Telle est la problématique générale qui conduit à beaucoup de questions difficiles d'analyse. Différents auteurs dont Combet ont réussi à établir sous des hypothèses générales que G_1 existe.

En collaboration avec Moreno, il a montré en 1975 que dans le cas stationnaire G_1 existe et est unique, moyennant une condition utilisant la symétrie. Mais surprise, en l'absence de symétrie, G_1 n'est pas unique et on est conduit à des quantifications distinctes ayant entre elles des liens subtils, encore insuffisamment approfondis. L'existence de cette situation (stationnaire et non stationnaire) est établie pour les spins 0, 1/2, 1.

Le cas du champ gravitationnel est spécialement délicat. Les équations d'Einstein étant non linéaires, j'ai été amené à distinguer un champ gravitationnel macroscopique les vérifiant et constituant le background de l'espace-temps, et un champ microscopique, variation ou fluctuation du champ ordinaire décrit par un tenseur symétrique h d'ordre 2 soumis à des équations de champ obtenues par variation du tenseur de Ricci. C'est cette variation qui fait apparaître pour h un laplacien naturel sur les tenseurs symétriques d'ordre 2, laplacien qui est devenu classique. Il suffit d'une condition sur la valeur d'estimation de h pour que la cohérence soit retrouvée.

C'est à cet aspect des choses que Combet s'intéresse d'abord. Dans une série de trois notes (1961-1962), il étudie la possibilité de quantification simultanée des champs gravitationnels, électromagnétiques et pouvoir diélectrique (scalaire) en interactions sous leur forme variée, à partir d'une représentation de V_4 comme espace-quotient dans l'esprit de la théorie de Kaluza-Klein. Il obtient ainsi des commutateurs intéressants qui ont refait surface vers 1975 chez les physiciens théoriciens (en particulier Ashtekar).

Mais déjà il a entrepris autre chose de plus ambitieux : mettre en œuvre la construction des solutions élémentaires scalaires, tensorielles et spinorielles du laplacien correspondant Δ d'une variété pseudoriemannienne analytique, hyperbolique ou ultrahyperbolique, à partir d'un transfert sur la variété, des distributions $(P \pm i0)^\lambda$ de Guelfand-Chilov (le premier volume de leur théorie des distributions venait de paraître en Français) où λ est complexe et il est amené à poser $(P \pm i0)^\lambda = P_\pm^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_\mp^\lambda$. Dans le cas

scalaire, il obtient ainsi, au prix d'un gros travail, des expressions explicites des solutions élémentaires au voisinage d'un point x' fixé en termes des distributions P_+^λ et P_-^λ ayant un sens géométrique, dans les cas hyperbolique et ultrahyperbolique (signature (p,q) ; $p>1, q>1$). On doit noter que si l'on connaissait, grâce à Madame Choquet, l'existence de solutions élémentaires dans le cas ultrahyperbolique, on doit à Combet la mise en évidence de solutions élémentaires privilégiées (il n'y a pas unicité ici) qui par exemple demeureront invariantes sous l'action éventuelle d'un groupe connexe d'isométries. Combet montre comment ses résultats s'étendent à l'opérateur $(\Delta + B\rho\partial_\rho + C)$, où B est un vecteur, C un scalaire et il les raccorde avec ce qui était connu dans le cas hyperbolique normal. Dans son optique, il met en particulier en évidence, à partir de la partie imaginaire des solutions élémentaires, une solution invariante par symétrie de l'équation homogène susceptible de donner un propagateur G_1 (ici T_3 dans ses notations), solution qui sera au point de départ de ses travaux sur G_1 .

Ces résultats sont ensuite étendus aux cas tensoriel et spinoriel et entièrement explicités par les spins 1 et 1/2. Ce gros travail dont les formules ont été fort utiles à d'autres chercheurs (par exemple Moreno, Chilov, moi-même) constitue la thèse de Combet soutenue en 1963 et parue dans le Mémorial des Sciences Mathématiques en 1965. Je puis personnellement porter témoignage de l'estime que Guelfand portait à ce travail. Cette thèse met en évidence la puissance de Combet comme analyste. Il montre qu'il est capable de maîtriser de haut des choses difficiles mais qu'il sait ne pas se noyer dans les détails ; son ambition est de fournir des formes explicites de nature aussi géométriques que possible.

Dans la même lignée, Combet donne en 1970 un long et remarquable article fort connu dans les Annales de l'Ecole Normale, article intitulé *Paramétrix et invariants sur les variétés compactes*. Il s'agit cette fois de géométrie proprement riemannienne et des sections d'un fibré vectoriel ξ , muni d'une dérivation covariante L, ayant pour base une variété riemannienne compacte (M,g) de classe C^∞ . L'opérateur différentiel Δ sur les sections de ξ est construit à partir de la métrique et de la dérivation L et généralise le laplacien usuel ; il est elliptique.

ξ' étant l'adjoint géométrique de ξ , on considère le produit tensoriel $\xi \otimes \xi'$ des fibrés ξ, ξ' basé sur $M \times M$. Une paramétrix P de Δ est un noyau très régulier, élément de $\mathcal{D}'(\xi \otimes \xi' | V)$ où V est un voisinage de la diagonale $M \times M$, pour lequel

$$\Delta P(x,y) = \delta(x,y) + Q(x,y)$$

Q étant une fonction C^∞ sur V . Une telle paramétrix peut certes être obtenue à partir de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Mais Combet observe qu'il est possible de s'en passer et d'obtenir une paramétrix de manière plus géométrique en en cherchant un développement selon les puissances paires de la distance géodésique de (M, g) . Cette méthode est en fait profondément semblable à celle de sa thèse et elle pourrait s'appliquer à une métrique de signature (p, q) convenable. La construction fait apparaître ici une suite de noyaux $\{u_j\}$ de classe C^∞ dont certains sont apparus dans des cas particuliers (voir par exemple les travaux de Berger sur le spectre des variétés riemanniennes compactes).

Ces noyaux $\{u_j\}$ interviennent dans les paramétrix du problème de Cauchy relatif à l'opérateur de la chaleur $(\partial/\partial t + \Delta)$. Une bonne théorie venait alors d'apparaître due à Kotaké ; elle établissait l'existence et l'unicité d'un noyau E - dit noyau de diffusion - relatif à cet opérateur. Soit Tr l'extension aux sections de $\xi \otimes \xi'$ du crochet qui, à une section de ξ et à une section de ξ' , associe une mesure régulière sur M . Cette mesure permet d'aborder le problème suivant : que la suite $\{u_j\}$ nous apprend-elle sur la structure topologique de M ou ξ ? A partir du théorème de l'indice et d'une approche de Kotaké donnant une expression intégrale en termes des $Tr u_j$ des nombres de Lefschetz, on peut obtenir une formule générale qui, dans les cas particuliers du lagrangien sur les p -formes ou du lagrangien spinoriel, refournit des formules intégrales donnant $\chi(M)$ ou $\hat{A}(M)$. Malgré l'humilité avec laquelle il est rédigé, cet article est important, car il contient deux ou trois idées, neuves à l'époque, pour une approche relativement élémentaire, des idées qui nous aident à mieux comprendre et dominer la situation. C'est ce que constate Dieudonné qui fait sur cet article un rapport enthousiaste.

*

De 1974 à 1981 environ, Combet s'intéresse particulièrement aux intégrales exponentielles et à leurs applications, à leurs rapports avec la théorie des ondes, le contrôle optimal et la physique quantique. Ses recherches l'amènent à publier chez Springer un volume de Lecture Notes intitulé : *"Intégrales exponentielles. Développements asymptotiques, propriétés lagrangiennes"*. Je ne suis pas suffisamment compétent pour analyser vraiment le travail de Combet dans ce champ. Tout ce que je puis dire est qu'il fut fort apprécié des spécialistes et que, sur ce thème, Combet a été l'un des trois conférenciers français invités à l'une des grandes Réunions des Mathématiciens d'expression latine, par un comité scientifique international. Avec son approche de l'étude des singularités des distributions de Fourier à symboles homogènes, le travail a montré aux yeux de tous ses dons d'analyste original et profond.

J'en viens à la dernière période, une période durant laquelle nous nous sommes retrouvés en interaction. Vers 1978, le Collège de France prit une initiative : autoriser ses professeurs à faire une part de leur enseignement officiel (au plus le quart) hors de Paris. Combet alors à la tête du Département de Lyon entendit parler de cette initiative et m'invita à donner à Lyon un cycle de conférences analogue à ce qu'on pouvait faire au Collège. J'acceptais avec grand plaisir, pouvant retrouver ainsi, pour un temps, beaucoup de vieux amis. A ma demande, ce cycle ne fut pas une part de mon enseignement officiel côté Collège, mais le règlement nous permit, par accord entre nos deux maisons, d'éditer de belles affiches cosignées par l'Administrateur du Collège et le Président de l'Université de Lyon.

Ce cycle de six conférences sur des sujets choisis par Combet et étalé sur deux semaines fut à la fois un grand plaisir, mais aussi assez fatigant. L'auditoire était légitimement exigeant. J'y exposai essentiellement la théorie des déformations formelles des crochets de Poisson attachés à des variétés symplectiques et la notion de star-produit. Cette théorie motivée par la recherche d'une quantification invariante sur l'espace de phase avait été fondée et développée depuis 1977 par M. Flato et moi. Elle fournit une extension géométrique de la quantification de Weil-Wigner et en particulier du produit et du crochet de Moyal qui correspondent à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ muni de sa structure symplectique canonique.

Parmi les participants figuraient entre autres Braconnier, Ouzilou, Patissier. Tous firent des contributions remarquablement intéressantes dans la voie qui se trouvait ainsi dégagée. Il y eut en particulier de la part de Braconnier une approche purement algébrique. En 1982, en collaboration avec Patissier, Edmond Combet a donné une analyse des rapports existant entre ce qu'il nomme le calcul de Weyl tel qu'il a été récemment développé par Grossmann, Unterberger, Voros et peut-être essentiellement par Hörmander, et la théorie formelle des déformations qui a suscité des développements cohomologiques et des travaux d'analyse (Moreno, Kammerer, etc.). Nous savons ainsi depuis 1982 que, malgré les obstructions cohomologiques, il existe toujours sur une variété symplectique de dimension finie, des star-produits (M. de Wilde et Pierre Lecomte). Le problème est encore ouvert pour certaines variétés symplectiques de dimension infinie qui s'introduisent naturellement en théorie des champs. Sensibilisée par les réflexions remarquables du regretté Berezin, l'école russe avec Drinfeld et Manin a commencé à explorer le champ des généralisations des crochets de Poisson en termes de super-variétés particulières et de leurs déformations éventuelles. Omori vient de faire un excellent article. Ajouterai-je que la notion de star-produit est en profonde interaction avec certains aspects de la géométrie non commutative d'Alain Connes, sans que ni Connes, ni moi-même ayons encore eu le courage d'exposer clairement ces interactions !

Dans l'article cité, Combet réfléchit profondément sur les rapports entre le calcul de Weyl tel qu'il est vu par Hörmander en termes d'opérateurs pseudo-différentiels et l'analyse spectrale en termes de star-produits telle que nous l'avons esquissée en 1978 et perfectionnée partiellement depuis. L'approche par star-produit permet au moins d'envisager le cas de la quantification pour un espace de phase qui n'est pas nécessairement un fibré cotangent. La grande culture de Combet concernant les opérateurs pseudo-différentiels et la puissance de sa pensée auraient dû lui permettre maintenant, si la maladie ne l'avait pas frappé, de faire progresser de manière décisive la quantification par star-produit. C'était là l'une de ses intentions de travail.

*

On voit l'intérêt d'une telle oeuvre. Quant à l'homme, avec son dévouement, son âme de montagnard et son extraordinaire rayonnement humain, nous l'avons tous trop connu pour que j'y insiste. Dirai-je qu'avec sa modestie presque pathologique, son sens aigu des valeurs mathématiques et son goût pour les vrais problèmes, il a permis à beaucoup de mathématiciens d'aller plus loin et de s'accomplir. Il a été le meilleur exemple du leader malgré lui, toujours prêt à sourire, à écouter attentivement et à conseiller discrètement.

Il reste pour nous, je crois, le modèle de ce qu'on peut nommer un gentilhomme de la Science.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN PIERRE BOURGUIGNON

Hommage à Edmond Combet

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 15-18

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__15_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Hommage à Edmond Combet

par

Jean Pierre BOURGUIGNON
Professeur à l'Ecole Polytechnique

Madame, Monsieur, chers collègues,

C'est à vous témoigner le respect que j'éprouve pour l'œuvre d'Edmond Combet que je voudrais m'attacher ici. Les circonstances ne se prêtent évidemment pas à un exposé technique qui nécessiterait des incursions dans des domaines que les mathématiciens avaient pris la fâcheuse habitude d'étiqueter comme disjoints. L'itinéraire que j'ai choisi de vous faire suivre est étalonné par celles de mes rencontres avec Edmond Combet qui m'ont le plus marqué, et je sollicite votre indulgence pour cette approche un peu personnelle.

C'est lors d'un colloque d'Analyse Globale organisé en 1970 par le département de Lyon que l'apprenti géomètre riemannien que j'étais alors a pu parler avec l'auteur de "*Paramétries et invariants sur les variétés compactes*". Je venais de suivre un cours de troisième cycle professé par Marcel Berger sur l'utilisation des techniques de l'Analyse pour mieux pénétrer le monde des objets géométriques. Ce dernier avait appelé mon attention sur l'article d'Edmond Combet qui m'avait de suite séduit par la simplicité de son approche. Bien qu'ayant été aguerri aux manipulations analytiques par les cours et les conseils de Gustave Choquet, j'étais intimidé par la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Pouvoir disposer de preuves du Théorème de l'Indice d'Atiyah-Singer pour les invariants géométriques fondamentaux que sont la caractéristique d'Euler, la signature et le \hat{A} -genre dans un cadre géométrique comme le faisait Edmond Combet était pour moi plus rassurant. Comme on le sait aujourd'hui la méthode dite de "l'équation de la chaleur" qu'il employait dans cet article a connu depuis lors des succès extraordinaires, et le rôle

que ces invariants jouent dans notre compréhension présente du Théorème de l'Indice est tout simplement devenu central. Il est, je crois, opportun de rappeler ici qu'en ce temps pourtant si proche, il était presque nécessaire de s'excuser de s'intéresser à la Géométrie Différentielle. C'était en quelque sorte reconnaître son impuissance à maîtriser des mathématiques plus "substantielles". Pour clore mon évocation de notre première rencontre, je voudrais signaler que ce colloque de 1970 était placé sous le signe de l'utilisation de l'Analyse Globale pour traiter des questions géométriques ou issues de la Physique Théorique, au moment où était grande la tentation d'entraîner cette géométrie de dimension infinie nouvelle née sur la pente de la plus grande généralité. L'expérience nous a depuis enseigné que cette tentation d'imiter les voisins n'était pas le bon chemin à suivre et qu'au contraire ce lieu de rencontres de trois disciplines (Géométrie Différentielle, Analyse, Physique Mathématique) allait être le creuset de nombre d'idées-force des Mathématiques d'aujourd'hui.

Je ne peux manquer d'évoquer brièvement maintenant l'occasion qui a été donnée à l'ex-Lyonnais que je suis en 1971 par l'équipe de Géométrie de Lyon et Edmond Combet en particulier de voir ses premiers travaux mathématiques présentés dans un colloque national. L'insistance à faire s'exprimer les chercheurs débutants est une vertu que nous ne cultivons peut-être pas suffisamment, mais qui était naturelle pour Edmond Combet.

Dans les années 70, j'eus de nombreuses occasions de le rencontrer. L'une d'entre elles me reste particulièrement en mémoire : comme je m'étais plongé (pour préparer un exposé de seconde thèse) dans l'étude des opérateurs intégraux de Fourier, j'ai profité de ses remarques sur l'interprétation géométrique qu'il est possible de donner de constantes apparaissant dans certaines estimations fondamentales. J'écoutais donc "à distance" les exposés au séminaire de Géométrie de Lyon qu'il avait donnés cette année-là sur ce thème. Il est d'ailleurs saisissant d'apprécier (après coup) la justesse du choix des thèmes de ses exposés à ce même séminaire tout au long des années 70.

Mon évolution personnelle devait me rapprocher dans les années 80 d'une des préoccupations constantes d'Edmond Combet, à savoir donner un fondement mathématique rigoureux à un certain nombre de techniques d'utilisation fréquente en Physique Théorique. Là encore, il est frappant de voir combien le choix des sujets qu'il a abordés ne doit rien à la mode. L'ouvrage "*Intégrales exponentielles*" paru chez Springer en 1983 illustre bien sa démarche. Pour comprendre le comportement asymptotique à haute fréquence d'intégrales exponentielles, il est nécessaire de faire appel à des théories mathématiques diverses (théorie des singularités, théorie des variétés lagrangiennes, etc.)

qui ne sont pas a priori présentes dans le problème. Il est facile de voir que seuls les voisinages des points où la phase s'annule comptent. Le comportement de la phase près de ces singularités contient en fait la clef des exposants caractéristiques apparaissant dans le développement asymptotique de ces intégrales. Ces objets interviennent dans de nombreuses questions de Physique fondamentale liées aux phénomènes critiques comme les changements de phase ou de Mathématiques (Calcul des Variations, systèmes hamiltoniens, etc.). L'apport d'Edmond Combet dans ces questions est un travail minutieux de mise en correspondance de résultats souvent développés pour eux-mêmes ou dans un cadre plus restreint mais laissant de côté de nombreuses applications, à la Physique notamment.

La préparation du colloque "Elie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui" qui s'est tenu en juin 1984 à Lyon, une des villes où Elie Cartan avait enseigné, nous a donné de multiples occasions de contact puisque nous nous sommes retrouvés tous deux secrétaires de cette réunion internationale. Avec la modestie et le dévouement que nous lui avons tous connus, il a mis sur pied, avec l'aide sans faille du département et plus particulièrement de l'équipe de Géométrie toute entière, une organisation exemplaire que les centaines de collègues venus d'un peu partout en France et de beaucoup plus loin ont su apprécier à sa juste valeur. Je ne citerai à ce propos que deux témoignages de collègues étrangers parmi les plus éminents. Je me souviens de la satisfaction de Shing Shen Chern à la fin de cette semaine bien remplie de voir un projet qui lui tenait tant à cœur s'être déroulé aussi parfaitement. C'est aussi grâce aux efforts opiniâtres déployés par Edmond Combet et Jean Braconnier qu'Israel Moïssevitch Gelfand a pu rencontrer à cette occasion de nombreux amis mathématiciens, notamment retrouver quelques-uns de ses élèves qui avaient quitté leur pays (cette tâche serait heureusement plus simple aujourd'hui). Je peux témoigner de la gratitude que notre collègue éprouvait pour cette visite en France.

Pour revenir à des considérations plus directement mathématiques, je voudrais évoquer pour terminer les discussions que j'ai eues avec Edmond Combet à propos d'une des coqueluches des Mathématiques et de la Physique d'aujourd'hui : la supersymétrie. Toujours hypothétique d'un point de vue strictement expérimental, ce concept reste encore mystérieux en Mathématiques. Si son cadre algébrique a été en grande partie élucidé, ses aspects plus géométriques, et à un degré plus élevé encore analytiques, restent à un stade insuffisant de développement. Cette question est en fait inséparable d'une appréhension du contenu géométrique de la Mécanique Quantique par les mathématiciens, tâche à laquelle se sont (enfin!) attelés certains collègues comme Alain Connes pour n'en citer qu'un. Pour stimuler l'interaction indispensable sur ce thème entre mathématiciens et physiciens, il était nécessaire de créer des occasions de rencontre.

Jean Michel Bismut et moi nous sommes essayés à cet exercice en créant un séminaire ayant ce but, mais Edmond Combet nous avait précédés dans cette voie comme en témoigne le travail très systématique sur les articles d'Edward Witten qu'il a présentés au séminaire de Géométrie de Lyon. Un de nos regrets a été de ne pas avoir eu Edmond Combet parmi les hôtes de notre séminaire pour exposer son point de vue sur les formules de localisation. Dans sa dernière Note aux Compte-Rendus de l'Académie des Sciences et dans l'article "*Physique Quantique et formules de localisation*", il développe en effet une méthode "beaucoup plus élémentaire" (ce sont ses propres termes) pour obtenir les formules de localisation d'invariants topologiques des variétés différentielles. Pour traiter rigoureusement l'approche par "intégration fonctionnelle" d'Edward Witten, il est nécessaire de faire une escapade dans le calcul stochastique (en suivant par exemple Jean Michel Bismut). L'aspect supersymétrique a été à ce jour traité par de nombreux auteurs sans que sa structure mathématique n'ait, à mon avis, pris sa forme définitive. Sur ce point, Edmond Combet apportait sa contribution en démystifiant des développements quelquefois complaisamment ésotériques.

Le souci de la démonstration simple allié à une grande constance d'intérêts mathématiques hors des modes (en fait, comme j'espère l'avoir montré, les précédant) me semblent être les traits caractéristiques de l'œuvre d'Edmond Combet. Il a su mettre en œuvre au service de son métier sa connaissance profonde de la Physique fondamentale pour y puiser à la fois des problèmes d'intérêt durable et des techniques que le mathématicien ne peut accepter sans les modifier substantiellement pour satisfaire son exigence positive de rigueur qui est aussi sa raison d'être.

Au-delà même de ses contributions proprement mathématiques reste pour ceux qui ont eu le privilège de le connaître le souvenir d'un homme toujours chaleureux et attentif, qualités fondamentales que la pression d'une efficacité mal comprise a trop tendance à nous faire négliger. Pour cela aussi, sa mémoire peut nous servir d'exemple.

Je vous remercie de votre attention.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BÉRARD

Quelques théorèmes d'annulation et de majoration d'invariants géométriques

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 19-26

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__19_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES THÉORÈMES D'ANNULATION ET DE MAJORATION
D'INVARIANTS GÉOMÉTRIQUES

par *Pierre BÉRARD* (*)

INTRODUCTION
CADRE GÉNÉRAL
GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BOCHNER :
VARIÉTÉS COMPLÈTES
CAS DES VARIÉTÉS FERMÉES
RÉFÉRENCES

INTRODUCTION

En 1946, S. Bochner publiait le résultat suivant ([BO])

1. THÉORÈME. — Soit (M, g) une variété riemannienne fermée et soit Ric_g sa courbure de Ricci. Alors

- (i) Si $\text{Ric}_g \geq 0$ et s'il existe un point $x_0 \in M$ tel que $\text{Ric}_g(x_0) > 0$, le premier nombre de Betti $b_1(M)$ de M vérifie $b_1(M) = 0$;
- (ii) Si $\text{Ric}_g \geq 0$, on a $b_1(M) \leq \dim M$.

Ce théorème est optimal, comme le montre le cas d'un *tore plat*. La méthode développée par S. Bochner (connue maintenant sous le nom de *technique de Bochner*) a permis d'obtenir des théorèmes d'annulation d'autres invariants topologiques ou géométriques, en géométrie réelle comme en géométrie complexe (voir [WU] pour une synthèse).

L'énoncé ci-dessus soulève plusieurs questions naturelles.

2. QUESTIONS.

(a) Peut-on affaiblir l'hypothèse $\text{Ric}_g \geq 0$ (et éventuellement "il existe $x_0 \in M$ tel que $\text{Ric}_g(x_0) > 0$ ") en une hypothèse de *positivité en moyenne* et obtenir encore $b_1(M) \leq \dim M$ (éventuellement $b_1(M) = 0$)?

(*) Recherche effectuée en partie dans le cadre du contrat CEE n° SC1 - 0105 - C "GADGET", U.A. au CNRS 080188

(b) Peut-on majorer $b_1(M)$ sous une hypothèse convenable sur Ric_g et moyennant une *normalisation appropriée* de la métrique (la nécessité d'une telle normalisation, quand la courbure peut devenir négative, apparaît dès la dimension 2 avec le théorème de Gauss-Bonnet : voir [B-G])?

(c) Peut-on généraliser le théorème de Bochner aux variétés complètes non compactes?

Le but de cette conférence est de décrire, sans souci d'exhaustivité, quelques résultats récents qui donnent des éléments de réponse aux questions ci-dessus (voir [BD], [GA] et [RO] pour plus de détails).

CADRE GÉNÉRAL

La méthode de Bochner prend comme point de départ la formule de Bochner-Weitzenböck

$$(3) \quad \Delta_H \omega = \bar{\Delta} \omega + \text{Ric}(\omega^\#, \bullet)$$

où ω est une 1-forme différentielle, Δ_H le Laplacien de Hodge-de Rham sur les 1-formes, $\bar{\Delta}$ le Laplacien de Bochner $\bar{\Delta} = D^*D$ (composé de la dérivation covariante de Levi-Civita et de son adjoint formel) et $\omega^\#$ le champ de vecteurs associé à ω par la métrique g .

Prenant le produit scalaire de (3) avec ω et intégrant, on trouve (ω harmonique)

$$0 = \int_M \langle \omega, \Delta_H \omega \rangle dx = \int_M \{ |D\omega|^2 + \text{Ric}(\omega^\#, \omega^\#) \} dx .$$

Si $\text{Ric} \geq 0$, on en déduit que ω est parallèle et donc $b_1(M) \leq \dim T_x^* M = \dim M$; si de plus $\text{Ric}(x_0) > 0$, on en déduit que $\omega(x_0) = 0$ d'où $\omega = 0$. Ceci démontre le Théorème 1.

Pour obtenir des généralisations du théorème de Bochner, on est amené à introduire plus d'outils analytiques. La courbure de Ricci joue alors un double rôle : (1) celui de "potentiel" dans la formule de Bochner-Weitzenböck $\Delta_H = \bar{\Delta} + \text{Ric}$ et (2) celui de "paramètre de contrôle" de l'analyse globale sur (M, g) (voir l'inégalité isopérimétrique (12) ci-dessous).

Pour mieux comprendre ce deuxième rôle, nous nous plaçons dans un cadre plus général.

On considère maintenant une variété riemannienne complète (M, g) et E un *fibré vectoriel riemannien* au-dessus de M (i.e. E est muni d'un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dans chaque fibre E_x et d'une connexion D qui est $\langle \bullet, \bullet \rangle$ -compatible).

On suppose que l'on a aussi un *Laplacien naturel* $\tilde{\Delta}$ agissant sur les sections de E et qui vérifie une *formule de Weitzenböck*

$$(4) \quad \tilde{\Delta} = D^*D + \mathcal{R}$$

où D^* est l'adjoint formel de D et où \mathcal{R} est un endomorphisme symétrique de E ($\tilde{\Delta} = D^*D$ s'appelle encore le Laplacien de Bochner).

5. EXEMPLES (voir [GY] pour une discussion générale).

(i) $E = \Lambda^p T^*M$; $\tilde{\Delta} = \Delta_H$ le Laplacien de Hodge-de Rham sur les p -formes (quand $p = 1$, $\mathcal{R} = \text{Ric}$ comme endomorphisme symétrique de T^*M);

(ii) $E =$ fibré des spineurs; $\tilde{\Delta} =$ opérateur de Dirac (ici $\mathcal{R} = \frac{1}{4}\text{Scal}_g$, la courbure scalaire de g : voir [WU]);

(iii) $M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ immersion isométrique minimale, $E = NM$ le fibré normal; $\tilde{\Delta} =$ opérateur de Jacobi (variation seconde de "l'aire", \mathcal{R} se calcule au moyen de la seconde forme fondamentale: voir [Si]).

On s'intéresse en général à l'invariant géométrique

$$(6) \quad \delta(E) = \dim \ker(\tilde{\Delta})$$

(en fait nombre de valeurs propres négatives de $\tilde{\Delta}$ dans le cas de l'Exemple (iii) ci-dessus).

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BOCHNER :

VARIÉTÉS COMPLÈTES

Il est immédiat que le Théorème 1 s'étend au cadre général: si $\mathcal{R} \geq 0$ alors $\delta(E) \leq \text{rang}(E)$ et si de plus il existe $x_0 \in M$ tel que $\mathcal{R}(x_0) > 0$, alors $\delta(E) = 0$ (voir aussi la Remarque qui suit la Proposition 10).

Dans le cas où (M, g) est complète, on a le résultat suivant :

7. PROPOSITION. — Soit (M, g) une variété riemannienne complète (non compacte) et soit λ_0 la borne inférieure (≥ 0) du spectre du Laplacien sur les fonctions. Soit $L^2\mathcal{H}(E) = \{s \in L^2(E) \mid \tilde{\Delta}s = 0\}$.

(i) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$ et s'il existe $x_0 \in M$ tel que $\mathcal{R}(x_0) > -\lambda_0$, alors $L^2\mathcal{H}(E) = \{0\}$;

(ii) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$ et si $\lambda_0 \in \mathcal{G}(M)$, la région de Green de M , alors $L^2\mathcal{H}(E) = \{0\}$;

(iii) Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$, alors $\dim L^2\mathcal{H}(E) \leq \text{rang}(E)$.

8. COROLLAIRE. Sous les hypothèses du Théorème, si $E = T^*M$, alors $\text{Ric} \geq -\lambda_0$ implique que $L^2\mathcal{H}(T^*M) = \{0\}$ i.e. il n'existe pas de 1-forme L^2 harmonique; dans ce cas, l'image de la cohomologie à support compact $H^1_{\text{comp}}(M, \mathbb{R})$ dans la cohomologie est réduite à $\{0\}$.

La proposition 7 est due en partie à J. Dodziuk [DK], pour (i) et (iii), avec

l'hypothèse moins générale $\mathcal{R} \geq 0$ (et $\mathcal{R}(x_0) > 0$ pour (i)); et à K.D. Elworthy-S. Rosenberg : voir [RO], pour (i) et (ii). Elworthy et Rosenberg utilisent une technique d'équation de la chaleur via le mouvement brownien : pour cette raison, ils imposent en plus la condition Ric_g minorée inférieurement; ils posent le problème de l'existence d'une preuve "classique" i.e. sans utilisation du mouvement brownien. Nous indiquons ici les grandes étapes d'une telle preuve, inspirée de [DK]. Pour la notion de *région de Green*, nous renvoyons à D. Sullivan [SN].

Preuve de la Proposition 7. — Soit $\rho(x)$ la plus petite valeur propre de \mathcal{R}_x dans E_x . On a donc $\rho(x) \geq -\lambda_0$. Soit $s \in L^2\mathcal{H}(E)$ une section $\tilde{\Delta}$ -harmonique, L^2 ; soit $\varphi = |s| \in L^2(M)$. De l'inégalité de Kato $|d|s|| \leq |Ds|$ (Cauchy-Schwarz), on déduit

$$(9) \quad \Delta|s| \leq -\rho|s| \leq \lambda_0|s| \quad \text{i.e.} \quad \Delta\varphi \leq -\rho\varphi \leq \lambda_0\varphi$$

(N.B. notre Laplacien s'écrit $\Delta = -d^2/dx^2$ sur \mathbf{R}).

Soit $\zeta : \mathbf{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, C^∞ t.q. $\text{supp } \zeta \subset [0, 2]$, $\zeta|_{[0, 1]} \equiv 1$ et $|\zeta'| \leq 3$. Soit $f_A(x) = \zeta(\bar{x}\bar{x}_0/A)$ où $\bar{x}\bar{x}_0 =$ distance riemannienne de x à x_0 (rappelons que M est complète). Multipliant (9) par $f_A^2\varphi$, on montre facilement (intégrations par parties, Cauchy-Schwarz...) que

$$\begin{aligned} \int_M |d(\varphi f_A)|^2 dx &\leq \int_M \varphi^2 |df_A|^2 dx + \int_M (-\rho)\varphi^2 dx \\ (1 - \varepsilon^2) \int_M f_A^2 |d\varphi|^2 dx &\leq \int_M |d(\varphi f_A)|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_M \varphi^2 |df_A|^2 dx, \quad (\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{R}(x) \geq C > -\lambda_0$ sur $B(x_0, \delta)$, on a alors (1ère inégalité et $\lambda_0 = \text{Inf Spec } (\Delta)$)

$$0 \leq -(C + \lambda_0) \int_{B(x_0, \delta)} \varphi^2 dx$$

d'où $\varphi = 0$ sur $B(x_0, \delta)$ et donc $\varphi \equiv 0$ (principe du prolongement unique ([E-L], p. 11); d'où $s \equiv 0$. Ceci démontre l'Assertion (i).

Si $\mathcal{R} \geq -\lambda_0$, on montre que φ est une fonction propre L^2 du laplacien pour la valeur propre λ_0 et on en déduit l'Assertion (ii) (voir [SN]); l'Assertion (iii) se démontre en examinant le cas d'égalité dans l'inégalité de Kato (c'est-à-dire dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). ■

Preuve du Corollaire 8. — Si $0 \neq \omega \in L^2\mathcal{H}(T^*M)$, on déduit de la preuve précédente que $\omega = \varphi\tilde{\omega}$ avec $\tilde{\omega}$ parallèle de norme 1 et $\text{Ric}(\tilde{\omega}^\#, \bullet) = -\lambda_0\tilde{\omega}^\#$ (égalité dans l'inégalité de Kato). Ceci n'est possible que si $\lambda_0 = 0$. On a alors $\varphi =$ constante et $\text{Ric} \geq 0$, d'où $\text{Vol}(M) = \infty$ ([YA]) ce qui est incompatible avec $\omega \in L^2(T^*M)$. Pour la dernière assertion voir par exemple [YA]. ■

CAS DES VARIÉTÉS FERMÉES

Dans toute cette section, on se place dans le cadre général décrit plus haut avec (M, g) fermée.

Soit $\rho(x)$ la plus petite valeur propre de l'endomorphisme symétrique \mathcal{R}_x de E_x .

Un exemple très simple de *théorème d'annulation avec positivité en moyenne* est donné par la

10. PROPOSITION. — Si la plus petite valeur propre $\lambda_1(\Delta + \rho)$ de l'opérateur $\Delta + \rho$ agissant sur $C^\infty(M)$ est strictement positive alors $\delta(E) = 0$.

(Δ est le Laplacien positif agissant sur les fonctions).

Soit $s \in C^\infty(E)$ une section harmonique (i.e. $\tilde{\Delta}s = 0$). La formule de Weitzenböck (4) et la définition de ρ donnent

$$0 = \int_M \langle \tilde{\Delta}s, s \rangle d = \int_M (|Ds|^2 + \langle \mathcal{R}(s), s \rangle) d \geq \int_M (|Ds|^2 + \rho|s|^2) d.$$

L'inégalité de Kato, $|d|s| \leq |Ds|$ et le min-max donnent finalement $0 \geq \lambda_1(\Delta + \rho) \int_M |s|^2 dv_g$ d'où la proposition. ■

REMARQUE. — Rappelons que $\lambda_1(\Delta) = 0$. Si donc $\rho(x) \geq 0$ et $\rho(x_0) > 0$ en un point $x_0 \in M$, on a immédiatement $\lambda_1(\Delta + \rho) > 0$, d'où $\delta(E) = 0$; on a ainsi l'assertion (1) du théorème de Bochner dans un cadre général.

Dans le cas où ρ peut prendre des valeurs négatives, on a le lemme suivant (dû à K. Elworthy et S. Rosenberg : [E-R], où l'on trouvera par ailleurs des extensions intéressantes du théorème de Bochner).

11. LEMME. — Soit (M, g) une variété riemannienne fermée et $V : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Si

(i) $\int_M V dv_g > 0$ et

(ii) $\lambda_2(\Delta) \geq -V_{\min} + \int_M \left(V - \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M V dv_g \right)^2 dv_g / \int_M V dv_g$ alors $\lambda_1(\Delta + V) > 0$.

Ici $V_{\min} = \inf_M V$ et $\lambda_2(\Delta)$ est la première valeur propre non nulle du Laplacien Δ agissant sur $C^\infty(M)$.

Le Lemme 11 et la Proposition 10 conduisent donc à un théorème d'annulation dès que l'on sait comparer ρ à $\lambda_2(\Delta)$ (formule ii) ci-dessus). Contrairement au cas où $\rho \geq 0$, on est donc amené, quand ρ peut prendre des valeurs négatives, à comparer ρ avec un nombre qui prend en compte la *géométrie globale* de (M, g) . Dans la pratique, on utilisera (ii) en remplaçant $\lambda_2(\Delta)$ par un minorant, par exemple celui fourni par l'inégalité de J. Cheeger (cf. [BD], Appendix VI, Corollary 8).

Un moyen commode, pour prendre en compte la géométrie globale de (M, g) , consiste à introduire le "profil isopérimétrique" $h(M, g; s)$ de (M, g) défini par

$$h(M, g; s) = \inf \left\{ \frac{\text{Vol}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(M)} : \Omega \subset M \text{ régulier t.q. } \frac{\text{Vol}(\Omega)}{\text{Vol}(M)} = s \right\}.$$

Soit (S^n, can) la sphère canonique de \mathbb{R}^{n+1} (de rayon 1) muni de la métrique induite.

Etant donné $R > 0$, on dira que $(M, g) \in \mathcal{J}_R$ si $\dim M = n$ et si M vérifie l'inégalité isopérimétrique

$$(12) \quad \forall s \in [0, 1], \quad h(M, g; s) \geq R^{-1} h(S^n, \text{can}; s).$$

Soient $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $D \in \mathbb{R}_+^*$. Il résulte de [B-B-G] qu'il existe un nombre $a(n, \varepsilon, \alpha) > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{J}_{a(n, \varepsilon, \alpha)D}$ contienne l'ensemble

$$\left\{ (M, g) : \dim M = n, \text{Diam}(M) \leq D, \text{Diam}(M)^2 \text{Ric}_g \geq (n-1)\varepsilon\alpha^2 \right\}$$

(voir [GA] pour d'autres résultats de ce type).

Le résultat suivant répond en partie aux Questions 2 (a)-(b).

13. THÉORÈME ([B-B]). — Si $\dim M = n \geq 3$, il existe une constante positive $C(n)$, telle que si $(M, g) \in \mathcal{J}_R$, ($R > 0$) alors

$$\delta(E) \leq C(n) \text{rang}(E) \cdot \sup \left\{ 1, (\lambda_1(\Delta + \rho^+) R^2)^{-n/2} \right\} \cdot \frac{1}{\text{Vol}(M, g)} \int_M (R^2 \rho^-)^{n/2} dv_g.$$

REMARQUES.

(i) La majoration n'a d'intérêt que si $\rho^+ \neq 0$, ce qui implique $\lambda_1(\Delta + \rho^+) > 0$. Dans ce cas, on peut minorer $\lambda_1(\Delta + \rho^+)$ en fonction de R , $\|\rho^+\|_{L^1}$, $\|\rho^+\|_{L^\infty}$ (voir [B-B], Appendix 2);

(ii) Les différents facteurs sont invariants par dilatation des métriques;

(iii) Si $E = T^*M$ et $\tilde{\Delta} = \Delta_H$, alors $\delta(E) = b_1(M)$ et la plus petite valeur propre $r(x)$ de $\text{Ric}_g(x)$ peut apparaître à la fois dans l'évaluation de R (cf. l'inégalité isopérimétrique (12)) et dans le second membre de l'inégalité du Théorème 13. L'introduction du cadre général permet donc de découpler les deux rôles joués par Ric_g dans le cas particulier où $E = T^*M$.

La preuve du Théorème 13 repose, (1) sur la caractérisation variationnelle des valeurs propres (min-max), (2) sur l'inégalité de Kato (9) et sur une notion de domination d'opérateurs qui lui est associée ([BE]), (3) sur le contrôle du noyau de l'équation de la chaleur sur M ([BD], Appendix 7) et (4) sur l'adaptation d'une technique développée par E. Lieb ([LB]) pour évaluer le nombre d'états liés d'un opérateur de Schrödinger.

Pour d'autres résultats, analogues au Théorème 13, nous renvoyons à [B-B] et [BD] (pour un commentaire sur l'hypothèse $n \geq 3$ dans le Théorème 13, voir [B-B], Appendix 1).

Les méthodes utilisées pour démontrer le Théorème 13 (et l'existence sur une variété minimale M^n de \mathbb{R}^N d'une bonne inégalité isopérimétrique) permettent de démontrer le résultat suivant ([B-B]) :

14. THÉORÈME. — Soit $M^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^N$ une immersion minimale isométrique complète de dimension $n \geq 3$. Soit $\|B\|$ la norme de la seconde forme fondamentale de l'immersion. Alors

$$\text{Indice de Morse}(f) \leq c(n, N) \int_M \|B\|^n \, d\text{vol}$$

(où $c(n, N)$ est une constante universelle).

REMARQUE. — Un problème ouvert intéressant est celui posé par la Question 2,(b) pour M complète non compacte.

RÉFÉRENCES

- [B-B] BÉRARD P., BESSON G. — *Number of bound states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Anal., à paraître 1990.
- [B-B-G] BÉRARD P., BESSON G., GALLOT S. — *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math., 80 (1985), 25-308.
- [BI] BÉRARD P. — *From vanishing theorems to estimating theorems : the Bochner technique revisited*, Bull. Amer. Math. Soc., 19 (1988), 371-406.
- [BE] BESSON G. — *On symmetrization, Appendix A in Spectral Geometry : direct and inverse problems*, P. Bérard, Lecture Notes 1207, Springer, 1986.
- [B-G] BÉRARD P., GALLOT S. — *Inégalités isopérimétriques pour l'équation de la chaleur et applications à l'estimation de quelques invariants*, Exp. XV, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 83-84, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1984.
- [BO] BOCHNER S. — *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 776-797.
- [DK] DODZIUK J. — *Vanishing theorems for square-integrable harmonic forms*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 90 (1981), 21-27.
- [E-L] EELIS J., LEMAIRE L. — *Selected topics in harmonic maps*, CBMS n° 50, Amer. Math. Soc., 1980.
- [E-R] ELWORTHY K.D., ROSENBERG S. — *Compact manifolds with a little negative curvature*, Bull. Amer. Math. Soc., 20 (1989), 41-44.
- [GA] GALLOT S. — *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature*, Astérisque Soc. Math. France, 157-158 (1989), 191-216.
- [GY] GILKEY P. — *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Differential Geom., 10 (1975), 601-618.
- [LB] LIEB E. — *The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 36 (1980), 241-252.

- [RO] ROSENBERG S. — *Semigroup domination and vanishing theorems*, (Proceedings 1987 Cornell Conf. on Geometry of Random Motion) Contemp. Math., 73, Amer. Math. Soc. (1988), 287–302.
- [SI] SIMONS J. — *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 88 (1968), 62–105.
- [SN] SULLIVAN D. — *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, J. Differential Geom., 25 (1987), 327–351.
- [WU] WU H. — *The Bochner technique in differential geometry*, Math. Report Series, Harwood Academic Publishers, 1987.
- [YA] YAU S.T. — *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indiana U. Math. J., 25 (1976), 659–670.

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on décrit divers résultats récents concernant l'extension et la généralisation du théorème d'annulation de S. Bochner (théorème d'annulation pour les sections harmoniques L^2 d'une fibré riemannien au-dessus d'une variété riemannienne M complète; théorème de majoration de la dimension de l'espace vectoriel de telles sections dans le cas où M est fermée; des résultats d'annulation avec hypothèse de "positivité en moyenne".

ABSTRACT. — In this paper we describe recent results extending the classical Bochner vanishing theorem (vanishing theorem for L^2 -harmonic section of a riemannian bundle over a complete riemannian manifold M ; upper bound on the dimension of the vector space of such sections; vanishing results with a weak positivity assumption.

— ♦ —

P. BÉRARD
 Institut Fourier
 Laboratoire de Mathématiques (UA 188)
 UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
 B.P.74
 38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
 (France)
 PBERARD@FRGREN81.BITNET

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-MICHEL BISMUT

**Superconnexions, indice local des familles, déterminant
de la cohomologie et métriques de Quillen**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 27-72

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46_27_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Superconnexions, indice local des familles, déterminant de la cohomologie et métriques de Quillen

par

Jean-Michel BISMUT

L'objet de cet article est de donner une présentation systématique de travaux récents concernant les superconnexions, l'indice local des familles, le déterminant de la cohomologie et les métriques de Quillen.

Rappelons en effet qu'en utilisant le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], nous avons démontré dans [B1] un Théorème d'indice local pour une famille d'opérateurs de Dirac. Le résultat de [B1] détermine une forme différentielle explicite sur la base B d'une submersion $\pi : M \rightarrow B$, canoniquement associée à certaines données naturelles de géométrie différentielle, qui représente en cohomologie le caractère de Chern de la famille d'opérateurs considérés. Ce résultat est une version précisée du Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], où le caractère de Chern est calculé dans $H^*(B, \mathbb{Q})$.

Dans [BF1, 2], par transgression de formes de superconnexions de Quillen et en utilisant le Théorème d'indice local des familles de [B1], Bismut et Freed construisent une métrique et une connexion unitaire sur le fibré déterminant λ associé à une telle famille d'opérateurs de Dirac. Ces deux objets sont "naturels" dans le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1]. L'un des résultats importants de [BF1, 2] est de montrer que la courbure de la connexion ainsi construite est exactement la partie de degré deux de la forme sur B obtenue dans [B1].

Dans Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3], par utilisation de techniques de double transgression de formes de superconnexions de Quillen, les auteurs ont montré qu'on pouvait utiliser les résultats de [B1], [BF1, 2] pour construire une métrique "naturelle" C^∞ sur l'inverse $\lambda^G(\xi)$ du déterminant de l'image directe par une submersion holomorphe $\pi : X \rightarrow S$ du faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe

ξ sur X . Cette métrique est la métrique de Quillen sur $\lambda^G(\xi)$, par référence à la construction par Quillen [Q2] d'une telle métrique. Le résultat fondamental de [BGS1, 2, 3] est le calcul de la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne associée à la métrique de Quillen sur $\lambda^G(\xi)$, qui fournit une version précisée du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck appliqué au déterminant d'une image directe par submersion. Le calcul de courbure de [BGS1, 2, 3] est une généralisation d'un calcul correspondant de Quillen [Q2] dans le cas où X est une variété produit dont la fibre est une surface de Riemann fixe Z .

Dans une série de travaux de Bismut [B3, 4], Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, 5], Bismut-Lebeau [BL1, 2], on a étudié diverses questions liées à l'obtention d'une version avec métriques du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les plongements complexes. Plus exactement soit $i : Y \rightarrow X$ un plongement de variétés compactes complexes, soit η un fibré holomorphe sur Y , et soit (ξ, ν) un complexe de fibrés holomorphes sur X qui fournit une résolution du faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$, où $\mathcal{O}_Y(\eta)$ est le faisceau des sections holomorphes de η sur Y . Les fibres $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$, qui sont les inverses des déterminants de la cohomologie de η et ξ , sont alors canoniquement isomorphes [KM]. Quand $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$ sont munis de métriques de Quillen, une question naturelle est de calculer la norme de la section $\sigma \in (\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ identifiant $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$. Dans [B3, 4], [BGS4, 5] on construit des courants sur X naturellement associés au plongement et aux fibrés holomorphes Hermitiens considérés. Enfin dans Bismut-Lebeau [BL1, 2], on calcule la norme de σ à l'aide des objets locaux introduits dans [B3, 4], [BGS 4, 5]. Notons que les constructions de [B3, 4], [BGS4, 5] sont "naturelles" dans le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], et que ce formalisme resurgit de manière implicite dans [BL1, 2].

Cet article couvre rapidement les sujets évoqués précédemment. La Section 1 est consacrée aux superconnexions de Quillen [Q1] et au Théorème d'indice des familles local de [B1]. Dans la Section 2, on présente certains résultats de Bismut-Freed [BF1, 2] sur le fibré déterminant associé à une famille C^∞ d'opérateurs de Dirac. Dans la Section 3, on introduit les métriques de Quillen et on énonce le Théorème de courbure de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3]. Enfin dans la Section 4, on expose certains résultats de Bismut [B3, 4], Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, 5] et Bismut-Lebeau [BL1, 2] implicitement ou explicitement reliés au comportement de la métrique de Quillen par image directe associée à un plongement.

Comme nous l'avons dit plus haut, les superconnexions de Quillen [Q1] sont omniprésentes dans toutes les constructions. La compatibilité des superconnexions de Quillen [Q1] à la torsion analytique de Ray-Singer [RS], qui est exhibée dans [BGS1], joue également un rôle clef dans tous les travaux considérés dans les Sections 3 et 4.

Nous avons laissé de côté les motivations profondes qui justifient la construction de métriques de Quillen du point de vue de la théorie d'Arakelov. Nous n'évoquons que brièvement le Théorème de Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4], ainsi que les travaux de Gillet-Soulé [GS1, 2, 3, 4]. En particulier, en utilisant le résultat de [BL1, 2], Gillet et Soulé [GS4] viennent d'établir le Théorème de Riemann-Roch arithmétique à la Arakelov-Faltings conjecturé dans [GS3]. Le résultat de Gillet et Soulé [GS4] utilise en particulier la compatibilité entre des résultats de [GS3] et de [B4], [BL1, 2].

Les constructions géométriques exposées dans cet article devraient avoir d'autres applications, en particulier en théorie de de Rham et en géométrie complexe.

L'auteur remercie un rapporteur pour ses remarques et ses commentaires.

I - SUPERCONNEXIONS ET THÉOREME D'INDICE LOCAL DES FAMILLES

Dans cette section, nous introduisons les superconnexions de Quillen [Q1] et nous énonçons le Théorème d'indice local des familles de Bismut [B1].

En a), nous rappelons le formalisme classique de Chern-Weil pour la construction du caractère de Chern d'un fibré E . En b), nous montrons que les superconnexions de Quillen [Q1] sont une extension naturelle de la théorie de Chern-Weil permettant la construction de formes différentielles non triviales représentant le caractère de Chern d'une différence de fibrés, ou de manière équivalente d'un fibré \mathbb{Z}_2 -gradué. En c), on rappelle la formule de McKean-Singer [MKS] qui exprime l'indice d'un opérateur elliptique par une formule où intervient un opérateur de la chaleur associé. Enfin en d), on rappelle la construction dans [B1] de la superconnexion de Levi-Civita associée à une famille d'opérateurs de Dirac agissant sur les fibres d'une submersion $\pi : M \rightarrow B$, et on énonce le théorème d'indice des familles local correspondant [B1]. On explique brièvement les liens entre le théorème d'indice local usuel de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2], Atiyah-Bott-Patodi [ABoP], et le théorème d'indice des familles local de [B1].

a) Connexions

Soit E un fibré complexe sur une variété B . Soit ∇^E une connexion sur E . ∇^E définit un opérateur différentiel du premier ordre agissant sur $\Gamma(\Lambda(T^*B) \otimes E)$, tel que si $\omega \in \Gamma(\Lambda(T^*B))$, $e \in \Gamma(E)$, on a

$$(1.1) \quad \nabla^E(\omega e) = d\omega e + (-1)^{\text{deg}\omega} \omega \nabla^E e.$$

Dans ce formalisme, la courbure R^E de ∇^E est une section de $\Lambda^2(T^*B) \otimes \text{End}(E)$ donnée par la formule

$$(1.2) \quad R^E = (\nabla^E)^2$$

Par la théorie de Chern-Weil, le caractère de Chern de E est représenté en cohomologie par la forme différentielle

$$(1.3) \quad \omega = \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{(\nabla^E)^2}{2i\pi} \right) \right].$$

Vérifions brièvement que ω est fermée. On a l'identité de Bianchi

$$(1.4) \quad [\nabla^E, (\nabla^E)^2] = 0.$$

Donc de (1.2)-(1.4), on tire

$$(1.5) \quad d\omega = d \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{(\nabla^E)^2}{2i\pi} \right) \right] = \text{Tr} \left[\left[\nabla^E, \exp \left(- \frac{(\nabla^E)^2}{2i\pi} \right) \right] \right] = 0.$$

Notons que dans (1.5), on a implicitement utilisé le fait que si $A, B \in \text{End}(E)$, alors $\text{Tr}[A, B] = 0$.

Remarquons aussi que le fait que la classe de cohomologie de ω ne dépend pas de ∇^E résulte trivialement du fait que ω est universellement fermée.

b) Superconnexions.

Soit $E = E_+ \oplus E_-$ un fibré \mathbb{Z}_2 -gradué sur E . Soit $\nabla^E = \nabla^{E_+} \oplus \nabla^{E_-}$ une connexion sur E préservant la \mathbb{Z}_2 -graduation. Un représentant naturel du caractère de Chern du fibré virtuel $E_+ - E_-$ est la forme ω donnée par

$$(1.6) \quad \omega = \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{(\nabla^{E_+})^2}{2i\pi} \right) \right] - \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{(\nabla^{E_-})^2}{2i\pi} \right) \right]$$

Dans [Q1], Quillen introduit de nouvelles formes fermées représentant en cohomologie $\text{ch}(E_+ - E_-)$. Reprenons la construction de [Q1].

L'algèbre $\text{End}(E)$ est \mathbb{Z}_2 -graduée, les éléments pairs (resp. impairs) commutent (resp. anticommulent) avec l'opérateur τ de $\text{End}(E)$ définissant la \mathbb{Z}_2 -graduation ($\tau = \pm 1$ sur E_{\pm}). On forme alors l'algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée $\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)$.

Si \mathcal{A} est une algèbre \mathbb{Z}_2 -graduée, si $a, b \in \mathcal{A}$, on définit le supercommutateur $[a, b]$ par la formule

$$(1.7) \quad [a, b] = ab - (-1)^{\text{doga} \text{deg} b} ba.$$

Le commutateur usuel correspond à une graduation triviale sur l'algèbre.

Si $A \in \text{End} E$, on définit la supertrace $\text{Tr}_s[A]$ par la formule

$$(1.8) \quad \text{Tr}_s[A] = \text{Tr}[\tau A]$$

On étend Tr_s en une application linéaire de $\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)$ dans $\Lambda(T^*B)$ avec la convention que si $\omega \in \Lambda(T^*B)$, $A \in \text{End}(E)$, alors

$$(1.9) \quad \text{Tr}_s[\omega A] = \omega \text{Tr}_s[A]$$

Une propriété fondamentale de la supertrace Tr_s est qu'elle s'annule sur les supercommutateurs [Q1].

Soit maintenant C un section C^∞ de $\left(\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)\right)^{\text{impair}}$. $\nabla^E + C$, qui est un opérateur différentiel du premier ordre agissant sur $\Gamma\left(\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)\right)$, est une superconnexion au sens de Quillen [Q1]. La courbure de la superconnexion $\nabla^E + C$ est son carré $(\nabla^E + C)^2$. Par les règles d'anticommuation sur $\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)$, $(\nabla^E + C)^2$ est un tenseur et plus exactement une section C^∞ de $\left(\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E)\right)^{\text{pair}}$. En effet

$$(1.10) \quad (\nabla^E + C)^2 = (\nabla^E)^2 + C^2 + [\nabla^E, C].$$

Or $[\nabla^E, C]$ est exactement la dérivée covariante $\nabla^E.C$ de C , i.e. un tenseur.

Soit φ l'homomorphisme $\omega \in \Lambda^{\text{pair}}(T^*B) \rightarrow (2i\pi)^{-\text{deg}\omega/2} \omega \in \Lambda^{\text{pair}}(T^*B)$. On a le résultat fondamental de Quillen [Q1].

Théorème 1.1: La forme différentielle paire

$$(1.11) \quad \omega = \varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\nabla^E + C \right)^2 \right) \right]$$

est fermée et représente en cohomologie $\text{ch}(E_+ - E_-)$.

Preuve : On a encore l'identité de Bianchi généralisée

$$(1.12) \quad [\nabla^E + C, (\nabla^E + C)^2] = 0.$$

En utilisant le fait que Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, on tire de (1.12) que

$$(1.13) \quad d\text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\nabla^E + C \right)^2 \right) \right] = \text{Tr}_s \left[\left[\nabla^E + C, \exp \left(- \left(\nabla^E + C \right)^2 \right) \right] \right] = 0.$$

ω est donc fermée. Comme pour $C = 0$, ω coïncide avec la forme (1.6), un argument trivial de déformation montre que ω représente le caractère de Chern de $E_+ - E_-$.

□

Exemple 1.2 : Supposons que C soit une section C^∞ de $T^*B \otimes \widehat{\text{End}}^{\text{pair}}(E)$. Alors $\nabla^E + C$ est encore une connexion sur E préservant la \mathbb{Z}_2 -graduation. Le Théorème 1.1 est alors trivial.

Exemple 1.3 : Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$ une section de C^∞ de $\text{End}^{\text{impair}}(E)$. Alors $\nabla^E + D$ est une superconnexion sur E . Sa courbure $(\nabla^E + D)^2$ est donnée par

$$(1.14) \quad (\nabla^E + D)^2 = (\nabla^E)^2 + D^2 + \nabla^E D$$

où $\nabla^E D$ est la dérivée covariante de D . La matrice de $(\nabla^E + D)^2$ est exactement

$$(1.15) \quad \begin{pmatrix} \left(\nabla_{E_+}^E \right)^2 + D_- D_+ & \nabla_{D_-}^E \\ \nabla_{D_+}^E & \left(\nabla_{E_-}^E \right)^2 + D_+ D_- \end{pmatrix}$$

L'exemple 1.3 joue un rôle capital dans la suite.

Remarque 1.4 : De manière remarquable, dans l'application que nous avons donnée des superconnexions de Quillen au théorème local de l'indice des familles [B1], le fait qu'on puisse perturber la connexion ∇^E par n'importe quelle section C^∞ de $\left(\Lambda(T^*B) \widehat{\otimes} \text{End}(E) \right)^{\text{impair}}$, et pas seulement par les perturbations décrites dans les exemples 1.2 et 1.3, joue un rôle essentiel.

c) Equation de la chaleur et théorème de l'indice

Soit Z une variété compacte. Soit $E = E_+ \oplus E_-$ un fibré \mathbb{Z}_2 -gradué sur Z , muni d'un produit hermitien tel que E_+ et E_- soient orthogonaux dans E .

Soit D un opérateur différentiel agissant sur $\Gamma(E)$ et échangeant $\Gamma(E_+)$ et $\Gamma(E_-)$. Dans le formalisme de la Section 1b), on a

$$D \in \text{End}^{\text{impair}}(\Gamma(E)).$$

Soit D_\pm la restriction de D à $\Gamma(E_\pm)$. On écrit D sous la forme matricielle

$$(1.16) \quad D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$$

On a en particulier

$$(1.17) \quad D^2 = \begin{pmatrix} D_- D_+ & 0 \\ 0 & D_+ D_- \end{pmatrix}.$$

Supposons de plus que D soit un opérateur elliptique du premier ordre de symbole principal autoadjoint. D^2 est alors un opérateur elliptique du deuxième ordre de symbole principal défini positif. En particulier, pour $t > 0$, $\exp(-t D^2)$ est un opérateur à trace.

Soit $\text{Ind}(D_+)$ l'indice de D_+ , i.e.

$$(1.18) \quad \text{Ind}(D_+) = \dim(\text{Ker } D_+) - \dim(\text{Ker } D_+^*).$$

Rappelons le résultat de Mc Kean-Singer [MKS] étendu dans [B2, Theorem 1.2].

Théorème 1.5 : Pour tout $t > 0$, on a

$$(1.19) \quad \text{Ind}(D_+) = \text{Tr}_s \left[\exp(-t D^2) \right]$$

Preuve : Si D est autoadjoint, (1.19) est exactement la formule de McKean-Singer [MKS], qu'on démontre très simplement par la théorie spectrale. Plus généralement comme D est à symbole principal autoadjoint, on peut déformer D en un opérateur autoadjoint D_λ par une famille C^∞ d'opérateurs $\lambda \in [0, 1] \rightarrow D_\lambda$ telle que $D_0 = D$, ayant même symbole principal que D . On va alors utiliser le formalisme de la Section 1b), et manipuler les noyaux C^∞ des opérateurs considérés pour justifier les considérations formelles qui suivent. Trivialement

$$(1.20) \quad [D_\lambda, D_\lambda^2] = 0.$$

De (1.20) et du fait que Tr_s s'annule sur les supercommutateurs, on tire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{Tr}_s \left[\exp(-t D_\lambda^2) \right] \\ &= -t \text{Tr}_s \left[\left[D_\lambda, \frac{\partial D_\lambda}{\partial \lambda} \right] \exp(-t D_\lambda^2) \right] = -t \text{Tr}_s \left[\left[D_\lambda, \frac{\partial D_\lambda}{\partial \lambda} \exp(-t D_\lambda^2) \right] \right] = 0 \end{aligned}$$

On a donc montré le Théorème 1.5. □

Remarque 1.6 : Le Théorème 1.5 a une valeur essentiellement pédagogique. Nous avons en effet appliqué le formalisme des superconnexions dans une situation très éloignée des motivations de la Section 1b).

La comparaison des formules (1.3) et (1.19) montre leur similarité formelle. La formule de Quillen (1.11) est une extraordinaire synthèse de la formule (1.3) pour le caractère de Chern en théorie de Chern-Weil et de la formule de McKean-Singer (1.19) pour l'indice d'un opérateur elliptique. Rappelons pour terminer la formule pour la densité de la loi gaussienne sur \mathbb{R}

$$(1.21) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right).$$

La ressemblance de (1.21) à (1.3) et (1.19) n'est, elle non plus, pas accidentelle.

d) Le théorème d'indice local des familles

Soit maintenant $\pi : M \rightarrow B$ une submersion de fibre compacte Z de dimension paire $n = 2\ell$. On suppose que le fibré tangent relatif TZ est orienté et spin. Soit g^{TZ} une métrique sur TZ , et soit $F = F_+ \oplus F_-$ le fibré \mathbb{Z}_2 -gradué des TZ spineurs correspondant.

Soit ξ un fibré Hermitien sur M , muni d'une connexion unitaire ∇^ξ .

Pour $b \in B$, soit D_b l'opérateur de Dirac agissant sur $\Gamma((F \otimes \xi)|_{Z_b})$ canoniquement associé à la connexion de Levi-Civita sur $TZ|_{Z_b}$ et à la connexion ∇^ξ [L], [AS1], [ABP]. D_b est un opérateur elliptique autoadjoint du premier ordre. Son symbole principal est $\sqrt{-1} c(\xi)$, où $c(\xi)$ est la multiplication de Clifford par $\xi \in T^*Z \cong TZ$ agissant sur $F \otimes \xi$. D_b échange $\Gamma((F_+ \otimes \xi)|_{Z_b})$ et $\Gamma((F_- \otimes \xi)|_{Z_b})$. Soit $D_{\pm,b}$ la restriction de D_b à $\Gamma((F_\pm \otimes \xi)|_{Z_b})$. On écrit D_b sous la forme

$$(1.22) \quad D_b = \begin{bmatrix} 0 & D_{-,b} \\ D_{+,b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Le théorème d'Atiyah-Singer pour les familles [AS2], qui est une extension du théorème d'Atiyah-Singer [AS1] (qui donne une formule pour $\text{Ind}(D_{+,b}) \in \mathbb{Z}$) calcule le fibré virtuel $\text{Ker } D_+ - \text{Ker } D_- \in K^0(B)$ (qui est un fibré virtuel au sens classique si $\text{Ker } D_+$ et $\text{Ker } D_-$ sont eux-mêmes des fibrés). En particulier [AS2, Théorème 5.1] donne une formule pour le caractère de Chern de $\text{Ker } D_+ - \text{Ker } D_-$, qui est une classe de cohomologie sur B , qui est calculable explicitement à l'aide de classes caractéristiques de fibrés.

Dans [B1], en utilisant le formalisme des superconnexions de Quillen [Q1], nous avons donné une version locale et précisée du Théorème d'Atiyah-Singer pour les familles [AS2], i.e. obtenu une forme différentielle fermée sur B calculable localement sur M , qui représente en cohomologie le caractère de Chern $\text{ch}(\text{Ker } D_+ - \text{Ker } D_-)$, canoniquement associée aux données précédentes et à la donnée d'un sous-fibré "horizontal" T^{HM} de TM tel que $TM = TZ \oplus T^{\text{HM}}$. Le résultat obtenu dans [B1] est "naturel" dans le formalisme de superconnexions de Quillen [Q1], et se prête donc naturellement à toutes les opérations rendues possibles par ce formalisme.

Soit en effet T^{HM} un sous-fibré de TM choisi comme indiqué précédemment.

Pour $b \in B$, soit $H_b^\infty, H_{\pm,b}^\infty$ les espaces vectoriels $\Gamma((F_\pm \otimes \xi)_{|_{Z_b}})$. Alors $H_b = H_{+,b}^\infty \oplus H_{-,b}^\infty$ est un espace vectoriel \mathbb{Z}_2 -gradué. On va considérer les H_b^∞ comme les fibres d'un fibré \mathbb{Z}_2 -gradué de dimension infinie sur B . D est alors une section de $\text{End}^{\text{impair}}(H^\infty)$.

Utilisons le formalisme de Quillen [Q1] décrit à la Section 1b). On va tout d'abord construire une connexion $\tilde{\nabla}$ sur H^∞ préservant la \mathbb{Z}_2 -gradation.

Comme il est montré dans [B1, Théorème 1.9], la métrique g^{TZ} sur TZ et le fibré T^{HM} déterminent canoniquement une connexion euclidienne ∇^{TZ} sur TZ . ∇^{TZ} est la projection orthogonale sur TZ de la connexion de Levi-Civita sur TM associée à une métrique g^{TM} sur TM dont la restriction à TZ est égale à g^{TZ} , et qui est telle que TZ et T^{HM} sont orthogonaux. On vérifie simplement que la connexion ∇^{TZ} ainsi construite ne dépend que de g^{TZ} et T^{HM} . Soit ∇^{F} la connexion induite par ∇^{TZ} sur F .

Soit $\nabla^{F \otimes \xi}$ la connexion sur $F \otimes \xi$

$$(1.23) \quad \nabla^{F \otimes \xi} = \nabla^F \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi$$

Si $U \in TB$, soit U^H le relèvement de U dans T^HM .

Définition 1.7 : Si h est une section C^∞ de $F \otimes \xi$ sur M , si $U \in TB$, on pose

$$(1.24) \quad \tilde{\nabla}_U h = \nabla_{U^H}^{F \otimes \xi} h.$$

On vérifie très simplement que $\tilde{\nabla}$ est une connexion sur le fibré $H^\infty = H_+^\infty \oplus H_-^\infty$ préservant la \mathbb{Z}_2 -graduation, dont la courbure $(\tilde{\nabla})^2$ est une deux-forme sur B à valeurs dans les opérateurs différentiels d'ordre un le long des fibres de Z .

Pour tout $t > 0$, $\tilde{\nabla} + \sqrt{t} D$ est une superconnexion sur H^∞ , dont la courbure $(\tilde{\nabla} + \sqrt{t} D)^2$ est un opérateur elliptique le long des fibres Z , de symbole principal autoadjoint défini positif.

Le premier résultat démontré dans [B1, Théorème 2.6] est le suivant.

Théorème 1.8 : Pour tout $t > 0$, la forme $\varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]$ est fermée et représente en cohomologie le caractère de Chern de $\text{Ker} D_+ - \text{Ker} D_-$.

Preuve : La preuve du Théorème 1.8 donnée dans [B1] se compose de trois étapes :

- On montre d'abord que les formes considérées sont fermées.
- Quand $\text{Ker} D_- = \{0\}$, on vérifie directement le résultat par un argument de déformation.
- On se ramène au cas considéré précédemment en utilisant un argument classique d'Atiyah-Singer [AS2].

Berline-Vergne [BeV] ont donné une preuve du Théorème 1.8 quand $\text{Ker} D_+$ et $\text{Ker} D_-$ sont des fibrés en faisant tendre t vers $+\infty$ dans $\varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla} + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]$.

Cette technique a un intérêt propre. Nous retrouverons un problème voisin à la Section 4.

Quand B est un point, le Théorème 1.8 se réduit à la formule de McKean-Singer [MKS], rappelée au Théorème 1.5. La technique classique de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2] et Atiyah-Bott-Patodi [ABoP] consiste alors à faire tendre t vers 0 dans la formule

$$(1.25) \quad \text{Ind } D_+ = \text{Tr}_s \left[\exp \left(-t D^2 \right) \right]$$

Pour $x, x' \in Z$, soit en effet $P_t(x, x')$ le noyau C^∞ de l'opérateur $\exp(-tD^2)$ relativement à la mesure de volume dx' . Alors, si $x \in Z$, $P_t(x, x) \in \text{End}^{\text{pair}}(F \otimes \xi)_x$. La formule (1.25) s'écrit

$$(1.26) \quad \text{Ind } D_+ = \int_Z \text{Tr}_s [P_t(x, x)] dx .$$

Le développement asymptotique quand $t \rightarrow 0$ de $\text{Tr}_s [P_t(x, x)]$ est en principe donné par

$$(1.27) \quad \text{Tr}_s [P_t(x, x)] = \frac{a_{-2}(x)}{t^2} + \dots + a_0(x) + O(t).$$

Le mécanisme des "extraordinary cancellations" conjecturé par McKean-Singer [MKS] et démontré dans [P], [G], [ABoP] montre qu'en fait

$$(1.28) \quad a_j = 0 \quad \text{pour } j < 0$$

$$a_0 dx = \left\{ \hat{A} \left[\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right] \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right\}^{\max}$$

où dans (1.28) R^{TZ} et L^ξ sont les courbures de ∇^{TZ} et ∇^ξ et où $\hat{A}(x) = \frac{x/2}{\text{sh}(x/2)}$ est le \hat{A} genre de Hirzebruch. On obtient ainsi la formule d'Atiyah-Singer [AS1], [ABoP]

$$(1.29) \quad \text{Ind}(D_+) = \int_Z \widehat{A} \left[\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right] \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L\xi}{2i\pi} \right) \right].$$

Si on cherche à appliquer la même stratégie à la situation où B n'est plus réduit à un point, elle échoue lamentablement. Plus exactement, quand $t \rightarrow 0$, $\varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left((\widetilde{\nabla} + \sqrt{t} D)^2 \right) \right]$ a en général un développement asymptotique singulier.

Le Théorème 1.8 ne permet donc pas de redémontrer le Théorème d'Atiyah-Singer pour les familles [AS2, Théorème 5.1], puisque les formes sur B considérées au Théorème 1.8 ne sont pas calculables explicitement.

Dans [B1, Section 3], nous avons introduit une nouvelle superconnexion, dite superconnexion de Levi-Civita, qui permet d'obtenir une version locale du Théorème de l'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2]. Soit en effet dx la mesure de volume sur les fibres Z . Si $U \in TB$ on pose

$$(1.30) \quad L_{U^H} dx = 2k(U)dx$$

Soit $\widetilde{\nabla}^u$ la connexion sur le fibré H^∞

$$(1.31) \quad \widetilde{\nabla}^u = \widetilde{\nabla} + k.$$

Alors on vérifie simplement que $\widetilde{\nabla}^u$ est une connexion unitaire sur H^∞ pour le produit Hermitien naturel L_2 sur H^∞ .

Soit T la courbure de la connexion naturelle sur la fibration $\pi : M \rightarrow B$ associée à $T^H M$. Plus exactement, si P^{TZ} est l'opérateur de projection $TM = TZ \oplus T^H M \rightarrow TZ$, si f, f' sont des champs de vecteurs C^∞ sur B , on pose

$$(1.32) \quad T(f, f') = -P^{TZ} [f^H, f'^H]$$

T est une deux forme sur B à valeurs dans les champs de vecteurs sur les fibres Z .

Rappelons que $F \otimes \xi$ est un TZ module de Clifford.

Définition 1.9 : Pour $t > 0$, soit A_t la superconnexion

$$(1.33) \quad A_t = \overset{\sim}{\nabla}^u + \sqrt{t} D - \frac{c(T)}{4\sqrt{t}}.$$

Notons que dans (1.33), $c(T)$ est une deux-forme sur B à valeurs dans $\text{End}^{\text{impair}}(H^\infty)$.

Soit R^{TZ}, L^ξ les courbures des connexions $\nabla^{\text{TZ}}, \nabla^\xi$. On montre dans [B1] le résultat essentiel suivant.

Théorème 1.10 : Pour tout $t > 0$, les formes paires $\varphi \text{Tr}_s[\exp(-A_t^2)]$ sont fermées et représentent en cohomologie le caractère de Chern de $\text{Ker } D_+ - \text{Ker } D_-$. De plus, on a l'égalité de formes sur B

$$(1.34) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi \text{Tr}_s[\exp(-A_t^2)] = \int_Z \widehat{A} \left[\frac{R^{\text{TZ}}}{2\pi} \right] \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right].$$

Remarque 1.11 : Le résultat de [B1] est en fait plus précis, puisqu'il assure que si $Q_t^b(x, x')$ ($x, x' \in Z_b$) est le noyau C^∞ de $\exp(-A_t^2)$, quand $t \rightarrow 0$, $\varphi \text{Tr}_s[Q_t^b(x, x)]$ converge vers la composante de degré maximal vertical $2 \dim Z$ dans l'intégrale à droite de (1.34).

Une explication élémentaire de la raison pour laquelle A_t est la "bonne" superconnexion est que A_t est en fait un opérateur de Dirac associé à la connexion de Levi-Civita sur les spineurs de TM , pour une métrique infinie sur $T^H M$. Bien que (1.34) contienne comme cas particulier le théorème d'indice local ordinaire de [P], [G1,2], [ABoP], (1.34) peut en fait être lui-même interprété comme une version singulière du Théorème d'indice local usuel.

Une autre preuve du théorème d'indice local des familles a été donnée par Berline-Vergne [BeV]. Par ailleurs un texte récent de Berline-Getzler-Vergne [Be Ge V] contient en particulier un traitement très complet des superconnexions de Quillen, et du théorème d'indice local des familles.

Remarque 1.12 : Naturellement, on déduit du Théorème d'indice local des familles de [B1] le Théorème d'Atiyah-Singer [AS2, Théorème 5.1] pour les familles d'opérateurs de Dirac, qui calcule $\text{ch}(\text{KerD}_+ - \text{KerD}_-)$ dans $H^*(B, \mathbb{Q})$.

Toutefois, le Théorème 1.10 raffine le résultat de [AS2]. En effet ce Théorème fournit une forme différentielle explicite qui représente $\text{ch}(\text{KerD}_+ - \text{KerD}_-)$, et qui a les deux propriétés essentielles suivantes :

- Elle est rigidement déterminée par les données de géométrie différentielle du problème considéré, c'est à dire par la métrique g^{TZ} , le fibré $T^H M$ et la connexion ∇^ξ .
- L'évaluation de la forme en $b \in B$ ne dépend que de données de géométrie locale au voisinage de la fibre Z_b .
- Elle est obtenue par un appareil d'analyse fonctionnelle qui permet aussi d'atteindre des objets globaux dans les fibres tels que KerD_+ et KerD_- .

Le théorème d'indice local de Patodi [P], Gilkey [Gi1,2], Atiyah-Bott-Patodi [ABoP] était essentiellement un remarquable outil pour démontrer simplement le théorème d'indice d'Atiyah-Singer [AS1]. Une autre application de ce théorème a été l'établissement par Atiyah-Patodi-Singer [APS] d'un théorème d'indice pour un opérateur de Dirac sur une variété à bord. Nous allons voir dans la suite comment on peut utiliser le Théorème d'indice des familles local de [B1] pour rigidifier le Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], et pour nous ramener à une version de ce théorème directement compatible au Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

II - LE DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE C^∞ D'OPÉRATEURS DE DIRAC : UN THÉOREME DE COURBURE

Dans cette section, nous rappelons la construction analytique par Quillen [Q2] et Bismut-Freed [BF2] du fibré déterminant de l'image directe d'une famille d'opérateurs de Dirac opérant sur les fibres d'une submersion $C^\infty \pi : M \rightarrow B$. On énonce aussi les résultats de Bismut-Freed [BF1, 2] concernant la construction d'une métrique et d'une connexion unitaire sur ce fibré en droites, ainsi que le Théorème de [BF2], généralisant un résultat de Quillen [Q2] qui calcule la courbure de cette connexion à l'aide de quantités locales sur M . Ce dernier résultat est lui-même une conséquence du Théorème d'indice local des familles [B1].

En a), on construit le fibré déterminant. En b), grâce au Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2], on calcule la première classe de Chern du fibré déterminant. Enfin en c), on énonce le théorème de courbure de Bismut-Freed [BF2].

a) Le fibré déterminant

On fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 1d).

Si E est un espace vectoriel de dimension fini, on pose

$$(2.1) \quad \det(E) = \Lambda^{\max}(E)$$

Bien que $\text{Ker}D_+ - \text{Ker}D_-$ ne soit qu'un fibré virtuel sur B , son déterminant $\lambda(\xi)$ est lui un vrai fibré. Rappelons en effet la construction par Quillen [Q2] de $\lambda(\xi)$.

Pour $b \in B$, le spectre de l'opérateur D_b^2 est discret. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit U_a l'ouvert de B

$$(2.2) \quad U_a = \{ b \in B ; a \notin \text{Sp}(D_b^2) \}.$$

Soit $H_b^{\infty, a}$ la somme directe des espaces propres de D_b^2 pour des valeurs propres $\leq a$.

Alors $H_b^{\infty, a}$ se scinde en $H_b^{\infty, a} = H_{+,b}^{\infty, a} \oplus H_{-,b}^{\infty, a}$. $H^{\infty, a}$ est un fibré \mathbb{Z}_2 -gradu e de dimension finie sur U_a . Posons

$$(2.3) \quad \lambda^a(\xi) = \left(\det \left(H_+^{\infty, a} \right) \right)^{-1} \otimes \det \left(H_-^{\infty, a} \right)$$

Pour $0 < a < a' < +\infty$, soit $H_b^{\infty, (a, a')} = H_{+,b}^{\infty, (a, a')} \oplus H_{-,b}^{\infty, (a, a')}$ la somme directe des espaces propres de D_b^2 pour des valeurs propres $\mu \in]a, a']$. Soit $D_{+,b}^{(a, a')}$ la restriction de $D_{+,b}$   $H_{+,b}^{\infty, (a, a')}$. Alors classiquement $D_{+,b}^{(a, a')}$ est une application linéaire inversible $H_{+,b}^{\infty, (a, a')}$ dans $H_{-,b}^{\infty, (a, a')}$. Posons

$$(2.4) \quad \lambda^{(a, a')}(\xi) = \left(\det \left(H_+^{\infty, (a, a')} \right) \right)^{-1} \otimes \det \left(H_-^{\infty, (a, a')} \right).$$

Alors $\lambda^{(a, a')}(\xi)$ est un fibré C^∞ sur $U^a \cap U^{a'}$, et $\det(D_+^{(a, a')})$ est une section C^∞ non nulle de $\lambda^{(a, a')}(\xi)$ sur $U^a \cap U^{a'}$.

Suivant Quillen [Q2], on définit le fibré déterminant $\lambda(\xi)$ de la manière suivante.

Définition 2.1 : $\lambda(\xi)$ désigne le fibré en droite C^∞ sur B d etermin e par les fibrés en droite $C^\infty(\lambda^a(\xi), U^a)$ et les fonctions de transition

$$(2.5) \quad s \in \lambda^a(\xi) \rightarrow s \otimes \det(D_+^{(a, a')}) \in \lambda^{a'}(\xi) \text{ sur } U^a \cap U^{a'}, 0 < a < a' < +\infty$$

Notons que pour tout $b \in B$, on a un isomorphisme canonique

$$(2.6) \quad \lambda_b(\xi) \cong \left(\det(\text{Ker } D_{+,b}) \right)^{-1} \otimes \det(\text{Ker } D_{-,b})$$

b) La première classe de Chern de $\lambda(\xi)$

Du Théorème d'indice des familles d'Atiyah-Singer [AS2, Théorème 5.1], il résulte que la première classe de Chern du fibré $\lambda(\xi)$ est représentée en cohomologie par la forme différentielle de degré deux sur B

$$(2.7) \quad - \left\{ \int_Z \widehat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right\}^{(2)}$$

Cette forme différentielle est ici réelle. On peut donc se demander si la forme différentielle

$$(2.8) \quad 2i\pi \left\{ \int_Z \widehat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right\}^{(2)}$$

est la courbure d'une connexion "naturelle" sur $\lambda(\xi)$ qui soit unitaire pour une métrique "naturelle".

Dans [Q2], Quillen avait résolu cette question dans le cas où Z est une surface de Riemann fixe, et où l'espace des paramètres B est ensemble des structures holomorphes sur un fibré donné sur Z. Dans la situation considérée par Quillen [Q2], $\lambda(\xi)$ est naturellement un fibré holomorphe, et métrique et connexion sont directement liées.

Dans Bismut-Freed [BF1,2], on a montré que le théorème d'indice local des familles [B1] permet de résoudre en toute généralité le problème posé dans le cadre que nous avons considéré jusqu'à présent, i.e. pour une fibration C^∞ .

c) Le théorème de courbure du fibré déterminant : le cadre C^∞

Rappelons qu'il s'agit de construire une métrique "naturelle" et une connexion unitaire "naturelle" sur $\lambda(\xi)$. Nous allons vérifier que le formalisme des superconnexions fournit une réponse presque immédiate à cette question.

Une première observation essentielle faite dans Bismut-Freed [BF2, Théorème 1.19] est la suivante.

Si $\omega \in \Lambda(T_R^* B)$, soit $\omega^{(2)}$ la composante de ω dans $\Lambda^2(T_R^* B)$.

Proposition 2.2 : Pour tout $t > 0$, on a l'égalité

$$(2.9) \quad \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\exp \left(-A_t^2 \right) \right]^{(2)} = \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]^{(2)}$$

Preuve : On reprend la preuve de [BF2]. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on pose

$$(2.10) \quad A_t^\lambda = \tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D - \frac{\lambda c(T)}{4\sqrt{t}}$$

Par une formule de transgression à la Chern-Simons, on a

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \operatorname{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(A_t^\lambda \right)^2 \right) \right] = d \operatorname{Tr}_s \left[\frac{c(T)}{4\sqrt{t}} \exp \left(- \left(A_t^\lambda \right)^2 \right) \right]$$

Or $c(T)$ est une forme de degré deux. Le membre de droite de (2.11) est donc une forme de degré au moins trois (et même quatre puisque le membre de gauche est de degré pair). De (2.11), on tire donc que

$$(2.12) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \operatorname{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(A_t^\lambda \right)^2 \right) \right]^{(2)} = 0.$$

La proposition est démontrée. □

Remarque 2.3 : L'introduction du terme $\frac{c(\Gamma)}{4\sqrt{t}}$ dans A_t ne modifie donc pas la partie

de degré deux de la forme $\varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]$, bien qu'il puisse modifier la partie de degré deux de la supertrace locale correspondante.

Du Théorème 1.10 et de la Proposition 2.2, on tire donc que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]^{(2)} =$$

(2.13)

$$\left[\int_Z \hat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right]^{(2)}$$

Comme en (2.11), par une formule de transgression à la Chern-Simons pour les superconnexions, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right] =$$

(2.14)

$$-d \text{Tr}_s \left[\frac{D}{2\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right]$$

De (2.14), on tire que

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\tilde{\nabla}^u + \sqrt{t} D \right)^2 \right) \right] = \frac{d}{2} \text{Tr}_s \left[\tilde{\nabla}^u D \exp \left(- t D^2 \right) \right].$$

Rappelons un résultat d'indice local de Bismut-Freed [BF2, Théorème 3.4].

Proposition 2.4 : Quand $t \rightarrow 0$, on a

$$(2.16) \quad \text{Tr}_s \left[\left(\tilde{\nabla}^u D \right) D \exp \left(- t D^2 \right) \right] = O(1)$$

Supposons maintenant que la famille d'opérateurs D_+ soit d'indice zéro. Soit V l'ouvert de B

$$(2.17) \quad V = \{ b \in B ; D_b \text{ est inversible} \}.$$

Sur tout compact de V , quand $t \rightarrow +\infty$, $\text{Tr}_s \left[\left(\tilde{\nabla}^u D \right) D \exp \left(- t D^2 \right) \right]$ tend vers 0 plus vite que e^{-ct} ($c > 0$).

Définition 2.5 : Sur V , on définit la un-forme δ_0 par la formule

$$(2.18) \quad \delta_0 = \int_0^{+\infty} \text{Tr}_s \left[\left(\tilde{\nabla}^u D \right) D \exp \left(- t D^2 \right) \right] dt .$$

De manière équivalente on a

$$(2.19) \quad \delta_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Tr}_s \left[\left(\tilde{\nabla}^u D \right) D^{-1} \exp \left(- t D^2 \right) \right].$$

Proposition 2.6 : La forme δ_0 est imaginaire pure. Sur V , on a l'identité

$$(2.20) \quad \left[2i\pi \int_Z \widehat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right]^{(2)} = d \left(-\frac{\delta_0}{2} \right)$$

Preuve : Comme $\widetilde{\nabla}^u$ est une connexion unitaire, $\widetilde{\nabla}^u D$ est une forme à valeurs dans l'espace des opérateurs autoadjoints. En utilisant (2.18) et le fait que la supertrace d'un supercommutateur est nulle comme en [B1, Théorème 1.5 et Section 1h)], on tire que δ_0 est imaginaire. (2.20) résulte de (2.13), (2.15), (2.18). \square

Sur V , $\lambda(\xi)$ possède une section C^∞ canonique, qui s'identifie à $\det(D_+^{(0,a)}) \in \lambda^a(\xi)$ sur $V \cap U_a$, et qu'on note $\det(D_+)$. De (2.8), (2.20), on tire que $-\frac{\delta_0}{2}$ est candidat à être la partie imaginaire d'une forme de connexion A sur $\lambda(\xi)|_V$.

Pour $b \in V$, $\text{Re}(s) > \ell$, on pose

$$(2.21) \quad \zeta_b(s) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left[D_b^2 \right]^{-s} \right].$$

Alors par Seeley [Se], ζ_b s'étend en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, qui est holomorphe en $s = 0$.

Definition 2.7 : Pour $b \in V$, on pose

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \|\det(D_{+,b})\|_{\lambda(\xi)} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \zeta_b}{\partial s}(0) \right\} . \\ \gamma_{0,b} &= -\frac{\partial \zeta_b}{\partial s}(0) . \end{aligned}$$

Définition 2.8 : Sur V , on définit la connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ sur le fibré $\lambda(\xi)$ par

$$(2.23) \quad \nabla^{\lambda(\xi)} \det(D_+) = \frac{1}{2}(\gamma_0 - \delta_0) \det(D_+)$$

Proposition 2.9 : La connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)|_V$ est unitaire pour la métrique $\|\cdot\|_{\lambda(\xi)}$. Sa courbure est donnée par

$$(2.24) \quad 2i\pi \left[\int_Z \widehat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right]^{(2)}$$

Preuve : La Proposition 2.9 est une conséquence triviale de la Proposition 2.6. \square

La Proposition 2.9 n'a a priori pas grand intérêt. En effet, elle ne s'applique qu'aux familles d'opérateurs D_+ d'indice zéro, et sur l'ouvert V où D_+ est inversible, i.e. où $\lambda(\xi)$ est canoniquement trivialisé.

Le vrai miracle est que, comme il est montré dans Bismut-Freed [BF1, Sections 1g), 1h)], la construction précédente puisse être étendue à toute la base B et ceci même quand la famille d'opérateurs D_+ n'est pas d'indice zéro. Plus précisément, sur U_a , on commence par munir le fibré $\lambda^a(\xi) \cong \lambda(\xi)$ de la métrique $\|\cdot\|_{\lambda^a(\xi)}$ induite par la métrique L_2 naturelle sur H^∞ et de la connexion ${}^0\nabla^a$ induite par la projection orthogonale de la connexion $\widetilde{\nabla}^u$ sur $H^{\infty,a}$. Les métriques $\|\cdot\|_{\lambda^a(\xi)}$ et les connexions ${}^0\nabla^a$ ne se recollent en général pas en une métrique et une connexion sur $\lambda(\xi)$, i.e. elles ne sont pas compatibles avec les fonctions de transition (2.5). Soit P^a le projecteur orthogonal de H^∞ sur $H^{\infty,a}$. Soit $Q^a = 1 - P^a$. On pose

$$(2.25) \quad \delta_0^a = \int_0^{+\infty} \text{Tr}_s \left[\widetilde{\nabla}^u D \exp(-tD^2) Q^a \right] dt$$

De même si $\zeta^a(s)$ est la fonction

$$(2.26) \quad \zeta^a(s) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(D^2)^{-s} Q^a \right],$$

soit γ_0^a la un-forme sur U^a

$$(2.27) \quad \gamma_0^a = -d \frac{\partial \zeta^a}{\partial s} (0).$$

Definition 2.10 : Soit $\| \cdot \|_{\lambda^a(\xi)}$ la métrique sur $\lambda^a(\xi)$

$$(2.28) \quad \| \cdot \|_{\lambda^a(\xi)} = | \cdot |_{\lambda^a(\xi)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \zeta^a}{\partial s} (0) \right\}.$$

Soit ${}^1\nabla^a$ la connexion sur $\lambda^a(\xi)$

$$(2.29) \quad {}^1\nabla^a = {}^0\nabla^a + \frac{1}{2} (\gamma_0^a - \delta_0^a).$$

Le résultat fondamental de Bismut-Freed [BF2, Théorème 1.21] est alors le suivant .

Théorème 2.11 : Les métriques $\| \cdot \|_{\lambda^a(\xi)}$ et les connexions ${}^1\nabla^a$ sur les fibrés $\lambda^a(\xi)$ induisent une métrique $C^\infty \| \cdot \|_{\lambda(\xi)}$ et une connexion $C^\infty \nabla^{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)$. La connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ est unitaire relativement à la métrique $\| \cdot \|_{\lambda(\xi)}$, et sa courbure est donnée par

$$(2.30) \quad 2i\pi \left[\int_Z \widehat{A} \left(\frac{R^{TZ}}{2\pi} \right) \text{Tr} \left[\exp \left(\frac{-L^\xi}{2i\pi} \right) \right] \right]^{(2)}$$

Remarque 2.12 : La Proposition 2.2 joue un rôle clef dans tout l'édifice. C'est elle qui assure la compatibilité entre le Théorème d'indice local de la Section 1d) et la construction analytique du déterminant de la Section 2a) .

Pour interpréter correctement le Théorème 2.11 , on doit en fait "penser" à $\lambda(\xi)$ comme étant le fibré $(\det H_-^\infty)^{-1} \otimes \det H_+^\infty$. Naturellement comme H_+^∞ et H_-^∞ sont de dimension infinie, ce dernier objet n'a pas de sens "a priori" . Au bout du compte, il en prend un, par la technique d'approximation de ces fibrés de dimension infinie par les fibrés de dimension finie $H_+^{\infty,a}$ et $H_-^{\infty,a}$, et par les techniques d'indice local.

III - MÉTRIQUES DE QUILLEN SUR L'INVERSE DU DÉTERMINANT DE L'IMAGE DIRECTE ET THÉOREME DE COURBURE

Dans cette section, on décrit brièvement certains résultats obtenus par Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3] relatifs aux métriques de Quillen [Q2] sur l'inverse du déterminant de l'image directe par une submersion holomorphe $\pi : M \rightarrow B$ du faisceau des sections holomorphes d'un fibré holomorphe ξ sur M . Les preuves des résultats de [BGS1, 2, 3] reposent partiellement sur la compatibilité des constructions de [BF1, 2] à la structure holomorphe naturelle sur le déterminant de l'image directe.

En a), on spécialise les résultats rappelés à la section 2 au cas où M et B ont des variétés complexes et où $\pi : M \rightarrow B$ est une submersion holomorphe. En b), on construit la métrique de Quillen sur l'inverse du déterminant de l'image directe (au sens de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM]) et on énonce le Théorème de courbure de [BGS1, 2, 3] qui donne une formule explicite pour la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur l'inverse du déterminant de l'image directe muni de la métrique de Quillen.

a) Une submersion holomorphe

On fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 1d). On suppose de plus que M et B sont des variétés complexes, et que $\pi : M \rightarrow B$ est holomorphe.

Soit g^{TM} une métrique Kählérienne sur le fibré tangent complexe TM .

Soit TZ le fibré tangent complexe à la fibre Z . Soit g^{TZ} la métrique induite par g^{TM} sur TZ . Soit $T^H M$ l'orthogonal à TZ dans $T^H M$ pour la métrique g^{TM} .

On vérifie très simplement que la connexion ∇^{TZ} construite à la Section 1d) associée à la métrique g^{TZ} et au fibré $T^H M$ est exactement la connexion holomorphe Hermitienne sur le fibré (TZ, g^{TZ}) .

Soit ξ un fibré holomorphe sur M , muni d'une métrique Hermitienne h^ξ .

Soit $\bar{\partial}^{Z_b}$ l'opérateur $\bar{\partial}$ agissant sur $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\otimes\xi\right)_{|Z_b}\right)$ et soit $\bar{\partial}^{-Z_b^*}$ son adjoint relativement au produit Hermitien L_2 usuel sur $\Gamma\left(\left(\Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right)\otimes\xi\right)_{|Z_b}\right)$.

On pose

$$(3.1) \quad D_b = \bar{\partial}^{Z_b} + \bar{\partial}^{Z_b^*}.$$

Alors $\sqrt{2} D_b$ est un opérateur de Dirac usuel au sens de la Section 1d). Plus précisément, par [H], on a

$$(3.2) \quad \Lambda\left(T^{*(0,1)}Z\right) \cong F \otimes (\det TZ)^{1/2}$$

On peut construire alors le fibré en droite $\lambda(\xi)$ sur B associé à la famille d'opérateur $D_{+,b}$ comme à la Section 2a). De (2.6) et de la Théorie de Hodge, il résulte que pour tout $b \in B$, on a un isomorphisme canonique

$$(3.3) \quad \lambda_b(\xi) \cong \bigotimes_{i=0}^{\dim Z} \left(\det \left(H^i \left(Z_b, \xi|_{Z_b} \right) \right) \right)^{(-1)^{i+1}}$$

Par la construction de Bismut-Freed [BF1,2] exposée à la Section 2c), on peut munir le fibré $\lambda(\xi)$ d'une métrique $\|\cdot\|_{\lambda(\xi)}$ et d'une connexion $\nabla^{\lambda(\xi)}$ unitaire relativement à $\|\cdot\|_{\lambda(\xi)}$, dont la courbure est donnée par

$$(3.4) \quad 2i\pi \left[\int_Z \text{Td}(TZ, g^{TZ}) \text{ch}(\xi, h^\xi) \right]^{(2)}$$

où $\text{Td}(TZ, g^{TZ})$, $\text{ch}(\xi, h^\xi)$ dénotent les représentants canoniques en théorie de Chern-Weil associés aux genres Todd, ch, relativement aux connexions holomorphes Hermitiennes correspondantes.

On observe immédiatement que la forme (3.4) est de type $(1,1)$. Par application d'un résultat de Newlander-Nirenberg [AHS, Théorème 5.1], on tire qu'il existe une structure holomorphe sur le fibré $\lambda(\xi)$ tel que $\nabla^{\lambda(\xi)}$ soit exactement la connexion holomorphe Hermitienne sur $(\lambda(\xi), \|\cdot\|_{\lambda(\xi)})$.

Or par une construction de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], on peut construire sur B un fibré déterminant holomorphe canonique, dit déterminant de l'image directe de ξ par π , dont l'inverse $\lambda^G(\xi)$ est tel que pour $b \in B$

$$(3.5) \quad \lambda_b^G(\xi) \equiv \otimes_{i=0}^{\dim Z} \left(\det \left(H^i \left(Z_b, \xi|_{Z_b} \right) \right) \right)^{(-1)^{i+1}}$$

Une première question naturelle est donc de savoir si l'isomorphisme canonique des fibres de $\lambda(\xi)$ et $\lambda^G(\xi)$ (évident par (3.3), (3.5)) induit un isomorphisme C^∞ de fibrés, où même un isomorphisme de fibrés holomorphes. Si c'était le cas, la métrique $\| \cdot \|_{\lambda(\xi)}$ sur $\lambda(\xi)$ se transporterait en une métrique $\| \cdot \|_{\lambda^G(\xi)}$ sur $\lambda^G(\xi)$ et la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur $(\lambda^G(\xi), \| \cdot \|_{\lambda^G(\xi)})$ serait alors donnée par la forme (3.4).

Une deuxième question fondamentale est alors de savoir si on peut élargir la classe de métriques admissibles sur TZ, de telle sorte que le Théorème de courbure précédent reste vrai.

C'est à cet ensemble de questions que répondent les articles de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, 2, 3]. Nous ne couvrirons dans la suite qu'une partie des résultats de [BGS1,2,3].

b) Métriques de Quillen et Théorème de courbure.

Soit g^{TZ} une métrique Hermitienne arbitraire sur le fibré tangent relatif TZ. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit Hermitien sur $\left(\Lambda \left(T^{*(0,1)} Z \right) \otimes \xi \right)$ associé aux métriques g^{TZ} et h^ξ . Nous allons maintenant construire la métrique de Quillen sur les fibres $\lambda_b^G(\xi)$ de $\lambda^G(\xi)$.

On munit $\Gamma \left(\left(\Lambda \left(T^{*(0,1)} Z \right) \otimes \xi \right) |_{Z_b} \right)$ du produit Hermitien

$$(3.6) \quad \langle \alpha, \alpha' \rangle_b = \int_{Z_b} \langle \alpha, \alpha' \rangle \frac{dv_{Z_b}}{(2\pi)^{\dim Z}}$$

Dans (3.6), dv_{Z_b} désigne la forme volume sur Z_b relativement à la métrique g^{TZ} .

Par la théorie de Hodge, on peut identifier $H(Z_b, \xi|_{Z_b})$ aux formes harmoniques correspondantes sur Z_b . De (3.6), on tire que $\lambda_b^G(\xi)$ porte une métrique $\|\cdot\|_{\lambda_b^G(\xi)}$, dite aussi métrique L_2 sur $\lambda_b^G(\xi)$. Cette métrique n'est en général pas lisse sur $\lambda_b^G(\xi)$.

Soit P_b le projecteur orthogonal de $\Gamma(\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi|_{Z_b})$ sur l'espace vectoriel des formes harmoniques sur Z_b . On pose $Q_b = 1 - P_b$. Soit N_V l'opérateur agissant sur $\Lambda^P(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ par multiplication par p .

Définition 3.1 : Pour $b \in B$, $s \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(s) > \dim Z$ on pose

$$(3.7) \quad \theta_b(s) = -\text{Tr}_s \left[\left[N_V \left(\frac{-Z_b}{\partial} + \frac{-Z_b^*}{\bar{\partial}} \right)^2 \right]^{-s} Q_b \right].$$

Par Seeley [Se], on sait que $\theta_b(s)$ s'étend une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , qui est holomorphe en $s = 0$.

Définition 3.2 : On appelle métrique de Quillen sur la fibre $\lambda_b^G(\xi)$ la métrique $\|\cdot\|_{\lambda_b^G(\xi)}$ donnée par

$$(3.8) \quad \|\cdot\|_{\lambda_b^G(\xi)} = \|\cdot\|_{\lambda_b^G(\xi)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \theta_b}{\partial s}(0) \right\}.$$

L'expression $\exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \theta_b}{\partial s}(0) \right\}$ est la torsion analytique de Ray et Singer [RS].

On a alors le résultat fondamental de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, Théorème 0.1].

Théorème 3.3 : Les métriques $\| \cdot \|_{\lambda_b^G(\xi)}$ sur les fibres de $\lambda^G(\xi)$ induisent une métrique C^∞ sur le fibré holomorphe $\lambda^G(\xi)$.

Si M est Kählérienne, et si la métrique g^{TZ} induit une métrique Kählérienne sur les fibres Z , alors la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne $\nabla^{\lambda^G(\xi)}$ sur le fibré $(\lambda^G(\xi), \| \cdot \|_{\lambda_b^G(\xi)})$ est donnée par

$$(3.9) \quad 2i\pi \left[\int_Z \left(\text{Td } TZ, g^{TZ} \right) \text{ch}(\xi, h^\xi) \right]^{(2)}$$

Preuve : Il est hors de question de décrire en détail la preuve du Théorème 3.3. Disons seulement que quand M est Kählérienne, si g^{TM} est une métrique Kählérienne sur TM , et si g^{TZ} est la métrique induite sur TZ par g^{TM} , on montre (3.9) en prouvant la compatibilité des constructions précédentes aux constructions de Bismut-Freed [BF1,2]. Une étape clef est une construction analytique **explicite** d'une structure holomorphe naturelle sur un fibré en droites proche du fibré considéré par Bismut-Freed.

Dans une deuxième étape, on calcule comment varie la métrique $\| \cdot \|_{\lambda_b^G(\xi)}$ dans une fibre Z_b quand on varie la métrique g^{TZ} dans la classe de métriques Kählériennes sur Z_b . Cette étape est essentiellement nouvelle par rapport à [BF1,2]. On obtient ainsi une généralisation en dimension arbitraire de la formule d'anomalie de Polyakov [Po] établie par Polyakov pour des surfaces de Riemann.

La combinaison de ces deux étapes permet d'obtenir la formule (3.9) pour la courbure $\nabla^{\lambda^G(\xi)}$. □

Remarque 3.4 : Inversement, du Théorème 3.3, on peut déduire la formule d'anomalie généralisée de [BGS3].

Remarque 3.5 : Les résultats de [BGS 1, 2, 3] représentent une rigidification considérable des résultats de [BF1,2]. Ils ne sont en aucun cas une conséquence immédiate de [BF1,2].

IV - IMMERSIONS COMPLEXES ET METRIQUES DE QUILLEN

Soit $i : Y \rightarrow X$ un plongement de variétés compactes complexes, soit η un fibré holomorphe sur Y et soit (ξ, ν) un complexe de fibrés holomorphes sur X qui résoud le faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$. Par Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], les déterminants de la cohomologie de η et ξ sont canoniquement isomorphes. Il est alors naturel de comparer les métriques de Quillen correspondantes, pour obtenir ainsi un raffinement du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les immersions.

L'objet de cette section est d'énoncer le résultat de Bismut-Lebeau [BL1,2] qui répond complètement à cette question.

Dans a), on rappelle la construction par Bismut [B3], et Bismut-Gillet-Soulé [BGS4] de courants dits de Bott-Chern sur X , naturellement associés aux données précédentes, et à des métriques Hermitiennes sur les différents fibrés considérés. Ces courants interviennent de manière essentielle dans la formule finale de [BL1,2]. Dans b), on rappelle brièvement les résultats de Bismut-Gillet-Soulé [BGS5] de compatibilité fonctorielle des courants [BGS4] à une formule raffinée de Riemann-Roch-Grothendieck. Enfin dans c), on énonce les résultats de Bismut-Lebeau [BL1,2], où interviennent les courants de [BGS4] et un genre additif $R(X)$ introduit par Gillet et Soulé [GS4] dans une conjecture sur une généralisation en dimension arbitraire du Théorème de Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4] sur les courbes.

En conjuguant les résultats de [B3], [BL1,2], [BGS1-5], [GS1-3], Gillet et Soulé [GS4] viennent d'obtenir la version souhaitée d'un Théorème à la Faltings-Riemann-Roch pour le déterminant de la cohomologie.

a) Plongements complexes

Soit $i : Y \rightarrow X$ un plongement de variétés compactes complexes. Soit η un fibré holomorphe sur Y . Soit

$$(4.1) \quad (\xi, \nu) : 0 \rightarrow \xi_m \rightarrow \xi_{m-1} \dots \rightarrow \xi_0 \rightarrow 0$$

un complexe de fibrés holomorphes sur X , et soit r une application de restriction $\xi_{0|Y} \rightarrow \eta$ telle qu'on ait la suite exacte de faisceaux

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(\xi_m) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X(\xi_0) \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y(\eta) \rightarrow 0$$

De manière équivalente, le complexe (ξ, ν) résoud le faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$.

Soit N le fibré normal à Y dans X . Par l'unicité locale des résolutions [S, Chapitre IV, Appendice 1], [E, Théorème 8] on sait que si (y, z) est un système de coordonnées locales près de $y_0 \in Y$ tel que $z=0$ soit l'équation de Y , si $\tilde{N}, \tilde{\eta}$ sont des extensions de N, η sur un voisinage U de y_0 , alors sur U , on a

$$(4.3) \quad (\xi, \nu) \cong (\wedge \tilde{N}^* \otimes \eta, i_z) \oplus (A, a)$$

où $(\wedge \tilde{N}^*, i_z)$ est le complexe de Koszul de \tilde{N}^* et où (A, a) est un complexe acyclique.

Pour $y_0 \in Y$, soit $H_{y_0}(\xi, \nu)$ l'homologie du complexe $(\xi, \nu)_{y_0}$. Pour $z \in N_{y_0}$, soit $\partial_z \nu(y_0)$ la dérivée de ν dans une direction Z représentant z dans TX_{y_0} . On montre dans [B3, Théorème 1.2] que $\partial_z \nu(y_0)$ est défini sans ambiguïté, agit sur $H_{y_0}(\xi, \nu)$ et que de plus $(\partial_z \nu(y_0))^2 = 0$.

Soit π la projection $N \rightarrow Y$. Par [S], [E], [B3, Théorème 1.2], on a un isomorphisme canonique de complexes sur N

$$(4.4) \quad (\pi^* H(\xi, \nu), \partial_z \nu) \cong (\pi^* (\wedge N^* \otimes \eta), i_z)$$

En particulier les $H_{y_0}(\xi, \nu)$ sont les fibres d'un fibré holomorphe \mathbb{Z} -gradué sur Y .

Soient $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ des métriques Hermitiennes sur ξ_0, \dots, ξ_m . On pose $h^\xi = \bigoplus_0^m h^{\xi_k}$. Soit g^N, g^η des métriques Hermitiennes sur N, η . Alors g^N, g^η induisent une métrique naturelle sur $\Lambda N^* \otimes \eta$.

Soit ν^* l'adjoint de ν relativement à la métrique h^ξ sur ξ . Par la théorie de Hodge, si $y_0 \in Y$, on a l'identification

$$(4.5) \quad H_{y_0}(\xi, \nu) \cong \{f \in \xi_{y_0}; \nu f = 0; \nu^* f = 0\}$$

De (4.5), on tire que $H_{y_0}(\xi, \nu)$ hérite d'une métrique h^H , qui est la restriction de la métrique $h^\xi = \bigoplus_0^m h^{\xi_k}$ au membre de droite de (4.5).

Par [B3, Proposition 1.6], on sait qu'étant données g^N, g^η , on peut trouver des métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ telles que (4.4) soit un isomorphisme de complexes de fibrés hermitiens. Dans toute la suite, on supposera que cette hypothèse, dite hypothèse (A), est vérifiée.

Soit ∇^ξ la connexion holomorphe Hermitienne sur (ξ, h^ξ) . On pose

$$(4.6) \quad V = \nu + \nu^* .$$

On utilise maintenant le formalisme de la Section 1. δ_Y désigne le courant d'intégration sur Y . On a le résultat fondamental de [B3, Théorème 3.2].

Théorème 4.1 : Quand $u \rightarrow +\infty$, on a la convergence de courants sur X

$$(4.7) \quad \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\nabla^\xi + \sqrt{u} V \right)^2 \right) \right] \rightarrow \operatorname{Td}^{-1}(N, g^N) \operatorname{ch}(\eta, g^\eta) \delta_Y$$

Preuve : La preuve de [B3] est assez technique. Elle utilise de manière très précise la théorie de Hodge de $(\xi, \nu)_{\mathcal{Y}}$. Le calcul final résulte d'une formule de Mathai-Quillen [MQ, Théorème 4.5]. □

Remarque 4.2 : Dans [B3], V^2 joue le rôle d'un potentiel, et Y d'un puits de potentiel, où l'opérateur autoadjoint positif V^2 à des valeurs propres nulles.

Soit $N_H \in \text{End}(\xi)$ l'opérateur agissant sur ξ_k par multiplication par k . On a la formule de [BGS1, Théorème 1.15], [B3, Théorème 2.4].

Théorème 4.3 : Pour tout $u > 0$ on a

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial u} \varphi \text{Tr}_s \left[\exp \left(- \left(\nabla^\xi + \sqrt{u} V \right)^2 \right) \right] =$$

$$\frac{\partial \bar{\partial}}{2i\pi} \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{N_H}{u} \exp \left(- \left(\nabla^\xi + \sqrt{u} V \right)^2 \right) \right]$$

Soit $(\text{Td}^{-1})'(x_1, \dots, x_q)$ le genre

$$(4.9) \quad (\text{Td}^{-1})'(x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial}{\partial b} \left[\text{Td}(x_1 + b, \dots, x_q + b) \right]_{b=0}.$$

Par [B3, Théorème 4.3], dans l'espace de Sobolev adéquat, quand $u \rightarrow +\infty$, on a

$$(4.10) \quad \varphi \text{Tr}_s \left[N_H \exp \left(- \left(\nabla^\xi + \sqrt{u} V \right)^2 \right) \right] =$$

$$- (\text{Td}^{-1})'(N, g^M) \text{ch}(\eta, g^\eta) \delta_{\mathcal{Y}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

En suivant Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, Définition 2.1], on pose maintenant la définition suivante.

Définition 4.4 : Pour $s \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$, soit $R(\xi, h^\xi)(s)$ le courant sur X

$$(4.11) \quad R(\xi, h^\xi)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} u^{s-1} \left(\varphi \operatorname{Tr}_s \left[N_H \exp \left(- \left(\nabla^\xi + \sqrt{u} \nabla \right)^2 \right) \right] \right. \\ \left. + (\operatorname{Td}^{-1})'(N, g^M) \operatorname{ch}(\eta, g^\eta) \delta_Y \right) du$$

Alors $R(\xi, h^\xi)(s)$ s'étend en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, qui est holomorphe en 0.

Définition 4.5 : Soit $T(\xi, h^\xi)$ le courant sur X

$$(4.12) \quad T(\xi, h^\xi) = \frac{\partial}{\partial s} R(\xi, h^\xi)(0)$$

On a le résultat de [BGS4, Théorème 2.5]

Théorème 4.6 : Le courant $T(\xi, h^\xi)$ est somme de courants de type (p, p) . Le front d'onde du courant $T(\xi, h^\xi)$ est inclus dans N_R^* . De plus, on a l'équation de courants sur X

$$(4.13) \quad \frac{\bar{\partial} \partial}{2i\pi} T(\xi, h^\xi) = \frac{\operatorname{ch}(\eta, g^\eta)}{\operatorname{Td}(N, g^M)} \delta_Y - \operatorname{ch}(\xi, h^\xi).$$

b) Compatibilité des courants $T(\xi, h^\xi)$ à une formule raffinée de Riemann-Roch-Grothendieck.

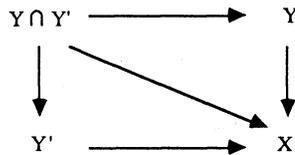
Par (4.13), les courants $ch(\xi, h^\xi)$ et $\frac{ch(\eta, g^\eta)}{Td(N, g^N)} \delta_Y$ sont cohomologues. Ce résultat exprime un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les immersions. La compatibilité de la formule de Riemann-Roch-Grothendieck aux immersions est en particulier liée à la multiplicativité du genre Todd.

Les courants $T(\xi, h^\xi)$ sont déterminés par l'immersion i et par les fibrés hermitiens considérés. Une question naturelle est alors de savoir si ces courants sont, en un sens naturel, fonctoriellement compatibles aux immersions.

Soit Y, Y' deux sous-variétés complexes transversales de X . Soit η, η' des fibrés holomorphes sur Y, Y' , soient $(\xi, v), (\xi', v')$ des complexes de fibrés holomorphes sur X résolvant η, η' . Alors $(\xi \widehat{\otimes} \xi', v + v')$ résout $\eta|_{Y \cap Y'} \otimes \eta'|_{Y \cap Y'}$.

On a le diagramme commutatif d'immersions

(4.14)



Etant données des métriques sur les fibrés considérés, on peut attacher un courant à chaque flèche de (4.14).

On montre dans Bismut-Gillet-Soulé [BGS5, Théorème 2.7] qu'il existe des relations naturelles entre les courants $T(\xi, h^\xi), T(\xi', h^{\xi'}), T(\xi \widehat{\otimes} \xi', h^\xi \widehat{\otimes} h^{\xi'})$ qui raffinent de manière "évidente" les relations existantes au niveau des formes de caractères

de Chern pour ξ , ξ' et $\widehat{\xi \otimes \xi'}$. Ce résultat fonde au plan analytique la possibilité d'une version raffinée du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

De plus on a montré dans [BGS5, Théorème 4.13] la compatibilité des courants $T(\xi, h^\xi)$ aux classes caractéristiques arithmétiques de Gillet et Soulé [GS1,2].

c) Une formule de Riemann-Roch-Grothendieck raffinée pour les immersions complexes

Soit $\lambda^G(\eta)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de η . De même pour $0 \leq i \leq m$, soit $\lambda^G(\xi_i)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ_i . On pose

$$(4.15) \quad \lambda^G(\xi) = \bigotimes_{i=0}^m \left(\lambda^G(\xi_i) \right)^{(-1)^i}.$$

Comme le complexe (ξ, v) résoud $i_*\eta$, par Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], les fibres $\lambda^G(\xi)$ et $\lambda^G(\eta)$ sont canoniquement isomorphes. Soit $\sigma \in (\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ la section non nulle définissant cet isomorphisme.

Supposons que g^{TX} soit une métrique Kählérienne sur TX , induisant une métrique Kählérienne g^{TY} sur TY . En identifiant N à l'orthogonal de TY dans $TX|_Y$, N est muni d'une métrique g^N . Soit g^η une métrique Hermitienne sur η .

Soient $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ des métriques sur ξ_0, \dots, ξ_m vérifiant l'hypothèse de compatibilité (A) de [B3] relativement aux métriques g^N, g^η sur N, η .

Soient $\| \cdot \|_{\lambda^G(\eta)}$ et $\| \cdot \|_{\lambda^G(\xi)}$ les métriques de Quillen sur les fibres $\lambda^G(\eta)$ et $\lambda^G(\xi)$ (la métrique $\| \cdot \|_{\lambda^G(\xi)}$ est naturellement définie comme le produit alterné des métriques de Quillen $\| \cdot \|_{\lambda^G(\xi_i)}$). Soit $\| \cdot \|_{(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)}$ la métrique sur $(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)$ associée aux métriques $\| \cdot \|_{\lambda^G(\eta)}, \| \cdot \|_{\lambda^G(\xi)}$.

Il est naturel de chercher une formule pour $\text{Log}(\|\sigma\|_{(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)}^2)$. Ce calcul vise en effet à raffiner au niveau des métriques de Quillen un calcul de compatibilité pour les formes de courbure des connexions holomorphes Hermitiennes sur les fibrés holomorphes Hermitiens $(\lambda^G(\eta), \|\cdot\|_{\lambda^G(\eta)})$, $(\lambda^G(\xi), \|\cdot\|_{\lambda^G(\xi)})$ par composition d'une immersion suivie d'une submersion, qu'on vérifie facilement grâce aux résultats de Bismut-Gillet-Soulé [BGS3, 4] rappelés aux Théorèmes 3.15 et 4.13.

Le calcul de $\text{Log}(\|\sigma\|_{(\lambda^G(\eta))^{-1} \otimes \lambda^G(\xi)}^2)$ est l'objet d'un travail de Bismut-Lebeau [BL2], dont les résultats ont été annoncés dans [BL1].

Nous nous contenterons ici d'énoncer le résultat principal de [BL2], dont la preuve est difficile.

Soit P^Y l'ensemble des formes C^∞ sur Y , qui sont sommes de formes de type (p, p) . Soit $P^{Y,0}$ le sous-espace de P^Y formé de formes de type $\partial\alpha + \bar{\partial}\beta$, où α et β sont C^∞ sur Y .

Par une construction de [BGS1, Section 1f)], à la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens

$$(4.16) \quad 0 \rightarrow TY \rightarrow TX|_Y \rightarrow N \rightarrow 0.,$$

on peut associer une classe de formes C^∞ $\tilde{Td}(TY, TX|_Y, g^{TX|_Y}) \in P^Y/P^{Y,0}$, telle que

$$(4.17) \quad \begin{aligned} & \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \tilde{Td}(TY, TX|_Y, g^{TX|_Y}) \\ &= Td(TX|_Y, g^{TX|_Y}) - Td(TY, g^{TY}) Td(N, g^N) \end{aligned}$$

Cette classe est normalisée par le fait qu'elle vérifie des conditions naturelles de fonctorialité et qu'elle est nulle si la suite exacte (4.16) est scindée holomorphiquement et métriquement.

Introduisons maintenant une série formelle de Gillet et Soulé [GS3]. Soit $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann.

Definition 4.7 : Soit $R(x)$ la série formelle

$$(4.18) \quad R(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(2 \frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) \zeta(-n) \frac{x^n}{n!}$$

Gillet et Soulé [GS3] ont obtenu la série $R(x)$ par un calcul difficile et explicite de la torsion analytique de Ray-Singer de $P^n(\mathbb{C})$ muni de la métrique de Fubini-Study. Ils ont conjecturé que le genre additif correspondant devrait intervenir dans une formule à la Faltings-Riemann-Roch [F, Théorème 3], [La, Théorème V 3.4] pour des variétés arithmétiques de dimension arbitraire.

Dans un calcul préparatoire à l'établissement d'une formule pour $\text{Log}(\|\sigma\|_{(\lambda G(\eta))^{-1} \otimes \lambda G(\xi)}^2)$, nous avons construit dans [B4] une classe caractéristique secondaire naturelle associée à une suite exacte courte

$$(4.19) \quad 0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

de fibrés holomorphes Hermitiens. Cette classe est essentiellement une sorte de caractère de Chern secondaire associé à une famille non triviale d'opérateurs elliptiques agissant sur les fibres de M . Dans ce calcul intervient le genre additif associé à la fonction $D(x)$, qui est la dérivée en 0 par rapport à $s \in \mathbb{C}$ de la transformée de Mellin en la variable u de la dérivée logarithmique par rapport à $x \in \mathbb{C}$ de l'inverse de la fonction

$$(4.20) \quad \varphi(u, x) = \frac{4}{u} \text{sh} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4u}}{4} \right) \text{sh} \left(\frac{-x + \sqrt{x^2 + 4u}}{4} \right)$$

On obtient alors dans [B4, Théorème 6.2] la formule de produit remarquable

$$(4.21) \quad \varphi(u, x) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{ix}{2k\pi} + \frac{u}{4k^2\pi^2} \right) \left(1 - \frac{ix}{2k\pi} + \frac{u}{4k^2\pi^2} \right)$$

qui rend particulièrement plaisante l'expression de la dérivée logarithmique de $\varphi(u, x)$ en la variable en x . On notera au passage - ce qui n'est pas un hasard - que

$$(4.22) \quad \varphi(0, x) = \widehat{A}^{-1}(x)$$

Dans un calcul mené avec Soulé dans [B4, Appendice], nous avons obtenu la formule

$$(4.23) \quad D(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(2 \frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} + \sum_1^n \frac{1}{j} + \Gamma'(1) \right) \zeta(-n) \frac{x^n}{n!}$$

Dans l'établissement de (4.22), l'équation fonctionnelle de la fonction ζ joue un rôle essentiel.

La similarité des formules (4.18) et (4.23) est incroyable, car les calculs qui y mènent sont radicalement différents. On peut espérer donner une interprétation géométrique de cette singularité.

Rappelons que R est identifié au genre additif correspondant.

Nous énonçons maintenant le résultat essentiel de Bismut-Lebeau [BL2, Théorèmes 0.1 et 6.1].

Théorème 4.8 : On a la formule

$$\begin{aligned} \text{Log} \left(\left\| \sigma \right\|_{\left(\lambda \begin{matrix} G \\ \eta \end{matrix} \right)^{-1} \otimes \lambda(\xi)} \right)^2 &= - \int_X \text{Td}(TX, g^{TX}) T(\xi, h^\xi) \\ &+ \int_Y \frac{\widetilde{\text{Td}}(TY, TX|_Y, g^{TX|_Y})}{\text{Td}(N, g^N)} \text{ch}(\eta, g^\eta) \\ &- \int_X \text{Td}(TX) R(TX) \text{ch}(\xi) + \int_Y \text{Td}(TY) R(TY) \text{ch}(\eta) \end{aligned}$$

Il est hors de question de donner ici des indications, même brèves, sur la preuve du Théorème 4.8. On utilise l'ensemble des techniques d'indice local, la théorie spectrale dans des situations très dégénérées, les propriétés de propagation à vitesse finie des équations hyperboliques etc...

La simplicité relative de la formule finale est elle-même le résultat d'un concours invraisemblable de circonstances analytiques et algébriques. Les calculs de [B4] interviennent dans la phase finale de la démonstration.

Le résultat de Bismut-Lebeau [BL1,2] a permis récemment à Gillet et Soulé [GS4] d'obtenir une version d'un Théorème de Riemann-Roch arithmétique à la Arakelov-Faltings. En particulier les calculs de [GS3] et [B4] se conjuguent pour expliquer la simplicité de la formule finale.

REFERENCES

- [ABoP] Atiyah, M.F., Bott, R., Patodi, V.K. : On the heat equation and the Index Theorem. *Invent. Math.* 19, 279-330 (1973).
- [AHS] Atiyah, M. F., Hitchin, N.J., Singer, I.M. : Self-duality in four dimensional Riemannian geometry, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 362, 425-461 (1978).
- [APS] Atiyah, M.F., Patodi V.K., Singer I.M. : Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 77, 43-69 (1975).
- [AS1] Atiyah, M.F., Singer I.M. : The index of elliptic operators. III *Ann. of Math.* 87, 546-604 (1968).
- [AS2] Atiyah, M.F., Singer I.M. : The index of elliptic operators. IV *Ann. Math.* 93, 119-138 (1971).
- [BeV] Berline N., Vergne M. : A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators. *Topology* 26, 435-463 (1987).
- [BeGeV] Berline N., Getzler E., Vergne M. : Heat kernels and the Dirac operator. En préparation 1989.
- [B1] Bismut, J.M. : The index Theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs. *Invent. Math.* 83, 91-151 (1986).
- [B2] Bismut, J.M.: Formules de Lichnerowicz et théorème de l'indice. Proceedings of the Conference in honour of A. Lichnerowicz. D. Bertrand, Y. Choquet-Brutat ed. Vol. *Géom. Diff.*, pp. 11-31. Travaux en cours. Paris : Hermann 1988.
- [B3] Bismut, J.M.: Superconnection currents and complex immersions. *Invent. Math.* 59-113 (1990).

- [B4] Bismut, J.M.: Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class. *J.A.M.S.* 3, 159-256 (1990).
- [BF1] Bismut, J.-M., Freed D.S. : The analysis of elliptic families I, Metrics and connections on determinant bundles. *Comm. Math. Phys.* 106, 159-176 (1986).
- [BF2] Bismut, J.-M., Freed D.S. : The analysis of elliptic families II, Dirac operators, eta invariants and the holonomy Theorem. *Comm. Math. Phys.* 107, 103-163 (1986).
- [BGS1] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. *Comm. Math. Phys.* 115, 49-78 (1988).
- [BGS2] Bismut J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. *Comm. Math. Phys.* 115, 79-126 (1988).
- [BGS3] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. *Comm. Math. Phys.* 115, 301-351 (1988).
- [BGS4] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Bott-Chern currents and complex immersions. *Duke Math. Journal* 60, 255-284(1990).
- [BGS5] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Complex immersions and Arakelov geometry. *The Grothendieck Festschrift, P. Cartier et al. eds. Vol I*, pp. 249-331. *Progress in Math.* n° 86. Boston : Birkhäuser 1990.
- [BL1] Bismut, J.M., Lebeau, G. : Immersions complexes et métriques de Quillen. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math* 309, 487-491 (1989).
- [BL2] Bismut, J.M., Lebeau, G. Complex immersions and Quillen metrics. Preprint Orsay 90-13 (1990). A paraître aux *Publ. Math. IHES.*
- [E] Eilenberg, S. : Homological dimension and local syzygies. *Ann. of Math.* 64, 328-336 (1956).

- [F] Faltings G. : Calculus on arithmetic surfaces. *Ann. of Math.* 119, 387-424 (1984)
- [Ge] Getzler, E. : A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem. *Topology* 25, 111-117 (1986).
- [Gi1] Gilkey, P. : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *Adv. Math.* 10, 344-382 (1973).
- [Gi2] Gilkey, P. : Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. Washington : Publish or Perish 1984.
- [GS1] Gillet, H., Soulé, C. : Arithmetic Intersection Theory, 1988, Preprint IHES/M/88/30.
- [GS2] Gillet, H., Soulé, C : Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metrics. *Ann. Math. I.* 131, 163-203 (1990). II 131, 205-238 (1990).
- [GS3] Gillet, H., Soulé, C : Analytic torsion and the arithmetic Todd genus. A paraître dans *Topology*. Preprint IHES/M/88/12.
- [GS4] Gillet, H., Soulé, C : Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique. *C.R.A.S. Série I*, 309, 929-932 (1989).
- [H] Hitchin, N.J. : Harmonic spinors. *Adv. in Math.* 14, 1-55 (1974).
- [KM] Knudsen, F.F., Mumford, D. : The projectivity of the moduli space of stable curves, I : Preliminaries on "det" and "div". *Math. Scand.* 39, 19-55 (1976).
- [L] Lichnerowicz, A. : Spineurs harmoniques. *C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A*, 257, 7-9 (1963).
- [La] Lang, S. : Introduction to Arakelov Theory. Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1988.

- [MQ] Mathai V. Quillen D. : Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology* 25, 85-110 (1986).
- [P] Patodi , V.K. : Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differ. Geom.* 5, 233-249 (1971)
- [Po] Polyakov, A.M. : Quantum geometry of bosonic strings. *Phys. Letters* 103B, 207-210 (1981).
- [Q1] Quillen, D.: Superconnections and the Chern character. *Topology*, 24, 89-95 (1985).
- [Q2] Quillen, D.: Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface. *Funct. Anal. Appl.* 14, 31-34 (1985).
- [RS] Ray, D.B., Singer, I.M. : Analytic torsion for complex manifolds. *Ann.of Math.*98, 154-177 (1973) .
- [S] Serre, J.P. : Algèbre locale. Multiplicités. *Lecture Notes in Math.* n° 11. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1965.
- [Se] Seeley, R.T. : Complex powers of an elliptic operator. *Proc. Symp. Pure and Appl. Math.* AMS 10, 288-307 (1967)

Département de Mathématique
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 - Orsay
FRANCE

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVONNE CHOQUET-BRUHAT

Yang-Mills-Higgs fields in three space time dimensions

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 73-97

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__73_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

YANG-MILLS-HIGGS FIELDS
IN THREE SPACE TIME DIMENSIONS

Yvonne Choquet-Bruhat

Département de Mécanique, Université Paris VI

INTRODUCTION.

The global existence on Minkovski space-time $M_{n,1}$ of solutions of the Yang-Mills equations coupled with the Higgs equations for a scalar multiplet has been proved for $n = 1$ or 2 by Ginibre and Velo (1981), for $n = 3$ by Eardley and Moncrief (1981) on the one hand, by Choquet-Bruhat and Christodoulou (1981) on the other hand (the global existence in this article is proved only for small Cauchy data, but includes also spinor sources and the corresponding gauge covariant Dirac equation).

The proof of Ginibre and Velo rests on the local existence theorem obtained by Segal (1978) using the temporal gauge and semi-group theory, and on a priori estimates in this temporal gauge deduced from energy conservation and "higher" energy non blow up for $n = 1$ or 2 . These estimates are not sufficient to complete the proof in the case $n = 3$. The complete proof of Eardley and Moncrief uses, in addition, estimates of the L^∞ norms of the fields and potential through the use of another gauge (the Cronström gauge) and the properties of the solutions of the usual d'Alembert equation with a source on M_4 . Choquet-Bruhat and Christodoulou use the conformal transformation of M_4 onto an open bounded set of the Einstein cylinder $S^3 \times \mathbb{R}$. The proof of Eardley-Moncrief does not seem to extend in any easy way from M_4 to another lorentzian manifold. The proof of Choquet-Bruhat and Christodoulou extends only to lorentzian manifold which are asymptotically minkovskian at infinity. On the opposite, we shall show in this article that the proof of Ginibre and Velo on M_2 or M_3 extends to a general globally hyperbolic manifold of dimension 2 or 3, even if the Yang-Mills bundle is not trivial, when we use the local existence theorem proved on such manifolds in temporal gauge by Choquet-Bruhat, Paneitz and Segal (1983).

1. FIELDS.

A space time (V_{n+1}, g) is a C^∞ manifold endowed with a lorentzian metric, that is a pseudo riemannian metric of signature $(-, +, +, \dots)$.

We denote by P a C^∞ principal bundle with base V_{n+1} and group a Lie group G . We suppose that G admits a non-degenerate bi-invariant metric, for instance is the product of abelian and semi-simple groups. The Lie algebra \mathcal{G} admits then an Ad invariant non degenerate scalar product, denoted by a dot, which enjoys the property :

$$(1.1) \quad a \cdot [b, c] = [a, b] \cdot c .$$

When we shall prove global existence, we shall suppose moreover that this scalar product is positive. A Yang-Mills connection (or potential) is usually defined as a 1-form ω on P with values in \mathcal{G} , enjoying various properties. Its representant in a local trivialization of P over $U \subset V_{n+1}$,

$$\varphi : p \mapsto (x, a), \quad p \in P, \quad x \in U, \quad a \in G,$$

is the 1-form $s^* \omega$ on U , where s is the local section of P corresponding canonically to the local trivialization,

$$s(x) = \varphi^{-1}(x, e),$$

called a gauge in the physics litterature. Let $A_{(I)}$ and $A_{(J)}$ be representants of ω in gauges s_I and s_J over U_I and U_J , then in $U_I \cap U_J$:

$$(1.2) \quad A_{(I)} = \text{Ad}(u_{IJ}^{-1}) A_{(J)} + u_{IJ}^* \theta_{Mc},$$

where θ_{Mc} is the Maurer-Cartan form on G , and

$$u_{IJ} : U_I \cap U_J \rightarrow G$$

is the transition function between the two local trivializations :

$$s_I = R_{u_{IJ}} s_J, \quad R_{u_{IJ}} \text{ right translation on } P \text{ by } u_{IJ}$$

The property (1.2) leads to the following definition, equivalent to

the usual one.

Définition 1 : Given the principal bundle $P \rightarrow V_{n+1}$, a Yang-Mills potential A on V_{n+1} is a section of the (fibered) tensor product :

$$T^* V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}} P_{Aff, \mathcal{G}} ,$$

where $P_{Aff, \mathcal{G}}$ is the affine bundle with base V_{n+1} and typical fiber \mathcal{G} associated to P via the relation (1.2).

Note : Let \tilde{A} be a given Yang-Mills potential on V_{n+1} , then $A - \tilde{A}$ is a section of the tensor product of vector bundles :

$$T^* V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}} P_{Ad, \mathcal{G}} ,$$

where $P_{Ad, \mathcal{G}} = P \times_{Ad} \mathcal{G}$ is the vector bundle associated to P by the adjoint representation of G on \mathcal{G} .

Remark : There is a scalar product in the fibers of $P_{Ad, \mathcal{G}}$, deduced from the Ad invariant scalar product on \mathcal{G} .

The curvature Ω of the connection ω considered as a 1-form on P is a \mathcal{G} -valued 2-form on P . Its representant in a gauge where ω is represented by $A_{(i)}$ is given by

$$(1.3) \quad F_{(i)} = dA_{(i)} + \frac{1}{2} [A_{(i)}, A_{(i)}] ,$$

and the relation between two representants is

$$(1.4) \quad F_{(i)} = Ad(u_{ij}^{-1}) F_{(j)} \quad \text{in } U_i \cap U_j .$$

We have therefore for the Yang-Mills field equivalent to the curvature :

Définition 2 : The Yang-Mills field is a section of the vector bundle $\Lambda^2 T^* V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}} P_{Ad, \mathcal{G}}$ given by

$$(1.5) \quad F = dA + \frac{1}{2} [A, A] ,$$

where (1.5) means that (1.3) is satisfied in each local

trivialization.

We also say that F is a 2-form on V_{n+1} of type (Ad, \mathcal{G}) .

In local coordinates on V_{n+1} , and for a choice of a basis (ε_a) of \mathcal{G} a representative of F has components $F_{\lambda\mu}^a$ given by

$$F_{\lambda\mu}^a = \partial_\lambda A_\mu^a - \partial_\mu A_\lambda^a + C_{bc}^a A_\lambda^b A_\mu^c,$$

where C_{bc}^a are the structure constants of G .

In addition to the Yang-Mills field, many physical theories consider a scalar multiplet or "Higgs field".

Définition 3 : A Higgs field Φ is a section of a vector bundle P_{r, \mathbb{C}^N} over V_{n+1} with typical fiber \mathbb{C}^N (or \mathbb{R}^N) associated to P via a unitary (or orthogonal) representation r of G : the representants $\Phi_{(i)}$ and $\Phi_{(j)}$ are linked by

$$\Phi_{(i)} = r(u_{ij}) \Phi_{(j)} \quad \text{in } U_i \cap U_j.$$

A particular case when G is itself a unitary group $U(N)$ in matrix representation is

$$r(u_{ij}) \Phi_{(j)} = u_{ij} \Phi_{(j)}, \quad \text{action of } u_{ij} \text{ on } \Phi_{(j)} \in \mathbb{C}^N.$$

In all cases, we have a scalar product in the fibers of P_{r, \mathbb{C}^N} deduced from the hermitian scalar product in \mathbb{C}^N , invariant under the unitary group.

2. COVARIANT DERIVATIVES.

We call P -tensor a differentiable section of a vector bundle

$$E = \otimes^p T^* V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}} P_\rho,$$

where P_ρ is a vector bundle associated to P by the representation ρ of G . If V_{n+1} is endowed with a metric g , the vector bundle $\otimes^p T^* V_{n+1}$ has a natural connection, deduced from the riemannian connection of g , while P_ρ has a connection deduced from the connection A of P , with representative $SA_{(i)}$ if A is represented by $A_{(i)} \in \mathcal{G}$, S being the mapping from \mathcal{G} into the Lie algebra of

$\rho(G)$ deduced from ρ . The covariant derivative of a P-tensor f is defined by using these two connections : if $f = h \otimes k$ we define for any tangent vector v to V_{n+1} :

$$(2.1) \quad \hat{\nabla}_v f = \nabla_v h \otimes k + h \otimes \hat{\nabla}_v k ,$$

where ∇ is the riemannian covariant derivative, and $\hat{\nabla}_v k$ the usual gauge covariant derivative. The derivative $\hat{\nabla}_v f$ is extended by linearity to all sections of E . It is also a section of E , and depends linearly on v ; we define $\hat{\nabla} f$ as the section of

$$T^* V_{n+1} \otimes^p T^* V_{n+1} \otimes P_\rho$$

obtained through this linearity. If $A_{(i)}$ is the representative of the Yang-Mills potential in a local trivialization of P_ρ , and $f_{(i)}$ the representative of f , a p -tensor with values in a fixed vector space, we have :

$$\hat{\nabla} f_{(i)} = \nabla f_{(i)} + S A_{(i)} f_{(i)} ,$$

which we often write, omitting the index (i) :

$$\hat{\nabla} f = \nabla f + S \wedge f .$$

The same reasoning applies to sections $\otimes^p T V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}}^{\otimes p} P_\rho$.

Examples :

1° The Yang-Mills field F is a section of $\otimes^2 T^* V_{n+1} \otimes_{V_{n+1}}^{\otimes 2} P_{(Ad, \mathcal{G})}$. Its covariant derivative is :

$$\hat{\nabla} F = \nabla F + [A, F] .$$

2° If G is a unitary group $U(N)$, and the Higgs field is a section of the vector bundle $P_{(id, \mathbb{C}^N)}$ with fiber \mathbb{C}^N the representation space of G , then :

$$\hat{\nabla} \Phi = \nabla \Phi + \wedge \Phi .$$

3. EQUATIONS AND IDENTITIES.

The simplest way to obtain intrinsic equations for the fields is to derive them from an intrinsic lagrangian. The physical lagrangian densities, leading to second order equations for the potential A and the field Φ , are of the form :

$$(3.1) \quad L \equiv \frac{1}{2} F \cdot F + \hat{\nabla} \Phi \cdot \hat{\nabla} \Phi + V(|\Phi|^2) \quad ,$$

where the dot denotes the scalar product in the fibers of the relevant vector bundles and

$$(3.2) \quad |\Phi|^2 = \Phi \cdot \Phi \quad ;$$

V is some smooth function (self interaction potential).

We shall moreover suppose that $V(0) = 0$. The case $V(0) \neq 0$ (for instance the cosmic strings) can be treated by alterations of the present method, or by working directly in local spaces.

The stationary points (A, Φ) of the lagrangian of density (3.1), with respect to arbitrary variations $(\delta A, \delta \Phi)$, with compact support in V_{n+1} , are the solutions of the following intrinsic equations.

1° Yang-Mills equations, (Ad, \mathcal{G}) valued vector equation on V_{n+1} :

$$(3.3) \quad \hat{\delta} F = J \quad , \quad \text{i. e.} \quad \hat{\nabla}_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu \quad ,$$

where the current J^μ is the (Ad, \mathcal{G}) valued vector with components :

$$(3.4) \quad J^\mu = (S\Phi \cdot \hat{\nabla}^\mu \Phi + \hat{\nabla}^\mu \Phi \cdot S\Phi) \quad .$$

2° Higgs equation, (r, \mathbb{C}^N) valued scalar equation on V_{n+1} :

$$(3.5) \quad \hat{\nabla}^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \Phi = V'(|\Phi|^2) \Phi \quad ,$$

where V' is the derivative of V .

It is well known that the Yang-Mills field, curvature of the Yang-Mills potential A , satisfies the Bianchi identity :

$$(3.6) \quad \hat{d} F \equiv 0 \quad ,$$

where \hat{d} is the totally antisymmetrized covariant derivative, that is,

in coordinates on $V_{n,1}$:

$$(3.6) \quad \hat{\nabla}_\alpha F_{\beta\gamma} + \hat{\nabla}_\gamma F_{\alpha\beta} + \hat{\nabla}_\beta F_{\gamma\alpha} \equiv 0 \quad .$$

It also satisfies the identity :

$$(3.7) \quad \hat{\delta}^2 F \equiv 0 \quad , \quad \text{i. e.} \quad \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} \equiv 0 \quad .$$

The equation (3.5) implies that the current J satisfies the equation :

$$(3.8) \quad \hat{\delta} J = 0 \quad , \quad \text{i. e.} \quad \hat{\nabla}_\mu J^\mu = 0 \quad ,$$

hence the system (3.3),(3.5) is coherent.

Remark : The intrinsic lagrangian (3.1) is invariant under diffeomorphisms of $V_{n,1}$ (with induced transformations on $\otimes^p T^* V_{n,1}$ and g) and automorphisms of P (with induced transformations on the associated bundles). The "conservation" (3.8) of the current J is a consequence of the second invariance. The first invariance leads to the conservation of the stress energy tensor which we shall use later, for a priori estimates.

4. CAUCHY PROBLEM.

We suppose, in this article, that the manifold $V_{n,1}$ is of the type $S \times \mathbb{R}$, with $S_t = S \times \{t\}$ space like for g , and $x \times \{\mathbb{R}\}$ time like. We denote by X the tangent to $x \times \{\mathbb{R}\}$, and by n the normal to S_t . Adapted local coordinates will be $x^0 = t$, and (x^i) , $i = 1, \dots, n$, local coordinates in S .

The Cauchy problem for a Y.M.H. system is the determination of a solution from data on the submanifold $S_0 \equiv S \times \{0\}$. These data are Cauchy data.

- 1° A section a over S_0 of the bundle $T^* S_0 \otimes P_{Aff, \mathcal{G}}$;
- 2° A section a_0 over S_0 of the bundle $P_{Aff, \mathcal{G}}$;
- 3° A section \bar{E} over S_0 of the bundle $T V_{n,1} \otimes P_{Ad, \mathcal{G}}$, i. e. a tangent vector to S_0 of type (Ad, \mathcal{G}) ;
- 4° A section φ and a section $\dot{\varphi}$ over S_0 of the bundle P_{r, \mathbb{C}^N} , i. e.

scalar multiplets of type (r, \mathbb{C}^N) .

A solution (A, F, Φ) of the Y.M.H. system is said to take these initial data if :

1°

$$(4.1) \quad i^* \Lambda = a \quad ,$$

where i^* is the pull back $T^* V \rightarrow T^* S_0$ deduced from the inclusion mapping $S_0 \rightarrow V_{n+1}$;

2°

$$(4.2) \quad A.X|_{S_0} = a_0$$

(where the dot denotes the interior product between $T^* V$ and TV defined by the metric g) ;

3°

$$F.n|_{S_0}^\# = \bar{E}$$

(i. e. $F^{\lambda\mu} n_\lambda|_{S_0} = \bar{E}^\mu$, we have $\bar{E}^0 = 0$, \bar{E} is tangent to S_0) ;

4°

$$\Phi|_{S_0} = \varphi \quad , \quad X.\hat{\nabla} \Phi|_{S_0} = \dot{\varphi}$$

5. CONSTRAINT.

It is easy, to see, in coordinates adapted to the slicing $V = S \times \mathbb{R}$, that the equation

$$(5.1) \quad \hat{\nabla}_\lambda F^{\lambda 0} = J^0 \quad \text{restricted to } S_0$$

depends only on the Cauchy data. It is therefore a constraint to be satisfied by these data. It reads in local coordinates and gauge, since F is antisymmetric :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (F^{j0} \sqrt{g}) + [A_j, F^{j0}] = J^0 \quad \text{on } S_0 \quad ,$$

with \bar{g} the metric induced by g on S_0 and, in our signature :

$$|g^{00}|^{-1/2} = |g(X, n)| = N = -n_0 \quad ,$$

hence

$$(5.2) \quad F^{j0} N|_{S_0} = -\bar{E}^j \quad ,$$

and the constraint reads ($\bar{\nabla}$ metric derivative in the metric \bar{g}) :

$$\bar{\nabla}_j \bar{E}^j + [a_j, \bar{E}^j] = J^0 n_0|_{S_0} \quad ,$$

which can be written intrinsically :

$$(5.3) \quad \hat{d}\text{iv } \bar{E} = q \quad , \quad q = J.n|_{S_0} \quad ;$$

J is given by (3.4), hence q is a quadratic polynomial in the Cauchy data $\varphi, \dot{\varphi}$.

It can be proved that the operator $\hat{d}\text{iv}$ is the L^2 -adjoint of the operator $\hat{g}\text{rad}$ mapping scalars on $V_{n,1}$ of type (Ad, \mathcal{G}) into 1-forms on V_{n+1} of type (Ad, \mathcal{G}) , given in any representation by

$$f \mapsto \hat{g}\text{rad } f = df + [a, f] \quad ,$$

and that the operator $\hat{\Delta} = \hat{d}\text{iv } \hat{g}\text{rad}$ is an elliptic operator on V_{n+1} . In appropriate functional spaces depending on S , we shall have a L^2 -orthogonal splitting saying that the constraint (5.3) has solutions \bar{E} for any q orthogonal to the kernel of the operator $\hat{g}\text{rad}$. In particular, if this kernel is empty (we then say that the potential a is "generic"), the equation (5.3) has solutions \bar{E} for arbitrary q . Examples of generic potentials on a compact manifold S are given in Choquet-Bruhat and Christodoulou (1981). For an asymptotically euclidean (S, \bar{g}) , and in appropriate functional spaces capturing the asymptotically zero character of the fields :

$$\hat{g}\text{rad } u = 0 \quad \text{implies} \quad u = 0$$

(because $\hat{g}\text{rad } u = 0$ implies $\text{grad } |u|^2 = 0$), and the constraint (5.3) has solutions for arbitrary q in appropriate functional space (for instance, a weighted Sobolev space).

6. TEMPORAL GAUGE.

To solve the evolution problem of a Y.M.H. field from Cauchy data one chooses a gauge, that is one imposes an extra condition on the potential such that the Y.M.H. truncated by using this extra condition becomes a hyperbolic system with domain of dependance determined by the null cone of the metric, in order to satisfy the relativistic causality requirement. Since we are interested in non trivial bundles P , we shall adopt the active view point for gauge transformations, that is we consider them as automorphisms of P . The temporal gauge for a potential A will be defined with respect to some given smooth potential \check{A} on V_{n+1} .

Définition : The potential A is said to be in \check{A} -temporal gauge, if the vector $(A - \check{A})^\#$ of type (Ad, \mathcal{G}) is orthogonal to the time line, that is :

$$(6.1) \quad A_0 - \check{A}_0 = 0 .$$

In the case where P is trivial, it is possible to work with representations globally defined on V_{n+1} , and to choose \check{A} such that its representative is zero.

Lemma : For an arbitrary potential A , there is an automorphism of P , such that its transform by this automorphism is in \check{A} -temporal gauge.

Proof : We want to find a mapping $u : V_{n+1} \rightarrow G$ such that the (Ad, \mathcal{G}) valued scalars A_0 and \check{A}_0 are linked by, in physicist notation :

$$(6.2) \quad u^{-1} A_0 u + u^{-1} \partial_0 u = \check{A}_0 ;$$

this is a differential equation for u which can be solved from initial data on S , for instance $u|_S = \mathbb{1}$, the unit of G (cf. I. Segal (1979) for the case $V_{n+1} = M^{n+1}$, $\check{A}_0 = 0$).

The Y.M. equations truncated by the \check{A} -temporal gauge do not appear at first sight as a hyperbolic system. We set :

$$B = A - \check{A} , \quad (Ad, \mathcal{G}) \text{ valued 1-form on } V_{n+1} .$$

We have, by a straightforward computation :

$$(6.3) \quad F_{\lambda\mu} \equiv \check{F}_{\lambda\mu} + \check{\nabla}_{\lambda} B_{\mu} - \check{\nabla}_{\mu} B_{\lambda} + [B_{\lambda}, B_{\mu}] ,$$

where $\check{\nabla}$ is the riemannian, and $\check{\Delta}$ covariant derivative, and \check{F} the curvature of $\check{\Delta}$; then :

$$(6.4) \quad \hat{\nabla}_{\lambda} F^{\lambda\mu} \equiv \check{\nabla}_{\lambda} F^{\lambda\mu} + [B_{\lambda}, F^{\lambda\mu}] .$$

In $\check{\Delta}$ temporal gauge, $B_0 = 0$, and the Yang-Mills equations with unknown B split into the constraint :

$$(6.5) \quad \hat{\nabla}^{\lambda} F_{\lambda 0} \equiv \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_{\lambda} B_0 - \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_0 B_{\lambda} + \check{\nabla}^{\lambda} [B_{\lambda}, B_0] \\ + \check{\nabla}^{\lambda} \check{F}_{\lambda 0} + [B^{\lambda}, F_{\lambda 0}] = J_0$$

(we have left B_0 in the formula because the riemannian part of its covariant derivative does not necessarily vanish, it may contain B_1 , but not its derivative) :this equation does not contain second derivatives of B_1 transversal to the S_t , and the evolution equations :

$$(6.6) \quad \hat{\nabla}^{\lambda} F_{\lambda 1} \equiv \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_{\lambda} B_1 - \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_1 B_{\lambda} + \check{\nabla}^{\lambda} [B_{\lambda}, B_1] + [B^{\lambda}, F_{\lambda 1}] = J_1 ;$$

the operator on the B_i 's in these equations is not hyperbolic, it is a non diagonal operator with multiple characteristics : its characteristic cone at a point of V_{n+1} is $(n - 1)$ copies of the null cone of the metric g and two copies of the tangent to the time line. We obtain a hyperbolic operator for B_1 by combining equations (6.5) and (6.6). If (6.5) and (6.6) are satisfied, B_1 satisfies a system of the form :

$$(6.7) \quad \check{\nabla}_0 J_1 - \check{\nabla}_1 J_0 = \check{\nabla}_0 \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_{\lambda} B_1 + h_1 ,$$

where the h_1 depend on the B_i 's, and their derivatives only up to second order.

Expressed in terms of the given $\check{\Delta}$ and the unknown B , the Higgs equation reads, since

$$(6.8) \quad \hat{\nabla} \phi = \check{\nabla} \phi + S B \phi ,$$

$$(6.9) \quad \hat{\nabla}^{\lambda} \hat{\nabla}_{\lambda} \phi \equiv \check{\nabla}^{\lambda} \check{\nabla}_{\lambda} \phi + H = V \cdot (|\phi|^2) \phi ,$$

where H depends on Φ and B and their first order derivatives.

The equations (6.7) together with the equations for the Higgs field form at each point of V_{n+1} , and in any representation a hyperbolic system in Leray's sense, with characteristic cone one copy of the null one and one copy of the tangent to the time line, interior to the null cone by hypothesis, the domain of dependance is therefore determined by that cone.

7. REGULARLY HYPERBOLIC MANIFOLDS.

The Leray theory of hyperbolic systems is formulated for sets of numerical valued functions over a manifold V_{n+1} . Such a system is globally hyperbolic, if it is hyperbolic at each point, and the set of time like paths (i. e. with future tangent interior to the future characteristic cone, the manifold is supposed to be "time oriented") is empty or compact, in the set of paths. When the system is semi linear, the characteristics, hence the global hyperbolicity, does not depend on the solutions. When moreover the outer sheet of the characteristic cone is the null cone of g , the hyperbolic system is globally hyperbolic if, and only if, the manifold (V_{n+1}, g) is globally hyperbolic. It is known (Geroch, 1969) that V_{n+1} is then a product $S \times \mathbb{R}$ with $S_t = S \times \{t\}$ space like and $\{x\} \times \mathbb{R}$ time like. We shall make somewhat stronger hypothesis on (V_{n+1}, g) , which we shall call "regular hyperbolicity".

A manifold (V_{n+1}, g) will be said to be regularly hyperbolic (it is then globally hyperbolic), if :

1° $V_{n+1} = S \times \mathbb{R}$ is the direct product of a smooth manifold S of dimension n and \mathbb{R} .

2° The metric g is of signature $(- , + , + , \dots)$. The submanifolds $S_t = S \times \{t\}$ are space like ; their unit future directed normal is denoted by n , $g(n, n) = -1$. The curves $\{x\} \times \mathbb{R}$ are time like. Their tangent vector is denoted by X , $g(X, X) < 0$. We suppose that:

(a) There exist numbers $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ such that, on V_{n+1} :

$$(5.1) \quad \alpha \leq |g(X, X)|^{1/2} \leq |g(X, n)| \leq \beta$$

Remark : On a lorentzian manifold with our signature hypothesis, we always have, since X and n are time like and future directed (increasing t) :

$$(5.2) \quad g(X, n) < 0, \quad |g(X, n)| \geq |g(X, X)|^{1/2} |g(n, n)|.$$

We set $N = -g(X, n)$ (lapse function).

(b) The properly riemannian metrics \bar{g}_t , induced on each S_t by the metric g , are all uniformly equivalent to some smooth riemannian metric \bar{g} : there exists $k_1 > 0$ and $k_2 > 0$ such that:

$$(5.3) \quad k_1 \bar{g}(\xi, \eta) \leq g_t(\xi, \eta) \leq k_2 \bar{g}(\xi, \eta), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad \xi, \eta \in TS$$

We suppose the metric \bar{g} has a non zero injectivity radius (hence is complete).

We have:

Lemma: On a regularly hyperbolic manifold, there exists a smooth properly riemannian metric e defined by the contravariant tensor (recall $g(X, n) = -N$):

$$(5.4) \quad e^\# = g^\# + N(X \otimes n + n \otimes X).$$

8. GAUGE INVARIANT SOBOLEV SPACES.

Local existence theorems for the solutions of the Cauchy problem for sections of bundles over V_{n+1} of the type considered in previous paragraphs can be obtained by working with representatives in open sets $U \subset V_{n+1}$ over which P is trivialized, for which the usual theorems with ordinary Sobolev spaces apply, and using uniqueness theorems to glue together these solutions. However, it is more in the spirit of the theory to work with gauge invariant objects, and it becomes fundamental for the proof of global existence theorems. We first define the Sobolev space W_g^p for tensors of type (Ad, \mathcal{G}) or (r, \mathbb{C}^N) on (S, \bar{g}) , given some smooth Yang-Mills potential \check{a} on S . We now suppose the Ad -invariant scalar product in \mathcal{G} positive definite.

Definition: The space W_g^p of tensors of some given order and type over S is the completion of the space C_0^∞ of C^∞ such tensors with compact support with respect to the norm:

$$\|f\|_{W_s^p} = \left(\sum_{0 \leq k \leq s} \int_S |D^k f|^p d\bar{\mu} \right)^{1/p},$$

$1 \leq p < \infty$, s non negative integer, $d\bar{\mu}$ volume element of \bar{g} , Df \bar{g} riemannian and \check{a} gauge derivative, $\|\cdot\|$ norm at a point corresponding to the scalar products deduced from \bar{g} and the Ad-invariant scalar product in \mathfrak{G} .

We set $H_s = W_s^2$. It is a Hilbert space, W_s^p is a Banach space.

It can be proved that the usual Sobolev inequalities and multiplication theorems are valid for these spaces W_s^p , as well as the Gagliardo-Nirenberg inequality :

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^r}^{1-\sigma} \|Df\|_{L^p}^\sigma,$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\sigma}{r} + \sigma \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right), \quad 0 \leq \sigma < 1,$$

$$1 \leq p \leq r, \quad q < q_1, \quad q_1 = +\infty \text{ if } n \leq p,$$

$$q_1 = \frac{np}{n-p} \text{ if } n > p,$$

C a constant depending only on (S, \bar{g}) .

Let now a be another, non necessarily smooth Yang-Mills potential.

Lemma : If $a - \check{a} \in W_s^p$, $f \in W_s^p$ and $s > \frac{n}{p}$, then :

$$\|f\|_{\hat{W}_s^p} = \left\{ \sum_{0 \leq k \leq s} \|\hat{\nabla}^k f\|_{L^p}^p \right\}^{1/p}$$

is finite ; moreover there exists a constant C such that :

$$\|f\|_{W_s^p} \leq C(1 + \|a - \check{a}\|_{\hat{W}_s^p} \|f\|_{\hat{W}_s^p}).$$

Proof : Uses the relation between $\hat{\nabla}$ and $\check{\nabla}$ and the Sobolev multiplication theorem.

Moreover, it can be proved that the Sobolev and Nirenberg-Gagliardo inequalities are valid when $\| \cdot \|_{W_s^p}$ is replaced by $\| \cdot \|_{\hat{W}_s^p}$.

We denote by $V_{n+1}(T)$ the manifold $S \times (-T, T)$, and by $E_s(T)$ a space of P -tensors of some given type on $V_{n+1}(T)$ which is the closure of the space of C_0^∞ such tensors with respect to the norm :

$$\|f\|_{E_s(T)} = \sup_{|t| < T} \left\{ \int_{S_t} \sum_{0 \leq k \leq s} |\check{\nabla}^k f|^2 d\mu_t \right\} .$$

$E_s(T)$ is a Banach space.

Remark : $V_{n+1} = S \times \mathbb{R}$, hence admits an atlas with domains of maps of the type $U_{(I)} \times \mathbb{R}$, $U_{(I)}$ homeomorphic to \mathbb{R}^n . The principal fiber bundle P can therefore be trivialized over $U_{(I)} \times \mathbb{R}$, the transition functions are of the form :

$$u_{(IJ)} : (U_I \cap U_J) \times \mathbb{R} \rightarrow G .$$

If we suppose, to simplify our work, that the bundle structure is time independant, that is that there exists a family of local trivializations covering P , called admissible, such that the transition functions do not depend on t . There exists then Yang-Mills potentials \check{A} whose representation in every admissible local trivialization is such that $\check{A}_0 = 0$ and $\check{a} = i_t^* \check{A}$ does not depend on t , where i_t is the embedding of S_t in V_{n+1} . By strengthening moreover regular hyperbolicity to boundedness of curvature and an appropriate number of its derivations (cf. Choquet-Bruhat, Christodoulou and Francaviglia, Cagnac and Choquet-Bruhat, and for full details and proofs, Cagnac), we can show that :

$$E_s(V_T) = \bigcap_{0 \leq k \leq s} C^k([-T, T], H_{s-k}(S)) .$$

9. LOCAL EXISTENCE.

The usual functional machinery can be used together with the definitions of § 8 to prove the existence of the solutions of the Cauchy problem on a small enough time interval I .

Theorem 1 (local existence in temporal gauge) : *The Y.M.H. system in \check{A} temporal gauge admits a solution in $E_s(T)$ on $V_T = S \times (-T, T)$ taking the Cauchy data on S :*

$$b, \varphi \in H_s; \quad \bar{b}, \bar{\varphi} \in H_{s-1}, \quad s \geq 2,$$

if $s > \frac{n}{2}$ and T is small enough.

T depends only on the $H_{s_0} \times H_{s_0-1}$ norm of the Cauchy data, with s_0 the smallest integer such that $s_0 > \frac{n}{2}$, $s_0 \geq 2$.

The solution depends continuously on the Cauchy data. The support of the solution is in the future of the Cauchy data; its trace on S_t , $|t| < T$, is compact if the support of the Cauchy data is compact. Hence a solution in $E_s(T)$ is a limit of solutions in $C_0^\infty(T)$.

Remark : The proof that we have given is valid only for $s \geq 2$; it is no further restriction than $s > \frac{n}{2}$ if $n > 1$. For $n = 1$, one can prove the following corollary :

Corollary : In the case $n = 1$, the solution exists on V_T , T small enough if :

$$b, \varphi, \bar{E} - \check{E} \in H_1, \quad \bar{\varphi} \in L^2.$$

The solution is in $E_s(T)$, if the data are respectively in H_s and H_{s-1} .

Theorem 2 (local existence for the original system) : *The solution in $E_s(V_T)$ of the Y.M.H. equations in \check{A} -temporal gauge satisfies the original Y.M.H. equations, if the Cauchy data satisfy the constraint.*

Proof : Denote by $f_\mu \equiv \hat{\nabla}_\lambda F^{\lambda\mu} - J^\mu = 0$ the original Y.M. equations. The equations we solved are, in addition to the Higgs equation (3.5):

$$(9.1) \quad \check{\nabla}_0 f_1 - \check{\nabla}_1 f_0 = 0.$$

It can be proved, using (9.1), (3.5), and the identities (3.7), that the f_μ satisfy a linear homogeneous system which take zero Cauchy data if the original Cauchy data satisfy the constraint.

10. ENERGY ESTIMATE.

Standard reasoning shows that the solution will exist on $V_{n,j}$ if we can find a continuous function C on \mathbb{R} such that any local solution

on a manifold V_T satisfies the a priori estimate, with $f = (B, \Phi)$:

$$\|f\|_{E_g(T)} \leq C(T), \quad s > \frac{n}{2}.$$

The backbone for the obtention of such estimates is the energy inequality, energy conservation in the case of a stationary space-time. It is sufficient to prove the estimate for solutions in $C_0^\infty(T)$, since any solution in $E_g(T)$ is limit of such solutions. The lemma of § 8 proves moreover that it is sufficient to obtain these estimates for the $\hat{E}_g(T)$ norms.

Definition : The stress energy tensor of a Y.M.H. field with self interaction potential V is the usual 2-tensor on V_{n+1} (dots are products in the scalar product deduced from the Ad-invariant one, we have written indices to explicit the g scalar products) :

$$(10.1) \quad T_{\alpha\beta} = F_\alpha^\lambda \cdot F_{\beta\lambda} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} \cdot F^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \{ \hat{\nabla}_\alpha \Phi \cdot \hat{\nabla}_\beta \Phi + \hat{\nabla}_\beta \Phi \cdot \hat{\nabla}_\alpha \Phi - g_{\alpha\beta} (\hat{\nabla}_\lambda \Phi \cdot \hat{\nabla}^\lambda \Phi + V(|\Phi|^2)) \}.$$

Its covariant divergence $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ modulo the Y.M.H. equations, as could be foreseen (cf. § 3).

The energy momentum vector relative to X is :

$$(10.2) \quad P^\alpha = T_{\beta}^\alpha X^\beta,$$

and the energy density relative to S_t is found to be :

$$(10.3) \quad \epsilon \equiv T_{\alpha\beta} n^\alpha X^\beta = \frac{N-1}{4} |F|^2 + |\hat{\nabla}\Phi|^2 + \frac{1}{2} V(|\Phi|^2),$$

where the norms at a point of V_{n+1} of a P-tensor is taken in the positive definite scalar products deduced from the Ad-invariant product in \mathcal{G} and from the properly riemannian metric (5.4) on V_{n+1} .

The energy density is positive if :

$$(10.4) \quad V(\zeta) \geq 0 \quad \text{for} \quad \zeta \geq 0,$$

which we shall suppose from now on.

The energy at time t exists, for $|t| < T$, if the fields F and $\hat{\nabla}\Phi$ as well as $V(|\Phi|^2)$ are in $E_0(T)$, and is given by :

$$y(t) = \int_{S_t} \varepsilon \, d\mu_t \quad .$$

We suppose from now on that :

$$(10.5) \quad V(0) = 0 \quad .$$

The energy is then defined for fields whose support has a compact trace in S_t . For solutions of the Y.M.H. system in $C_0^\infty(T)$, we deduce from the equality :

$$\nabla_\alpha P^\alpha = T_{\alpha\beta} (\nabla^\alpha X^\beta + \nabla^\beta X^\alpha) = T.LX \quad ,$$

the energy equality :

$$(10.6) \quad y(t) = y(0) + \int_0^t \int_{S_\tau} T.LX \, d\mu_\tau \, d\tau \quad .$$

hence the energy inequality, with C_0 some constant depending only on (V_{n+1}, g) and X :

$$(10.7) \quad y(t) \leq y(0) + C_0 \int_0^t y(\tau) \, d\tau \quad .$$

If X is a Killing field of (V_{n+1}, g) , then $C_0 = 0$; the energy is conserved. If $C_0 \neq 0$, the inequality implies that the continuous function y satisfies on V_T (Gronwall lemma) :

$$(10.8) \quad y(t) \leq C(t) \quad \text{with} \quad C(t) = y(0) \exp(C_0 t) \quad .$$

This estimate bounds the E_0 norm of F and $\hat{\nabla}\Phi$, hence the L^2 norms of $B = A - \check{A}$ in \check{A} -temporal gauge and the norm of Φ in such a gauge, by using the relations

$$\check{\nabla}_0 B_i + \Gamma_{0i}^j B_j = F_{0i} - \check{F}_{0i} \quad , \quad \check{\nabla}_0 \Phi = \hat{\nabla}_0 \Phi \quad ,$$

which are first order differential operators along the time line when

F_{01} and $\hat{\nabla}_0 \phi$ are given and lead to the inequalities :

$$\|B\|_t^2 \leq \|B\|_0^2 + C \int_0^t \{ \|B\|_\tau^2 + \|B\|_\tau (\|F\|_\tau + \|\check{F}\|_\tau) \} d\tau ,$$

where C depends only on (V_{n+1}, g) , and $\| \cdot \|_t$ stands for $\| \cdot \|_{L^2(S_t)}$, and :

$$\|\Phi\|_t^2 \leq \|\Phi\|_0^2 + 2 \int_0^t \|\Phi\|_\tau \|\hat{\nabla}_0 \Phi\|_\tau d\tau .$$

These inequalities lead to estimates :

$$\|\Phi\|_t \leq C(t) , \quad \|B\|_t \leq C(t) ,$$

when such estimates are known for F and $\hat{\nabla}\phi$.

The estimates in E_0 -norm of B , F , ϕ , $\hat{\nabla}\phi$ is not sufficient to obtain an estimate of $\check{\nabla}\phi$, and is not sufficient to have global existence even for $n = 1$.

11. SECOND ENERGY ESTIMATE.

To bound the derivatives $\hat{\nabla}F$ and $\hat{\nabla}^2 \phi$, one considers the 2-tensor

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = e^{\lambda\mu} \{ \hat{\nabla}_\lambda F_{\alpha\rho} \cdot \hat{\nabla}_\mu F_{\beta\rho} - \frac{1}{4} \hat{\nabla}_\lambda F_{\rho\sigma} \cdot \hat{\nabla}_\mu F^{\rho\sigma} \} \\ + \text{Re} \{ \hat{\nabla}_\lambda \hat{\nabla}_\alpha \phi \cdot \nabla_\mu \hat{\nabla}_\beta \phi - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \hat{\nabla}_\lambda \hat{\nabla}_\rho \phi \cdot \hat{\nabla}_\mu \nabla^\rho \phi \} .$$

We have :

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} \chi^\alpha \chi^\beta = \frac{1}{4} N^{-1} |\hat{\nabla}F|^2 + |\hat{\nabla}^2 \phi|^2 ,$$

and we show, by using the Ricci identity, that, when the Y.M.H. field equations are satisfied, $\nabla_\alpha T_{(1)}^{\alpha\beta}$ is a sum of terms of the form, where juxtaposition denotes scalar product, Lie bracket or action of the constant linear operator S :

$$f f \hat{\nabla} f , \quad f = F \text{ or } \hat{\nabla} \phi ,$$

and, if g is non flat or $\nabla n \neq 0$, terms $f \hat{\nabla} f$, and moreover, if $V \neq 0$:

$$V \cdot (|\Phi|^2) \hat{\nabla} \Phi \hat{\nabla}^2 \Phi \quad \text{and} \quad V'' \cdot (|\Phi|^2) \Phi \Phi \hat{\nabla} \Phi \hat{\nabla}^2 \Phi .$$

The integration of the relation :

$$\nabla_\alpha (T_{(1)}^{\alpha\beta} X_\beta) = X_\beta \nabla_\alpha T_{(1)}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} T_{(1)} . LX$$

leads to an inequality of the form, with C, C_1, C_2 constants depending only on (V_{n+1}, g, P) (remark : $C_i = 0$ if $(V_{n+1}, g) = M_{n+1}$) :

$$(11.1) \quad y_1(t) \leq y_1(0) + C \int_0^t y_1(\tau) d\tau + C_1 \int_0^t \int_{S_\tau} |f|^2 |\hat{\nabla} f| d\mu_\tau d\tau \\ + C_1 \int_0^t \int_{S_\tau} |f| |\hat{\nabla} f| d\mu_\tau d\tau + C_2 \int_0^t \int_{S_\tau} \{ |V \cdot (|\Phi|^2)| |\hat{\nabla} \Phi| |\hat{\nabla}^2 \Phi| \\ + |V'' \cdot (|\Phi|^2)| |\Phi|^2 |\hat{\nabla} \Phi| |\hat{\nabla}^2 \Phi| \} d\mu_\tau d\tau$$

where

$$(11.2) \quad y_1(t) = \int_{S_t} |\hat{\nabla} f|^2 d\mu_t .$$

with

$$(11.3) \quad |\hat{\nabla} f|^2 = \frac{1}{4} N^{-1} |\hat{\nabla} F|^2 + |\hat{\nabla}^2 \Phi|^2 .$$

We have :

$$(11.4) \quad \int_{S_\tau} |f| |\hat{\nabla} f| d\mu_\tau \leq \|f\|_{L^4(S_\tau)} \|\hat{\nabla} f\|_{L^4(S_\tau)} .$$

To estimate

$$(11.5) \quad \int_{S_\tau} |f|^2 |\hat{\nabla} f| d\mu_\tau \leq \|f\|_{L^4(S_\tau)}^2 \|\hat{\nabla} f\|_{L^4(S_\tau)}$$

through the estimate of $\|f\|_{L^4}$ obtained in the previous paragraph, we use the Gagliardo-Nirenberg inequality when $n < 4$:

$$(11.6) \quad \|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2}^{1-\sigma} \|\hat{\nabla} f\|_{L^2}^\sigma ,$$

with

$$\frac{1}{4} = \frac{1-\sigma}{2} + \sigma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) , \quad \text{i. e. } \sigma = \frac{n}{4} , \quad n < 4 .$$

which gives :

$$\int_{S_\tau} |f|^2 |\hat{\nabla}f| d\mu_\tau \leq C \|f\|_{L^2(S_\tau)}^{(4-n)/4} \|\hat{\nabla}f\|_{L^2(S_\tau)}^{n/2+1} .$$

This inequality, inserted in (11.1), will lead, when the estimate of $y(t)$ from the previous paragraph is used, to an inequality containing no power ≥ 1 of $y_1(\tau)$ if :

$$\frac{n}{2} + 1 \leq 2 , \quad \text{i. e. } n \leq 2 .$$

Therefore :

Lemma : If $n \leq 2$ and $V \equiv 0$, the function $y_1(t)$ satisfies an estimate :

$$y_1(t) \leq C_1(t) .$$

where the continuous function $C_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ depends only on (S, g, P) and, continuously, on $y_1(0)$.

12. GLOBAL EXISTENCE THEOREM FOR $n = 1$.

When $n = 1$, the local existence theorem is valid for $b, \bar{E}, \varphi \in H_1, \hat{\varphi} \in L^2$. An a priori estimate of the $E_1(T)$ norm of the solution for F and $\hat{\nabla}\psi$ is sufficient to obtain the global existence. The previous paragraph leads to this a priori estimate if $V \equiv 0$. No further restriction on V than $V \in C^2$ with $V \geq 0$ and $V(0) = 0$ supposed in previous paragraphs is necessary to obtain the a priori estimate of $y_1(t)$ if $n = 1$. Indeed, the estimate of $y(t)$ and a Sobolev inequality shows that, for our $C_0^\infty(T)$ fields, the L^∞ norm of ψ admits an estimate :

$$\|\psi\|_{L^\infty(S_t)} \leq C(t) .$$

The function $V(|\psi|^2)$, $V'(|\psi|)$ and $V''(|\psi|)$, admits estimates of the same type, if V is C^2 .

Theorem : The Y.M.H. equations with regular bundle P over a $V_{1,1}$ regularly hyperbolic manifold admit a global solution, if :

- (a) The potential V is C^2 , non negative, and $V(0) = 0$;
- (b) The Cauchy data b, φ are in H_2 , $\bar{E}, \dot{\varphi}$ are in H_1 , and satisfy the constraint.

13. GLOBAL EXISTENCE THEOREM FOR $n = 2$.

For $n = 2$, the local existence is valid for $b, \varphi \in H_2$, $\bar{E}, \dot{\varphi} \in H_1$. However, since we have no way of finding directly a priori estimates for B , but have to use the relation giving B in terms of F , we need to find a priori estimates for F in E_2 . This estimate is obtained by considering the tensor :

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = e^{\lambda_1 \mu_1} e^{\lambda_2 \mu_2} (\hat{\nabla}_{\lambda_1} \hat{\nabla}_{\lambda_2} \hat{F}_\alpha^\rho \cdot \hat{\nabla}_{\mu_1} \hat{\nabla}_{\mu_2} F_{\beta\rho} - \frac{1}{4} \hat{\nabla}_{\lambda_1} \hat{\nabla}_{\lambda_2} F_{\rho\sigma} \cdot \hat{\nabla}_{\mu_1} \hat{\nabla}_{\mu_2} F^{\rho\sigma} + 2\rho e \hat{\nabla}_{\lambda_1} \hat{\nabla}_{\lambda_2} \hat{\nabla}_\alpha \Phi \cdot \hat{\nabla}_{\mu_1} \hat{\nabla}_{\mu_2} \hat{\nabla}_\beta \Phi - g_{\alpha\beta} \hat{\nabla}_{\lambda_1} \hat{\nabla}_{\lambda_2} \hat{\nabla}_\rho \Phi \cdot \hat{\nabla}_{\mu_1} \hat{\nabla}_{\mu_2} \hat{\nabla}_\sigma \Phi)$$

then :

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} \chi^\alpha n^\beta = \frac{1}{4} N^{-1} |\hat{\nabla}^2 F|^2 + |\hat{\nabla}^3 \Phi|^2,$$

while $\nabla_\alpha T_{(2)}^{\alpha\beta}$ is found to be, modulo the Y.M.H. equations, a sum of terms of the form, with $f = F$ or $\hat{\nabla}\Phi$:

$$f \hat{\nabla} f \hat{\nabla}^2 f,$$

and, if g is non flat :

$$\text{Riem}(g) \hat{\nabla} f \hat{\nabla}^2 f, \quad \nabla \text{Riem}(g) f \hat{\nabla}^2 f.$$

We set, for $C_0^\infty(T)$ fields :

$$(12.1) \quad y_2(t) = \int_{S_t} |\hat{\nabla}^2 f|^2 d\mu_t.$$

and we find, by the same method as in previous paragraphs, that, if $V \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
 (12.2) \quad y_2(t) &\leq y_2(0) + C_1 \int_0^t y_2^{1/2}(\tau) \left\{ \int_{S_\tau} |\hat{\nabla}f|^2 |f|^2 d\mu_\tau \right\}^{1/2} d\tau \\
 &+ C_2 \int_0^t (y_2^{1/2}(\tau) + y_1^{1/2}(\tau)) y_2^{1/2}(\tau) d\tau + C_3 \int_0^t \int_{S_\tau} \{ |V \cdot (|\phi|^2)| |\hat{\nabla}^2 \phi| \\
 &+ V \cdot (|\phi|^2) |\phi| (|\hat{\nabla}\phi|^2 + |\phi| |\hat{\nabla}^2 \phi|) + V \cdot (|\phi|^2) |\phi|^3 |\hat{\nabla}\phi|^2 \} |\hat{\nabla}^3 \phi| d\mu_\tau d\tau
 \end{aligned}$$

We use again the Cauchy-Schwarz and the Gagliardo-Nirenberg inequalities to obtain, if $n < 4$, here with $n = 2$, L^q standing for $L^q(S_\tau)$:

$$\left\{ \int_{S_\tau} |\hat{\nabla}f|^2 |f|^2 d\mu_\tau \right\}^{1/2} \leq \|f\|_{L^4} \|\hat{\nabla}f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2}^{1/2} \|\hat{\nabla}f\|_{L^2} \|f\|_{L^2}^{1/2}$$

which leads to an integral inequality containing only powers $\frac{1}{2}$ and 1 of y_2 , when the estimates previously found for y and y_1 are used.

Note that the use of the more general Gagliardo-Nirenberg inequality:

$$\|D^j u\|_{L^p} \leq C \|D^m u\|_{L^2}^a \|u\|_{L^2}^{1-a}, \quad a = \frac{j}{m} + \frac{n}{2m} - \frac{n}{pm}, \quad \frac{j}{m} \leq a < 1$$

does not lead either to an estimate of $y_1 + y_2$ when $n \geq 2$.

Lemma 2 : If $n = 2$ and $V \equiv 0$, the function y_2 satisfies an estimate :

$$y_2(t) \leq C_2(t)$$

with $C_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous function depending only on (V_{n+1}, g, P) and, continuously, on $y(0), y_1(0)$ and $y_2(0)$.

We now consider the case $V \neq 0$. We deduce from the estimate of $y(t)$ and a Sobolev inequality that, for a $C_0^\infty(T)$ field we have, if $n = 2$

$$(12.3) \quad \|\phi\|_{L^q} \leq C(t), \quad 2 \leq q < \infty,$$

hence the coefficient of C_2 in (11.1) is bounded by :

$$(12.4) \quad \int_0^t \{ \| |V'| (|\Phi|^2) | + |V'' (|\Phi|^2) | |\Phi|^2 \} \|\hat{\nabla}\Phi\|_{\tau} \|\hat{\nabla}^2 \Phi\|_{\tau} d\tau ,$$

which will lead to a term at most linear in $\|\hat{\nabla}^2 \Phi\|_{\tau}^2$, hence linear in $y_1(\tau)$, through the use of the Gagliardo-Nirenberg estimate for $\hat{\nabla}\Phi$ and (12.3) if V is C^2 and its derivatives V' and V'' have at most a power growth, that is, there exist constants $C > 0$ and numbers p , $1 \leq p < \infty$, such that :

$$(12.5) \quad |V'(\rho)|, |V''(\rho)| \leq C\rho^p \quad \text{for } \rho \geq 1 .$$

(Note that V' and V'' are bounded for $\rho \leq 1$, since continuous.)

The inequality (12.2) will lead to an inequality at most linear in $y_2(\tau)$, if V is C^3 , and satisfies in addition to (12.4) :

$$(12.6) \quad |V'''(\rho)| \leq C\rho^p \quad \text{for } \rho \geq 1 .$$

From these results, and inspection of $y(0)$, $y_1(0)$, $y_2(0)$, we conclude :

Theorem : The Yang-Mills-Higgs equations with regular bundle P over a regularly hyperbolic manifold $(V_{2,1}, g)$ with bounded curvature and curvature gradient admit a global solution, if :

1° The Cauchy data b , φ are in H_3 and \bar{E} , φ are in H_2 , and satisfy the constraint.

2° The interaction potential is C^3 , non negative, $V(0) = 0$, and V satisfies (12.5), (12.6).

CONCLUSION.

The proof of global existence of solutions of the Y.M.H. system, or even of the sourceless Y.M. equations on a general regularly hyperbolic manifold of dimension 4 does not follow from the standard use of Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities in view of obtaining the required a priori estimates.

The Eardley-Moncrief method for proving L^∞ estimates of F and Φ does not seem to extend to non conformally flat space-times. The problem is therefore open to know if the Y.M. equations admit, or do not admit, global solutions on a general regularly hyperbolic manifold

REFERENCES.

- F. Cagnac et Y. Choquet-Bruhat (1984), Solutions globales d'équations hyperboliques sur une variété, *J. Math. pures et appl.* 63, p. 377-390
- Y. Choquet-Bruhat and C. Dewitt-Morette (1982), *Analysis, Manifolds and Physics*, revised edition, North Holland ; and (1989), *Analysis, Manifolds and Physics II, 92 Applications*, North Holland.
- Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, M. Francaviglia (1978), Cauchy data on manifold, *Ann. I.H.P.* 29 (3), p. 241.
- Y. Choquet-Bruhat and D. Christodoulou (1981), Existence of global solution of the Yang-Mills-Higgs and spinor field equations in $3 + 1$ dimensions, *Ann. de l'E.N.S., 4e série*, 14, p. 481-500.
- Y. Choquet-Bruhat et I. E. Segal (1982), Solution globale des équations de Yang-Mills sur l'univers d'Einstein, *C. R. Acad. Sc. Paris* 294, p. 225-230.
- D. Eardley and V. Moncrief (1982), The global existence of Yang-Mills Higgs fields in 4-dimensional Minkovski space, *Comm. Math. Phys.* 83, p. 171-212.
- J. Ginibre et G. Velo (1981), The Cauchy problem for coupled Yang-Mills and scalar fields in the temporal gauge, *Comm. Math. Phys.* 82, p. 1-28.
- J. Ginibre et G. Velo (1982), The Cauchy problem for coupled Yang-Mills and scalar fields in the Lorentz gauge, *Ann. I. H. P.* 36, p. 59-78.
- R. Glassey and W. Strauss (1981), Some global solutions of the Yang-Mills equations in Minkovski space, *Comm. Math. Phys.* 81, p. 171-188.
- R. Kerner (1974), On the Cauchy problem for the Yang-Mills field equations, *Ann. I. H. P.* XX, n° 3, p. 279-283.
- Cf. also Y. Choquet-Bruhat (1979), The Cauchy problem for Einstein and Yang-Mills field, 2nd Congress Marcel Grossman, Trieste 1979, Ruffini ed.
- J. Leray (1952), "Hyperbolic differential equations", Princeton.
- I. E. Segal (1979), The Cauchy problem for the Yang-Mills equations, *J. Funct. Anal.* 33, n°2, p. 175-194.
- F. Cagnac (1987), *Espaces de Sobolev sur une variété hyperbolique*, *Annales Fac. Sc. Yaounda*.
- Y. Choquet-Bruhat (1983), Global solutions of hyperbolic equations of Gauge theories in "Relativity, Cosmology, Topological mass and Supergravity", C. Aragone ed. World Scientific.
- Y. Choquet-Bruhat, S. Paneitz and I. E. Segal (1983), The Yang-Mills equations on the universal cosmos, *J. of functional Analysis* 53, n°2, p. 112-150.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Sur les singularités de van Hove génériques

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 99-109

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__99_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES SINGULARITÉS DE VAN HOOVE GÉNÉRIQUES

Exposé de Yves COLIN DE VERDIÈRE

Introduction

Description de la décomposition spectrale de Schrödinger périodique ; la densité d'états et ses singularités ; position du problème et conjectures.

On s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger périodique, $H = \Delta + V$, où Δ est le laplacien euclidien et V est un potentiel C^∞ , Γ -périodique, Γ réseau de \mathbf{R}^d ($d = 1, 2, 3$ dans la suite).

La théorie spectrale de cet opérateur essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ est bien connue par la théorie de Bloch ([R-S, IV]): son spectre est absolument continu de multiplicité localement finie et peut être décrit de la façon suivante :

pour chaque $k \in \mathbf{R}^d$, on considère le problème aux limites:

$$\begin{aligned} (\Delta + V)\varphi &= E\varphi, \\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \varphi(x + \gamma) &= e^{i\langle k|\gamma \rangle} \varphi(x) \end{aligned} \quad (*)$$

En fait, si $k - k' \in \Gamma^*$, où Γ^* est 2π -fois le réseau dual de Γ (un domaine fondamental de Γ^* s'appelle *zone de Brillouin* dans la littérature de physique du solide), on a le même problème (*). On notera dans la suite \mathcal{B} le quotient \mathbf{R}^d/Γ^* . Le problème (*) peut se réécrire comme un problème portant sur la fonction Γ -périodique $\psi(x) = e^{-i\langle k|x \rangle} \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} (\Delta_k + V)\psi &= E\psi, \\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \psi(x + \gamma) &= \psi(x) \end{aligned} \quad (**)$$

où

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^d \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + k_j \right)^2.$$

L'opérateur $H_{k,V}$ sur $L^2(\mathbf{R}^d/\Gamma)$ défini par (**) est auto-adjoint à résolvante compacte et a donc un spectre discret :

$$E_1(k) \leq E_2(k) \leq E_3(k) \leq \dots$$

où les $E_n(k)$ sont des fonctions continues de \mathcal{B} dans \mathbf{R} , en fait elles sont même analytiques réelles tant que $E_n(k)$ n'est pas une valeur propre multiple de (**).

Le spectre de H sur $L^2(\mathbf{R}^d)$ est la réunion des intervalles I_n , images de \mathcal{B} par E_n ; les intervalles I_n s'appellent les *bandes*, les composantes connexes bornées du complémentaire dans \mathbf{R} de la réunion des I_n s'appellent les *lacunes*. En dimension $d = 1$, les I_n ne peuvent se rencontrer qu'en leurs extrémités, au contraire, en dimension 2 ou 3, les I_n se recouvrent au point que le nombre de lacunes est toujours fini ([SK1],[SK2],[D-T]).

Soit μ_n l'image directe par E_n de la mesure de Lebesgue sur \mathcal{B} et

$$\mu = (2\pi)^{-d} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n .$$

μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de \mathbf{R} , on note $\rho(\lambda)$ la densité de μ . Le support de ρ est le spectre de H . En physique, ρ s'appelle la *densité d'états*.

Soit $N(R; \lambda)$ le nombre de valeurs propres de H opérant dans un cube de côté R (avec conditions de Dirichlet) inférieures à λ , on a :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N(R; \lambda)}{R^d} = \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(t) \cdot dt .$$

DÉFINITION. — *Les singularités de ρ s'appellent singularités de van Hove* ([A-M],[VH]).

Les singularités de van Hove sont de 2 types :

le type (I) : ce sont des valeurs λ qui sont valeurs critiques d'une fonction E_n ;

le type (II) : ce sont les valeurs de λ telles qu'il existe $(n, k) \in \mathbf{N} \times \mathcal{B}$ telles que $\lambda = E_n(k) = E_{n+1}(k)$: en un tel k , E_n et E_{n+1} ne sont pas différentiables en général comme fonctions de k .

Nous examinons dans la suite ce qui se passe pour le cas générique: un fait remarquable est que les singularités de type (II) peuvent apparaître génériquement en dimension 2 pour des potentiels V pairs et en dimension ≥ 3 sans restrictions.

Plus précisément, les arguments développés dans cet article plaident en faveur de la

CONJECTURE. — *Pour V générique, les propriétés des fonctions E_n sont les propriétés génériques du spectre d'une famille d'opérateurs hermitiens (complexes) dépendant de d paramètres ($k \in \mathcal{B}$): les dégénérescences apparaissent donc stablement dès que $d \geq 3$ ([V-W],[A]).*

Lorsque V est pair, la situation est celle des matrices symétriques réelles, les dégénérescences apparaissent stablement pour $d \geq 2$

Pour d'autres résultats de généricité sur le spectre, voir [UK] et [ZE].

On s'intéresse ensuite au nombre asymptotique de singularités quand $\lambda \rightarrow \infty$.

Plan

1. La dimension 1
2. Les petits potentiels en dimension 2
 - a. Le cas libre
 - b. Les petits potentiels génériques
 - c. Les petits potentiels pairs
3. Les petits potentiels en dimension 3
4. L'asymptotique des dégénérescences
5. Références

1. La dimension 1

Description du spectre ; la situation générique ; la densité des potentiels dont le spectre n'a qu'un nombre fini de lacunes.

On considère ici un potentiel $V \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 2π -périodique. L'équation de Schrödinger, $H\varphi = -\varphi'' + V\varphi$ s'appelle aussi *équation de Hill*.

Pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}$, on introduit l'application $F(\lambda)$ qui à $(\varphi(0), \varphi'(0))$ associe $(\varphi(2\pi), \varphi'(2\pi))$ où φ est solution de $(H - \lambda)\varphi = 0$. Soit alors $\Delta(\lambda) = \text{Tr}(F(\lambda))$. La fonction $\Delta(\lambda)$ (*discriminant*) a l'allure suivante:

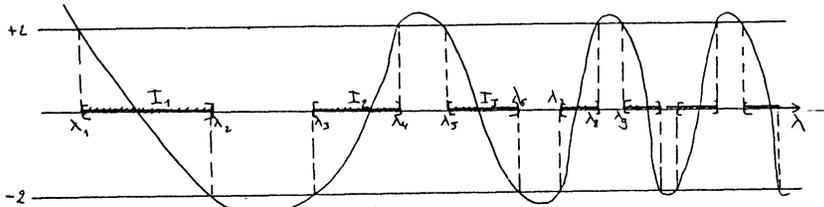


Fig. 1 : graphe de $\Delta(\lambda)$

$\Delta(\lambda) = 2$ (resp. -2) correspond aux valeurs de λ qui sont valeurs propres du problème périodique (resp. anti-périodique).

Soit $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots$ la suite (avec multiplicités) des solutions de $\Delta(\lambda) = \pm 2$. Si $k \in \mathbf{B} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, le spectre de $H_{k,V}$ est déterminé par $\Delta(\lambda) = 2 \cos k$. On déduit de ce qui a été dit plus haut que $\text{Spectre}(H) = \{\lambda \mid |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ avec $I_n = [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ et l'application $E_n : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow I_n$ est définie implicitement par $2 \cos k = \Delta(\lambda)$.

Cette application est un revêtement double du cercle \mathbf{R}/\mathbf{Z} sur I_n avec identification des points $k = 0$ et $k = 1/2$ aux extrémités de I_n .

Le cas générique: il est facile de voir par la théorie des perturbations qu'il existe un résiduel de l'ensemble des potentiels tel que les intervalles I_n sont 2 à 2 disjoints. Dans ce cas, l'application E_n est une fonction de Morse sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} ayant 2 points critiques ($k = 0$ ou $1/2 \bmod \mathbf{Z}$). La densité d'état est alors singulière aux extrémités des I_n et est donnée par :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{|\Delta'(\lambda)|}{\sqrt{4 - \Delta(\lambda)^2}} .$$

Les potentiels n'ayant qu'un nombre fini de lacunes : ces potentiels, hautement non génériques sont identifiés avec précision, ce sont des fonctions *hyperelliptiques*. On peut montrer que de façon assez surprenante ces potentiels sont denses dans l'ensemble de tous les potentiels périodiques (pour une démonstration élémentaire de ce fait, voir [C-K]).

2. Les petits potentiels en dimension 2

Description du spectre : zones de Brillouin, droites de Bragg. Parité et réalité. L'éclatement générique des points triples. Description des singularités de van Hove génériques.

a. Le cas libre.

Dans la suite, Γ est un réseau fixé de \mathbf{R}^2 et les objets définis sont des objets géométriques intrinsèquement attachés à Γ .

Le spectre de Δ_k est aisé à calculer, car les Δ_k se diagonalisent simultanément sur la base e_γ ($\gamma \in \Gamma^*$) avec $e_\gamma(x) = e^{i\langle \gamma, x \rangle}$. On trouve que $\text{Spectre}(\Delta_k) = \{ \|k + \gamma\|^2 \mid \gamma \in \Gamma^* \}$.

Cette description du spectre ensembliste ne donne pas la numérotation :

$$E_1(k) \leq E_2(k) \leq \dots$$

Cette description de l'ordre est importante, car on veut appliquer la théorie des perturbations (minimax...) et regarder les valeurs propres multiples.

Pour cela, on introduit les zones de Brillouin, \mathcal{B}_n , qui sont les domaines fondamentaux de Γ^* définis par :

$$\mathcal{B}_n = \{ k \in \mathbf{R}^2 \mid \|k\|^2 = E_n(k) \} ,$$

\mathcal{B}_1 est évidemment un domaine fondamental de Dirichlet pour Γ^* . Les \mathcal{B}_n entourent \mathcal{B}_1 par ordre croissant; plus précisément, si on définit les *droites de Bragg* D_γ par :

$$D_\gamma = \{ k \in \mathbf{R}^2 \mid \|k + \gamma\| = \|k\| \} ,$$

les frontières des \mathcal{B}_n sont formées de segments des D_γ qui séparent localement des zones de Brillouin d'indices consécutifs. La situation, pour un réseau générique est

représentée sur la figure suivante :

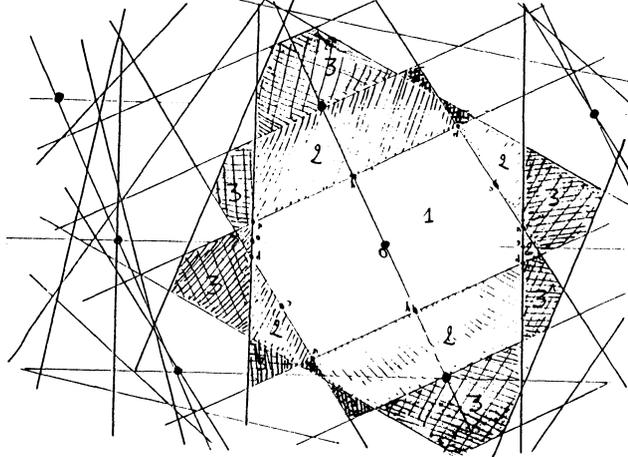


Fig. 2 : zones de Brillouin

Si k est sur D_γ , Δ_k admet $\|k\|^2$ comme valeur propre de multiplicité $m + 1$, où m est le nombre de D_γ tels que $k \in D_\gamma$. Dans le cas d'un réseau générique, cette multiplicité est au plus 3 ($d + 1$ en dimension d).

Maintenant la valeur propre $E_n(k)$ est la restriction à \mathcal{B}_n de la fonction $k \rightarrow \|k\|^2$. La complication des \mathcal{B}_n traduit donc une complication croissante des fonctions E_n .

Cette description permet de vérifier que la définition de la densité d'état donné au début redonne dans le cas libre le résultat très simple $\rho_0(\lambda) \equiv \frac{1}{4\pi}$.

Questions. — La géométrie des zones de Brillouin est très intéressante et plusieurs problèmes n'ont que peu été étudiés à ce jour :

soit $I_n = [a_n, b_n]$ l'image de \mathcal{B} par E_n , il est clair que $a_{n+1} < b_n$. le fait que la différence $b_n - a_{n+1}$ tende vers l'infini est responsable (minimax) du fait que le nombre de lacunes est fini ([SK1] et [SK2]). Il serait intéressant d'obtenir une minoration de ces nombres à partir d'informations simples sur Γ .

Un autre problème intéressant est de mesurer effectivement la complexité des \mathcal{B}_n quand $n \rightarrow \infty$: nombre de composantes connexes, ... Voir à ce sujet dans le dernier § le calcul asymptotique du nombre de points communs à plusieurs droites de Bragg.

b. Les petits potentiels génériques.

On a en vue de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME. — Γ étant donné, il existe, pour tout entier N , un résiduel \mathcal{R} d'un voisinage de 0 dans $C^\infty(\mathbf{R}^2/\Gamma, \mathbf{R})$ tel que, si $V \in \mathcal{R}$, pour tout entier $n \leq N$ et pour tout $k \in \mathcal{B}$, les valeurs propres $E_n(k)$ de $\Delta_k + V$ sont simples et les fonctions $E_n(\cdot)$ sont de Morse

Il est probable que cet énoncé reste vrai globalement, i.e. pas seulement dans un voisinage de 0 (qui en plus dépend de $N!!$). Cela a été prouvé pour le cas discret dans [G-K-T].

Preuve. — Il est visible que la seule chose à examiner est ce qui se passe près des droites de Bragg; en effet, dans le cas libre, pour $k \in \text{Intérieur}(\mathcal{B}_n)$, la valeur propre E_n est simple et de différentielle non nulle, sauf pour $k = 0$ et $n = 1$ où la fonction E_1 a un minimum non dégénéré.

Soit maintenant $[A, B]$ un côté de \mathcal{B}_n .

a) Si k est intérieur à $[A, B]$, la perturbation se fait conformément à la figure suivante où k est repéré par une coordonnée ξ le long du bord et une coordonnée η transversalement. Il est clair que la fonction E_n admet un point critique de Morse proche de la projection orthogonale de 0 sur $[A, B]$.

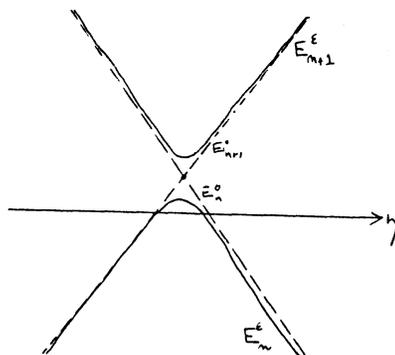


Fig. 3 : éclatement des valeurs propres E_n et E_{n+1} le long d'une droite de Bragg.

b) On va maintenant supposer que k_0 est commun à \mathcal{B}_n , \mathcal{B}_{n+1} et \mathcal{B}_{n+2} et pour simplifier l'écriture que k_0 n'est que sur 2 droites de Bragg D_γ et $D_{\gamma'}$.

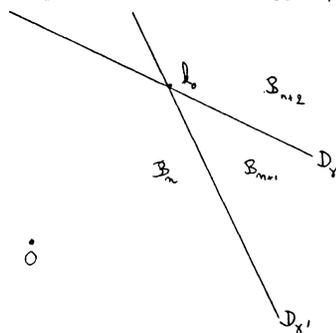


Fig. 4 : point triple

Soit E l'espace engendré par $1, e_\gamma$ et $e_{\gamma'}$. Si $V = \sum a_\gamma \cdot e_\gamma$ (série de Fourier),

on obtient comme matrice de $\langle (H + \varepsilon V) \cdot | \cdot \rangle$ l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} \|k\|^2 & \varepsilon a_\gamma & \varepsilon a_{\gamma'} \\ \varepsilon \bar{a}_\gamma & \|k + \gamma\|^2 & \varepsilon a_{\gamma - \gamma'} \\ \varepsilon \bar{a}_{\gamma'} & \varepsilon \bar{a}_{\gamma - \gamma'} & \|k + \gamma'\|^2 \end{pmatrix}$$

Il résulte de la théorie des perturbations que les 3 valeurs propres

$$\lambda_0(k, \varepsilon) \leq \lambda_1(k, \varepsilon) \leq \lambda_2(k, \varepsilon)$$

de cette matrice vérifient :

$$E_{n+i}(k, \varepsilon) = \lambda_i(k, \varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (i = 0, 1, 2)$$

pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $\|k - k_0\| \leq \alpha$.

Une étude simple montre alors que :

i) si le produit $a_\gamma a_{\gamma'} a_{\gamma - \gamma'}$ n'est pas réel, on a $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ avec un écart minimal de l'ordre de ε . On en déduit :

$$E_n < E_{n+1} < E_{n+2} .$$

ii) il existe une condition ouverte dense portant sur les 3 coefficients de Fourier $a_\gamma, a_{\gamma'}, a_{\gamma - \gamma'}$ telle que λ_0, λ_1 et λ_2 soient des fonctions de Morse de k .

λ_0 n'a qu'un maximum, λ_2 n'a qu'un minimum, alors que le nombre de points critiques de λ_1 peut varier entre 2 et 6.

On déduit facilement le théorème de ce qui précède.

c. Les potentiels pairs.

Lorsque le potentiel V est pair, on revient de la situation hermitienne complexe à la situation *symétrique réelle*, en effet les opérateurs $\Delta_k + V$ sont de type réel au sens de la :

DÉFINITION. — *Une structure réelle sur un C-espace de Hilbert \mathcal{H} est la donnée d'une involution anti-linéaire J de \mathcal{H} . Si $\mathcal{H}_R = \text{Fix}(J)$, on a :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R \oplus i\mathcal{H}_R$$

et :

$$J(x \oplus iy) = x \oplus (-iy) .$$

Un opérateur auto-adjoint A sur \mathcal{H} est dit de type réel (sous-entendu relativement à J) s'il commute à J .

Si A est de type réel, la matrice de A dans une base orthonormée réelle quelconque est à coefficients réels.

Par exemple sur $L^2(X, \mathbb{C})$, où X est une variété riemannienne compacte, le laplacien est réel pour la structure réelle canonique $J_0(f) = \bar{f}$.

Ici, on a $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2/\Gamma; \mathbb{C})$ et on introduit J défini par $J(f)(x) = \bar{f}(-x)$.

On a alors la proposition évidente :

PROPOSITION. — *Si V est pair, $\Delta_k + V$ est de type réel relativement à J .*

Nous avons en vue de montrer le :

THÉORÈME. — Soit k_0 l'intersection de 2 droites de Bragg D_γ et $D_{\gamma'}$ tel que k_0 ne soit sur aucune autre droite de Bragg. Soit α tel que le disque de centre k_0 et de rayon α ne rencontre que ces 2 droites de Bragg. Soit V un potentiel Γ -périodique pair, tel que le produit (réel) des coefficients de Fourier de V , $a_\gamma, a_{\gamma'}, a_{-\gamma-\gamma'}$ soit non nul.

Alors, il existe ε_0 , tel que pour $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, il existe un $k(\varepsilon)$ unique dans le disque de centre k_0 et de rayon α tel que $\Delta_{k(\varepsilon)}$ admette une valeur propre double proche de $\|k_0\|^2$. De plus, $k(\varepsilon)$ et cette valeur propre dépendent analytiquement de ε .

Autrement dit la valeur propre triple $\|k_0\|^2$ de Δ_{k_0} éclate en une valeur propre simple et une valeur propre double. On a 2 situations possibles

$$\lambda = \mu < \nu \text{ et } \lambda < \mu = \nu,$$

le choix dépendant uniquement du signe du produit des 3 coefficients de Fourier de V introduit plus haut (1^{er} cas si le produit est > 0).

Preuve. — Donnons une preuve directe de l'existence de $k(\varepsilon)$. Soit C le cercle de centre k_0 et de rayon α . Lorsque $V = 0$, les 3 valeurs propres $\lambda_1 = \|k\|^2$, $\lambda_2 = \|k - \gamma\|^2$ et $\lambda_3 = \|k - \gamma'\|^2$ se croisent 6 fois (chaque fois que C coupe une droite D_γ , $D_{\gamma'}$ ou (Ok_0)) suivant la figure suivante où on a représenté λ_1 , λ_2 et λ_3 en fonction d'un paramètre angulaire sur C .

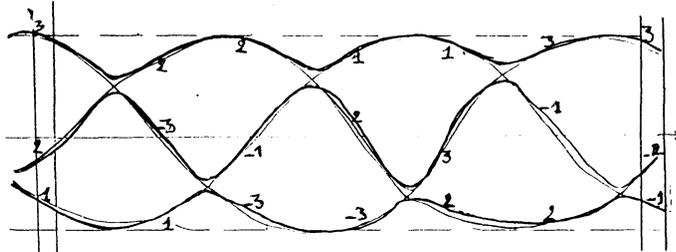


Fig. 5 : valeurs propres pour $k \in C$.

Pour $\Delta_k + \varepsilon V$, V vérifiant les hypothèses du théorème, ces croisements disparaissent et l'on peut suivre la base propre $(1, e_\gamma, e_{\gamma'})$ par continuité :

chaque croisement induit une rotation de $\pm\pi/2$ autour d'un des axes de coordonnées. Le produit de ces rotations est de la forme :

$$R = ABCA^{-1}B^{-1}C^{-1}$$

où A, B, C sont des rotations de $\pm\pi/2$ autour des 3 axes. R est une rotation de π autour d'un des axes.

Il y a donc une holonomie non triviale incompatible avec l'existence d'une trivialisat on à l'intérieur de C qui existerait si les valeurs propres restaient non dégénérées.

Lorsque k parcourt C une fois, deux des fonctions propres changent de signe : cette propriété générale est utilisée dans [B-W] afin de mettre en évidence numériquement des valeurs propres multiples.

3. Les petits potentiels en dimension 3

L'éclatement générique des points quadruples.

Utilisant les mêmes méthodes que précédemment, on peut montrer que des valeurs propres doubles peuvent exister pour des potentiels petits.

Plus précisément près de chaque k_0 commun à 3 plans de Bragg (et 3 seulement), il y a apparition (avec une condition générique sur les coefficients de Fourier de V) de 0 ou 2 points $k_i(\varepsilon)$ où $\Delta_{k_i(\varepsilon)} + \varepsilon V$ admet une valeur propre double. La distinction entre les 2 cas est donnée par un polynôme homogène de degré 8 en les coefficients de Fourier de V .

4. L'asymptotique des dégénérescences

L'asymptotique conjecturée; relation avec les travaux de Berry et Wilkinson.

Dans ce §, on revient au cas de la dimension 2 et des potentiels pairs.

Pour un potentiel petit générique, les dégénérescences sont liées aux points d'intersection $A_{\gamma, \gamma'}$ de 2 droites de Bragg D_γ et $D_{\gamma'}$. Pour les grandes valeurs de l'énergie l'asymptotique du spectre est semblable à celle des petits potentiels (c'est clair en dimension 1 et aussi vrai en dimension plus grande pour presque tout le spectre ([F-K-T])).

On est donc amené à penser que pour un potentiel générique pair en dimension 2, l'asymptotique des singularités de van Hove est la même que l'asymptotique des points $A_{\gamma, \gamma'}$.

Cette asymptotique n'est pas difficile à évaluer, on a :

PROPOSITION. — Si $N_\Gamma(R) = \#\{A_{\gamma, \gamma'} \mid \|0A_{\gamma, \gamma'}\| \leq R\}$, on a, lorsque $R \rightarrow \infty$, l'asymptotique :

$$N_\Gamma(R) \sim \left(\frac{2\pi}{\text{aire}(\mathbf{R}^2/\Gamma)} \right)^2 \cdot R^4.$$

Preuve. — La preuve n'est pas difficile, elle utilise le lemme géométrique suivant :

LEMME. — Si K est un compact de \mathbf{R}^N dont la frontière est de mesure nulle, le nombre de points $N(R)$ d'un réseau \mathcal{R}/R contenus dans K admet quand $R \rightarrow \infty$

l'asymptotique suivante:

$$N(R) \sim \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\mathbf{R}^N/\mathcal{R})} \cdot R^N .$$

On applique ce lemme à l'image de l'application

$$F : \mathcal{B} \times [0, 1] \times ((S^1)^3 \setminus \text{diagonale}) \rightarrow (\mathbf{R}^2)^3$$

définie par

$$F(z, t, \theta_j) = (z + te^{i\theta_j})$$

et au réseau Γ^3/R .

Ce résultat est peut-être à rapprocher de la conjecture de [B-W].

5. Références

- [A-M] N. ASHCROFT ET N. MERMIN. — *Solid states physics*, Holt, Rinehart et Winston, 1976.
- [AR] V. ARNOLD. — *Modes and quasi-modes*, Functional analysis and its applications, **6** (1972), 94–101.
- [BY] M. BERRY. — *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond., **A 392** (1984), 45–57.
- [B-W] M. BERRY ET M. WILKINSON. — *Diabolical points in the spectra of triangles*, Proc. R. Soc. Lond., **A 392** (1984), 15–43.
- [C-K] Y. COLIN DE VERDIÈRE ET T. KAPPELER. — *On double eigenvalues of Hill's operator*, J. of Funct. Analysis, **86** (1989), 127–135.
- [D-T] B. DAHLBERG ET E. TRUBOWITZ. — *A remark on two dimensional periodic potential*, Comment. Math. Helvetici, **57** (1982), 130–134.
- [F-K-T] J. FELDMAN, H. KNOERRER ET E. TRUBOWITZ. — *The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator*, ETH, (1989), .
- [G-K-T] D. GIESEKER, H. KNOERRER ET E. TRUBOWITZ. — *An overview of the geometry of algebraic Fermi curves*, Preprint ETH, (1989).
- [R-S, IV] M. REED ET B. SIMON. — *Methods of modern mathematical physics, t. 4 : analysis of operators*, Academic press, 1978.
- [SK1] M. SKRIGANOV. — *The spectrum band structure of the three-dimensional Schrödinger operator with periodic potential*, Invent. Math., **80** (1985), 107–121.
- [SK2] M. SKRIGANOV. — *Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators*, Proc. Steklov Inst. Math., **171** (1987), 1–121.
- [UK] K. UHLENBECK. — *Generic properties of eigenfunctions*, American J. of Math., **98** (1976), 1059–1078.

- [VH] L. VAN HOVE. — *The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a cristal*, Phys. Rev., **89** (1953), 1189–1193.
- [V-W] J. VON NEUMANN ET E. WIGNER. — *Ueber das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen*, Physik. Zeitschr., **30** (1929), 467–470.
- [ZE] S. ZELDITCH. — *On the spectrum of a Riemannian cover*, Ann. Inst. Fourier (soumis), (1989).

— \diamond —

Yves COLIN DE VERDIÈRE
Institut Fourier
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

Codes AMS : 35J10, 35P15, 58G25, 81H20.

Mots clés : équation de Schrödinger , réseaux, valeurs propres multiples, zones de Brillouin.

Résumé : On étudie les singularités (dites de Van Hove) de la densité d'états pour l'équation de Schrödinger d -dimensionnelle avec un potentiel périodique lisse. L'étude du cas des petits potentiels en dimension 2 et 3 rend plausible une conjecture sur la situation générique. On discute aussi la prolifération des singularités de Van Hove quand $\lambda \rightarrow \infty$.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J.-P. FRANÇOISE

Systemes intégrables à m -corps sur la droite

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 111-122

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__111_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SYSTEMES INTEGRABLES A m-CORPS SUR LA DROITE

J.-P. Francoise

Actes du colloque " Analyse globale et Physique mathématique "
dédié à la mémoire d'Edmond Combet.

Décembre 1989.

Dans un article précédent ([F1]) , j'ai montré l'existence d'une action symplectique du tore associée au modèle de Calogero-Moser avec potentiel extérieur quadratique. Il était alors possible d'en déduire une preuve entièrement classique d'une formule obtenue par Gallavotti et Marchioro par des voies quantiques. Par la suite ([F-R]) , nous avons simplifié la démonstration en utilisant une réduction symplectique de flots harmoniques due à Kazhdan-Kostant-Sternberg ([K-K-S]) .

Le système de Calogero-Moser est un cas particulier (A_m)

d' Hamiltonien associé à un système de racines :

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + (1/2) \sum_{\alpha \in A_+} g_\alpha^2 / \langle x, \alpha \rangle^2 \quad (1)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$$

Dans (1) A_+ est mis pour l'ensemble des racines positives d'un système de racines et les g_α sont des constantes positives qui sont égales pour α, α' conjuguées par le groupe de Weyl.

Le système Hamiltonien dont il est question pour le cas (A_m) est :

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + (1/2) \sum_{i \neq j} g^2 / (x_i - x_j)^2 \quad (2)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$$

Les calculs correspondants pour les systèmes de racines plus généraux sont difficiles. Je vais aborder dans cet article le cas des systèmes (BC_m) :

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + \sum_{i \neq j} g^2 (1/(x_i - x_j)^2 + 1/(x_i + x_j)^2) + 2 \sum_i g_1^2 / x_i^2 \quad (3)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$$

avec le :

théorème:

Le système (3) a toutes ses orbites périodiques de période $2\pi/\lambda$ (non nécessairement primitive)

On est encore loin de l'existence d'une action symplectique du tore associée au système (3) qui sera analysée en détail dans une autre publication et qui nécessite une extension non triviale des méthodes de Kazhdan-Kostant-Sternberg.

Mais on obtient à ce point la dégénérescence (au sens de la théorie des perturbations) des hamiltoniens (1) pour n'importe quel système de racines classique. Nous commençons par reprendre la démonstration du résultat de ([F1]) sous la forme développée dans ([F-R]).

I-Flots harmoniques sur $U(m)$

Nous utilisons les matrices

$$Z = \sqrt{-1} \lambda X + Y, \quad Z^* = -\sqrt{-1} \lambda X + Y, \quad (4)$$

où (X,Y) sont des matrices symétriques réelles, et donc

$$Z^* = {}^t Z \quad (\text{transposée de la conjuguée de la matrice } Z).$$

Nous étudions le système

$$H(X,Y)=(1/2) \text{Tr} (\lambda^2 X^2 + Y^2), \omega = \text{Tr}(dX \wedge dY) \tag{5}$$

Introduisons la matrice Hermitienne $P=ZZ^*$ que nous considérons comme un élément de $u(m)$. Nous avons démontré dans ([F1]) le

Théorème 1 :

La matrice P définit une paire de Lax pour le système (5). Les systèmes hamiltoniens correspondants aux valeurs propres de P pour la forme symplectique ω ont toutes leurs orbites périodiques de période π/λ et ils commutent deux à deux.

Preuve:

Nous obtenons à partir de (5) :

$$H = (1/2) \text{Tr}(P).$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \sqrt{-1} \lambda Y - \lambda^2 X \\ \dot{Z}^* &= -\sqrt{-1} \lambda Y - \lambda^2 X \\ \dot{P} &= \dot{Z}Z^* + Z\dot{Z}^* = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

Donc P est une matrice de Lax pour le flot de H. Les valeurs propres de P sont ainsi des constantes du mouvement.

Soit Λ une des valeurs propres de P et Φ le vecteur propre correspondant. Soit T le projecteur sur le sous-espace engendré par Φ . Comme la matrice P est Hermitienne, on peut supposer que Φ est normalisée pour le produit Hermitien standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur C^m préservé par P. Il vient :

$$d\Lambda = \langle dP \Phi, \Phi \rangle = \text{Tr}(dPT) \tag{7}$$

Les équations de Hamilton donnent:

$$\text{Tr} (\dot{X}dY - \dot{Y}dX) = d\Lambda = \text{Tr}(dZZ^*T + ZdZ^*T) \quad (8)$$

et nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z^*T + TZ \\ \dot{Y} &= -\sqrt{-1}\lambda(Z^*T - TZ) \end{aligned} \quad (9)$$

puis,

$$\dot{P} = \dot{Z}Z^* + Z\dot{Z}^* = [P, T] = 0,$$

L'équation (9) implique alors que :

$$\dot{Z} = \sqrt{-1}\lambda \{Z, T\}$$

$$\dot{Z}^* = -\sqrt{-1}\lambda \{Z^*, T\}$$

qui conduit immédiatement au fait que les orbites du flot Hamiltonien défini par Λ sont périodiques de période π/λ .

II - INTEGRABILITE COMPLETE DU SYSTEME DE CALOGERO-MOSER AVEC POTENTIEL EXTERIEUR QUADRATIQUE.

Soit U l'espace vectoriel des matrices Hermitiennes $m \times m$. L'espace cotangent T^*U peut être identifié à $U \times U \cong U \times U$. Comme fibré cotangent, il porte une structure symplectique que l'on peut écrire ([K.K.S]) :

$$\omega = \text{Tr} dX \wedge dY, (X, Y) \in U \times U.$$

Nous introduisons sur T^*U le flot harmonique par l'Hamiltonien :

$$H = (1/2)\text{Tr}(\lambda^2 X^2 + Y^2).$$

Le groupe $G = U(m)$ agit sur U par l'action adjointe. Cette action se relève en une action Hamiltonienne sur le cotangent T^*U . L'application moment correspondante est

$$T^*U \cong U \times U \ni (X, Y) \rightarrow \sqrt{-1} [X, Y] \in U \cong U^* \tag{10}$$

L'Hamiltonien H est invariant sous cette action. Suivant ([K.K.S.]) on procède à une réduction symplectique de T^*U par l'action symplectique de G . En utilisant l'identification (10), une fibre de l'application moment peut être paramétrée par

$$\{ (X, Y) : [X, Y] = \sqrt{-1}gC \}.$$

On choisit pour C l'élément $(C_{ij} = 1 - \partial_{ij})$. Soit G_C le sous-groupe d'isotropie de C . La variété réduite

$$X_C = \{ (X, Y) : [X, Y] = \sqrt{-1}gC \} / G_C$$

est paramétrée (voir ([K.K.S.])) par:

$$X_{ij} = x_i \partial_{ij}$$

$$Y_{ij} = y_i \partial_{ij} + \sqrt{-1} g / (x_i - x_j) (1 - \partial_{ij}) \quad (g > 0),$$

et s'identifie à T^*W , $W = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m / x_i - x_j \neq 0, i \neq j \}$, équipée de la forme symplectique standard.

Après la réduction l'Hamiltonien $H = (1/2)Tr(\lambda^2 X^2 + Y^2)$ devient la fonction

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m y_i^2 + g^2 \sum_{i,j;i < j} (x_i - x_j)^{-2} + (1/2) \sum_{i=1}^m (\lambda x_i)^2. \tag{11}$$

Ce qui est le système de Calogero-Moser avec un potentiel extérieur quadratique.

Dans ([F2]) on a démontré à partir de l'existence de l'action symplectique du tore que les action-angles du système (2) sont globales et que l'Hamiltonien s'écrit :

$$H = g\lambda m(m-1)/2 + \sum_{i=1}^m ip_i \quad (12)$$

dans les coordonnées actions.

III- Etude du modèle correspondant aux systèmes (BC_m) .

Nous considérons donc dans ce paragraphe le système

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + \sum_{i \neq j} g^2 (1/(x_i - x_j)^2 + 1/(x_i + x_j)^2) + 2 \sum_i g_1^2 / x_i^2 \quad (3)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^m dx_i \wedge dy_i$$

avec le :

théorème 2:

Le système (3) a toutes ses orbites périodiques de période $2\pi/\lambda$ (non nécessairement primitive)

Démonstration:

Nous introduisons les matrices $m \times m$ qui sont définies comme suit:

$$A_{ij} = y_i \partial_{ij} + \sqrt{-1} g / (x_i - x_j) (1 - \partial_{ij})$$

$$B_{ij} = \sqrt{-2} g_1 / x_i \partial_{ij} + \sqrt{-1} g / (x_i + x_j) (1 - \partial_{ij})$$

$$A'_{ij} = d_i \partial_{ij} - \sqrt{-1} g / (x_i - x_j)^2 (1 - \partial_{ij}) \quad (\text{les } d_i \text{ seront explicités en cours de}$$

preuve)

$$B'_{ij} = -(\sqrt{-1} \ g_1 / \sqrt{2x_i^2}) \partial_{ij} - \sqrt{-1} \ g / (x_i + x_j)^2 (1 - \partial_{ij})$$

$$\underline{X}_{ij} = x_i \partial_{ij}$$

et les matrices $2m \times 2m$:

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & -A \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \underline{X} & \\ & -\underline{X} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} B' & A' \\ A' & B' \end{bmatrix}$$

On remarque que l'Hamiltonien $H = (1/4)\text{Tr}(\lambda^2 X^2 + L^2)$. On considère le flot défini par (H, ω) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial H / \partial y_i = y_i \\ \dot{y}_i &= -\partial H / \partial x_i \end{aligned}$$

La dérivée de la matrice X le long du flot de H est alors donnée par la formule :

$$\dot{X} = [X, M] + L \tag{13}$$

En effet, la comparaison des termes diagonaux de (13) conduit à :

$$\dot{X}_{ii} = L_{ii} \quad \text{qui est équivalent à} \quad \dot{x}_i = y_i$$

La comparaison des termes non diagonaux passe par le calcul du crochet :

$$[X,M] = \begin{bmatrix} [X,A'] & \{B',X\} \\ -\{B',X\} & -[X,A'] \end{bmatrix}$$

Il s'agit alors de vérifier que :

$$\dot{X} = [X,A'] + A'$$

et

$$0 = \{B',X\} + B$$

ce qui se fait élémentairement.

La dérivée de L par rapport au flot de H est donnée par

$$\dot{L} = [L,M] - \lambda^2 X \quad (14)$$

La vérification de cette formule passe par le calcul du crochet:

$$[L,M] = \begin{bmatrix} [A,A'] + \{B,B'\} & \{A,B'\} + [B,A'] \\ -\{A,B'\} - [B,A'] & -[A,A'] - \{B,B'\} \end{bmatrix}$$

D'où la nécessité de vérifier :

$$\dot{A} = [A,A'] + \{B,B'\} - \lambda^2 X \quad (15)$$

$$\dot{B} = \{A,B'\} + [B,A'] \quad (16)$$

Commençons avec (16). La comparaison des termes diagonaux conduit à

$$-\sqrt{-2} g_1 y_i / x_i^2 = 2A_{ij}B'_{ij}$$

car:

$$\sum_{i \neq j} (B_{ij}A'_{ji} - B_{ji}A'_{ij}) = 0 \quad (B \text{ et } A' \text{ sont symétriques})$$

$$\sum_{i \neq j} (A_{ij}B'_{ji} + A_{ji}B'_{ij}) = 0 \quad (A_{ij} = -A_{ji} \text{ et } B' \text{ est symétrique})$$

La comparaison des termes non diagonaux dans (16) conduit à :

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{-1} g(y_i+y_j)/(x_i+x_j)^2 = \sum_{k \neq i,j} (B_{ik}A'_{kj} - B_{kj}A'_{ik} + A_{ik}B'_{kj} + A_{kj}B'_{ik}) \\
 + (B_{ii}-B_{jj})A'_{ij} + B_{ij}(A'_{jj}-A'_{ii}) \\
 + (A_{ii}+A_{jj})B'_{ij} + A_{ij}(B'_{jj}+B'_{ii})
 \end{aligned}$$

On vérifie que l'égalité est satisfaite avec :

$$d_i = (\sqrt{-1} g_1 / \sqrt{2x_i^2}) + \sqrt{-1} g \sum_{k \neq i} (1/(x_i+x_k)^2 + 1/(x_i-x_k)^2).$$

Une fois compris les mécanismes de simplification qui conduisent à établir (16), on procède sans peine à la vérification de (15).

Nous avons donc à ce point obtenu que les équations de Hamilton impliquent:

$$\dot{X} = [X,M] + L$$

$$\dot{L} = [L,M] - \lambda^2 X.$$

On introduit alors la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{U} = [U,M], U(0) = 1 \text{ et les nouvelles matrices}$$

$$\begin{aligned}
 X &= UXU^{-1}, \\
 L &= ULU^{-1}.
 \end{aligned}$$

Les équations (13) et (14) conduisent à l'équation du second ordre :

$$\ddot{X} = -\lambda^2 X$$

qui s'intègre élémentairement. On en déduit que les valeurs propres de X qui ne sont autres que les positions x_i sont des fonctions périodiques du temps, de période $2\pi/\lambda$. Ce qui démontre le théorème.

Notons pour terminer que les équations (13) et (14) conduisent de

suite à l'existence d'une paire de Lax pour le système (3). En effet, si nous introduisons les matrices

$$Z = \sqrt{-1}\lambda X + L, \quad Z^* = -\sqrt{-1}\lambda X + L, \quad (17)$$

nous trouvons que (13) et (14) se réécrivent:

$$\dot{Z} = [Z, M] + \sqrt{-1}\lambda Z$$

$$\dot{Z}^* = [Z^*, M] - \sqrt{-1}\lambda Z^*.$$

Il en résulte que si $P = ZZ^*$, $\dot{P} = [P, M]$.

IV- UN ARGUMENT DE SYMETRIE.

Les matrices $2m \times 2m$ introduites au paragraphe précédent peuvent paraître étranges au lecteur. Nous allons présenter un argument de symétrie connu des spécialistes qui permet d'en deviner l'aspect.

Considérons le système (2) correspondant à $2m$ particules. On observe que si les particules sont placées symétriquement par rapport à l'origine à l'instant initial, elles restent en positions symétriques au cours du temps. Par réduction, on obtient ainsi un nouveau système Hamiltonien représenté par la fonction:

$$H = (1/2) \sum_{i=1}^m (y_i^2 + \lambda^2 x_i^2) + \sum_{i \neq j} g^2 (1/(x_i - x_j)^2 + 1/(x_i + x_j)^2) + (1/4) \sum_i g^2 / x_i^2 \quad (18)$$

qui est un cas particulier $g = 2\sqrt{2}g_1$ du système (3).

A partir du paragraphe I, on voit que le système (18) a avec les matrices $2m \times 2m$:

$$L = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & -A \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X \\ -X \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} B' A' \\ A' B' \end{bmatrix}$$

et

$$A_{ij} = \gamma_i \partial_{ij} + \sqrt{-1} g / (x_i - x_j) (1 - \partial_{ij})$$

$$B_{ij} = \sqrt{-1} g / 2x_i \partial_{ij} + \sqrt{-1} g / (x_i + x_j) (1 - \partial_{ij})$$

$$A'_{ij} = d_i \partial_{ij} - \sqrt{-1} g / (x_i - x_j)^2 (1 - \partial_{ij})$$

$$B'_{ij} = -(\sqrt{-1} g / 4x_i^2) \partial_{ij} - \sqrt{-1} g / (x_i + x_j)^2 (1 - \partial_{ij})$$

$$X_{ij} = x_i \partial_{ij}$$

pour équations du flot :

$$\dot{X} = [X, M] + L$$

$$\dot{L} = [L, M] - \lambda^2 X$$

On obtient alors de suite la périodicité dans ce cas, à partir des résultats antérieurs pour le système (Am).

REFERENCES

- ([A]) M. ADLER
"Some Finite Dimensional Integrable Systems and Their Scattering Behavior" Commun. Math. Phys. 55 (1977) pp.195-230
- ([C]) F. CALOGERO,
"Solution of the one-dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials", J. of Math. Phys. 12 (1973), pp.419-436.
- ([F1]) J.P. FRANCOISE
"Canonical Partition Functions of Hamiltonian Systems and the Stationary Phase Formula"Comm. Math. Physics vol.117,1 (1988) pp.37-47.
- ([F2]) J.P. FRANCOISE
" Symplectic geometry and integrable m-body problems on the line "
J. Math.Phys. 29(5) (1988) pp.1150-1153.
- ([F-R]) J.P. FRANCOISE-O.RAGNISCO
"Matrix second-order differential equations and Hamiltonian systems of quartic type"
Annales de l'Institut H. Poincaré vol.49, n°3, 1989, pp369-375.
- ([K.K.S]) J. KAZHDAN-B. KOSTANT-S.STERNBERG
"Hamiltonian Group Actions and Dynamical Systems of Calogero type"
Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) pp.481-508.
- ([M1]) J. MOSER
"Various aspects of integrable Hamiltonian systems"
Proc. CIME conf. held in Bressanone, (1978).
- ([M2]) J. MOSER
" Geometry of quadrics and spectral theory, Berkeley 1979,
Springer-Verlag, 1980, pp.147-188.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ÉTIENNE GHYS

Flots transversalement affines et tissus feuilletés

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 123-150

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__123_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES ET TISSUS FEUILLETES

Etienne GHYS

Cet article se compose de deux parties distinctes qui peuvent être lues indépendamment. Nous les avons cependant regroupées car la seconde peut à la fois jouer le rôle de motivation et d'application pour la première.

C'est grâce à de nombreuses conversations avec Yves Carrière que ce travail a pu être mené à bien. Je l'en remercie chaleureusement.

I - LES FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES COMPLEXES.

I. INTRODUCTION

Les théorèmes de structure décrivant les feuilletages de codimension 1 réelle sont essentiellement fondés sur le théorème de R. Sacksteder [7]. Il serait agréable de pouvoir transposer ce résultat dans le domaine complexe [9]. Rappelons-en l'énoncé. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable, de classe C^2 , sur une variété compacte connexe M . Soit $\mathcal{M} \subset M$ un *ensemble minimal*, c'est-à-dire un fermé non vide réunion de feuilles de \mathcal{F} et minimal pour ces propriétés. On suppose que \mathcal{M} est *exceptionnel* dans le sens où il ne coïncide ni avec une feuille compacte ni avec la variété M toute entière. Alors, il existe un lacet contenu dans une feuille de \mathcal{M} dont l'holonomie est hyperbolique, c'est-à-dire dont la dérivée au point fixe est différente de 1. Il est concevable que ce même énoncé reste vrai dans le contexte holomorphe si l'on définit correctement la notion d'ensemble minimal exceptionnel dans ce cas.

Un corollaire important du théorème de Sacksteder a été exploité en particulier par J. Plante ; il décrit la nature des *mesures transverses invariantes*. Rappelons qu'une telle mesure est une collection de mesures définies sur les transversales au feuilletage qui est invariante par le pseudogroupe d'holonomie. On dit qu'une mesure transverse invariante (non triviale) est *ergodique* si elle ne peut pas s'écrire comme somme de deux mesures transverses invariantes non proportionnelles. Le corollaire en question peut s'exprimer de la façon suivante. Une mesure transverse invariante ergodique ne peut être que de deux types:

- i) Elle est concentrée sur une feuille compacte, c'est-à-dire que, sur une transversale, elle se réduit à la somme des masses de Dirac aux points d'intersection avec cette feuille compacte.
- ii) Son support est la variété toute entière. Dans ce cas on peut paramétrer topologiquement les transversales grâce à cette mesure et le pseudogroupe d'holonomie est alors topologiquement conjugué à un pseudogroupe de translations de la droite réelle.

On peut énoncer un analogue holomorphe.

Question : Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement holomorphe de codimension 1 complexe sur une variété compacte M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ . Peut-on affirmer que la mesure μ est de l'un des types suivants ?

- i) μ est concentrée sur une feuille compacte de \mathcal{F} .
- ii) μ est concentrée sur une sous-variété compacte V de codimension 1 réelle.
- iii) μ est une forme de volume transverse. Dans ce cas \mathcal{F} est riemannien, c'est-à-dire qu'il existe une métrique riemannienne sur le fibré normal à \mathcal{F} qui est invariante par holonomie.

Le premier but de cet article est de donner une modeste contribution à ce problème. Nous allons considérer le cas simple où le pseudogroupe d'holonomie n'est pas constitué d'applications holomorphes quelconques mais plutôt d'applications affines complexes du type $z \rightarrow az + b$. On dit alors que le feuilletage est *transversalement affine complexe*.

Théorème. La réponse à la question précédente est affirmative dans le cas d'un feuilletage transversalement affine complexe.

Ce résultat est démontré au paragraphe 2. On le comparera au théorème de Nishimori [6] qui démontre un analogue du théorème de Sacksteder pour les feuilletages transversalement affines complexes mais sous une hypothèse géométrique difficilement contrôlable concernant la structure

de l'ensemble minimal. Dans le paragraphe 3, on donne une application qui justifie le titre de cet article. On appellera ici "flot" un feuilletage orienté de dimension 1 (on ne fixe donc pas de paramétrage le long des feuilles). Une propriété essentielle de ces flots est que leurs feuilles, étant de dimension 1, sont à croissance linéaire et donc polynomiale. Il en résulte que tout flot possède au moins une mesure transverse invariante non triviale. Ceci permet, et c'est le but du paragraphe 3, de classer complètement les flots transversalement affines complexes. Nous ne citerons dans cette introduction qu'une classification faible qui sera précisée plus loin.

Théorème. *Soit \mathcal{F} un flot transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M (de dimension 3). Alors quatre cas sont possibles :*

- i) *Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et \mathcal{F} est une fibration de Seifert .*
- ii) *Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont des tores T^2 . La collection de ces adhérences définit une fibration de M sur le cercle.*
- iii) *La variété M est difféomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire à feuilles denses.*
- iv) *La variété M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$ et \mathcal{F} possède deux orbites périodiques qui sont respectivement les ensembles α et ω -limites de toutes les autres orbites.*

2. PSEUDOGROUPES AFFINES COMPLEXES.

On se fixe un feuilletage \mathcal{F} transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ et que celle-ci n'est pas concentrée sur une feuille compacte. Dans ces conditions, on se propose de démontrer que le feuilletage considéré est riemannien.

Soit $K \subset M$ le support de la mesure μ , c'est-à-dire le fermé constitué des points x tels que toute transversale à \mathcal{F} contenant x dans son intérieur est de mesure non nulle. Bien sûr, K est un fermé non vide saturé par le feuilletage. Dans un premier temps, nous allons montrer que la restriction de \mathcal{F} au fermé K est "équicontinue". Pour pouvoir préciser cette notion, nous allons introduire quelques notations supplémentaires.

Recouvrons M par un nombre fini d'ouverts connexes U_i feuilletés trivialement, c'est-à-dire difféomorphes à $L_i \times T_i$ où L_i est un ouvert de \mathbb{R}^p (p est la dimension des feuilles) et T_i un ouvert connexe du plan complexe. Soit $f_i : U_i \rightarrow T_i$ la projection correspondante. Par hypothèse, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une application affine complexe γ_{ij} telle que $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$ sur $U_i \cap U_j$. On peut toujours supposer que les adhérences des T_i dans \mathbb{C} sont disjointes et on note T la réunion

des T_i . Soit \mathcal{P} le pseudogroupe d'holonomie correspondant agissant sur T et engendré par les restrictions des γ_{ij} à $f_i(U_i \cap U_j)$.

Il est bien connu que le fait que \mathcal{P} provienne d'un feuilletage d'une variété compacte entraîne que \mathcal{P} est de *génération compacte* (voir [4]). Cela entraîne qu'il est possible de choisir des ouverts connexes T_i' dans T_i ayant les propriétés suivantes :

- i) L'adhérence de T_i' dans \mathbb{C} est contenue dans T_i .
- ii) Le pseudogroupe \mathcal{P}' agissant sur la réunion T' des T_i' et engendré par les restrictions de γ_{ij} à $f_i(U_i \cap U_j) \cap T_i'$ est équivalent à \mathcal{P} .

La démonstration de ce fait est bien facile et se fonde sur le lemme de recouvrement de Lebesgue appliqué au recouvrement de M par les U_i .

On munit T et T' de la métrique provenant de leurs plongements naturels dans \mathbb{C} . Cette métrique n'est bien sûr pas invariante par \mathcal{P} et \mathcal{P}' puisque nous ne supposons pas a priori que \mathcal{F} est riemannien ! Remarquons cependant que, \mathcal{P} étant affine complexe, les disques de T sont envoyés sur des disques.

Par hypothèse, μ définit une mesure non triviale sur T , encore notée μ et invariante par \mathcal{P} . Son support est noté \mathcal{K} . Le support de la mesure μ restreinte à T' est bien sûr $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \cap T'$. La partie atomique de μ est encore une mesure invariante par \mathcal{P} . Puisque nous supposons μ ergodique et non réduite à des atomes, la mesure μ est sans atomes.

L'équicontinuité de \mathcal{P} sur \mathcal{K} peut maintenant être explicitée.

Lemme 2.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ ayant la propriété suivante. Soit x un point de $T_i' \cap \mathcal{K}'$ tel que le disque $D(x, \eta)$ de centre x et de rayon η soit contenu dans T_i . Soit γ un élément du pseudogroupe \mathcal{P} défini sur $D(x, \eta)$. Alors $\gamma(D(x, \eta))$ est un disque de rayon inférieur à ε .*

Démonstration. Nous affirmons d'abord que pour tout $\delta > 0$, il existe un rayon $r > 0$ tel que tout disque D de rayon r , centré sur un point de \mathcal{K}' et contenu dans l'un des T_i' , est de mesure inférieure à δ . En effet, dans le cas contraire, il existerait un $\delta > 0$ et une suite de point x_n de \mathcal{K}' telle que les disques $D(x_n, 1/n)$ soient de mesure supérieure à δ . Il est clair que tout point d'accumulation de la suite x_n dans \mathcal{K} serait un atome pour la mesure μ sur T . Ceci est contraire à l'hypothèse faite sur μ .

Réciproquement, pour tout rayon $r > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que tout disque D , contenu dans T_1' , centré sur un point de \mathcal{K}' et de mesure inférieure à δ , est de rayon inférieur à r . En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite de disques D_n , centrés sur \mathcal{K}' , de mesure tendant vers 0 mais de rayons minorés. Une limite de tels disques serait un disque de mesure nulle mais centré sur un point de \mathcal{K}' . Ceci contredit le fait que \mathcal{K}' est le support de la mesure étudiée.

Les deux affirmations précédentes montrent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ ayant la propriété suivante. Si deux disques D_1 et D_2 sont centrés sur \mathcal{K}' , sont contenus dans un T_1' et sont de même mesure et si le rayon de D_1 est inférieur à η , alors le rayon de D_2 est inférieur à ε .

Cette dernière propriété, associée au fait que \mathcal{P}' préserve les disques et la mesure, achève la démonstration du lemme.

Lemme 2.2. *Pour tout point x de \mathcal{K}' , il existe un voisinage \mathcal{V} de x tel que tout germe en x d'un élément de \mathcal{P}' est le germe en x d'un élément de \mathcal{P} défini sur \mathcal{V} tout entier.*

Démonstration. Notons \mathcal{P}_1' l'ensemble fini des générateurs naturels de \mathcal{P}' et \mathcal{P}_k' l'ensemble des composés d'au plus k éléments de \mathcal{P}_1' . Il existe un réel $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante. Si le germe d'un élément γ de \mathcal{P}_1' est défini en x , alors l'élément γ se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur le disque $D(x, \varepsilon)$ contenu dans T .

Soit \mathcal{V} le disque $D(x, \eta)$ où $\eta \leq \varepsilon$ est donné par le lemme 2.1 pour le choix précédent de ε . Montrons, par récurrence sur l'entier k , que le voisinage \mathcal{V} vérifie la condition requise pour les germes d'éléments de \mathcal{P}_k' .

Lorsque $k=1$, cette condition est vérifiée par définition de ε . Supposons la vérifiée jusqu'à l'entier k . Soit γ un élément de \mathcal{P}_{k+1}' , défini au point x de \mathcal{K}' , écrit sous la forme :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \quad \text{avec } \gamma_2 \in \mathcal{P}_1' \quad \text{et } \gamma_1 \in \mathcal{P}_k'.$$

Nous savons que γ_2 se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur le disque $D(x, \eta)$. Le lemme 2.1 montre alors que $\gamma_2(D(x, \eta))$ est un disque centré sur un point de \mathcal{K}' et de rayon inférieur à ε . Par hypothèse de récurrence, γ_1 se prolonge à un élément de \mathcal{P} défini sur $\gamma_2(D(x, \eta))$. Ceci montre que γ se prolonge en un élément de \mathcal{P} défini sur $\mathcal{V} = D(x, \eta)$ et achève la démonstration du lemme 2.2.

Notons que ce lemme exprime une propriété proche de la complétude introduite dans [4],[8].

Soit $\text{Aff}(\mathbb{C})$ le groupe affine complexe, c'est-à-dire le groupe des applications du type $z \rightarrow az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Puisque la mesure μ est ergodique, l'orbite par \mathcal{P}' de μ -presque tout point de \mathcal{K}' est dense dans \mathcal{K}' . Fixons un point x de \mathcal{K}' ayant cette propriété et soit \mathcal{V} le voisinage de x donné par le lemme précédent. Soit Γ_ε la partie de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ constituée des éléments γ tels que :

- i) le germe de γ en x est le germe d'un élément de \mathcal{P}' .
- ii) La distance entre $\gamma(x)$ et x est inférieure à ε .

Il résulte du lemme 2.2 que si ε est assez petit, pour tout γ de Γ_ε la restriction de γ à \mathcal{V} est dans \mathcal{P} .

Les lemmes 2.1 et 2.2 montrent alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que le produit de deux éléments de Γ_η est dans Γ_ε . Soit $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ l'adhérence de Γ_ε dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ est un sous-groupe de Lie local fermé de $\text{Aff}(\mathbb{C})$. Les restrictions à \mathcal{V} des éléments de Γ_ε préservent μ et il en est donc de même pour les éléments de $\overline{\Gamma}_\varepsilon$.

En observant que les sous-groupes de Lie locaux fermés de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ sont localement les sous-groupes fermés connexes de $\text{Aff}(\mathbb{C})$, nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 2.3. *Il existe un sous-groupe fermé connexe H de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ tel que les éléments de $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ proches de l'identité sont les éléments de H proches de l'identité. Les éléments de Γ_ε normalisent H .*

De façon à analyser les sous-groupes fermés connexes H de $\text{Aff}(\mathbb{C})$ qui pourront intervenir, nous ferons d'abord les observations suivantes :

- i) H ne contient pas de contraction de centre x car H préserve la mesure μ non atomique.
- ii) le premier groupe dérivé H^1 de H est un groupe de translations normalisé par H .

Nous pouvons donc envisager plusieurs possibilités :

Cas 1 : H est trivial.

Cas 2 : H contient toutes les translations.

Cas 3 : H contient toutes les translations parallèles à une droite donnée $z \rightarrow z + tv$ (avec v fixé et t réel quelconque). Alors H et Γ_ε sont contenus dans le groupe des applications du type $z \rightarrow \pm z + tv$.

Cas 4 : H ne contient aucune translation. Dans ce cas, H est abélien, contenu dans le groupe des homothéties de même centre $z_0 \in \mathbb{C}$ du type $z \rightarrow \lambda(z - z_0) + z_0$. De même, Γ_ε est contenu dans ce même groupe abélien. On distingue alors deux sous-cas :

a) H contient toutes les homothéties de centre z_0 .

b) H coïncide avec le groupe des homothéties de centre z_0 dont le multiplicateur λ appartient à un sous-groupe à un paramètre de \mathbb{C}^* , i.e. du type $\{\exp(t\alpha)\}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ fixé et t réel quelconque).

Nous allons examiner chacun de ces cas.

Lemme 2.4. *Le cas 1 est impossible.*

Démonstration. Le point x n'est pas un point isolé de \mathcal{K}' car x n'est pas un atome de μ et l'orbite de x par \mathcal{P}' est dense dans \mathcal{K}' . Il existe donc une suite d'éléments distincts γ_n de Γ_ε tels que $\gamma_n(x)$ tende vers x_0 . La suite $|\gamma_n'(x)|$ des modules des dérivées des γ_n reste dans un intervalle compact $[u, v]$ de \mathbb{R}_+ car sinon on pourrait trouver dans le voisinage \mathcal{V} de x un point fixe répulsif ou attractif pour l'un des γ_n et nous avons vu que ceci est impossible. Quitte à passer à une sous-suite, on peut donc supposer que γ_n converge dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$ et donc que $\gamma_n \gamma_p^{-1}$ tende vers l'identité si n et p tendent vers l'infini. On trouve ainsi des éléments de Γ_ε différents de l'identité dans n'importe quel voisinage de l'identité dans $\text{Aff}(\mathbb{C})$.

Lemme 2.5. *Dans le cas 2, le feuilletage considéré est riemannien.*

Démonstration. Dans ce cas, au voisinage de x , la mesure μ est invariante par toutes les petites translations de \mathbb{C} . La restriction de μ à un voisinage de x est donc proportionnelle à la mesure de Lebesgue de \mathbb{C} . Nous allons montrer qu'il en est de même au voisinage de tout autre point y de \mathcal{K}' . Puisque l'orbite de x par \mathcal{P}' est dense dans \mathcal{K}' , il est possible de trouver une suite d'éléments γ_n de \mathcal{P}' tels que γ_n soit défini en x et que $\gamma_n(x)$ tende vers y . Puisque la mesure μ coïncide avec un multiple de la mesure de Lebesgue au voisinage de x , les lemmes 2.1 et 2.2 permettent alors d'en déduire que μ coïncide aussi avec un multiple constant de la mesure de Lebesgue au voisinage de y . Par conséquent, tous les points de \mathcal{K}' sont intérieurs au support de μ , c'est-à-dire à \mathcal{K}' . En d'autres termes, \mathcal{K}' est ouvert (et fermé). Par connexité de la variété ambiante, on a $\mathcal{K}' = T'$ et la mesure coïncide sur chaque composante connexe T_i' de T' avec un multiple constant de la mesure de Lebesgue. En modifiant chaque T_i' par une homothétie convenable, on se ramène au cas où μ coïncide avec la mesure de Lebesgue sur T' . La conclusion est maintenant claire : une application affine complexe qui préserve la mesure de Lebesgue est une isométrie.

Lemme 2.6. *Dans le cas 3, le feuilletage est riemannien.*

Démonstration. Le fermé \mathcal{K}' coïncide alors, au voisinage de x , avec un intervalle d'une droite du plan complexe. De plus, dans ce voisinage, μ coïncide avec un multiple constant de l'élément de longueur sur cette droite. Par un argument analogue à celui utilisé dans le lemme précédent, cette propriété est vérifiée au voisinage de tout point de \mathcal{K}' . En raffinant le recouvrement U_i de M , on peut alors supposer que pour chaque composante connexe T_i de T , l'intersection $T_i' \cap \mathcal{K}$ est vide ou égale à un intervalle Δ_i d'une droite du plan complexe. Par changement de coordonnée affine sur T_i , on peut supposer que μ coïncide sur T_i avec l'élément de longueur sur Δ_i (pour les indices i tels que Δ_i soit défini).

Soit \mathcal{C} la réunion des T_i qui rencontrent \mathcal{K} , c'est-à-dire qui contiennent l'un de ces intervalles Δ_i . Nous affirmons d'abord que si x appartient à $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap T'$, alors pour tout γ de \mathcal{P} avec $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$, l'élément γ est une isométrie de \mathbb{C} . Considérons en effet l'ensemble Ω' des points x de \mathcal{C}' pour lesquels cette propriété est vérifiée. On peut aussi définir l'ensemble Ω des points x de \mathcal{C} tels que pour tout γ de \mathcal{P} avec $\gamma(x) \in \mathcal{C}$, l'élément γ est une isométrie. Observons que $\Omega' = \Omega \cap \mathcal{C}'$ car les pseudogroupes \mathcal{P} agissant sur T et \mathcal{P}' agissant sur T' sont équivalents.

i) Ω' est non vide car il contient les points de $\mathcal{K}' = (\cup \Delta_i) \cap \mathcal{C}'$.

ii) Ω' est fermé dans \mathcal{C}' . Considérons une suite x_n d'éléments de Ω' convergeant vers un point x de \mathcal{C}' . Soit γ un élément de \mathcal{P}' tel que $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$. Comme le domaine de définition de γ est ouvert, $\gamma(x_n) \in \mathcal{C}$ pour n assez grand et γ est une isométrie.

iii) Ω' est ouvert. Soit $x \in \Omega'$ et y un point voisin de x . Soit γ un élément de \mathcal{P}' défini en y et tel que $\gamma(y) \in \mathcal{C}'$. Bien sûr, γ n'est pas nécessairement défini en x mais nous savons que les générateurs de \mathcal{P}' se prolongent en des générateurs de \mathcal{P} de sorte que x est dans le domaine de définition de γ considéré comme élément de \mathcal{P} . Il en résulte que γ est une isométrie.

Par connexité, Ω' coïncide avec \mathcal{C}' .

Considérons maintenant une composante T_i' de T' ne rencontrant pas \mathcal{K}' , c'est-à-dire contenue dans $T' \setminus \mathcal{C}'$. On peut alors trouver un point x de T_i' et un élément γ de \mathcal{P}' tels que $\gamma(x) \in \mathcal{C}'$. Ceci résulte de la connexité de la variété ambiante M . Equipons T_i' de la métrique image de la métrique euclidienne de \mathbb{C} par γ^{-1} . Cette métrique ne dépend pas du choix de $x \in T_i'$ et de γ d'après ce que nous venons de voir.

Il est maintenant clair que le pseudogroupe \mathcal{P}' tout entier est un pseudogroupe d'isométries.

Remarquons que, dans la situation que nous venons de considérer le support K de μ dans M est une sous-variété fermée de codimension 1 réelle dans M qui se projette localement sur les intervalles Δ_i .

Lemme 2.7. *Dans le cas 4, le feuilletage est riemannien.*

Démonstration. Dans le sous-cas a) le point z_0 , centre des homothéties $z \rightarrow \lambda(z-z_0) + z_0$ n'est certainement pas dans le voisinage \mathcal{V} de x car nous avons vu que la restriction à \mathcal{V} de ces homothéties préserve μ et que μ n'a pas d'atomes. Puisque toutes les valeurs de λ correspondent à des éléments de H , les orbites locales de H sont ouvertes. Là encore, le point considéré x est intérieur au support de μ et la forme μ est localement une forme volume. On conclut alors comme dans le lemme 2.5.

Dans le sous-cas b), le groupe H est constitué d'homothéties du type $\exp(t\alpha)(z-z_0) + z_0$ (t réel, α complexe fixé). Les orbites sont des spirales logarithmiques ou des cercles. On procède exactement comme dans le lemme 2.6 en remplaçant les intervalles de droite par des morceaux de spirales logarithmiques ou des arcs de cercles. La métrique euclidienne sur \mathbb{C} doit alors être remplacée par la métrique $\frac{dz d\bar{z}}{|z-z_0|^2}$, invariante par H .

Résumons les résultats obtenus dans ce paragraphe.

Théorème 2.8. *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement affine complexe sur une variété compacte connexe M . On suppose que \mathcal{F} possède une mesure transverse invariante ergodique μ . Alors deux cas (non exclusifs) sont possibles :*

- i) La mesure μ est concentrée sur une feuille compacte.*
- ii) Le feuilletage \mathcal{F} est riemannien.*

Observons que, dans le cas ii), la mesure μ n'est pas nécessairement une forme de volume transverse. Nous avons vu que μ peut se concentrer sur une sous-variété fermée de M de codimension réelle 1.

3. FLOTS TRANSVERSALEMENT AFFINES.

Dans ce paragraphe, nous classons les flots transversalement affines complexes sur les variétés compactes connexes sans bord. Cette classification sera une conséquence assez facile du théorème démontré au paragraphe précédent. L'observation fondamentale est bien sûr qu'un flot quelconque possède toujours au moins une mesure transverse invariante non triviale et donc une mesure ergodique (rayons extrémaux du cône des mesures invariantes).

Rappelons la classification des flots riemanniens telle qu'elle a été donnée par Yves Carrière [2].

Soit \mathcal{F} un flot riemannien sur une variété fermée connexe et orientable M de dimension 3. Plusieurs situations peuvent se présenter.

1) Les feuilles \mathcal{F} sont toutes denses. Alors, M est difféomorphe au tore T^3 et le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire. Son pseudogroupe transverse est donc constitué de translations et peut donc être considéré comme transversalement affine complexe. Notons que la structure complexe transverse invariante n'est pas unique.

2) L'adhérence d'une feuille générique de \mathcal{F} est un tore T^2 et au moins une feuille de \mathcal{F} est fermée. Dans ce cas, M s'obtient en recollant deux tores solides $D^2 \times S^1$ le long de leurs bords. Le feuilletage sur chaque tore solide est la suspension d'une rotation du disque d'angle irrationnel (par rapport à π). La variété M est alors un espace lenticulaire ou $S^2 \times S^1$. Dans un cas comme dans l'autre, \mathcal{F} ne peut posséder de structure transverse affine complexe. D'une part, le revêtement universel d'une variété possédant un feuilletage transversalement affine complexe se submerge sur un ouvert de \mathbb{C} par l'application développante [2] et ne peut donc être compact. Ceci élimine le cas des espaces lenticulaires dont le groupe fondamental est fini. D'autre part, pour cette même raison, la sphère S^2 ne peut posséder de structure affine complexe et ceci montre que les feuilletages riemanniens considérés sur $S^2 \times S^1$ ne peuvent être transversalement affines.

3) Les adhérences de toutes les feuilles de \mathcal{F} sont des tores T^2 . La restriction de \mathcal{F} à l'adhérence de l'une des feuilles est conjuguée à un feuilletage linéaire. La variété M est alors un fibré en tores au-dessus du cercle dont la monodromie est un difféomorphisme linéaire A de $SL(2, \mathbb{Z})$ préservant un feuilletage linéaire de pente irrationnelle de T^2 .

Si la matrice A est l'identité, la variété M est difféomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire. Si $A \neq \text{Id}$, le feuilletage \mathcal{F} est transversalement hyperbolique, c'est-à-dire que sa structure transverse est modélisée sur le groupe d'isométries du demi-plan de Poincaré. Il se trouve

que cette structure transverse peut même se réduire au groupe des isométries du type $z \rightarrow az + b$ (a réel positif et b réel quelconque). En considérant le demi-plan de Poincaré comme plongé dans \mathbb{C} , on voit que ces isométries sont aussi des applications affines de \mathbb{C} . Ainsi, \mathcal{F} peut aussi être considéré comme un feuilletage transversalement affine complexe. (Voir [2] pour une description précise de ces exemples).

4) Toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et \mathcal{F} est un fibré de Seifert. Pour que \mathcal{F} soit muni d'une structure affine transverse invariante, il faut et il suffit que l'"orbifold" base de la fibration soit affine complexe. Ces orbifolds sont bien connues : ce sont les quotients finis des tores T^2 . A un revêtement fini près, la variété M supportant \mathcal{F} est donc un fibré en cercles au-dessus de tore T^2 .

En résumé, nous avons montré le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit \mathcal{F} un flot riemannien possédant une structure transverse affine complexe, sur une 3-variété fermée connexe M . Alors, trois cas sont possibles :*

- i) M est diffeomorphe au tore T^3 et \mathcal{F} est conjugué à un flot linéaire.
- ii) M est un fibré en tores au-dessus du cercle. Les feuilles de \mathcal{F} sont denses dans les fibres de cette fibration.
- iii) \mathcal{F} est une fibration de Seifert. La base de cette fibration, considérée comme orbifold, est un quotient fini du tore T^2 .

Pour compléter la description des flots transversalement affines, il nous faut maintenant étudier le cas non riemannien. Toute mesure transverse invariante ergodique est alors concentrée sur une feuille compacte (ou encore orbite périodique) de \mathcal{F} .

Le voisinage d'une orbite périodique c de \mathcal{F} est caractérisé par son application de Poincaré qui est une homothétie du type $h(z) = \lambda z$.

Si λ est de module 1 et d'argument irrationnel par rapport à π , on met en évidence une famille de tores invariants au voisinage de c sur lesquels le feuilletage \mathcal{F} est conjugué à un feuilletage linéaire. Ceci permet de trouver des mesures transverses invariantes ergodiques concentrées sur ces tores et donc distinctes de masses de Dirac. D'après ce que nous avons vu, ceci est exclu puisque nous supposons \mathcal{F} non riemannien.

Si λ est une racine de l'unité, toutes les feuilles de \mathcal{F} proches de c sont fermées. L'analyticité transverse de \mathcal{F} montre alors que toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées et que \mathcal{F} est une fibration de Seifert. Là encore, ceci est exclu puisque \mathcal{F} n'est pas riemannien.

Si $|\lambda| \neq 1$, l'orbite fermée c est répulsive ou attractive. En particulier, pour tout point x proche de c , l'ensemble ω ou α -limite de x coïncide avec c . Observons que, pour tout flot, les ensembles ω et α -limites supportent des mesures transverses invariantes ergodiques. Il en résulte que, dans notre cas, pour tout x de M situé hors d'une orbite fermée, les ensembles $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont des orbites fermées isolées attractives et répulsives. Un simple argument de connexité montre alors le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Soit \mathcal{F} un flot transversalement affine complexe non riemannien sur une 3-variété fermée connexe M . Alors, il existe deux orbites fermées c_1 et c_2 de \mathcal{F} telles que, pour tout point x de $M \setminus c_1 \cup c_2$, l'ensemble ω -limite (resp. α -limite) de x est c_1 (resp. c_2).*

Il n'est pas difficile maintenant de compléter la description du flot étudiée. La variété M s'obtient en collant deux tores solides $D^2 \times S^1$ le long de leur bord, transverse à \mathcal{F} . Puisque nous avons vu que le groupe fondamental d'une variété compacte supportant un flot transversalement affine doit être infini, on en déduit que M est difféomorphe à $S^2 \times S^1$.

Pour terminer cette partie, nous décrivons complètement le flot \mathcal{F} avec sa structure transverse affine. La démonstration, facile, est laissée au lecteur.

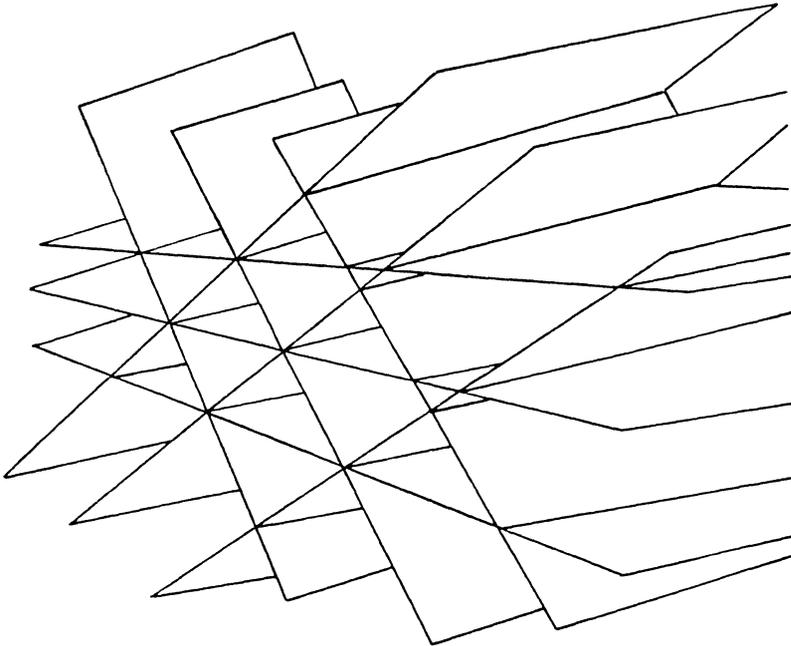
On considère le feuilletage de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ dont les feuilles sont les droites verticales $\{z\} \times \mathbb{R}$ pour $z \neq 0$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^+$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^-$. Ce feuilletage est invariant par les homothéties (on a toujours $|\lambda| \neq 1$): $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\lambda^n z, |\lambda|^n t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Le quotient, difféomorphe à $S^2 \times S^1$, est muni d'un flot transversalement affine complexe possédant exactement deux orbites fermées qui correspondent à $\{0\} \times \mathbb{R}_*^+$ et $\{0\} \times \mathbb{R}_*^-$. Ces orbites fermées sont les ω et α -limites des autres orbites. A conjugaison près, cette famille de flots (dépendant du paramètre λ) représente tous les flots transversalement affines complexes non riemanniens.

II. LES TISSUS FEUILLETÉS

1. INTRODUCTION.

Soit M une variété fermée de dimension 3. Un *tissu feuilleté* sur M est la donnée suivante :

- i) un feuilletage \mathcal{A} de dimension 1 sur M , appelé *axe* du tissu feuilleté,
- ii) trois feuilletages $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ de codimension 1 sur M , transverses deux à deux et contenant tous les trois l'axe \mathcal{A} .



Les feuilletages considérés sont de classe C^∞ . Pour simplifier, nous supposons aussi que tous ces feuilletages sont orientables et transversalement orientables.

Nous nous proposons ici de décrire tous les tissus feuilletés.

La première observation est qu'il est facile de "compléter" un tissu feuilleté en une famille de feuilletages (\mathcal{F}_λ) de codimension 1, dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et "tournant" autour de l'axe \mathcal{A} . Pour cela, fixons $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et définissons en chaque point x de M l'hyperplan $P_\lambda(x)$ de $T_x M$ qui contient la droite tangente à \mathcal{A} en x et dont le birapport avec les plans tangents à $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ en x est égal à λ . Le champ d'hyperplans P_λ est intégrable pour tout λ . Une façon simple de s'en assurer est de considérer un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{A} et le flot φ_t qu'il engendre. L'intégrabilité de $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ montre que la différentielle de φ_t préserve les fibrés tangents à $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ et la linéarité de $d\varphi_t$ montre alors que $d\varphi_t$ préserve le champ de plans P_λ . En d'autres termes, le crochet de Lie de X et d'un champ tangent à P_λ est tangent à P_λ . Le théorème de Frobenius permet d'affirmer que P_λ est intégrable, c'est-à-dire qu'il définit un feuilletage \mathcal{F}_λ .

Nous pouvons maintenant donner quelques exemples.

Exemple 1.1. On suppose qu'il existe une fibration localement triviale π de M sur le tore T^2 , de fibres difféomorphes à S^1 . Considérons trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ de dimension 1, transverses deux à deux, sur le tore T^2 . On définit alors un tissu feuilleté sur M dont l'axe est formé des fibres de π et dont les feuilletages $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ sont $\pi^*f_0, \pi^*f_1, \pi^*f_\infty$.

Exemple 1.2. Soit P un hyperplan linéaire de \mathbb{R}^3 . La famille des hyperplans affines de \mathbb{R}^3 parallèles à P définit un feuilletage linéaire de \mathbb{R}^3 . Lorsque P décrit un faisceau linéaire de \mathbb{R}^3 , ces feuilletages définissent un tissu linéaire de \mathbb{R}^3 invariant par translations. Par passage au quotient par \mathbb{Z}^3 , on obtient un tissu feuilleté sur le tore T^3 . La nature exacte de ce tissu feuilleté dépend de la position du réseau \mathbb{Z}^3 par rapport au faisceau linéaire de plans utilisé. Lorsque l'axe de ce tissu feuilleté correspond à une direction rationnelle de \mathbb{R}^3 , l'exemple ainsi construit rentre dans la famille d'exemples précédents.

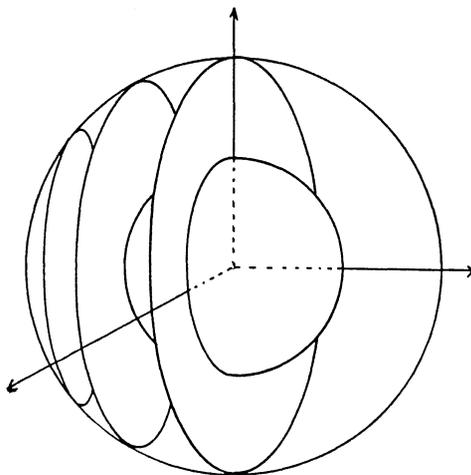
Exemple 1.3. On peut généraliser l'exemple 1.2. Soit G un groupe de Lie de dimension 3, d'algèbre de Lie \mathcal{G} . On suppose qu'il existe dans \mathcal{G} un faisceau linéaire d'hyperplans $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ formé de sous-algèbres de \mathcal{G} . On suppose de plus que G possède un sous-groupe discret Γ tel que G/Γ soit compact. L'hyperplan P_λ de \mathcal{G} définit sur G/Γ un champ de plans intégrable car P_λ est une sous-algèbre. La variété G/Γ est ainsi munie d'un tissu feuilleté.

Voici un exemple explicite. L'algèbre de Lie \mathcal{G} est engendrée par X, Y, Z avec les relations de crochet :

$$[X, Y] = Y \quad ; \quad [X, Z] = -Z \quad ; \quad [Y, Z] = 0.$$

L'hyperplan P_λ est engendré par Y et $X + \lambda Z$. On constatera que P_0 est une sous-algèbre abélienne alors que, pour $\lambda \neq 0$, les sous-algèbres P_λ sont non abéliennes et sont toutes conjuguées dans \mathfrak{G} . Le groupe de Lie simplement connexe G associé à \mathfrak{G} possède effectivement des sous-groupes uniformes discrets Γ . On pourra consulter [2] et [3] pour la description des variétés et des feuilletages correspondants. Nous dirons simplement que les variétés du type G/Γ sont des fibrés en tores sur le cercle. Les fibres toriques correspondent aux orbites de la sous-algèbre abélienne P_0 engendrée par X et Y . Le feuilletage de dimension 1 correspondant à Y , qui est l'axe du tissu feuilleté considéré, est un feuilletage riemannien contenu dans cette fibration en tores. En examinant la liste des groupes de Lie de dimension 3, on s'assure que cet exemple explicite est le seul qui produise des exemples différents de 1.1 et 1.2. Ceci résultera d'ailleurs de la classification des tissus feuilletés que nous allons obtenir.

Exemple 1.4. Considérons le faisceau linéaire des hyperplans (P_λ) de \mathbb{R}^3 qui contiennent l'axe de z . Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, les plans affines parallèles à P_λ définissent un feuilletage de \mathbb{R}^3 et donc de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Tous ces feuilletages sont invariants par les homothéties $(x,y,z) \longrightarrow (kx,ky,kz)$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$). On obtient donc un tissu feuilleté sur le quotient M de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par l'action d'un groupe monogène d'homothéties. Ce quotient est diffeomorphe à $S^2 \times S^1$. Pour chaque λ , le feuilletage \mathcal{F}_λ est formé de deux composantes de Reeb collées le long de leur bord. Les rotations euclidiennes de \mathbb{R}^3 autour de l'axe des z induisent sur M des diffeomorphismes qui permutent les feuilletages \mathcal{F}_λ . On reconnaîtra dans l'axe de ce tissu feuilleté l'exemple de flot transversalement affine complexe qui a été décrit dans la première partie de cet article.



Par la suite, nous allons analyser complètement la nature des tissus feuilletés. Les exemples les plus significatifs sont ceux que nous venons de citer. Dans cette introduction, nous nous contenterons d'un énoncé faible.

Théorème. *Soit M une variété fermée connexe de dimension 3 qui possède un tissu feuilleté. Alors, M est de l'un des types suivants :*

- i) un fibré en cercles S^1 au-dessus du tore T^2 ,*
- ii) un fibré en tores T^2 au-dessus du cercle S^1 ,*
- iii) le produit $S^2 \times S^1$.*

2. LA STRUCTURE HOLOMORPHE TRANSVERSE.

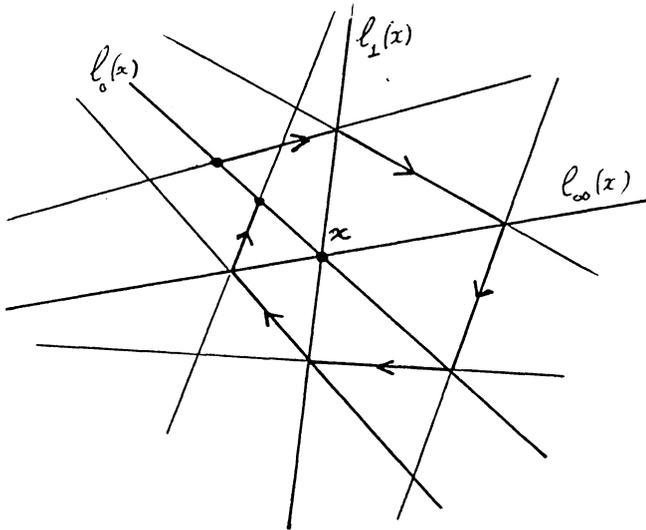
Dans ce paragraphe, nous allons décrire quelques faits bien connus concernant les tissus du plan.

Un *tissu* du plan est la donnée de trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ de dimension 1, transverses deux à deux, dans un ouvert simplement connexe Ω du plan \mathbb{R}^2 . Si x est un point de Ω , il existe une métrique euclidienne dans $T_x\Omega$, unique à multiple près, telle que les droites $T_x f_0, T_x f_1, T_x f_\infty$ forment des angles de $\pi/3$. En d'autres termes, un tissu dans Ω définit une structure conforme sur Ω . D'après le théorème d'intégrabilité bien connu, on peut donc trouver un difféomorphisme direct φ de Ω sur un ouvert du plan euclidien qui envoie f_0, f_1, f_∞ sur trois feuilletages formant un angle $\pi/3$ entre eux. Ce difféomorphisme est bien sûr défini à transformation conforme près, c'est-à-dire, si on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , à transformation holomorphe près. Ainsi, Ω est équipé d'une structure holomorphe.

Bien entendu, un tissu feuilleté trace un tissu sur toute transversale à l'axe. La structure holomorphe induite sur ces transversales est invariante par l'holonomie de l'axe. Par conséquent, *l'axe d'un tissu feuilleté est un flot transversalement holomorphe.*

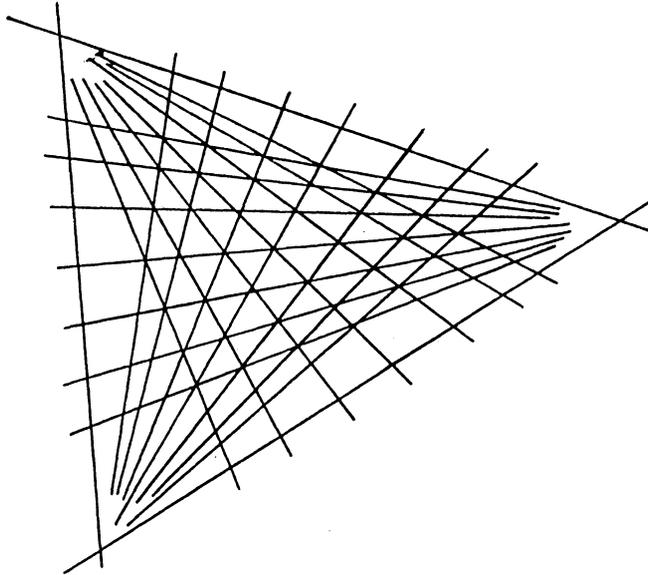
Pour étudier plus précisément les tissus du plan, on introduit un invariant appelé "courbure". Pour ces notions, on consultera [1] et [5].

Soit x un point de Ω et $l_0(x), l_1(x), l_\infty(x)$ les feuilles de f_0, f_1, f_∞ passant par x . En composant six applications d'holonomie de f_0, f_1, f_∞ sur les transversales $l_0(x), l_1(x), l_\infty(x)$ comme indiqué sur la figure suivante, on obtient un difféomorphisme local h_x de $l_0(x)$ défini au voisinage de x et fixant x . Ces applications h_x sont les applications d'holonomie du tissu.



Lorsque le tissu est linéaire, c'est-à-dire lorsque f_0, f_1, f_∞ sont formés de droites parallèles à trois droites données, ces applications d'holonomies h_x coïncident avec l'identité pour tout x . Réciproquement, si h_x est l'identité pour tout x , le tissu est localement linéarisable : pour chaque point de Ω , il existe un difféomorphisme d'un voisinage de ce point sur un ouvert du plan qui envoie le tissu sur un tissu linéaire.

En général, l'application h_x est tangente à l'ordre deux à l'identité. Voici une façon de s'en convaincre. Approchons le tissu considéré à l'ordre deux au voisinage de x par un tissu formé de trois faisceaux de droites :



Il suffit de s'assurer que ce dernier tissu est linéarisable. Pour le vérifier, on peut envoyer deux des pôles des faisceaux à l'infini à l'aide d'une transformation projective. Le tissu est alors constitué des droites verticales, des droites horizontales et des droites passant par un point donné, par exemple l'origine. L'application $(u,v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow (\text{Log } u, \text{Log } v) \in \mathbb{R}^2$ envoie alors ce tissu sur un tissu linéaire.

Si l'on paramètre $l_0(x)$ par longueur d'arc s à partir de x , l'application d'holonomie h_x est du type $h_x(s) = s - ks^3 + \dots$. Le réel k est la fonction courbure du tissu au point x .

Malheureusement, ce réel k n'est pas invariant lorsque l'on change de coordonnées dans Ω . Pour obtenir un véritable invariant, on procède de la façon suivante. On considère un difféomorphisme φ de Ω sur un ouvert du plan \mathbb{R}^2 (de coordonnées u,v) tel que φ envoie f_0, f_1, f_∞ sur trois feuilletages $\varphi_* f_0, \varphi_* f_1, \varphi_* f_\infty$ qui font des angles $\pi/3$. On définit alors une 2-forme α sur Ω par :

$$\alpha = \varphi^* (k \, du \, dv)$$

où k est la fonction courbure du tissu $(\varphi_*f_0, \varphi_*f_1, \varphi_*f_\infty)$. Il est très facile de vérifier que la 2-forme α ne dépend pas du choix de φ (unique, rappelons-le, à transformation holomorphe près). La 2-forme α est la *forme de courbure* du tissu ; elle est intrinsèquement liée au tissu, indépendamment des coordonnées utilisées. Le tissu considéré est localement linéarisable si et seulement si la forme de courbure s'annule identiquement.

Revenons maintenant au cas d'un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} . Sur chaque transversale à \mathcal{A} , nous avons vu qu'il est possible d'introduire une structure complexe ainsi qu'une 2-forme différentielle α . On peut aussi considérer la forme α comme une forme sur M qui est basique pour \mathcal{A} ; c'est une forme fermée dont le noyau contient les vecteurs tangent à \mathcal{A} .

Deux cas opposés se présentent.

Si la forme α est identiquement nulle, nous savons que le tissu transverse est localement linéarisable. Dans des coordonnées holomorphes convenables, le tissu induit sur une transversale est formé des feuilletages par droites parallèles à trois droites faisant entre elles des angles égaux à $\pi/3$. Ces coordonnées sont uniques à une application holomorphe préservant ces feuilletages près, c'est-à-dire à une application du type $z \rightarrow az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. L'axe est donc un flot transversalement affine complexe. Ces flots ont été décrits dans la première partie de cet article.

Un autre cas se présente lorsque α n'a pas de singularité. On peut alors définir une métrique riemannienne g sur chaque transversale à \mathcal{A} par :

$$g(v) = \alpha(v, iv)$$

où v est un vecteur tangent et iv désigne la multiplication de v par $i = \sqrt{-1}$, bien définie grâce à la structure complexe sur la transversale. L'axe \mathcal{A} est donc riemannien et nous savons que ces flots sont classés en dimension 3.

Le cas intermédiaire, où α a des singularités, sera plus difficile à analyser. C'est le but du paragraphe suivant.

3. DESCRIPTION DE L'AXE

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit (\mathcal{F}, λ) un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} sur une variété fermée connexe de dimension 3. Deux cas (non exclusifs) sont possibles.*

- i) \mathcal{A} est un flot riemannien.
- ii) \mathcal{A} est un flot transversalement affine complexe.

Considérons la forme α que nous avons introduite au paragraphe précédent, vue comme forme sur M , basique pour \mathcal{A} . Soit R l'ouvert de M formé des points où α est non nulle. Si R est vide, nous savons que \mathcal{A} possède une structure transverse affine complexe. Si $R = M$, nous avons vu que la forme α et la structure holomorphe transverse permettent de montrer que \mathcal{A} est riemannien. *Nous supposons donc que R est non vide et différent de la variété M tout entière.*

Nous introduisons maintenant des notations analogues à celles utilisées dans la première partie pour l'étude des flots transversalement affines complexes. On recouvre M par un nombre fini d'ouverts U_i feuilletés trivialement par \mathcal{A} , c'est-à-dire du type $L_i \times T_i$ où L_i est un intervalle de \mathbb{R} et T_i un ouvert connexe du plan complexe. On suppose que les adhérences de T_i dans \mathbb{C} sont disjointes et on note T la réunion des T_i . Le pseudogroupe d'holonomie correspondant est noté \mathcal{P} ; il est engendré par des difféomorphismes holomorphes γ_{ij} d'un ouvert de T_i vers un ouvert de T_j pour chaque couple (i, j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Ce pseudogroupe \mathcal{P} préserve un tissu de T formé de trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ . La forme basique α sur M produit sur T une 2-forme, encore notée α , invariante par \mathcal{P} . L'ensemble des points où α est non nulle est noté \mathcal{R} ; il correspond bien sûr à l'ouvert R de M . Enfin, il est possible de choisir des ouverts connexes T_i' dont l'adhérence est contenue dans T_i et tels que le pseudogroupe \mathcal{P}' engendré par les restrictions des éléments de \mathcal{P} à $T' = \cup T_i'$ (à la source et au but) soit équivalent à \mathcal{P} . Enfin, nous notons \mathcal{R}' l'intersection de \mathcal{R} et de T' .

L'ouvert \mathcal{R}' est invariant par \mathcal{P}' et il est possible de définir une métrique riemannienne g sur \mathcal{R}' invariante par \mathcal{P}' . En fait, on peut même définir sur \mathcal{R}' des champs de vecteurs invariants. On définit les champs de vecteurs X_0, X_1, X_∞ sur \mathcal{R}' qui sont tangents à f_0, f_1, f_∞ , orientés positivement et de longueur 1 par rapport à la métrique riemannienne g . (Rappelons que tous les objets considérés dans cet article sont supposés orientables).

Lemme 3.2. *Soit x un point de \mathcal{R}' . L'orbite de x par \mathcal{P}' , entièrement contenue dans \mathcal{R}' , ne s'accumule pas sur la frontière de \mathcal{R}' dans T' .*

Démonstration. Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Soit \mathcal{R}'_ε l'ensemble des points x de \mathcal{R}' tels que les flots locaux des champs X_0 et X_1 de \mathcal{R} sont définis en x pour tous les temps t avec $|t| < \varepsilon$. Il est clair que \mathcal{R}'_ε est ouvert dans \mathcal{R}' et que la réunion (croissante) des \mathcal{R}'_ε est égale à \mathcal{R}' .

Par définition de \mathcal{P}' , si ε est assez petit l'ouvert \mathcal{R}'_ε est invariant par \mathcal{P}' .

Remarquons enfin que si une suite x_n de points de \mathcal{R}' converge vers la frontière de \mathcal{R}' dans T' , les vecteurs $X_0(x_n)$ et $X_1(x_n)$ tendent vers l'infini. Il en résulte que, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite x_n est hors de \mathcal{R}'_ε pour n assez grand.

Ces observations entraînent évidemment le lemme.

Lemme 3.3. *Soit x un point de $R \subset M$. Deux cas sont possibles :*

- i) la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle.*
- ii) l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est un tore T^2 . La restriction de \mathcal{A} à ce tore est différemment conjuguée à un feuilletage linéaire du tore.*

Démonstration. Soit K l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x et \mathcal{K} et \mathcal{K}' les fermés correspondants de T et T' . Nous savons que les pseudogroupes \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont riemanniens sur \mathcal{R} et \mathcal{R}' . La difficulté provient du fait que la métrique g n'est pas complète. De manière équivalente, les champs X_0 , X_1 et X_∞ ne sont pas complets. Cependant, nous avons vu qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout point y de \mathcal{K}' , les flots locaux de X_0 et X_1 sont définis en y pour tous les temps t avec $|t| < \varepsilon$. Cette dernière propriété permet d'adapter les démonstrations des théorèmes de structure des flots riemanniens à cette nouvelle situation, voir [4], [8]. Il en résulte que K est une sous-variété de M . Puisque nous supposons que R est non vide et différent de M , la frontière de \mathcal{R} est non vide et le lemme 3.2 montre que la feuille de \mathcal{A} passant par x n'est pas dense dans M . Ainsi K est de dimension 1 ou 2. Lorsque K est de dimension 1, la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle. Lorsque K est de dimension 2 c'est une surface compacte connexe supportant un flot riemannien à feuilles denses. C'est donc un tore et le feuilletage \mathcal{A} restreint à ce tore est conjugué à un feuilletage linéaire.

Lemme 3.4. *Soit x un point de \mathcal{R} tel que la feuille de \mathcal{A} passant par x est fermée. Alors toutes les feuilles de \mathcal{A} sont fermées et ce sont les fibres d'une fibration en cercles de M .*

Démonstration. Les pseudogroupes \mathcal{P} et \mathcal{P}' préservent les champs de vecteurs X_0 et X_1 et commutent donc avec leurs flots locaux. Il en résulte que si un point x est tel que la feuille de \mathcal{A} passant par x est un cercle, les feuilles de \mathcal{A} passant par les points voisins de x sont aussi fermées et d'holonomie triviale. Par analyticité transverse, toutes les feuilles de \mathcal{A} sont fermées et d'holonomie triviale, c'est-à-dire que ce sont les fibres d'une fibration en cercles.

Une fibration en cercles définit bien entendu un flot riemannien. Pour achever la démonstration de la proposition, nous sommes donc amenés à supposer que, *pour tout x de \mathcal{R} , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est un tore.*

Soit p un réel irrationnel. Soit $S_p \subset M$ l'ensemble des points de M tels que l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x soit un tore T^2 et que la restriction de \mathcal{A} à cette adhérence soit conjuguée à un feuilletage linéaire de T^2 de pente p . D'après ce que nous avons vu, tout point de R appartient à S_p pour un certain p . Plus précisément, l'existence des champs de vecteurs X_0 et X_1 invariants par \mathcal{P} montre que si un point x de R est dans S_p , tout point suffisamment voisin de x est encore dans S_p . Il existe donc un réel p tel que l'intérieur $\overset{\circ}{S}_p$ de S_p soit non vide. Nous fixons une telle valeur de p et nous noterons $\overset{\circ}{S}$ et S au lieu de $\overset{\circ}{S}_p$ et S_p . On note \mathcal{S} et \mathcal{S}' les parties correspondantes de T et T' . Nous nous proposons de montrer que $S = M$.

Lemme 3.5. *Il existe une fonction uniformément continue $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout x de S , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est la feuille de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ qui passe par x .*

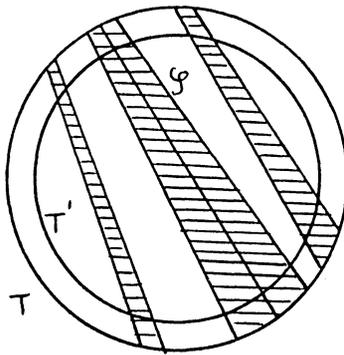
Démonstration. Pour chaque point x de \mathcal{S}' , l'adhérence de l'orbite de x sous l'action de \mathcal{P}' est une courbe passant par x . La tangente à cette courbe fait un birapport $\lambda(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec les tangentes aux feuilles de f_0, f_1, f_∞ passant par x . On obtient ainsi une fonction $\lambda : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ évidemment constante sur les orbites de \mathcal{P}' . On note encore $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ l'application correspondante. Autrement dit, pour tout x de S , l'adhérence de la feuille de \mathcal{A} passant par x est une feuille compacte de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$, l'un des feuilletages de codimension 1 du tissu feuilleté étudié.

Pour montrer que λ est uniformément continue, nous introduisons deux notations. Tout d'abord, nous notons d la distance sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ image de la distance naturelle sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ par l'application $\text{tg} : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. D'autre part, nous complétons les trois feuilletages f_0, f_1, f_∞ en une famille de feuilletages (f_λ) comme nous l'avons fait pour la famille (\mathcal{F}_λ) . L'adhérence de l'orbite d'un point x de \mathcal{S}' par \mathcal{P}' coïncide donc, au voisinage de x , avec la feuille de $f_{\lambda(x)}$ passant par x .

Il est clair que si x_1 et x_2 sont deux points de \mathcal{P}' , les adhérences de leurs orbites par \mathcal{P} sont égales ou disjointes.

Il existe par ailleurs une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante. Si deux points x_1 et x_2 sont dans T' et si les paramètres λ_1 et λ_2 sont tels que $d(\lambda_1, \lambda_2) \geq C\|x_2 - x_1\|$, alors la feuille de f_{λ_1} passant par x_1 coupe celle de f_{λ_2} passant par x_2 en un point de T .

Ces deux observations montrent que l'application $\lambda: S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est Lipschitz et donc uniformément continue. Cette application se prolonge donc en une application λ définie sur l'adhérence de S .



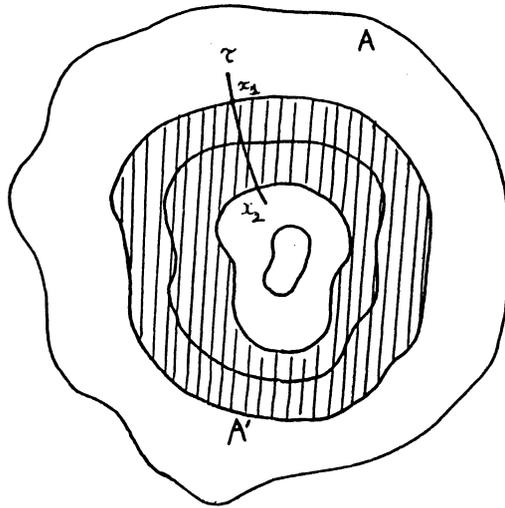
Lemme 3.6. *On a $S = M$. En d'autres termes, les adhérences de toutes les feuilles de \mathcal{A} sont des tores T^2 et les restrictions de \mathcal{A} à ces tores sont toutes conjuguées à un feuilletage linéaire de T^2 de pente p .*

Démonstration. Nous allons montrer que $\overset{\circ}{S}$ est fermé. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point x dans la frontière de $\overset{\circ}{S}$.

Nous affirmons que la feuille L de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x est compacte (rappelons que l'application λ a été prolongée à l'adhérence de S et, en particulier, au point x). Dans le cas contraire, il existerait une transversale fermée positive τ à $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ qui couperait L une infinité de fois. En considérant une suite de points x_n de $\overset{\circ}{S}$ convergeant vers x , on obtiendrait donc que le nombre d'intersection de τ avec la feuille (compacte) L_n de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x_n tend vers l'infini.

Nous avons déjà observé que ces feuilles compactes L_n sont deux à deux égales ou disjointes. Par conséquent, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que toute feuille L_n est isotope à l'une des feuilles L_1, L_2, \dots, L_{n_0} . Comme τ et L_n sont positivement transverses pour n assez grand, le nombre d'intersection de τ et L_n est borné. Cette contradiction montre la compacité de la feuille L de $\mathcal{F}_{\lambda(x)}$ passant par x . Cette feuille est d'ailleurs un tore T^2 car le flot \mathcal{H} y est tangent.

La restriction de \mathcal{H} à L , identifiée à T^2 , est une limite de feuilletages de T^2 différemment conjugués à des feuilletages linéaires de pente p . Par continuité du nombre de rotation, on en déduit que cette restriction est topologiquement conjuguée à ce feuilletage linéaire de pente p . Soit c une courbe plongée dans L , transverse à la restriction de \mathcal{H} à L et telle que l'application de premier retour de \mathcal{H} sur c soit topologiquement conjuguée à une rotation d'angle $2\pi p \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$. Soit A un anneau transverse à \mathcal{H} , contenant la courbe c . L'application H de premier retour de \mathcal{H} est définie au voisinage de c , est holomorphe, préserve c et préserve un tissu (f_λ) sur A . La courbe c est une feuille du feuilletage f_{λ_0} de A avec $\lambda_0 = \lambda(x)$.



Soit τ un arc de A transverse à c et x_1 et x_2 deux points de τ situés de part et d'autre de c et suffisamment proches de c . Par un argument élémentaire de connexité, on établit l'existence de paramètres λ_1 et λ_2 , proches de λ_0 tels que les feuilles de f_{λ_1} et f_{λ_2} passant par x_1 et x_2

respectivement sont fermées et délimitent un anneau A' contenu dans A . L'application H de premier retour de \mathcal{A} sur A est entièrement définie sur A' et préserve cet anneau A' . Soit φ un difféomorphisme holomorphe de A' sur un anneau standard $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < k\}$. Le difféomorphisme holomorphe $\varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$ est alors une rotation dont l'angle fait un rapport irrationnel avec π puisque p est irrationnel. La famille des cercles concentriques est donc invariante par $\varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$ et la courbe $\varphi(c)$ est nécessairement l'un de ces cercles.

Revenant à la situation étudiée, nous avons mis en évidence une famille de tores T^2 au voisinage du point x qui sont invariants par \mathcal{A} et pour lesquels le feuilletage \mathcal{A} est différentiablement conjugué à un feuilletage linéaire de pente p . Mais cela signifie précisément que le point x est intérieur à S , contrairement au fait que x a été choisi comme point frontière de S . Cette contradiction montre donc que la frontière de $\overset{0}{S}$ est vide, c'est-à-dire que $S = M$ et établit donc le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 3.1. La démonstration du lemme 3.6 montre en fait qu'il existe une fibration localement triviale de M de fibres T^2 (et de base S^1) dont les fibres sont les adhérences des feuilles de \mathcal{A} . Un voisinage d'une de ces fibres est difféomorphe à $T^2 \times]0,1[$ et, dans ces coordonnées, \mathcal{A} est tangent aux tores $T^2 \times \{*\}$ et y induit un feuilletage linéaire de pente p . Il est clair que, dans ce cas, l'axe \mathcal{A} est riemannien.

4. DESCRIPTION DES TISSUS FEUILLETÉS.

Il nous reste à examiner la liste des flots riemanniens et des flots transversalement affines complexes et à déterminer ceux qui peuvent être l'axe d'un tissu feuilleté.

Commençons par une proposition élémentaire.

Proposition 4.1. *Soit (\mathcal{F}_λ) un tissu feuilleté d'axe \mathcal{A} sur une variété fermée connexe M de dimension 3. Les tissus feuilletés (\mathcal{G}_μ) ayant le même axe \mathcal{A} sont naturellement paramétrés par les applications $\rho: M \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constantes sur les feuilles de \mathcal{A} .*

Démonstration. En chaque point x de M , les hyperplans de $T_x M$ contenant la tangente à \mathcal{A} en x forment une droite projective réelle. La donnée de deux tissus feuilletés (\mathcal{F}_λ) et (\mathcal{G}_μ) permet d'obtenir, pour chaque x de M , deux bases projectives de cette droite. Le passage de l'une de ces bases à l'autre fournit une application $\rho: M \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constante sur les feuilles de \mathcal{A} .

Réciproquement, une telle application donne un changement de base et produit donc un tissu feuilleté \mathcal{G}_μ ; l'intégrabilité de \mathcal{G}_μ se traduit par la constance de ρ sur les feuilles de \mathcal{A} .

Notons que le cas où ρ est constant est un peu particulier : le tissu (\mathcal{G}_μ) coïncide alors avec (\mathcal{F}_λ) mais après un changement projectif π de paramètre, c'est-à-dire que l'on a : $\mathcal{G}_\mu = \mathcal{F}_{\pi(\mu)}$.

Nous pouvons maintenant analyser les diverses possibilités pour l'axe \mathcal{A} , en commençant par le cas riemannien. La situation présente se simplifie grâce à la remarque suivante qui a déjà été faite implicitement plus haut.

Lemme 4.2. *Si l'axe \mathcal{A} est riemannien, il est transversalement parallélisable. En d'autres termes, il existe deux champs de vecteurs X_0 et X_1 , transverses à \mathcal{A} , partout linéairement indépendants, et dont les flots préservent \mathcal{A} .*

Démonstration. Il suffit de choisir X_0 et X_1 tangents à \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 et de norme 1 par rapport à la structure riemannienne transverse invariante. On utilise ici l'orientabilité des feuilletages étudiés.

La liste des flots riemanniens en dimension 3 a été rappelée dans la première partie de cet article. La liste des flots transversalement parallélisables est plus courte. Voici les cas possibles :

- a) un fibré en cercles dont la base, étant parallélisable, est un tore T^2
- b) un flot linéaire sur le tore T^3
- c) un flot dont les adhérences des orbites forment une fibration en tores T^2 .

Complétons la description de ces trois cas.

a) Lorsque l'axe est un fibré en cercles, il est immédiat que le tissu considéré est du type que nous avons décrit dans l'exemple 1.1

b) Un flot linéaire \mathcal{A} sur T^3 est l'axe d'un tissu linéaire comme décrit dans l'exemple 1.2. Les autres tissus d'axe \mathcal{A} sont paramétrés par les applications $\rho: T^3 \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ constantes sur les orbites de \mathcal{A} . Si ces orbites sont denses, ρ est une constante et les seuls tissus à considérer sont les tissus linéaires. Si les adhérences des orbites sont des tores T^2 , les applications ρ possibles correspondent à des applications de S^1 dans $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Il serait facile de décrire la topologie de ces tissus non linéaires sur T^3 . Enfin, si les orbites de \mathcal{A} sont fermées, on est ramené au cas a).

c) Dans ce cas, il faut décrire les fibrés en tores qui peuvent intervenir. Un tel fibré est défini par sa monodromie dont on peut supposer, après isotopie, que c'est un difféomorphisme linéaire de $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit par un élément B de $GL(2, \mathbb{Z})$. Cet élément doit respecter l'orientation de T^2 et préserver un feuilletage linéaire orienté de pente irrationnelle p . Il est facile d'en conclure que B est soit la matrice identique soit une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$ de trace strictement supérieure à 2 (de façon à être diagonalisable sur \mathbb{R}). Dans le premier cas, \mathcal{F} est un flot linéaire sur T^3 et nous sommes ramenés au point b). Lorsque $\text{tr } B > 2$, le feuilletage \mathcal{F} a déjà été décrit dans la première partie ; il admet une structure transverse modélée sur le demi-plan supérieur où agissent les isométries hyperboliques du type $z \rightarrow az + b$ avec $a > 0$. Ces isométries préservent le tissu du demi-plan formé des droites verticales, des droites horizontales et des droites parallèles à la première bissectrice (par exemple). Il en résulte que \mathcal{F} est effectivement l'axe d'un tissu feuilleté. Il ne serait pas difficile d'ailleurs d'identifier ce tissu à celui décrit dans l'exemple 1.3. Les autres tissus feuilletés d'axe \mathcal{F} , correspondent aux applications p constantes sur les feuilles de \mathcal{F} , c'est-à-dire aux applications du cercle dans $PGL(2, \mathbb{R})$. Leur description qualitative n'est pas difficile.

Nous avons décrit tous les cas où l'axe est riemannien. Pour terminer l'étude des tissus feuilletés, il nous reste à envisager la situation où l'axe est un flot transversalement affine complexe.

D'après la première partie, à conjugaison différentiable près, \mathcal{F} peut se décrire de la façon suivante. Soit λ un nombre complexe non nul de module différent de 1. La transformation

$$(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (\lambda z, t + \lambda |t|) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$$

préserve la trace sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ des droites verticales $\{*\} \times \mathbb{R}$. Le feuilletage \mathcal{F} est le feuilletage obtenu sur le quotient, difféomorphe à $S^2 \times S^1$. Nous savons que \mathcal{F} a précisément deux orbites fermées dont l'holonomie est formée d'homothéties $z \rightarrow \lambda^n z$ ($n \in \mathbb{Z}$). Dans le cas qui nous intéresse, ces applications d'holonomie doivent préserver un tissu orienté sur les transversales. Seul le cas où λ est un réel positif peut donc intervenir dans un tissu feuilleté.

Lorsque λ est réel positif, nous avons vu dans l'exemple 1.4 que \mathcal{F} est effectivement l'axe d'un tissu feuilleté de $S^2 \times S^1$. La nature dynamique de \mathcal{F} et en particulier le fait que les deux orbites fermées de \mathcal{F} sont les ensembles ω et α -limite des autres orbites montrent qu'une fonction constante sur les orbites de \mathcal{F} est constante. Il en résulte qu'à transformation projective près, il n'existe qu'un seul tissu d'axe \mathcal{F} .

Ceci termine la description des tissus feuilletés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BLASCHKE, G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [2] Y. CARRIERE, *Flots riemanniens*, Astérisque 116, p. 31-52, 1984.
- [3] E. GHYS, V. SERGIESCU, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages*, Topology 19 (1980), p. 179-197.
- [4] A. HAEFLIGER, *Pseudogroups of local isometries*, Colloque de Géométrie différentielle de St Jacques de Compostelle, Research Notes 131, Pitman (1985), p. 174-197.
- [5] I. NAKAI, *Topology of complex webs of codimension one and the geometry of projective space curves*, Topology, vol. 26, n° 4, p. 475-504, 1987.
- [6] T. NISHIMORI, manuscrit, Grenoble 1989.
- [7] R. SACKSTEDER, *Foliations and pseudogroups*, Amer. Journal of Math., vol. 87, 1965, p. 79-101.
- [8] E. SALEM, *Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries locales*, Ann. Inst. Fourier, 38, p. 185-200, 1988.
- [9] D. SULLIVAN, *Conformal dynamical systems*, Proc. Intern. Conf. Dynamical Systems, Rio de Janeiro, Springer Lecture Notes in Math. 1007, 1983, p. 725.

U.R.A. DO 746
C.N.R.S.

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON Cedex 07

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J.-C. SIKORAV

Quelques propriétés des plongements Lagrangiens

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 46 (1991), p. 151-167

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_46__151_0

© Mémoires de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIETES DES PLONGEMENTS LAGRANGIENS

J.-C. Sikorav, Université Toulouse III
URA 1408 du CNRS "Géométrie et topologie"
février 1991

Introduction

Soit L une variété fermée connexe de dimension n et soit $(V, \omega = d\lambda)$ une variété symplectique exacte de dimension $2n$. Nous nous intéressons à l'existence d'un plongement lagrangien $j : L \rightarrow V$ satisfaisant l'une au moins des conditions suivantes :

- (a) j est homotope à $f : L \rightarrow V$, application continue donnée.
- (b) $[j^*\lambda] \in H^1(L; \mathbb{R})$ est donné.
- (c) j est à valeurs dans un ouvert $\mathcal{U} \subset V$ donné, et est symplectiquement (resp. hamiltonniennement) isotope à un plongement $f : L \rightarrow V$ donné (problèmes d'engouffrement).

Une discussion générale de ce genre de problèmes est donnée dans [9]. Nous nous limiterons à deux cas particuliers, où $V = T^*M$ est un fibré cotangent muni de sa structure symplectique canonique $\omega = d\lambda$, $\lambda = p.dq$:

- (i) $M = \mathbb{R}^n$. On identifie $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$, avec $\omega(X, Y) = (iX, Y)$ (produit scalaire euclidien).
- (ii) M fermée.

Après avoir rappelé certains des principaux résultats connus, nous en donnons quelques nouveaux, les principaux étant :

Théorème 1 (M. Gromov, communication orale ; cf. 1.2). Si $j : L \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un plongement lagrangien à valeurs dans le cylindre $Z_n(r) = B^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}$, alors le sous-groupe $\text{im } [j^*\lambda] \subset \mathbb{R}$ contient un élément a tel que $0 < a < \pi r^2$.

Corollaire. Si $[j^*\lambda]$ est multiple d'une classe entière, il existe $r > 0$ tel que j n'admette pas d'engouffrement hamiltonien la poussant dans le cylindre $Z_n(r)$.

Théorème 2 (cf. 2.3). Soit α une 1-forme non fermée sur une variété fermée M . Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de $\alpha(M)$ dans T^*M qui ne contient aucune sous-variété lagrangienne homotope à zéro.

On en déduit que sous certaines conditions une limite C^0 de sous-variétés lagrangiennes est lagrangienne (cf. 2.4).

Théorème 3 (cf. 2.7). Soit $\phi : T^n \rightarrow T^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ un plongement lagrangien qui est symplectiquement isotope à $\text{id} \times \{0\}$ dans $T^n \times \mathbb{R}^n = T^*T^n$. Alors $\text{pr}_2 \circ \phi : T^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à zéro sauf peut-être si $n = 3$.

Ceci généralise un résultat de F. Laudenchbach [11] sur les 1-formes fermées non singulières.

Enfin, généralisant à un cotangent quelconque une méthode introduite dans [21] pour T^*T^n , nous définissons des invariants symplectiques d'ouverts d'un cotangent en mesurant le "nombre" de sous-variétés qu'ils contiennent. Nous montrons notamment :

Théorème 4 (cf. 3.4). Si $b_1(M) \geq 2$, il existe une famille de dimension infinie d'ouverts étoilés de T^*M deux à deux non symplectomorphes.

Dans cet énoncé on a muni l'espace de tous les ouverts de T^*M de la topologie Hausdorff. Un ouvert $\mathcal{U} \subset T^*M$ est dit étoilé (par rapport à la section nulle) si pour tout $q \in M$ la fibre $\mathcal{U}_q \subset T^*_qM$ est étoilée par rapport à 0. Ceci implique qu'il est difféomorphe au cotangent tout entier, donc un corollaire est que l'espace des structures symplectiques sur T^*M est de dimension infinie.

Les preuves utilisent certains résultats de Gromov obtenus par les courbes holomorphes [7], ainsi que le résultat sur les phases génératrices de [19] et des corollaires donnés dans [10].

1. Sous-variétés lagrangiennes de \mathbb{C}^n

La première question est de savoir si une variété fermée donnée L^n admet un plongement lagrangien dans \mathbb{C}^n : voir M. Audin [1] pour les résultats connus en 1987. Entre autres :

- le h-principe de M. Gromov [7] permet d'expliciter les conditions nécessaires et suffisantes pour que L admette une immersion lagrangienne régulièrement homotope à un plongement, ou de façon équivalente : admette un plongement totalement réel. Ces conditions, de nature homotopique, excluent toutes les sphères S^n sauf pour $n = 1$ ou 3 .

- Si L admet un plongement lagrangien dans \mathbb{C}^n et si V admet une immersion lagrangienne dans \mathbb{C}^m (ce qui équivaut à la trivialité du \mathbb{C} -fibré $TL \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$), alors $L \times V$ admet un plongement lagrangien dans \mathbb{C}^{n+m} .

- A une exception près, on connaît exactement quelles sont les surfaces qui admettent un plongement lagrangien dans \mathbb{C}^n : pour les orientables, seulement le tore T^2 . Pour les non-orientables : celles dont la caractéristique d'Euler est divisible par 4, sauf peut-être la bouteille de Klein.

- Comme obstruction "non homotopique" au plongement, il y a essentiellement le résultat de Gromov [7] : si j est un plongement lagrangien de L dans \mathbb{C}^n , $[j^*\lambda]$ est toujours non nul. Ceci implique en particulier que $H^1(L; \mathbb{R})$ est non nul.

Plus récemment L. Polterovich [15] a défini une notion de chirurgie lagrangienne (inspirée de [10]) permettant d'éliminer des points doubles d'immersions lagrangiennes quitte à rajouter des anses rondes. Il obtient ainsi beaucoup de nouveaux exemples de variétés plongeables, notamment les premiers qui ne soient pas des fibrés sur le cercle ou des produits. Par ailleurs, utilisant un résultat de C. Viterbo [22] sur l'indice de Maslov (cf. 1.5), Polterovich [16] donne une nouvelle obstruction à l'existence d'un plongement lagrangien : par exemple la variété K^n , quotient de T^n par l'application $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + 1/(2n-2), x_2, \dots, x_n)$ n'est pas plongeable si $n \geq 3$ (K^2 est la bouteille de Klein mais son obstruction ne marche pas dans ce cas).

On suppose maintenant que j est un plongement lagrangien de L dans \mathbb{C}^n . On identifie L et $j(L)$.

1.1. Disques holomorphes (cf. [7]). Par définition, un disque holomorphe à bord dans L est une application $f : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L)$ continue et holomorphe dans l'intérieur, où D est le disque unité fermé de \mathbb{C} . Elle est alors de classe C^∞ sur D .

D'autre part, rappelons que l'aire d'une application f de D dans \mathbb{C}^n est

$$a(f) = \iint_D |df/\partial x \wedge \partial f/\partial y|.$$

Si f est holomorphe, on a $a(f) = \iint_D |df|^2 = \iint_D f^*\omega$. En particulier, si f est non constante on a $a(f) > 0$. De plus, si $f|_{\partial D}$ est à valeurs dans la variété lagrangienne L , alors la formule de Stokes donne $a(f) = \int_{\partial D} f^*\lambda = \langle [f^*\lambda], [f|_{\partial D}] \rangle$. Donc $\text{im } [j^*\lambda]$ contient l'aire de tout disque holomorphe à bord dans L .

Dans [7], Gromov démontre le résultat suivant, dont la non nullité de la classe $[j^*\lambda]$ est une conséquence immédiate.

Théorème. Soit $L \subset \mathbb{C}^n$ une variété lagrangienne fermée. Alors il existe un disque holomorphe non constant à bord dans L .

Soit $a(L)$ la borne inférieure des aires des disques holomorphes non constants à bord dans L . Revenant certaines étapes de la preuve de Gromov, nous allons en donner une majoration en fonction de la "taille" de L .

1.2. Proposition. Si L est contenue dans le cylindre $Z_n(r)$, on a $a(L) < \pi r^2$. Autrement dit : il existe un disque holomorphe à bord dans L et d'aire $< \pi r^2$.

Corollaire. $\text{im } [j^* \lambda]$ contient un élément a tel que $0 < a < \pi r^2$.

Démonstration. Pour trouver les disques holomorphes, on étudie l'équation

$$(E) \quad \bar{\partial}f = C, \quad f : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L) \text{ homotope à zéro,}$$

où $\bar{\partial}f = (1/2)(\partial f/\partial x + i \partial f/\partial y)$ et $C \in \mathbb{C}^n$ est une constante donnée.

Lemme. L'équation (E) a une solution si : $\pi |C|^2 < a(L)$.

Preuve du lemme. D'après [7], si cette équation n'a pas de solution c'est qu'il y a perte de compacité de l'ensemble $\{f \equiv 0 \mid |\partial f| \leq C\}$, ce qui est dû aux disques holomorphes. Plus précisément, supposons que C est un point limite de l'ensemble de résolubilité : alors il existe une suite $(f_i : (D, \partial D) \rightarrow (\mathbb{C}^n, L), i \in \mathbb{N})$ d'applications homotopes à zéro telle que $\partial f_i \rightarrow C$ au sens C^0 , et qui n'admet aucune sous-suite convergente. Le théorème de compacité des courbes holomorphes ([7], th. 1.5) dit alors qu'il existe

- des disques holomorphes non constants à bord dans $L : h_j, 1 \leq j \leq k$, avec $k \geq 1$,
- des points $z_j \in \partial D$ et des voisinages $U_{ij} \ni z_j$

avec la propriété suivante : après reparamétrage, $f_i|_{U_{ij}}$ converge vers $h_j|_{D \setminus \{1\}}$. A fortiori on a pour tout j :

$$(*) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a(f_i|_{U_{ij}}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \iint_{U_{ij}} f_i^* \omega = a(h_j).$$

Nous allons montrer :

$$(i) \quad \limsup a(f_i) \leq 2\pi |C|^2$$

$$(ii) \quad \liminf a(f_i) \geq 2 \sum a(h_j).$$

Ceci impliquera $\pi |C|^2 \geq a(L)$ d'où le lemme.

Preuve de (i). On a :

$$\begin{aligned} |\partial f/\partial x \wedge \partial f/\partial y| &\leq (1/2) (|\partial f/\partial x|^2 + |\partial f/\partial y|^2) \\ &= \langle i \partial f/\partial x, \partial f/\partial y \rangle + (1/2) (|\partial f/\partial x + i \partial f/\partial y|^2) \\ &= f^* \omega + 2 |\bar{\partial} f|^2 . \end{aligned}$$

Comme f_i est homotope à zéro et que L est lagrangienne, on a $\int_D f_i^* \omega = 0$ donc $a(f_i) \leq \int_D 2 |\bar{\partial} f|^2$, d'où la majoration cherchée.

Preuve de (ii). Ecrivons

$$a(f_i) = a(f|_{D \setminus \cup_j U_{ij}}) + \sum_j a(f|_{U_{ij}}) .$$

Le second terme a pour limite $\sum a(h_j)$ d'après (*). Quant au premier, le fait que $\int_D f_i^* \omega = 0$ et l'inégalité $|\partial f/\partial x \wedge \partial f/\partial y| \geq (1/2) |\bar{\partial} f|^2$ permettent de le minorer par $|\sum_j \int_{U_{ij}} f_i^* \omega|$, qui a pour limite inférieure $\sum_j a(h_j)$ d'après (*). Ceci prouve (ii) donc le lemme.

Fin de la preuve de la proposition. D'après le lemme, il suffit de montrer que si L est contenue dans le cylindre $Z_n(r)$, l'équation (E) n'a pas de solution si $|C_1| \geq r$. Pour cela, procédant comme dans [7], on observe qu'une solution f est harmonique, donc que la formule de Poisson donne $f'(0) = \int_{\partial D} f(s) d\mu(s)$, où μ est une mesure de probabilité sur ∂D . On en déduit que la première coordonnée est majorée : $|f'_1(0)| < r$, d'où a fortiori $|C_1| < r$.

1.3. Preuve du corollaire 2. Généralisations possibles. Par hypothèse, on a $\text{im } [j^* \lambda] = \alpha \mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$. Le théorème 1 implique $0 < \alpha < \pi r^2$. Comme $[j^* \lambda]$ est invariante par isotopie hamiltonienne, le corollaire 2 en résulte avec $r = \sqrt{(\alpha/\pi)}$.

On peut se demander si ce corollaire reste valide sans hypothèse sur $[j^* \lambda]$. Un premier pas vers une preuve pourrait être la

Proposition. Si $L \subset \mathbb{C}^n$ est une sous-variété lagrangienne fermée, il existe un disque holomorphe à bord dans L d'aire minimale. En particulier : $a(L) > 0$.

Démonstration. Si (f_j) est une suite de disques holomorphes telle que $a(f_j) \rightarrow a(L)$, alors (à reparamétrage près) :

- ou bien (f_i) est non compacte, ce qui implique l'existence d'une famille de disques holomorphes h_j , $1 \leq j \leq k$ telle que $\sum a(h_j) \leq a(L)$. Nécessairement on a $k = 1$ et $a(h_1) = a(L)$.

- ou bien (f_i) est compacte, donc on peut supposer qu'elle converge vers un disque holomorphe f , avec $a(f) \leq a(L)$. Donc $a(f) = a(L)$, à moins que f ne soit constante. Mais cette dernière éventualité ne se produit pas : en effet, les (f_i) sont non homotopes à zéro donc la longueur du bord $f_i(\partial D)$ est minorée.

Outre les courbes holomorphes, une autre méthode possible de preuve est celle des systèmes hamiltoniens et notamment des capacités symplectiques d'Ekeland-Hofer [3] : il suffirait par exemple de prouver qu'une des capacités de L est strictement positive. D'après [3-II], on peut calculer la première capacité pour les tores "standard" : $c_1(S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n)) = \inf \pi r_i^2$. Donc le corollaire 2 reste valide dans ce cas, avec $r = \inf r_i$. Viterbo [23] a montré que c'est encore vrai pour un plongement lagrangien quelconque de T^n . La valeur de r est à peu près le rayon maximal d'un tube du cotangent de L que l'on peut plonger dans \mathbb{C}^n , ce qui semble plausible aussi en général.

Par ailleurs, mentionnons le résultat de Ya. M. Eliashberg [4] : par une isotopie hamiltonienne est à valeurs dans $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-1}$, on ne peut pousser le tore dans le cylindre $Z_n(r_1)$. La preuve utilise un résultat d'intersection lagrangienne (cf. la section 2 pour ce genre de raisonnement).

1.4. Un "contre-exemple" (Viterbo, communication orale). Si $[j^*\lambda]$ est irrationnelle (non multiple d'une classe entière), on n'a pas en général de contrainte sur sa valeur en fonction de la "taille" de L , comme le montre l'exemple suivant : pour toute classe $a \in H^1(T^n; \mathbb{R})$ irrationnelle (non multiple d'une classe entière) et tout $\varepsilon > 0$, il existe un plongement $j : T^n \rightarrow B^{2n}(\varepsilon)$ tel que $[j^*\lambda] = a$.

En effet, il existe $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ tel que $A.a = (b_1, \dots, b_n)$, avec $b_i > 0$ et $\sum b_i < \pi \varepsilon^2$. Donc, en définissant $r_i = \sqrt{(b_i/\pi)}$, l'application naturelle $j_0 : T^n \rightarrow S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n)$ est à valeurs dans $B^{2n}(\varepsilon)$ et vérifie $[j_0^*\lambda] = A.a$ par construction. Il suffit alors d'utiliser l'action naturelle de $GL(n, \mathbb{Z})$ sur T^n pour définir $j = j_0 \circ A^{-1}$.

1.5. Autres contraintes sur $[j^*\lambda]$. Dans [22], Viterbo montre que si j est un plongement lagrangien de T^n (ou plus généralement d'une variété admettant une métrique de courbure négative ou nulle) dans \mathbb{C}^n , alors $[j^*\lambda]$ n'est jamais un multiple négatif de la classe de Maslov $\mu(j) \in H^1(L; \mathbb{Z})$.

Par exemple, si $j : T^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ est symplectiquement isotope au plongement standard, alors $[j^*\lambda]$ n'est jamais un multiple négatif de $(1, 1, \dots, 1)$. Dans ce dernier cas, il semble probable qu'on a toujours $[j^*\lambda] = (a_1, \dots, a_n)$ avec $a_i > 0$ pour tout i . Une méthode de preuve pourrait être de suivre les disques holomorphes au cours de l'isotopie.

2. Sous-variétés lagrangiennes dans le cotangé d'une variété fermée

Dans cette section M est une variété fermée et L une sous-variété lagrangienne fermée de T^*M . On note j l'inclusion $L \rightarrow T^*M$ et π la projection $L \rightarrow M$. On note $\mathcal{O}(M)$ l'image de la section nulle.

Le principal résultat est encore dû à Gromov [7] : il n'existe pas de plongement lagrangien $j : L \rightarrow T^*M \setminus \mathcal{O}(M)$ exact, c'est-à-dire tel que $[j^*\lambda] = 0$. Notons qu'on ne connaît pas d'exemple d'une variété exacte et non hamiltonniennement isotope à $\mathcal{O}(M)$ (voir [10]).

Par ailleurs, il est rare que l'on puisse engouffrer symplectiquement la section nulle dans $T^*M \setminus \mathcal{O}(M)$ [18] [20]. Par exemple, si $n = 3$ il faut que M fibre sur le cercle.

2.1. Intersection avec un conormal. Si K est une sous-variété de M , on rappelle que le fibré conormal $\phi^*K \subset T^*M$ est l'ensemble des covecteurs au-dessus de K qui sont orthogonaux à TK . C'est une sous-variété lagrangienne fibrée en espaces vectoriels sur K .

Conjecture . Si L est une sous-variété exacte et si $K \subset M$ est une sous-variété fermée, alors $L \cap \nu^*K$ est non vide.

Dans [10] on montre que cette conjecture est vraie dans les trois cas suivants :

- (i) L est hamiltonniennement isotope à la section nulle
- (ii) K est une fibre d'une fibration différentiable d'espace total M
- (iii) l'inclusion $K \rightarrow M$ est homotope à zéro.

La preuve, très simple, utilise le théorème de Gromov pour (ii) et (iii), et le résultat de [] sur les phases génératrices pour (i).

2.2. Définition. La sous-variété $L \subset T^*M$ est essentielle si $[j^*\lambda]$ est dans l'image de $\pi^* : H^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(L; \mathbb{R})$.

De façon équivalente : on peut rendre L exacte en la translatant dans les fibres par une 1-forme fermée β sur M . Ou encore : L est l'image d'une sous-variété exacte par un automorphisme symplectique de T^*M .

Exemple. Toute sous-variété lagrangienne homotope à la section nulle est essentielle.

Proposition. Si L est essentielle et si $K \subset M$ est homotope à zéro, alors L rencontre ν^*K .

Démonstration. Par hypothèse, L devient exacte après translation par une forme fermée β . Comme K est homologue à zéro on peut supposer β nulle sur K . Alors $L \cap \nu^*K = (L+\beta) \cap \nu^*K$, et cette intersection est non vide d'après [10].

2.3. Preuve du théorème 2. Si α n'est pas fermée, il existe un lacet plongé $\gamma \subset M$ homotope à zéro tel que $\int_{\gamma} \alpha = a > 0$. Paramétrant γ par $[0,1]$, on définit

$$\mathcal{U} = T^*(M \setminus \gamma) \cup \{ (q,p) : q \in \gamma, p(d\gamma/dt) > \alpha(d\gamma/dt) - a \}.$$

Il existe une fonction f sur M telle que $(\alpha + df)(d\gamma/dt) \equiv a$ sur γ . Remplaçant α et \mathcal{U} par $\alpha + df$ et $\mathcal{U} + df$, on se ramène au cas où $\alpha(d\gamma/dt)$ est constant sur γ . Alors

$$\mathcal{U} = T^*(M \setminus \gamma) \cup \{ (q,p) : q \in \gamma, p(d\gamma/dt) > 0 \},$$

donc \mathcal{U} ne rencontre pas $v^*\gamma$. La proposition 2.1 implique que \mathcal{U} ne contient aucune sous-variété essentielle.

2.4. Théorème. Soient (V, ω) une variété symplectique et $(L_i = \phi_i(M))$ une suite de sous-variétés lagrangiennes fermées qui converge C^0 vers une sous-variété lisse fermée $L = \phi(M)$. On suppose de plus que l'hypothèse (*) suivante est vérifiée :

(*) Le sous-fibré $TL \subset TV|L$ admet un supplémentaire lagrangien.

Alors L est lagrangienne.

Démonstration. L'hypothèse entraîne que $\phi^*\omega$ est exacte, donc on peut supposer que $\omega = d\lambda$ est exacte. Il s'agit alors de montrer que $\alpha = \phi^*\lambda$ est fermée. Pour cela, nous allons montrer que $\alpha \circ \phi^{-1}$ s'étend en un symplectomorphisme local $\Phi : (V, \phi(M)) \rightarrow (T^*M, \alpha(M))$. Alors $\Phi(L_i)$ sera une sous-variété lagrangienne homotope à la section nulle donc essentielle, et le théorème 2 entraînera la fermeture de α .

Suivant une méthode dûe à J. Martinet, et expliquée par D. Bennequin dans [2] (p. 23), l'existence de Φ résultera de celle d'un isomorphisme de fibrés symplectiques $\Psi : TV|L \rightarrow T(T^*L)|\alpha(L)$ qui prolonge l'isomorphisme $d\alpha : TL \rightarrow T(\alpha(L))$. Par hypothèse il existe $F_1 \subset TV|L$, supplémentaire lagrangien de TL . Par ailleurs, la restriction $E|\alpha(L)$ du fibré vertical donne un supplémentaire lagrangien F_2 de $T(\alpha(L)) \subset T(T^*L)$. Donc l'isomorphisme Ψ cherché va de $TV|L = TL \oplus F_1$ vers $T(T^*L)|\alpha(L) = T(\alpha(L)) \oplus F_2$. Cherchant Ψ sous la forme $d\alpha \oplus u$ où u est un isomorphisme de F_1 sur F_2 , il sera symplectique si

$$(**) \quad (\forall X \in TL, Y \in F_1) \quad \omega_1(X, Y) = \omega_2(d\alpha(X), u(Y)).$$

Or le fait que F_1 est lagrangien implique que $Y \rightarrow \omega_1(\cdot, Y)$ est un isomorphisme de F_1 sur le dual $(TL)^*$. De même $Y \rightarrow \omega_2(\cdot, Y)$ est un isomorphisme de F_2 sur $(T(\alpha(L)))^*$. Si l'on prend pour u le composé des isomorphismes $F_1 \rightarrow (TL)^* \rightarrow (T(\alpha(L)))^* \rightarrow F_2$, la propriété (**) sera vérifiée par construction.

Remarque. L'hypothèse (*) n'est peut-être pas nécessaire. Notons que cette question de convergence C^0 de sous-variétés lagrangiennes est liée au célèbre résultat d'Eliashberg et Gromov [4] [8] [9] (cf. aussi [3]) : si $(\phi_i : (V^{2n}, \omega) \rightarrow (W^{2n}, \omega'))$ est une suite de plongements symplectiques qui converge C^0 vers ϕ , la différentielle $d\phi$ est symplectique là où elle existe.

Remarquons toutefois que ce dernier résultat est de nature locale, et n'a pas d'analogue pour les plongements lagrangiens de variétés non fermées. Cela résulte du h-principe C^0 -fin [8], dont on peut donner l'exemple élémentaire suivant :

$$\phi_i = \text{id} \times f_i : B^2(1) \rightarrow (\mathbb{C}, \omega) \times (\mathbb{C}, \omega) ,$$

avec $f_i^* \omega = -\omega$ et $f_i \rightarrow 0$ au sens C^0 (l'existence de f_i est géométriquement évidente). Alors (ϕ_i) est une suite de plongements lagrangiens qui converge C^0 vers le plongement symplectique $\text{id} \times 0$!

Toujours à cause du h-principe C^0 -fin, une limite C^0 d'immersions lagrangiennes n'a aucune raison d'être lagrangienne, même si la variété est fermée.

2.5. Dans [10] on démontre que si L est exacte l'image de $\pi_1(L)$ dans $\pi_1(M)$ est d'indice fini, donc $\pi^* : H^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(L; \mathbb{R})$ est injectif. Donc la définition suivante est licite :

Définition. Si L est essentielle, on pose $\xi(L) = \pi^{*-1}(\{j^* \lambda\})$.

Si l'on a une suite de variétés essentielles L_i qui convergent au sens Hausdorff vers $\alpha(M)$, on peut se demander si $\xi(L_i)$ converge vers $[\alpha]$. En considérant $L_i - \alpha$ et en utilisant les homothéties, on voit que cela revient à la question suivante (cf. la question posée par Laudenbach [11] sur l'aire balayable).

Conjecture. On fixe une norme (notée $\|\cdot\|$) sur $H^1(M; \mathbb{R})$ et un voisinage compact \mathcal{U} de la section nulle dans T^*M (par exemple le tube unité d'une métrique riemannienne). Alors il existe une constante C telle que pour toute sous-variété essentielle $L \subset \mathcal{U}$ on ait $\|\xi(L)\| \leq C$.

2.6. Proposition. La conjecture 2.5 est vraie si L est symplectiquement isotope à la section nulle.

Démonstration. On munit M d'une structure riemannienne et l'on pose

$$\rho(E) = \sup \{ |p| : (q,p) \in E \} , \quad E \subset T^*M$$

$$\|\xi\| = \inf \{ \rho(\alpha(M)) : \alpha \text{ est une } 1\text{-forme représentant } \xi \}$$

(norme de Whitney-Federer). Il s'agit de trouver C telle que $\|\xi(L)\| \leq C \rho(L)$.

(a) Fixons une base $([\gamma_1], \dots, [\gamma_k])$ de $H^1(M; \mathbb{R})$, où les γ_j sont des lacets plongés, paramétrés par $[0, 1]$ à vitesse constante $|d\gamma_j/dt| = v_j$. Comme toutes les normes sur $H^1(M; \mathbb{R})$ sont équivalentes, il existe $C' > 0$ telle que $(\forall \xi) |\xi| \leq C' \sup_j |\langle \xi, [\gamma_j] \rangle|$. On va voir que $C = C' \sup v_j$ convient, et pour cela montrer : $|\langle \xi, [\gamma_j] \rangle| \leq v_j \rho(L)$.

Fixons $j \in [1, k]$. On peut représenter $\xi(L)$ par une 1-forme fermée α telle que $\alpha(d\gamma_j/dt)$ soit constant sur γ_j , d'où

$$|\alpha(d\gamma_j/dt)| = \left| \int \alpha(d\gamma_j/dt) dt \right| = |\langle \xi(L), [\gamma_j] \rangle|.$$

De plus la translatée $L - \alpha$ est hamiltonniennement isotope à la section nulle, donc la propriété 2.1.(i) implique que $L \cap (v^*\gamma_j + \alpha)$ est non vide. Soit $x = (q, p)$ un point de cette intersection, on peut minorer : $\rho(L) \geq |p| \geq |p| |T\gamma_j|$ (norme de la restriction de p à l'espace tangent à γ_j). Comme $p \in (v^*\gamma_j + \alpha(q))$ où $\alpha(q) \in T^*_q M$ est la valeur de α en q , on a ensuite

$$|p| |T\gamma_j| = |\alpha(d\gamma_j/dt)| / v_j = |\langle \xi(L), [\gamma_j] \rangle| / v_j.$$

On a donc $\rho(L) \geq |\langle \xi(L), [\gamma_j] \rangle| / v_j$, d'où le résultat.

Remarque. Cette preuve montre que la conjecture 2.5 est conséquence de la conjecture 2.1.

2.7. Preuve du théorème 3. Rappelons l'énoncé. Par hypothèse, $\phi : T^n \rightarrow T^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un plongement lagrangien, qui est symplectiquement isotope à la section nulle dans $T^n \times \mathbb{R}^n$, et l'on doit montrer que $p = pr_2 \circ \phi : T^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est homotope à zéro, sauf peut-être si $n = 3$.

L'hypothèse implique que ϕ est hamiltonniennement isotope à $\text{id} \times \{a\}$ dans $T^n \times \mathbb{R}^n$, avec $a \neq 0$ sinon $\text{im}(\phi)$ rencontrerait la section nulle. Nous allons utiliser le résultat suivant :

Théorème [19]. Si $j : L \rightarrow T^*M$ est hamiltonniennement isotope à la section nulle, elle admet une phase génératrice quadratique, c'est-à-dire une fonction $S : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

- $\partial S / \partial v : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ admet 0 pour valeur régulière, de sorte que $\Sigma_S = (\partial S / \partial v)^{-1}(0)$ est une variété de la dimension de M
- il existe un difféomorphisme $\phi : \Sigma_S \rightarrow L$ tel que $j \circ \phi(q, v) = (q, \partial S / \partial q(q, v))$
- $S(q, v) = g(v)$ hors d'un compact, où g est une forme quadratique non dégénérée.

Appliquant ce résultat au translaté $j = \phi - (0, a)$, on obtient que, à un difféomorphisme près, ϕ s'identifie à l'application

$$i_S : \Sigma_S \rightarrow T^n \times \mathbb{R}^n, (q,v) \rightarrow (q, a + \partial S / \partial q).$$

Par hypothèse on a $p = a + \partial S / \partial q \neq 0$ sur Σ_S . Nous allons voir que l'application $a + \partial S / \partial q$, considérée comme à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, est homotope à zéro.

Considérons la 1-forme fermée sur $T^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = dS + adq = (a + \partial S / \partial q) dq + \partial S / \partial v dv.$$

Comme $a + \partial S / \partial q \neq 0$ sur $(\partial S / \partial v)^{-1}(0)$, Ω est non singulière. La 1-forme $\Omega = dg - adq$ est aussi non singulière, et l'on a $\Omega = \Omega_0$ hors de K . Par un argument dû à A. Douady (cf. [11], [17]), Ω et Ω_0 sont homotopes parmi les formes non singulières, par une homotopie constante hors de K . Autrement dit, si l'on définit $F, F_0 : T^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N} \setminus \{0\}$ par

$$F(q,v) = (\partial S / \partial q + a, \partial S / \partial v), F_0(q,v) = (a, \partial g / \partial v),$$

et $G, G_0 : T^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n+N-1}$ par

$$G = F / |F|, G_0 = F_0 / |F_0|,$$

alors on a $G \equiv G_0$ rel. $(T^n \times \mathbb{R}^n \setminus K)$.

Soit $C > 0$ tel que K soit contenu dans $X = T^n \times B^N(C)$. En considérant les restrictions à la variété compacte à bord X^{n+N} , on a les propriétés suivantes pour les applications $G, G_0 : X \rightarrow S^{n+N-1}$:

(i) $G \equiv G_0$ rel. ∂X

(ii) $G_0^{-1} \{(a/|a|, 0)\} = \emptyset$

(iii) G est transverse à $S^{n-1} \subset S^{n+N-1} \subset (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, $G^{-1}(S^{n-1}) = \Sigma_S$ et l'application $g = G|_{\Sigma_S} : \Sigma_S \rightarrow S^{n-1}$ s'identifie à $(p-a)/|p-a|$.

D'après la propriété (iii), il s'agit de montrer que g est homotope à zéro sauf peut-être si $n = 3$. Nous allons voir que cela résulte des propriétés (i) et (ii).

Soit $x \in S^{n-1}$ une valeur régulière de g . Par la construction de Thom-Pontriaguine, la classe d'homotopie $[g]$ s'identifie à la classe de cobordisme framé $[g^{-1}(x)] \in \Omega_1 \text{fr}(\Sigma_S)$. De plus, $x \notin G(\partial X)$ et x est une valeur régulière de G , donc la classe d'homotopie $[G] \in [X \text{ rel. } \partial X, S^{n+N-1}]$ (applications coïncidant sur le bord avec G_0) s'identifie à $[G^{-1}(x)] \in \Omega_1 \text{fr}(X)$. Comme $\Sigma_S = G^{-1}(S^{n-1})$ a un fibré normal trivialisé, il est clair que $[G^{-1}(x)]$ est l'image de $[g^{-1}(x)]$ par l'application naturelle $i^* : \Omega_1 \text{fr}(\Sigma_S) \rightarrow \Omega_1 \text{fr}(X)$.

Si $n \neq 3$, il y a deux possibilités :

(1) Si $n > 3$, l'application i^* est un isomorphisme. En effet, $\Omega_1^{\text{fr}}(\Sigma_S)$ s'identifie aux classes de cobordisme $[Z, f]$, où Z est une variété fermée de dimension 1 stablement parallélisée et f une application continue de Z dans Σ_S . On a une propriété analogue pour $\Omega_1^{\text{fr}}(X)$ (ceci pour tout n , car on peut toujours supposer $n + N > 3$), d'où des suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \Omega_1^{\text{fr}}(\Sigma_S) \rightarrow H_1(\Sigma_S; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \Omega_1^{\text{fr}}(X) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

où les termes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ correspondent à $\pi_1(\text{SO}(n-1))$ et à $\pi_1(\text{SO}(n+N-1))$. Il suffit ensuite de remarquer que (X, Σ_S) est 2-connexe pour en déduire $[g^{-1}(x)] = 0$ c'est-à-dire $g \equiv 0$.

(2) Si $n = 2$, on a $\Omega_1^{\text{fr}}(\Sigma_S) = H_1(\Sigma_S; \mathbb{Z}) = H_1(X; \mathbb{Z})$, donc i^* est injective et l'argument de (1) s'applique encore.

Remarques. (1) Si $n = 3$, comme $\pi_1(\text{SO}(2)) = \mathbb{Z}$ on a une suite exacte courte $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \Omega_1^{\text{fr}}(\Sigma_S) \rightarrow H_1(\Sigma_S; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$, et le fait que $i^*([g^{-1}(x)]) = 0$ se traduit par : $[g^{-1}(x)] \in 2\mathbb{Z}$. (Il semble peu probable que $n = 3$ soit vraiment un cas particulier).

(2) On peut se demander si ce théorème est encore vrai pour une variété essentielle. Si ce n'était pas le cas, cela donnerait un exemple de variété essentielle non symplectiquement isotope à la section nulle. Par exemple, existe-t-il un tore lagrangien $L \subset T^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ qui induise en homologie

$$\begin{array}{c} 1 \ 0 \\ \text{une matrice} \ 0 \ 1 \text{ avec } a \neq 0? \\ a \ 0 \end{array}$$

3. Classification symplectique d'ouverts du cotangent. Dans cette section M est encore une variété fermée.

3.1. Définitions. (a) Si \mathcal{U} est un ouvert de T^*M , on pose :

$$l(\mathcal{U}) = \{ a \in H^1(M; \mathbb{R}) : \exists L \subset \mathcal{U} \text{ essentielle telle que } \xi(L) = a \}.$$

$$l_0(\mathcal{U}) = \{ \alpha \in H^1(M; \mathbb{R}) : \exists L \subset \mathcal{U} \text{ hamiltonniennement isotope à } \alpha(M) \}.$$

Ce sont des ouverts de $H^1(M; \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^k$, $k = b_1(M)$, et les applications l, l_0 sont continues si l'on munit les espaces d'ouverts de la topologie de Hausdorff.

(b) Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts de T^*M . On dit que \mathcal{U} et \mathcal{V} sont équivalents par isotopie symplectique s'il existe une isotopie symplectique de \mathcal{U} dans T^*M qui l'envoie sur \mathcal{V} .

On a les propriétés d'invariance suivantes.

Proposition. (a) Si \mathcal{U} et \mathcal{V} sont équivalents par isotopie symplectique, il existe $b \in H^1(M; \mathbb{R})$ tel que $l_0(\mathcal{V}) = l_0(\mathcal{U}) + b$.

(b) Soient \mathcal{U} et \mathcal{V} deux ouverts essentiels et symplectomorphes. Alors il existe $A \in \text{Aut } H^1(M; \mathbb{Z})$ et $b \in H^1(M; \mathbb{R})$ tels que $l(\mathcal{V}) = A l(\mathcal{U}) + b$.

Démonstration. (a) Evident.

(b) (cf. [21]) Si $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est un symplectomorphisme, il induit en cohomologie $\phi^* : H^1(\mathcal{V}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$ qui s'identifie à un élément de $\text{Aut } H^1(M; \mathbb{Z})$. On définit $A = \phi^{*-1}$. Ensuite, la 1-forme fermée $\phi^*\lambda$ sur \mathcal{U} a une classe de cohomologie $[\phi^*\lambda] \in H^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ qui s'identifie à un élément b de $H^1(M; \mathbb{R})$. Il est alors facile de voir que si L est une sous-variété essentielle de \mathcal{U} , $\phi(L)$ est une sous-variété essentielle de \mathcal{V} et $\xi(\phi(L)) = A\xi(L) + b$. On a une propriété analogue pour ϕ^{-1} , d'où la proposition.

3.2. Proposition. Soit $P \subset \mathbb{R}^k$ un polyèdre ouvert convexe contenant 0 , à faces entières et en nombre fini. Si $n = 2$, on suppose de plus que les inéquations définissant l'appartenance de $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$ à P sont de la forme

$$(\xi, a_i) > c_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad a_i \in H_1(M; \mathbb{Z}),$$

où les a_i sont représentés par des lacets plongés disjoints γ_i (si $n \geq 3$ c'est toujours le cas).

Alors il existe \mathcal{U} étoilé tel que $l_0(\mathcal{U}) = P$.

Corollaire. Si $b_1(M) \geq 2$ l'ensemble des valeurs prises par $l_0(\mathcal{U})$ sur les ouverts étoilés est de dimension infinie.

Démonstration. Nous allons voir qu'il suffit de poser, les γ_i étant paramétrés par $[0,1]$:

$$\mathcal{U} = T^*(M \setminus \bigcup_i \gamma_i) \cup \bigcup_i \{ (q, p) : q \in \gamma_i, p(d\gamma_i/dt) > c_i \}.$$

Comme P contient 0 on a $c_i < 0$ donc \mathcal{U} est étoilé. De plus :

(1) $l_0(\mathcal{U}) \supset P$. En effet, si $\xi \in P$ il existe une 1-forme fermée α représentant ξ et telle que $\alpha(d\gamma_i/dt) = (\xi, a_i)$ pour tout i : son graphe $\alpha(M)$ est contenu dans \mathcal{U} donc $\xi \in l_0(\mathcal{U})$.

(2) $l_0(\mathcal{U}) \subset P$. Ceci résulte aussitôt du lemme suivant, lui-même conséquence immédiate de la propriété 2.1.(i)

Lemme. Soient α une forme fermée et γ un lacet. Si \mathcal{U} ne rencontre pas $v^*\gamma + \alpha$, alors $l_0(\mathcal{U})$ ne contient pas $[\alpha]$.

Remarque. Si la conjecture 2.5 était vraie, la proposition resterait vraie pour $l(\mathcal{U})$ ce qui permettrait directement d'obtenir le théorème 4.

3.3. Nous allons voir que la différence entre l'isotopie symplectique et l'équivalence symplectique peut n'être "pas trop grande". Commençons par une définition : un ouvert \mathcal{U} est essentiel si la projection $\mathcal{U} \rightarrow M$ induit un isomorphisme $H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$.

Proposition. Soit $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ une famille non dénombrable d'ouverts essentiels dont l'un est étoilé et borné. On suppose qu'ils sont deux à deux non équivalents dans T^*M . Alors il existe i et j distincts tels que \mathcal{U}_i et \mathcal{U}_j ne soient pas symplectomorphes.

Démonstration. Soit \mathcal{U}_0 l'ouvert étoilé borné. Supposons qu'au contraire il existe pour tout i un symplectomorphisme $\phi_i : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_i$. Alors $\phi_i|_M$ donne un plongement lagrangien α_i de M dans T^*M . Comme les classes d'isotopie symplectique de ces plongements sont en nombre au plus dénombrable, il existe i et j distincts tels que α_i et α_j soient symplectiquement isotopes.

Nous allons voir que le fait que \mathcal{U}_0 est étoilé par rapport à M permet d'appliquer l'astuce d'Alexander dans les fibres de T^*M et d'en déduire que \mathcal{U}_i et \mathcal{U}_j sont équivalents dans T^*M .

Comme $M \subset \mathcal{U}_i$ est une équivalence d'homotopie, on peut par extension d'isotopie symplectique se ramener au cas où $\alpha_i = \alpha_j$. Notons $L = \alpha_i(M) = \alpha_j(M)$. Puisque \mathcal{U}_i est essentiel, L est aussi essentielle. Soit $\phi = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}_j$. Par construction $\phi|_L = \text{id}$, et l'on peut en fait supposer que $\phi = \text{id}$ près de L . En effet, ϕ a une fonction génératrice et l'on peut la rendre nulle près de L .

Montrons que, comme plongement de \mathcal{U}_i dans T^*M , ϕ est isotope à l'identité, ce qui montrera bien que \mathcal{U}_i et \mathcal{U}_j sont équivalents dans T^*M contrairement à l'hypothèse. Voici la construction de l'isotopie de ϕ à id :

(1) Soit $X = \phi_i^*(X_0)$ sur \mathcal{U}_i où $X_0 = p \cdot \partial/\partial p$ est le champ radial dans les fibres. On note ψ_t son flot : il est défini pour $t \leq 0$ puisque \mathcal{U}_0 est étoilé.

(2) Soit Y un champ de Liouville complet sur T^*M , tel que $Y = X$ près de L . Ceci est possible parce que $X - X_0$ est le ω -dual d'une forme fermée β et que le fait que L est essentielle dit que β est cohomologue à une forme β' qui provient de la base, donc qu'on peut trouver β'' sur T^*M qui vaut β près de L et β' à l'infini. On note χ_t son flot, qui est défini pour t quelconque.

(3) Soit $\phi_t = \chi_t \circ \phi \circ \psi_{-t}$, $t \geq 0$. Alors, pour T assez grand, $\psi_{-T}(K)$ est contenu dans un voisinage de L assez petit pour que $\phi = \text{id}$ et $X = Y$, donc $\phi_T = \chi_T \circ \psi_{-T}$.

L'isotopie cherchée s'obtient en faisant suivre $(\phi_t, 0 \leq t \leq T)$ de $(\chi_t \circ \psi_{-t}, T \geq t \geq 0)$.

3.4. Preuve du théorème 4. Soit $\mathcal{S}_{\text{ét}}(T^*M)$ l'espace des ouverts étoilés. Il est muni de deux relations d'équivalence :

- la relation d'équivalence symplectique, notée \approx
- la relation d'isotopie symplectique, notée \approx_0 .

La proposition 3.3 dit que les fibres de $\mathcal{S}_{\text{ét}}(T^*M) / \approx_0 \rightarrow \mathcal{S}_{\text{ét}}(T^*M) / \approx$ sont dénombrables. Ceci implique que $\mathcal{S}_{\text{ét}}(T^*M) / \approx$ a la même dimension que $\mathcal{S}_{\text{ét}}(T^*M) / \approx_0$. Or, si $b_1(M) \geq 2$, le corollaire 3.2 et la continuité de l_0 montrent que ce dernier espace est encore de dimension infinie.

Remarques. (1) A fortiori, l'espace des structures symplectiques sur T^*M est alors de dimension infinie. La topologie sur cet espace est donnée par la topologie compacte-ouverte C^0 (ou C^∞ ce qui revient au même). Rappelons qu'au contraire, si V est une variété fermée, le lemme de Moser implique que l'espace des structures symplectiques sur V est une variété de dimension finie, égale à $b_1(V)$. Si V est ouverte, c'est encore vrai pourvu que l'on prenne la topologie fine, la dimension étant alors $b_1(V, \infty)$. Le résultat ci-dessus indique que pour la topologie fine il y a sans doute énormément de composantes connexes en général, alors que sur \mathbb{R}^{2n} par exemple l'espace des structures symplectiques avec la topologie compacte-ouverte est connexe d'après le h -principe [8].

(2) Il résulte du travail récent d'A. Floer et Hofer [5] que pour toute métrique riemannienne les longueurs de toutes les géodésiques fermées sont des invariants d'isotopie symplectique du tube unité ouvert. Plus généralement, pour tous les ouverts étoilés à bord lisse les aires des caractéristiques fermées sont de tels invariants. En utilisant un résultat de J.-P. Otal [12], on en déduit, dans le cas où M est une surface, que si les tubes unité de deux métriques à courbure négative et sont équivalents par isotopie symplectique, alors les métriques sont les mêmes à isotopie près. Il est probable que le symplectomorphisme des tubes devrait suffire, et plausible que le résultat subsiste en dimension quelconque.

(3) Des invariants très proches ont été définis indépendamment par Eliashberg [5], qui en a aussi déduit des invariants de contactomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Audin, *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 593-623.
- [2] D. Bennequin, *Caustique mystique*, Séminaire Bourbaki n° 635 (novembre 1984), Astérisque **133-134**, 19-56.
- [3] I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. **200** (1989), 355-378. Partie II, Math. Z. **201** (1990)
- [4] Ya. M. Eliashberg, *A theorem on the structure of wave fronts and its applications in symplectic topology*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 227-232.
- [5] Ya. M. Eliashberg, préprint Stanford Univ. 1990.
- [6] A. Floer, H. Hofer, en préparation.
- [7] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.
- [8] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer Ergebnisse **9** (nouvelle série), 1986.
- [9] M. Gromov, *Symplectic topology, hard and soft*, Int. Congress Math. Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, p. 81-98.
- [10] F. Lalonde et J.-C. Sikorav, *Sous-variétés lagrangiennes des fibrés cotangents*, à paraître dans Comment. Math. Helv.
- [11] F. Laudenbach, *Les formes différentielles de degré 1 non singulières : classes d'homotopie de leurs noyaux*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 447-464.
- [12] J.-P. Otal, *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. (1990)
- [13] L. Polterovich, *The Maslov class of Lagrange surfaces and Gromov's pseudo-holomorphic curves*, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.
- [14] L. Polterovich, *Monotone Lagrange submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles*, à paraître dans Math. Zeit.
- [15] L. Polterovich, *The surgery of Lagrange submanifolds*, préprint 1990.
- [16] L. Polterovich, *The Maslov class rigidity and non existence of Lagrangian embedding*, préprint IHES 1990.
- [17] J.-C. Sikorav, *Classes d'homotopie des formes fermées non singulières*, C. R. Acad. Sci. Paris **294** (1982), 413-416.
- [18] J.-C. Sikorav, *Sur un problème de disjonction par isotopie symplectique*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **57** (1986), 543-552.
- [19] J.-C. Sikorav, *Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne*, Comm. Math. Helv. **62** (1987), 61-72.

- [20] J.-C. Sikorav, *Homologie de Novikov*, in : Thèse d'Etat, Université Paris-Sud Orsay, 1987.
- [21] J.-C. Sikorav, *Rigidité symplectique dans le cotangent de T^n* , Duke Math. J. **59** (1989), 227-231.
- [22] C. Viterbo, *A new obstruction to embedding Lagrangian tori*, Invent. Math. **100** (1990), 301-320.
- [23] C. Viterbo, *Plongements lagrangiens et capacités symplectiques de tores dans \mathbb{R}^{2n}* , C.R.Acad.Sci. Paris **311** Série I (1990), 487-490.