MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ELLIA

Sur les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur P^n

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 7 (1982)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1982_2_7__1_0>

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR $\mathbb{P}^n$

ELLIA Philippe (*)

Résumé : On sait que les fibrés vectoriels algébriques uniformes de rang au plus n sur l'espace projectif de dimension n sont homogènes et on en connait la liste. Dans le présent travail, on établit la liste, qui ne comporte pas de surprise, des fibrés homogènes de rang n+1 et n+2 sur ce même espace projectif, et on aborde l'étude des fibrés uniformes de rang n+1 : le résultat principal assure que ceux-ci sont homogènes si n+1 vaut 4, 5 ou 6 ou bien si n+1 est un nombre premier. Ce sont certains calculs dans des anneaux de cohomologie qui conduisent à des problèmes d'arithmétique qu'on n'a pas su résoudre sans l'hypothèse précédente sur n.

Summary : It is known that uniform algebraic vector bundles of rank at most n over a projective space of dimension n are homogeneous and listed. In the present work, we establish the list of homogeneous vector bundles of rank n+1 or n+2 over the same projective space and we start studying uniform bundles of rank n+1: the main result says that they are homogeneous, provided n+1 equals 4, 5 or 6, or is prime. Indeed, calculation in some cohomology rings leads to number theoretic questions we could not answer without such assumptions.

Table des Matières

(*) Boursier DGRST

INTRODUCTION

Tous les fibrés en question sont vectoriels algébriques.
On note $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K)$ où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un fibré E sur $\mathbb{P}^n$ est uniforme s'il existe une suite d'entiers (appelée type de scindage de E) : $(k\,;\,r_1 \dots r_k\,;\,\mu_1 \dots \mu_k)$ avec $\mu_1 > \dots > \mu_k$, telle que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}^n$: $E/\ell \cong \bigoplus_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathcal{O}_\ell(\mu_i)$.

La classification de ces fibrés est connue dans certains cas :

THÉORÈME 0 : ([VdV], [Sa], [Ele,1], [E-H-S]) :

Pour $r \leqslant n$, $n \geqslant 2$ et pour $r = 3$, $n = 2$, les fibrés uniformes de rang r sur $\mathbb{P}^n$ sont (à isomorphisme près) : $\oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(b)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\alpha) \oplus T_{\mathbb{P}^2}(\beta)$, $S^2 T_{\mathbb{P}^2}(\gamma)$.

En particulier tous ces fibrés sont homogènes (c'est-à-dire invariants sous les automorphismes de $\mathbb{P}^n$). Il est d'ailleurs facile de voir que tout fibré homogène est uniforme, mais la réciproque est fausse : il existe des fibrés uniformes sur $\mathbb{P}^n$ non homogènes en rang élevé ($\geqslant 2n$) (cf. [Ele,2], [E-H-S], [Ell], [Dr]).
Le problème de la classification et de l'homogénéité des fibrés uniformes de rang r sur $\mathbb{P}^n$ reste donc ouvert si :

$$n + 1 \leqslant r < 2n\ ,\quad n \geqslant 3\ .$$

La principale contribution de ce travail peut se résumer dans les énoncés suivants :

THÉORÈME I : Les fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 3)$ de rang $(n+1)$ sont (à isomorphisme près) : $\oplus r_i\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}}(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

THÉORÈME II : Les fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 3)$ de rang $(n+2)$ sont soit somme directe d'un fibré homogène de rang $(n+1)$ avec un fibré en droites, soit isomorphes à $\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^4}(a)$.

THÉOREME III : Pour $n = 3, 4, 5$ et $n = p-1$ où p est un nombre premier, les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n$ sont homogènes.

En ce qui concerne les deux premiers théorèmes leur démonstration est purement géométrique et repose sur le "*diagramme standard*" (I;§1). Le point de départ est le lemme (II;1.1) qui assure que les restrictions aux fibres de p (lesquelles s'identifient à des $\mathbb{P}^{n-1}$) des fibrés de la filtration relative de Harder-Narasimhan (I;§1) sont encore homogènes. L'étude de la restriction des suites exactes de la filtration permet alors de déterminer les fibrés associés, E_i, et donc (par I;§4 et II;1.3) le fibré E en question.

Pour la démonstration du théorème III la méthode suivie est essentiellement celle de [E-H-S]. On associe, de façon naturelle, à tout fibré uniforme E de rang (n+1) et de type de scindage $(k\,;\,r_1 \dots r_k\,;\,\mu_1 \dots r_k)$ une relation :

$$(\&) \qquad P(T,U) + xU^{n+1} + (aT + bU + cU) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

où : $P(T,U) := T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$, les c_i étant les classes de Chern de E.
Les $S_i(T,U,V)$ sont des polynômes homogènes de degré r_i, symétriques en U et V; x,a,b,c sont des entiers et R(U,V) est le polynôme $(U^{n+1} - V^{n+1})/(U-V)$ (cf.I;3.2, III;1.1).
La relation (&) est donc une condition topologique nécessaire à l'existence de fibrés uniformes d'un type de scindage donné. C'est par l'étude de cette relation que l'on classifie les fibrés uniformes.
On se limite aux types de scindage consécutifs (i.e.: $\mu_i - \mu_{i+1} = 1$, $1 \leq i \leq k-1$).
Cette restriction est sans conséquence (si car (K) = o) sur la classification en rang (n+1) (III;§2).
A ce sujet notons que (I;4.1) mesure la différence, du moins en ce qui concerne les fibrés uniformes, entre la caractéristique nulle et la caractéristique positive (cf. [Ein] qui classifie les fibrés uniformes de rang n sur $\mathbb{P}^n$ en caractéristique p).

On résout (&) avec l'hypothèse supplémentaire c = o (III;§2). Pour cela on se ramène notamment à une équation de degré n pour laquelle on peut utiliser les résultats de ([E-H-S]). Il s'agit maintenant de reconnaître parmi les solutions ainsi obtenues celles qui correspondent à des fibrés et, par-là même, identifier ces fibrés.

Pour mener à bien ce passage de la topologie à la géométrie, on utilise les méthodes standard de ([VdV], [Ele,1], [E-H-S]) : images directes, restriction, théorème de Riemann-Roch.
Les propositions de (I;§4) jouent un rôle primordial : (I;4.2) traite le type de scindage k = 1 : un fibré dont la restriction à toute droite est isomorphe à $r.\,\mathcal{O}_\ell$ est trivial. Pour reconnaître les sommes directes de fibrés en droites $\oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, on dispose de (I;4.3) : si tous les fibrés associés à E ont leur première classe de Chern nulle, alors E est décomposé.

La proposition (I;4.4), quant à elle, donne une condition nécessaire et suffisante sur p^*E, pour que E ait comme sous-fibré un translaté convenable de $T_{\mathbb{P}^n}$: ceci permet de traiter les types de scindage avec $r_1 = 1$ (ou $r_k = 1$).
Finalement il a fallu, pour les types de scindage avec $r_1 = 2$, utiliser dans ce contex-

te une proposition de ([Ba-VdV]) concernant les fibrés uniformes de rang deux sur $G(1,n)$, (cf. I;4.5).

A l'aide de tout cet arsenal on obtient le résultat suivant : en premier lieu, parmi les solutions algébriques trouvées il y en a une qui ne correspond pas à un fibré uniforme (III;2.2.2.b)). Ceci est un fait nouveau qui ne se produit pas pour $r \leq n$ et $r = 3$. Par contre les autres solutions de (&) avec $c = o$ correspondent à tous les fibrés "attendus" (III;2.4).
Ainsi pour démontrer le théorème suffit-il de prouver que, si c est non nul, les solutions algébriques de (&) vérifient $k = 1$.

Pour résoudre la relation (&) quand c est non nul on introduit la notion de "*solutions primitives*" c'est-à-dire de diviseurs symétriques $S_i(T,U,V)$ tels que $S_i(o,1,v) = o$ ait pour solution une "*bonne*" racine de $x_i + (b_i + c\,v)\,R(1,v)$ (cf. par exemple V;§1).
On peut montrer en effet que si (&) admet une solution primitive et si certaines conditions arithmétiques (sur c et b_i) sont vérifiées, les c_i ont alors une forme très simple (cf. V;1,2) pour laquelle on prouve $k = 1$ (cf. V;§6).
La difficulté principale est de montrer l'existence de ces solutions primitives.

Pour cela on s'intéresse au cas où n est de la forme $p-1$ (p un nombre premier). Ceci parce que l'irréductibilité de $R(1,v)$ permet de montrer l'existence de "*solutions primitives*" (V;§3). Une solution primitive une fois choisie, on est conduit à étudier les conditions arithmétiques, sur c et b_i, qui sont l'obstruction à calculer les c_i. Par des arguments de la théorie des corps cyclotomiques, on montre que ces conditions sont en défaut si et seulement si : $c\,b_i = o$, $c = \pm b_i$ (V;§4). Ces cas "*pathologiques*" (à part $c = o$ déjà traité) sont étudiés en (V;§5). En utilisant, entre autre choses, l'irréductibilité de certains polynômes cyclotomiques (car $n = p-1$) on montre que les solutions algébriques correspondantes vérifient : $k = 1$ ou $k = 2$, $r_1 = 1$ ($r_2 = 1$). Dans le dernier cas le passage à la géométrie se fait par (IV;§2).
C'est en (V;§6) que l'on conclut la démonstration du théorème en prouvant que si toutes les conditions arithmétiques sont vérifiées alors $k = 1$. Là en particulier, la restriction aux types de scindage consécutifs se révèle décisive.

Au cours de la démonstration on est amené à étudier certains fibrés uniformes de types de scindage particuliers (par ex. : $k = 2$, $r_1 = 1$ voir plus haut, cf. aussi V;2.2, V;5.2.2). Cette étude dont les résultats sont regroupés en IV, s'est étendue au-delà des besoins strictement nécessaires à d'autres types de scindage et non seulement au rang $(n+1)$. Par exemple on montre (IV;1.1) :

PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) de type de scindage ($k = r$; $r_i = 1$; μ_i) alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Pour cela on utilise les méthodes géométriques standard mais en se ramenant, par restriction à des sous-ensembles judicieux, à des situations simples(IV;1.1;IV;2.2; IV;4.2).

En (VI), par des calculs explicites, on traite les petites valeurs de n ($n = 3,4,5$) en montrant que $c = o$, se ramenant ainsi à la situation de (III).

•

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à A.Hirschowitz, qui a su me guider tout au long de ce travail avec autant de générosité que de gentillesse.

•

Note ajoutée aux épreuves : Dans ([Ba-Ell]) en utilisant la méthode et les résultats de (II) on donne la classification des fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geqslant 2$) de rang au plus 2n-1.

CHAPITRE I

LE DIAGRAMME STANDARD

§1. La filtration $HN^{\bullet}$ pour les fibrés uniformes

I - 1.1 : La filtration de Harder-Narasimhan sur $\mathbb{P}^1$.

Tout fibré E sur $\mathbb{P}^1$ est muni d'une filtration naturelle $HN^{\bullet}(E)$. En effet soit $E \cong \bigoplus_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$, $\mu_1 > \dots > \mu_k$, alors le j-ème terme, $HN^j E$, de cette filtration est l'unique sous-fibré de E isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{j} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$. Cette filtration n'est autre que celle de Harder-Narasimhan ([Ha-Na]).

I - 1.2 : La filtration de Harder-Narasimhan relative.

Soit G(1,n) la grassmanienne des droites de $\mathbb{P}^n$ et F_n la variété d'incidence : $F_n := \{(x,d_\ell) \in \mathbb{P}^n \times G(1,n) / x \in \ell\}$, ℓ désigne une droite de $\mathbb{P}^n$ et d_ℓ le point correspondant de G(1,n).

$p: F_n \to \mathbb{P}^n$, $q: F_n \to G(1,n)$ sont les projections. On obtient ainsi le diagramme "*standard*": $G(1,n) \xleftarrow{q} F_n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$.

Les fibres de p s'identifient à des espaces projectifs de dimension (n-1) (cf.§2) et p induit un isomorphisme entre $q^{-1}(d_\ell)$ et ℓ. Par la suite, à moins d'une confusion possible, nous écrirons plus simplement G,F au lieu de $G(1,n), F_n$. Soit maintenant E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$. Pour chaque droite ℓ de $\mathbb{P}^n$, $E|\ell$ est muni d'une filtration naturelle. Ces différentes filtrations s'organisent sur F en une filtration globale de p^*E, plus précisément :

I - 1.3 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$ alors on associe à E, de façon naturelle, des fibrés E_i de rang r_i sur G tels que p^*E admette une filtration, par des sous-fibrés, de gradué associé

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \left[q^* E_i \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \right].$$

On notera $HN^j p^* E$ (ou même HN^j si aucune confusion n'est à craindre) le j-ème terme de la filtration, il est donné par :

$$HN^j p^* E := \mathrm{Im}[q^* q_* p^* E(-\mu_j) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_j) \longrightarrow p^* E].$$

Pour plus de détails cf.([E-H-S]).

§2. La variété F

I - 2.1 : Cohomologie entière de F.

On rappelle ici la description de la cohomologie de F donnée dans ([E-H-S]).

On a les fibrés tautologiques suivants :

ω le sous-fibré tautologique de rang 2 sur G,

N le fibré quotient tautologique de rang (n-1) sur G,

H le sous-fibré tautologique (de Hopf) de rang 1 sur $\mathbb{P}^n$

$\underset{\sim}{Q}$ le fibré quotient tautologique de rang n sur $\mathbb{P}^n$.

De façon naturelle F s'identifie à $\mathbb{P}(Q)$ et ceci détermine le fibré de Hopf relatif à $\underset{\sim}{Q}$ noté $H_{\underset{\sim}{Q}}$.

On introduit les classes de Chern :

$U := c_1(p^* H)$, $V := c_1(H_Q)$ et on définit le polynôme :

$R(X,Y) := X^n + \dots + X^\ell Y^{n-\ell} + \dots + Y^n$.

On a alors :

I - 2.1.1 : PROPOSITION :

(a) Le morphisme naturel, π, de $\mathbf{Z}[U,V]$ dans $H^*(F,\mathbf{Z})$ identifie $H^*(F,\mathbf{Z})$ à $\mathbf{Z}[U,V]/(R(U,V),U^{n+1})$.

(b) La sous-algèbre $p^* H^* (\mathbb{P}^n, \mathbf{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes indépendants de V.

(c) La sous-algèbre $q^* H^*(G,\mathbf{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes symétriques en U et V.

Démonstration : cf. ([E-H-S]).

Rappelons un autre résultat de ([E-H-S]) :

I - 2.2 : PROPOSITION :

Le groupe de Picard de F est le groupe libre (commutatif) engendré par $p^* H$ et H_Q.

I - 2.3 : Restriction de la filtration $HN^\bullet$ aux fibres de p.

Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ et $(HN^i)_{1\le i\le k}$ les termes de la filtration de Harder-Narasimhan relative de $p^* E$. Cette filtration fournit les suites exactes :

$$0 \to HN^i \to HN^{i+1} \to q^* E_{i+1} \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{i+1}) \to 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

On rappelle que les fibres de p s'identifient de façon naturelle à des espaces projectifs de dimension $(n-1)$ $(p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(Q_x))$. On note $\mathcal{H}^i := HN^i|_{p^{-1}(x)}$ et $\mathcal{E}_i := q^* E_i|_{p^{-1}(x)}$.

Par restriction, on a les suites exactes : $0 \to \mathcal{H}^i \to \mathcal{H}^{i+1} \to \mathcal{E}_{i+1} \to 0$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Si $S(T,U,V)=T^r+T^{r-1}A_1(U+V)+\ldots+T^{r-i}[A_i(U^i+V^i)+\ldots]+\ldots$ est le polynôme de Chern de q^*E_{i+1} (cf.I;3.1) alors les classes de Chern de $\mathcal{E}_{i+1}$, considéré comme fibré sur $\mathbb{P}^{n-1}\cong p^{-1}(x)$, sont données par : $c_i=A_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$. En effet $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))$ est trivial sur les fibres de p et $H_Q|_{p^{-1}(x)}\cong\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$. De plus, remarquons que $\mathcal{H}^k\cong rg(E)\cdot\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ car $HN^k\cong p^*E$. ■

I - 2.4 : "*Sous-diagramme*" standard induit par un plan.

Soit P un plan de $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 3)$ alors P induit un "*sous-diagramme*" du diagramme standard : $P^*\xleftarrow{q'}F_2\xrightarrow{p'}P,(D_P)$, où : $F_2:=q^{-1}(P^*)$, q' et p' sont les restrictions de q et p. F_2 s'identifie à $\mathbb{P}(Q_P)$ où Q_P désigne le fibré quotient tautologique de rang 2 sur P; (D_P) est le diagramme standard pour P.

Sur F_2 nous avons les fibrés : $p'^*(H_P)$ et H_{Q_P}.
H_P est le sous-fibré tautologique de rang 1 sur P.

H_{Q_P} est le fibré de Hopf relatif à Q_P.

Soient : $\mathcal{U}:=c_1(p'^*H_P)$, $\mathcal{V}:=c_1(H_{Q_P})$ et i l'injection de F_2 dans F. Il est clair que : $i^*(p^*H)\cong p'^*H_P$ et $i^*(H_Q)\cong H_{Q_P}$. En particulier : $c_1(i^*(p^*H))=i^*(c_1(p^*H))$ ce que l'on peut écrire : $\mathcal{U}=U|F_2$, de même : $\mathcal{V}=V|F_2$. En combinant avec (I;2.1.1) :

I - 2.4.1 : PROPOSITION : Le morphisme $H^*(F,\mathbb{Z})\to H^*(F_2,\mathbb{Z})$ induit par la restriction s'identifie au morphisme naturel :

$$\mathbb{Z}[U,V]/(U^{n+1},R_n(U,V))\longrightarrow\mathbb{Z}[U,V]/(U^3,R_2(U,V)) .$$

§3. La relation ($\mathcal{E}$)

I - 3.1 : Polynôme de Chern.

A tout fibré topologique E, de rang r sur X on associe son polynôme de Chern : $\mathcal{C}_E(T)=:T^r-c_1(E)\,T^{r-1}+\ldots+(-1)^r c_r(E)$. On a alors les relations suivantes :

a) Si L est un fibré en droites sur X, alors :

$$\mathcal{C}_{E\otimes L}(T)=\mathcal{C}_E(T-c_1(L)) .$$

b) Si E est filtré de sorte que le gradué associé soit $\bigoplus_i E_i$,

alors : $$\mathcal{C}_E=\prod_i\mathcal{C}_{E_i} .$$

I - 3.2 : La relation (&)

Soit maintenant E un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$.

Soit $P(T,U) = T^r + c_1 U T^{r-1} + c_2 U^2 T^{r-2} + \dots$ le polynôme de Chern de $p^* E$, où les c_i sont les classes de Chern de E, alors d'après (I;1.3) et (I;2.1.1) on a une relation dans $\mathbf{Z}[T,U,V]$:

$$(\&) \qquad P(T,U) + Q(T,U,V) \cdot U^{n+1} + M(T,U,V)\, R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

$Q(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n - 1$

$M(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n$

$S_i(T,U,V)$ est le polynôme de Chern de $q^* E_i$ (il est donc homogène de degré r_i et symétrique en U et V).

§4. Quelques propositions

Dans les propositions suivantes, E désigne un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$, de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$.

I - 4.1 : PROPOSITION : Supposons qu'il existe un indice j, $1 \leq j < k$, tel que $\mu_{j+1} - \mu_j \leq -2$, alors E est extension de deux fibrés uniformes de rang $r_1 + \dots + r_j$ et $r_{j+1} + \dots + r_k$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.2 : PROPOSITION : Si $k = 1$, alors $E \cong r_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.3 : PROPOSITION : Si les premières classes de Chern des fibrés associés : $c_1(E_1), \dots, c_1(E_k)$ sont nulles, alors E est somme directe de fibrés en droites; (cf. [E-H-S]).

I - 4.4 : PROPOSITION : E a un sous-fibré isomorphe Q si et seulement si $p^* E$ a un sous-fibré isomorphe à H_Q. En particulier :

i) Si $r_1 = 1$ et $q^*(c_1(E_1)) = U + V$, alors E admet un sous-fibré isomorphe à $Q(\mu_1 - 1)$.

ii) Si $r_k = 1$ et $q^*(c_1(E_k)) = -U - V$, alors E admet un quotient isomorphe à $Q^\vee(\mu_k + 1)$ (cf. [E-H-S]).

I - 4.5 : PROPOSITION : Soit & un fibré de rang deux sur $G(1,n)$, $n \geq 3$, tel que pour tout x de $\mathbb{P}^n$, $q^* \&|_{p^{-1}(x)}$ soit décomposable. Alors soit & est lui-même décomposable, soit $\& \cong \omega(h)$, $h \in \mathbf{Z}$ (cf. [Ba-VdV]).

CHAPITRE II

FIBRÉS HOMOGÈNES DE RANG (n+1) et (n+2) SUR $\mathbb{P}^n$

§ 1) Préliminaires

§ 2) Démonstration du théorème

•

§1. Préliminaires

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème :

THÉORÈME : Les fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 3)$ de rang (n+1) et (n+2) sont (à isomorphisme près) :

$$\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)\ ,\ T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)\ ,\ \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)\ ,$$

$$T_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\gamma)\ ,\ \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\delta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\epsilon) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\xi)\ ,\ \Lambda^2 T_{\mathbb{P}^4}(\eta)\ .$$

Le point de départ de la démonstration est le lemme (II;1.1) qui assure que la restriction aux fibres de p des fibrés fournis par la filtration relative de Harder-Narasimhan est encore homogène. Dès lors la méthode consiste à étudier la restriction aux fibres de p des suites exactes :

$$(HN^i)\quad 0 \to HN^i(E) \to HN^{i+1}(E) \to q^* E_{i+1} \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_{i+1}) \to 0, \qquad 1 \leqslant i < k$$

fournies par la filtration $HN^\bullet$ et par-là déterminer les fibrés E_i. On conclut ensuite à l'aide des propositions de (I;§4) et de la proposition (II;1.3).

Finalement remarquons que cette méthode peut vraisemblablement s'étendre aux rangs supérieurs.

II - 1.1 : LEMME : Soit E un fibré homogène sur $\mathbb{P}^n$. On note $\mathcal{E}_i(x)$, $\mathcal{H}^i(x)$ les restrictions à $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ des fibrés $q^* E_i$, $HN^i(E)$ associés par la filtration relative de Harder-Narasimhan. Alors, pour tout x de $\mathbb{P}^n$, $\mathcal{E}_i(x)$ et $\mathcal{H}^i(x)$ sont homogènes.

Démonstration : Soit σ un automorphisme de $\mathbb{P}^n$ laissant x invariant. Cet automorphisme σ opère sur $F(\sigma_F)$, sur $G(\sigma_G)$ et sur $p^{-1}(x)(\sigma_x)$. Par homogénéïté de E et par unicité de la filtration $HN^\bullet$ on a :

$\sigma_G^* E_i \cong E_i$ et $\sigma_F^* HN^i \cong HN^i$, d'où, par changement de base, $\sigma_x^* \mathcal{E}_i(x) \cong \mathcal{E}_i(x)$ et $\sigma_x^* \mathcal{H}^i(x) \cong \mathcal{H}^i(x)$. Pour conclure il reste à observer que tout automorphisme de $p^{-1}(x)$ provient d'un automorphisme de $\mathbb{P}^n$ laissant x invariant.■

Avec la même démonstration mais en considérant cette fois un automorphisme σ vérifiant $\sigma(x) = y$, on obtient :

II - 1.2 : LEMME : Avec les hypothèses et les notations de (II;1.1), si x et y sont deux points distincts de $\mathbb{P}^n$ alors $\mathcal{E}_i(x) \cong \mathcal{E}_i(y)$ et $\mathcal{H}^i(x) \cong \mathcal{H}^i(y)$.

II - 1.3 : PROPOSITION : Soit $\mathcal{F}$ un fibré sur $G(1,n)$ $(n \geqslant 3)$ tel que, pour tout x de $\mathbb{P}^n$, $q^*\mathcal{F}|p^{-1}(x)$ soit isomorphe à $T_{p^{-1}(x)}(-1)$. Alors $\mathcal{F} \cong N$ (N désigne le fibré quotient tautologique sur $G(1,n)$).

Démonstration : On considère les variétés :
$F' := \{(x,d,H) / x \in d,\ d \subset H\}$, $F'' := \{(x,H) / x \in H\}$; x,d,H désignent respectivement un point, une droite et un plan de $\mathbb{P}^n$.
Dans le diagramme : $F'' \xleftarrow{\beta} F' \xrightarrow{\alpha} F$, β et α désignent les projections naturelles.

On a une identification : $F' \cong \mathbb{P}(q^* N)$ qui permet de définir le fibré de Hopf relatif à $q^* N$, on le note $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{E} := q^*\mathcal{F} \otimes H_Q$ (H_Q est le fibré de Hopf relatif à : $F \cong \mathbb{P}(Q) \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$). Par le théorème de changement de base, $\mathcal{L} := \beta^* \beta_* \alpha^* \mathcal{E}$ est un sous-fibré de rang un de $\alpha^*\mathcal{E}$. D'autre part, $\mathrm{Pic}(F')$ est isomorphe au groupe libre commutatif engendré par $\mathcal{H}$, $\alpha^* p^* \mathcal{O}(-1)$, $\alpha^* H_Q$: pour le voir il suffit d'adapter la démonstration de ([E-H-S], prop.2.3) en remarquant $H^*(F',\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[U,V,W]/(U^{n+1}, R(U,V), \Sigma_{n-1}(W,U,V))$ où $R(U,V) := (U^{n+1} - V^{n+1})/(U-V)$, $\Sigma_{n-1}(W,U,V) = \sum_{r+s+t=n-1} W^r U^s V^t$ (appliquer Hirsch-Leray à : $F' \cong \mathbb{P}(q^* N) \to F$). Ainsi $\mathcal{L}$ est de la forme : $\mathcal{H}^{\otimes a} \otimes \alpha^* p^* \mathcal{O}(-k) \otimes \alpha^* H_Q^{\otimes b}$. En restreignant à une fibre de β il vient $a = b$, en restreignant à une fibre de α : $a = 1$. On voit donc que $\mathcal{H}$ est un sous-fibré de $\alpha^*(q^*\mathcal{F} \otimes p^*\mathcal{O}(k))$. Ceci fournit une injection : $0 \to q^* N \to q^*\mathcal{F} \otimes p^*\mathcal{O}(k)$, en effet, il suffit d'utiliser le résultat suivant :

II - 1.4 : LEMME : Soit $E \to X$ un fibré sur la variété X. $\mathcal{H}$ désigne le fibré de Hopf relatif à $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$. Alors un fibré F sur X admet un sous-fibré isomorphe à E si et seulement si $\pi^* F$ admet un sous-fibré isomorphe à $\mathcal{H}$.

Démonstration : cf. [E-H-S] prop. (3.5)

Comme rang $\mathcal{F}$ = rang N, la proposition (II;1.3) est démontrée.■

Par la suite nous utiliserons fréquemment la proposition suivante :

II - 1.5 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 3)$. Supposons qu'il existe un point x de $\mathbb{P}^n$ tel que tous les fibrés $\mathcal{E}_i(x)$ soient entièrement décomposés alors E, lui aussi, est somme directe de fibrés en droites.

Démonstration : Désignons par $(HN^i(x))$ la restriction $p^{-1}(x)$ de la i-ème suite exacte fournie par la filtration $HN^\bullet$. D'après nos hypothèses et comme $n-1 \geqslant 2$, toutes les suites exactes $(HN^i(x))$ sont scindées.
En particulier pour $(HN^{k-1}(x))$ on aboutit à :

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \Big(\bigoplus_{j=1}^{r_i} \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(a_j^i)\Big) \cong r \cdot \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$$

d'où l'on déduit : $a_j^i = o$ pour tout i et j. Ceci montre : $c_1(E_i) = o$, $1 \leqslant i \leqslant k$, on conclut avec (I;4.3). ∎

II - 1.6 : Pour la commodité du lecteur voici quelques calculs de cohomologie que nous utiliserons constamment par la suite :

Pour $n \geqslant 3$ et a appartenant à $\mathbf{Z}$:

$$h^\circ(\mathbb{P}^n, \Omega^1(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leqslant 1 \\ n(n+1)/2 & \text{si } a = 2 \\ \geqslant n(n+1)(n+2)/3 & \text{si } a \geqslant 3 \end{cases}$$ avec égalité si et seulement si $a = 3$.

$$h^1(\mathbb{P}^n, \Omega^1(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq o \\ 1 & \text{si } a = o \end{cases}$$

$$h^\circ(\mathbb{P}^n, T(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < -1 \\ n+1 & \text{si } a = -1 \\ \geqslant n(n+2) & \text{si } a \geqslant o, \end{cases}$$ avec égalité si et seulement si $a = o$.

$h^1(\mathbb{P}^n, T(a)) = 0$, pour tout a dans $\mathbf{Z}$.

$$h^\circ(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < o \\ \binom{n+a}{a} & \text{si } a \geqslant o \end{cases}$$

$h^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(a)) = 0$, pour tout a dans $\mathbf{Z}$. (Cf. par exemple [O-S-S]).

§2. Démonstration du théorème

Remarquons d'abord que grâce aux résultats de (VI,§1) et de [Ball-Ell] on peut se limiter à démontrer le théorème pour les valeurs de n supérieures ou égales à quatre. Ensuite, par dualité, il suffit d'étudier les types de scindages suivants:

1) $r_i < n-1$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$
2) $r_k = n-1$
3) $k=2,\ r_1=2,\ r_2=n$
4) $k=3,\ r_1=1,\ r_2=1,\ r_3=n$
5) $k=3,\ r_1=1,\ r_2=n-1,\ r_3=2$
6) $k=3,\ r_1=1,\ r_2=n,\ r_3=1$
7) $k=4,\ r_1=1,\ r_2=1,\ r_3=n-1,\ r_4=1$
8) $k=2,\ r_1=1$
9) $k=3,\ r_1=1,\ r_2=n-1,\ r_3=1$.

Les cas 8) et 9) sont traités en (IV;§2) et (IV;§4) respectivement.

<u>Notations</u> : $\mathcal{E}_i(x) := q^* E_i \mid p^{-1}(x)$, $\mathcal{H}^i(x) := HN^i(E) \mid p^{-1}(x)$.
$(HN^i(x))$ désigne la restriction à $p^{-1}(x)$ de la suite exacte (HN^i) :

$$(HN^i(x)) \quad 0 \to \mathcal{H}^i(x) \to \mathcal{H}^{i+1}(x) \to \mathcal{E}_{i+1}(x) \to 0, \qquad i \leqslant i < k.$$

II - <u>2.1</u> : $r_i < n-1$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$.
Ce cas est entièrement réglé par la proposition suivante :

II - <u>2.1.1</u> : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène de rang r sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 3)$, de type de scindage $(k\,;\, r_1 \dots r_k\,;\, \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $r_i < n-1$, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, alors :

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i).$$

<u>Démonstration</u> : D'après (II;1.1) les fibrés $\mathcal{E}_i(x)$ sont homogènes et, par hypothèse, de rang strictement inférieur à $n-1$: ils sont donc sommes directes de fibrés en droites ([Sa]). On conclut avec (II;1.5).■

II - <u>2.1.2</u> : <u>Remarque</u> : Voir (IV;1.2).

II - <u>2.2</u> : $r_k = n-1$.

II - <u>2.2.1</u> : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène de rang r sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 4)$ de type de scindage $(k\,;\, r_1 \dots r_k\,;\, \mu_1 \dots \mu_k)$. Si $r \leqslant 2n-2$ et si $r_k = n-1$ alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\bigoplus_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$,

$$\bigoplus_{i=1}^{k-2} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \oplus (r_{k-1}-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{k-1}) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-1+\mu_k),\ \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1+\mu_1) \oplus (n-2)\,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2),\ (\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^4})(\mu_1-3).$$

Démonstration : Considérons $(HN^{k-1}(x))$:
$0 \to \mathcal{H}^{k-1}(x) \to r\cdot\mathcal{O} \to \mathcal{E}_k(x) \to 0$. D'après (II,1.1) et ([E-H-S]), $\mathcal{E}_k(x)$ est isomorphe à l'un des fibrés : $T(a)$, $\Omega^1(b)$, $\oplus\,\mathcal{O}(a_i)$; de même $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est de la forme : $\oplus\,\mathcal{O}(\alpha_i)$ ou $T(\alpha)$, $\Omega^1(\beta)$ (il faut alors $r = 2n-2$).
De plus remarquons que $\mathcal{E}_k(x)$ est engendré pas ses sections globales avec $h^\circ(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}_k(x)) \leqslant r+1 \leqslant 2n-1$ (car $h^1(\mathcal{H}^{k-1}(x)) \leqslant 1$ dans tous les cas).

Examinons maintenant les différentes possibilités :

(a) Supposons : $\mathcal{E}_k(x) \cong T(a)$. Comme $\mathcal{E}_x(x)$ est engendré par ses sections globales avec $h^\circ(\mathcal{E}_k(x)) \leqslant 2n-1$, on déduit : $a=-1$. En comparant les classes de Chern dans $(HN^{k-1}(x))$ il vient : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \mathcal{O}(-1) \oplus (r-n)\mathcal{O}$. (On ne peut avoir $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \Omega^1(1)$: considérer la suite longue de cohomologie associée à : $0 \to \Omega^1(1) \to r\cdot\mathcal{O} \to T(-1) \to 0$).

Maintenant, d'après (II;1.3) (et aussi II;1.2) : $E_k \cong N$.
Ainsi en appliquant p_* à HN^{k-1} il vient :

$$0 \to \mathcal{G} \to E \to T_{\mathbb{P}}(-1+\mu_k) \to 0 \qquad (\star)$$

$(R^1 p_* HN^{k-1} = o$ car $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \mathcal{O}(-1) \oplus (r-n)\mathcal{O})$.

En restreignant $(\star)$ à une droite ℓ on a :

$\mathcal{G}|\ell \overset{k-2}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_\ell(\mu_i) \oplus (r_{k-1}-1)\cdot \dot{\mathcal{O}}_\ell(\mu_{k-1})$, $\mathcal{G}$ est uniforme, de rang strictement inférieur à n et par suite ([Sa]) entièrement décomposé. Pour que $(\star)$ scinde il suffit que $h^1(\mathbb{P}^n, \Omega^1(1-\mu_k) \otimes \mathcal{G}) = o$, ce qui est vérifié car $1-\mu_k+\mu_i$ est non nul pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

(b) Supposons $\mathcal{E}_k(x) \cong \oplus\,\mathcal{O}(a_i)$. Toujours avec les mêmes arguments on obtient :

$$\mathcal{E}_k(x) \cong (n-1)\cdot\mathcal{O} \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}_k(x) \cong \mathcal{O}(1) \oplus (n-2)\cdot\mathcal{O}.$$

Dans le premier cas on déduit sans peine : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong (r-n\ 1)\cdot\mathcal{O}$ et par suite : $E \cong \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Dans le second cas on a : $r = 2n-2$ (sinon HN^{k-1} serait scindée) et d'après les premières classes de Chern : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong \Omega^1(1)$.
Remarquons que dans cette situation, on a forcément $k=2$ (sinon $HN^{k-2}(x)$ serait scindée). En appliquant p_* à $(HN^1)^\vee$ on obtient (cf. ***(a)***) :

$$E \cong \Omega^1(1+\mu_1) \oplus (n-2)\cdot\mathcal{O}(\mu_2)\ .$$

(c) Si $\mathcal{E}_k(x) = \Omega^1(b)$, alors $b \geqslant 2$ (car $\mathcal{E}_k(k)$ est engendré par ses sections globales). De $h^\circ(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{E}_k(x)) \leqslant 2n-1$, on déduit : $n=4$ et $b=2$ (cf.II;1.6). Si $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est somme directe de fibrés en droites alors $(HN^{k-1}(x))$ est scindée, ce qui est absurde.

Si $\mathcal{H}^{k-1}(x)$ est indécomposable, d'après les premières classes de Chern, on déduit : $\mathcal{H}^{k-1}(x) \cong T_{\mathbb{P}^3}(-2)$. Comme ce fibré n'est pas extension de fibrés homogènes de rang au plus deux, (II;1.1) assure $k=2$.

D'après (II;1.3), $HN^1(x)$ s'écrit $0 \to q^* N(-1) \to p^* E(-\mu_1) \to q^* N^\vee(1) \otimes p^* O(-1) \to 0$.

Par image directe, on trouve $E(1-\mu_1) \cong p_* q^*(N^\vee(1))$. Ce fibré ne peut être que $\Lambda^2(T(-1))$ puisque celui-ci vérifie les hypothèses de la proposition. ∎

II - <u>2.2.2</u> : <u>Remarque</u> : La proposition précédente règle largement le cas 2) et le théorème est démontré pour le rang (n+1).

II - <u>2.3</u> : $k=2$, $r_1=2$, $r_2=n$.

II - <u>2.3.1</u> : PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geqslant 4$) de type de scindage $(k=2; r_1=2, r_2=n; \mu_1, \mu_2)$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\overset{2}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \quad , \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $(HN^1(x)) : 0 \to \mathcal{E}_1(x) \to (n+2)\cdot\mathcal{O} \to \mathcal{E}_2(x) \to 0$

$\mathcal{E}_2(x)$ est homogène de rang n sur $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ donc (cf.II;2.2.2) de l'une des formes suivantes : $\oplus\, \mathcal{O}(a_i)$, $T(a) \oplus \mathcal{O}(b)$, $\Omega^1(c) \oplus \mathcal{O}(d)$.

Si $\mathcal{E}_2(x)$ est somme directe de fibrés en droites, il en est de même de E (II;1.5).

Avec les mêmes arguments qu'en (II,2.2.1) on voit qu'il suffit de traiter le cas suivant : $\mathcal{E}_1(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{E}_2(x) \cong T(-1) \oplus \mathcal{O}$.

Dès lors, d'après (I;4.5), E_1 est isomorphe à l'un des deux fibrés suivants: $\omega, \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$.

i) $E_1 \not\cong \omega$.

Dans le cas contraire, en dualisant (HN^1), il viendrait :

$$0 \to q^* E_2^\vee \otimes p^* \mathcal{O}(-\mu_2) \to p^* E^\vee \to q^* \omega^\vee \otimes p^* \mathcal{O}(-\mu_1) \to 0 .$$

On a : $p_* q^* E_2^\vee$ est un fibré de rang un, soit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$, et $R^1 p_* q^* E_2^\vee = o$ (car $\mathcal{E}_2^\vee(x) \cong \Omega^1(1) \oplus \mathcal{O}$) .

$p_* q^* \omega^\vee \cong (n+1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ (considérer la suite exacte : $0 \to q^* N^\vee \to (n+1)\cdot\mathcal{O}_F \to q^* \omega^\vee \to 0$) .

En appliquant p_* à $(HN^1)^\vee$: $0 \to \mathcal{O}(a-\mu_2) \to E^\vee \to (n+1)\cdot\mathcal{O}(-\mu_1) \to 0$, et donc $E \cong \oplus\, r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, ce qui est absurde si $E_1 \not\cong 2\cdot\mathcal{O}_G$.

ii) Si $E_1 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$.

Sous cette hypothèse, $q^*\mathcal{O}_G(-1) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1)$ s'injecte dans $p^* E$. Comme $q^* \mathcal{O}_G(-1) \cong H_Q \otimes p^* \mathcal{O}(-1)$, de (I;4.4) il vient :

$$0 \to T(-1) \to E(1-\mu_1) \to \mathcal{F} \to 0 .$$

Il est facile de voir que $\mathcal{F}$ est uniforme et isomorphe à $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$.

La suite ci-dessus est donc scindée et on a bien :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2)\ . \blacksquare$$

II − <u>2.4</u> : $k=3,\ r_1=1\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=n$.

II − <u>2.4.1</u> : PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 4)$ de type de scindage $(k=3,\ r_1=1,\ r_2=1,\ r_3=n\ ;\ \mu_1,\mu_2,\mu_3)$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)\ ,\ T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soient les suites $(HN^i(x))$:

$0 \to \mathcal{O}(a) \to \mathcal{H}^2(x) \to \mathcal{O}(b) \to 0$; et donc $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b)$

$0 \to \mathcal{H}^2(x) \to (n+2)\mathcal{O} \to \mathcal{E}_3(x) \to 0$.

Comme dans la démonstration précédente on voit qu'il suffit d'examiner le cas où : $\mathcal{E}_3(x) \cong T(-1) \oplus \mathcal{O}$ (sinon $E \cong \overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$).

En comparant les premières classes de Chern dans $(HN^2(x))$ il vient : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$.
On ne peut avoir $a=-1$ car alors $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ serait un sous-fibré de $E(-\mu_1+1)$ (I;4.4) ce qui est impossible vu le type de scindage de E. Donc $a=o$ et $b=-1$. Comme $E_1 \cong \mathcal{O}_G$ on a une suite exacte sur $\mathbb{P}^n$:

$$0 \to \mathcal{O} \to E(-\mu_1) \to F \to 0 \quad (*)$$

où F est uniforme de type de scindage $(k=2\ ;\ r_1=1\ ,\ r_2=n\ ;\ \mu_2-\mu_1\ ,\ \mu_3-\mu_1)$.
D'après (IV;§2) et ce qui précède : $F \cong T(-2+\mu_2-\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3-\mu_1)$ et la suite $(*)$ est scindée, d'où la proposition. $\blacksquare$

II − <u>2.5</u> : $k=3,\ r_1=1\ ,\ r_2=n-1\ ,\ r_3=2$.

II − <u>2.5.1</u> : PROPOSITION : Tout fibré homogène E sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 4)$ de type de scindage $(k=3\ ;\ r_1=1\ ,\ r_2=n-1\ ,\ r_3=2\ ;\ \mu_1,\mu_2,\mu_3)$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i,\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)\ ,\ T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)\ ,\ \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2-\mu_3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$.

<u>Démonstration</u> : $\mathcal{E}_1(x)$ est un fibré de rang un, $\mathcal{O}(a)$; $\mathcal{E}_3(x)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(\alpha)$ $\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta)$ et $\mathcal{E}_2(x)$ est de l'une des formes suivantes : $\oplus\, \mathcal{O}(a_i)$, $\Omega^1(b)$, $T(\xi)$ (cf.II; 1.1). Comme d'habitude si $\mathcal{E}_2(x) \cong \oplus\, \mathcal{O}(a_i)$ alors $E \cong \oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$ (II;1.5).

a) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong \Omega^1(b)$.

Comme $h^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{H}om(\mathcal{E}_2(x)\ ,\ \mathcal{E}_1(x))) = o$ (II;1.6), on a : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus \Omega^1(b)$.

De l'injection $\mathcal{H}^2(x) \to (n+2)\cdot\mathcal{O}$, on déduit $a \leqslant o$ et $b \leqslant 1$. La suite longue de cohomologie associée à $(HN^2(x))$ donne $h^o(\mathcal{E}_3(x)) + h^o(\mathcal{H}^2(x)) = n+2+h^1(\mathcal{H}^2(x))$; $h^o(\mathcal{H}^2(x))$ et $h^1(\mathcal{H}^2(x))$ étant inférieurs à 1, il vient : $\mathcal{E}_3(x) \cong \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ et donc, en comparant les classes de Chern, $\mathcal{H}^2(x) \cong \Omega^1(1)\oplus\mathcal{O}$. D'après (I;4.5) E_3 est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\omega^\vee$, $\mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(1)$.
En procédant comme dans (II;2.3.1) on montre : $E_3 \not\cong \omega^\vee$ et si $E_3 \cong \mathcal{O}_G \otimes \mathcal{O}_G(1)$ alors (cf. I;4.4) : $E \cong \Omega^1(2-\mu_3)\oplus\mathcal{O}(\mu_1)\oplus\mathcal{O}(\mu_3)$.

b) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong T(\xi)$.

De $(HN^1(x))$ il vient : $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a)\oplus T(\xi)$ ou $\mathcal{H}^2(x) \cong n\cdot\mathcal{O}(a+1)$ (avec $\xi = a$).

b.i) Si $\mathcal{H}^2(x) \cong \mathcal{O}(a)\oplus T(\xi)$ alors $a \leqslant o$ et $\xi < -1$ (car $\mathcal{H}^2(x)$ s'injecte dans $(n+2)\mathcal{O}$). Il s'ensuit que :

$$h^o(\mathcal{E}_3(x)) = \begin{cases} n+2 & \text{si } a < o \\ n+1 & \text{si } a = o. \end{cases}$$

Ceci implique $\mathcal{E}_3(x) \cong \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ et $a = o$, ce qui est absurde (considérer les premières classes de Chern dans : $0 \to \mathcal{O}\oplus T(\xi) \to (n+2)\cdot\mathcal{O} \to \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1) \to 0$).

b.ii) Soit $\mathcal{H}^2(x) \cong n\cdot\mathcal{O}(a+1)$.

Comme $h^o(\mathcal{E}_3(x))$ ne peut valoir exactement $n+2$ on déduit de $(HN^2(x))$: $a = \xi = -1$. et $\mathcal{E}_3(x) \cong 2\cdot\mathcal{O}$. Ainsi $E_1 \cong \mathcal{O}_G(-1)$, en utilisant (I;4.4) il vient : $E \cong T(-2+\mu_1)\oplus 2\mathcal{O}(\mu_3)$. ∎

II - <u>2.6</u> : $k = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = n$, $r_3 = 1$.

II - <u>2.6.1</u> : PROPOSITION : Soit E un fibré homogène sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geqslant 4$) de type de scindage ($k = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = n$, $r_3 = 1$; μ_1, μ_2, μ_3). Alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$\bigoplus_{i=1}^{3} r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)\oplus\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1+\mu_2)$.

<u>Démonstration</u> : On a les suites exactes :

$$\begin{cases} 0 \to \mathcal{O}(a) \to \mathcal{H}^2(x) \to \mathcal{E}_2(x) \to 0, & (HN^1(x)) \\ 0 \to \mathcal{H}^2(x) \to (n+2)\cdot\mathcal{O} \to \mathcal{O}(b) \to 0, & (HN^2(x)) \end{cases}$$

Avec $\mathcal{E}_2(x)$ isomorphe à l'un des fibrés suivants :
$\oplus\,\mathcal{O}(a_i)$, $T(\xi)\oplus\mathcal{O}(\alpha)$, $\Omega^1(\beta)\oplus\mathcal{O}(\delta)$ (II;1.1 et II;2.2.2).

a) Si $\mathcal{E}_2(x) \cong \oplus\,\mathcal{O}(a_i)$ alors $E \cong \oplus\, r_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$ (II;1.5)

b) Supposons $\mathcal{E}_2(x) \cong T(\xi)\oplus\mathcal{O}(\alpha)$.

De $(HN^1(x))$ il vient : $h^1(\mathbb{P}^{n-1}\,\mathcal{H}^2(x)(k)) = o$, pour tout k dans $\mathbb{Z}$ (cf. II;1.6).

En particulier : $h^1(\mathbb{P}^{n-1}\ \mathcal{K}^2(x)(-b)) = o$ et $(HN^2(x))$ est scindée. Ceci implique $b = o$ et par suite $\mathcal{K}^2(x) \cong (n+1)\mathcal{O}$. En appliquant p_* à (HN^2) on obtient la suite exacte sur $\mathbb{P}^n$: $0 \to G \to E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) \to 0$.

Il est facile de voir que G est uniforme, de type de scindage : $(k = 2\ ;\ r_1 = 1\ ,\ r_2 = n\ ;\ \mu_1\ ,\ \mu_2)$. En utilisant (IV;§2) on déduit :

$$E \cong T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)\ .$$

c) Cas où $\mathcal{E}_2(x) \cong \Omega^1(\beta) \oplus \mathcal{O}(\delta)$.

Dans ce cas $(HN^1(x))$ est scindée et de l'injection : $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(\delta) \oplus \Omega^1(\beta) \to (n+2)\cdot\mathcal{O}$, on déduit : $\beta \leqslant 1$ $a \leqslant o$ et $\delta \leqslant o$. De la suite longue de cohomologie associée à $(HN^2(x))$ il vient : $a = \delta = o$, $\beta = 1$, $b = 1$. E_3 étant isomorphe à $\mathcal{O}_G(1)$, en utilisant (I;4.4) on a :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(1+\mu_2)\ . \quad \blacksquare$$

II - 2.7 : $k = 4\ ,\ r_1 = 1\ ,\ r_2 = 1\ ,\ r_3 = n-1,\ r_4 = 1\ .$

II - 2.7.1 : PROPOSITION : Tout fibré homogène, E, sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geqslant 4)$ de type de scindage $(k = 4\ ;\ r_1 = 1\ ,\ r_2 = 1\ ,\ r_3 = n-1\ ,\ r_4 = 1\ ;\ \mu_1\ ,\ \mu_2\ ,\ \mu_3\ ,\ \mu_4)$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^{4} r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)\ ,\quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_4)\ ,\quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \oplus \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2+\mu_4)\ .$$

Démonstration : Soient les suites exactes $(HN^i(x))$:

$$0 \to \mathcal{O}(a) \to \mathcal{K}^2(x) \to \mathcal{O}(b) \to 0\ , \quad \text{donc } \mathcal{K}^2(x) \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$$

$$0 \to \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \to \mathcal{K}^3(x) \to \mathcal{E}_3(x) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{K}^3(x) \to (n+2)\cdot\mathcal{O} \to \mathcal{O}(c) \to 0\ .$$

Avec, bien sûr, $\mathcal{E}_3(x)$ de l'une des formes suivantes : $T(\xi)$, $\Omega^1(\eta)$, $\oplus\ \mathcal{O}(a_i)$. (Cf.II; 1.1). Pour le dernier cas, comme d'habitude nous renvoyons à (II;1.5).

a) Cas où $\mathcal{E}_3(x) \cong T(\xi)$.

De $h^1(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{K}^3(x)(k)) = o$, pour tout k (cf. $(HN^2(x))$) on déduit : $(n+2)\cdot\mathcal{O} \cong \mathcal{O}(c) \oplus \mathcal{K}^3(x)$, donc $c = o$ et par suite $\mathcal{K}^3(x) \cong (n+1)\cdot\mathcal{O}$. Ceci montre que $(HN^2(x))$ s'écrit $0 \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \to (n+1)\cdot\mathcal{O} \to T(-1) \to 0$. Bien entendu $a \neq -1$ car sinon $T(-1)$ s'injecterait dans $E(-\mu_1+1)$ (cf.I;4.4) ce qui est impossible vu le type de scindage de E. On a donc : $E_1 \cong \mathcal{O}_G$ ce qui fournit la suite exacte : $0 \to \mathcal{O}\ E(-\mu_1) \to \mathcal{F} \to 0$ **(X)**

avec $\mathcal{F}$ uniforme de type de scindage $(k = 3\ ,\ r_1 = 1\ ,\ r_2 = n-1,\ r_3 = 1\ ,\ \mu_2-\mu_1\ ,\ \mu_3-\mu_1\ ,\ \mu_4-\mu_1)$. En utilisant (IV;§4) et la suite exacte **(X)** il vient :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}(\mu_4)\ .$$

b) Cas où $\&_3(x) \cong \Omega^1(\eta)$.

Dans ce cas $(HN^2(x))$ est scindée et exactement comme en (II;2.6.1,c)) on déduit: $a = b = o$, $\eta = 1$ et $c = 1$. Comme $E_4 \cong \mathcal{O}_G(1)$, en utilisant (I;4.4) il vient :

$$E \cong \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(2+\mu_4)\ .$$

Cette proposition achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE III

LA RELATION (&) POUR LES FIBRÉS DE RANG (n+1)

§ 1) Notations, Généralités
§ 2) La relation (&) avec $c = o$

§1. Notations, Généralités

III - 1.1 : Notations.

D'après (I;3.2) à tout fibré uniforme E de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$, de type de scindage $(k\,;\, r_1 \dots r_k\,;\, \mu_1 \dots \mu_k)$, correspond une égalité :

$$(\&) \qquad P(T,U) + x\, U^{n+1} + (a\,T + b\,U + c\,V)\cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i\,(T + \mu_i U, U, V)$$

$P(T,U) = T^{n+1} + c_1 U\, T^n + \dots + c_n\, U^n\, T$ est le polynôme de Chern de $p^* E$.

$S_i(T,U,V)$ est le polynôme de Chern de $q^* E_i$: il est homogène de degré r_i symétrique en U et V.

x,a,b,c sont des entiers relatifs.

On notera $(\&_j)$ la relation obtenue à partir de $(\&)$ en remplaçant T par $T - \mu_j U$:

$$(\&_j) \qquad P_j(T,U) + x_j\, U^{n+1} + (a\,T + b_j\, U + c\,V)\cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + (\mu_i - \mu_j)U, U, V)$$

$P_j(T,U)$ est le polynôme de Chern de $p^* E(-\mu_j)$ et $b_j := -a\,\mu_j + b$.

Par $(\&)_o$, $(\&_j)_o$, on indiquera la relation $(\&)$, $(\&_j)$, dans laquelle on a posé : $T = o$ et $U = 1$.

La symétrie de $S_j(T,U,V)$ limite les valeurs de x_j :

III - 1.2 : LEMME : Dans la relation $(\&_j)$ deux cas seulement sont possibles :

i) $x_j = o$ ou

ii) $x_j = c - b_j$.

<u>Démonstration</u> : On a donc : $S_j(T,U,V)$ divise $P_j(T,U)+x_j\,U^{n+1}+(aT+b_jU+cV)R(U,V)$. Si $S_j(T,U,V)=T^{r_j}$ alors il est clair que $x_j=o$. En posant $T=o$, on se ramène au cas où $S(0,U,V)$ est un diviseur symétrique non trivial de $x\,U^{n+1}+(b\,U+c\,V)\,R(U,V)$. Par symétrie $S(0,U,V)$ divise $x\,V^{n+1}+(b\,V+c\,U)\,R(U,V)$ et, par différence, il divise : $(x+b-c)\,(U^{n+1}-V^{n+1})$.

Supposons $x+b-c$ non nul. $S(0,U,V)$ divise $(U-V)[x\,U^{n+1}+(b\,U+c\,V)\,R(U,V)]$ et donc aussi $x(U-V)U^{n+1}$. Or les seuls diviseurs symétriques de $x(U-V)U^{n+1}$ sont les constantes, donc $x=o$. ■

Il s'ensuit que la relation $(\&_j)_o$ ne peut prendre que deux formes :

$$\left.\begin{array}{l}(c\,v+b_j)\cdot R(1,v)\\ c\,v^{n+1}+(c+b_j)\,(v^n+\ldots+v)+c\end{array}\right\} = \prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i-\mu_j\,,1,v)\ .$$

<u>(Notation)</u> : $\psi_j(v):=c\,v^{n+1}+(c+b_j)\,(v^n+\ldots+v)+c$.

Dans le lemme suivant, on étudie les racines de $\psi(v)$:

III - <u>1.3</u> : LEMME : Pour tout couple $(c,b)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\setminus\{(o,o)\}$ le polynôme $\psi(v):=c\,v^{n+1}+(c+b)\,(v^n+\ldots+v)+c$ a les deux propriétés suivantes :

1. il a au plus trois racines réelles,
2. il a au plus une racine multiple. Cette racine, quand elle existe, est réelle, de multiplicité inférieure ou égale à trois.

<u>Démonstration</u> : Si $c=o$, c'est clair. Si $c\neq o$, on considère $\psi_\xi(v)=v^{n+1}+\xi\,(v^n+\ldots+v)+1$ et le lemme découle des faits suivants qui se prouvent en considérant $(v-1)\cdot\psi_\xi(v)$: $\psi_\xi(o)\neq o$, $\forall\xi$; ψ_ξ a des racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$ si et seulement si $\xi=o$, d'argument $2k\pi/(n+2)$ si et seulement si $\xi=1$. ■

§2. <u>La relation (&) avec $c=o$</u>

Désormais nous nous limiterons aux fibrés uniformes de type de scindage $(k\,;\,r_1\ldots r_k\,;\,\mu_1\ldots\mu_k)$ avec $\mu_i-\mu_{i+1}=1$, $1\leqslant i<k$; un tel type de scindage sera dit consécutif. D'après (I;4.1) cette restriction n'a aucune conséquence sur le problème de la classification des fibrés uniformes de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$; en effet, si F est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_2-\mu_1)$; $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1+\mu_2-\mu_1)$; $\oplus\, r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i-\mu_1)$; $\mu_1-\mu_2\geqslant 2$;

les extensions : $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\to E(-\mu_1)\to F\to 0$ scindent pour $n\geqslant 3$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR $\mathbb{P}^n$

Dans ce paragraphe, nous donnons une "*classification*" des relations (&) pour lesquelles $c=o$ (III;2.4).

Pour établir cette classification, une des étapes essentielles consiste à se ramener à une relation (&') du type "$r=n$" (c'est-à-dire correspondant à un fibré uniforme de rang n sur $\mathbb{P}^n$) et à utiliser le résultat suivant ([E-H-S]) :

III - 2. PROPOSITION : Soit $P(T,U)=T^n+c_1UT^{n-1}+\dots+c_nU^n$ et (&') la relation :
$P(T,U)+a\,R(U,V)=\prod_{i=1}^{k} S_i(T+\mu_i U,U,V)$ avec c_i, a, μ_i des entiers relatifs et S_i des polynômes homogènes symétriques en U et V. Alors seuls sont possibles les cas suivants :

1. $k=1$,
2. $a=o$,
3. $k=2$ et $S_1(T,U,V)=\Sigma_{n-1}(T,-\alpha U,-\alpha V)$, $S_2(T,U,V)=T+\alpha(U+V)$

   ou $S_1(T,U,V)=T-\alpha(U+V)$, $S_2(T,U,V)=\Sigma_{n-1}(T,\alpha U,\alpha V)$;

$\alpha:=\mu_1-\mu_2$; $\Sigma_{n-1}(T,U,V):=\sum_{r+s+t=n-1} T^r U^s V^t$.

<u>Remarque</u> : On ne suppose pas les μ_i consécutifs.

Pour le rang (n+1) il apparaît cependant un fait nouveau : une solution algébrique qui ne correspond pas à un fibré uniforme (cf.III;2.2.2.**b)**).

III - <u>2.1</u> PRÉLIMINAIRES : Soit une relation (&) avec $c=o$:
$$P(T,U)+xU^{n+1}+(aT+bU)\cdot R(U,V)=\prod_{i=1}^{k} S_i(T+\mu_i U,U,V).$$
Pour j , $1\leqslant j\leqslant k$, la relation $(\&_j)_o$ donne
$$\left.\begin{array}{l} b_j(v^n+\dots+1) \\[1ex] b_j\cdot v(v^{n-1}+\dots+1) \end{array}\right\} = \prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i-\mu_j,1,v) \quad (\text{cf.III;1.2}) .$$
Il existe donc un indice j_o tel que $S_{j_o}(T,U,V)$ soit de degré r_{j_o} et tel que $S_{j_o}(\mu_{j_o}-\mu_j,1,v)$ soit de degré strictement inférieur à r_{j_o}. Par symétrie et homogénéité, on déduit :

i) $d^\circ S_{j_o}(o,1,v) < r_{j_o}$

ii) v divise $S_{j_o}(o,1,v)$.

Dans la suite, nous distinguerons les deux cas suivants :

$S_{j_o}(o,1,v)\equiv o$; $S_{j_o}(o,1,v)\not\equiv o$.

III - 2.2 : **Cas** où $S_{j_o}(o,1,v) \equiv o$.

Nous distinguerons deux sous-cas suivant le degré de $S_{j_o}(T,U,V)$.

III - 2.2.1 : Cas où $d^\circ S_{j_o}(T,U,V) > 1$.

Comme $S_{j_o}(o,1,V) \equiv o$, T divise $S_{j_o}(T,U,V)$ et donc aussi $P_{j_o}(T,U) + X_{j_o} U^{n+1} + (aT + b_{j_o} U) \cdot R(U,V)$ ainsi X_{j_o} et b_{j_o} sont nuls.

En divisant par T la relation $(\mathcal{E}_{j_o})$ on obtient :

$$(\mathcal{E}'_{j_o}) \qquad \widetilde{P}_{j_o}(T,U) + a\,R(U,V) = \widetilde{S}_{j_o}(T,U,V) \cdot \prod_{i \neq j_o} S_i\big(T + (\mu_i - \mu_{j_o})U, U, V\big)$$

$$\text{où : } T\widetilde{P}_{j_o}(T,U) = P_{j_o}(T,U) \quad \text{et} \quad T \cdot \widetilde{S}_{j_o}(T,U,V) = S_{j_o}(T,U,V)$$

$(\mathcal{E}'_{j_o})$ est une relation du type "r = n", de plus les $\alpha_i := \mu_i - \mu_{j_o}$, $1 \leq i \leq k$ sont consécutifs. D'après (III;2) il vient :

III - 2.2.1. *a)* : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (III;2.2.1) seules peuvent se présenter les possibilités suivantes pour la relation $(\mathcal{E})$:

(a) $a = b = c = o$

(b) $k = 1$

(c) $k = 2$ et les S_i sont donnés par

(c.1) $S_1(T,U,V) = T^2 - T(U+V)$; $S_2(T,U,V) = \Sigma_{n-1}(T,U,V)$

(c.1)' $S_1(T,U,V) = \Sigma_{n-1}(T,-U,-V)$; $S_2(T,U,V) = T^2 + T(U+V)$

(c.2) $S_1(T,U,V) = T - (U+V)$; $S_2(T,U,V) = T \cdot \Sigma_{n-1}(T,U,V)$

(c.2)' $S_1(T,U,V) = T \cdot \Sigma_{n-1}(T,-U,-V)$; $S_2(T,U,V) = T + (U+V)$.

III - 2.2.1. *b)* : PROPOSITION : Les fibrés correspondants aux différents cas de la proposition précédente sont :

(a) $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$

(b) $(n+1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$

(c.1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2)$

(c.1)' $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$

(c.2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2)$

(c.2)' $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

Démonstration : • (a) - Remarquons d'abord que : $a = o$ et $b_{j_o} = o$ implique : $b = o$; et par suite $b_i = o$, $1 \leq i \leq k$. D'après la relation $(\mathcal{E}_1)$, on a : $S_1(T,U,V)$ divise $P_1(T,U)$, donc, $S_1(T,U,V)$ est indépendant de V et donc aussi de U par symétrie. En particulier: $q^* c_1(E_1) = o$.

De la même façon : $q^* c_1(E_i) = o$, $1 < i \leqslant k$, et il suffit d'appliquer (I;4.3).

• (b) - C'est la proposition (I;4.2).

• (c) - Nous ne traiterons que les cas (c.1) et (c.2), (c.1)' et (c.2)' étant les cas duaux.

• (c.1) - La filtration $HN^\bullet$ donne la suite exacte sur F :
$0 \to q^* E_1 \to p^* E(-\mu_1) \to q^* E_2 \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to 0$. On pose $\mathcal{F}_x := q^* E_1 | p^{-1}(x)$. En restreignant la suite exacte ci-dessus à une fibre de p on voit que $\mathcal{F}_x$ est un sous-fibré de rang deux de première classe de Chern -1 d'un fibré trivial. Donc pour toute droite ℓ de $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$: $\mathcal{F}_x | \ell \cong \mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$ et $\mathcal{F}_x$ est uniforme. D'après ([VdV],[Sa]) on a :

(i) si $n \geqslant 4$: $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$

(ii) Si $n = 3$:
$$\mathcal{F}_x \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \\ T_{\mathbb{P}^2}(-2) \end{cases}$$

D'autre part, $c_2(\mathcal{F}_x) = o$ $(c_2(q^* E_1) = o)$ et donc $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

Dans tous les cas, le fibré $q^* E_1$ est totalement scindé sur les fibres de p.
D'après (I;4,5): $E_1 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$ ou bien $E_1 \cong \omega(h)$.
Cependant : $c_1(q^* E_1) = c_1(q^* \omega)$ et $c_2(q^* E_1) \neq c_2(q^* \omega) = UV$ et ceci montre: $E_1 \cong \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(-1)$.

Comme E_1 contient un sous-fibré trivial de rang un, on a une suite exacte :
$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to E(-\mu_1) \to E' \to 0$ $(\star)$ avec E' uniforme de rang n de type de scindage $(k = 2 \,;\, r_1 = 1 \,,\, r_2 = n-1 \,,\, \mu_1 = o \,,\, \mu_2 = -1)$. D'après ([E-H-S]) :
$$E' \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \text{ ou } E' \cong T_{\mathbb{P}^n}(-2),$$
dans les deux cas la suite $(\star)$ scinde et :
$$E(-\mu_1) \cong 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \text{ ou } E(-\mu_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-2)$$
mais le premier cas est à exclure car $E_1 \not\cong 2 \cdot \mathcal{O}_G$.

• (c.2) - D'après (I;4.4) on a une suite exacte :
$0 \to T_{\mathbb{P}^n}(-1) \to E(-\mu_1 + 1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to 0$ $(\star\star)$. En regardant les premières classes de Chern, il vient $m = o$ et la suite $(\star\star)$ est scindée donc $E \cong T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 1)$. ■

III - 2.2.2 : Cas où $d^\circ S_{j_o}(T,U,V) = 1$.

En procédant comme en (III;2.2.1) on obtient une équation du type "$r = n$" :

$$(\mathcal{E}'_{j_o}) \qquad \widetilde{P}_{j_o}(T,U) + a\,R(U,V) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_o}}^{k} S_i\big(T + (\mu_i - \mu_{j_o})U, U, V\big) .$$

Il faut remarquer que si $j_o \neq 1$ et $j_o \neq k$, alors les α_i ; $\alpha_i := \mu_i - \mu_{j_o}$, $1 \leq i \leq k$, $i \neq j_o$; ne sont plus consécutifs. Toujours d'après (III;2) il vient :

III - 2.2.2. **a)** : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (III;2.2.2) seules peuvent se présenter les possibilités suivantes pour ($\mathcal{E}$) :

(a) $a = b = c = o$

(b) $k = 2$, $S_1(T,U,V) = T$; (b') $k = 2$, $S_2(T,U,V) = T$

(c.1) $k = 3$, $S_1(T,U,V) = T$, $r_2 = 1$, $r_3 = n-1$

(c.1)' $k = 3$, $r_1 = n-1$, $r_2 = 1$, $S_3(T,U,V) = T$

(c.2) $k = 3$, $S_1(T,U,V) = T$, $r_2 = n-1$, $r_3 = 1$

(c.2)' $k = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = n-1$, $S_3(T,U,V) = T$

(c.3) $k = 3$, $S_1(T,U,V) = T - 2(U+V)$, $S_2(T,U,V) = T$, $S_3(T,U,V) = \Sigma_{n-1}(T, 2U, 2V)$

(c.3)' $k = 3$, $S_1(T,U,V) = \Sigma_{n-1}(T, -2U, -2V)$, $S_2(T,U,V) = T$, $S_3(T,U,V) = T + 2(U+V)$.

On peut donner les précisions suivantes :

Dans le cas (c.1) : $S_2(T,U,V) = T - (U+V)$,

dans le cas (c.2) : $S_3(T,U,V) = T + (U+V)$.

III - 2.2.2. **b)** : PROPOSITION : Les solutions (c.3) et (c.3)' ne correspondent pas à des fibrés uniformes.

Démonstration : On donne deux démonstrations différentes.

Première démonstration : On considère (c.3)', (c.3) s'obtenant par dualité. Soit P un plan de $\mathbf{P}^n$ $(n \geq 3)$ et le sous-diagramme induit par P :

$$\begin{tikzcd} P^* & F_2 \arrow[l, "q'"'] \arrow[d, "p'"] \\ & P \end{tikzcd}$$

$F_2 := q^{-1}(P^*)$, p' et q' étant les restrictions de p et q .

Supposons que (c.3)' corresponde à un fibré uniforme E et soit : $\mathcal{E} := E|P$, $\mathcal{E}_i := E_i|P^*$, $\mathcal{H}^i := HN^i|F_2$. Les $\mathcal{H}^i$ ' $\mathcal{E}_i$ donnent la filtration $HN^\bullet$ de $p'^*\mathcal{E}$. En particulier : $q'^*(c_2(\mathcal{E}_i)) = o$ car $q^*(c_2(E_1)) = 4(U^2+V^2+UV)$ et $H^\bullet(F_2,\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[U,V]/(U^3, U^2+UV+V^2)$ (cf.I;2.4). Pour le fibré $\mathcal{E}_1$ défini sur P^* on a : $c_1(\mathcal{E}_1) = -2$ et $c_2(\mathcal{E}_1) = o$. D'autre part, sur chaque droite ℓ^* de P^*, $\mathcal{E}_1|\ell^*$ est un sous-fibré de rang (n-1) du fibré : $(n+1)\cdot\mathcal{O}_{\ell^*}$, d'où deux cas :

$$\mathcal{E}_1|\ell^* \cong \begin{cases} 2\mathcal{O}_{\ell^*}(-1) \oplus (n-3)\cdot\mathcal{O}_{\ell^*} & (\alpha) \\ \mathcal{O}_{\ell^*}(-2) \oplus (n-2)\cdot\mathcal{O}_{\ell^*} & (\beta) \end{cases}$$

Si on a (α) pour une droite, on l'a génériquement, en particulier : $h^o(P^*, \mathcal{E}_1) \leqslant n-3$ et $h^2(P^*, \mathcal{E}_1) = o$, d'où : $\chi(P^*, \mathcal{E}_1) \leqslant n-3$.
D'autre part, d'après Riemann-Roch : $\chi(P^*, \mathcal{E}_1) = n-2$, ce qui est absurde.
On a donc (β) pour toutes les droites de P^*.

Revenons maintenant à E défini sur $\mathbb{P}^n$. Comme précédemment, pour toute droite ℓ de $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, on a deux possibilités :

$$q^* E_1|\ell \cong \begin{cases} 2\mathcal{O}_\ell(-1) \oplus (n-3)\cdot\mathcal{O}_\ell \\ \mathcal{O}_\ell(-2) \oplus (n-2)\cdot\mathcal{O}_\ell \end{cases}$$

ℓ s'identifie aux droites de $\mathbb{P}^n$ passant par x et contenues dans un certain $\mathbb{P}^2$, c'est-à-dire ℓ s'identifie à la fibre $p'^{-1}(x)$ dans le "*sous-diagramme*" induit par ce $\mathbb{P}^2$. Comme : $q^* E_1|\ell \cong q'^* \mathcal{E}_1|_{p'^{-1}(x)} \cong \mathcal{E}_1|\ell^*$, d'après ce qui précède, on voit que : $q^* E_1|\ell \cong \mathcal{O}_\ell(-2) \oplus (n-2)\cdot\mathcal{O}_\ell$ pour toute droite de $p^{-1}(x)$.
D'après (I;4.1) et (I;4.2) : $q^* E_1|_{p^{-1}(x)} \cong \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-2) \oplus (n-2)\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$. Ceci est en contradiction avec : $c_2(q^* E_1|_{p^{-1}(x)}) = 4$ (car $q^*(c_2(E_1)) = 4(U^2 + V^2 + UV)$).

Deuxième démonstration : Cette fois on considère (c.3). La filtration $HN^\bullet$ donne la suite exacte :

$$0 \to q^* \mathcal{O}_G(-2) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1) \to HN^2 \to p^* \mathcal{O}(\mu_2) \to 0 \qquad (*) .$$

On a : $H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-2) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) = o$. D'une façon plus générale $H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) = o$ si $t > o$. En effet, la suite spectrale de Leray dégénère et on a la suite exacte :

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^n, p_*(q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1))) \to H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)) \to H^o(\mathbb{P}^n, R^1p_*(q^* \mathcal{O}_G(-t) \otimes p^* \mathcal{O}(1)))$$

et il suffit de remarquer que : $p_* q^* \mathcal{O}_G(-t) = o$ et $R^1p_*(q^* \mathcal{O}_G(-t)) = o$ si $t > o$ $(n \geqslant 3)$.

La suite $(*)$ est scindée et $p^* \mathcal{O}(\mu_2)$ est un sous-fibré de $p^* E$:

$$0 \to p^* \mathcal{O}(\mu_2) \to p^* E \to \mathcal{G} \to 0 \quad ;$$

sous p_* il vient (après torsion) :

$$0 \to \mathcal{O} \to E(-\mu_2) \to \mathcal{F} \to 0 .$$

$\mathcal{F}$ est uniforme de type $(1; -1; \dots; -1)$ puisque $E(-\mu_2)$ est uniforme de type $(1;0;-1;\dots;-1)$.
Maintenant, d'après (I;4.1) et (I;4.2) : $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \oplus (n-1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ et donc : $E \cong \bigoplus_{i=1}^{k} r_i\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, ce qui est absurde car il faudrait : $S_1(T,U,V) = T$ et $S_3(T,U,V) = T^{n-1}$. ■

III - 2.2.2. c) : PROPOSITION : Les fibrés correspondent aux autres cas de (III;2.2.2.a)) sont :

(a) $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$

(b) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus r_2 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$; (b') $r_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$

(c.1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-3+\mu_1)$

(c.1)' $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$

(c.2) $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$

(c.2)' $T_{\mathbb{P}^n}(-2+\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$

Démonstration :

(a) Cf. (III;2.2.1.b)).

(b) Comme $S_1(T,U,V) = T$, $E_1 \cong \mathcal{O}_G$ et on a une suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to E(-\mu_1) \to F \to 0$ où F est un fibré uniforme avec $k = 1$, on conclut avec (I;4.2).

(c.1) Comme précédemment, on a une suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to E(-\mu_1) \to F \to 0$ (★) avec F uniforme de type (-1, -2 ...-2) et de rang n ; d'après ([E-H-S]), F est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(-3)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \oplus (n-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2)$.

Dans les deux cas la suite (★) scinde et : $E(-\mu_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus T_{\mathbb{P}^n}(-3)$ l'autres cas devant être exclu car $S_2(T,U,V) = T-(U+V)$.

(c.2) Se traite de la même manière que (c.1).

(c.1)' et (c.2)' s'obtiennent par dualité. ∎

III - 2.3 : Cas où $S_{j_o}(0,1,v) \not\equiv o$.

La relation $(\&_{j_o})_o$ s'écrit :

$$b_{j_o} \cdot v \cdot (v^{n-1} + \ldots + 1) = \prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i - \mu_{j_o}, 1, v)$$

avec : $S_{j_o}(0,1,v) \not\equiv o$, $d^o\, S_{j_o}(0,1,v) < r_{j_o}$ et : $v \mid S_{j_o}(0,1,v)$ (III;2.1).

III - 2.3.1 : Cas où $b_{j_o} = o$

Si b_{j_o} est nul, alors il existe i_o $(1 \leqslant i_o \leqslant k$, $i_o \neq j_o)$ tel que $S_{i_o}(\mu_{i_o} - \mu_{j_o}, 1, v)$ soit identiquement nul. En particulier : $d^o\, S_{i_o}(0,1,v) < r_{i_o}$, car par symétrie et homogénéité $S_{i_o}(\alpha,1,v)$ est un polynôme en α de degré r_{i_o} et de terme constant : $B(v^{r_{i_o}} + 1) + v \cdot P(v)$ avec $d^o\, P(v) \leqslant r_{i_o} - 2$. Pour la relation $(\&_{i_o})_o$ il vient :

$$\left.\begin{matrix} -b_{i_o} \\ 0 \end{matrix}\right\} + b_{i_o}(v^n + \ldots + 1) = \prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i - \mu_{i_o}, 1, v)$$

mais comme : $d^\circ S_{j_0}(\mu_{j_0}-\mu_{i_0}, 1, v) \leqslant r_{j_0} - 1$, on a :

$d^\circ\left(\prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i-\mu_{i_0}, 1, v)\right) \leqslant n-1$, et donc $b_{i_0}=o$; b_{i_0} et b_{j_0} étant nuls il suit : $a=b=c=o$ et d'après (III;2.2.1.*b)*) :

$S_{j_0}(T,U,V)=T^{r_{j_0}}$, ce qui contredit l'hypothèse : $S_{j_0}(0,1,v) \neq o$.

Ce cas ne se présente donc pas sous ces hypothèses et b_{j_0} est non nul. En particulier, ceci montre que $v=o$ est racine simple de $S_{j_0}(0,1,v)$.

III - 2.3.2 : PROPOSITION : Dans les hypothèses de (III;2.3) la relation $(\&_{j_0})$ s'écrit :

$$T^{n+1}-b_{j_0}U^{n+1}+(aT+b_{j_0}U)\,R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i\left(T+(\mu_i-\mu_{j_0})\,U,U,V\right).$$

Démonstration : On note y la solution holomorphe de :

$S_{j_0}(\lambda(1+y(\lambda)),1,y(\lambda))=o$ vérifiant $y(o)=o$. L'existence et l'unicité sont assurées par le théorème des fonctions implicites car $v=o$ est racine simple de $S_{j_0}(0,1,v)=o$.

Par symétrie, $y(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathscr{S})\quad\left\{\begin{array}{l} p'\left(\lambda(1+y(\lambda)),1\right)+[\,a\,\lambda(1+y(\lambda))+b]\,R(1,y(\lambda))=o \\ p'\left(\lambda(1+y(\lambda)),y(\lambda)\right)+[\,a\,\lambda(1+y(\lambda))+b\,y(\lambda)]\,R(1,y(\lambda))=o\ . \end{array}\right.$$

Pour simplifier l'écriture, on omet l'indice j_0. On pose :

$$p'(T,U)=\tilde{p}(T,U)-b\,U^{n+1}\ ;\quad \tilde{p}(T,U)=T^{n+1}+c_1UT^n+\dots+c_nU^nT\ .$$

Par différence dans $(\mathscr{S})$ il vient : $\tilde{p}(\lambda(1+y(\lambda)),1)=\tilde{p}(\lambda(1+y(\lambda)),y(\lambda))$.

En dérivant cette égalité en $\lambda=o$ et en tenant compte que $y(o)=o$, il vient facilement par récurrence que $c_i=o$, $1\leqslant i\leqslant n$. ∎

Dans la proposition suivante, on rassemble les résultats obtenus c'est-à-dire une "*classification*" quand $c=o$:

III - 2.4 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage $(\mu_1\dots\mu_k)$ avec les μ_i consécutifs. On suppose que dans la relation (&) correspondante on ait $c=o$. Alors : ou E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$\oplus r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$, $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$,

$T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)\oplus T_{\mathbb{P}^n}(\mu_2-2)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\mu_1+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$,

$\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\mu_1+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\mu_1+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)\oplus\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(\mu_2+1)$.

où il existe j_0, $1\leqslant j_0\leqslant k$, tel que la relation $(\&_{j_0})$ correspondante s'écrive :

$$T^{n+1}-b_{j_0}U^{n+1}+(aT+b_{j_0}U)\,R(U,V)=\prod_{i=1}^{k} S_i\left(T+(\mu_i-\mu_{j_0})\,U,U,V\right)$$

III - 2.4.1 : Remarque : Tous les fibrés "attendus" apparaissent dans la proposition précédente. Ceci laisse supposer que l'on doit toujours avoir $c=o$ dans ($\&$). C'est d'ailleurs ce que nous montrons dans certains cas particuliers ($n=3,4,5$). De même quand la relation ($\&_{j_o}$) prend la forme particulière de la proposition précédente, on doit avoir $k=1$.

CHAPITRE IV

CERTAINS TYPES DE FIBRĒS UNIFORMES

§ 1) $k=r$ $(n \geqslant 3)$
§ 2) $k=2$, $r_1=1$ $(n\geqslant 2)$
§ 3) $r=n+1$, $k=n$ $(n\geqslant 4)$
§ 4) $r=n+1$, $k=3$, $r_1=r_3=1$ $(n\geqslant 3)$
§ 5) $r=n+1$, n pair , $n\geqslant 4$, $k=2$, $r_1=2$

Dans ce chapitre, on étudie certains fibrés uniformes de type de scindage particulier. Rappelons qu'à tout fibré uniforme E de rang r sur $\mathbb{P}^n$ est associée une suite d'entiers : $(k\,;\,r_1 \dots r_k\,;\,\mu_1 \dots \mu_k)$ appelée tyde de scindage de E et qui vérifie: $E|\ell \cong \bigoplus_{i=1}^{k} r_i\, \mathcal{O}_\ell(\mu_i)$ pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}^n$ avec $\mu_1 > \dots > \mu_k$; $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$.

§1. $k=r$ $(n\geqslant 3)$

IV - 1.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 3)$ de type de scindage $(k\,;\,r_1 \dots r_k\,;\,\mu_1 \dots \mu_k)$ avec $k=\mathrm{rang}\,(E)$
alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Démonstration : La filtration $HN^\bullet$ fournit les suites exactes

$$0 \to HN^i \to HN^{i+1} \to q^* E_{i+1} \oplus p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{i+1}) \to 0 \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Quand on restreint ces suites à $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, on obtient des extensions de fibrés entièrement décomposés (car $r_i=1$, $\forall$ i). Ces extensions scindent (car $n-1 \geqslant 2$) et on aboutit à : $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(a_i) \cong r \cdot \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ avec $a_i = c_1(q^* E_i | p^{-1}(x))$. Il vient donc $a_i = o$, $\forall$ i, et par conséquent $c_1(E_i)=o$, $\forall$ i. On conclut avec (I;4.3). ∎

IV - 1.2 : Remarque : Sur $\mathbb{P}^2$ le résultat précédent est faux : on a des contre-exemples par : $T_{\mathbb{P}^2}$, $S^2\, T_{\mathbb{P}^2}$. On peut se demander néanmoins si les fibrés uniformes sur $\mathbb{P}^2$ avec $k=r$ sont bien "ceux qu'on croit".

Dans le même ordre d'idées, on peut conjecturer le résultat suivant :

Conjecture : « Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ avec $r_i < n-1$, $\forall$ i, $1 \leqslant i \leqslant k$, alors E est homogène et par suite (cf.II;2.1.1) isomorphe à $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$. Par (III;1.1) c'est vrai pour $n = 3$.

§2. $k = 2$, $r_1 = 1$ $(n \geqslant 2)$

La proposition suivante a été démontrée par Elencwajg ([Ele,3]) :

IV- 2.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^2$ de type de scindage $k = 2$ et $r_1 = 1$ (ou $r_2 = 1$) alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\overset{2}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^2}(\mu_1 - 2) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_2)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(2 + \mu_2) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\mu_1)$.

Pour la commodité du lecteur, nous donnons maintenant une démonstration de cette proposition.

Démonstration : Par (I;4.1),(I;4.2) et par dualité, on peut se limiter aux fibrés uniformes de type de scindage ($k = 2$; r_1 , $r_2 = 1$; $\mu_1 = o$, $\mu_2 = -1$). Pour un tel fibré, E, la relation ($\mathcal{E}$) s'écrit :

$$S_1(T,U,V)\ S_2(T-U,U,V) = T^r + c_1\, U\, T^{r-1} + c_2 U^2 T^{r-2} + M(T,U,V)\, U^3 + Q(T,U,V)\, R(U,V)$$

où $M(T,U,V)$, $Q(T,U,V)$ sont des polynômes homogènes de degré $(r-3)$ et $(r-2)$ respectivement. $R(U,V) := U^2 + UV + V^2$. Posons :

$$S_1(T,U,V) = T^{r-1} + T^{r-2} B(U+V) + T^{r-3} F(U^2+V^2) + T^{r-3} DUV + T^{r-4} H(U^3+V^3) + T^{r-4} G(U^2V + UV^2) + \ldots$$

$$S_2(T,U,V) = T + A(U+V).$$

On note $(\mathcal{E})_*$ la relation ($\mathcal{E}$) modulo (U^2+V^2+UV). On a :

$$S_1(T,U,V) \equiv T^{r-1} + T^{r-2} B(U+V) + T^{r-3}(D-F)UV + T^{r-4}\, G(U^2V + UV^2) + \ldots$$

$$S_2(T-U,U,V) \equiv T + U(A-1) + AV$$

où $\equiv$ indique une égalité module (U^2+V^2+UV) .

Les coefficients de $T^{r-1}V$, $T^{r-2}UV$, $T^{r-3}U^2V$ dans $(\mathcal{E})_*$ donnent respectivement les relations :

(1) $A + B = o$, (2) $BA - B + D - F = o$, (3) $D - F = o$;

on en déduit $A(1-A) = o$, c'est-à-dire $A = o$ ou $A = 1$.

Si A est nul alors B aussi est nul -(1)- et d'après (I;4.3) : $E \cong (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

Si $A = 1$ d'après (I;4.4) on a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F} \to E \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1) \to o \quad (\star\star) \ ;$$

$\mathcal{F}$ est uniforme avec $k = 1$ et $c_1(\mathcal{F}) = o$. En effet, si $\mathcal{F}|\ell \cong \oplus \mathcal{O}_\ell(a_i)$ on a : $a_i \leqslant o$, $\forall$ i car $H^o(\ell\ ,\ \mathcal{H}om(\mathcal{O}_\ell(a), \mathcal{O}_\ell(b))) = o$ si $a > b$ et de plus $\sum_{i=1}^{r-2} a_i = o$

car $c_1(E) = c_1(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1)) = -1$. On a donc $\mathcal{F} \cong (r-2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ (cf. I;4.2) et la suite (★★) est scindée. ■

On peut maintenant généraliser cette proposition :

IV- 2.2 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$ de type de scindage : $k = 2$ et $r_1 = 1$ (ou $r_2 = 1$) alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $\overset{2}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus (r-n)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$, $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(2+\mu_2) \oplus (r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

Démonstration : Soit P un plan de $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 3)$ et soit : $\mathbb{P}^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P$ le sous-diagramme induit par ce plan (cf.I;2.4). Soit $\mathcal{E} := E|P$. D'après la proposition précédente : $\mathcal{E} \cong \overset{2}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_P(\mu_i)$ ou $\mathcal{E} \cong T_P(-2+\mu_1) \oplus (r-2) \cdot \mathcal{O}_P(\mu_1 - 1)$, on suppose $r_1 = 1$ ce qui est toujours licite quitte à dualiser.

Comme $HN^1(\mathcal{E}) \cong HN^1(E)|F_2$, on voit que :

$$HN^1(E) \cong \mathcal{O}_F \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \quad \text{ou} \quad HN^1(E) \cong H_Q \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1 - 1).$$

Dans le premier cas, on a une suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \to E \to \mathcal{F} \to 0$ où $\mathcal{F}$ est uniforme avec $k = 1$ et donc : $\mathcal{F} \cong (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$ (I;4.2), il s'en il s'ensuit que : $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1) \oplus (r-1) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2)$.

Dans le second cas, d'après (I;4.4) on a la suite exacte : $0 \to Q \to E(-\mu_1 + 1) \to \mathcal{G} \to 0$ où $\mathcal{G}$ est uniforme avec $k = 1$ donc isomorphe à $(r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ finalement :

$$E(-\mu_1 + 1) \cong Q \oplus (r-n) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}. \ ■$$

§3. $r = n+1$, $k = n$ $(n \geq 4)$

IV- 3.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 4)$ de type de scindage $(k = n;\ r_1 \dots r_n;\ \mu_1 \dots \mu_n)$ alors : $E \cong \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

Démonstration : Pour un tel fibré, la relation $(\mathcal{E}_j)_\circ$, $1 \leq j \leq n$, s'écrit :

$$\prod_{i=1}^{n} S_i(\mu_i - \mu_j, 1, v) = \begin{cases} (cv + b_j) \cdot R(1,v) \\ c\,v^{n+1} + (c + b_j)(v^n + \dots + v) + c. \end{cases}$$

Le membre de gauche a au moins (n-1) racines réelles et celui de droite au plus trois si $(c, b_j) \neq (0,0)$ (cf. III;1.3) donc pour $n \geq 5$ ceci implique : $(c, b_j = (0,0)$, $1 \leq j \leq n$.

De $b_i = b_j$ pour $i \neq j$ on déduit $a = o$ (car $b_i := -a\mu_i + b$) et ensuite $b_i = o$ et $a = o$

il vient $b=o$; a, b et c étant nuls, on conclut comme dans (III;2.2.1.b)).
Pour $n=4$, on peut procéder de la façon suivante :
supposons $r_4=2$, la relation $(\mathcal{E}_4)_o$ est de la forme :

$$S_1(3,1,v)\,S_2(2,1,v)\,S_3(1,1,v)\,S_4(0,1,v) = c\,v^5+(c+b_4)\,(v^4+v^3+v^2+v)+c$$

(s'il en était autrement, on aurait immédiatement $a=b=c=o$ en comptant le nombre de racines réelles).

Comme -1 est racine dans le membre de droite, on a : $S_4(0,1,-1)=o$ (en effet si $S(T,U,V)=T+A(U+V)$ et si $\alpha\neq o$, alors $S(\alpha,1,-1)\neq o$). Comme $S_4(0,1,v)$ est de la forme $E\,v^2+D\,v+E$ il vient : $S_4(0,1,v)=E(v+1)^2$ et -1 est racine double dans le membre de droite ; ceci implique : $b_4=\frac{3}{2}c$ et le membre s'écrit : $c(v+1)^3\left(v^2-\frac{v}{2}+1\right)$ or ceci est absurde si $c\neq o$ car, encore une fois $S_i(4-i,1,-1)\neq o$, $1\leqslant i\leqslant 3$.
Comme c et b_4 sont nuls, en comptant le nombre de racines réelles dans $(\mathcal{E}_i)_o$, $1\leqslant i\leqslant 3$, on voit que $a=b=c=o$.∎

IV- 3.2 : Remarque : En fait, on démontre davantage : si E est un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$, $n\geqslant 4$, de type de scindage $(k\,;\,r_1\ldots r_k\,;\,\mu_1\ldots\mu_k)$ et s'il existe quatre indices tels que $r_{i_\ell}=1$, $\ell=1,\ldots,4$; alors: $E\cong\bigoplus_{r=1}^{k} r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

§4. $r=n+1$, $k=3$, $r_1=r_3=1$ $(n\geqslant 3)$

IV- 4.1 : LEMME : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^2$ de type de scindage $(k=3\,;\,r_1=1\,,\,r_2=r-2\,,\,r_3=1\,;\,\mu_1=1\,,\,\mu_2=o\,,\,\mu_3=-1)$ avec $c_2(E)=o$, alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$T_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus(r-3)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\quad;\quad\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1)\oplus(r-3)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

Démonstration : On distingue deux cas suivant les valeurs de $h^o(\mathbb{P}^2,E(-1))$:

i) $h^o(\mathbb{P}^2,E(-1))\neq o$: soit $s\in H^o(E(-1))$, $s\neq o$, alors s détermine un morphisme injectif de fibrés : $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\to E(-1)$. En effet, pour chaque droite ℓ, on a un morphisme : $\mathcal{O}_\ell\xrightarrow{s|\ell}\mathcal{O}_\ell\oplus(r-2)\cdot\mathcal{O}_\ell(-1)\oplus\mathcal{O}_\ell(-2)$, si s s'annule en x, $x\in\ell$, alors $s|\ell\equiv o$ et donc $s|\ell'\equiv o$ pour toute droite ℓ', c'est-à-dire $s\equiv o$ ce qui est absurde. On a donc une suite exacte : $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\to E(-1)\to\mathcal{F}\to 0$ où $\mathcal{F}$ est un fibré uniforme de type $(-1\,;\ldots;-1\,;-2)$, d'après (IV;2,1), $\mathcal{F}$ est isomorphe à $(r-2)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ ou à $(r-3)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\Omega_{\mathbb{P}^2}$ et $E(-1)$ est donc isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\oplus(r-2)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ ou à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\oplus(r-3)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\Omega_{\mathbb{P}^2}$.
La première possibilité est en contradiction avec l'hypothèse $c_2(E)=o$.

ii) $h^\circ(\mathbb{P}^2, E(-1))=o$. On va montrer que dans ce cas $h^\circ(E^\vee(-1))=h^2(E(-2))$ est non nul. Par Riemann-Roch : $\chi(\mathbb{P}^2, E(-1))=o$. D'autre part : $h^2(\mathbb{P}^2, E(-1))=o$ (à cause du type de scindage). Il vient donc : $h^1(\mathbb{P}^2, E(-1))=o$. Dès lors de la suite exacte :

$$0 \to E(-2) \to E(-1) \to E(-1)|\ell \to 0$$

on déduit : $h^2(\mathbb{P}^2, E(-2))=1$.

Donc $h^\circ(\mathbb{P}^2, E^\vee(-1)) = 1$ et le même raisonnement qu'en (i) appliqué à $E^\vee(-1)$ montre que, dans ce cas, E est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus(r-3)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}\oplus T_{\mathbb{P}^2}(-1)$. ∎

Par le même procédé qu'en (IV;2.2) on généralise ce résultat à $\mathbb{P}^n$, $n\geqslant 2$:

IV- 4.2 : COROLLAIRE : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 2)$ de type de scindage $(k=3\,;\, r_1=1\,,\, r_2=r-2\,,\, r_3=1\,;\, \mu_1=1\,,\, \mu_2=o\,,\, \mu_3=-1)$ avec $c_2(E)=o$; alors E est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(-1)\oplus(r-n-1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ ou à $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)\oplus(r-n-1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Démonstration : Soit P un plan de $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 3)$ et le sous-diagramme qu'il induit : $P^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P$ (cf.I;2.4). Posons $\mathcal{E} := E|P$. Comme $HN^1(\mathcal{E})\cong HN^1(E)|F_2$, d'après le lemme précédent, on voit que : $HN^1(E)\cong H_Q$ ou $HN^1(E)\cong p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Dans le premier cas, d'après (I;4.4), on a une suite exacte : $0\to T_{\mathbb{P}^n}(-1)\to E\to F\to 0$ avec F uniforme de type $(0;\dots;0;-1)$. D'après (IV;2.2) on a :

$$F\cong(r-n-1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \quad \text{ou} \quad F\cong\Omega^1_{\mathbb{P}^n}\oplus(r-2n)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

L'hypothèse $c_2(E)=o$ élimine la deuxième possibilité et on a bien :

$$E\cong T_{\mathbb{P}^n}(-1)\oplus(r-n-1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1).$$

Dans le second cas, on a une suite exacte : $0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\to E\to\mathcal{G}\to 0$ avec $\mathcal{G}$ uniforme de type $(0,\dots,0,-1)$: on conclut comme plus haut. ∎

IV- 4.3 : Remarque : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 2)$ de type de scindage : $(k=3\,;\, r_1=1\,,\, r_2=r-2\,,\, r_3=1\,;\, \mu_1=1\,,\, \mu_2=o\,,\, \mu_3=-1)$; on a

$$E\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\oplus(r-2)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$$

si et seulement si : $c_2(E)=-1$ (cf. par exemple [Ele. For], corollary 2.12).

IV- 4.4 : $r=n+1$

IV- 4.4.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ $(n\geqslant 3)$ de type de scindage : $(k=3\,;\, r_1=1\,,\, r_2=n-1\,,\, r_3=1\,;\, \mu_1\,,\, \mu_2\,,\, \mu_3)$ alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_3) \quad , \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)\oplus\Omega^1_{\mathbb{P}}(\mu_1) \quad , \quad \bigoplus_{i=1}^{3} r_i\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i).$$

La démonstration de cette proposition fait l'objet des numéros (IV;4.4.2,...,IV;4.4.7).

Remarquons d'abord que l'on peut se limiter au cas où les μ_i sont consécutifs sinon d'après (I;4.1) le fibré est entièrement décomposé. Après torsion, on peut même supposer $\mu_1 = 1$. Soit donc E un tel fibré et (&) l'égalité correspondante :

$$(\&) : S_1(T+U,U,V)\cdot S_2(T,U,V)\cdot S_3(T-U,U,V) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \ldots + c_n U^n T + x U^{n+1} + (aT+bU+cV)R(U,V) .$$

On pose : $S_1(T,U,V) = T + A(U+V)$, $S_3(T,U,V) = T + B(U+V)$, $S_2(T,U,V) = \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i} \cdot s_i(U,V)$,
où $s_i(U,V)$ est un polynôme homogène de degré i symétrique en U et V :

$$s_0(U,V) = 1,$$
$$s_i(U,V) = x_i(U^i + V^i) + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{i-k}^{(i)} V^{i-k} U^k , \quad 1 \leq i \leq n-2,$$
$$s_{n-1}(U,V) = x_{n-1}(U^{n-1} + V^{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-1-k} V^{n-1-k} U^k .$$

IV- 4.4.2 : Cas où c = o dans (&)

D'après (III;3.4), il suffit d'examiner la situation suivante :
il existe $\mu \in \{-1,0,1\}$ tel que la relation $(\&_\mu)$ correspondante soit de la forme :

$$T^{n+1} + aTR(U,V) - b_\mu U^{n+1} + b_\mu U R(U,V) = \prod_{i=1}^{3} S_i(T + (\mu_i - \mu)U,U,V).$$

Dans ce cas, on a forcément $\mu = o$ (car $c_1 = o$) et comme $c_2 = o$ on peut appliquer (IV;4.2).

IV- 4.4.3 : On a les relations : $B + A + x_1 = o$, $x_2 + A x_1 + B(x_1 + A) = o$, $c = A\cdot B\cdot x_{n-1}$.
Pour le voir, on peut par exemple poser U = o, V = 1 dans (&) et comparer les coefficients de T^n, T^{n-1} et 1.

IV- 4.4.4 : De même en comparant les coefficients de $T^{n-1}U^2$ dans (&) et en utilisant (IV;4.4.3) il vient : $c_2 = B - A - 1$.

IV- 4.4.5 : l'égalité $(\&)_o$ est de la forme :

$$AB\,x_{n-1} v^{n+1} + [2AB\,x_{n-1} + (B-A)\,x_{n-1} + AB\,a_{n-2}]\, v^n + \ldots$$
$$+ [2AB\,x_{n-1} + (B-A)\,x_{n-1} + (B + AB - 1 - A)\,a_1]\,v + (AB + B - 1 - A)\,x_{n-1}$$
$$= \begin{cases} c\,v^{n+1} + (c+b)\,(v^n + \ldots + v) + c & \textbf{(1)} \\ c\,v^{n+1} + (c+b)\,(v^n + \ldots + v) + b & \textbf{(2)} \quad \text{(cf.III;1.2).} \end{cases}$$

On distingue deux cas suivant la forme prise par la relation $(\&)_o$.

IV- 4.4.6 : Dans le cas (1) il faut : $(B-A-1)\cdot x_{n-1}=o$ c'est-à-dire (IV;4.4.4) : $c_2\cdot x_{n-1}=o$.
Si $c_2=o$ on applique (IV;4.2) si $x_{n-1}=o$ alors $c=o$ (IV;4.4.3) et on conclut avec (IV;4.4.2).

IV- 4.4.7 : Dans le cas (2) on a les égalités suivantes :

(i) $c+b = 2AB\,x_{n-1}+(B-1-A)x_{n-1}$

(ii) $c+b = 2AB\,x_{n-1}+(B-A)\,x_{n-1}+AB\,a_{n-2}$

(iii) $c+b = 2AB\,x_{n-1}+(B-A)\,x_{n-1}+(B+AB-1-A)\,a_1$

(i) s'obtient en additionnant le coefficient de v^{n+1} à celui de 1 dans chaque membre de $(\&)_o$. (ii) et (iii) s'obtiennent à partir des coefficients de v^n et v.

$s_{n-1}(U,V)$ étant symétrique on a : $a_{n-2}=a_1$, de (ii) et (iii) il vient : $(B-A-1)a_1=o$ c'est-à-dire : $a_1=o$ ou $c_2=o$. Si $a_1=o$ alors $x_{n-1}=o$ ((i),(ii)) et donc $c=o$, on termine comme en (IV;4.4.2). Si $c_2=o$, on applique (IV;4.2). Ceci achève la démonstration de la proposition (IV;4.4.1).

§5. $r=n+1$, $k=2$, $r_1=2$, n pair $(n\geqslant 4)$

Le but de ce paragraphe est de montrer :

IV- 5.1 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ avec n pair, $n\geqslant 4$, de type de scindage : $(k=2\ ;\ r_1=2\ ,\ r_2=n-1\ ;\ \mu_1\ ,\ \mu_2)$ alors E est isomorphe à $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$ où à $\bigoplus_{i=1}^{2} r_i\cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

IV- 5.2 : Remarque : Par dualité, on a le type de scindage : $(k=2\ ,\ r_1=n-1\ ,\ r_2=2)$. D'après (I;4.1) on peut supposer les μ_i consécutifs et même $\mu_1=1$ après torsion.

IV- 5.3 : On pose : $S_1(T,U,V)=T^2+TA(U+V)+F(U^2+V^2)+DUV$
$S_2(T,U,V)=\sum_{i=o}^{n-1} T^{n-1-i}\,s_i(U,V)$, $s_i(U,V)$ est un polynôme homogène de degré i symétrique en U et V avec : $s_o(U,V)=1$

$$s_i(U,V)=x_i(U^i+V^i)+\sum_{t=1}^{i-1}\alpha_{i-t}^{(i)}V^{i-t}U^t\ ,\quad 1\leqslant i\leqslant n-2$$

$$s_{n-1}(U,V)=x_{n-1}(U^{n-1}+V^{n-1})+\sum_{t=1}^{n-2}a_{n-1-t}\,V^{n-1-t}U^t\ .$$

La relation ($\mathcal{E}_2$) s'écrit :

$$S_1(T+U,U,V)\cdot S_2(T,U,V)=T^{n+1}+c_1\,U\,T^n+\dots+c_n\,U^n\,T+x_2\,U^{n+1}+(aT+b_2U+cV)R(U,V).$$

IV- 5.4 : Pour démontrer la proposition (IV;5.1) il suffit d'après (III;3.4) de montrer que l'on a $c=o$ dans ($\mathcal{E}_2$). En effet, il ne peut exister $\mu\in\{1,0\}$ tel que ($\mathcal{E}_\mu$) s'écrive :

$$T^{n+1}+aTR(U,V)-b_\mu\,U^{n+1}+b_\mu\,U\,R(U,V)=\prod_{i=1}^{2}S_i(T+(\mu_i-\mu)U,U,V)$$

car il faudrait : $c_1(E(-\mu))=2(1-\mu)+(n-1)(-\mu)=o$, ce qui est impossible.

IV- 5.5 : L'égalité $(\mathcal{E}_2)_o$ est de la forme :

$$v^{n+1}F\,x_{n-1}+v^n[x_{n-1}(A+D)+a_{n-2}F]+\dots+v[a_1(1+A+F)+x_{n-1}(A+D)]+x_{n-1}(1+A+F)$$

$$=\begin{cases} c\,v^{n+1}+(c+b_2)(v^n+\dots+v)+c & \textbf{(1)}\\ c\,v^{n+1}+(c+b_2)(v^n+\dots+v)+b_2 & \textbf{(2)}\end{cases}\qquad\text{(cf.III;1.2).}$$

Dans un cas comme dans l'autre, on déduit la relation $(1+A)\,a_{n-2}=o$ en comparant les coefficients de v^n et v et en utilisant $a_1=a_{n-2}$ (symétrie de $S_2(0,U,V)$).

IV- 5.6 : **Cas où A = -1**

En restreignant la filtration $HN^\bullet$ à une fibre de p (cf.I;2.3) on obtient la suite exacte : $0\to\mathcal{E}_1\to(n+1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}\to\mathcal{E}_2\to 0$, où $\mathcal{E}_i:=q^*E_i\,|p^{-1}(x)\cdot\mathcal{E}_1$ est un sous-fibré de rang deux de première classe de Chern -1 du fibré trivial $(n+1)\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$. Il est donc uniforme de type $(0,-1)$. Pour $n\geq 4$: $\mathcal{E}_1\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ ([VdV]). En particulier $c_2(\mathcal{E}_1)$ est nul, c'est-à-dire $F=o$ et ceci implique $c=o$ dans ($\mathcal{E}$).

N.B. *On peut montrer que dans ce cas :* $E\cong T_{\mathbb{P}^n}(\mu_1-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$.

IV- 5.7 : **Cas où $a_{n-2}=o$**

On examine les deux possibilités de (IV;5.5) suivant la forme prise par $(\mathcal{E}_2)_o$.

IV- 5.7.1 : Dans le cas **(1)** il faut : $x_{n-1}(1+A)=o$ (coefficients de v^{n+1} et de 1 dans $(\mathcal{E}_2)_o$).

Si $A=-1$ (cf.IV;5.6).

Si $x_{n-1}=o$ alors $c=o$.

IV- 5.7.2 : Dans le cas (2) on a les relations :

(i) $c + b_2 = (2F+1+A)x_{n-1}$

(ii) $c + b_2 = x_{n-1}(A+D)$

(i) s'obtient à partir des coefficients de v^{n+1} et de 1

(ii) s'obtient à partir des coefficients de v^n.

Si $x_{n-1} = o$ alors $c = o$.

Si $D = 2F+1$ alors $S_1(1,1,v) = (v+1)(Fv+1+A+F)$ et $(cv+b_2)\cdot R(1,v)$ a deux racines réelles, ce qui est absurde (car n est pair), à moins que $c = o = b_2$.
Ceci achève la démonstration de la proposition (IV;5.1).

CHAPITRE V

$n = p-1$

§0. Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer le :

THÉORÈME III' : Sur $\mathbb{P}^n$ avec $n = p-1$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 7, les fibrés uniformes de rang (n+1) sont (à isomorphismes près) :

$$\bigoplus_{i=1}^{k} r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) \quad , \quad T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b) \quad , \quad \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d).$$

Plan de démonstration :

Dans le §1) on définit les solutions primitives associées $(\&_i, S_i, \xi)$ et on montre que si certaines conditions arithmétiques $A(c_i, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées alors la relation $(\&_i)$ prend une forme particulière simple.

A partir du §2) et jusqu'à la fin de ce chapitre on suppose n de la forme p-1 où p est un nombre premier. L'hypothèse $n = p-1$ nous permet d'écarter les cas où il existe un indice j, $1 \leq j \leq k$, tel que $x_j = o$ dans la relation $(\&_j)$ correspondante (§2).

Dans le §3) on suppose donc $x_j \neq o$, $1 \leq j \leq k$ et aussi $c \neq o$; sous ces hypothèses on montre l'existence de solutions associées primitives. Une fois une solution primitive associée $(\&_i, S_i, \xi)$ choisie, il nous faut étudier les conditions arithmétiques $A(c_i, b_i, \xi, S_i, n)$.

Au §4) nous montrons que ces conditions sont vérifiées si $c\, b_i \neq o$, $c \neq \pm b_i$.

Les cas pathologiques ($b_i = o$, $c = \pm b_i$) sont traités au §5).

Maintenant le problème se réduit aux situations de (III;2.4) et (V;1.2); pour conclure il reste à étudier le cas où il existe un indice j_o tel que la relation $(\&_{j_o})$ soit de la forme :

$$T^{n+1} + a\,T \cdot R(U,V) + c(U^{n+1} + V^{n+1}) + (c + b_{j_o})(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{j=1}^{k} S_j(T + (\mu_j - \mu_{j_o})U, U, V)$$

ceci est le contenu du §6).

§1. Les solutions primitives associées

Etant donné la relation $(\&) = (\&; P, x, a, b, c, k, \mathcal{S}, \mu)$ où :

- $P(T,U) = \sum_{i=o}^{k} c_i\, T^{n+1-i} U^i$ est un polynôme homogène en T et U à coefficients entiers, monique en $T (c_o = 1)$.
- x, a, b, c, k sont des entiers, k étant supérieur ou égal à 1.
- $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ est une suite de k polynômes homogènes en T,U,V de degré au moins égal à un, symétriques en U et V.
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ est une suite de k entiers strictement décroissante.

Toutes ces données vérifiant :

$$P(T,U) + x\,U^{n+1} + (a\,T + b\,U + c\,V)\,R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \mu_i U, U, V).$$

Nous dirons que $(\&_i) = (\&_i;\, P_i, x_i, a, b_i, c, k, \mathcal{S}, \mu, \xi)$ (cf.III;1.1 pour la définition de $\&_i$) est une <u>solution associée primitive</u> de $(\&)$ si :

1°) $x_i = c - b_i$ est non nul,

2°) ξ est une racine de $S_i(0,1,v)$ qui est distincte de 1 et -1 et qui est racine simple de $\psi_i(v) := c\,v^{n+1} + (c + b_i)(v^n + \dots + v) + c$.

Si aucune confusion n'est à craindre nous écrirons plus simplement $(\&_i;\, S_i, \xi)$.

V- <u>1.1</u> : LEMME : Soit $(\&_i; S_i, \xi)$ une solution primitive associée de $(\&)$ et soit $P_i(T,U) = T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$.

Si $\xi^{n+1-t} - 1 \neq o$ pour $1 \leq t \leq \ell$ alors $c_{n+1-t} = o$, $1 \leq t \leq \ell$.

Démonstration : On considère $v(\lambda)$ la solution holomorphe de $S_i(\lambda(1+v(\lambda)),1,v(\lambda))=0$ qui vérifie $v(0)=\xi$. L'existence et l'unicité sont assurées par le théorème des fonctions implicites car ξ est racine simple de $\psi_i(v)$. Par symétrie $v(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathscr{S})\begin{cases} P_i(\lambda(1+v(\lambda)),1)+(c-b_i)+[a\lambda(1+v(\lambda))+b_i+c\,v(\lambda)]\,R(1,v(\lambda))=0 \\ P_i(\lambda(1+v(\lambda)),v(\lambda))+(c-b_i)\,v(\lambda)^{n+1}+[a\lambda(1+v(\lambda))+b_i\,v(\lambda)+c]\,R(1,v,(\lambda))=0\,. \end{cases}$$

On remarque l'égalité :

$$(c-b_i)\,v(\lambda)^{n+1}+[a\lambda(1+v(\lambda))+b_i v(\lambda)+c]\,R(1,v(\lambda))=(c-b_i)+[a\lambda(1+v(\lambda))+b_i+cv(\lambda)]\,R(1,v(\lambda)).$$

Ainsi par différence dans $(\mathscr{S})$ il vient :

$$P_i(\lambda(1+v(\lambda)),1)=P_i(\lambda(1+v(\lambda)),v(\lambda)) \qquad (*).$$

En dérivant une fois $(*)$ en $\lambda=0$ il vient :

$$c_n(1+\xi)(1-\xi^n)=0 \quad \text{donc si } \xi^n\neq 1 \text{ on a bien } c_n=0\,.$$

Procédons par récurrence et supposons $c_{n+1-t}=0$, $1\leq t\leq \ell-1$.
En dérivant ℓ fois $(*)$, en $\lambda=0$, on obtient :

$$c_{n+1-\ell}(1+\xi)(1-\xi^{n+1-\ell})=0 \quad \text{, d'où le lemme.} \ \blacksquare$$

V- 1.2 : Soit $(\&_i;P_i,x_i,a,b_i,c,k,\mathscr{S},\mu,\xi)$ une solution primitive associée de $(\&)$ on note $A(c,b_i,\xi,S_i,n)$ les conditions arithmétiques : $\xi^{n+1-t}-1\neq 0$, $1\leq t\leq n$.
Si $A(c,b_i,\xi,S_i,n)$ sont vérifiées alors $(\&_i)$ s'écrit :

$$T^{n+1}+a\,T\,R(U,V)+c\,(U^{n+1}+V^{n+1})+(c+b_i)\,(U^n V+\ldots+U\,V^n)=\prod_{j=1}^{k} S_j(T+(\mu_j-\mu_i)U,U,V)$$

§2. Cas où il existe un indice j tel que $x_j=0$

Notation : Dans tout ce paragraphe et jusqu'à la fin de ce chapitre p désigne un nombre premier. On suppose dorénavant n de la forme p-1.

V- 2.1 : PROPOSITION : Si $n=p-1$ et s'il existe un indice j, $1\leq j\leq k$, tel que $x_j=0$ dans la relation $(\&_j)$ correspondante alors ou
i) c et b_j sont nuls, ou ii) $k=1$, ou iii) $k=2$, $r_1=1$, $r_2=n$ ($r_1=n$, $r_2=1$).

Démonstration : D'après l'hypothèse la relation $(\&_j)_0$ s'écrit :
$(c\,v+b_j)\,R(1,v)=\prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i-\mu_j,1,v)$, or $R(1,v)$ est irréductible (car $n=p-1$) d'où la proposition. ■

V - 2.2 : Remarque : Le cas i) rentre dans la "*catégorie* $c=o$" (cf.chap.III). Les cas ii) et iii) sont traités par (I;4.2) et (IV;2.2) respectivement.

§3. Cas où $c \neq o$ et $x_j \neq o$, $1 \leqslant j \leqslant k$, existence de solutions primitives associées

Avant toute chose, notons le résultat suivant qui nous sera bien utile :

V - 3.1 : LEMME : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage $(k\,;\, r_1 \dots r_k\,;\, \mu_1 \dots \mu_k)$. Si n est pair et s'il existe deux indices i et j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, tels que r_i et r_j soient impairs alors, dans la relation (&) correspondante, c est nul.

Démonstration : Considérons le polynôme $F(Y) = Y^{n+1} + c_1 Y^n + \dots + c_n Y + x$. Il est de degré impair à coefficients réels, il a donc une racine réelle : λ. Dans (&) posons : $T=\lambda$ et $U=1$ il vient :

$$(a\lambda + b + cv)\, R(1,v) = \prod_{i=1}^{k} S_i(\lambda+\mu_i, 1, v).$$

Si c est non nul, le membre de gauche a une racine réelle, celui de droite au moins deux ce qui est absurde. ∎

Faisons maintenant quelques remarques élémentaires :

V - 3.2 : Remarque : Dans les hypothèses de ce §3 s'il existe j, $1 \leqslant j \leqslant k$, tel que $r_j \geqslant 4$ alors il existe ξ racine de $S_j(0,1,v)$ telle que $(\&_j, S_j, \xi)$ soit une solution primitive associée. En effet, d'après (III;1.3), $S_j(0,1,v)$ a une racine complexe ξ qui est donc une racine simple de $\psi_j(v)$.

V - 3.3 : Remarque : Soit $S(v) = Ev^2 + Dv + E$, alors $S(v)$ a une racine double si et seulement si $S(1)=o$ ou $S(-1)=o$. Donc si $r_i = 2$ et si S_i n'est pas solution primitive associée alors c vaut $\frac{n}{n+2} b_i$ ou $\frac{-n}{n+2} b_i$. En effet si 1 est racine de $S_i(0,1,v)$ alors 1 est racine double de $S_i(0,1,v)$ et donc de $\psi_i(v)$, ceci implique $-\frac{n+2}{n} c = b_i$. Par le même raisonnement on voit que si -1 est racine de $S_i(0,1,v)$ alors -1 est racine double de $\psi_i(v) = (v+1)(cv^n + bv^{n-1} + \dots + bv + c)$ (car n est pair) et $\psi_i'(-1) = o$ si et seulement si $\frac{n+2}{n} c = b_i$. Supposons maintenant que les deux racines (α_1, α_2) de $S_i(0,1,v)$ soient des racines multiples de ψ_i alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ car ψ_i n'a qu'une racine multiple (cf.III;1.3) et donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ (car α est racine multiple de $S_i(0,1,v)$).

V- 3.4 : Remarque : De l'égalité : $Hv^3+Gv^2+Gv+H=(v+1)[Hv^2+(G-H)v+H]$ on déduit comme ci-dessus : si $r_i=3$ et si S_i n'est pas solution primitive associée alors $\frac{n+2}{n}c=b_i$ ou $-\frac{n+2}{n}c=b_i$.
Pour montrer l'existence de solutions primitives associées nous avons besoin du

V- 3.5 : LEMME : Soit $Q_t(v)=P(t,1)+(b+cv)\,R(1,v)$ avec $P(t,1)=t^{n+1}+c_1t^n+\dots+c_nt+x$. Si $b\neq -c$ alors v^2 ne divise jamais $Q_t(v)$ et $Q_t(v)$ n'a jamais de racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$.

Démonstration : Pour la deuxième assertion il suffit de considérer $(v-1)\,Q_t(v)$. ■

V- 3.6 : PROPOSITION : Dans les hypothèses de ce §3 et si $n\geq 6$, il existe toujours une solution primitive associée.

Démonstration : D'après (V;3.1 et V;3.2) il nous reste à traiter le cas suivant : il existe un seul indice j, $1\leq j\leq k$, tel que $r_j=1$ (ou 3) et si $i\neq j$ alors $r_i=2$. Comme $n\geq 6$, il existe au moins trois indices avec $r_i=2$ ou 3. Soient r_{i_ℓ}, $1\leq \ell\leq 3$, ces indices.
Si les S_{i_ℓ} $(1\leq \ell\leq 3)$ ne sont pas solutions primitives associées alors (cf. V;3.3 et V;3.4) b_{i_ℓ} vaut $\frac{n+2}{n}c$ ou $-\frac{n+2}{n}c$, $1\leq \ell\leq 3$, il existe donc t et s, $1\leq t<s\leq 3$, tels que $b_{i_t}=b_{i_s}$. Ceci implique $a=o$ (car $b_i:=-a\mu_i+b$), $b_i=b$, $1\leq i\leq k$, et $c=\pm\frac{n}{n+2}b$.
En particulier $c\neq -b$ et pour i, $1\leq i\leq k$, la relation $(\&_i)_o$ s'écrit :

$$cv^{n+1}+(c+b)(v^n+\dots+v)+c=\prod_{m=1}^{k}S_m(\mu_m-\mu_i,1,v).$$

Montrons maintenant le résultat suivant :

$$(\star)\left\{\begin{array}{l}\psi(v):=cv^{n+1}+(c+b)(v^n+\dots+v)+c \text{ a une racine complexe non nulle } \theta \text{ vérifiant :}\\ \pi/(n+1)<\arg\theta<5\pi/(n+1).\end{array}\right.$$

En effet soit $\psi_t(v):=v^{n+1}+t(v^n+\dots+v)+1$; pour $t\geq 1$, ψ_t a deux racines $r_1(t)$ et $r_2(t)$ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$: c'est une conséquence des faits suivants (cf.III;1.3) :

i) ψ_s a une racine d'argument $(2k+1)\pi/(n+1)$ si et seulement si $s=o$.

ii) ψ_1 a $e^{2i\pi/(n+2)}$ et $e^{4i\pi/(n+2)}$ comme racines.

iii) Pour tout s : $\psi_s(o)\neq o$. De plus on a les inégalités :

$$(2k+1)\pi/(n+1) < (2k+2)\pi/(n+2) < (2k+3)\pi/(n+1) \quad \text{si } o \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}-1$$

et : $2 \leqslant \frac{n}{2}-1$ si $n \geqslant 6$. Pour les mêmes raisons si $o<t<1$, $r_1(t)$ et $r_2(t)$ ont encore un argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/n+1)$:
Pour $t=o$, une des deux racines, disons par exemple $r_1(o)$, prend la valeur $e^{3i\pi/(n+1)}$ et donc pour $t<o$: $\pi/(n+1) < \arg(r_1(t)) < 5\pi/(n+1)$ (cf. i)).
Pour $t=(c+b)/c$, $\psi_t = \frac{1}{c}\psi$ et $(\star)$ est démontré.

En revenant à la relation $(\mathcal{E}_1)_o$, d'après $(\star)$ il existe i_o $1 \leqslant i_o \leqslant k$, tel que $S_{i_o}(\mu_{i_o}-\mu_1, 1, \theta) = o$.

Nous allons montrer que $S_{i_o}(0,1,v)$ a une racine complexe ξ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$. Ce sera alors une racine simple de $x_{j_o} + (c\,v + b_{j_o})\,R(1,v) = \psi(v)$ (cf.III;1.3) et $(\mathcal{E}_{i_o}; S_{i_o}, \xi)$ sera donc solution primitive associée. Soit Y l'ensemble des réels y tels que $S_{i_o}(y-\mu_1, 1, v)$ ait une racine non nulle $r(y)$ d'argument strictement compris entre $\pi/(n+1)$ et $5\pi/(n+1)$. Y est non vide (il contient μ_{i_o}) et est ouvert. Montrons que Y est fermé. Soit y_o adhérant à Y et v_o une racine de $S_{i_o}(y_o-\mu_1, 1, v)$ adhérant à tous les ensembles $r(Y \cap]y_o-\epsilon, y_o+\epsilon[)$.
Pour y dans Y, $S_{i_o}(y-\mu_1, 1, v)$ est divisible par $(v-r(y))(v-r(\overline{y}))$. Comme $P(t_o, 1) + (b+c\,v)\,R(1,v)$ n'est pas divisible par v^2 (car $b \neq -c$ cf.V;3.5) la racine v_o est non nulle. Pour conclure il suffit de montrer que pour $\ell = o,2$, σ réel et $b \neq -c$: $\sigma + (b+c\,v)\,R(1,v)$ n'a pas de racine non nulle d'argument $(2\ell+1)\pi/n+1)$: c'est justement le lemme (V;3.5). ∎

§4. Les conditions arithmétiques

Soit $(\mathcal{E}_i; a, b_i, c, k, \mathcal{S}, \mu, \xi)$ une solution primitive associée de $(\mathcal{E}_i; a, b, c, k, \mathcal{S}, \mu)$. Si les conditions arithmétiques

$A(c, b_i, \xi, S_i, n)$: $\{\xi^{n+1-t} - 1 \neq o$, $1 \leqslant t \leqslant n$ sont vérifiées,

alors d'après (V;1.2) : $P_i(T,U) = T^{n+1}$.

On étudie dans ce qui suit à quelles conditions, portant sur c et b_i les relations $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées.

V- **4.1** : LEMME : Si pour tout r, $2<r\leqslant n$, on note q_r le reste de la division de n par r et si $\Phi_r(X)$ ne divise pas $c\,X^{q_r+2} + b_i\,X^{q_r+1} - b_i X - c$ (où Φ_r désigne le r-ième polynôme cyclotomique) alors les conditions $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées.

Démonstration : Supposons que l'on ait $\xi^{n+1-t} = 1$ pour un certain t, $1 \leqslant t \leqslant n$, alors ξ

est une racine primitive r-ième de l'unité pour un certain r tel que r divise n+1-t. Remarquons que $r>2$ car $\xi \neq \pm 1$ par hypothèse. Soit : $n = xr + q_r$, $o \leqslant q_r < r \leqslant n$. On a : $\xi^n + \ldots + \xi = \xi^{q_r} + \ldots + \xi$ et de : $c\xi^{n+1} + (c+b_i)(\xi^n + \ldots + \xi) + c = o$ il vient :

$c\xi^{q_r+1} + (c+b_i)(\xi^{q_r} + \ldots + \xi) + c = o.$

En multipliant par $\xi - 1$: $c\xi^{q_r+2} + b_i\xi^{q_r+1} - b_i\xi - c = o$.

Comme Φ_r est le polynôme minimal de ξ sur $\mathbf{Q}$, on a le lemme. ∎

V- <u>4.2</u> : <u>Remarque</u> : Si $c \neq b_i$ et $c\,b_i \neq o$ alors Φ_r ne divise pas $cX^t + b_iX^{t-1} - b_iX - c$ pour $t = 2, r, r+1$. Donc si pour tout r, $2 < r \leqslant n$, Φ_r ne divise pas $cX^q + b_iX^{q-1} - b_iX - c$, $2 < q < r$, alors $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ est vérifiée.

V- <u>4.3</u> : Pour démontrer le lemme suivant nous avons besoin de quelques résultats de la théorie des corps cyclotomiques que nous rappelons ci-dessous (cf. [Lang] pour plus de détails). Soit $\theta := \exp(2i\pi/r)$ une racine primitive r-ième de l'unité. Le groupe de Galois, $\mathcal{G}(\theta)$, de l'extension $\mathbf{Q}(\theta)$ de $\mathbf{Q}$ s'identifie à $(\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^*$: à x avec $x<r$, $(x,r)=1$ on fait correspondre σ dans $\mathcal{G}(\theta)$ entièrement déterminé par $\sigma(\theta) = \exp(2i\pi x/r)$. Ainsi $\mathcal{G}(\theta)$ permute les racines de Φ_r. On définit la norme, N , de $\mathbf{Q}(\theta)$ par rapport à $\mathbf{Q}$: $\forall x \in \mathbf{Q}(\theta) : N(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(r)} \sigma_i(x)$ où les σ_i sont les éléments de $\mathbf{Q}(\theta)$. La norme est multiplicative : $\forall x \in \mathbf{Q}(\theta)$, $\forall y \in \mathbf{Q}(\theta)$, $N(xy) = N(x) \cdot N(y)$.

Si $a \in \mathbf{Q}$: $N(a) = a^{\varphi(r)}$ (car $\mathcal{G}(\theta)$ laisse $\mathbf{Q}$ fixe). Si r_1 divise r et si ψ est une racine primitive r_1-ième de l'unité on a les inclusions :

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\psi) \subset \mathbf{Q}(\theta)$ et pour tout x dans $\mathbf{Q}(\psi)$ on a : $N(x) = N'(x)^{[\mathbf{Q}(\theta):\mathbf{Q}(\psi)]}$

où N' désigne la norme de $\mathbf{Q}(\psi)$ par rapport à $\mathbf{Q}$.

Comme : $[\mathbf{Q}(\theta):\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\theta):\mathbf{Q}(\psi)][\mathbf{Q}(\psi):\mathbf{Q}]$ il vient : $N(x) = N'(x)^{\varphi(r)/\varphi(r_1)}$.

V- <u>4.4</u> : LEMME : Si $r > 12$ et si $c\,b \neq o$ et $c \neq \pm b$ alors Φ_r ne divise pas $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, $2 < q < r$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer c et b premiers entre eux. Nous allons montrer que si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, avec $r > 12$, alors $c = \pm 1$ et $b = \pm 1$.

On pose $\theta = e^{2i\pi/r}$. Si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$ alors $c(\theta^q - 1) = -b\,\theta\,(\theta^{q-2} - 1)$ (★)

Soient $d = (r, q-2)$, $r_1 d = r$, $\psi := \theta^{q-2}$. Il est clair que ψ est une racine primitive r_1-ième de l'unité. On note N la norme de $\mathbf{Q}(\theta)$ par rapport à $\mathbf{Q}$ et N' celle de $\mathbf{Q}(\psi)$ par rapport à $\mathbf{Q}$. En prenant les normes dans (★) il vient :

$c^{\varphi(r)}$ divise $(-b)^{\varphi(r)} N(\theta) \cdot N(\psi - 1)$, or $(b,c) = 1$ et $N(\theta)$ vaut ± 1 donc $c^{\varphi(r)}$ divise $N(\psi - 1)$.

Comme $\psi-1$ appartient à $\mathbf{Q}(\psi)$, on a : $N(\psi-1)=N'(\psi-1)^{\varphi(r)/\varphi(r_1)}$. De $X^{r_1-1}+\dots+1=\prod_{\substack{s|r_1\\ s>1}}\Phi_s(X)$ il vient en posant $X=1$: $\quad r_1=\Big(\prod_{\substack{s|r_1\\ 1<s<r_1}}\Phi_s(1)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{\varphi(r_1)}(1-\omega_i)\Big)$

où les ω_i, $1\leqslant i\leqslant\varphi(r_1)$, sont les racines primitives r_1-ièmes de l'unité.

D'autre part : $N'(\psi-1)=\prod_{\sigma\in\mathcal{G}(\psi)}(\sigma(\psi)-1)=\prod_{i=1}^{\varphi(r_1)}(\omega_i-1)$ car quand σ parcourt $\mathcal{G}(\psi)$,

$\sigma(\psi)$ parcourt les racines primitives r_1-ièmes de l'unité. Ceci montre que $N'(\psi-1)$ divise r_1. De ce qui précède on déduit : $c^{\varphi(r_1)}$ divise r_1 **(**)**.

Si c est différent de 1 et -1 il existe un nombre premier p qui divise c et r_1. Soient f et γ les plus grandes puissances de p qui divisent c et r_1. On pose $r_1=p^\gamma m$. De **(**)** il vient : $f\cdot p^{\gamma-1}(p-1)\varphi(m)\leqslant\gamma$. Ceci implique $f=1$, $p=2$, $m=1$ et $\gamma=1$ ou 2. En effet :

si $f\geqslant 2$ alors $f p^{\gamma-1}\geqslant 2^\gamma>\gamma$; si $p>2$: $p^{\gamma-1}(p-1)\geqslant 2^\gamma>\gamma$; si $m\geqslant 2$, $\varphi(m)\geqslant 2$ et $p^{\gamma-1}\varphi(m)\geqslant 2^\gamma>\gamma$.

Finalement pour $f=1$, $p=2$, $m=1$ on a : $2^{\gamma-1}\leqslant\gamma$ c'est-à-dire $\gamma=1$ ou 2.

Soit maintenant $q-2=\ell d$, de $q-2<r$ et $r=r_1\cdot d$ il vient $\ell<r_1$.
De ce qui précède : $r_1=2$ ou 4 et donc : $q-2=\epsilon\frac{r}{4}$ avec $o\leqslant\epsilon\leqslant 3$.
Ainsi θ^{q-2} ne peut prendre que les valeurs ± 1 et $\pm i$.
De **(*)** on déduit que θ satisfait à une équation de degré au plus quatre à coefficients dans $\mathbf{Z}$, ceci n'est possible que si $\varphi(r)\leqslant 4$, c'est-à-dire $r\leqslant 12$. Ceci montre que sous nos hypothèses c vaut 1 ou -1. De la même manière en posant : $d'=(r,q)$, $r_2 d'=r$, $\xi:=\theta^q$ avec ξ racine primitive r_2-ième de l'unité on montre que b vaut 1 ou -1. ∎

V- <u>4.5</u> : LEMME ; Soit $P_q(X):=c\,X^q+b\,X^{q-1}-b\,X-c$, $2<q<r$, $r>2$, et $\chi:=e^{2i\pi k/r}$. On suppose $cb\neq o$, $c\neq\pm b$ et $(k,r)=1$. Alors $P_q(\chi)=o$ implique : $\dfrac{\operatorname{tg}(q-1)\theta}{\operatorname{tg}\theta}=\dfrac{b-c}{b+c}$ où $\theta:=k\pi/r$.

<u>Démonstration</u> : De $\chi^{-q/2}P_q(\chi)=o$ il vient : $-c\chi^{q/2}-b\chi^{q/2-1}=-c\chi^{-q/2}-b\chi^{-q/2-1}$, donc $-c\chi^{q/2}-b\chi^{q/2-1}$ est réel ($|\chi|=1$); ceci implique : $c\sin q\theta+b\sin(q-2)\theta=o$. Remarquons que d'après nos hypothèses $\sin(q-2)\theta\neq o$ (dans le cas contraire on aurait aussi $\sin q\theta=o$ d'où $(q-2)k=r\ell$, $qk=rm$ et $r(m-\ell)=2k$ c'est-à-dire r divise 2 ce qui est absurde). On a donc : $\dfrac{\sin q\theta}{\sin(q-2)\theta}=-\dfrac{b}{c}$. On pose $t:=q-1$. En développant, il vient :

$$-b/c=\big(1+(\operatorname{tg}t\theta/\operatorname{tg}\theta)\big)\cdot\big(-1+(\operatorname{tg}t\theta/\operatorname{tg}\theta)\big)^{-1}$$

Remarquons que $\cos\theta\cos t\theta\neq o$ car $b\neq\pm c$. En appliquant la transformation $f(t)=\dfrac{-1-t}{1-t}$ on a le résultat annoncé. ∎

V- 4.6 : LEMME : Si r est impair, supérieur ou égal à 5, et si $cb \neq o$, $c \neq \pm b$ alors Φ_r ne divise pas $cX^q + bX^{q-1} - bX - c \quad 2 < q < r$.

Démonstration : Si Φ_r divise $cX^q + bX^{q-1} - bX - c$, en appliquant (V;4.5) avec $k=1$ et $k=2$ il vient :

$$\operatorname{tg}(q-1)\frac{\pi}{r} = \operatorname{tg}(q-1)\frac{2\pi}{r} \ / \ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{r}\,(=(b-c)/(b+c))$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\, 2(q-1)\frac{\pi}{r} \ / \ \operatorname{tg}(q-1)\frac{\pi}{r} = \operatorname{tg}\, 2\frac{\pi}{r} \ / \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{r}\ .$$

En particulier $f(x) = \operatorname{tg} 2x/\operatorname{tg} x$ prend deux fois la même valeur pour $x' = \pi/r$ et $x'' = (q-1)\pi/r$ avec $o < x' < \pi/4$ et $o < x'' < \pi$. Ceci montre que $x' = x''$ ou $x' + x'' = \pi$, c'est-à-dire $q=2$ ou $q=r$ d'où le lemme.■

V- 4.7 : PROPOSITION : Soit $n = p-1$ où p est un nombre premier supérieur ou égal à 7 Soit $(\&_i, a, b_i, c, k, S, \mu, \xi)$ une solution primitive associée de $(\&; a, b, c, k, S, \mu)$. Si $cb_i \neq o$ et $c \neq \pm b_i$ alors les conditions arithmétiques $A(c, b_i, \xi, S_i, n)$ sont vérifiées et (cf.V;1.2).

La relation $(\&_i)$ est de la forme :

$$T^{n+1} + (c-b_i)U^{n+1} + (aT + b_iU + cV)\,R(U,V) = \prod_{j=1}^{k} S_j\big(T+(\mu_j-\mu_i)U, U, V\big)$$

Démonstration : D'après (V;4.4) et (V;4.6) il reste à montrer que pour r appartenant à $\{3,4,6,8,10,12\}$, Φ_r ne divise pas $cX^{q_r+2} + bX^{q_r+1} - bX - c$ où q_r est le reste de la division de $n = p-1$ par r avec $p \geq 7$. Ceci se vérifie facilement en utilisant la démonstration de (V;4.4) et en remarquant que q_r ne peut prendre que certaines valeurs: par exemple q_6 ne peut prendre que les valeurs o et 4 ; pour les autres on aurait $p-1 = 6x + q_6$ et si $q_6 = 1,2,3,5$ alors 2 divise p ou 3 divise p. ■

V- 4.8 : Remarque : Le cas où c est nul dans la relation $(\&)$ est traité en (III;3.4). Si $c - b_i = o$ alors $x_i = o$ (cf.III;1.2) et dans l'hypothèse où $n = p-1$, ce cas est traité en (V;§2). Ainsi les seuls cas "*pathologiques*" sont $b_i = o$, $c + b_i = o$: il font l'objet du paragraphe suivant. Le cas de (V;4.7) est réglé au paragraphe 6.

§5. Les cas pathologiques $b_i = o$, $c + b_i = o$

V- 5.1 : **Cas où b_i est nul**

Les hypothèses sont celles du §3 : $n = p-1$, c est non nul et pour tout j,

$1 \leq j \leq k$, x_j est non nul. On suppose que $(\&_i ; a , b_i = o , c , k , S , \mu , \xi)$ est une solution primitive associée de $(\&)$.

V- 5.1.1 : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (V;5.1) s'il existe ℓ, $1 \leq \ell \leq k$, tel que $b_\ell = o$ alors on a $k=1$ dans la relation $(\&)$ correspondante.

Démonstration : De $b_i = b_\ell$ il vient $a = o$ $(b_i = -a\mu_i + b)$ et $b = o$ (car $b_i = o$) ainsi pour tout j, $1 \leq j \leq k$, $x_j = c$ et $(\&_j)_o$ est de la forme : $c(v^{n+1} + \ldots + 1) = \prod_{m=1}^{k} S_m(\mu_m - \mu_j , 1 , v)$.
Soient $P(t,1) := t^{n+1} + c_1 t^n + \ldots + c_n t + x$ et $Q_t(v) = P(t,1) + c\,v\,R(1,v)$.

On a : v^2 ne divise jamais $Q_t(v)$ et en considérant $(v-1) \cdot Q_t(v)$ on voit que $Q_t(v)$ n'a jamais de racines complexes non nulles d'argument $(2k+1)\pi/(n+2)$.
$(\&_1)_o$ s'écrit : $c(v^{n+1} + \ldots + 1) = \prod_{m=1}^{k} S_m(\mu_m - \mu_1 , 1 , v)$, il existe donc j, $1 \leq j \leq k$, tel que $S_j(\mu_j - \mu_1 , 1 , e^{2i\pi/(n+2)}) = o$.
En considérant l'ensemble des réels y tels que $S_j(y - \mu_1 , 1 , v)$ ait une racine non nulle d'argument strictement compris entre $\pi/(n+2)$ et $3\pi/(n+2)$ on montre, comme en (V;3.6) que $S_j(0,1,e^{2i\pi/(n+2)}) = o$. Ainsi $(\&_j ; S_j , \zeta = e^{2i\pi/(n+2)})$ est une solution primitive associée de $(\&)$ vérifiant $A(c, b_j , \zeta , S_j , n)$ (car $\zeta^{n+1-s} - 1 \neq o$, $1 \leq s \leq n$) dès lors la relation $(\&_j)$ est de la forme (cf.V;1.2) :

$$T^{n+1} + c\,R_{n+1}(U,V) = \prod_{m=1}^{k} S_m(T + (\mu_m - \mu_j)\,U, U, V).$$

Pour conclure il suffit de montrer que le polynôme : $T^{n+1} + c\,R_{n+1}(U,V)$ est irréductible. Or ceci est une conséquence du critère d'Eisenstein car le polynôme irréductible : $\Phi(U,V) = V - U \exp(2i\pi/(n+2))$ divise $c\,R_{n+1}(U,V)$ mais Φ^2 ne divise pas R_{n+1}. ∎

V- 5.1.2 : PROPOSITION : Sous les hypothèse de (V;5.1) et si pour tout j différent de i, $1 \leq j \leq k$, b_j est non nul alors :
ou il existe une autre solution primitive associée $(\&_\ell ; a , b_\ell , c , S_\ell , \xi')$ avec $b_\ell \neq o$ ou la relation $(\&_i)$ s'écrit :
ou la relation $(\&_i)$ s'écrit :

$$T^{n+1} + a\,T\,R(U,V) + c\,R_{n+1}(U,V) = \prod_{m=1}^{k} S_m(T\ (\mu_m - \mu_i)\,U, U, V)$$

Démonstration : S'il existe $r_j \geq 4$ avec $j \neq i$ c'est clair (cf.V;3.2).
On suppose donc $r_j \leq 3$ pour $j \neq i$. $(\&_i)_o$ s'écrit :

$$c(v^{n+1} + \ldots + 1) = \prod_{m=1}^{k} S_m(\mu_m - \mu_i , 1 , v).$$

Soit ζ une racine primitive (n+2)-ième de l'unité, alors $S_i(0,1,\zeta) = o$. En effet pour $n \geq 7$, $\varphi(n+2)$ vaut au moins quatre, le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$ est donc de

degré au moins quatre et on ne peut avoir : $S_m(\mu_m-\mu_i,1,\zeta)=o$ si $m\neq i$.
Ainsi ($\&_i$, a, $b_i=0$, c, S_i,ζ) est une solution primitive associée qui vérifie $A(a,b,c,S,k,\mu)$ et d'après (V;1.2) on a le résultat. ■

V- 5.1.3 : Remarque : En (V;6) on montre que si ($\&_i$) est donnée par :
$$T^{n+1}+a\,T\,R(U,V)+c\,R_{n+1}(U,V)=\prod_{m=1}^{k}S_m\big(T+(\mu_m-\mu_i)U,U,V\big) \quad \text{avec } c\neq o,$$
alors $k=1$.

V- 5.2 : **Cas où $c+b_i$ est nul**

Les hypothèses sont identiques à celles de (V;5.1) si ce n'est que pour la solution primitive associée ($\&_i$; S_i, ξ) on a : $c+b_i=o$.

V- 5.2.1 : PROPOSITION : Sous les hypothèses de (V;5.2) on a $k\leqslant 2$ dans la relation ($\&$) correspondante. De plus si $k=2$ alors $r_1=1$ (ou $r_2=2$).

Démonstration : La relation $(\&_i)_o$ s'écrit : $c(v^{n+1}+1)=\prod_{j=1}^{k}S_j(\mu_j-\mu_i,1,v)$.
Or $n=p-1$ donc $v^{n+1}+1=v^p+1$ ce qui est encore égal à $(v+1)\left(\sum_{i=o}^{p-1}(-1)^i v^i\right)$ c'est-à-dire $(v+1)\,\Phi_p(-v)$ ou, si l'on préfère : $(v+1)\,\Phi_{2p}(v)$. Par irréductibilité on a le résultat. ■

V- 5.2.2 : Remarque : Si $k=2$ et $r_1=1$ (ou $r_2=1$) on sait que les fibrés correspondants sont (à isomorphisme près) :
$$\bigoplus_{i=1}^{2} r_i\cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_i)\quad,\quad T_{\mathbf{P}^n}(-2+\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_2)\quad,\quad \Omega^1_{\mathbf{P}^n}(2+\mu_2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_1)\quad \text{(cf. IV;§2).}$$

§6. Fin de la démonstration du théorème III'

Pour achever la démontration du théorème III' il suffit de prouver :

V- 6. : PROPOSITION : Soient $n=p-1$ et la relation :
$$(\star):\quad T^{n+1}+a\,T\,R(U,V)+c(V^{n+1}+U^{n+1})+(c+b_{i_o})(U^nV+\dots+UV^n)=\prod_{i=1}^{k}S_i\big(T+(\mu_i-\mu_{i_o})U,U,V\big).$$

Si $c=o$, on fait l'hypothèse supplémentaire : $b_{i_o}\neq o$ et v divise $S_{i_o}(0,1,v)$.

Alors, sous ces conditions : $k=1$.

L'hypothèse supplémentaire pour le cas $c=o$ est motivée par (III;2.3) et (III;3.4).

La démonstration de cette proposition fait l'objet de tout ce paragraphe.

V- 6.1 : $k \leqslant 4$

Pour simplifier les notations posons $b := b_{i_o}$ et $\alpha_i := \mu_i - \mu_{i_o}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $\alpha_{i_o} = o$ et les α_i sont consécutifs (car les μ_i le sont).

Soit ($\&$) :

$$T^{n+1} + a\,T\,R(U,V) + c\,(V^{n+1} + U^{n+1}) + (c+b)\,(U^n V + \ldots + U V^n) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \alpha_i U, U, V)$$

En remplaçant T par $T - \alpha_\ell U$ on obtient la relation ($\&_\ell$) :

$$T^{n+1} + \ldots + (-1)^n (n+1)\,\alpha_\ell^n\, T U^n + U^{n+1}\,[(-1)^{n+1} \alpha_\ell^{n+1} + c - b] + [a\,T + (-a_{\alpha_\ell} + b)\,U + c\,V] =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} S_i(T + (\alpha_i - \alpha_\ell)U, U, V).$$

Comme d'habitude on pose : $b_\ell := -a\alpha_\ell + b$ et $x_\ell := -\alpha_\ell^{n+1} + c - b$ ($n = p-1$ est pair).

D'après (III;1.2) on a deux possibilités :

1. $x_\ell = o$, 2. $x_\ell = c - b_\ell$, c'est-à-dire 1. $\alpha_\ell^{n+1} = c - b$, 2. $\alpha_\ell^n = -a$.

Si k est supérieur ou égal à cinq il est clair que la condition 1. ou 2. ne peut être satisfaite pour tous les α_ℓ (prendre $\alpha_\ell = \pm 1, \pm 2$).

Nous sommes donc ramenés à étudier :

$$(\&) \quad T^{n+1} + a\,T\,R(U,V) + c\,(U^{n+1} + V^{n+1}) + (c+b)\,(U^n V + \ldots + U V^n) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \alpha_i U, U, V)$$

avec : $\alpha_{i_o} = o$, $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant 4$, et la condition : si $c \neq o$ alors $b \neq o$ et v divise $S_{i_o}(0;1,v)$.

Remarquons que le coefficient de $T^n U$, c_1, étant nul dans ($\&$) on a la relation : $\sum_{i=1}^{k} r_i \alpha_i = o$, en particulier $k \neq 2$. Par la suite on suppose $3 \leqslant k \leqslant 4$ et on distingue deux cas selon que : 1) $x_{i_o-1} = o$ $(1 = b-c)$ ou 2) $x_{i_o-1} = c - b_{i_o-1}$ $(1 = -a)$.

V- 6.2 **Cas où** $x_{i_o-1} = o$ $(1 = b - c)$

Pour la relation ($\&_{i_o+1}$) on a :

i) $x_{i_o+1} = o$ ou ii) $x_{i_o+1} = c - b_{i_o+1}$.

D'après l'hypothèse on voit que : $1 = b-c$ et $a = -1$.

$(\&_{i_o-1})_o$ s'écrit : $c\,(v+1) \cdot R(1,v) = \prod_{i=1}^{k} S_i(\alpha_i - \alpha_{i_o-1}, 1, v)$ (car $b_{i_o-1} = b-1 = c$). Par irréductibilité de R(1,v) il vient $c = o$ et donc : $b = 1$ et $a = -1$. ($\&$) s'écrit :

$$T^{n+1} - T\,R(U,V) + U\,R(U,V) - U^{n+1} = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \alpha_i U, U, V).$$

Le membre de gauche s'écrit aussi :

$$(T-U)\,[R(T,U) - R(U,V)] = (T-U)\,(T-V)\,\Sigma_{n-1}(T,U,V)$$

où $\Sigma_{n-1}(T,U,V)$ désigne le polynôme (irréductible: cf. [E-H-S]) $\sum_{s+t+u=n-1} T^s U^t V^u$.

Ceci montre que $S_{i_o}(T,U,V)=\Sigma_{n-1}(T,U,V)$ ce qui contredit l'hypothèse : v divise $S_{i_o}(0,1,v)$.

V- 6.3 : **Cas où** $x_{i_o-1}=c-b_{i_o-1}$ $(a=-1)$ **et** $r_{i_o-1}\geqslant 4$.

La relation $(\&_{i_o-1})_o$ s'écrit :

$$c\,v^{n+1}+(c+b_{i_o-1})(v^n+\dots+v)+c=\prod_{i=1}^{k} S_i(\alpha_i-\alpha_{i_o-1},1,v)$$

avec $b_{i_o-1}=b-1$.

V- 6.3.1 : c est nul

Si c est non nul, comme $r_{i_o-1}\geqslant 4$, il existe ξ racine de $S_{i_o-1}(0,1,v)$ telle que $(\&_{i_o-1};S_{i_o-1},\xi)$ soit une solution primitive associée de $(\&)$ (cf.V;3.2). Soit $P_{i_o-1}(T,U)=T^{n+1}+c_1UT^n+\dots+c_nU^nT$. D'après (V;1.1) si $\xi^n-1\neq o$ on a $c_n=o$. Mais $P_{i_o-1}(T,U)=(T+U)^{n+1}-U^{n+1}$ et c_n est manifestement non nul, donc $\xi^n=1$. De $c\,\xi^{n+1}+(c+b_{i_o-1})(\xi^n+\dots+\xi)+c=o$ il vient $c(\xi+1)=o$ d'où $c=o$ ($\xi\neq\pm1$ par définition des solutions primitives associées).

V- 6.3.2 : c étant nul $(\&_{i_o-1})_o$ devient :

$$b_{i_o-1}v(v^{n-1}+\dots+1)=\prod_{i=1}^{k} S_i(\alpha_i-\alpha_{i_o-1},1,v).$$

Remarquons que $b_{i_o-1}=o$ est équivalent à $b=1$, comme par hypothèse $a=-1$, ce cas se traite comme (V;6.2). Par la suite on suppose donc $b_{i_o-1}\neq o$. Soit ζ une racine n-ième de l'unité telle que $(\&_{i_o-1};S_{i_o-1},\zeta)$ soit solution primitive associée de $(\&)$.

On considère $v(\lambda)$ la solution holomorphe de $S_{i_o-1}(\lambda(1+v(\lambda)),1,v(\lambda))=o$ avec $v(o)=\zeta$. L'existence est assurée par le théorème des fonctions implicites car ζ est racine simple de $S_{i_o-1}(0,1,v)$.

Par symétrie $v(\lambda)$ vérifie le système :

$$(\mathscr{S})\quad\begin{cases}P_{i_o-1}(\lambda(1+v(\lambda)),1)-\lambda(1+v(\lambda))R(1,v(\lambda))+b_{i_o-1}R(1,v(\lambda))-b_{i_o-1}=o\\ P_{i_o-1}(\lambda(1+v(\lambda)),v(\lambda))-\lambda(1+v(\lambda))R(1,v(\lambda))+b_{i_o-1}v(\lambda)\cdot R(1,v(\lambda))-b_{i_o-1}v(\lambda)^{n+1}=o\end{cases}$$

Avec : $P_{i_o-1}(T,U):=(T+U)^{n+1}-U^{n+1}$.

En utilisant les relations : $R(1,\zeta)=1$, $R'(1,\zeta)=n/(\zeta-1)$ (qui s'obtient à partir de $x^{n+1}-1=(x-1)R(1,x)$ et en dérivant la première équation de $(\mathscr{S})$ en $\lambda=o$ on a :

$$v'(o)=(1-\zeta^2)/b_{i_o-1}.$$

En dérivant deux fois $(\mathscr{S})$ on obtient le système :

$$(\mathscr{S}'')_o \begin{cases} 2c_{n-1}(1+\zeta)^2 + v''(o)\, b_{i_o-1} R'(1,\zeta) + v'(o)[2c_n - 2R(1,\zeta) - 2(1+\zeta)R'(1,\zeta)] \\ \qquad + v'(o)^2[b_{i_o-1} R''(1,\zeta)] = o \\ 2c_{n-1}\zeta^{n-1}(1+\zeta)^2 + v''(o)\,[b_{i_o-1} R(1,\zeta) + b_{i_o-1}\zeta R'(1,\zeta) - (n+1)\, b_{i_o-1}] \\ \qquad + v'(o)[2n\zeta^{n-1} c_n(1+\zeta) + 2c_n\zeta^n - 2R(1,\zeta) - 2(1+\zeta) R'(1,\zeta)] \\ \qquad + v'(o)^2\,[2b_{i_o-1} R'(1,\zeta) + b_{i_o-1}\zeta R''(1,\zeta) - (n+1)n\, b_{i_o-1}\zeta^{n-1}] = o\,. \end{cases}$$

On sait que $c_{n-1} = (n+1)n/2$ et $c_n = n+1$. En utilisant les relations précédentes : $R(1,\zeta) = 1$, $R'(1,\zeta) = n/(\zeta - 1)$ et en remarquant l'identité : $R''(1,x)(1-x) + n(n+1)x^{n-1} - 2R'(1,x) \equiv o$, par différence dans $(\mathscr{S}'')_o$ il vient :

$$n(n+1)(1+\zeta)^2(1-\zeta^{n-1}) + v'(o)[-2n(n+1)\zeta^{n-1}(1+\zeta)] = o\,.$$

En remplaçant $v'(o)$ par $(1-\zeta^2)/b_{i_o-1}$:

$$b_{i_o-1} = \frac{(1-\zeta^2)\; 2\zeta^{n-1}(1+\zeta)}{(1+\zeta)^2\;(1-\zeta^{n-1})}$$

c'est-à-dire : $b_{i_o-1} = -2$ ce qui implique $b = -1$ (V;6.3) et la relation (&) s'écrit:

$$T^{n+1} - T\,R(U,V) + U^{n+1} - U\,R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \alpha_i U, U, V)\,.$$

Le membre de gauche s'écrit aussi : $(T+U)[R(T,-U) - R(U,V)] = (T+U)(T+V)\,\Sigma_{n-1}(T,-U,-V)$.
On déduit : $S_{i_o}(T,U,V) = \Sigma_{n-1}(T,-U,-V)$ ce qui contredit encore une fois l'hypothèse : v divise $S_{i_o}(0,1,V)$.

V- 6.4 : **Cas où** $x_{i_o-1} = c - b_{i_o-1}$ $(a=-1)$ **et** $r_{i_o-1} \leqslant 3$

Faisons d'abord une remarque d'ordre général :

- Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage $(k\,;\, r_1, \dots, r_k\,;\, \alpha_1, \dots, \alpha_{i_o} = 0, \dots, \alpha_k)$ tel que la relation (&) qui lui est associée s'écrive :

$$T^{n+1} + a\,T\,R(U,V) + c\,(V^{n+1} + U^{n+1}) + (c+b)\,(U^n V + \dots + U V^n) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \alpha_i U, U, V)\,.$$

On a donc : $c_i(E) = o$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ce qui implique $c_i(E^\vee) = o$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $E^\vee$ désignant le dual de E. $E^\vee$ est de type de scindage : $(k\,;\, r_k, \dots, r_1\,;\, -\alpha_k, \dots, -\alpha_{i_o} = 0, \dots, -\alpha_1)$ et la relation (&) qui lui est associée est de la forme :

$$T^{n+1} + a'\,T\,R(U,V) + x\,U^{n+1} + (c'\,V + b'\,U)\,R(U,V) = \prod S'_i(T - \alpha_i U, U, V)$$

avec $x = o$ ou $x = c' - b'$ (car $-\alpha_{i_o} = o$, cf.III;1.2).

V- 6.4.1 : $r_{i_o-1} = 3$

De $\Sigma r_i \alpha_i = o$ il vient : $r_{i_o+1} - 3 + \epsilon\, 2r_j = o$ avec : $\epsilon = o$ si $k = 3$, $\epsilon = 1$ si $j = i_o + 2$

et $\epsilon=-1$ si $j=i_o-2$. On en déduit les types de scindages possibles : $(k=3\,;\ r_{i_o+1}=3\,,\ r_{i_o}\,,\ r_{i_o-1}=3)$, $k=4\,;\ r_{i_o+2}=1\,,\ r_{i_o+1}=1\,,\ r_{i_o-1}=3)$, $k=4$ et $r_{i_o+1}\geqslant 5$.

Par dualité le dernier cas se ramène à (V;6.2 ou V;6.3).

Pour les deux autres, on remarque que r_{i_o+1} et r_{i_o-1} étant tous les deux impairs, d'après (V;3.1), c est nul. La relation $(\&)_o$ devient :

$$b\cdot v(v^{n-1}+\ldots+1)=\prod_{i=1}^{k} S_i(\alpha_i\,,1,v)$$

De plus $S_{i_o\pm1}(\alpha_{i_o\pm1}\,,1,v)$ ont chacun une racine réelle qui est non nulle (car v divise $S_{i_o}(0,1,v)$ par hypothèse). Ceci est absurde.

V- 6.4.2 : $r_{i_o-1}=2$

En raisonnant par dualité à partir de $\Sigma r_i\alpha_i=o$, on voit qu'il suffit de traiter : $(k=3\,,\ r_{i_o+1}=2\,,\ r_{i_o}\,,\ r_{i_o-1}=2)$.

Pour la relation $(\&_{i_o+1})$ on a deux possibilités :

1. $x_{i_o+1}=o$ $(1=c-b)$, 2. $x_{i_o+1}=c-b_{i_o+1}$ $(a=-1)$.

• 1. Sous cette hypothèse $(\&_{i_o+1})_o$ s'écrit :

$$c(v+1)\cdot R(1,v)=\prod S_i(\alpha_i-\alpha_{i_o+1}\,,1,v) \qquad (b_{i_o+1}=1+b=c)$$

Par irréductibilité de $R(1,v)$ il vient $c=o$ et donc $b=-1$: comme en (V;6.3.2), on voit que $S_{i_o}(T,U,V)=\Sigma_{n-1}(T,-U,-V)$ ce qui est une contradiction.

• 2. Si S_{i_o+1} et S_{i_o-1} ne sont pas solutions primitives associées de $(\&)$ alors $\pm\frac{n+2}{n}c=b_{i_o-1}$ et $\pm\frac{n+2}{n}c=b_{i_o+1}$ (cf.V;3.3). Comme $b_{i_o-1}=b-1$ et $b_{i_o+1}=b+1$ avec $b\neq o$, on voit que ceci est impossible. Il existe donc ξ racine de $S_{i_o\pm1}(0,1,v)$ telle que $(\&_{i_o\pm1}\,;\,S_{i_o\pm1}\,,\xi)$ soit une solution primitive associée de $(\&)$. Comme en (V;6.3.1) on montre que c est nul. On peut supposer b_{i_o-1} et b_{i_o+1} non nuls (les cas $a=-1$ et $b=1$ ou $b=-1$ sont traités en (V;6.2 et V;6.3.2)).

Si $S_{i_o\pm1}$ désigne la solution primitive associée alors : $S_{i_o\pm1}(0,1,v)$ divise $v^{n-1}+\ldots+1$ (car -1 n'est pas racine de $S_{i_o\pm1}(0,1,v)$ par définition des solutions primitives associées).

$S_{i_o\pm1}(\pm1,1,v)$ divise $v^{n-1}+\ldots+1$ (car v divise $S_{i_o}(0,1,v)$) et $S_{i_o\pm1}(\pm2,1,v)$ divise $v(v^{n-1}+\ldots+1)$. Or ces trois conditions ne peuvent être réalisées simultanément, cela se voit à partir de la forme explicite de $S_{i_o\pm1}(T,U,V)$ et en utilisant la remarque suivante : si $P(v)$ est un polynôme à coefficients entiers, de degré deux, qui divise $v^{n-1}+\ldots+1$ alors, à une constante près, $P(v)$ vaut $v^2\pm v+1$ ou v^2+1.

CHAPITRE VI

FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR $\mathbb{P}^n$ POUR DE PETITES VALEURS DE n

§0. Introduction

Dans ce chapitre nous démontrons :

THÉORÈME III' : Pour n tel que $3 \leqslant n \leqslant 5$, les fibrés uniformes de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ sont (à isomorphisme près) :

$$T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b) \quad , \quad \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \quad , \quad \underset{i=1}{\oplus} r_i\, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i) .$$

Le plan de la démonstration est le suivant : pour chaque valeur de n nous nous limitons aux fibrés uniformes de type de scindage consécutif. (i.e. : $\mu_i - \mu_{i+1} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$) (cf.III;§2). D'après (I;4.2) et les résultats de (III) on peut écarter certains types de scindage ($k = 1$; $k = n+1$; $k = n$; $k = 2$ $r_1 = 1$ ($r_2 = 2$) ; $k = 3$ $r_1 = r_3 = 1$; $k = 2$ $r_1 = 2$ et n pair). Les types de scindage restant seront dits irréductibles. Maintenant, à chaque cas irréductible on associe sa relation (&) :

$$T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T + x U^{n+1} + (a T + b U + c V)\, R(U,V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \mu_i U, U, V) .$$

Si c est nul nous pouvons utiliser la "*classification*" de (III;2.4). Ainsi la seconde étape consiste à montrer que pour chaque type de scindage irréductible, dans la relation (&) correspondante, "c *est nul*". Une fois ce résultat obtenu, nous sommes ramenés à la situation de (III;2.4) et pour conclure il suffit de prouver les

LEMME (n) : Soit E un fibré uniforme de rang (n+1) sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage irréductible (k ; $r_1 \dots r_k$; $\mu_1 \dots \mu_k$).
Alors il n'existe pas $j_\circ$, $1 \leqslant j_\circ \leqslant k$, tel que la relation ($\&_{j_\circ}$) s'écrive :

$$T^{n+1} + a\, T\, R(U,V) + b_{j_\circ} U\, R(U,V) - b_{j_\circ} U^{n+1} = \prod_{i=1}^{k} S_i\big(T + (\mu_i - \mu_{j_\circ}) U, U, V\big)$$ avec $b_{j_\circ}$ non nul et v divisant $S_{j_\circ}(0,1,v)$.

VI- 0. <u>Remarque</u> : Il suffit de prouver les lemmes lorsque $r_{j_\circ} \geqslant 2$ (car UV divise $S_{j_\circ}(0,U,V)$) et $\sum_{i=1}^{k} r_i(\mu_i - \mu_{j_\circ}) = 0$ (car le coefficient de $U T^n$ est nul dans ($\&_{j_\circ}$)), en particulier $k \neq 2$.

§1. Fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbb{P}^3$

VI - 1.1 : Réduction du problème.

D'après (IV) et par dualité il suffit d'étudier les deux cas irréductibles $k=2$ $r_1=2$ $r_2=2$ et $k=3$ $r_1=1$ $r_2=1$ $r_3=2$.

VI - 1.2 : $k=2$, $r_1=2$, $r_2=2$

Pour étudier la relation ($\&$) on pose :

$S_1(T,U,V)=T^2+TA(U+V)+H(U^2+V^2)+DUV$, $S_2(T,U,V)=T^2+TB(U+V)+F(U^2+V^2)+GUV$.

VI - 1.2.1 : $A=o$ ou $A=-1$

On calcule modulo (U^2+V^2) dans ($\&_1$). On a :

$S_1(T,U,V)\equiv T^2+TA(U+V)+DUV$

$S_2(T-U,U,V)\equiv T^2+TU(B-2)+TV(B)+U^2(1-B)+UV(G-B)$,

où $\equiv$ désigne une égalité modulo (U^2+V^2).

De $S_1(T,U,V)\cdot S_2(T-U,U,V)\equiv T^4+c_1UT^3+c_2U^2T^2+c_3U^3T+x_1U^4$ on déduit, en calculant les coefficients de T^3V, T^2UV, TU^2V et UV^3 :

1) $A+B=o$ 2) $G+D+2AB-2A-B=o$ 3) $AG-2AB+A+D(B-2)=o$ 4) $D(1-B)=o$.

ce que l'on peut réécrire :

2') $G+D=2A^2+A$ 3') $G(A+1)=D(A+1)$ 4') $D(1+A)=o$

d'où le résultat.

VI - 1.2.2 : c est nul

VI - 1.2.2.a : **Cas où A est nul**

En restreignant la filtration $HN^\bullet$ à une fibre de p on voit que $q^*E_1|p^{-1}(x)$ est un sous-fibré de rang deux, de première classe de Chern nulle, du fibré trivial $4\cdot\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$. Ceci montre que $q^*E_1|p^{-1}(x)\cong 2\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$, en particulier $c_2(q^*E_1|p^{-1}(x))=o$, c'est-à-dire $H=o$ (cf.I;2.3). Il est clair que ceci implique $c=o$.

VI - 1.2.2.b : **Cas où A vaut -1**

En restreignant encore $HN^\bullet$ à $p^{-1}(x)$ on a la suite exacte :

$$0\to q^*E_1|p^{-1}(x)\to 4\cdot\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}\to q^*E_2|p^{-1}(x)\to 0$$

En raisonnant comme en (VI;1.2.2a) on voit que $q^*E_1|p^{-1}(x)$ est uniforme et par suite isomorphe soit à $\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}\oplus\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$ soit à $\Omega^1_{p^{-1}(x)}(1)$ ([VdV]) ; la deuxième classe de Chern de ce fibré, c'est-à-dire H, vaut o ou +1. D'autre part, en calculant modulo U, il vient $F+H=1$. Dans tous les cas $FH=o$ ce qui montre que c est nul.

IV - 1.3 :: $k=3\ ,\ r_1=1\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=2$

La relation $(\&_1)_o$ est de la forme :

$$\prod_{i=1}^{3} S_i(\mu_i-\mu_1,1,v)=x+(c\,v+b_1)(v^2+1)(v+1)$$

avec : $S_i(T,U,V)=T+A_i(U+V)\quad ;\quad i=1,2.$

$$S_3(T,U,V)=T^2+T\,B(U+V)+F(U^2+V^2)+D\,U\,V.$$

VI - 1.3.1 : c est nul

Supposons $c\neq o$ alors $(v+1)$ divise le membre de gauche de $(\&_1)_o$ (car $r_1=1$) et donc $x_1=o$. Ceci implique : (v^2+1) divise $S_3(-2,1,v)$ (les μ_i sont consécutifs). De la même manière, en considérant $(\&_2)_o$ il vient : (v^2+1) divise $S_3(-1,1,v)$. Ces deux conditions sont irréalisables simultanément donc c est nul.

VI - 1.4 : Démonstration du lemme (n) pour $n=3$

D'après la remarque (VI;0) on a $k\neq 2$ et pour le type de scindage de (VI;1.3) il est clair que $\sum_{i=1}^{3} r_i(\mu_i-\mu_3)\neq o$. Ceci démontre le théorème III' pour $n=3$. ■

§2. Fibrés uniformes de rang 5 sur $\mathbb{P}^4$

VI - 2.1 : Réduction du problème.

Par (IV) et par dualité on se ramène aux cas irréductibles suivants :

$k=3\ ,\ r_1=1\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=3$

$k=3\ ,\ r_1=1\ ,\ r_2=2\ ,\ r_3=2$

$k=3\ ,\ r_1=2\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=2$.

VI - 2.2 : $k=3\ ,\ r_1=1\ ,\ r_2=1\ ,\ r_3=3$

Pour montrer que c est nul dans la relation $(\&)$ correspondante il suffit d'appliquer (V;3.1).

VI - 2.3 : $k=3\ ,\ r_1=1\ ,\ r_2=2\ ,\ r_3=2$

On pose : $S_1(T,U,V)=T+A(U+V)\quad ,\quad S_2(T,U,V)=T^2+T\,B(U+V)+F(U^2+V^2)+D\,U\,V$

$$S_3(T,U,V)=T^2+T\,M(U+V)+H(U^2+V^2)+G\,U\,V.$$

VI - 2.3.1 : En calculant modulo U, il vient notamment :

1) $A+B+M=o$ 2) $H+F+M(A+B)+AB=o$.

VI - 2.3.2 : c est nul

Soient les égalités $(\&_j)_o$ $(j=2,3)$: $\prod_{i=1}^{3} S_i(\mu_i-\mu_j,1,v)=x_j+(c\,v+b_j)\,R(1,v)$.

Si x_j est nul, $R(1,v)$ étant irréductible on a forcément $c=o$.

Si x_j est non nul le membre de droite de $(\&_j)_o$ s'écrit : $c\,v^5+(c+b_j)(v^4+\ldots+v)+c$ (cf.III;1.2).

En comparant les coefficients de v^5 et de 1 dans $(\&_j)_o$, $j=2,3$; on obtient respectivement :

3) $F(A-M+1+H-AM)=o$ 4) $H(A+2+2B+2F+AB)=o$.

Si $FH=o$ il est clair que $c=o$. Supposons $FH\neq o$. De 1) et 3) on tire : $H=-A^2-2A-B-AB-1$ et 4) donne F en fonction de A et B.

En reportant dans 2) : $B^2+2A^2+2B+\frac{5}{2}A+\frac{5}{2}AB+2=o$, cette conique n'ayant pas de points réels on a une contradiction.

VI - 2.4 : $k=3$, $r_1=2$, $r_2=1$, $r_3=2$

Soient : $S_1(T,U,V)=T^2+TA(U+V)+F(U^2+V^2)+DUV$, $S_2(T,U,V)=T+B(U+V)$,

$S_3(T,U,V)=T^2+TM(U+V)+H(U^2+V^2)+GUV$.

Ce cas se traite par les mêmes arguments que le précédent.

VI - 2.4.1 : La restriction de la filtration $HN^\bullet$ à une fibre de p donne :

1) $A+B+M=o$ avec $A\leqslant o$ (car $\&_1$ est un sous-fibré de $5.\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$).

2) $AB+F+M(A+B)+H=o$.

3) $FB+M(AB+F)+H(A+B)=o$.

VI - 2.4.2 : c est nul

On raisonne comme en (VI;2.3.2). Les relations $(\&_1)_o$, $(\&_3)_o$ fournissent les égalités :

4) $F(-4+2M-H+4B-2MB)=o$.

5) $H(4B+2AB+4+2A+F)=o$.

Si $FH\neq o$ de 4) et 1) il vient : $H=2B^2-2A+2B+2AB-4$

et 5) donne F en fonction de A et B. En reportant dans 2) et 3) :

2') $A^2-B^2+AB+4A+2B+8=o$.

3') $B[2B^2+2B+3AB+4A+3A^2-4]=o$.

Si $B=o$, 2') donne : $A^2+4A+8=o$ ce qui est absurde.

Pour B non nul les solutions de 2') et 3') avec $A\leqslant o$ sont : $(A,B)=(o,-2),(-2,2)$.

Dans le premier cas $H=o$, dans le second $F=o$ (5)), ce qui est contradictoire.

VI - 2.5 : Le lemme (n) pour $n=4$

Encore une fois c'est une conséquence imédiate de la remarque (VI;0). D'où le théorème III' pour $n=4$.

§3. Fibrés uniformes de rang 6 sur $\mathbb{P}^5$

VI - 3.1 : Réduction du problème.

Toujours par (IV) et par dualité on se limite aux cas irréductibles suivants:
$k=2$, $r_1=2$, $r_2=4$; $k=2$, $r_1=3$, $r_2=3$

$k=3$ et il existe i_o, $1\leqslant i_o\leqslant 3$, tel que $r_{i_o}=3$

$k=3$ et il existe i_o, $1\leqslant i_o\leqslant 3$, tel que $r_{i_o}=4$

$k=3$ et pour tout i, $1\leqslant i\leqslant 3$: $r_i=2$

$k=4$ et il existe i_o, $1\leqslant i_o\leqslant 4$, tel que $r_{i_o}=3$

$k=4$ et il existe i_1, i_2, $1\leqslant i_1<i_2\leqslant 4$, tel que $r_{i_1}=r_{i_2}=2$.

VI - 3.2 : $k=2$, $r_1=2$, $r_2=4$

On pose : $S_1(T,U,V)=T^2+TA(U+V)+F(U^2+V^2)+DUV$

$$S_2(T,U,V)=T^4+T^3B(U+V)+T^2P(U^2+V^2)+T^2GUV+TH(U^3+V^3)$$
$$+TR(U^2V+UV^2)+M(V^4+U^4)+N(V^3U+VU^3)+LV^2U^2.$$

VI - 3.2.1 : On a : $F\geqslant o$ et $A\leqslant o$. De plus si A égale o ou -1 alors c est nul.
En restreignant la filtration $HN^\bullet$ à une fibre de p il vient : $0\to \mathcal{E}_1\to 6\cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}$, ce qui montre $A\leqslant o$.
Par dualité : $F\geqslant o$. Car $\mathcal{E}_1^\vee$ est engendré par ses sections globales et $c_2(\mathcal{E}_1)=c_2(\mathcal{E}_1^\vee)$.
Si A vaut o ou -1 alors $\mathcal{E}_1$ est uniforme et isomorphe à $2\cdot\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}$ ou $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ ([VdV]) : sa deuxième classe de Chern, F, est nulle. Ceci implique $c=o$.

VI - 3.2.2 : Si $c\neq o$ alors $D=2F+1$

Supposons $x_2\neq o$ alors $(\mathcal{E}_2)_o$ est de la forme :

$S_1(1,1,v)\cdot S_2(0,1,v)=c\,v^6+(c+b_2)(v^5+\ldots+v)+c.$

En comparant les coefficients de v^6 et de 1, il vient : $(1+A)M=o$, ce qui est exclu par l'hypothèse et (VI;3.2.1). Ceci montre que $x_2=o$ et $(\mathcal{E}_2)_o$ est donnée par :
$S_1(1,1,v)\cdot S_2(0,1,v)=(b_2+c\,v)+(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1)$. Comme $A\neq -1$ (VI;3.2.1), $v^2\pm v+1$ ne divisent pas $S_1(1,1,v)$. Il faut donc que $v+1$ divise $S_1(1,1,v)$: ceci implique $D=2F+1$.

VI - 3.2.3 : c est nul

Si $c \neq o$ alors on a $D = 2F+1$. Si $x_1 = o$, de $(\&_1)_o$ il vient :

$Fv^2+(2F+1)v+F$ divise $(cv+b_1)(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1)$.

Or ceci est impossible ($F \geqslant 0!$). Si $x_1 \neq o$ alors $(\&_1)_o$ s'écrit :

$$\left(Fv^2+(2F+1)v+F\right) \cdot S_2(-1,1,v) = cv^6+(c+b_1)(v^5+\ldots+v)+c\ .$$

Il est clair que $Fv^2+(2F+1)v+F$ a deux racines distinctes, α, β, réelles, différentes de ± 1. Ainsi $(\&_1; S_1, \alpha)$ est solution primitive associée de $(\&)$ (cf.V;§1).

Comme $\alpha^{6-t}-1 \neq o$, $1 \leqslant t \leqslant 5$, $(\&_1)$ s'écrit (cf.V;1.2) :

$$T^6+aTR(U,V)+c(U^6+V^6)+(c+b_1)(U^5V+\ldots+UV^5) = S_1(T,U,V) \cdot S_2(T-U,U,V)\ .$$

Or ceci est absurde car $\sum_{i=1}^{2} r_i(\mu_i-\mu_1)$ est non nul, (cf. par exemple : VI;0)).

VI - 3.3 : $k=2$, $r_1=3$, $r_2=3$

Soit : $S_1(T,U,V) = T^3+T^2A(U+V)+TE(U^2+V^2)+TDUV+H(U^3+V^3)+R(U^2V+UV^2)$

$S_2(T,U,V) = T^3+T^2B(U+V)+TF(U^2+V^2)+TGUV+M(U^3+V^3)+N(U^2V+UV^2)$.

VI - 3.3.1 : $A \leqslant o$ et si $A=o$ ou $A=-1$ alors c est nul.

Même raisonnement qu'au (VI;3.2.1).

VI - 3.3.2 : Les relations suivantes s'obtiennent en calculant modulo U

1) $A+B=o$ 2) $F+E=A^2$ 3) $M+AF-EA+H=o$ 4) $AM+EF-AH=o$.

VI - 3.3.3 : Les relations $(\&_i)_o$, $i=1,2$ sont de la forme :

$$S_1(i-1,1,v) \cdot S_2(i-2,1,v) = x_i+(cv+b_i)(v^2+v+1)(v^2-v+1)(v+1)\ .$$

Comme $(v+1)$ divise $S_i(0,1,v)$ (degré trois) on a forcément $x_i=o$.

VI - 3.3.4 : c est nul

Supposons que (v^2+v+1) divise $S_1(0,1,v)$. Ceci implique déjà $R=2H$.

Si (v^2+v+1) divise $S_1(1,1,v)$ alors $A=-1$ et on conclut avec (VI;3.3.1), on peut donc supposer :

$S_1(1,1,v) = \text{cste}(cv+b_2)(v^2-v+1)$, $S_2(0,1,v) = \text{cste}(v+1)(v^2+v+1)$

$S_1(0,1,v) = \text{cste}(v+1)(v^2+v+1)$, $S_2(-1,1,v) = \text{cste}(cv+b_1)(v^2-v+1)$.

Ceci nous donne les relations : $N=2M$, $1+A=2H$, $M=-H$.

En utilisant (VI;3.3.2) : $E=F$, $2E=A^2$, $8M=-A^3$.

De $-2M=1+A$ et $8M=-A^3$ il vient : $A^3-4A-4=o$, ce qui est impossible.

De la même façon si on suppose que v^2-v+1 divise $S_1(0,1,v)$ on aboutit à : $A^3+4A+4=o$, ce qui est absurde.

VI - 3.4 : k = 3 et il existe i_o , $1 \leq i_o \leq 3$, tel que $r_{i_o} = 3$

On ne traitera que le cas : $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$; les autres s'obtiennent d'une façon analogue. Posons : $S_2(T,U,V) = T^2 + T\,B\,(V+U) + E\,(U^2+V^2) + D\,U\,V$.

VI - 3.4.1 : c est nul

Soit $(\&_1)_o$: $x_1 + (c\,v + b_1)(v^2-v+1)(v^2+v+1)(v+1) = A_1(v+1)\cdot S_2(-1,1,v)\cdot S_3(-2,1,v)$.

On a $x_1 = o$ $(r_1 = 1)$. Si c est non nul, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, l'un des deux polynômes, $v^2 \pm v+1$, divise $S_2(-1,1,v)$. Ceci implique $B = 1$.
Comme $v+1$ divise $S_3(0,1,v)$ $(r_3 = 3)$, on peut tenir le même raisonnement à partir de $(\&_3)_o$. Il vient : v^2+v+1 ou v^2-v+1 divise $S_2(1,1,v)$, ce qui est impossible (il faudrait $B = -1$).

VI - 3.5 : k = 3 et il existe i_o , $1 \leq i_o \leq 3$, tel que $r_{i_o} = 4$

D'après (IV;§4) on peut supposer $i_o = 1$.
Soient :
$S_1(T,U,V) = T^4 + T^3 B\,(U+V) + T^2 E\,(U^2+V^2) + T^2 DUV + TH(U^3+V^3) + TG(V^2U+U^2V) + R\,(V^4+U^4) + M(V^3U+VU^3) + NU^2V^2$.
$S_i(T,U,V) = T + A_i(U+V)$, $i = 2,3$.

VI - 3.5.1 : Les relations suivantes s'obtiennent en calculant modulo U :
1) $B + \sigma = o$ 2) $E + B\sigma + \pi = o$ 3) $H + E\sigma + B\pi = o$ 4) $R + H\sigma + E\pi = o$.
On a posé : $\sigma := A_2 + A_3$, $\pi := A_2 \cdot A_3$.

VI - 3.5.2 : c est nul

Dans les relations $(\&_i)_o$ on a $x_i = o$, $i = 2,3$ $(r_i = 1)$.
Il s'ensuit, si $c \neq o$, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, que :
$S_1(\mu_1 - \mu_i, 1, v) = R\,(v^4 + v^2 + 1)$; $i = 2,3$ $(\star)$.
De $(\star)$ il vient : $(B,H,E) = (-3,o,2)$, ce qui est contradictoire avec (VI;3.5.1).

VI - 3.6 : k = 3 et pour tout i, $1 \leq i \leq 3$, $r_i = 2$

Soients : $S_1(T,U,V) = T^2 + TA\,(U+V) + E\,(U^2+V^2) + D\,U\,V$
$S_2(T,U,V) = T^2 + TB\,(U+V) + F\,(U^2+V^2) + G\,U\,V$
$S_3(T,U,V) = T^2 + TM\,(U+V) + H\,(U^2+V^2) + N\,U\,V$.

VI - 3.6.1 : En calculant modulo U on obtient le système :

$$(\mathcal{S})\quad\begin{cases} A+B+M = o \\ H+M(A+B)+F+AB+E = o \\ H(A+B)+M(F+AB+E)+AF+EB = o \\ H(F+AB+E)+M(AF+EB)+EF = o\ . \end{cases}$$

VI - 3.6.2 : On a : $A\leqslant o$, $E\geqslant o$, $M\geqslant o$, $H\geqslant o$ et si $A\geqslant -1$ ou $M\leqslant 1$ alors $c=o$. (Cf.VI;3.2.1).

VI - 3.6.3 : Cas où $x_2=o$

Sous cette hypothèse $(\mathcal{E}_2)_o$ s'écrit :

$$\prod_{i=1}^{3} S_i(2-i,1,v)=(c\,v+b_2)\,(v^2-v+1)(v^2+v+1)(v+1)\,.$$

Si c est non nul, l'un des deux polynômes, v^2-v+1 , v^2+v+1, divise $S_1(1,1,v)$ ou $S_3(-1,1,v)$. Ceci entraîne $A=-1$ ou $M=1$ et d'après (VI;3.6.2) on a une contradiction. Par la suite on suppose $x_2=c-b_2$ non nul.

VI - 3.6.4 : Cas où S_2 est solution primitive associée ($x_2\neq o$)

Supposons $c\neq o$ et qu'il existe α vérifiant $S_2(0,1,\alpha)=o$ tel que $(\mathcal{E}_2;S_2,\alpha)$ soit solution primitive associée de $(\mathcal{E})$. Si la condition $A(c,b_2,\alpha,S_2,n=5):\alpha^{6-t}-1\neq o$, $1\leqslant t\leqslant 5$, (cf.V;1.2), n'est pas vérifiée alors α est une racine primitive q-ième de l'unité.

Comme $S_2(0,1,\alpha)=o$ on a : $\varphi(q)\leqslant 2$, c'est-à-dire $\varphi(q)=2$ (car $\alpha\neq\pm 1$) et donc $q=3,4,6$. Il est clair que si $\Phi_3(V):=v^2+v+1$ ou $\Phi_6(V):=v^2-v+1$ divise $\psi_{b_2}(v):=c\,v^6+(c+b_2)(v^5+\dots+v)+c$ alors : $c-b_2=o$ et donc $x_2=o$.

De plus si Φ_4 divise ψ_{b_2} on a : $c+b_2=o$ et $(\mathcal{E}_2)_o$ devient :

$\prod_{i=1}^{3} S_i(2-i,1,v)=c(v^6+1)=c(v^2+1)(v^4-v^2+1)$. Mais $\Phi_4(v)=v^2+1$ et v^4-v^2+1 sont irréductibles. Tout ceci montre que si $c\neq o$, la condition : $\alpha^{6-t}-1\neq o$, $1\leqslant t\leqslant 5$, est vérifiée, ainsi, d'après (V;1.2), $(\mathcal{E}_2)$ s'écrit :

$$T^6+a\,T\,R(U,V)+c(V^6+U^6)+(c+b_2)(U^5V+\dots+U\,V^5)=\prod_{i=1}^{3} S_i(T+(2-i)U,U,V)\ .$$

En particulier : $S_1(T+U,U,V)\cdot S_3(T-U,U,V)$ est symétrique en U et V.

On vérifie que ceci implique : $A=M-2$, d'où (cf.VI;3.6.2) $(A,M)=(o,2)$, $(-1,1)$, $(-2,o)$ et dans tous les cas c est nul (cf.VI;3.6.2).

VI - 3.6.5 : Cas où S_2 n'est pas solution primitive ($x_2\neq o$)

Sous cette hypothèse et si $c\neq o$, $S_2(0,1,v)$ a une racine double (cf.III;1.3).

Cette racine ne peut être que 1 ou -1 (cf.V;3.3).

D'autre part si $\psi_{b_2}(-1)=o$ alors $c-b_2=o$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x_2\neq o$.

Finalement si S_2 n'est pas solution primitive associée : $S_2(0,1,1)=o$ et donc $G=-2F$; $b_2=-\frac{7}{5}c$ et $\psi_{b_2}(v)=c(v-1)^2(v^4+\frac{8}{5}v^3+\frac{9}{5}v^2+\frac{8}{5}v+1)$. Mais ceci est absurde car le polynôme $\varphi(v):=v^4+\frac{8}{5}v^3+\frac{9}{5}v^2+\frac{8}{5}v+1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En effet on a la décomposition :

$$5v^4+8v^3+9v^2+8v+5=[5v^2+v(4-\sqrt{21})+5]\left[v^2+v\left(\frac{4+\sqrt{21}}{5}\right)+1\right]$$

(poser $x=v+\frac{1}{v}$).

Ceci achève de prouver que c est nul dans la relation (&) correspondant au type de scindage $k=3$ et $r_i=2$, $1\leqslant i\leqslant 3$.

VI - 3.7 : $k=4$ et il existe i_o, $1\leqslant i_o\leqslant 4$, tel que $r_{i_o}=3$

Pour les trois autres indices i_ℓ, $1\leqslant \ell\leqslant 3$, on a $r_{i_\ell}=1$.

VI - 3.7.1 : c est nul

Soit la relation : $(\&_{i_1})_o : x_{i_1}+(c\,v+b_{i_1})(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1)=\prod_{\ell=o}^{3} S_{i_\ell}(\mu_{i_\ell}-\mu_{i_1},1,v)$.

Comme $r_{i_1}=1$ on a $x_{i_1}=o$. Si c est non nul, le membre de gauche a au plus deux racines réelles, ce qui est absurde.

VI - 3.8 : $k=4$ et il existe i_1, i_2, $1\leqslant i_1<i_2\leqslant 4$, tels que $r_{i_1}=r_{i_2}=2$

On pose : $S_{i_1}(T,U,V)=T^2+TB(U+V)+E(U^2+V^2)+D\,U\,V$.

Remarquons que : $r_{i_3}=r_{i_4}=1$.

VI - 3.8.1 : c est nul

Soit $(\&_{i_3})_o$: $x_{i_3}+(c\,v+b_{i_3})(v+1)(v^2-v+1)(v^2+v+1)=\prod_{j=1}^{4} S_{i_j}(\mu_{i_j}-\mu_{i_3},1,v)$.

Comme $r_{i_3}=1$ on a $x_{i_3}=o$. Si $c\neq o$, pour des raisons de degré et d'irréductibilité, l'un des deux polynômes v^2+v+1, v^2-v+1, divise $S_{i_1}(\mu_{i_1}-\mu_{i_3},1,v)$.

Ceci implique : $\mu_{i_1}-\mu_{i_3}=-B$. De la même manière, à partir de la relation $(\&_{i_4})_o$ on obtient : $\mu_{i_1}-\mu_{i_4}=-B$, ce qui est absurde.

VI - 3.9 : Le lemme (n) pour $n=5$

A partir de : $T^6+a\,T\,R(U,V)+b_{j_o}(U^5V+\ldots+U\,V^5)=\prod_{i=1}^{k} S_i(T+(\mu_i-\mu_{j_o})U,U,V)$

en posant $T=o$ et $U=1$ on obtient :

$$b_{j_o}v\cdot(v^4+\ldots+1)=\prod_{i=1}^{k} S_i(\mu_i-\mu_{j_o},1,v),$$

comme $v^4+\ldots+1$ est irréductible il vient $k\leqslant 2$, ce qui est absurde (cf.VI;0).
Ceci achève la démonstration du théorème III".

Bibliographie

[Ba-Ell] BALLICO, E., ELLIA, Ph., *Fibrés homogènes sur* $\mathbb{P}^n$, (à paraître)

[Ba-VdV] BARTH, W., VAN de VEN, A., *On the geometry in codimension 2 of Grassman manifolds,* in Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds, Lecture Notes in Mathematics, 412, Springer Verlag,(1974)

[Dr] DREZET, J.M., *Exemples de fibrés uniformes non-homogènes sur* $\mathbb{P}^n$, C.R.A.S., t.291, série A, 125-128,(1980)

[Ein] EIN, L., *Stable Vector bundles on Projective spaces in char* $p>o$, Math. Ann., 254, 53-72,(1980)

[Ele,1] ELENCWAJG, G., *Les fibrés uniformes de rang 3 sur* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *sont homogènes,* Math. Ann., 231, 217-227,(1978)

[Ele,2] ELENCWAJG, G., *Des fibrés uniformes non-homogènes,* Math. Ann., 239, 185-192,(1979)

[Ele,3] ELENCWAJG, G., *Fibrés uniformes de rang élevé sur* $\mathbb{P}^2$, Fourrier, Grenoble, 31, 4, 89-114,(1981)

[Ele-For] ELENCWAJG, G., FOSTER, O., *Bounding cohomology groups of vector bundles on* $\mathbb{P}^n$, Math. Ann., 246, 251-270,(1980)

[E-H-S] ELENCWAJG, G., HIRSCHOWITZ, A., SCHNEIDER, M., *Les fibrés uniformes de rang au plus n sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *sont ceux qu'on croit,* Proceedings of the Nice Conference (1979) on Vector Bundles and Differential equations, Progress in Math., 7, Birkhaüser, Boston, 37-63,(1980)

[Ell] ELLIA, Ph., *Des fibrés uniformes non-homogènes de rang 2n+1 sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, Journal für die reine und ang. Math., 321, 113-119,(1981)

[Ha-Na] HARDER, G., NARASIMHAN, M.S., *On the Cohomology groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves,* Math. Ann., 212, 213-248,(1974)

[Ha] HARTSHORNE, R., *Algebraic Geometry,* Graduate texts in Mathematics, vol.52, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag,(1977)

[Lang] LANG, S., *Algebra,* Addison Wesley,(1977)

[O-S-S] OKONEK,C., SCHNEIDER, M., SPINDLER, H., *Vector bundles on complex projective spaces,* Progress in Math., 3, Birkhaüser, Boston,(1980)

[Sa] SATO, E., *Uniform vector bundles on a projective space,* J. Math, Soc., Japan.28, 123-132,(1976)

[VdV] VAN de VEN, A., *On uniform vector bundles,* Math., Ann., 195, 245-248,(1978) (1978).

P. ELLIA
Université de Nice
Institut de Mathématiques
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX