GUY HENNIART

La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 11-12 (1983)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1983_2_11-12__1_0>

LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE POUR GL(3)

Guy HENNIART

Résumé

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une application de l'ensemble $G^\circ(3)$ des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles de degré 3 du groupe de Weil de F, dans l'ensemble $A^\circ(3)$ des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3,F)$, application qui conserve les facteurs ε et soit compatible à la torsion par les caractères de $F^\times$. Nous montrons que cette application est bijective.

Dans le cours de la démonstration, nous obtenons une construction explicite des éléments de $A^\circ(3)$ et utilisons une théorie du changement de base modéré pour ces éléments.

Abstract

Let F be a locally compact non archimedean field. We prove that there exists a unique map from the set $G^\circ(3)$ of equivalence classes of continuous irreducible degree 3 representations of the Weil group of F, into the set $A^\circ(3)$ of equivalence classes of admissible irreducible supercuspidal representations of $GL(3,F)$, a map which is to preserve ε-factors and be compatible with torsion by characters of $F^\times$. We prove that this map is a bijection.

Meanwhile we obtain an explicit construction for the elements of $A^\circ(3)$ and we use for them a tame base change theory.

Guy HENNIART, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Bâtiment Mathématiques 425
E.R.A. 653, 91405 ORSAY-cédex FRANCE

0249-633X/83 04 03/186/\$3.86/© Gauthier-Villars.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. On fixera dans toute la suite une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F, un caractère additif non trivial ψ_F de F, la mesure de Haar d_Fx sur F autoduale pour ψ_F, et on notera q_F le nombre d'éléments du corps résiduel de F.

Notre but est de prouver une généralisation, conjecturée par R.P. Langlands, de la théorie locale du corps de classes. Rappelons que celle-ci [Se2,We] donne une bijection canonique entre les caractères continus du groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F et les caractères d'ordre fini du groupe multiplicatif $F^{\times}$ de F. La généralisation consiste à relier, d'une part les représentations continues de degré donné n du groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F, et d'autre part certaines représentations (de dimension finie ou infinie), dites admissibles, du groupe localement compact totalement discontinu $GL(n,F)$. Pour l'élégance des résultats, il faut remplacer le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F par une variante : le groupe de Weil-Deligne W_F' de $\overline{F}$ sur F. Le lien entre les deux types de représentations mentionnées ci-dessus se fait à l'aide d'invariants, les facteurs L et ε, qu'on leur attache. L'alinéa suivant précise la nature de ces invariants et le paragraphe 1.2 donne notre résultat.

En fait, à une représentation σ du groupe de Weil-Deligne W_F' [Ta], on sait associer le facteur $L(\sigma)$ qui, fonction d'un paramètre complexe s, est une fonction rationnelle de q_F^{-s}, et le facteur $\varepsilon(\sigma,\psi_F,d_Fx)$, que nous noterons en abrégé $\varepsilon(\sigma)$ et qui, comme fonction du même paramètre s, est un monôme non nul en q_F^{-s}. Ces facteurs ne dépendent que de la classe d'équivalence de σ. De même, pour chaque entier $n \geq 1$, on sait associer à une classe d'équivalence π de représentations admissibles irréductibles de $GL(n,F)$ des facteurs $L(\pi)$ et $\varepsilon(\pi,\psi_F,d_Fx)$ (noté $\varepsilon(\pi)$) ayant des propriétés analogues [GJ]. La théorie locale du corps de classes [Se1,We] nous permet d'identifier les classes d'équivalence de représentations de degré 1 de W'_F et les classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL(1,F)$, i.e. les caractères (continus) de $F^\times$. On peut ainsi faire agir le groupe $\hat{F}^\times$ des caractères (continus) de $F^\times$, par torsion, sur les représentations de W'_F (on notera $\chi\sigma$ la représentation obtenue par torsion de σ par le caractère $\chi \in \hat{F}^\times$) et sur les représentations admissibles irréductibles de $GL(n,F)$ (notation : $\chi\pi$).

1.2. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant, cas particulier de conjectures générales de Langlands.

Théorème. Soit $n = 3$.

1. Il existe une unique application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations Φ-semisimples, de degré n , de W'_F , dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL(n,F)$, qui vérifie, pour tout caractère continu χ de $F^\times$

$$L(\chi\sigma) = L(\chi\pi(\sigma))$$

$$\varepsilon(\chi\sigma) = \varepsilon(\chi\pi(\sigma)) \ .$$

2. Cette application est une bijection, et fait se correspondre les représentations irréductibles (de degré n) de W'_F et les représentations admissibles irréductibles cuspidales de $GL(n,F)$.

3. Les conducteurs de σ et $\pi(\sigma)$ sont les mêmes, et le déterminant de σ correspond, par la théorie locale du corps de classes, au caractère central de $\pi(\sigma)$. Enfin, l'application $\sigma \to \pi(\sigma)$ est compatible au passage aux représentations contragrédientes.

Remarque. L'énoncé analogue, pour $n = 1$, reformule la théorie locale du corps de classes; pour $n = 2$, il a été prouvé par Kutzko [Ku2], après des résultats partiels de plusieurs mathématiciens, cf. [Tu2, Ct2]. En fait les résultats des chapitres 5 et 7 de cet article peuvent être généralisés, et, quand n est la caractéristique résiduelle p de F, l'auteur a prouvé, début 1983, à l'aide de résultats de D. Kazhdan, les énoncés en ce cas des parties 1 à 3 du théorème précédent, sauf l'unicité de l'application $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$. Des résultats semblables quand n est un nombre premier distinct de p sont dus à A. Moy [Mo], le cas $n=p$ ayant aussi été traité par Ph. Kutzko et A. Moy.

1.3. Le chapitre 2 ne contient rien d'original; il a pour but de fixer les notations et conventions, de rappeler au lecteur les définitions et propriétés des facteurs L et ε, et d'énoncer de façon précise les propriétés de la correspondance conjecturée par Langlands.

Le chapitre 3, pour l'essentiel, rassemble des résultats connus. Notons $G^\circ(3)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles de degré 3 de W'_F, et $A^\circ(3)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3,F)$. On se ramène tout d'abord à prouver l'existence, l'unicité et la bijectivité d'une application π de $G^\circ(3)$ dans $A^\circ(3)$, qui conserve les facteurs ε et soit compatible à la torsion par un caractère de $F^\times$. On prouve aussi que, l'élément σ de $G^\circ(3)$ étant donné, il existe au plus un élément de $A^\circ(3)$ qui puisse correspondre à σ; si un tel élément existe, on le note $\pi(\sigma)$ et on dit que $\pi(\sigma)$ existe. On prouve également, utilisant [JPS1] que $\pi(\sigma)$ existe si σ est imprimitive, ou si F est de caractéristique non nulle. On obtient ainsi une application π' de $G'(3)$ dans $A^\circ(3)$, où $G'(3)$ est égal à $G^\circ(3)$, sauf si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, auquel cas $G'(3)$ est formé des éléments imprimitifs de $G^\circ(3)$. Suivant une idée de H. Jacquet [Ja3], nous prouvons que l'application π' est injective.

1.4. La partie la plus nouvelle de ce travail concerne l'existence de $\pi(\sigma)$ quand F est une extension de $\mathbb{Q}_3$ et que σ est primitive. L'observation cruciale est qu'il existe une extension modérée K de F, quadratique ou composée de deux extensions quadratiques, telle que la restriction σ_K de σ au groupe de Weil-Deligne de $\bar{F}$ sur K soit imprimitive. On dispose alors de la classe $\pi(\sigma_K)$ de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $GL(3,K)$, classe qui est invariante par l'action du groupe de Galois de K sur F. Il est alors naturel d'essayer de construire $\pi(\sigma)$ à partir de $\pi(\sigma_K)$, à l'aide d'une théorie du changement du corps de base analogue à celles développées par Langlands [La3] ou Kutzko [Ku2]. En fait, on utilise une théorie du changement de base modéré analogue à celle de Kutzko, le succès de cette technique dans notre cas a priori compliqué reposant en dernière analyse sur le fait que l'extension K de F est de degré premier à 3.

1.5. La théorie du changement de base modéré utilise une construction explicite des éléments de $A°(3)$, construction qui procède en deux étapes.

H. Carayol [Ca] a donné un procédé permettant d'obtenir, par induction à partir de sous-groupes de $GL(3,F)$ compacts modulo le centre, des éléments de $A°(3)$, que nous dirons très cuspidaux. Nous donnons une construction explicite très détaillée de ces éléments très cuspidaux, au chapitre 5 pour ceux d'exposant premier à 3, et à l'appendice 4 pour ceux d'exposant multiple de 3. Nous calculons également les facteurs ε.

La seconde étape nécessite l'introduction d'un corps D de centre F et de dimension 9 sur F.

Une version simple de la formule des traces, due à P. Deligne et D. Kazhdan ([DK], voir aussi [Ro2]) permet de prouver, en suivant les techniques de Flath [Fa], l'existence d'une bijection, conservant les facteurs ε et compatible à la torsion par un caractère de $F^{\times}$, entre $A°(3)$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations continues irréductibles, de degré > 1, de $D^{\times}$. Mais H. Carayol a montré [Ca] que ces représentations de $D^{\times}$ sont toutes obtenues par un procédé analogue à celui qui donne les éléments très cuspidaux de $A°(3)$. On en déduit alors que tous les éléments de $A°(3)$ sont, à torsion près par un caractère de $F^{\times}$, très cuspidaux.

1.6. Par manque de références publiées, nous donnons au chapitre 4 une démonstration détaillée de la formule des traces et de ses conséquences, en tirant avantage et simplifications des renseignements donnés par [JPS1]. De plus nous donnons une version des théorèmes fort et faible de multiplicité un pour les représentations automorphes d'un corps gauche de centre un corps global et de degré 9 sur ce centre.

En outre, nous montrons dans ce chapitre comment les arguments de comptage de Tunnell [Tu1], Koch et Zink [Ko2, Zi], et la comparaison avec les représentations de $D^{\times}$ entraînent que si l'application $\pi : G°(3) \longrightarrow A°(3)$ que nous cherchons est injective, alors elle est bijective.

En particulier dès la fin du chapitre 4, nous avons prouvé notre résultat principal si F n'est pas une extension de $\mathbb{Q}_3$. Si F n'est pas de caractéristique résiduelle 3, on peut d'ailleurs donner une construction explicite des éléments de $G°(3)$ (ils sont imprimitifs) et de ceux de $A°(3)$ (cf. chapitre 5). On peut alors décrire explicitement l'application $\pi : G°(3) \longrightarrow A°(3)$, ce qui est fait aux appendices 4 et 5.

1.7. La description explicite du chapitre 5 fournit une paramétrisation de $A°(3)$. Le changement de base pour une extension quadratique modérée est défini et étudié au chapitre 6, à partir de cette paramétrisation, pour les éléments de $A°(3)$ d'exposant minimal premier à 3.

Plus précisément, on donne une paramétrisation des éléments de $A^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3 par des données (c,θ,χ), où c est un élément de $GL(3,F)$ qui engendre une extension ramifiée de degré 3 de F, θ un caractère de $F[c]^\times$ possédant une certaine propriété de compatibilité avec c, et χ un caractère de $F^\times$. Soit K une extension quadratique modérée de F. Si π est un élément de $A_F^\circ(3)$, d'exposant minimal premier à 3, attaché aux données (c,θ,χ), on montre que les données $(c,\theta \circ N_{K[c]/F[c]}, \chi \circ N_{K/F})$ définissent un élément de $A_K^\circ(3)$, cet élément π_K ne dépendant pas du choix des données (c,θ,χ) pour π. L'application qui à π associe π_K est le changement de base modéré de F à K. Au chapitre 6, on décrit l'image et les fibres de cette application, et également le lien entre π et π_K en termes des facteurs ε.

Au chapitre 7, on prouve (Théorème 7.1) que le changement de base modéré reflète bien la restriction des représentations des groupes de Weil, en ce sens que si H est une extension quadratique modérée de F et σ un élément de $G^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3 tel que $\pi(\sigma_H)$ existe, alors $\pi(\sigma)$ existe et est l'unique élément de $A^\circ(3)$ qui par changement de base donne $\pi(\sigma_H)$ et dont le caractère central corresponde, par la théorie locale du corps de classes, au déterminant de σ. Si σ est un élément primitif de $G^\circ(3)$, il suffit alors de considérer un ou deux changements de base modérés pour obtenir l'existence de $\pi(\sigma)$. On a donc prouvé l'existence de l'application π cherchée; on en prouve l'injectivité en utilisant les propriétés du changement de base et l'injectivité de l'application π' de 1.3, et on en prouve la surjectivité en utilisant les arguments de comptage signalés en 1.6.

1.8. La démonstration du théorème 7.1 dans le cas difficile où F est de caractéristique résiduelle 3, utilise une technique originale. Soit $\sigma \in \mathcal{G}^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3, et supposons que $\pi(\sigma_H)$ existe. Soit π l'élément de $\mathcal{A}^\circ(3)$ qui donne $\pi(\sigma_H)$ par changement de base et dont le caractère central ω correspondе au déterminant de σ : l'existence et l'unicité de π sont assurées par les résultats du chapitre 6. Par comparaison des facteurs ε de σ et σ_H d'une part, de π et $\pi(\sigma_H)$ d'autre part, on prouve qu'on a

$$\varepsilon(\chi\sigma)^2 = \varepsilon(\chi\pi)^2 \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times.$$

Il ne reste plus alors qu'à prouver l'égalité de ces facteurs ε modulo les racines de l'unité d'ordre une puissance de 3, ce qui se fait par un calcul explicite montrant qu'on peut exprimer ces facteurs en termes de χ, de ω et d'invariants attachés à σ_K et $\pi(\sigma_K)$. Signalons que l'invariant attaché à σ_K est déjà apparu dans [DH].

1.9. Les trois premiers appendices traitent de résultats utilisés dans le texte et pour lesquels nous n'avons pas trouvé de référence commode. Les appendices 4 et 5 donnent, dans des cas particuliers, une version explicite de la correspondance donnée par le théorème 1.2 (à l'appendice 4 est traité le cas des classes de représentations irréductibles de W_F' induites à partir de l'extension non ramifiée de degré 3, à l'appendice 5 celui où F est de caractéristique résiduelle distincte de 3).

Soit K une extension quadratique séparable de F. La restriction à W_K' des représentations de W_F' se traduit par un changement de base de F à K pour les éléments de $\mathcal{A}_F(3)$ (qui coïncide, dans le cadre du chapitre 6, avec le changement de base modéré qui y est défini). L'appendice 6 s'attache à comparer ce changement de base avec celui qui peut être défini par des méthodes globales (utilisant les fonctions L et la théorie de Hecke, ou une théorie à la Langlands cf. [Fk]). On obtient des résultats sur les facteurs L et ε de paires d'éléments de $\mathcal{A}_F$ (cf. Proposition 3.25).

2. Facteurs L et ε.

2.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien. Nous fixerons jusqu'à la fin de l'article une uniformisante $\tilde{\omega}_F$ de F et un caractère non trivial ψ_F du groupe additif F ; désignant par $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, nous noterons $n(\psi_F)$ et appellerons exposant de ψ_F le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que ψ_F soit trivial sur $\tilde{\omega}_F^{-n}\mathcal{O}_F$. Nous fixerons également sur F la mesure de Haar $d_F x$ autoduale pour ψ_F. Nous noterons q_F le nombre d'éléments du corps résiduel k_F de F ; p_F la caractéristique de k_F ; v_F la valuation de F qui prend la valeur 1 sur $\tilde{\omega}_F$; $|\ |_F$ la valeur absolue de F qui vaut q_F^{-1} sur $\tilde{\omega}_F$. Pour chaque nombre complexe $s \in \mathbb{C}$, nous noterons enfin α_F^s l'homomorphisme $x \mapsto |x|_F^s$ de $F^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous poserons $U_F^n = 1+\tilde{\omega}_F^n\mathcal{O}_F$. On notera $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$, et U_F ou U_F^0 le groupe des unités de $\mathcal{O}_F$.

Remarque. Dans cet article, de nombreux objets dépendant de F auront des notations naturellement indexées par F. Nous nous permettrons, quand aucun risque de confusion n'existe, de supprimer l'indice F.

2.2. Soit n un entier, $n \geq 1$. On s'intéresse aux représentations admissibles irréductibles du groupe localement compact totalement discontinu $GL(n,F)$ (notre référence pour cette étude sera [Ct1]). On note $\mathcal{A}_F(n)$ *) l'ensemble des classes d'équivalence de telles représentations, et $\mathcal{A}_F$ la somme disjointe des $\mathcal{A}_F(n)$, pour $n \geq 1$. Un élément π de $\mathcal{A}_F$ sera dit de degré n, et on écrira $\deg(\pi) = n$, si π appartient à $\mathcal{A}_F(n)$. On note $\mathcal{A}_F^\circ$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_F$ formé des classes de représentations cuspidales, et $\mathcal{A}_F^\circ(n) = \mathcal{A}_F(n) \cap \mathcal{A}_F^\circ$.

Remarques 1. Dans cet article, l'expression représentation cuspidale

*) La lettre $\mathcal{A}$ est l'initiale du mot automorphe !

signifiera toujours représentation admissible irréductible absolument cuspidale [Ct1,1.6].

2. Un caractère d'un groupe topologique H est pour nous un homomorphisme continu de H dans $\mathbb{C}^\times$; s'il est à valeurs dans le groupe des nombres complexes de module 1, on parlera de caractère unitaire. L'ensemble $\widehat{F^\times}$ des caractères de $F^\times$ s'identifie donc à $\mathcal{A}_F(1)$. Le centre de $GL(n,F)$ s'identifie à $F^\times$, et, pour toute représentation admissible irréductible π de $GL(n,F)$, il agit dans π par un caractère de $F^\times$, le caractère central de π, qu'on note ω_π.

3. De nombreux objets associés aux représentations admissibles irréductibles de $GL(n,F)$ ne dépendent que des classes d'équivalence correspondantes. Par exemple, nous pourrons parler du caractère central ω_π d'un élément π de $\mathcal{A}_F$. De façon analogue, si π est une représentation admissible irréductible de $GL(n,F)$, et $\check{\pi}$ la représentation contragrédiente [Ct1,1.5], la classe d'équivalence ω' de $\check{\pi}$ ne dépend que de celle, disons ω, de π; on écrira donc aussi $\check{\omega}$ au lieu de ω'. Le même phénomène, et le même usage de notations, se produira encore par exemple pour les facteurs L et ε, sans que nous prenions la peine de le signaler à nouveau au lecteur.

2.3. Soient χ un caractère de $F^\times$ et π une représentation admissible irréductible de $GL(n,F)$. On notera $\chi\pi$ la représentation admissible irréductible de $GL(n,F)$, dans le même espace que π, qui à $g \in GL(n,F)$ associe l'endomorphisme $\chi \circ \det(g) \cdot \pi(g)$. On obtient ainsi une action $(\chi,\pi) \longmapsto \chi\pi$ de $\widehat{F^\times}$ sur $\mathcal{A}_F(n)$, laissant stable $\mathcal{A}_F^\circ(n)$, qu'on appelle torsion par les caractères χ.

Une représentation admissible irréductible π de $GL(n,F)$ est dite de carré intégrable si son caractère central est unitaire et que ses coefficients sont de carré intégrable modulo le centre de $GL(n,F)$. Elle est dite essentiellement de carré intégrable s'il existe un nombre complexe s tel que $\alpha^s\pi$ soit de carré intégrable.

2.4. Godement et Jacquet ont défini [GJ], pour chaque représentation admissible irréductible de $GL(n,F)$, des facteurs L et ε, dont nous rappelons ci-dessous quelques propriétés; nous suivons les conventions de [Ja1] *).

Soit $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$. Le facteur $L(\pi)$, noté $L(s,\pi)$ dans [Ja1], est fonction du paramètre complexe s, et de la forme $P(q^{-s})^{-1}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(0) = 1$. Le facteur $\varepsilon(\pi,\psi,dx)$, qu'on notera $\varepsilon(\pi)$ puisque ψ et dx sont fixés, est un monôme non nul en q^{-s}. En fait on a les propriétés suivantes :

i) $L(\alpha^t\pi)(s) = L(\pi)(s+t)$,

$\varepsilon(\alpha^t\pi)(s) = \varepsilon(\pi)(s+t)$ pour $t, s \in \mathbb{C}$.

ii) Le degré de $\varepsilon(\pi)$ comme monôme en q^{-s} est $n\cdot n(\psi) + a(\pi)$, où $a(\pi)$ est un entier appelé <u>exposant</u> de π. On sait qu'on a $a(\pi) \geq 0$ et $a(\pi) = 0$ si et seulement si π contient la représentation unité de $GL(n, \mathcal{O}_F)$ [JPS3].

2.5. Jacquet, Piatetski-Shapiro, et Shalika [JPS2] ont attaché des facteurs L et ε à un couple (π_1,π_2) d'éléments de $\mathcal{A}_F$. Le facteur $L(\pi_1\times\pi_2)$ est aussi de la forme $P(q^{-s})^{-1}$, avec $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(0) = 1$, et le facteur

*) Le lecteur remarquera que dans [Ja1], p.64, il faut, à la ligne 5, remplacer $Z(\Phi,s,f)$ par $Z(\Phi,s+(n-1)/2,f)$, et, dans la proposition 3.13, $L(s,\tau)$ par $L(s,\tau\times\alpha^{r-1})$

$\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2)$ est aussi un monôme non nul en q^{-s} *)

On a les propriétés suivantes, pour π_1 et π_2 dans $\mathcal{A}_F$:

$$L(\pi_1 \times \pi_2) = L(\pi_2 \times \pi_1) \quad \text{et} \quad \varepsilon(\pi_1 \times \pi_2) = \varepsilon(\pi_2 \times \pi_1) \ ;$$

$$L(\pi_1 \times \chi) = L(\chi\pi_1) \ , \ \varepsilon(\pi_1 \times \chi) = \varepsilon(\chi\pi_1) \ ,$$

$$L(\chi\pi_1 \times \pi_2) = L(\pi_1 \times \chi\pi_2) \quad \text{et} \quad \varepsilon(\chi\pi_1 \times \pi_2) = \varepsilon(\pi_1 \times \chi\pi_2) \ ,$$

pour tout caractère χ de $F^\times$; enfin pour tout s et tout t dans $\mathbb{C}$,

$$L(\alpha^t\pi_1 \times \pi_2)(s) = L(\pi_1 \times \pi_2)(s+t)$$

$$\varepsilon(\alpha^t\pi_1 \times \pi_2)(s) = \varepsilon(\pi_1 \times \pi_2)\ (s+t) \ .$$

Pour π_1, π_2 dans $\mathcal{A}_F$, on posera, pour $s \in \mathbb{C}$,

$$\gamma(\pi_1 \times \pi_2)(s) = \varepsilon(\pi_1 \times \pi_2)(s) \cdot L(\check{\pi}_1 \times \check{\pi}_2)(1-s) \cdot [L(\pi_1 \times \pi_2)(s)]^{-1}$$

et

$$\gamma(\pi_1)(s) = \varepsilon(\pi_1)(s) \cdot L(\check{\pi}_1)(1-s) \cdot [L(\pi_1)(s)]^{-1} \ .$$

2.6. Nous fixerons dans toute la suite une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F , et nous noterons G_F le groupe de Galois de $\overline{F}$ sur F , W_F le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F , et W'_F le groupe de Weil-Deligne de $\overline{F}$ sur F ; en ce qui concerne W'_F , notre référence constante sera [Ta].

---

*) Ces facteurs L et ε ne sont définis dans [JPS2] que pour π générique ([Ja3]; les représentations génériques sont aussi appelées non-dégénérées, cf. par ex. [Z]). Mais les définitions et les propriétés énoncées ici s'étendent au cas général (cf. [JPS4] et [JPS5]).

Nous normaliserons l'application de réciprocité de la théorie locale du corps de classes,

$$\tau_F : W_F \to F^\times$$

de sorte que les éléments de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes, et munirons W_F de la norme $\| \ \|_F$, pour laquelle on a

$$\|w\|_F = |\tau_F(w)|_F \quad \text{pour tout} \quad w \in W_F \ .$$

2.7 Une représentation de W'_F sera pour nous ce qui dans [Ta] est appelé une représentation Φ-semi-simple, sur $\mathbb{C}$, de W'_F , c'est-à-dire un couple (ρ,N) formé d'une représentation continue semi-simple ρ de W_F dans un espace vectoriel complexe $V(\rho)$ de dimension finie, et d'un endomorphisme (nilpotent) N de $V(\rho)$ tel que

$$\rho(w)\ N\rho(w)^{-1} = \|w\|_F N \quad \text{pour} \quad w \in W .$$

Deux telles représentations (ρ,N) et (ρ',N') sont dites équivalentes, s'il existe un isomorphisme $\sigma : V(\rho) \to V(\rho')$ des espaces de ρ et ρ' , vérifiant

$$\sigma\rho(w) = \rho'(w)\sigma$$

$$\sigma N = N'\sigma \quad \text{pour tout} \quad w \in W_F \ .$$

La remarque 3 de 2.2. s'applique aussi aux représentations de W'_F .

Nous identifierons une représentation (ρ,N) de W'_F pour laquelle $N = 0$, à la représentation continue semi-simple ρ de W_F (et pour nous une représentation de W_F, sera toujours une représentation continue semi-simple dans un espace vectoriel complexe $V(\rho)$ de dimension finie). Rappelons que si ρ est irréductible, alors on a forcément $N = 0$, qu'on sait définir le produit tensoriel de deux représentations de W'_F, que toute représentation de W'_F est somme directe de représentations indécomposables, chaque représentation indécomposable étant équivalente à une représentation du type $\rho \otimes Sp(d)$ où ρ est une représentation irréductible de W_F et $Sp(d)$ la représentation spéciale de degré d [Ta, 4.1.4 et 4.1.5].

2.8. A toute représentation $\sigma = (\rho,N)$ de W'_F est attaché son degré $\deg(\sigma)$ qui est la dimension sur $\mathbb{C}$ de l'espace de ρ. Pout tout entier $n \geq 1$, on note $G_F(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de degré n, et G_F la somme disjointe des $G_F(n)$; on note G_F° le sous-ensemble de G_F formé des classes de représentations irréductibles et, pour tout entier $n \geq 1$, on pose $G_F^\circ(n) = G_F(n) \cap G_F^\circ$.

Une représentation de degré 1 de W'_F est irréductible, et $G_F(1)$ s'identifie à l'ensemble des caractères de W_F. Si χ est un caractère de $F^\times$, $\chi \circ \tau_F$ est un caractère de W_F et si σ est une représentation de W'_F, on notera $\chi\sigma$ la représentation $(\chi \circ \tau_F) \otimes \sigma$.

A toute représentation $\sigma = (\rho,N)$ de W'_F, on associe son déterminant $\det \sigma$, qui est le caractère $\det_{V(\rho)} \circ \rho$ de W_F, où $\det_{V(\rho)}$ désigne l'homormorphisme déterminant du groupe linéaire de $V(\rho)$ dans $\mathbb{C}^\times$ *). On lui associe aussi (cf. [Ta], 4.1.6.) un facteur $L(\sigma)$, un facteur $\varepsilon(\sigma,\psi,dx)$ noté $\varepsilon(\sigma)$ **), un exposant (d'Artin) $a(\sigma)$, qui ne dépendent que de la classe d'équivalence de σ.

---

*) On notera $\mathrm{Det}\,\sigma$ le caractère de $F^\times$ vérifiant $\mathrm{Det}\,\sigma \circ \tau_F = \det \sigma$.

**) En fait $\varepsilon(\sigma)$ désigne dans [Ta] ce qui pour nous est $\varepsilon(\sigma)(0)$. On a pour ces facteurs L et ε des propriétés analogues à celles énoncées en 2.4, en particulier, on a $\varepsilon(\sigma)(s) = \varepsilon(\alpha^s\sigma)(0) = \varepsilon(\sigma)(0)q^{-s(a(\sigma)+\deg(\sigma)n(\psi))}$.

On définit également la contragrédiente $\check{\sigma}$ de σ qui est le couple $(\check{\rho},\check{N})$ formé de la représentation $\check{\rho}$ sur le dual $V(\rho)^*$ de $V(\rho)$, contragrédiente de ρ (c'est-à-dire qu'on a

$$< \check{\rho}(w)(v^*) \ , \ v > \ = \ < v^*, \rho(w^{-1})v >$$

pour $w \in W_F$, $v \in V(\rho)$, $v^* \in V(\rho)^*$, $< \ >$ désignant l'accouplement entre $V(\rho)^*$ et $V(\rho)$) , et de l'endomorphisme $\check{N}$ de $V(\rho)$ vérifiant

$$< \check{N}(v^*), v > = - < v^*, Nv > \quad \text{pour} \quad v \in V(\rho) \ , \ v^* \in V(\rho)^*$$

Si deux représentations de W'_F sont équivalentes, leurs contragrédientes le sont aussi, et on parlera de la contragrédiente $\check{\sigma}$ d'un élément σ de G_F .

2.9. A tout caractère χ de W_F , associons le caractère $\pi(\chi)$ de $F^\times$ caractérisé par l'égalité $\pi(\chi) \circ \tau_F = \chi$. On obtient ainsi une bijection $\chi \mapsto \pi(\chi)$ de $G_F(1)$ dans $A_F(1)$, qui conserve les facteurs L et les exposants, et est compatible au passage à la contragrédiente. C'est <u>par définition</u> que cette bijection conserve les facteurs ε .

Les conjectures locales de Langlands proposent la généralisation suivante de la théorie locale du corps de classes :

<u>Conjecture 1</u>. Il existe une unique application de G_F dans A_F

$$\sigma \mapsto \pi(\sigma)$$

qui prolonge la bijection $\chi \mapsto \pi(\chi)$ de $G_F(1)$ dans $A_F(1)$ et vérifie pour tous σ , τ dans G_F

i) $\deg(\sigma) = \deg(\pi(\sigma))$

ii) $L(\sigma\otimes\tau) = L(\pi(\sigma)\times\pi(\tau))$

iii) $\varepsilon(\sigma\otimes\tau) = \varepsilon(\pi(\sigma)\times\pi(\tau))$.

2. Cette application est une bijection et vérifie

$$\omega_{\pi(\sigma)} = \pi(\det\sigma) \quad \text{(autrement dit } \omega_{\pi(\sigma)} = \operatorname{Det}\sigma\text{)}$$

$$a(\pi(\sigma)) = a(\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma\in G_F$$

$$\pi(\check{\sigma}) = \pi(\sigma)^{\vee}$$

3. La représentation $\pi(\sigma)$ est cuspidale si et seulement si σ est irréductible, elle est essentiellement de carré intégrable si et seulement si σ est indécomposable.

Remarque. Supposons un instant que F soit un corps commutatif localement compact archimédien, i.e. $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$. Alors Langlands [La1] définit une application $\sigma\mapsto\pi(\sigma)$ de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes de dimension finie de W_F , continues et semi-simples, dans la somme disjointe pour $n\geq 1$ des ensembles de classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $GL(n,F)$. Cette application vérifie l'analogue de la conjecture précédente, les facteurs L et ε étant définis dans [Ta] pour une représentation de W_F et dans [JPS 4] pour une représentation de $GL(n,F)$.

2.10. Le but de cet article est de prouver le théorème suivant :

Théorème. Soit $n = 3$.

1. Il existe une unique application $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F(n)$ dans $\mathcal{A}_F(n)$ qui vérifie

$$L(\chi\pi(\sigma)) = L(\chi\sigma)$$

$$\varepsilon(\chi\pi(\sigma)) = \varepsilon(\chi\sigma) \quad \text{pour tout} \quad \chi \in \widehat{F^\times}.$$

2. Cette application est une bijection, et on a

$$\omega_{\pi(\sigma)} = \operatorname{Det} \sigma$$

$$a(\pi(\sigma)) = a(\sigma)$$

$$\pi(\check{\sigma}) = \check{\pi}(\sigma)$$

$$\pi(\chi\sigma) = \chi\pi(\sigma) \quad \text{pour} \quad \chi \in \widehat{F^\times}.$$

3. La représentation $\pi(\sigma)$ est cuspidale si et seulement si σ est irréductible, elle est essentiellement de carré intégrable si et seulement si σ est indécomposable.

Remarque 1. Comme nous l'avons dit, l'analogue de ce théorème pour $n = 1$ reformule la théorie locale du corps de classes.

2. L'analogue pour $n = 2$ a été tranché en 1979 par Kutzko [Ku2].

Nous en donnerons d'ailleurs une esquisse de démonstration, différente de celle de Kutzko, au chapitre 3. (de 3.16 à 3.18).

Remarque 3. On peut montrer que la bijection du théorème 2.10, (pour $n = 3$) est compatible à l'action du groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$ sur les espaces des représentations.

2.11. Nous serons amené à considérer des extensions finies de F dans $\bar{F}$. A une telle extension K, les considérations et notations précédentes s'appliquent; on affecte les notations d'un indice K, si nécessaire. Le caractère ψ_K fixé sur K sera toujours le caractère $\psi \circ \mathrm{Tr}_{K/F}$, et les facteurs ε relatifs à K seront toujours avec ce choix de ψ_K, et le choix de la mesure de Haar sur K autoduale pour ψ_K.

Pour toute extension finie K de F, le théorème 2.10 nous donne une bijection notée π_K ou simplement π de $G_K(3)$ sur $A_K(3)$. Si K est galoisienne sur F, cette bijection est compatible à l'action naturelle du groupe de Galois de K sur F, sur $G_K(3)$ et $A_K(3)$. Cela sera prouvé au chapitre 3; on peut d'ailleurs remplacer 3 par 1 ou 2 et l'assertion reste vraie.

2.12. Si K est une extension finie de F dans $\bar{F}$, nous identifierons W_K au sous-groupe de W_F fixant K. Si E est une extension finie de K dans $\bar{F}$, on peut restreindre à W_E une représentation ρ de W_K : on notera $\mathrm{Res}_E^K(\rho)$ ou ρ_E la représentation obtenue. Si χ est un caractère de $K^\times$ on notera parfois χ_E le caractère $\chi \circ N_{E/K}$ de $E^\times$: on a $(\chi \circ \tau_K)_E = \chi_E \circ \tau_E$.

De façon duale, on peut induire à W_K une représentation ρ de W_E : on notera $\mathrm{Ind}_E^K\rho$ ou ρ^K la représentation obtenue. Si χ est un caractère de $E^\times$ on écrira $\mathrm{Ind}_E^K\chi$ au lieu de $\mathrm{Ind}_E^K(\chi \circ \tau_E)$.

Il n'est pas facile de décrire à quoi doivent correspondre, du côté automorphe, ces opérations. La restriction à une extension E de F des représentations de W_F doit se traduire par une opération communément appelée changement de base [cf. La 3, Fk] et notée $\pi \longmapsto \pi_E$. Au chapitre 6 et dans l'appendice 6 nous examinerons un cas particulier de cette situation, où l'extension E/F est quadratique.

2.13. De 2.13 à 2.16, nous rappelons les résultats principaux de [DH], qui nous seront utiles aux chapitres 3 et 7.

Nous munissons les groupes de Weil de la filtration par les groupes de ramification en numérotation supérieure.

Soit t un nombre réel positif ou nul. Soit τ une représentation de W_F, sans vecteur non nul fixé par le groupe de ramification W_F^t.

Alors il existe un élément c de $F^\times$, unique à multiplication près par des éléments du groupe $U_F^{t/2}$ (formé des unités de F vérifiant $v_F(u-1) \geq t/2$), tel que, pour toute représentation ρ de W_F triviale sur le groupe de ramification $W_F^{t/2}$, on ait

$$\varepsilon(\rho \otimes \tau) = \mathrm{Det}\,\rho\,(c)^{-1}\varepsilon(\tau)^{\deg(\rho)}.$$

Si ρ est donnée par un caractère χ de $F^\times$, cela signifie qu'on a

$$\varepsilon(\chi\tau) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\tau).$$

La constante c est caractérisée modulo $U_F^{t/2}$ par ces dernières égalités, quand χ parcourt les caractères de $F^\times$ triviaux sur $U_F^{t/2}$.

De plus, si ρ est une représentation de W_F triviale sur W_F^t, alors

$$\varepsilon(\rho \otimes \tau) \mathrm{Det}\, \rho\, (c) \varepsilon(\tau)^{-\deg(\rho)}$$

est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p. Par exemple, si χ est un caractère de $F^\times$ d'exposant $a(\chi) < t+1$, alors

$$\varepsilon(\chi\tau)\chi(c)/\varepsilon(\tau)$$

est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p.

Si $t > 0$, la constante c est caractérisée, modulo U_F^1, par la propriété qu'on vient d'énoncer, quand χ parcourt tous les caractères modérés de $F^\times$ (i.e. les caractères triviaux sur U_F^1).

2.14. Si $\tau \in G^\circ$, et $a(\tau) > 0$ (ce qui est automatique si τ n'est pas un caractère de W_F), alors le plus grand indice de ramification supérieur t tel que τ soit sans vecteur non nul fixe par W_F^t est aussi le plus grand indice de ramification supérieur tel que τ soit non trivial sur W_F^t. Si on note $\alpha(\tau)$ cet indice, on a $a(\tau) = \dim(\tau)\,(\alpha(\tau)+1)$. On notera alors c_τ la constante correspondant au choix de $t = \alpha(\tau)$. On a

$$v_F(c_\tau) = -a(\tau) - \dim(\tau)\, n(\psi)$$

Si $a(\tau) = 0$, on notera c_τ n'importe quel élément de $F^\times$ de valuation $-n(\psi)$ et on posera $\alpha(\tau) = -1$ d'où $a(\tau) = \alpha(\tau)+1$.

Des considérations précédentes, on retiendra en particulier, que si χ est un caractère de $F^\times$, on a

$$\varepsilon(\chi\tau) = \mathrm{Det}\, \tau\, (c_{\chi \circ \tau_F})^{-1} \varepsilon(\chi)^{\deg(\tau)} \quad \text{si} \quad \deg(\tau) a(\chi) \geq 2a(\tau)$$

et $\quad \varepsilon(\chi\tau) = \chi(c_\tau)^{-1}\varepsilon(\tau) \quad$ si $\qquad$ si $2\deg(\tau)a(\chi) \leq a(\tau)$.

Ces égalités illustrent le comportement des facteurs ε sous torsion par un caractère. D'autres informations sur la torsion par un caractère suivent maintenant, que nous utiliserons le plus souvent implicitement.

On dit qu'un élément τ de A ou G est <u>minimal</u> si on a $a(\chi\tau) \geq a(\tau)$ pour tout caractère χ de $F^{\times}$. Pour tout élément τ de A ou G, on appelle <u>exposant minimal</u> de τ et on note $a_{min}(\tau)$ le plus petit des exposants $a(\chi\tau)$, quand χ parcourt les caractères de $F^{\times}$. Ainsi τ est minimal si et seulement si on a $a_{min}(\tau) = a(\tau)$.

Si $\tau \in G^{\circ}(n)$ est minimal, et si χ est un caractère de $F^{\times}$, on a

$$\alpha(\chi\tau) = \sup(\alpha(\tau),\alpha(\chi))$$

$$a(\chi\tau) = \sup(a(\tau), na(\chi)).$$

Supposant $\alpha(\tau) > 0$, on a $c_{\chi\tau} \equiv c_{\tau} \bmod U_F^1$ si $na(\chi) < a(\tau)$

et $\qquad$ et $c_{\chi\tau} \equiv c_{\chi} \bmod U_F^1$ si $na(\chi) > a(\tau)$.

Le numéro suivant indique comment calculer la constante c_{τ}.

2.15. Si χ est un caractère de $F^{\times}$, on notera c_{χ} n'importe quel élément de $F^{\times}$ de valuation $-a(\chi)-n(\psi)$ tel qu'on ait

$$\chi(x) = \psi(c_{\chi}(x-1))$$

pour $x \in F$ vérifiant $2v_F(x-1) \geq a(\chi)$. Si la représentation τ est de la forme $\chi \circ \tau_F$, on peut prendre $c_{\tau} = c_{\chi}$. Si τ est une représentation de W_F comme en 2.13, sans vecteur non nul fixé par W_F^t, on peut calculer la constante c de 2.13 comme suit : on écrit τ comme combinaison linéaire à coefficients entiers de représentations induites $\tau = \sum_{i\in I} n_i \operatorname{Ind}_{L_i}^F(\chi_i \circ \tau_{L_i})$ où L_i est une extension finie de F dans $\overline{F}$, χ_i un caractère de $L_i^{\times}$ tel que $\chi_i \circ \tau_{L_i}$ <u>soit non trivial sur</u> $W_F^t \cap W_{L_i}$, et on peut prendre $c = \prod_{i\in I} N_{L_i/K}(c_{\chi_i})^{n_i}$. Ceci s'applique bien sûr à $\tau \in G^{\circ}$ et $t = \alpha(\tau)$.

2.16. Une propriété très importante pour la suite est la suivante, qui découle de [DH, 4.21.3]. Soit $\tau \in G^\circ$ tel que $\alpha(\tau) > 0$. Soit K une extension de F dans $\bar{F}$, modérément ramifiée d'indice de ramification e.

Alors on a

$$\alpha(\tau_K) = e\alpha(\tau)$$

et
$$c_{\tau_K} \equiv c_\tau \text{ modulo } U_K^{e\alpha(\tau)/2}.$$

Autrement dit, si τ est sauvagement ramifiée, c_τ ne dépend que de la restriction de τ au groupe de ramification sauvage de W_F.

2.17. Donnons, pour mémoire, le calcul des facteurs ε d'un caractère χ de $F^\times$ [GeK, p. 4]. Ce calcul nécessite quelques rappels sur les sommes de Gauss, rappels qui seront utilisés de nombreuses fois au chapitre 7.

Soient V, W, deux espaces vectoriels de dimension 1 sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, Q une application quadratique non nulle de V dans W, ψ un caractère non trivial du groupe additif sous-jacent à W. On pose

$$G(Q) = q^{-\dim(V)/2} \sum_{x \in V} \psi(Q(x));$$

la quantité $G(Q)$ s'appelle la somme de Gauss de $\psi \circ Q$. On sait que si q est impair, on a $G(Q)^2 = (-1)^{(q-1)/2}$ et que si $q = 2^r$, on a $G(Q)^4 = (-1)^r$.

Si q est impair et qu'on remplace Q par aQ avec $a \in \mathbb{F}_q^\times$, alors $G(Q)$ est remplacée par $(\frac{a}{q})G(Q)$ où $(-)$ désigne le symbole de Legendre dans $\mathbb{F}_q$: $(\frac{a}{q}) = 1$ si $a^{(q-1)/2} = 1$ et $(\frac{a}{q}) = -1$ sinon.

Le cas usuel est celui où $V = W = \mathbb{F}_q$ et $Q(x) = ax^2$ avec $a \in \mathbb{F}_q^\times$. On va voir maintenant d'autres exemples.

2.18. Soient χ un caractère de $F^{\times}$ et c_{χ} un élément de $F^{\times}$ fixé comme plus haut. Posons $\nu = n(\psi)$. Si $a(\chi)$ est pair, on a

$$\varepsilon(\chi)(s) = q^{(1/2-s)(a(\chi)+\nu)}\chi^{-1}(c_{\chi})\psi(c_{\chi}) .$$

Si $a(\chi) = 1$, on a

$$\varepsilon(\chi)(s) = q^{(1/2-s)(1+\nu)}\chi^{-1}(c_{\chi})G_1(\chi,c_{\chi})$$

avec

$$G_1(\chi,c_{\chi}) = q^{-1/2} \sum_{x\in U_F/U_F^1} \chi^{-1}(x)\psi(c_{\chi}x),$$

où la somme sur $x \in U_F/U_F^1$ désigne en fait une somme sur un système de représentants dans $F^{\times}$ de U_F/U_F^1. Si en outre χ est d'ordre 2 (donc q impair), on a

$$G_1(\chi,c_{\chi}) = q^{-1/2} \sum_{x\in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F} \psi(c_{\chi}x^2)$$

(un exemple de somme de Gauss).

Si $a(\chi)$ est impair, $a(\chi) \geq 3$, on a,

en posant $$a(\chi) = 2a + 1,$$

$$\varepsilon(\chi)(s) = q^{(1/2-s)(a(\chi)+\nu)}\chi^{-1}(c_{\chi})\psi(c_{\chi})G(\chi,c_{\chi})$$

avec $$G(\chi,c_{\chi}) = q^{-1/2} \sum_{x\in \mathcal{P}_F^a/\mathcal{P}_F^{a+1}} \chi^{-1}(1+x)\psi(c_{\chi}x)$$

(où la somme, à nouveau, porte sur un système de représentants dans F).

Si q est impair, on peut choisir c_{χ} de sorte que pour $x \in \mathcal{P}_F^a$ on ait $\chi(1 + x + \frac{x^2}{2}) = \psi(c_{\chi}x)$. On a alors

$$\chi^{-1}(1+x)\psi(c_\chi x) = \psi\left(\frac{c_\chi x^2}{2}\right)$$

et $G(\chi, c_\chi)$ est un autre exemple de somme de Gauss.

2.19. Les sommes du type $G(\chi, c_\chi)$ apparaissant assez souvent, il nous sera utile d'avoir la notation suivante. Pour tout entier m, on notera m^+ la partie entière de $\frac{m+1}{2}$ et m^- la partie entière de $\frac{m}{2}$. Si m est pair, on a donc $m^+ = m^- = \frac{m}{2}$. Si m est impair, on a $m^+ = m+1 = \frac{m+1}{2}$. On a dans tous les cas $m = m^+ + m^-$.

3. Injectivité.

3.1. Le but de ce chapitre est de rappeler les résultats déjà connus, ou faciles à obtenir, en ce qui concerne l'existence de l'application $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ [JPS1], et de donner un résultat d'injectivité (théorème 3.9) dont l'idée de la démonstration est due à Jacquet.

Plus précisément, nous prouvons d'abord que, $\sigma \in G(3)$ étant donné, il existe au plus un élément π de $A(3)$ vérifiant les conditions imposées à $\pi(\sigma)$ (Proposition 3.2). Puis nous prouvons que si σ est irréductible (et en outre monomiale si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$) alors un tel élément $\pi(\sigma)$ existe (Proposition 3.8) et que, restreinte à l'ensemble des éléments irréductibles de $G(3)$ (et en outre monomiaux si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$) l'application $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ est injective. Nous donnons en 3.16-3.18 une brève démonstration de la conjecture locale de Langlands pour $GL(2)$ (i.e. nous prouvons le théorème 2.10 avec $n = 2$), qui permet de traiter ensuite (Théorème 3.19) le cas des éléments non irréductibles de $G(3)$.

Nous terminons ce chapitre par un résultat sur les facteurs L et ε de paires d'éléments de A (Proposition 3.25) qui a un intérêt évident au vu de la conjecture énoncée en 2.9, et qui sera complété à l'appendice 6.

Les théorèmes essentiels de ce chapitre sont obtenus par une technique de passage du global au local, qui remonte à [JL] et à la preuve, par Deligne [De1], de l'existence des facteurs ε locaux. Nous utiliserons sans commentaire les notions et notations de la théorie (globale) des représentations automorphes, pour laquelle le lecteur pourra consulter [Co].

3.2. Si σ est un élément de $G(3)$, nous voulons prouver qu'il y a au plus un candidat pour $\pi(\sigma)$. Rappelons d'abord le lemme 7.5.3 et la proposition 5.1 de [JPS1].

Lemme 3.2.1. Soient π_1 et π_2 deux éléments de $A(3)$, ayant le même caractère central. Si pour tout caractère χ de $F^\times$, on a

$$L(\chi\pi_1) = L(\chi\pi_2)$$

et $$\varepsilon(\chi\pi_1) = \varepsilon(\chi\pi_2),$$

alors $$\pi_1 = \pi_2.$$

Lemme 3.2.2. Soient H une algèbre centrale simple sur F, de degré r^2, et π une représentation admissible irréductible de $H^\times$, de caractère central ω(*). Soient $\chi_1,\ldots,\chi_r$ des caractères de $F^\times$ dont le produit soit ω. Pour tout caractère χ de $F^\times$ d'exposant assez grand, on a

$$L(\chi\pi) = 1$$

et $$\varepsilon(\chi\pi) = \prod_{L=1}^{r} \varepsilon(\chi\chi_i).$$

Corollaire. Pour tout caractère χ de $F^\times$ d'exposant assez grand, on a

$$\varepsilon(\chi\pi) = \omega^{-1}(c_\chi)\varepsilon(\chi)^r \quad \text{(où } c_\chi \text{ est choisi comme en 2.15).}$$

En effet, 2.13 nous dit qu'on a $\varepsilon(\chi\chi_i) = \chi_i^{-1}(c_\chi)\varepsilon(\chi)$ si $a(\chi) \geq 2a(\chi_i)$.

Lemme 3.2.3. Soient ω un caractère de $F^\times$, n_o un entier, $n_o \geq 2$. Si pour tout caractère χ de $F^\times$ tel que $a(\chi) \geq n_o$, on a $\omega(c_\chi) = 1$, alors on a $\omega = 1$.

Démonstration. Soit n un entier, $n \geq n_o$. Tout élément c de $F^\times$ de valuation $-n-n(\psi)$ définit par la formule

$$\chi_c(1+x) = \psi(cx) \quad \text{pour} \quad x \in P_F^{n^+}$$

(*) Le groupe $H^\times$ des éléments inversibles de H est localement compact totalement discontinu. On a donc une notion de représentation admissible de $H^\times$[Ct]. Les facteurs L et ε sont définis dans [GJ]. Le centre de $H^\times$ étant isomorphe à $F^\times$, le caractère central d'une représentation admissible irréductible est considéré comme un caractère de $F^\times$. Enfin, si χ est un caractère de $F^\times$, et π une représentation admissible de $H^\times$, la notation $\chi\pi$ désigne la représentation qui à g associe $\chi \circ N(g) \cdot \pi(g)$, où N est la norme réduite de H à F.

un caractère de $U_F^{n^+}$ trivial sur U_F^n et non trivial sur U_F^{n-1}. Ce caractère peut se prolonger en un caractère de $F^\times$ d'exposant n, et par suite, sous les hypothèses du lemme, on a $\omega(c) = 1$. Faisant varier c, on voit que ω est trivial sur les unités de F; prenant un élément c de valuation $-n-1-n(\psi)$, on voit que ω est trivial sur une uniformisante de F. Donc $\omega = 1$. □

<u>Proposition 3.2</u>. Soient π_1 et π_2 deux éléments de $A(3)$. Si pour tout caractère χ de $F^\times$, on a

$$L(\chi\pi_1) = L(\chi\pi_2)$$

$$\text{et} \qquad \varepsilon(\chi\pi_1) = \varepsilon(\chi\pi_2)$$

alors π_1 et π_2 sont égaux.

<u>Démonstration</u>. A cause du lemme 3.2.1, il suffit de montrer que les caractères centraux ω_{π_1} et ω_{π_2} sont égaux. Posons $\omega = \omega_{\pi_1}\omega_{\pi_2}^{-1}$. Le corollaire du lemme 3.2.2 implique alors qu'on a $\omega(c_\chi) = 1$ pour tout caractère χ de $F^\times$ d'exposant assez grand. On a donc $\omega = 1$ grâce au lemme 3.2.3. □

3.3. La définition suivante est justifiée par la proposition 3.2.

<u>Définition 3.3</u>. Soit $\sigma \in G(3)$. S'il existe $\pi \in A(3)$ tel qu'on ait

$$L(\chi\pi) = L(\chi\sigma)$$

$$\text{et} \qquad \varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\sigma) \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times,$$

on dit que $\pi(\sigma)$ existe et on pose $\pi = \pi(\sigma)$.

<u>Proposition 3.3</u>. Soit $\sigma \in G(3)$. On suppose que $\pi(\sigma)$ existe. Alors on a

i) $\omega_{\pi(\sigma)} = \operatorname{Det} \sigma$;

ii) pour tout caractère χ de $F^\times$, $\pi(\chi\sigma)$ existe et vaut $\chi\pi(\sigma)$;

iii) $a(\sigma) = a(\pi(\sigma))$;

iv) $\pi(\check{\sigma})$ existe et vaut $\pi(\sigma)^{\vee}$.

<u>Remarque</u>. Sous les hypothèses de la proposition, $\pi(\sigma)$ est cuspidale si et seulement si σ est irréductible. En effet, on voit facilement (cf. 3.20 à 3.23) que les éléments σ de $G°(3)$ sont caractérisés par le fait qu'on a $L(\chi\sigma) = 1$ pour tout caractère χ de $F^{\times}$ et que les éléments π de $A°(3)$ sont caractérisés par le fait qu'on a $L(\chi\pi) = 1$ pour tout tel caractère χ.

<u>Preuve de la proposition</u>. ii) est clair, et iii) découle de la définition des exposants en termes de facteurs ε (cf. 2.4 et 2.8).

Prouvons i). Pour tout caractère χ de $F^{\times}$ d'exposant assez grand, on a

$$\varepsilon(\chi\sigma) = \varepsilon(\chi)^n \operatorname{Det}\sigma\,(c_\chi)^{-1} \quad \text{(cf. 2.13)}$$

et $$\varepsilon(\chi\pi(\sigma)) = \varepsilon(\chi)^n\,\omega_{\pi(\sigma)}(c_\chi)^{-1}$$ par le corollaire du lemme 3.2.2. Les caractères $\operatorname{Det}\sigma$ et $\omega_{\pi(\sigma)}$ coïncident donc sur c_χ et on conclut par le lemme 3.2.3.

Prouvons iv). Pour cela, rappelons (cf. [De1,5.7.1]) que si $\sigma \in G(n)$ on a

$$\varepsilon(\sigma,\psi,dx)(0)\varepsilon(\alpha\check{\sigma},\psi^{-1},dx)(0) = 1$$

où α désigne le caractère valeur absolue de F (cf. 2.1). Compte tenu de [De1,5.4], cela se traduit par l'égalité

$$\varepsilon(\sigma)(s)\varepsilon(\check{\sigma})(1-s) = \operatorname{Det}\sigma\,(-1).$$

D'autre part, pour $\pi \in A(n)$, on a [Ja1, p. 65]

$$\varepsilon(\pi)(s)\varepsilon(\check{\pi})(1-s) = \omega_\pi(-1).$$

Si $\sigma \in G(3)$ et $\pi = \pi(\sigma)$, on déduit de ces égalités et des parties i) et ii) de la proposition, qu'on a

$$\varepsilon(\chi\check{\pi}) = \varepsilon(\chi\check{\sigma}) \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times.$$

D'autre part, on vérifie facilement (cf. 3.20 à 3.23) l'égalité

$$L(\chi\check{\pi}) = L(\chi\check{\sigma}), \quad \text{pour tout tel caractère } \chi.$$

On a donc prouvé iv).

<u>Remarque</u> :

Soient E un corps local et φ un isomorphisme continu de E sur F. On peut faire agir φ sur les coefficients des matrices de $GL_n(E)$ ce qui donne un isomorphisme de $GL_n(E)$ sur $GL_n(F)$. On en déduit une bijection notée φ_A ou $\varphi : A_F \simeq A_E$. Si $\bar{E}$ est une clôture algébrique séparable de E et $\bar{\varphi}$ une extension de φ en un isomorphisme de $\bar{E}$ sur $\bar{F}$, alors $\bar{\varphi}$ permet d'identifier W_E à W_F d'où une identification $G_F \xrightarrow{\sim} G_E$ qui ne dépend que de φ (car $\bar{\varphi}$ est unique à automorphismes essentiellement intérieurs près) et qu'on note φ_G ou φ. Pour tout caractère χ de $F^\times$ $\chi \in A_F(1)$ on a $\varphi_G(\chi \circ \tau_F) = \varphi_A(\chi) \circ \tau_E$.

On vérifie aisément que, pour $\pi \in A_F$, on a

$$L(\varphi_A(\pi)) = L(\pi)$$

$$\varepsilon(\varphi_A(\pi), \psi \circ \varphi) = \varepsilon(\pi, \psi)$$

(remarquer que $\psi \circ \varphi$ est un caractère additif non trivial de E)

et $$\varphi_A(\chi\pi) = \varphi_A(\chi)\varphi_A(\pi) \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times.$$

De même, pour $\sigma \in G_F$, on a

$$L(\varphi_G(\sigma)) = L(\sigma)$$

$$\varepsilon(\varphi_G(\sigma), \psi \circ \varphi) = \varepsilon(\sigma, \psi)$$

et $$\varphi_G(\chi\sigma) = \varphi_A(\chi)\varphi_G(\sigma) \quad \text{pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times.$$

Par suite si $\sigma \in G_F(i)$, $i \leq 3$ et que $\pi(\sigma)$ existe, alors $\pi(\varphi_G(\sigma))$ existe dans $A_F(i)$ et on a $\pi(\varphi_G(\sigma)) = \varphi_A(\pi(\sigma))$.

Soit maintenant K une extension galoisienne finie de F. Les explications précédentes montrent que $\mathrm{Gal}(K/F)$ opère sur A_K et G_K. L'action d'un élément g de $\mathrm{Gal}(K/F)$ sera notée par un g en exposant. De plus, si $\sigma \in G_K(i)$, $i \leq 3$, et que $\pi(\sigma)$ existe, alors $\pi(\sigma^g)$ existe pour tout $g \in \mathrm{Gal}(K/F)$ et on a $\pi(\sigma^g) = \pi(\sigma)^g$. Cette remarque nous sera fort utile au chapitre 7.

3.4. Nous examinons maintenant dans quels cas l'on sait que $\pi(\sigma)$ existe. Rappelons la proposition 14.3.2 de [JPS1].

<u>Proposition 3.4</u>. Soient K une extension cubique séparable de F, η un caractère de $K^\times$ et σ la représentation induite à W_F du caractère $\eta \circ \tau_K$ de W_K. Alors $\pi(\sigma)$ existe. □

Remarquons que si la caractéristique résiduelle de F n'est pas 3, tout élément σ de $G^\circ(3)$ est de ce type (cf.[Ko1], Th. 1).

<u>Corollaire</u>. Si la caractéristique résiduelle de F est distincte de 3, $\pi(\sigma)$ existe pour tout $\sigma \in G^\circ(3)$.

3.5. Nous voulons montrer qu'en fait ce résultat subsiste si F est de caractéristique 3. Pour cela, il nous faut rappeler le théorème 14.2 de [JPS1].

<u>Théorème 3.5</u>. Soient F un corps global, $\bar{F}$ une clôture séparable algébrique de F, W_F le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F, Σ une représentation unitaire continue de degré 3 de W_F, telle que la fonction L associée $L(\chi\Sigma)$ soit entière pour tout caractère χ de W_F. Pour chaque place v de F, notons Σ_v la composante en v de Σ, qui est une (classe d'équivalence) de représen-

tations du groupe de Weil absolu de F_v. Alors, pour toute place finie v de F, $\pi(\Sigma_v)$ existe. Posant $\pi(\Sigma_v) = \pi_v$ pour toute place v de F où, si v est infinie, l'application π est celle définie par Langlands [La1], il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $GL_3(\mathbb{A}_F)$ dont la composante en toute place v de F soit π_v : $\Pi = \bigotimes_v \pi_v$.

Remarquons que, à cause du théorème fort de multiplicité 1 pour $GL(n,\mathbb{A}_F)$ ([JS], Th. 4.8), si S est un ensemble fini quelconque de places de F, Π est la seule représentation automorphe cuspidale de $GL(3,\mathbb{A}_F)$ dont la composante en v soit π_v pour toute place v hors de S.

Nous voulons appliquer ce théorème à une représentation continue unitaire irréductible Σ de degré 3 du groupe de Galois de $\bar{F}/F$, qui vérifie la conjecture d'Artin, ce qui signifie que, notant encore Σ la représentation de W_F associée à Σ, les fonctions $L(\chi\Sigma)$ sont entières pour tous les caractères χ de W_F. Cela nous permettra d'obtenir des informations locales, en utilisant le petit exercice de théorie des nombres formulé dans le prochain numéro.

3.6. Lemme. Soit E une extension galoisienne finie, dans $\bar{F}$, de notre corps local F fixé. Alors il existe un corps global F, une extension galoisienne E de F, une place v de F, une place w de E au-dessus de F, un isomorphisme φ du complété E_w sur E qui induise un isomorphisme de F_v sur F, tels que le groupe de décomposition en w de l'extension E/F soit le groupe de Galois de E sur F tout entier.

Démonstration. Soient n le degré de E sur F, et Q un polynôme unitaire de degré n, à coefficients dans F, tel que E soit le corps de décomposition de F dans $\bar{F}$. Soient H un corps global, u une place de H, et β un isomorphisme de H_u sur F. Soit P un polynôme unitaire de degré n, à coefficients dans H, tels que les coefficients de $\beta(P)$ soient très proches de ceux de Q. Par le lemme de Krasner [Lg p.43] on sait que le corps de décomposition de $\beta(P)$ dans $\overline{F}$ est E. Soient E un corps de décomposition de P, w une place de E au-dessus de u ; on peut prolonger β en un isomorphisme φ de E_w sur E. Notons alors F le corps fixé dans E par le groupe de décomposition en w de l'extension E/H, et v la place de F induite par w. Il est alors clair que la restriction de φ à F_v induit un isomorphisme de F_v sur F, et que le groupe de décomposition en w de l'extension E/F est $\mathrm{Gal}(E/F)$ tout entier. ∎

Dans la situation du lemme, l'isomorphisme β induit un isomorphisme $\tilde{\beta}$ des groupes $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\mathrm{Gal}(E/F)$.

3.7. Rappelons qu'une représentation (continue) de dimension finie de W_F se prolonge à G_F, i.e. est la restriction d'une représentation de G_F, si et seulement si son image est finie. De plus si σ est une représentation irréductible de W_F dans un espace vectoriel V, l'image de σ dans $PGL(V)$ est finie ([De1], § 4.10) et il existe une représentation τ, d'image finie, de W_F dans V, qui définisse le même homomorphisme de W_F dans $PGL(V)$ que σ ([Ta],2.23) et donc qui diffère de σ par un caractère de $F^\times$. On a donc prouvé le résultat suivant :

<u>Lemme 3.7</u>. Soit σ un élément de $G^\circ(3)$. Il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que $\chi\sigma$ soit d'image finie.

<u>3.8. Proposition</u>. Soit σ un élément de $G^\circ(3)$. Si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, on suppose que σ est monomiale. Alors $\pi(\sigma)$ existe.

Démonstration. Supposons d'abord σ d'image finie. Il existe alors une extension galoisienne finie E de F dans $\bar{F}$, telle que σ se factorise par $\mathrm{Gal}(E/F) = W_F/W_E$.

Utilisons le lemme 3.6, et avec les notations de ce lemme, posons

$$\Sigma = \sigma \circ \tilde{\beta}$$

où $\tilde{\beta}$ désigne l'isomorphisme de $\mathrm{Gal}(E/F)$ sur $\mathrm{Gal}(E/F)$ déduit de β. Alors Σ est une représentation continue d'image finie de $\mathrm{Gal}(E/F)$, donc définit une représentation unitaire irréductible de degré 3 de W_F, encore notée Σ. On peut appliquer alors le théorème 3.5. En effet, si F est de caractéristique non nulle, Σ vérifie la conjecture d'Artin [We2, § V]. Si F est de caractéristique nulle, σ est monomiale (par hypothèse si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, et par les résultats de H. Koch [Ko1] sinon) donc Σ est aussi monomiale et vérifie la conjecture d'Artin. On peut donc considérer la représentation (cuspidale) $\pi(\Sigma_v)$ de $GL_3(F_v)$. Il est alors clair, en composant avec β^{-1}, qu'on obtient un élément π de $A°(3)$ qui vérifie toutes les conditions imposées à $\pi(\sigma)$: $\pi = \pi(\sigma)$.

Si σ n'est pas d'image finie, choisissons (lemme 3.7) un caractère χ de $F^\times$ tel que $\tau = \chi\sigma$ soit d'image finie. Alors $\pi(\tau)$ existe et on a $\pi(\sigma) = \chi^{-1}\pi(\tau)$. □

3.9. Nous avons prouvé l'existence de $\pi(\sigma)$ pour beaucoup d'éléments de $G°(3)$, tous si F n'est pas une extension de $\mathbb{Q}_3$. Nous voulons prouver, suivant Jacquet [Ja 3], le résultat d'injectivité suivant (voir [GeJ] pour le cas de $G°(2)$).

<u>Théorème 3.9</u> (Jacquet). Soient σ_1 , σ_2 deux éléments de $G°(3)$. Si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, on suppose σ_1 et σ_2 monomiales. Alors, $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$ implique $\sigma_1 = \sigma_2$.

<u>Lemme 3.9</u>. Soit $\sigma \in G°(3)$. Alors, σ est d'image finie si et seulement si $\mathrm{Det}\,\sigma$ est d'image finie.

<u>Démonstration</u>. Si σ est d'image finie, $\mathrm{Det}\,\sigma$ l'est aussi. Choisissons une représentation de W_F dans un espace vectoriel V , de classe σ , et notons I son image dans GL(V) . On sait que l'image de I dans PGL(V) est finie, donc aussi $I \cap SL(V)$. Mais l'image de $\mathrm{Det}\,\sigma$ est en bijection avec $I/I \cap SL(V)$, et I est finie si l'image de $\mathrm{Det}\,\sigma$ l'est. □

Ramenons la démonstration du théorème 3.9 au cas où σ_1 et σ_2 sont d'image finie. Supposons d'abord σ_1 d'image finie. On a $\omega_{\pi(\sigma_1)} = \omega_{\pi(\sigma_2)}$, d'où $\mathrm{Det}\,\sigma_1 = \mathrm{Det}\,\sigma_2$ [Prop. 3.3.]. Par suite [lemme 3.9] , σ_2 est aussi d'image finie. Si σ_1 n'est pas d'image finie, choisissons un caractère χ de $F^\times$ tel que $\chi\sigma_1$ soit d'image finie. On a alors $\pi(\chi\sigma_1) = \pi(\chi\sigma_2)$. Si on connaît le théorème dans le cas où σ_1 et σ_2 sont d'image finie, on peut l'appliquer à $\chi\sigma_1$ et $\chi\sigma_2$ et conclure $\chi\sigma_1 = \chi\sigma_2$, d'où $\sigma_1 = \sigma_2$.

3.10. Nous déduirons le théorème 3.9 de la proposition suivante :

<u>Proposition</u>. i) Soient π_1 , $\pi_2 \in A°(3)$. Alors,

$$L(\pi_1 \times \pi_2) = \prod_\chi L(\chi) ,$$

où le produit porte sur les caractères χ de $F^\times$ tels que $\chi\check{\pi}_1$ soit équivalent à π_2 .

ii) Soient σ_1 , $\sigma_2 \in G°(3)$. Alors,

$$L(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \prod_{\chi} L(\chi)$$

où le produit porte sur les caractères χ de $F^\times$ tels que $\chi\check{\sigma}_1$ soit équivalent à σ_2 .

iii) Soient σ_1 , $\sigma_2 \in G°(3)$, d'image finie. Si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, on suppose σ_1 et σ_2 monomiales. Alors on a

$$L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2)) = L(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$$

et
$$\varepsilon(\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2)) = \varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2) . \quad \square$$

<u>Démonstration du théorème</u>. On a $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$ d'où $\pi(\sigma_1)^\vee = \pi(\sigma_2)^\vee$, et $\pi(\check{\sigma}_1) = \pi(\check{\sigma}_2)$ par la proposition 3.3.

On a $L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\check{\sigma}_1)) = L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\check{\sigma}_2))$ d'où, par iii), $L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\check{\sigma}_1)) = L(\sigma_1 \otimes \check{\sigma}_2)$. Mais, par i), le facteur $L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\check{\sigma}_1))$ a un pôle en $s = 0$, car il est divisible par $(1-q^{-s})^{-1}$. Donc, $L(\sigma_1 \otimes \check{\sigma}_2)$ a un pôle en $s = 0$. Mais les caractères χ de $F^\times$ tels que $\chi\check{\sigma}_1$ soit équivalent à $\check{\sigma}_2$ et que $L(\chi)$ soit différent de 1 sont non ramifiés, et le seul caractère non ramifié de $F^\times$ tel que $L(\chi)$ ait un pôle en $s = 0$ est le caractère trivial; donc, par ii), on a $\check{\sigma}_1 = \check{\sigma}_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$.

<u>Remarque</u> 1. On peut prouver la partie iii) de la proposition sans supposer σ_1 et σ_2 d'image finie, cf. 3.24 .

<u>Remarque 2</u>. Il découlera de notre résultat principal qu'on a $\chi\pi(\check{\sigma}_1) = \pi(\sigma_2)$ si et seulement si $\chi\check{\sigma}_1 = \sigma_2$.

3.11. Prouvons les assertions de la proposition. L'assertion i) provient de [JPS2] . Pour prouver ii), on remarque que $L(\sigma_1 \otimes \sigma_2)^{-1}$ est le déterminant de $1 - \mathrm{Fr}\, q^{-s}$ agissant sur l'espace $\mathrm{Hom}_{I_F}(\check{\sigma}_1, \sigma_2)$ des homomorphismes de l'espace de $\check{\sigma}_1$ dans celui de σ_2, qui respectent l'action du groupe d'inertie. Sur cet espace $\mathrm{Hom}_{I_F}(\check{\sigma}_1, \sigma_2)$, le groupe W_F/I_F agit par une somme de caractères de degré 1, non ramifiés(*). Si χ est un caractère de $F^\times$ trivial sur U_F, le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{I_F}(\check{\sigma}_1, \sigma_2)$ sur lequel W_F agit par $\chi \circ \tau_F$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{W_F}(\chi\check{\sigma}_1, \sigma_2)$; comme $\check{\sigma}_1$ et σ_2 sont irréductibles, cet espace est de dimension au plus un. Comme de plus on a $L(\chi) = 1$ si χ est un caractère de $F^\times$ non trivial sur U_F, on a bien

$$L(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \prod_\chi L(\chi) ,$$

où χ parcourt les caractères de $F^\times$ tels que $\chi\check{\sigma}_1 \simeq \sigma_2$.

3.12. Prouvons la partie iii) de la proposition. Soit E une extension galoisienne finie de F dans $\bar{F}$, contenant les corps fixés par les noyaux de σ_1 et σ_2. Utilisons à nouveau le lemme 3.6 (et ses notations). Comme dans la proposition 3.8, posons

$$\Sigma_1 = \sigma_1 \circ \tilde{\beta}$$

$$\Sigma_2 = \sigma_2 \circ \tilde{\beta}$$

et considérons les représentations automorphes cuspidales Π_1 et Π_2 de $GL_3(\mathbb{A}_F)$ correspondant à Σ_1 et Σ_2. Choisissons un caractère additif non trivial Ψ du groupe des classes d'adèles de F, de composante Ψ_α

(*) L'action de $\omega \in W_F/I_F$ sur l'élément $f \in \mathrm{Hom}_{I_F}(\check{\sigma}_1, \sigma_2)$ associe à (ω, f) l'élément $\sigma_2(\omega) \circ f \circ {}^F\check{\sigma}_1(\omega^{-1})$.

en une place α de F, et pour chaque place α de F prenons sur F_α la mesure de Haar additive $d_\alpha x$ autoduale pour ψ_α. On sait [JPS5] que la produit infini

$$\prod_\alpha L(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha})\ (s)$$

converge pour s de partie réelle assez grande et se prolonge en une fonction méromorphe $L(\Pi_1 \times \Pi_2)$ du paramètre complexe s *).

De plus on sait que sauf pour un nombre fini de places α, on a $\varepsilon(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha}, \psi_\alpha, d_\alpha x) = 1$, et que, posant $\varepsilon(\Pi_1 \times \Pi_2) = \prod_\alpha \varepsilon(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha}, \psi_\alpha, d_\alpha x)$, on a l'équation fonctionnelle

$$L(\Pi_1 \times \Pi_2)(s) = \varepsilon(\Pi_1 \times \Pi_2)(s)\, L(\check{\Pi}_1 \times \check{\Pi}_2)(1-s)$$

le signe $\vee$ désignant la contragrédiente.

On peut également considérer l'équation fonctionnelle globale attachée à la représentation $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ de W_F :

$$L(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)(s) = \varepsilon(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)(s)\, L(\check{\Sigma}_1 \otimes \check{\Sigma}_2)\ (1-s) \quad .$$

Pour toutes les places finies α de F, sauf un nombre fini d'entre elles, les représentations $\Sigma_{1\alpha}$, $\Sigma_{2\alpha}$, $\Pi_{1\alpha}$, $\Pi_{2\alpha}$ sont non ramifiées. Pour une telle place α, et pour $i = 1$ ou 2, soient μ_i^1, μ_i^2, μ_i^3 les caractères non ramifiés de $F_\alpha^\times$ tels que $\Sigma_{i\alpha}$ soit équivalente à $\mu_i^1 \circ \tau_{F_\alpha} \oplus \mu_i^2 \circ \tau_{F_\alpha} \oplus \mu_i^3 \circ \tau_{F_\alpha}$. On a alors

$$L(\Sigma_{1\alpha} \times \Sigma_{2\alpha}) = L(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha}) = \prod_{j=1}^{3} \prod_{k=1}^{3} L(\mu_1^j \mu_2^k)$$

[JS, p. 511, formule (2)] et

*) bornée à l'infini dans les bandes verticales si F est un corps de nombres, et fonction rationnelle de q^{-s} si F est un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$.

$$\varepsilon(\Sigma_{1\alpha}\otimes\Sigma_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) = \varepsilon(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) = 1$$

si $n(\Psi_\alpha) = 0$ [JPS3] , ce qui est vrai pour presque toute place α de F .

Supposons, comme on en a le droit, que pour α archimédienne, on ait $\psi_\alpha(x) = \exp(2\pi i x)$ si F_α est isomorphe à $\mathbb{R}$ et

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(\alpha\pi i(x+\bar{x}))$$

si F_α est isomorphe à $\mathbb{C}$, la barre désignant la conjugaison complexe; on déduit de [JPS4] que si α est une place archimédienne de F , on a

$$L(\Sigma_{1\alpha}\otimes\Sigma_{2\alpha}) = L(\Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha})$$

$$\varepsilon(\Sigma_{1\alpha}\otimes\Sigma_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) = \varepsilon(\Pi_{1\alpha}\times\Pi_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) .$$

Par suite, il existe un ensemble fini S de places finies de F , contenant la place fixée v de F (cf. notations du lemme 3.6), tel qu'on ait l'égalité

$$\prod_{\alpha\in S}\frac{L(\Sigma_{1\alpha}\otimes\Sigma_{2\alpha})}{L(\Pi_{1\alpha}\times\Pi_{2\alpha})}(s) = \prod_{\alpha\in S}\frac{\varepsilon(\Sigma_{1\alpha}\otimes\Sigma_{2\alpha},\Psi_\alpha, d_\alpha x)}{\varepsilon(\Pi_{1\alpha}\times\Pi_{2\alpha},\Psi_\alpha, d_\alpha x)}(s)\prod_{\alpha\in S}\frac{L(\check{\Sigma}_{1\alpha}\otimes\check{\Sigma}_{2\alpha})}{L(\check{\Pi}_{1\alpha}\times\check{\Pi}_{2\alpha})}(1-s) .$$

3.13. A ce stade, il nous faut rappeler les résultats suivants.

<u>Lemme 3.13.1.</u> Soient F un corps global, S un ensemble fini de places finies de K et m une fonction de S dans $\mathbb{N}$. Il existe un caractère χ du groupe des classes d'idèles de F (ou encore du groupe de Weil W_F) tel que, pour $\alpha \in S$, l'exposant de χ_α vaille au moins $m(\alpha)$, et que pour tout place finie α hors de S , χ_α soit non ramifié. On peut imposer à χ d'être unitaire, et trivial en une place finie fixée hors de S .

Démonstration. Seule la dernière phrase ne découle pas du lemme 4.14 de [Del]. Mais, utilisant la torsion par une puissance du caractère norme de W_F, on voit facilement qu'on peut imposer les conditions supplémentaires demandées. ∎

Lemme 3.13.2. Soient K un corps local, Ψ un caractère additif non trivial de K, dx la mesure de Haar sur le groupe additif K, autoduale pour Ψ, π_1 un élément de $A_K(n_1)$, π_2 un élément de $A_K(n_2)$. Si χ est un caractère de $K^\times$ d'exposant suffisamment grand, on a

$$L(\chi\pi_1 \times \pi_2) = 1$$

$$\varepsilon(\chi\pi_1 \times \pi_2, \Psi, dx) = \varepsilon(\chi, \Psi, dx)^{n_1 n_2}\, \omega_{\pi_1}^{n_2}\, \omega_{\pi_2}^{n_1}(c_\chi^{-1})$$

où c_χ est un élément de $K^\times$ tel qu'on ait

$$\chi(x) = \Psi(c_\chi(x-1)) \quad \text{pour} \quad x \in K^\times,\ 2v_K(x) \geq a(\chi).$$

Démonstration. Cela découle immédiatement de [JPS 3, p. 61](*) et de 2.13.

3.14. Revenons à la situation de 3.12 et choisissons, grâce au lemme 3.13.1 un caractère unitaire χ de W_F, non ramifié hors de $S\smallsetminus\{v\}$, trivial en v, et d'exposant suffisamment grand en les places α de $S\smallsetminus\{v\}$, pour qu'on puisse appliquer le lemme 3.13.2 à $\pi_1 = \Pi_{1\alpha}$ et $\pi_2 = \Pi_{2\alpha}$, et le lemme 3.3 à $\sigma = \Sigma_{1\alpha} \otimes \Sigma_{2\alpha}$. Grâce à la remarque que $\mathrm{Det}(\Sigma_{1\alpha} \otimes \Sigma_{2\alpha})$ vaut $(\mathrm{Det}\,\Sigma_{1\alpha})^3 \cdot (\mathrm{Det}\,\Sigma_{2\alpha})^3$, on voit que pour χ choisi comme indiqué, et $\alpha \in S\smallsetminus\{v\}$, on a

(*) où il faut remplacer ω et η par ω^r et η^m, ce qui se voit déjà pour les représentations de la série principale.

$$L(\chi_\alpha \Sigma_{1\alpha} \otimes \Sigma_{2\alpha}) = L(\chi_\alpha \Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha})$$

$$L(\chi_\alpha^{-1} \check{\Sigma}_{1\alpha} \otimes \check{\Sigma}_{2\alpha}) = L(\chi_\alpha^{-1} \check{\Pi}_{1\alpha} \times \check{\Pi}_{2\alpha})$$

$$\varepsilon(\chi_\alpha \Sigma_{1\alpha} \otimes \Sigma_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) = \varepsilon(\chi_\alpha \Pi_{1\alpha} \times \Pi_{2\alpha}, \Psi_\alpha, d_\alpha x) .$$

Reprenant le raisonnement de 3.12 avec $\chi\Sigma_1$ au lieu de Σ_1, on obtient l'égalité

$$\frac{L(\sigma_1 \otimes \sigma_1)}{L(\pi_1 \times \pi_2)} (s) = \frac{\varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2, \psi, dx)}{\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2, \psi, dx)} (s) \frac{L(\check{\sigma}_1 \otimes \check{\sigma}_2)}{L(\check{\pi}_1 \times \check{\pi}_2)} (1-s) ,$$

où l'on a posé $\pi_1 = \pi(\sigma_1)$, $\pi_2 = \pi(\sigma_2)$, et où on a supposé, ce qui est loisible, que Ψ_v correspond à ψ par l'isomorphisme de F_v et F.

3.15. Partons de l'égalité obtenue en 3.14. Il est clair que si χ est un caractère de $F^\times$ tel que $\chi\sigma_1 = \sigma_2$, on a aussi $\chi\pi_1 = \pi_2$. On a donc d'après la proposition 3.10 i) et ii), l'égalité

$$\frac{L(\pi_1 \times \pi_2)}{L(\sigma_1 \otimes \sigma_2)} = \Pi L(\chi)$$

où le produit porte sur les caractères non ramifiés χ de $F^\times$ tels que

$$\chi\check{\pi}_1 = \pi_2 \quad \text{mais} \quad \chi\check{\sigma}_1 \neq \sigma_2 .$$

De même, on a

$$\frac{L(\check{\pi}_1 \times \check{\pi}_2)}{L(\check{\sigma}_1 \otimes \check{\sigma}_2)} = \Pi L(\chi^{-1})$$

où le produit porte sur les mêmes caractères de $F^\times$. Supposons qu'on ait $r \geq 1$ tels caractères $\chi_1,\dots,\chi_r$ et posons $\chi_i(\tilde{\omega}_F) = a_i \in \mathbb{C}^\times$, pour $i = 1,\dots,r$. On a alors

$$\prod_{i=1}^{r} (1-a_i q^{-s}) = \alpha q^{\beta s} \prod_{i=1}^{r} (1-a_i^{-1} q^{s-1})$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $\beta \in \mathbb{Z}$, d'où

$$\prod_{i=1}^{r} (1-a_i q^{-s}) = \gamma q^{\delta s} \prod_{i=1}^{r} (1-a_i q\, q^{-s})$$

avec $\gamma \in \mathbb{C}^\times$, $\delta \in \mathbb{Z}$. Posant $q^{-s} = X$ on obtient, dans $\mathbb{C}[X,X^{-1}]$, l'égalité

$$\prod_{i=1}^{r} (1-a_i X) = \gamma X^\delta \prod_{i=1}^{r} (1-a_i q\, X)$$

Par suite, on a $\delta = 0$ (prendre $X = 0$). Le premier membre de l'égalité précédente est un polynôme en X ayant pour racines les a_i^{-1} , le second membre un polynôme en X ayant pour racines les $a_i^{-1} q^{-1}$. C'est impossible, q n'étant pas une racine de l'unité. On a donc bien

$$L(\pi_1 \times \pi_2) = L(\sigma_1 \otimes \sigma_2) \quad \text{et}$$

$$L(\check{\pi}_1 \times \check{\pi}_2) = L(\check{\sigma}_1 \otimes \check{\sigma}_2) \text{ , d'où}$$

$$\varepsilon(\pi_1 \times \pi_2,\psi,dx) = \varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2,\psi,dx) ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Ceci achève la preuve de la proposition 3.10 iii).

3.16. Indiquons brièvement comment on peut prouver, selon les lignes précédentes, la conjecture de Langlands locale pour $GL(2)$, c'est à dire l'énoncé du Théorème 2.10 pour $n = 2$. Grâce à la théorie de Hecke pour $GL(2)$ [JL] et des considérations simples semblables à celles du début de ce chapitre, on prouve que pour $\sigma \in G(2)$, au plus une seule représentation $\pi \in A(2)$ peut vérifier les conditions imposées à $\pi(\sigma)$. Si une telle représentation existe, on la note $\pi(\sigma)$ et on dit que $\pi(\sigma)$ existe.

Pour $\sigma \in G^\circ(2)$, l'existence de $\pi(\sigma)$ découle de la construction d'un relèvement de σ au cas global, construction en tout point analogue à celle que nous avons faite pour $n = 3$, et du fait que la conjecture d'Artin est vraie pour de tels relèvements [Tu3]. L'injectivité de $\sigma \mapsto \pi(\sigma): G^\circ(2) \to A^\circ(2)$ se prouve alors comme nous l'avons fait. Les arguments de comptage de Tunnell [Tu1] permettent alors de montrer que l'on obtient une bijection de $G^\circ(2)$ sur $A^\circ(2)$.

3.17. Si $\sigma \in G(2) \setminus G^\circ(2)$, alors σ peut être réductible

$$\sigma = (\chi_1 \circ \tau_F) \oplus (\chi_2 \circ \tau_F),$$

pour des caractères χ_1 et χ_2 de $F^\times$.

En ce cas $\pi(\sigma)$ existe et est la représentation traditionnellement notée $\pi(\chi_1, \chi_2)$ [GeL, appendices]. On peut aussi avoir σ indécomposable $\sigma = \chi \cdot Sp(2)$ pour un caractère χ de $F^\times$; alors $\pi(\sigma)$ existe et est la représentation spéciale $\sigma(\chi, \alpha\chi)$ [loc.cit]. Comme toute représentation dans $A(2)$, non cuspidale, est soit de la forme $\sigma(\chi_1, \chi_2)$, soit de la forme

$\sigma(\chi,\alpha\chi)$, on a une surjection de $G(2) \smallsetminus G^{\circ}(2)$ sur $A(2) \smallsetminus A^{\circ}(2)$. On a même une bijection puisque π détermine la paire de caractères $\{\chi_1,\chi_2\}$ dans le premier cas, et le caractère χ dans le second. Ainsi $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ donne une bijection de $G(2)$ sur $A(2)$ d'où la partie 1) du Théorème 2.10 pour $n = 2$.

3.18. Pour $\sigma \in G(2)$, on prouve l'analogue de la Proposition 3.3., ce qui donne la partie 2) du Théorème 2.10. La troisième partie est claire puisque les seules représentations essentiellement de carré intégrable de $A(2) \smallsetminus A^{\circ}(2)$ sont les représentations spéciales, donc les représentations $\pi(\sigma)$ pour $\sigma \in G(2)$ indécomposable non irréductible . On a donc bien la conjecture de Langlands locale pour $GL(2)$.

3.19. Nous prouverons au chapitre 7 que $\pi(\sigma)$ existe pour tout $\sigma \in G^{\circ}(3)$ (le seul cas litigieux, après ce chapitre 3, est celui où F est une extension de $\mathbb{Q}_3$ et σ primitive), et,grâce au chapitre 4, qu'on obtient ainsi une bijection de $G^{\circ}(3)$ sur $A^{\circ}(3)$. On aura alors prouvé le Théorème 2.10 complètement, puisqu'on a le résultat suivant :

<u>Théorème.</u> i) Pour $\sigma \in G(3) \smallsetminus G^{\circ}(3)$, $\pi(\sigma)$ existe.

ii) On obtient ainsi une bijection de $G(3) \smallsetminus G^{\circ}(3)$ sur $A(3) \smallsetminus A^{\circ}(3)$ qui fait correspondre aux représentations indécomposables non irréductibles de W_F' les représentations essentiellement de carré intégrable non cuspidales de $GL(3,F)$.

Ce résultat utilise le fait que la conjecture de Langlands locale pour $GL(2)$ est vraie; on le prouve dans les numéros suivants.

3.20. On utilisera les résultats de [Ja1] , article auquel le lecteur se reportera pour les faits que nous énonçons sans démonstration. On peut aussi utiliser [JPS1] et [Z] .

Décrivons d'abord les représentations de $A(3) \smallsetminus A^\circ(3)$ qui sont essentiellement de carré intégrable. Notons B le sous-groupe de $GL_3(F)$ formé des matrices triangulaires supérieures. Pour tout caractère η de F la représentation induite (notations de [Ja1]) $I(G,B;\eta,\alpha\eta,\alpha^2\eta)$ *) a un unique quotient irréductible π , qui est essentiellement de carré intégrable. La représentation π détermine le caractère η et on obtient ainsi les représentations essentiellement de carré intégrable dans $A(3) \smallsetminus A^\circ(3)$. Pour tout caractère χ de $F^\times$, on a

$$L(\chi\pi) = L(\chi\alpha^2\eta)$$

et $$\gamma(\chi\pi) = \gamma(\chi\eta)\gamma(\chi\alpha\eta)\gamma(\chi\alpha^2\eta) \quad \text{(voir 2.6 pour la notation } \gamma(\ )).$$

Comme $\check{\pi}$ est l'unique quotient irréductible de $I(G,B,\alpha^{-2}\eta^{-1},\alpha^{-1}\eta^{-1},\eta^{-1})$ la dernière égalité implique

$$\varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\eta)\ \varepsilon(\chi\alpha\eta)\ \varepsilon(\chi\alpha^2\eta)\ B$$

où $$B(s) = 1 \quad \text{si } \chi\eta \text{ est ramifié}$$

$$B(s) = \chi^2\alpha\ \eta^2(\varpi_F)q^{-2s} \quad \text{si } \chi\eta \text{ est non ramifié.}$$

Par suite, posant $\sigma = \eta\cdot Sp(3) \in G(3) \smallsetminus G^\circ(3)$, on vérifie immédiatement grâce à [Ta] , 4.1.6, qu'on a $\pi = \pi(\sigma)$. On obtient ainsi une bijection entre éléments indécomposables dans $G(3) \smallsetminus G^\circ(3)$ et éléments essentiellement de carré intégrable dans $A(3) \smallsetminus A^\circ(3)$.

*) Rappelons cf. 2.1 que α désigne le caractère $x \longmapsto |x|_F$ de $F^\times$.

3.21. Décrivons ensuite les représentations tempérées de $A(3)$, non essentiellement de carré intégrable. Deux cas sont alors possibles et s'excluent l'un l'autre. Ou bien il existe des caractères unitaires η_1, η_2, η_3 de $F^\times$ tels que $\pi = I(G,B;\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, ou bien il existe une représentation unitaire $\rho \in A(2)$, de carré intégrable, et un caractère unitaire η de $F^\times$ tels que $\pi = I(G,P_1;\rho,\eta)$, où on a noté P_1 le sous groupe de $GL_3(F)$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs $(2,2)$ et $(1,1)$. De plus, dans le premier cas, π détermine le triplet $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ et pour tout caractère χ de $F^\times$ on a

$$L(\chi\pi) = L(\chi\eta_1)\, L(\chi\eta_2)\, L(\chi\eta_3)$$

$$\varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\eta_1)\, \varepsilon(\chi\eta_2)\, \varepsilon(\chi\eta_3)$$

et par suite $\pi = \pi(\sigma)$ où $\sigma = (\eta_1 \oplus \eta_2 \oplus \eta_3) \circ \tau_F$ est déterminée par π.

Dans le second cas, π détermine ρ et η et pour tout caractère χ de $F^\times$, on a

$$L(\chi\pi) = L(\chi\rho)\, L(\chi\eta)$$

$$\varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\rho)\, \varepsilon(\chi\eta)$$

et par suite $\pi = \pi(\sigma)$ où $\sigma = \tau \oplus (\eta \circ \tau_F)$, τ étant l'unique représentation de $G(2)$, indécomposable, telle que $\rho = \pi(\tau)$; ainsi σ est déterminée par π.

3.22. Supposons maintenant π essentiellement tempérée, non essentiellement de carré intégrable. Alors il existe un nombre réel t unique tel que $\alpha^t\pi$

soit tempérée, non de carré intégrable. Il est clair par ce qui précède que $\pi = \pi(\sigma)$ où σ est déterminée par π.

3.23. Supposons enfin π non essentiellement tempérée. On a alors trois cas qui s'excluent mutuellement [Ja1] ou [JPS1, §6].

Premier cas : Il existe des caractères unitaires η_1, η_2, η_3 de $F^\times$ et des nombres réels t_1, t_2, t_3 vérifiant $t_1 > t_2 > t_3$, tels que π soit l'unique quotient irréductible de $\mathrm{Ind}(G,B,\alpha^{t_1}\eta_1,\alpha^{t_2}\eta_2,\alpha^{t_3}\eta_3)$. On a alors $\pi = \pi(\sigma)$ où

$$\sigma = (\alpha^{t_1}\eta_1 \oplus \alpha^{t_2}\eta_2 \oplus \alpha^{t_3}\eta_3) \circ \tau_F$$

est déterminée par π.

Second cas : Il existe une représentation tempérée $\rho \in A(2)$, un caractère unitaire η de $F^\times$, et des nombres réels t_1, t_2, vérifiant $t_1 > t_2$, tels que π soit l'unique quotient irréductible de $\mathrm{Ind}(G,P_1;\alpha^{t_1}\rho,\alpha^{t_2}\eta)$. On a alors $\pi = \pi(\sigma)$ où $\sigma = \alpha^{t_1}\rho \oplus (\alpha^{t_2}\eta \circ \tau_F)$ est déterminée par π.

Troisième cas : Il existe une représentation tempérée $\rho \in A(2)$, un caractère unitaire η de $F^\times$, et des nombres réels t_1, t_2 vérifiant $t_1 > t_2$, tels que π soit l'unique quotient irréductible de $\mathrm{Ind}(G,P_2,,\alpha^{t_1}\eta,\alpha^{t_2}\rho)$, où P_2 désigne le sous-groupe de $GL_3(F)$ formé des matrices triangulaires supérieures par blocs $(1,1)$ et $(2,2)$. On a alors $\pi = \pi(\sigma)$ où $\sigma = \alpha^{t_2}\rho \oplus (\alpha^{t_1}\eta \circ \tau_F)$ est déterminée par π.

3.24. On remarque alors que toutes les représentations σ de $G(3) \smallsetminus G^\circ(3)$ sont apparues, une fois et une seule, dans la liste précédente. On a donc prouvé que $\pi(\sigma)$ existe pour $\sigma \in G(3) \smallsetminus G^\circ(3)$ et que $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ donne une bijection de $G(3) \smallsetminus G^\circ(3)$ sur $A(3) \smallsetminus A^\circ(3)$. De plus on a vu que les σ indécomposables correspondaient bien aux π essentiellement de carré intégrable. Ceci prouve le Théorème 3.19.

3.25. Nous terminons ce chapitre par un résultat sur les facteurs L et ε de paires de représentations, corollaire de notre théorème principal 2.10*), qui généralise la partie iii) de la proposition 3.10. L'intérêt de ce résultat est évident au regard de la conjecture énoncée en 2.9. Nous ne pouvons pas malheureusement prouver la partie b) de la proposition, quand F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, sans faire l'hypothèse sur σ_1 et σ_2. A l'appendice 6, on traite un cas qui n'est pas couvert par la proposition 3.25. Le cas général de b), i.e. sans hypothèse sur σ_1 et σ_2, serait démontré si l'on savait prouver la conjecture d'Artin pour des représentations du groupe de Weil d'un corps global dont proviendraient σ_1 et σ_2, ce qu'on ne sait pas faire à l'heure actuelle si σ_1 ou σ_2 est irréductible primitive de degré 3.

<u>Proposition</u>. Soient $\sigma_1 \in G(i)$, $i \leq 3$, et $\sigma_2 \in G(j)$, $j \leq 3$.

a) On a

$$L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2)) = L(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$$

b) Dans le cas où F est extension de $\mathbb{Q}_3$ et où $\sigma_1 \in G^\circ(3)$, on suppose que σ_1 est monomiale; dans le cas où F est extension de $\mathbb{Q}_3$ et où $\sigma_2 \in G^\circ(3)$, on suppose que σ_2 est monomiale. Alors on a

$$\varepsilon(\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2)) = \varepsilon(\sigma_1 \otimes \sigma_2) .$$

Nous nous contentons de donner au numéro suivant une esquisse de démonstration.

*) Nous n'utiliserons pas cette proposition dans la suite !

3.26. Supposons d'abord σ_1 et σ_2 irréductibles. Alors on a

$$L(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \Pi L(\chi),$$

le produit portant sur les caractères χ de $F^\times$ tels que $\check{\chi}\sigma_2 = \sigma_1$, et

$$L(\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2) = \Pi L(\chi)$$

le produit portant sur les caractères χ de $F^\times$ tels que $\chi\pi(\check{\sigma}_2) = \pi(\sigma_1)$.

Si les produits sont non vides, on a deg σ_1 = deg σ_2 . Mais on a alors $\chi\pi(\check{\sigma}_2) = \pi(\sigma_1)$ si et seulement si $\chi\check{\sigma}_2 = \sigma_1$, puisque π est injective sur $G(i)$ $i \leq 3$. D'où a) si σ_1 et σ_2 sont irréductibles. Si σ_1 ou σ_2 n'est pas irréductible, alors on calcule facilement les facteurs L de $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ et $\pi(\sigma_1) \times \pi(\sigma_2)$ en fonction des facteurs L de représentations dans G de degrés plus petits, en utilisant [Ta] et [JPS2] . Cela donne a) sans difficulté.

Dans le cas b), supposant d'abord σ_1 et σ_2 irréductibles, on se ramène à σ_1 et σ_2 d'image finie par torsion par un caractère de la forme α^t , $t \in \mathbb{C}$. On utilise alors un raisonnement analogue à la démonstration de 3.12, le point crucial étant que σ_1 et σ_2 proviennent de représentations du groupe de Galois d'un corps global vérifiant la conjecture d'Artin. On se ramène au cas où σ_1 et σ_2 sont irréductibles comme précédemment. D'où b).

4. Surjectivité.

4.1. L'idée sous-jacente à notre preuve de la surjectivité remonte à [Tu1]. On utilise une correspondance entre $G°(3)$ et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations du groupe multiplicatif d'un corps (gauche) de centre F et de dimension 9 sur F. Des arguments de comptage permettent alors de prouver que l'injectivité de l'application $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ de $G°(3)$ dans $A°(3)$ entraîne sa bijectivité. La première étape, due à Jacquet et Langlands [JL] pour $n = 2$, est basée dans notre cas sur la théorie de Hecke pour $GL(3)$ [JPS1] et une version "élémentaire" de la formule des traces, qui est une adaptation au cadre adélique de calculs de traces d'opérateurs de Hecke dans les espaces de formes modulaires.

Une telle formule a été établie pour la première fois dans le cadre adélique et pour tout groupe réductif par Deligne et Kazhdan [De3, DK] et plus récemment par Rogawski [Ro2] pour étudier la correspondance entre $A°(n)$ et représentations de corps gauches de centre F et de degré n^2 sur F (voir [Vi] pour une exposé simplifié de ces méthodes). Par manque de références publiées, au moment où nous écrivons, nous donnerons une démonstration de cette formule des traces. De plus, nos connaissances sur la théorie de Hecke pour $GL(3)$ nous permettent d'obtenir plus facilement les résultats concernant la correspondance, notamment en caractéristique 3, où on ne dispose pas (encore) de l'intégrabilité locale des caractères des représentations de la série discrète. Signalons que dans le cas de caractéristique nulle, une formule des traces pour $GL(3)$ a été énoncée par Arthur [Ar] et utilisée par Flath [Fa] et Flicker [Fk]*). Nous avons bénéficié de la lecture du manuscrit [De3] et de la prépublication [Ro2] et surtout de nombreuses conversations sur ce sujet avec M.-F. Vigneras et J.-P. Labesse. Qu'ils en soient remerciés ici.

*) Une fois la formule des traces établie, notre utilisation suit [Fa].

4.2. Jusqu'à la fin du chapitre, D désignera un corps gauche de centre F, de degré 9 sur F, et $D^\times$ son groupe multiplicatif. On note $\mathcal{D}(3)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $D^\times$; elles sont de dimension finie, et celles de dimension 1 sont les caractères $\chi \circ N$ ou χ est un caractère de $F^\times$ et où N désigne la norme réduite de D à F. On note $\mathcal{D}°(3)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}(3)$ de dimension ≥ 2. Un élément τ de $\mathcal{D}(3)$ possède un caractère central $\omega_\tau \in F^\times$, et des facteurs $L(\tau)$ et $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau,\psi,dx)$ [GJ]. Le facteur $\varepsilon(\tau)$ est un monôme en q^{-s} de degré $a(\tau) + 3n(\psi)$, où $a(\tau)$ est un entier positif ou nul, appelé l'exposant de τ. Si $j(\tau)$ est le plus petit entier j positif ou nul tel que τ soit trivial sur le groupe des unités de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_D$ de D, congrues à 1 modulo la puissance $j^{\text{ème}}$ de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_D$, on a $a(\tau) = j(\tau) + 2$.

Si π est une représentation admissible irréductible de $D^\times$ et χ un caractère de $F^\times$, $\chi\pi$ est la représentation de $D^\times$ sur le même espace que π, qui à $g \in D^\times$ associe $\chi \circ N(g) \cdot \pi(g)$. On obtient ainsi une action $(\chi,\pi) \to \chi\pi$ de $\widehat{F^\times}$ sur $\mathcal{D}(3)$.

<u>Théorème</u>. a) Il existe une unique application $\tau \to \pi_D(\tau)$ de $\mathcal{D}(3)$ dans l'ensemble $\mathcal{A}^2(3)$ des éléments essentiellement de carré intégrable de $\mathcal{A}(3)$, telle qu'on ait

$$L(\chi\,\pi_D(\tau)) = L(\chi\tau)$$

et

$$\varepsilon(\chi\,\pi_D(\tau)) = \varepsilon(\chi\tau) \quad \text{pour} \quad \chi \in \widehat{F^\times}.$$

b) On a $\pi_D(\mathcal{D}°(3)) \subset \mathcal{A}°(3)$ et l'application de $\mathcal{D}°(3)$ dans $\mathcal{A}°(3)$ ainsi obtenue est caractérisée par l'égalité précédente des facteurs ε.

c) On a

$$\omega_{\pi_D(\tau)} = \omega_\tau$$

$$a(\pi_D(\tau)) = a(\tau)$$

$$\pi_D(\check{\tau}) = \pi_D(\tau)^{\vee} .$$

4.3. Démontrons le théorème 4.2. La proposition 14.3.1 de [JPS1] nous dit que si τ est une représentation unitaire de $D^\times$, de caractère central ω, il existe un unique élément π de $A(3)$ de même caractère central, vérifiant

$$L(\chi\pi) = L(\chi\tau) ,$$

$$L(\chi\check{\pi}) = L(\chi\check{\tau})$$

et $\qquad \varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\tau)$ pour tout caractère χ de $F^\times$.

De plus, π est unitaire et de carré intégrable. En outre la preuve de cette proposition nous apprend que π est cuspidale si et seulement si τ est de dimension au moins 2, et si τ est un caractère (unitaire) de $D^\times$, i.e. si $\tau = \chi \circ N$ pour un caractère χ de $F^\times$, alors $\pi = \chi \cdot St$ où St est la représentation de Steinberg de $GL(3,F)$.

Il est clair par le lemme 3.2.1 que la condition sur les contragrédientes est inutile, et par la proposition 3.3 que les conditions d'égalité des facteurs L et ε entraînent celle d'égalité des caractères centraux. De plus, les éléments de $\mathcal{D}^\circ(3)$ comme ceux de $A^\circ(3)$ sont caractérisés par la propriété $L(\chi\pi) = 1$ pour tout caractère χ de $F^\times$. Comme, pour tout $\tau \in \mathcal{D}(3)$, il existe $t \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^t\tau$ soit unitaire, (où α désigne le caractère $x \mapsto |x|$ de $F^\times$), et que cette torsion par α^t se traduit sur les facteurs L et ε d'éléments de $\mathcal{D}(3)$ ou $\mathcal{A}(3)$ par une simple translation par t du paramètre complexe s, on voit qu'on a a) et b). Les égalités de c) proviennent alors pour la première, du résultat cité plus haut; pour la seconde, de l'égalité ([Ja1] p. 65)

$$\varepsilon(\pi)(s)\varepsilon(\check{\pi})(1-s) = \omega_\pi(-1) \quad \text{pour} \quad \pi \in \mathcal{A}(3),$$

et de l'égalité correspondante

$$\varepsilon(\tau)(s)\varepsilon(\check{\tau})(1-s) = \omega_\tau(-1) \quad \text{pour} \quad \tau \in \mathcal{D}(3),$$

égalités qui sont des conséquences immédiates de l'équation fonctionnelle des fonctions Z [GJ] ; pour la troisième, de la définition des exposants en termes des facteurs ε. □

<u>Théorème 4.4.</u> i) L'application $\pi_D : \mathcal{D}(3) \to \mathcal{A}^2(3)$ est surjective, et induit une surjection de $\mathcal{D}^\circ(3)$ sur $\mathcal{A}^\circ(3)$.

ii) S'il existe une application injective f de $\mathcal{G}^\circ(3)$ dans $\mathcal{A}^\circ(3)$ telle que

$$a(f(\sigma)) = a(\sigma)$$

$$\omega_{f(\sigma)} = \mathrm{Det}\ \sigma,$$

alors f et π_D sont bijectives.

Remarque. L'hypothèse de ii) est vérifiée si F n'est pas une extension de $\mathbb{Q}_3$, d'après le chapitre 3; nous la prouvons au chapitre 7 si F est une extension de $\mathbb{Q}_3$.

Si on sait que $\pi_D : \mathcal{D}^\circ(3) \to \mathcal{A}^\circ(3)$ est surjective, alors il découle du fait que les seuls éléments de $\mathcal{A}^2(3) \smallsetminus \mathcal{A}^\circ(3)$ sont les $\chi\mathrm{St}$ pour $\chi \in F^\times$ (fait vu en 3.20), que $\pi_D : \mathcal{D}(3) \to \mathcal{A}^2(3)$ est aussi surjective.

Tout le reste de ce chapitre sera consacré à la démonstration de la surjectivité de $\pi_D : \mathcal{D}^\circ(3) \to \mathcal{A}^\circ(3)$. Dans le numéro suivant, nous prouvons ii) à partir de i).

4.5. Il nous faut rappeler le résultat suivant, dû à H. Koch et E. W. Zink (voir [KZ] pour le cas où F est de caractéristique résiduelle première à 3 et [Ko 2] pour F de caractéristique résiduelle 3).

Théorème. Soient a un entier positif ou nul, b un nombre complexe non nul. Le nombre d'éléments π de $\mathcal{D}^\circ(3)$ d'exposant a et tels que $\omega_\pi(\tilde{\omega}_F) = b$ est fini, égal au nombre d'éléments σ de $\mathcal{G}^\circ(3)$ d'exposant a, vérifiant $\operatorname{Det} \sigma(\tilde{\omega}_F) = b$. □

Fixons donc a et b comme dans ce théorème, et notons $C(a,b)$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}^\circ(3)$ formé des π tels que $a(\pi) = a$, $\omega_\pi(\tilde{\omega}_F) = b$. Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 4.4. Comme f est injective, $f^{-1}(C(a,b))$ est fini et a au plus autant d'éléments que $C(a,b)$ (et exactement autant seulement si $f(f^{-1}(C(a,b))) = C(a,b)$). Comme π_D est surjective, $C(a,b)$ a au moins autant d'éléments que $\pi_D^{-1}(C(a,b))$ (et exactement autant seulement si π_D est injective sur $\pi_D^{-1}(C(a,b))$). D'après le théorème rappelé plus haut, $f^{-1}(C(a,b))$ et $\pi_D^{-1}(C(a,b))$ ont le même nombre d'éléments qui est alors égal au cardinal de $C(a,b)$. Ceci étant vrai quels que soient a et b , on voit que f est surjective et π_D injective. □

4.6. Comme nous l'avons dit, le reste de ce chapitre est consacré à la preuve de la surjectivité de π_D . Elle se fera par voie globale, à l'aide de la formule des traces déjà signalée. Pour cela, il est nécessaire de rappeler la construction de $\pi_D(\tau)$ donnée dans [JPS1]. On se donne donc le corps D et une représentation admissible irréductible τ , unitaire, de degré au moins 2, de $D^\times$. On fixe également un corps global $\mathcal{F}$, un corps $\mathcal{D}$ de centre $\mathcal{F}$ et de degré 9 sur $\mathcal{F}$, une place finie α de $\mathcal{F}$ et un isomorphisme φ de $\mathcal{D}_\alpha$ et D (*) , et enfin un caractère unitaire ω du groupe des classes d'idèles de $\mathcal{F}$, dont le composant ω_α en la place α corresponde, via l'isomorphisme de $\mathcal{F}_\alpha$ et F déduit de φ , à ω_τ . Alors le groupe $\mathcal{D}^\times(\mathbb{A}_\mathcal{F})$ des points adéliques de $\mathcal{D}^\times$ opère, par translations à droite, dans l'espace

$$L^2(\mathcal{D}^\times(\mathcal{F})\backslash\mathcal{D}^\times(\mathbb{A}_\mathcal{F}),\omega) \text{ (noté } L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)) .$$

Les étapes de la construction de $\pi_D(\tau)$ sont les suivantes.
On montre d'abord qu'il existe un composant $\mathcal{T}$ de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$, $\mathcal{T} = \otimes_v \mathcal{T}_v$, tel que $\mathcal{T}_\alpha$ donne, via φ, une représentation équivalente à τ (**) . Pour presque toute place v de $\mathcal{F}$, l'algèbre $\mathcal{D}_v$ est déployée, et $\mathcal{D}_v$ est isomorphe à $GL(3,\mathcal{F}_v)$ [puisque $\mathcal{D}$ est de degré 9 sur $\mathcal{F}$, c'est vrai en particulier pour les places v à l'infini].

La composante $\mathcal{T}_v$ en une telle place définit un élément unique de

(*) L'existence de $\mathcal{D}$ et φ découle immédiatement de la théorie globale du corps de classes.

(**) Voir l'appendice 2 de cet article pour un énoncé général.

$\mathcal{A}_{F_v}(3)$, que nous noterons $\pi(\mathcal{T}_v)$. On prouve, grâce à la théorie de Hecke pour GL(3) , qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\Pi = \otimes_v \Pi_v$ de $GL(3,\mathbb{A}_F)$, dans $L^2(GL(3,F),\omega)$, telle que pour presque toute place v où $\mathcal{D}_v$ est scindée, Π_v soit dans la classe d'équivalence $\pi(\mathcal{T}_v)$. Grâce au théorème fort de multiplicité un pour GL(3) , Π est unique. On prouve enfin que, pour toute place v où $\mathcal{D}_v$ est déployée, Π_v est dans la classe $\pi(\mathcal{T}_v)$, et qu'en une place v où $\mathcal{D}_v$ n'est pas déployée, la classe de Π_v n'est autre que $\pi_{\mathcal{D}_v}(\mathcal{T}_v)$ i.e. vérifie les égalités nécessaires de facteurs L et ε . En particulier, $\pi_D(\tau)$ n'est autre que Π_α , transportée via φ .

4.7. Nous allons d'abord établir la version de la formule des traces qui nous servira. Nous nous placerons dans un cadre assez général, où G est un groupe réductif connexe sur le corps global F , Z son centre, ω un caractère unitaire de $Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}_F)$, ρ la représentation par translations à droite de $G(\mathbb{A}_F)$ (et de l'algèbre de Hecke correspondante) sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F),\omega)$ noté $L^2(G,\omega)$, et $\rho°$ sa restriction à l'espace invariant $L^2_0(G,\omega)$ des fonctions cuspidales. Nous fixerons une mesure de Haar sur $Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$, produit de mesures de Haar locales. De la façon habituelle, on fixera pour presque toute place v un sous-groupe compact maximal standard K_v de $G(F_v) = G_v$, et pour ces places on notera $f_v°$ la fonction nulle en dehors de Z_vK_v, et vérifiant $f_v°(z_vk_v) = \omega_v^{-1}(z_v)$ pour $z_v \in Z_v$, $k_v \in K_v$.

On considérera des fonctions f sur $G(\mathbb{A}_F)$, produits de fonctions locales f_v . On impose à f_v d'être lisse, à support compact modulo Z_v , de se transformer par ω_v^{-1} sous Z_v , et, pour presque toute place v , d'être égale à $f_v°$. De telles fonctions f agissent sur $L^2(G,\omega)$ et $L^2_0(G,\omega)$

par

$$\rho(f)\varphi(g) = \int_{Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(h)\varphi(gh)dh \quad \text{pour} \quad \varphi \in L^2(G,\omega) .$$

(Elles agissent aussi sur toutes les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$, de caractère central ω).

On sait que l'opérateur $\rho^\circ(f)$ est un opérateur à trace, et que $\rho(f)$ est donnée par le noyau

$$K_f(x,y) = \sum_\gamma f(y^{-1}\gamma x)$$

où la somme porte sur un système de représentants dans $G(F)$ de $Z(F)\backslash G(F)$:

$$\rho(f)\varphi(y) = \int_{Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} K_f(x,y)\varphi(x)dx$$

pour $\varphi \in L^2(G,\omega)$.

Le but de la formule des traces est de donner une expression de $\mathrm{tr}\rho^\circ(f)$ en termes d'intégrales orbitales de f . Ce n'est possible simplement que si on fait des hypothèses supplémentaires sur f .

4.8. On dira que f est supercuspidale si, pour tout x et tout y dans $G(\mathbb{A}_F)$, et pour tout radical unipotent N d'un sous-groupe parabolique rationel propre de G, on a

$$\int_{N(\mathbb{A}_F)} f(xny)dn = 0 .$$

C'est le cas par exemple si l'une des fonctions f_v vérifie la condition locale correspondante, en particulier si f_v est un coefficient d'une représentation cuspidale.

<u>Proposition</u>. Si f est supercuspidale, on a

$$\rho(f)\ L^2(G,\omega) \subset L^2_0(G,\omega)\ .$$

<u>Démonstration</u>. Il s'agit de prouver que pour tout $\varphi \in L^2(G,\omega)$, $\rho(f)\varphi$ est cuspidale, i.e. que pour tout radical unipotent N d'un sous-groupe parabolique rationnel propre de G, on a

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} (\rho(f)\varphi)(ng)\,dn = 0 \quad \text{pour presque tout } g \in G(\mathbb{A}_F)$$

On peut supposer que φ est lisse [Co, Part 1, p. 194]. On a alors

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} (\rho(f)\varphi)(ng)\,dn = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} dn \int_{Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(h)\varphi(ngh)\,dh$$

$$= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} dn \int_{N(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \Big(\sum_{\gamma\in N(F)} f(g^{-1}n^{-1}\gamma h)\varphi(h)\Big)dh$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{N(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \varphi(h)\,dh \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} \Big(\sum_{\gamma\in N(F)} f(g^{-1}n^{-1}\gamma h)\,dn$$

$$= \int_{N(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \varphi(h)\,dh \int_{N(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}nh)\,dn = 0$$

où l'interversion des intégrales à l'égalité marquée (*) est justifiée parce que

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} dn \int_{N(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \Big|\sum_{\gamma\in N(F)} f(g^{-1}n^{-1}\gamma h)\varphi(h)\Big|\,dh$$

vaut au plus

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} dn \int_{Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} |f(h)\varphi(ngh)|\,dh\,dn$$

intégrale qui est finie puisque f est à support compact modulo $Z(\mathbb{A}_F)$, qu'elle est continue et que $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$ est compact. □

4.9. Du lemme précédent, on déduit que l'opérateur $\rho^\circ(f)$ est donné par le noyau K_f. Comme on sait que $\rho^\circ(f)$ est un opérateur à trace et que K_f est manifestement séparément continu, on déduit du théorème d'analyse harmonique énoncé en ([Wa] th. 4.10) que K_f est intégrable le long de la diagonale(*) et qu'on a

$$\operatorname{tr} \rho(f) = \int_{G(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} \Big(\sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\Big)dg .$$

Supposons <u>désormais</u> qu'en une place v_1, f_{v_1} soit un coefficient d'une représentation cuspidale, et qu'en une autre place v_2, f_{v_2} ait son support dans l'ensemble des élément elliptiques réguliers(**). Alors on peut appliquer la formule précédente, et la somme sur γ ne porte que sur les éléments elliptiques réguliers modulo $Z(F)$, et même sur ceux qui restent elliptiques réguliers dans G_{v_2}. Mais d'après le résultat de l'appendice 2, la fonction $g \to \sum_\gamma |f(g^{-1}\gamma g)|$ est continue et à support compact modulo $G(F)\,Z(\mathbb{A}_F)$. On peut alors regrouper les éléments γ en classes de conjugaison dans $Z(F)\backslash G(F)$, et intervertir somme et intégration, pour obtenir les formules suivantes,

$$\operatorname{tr} \rho^\circ(f) = \sum_\gamma \int_{\tilde Z_\gamma(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

$$\operatorname{tr} \rho^\circ(f) = \sum_\gamma \frac{1}{[\tilde Z_\gamma(F) : Z_\gamma(F)]} \operatorname{vol}(Z_\gamma(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash Z_\gamma(\mathbb{A}_F))\int_{Z_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)dg$$

(*) On peut montrer, en caractéristique 0, que K_f est à décroissance rapide dans les domaines de Siegel, cf. [Ro2].

(**) Un élément de $G(F)$ (resp. $G(F_{v_2})$) est dit elliptique régulier si la composante connexe de son centralisateur est un tore maximal de G, anisotrope modulo Z sur F(resp. F_{v_2}).

où la somme sur γ porte sur un ensemble Γ de représentants dans $G(F)$ des classes de conjugaison dans $Z(F)\backslash G(F)$ d'éléments elliptiques réguliers de $G(F)$, où Z_γ désigne le centralisateur de γ dans G, et $\tilde{Z}_\gamma(F)$ l'ensemble des éléments de $G(F)$ dont la classe dans $Z(F)\backslash G(F)$ centralise la classe de γ.

<u>Remarque</u>. Dans les formules précédentes, on a choisi des mesures de Haar sur $Z(\mathbb{A}_F)\backslash Z_\gamma(\mathbb{A}_F)$ et $Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$. La mesure invariante sur $Z_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ est alors la mesure quotient. D'autre part, sur les ensembles discrets $Z(F)\backslash \tilde{Z}_\gamma(F)$, $Z(F)\backslash Z_\gamma(F)$ et $Z(F)\backslash G(F)$, on met les mesures donnant la masse 1 à chaque point, et les mesures invariantes utilisées sur $G(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$, $\tilde{Z}_\gamma(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ et $Z_\gamma(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ sont les mesures quotients. Le volume de $Z_\gamma(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash Z_\gamma(\mathbb{A}_F)$ est fini puisque, γ étant elliptique régulier, $Z\backslash Z_\gamma^0$ est anisotrope.

4.10. On a vu apparaître au paragraphe précédent les intégrales orbitales en des éléments elliptiques réguliers, qui sont les intégrales

$$\int_{Z_\gamma(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1}\gamma g)dg.$$

Remarquons que f étant produit de fonctions locales f_v, l'intégrale se décompose en produits d'intégrales locales. Notre but est de comparer les formules des traces obtenues quand $G = GL(3)$ et $G' = \mathcal{D}^\times$, $\mathcal{D}$ corps gauche de dimension 9 sur F, en choisissant des fonctions f (pour G) et f' (pour G') dont les intégrales orbitales locales soient reliées.

Il sera clair au lecteur que tout ce que nous disons jusqu'à 4.18, où nous utilisons la théorie de Hecke pour $GL(3)$, est valable pour la comparaison des formules des traces pour $GL(n)$ et le groupe $A^\times$ des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple A quelconque de degré n^2 sur F. Ce cas général est appliqué dans [Vi] à la correspondance entre représentations de $GL(n)$ et représentations de $A^\times$

4.11. Plaçons-nous d'abord dans le cas local. On prend donc un corps gauche D sur un corps local F, de centre F et de degré 9 sur F, et on note G le groupe réductif $GL(3)$ sur F, G' le groupe réductif sur F défini par $D^\times$. Notons G_e (resp. G'_e) l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $G(F)$ (resp. $G'(F)$). A chaque élément de G_e (resp. G'_e) associons son polynôme caractéristique. On obtient ainsi des bijections des ensembles de classes de conjugaison d'éléments de G_e, ou G'_e, avec l'ensemble P des polynômes unitaires de degré n, irréductibles et séparables, à coefficients dans F.

$$G_e/\mathrm{Ad}\ G(F) \xrightarrow{\sim} P \xleftarrow{\sim} G'_e/\mathrm{Ad}\ G'(F) .$$

Fixons des ensembles T et T' de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de G, G' (ce sont les centralisateurs des éléments elliptiques réguliers). On a une bijection canonique entre T' et T deux tores T et T' se correspondant étant isomorphes (et isomorphes au tore défini par le groupe multiplicatif d'une extension séparable de degré 3 de F). N'importe quel isomorphisme des corps dont T et T' sont les groupes multiplicatifs donne un isomorphisme <u>canonique</u> entre les espaces

$$C(T_{reg})^{W(T)} \quad \text{et} \quad C(T'_{reg})^{W(T')}$$

des fonctions localement constantes dans l'ouvert des éléments réguliers du tore considéré invariantes par le groupe de Weyl $W(\ )$ de ce tore, et à support compact modulo le centre $Z(F)$ de $G(F)$. On peut aussi se restreindre aux fonctions se transformant sous $Z(F)$ selon un caractère ω donné, et l'on obtient ainsi un isomorphisme canonique entre le sous-espace $C(T_{reg},\omega)^{W(T)}$ de $C(T_{reg})^{W(T)}$ et le sous-espace $C(T'_{reg},\omega)^{W(T')}$ de $C(T'_{reg})^{W(T')}$.

4.12. On sait [Fa, lemme 2.1.2] que si T est un tore maximal de G, et T_{reg} l'ouvert des éléments réguliers de $T(F)$ (ce sont ceux dont toutes les valeurs propres sont distinctes), l'application

$$T(F)\setminus G(F)\times T_{reg} \longrightarrow G(F)$$

$$(x\ ,\quad \gamma) \longmapsto \tilde{x}^{-1}\gamma\,\tilde{x} \quad (\text{où } \tilde{x}\in G(F) \text{ relève } x)$$

est localement un isomorphisme analytique. Notant T^G_{reg} son image, on obtient en fait un revêtement $T(G)\setminus G(F)\times T_{reg} \longrightarrow T^G_{reg}$, de groupe le groupe de Weil $W(T)$.

Quand T parcourt $\mathcal{T}$, les T^G_{reg} sont des ouverts disjoints de $G(F)$ qui recouvrent l'ensemble G_e des éléments elliptiques réguliers de $G(F)$. Fixons un tore maximal T de G, une mesure de Haar dg sur $T(F)\setminus G(F)$, et un caractère ω de $Z(F)$, et notons $C(T^G_{reg},\omega)$ l'ensemble des fonctions sur T^G_{reg}, localement constantes, se transformant par ω sous $Z(F)$, et à support compact modulo $Z(F)$. A toute fonction f dans $C(T^G_{reg},\omega)$ on associe son intégrale orbitale $F(f)$ qui est une fonction sur T_{reg} définie par

$$F(f)(t) = \int_{T(F)\setminus G(F)} f(g^{-1}tg)dg \quad \text{pour} \quad t\in T_{reg}.$$

Comme dans [Fa, lemmes 2.1 à 2.3] on démontre le fait suivant (voir aussi [Vi]).

<u>Lemme</u>. Pour $f\in C(T^G_{reg},\omega)$, on a $F(f)\in C(T_{reg},\omega)^{W(T)}$, et toute fonction de $C(T_{reg},\omega)$ invariante par $W(T)$ est obtenue.

4.13. Les résultats du n° 4.12 sont également vrais si l'on remplace G par G', et T par un tore maximal T' de G'.

Nous voulons maintenant comparer les intégrales orbitales pour G et G'. Choisissons une mesure de Haar dx sur F. Cela détermine des mesures de Haar, encore notées dx, sur $M_3(F)$ et D(*). Si N désigne la norme réduite de D à F, on peut prendre sur $G(F)$ la mesure de Haar $\frac{dx}{|\det x|_F^3}$ et sur $G'(F)$ la mesure de Haar $\frac{dx}{|Nx|_F^3}$. On dit que ces mesures sont associées (elles le sont au sens de Jacquet et Langlands [JL], §14). On identifiera le centre de G' à Z et on mettra sur $Z(F)$ la mesure de Haar $\frac{dx}{|x|_F}$.

Si $T \in \mathcal{T}$ et $T' \in \mathcal{T}'$ sont deux tores isomorphes, on mettra sur $T(F)$ et $T'(F)$ des mesures de Haar se correspondant par un isomorphisme de T et T', et on mettra sur $T(F)\backslash G(F)$ et $T'(F)\backslash G'(F)$ les mesures quotients.

Si f et f' sont des fonctions localement constantes sur G_e et G'_e respectivement, se transformant par ω sous $Z(F)$, et à support compact modulo $Z(F)$, on dira que f et f' ont les mêmes intégrales orbitales, si pour tout choix de tores $T \in \mathcal{T}$ et $T' \in \mathcal{T}'$ isomorphes, notant f_T (resp. $f'_{T'}$) la restriction de f à T^G_{reg} (resp. de f' à $T'^{G'}_{reg}$), les fonctions $F(f_T) \in C(T_{reg},\omega)^{W(T)}$ et $F(f'_{T'}) \in C(T'_{reg},\omega)^{W(T')}$ se correspondent par l'isomorphisme canonique de $C(T_{reg},\omega)^{W(T)}$ et $C(T'_{reg},\omega)^{W(T')}$.

4.14. Les préliminaires locaux étant acquis, revenons au cas global, où

(*) Si dx est autoduale pour ψ, la mesure obtenue sur $M_3(F)$ (resp. D) est la mesure de Haar autoduale pour le caractère $\psi \circ Tr$, (resp. pour le caractère $\psi \circ Tr_D$, où Tr_D désigne la trace réduite de D à F).

G est le groupe $GL(3)$ sur le corps global F, G' le groupe des éléments inversibles d'un corps $\mathcal{D}$ de degré 9 sur F et de centre F. Comme en 4.6 on fixe un caractère unitaire ω de $Z(F)\setminus Z(\mathbb{A}_F)$. Notons S l'ensemble des places de F où $\mathcal{D}$ n'est pas déployée : ces places sont finies, et en nombre fini valant au moins 2.

Nous fixons un caractère Ψ non trivial du groupe additif $F\setminus\mathbb{A}_F$, produits des caractères locaux Ψ_v (sur F_v). Pour chaque place v de F, on met sur F_v la mesure de Haar autoduale pour Ψ_v, d'où l'on déduit des mesures de Haar sur $Z(F_v)$, $G(F_v)$, $G'(F_v)$ et $Z(\mathbb{A}_F)$, $G(\mathbb{A}_F)$, $G'(\mathbb{A}_F)$, et des mesures invariantes sur les espaces quotients considérés.

Nous considérons des fonctions f sur $G(\mathbb{A}_F)$, f' sur $G'(\mathbb{A}_F)$, produits de fonctions locales f_v et f'_v, auxquelles on impose les conditions suivantes :

i) Pour tout v, f_v et f'_v sont lisses, se transforment par ω_v^{-1} sous $Z(F_v)$ et sont à support compact modulo $Z(F_v)$.

ii) Pour presque toute place v, f_v (resp. f'_v) est égale à la fonction f_v° introduite en 4.7 (resp. la fonction correspondante pour G').

iii) Il existe une place $w\notin S$ telle que f_w et f'_w soient des coefficients de représentations cuspidales.

iv) Pour $v\in S$, f_v et f'_v ont leur support dans l'ensemble des éléments réguliers elliptiques.

4.15. Pour de telles fonctions f et f', on peut appliquer la formule des traces obtenue en 4.9. Nous disons que f et f' se correspondent si

i) pour $v\notin S$, il existe un isomorphisme de G_v et G'_v transformant f en f' (ceci est compatible avec les conditions ii) et iii) de 4.14)

ii) pour $v\in S$, f_v et f'_v ont les mêmes intégrales orbitales au sens de 4.13.

L'expression donnant $\mathrm{tr}\rho^\circ_G(f)$ est une somme de termes indexés par $\gamma \in \Gamma$, celle donnant $\mathrm{tr}\rho^\circ_{G'}(f')$ somme de termes indexés par $\gamma' \in \Gamma'$. On peut supposer que Γ ne contient que des éléments qui restent elliptiques réguliers dans G_v pour tout $v \in S$. Mais on voit alors facilement que si pour chaque $\gamma \in \Gamma$, on choisit γ' dans $G'(F)$ ayant même polynôme caractéristique sur F que γ, alors on peut prendre pour Γ' l'ensemble des γ'. Alors, Z_γ et $Z_{\gamma'}$ sont isomorphes et on a

$$[\widetilde{Z}_\gamma(F) : Z_\gamma(F)] = [\widetilde{Z}_{\gamma'}(F) : Z_{\gamma'}(F)]$$

par le théorème de Skolem-Noether.

De plus, comme f et f' se correspondent, on a, pour toute place v de f,

$$\int_{Z_\gamma(F_v)\backslash G(F_v)} f_v(g^{-1}\gamma g)dg = \int_{Z_{\gamma'}(F_v)\backslash G'(F_v)} f'(g^{-1}\gamma g)dg .$$

d'où le résultat

$$(*) \qquad \mathrm{tr}\rho^\circ_G(f) = \mathrm{tr}\rho^\circ_{G'}(f') .$$

4.16. Nous voulons appliquer cette formule à la preuve de la surjectivité de $\pi_D : \mathcal{D}^\circ(3) \to \mathcal{A}^\circ_F(3)$. Par un argument de torsion par un caractère non ramifié utilisé en 4.3, il suffit de prouver que toute représentation cuspidale unitaire $\pi \in \mathcal{A}^\circ_F(3)$ est atteinte. Plaçons-nous dans la situation de 4.6, avec les notations y introduites. Choisissons une représentation automorphe cuspidale $\Pi = \otimes_v \Pi_v$ dans $L^2_o(G,\omega)$ telle que Π_α se transforme en π via l'isomorphisme de F_α et F. On supposera de plus que pour

$v \in S$, Π_v est cuspidale, ainsi que Π_w pour une place w fixée hors de S . Tout ceci est loisible d'après l'appendice 1.

On considère des fonctions f et f' comme en 4.15, se correspondant. On suppose de plus que $g \mapsto f_w(g^{-1})$ est un coefficient de Π_w .

On sait que $L_o^2(G,\omega)$ comme $L_0^2(G',\omega)$ ($= L^2(G',\omega)$) se décomposent en somme directe de représentations irréductibles Π , chacune apparaissant avec multiplicité finie $m(\Pi)$. De plus cette multiplicité vaut 1 dans le cas de $L_o^2(G,\omega)$ (voir [GGP, p. 83] et [JS, Thm. 4.8]).

4.17. Soit T l'ensemble des places où Π_v est ramifiée. On a $S \subset T$ et $w \in T$. Utilisant le théorème d'indépendance des caractères dans le cas non ramifié (théorème 4.2 de [Fa]) , on déduit de la formule (*) de 4.15 qu'on a

$$\prod_{v \in T} \operatorname{tr} \Pi_v(f_v) = \sum_{\Pi' \in X_T(\Pi)} m(\Pi') \prod_{v \in T} \operatorname{tr} \Pi'_v(f'_v)$$

où la somme de droite, absolument convergente, porte sur l'ensemble $X_T(\Pi)$ des représentations $\Pi' = \otimes \Pi'_v$ intervenant dans $L^2(G',\omega)$ et telles que Π'_v et Π_v soient équivalentes pour v pris hors de T .

Utilisant alors le théorème 5.2 de [Fa], qui donne l'indépendance des caractères dans le cas général, on déduit qu'on a

$$\prod_{v \in S \cup \{w\}} \operatorname{tr} \Pi_v(f_v) = \sum_{\Pi' \in X_{S \cup \{w\}}(\Pi)} m(\Pi') \prod_{v \in S \cup \{w\}} \operatorname{tr} \Pi'_v(f'_v)$$

(ces arguments sont standard; nous renvoyons à [Fa] §6 pour les détails).

Mais pour $v = w$, $\check{f}_w$ est un coefficient de Π_w . On a donc

$$\mathrm{tr}\ \Pi'_w(f'_w) = 0$$

si Π'_w n'est pas équivalente à Π_w et

$$\mathrm{tr}\ \Pi'_w(f'_w) = \mathrm{tr}\ \Pi_w(f_w)$$

sinon. On a donc

$$\prod_{v\in S} \mathrm{tr}\Pi_v(f_v) = \sum_{\Pi'\in X_S(\Pi)} m(\Pi') \prod_{v\in S} \mathrm{tr}\ \Pi'_v(f'_v).$$

4.18. On montre au numéro suivant, en utilisant les résultats de l'appendice 3 de cet article , que l'on peut choisir les f_v de sorte que le terme de gauche soit non nul. On en déduit que la somme de droite est alors non nulle. L'ensemble $X_S(\Pi)$ est alors non vide. Si $\Pi' \in X_S(\Pi)$ alors Π'_v est équivalente à Π_v pour $v \notin S$. Par suite Π' n'est pas de dimension 1, et on peut appliquer à Π' la théorie de [JPS1], rappelée en 4.6. On obtient alors une représentation Π'' dans $L^2_o(G,\omega)$ telle que Π''_v et Π'_v soient équivalentes pour $v \notin S$; par suite du théorème fort de multiplicité 1, on a $\Pi'' = \Pi$. De plus, on a alors $\Pi_v = \pi_{\mathcal{D}_v}(\Pi'_v)$ pour $v \in S$; en particulier $\Pi_\alpha = \pi_{\mathcal{D}_\alpha}(\Pi'_\alpha)$ et $\pi = \pi_D(\tau)$ où τ est la représentation de $D^\times$ déduite de Π'_α par l'isomorphisme de $\mathcal{D}_\alpha$ et D . Ceci prouve la surjectivité de π_D .

4.19. Prouvons le fait utilisé au numéro précédent, que l'on peut choisir les f_v pour $v \in S$, de sorte que $\mathrm{tr}\ \Pi_v(f_v) \neq 0$. Pour plus de commodité, nous omettrons, dans ce numéro seulement, l'indice v . Le résultat de l'appendice 3 montre que, sur l'ouvert des éléments elliptiques réguliers de G ,[(*)] la distribution $\mathrm{tr}\pi$ coïncide en fait avec une fonction χ_π qui est une constante non nulle Γ_π au voisinage de l'élément neutre. Si on choisit un ouvert Ω de G formé d'éléments elliptiques réguliers de G , et suffisamment proche de 1 pour que χ_π soit égal à Γ_π sur Ω , et qu'on définisse la fonction f par

$$f(g) = 0 \quad \text{si} \quad g \notin \Omega Z$$

$$f(gz) = \omega^{-1}(z) \quad \text{si} \quad g \in \Omega\ ,\ z \in Z\ ,$$

on a alors

$$\mathrm{tr}\ \Pi(f) = \Gamma_\pi\ \mathrm{vol}(Z\Omega/Z) \neq 0\ .$$

4.20. Il découle des résultats de H. Carayol rappelés en 5.1 que $\pi_{\mathcal{D}}$ donne en fait une bijection de $\mathcal{D}^\circ(3)$ sur $\mathcal{A}^\circ(3)$ donc une bijection de $\mathcal{D}(3)$ sur $\mathcal{A}^2(3)$, ensemble des classes de représentations de $\mathcal{A}(3)$ essentiellement de carré intégrable. Pour la commodité de l'exposé, nous tirons dès maintenant les conséquences globales de ce fait. Comme nous n'utiliserons pas ces résultats dans la suite, nous ne ferons qu'esquisser les démonstrations.

4.21. On se place dans la situation globale de 4.6. Ainsi, on a fixé un corps global F , un corps $\mathcal{D}$ de centre F et de degré 9 sur F , un caractère unitaire ω du groupe des classes d'idèles de F . On note S l'ensemble fini des places (finies) où $\mathcal{D}$ n'est pas déployée. A tout composant T de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ de dimension > 1 , on a attaché un composant $\Pi = \pi_{\mathcal{D}}(T)$ de $L^2_o(G,\omega)$, où G désigne le groupe GL_3 sur F . Le composant Π est

---

(*) i.e. sur les fonctions f dont le support est contenu dans cet ouvert.

caractérisé par le fait qu'on a $\Pi_v = T_v$ pour toute place $v \notin S$, sauf peut-être un nombre fini (en identifiant $\mathcal{D}_v$ et $GL(3,F_v)$ pour $v \notin S$). En fait on a $\Pi_v = T_v$ pour toute place $v \notin S$, et $\Pi_v = \pi_{\mathcal{D}_v}(T_v)$ pour toute place v dans S.

Remarque. Un composant de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ de dimension 1 est de la forme $\chi \circ N$ où χ est un caractère du groupe des classes d'idèles de F vérifiant $\chi^3 = \omega$, N désignant la norme réduite de $\mathcal{D}/F$. On lui associe la représentation automorphe $\pi_{\mathcal{D}}(\chi \circ N)$ de G de composantes $\chi_v \circ \det$ en $v \notin S$ et $\pi_{\mathcal{D}_v}(\chi_v \circ N) = \chi_v \cdot St_v$ en $v \in S$ (où St_v est la représentation de Steinberg de G_v).

4.22. Théorème fort de multiplicité 1 pour $\mathcal{D}^\times$.

Grâce à la Proposition 5.1 (bijectivité de $\pi_{\mathcal{D}_v}$) on voit que si T et T' sont deux composants de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ de dimension > 1, tels qu'on ait $\pi_{\mathcal{D}}(T) = \pi_{\mathcal{D}}(T')$, alors on a $T_v = T'_v$ pour toute place v de F et par suite T et T' sont équivalentes.

Par suite, si T et T' sont deux composants de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$, de dimension quelconque, tels que $T_v = T'_v$ pour presque toute place v de F, alors on a $T_v = T'_v$ pour toute place v de F (Théorème fort de multiplicité 1 pour $\mathcal{D}^\times$). Cela découle du Théorème fort de multiplicité 1 pour $L^2_o(G,\omega)$ et du résultat précédent si T et T' sont de dimension > 1 ; si T et T' sont de dimension 1, cela découle de théorèmes bien connus sur les caractères du groupe des classes d'idèles de F ; si T est de dimension 1 et T' de dimension > 1, alors $\pi_{\mathcal{D}}(T')$ est cuspidale, donc ses composants sont génériques, et ne sont pas de dimension 1 si $v \notin S$: on ne peut donc avoir $T_v = T'_v$ pour aucun $v \notin S$.

4.23. Un cas particulier du théorème faible de multiplicité 1 sur $\mathcal{D}^\times$.

On peut prouver que si T est un composant irréductible de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ et qu'il existe une place w hors de S telle que T_w soit cuspidale, alors T apparaît avec multiplicité 1 dans $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$. Donnons une esquisse de la démonstration. On pose $\Pi = \pi_{\mathcal{D}}(T)$. On peut utiliser la formule des traces comme en 4.16 et 4.17 et déduire une égalité :

$$\prod_{v\in S} \operatorname{tr}\Pi_v(f_v) = \sum_{\Pi'\in X_S(\Pi)} m(\Pi') \prod_{v\in S} \operatorname{tr}(\Pi'_v(f'_v)).$$

où les fonctions f_v sur G_v et f'_v sur $\mathcal{D}_v^\times$ sont localement constantes, se transforment par ω_v^{-1} sous $Z(F_v)$, ont leur support compact modulo $Z(F_v)$ et contenu dans l'ouvert des éléments réguliers elliptiques, et ont les mêmes intégrales orbitales au sens de 4.13.

Mais on a vu au numéro précédent que $X_S(\Pi)$ ne comporte qu'un seul élément qui est T. On va prouver aux numéros suivants qu'on peut choisir f_v et f'_v, pour $v \in S$, de sorte qu'on ait

$$\operatorname{tr}\Pi_v(f_v) = \operatorname{tr} T_v(f'_v) \neq 0. \quad (\text{pour tout } v \in S)$$

Cela implique bien qu'on a $m(T) = 1$.

Remarque. Il est clair qu'un composant de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ de dimension 1 intervient avec multiplicité 1.

Le théorème faible de multiplicité 1 sera vrai pour toutes les représentations de $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ (et prouvé par la démonstration précédente) pourvu que l'on sache que la formule 4.9 donnant $\operatorname{Tr}\rho^\circ(f)$ est valable si, au lieu de supposer qu'en une place finie v_1, f_{v_1} soit supercuspidale et qu'en une place v_2, f_{v_2} ait son support dans l'ouvert des éléments elliptiques réguliers, on suppose qu'en deux places finies distinctes v_1 et v_2, f_{v_1} et f_{v_2} ont leur support dans l'ouvert des éléments elliptiques réguliers. Une telle formule des traces est annoncée sans démonstration dans [Ar2], quand F est de caractéristique 0. Il ne fait pas de doute qu'elle est également vraie si F est un corps de fonctions.

4.24. Nous allons énoncer dans ce numéro un résultat local qui implique trivialement l'énoncé dont on a besoin en 4.23. On fixe donc un corps gauche D de centre F et de degré 9 sur F. On note G le groupe $GL_3(F)$, Z le centre de G ou $D^\times$, ω un caractère de $Z = F^\times$. Soit $\pi \in \mathcal{A}(3)$ essentiellement de carré intégrable, de caractère central ω. Si π est cuspidale, on sait que la distribution $\operatorname{tr}\pi$ sur les fonctions $f \in C(G_e,\omega^{-1})$*) est donnée par une fonction localement constante χ_π : $\operatorname{tr}\pi(f) \equiv \int_{Z\setminus G} f(g)\chi_\pi(g)dg$. Si π n'est pas cuspidale, alors il existe un caractère χ de $F^\times$ tel que $\pi = \chi \cdot St$ où St est la représentation de Steinberg de G, et la distribution $\operatorname{tr}\pi$ est donnée, comme précédemment, par la fonction localement constante $\chi_\pi = \chi \circ \det$.

Dans tous les cas, le résultat de l'appendice 3 montre qu'au voisinage de 1, cette fonction χ_π est constante, de valeur $\Gamma_\pi = \frac{d(\pi)}{d(St)}$. La fonction χ_π est bien entendu invariante par conjugaison et peut donc aussi se considérer comme une fonction sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes de degré 3, à coefficients dans F, irréductibles unitaires et séparables (cf. 4.11).

Une représentation τ de $\mathcal{D}(3)$ est de dimension finie, donc possède un caractère χ_τ, qui est une fonction localement constante sur $D^\times$. La distribution $\operatorname{tr}\tau$ est donnée par la formule $\operatorname{tr}\tau(f) = \int_{Z\setminus D^\times} f(g)\chi_\tau(g)dg$. La fonction χ_τ est aussi invariante par conjugaison, et on peut donc la considérer

*) On note $C(G_e,\omega^{-1})$ (resp. $C(D_e^\times,\omega^{-1})$) l'espace des fonctions localement constantes sur G_e (resp. $D_e^\times$), se transformant par ω^{-1} sous Z, et à support compact modulo Z.

également comme une fonction sur $\mathcal{P}$.

<u>Théorème</u>. Soient $\tau \in \mathcal{D}(3)$ et $\pi \in A^2(3)$, (π essentiellement de carré intégrable) ayant le même caractère central ω . Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1) $\pi = \pi_D(\tau)$.

2) $\mathrm{tr}\, \pi(f) = \mathrm{tr}\tau(f')$ où $f \in \mathcal{C}(G_e,\omega^{-1})$ et $f' \in \mathcal{C}(D_e^\times,\omega^{-1})$ ont les mêmes intégrales orbitales.

3) $\chi_\pi = \chi_\tau$ comme fonctions sur $\mathcal{P}$.

<u>Remarques</u>. 1) L'équivalence de 1 et 3 est vraie, même si on ne suppose pas que τ et π ont le même caractère central. En effet χ_π (resp. χ_τ) se transforme sous Z par le caractère central de π (resp. τ) : $\chi_\pi(zx) = \omega_\pi(z)\chi(x)$ pour $z \in Z$, $x \in G_e$.

2) Il découle immédiatement de ce théorème que les relations d'orthogonalité des caractères [HC p. 92] , valables pour des représentations unitaires de $D^\times$, le sont aussi pour des représentations de carré intégrable de $GL(3,F)$.

4.25. Indiquons un schéma de démonstration. L'équivalence de 2) et 3) découle facilement des formules d'intégration de Hermann Weyl [HC p. 86, lemme 4.2]. Si on sait que 1) implique 3) on a l'implication réciproque car si on a $\chi_\pi = \chi_\tau$ sur $\mathcal{P}$, écrivant $\pi = \pi_D(\tau')$, $\tau' \in \mathcal{D}(3)$, on obtient $\chi_\tau = \chi_{\tau'}$ sur $\mathcal{P}$ (si 1) implique 3)), d'où $\tau = \tau'$ grâce aux relations d'orthogonalité des caractères pour $D^\times$ (on se ramène aisément au cas où ω donc τ et π sont unitaires). Il reste donc à prouver que 1) implique 3). Mais on se place alors dans une situation globale 4.21, où on suppose donnée une place $\alpha \in S$ telle que $\mathcal{D}_\alpha = D$,. et une représentation T dans $L^2(\mathcal{D}^\times,\omega)$ telle que $T_\alpha = \tau$. On utilise alors la formule (*) de 4.23, en fixant les f_v et f'_v pour $v \in S\setminus\{\alpha\}$ de sorte qu'on ait

$$\operatorname{tr} \Pi_v(f_v) \neq 0, \ \operatorname{tr} T_v(f'_v) \neq 0 \quad .$$

On en déduit alors l'existence d'une constante $\lambda \neq 0$ telle que, pour $f_\alpha \in C((G_\alpha)_e,\omega_\alpha^{-1})$ et $f'_\alpha \in C((D^\times_\alpha)_e,\omega_\alpha^{-1})$ ayant mêmes intégrales orbitales, on ait

$$\operatorname{tr}\pi(f_\alpha) = \lambda \operatorname{tr}\tau(f'_\alpha)$$

d'où $\qquad \chi_\pi = \lambda\chi_\tau \quad$ sur $\mathcal{P}$.

Mais on a, près de l'élément neutre,

$$\chi_\pi = \frac{d(\pi)}{d(St)}$$

et $\qquad \chi_\tau = \dim(\tau)$.

Or, si on choisit la mesure de Haar sur $Z\setminus G$ de sorte que $d(St) = 1$, la mesure de Haar associée sur $Z\setminus D^\times$ est telle que le degré formel de τ coïncide avec sa dimension. Par la proposition 5.1, on a donc $d(\pi) = \dim\tau$. On en déduit que λ vaut 1, ce qui termine la preuve du théorème 4.24.

5. Représentations très cuspidales.

5.1. Soit D un corps de centre le corps local F et de degré 9 sur F. Nous avons vu au chapitre précédent que tout élément $\pi \in A°(3)$ est de la forme $\pi_D(\tau)$ pour un élément τ de $\mathcal{D}°(3)$. Ce fait va nous permettre de montrer (proposition 5.1) que les éléments minimaux de $A°(3)$ sont ceux considérés par H. Carayol [Ca] et que nous dirons très cuspidaux; c'est-à-dire que, si π est un élément minimal de $A°(3)$, il existe un sous-groupe fermé H de GL(3,F), en contenant le centre, et dont l'image dans PGL(3,F) soit un sous-groupe compact maximal de PGL(3,F), et une représentation ρ de H, très cuspidale au sens de Carayol, telle que π soit la classe de représentations cuspidales de GL(3,F) obtenue à partir de ρ par induction compacte de H à GL(3,F).

Le reste du chapitre est consacré à une étude précise des représentations très cuspidales des groupes H. En 5.2 nous renvoyons à l'appendice 4 le cas des éléments minimaux de $A°(3)$ d'exposant multiple de 3, c'est-à-dire le cas où on peut prendre pour H le groupe $F^{\times}GL(3,\mathcal{O}_F)$; ce cas facile, essentiellement, est déjà traité dans la littérature [Ge1].

Le cas des éléments minimaux de $A°(3)$ d'exposant premier à 3 est examiné dans le reste du chapitre. De 5.3 à 5.6, on rappelle la notion de représentation très cuspidale des groupes H correspondants.

En 5.7, nous énonçons quelques rappels de la théorie de Clifford qui nous seront utiles pour la construction explicite de ces représentations très cuspidales, construction qui est effectuée de 5.8 à 5.17 et dont les résultats sont résumés en 5.9 et 5.18.

Le reste du chapitre est consacré au calcul des facteurs $\varepsilon(\chi\pi)$, pour $\pi \in A°(3)$ et $\chi \in \widehat{F^{\times}}$. Les résultats en sont résumés en 5.23.

Proposition 5.1. a) Soit D un corps de centre le corps local F, de degré 9 sur F. Alors l'application π_D définie au chapitre 4 donne une bijection de $\mathcal{D}^\circ(3)$ sur $A^\circ(3)$. Pour $\tau \in \mathcal{D}^\circ(3)$ et $\pi = \pi_D(\tau)$, les degrés formels de π et τ par rapport à des mesures de Haar associées (cf. 4.13) sont égaux.

b) Tout élément minimal de $A^\circ(3)$ est très cuspidal (i.e. est un de ceux considérés dans [Ca]). Tout élément de $A^\circ(3)$ est obtenu à partir d'un élément très cuspidal par torsion par un caractère de $F^\times$. Si $\pi \in A^\circ(3)$ est minimal et si $\chi \in F^\times$, on a

$$a(\chi\pi) = \sup(3\, a\,(\chi)\, ,\, a(\pi)).$$

Démonstration. On a prouvé au chapitre précédent que l'application $\pi_D : \mathcal{D}^\circ(3) \longrightarrow A^\circ(3)$ est une surjection qui conserve les caractères centraux et les facteurs ε. De plus $\tau \in \mathcal{D}^\circ(3)$ est minimal si et seulement si $\pi_D(\tau)$ l'est. Mais pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{C}$ donnés, le nombre d'éléments très cuspidaux $\pi \in A^\circ(3)$ vérifiant $a(\pi) = a$ et $\omega_\pi(\tilde{\omega}_F) = b$ est, d'après la proposition 8.3 de [Ca], égal au nombre d'éléments minimaux τ de $\mathcal{D}^\circ(3)$ vérifiant $a(\tau) = a$ et $\omega_\tau(\tilde{\omega}_F) = b$. Il en découle que les éléments minimaux de $A^\circ(3)$ sont tous très cuspidaux (d'où la première assertion de b)) et que chacun d'eux est image d'un seul élément minimal de $\mathcal{D}^\circ(3)$. Comme l'application π_D est compatible à la torsion par les caractères de $F^\times$, on en déduit facilement la première assertion de a). Il suffit évidemment de prouver la seconde assertion de a) pour τ et π minimaux, auquel cas il est prouvé dans [Ca § 5 et 6] que le degré formel est déterminé par l'exposant (minimal), et les calculs montrent alors l'égalité [cf. Ca § 7].

La seconde assertion de b) découle trivialement de la première, et la troisième assertion découle de l'assertion analogue

$$a(\chi\tau) = \sup(3a(\chi)\, ,\, a(\tau))$$

pour tout élément minimal τ de $\mathcal{D}^\circ(3)$ et tout caractère χ de $F^\times$, ce qui découle des précisions sur les exposants des éléments de $\mathcal{D}(3)$ données en 4.2.

5.2. Les éléments de $\mathcal{A}^\circ(3)$ d'exposant minimal multiple de 3 seront dit non ramifiés (cette terminologie peu orthodoxe est cependant commode et possède la justification que ces éléments sont construits à partir de caractères de l'extension non ramifiée de degré 3 de F dans $\bar{F}$ cf. appendice 4). On voit en fait facilement que les représentations très cuspidales de [Ca] sont en ce cas obtenues par les constructions de Gérardin [Ge1]. Cela est prouvé dans l'appendice 4, et on en tire le résultat suivant :

<u>Théorème 5.2</u>. Pour chaque élément σ de $\mathcal{G}^\circ(3)$ d'exposant minimal multiple de 3, $\pi(\sigma)$ existe, et on obtient ainsi une bijection $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}^\circ(3)$ d'exposant minimal multiple de 3 sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}^\circ(3)$ ayant la même propriété.

5.3. Comment sont obtenus les éléments de $\mathcal{A}^\circ(3)$ d'exposant premier à 3 ? Ces éléments sont minimaux d'après la formule de la proposition 5.1 b), et sont par suite très cuspidaux, i.e. donnés par les considérations de [Ca], que nous développons de 5.3 à 5.5.

Soit V un espace vectoriel de dimension 3 sur F. Nous allons construire des (classes de) représentations cuspidales du groupe G des F-automorphismes de V. Tout choix d'une base de V permet d'identifier G à $GL(3,F)$ et ainsi, à partir d'une représentation cuspidale de G, d'obtenir une représentation cuspidale de $GL_3(F)$, dont la classe dans $\mathcal{A}^\circ(3)$ ne dépende pas du choix de la base de V. Il s'agit donc bien d'une construction d'éléments de $\mathcal{A}^\circ(3)$.

On notera M l'algèbre $\mathrm{End}_F(V)$ dont G est le groupe des éléments inversibles, Tr et Det la trace et le déterminant dans M, et Z le centre de G

que l'on identifiera parfois à $F^{\times}$.

Un réseau dans V est un $\mathcal{O}_F$-module libre de rang 3 dans V. Une ligne de réseaux dans V est une suite $L = (L_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de réseaux dans V vérifiant

a) $L_i \supset L_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{Z}$;

b) $L_{i+3} = \tilde{\omega}_F L_i$ pour $i \in \mathbb{Z}$;

c) L_i/L_{i+1} est un espace vectoriel de dimension 1 sur k_F.

Une ligne de réseaux correspond donc à une chambre de l'immeuble de $PGL(V)$ et le groupe G est transitif sur les lignes de réseaux.

Soit L une ligne de réseaux dans V. Nous allons définir des groupes attachés à L, notés avec un indice L *); nous nous permettrons de supprimer l'indice L si aucune confusion n'en résulte.

On note H_L^o le fixateur de L dans G; c'est l'ensemble des $x \in G$ tels que $xL_i = L_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On note H_L le stabilisateur; c'est l'ensemble des $x \in G$ tels que pour $i \in \mathbb{Z}$, il existe $j(i) \in \mathbb{Z}$ vérifiant $xL_i = L_{j(i)}$; on voit facilement que $i \longmapsto j(i)$ est une translation : $j(i) = i + j_o$ pour un entier j_o. On peut trouver un élément z_L de H_L tel que j_o vaille 1 pour $x = z_L$ (on peut même imposer à z_L de vérifier $z_L^3 = \tilde{\omega}_F 1_V$); pour tout choix d'un tel élément z_L, H_L est le produit semi-direct de H_L^o par le groupe engendré par z_L.

Pour tout entier m, on note A_L^m l'ensemble des éléments x de M tels que

$$xL_i \subset L_{i+m} \quad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{Z}$$

Alors A_L^o est une sous-$\mathcal{O}_F$-algèbre de M, dont H_L^o est le groupe des éléments inversibles. Pour tout entier m on a $A_L^m = z_L^m A_L^o = A_L^o z_L^m$.

*) Le lecteur remarquera que si l'on effectue une translation des indices dans une ligne de réseaux, on obtient une autre ligne de réseaux, mais les groupes correspondants ne changent pas.

Pour tout entier $m \geq 1$, on pose $H_L^m = 1 + A_L^m$; alors H_L^m est un sous-groupe distingué de H_L et on obtient ainsi une filtration décroissante séparée de H_L.

Pour tout entier m, on a

$$\mathrm{Tr}(A_L^m) = P_F^{[(m+2)/3]} \quad \text{(où [ ] désigne la partie entière)}$$

et, pour $m \geq 1$,

$$\mathrm{Det}(H_L^m) = 1 + P_F^{[(m+2)/3]}.$$

5.4. Tout choix d'une uniformisante $\widetilde{\omega}_F$ de F permet d'identifier L_i et L_{i+3} pour tout entier i. Pour i et m entiers, notons $D_L^m(i)$ l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k_F}(L_i/L_{i+1}, L_{i+m}/L_{i+m+1})$ qui est de dimension 1 sur k_F; alors $D_L^m(i)$ s'identifie à $D_L^m(i+3)$, et cette identification est canonique i.e. ne dépend pas du choix de $\widetilde{\omega}_F$. On identifiera donc ces espaces, qu'on notera $D_L^m(i)$ pour $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a alors un isomorphisme naturel

$$A_L^m / A_L^{m+1} \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} D_L^m(i)$$

Le groupe H_L agit par conjugaison sur A_L^m / A_L^{m+1} (ZH_L^o agissant trivialement) en permutant les trois droites $D_L^m(i)$. Si $x \in H_L$ est donné, on peut toujours choisir une base de chacune des droites $D_L^m(i)$ de sorte que x agisse par une permutation (paire) des coordonnées dans la base ainsi formée de A_L^m / A_L^{m+1}.

Notons [ ] le crochet de Lie dans M :

$$[x,y] = xy - yx$$

On a, pour m et m' entiers, $[A_L^m, A_L^{m'}] \subset A_L^{m+m'}$, d'où une application $A_L^m / A_L^{m+1} \times A_L^{m'} / A_L^{m'+1} \longrightarrow A_L^{m+m'} / A_L^{m+m'+1}$, qu'il serait facile d'écrire en termes de la décomposition en droites D. En particulier, pour $m = m'$, on a une application k_F-bilinéaire antisymétrique $A_L^m / A_L^{m+1} \times A_L^m / A_L^{m+1} \longrightarrow A_L^{2m} / A_L^{2m+1}$, qui définit un isomorphisme

$$\Lambda_L^m : \Lambda^2(A_L^m / A_L^{m+1}) \xrightarrow{\sim} A_L^{2m} / A_L^{2m+1}.$$

5.5. Soit m un entier. On dit qu'un élément u de A_L^m / A_L^{m+1} est <u>cuspidal</u> si m est premier à 3 et que pour $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ l'image de u dans $D_L^m(i)$ est non nulle. Par extension (et abus) on dira d'un élément u de M qu'il est L-cuspidal s'il existe un entier m tel que u appartienne à A_L^m et que la classe de u dans A_L^m / A_L^{m+1} soit cuspidale.

L'action par conjugaison de H_L transforme éléments L-cuspidaux en éléments L-cuspidaux.

Les faits suivants nous seront utiles.

A) Soit $u \in G$; posons $m = v_F(\operatorname{Det} u)$; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est L-cuspidal;

b) $u \in H_L \setminus Z H_L^o$;

c) $3 \nmid m$ et $z_L^{-m} u \in A_L^o$;

d) $3 \nmid m$ et $u \in A_L^m$.

B) Si $u \in G$ est L-cuspidal alors tout élément de $u H_L^o$ l'est aussi.

C) Si $u \in G$ est L-cuspidal, l'extension $F[u]$ engendrée par u est de degré 3 et elle est soit inséparable soit séparable totalement ramifiée [Ca, prop. 3.3]. De plus, on peut reconstituer L à partir de u, à translation près des indices : dans $F[c]$ on dispose de la ligne de réseaux $(P_{F[c]}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$; tout choix d'une base de V comme $F[c]$-espace vectoriel (de dimension 1) donne une ligne de réseaux dans V qui n'est autre que L à translation près des indices. On a donc une notion d'élément <u>cuspidal</u> de M.

D) Si u et u' sont des éléments L-cuspidaux de G conjugués dans G, ils sont conjugués dans H_L [Ca, prop. 3.4].

E) Soit u un élément L-cuspidal de G, et posons $m = v_F(\mathrm{Det}\, u)$. Soit r un entier ≥ 1. Pour l'action par conjugaison de H_L sur A_L^m / A_L^{m+r} le stabilisateur de la classe de l'élément u de A_L^m est $F[u]^\times H_L^r$ [Ca, prop. 3.6].

5.6. Nous disposons sur le groupe additif F d'un caractère non trivial ψ fixé. Notons ν son exposant. Sur M on dispose alors du caractère additif non trivial $\psi \circ \mathrm{Tr}$. L'accouplement

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ (x,y) &\longmapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(xy) \end{aligned}$$

met en autodualité le groupe abélien localement compact M. Pour tout entier m, l'orthogonal de A_L^m est $A_L^{-m-2-3\nu}$.

Pour des entiers m et r vérifiant $2r \geq m \geq r \geq 1$, le groupe K_L^r / K_L^m est abélien, naturellement isomorphe à A_L^r / A_L^m (par l'application $x \longmapsto x - 1_V$). Par suite le groupe des caractères de K_L^r / K_L^m s'identifie à $A_L^{-m-2-3\nu} / A_L^{-r-2-3\nu}$.

Soit ρ une représentation admissible irréductible de H_L. Elle est de dimension finie (H_L étant compact modulo son centre), et, pour un entier $m \geq 2$, triviale sur le groupe K_L^m. Sur K_L^{m-1}, elle se décompose en somme de caractères qui par l'identification précédente correspondent à des éléments de

$$A_L^{-m-2-3\nu} / A_L^{-m-1-3\nu} .$$

Soit m un entier ≥ 2. On dit que ρ est très cuspidale de type m si ρ est triviale sur K_L^m et que sur K_L^{m-1} elle se décompose en caractères correspondant à des éléments <u>cuspidaux</u> de $A_L^{-m-2-3\nu} / A_L^{-m-1-3\nu}$. (il suffit qu'un de ces éléments soit cuspidal et tous le sont alors). Remarquons qu'on a forcément alors

$m \not\equiv 1 \bmod 3$.

Rappelons le théorème 4.2 de [Ca] :

Théorème 5.6. Soit m un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$, et soit ρ une représentation admissible très cuspidale de type m de H_L. Alors l'induite compacte de ρ de H_L à G est une représentation cuspidale minimale $\pi(L,\rho)$ de G. Son exposant est $m+2$. Si ρ et ρ' sont deux représentations admissibles irréductibles très cuspidales de type m de H_L, alors $\pi(L,\rho)$ et $\pi(L,\rho')$ sont équivalentes si et seulement si ρ et ρ' le sont.

Comme nous l'avons vu, toutes les classes de représentations cuspidales minimales de G d'exposant $m+2$ s'obtiennent sous la forme $\pi(L,\rho)$, et, faisant varier m, on obtient toutes les classes de représentations cuspidales de G d'exposant premier à 3.

Remarque. Si L' est une autre ligne de réseaux dans V, et que $g \in G$ est tel que $gL = L'$, alors on a $H_{L'} = g^{-1} H_L g$. Si ρ' est la représentation de $H_{L'}$ définie par $\rho'(x) = \rho(g x g^{-1})$ pour $x \in H_{L'}$, alors ρ' est une représentation admissible irréductible très cuspidale de type m de $H_{L'}$, et $\pi(L,\rho)$, $\pi(L',\rho')$ sont équivalentes. Remarquons aussi que g est défini à un élément de H_L près, et que la classe d'équivalence de ρ' ne dépend donc pas du choix de g.

5.7. Nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre des résultats de la théorie de Clifford, tels qu'ils sont résumés dans [DL, § 2]. Mais comme nous considérons des représentations de groupes qui ne sont pas nécessairement finis, nous répétons ici, dans un cadre plus général qu'il n'est nécessaire, les faits qui nous seront utiles, en répondant parfois aux questions qui pourraient se poser naturellement au lecteur. Le lecteur n'aura aucune peine à étendre à notre cas les démonstrations classiques. Dans ce numéro, nous appellerons représentation d'un groupe G un homomorphisme $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ de G dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. Les notions de morphisme, d'isomorphisme ou équivalence, d'irréductibilité, d'isotypie, de complète réductibilité sont les notions habituelles. Les représentations de G forment une catégorie $C(G)$, qui contient la catégorie $Cr(G)$ formées des représentations complètement réductibles*). Nous notons $R(G)$ le groupe de Grothendieck correspondant, qui est engendré comme $\mathbb{Z}$-module par l'ensemble $\hat{G}$ des classes de représentations irréductibles de G.

Si H est un sous-groupe de G, on a un foncteur de restriction $\mathrm{Res}_H^G : C(G) \longrightarrow C(H), \rho \longmapsto \rho_H$ d'où un homomorphisme de groupes, noté de même

$$\mathrm{Res}_H^G : R(G) \longrightarrow R(H),\ \rho \longmapsto \rho_H.$$

Remarque 1. Si H est distingué dans G, ou si H est d'indice fini dans G, et que ρ appartienne à $Cr(G)$, alors ρ_H appartient à $Cr(H)$. Réciproquement, si H est d'indice fini dans G, et que $\rho \in C(G)$ soit telle que ρ_H appartienne à $Cr(H)$, alors ρ est complètement réductible : $\rho \in Cr(G)$.

Si K est un sous-groupe d'indice fini de G, on a un foncteur d'induction $\mathrm{Ind}_K^G\ C(K) \longrightarrow C(G)$, défini de la façon suivante : si $\rho : K \longrightarrow GL(V)$ est une représentation de K, l'induite ρ^G de K à G est la représentation de G, par translations à droite, dans l'espace des fonctions f de G dans V vérifiant $f(kg) = \rho(k) f(g)$ pour $k \in K$, $g \in G$.

On obtient ainsi un homomorphisme de groupes

$$\mathrm{Ind}_K^G : R(K) \longrightarrow R(G).$$

*) Dans les numéros suivants nous n'aurons affaire qu'à des représentations complètement réductibles.

Remarque 2. a) Si $\rho \in Cr(K)$, alors $\rho^G \in Cr(G)$.

b) Si H est un sous-groupe de G, alors pour tout élément ρ de $R(K)$, on peut calculer $\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G \rho$ par les formules de Mackey [Se2,7.4]. On a également la loi de réciprocité de Frobenius [Se2,7.3].

Si H est un sous-groupe distingué de G, alors G agit par conjugaison sur $C(H)$, $Cr(H)$, $\hat{H}$ et $R(H)$, (H agissant trivialement sur $\hat{H}$ et $R(H)$). Si $\rho : H \longrightarrow GL(V)$ est une représentation complètement réductible de H, alors pour tout $\tau \in \hat{H}$ on note V_τ le composant isotypique de V de type τ. Si $Z(\tau)$ désigne le stabilisateur dans G de τ, alors V_τ est stable par $Z(\tau)$, et on obtient donc une représentation ρ_τ de $Z(\tau)$ sur V_τ, dont la restriction à H est isotypique de type τ. Si ρ est la restriction à H d'une représentation σ de G, et si V_τ est non nul, alors $Z(\tau)$ est d'indice fini dans G.

Soient $\sigma : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation complètement réductible de G, H un sous-groupe distingué de G; notons ρ la restriction de σ à H. Les considérations précédentes s'appliquent, ρ étant complètement réductible. Si $\tau \in \hat{H}$ est tel que V_τ soit non nul, alors comme nous l'avons dit, $Z(\tau)$ est d'indice fini dans G, et par suite $\rho_{Z(\tau)}$ et sa sous-représentation ρ_τ sont complètement réductibles. La représentation induite ρ_τ^G est une représentation complètement réductible de G et, si on choisit un ensemble T de représentants des classes de $\hat{H}$ modulo G, on a, dans $R(G)$, l'égalité

(*) $\sigma = \bigoplus_{\tau \in T} \rho_\tau^G$, où la somme porte sur les $\tau \in T$ tels que V_τ soit non nul.

Dans la suite, nous n'utiliserons guère que la conséquence suivante de cette égalité : si σ est irréductible, alors les types des composants isotypiques non nuls de sa restriction à H forment une orbite sous G; si τ_o est un tel type, alors ρ_{τ_o} est irréductible et on a $\sigma = \rho_{\tau_o}^G$.

5.8. Dans la suite de ce chapitre, jusqu'en 5.18, nous fixons la ligne de réseaux L dans V et un entier $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$. Nous voulons construire toutes les classes de représentations admissibles irréductibles très cuspidales de type m de H_L.

Pour la commodité de l'expression nous dirons désormais : <u>représentation au lieu de classe de représentations</u>, et une représentation très cuspidale de H_L sera toujours supposée <u>admissible et irréductible</u>.

Comme en 2.19, nous poserons $m = m^+ + m^-$ où $m^- = [m/2]$. Nous verrons que le cas où m est pair est beaucoup plus facile que l'autre cas.

Soit ρ une représentation très cuspidale de type m de H. Sa restriction à H^{m^+} se décompose en caractères, puisque H^{m^+}/H^m est abélien. Choisissons un de ces caractères η et choisissons en outre un élément c de $A^{-m-2-3\nu}$ dont la classe dans $A^{-m-2-3\nu}/A^{-m^+-2-3\nu}$ corresponde à η, i.e. tel qu'on ait

$$\eta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx) \quad \text{pour} \quad x \in A^{m^+}.$$

L'élément c est L-cuspidal, et d'après 5.5 E), le stabilisateur dans H du caractère η est $F[c]^\times H^{m^-}$. Par suite de la théorie de Clifford rappelée au numéro précédent, ρ est l'induite à H d'une représentation irréductible de $F[c]^\times H^{m^-}$, dont la restriction à H^{m^+} est isotypique de type η, et toute représentation irréductible de $F[c]^\times H^{m^-}$, isotypique de type η sur H^{m^+}, induit à H une représentation très cuspidale de type m.

5.9. Supposons d'abord m <u>pair</u>, et posons $\ell = m^+ = m^-$. Alors $F[c]^\times \mathrm{Ker}\,\eta / \mathrm{Ker}\,\eta$ est central dans $F[c]^\times H^\ell / \mathrm{Ker}\,\eta$, car si $x \in F[c]^\times$, $y \in A^\ell$, on a

$$x(1+y)x^{-1}(1+y)^{-1} \in H^\ell$$

et
$$\eta(x(1+y)x^{-1}(1+y)^{-1}) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c(xyx^{-1} - y))$$
$$= \psi \circ \mathrm{Tr}((x^{-1}cx - c)y) = 1$$

puisque x et c commutent.

Par suite les représentations irréductibles de $F[c]^{\times}H^{\ell}$ isotypiques de type η sur H^{ℓ} ne sont autres que les caractères de $F[c]^{\times}H^{\ell}$ prolongeant η, et ils correspondent bijectivement aux caractères θ de $F[c]^{\times}$ prolongeant la restriction de η à $U^{\ell}_{F[c]^{\times}}$ i.e. vérifiant $\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$ pour $x \in P^{\ell}_{F[c]}$. Réciproquement, soit c un élément cuspidal de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$. Notons $L(c)$ une ligne de réseaux attachée à c comme en 5.5 C); comme $L(c)$ est bien définie à translation près des indices, les groupes $H_{L(c)}$ et $A_{L(c)}$, ainsi que leurs filtrations, sont bien définis.

Un caractère de $F[c]^{\times}$ vérifiant

$$\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx) \quad \text{pour} \quad x \in P^{\ell}_{F[c]}$$

sera dit <u>compatible</u> à c. A tout caractère θ de $F[c]^{\times}$ compatible à c, on associe le caractère $\kappa(c,\theta)$ de $F[c]^{\times}H^{\ell}_{L(c)}$ égal à θ sur $F[c]^{\times}$ et vérifiant

$$\kappa(c,\theta)(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx) \quad \text{pour} \quad x \in A^{\ell}_{L[c]}.$$

Alors il est clair que l'induite $\rho(c,\theta)$ de $\kappa(c,\theta)$ à $H_{L(c)}$ est irréductible (cf. 5.7 remarque 3) et même très cuspidale puisqu'elle est triviale sur $H^{m}_{L(c)}$ et que sa restriction à $H^{m-1}_{L(c)}$ contient le caractère correspondant à l'élément $L(c)$-cuspidal c. L'induite compacte, de $H_{L(c)}$ à G, de la représentation très cuspidale $\rho(c,\theta)$ sera notée $\pi(c,\theta)$; elle est cuspidale d'exposant $m+2$. On a donc prouvé la partie a) du théorème suivant (où m est un entier pair et $\ell = m/2$).

<u>Théorème 5.9</u>. a) Les représentations très cuspidales de type m de H_L sont les représentations $\rho(c,\theta)$, où c parcourt les éléments L-cuspidaux de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$ et θ parcourt les caractères de $F[c]^{\times}$ compatibles à c. Les représentations cuspidales de G d'exposant $m+2$ sont les représentations

$\pi(c,\theta)$ correspondantes.

b) Soient c et c' deux éléments cuspidaux de M vérifiant $v_F(\operatorname{Det} c) = v_F(\operatorname{Det} c') = -m-2-3\nu$, θ un caractère de $F[c]^\times$ compatible à c, θ' un caractère de $F[c']^\times$ compatible à c'. Alors on a $\pi(c,\theta) = \pi(c',\theta')$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) il existe un élément $g \in G$ tel que

$$g\,c'\,g^{-1} \equiv c \bmod H^{\ell}_{L(c)}$$

(on a alors $g\,F[c']^\times H^{\ell}_{L(c')}\,g^{-1} = F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$).

ii) $\kappa(c',\theta')(g^{-1}xg) = \kappa(c,\theta)(x)$ pour $x \in F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$.

c) Avec les hypothèses de b) supposons en outre $H_{L(c)} = H_{L(c')}$. Alors on a $\rho(c,\theta) = \rho(c',\theta')$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées

i) il existe un élément $g \in H^{0}_{L(c)}$ tel que

$$g\,c'\,g^{-1} \equiv c \bmod H^{\ell}_{L(c)}$$

(on a alors $g\,F[c']^\times H^{\ell}_{L(c)}\,g^{-1} = F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$).

ii) $\kappa(c',\theta')(g^{-1}xg) = \kappa(c,\theta)(x)$ pour $x \in F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$.

<u>Remarque</u>. Soient c un élément cuspidal de M vérifiant $v_F(\operatorname{Det} c) = -m-2-3\nu$, et θ un caractère de $F[c]^\times$ compatible à c. Soit c' un élément de $c\,H^{\ell}_{L(c)}$. On voit facilement qu'alors il existe un caractère θ' de $F[c']^\times$, compatible à c', tel qu'on ait $\kappa(c,\theta) = \kappa(c',\theta')$.

Il nous reste à prouver les parties b) et c) du théorème. La partie b) découle de la partie c), du théorème 5.6 et du fait que G est transitif sur les lignes de réseaux. La partie c) découle aisément de la théorie de Clifford (voir 5.18 pour le cas plus difficile où m est impair).

5. 10. Supposons maintenant, et jusqu'en 5.18, que m soit impair, et posons $\ell = m^+$ (d'où $m^- = \ell - 1$; remarquons que m^- est premier à 3). Plaçons-nous dans la situation de 5.8, où l'on se donne une représentation très cuspidale ρ de H_L et un élément L-cuspidal c de H_L correspondant à un des caractères, noté η, composant de la restriction de ρ à H_L^ℓ. Le stabilisateur $Z(\eta)$ de ce caractère est $F[c]^\times H_L^{\ell-1}$ (cf. 5.5.F), et ρ est l'induite à H_L d'une représentation κ de $Z(\eta)$ isotypique de type η sur H_L^ℓ. Posons $H^- = F^\times U_{F[c]} H_L^{\ell-1}$, $H^+ = F^\times U_{F[c]} H_L^\ell$ et considérons la suite exacte de groupes $1 \longrightarrow H^+/\mathrm{Ker}(\eta) \longrightarrow H^-/\mathrm{Ker}(\eta) \longrightarrow H^-/H^+ \longrightarrow 1$.

Considérons également l'application φ suivante, induite par le commutateur dans $H_L^{\ell-1}$

$$\varphi : H_L^{\ell-1}/H_L^\ell \times H_L^{\ell-1}/H_L^\ell \longrightarrow P_F^{-\nu-1}/P_F^{-\nu}$$

$$(1+x\ ,\ 1+y) \longmapsto \mathrm{Tr}(c(xy-yx))$$

pour $x \in A_L^{\ell-1}$, $y \in A_L^{\ell-1}$. Quand on munit $H_L^{\ell-1}/H_L^\ell$ de sa structure d'espace vectoriel sur k_F provenant de l'isomorphisme canonique avec $A_L^{\ell-1}/A_L^\ell$, l'application φ est une application k_F-bilinéaire alternée.

Lemme 5.10. a) $H^+/\mathrm{Ker}(\eta)$ est central dans $Z(\eta)/\mathrm{Ker}(\eta)$.

b) φ induit un accouplement non dégénéré sur $H_L^\ell / U_{F[c]}^{\ell-1} H_L^\ell$.

c) Le commutateur dans H^- induit un accouplement $\mathbb{Z}$-bilinéaire antisymétrique non dégénéré de H^-/H^+ dans $H_L^\ell/\mathrm{Ker}(\eta_c)$.

Démonstration. a) Le commutateur d'un élément de H_L^ℓ et d'un élément de $H_L^{\ell-1}$ est dans H_L^m et donc est annulé par η. Comme en 5.9 on voit que le commutateur d'un élément de H_L^ℓ et d'un élément de $F[c]^\times$ appartient à H_L^ℓ et est aussi annulé par η. Il reste à prouver que le commutateur d'un élément x de $F^\times U_{F[c]}$ et d'un élément y de $H_L^{\ell-1}$ appartient à H_L^ℓ et est annulé par η. Mais cela découle du fait que x agit trivialement par conjugaison sur $H_L^{\ell-1}/H_L^\ell$ (car $x \in F^\times H_L^1$) et d'un calcul analogue à celui de 5.9.

b) Nous voulons montrer que les éléments x de $P_{F[c]}^{\ell-1} A_L^\ell$ sont les éléments de $A_L^{\ell-1}$ qui vérifient

$$\mathrm{Tr}(c(xy-yx)) = 0 \text{ modulo } P_F^{-\nu} \quad \text{pour tout} \quad y \in A_L^{\ell-1}.$$

Il est clair que les éléments de $P_{F[c]}^{\ell-1} A_L^\ell$ vérifient bien cette propriété.

On voit que ce sont les seuls de la façon suivante :

l'application k_F-linéaire

$$A_L^{m-1}/A_L^m \longrightarrow P_F^{-\nu-1}/P_F^{-\nu}$$

$$x \longmapsto \mathrm{Tr}(cx)$$

a pour noyau un sous-espace vectoriel de dimension 2 de A_L^{m-1}/A_L^m. Puisque $\ell-1$ est premier à 3, on a un isomorphisme (cf. 5.4) $\Lambda_L^{\ell-1} : \Lambda^2(A_L^{\ell-1}/A_L^\ell) \xrightarrow{\sim} A_L^{m-1}/A_L^m$ donné par le crochet de Lie, et le noyau précédent correspond à un sous-espace de dimension 2 de $\Lambda^2(A_L^{\ell-1}/A_L^\ell)$. L'orthogonal de ce sous-espace pour l'accouplement canonique de $\Lambda^2(A_L^{\ell-1}/A_L^\ell)$ avec $A_L^{\ell-1}/A_L^\ell$ dans $\Lambda^3(A_L^{\ell-1}/A_L^\ell)$ est de dimension 1 sur k_F et est formé des classes modulo A_L^ℓ des éléments de $A_L^{\ell-1}$ que nous cherchons. Mais $P_{F[c]}^{\ell-1} A_L^\ell/A_L^\ell$ est de dimension 1 sur k_F et on a donc la propriété voulue.

c) La partie c) découle immédiatement de b) en remarquant que l'inclusion de $H_L^{\ell-1}$ dans H^- donne un isomorphisme de H^-/H^+ avec $H_L^{\ell-1}/U_{F[c]}^{\ell-1} H_L$.

Appliquons ce lemme à notre situation, où on considère la représentation κ

de $Z(\eta)$. Le sous-groupe $F^{\times}U_{F[c]}$ est central et agit donc dans κ par un caractère $\widetilde{\theta}$. On notera $\eta(c,\widetilde{\theta})$ le caractère de H^{+} prolongeant θ et η. Comme d'après c, l'accouplement sur H^{+}/H^{-} donné par $(h_1, h_2) \longmapsto \eta(h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1})$ est non dégénéré, il découle de [Ca 5.2] (ou de la théorie bien connue des groupes de Heisenberg) que l'induite de $\eta(c,\widetilde{\theta})$ à H^{-} se décompose en q fois*) une même représentation irréductible $\kappa(c,\widetilde{\theta})$ de H^{-}, de dimension q. De plus $\kappa(c,\widetilde{\theta})$ possède trois prolongements non équivalents à $Z(\eta)$ se déduisant l'un de l'autre par torsion par les 3 caractères de $F[c]^{\times}H_L^{\ell-1}$ triviaux sur H^{-}. Ces prolongements sont les seules représentations irréductibles de $Z(\eta)$, isotypiques de type $\eta(c,\widetilde{\theta})$ sur H^{+} et, par suite, κ est l'une d'entre elles.

5. 11. Nous savons maintenant de quelle forme sont les représentations très cuspidales de type m de H_L. Réciproquement nous allons voir que toutes les représentations de H_L construites par la méthode obtenue en 5.10 sont très cuspidales de type m.

Partons d'un élément cuspidal c de M vérifiant $v_F(\operatorname{Det} c) = -m-2-3\nu$ et considérons le caractère η_c de $H^{\ell}_{L(c)}$ donné par $\eta_c(1+x) = \psi \circ \operatorname{Tr}(cx)$ pour $x \in A^{\ell}_{L[c]}$. Considérons aussi un caractère $\widetilde{\theta}$ de $F^{\times}U_{F[c]}$ compatible à c i.e. vérifiant $\widetilde{\theta}(1+x) = \psi \circ \operatorname{Tr}(cx)$ pour $x \in U^{\ell}_{L[c]}$. Posons $H_c^{+} = F^{\times}U_{F[c]}H^{\ell}_{L(c)}$ et $H_c^{-} = F^{\times}U_{F[c]}H^{\ell-1}_{L(c)}$. Alors il existe un unique caractère $\eta(c,\widetilde{\theta})$ de H_c^{+} prolongeant η_c et $\widetilde{\theta}$, et par le même raisonnement qu'en 5.10, on voit que l'induite de $\eta(c,\widetilde{\theta})$ à H_c^{-} se décompose en q fois une même représentation irréductible $\kappa(c,\widetilde{\theta})$ de dimension q; qu'il y a trois représentations irréductibles de $F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$ isotypique de type $\eta(c,\widetilde{\theta})$ sur H_c^{+}; qu'elles se déduisent l'une de l'autre par torsion par les caractères de $F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$ triviaux sur H_c^{-}; enfin que l'induite de chacune d'elles à $H_{L(c)}$ est une représentation très cuspidale de type m de $H_{L(c)}$,

*) Rappelons que q désigne le cardinal de k_F.

dont l'induite compacte à G est une représentation cuspidale d'exposant $m+2$.

Remarquons qu'il y a trois façons d'étendre $\tilde{\theta}$ en un caractère θ de $F[c]^\times$ et que ces trois caractères se déduisent l'un de l'autre par torsion par les caractères de $F[c]^\times$ triviaux sur $F^\times U_{F[c]}$; de plus l'inclusion de $F[c]^\times$ dans $F[c]^\times H^{\ell-1}_{L(c)}$ donne un isomorphisme $F[c]^\times / F^\times U_{F[c]} \xrightarrow{\sim} F[c]^\times H^{\ell-1}_{L(c)} / H^-_c$. Il est donc raisonnable de penser que le choix de θ prolongeant $\tilde{\theta}$ permet de fixer un prolongement $\kappa(c,\theta)$ à $F[c]^\times H^{\ell-1}_{L(c)}$ de la représentation $\kappa(c,\tilde{\theta})$ de H^-_c.

Nous verrons dans les paragraphes suivants, en examinant successivement les cas où $p \geq 5$, $p=2$, $p=3$*) que tel est bien le cas, pourvu que dans le cas $p=3$ on fasse l'hypothèse que θ est strictement compatible à c, i.e. qu'on a

$$\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx) \quad \text{pour} \quad x \in P^{\ell-1}_{F[c]} .$$

5.12. Plaçons-nous donc dans la situation où on a fixé un élément cuspidal c de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et un caractère θ de $F[c]^\times$ compatible à c. Notons $\tilde{\theta}$ la restriction de θ à $F^\times U_{F[c]}$ et H^-_c le groupe $F^\times U_{F[c]} H^{\ell-1}_{L(c)}$; on a attaché à c et θ une représentation $\kappa(c,\tilde{\theta})$ de H^-_c de dimension q : $\kappa(c,\tilde{\theta}) : H^-_c \longrightarrow GL(q,\mathbb{C})$.

Notons $\bar{\kappa}$ le composé de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ avec la projection canonique de $GL(q,\mathbb{C})$ sur $PGL(q,\mathbb{C})$, et P l'image de $\bar{\kappa}$. Alors $\bar{\kappa}$ induit un isomorphisme de $H^{\ell-1}_{L(c)} / U^{\ell-1}_{F[c]} H^{\ell}_{L(c)}$ sur P, qui est donc muni ainsi d'une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur k_F.

On a un diagramme commutatif

*) Rappelons que p est la caractéristique résiduelle de F.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{\ell-1}_{L(c)}/H^{\ell}_{L(c)} & \times & H^{\ell-1}_{L(c)}/H^{\ell}_{L(c)} & \xrightarrow[\varphi]{} & P_F^{-\nu-1}/P_F^{-\nu} \\
\downarrow{\bar{\kappa}} & & \downarrow{\bar{\kappa}} & & \downarrow{\psi} \\
P & \times & P & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^{\times}
\end{array}$$

où f est l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire alternée sur V induite par le commutateur dans $GL(q,C)$. On notera $\bar{\varphi}$ l'accouplement k_F-bilinéaire alterné non dégénéré sur P, à valeurs dans $P_F^{-\nu-1}/P_F^{-\nu}$, déduit de φ.

Soient H l'image inverse de V dans $GL(q,\mathbb{C})$, et R le normalisateur de H. On sait [Ko1, théorème 3.1] qu'on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow R \longrightarrow Sp(P,f) \longrightarrow 1$$

où $Sp(P,f)$ désigne le groupe symplectique associé à la forme alternée f sur l'espace vectoriel P sur $\mathbb{F}_p$. Cette suite est canoniquement scindée si p est impair [Ge2]. Le groupe symplectique $Sp(P,\bar{\varphi})$ associé à la forme alternée $\bar{\varphi}$ sur l'espace vectoriel V sur k_F est un sous-groupe de $Sp(P,f)$ et si S désigne son image inverse dans , on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow S \longrightarrow Sp(P,\bar{\varphi}) \longrightarrow 1.$$

L'action par conjugaison de c sur $H^{\ell-1}_{L(c)}/H^{\ell}_{L(c)}$ définit un élément γ de $Sp(P,\bar{\varphi})$. Pour toute extension κ de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ à $F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$, l'image dans R de $\kappa(c)$ se projette sur γ dans $Sp(P,f)$. L'élément γ est d'ordre 3 dans $Sp(P,\bar{\varphi})$; en fait l'élément c^3 est dans le centre de $F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$ (lemme 5.10) et agit donc par le scalaire $\theta(c)^3$ dans $\kappa(c,\tilde{\theta})$.

5.13. Supposons d'abord p impair distinct de 3. Alors le groupe R s'identifie au produit semi-direct $H \rtimes Sp(P,f)$ et donne donc une représentation fidèle de ce groupe dite représentation de Weil. Le caractère de cette représentation n'est non nul que sur les conjugués de $\mathbb{C}^{\times}Sp(P,f)$.

Soit j une racine cubique de l'unité non triviale dans une clôture algébrique de k_F. Alors on voit facilement (par exemple en écrivant c sous la forme $z_{L(c)}^{-m-2-3\nu}x$ où $z_{L(c)}$ est choisi comme indiqué en 5.3 et où $x \in H^o_{L(c)}$) que l'endomorphisme γ du k_F-espace vectoriel P a pour valeurs propres j et j^2. En particulier le déterminant de $\gamma - 1_V$ comme élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(P)$ vaut $((j-1)(j^2-1))^d$ où d désigne le degré de k_F sur $\mathbb{F}_p$. En particulier, on déduit de [Ge2, théorème 4.9.1(a)] que la trace de γ dans la représentation de Weil vaut

$$\mathrm{trace}(\gamma) = \left(\frac{-3}{p}\right)^d \quad \text{(où } \left(\frac{-}{p}\right) \text{ désigne le symbole de Legendre)}$$

d'où $\quad \mathrm{trace}(\gamma) = \left(\frac{p}{3}\right)^d = \left(\frac{q}{3}\right).$

Montrons en outre que si κ est une extension de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ à $F[c]^\times H^{\ell-1}_{L(c)}$, alors $\kappa(c)$ est conjugué sous H à un unique élément de R de la forme $z\gamma$ avec $z \in \mathbb{C}^\times$, γ étant considéré comme un élément de R. En effet puisque l'endomorphisme γ de P n'a pas de point fixe non nul, l'élément γ de R possède, dans R, q^2 conjugués sous H distincts, et ces conjugués s'écrivent sous la forme $h\gamma$, où les éléments h de H obtenus ont des images distinctes dans P. Comme $\kappa(c)$ s'écrit sous la forme $h_o\gamma$ avec $h_o \in H$ et que P a q^2 éléments, un de ces éléments h (et un seul) diffère de h_o par un scalaire z, et $\kappa(c)$ est bien conjugué à $z\gamma$ pour un unique élément z de $\mathbb{C}^\times$.

Dans les conditions précédentes, on a

$$\mathrm{trace}\,\kappa(c) = z\,\mathrm{trace}(\gamma)$$

et

$$z^3 = \theta(c)^3.$$

On notera $\kappa(c,\theta)$ l'extension κ de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ telle que la trace de $\kappa(c)$ vaille $\theta(c)\,\mathrm{trace}(\gamma)$, c'est-à-dire vaille $\left(\frac{q}{3}\right)\theta(c)$.

5.14. Supposons maintenant que p vaille 2. Alors l'extension

$$1 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow Sp(P,f) \longrightarrow 1$$

n'est plus scindée canoniquement, ni même en général scindée. Mais comme précédemment, on remarque que γ est un élément elliptique régulier d'ordre 3 de $Sp(P,f)$. On peut alors mettre sur P une structure d'espace hermitien sur $\mathbb{F}_4$ de sorte que γ agisse par un scalaire, et que la forme f se déduise de la forme hermitienne i sur P par la formule $f(v,w) = i(v,w) - i(w,v)$ pour $v,w \in P$. On dispose alors [Ge2] de la représentation de Weil, dans $GL(q,\mathbb{C})$, du groupe unitaire $U(P,i)$ et même du produit semi-direct par $\mathcal{H}$: on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \rtimes U(P,i) & \longrightarrow & U(P,i) & \longrightarrow & 1 \\ & & \wr\!\! \mid & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & Sp(P,f) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

De cette façon on considère γ comme un élément de $GL(q,\mathbb{C})$. Il vient alors comme dans le cas $p \geq 5$, que si κ est une extension de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ à $F[c]^{\times} H^{\ell-1}_{L(c)}$, alors $\kappa(c)$ est conjugué sous $\mathcal{H}$ à un unique élément de $\mathcal{R}$ de la forme $z\gamma$ avec $z \in \mathbb{C}^{\times}$.

On notera $\kappa(c,\theta)$ l'extension κ de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ telle que la trace de $\kappa(c)$ vaille $\theta(c)$ trace(γ). Comme la trace de γ vaut $(-1)^d$ où $d = [k_F : F_2]$ par [Ge2, Cor. 4.8.2] et que $(-1)^d$ est égal à $(\frac{q}{3})$, la condition précédente signifie comme pour $p \geq 5$ que la trace de γ vaut

$$(\tfrac{q}{3})\,\theta(c) \quad ^{*)}$$

*) Si $p \geq 5$ et que 3 ne divise pas $p-1$, on peut aussi utiliser un groupe unitaire pour définir $\kappa(c,\theta)$.

5.15. Supposons enfin que p vaille 3. L'extension

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow R \longrightarrow Sp(P,f) \longrightarrow 1$$

est donc canoniquement scindée. Alors γ est un élément unipotent de $Sp(P,\bar{\varphi})$, n'ayant qu'un vecteur propre à homothétie près. Notons W l'espace des vecteurs de P fixés par γ, et $\tilde{W}$ l'image inverse de W dans H.

Remarque. On voit facilement que $\tilde{W}$ est l'ensemble des éléments de H qui commutent à γ, et aussi que $\tilde{W}$ est engendré par $\mathbb{C}^\times$ et les commutateurs de γ avec les éléments de H.

Nous calculerons en 5.17 la trace de γ et verrons qu'elle est non nulle.

Soit κ un prolongement de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ à $F[c]^\times H_{L(c)}^{\ell-1}$. Si $\kappa(c)$ est conjugué sous H à un multiple scalaire de γ (condition qui ne dépend pas du choix de κ), alors on peut définir $\kappa(c,\theta)$ comme le prolongement de $\kappa(c,\tilde{\theta})$ tel que c ait pour trace $\theta(c)$ trace(γ).

La condition précédente sur $\kappa(c)$ signifie que $\kappa(c)$ commute à $\tilde{W}$; comme nous verrons en 5.16, cette condition est une restriction sur le couple (c,θ). Néanmoins, nous ne perdons aucune généralité, dans les constructions des représentations très cuspidales de type m de $H_{L(c)}$, en faisant cette restriction. En effet $\kappa(c)$ se projette sur γ dans $Sp(P,f)$, donc il existe un élément g de $H_{L(c)}^{\ell-1}$ tel que $\kappa(cg) = \xi\gamma$ avec $\xi \in \mathbb{C}^\times$. Posant $c' = cg$, on a $H_{L(c)} = H_{L(c')}$ et $F[c']^\times H_{L(c)}^{\ell-1} = F[c]^\times H_{L(c)}^{\ell-1}$ et on voit aisément qu'il existe un unique caractère $\tilde{\theta}'$ de $F^\times U_{F[c']}$ tel qu'on ait $\kappa(c',\tilde{\theta}') = \kappa(c,\tilde{\theta})$. Ainsi κ est un prolongement de $\kappa(c',\tilde{\theta}')$ et $\kappa(c')$ commute à $\tilde{W}$: la condition est donc vérifiée pour $\kappa(c',\tilde{\theta}')$.

5.16. Exprimons cette condition en termes de c et θ. Nous allons montrer qu'elle équivalente au fait que θ est fortement compatible à c, c'est-à-dire par définition qu'on a

$$\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx) \quad \text{pour} \quad x \in U^{\ell-1}_{F[c]}.$$

En effet soit $h \in H^{\ell-1}_{L(c)}$ tel que $\kappa(h) \in \widetilde{W}$ i.e. $h^{-1}chc^{-1} \in U^{\ell-1}_{F[c]} H^{\ell}_{L(c)}$. Ecrivons $h^{-1}chc^{-1} = \delta(1+u)$ avec $\delta \in U^{\ell-1}_{F[c]}$ et $u \in A^{\ell}_{F[c]}$. La condition sur $\kappa(c)$ signifie que pour tout tel choix de h, on a

$$\kappa(h^{-1}chc^{-1}) = 1$$

i.e. $$\theta(\delta)\psi \circ \mathrm{Tr}(cu) = 1.$$

Comme on a également

$$\psi \circ \mathrm{Tr}(c(h^{-1}chc^{-1} - 1)) = 1$$

et $$\psi \circ \mathrm{Tr}(cu(\delta - 1)) = 1$$

cela équivaut à $\theta(\delta) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c(\delta - 1))$, condition qui est vérifiée par construction si $\delta \in U^{\ell}_{F[c]}$. En faisant varier h, on fait parcourir à $\delta U^{\ell}_{F[c]}$ l'ensemble des classes de $U^{\ell-1}_{F[c]}$ modulo $U^{\ell}_{F[c]}$ et la condition imposée est donc bien que θ soit fortement compatible à c.

5.17. Calculons maintenant la trace de γ dans la représentation de Weil de $Sp(V,\bar{\varphi})$.

On a $v_F(\widetilde{\omega}_F^{2\nu+m+1} \cdot \mathrm{Det}\, c) = -\nu - 1$; par suite on peut considérer la somme de Gauss

$$G_F(\mathrm{Det}\, c) = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi(\widetilde{\omega}_F^{2\nu+m+1} \,.\, \mathrm{Det}\, c \,.\, \xi^2)$$

où, comme il est d'usage, la somme sur $\xi \in k_F$ signifie qu'on somme sur un système de représentants dans $\mathcal{O}_F$ de k_F.

<u>Proposition 5.17</u>. La trace de γ dans la représentation de Weil de $Sp(P,\bar{\varphi})$ vaut $q^{1/2}G_F(\mathrm{Det}\, c)$.

<u>Démonstration</u>. D'après [Ge2, théorème 4.9.1 d)], on a

$$\mathrm{trace}(\gamma) = \sum_{x \in P/\mathrm{Ker}(\gamma-1)} \bar{\varphi}(x,\gamma x).$$

Choisissons un élément t de $A^{o}_{L(c)}$ et posons $y = \tilde{\omega}_F^{\ell+\nu} c\, t$. On a alors $y \in A^{\ell-1}_{L(c)}$. Choisissons t de sorte que c n'agisse pas trivialement (par conjugaison) sur $y\, P^{\ell-1}_{F[c]} H^{\ell}_{L(c)}$. Alors l'image de $1+y$ dans P engendre le k_F-espace vectoriel $P/\mathrm{Ker}(\gamma-1)$ et on a donc

$$\mathrm{trace}(\gamma) = \sum_{\xi \in k_F} \psi \circ \varphi(1+\xi y,\ 1+\xi c y c^{-1})$$

$$\mathrm{trace}(\gamma) = \sum_{\xi \in k_F} \psi \circ \mathrm{Tr}(\xi^2 \tilde{\omega}_F^{2\nu+m+1}(c^2 t c^2 t c^{-1} - c^3 t^2))$$

Remarquant qu'on a $c^3/\mathrm{Det}\, c \in U^1_{F[c]}$, on obtient

$$\mathrm{trace}(\gamma) = \sum_{\xi \in k_F} \psi \circ \mathrm{Tr}(\xi^2 \omega_F^{2\nu+m+1} \mathrm{Det}\, c \cdot (c^{-1} t c^2 t c^{-1} - t^2)).$$

Choisissons une base de V telle que $A^{o}_{L(c)}/A^{1}_{L(c)}$ s'identifie aux matrices diagonales (3,3) sur k_F, c agissant par conjugaison en permutant circulairement les coefficients diagonaux (cf. 5.4). Ecrivant $t = \begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma\end{pmatrix}$ dans A^{o}_L/A^{1}_L avec $\alpha,\beta,\gamma \in k_F$, on trouve $\mathrm{Tr}(c^{-1} t c^2 t c^{-1} - t^2) \equiv \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \equiv -(\mathrm{Tr} t)^2$ mod P_F.

Dire que c n'agit pas trivialement par conjugaison sur $y\, P^{\ell-1}_{F[c]} H^{\ell}_{L(c)}$ signifie dans notre cadre qu'on a $\mathrm{Tr}\, t \not\equiv 0 \bmod P_F$; on peut donc choisir t de sorte que $\mathrm{Tr}\, t$ vaille 1, d'où le résultat.

5.18. Rappelons qu'on a fixé un réseau L, un entier m impair $m \geq 2$ et qu'on a posé $\ell = m^+$. Pour tout élément cuspidal c de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et pour tout caractère θ de $F[c]^\times$ compatible à c (fortement compatible à c si p vaut 3), on a défini une représentation irréductible $\kappa(c,\theta)$ de $F[c]^\times H^{\ell-1}_{L(c)}$; l'induite $\rho(c,\theta)$ de $\kappa(c,\theta)$ à $H_{L(c)}$ est une représentation très cuspidale de type m de $H_{L(c)}$; l'induite compacte $\pi(c,\theta)$ de $\rho(c,\theta)$ à G est une représentation très cuspidale d'exposant $m+2$ de G. On a prouvé la partie a) du théorème suivant, où on rappelle que m est impair et $\ell = (m+1)/2$.

<u>Théorème 5.18</u>. a) Les représentations très cuspidales de type m de H_L sont les représentations $\rho(c,\theta)$, où c parcourt les éléments L-cuspidaux de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et θ parcourt les caractères de $F[c]^\times$ compatibles à c (fortement compatibles à c si p vaut 3). Les représentations cuspidales d'exposant $m+2$ de G sont les représentations $\pi(c,\theta)$ correspondantes.

b) Soient c et c' deux éléments cuspidaux de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = v_F(\mathrm{Det}\, c') = -m-2-3\nu$, θ un caractère de $F[c]^\times$ compatible à c (fortement si p vaut 3), θ' un caractère de $F[c']^\times$ compatible à c' (fortement si p vaut 3). Alors on a $\pi(c,\theta) = \pi(c',\theta')$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) il existe un élément $g \in G$ tel que

$$g\, c'\, g^{-1} \equiv c \bmod U^{\ell-1}_{F[c]} H^{\ell}_{L(c)} \quad (\mathrm{mod}\ H^{\ell}_{L(c)} \text{ si } p \text{ vaut } 3)$$

(on a alors $g\, F[c']^\times H^{\ell}_{L(c')}\, g^{-1} = F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$), et qui vérifie

ii) $\mathrm{trace}\ \kappa(c',\theta')(g^{-1}xg) = \mathrm{trace}\ \kappa(c,\theta)(x)$ pour $x \in F[c]^\times H^{\ell}_{L(c)}$.

c) Avec les hypothèses précédentes, supposons en outre $H_{L(c)} = H_{L(c')}$. Alors on a $\rho(c,\theta) = \rho(c',\theta')$ si et seulement si les conditions i) et ii) de b) sont vérifiées avec $g \in H^0_{L(c)}$.

<u>Remarques</u>.

1. La seconde condition exprime en fait, comme c'était le cas en 5.9, l'équivalence de la représentation $\kappa(c,\theta)$ et de la représentation $x \longmapsto \kappa(c',\theta')(g^{-1}xg)$ de $F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$, groupe égal à $g\ F[c']H^{\ell-1}_{L(c)}g^{-1}$. Autrement dit la condition ii) équivaut à la condition suivante, a priori plus forte :

iii) trace $\kappa(c',\theta')(g^{-1}xg) = $ trace $\kappa(c,\theta)(x)$ pour $x \in F[c]^{\times}H^{\ell-1}_{L(c)}$.

Cette équivalence découle de la remarque que la trace de $\kappa(c,\theta)$ est nulle en dehors des conjugués d'éléments de $F[c]^{\times}H^{\ell}_{L(c)}$ et de la propriété analogue pour $\kappa(c',\theta')$.

2. D'un autre côté, la condition ii) peut s'exprimer de façon plus pratique, directement en termes de c et θ (ce qui était immédiat pour la condition ii) de 5.9). C'est d'ailleurs sous cette forme que sera utilisé le théorème 5.18 au chapitre 6, n° 6. La condition ii) s'exprime par la condition iv) suivante :

iv) pour $x \in F[c']^{\times}$, $y \in F[c]^{\times}$, $z \in H^{\ell}_{L(c)}$ tels que $g^{-1}xg = yz$,

on a $\theta'(x) = \theta(y)\psi \circ \mathrm{Tr}(c(z-1))$.

L'équivalence de ii) et iv) découle de la construction de $\kappa(c,\theta)$ et $\kappa(c',\theta')$: on remarque que $F^{\times}U_{F[c]}H^{\ell}_{L(c)}$ agit, dans $\kappa(c,\theta)$, par le caractère égal à θ sur $F^{\times}U_{F[c]}$ et donné par $z \longmapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(c(z-1))$ pour $z \in H^{\ell}_{L(c)}$, et que les traces de c et c^2 sont connues en fonction de θ.

Passons à la démonstration du théorème. La partie a) a déjà été prouvée, et la partie b) découle de la partie c), du théorème 5.6 et du fait que G est transitif sur les lignes de réseau. Grâce à la remarque 1 il est clair que les conditions i) et ii) de c sont suffisantes pour qu'on ait $\rho(c,\theta) = \rho(c',\theta')$. Si réciproquement on a $\rho(c,\theta) = \rho(c',\theta')$, alors c et c' sont conjugués modulo $H^{\ell-1}_{L(c)}$ puisque les caractères correspondants de $H_{L(c)}$ interviennent tous deux dans $\rho(c,\theta)$. Il existe donc $g \in H_{L(c)}$ tel que $\kappa(c,\theta)$ et $x \longmapsto \kappa(c',\theta')(g^{-1}xg)$ coïncident sur $H^{\ell}_{L(c)}$. La théorie de Clifford appliquée au sous-groupe distingué $H_{L(c)}$ de $H_{L(c)}$, impose qu'on puisse choisir g dans $H_{L(c)}$, conjugant c' en c modulo $H^{\ell-1}_{L(c)}$ et vérifiant la condition iii) de la remarque 1. On peut choisir g dans $H^{0}_{L(c)}$ puisque c stabilise $\kappa(c,\theta)$. Comme on peut en outre modifier g par un élément de $H^{\ell-1}_{L(c)}$, on voit, en suivant 5.13 et 5.14 si $p \neq 3$, ou 5.15 si $p = 3$ qu'on peut supposer que g conjugue c' en c, modulo le groupe $U^{\ell-1}_{F[c]}H^{\ell}_{L(c)}$ si $p \neq 3$, modulo $H^{\ell}_{L(c)}$ si $p = 3$. La condition iii) équivaut alors à la condition ii), ce qui prouve le théorème.

<u>Remarque</u>. Soient c un élément cuspidal de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et θ un caractère de $F[c]^{\times}$ compatible à c (strictement compatible si p vaut 3). Soit c' un élément de $c\,H^{\ell-1}_{L(c)}$, qui vérifie de plus si p vaut 3, $\psi \circ \mathrm{Tr}(cx) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c'x)$ pour $x \in P^{\ell-1}_{F[c]}$. Alors on voit facilement qu'il existe un caractère θ' de $F[c']$, compatible à c', (strictement compatible si p vaut 3), tel qu'on ait

$$\kappa(c,\theta) = \kappa(c',\theta').$$

5.19. Soit m un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$. Soient c un élément cuspidal de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et θ un caractère de $F[c]^{\times}$ compatible à c (fortement compatible si p vaut 3). Fixons un caractère χ de $F^{\times}$, et posons $\pi = \chi\pi(c,\theta)$. Nous allons calculer le facteur $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi,\psi,dx)$ où ψ est le caractère additif de F fixé, et dx la mesure de Haar sur F autoduale pour ψ. Les résultats seront résumés en 5.23.

Dorénavant les indices relatifs à c et à la ligne de réseaux attachée à c seront omis, et on pose $\nu = n(\psi)$.

Pour les calculs nous utilisons l'équation fonctionnelle [Ja1]. Soit ϕ une fonction de Schwartz-Bruhat (i.e. une fonction localement constante et à support compact) sur M. Soit $\hat{\Phi}$ sa transformée de Fourier par rapport à $\psi \circ \mathrm{Tr}$ et à la mesure de Haar dg sur M déduite de la mesure de Haar sur F (c'est la mesure de Haar sur M autoduale pour $\psi \circ \mathrm{Tr}$) :

$$\hat{\Phi}(h) = \int_M \Phi(g)\psi \circ \mathrm{Tr}(gh)dg \quad \text{pour } h \in M.$$

Considérons l'intégrale $\int_G \Phi(g)|\mathrm{Det}\, g|^s f(g)\, d^\times g$, où $d^\times g$ est une mesure de Haar fixée quelconque sur G. Cette intégrale converge pour s de partie réelle assez grande, et se prolonge analytiquement en une fraction rationnelle en q^{-s}, notée $Z(\Phi, s, f)$. On a l'équation fonctionnelle [Ja1, p.63]

$$\frac{Z(\hat{\Phi}, 2-s, \check{f})}{L(\check{\pi})(1-s)} = \varepsilon(\pi,\psi,dx)(s)\, \frac{Z(\Phi, s+1, f)}{L(\pi)(s)} .$$

Dans le cas où nous plaçons, π est cuspidale et par suite on a $L(\pi) = L(\check{\pi}) = 1$; on a donc

$$Z(\hat{\Phi}, 2-s, \check{f}) = \varepsilon(\pi)(s)\, Z(\Phi, s+1, f).$$

Supposons que π soit l'induite compacte d'une représentation τ, de dimension finie, d'un sous-groupe ouvert T de G. Alors on peut prendre pour coefficient f de π un coefficient quelconque de τ, prolongé par 0 hors de T. On peut alors facilement transformer l'équation fonctionnelle précédente en l'équation

$$\int_T \hat{\Phi}(g)\, \tau(g^{-1})\, |\mathrm{Det}\, g|^{2-s} d^\times g = \varepsilon(\pi)(s) \int_T \Phi(g)\, \tau(g)\, |\mathrm{Det}\, g|^{s+1} d^\times g,$$

où les intégrales sont prises dans l'espace de dimension finie End(S), S désignant l'espace de la représentation τ. Comme $\varepsilon(\pi)(s)$ est un scalaire, on peut prendre les traces dans End(S) des deux membres et obtenir

$$(1) \quad \int_T \hat{\Phi}(g)\,\mathrm{trace}\,\tau(g^{-1})\, |\mathrm{Det} g|^{2-s} d^\times g = \varepsilon(\pi)(s) \int_T \Phi(g)\,\mathrm{trace}\,\tau(g)\, |\mathrm{Det} g|^{s+1} d^\times g.$$

Le calcul s'effectue alors en choisissant Φ de sorte que l'intégrale portant sur Φ soit facile à calculer (par exemple on prendra le support de Φ contenu dans le noyau de τ) et en évaluant alors le premier membre.

5.20. Dans le cas qui nous interesse,on prend comme groupe T le groupe $F[c]^{\times}H^{m^-}$ et pour τ la représentation $\chi\kappa(c,\theta)$ définie par $\chi\kappa(c,\theta)(g) = \chi\circ \mathrm{Det}(g)\cdot\kappa(c,\theta)(g)$; cette représentation est de dimension 1 ou q selon que m est pair ou impair. On posera, pour la simplicité de l'écriture,

$a = a(\chi)$ et $a(\pi) = k+2$; on a alors $k = \sup(m, 3a(\chi)-2)$ d'après la proposition 5.1 b).

On prendra pour Φ la fonction caractéristique de H^k. Alors $\hat{\Phi}$ a son support dans $A^{-k-2-3\nu}$ et y vaut $\psi\circ \mathrm{Tr}(x)\int_{H^k} dg$. Comme τ est triviale sur H^k_L, le coefficient de $\varepsilon(\pi)(s)$ dans l'équation fonctionnelle (1) vaut alors

$$\dim\tau\cdot\int_{H^k} d^{\times}g\,.$$

On prendra sur G la mesure de Haar $d^{\times}g = |\mathrm{Det}\,g|^{-3}dg$.
On a alors $\int_{H^k} d^{\times}g = \int_{H^k} dg$ et par suite :

$$\varepsilon(\pi)(s) = \int \frac{\operatorname{trace}\tau(g^{-1})}{\dim\tau}\,\psi\circ\mathrm{Tr}(g)\,|\mathrm{Det}\,g|^{2-s}\,d^{\times}g\,, \tag{2}$$

l'intégrale portant sur $T\cap A^{-k-2-3\nu}$.

Mais on sait que $\varepsilon(\pi)$ est un monôme en q^{-s} de degré $k+2+3\nu$. On peut donc se contenter d'intégrer sur les éléments g de $T\cap A^{-k-2-3\nu}$ qui vérifient $v_F(\mathrm{Det}\,g) = -k-2-3\nu$. Un tel élément étant donné, les autres s'en déduisent par multiplication par les éléments de $T\cap H^o$.

Choisissons un élément c_χ de $F^{\times}$, de valuation $-a-\nu$, tel qu'on ait

$$\chi(x) = \psi(c_\chi(x-1)) \quad \text{pour} \quad x \in F^\times,\ 2v_F(x-1) \geq a.$$

On a alors

$$c + c_\chi \in T \quad \text{et} \quad v_F(\mathrm{Det}(c+c_\chi)) = -k-2-3\nu.$$

On obtient donc

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(2-s)(k+2+3\nu)} \int \frac{\mathrm{trace}(\tau((c+c_\chi)g)^{-1})}{\dim \tau} \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g)\,|\mathrm{Det}\, g\,|^{2-s}\, d^\times g$$

où l'intégrale porte sur $T \cap H^o = U_{F[c]}\, H^{m^-}$.

On va calculer cette intégrale en intégrant d'abord sur H^{k^+}. Soit $h \in H^{k^+}$; de l'inégalité $k^+ \geq m^+$ on déduit facilement, étant donnée la façon dont $\kappa(c,\theta)$ est construite, que $\tau(h)$ est une homothétie de rapport

$$\chi \circ \mathrm{Det}(h)\psi \circ \mathrm{Tr}(c(h-1)).$$

On utilise alors le lemme suivant.

<u>Lemme 5.20</u>. Soit $h \in H^{k^+}$; on a alors $\chi \circ \mathrm{Det}(h) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c_\chi(h-1))$.

<u>Démonstration</u>. On vérifie aisément par un calcul direct que $\mathrm{Det}\, h$ et $1 + \mathrm{Tr}(h-1)$ ne diffèrent que par un élément de la forme $1+a$, avec $v_F(a) \geq \left[\frac{2k^+ + 2}{3}\right]$.
Mais on a également $2k^+ + 2 \geq k + 2 \geq 3a$, donc χ est trivial sur $1+a$ et on a $\chi \circ \mathrm{Det}(h) = \chi(1 + \mathrm{Tr}(h-1))$.
Mais on a aussi $v_F(\mathrm{Tr}(h-1)) \geq \left[\frac{k^+ + 2}{3}\right]$ et $2\,\frac{k^+ + 2}{3} \geq a$, et par suite

$$\chi \circ \mathrm{Det}(h) = \psi(c_\chi \mathrm{Tr}(h-1)) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c_\chi(h-1)),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par suite, pour $h \in H^{k^+}$, $\tau(h)$ est l'homothétie de rapport

$$\psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)(h-1)).$$

Soit $g \in T \cap H^o$. On a alors

$$\int_{H^{k^+}} \mathrm{trace}(\tau(gh)^{-1})\psi \circ \mathrm{Tr}(gh)d^\times h = \mathrm{trace}(\tau(g^{-1}))\psi \circ \mathrm{Tr}(g)\int_{A^{k^+}}\psi \circ \mathrm{Tr}((g-c-c_\chi)u)du,$$

et l'intégrale de droite est nulle sauf si $g \in (c+c_\chi)H^{k^-}$ et vaut en ce dernier cas $\int_{A^{k^+}} du = q^{-3k^+-3-3\nu/2}$.

Pour calculer $\varepsilon(\pi)(s)$, il nous suffit donc de calculer

$$\sum_g \mathrm{trace}(\tau((c+c_\chi)g)^{-1})\psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g)$$

où la somme porte sur des représentants des classes de H^{k^-} modulo H^{k^+}.

5.21. Si <u>k est pair</u>, on trouve immédiatement

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)}(\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})(c+c_\chi)^{-1} \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c+c_\chi)$$

puisque τ est un caractère et que la somme à calculer n'a qu'un terme. Si k est impair, la situation est plus délicate. Supposons d'abord <u>k impair, $k > m$</u>. On a alors $k^- \geq m^+$ et pour $g \in H^{k^-}$, $\tau(g)$ est l'homothétie de rapport $\chi \circ \mathrm{Det}(g)\psi \circ \mathrm{Tr}(c(g-1))$. De même, comme $c+c_\chi \in F^\times U^1_{F[c]}$, $\tau(c+c_\chi)$ est l'homothétie de rapport $\chi \circ \mathrm{Det}(c+c_\chi)^{-1}\,\theta\,(c+c_\chi)^{-1}$.

On trouve donc alors

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)}(\theta \cdot \chi \circ \det)(c+c_\chi)^{-1} \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c+c_\chi) \cdot A$$

où la quantité A vaut

$$q^{-3/2}\sum_x \chi \circ \mathrm{Det}(1+x)^{-1}\psi \circ \mathrm{Tr}(c_\chi x),$$

la somme portant sur des représentants des classes de A^{k^-} modulo A^{k^+}. Mais on remarque alors que puisque k est impair, $k > m$, on a $k = 3a-2 = 6a^- + 1$ d'où $k^- = 3a^-$. Tout élément x de A^{k^-} s'écrit sous la forme $\tilde{\omega}_F^{a^-} z$ avec z dans A^o.

Quand z parcourt un ensemble de représentants des classes de A^o modulo A^1, x parcourt un ensemble de représentants des classes de A^{k^-} modulo A^{k^+}. On peut choisir une base de V de sorte que dans cette base A^o soit représenté par les matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ dont la réduction modulo $\mathcal{P}_F$ est triangulaire supérieure, et que A^1 soit formé des matrices qui sont triangulaires supérieures strictes modulo $\mathcal{P}_F$. On en déduit que A vaut $G(\chi, c_\chi)^3$ où

$$G(\chi, c_\chi) = q^{-1/2} \sum_x \chi^{-1}(1+x)\,\psi(c_\chi x)$$

la somme portant sur des représentants de $\mathcal{P}_F^{a^-}$ modulo $\mathcal{P}_F^{a^+}$. Par suite, pour k impair, $k > m$, on a trouvé

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)}(\theta\cdot\chi\circ\det)(c+c_\chi)^{-1}\cdot\psi\circ\mathrm{Tr}(c+c_\chi)\cdot G(\chi,c_\chi)^3.$$

5.22. Il nous reste à examiner le cas où k est impair, égal à m (i.e. $3a < m+2$).

Utilisons les notations de 5.11 à 5.18, et en particulier, désignons par γ l'élément du groupe symplectique $Sp(V,f)$ image de $\tau(c)$ (ou de $\tau(c+c_\chi)$, ce qui revient au-même puisque $1+c_\chi c^{-1}$ appartient à $U^1_{F[c]}$ et donc $\tau(1+c_\chi c^{-1})$ est une homothétie).

Supposons d'abord $p \neq 3$. Utilisant 5.13 et 5.14, on voit alors qu'on peut choisir les représentants g des classes de H^{k^-} modulo H^{k^+} de sorte que l'ensemble des $\tau((c+c_\chi)g)$ soit l'union, pour x parcourant un ensemble U de représentants de $U^{k^-}_{F[c]}$ modulo $U^{k^+}_{F[c]}$, des ensembles formés des q^2 conjugués sous $\tau(H^{k^-})$ de $\tau((c+c_\chi)x)$. On obtient alors, puisqu'on a

$$\mathrm{trace}\,\tau((c+c_\chi)x) = (\theta\cdot\chi\circ\mathrm{Det})^{-1}((c+c_\chi)x)\quad\mathrm{trace}(\gamma)$$

et $\mathrm{trace}\,(\gamma) = \left(\frac{q}{3}\right)$,

l'égalité

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)} \cdot \left(\frac{q}{3}\right) \cdot (\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})(c + c_\chi)^{-1} \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c + c_\chi) \cdot B$$

où

$$B = q^{-1/2} \sum_{x \in U} \psi \circ \mathrm{Tr}((c + c_\chi)(x - 1)) \cdot (\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})(x^{-1}).$$

Mais pour $x \in U$, $\chi \circ \mathrm{Det}(x)$ vaut $\psi \circ \mathrm{Tr}(c_\chi(x-1))$ et on a donc
$B = q^{-1/2} \sum_{x \in U} \psi \circ \mathrm{Tr}(c(x-1))\, \theta(x^{-1})$, une somme de Gauss qu'on notera $G(\theta, c)$.

Supposons ensuite $p = 3$. On a

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)} q^{-5/2} \sum_g \mathrm{trace}(\tau((c+c_\chi)g)^{-1}) \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g),$$

où g parcourt un ensemble de représentants de H^{k^-} modulo H^{k^+}. On calcule cette somme en sommant d'abord sur un ensemble de représentants h de $U_{F[c]}^{k^-} H^{k^+}$ modulo H^{k^+}. On peut prendre ces représentants dans $U_{F[c]}^{k^-}$. Comme $\tau(h)$ est alors une homothétie de rapport $\chi \circ \mathrm{Det}(h)\, \theta(h)$, on voit pour $g \in H^{k^-}$ que la somme
$\sum_h \mathrm{trace}(\tau((c+c_\chi)gh)^{-1}) \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)gh)$ vaut

$$\mathrm{trace}(\tau((c+c_\chi)g)^{-1}) \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g) \sum_h \chi \circ \mathrm{Det}(h)\, \theta(h) \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g(h-1)).$$

Mais cette dernière somme n'est non nulle que si l'on a

$$\chi \circ \mathrm{Det}(h)\, \theta(h) = \psi \circ \mathrm{Tr}((c+c_\chi)g(h-1)) \quad \text{pour tout } h,$$

c'est-à-dire cf. 5.16 si $\tau((c+c_\chi)g)$ est conjugué sous H à un multiple scalaire de γ, auquel cas la somme vaut q. De plus, on a q telles possibilités pour g. On en déduit l'égalité

$$\varepsilon(\pi)(s) = q^{(1/2-s)(k+2+3\nu)} (\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})(c+c_\chi)^{-1} \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c+c_\chi) G_F(\mathrm{Det}\, c)$$

où

$$G_F(\mathrm{Det}\, c) = q^{-1/2} \mathrm{trace}(\gamma) = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu+n-1} \cdot \mathrm{Det}\, c \cdot \xi^2).$$

5.23. Résumons les résultats obtenus.

Soit m un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$.

Soient c un élément cuspidal de M, vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$ et θ un caractère de $F[c]^\times$ compatible à c (fortement si p vaut 3) i.e. $\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$ pour $x \in P_{F[c]}^{m'}$ (et pour $x \in P_{F[c]}^{m^-}$ si p vaut 3).

Soient χ un caractère de $F^\times$, et c_χ un élément de $F^\times$ de valuation $-a(\chi)-\nu$, tel qu'on ait

$$\chi(x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(c_\chi(x-1)) \quad \text{pour} \quad x \in F^\times, 2v_F(x-1) \geq a(\chi).$$

Posons $\pi = \pi(c,\theta)$. Alors on a

i) $a(\pi) = m+2$

ii) $a(\chi\pi) = \sup(3a(\chi), a(\pi))$

iii) $\varepsilon(\chi\pi)(s) = q^{(1/2-s)(a(\chi\pi)+3\nu)}(\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})(c+c_\chi)^{-1}\psi \circ \mathrm{Tr}(c+c_\chi) \cdot A$

où la quantité A vaut

1 si $a(\chi\pi)$ est pair

$G(\chi,c_\chi)^3$ si $a(\chi\pi)$ est impair et $a(\chi\pi) > a(\pi)$;

$(\frac{q}{3})G(\theta,c)$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) = a(\pi)$, et $p \neq 3$;

$G_F(\mathrm{Det}\, c)$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) = a(\pi)$, $p = 3$;

avec les définitions suivantes des sommes de Gauss :

$$G(\chi,c_\chi) = q^{-1/2}\sum_x \chi^{-1}(1+x)\,\psi(c_\chi x)$$

la somme portant sur des représentants de $P_F^{a(\chi)^-}$ modulo $P_F^{a(\chi)^+}$;

$$G(\theta,c) = q^{-1/2}\sum_x \theta^{-1}(1+x)\psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$$

la somme portant sur des représentants de $P^{m^-}_{F[c]}$ modulo $P^{m^+}_{F[c]}$.

$$G(\mathrm{Det}\, c) = q^{-1/2} \sum_{\xi} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu+m-1} \cdot \mathrm{Det}\, c \cdot \xi^2)$$

la somme portant sur des représentants de $\mathcal{O}_F$ modulo P_F.

5.24. Remarques.

1) Soit χ un caractère de $F^\times$ vérifiant $3a(\chi) < a(\pi)$. Alors on a $\chi\pi(c,\theta) = \pi(c+c_\chi, \theta \cdot \chi_{F[c]})$. Cela découle des calculs précédents et du lemme 3.1.1, et peut également se vérifier directement à partir de la construction de $\pi(c,\theta)$.

Soit χ un caractère de $F^\times$ vérifiant $3a(\chi) > a(\pi)$. Alors on a $\varepsilon(\chi\pi)(s) = \varepsilon(\chi)(s)^3 \cdot \theta^{-1}(c+c_\chi)\cdot\chi^{-1}_\circ \mathrm{Det}(1+cc_\chi^{-1})\psi \circ \mathrm{Tr}(c)$. Cela découle immédiatement de 5.23 et 2.18.

2) Quand p est distinct de 3, on peut prouver, et ce sera fait dans l'appendice 5 de ce travail, les faits suivants :

Soient - E une extension finie de F dans $\bar{F}$

- α un F-isomorphisme de E sur $F[c]$

- σ_θ l'induite à W_F du caractère $\theta \circ \alpha \circ \tau_E$ de W_E.

Alors, si E/F est cyclique, $\pi(c,\theta)$ est la représentation $\pi(\sigma_\theta)$ attachée à θ par la correspondance de Langlands et, si E/F n'est pas cyclique, $\pi(c,\theta)$ est la tordue de $\pi(\sigma_\theta)$ par le caractère non ramifié de degré 2 de $F^\times$.

Notons qu'à cause des remarques de 5.9 et 5.18, toutes les représentations cuspidales d'exposant $m+2$ de G sont de la forme $\pi(c,\theta)$, où c engendre une extension séparable de F; alors l'extension E et l'isomorphisme α considérés plus haut existent.

3) La remarque précédente souligne que quand p est distinct de 3 la donnée de

$F[c]$ séparable sur F et de θ détermine l'élément c de $A^{-m-2-3\nu}$ modulo $A^{-m^+-2-3\nu}$. En fait on voit alors facilement que θ est d'exposant m et que c est l'élément de $P_{F[c]}^{-m-2-3\nu}$, bien défini modulo $P_{F[c]}^{-m^+-2-3\nu}$, tel qu'on ait $\theta(1+x) = \psi_{F[c]}(cx)$ pour $x \in P_{F[c]}^{m^+}$.

4) Pour $\pi = \pi(c,\theta)$, $\operatorname{Det} c$ est l'élément c_π de $F^\times$, bien défini modulo U_F^1, tel qu'on ait

$$\varepsilon(\chi\pi) = \chi(c_\pi)^{-1}\varepsilon(\pi) \quad \text{pour tout caractère modéré } \chi \text{ de } F^\times.$$

En effet, χ étant modéré, on a alors $\chi \circ \operatorname{Det}(1 + c_\chi c^{-1}) = 1$

$$\text{et} \quad \theta(1 + c_\chi c^{-1}) = \psi \circ \operatorname{Tr}(cc_\chi c^{-1}) = \psi \circ \operatorname{Tr}(c_\chi) \quad \text{d'où}$$

l'égalité $\varepsilon(\chi\pi) = \chi(\operatorname{Det} c)^{-1}\varepsilon(\pi)$.

5) Le lecteur aura remarqué que le caractère central de $\pi(c,\theta)$ n'est autre que la restriction de θ à $F^\times$!

6. Changement de base modéré.

6.1. Dans ce chapitre, nous reprenons une idée de Kutzko [Ku2] pour définir un changement de base modéré. On fixe une extension quadratique K de F dans $\bar{F}$, modérément ramifiée*). A chaque élément π de $A_F^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3, on va associer un élément π_K de $A_K^\circ(3)$, dont on prouvera au chapitre suivant que si π est de la forme $\pi(\sigma)$ pour $\sigma \in G_F^\circ(3)$, alors π_K n'est autre que $\pi(\sigma_K)$ où $\sigma_K \in \overset{\circ}{G}_K(3)$ est obtenue par restriction de σ à W_K (cette restriction est irréductible, comme on le voit aisément).

Le plan de ce chapitre suit [Ku2, §2], mais nous avons dû adapter et plusieurs fois modifier les démonstrations.

En 6.2 et 6.3 nous montrons comment associer à une ligne de réseaux dans F^3 une ligne de réseaux dans K^3. A une représentation**) cuspidale π de $A_F^\circ(3)$ de la forme $\pi(c,\theta)$ construite au chapitre précédent, on associe en 6.5 la représentation cuspidale $\pi_K = \pi(c,\theta_{K[c]})$ de $A_K^\circ(3)$, et on prouve que cette opération $\pi \longmapsto \pi_K$ est bien définie (lemme 6.5).

On établit en 6.7 et sq. le lien entre les facteurs ε de π_K et ceux de π (liens qui laissent bien augurer que $\pi \longmapsto \pi_K$ reflète la restriction du côté galoisien).

La proposition 6.11 décrit les fibres de l'application $\pi \longmapsto \pi_K$, et le théorème 6.13, fondamental pour nous, son image.

*) Plus généralement, on peut définir un tel changement de base pour toute extension modérée K de F dans $\bar{F}$, dont l'indice de ramification est premier à 3. Cela ne nous sera pas utile ici. On peut d'ailleurs définir un changement de base analogue pour les représentations considérées par Carayol [Ca].

**) Comme à la fin du chapitre précédent nous dirons représentation au lieu de classe de représentations.

6.2. Soit V_F l'espace vectoriel F^3, L la ligne de réseaux standard

$$L_0 = O_F \oplus O_F \oplus O_F$$

$$L_1 = O_F \oplus O_F \oplus P_F$$

$$L_2 = O_F \oplus P_F \oplus P_F$$

On note V_K l'espace vectoriel $K^3 = K \underset{F}{\otimes} V$ et on définit une ligne de réseaux L^K dans V_K par les mêmes formules que précédemment, l'indice K remplaçant F, si K est non ramifiée sur F, et par les formules qui suivent sinon :

$$L_0^K = P_K^{-1} \oplus O_K \oplus O_K$$

$$L_1^K = P_K^{-1} \oplus O_K \oplus P_K$$

$$L_2^K = O_K \oplus O_K \oplus P_K$$

On note G_F le groupe $GL_F(V_F)$, G_K le groupe $GL_K(V_K)$. On note e (valant 1 ou 2) l'indice de ramification de K sur F, $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$, σ son élément non trivial. Le groupe $\mathfrak{G}$ agit sur $\mathrm{End}_K(V_K)$ (par action sur les coefficients des matrices) et on dispose d'une trace $\mathrm{Tr}_{K/F} : \mathrm{End}_K(V_K) \longrightarrow \mathrm{End}_F(V_F)$. On note ω le caractère quadratique de $F^\times$ définissant K.

6.3. Conservons les notations du chapitre précédent en ce qui concerne les groupes H^i, A^i attachés à une ligne de réseaux.

<u>Lemme</u>. On a
$$H_{L^K} \cap G_F = H_L$$
et
$$H^0_{L^K} \cap G_F = H^0_L$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a aussi $A^n_{L^K} \cap \mathrm{End}_F(V_F) = \mathrm{Tr}_{K/F}(A^n_{L^K}) = A^r_L$, où r vaut $1 + \left[\frac{n-1}{e}\right]$.

La preuve de ce lemme est immédiate.

<u>Définition</u>. Si L est une ligne de réseaux dans V_F, et g un élément de G_F tel que $L = gL$, alors, grâce au lemme précédent, on sait que la ligne de réseaux gL^K ne dépend pas du choix de g; on la note L^K, et on l'appelle le <u>relèvement</u> (à K) de la ligne de réseaux L de V_F.

<u>Remarques</u>. 1 - Il est alors clair que le lemme précédent est valable si l'on remplace L par L et L^K par L^K.

2 - Soient c un élément L-cuspidal de G_F, et $\vec{v}$ une base de l'espace vectoriel F^3 sur le corps $F[c]$, telle qu'on ait, pour $i \in \mathbb{Z}$, $L_i = P^i_{F[c]}\vec{v}$. Alors on a $L^K_i = P^i_{K[c]}\vec{v}$ pour tout entier i, et bien sûr cette propriété caractérise L^K.

3 - Dans le cas où on se donne un élément cuspidal c de G_F, on pourra omettre de la notation les indices $L(c)$, où $L(c)$ est la ligne de réseaux dans V_F déterminée par c à translation des indices près, et on mettra un indice K à la place de $L(c)^K$. L'élément c est alors $L(c)$-cuspidal dans G_F, et $L(c)^K$-cuspidal dans G_K.

6.4. Nous poserons $\nu^K = n(\psi_K) = en + e - 1$ (Rappelons que l'on a posé $\nu = n(\psi)$).
Pour tout entier r, on posera $r_K = er - e + 1$.
Soit m un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$. Soit c un élément cuspidal de G_F vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m - 2 - 3\nu$. Alors c est un élément cuspidal de G_K, vérifiant $v_K(\mathrm{Det}\, c) = -m_K - 2 - 3\nu^K$ *). De plus, on a égalité des sous-corps $K\cdot F[c]$ et $K[c]$ de $\mathrm{End}_K(V_K)$.

<u>Lemme 6.4</u>. Soient m un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$, et c un élément cuspidal de G_F vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m - 2 - 3\nu$.

*) On notera Tr et Det la trace et le déterminant, aussi bien dans $\mathrm{End}_F(V_F)$ que dans $\mathrm{End}_K(V_K)$.

a) Soit $x \in A_K^{(m_K)^+}$. Alors $\mathrm{Tr}_{K/F}(x) \in A^{m^+}$ et on a

$$\psi \circ \mathrm{Tr}(c \cdot \mathrm{Tr}_{K/F}(x)) = \psi_K \circ \mathrm{Tr}(cx).$$

b) Soit θ un caractère de $F[c]^\times$ compatible à c (fortement compatible si p vaut 3). Alors le caractère $\theta_{K[c]}$ de $K[c]^\times$ est compatible à l'élément c de $K[c]^\times$ (fortement compatible si p vaut 3).

<u>Démonstration</u>. a) découle immédiatement du lemme 6.3.

Prouvons b) pour $p \neq 3$; posons $r = (m_K)^+$. Soit $x \in P^r_{K[c]}$, et écrivons

$$N_{K[c]/F[c]}(1+x) = 1 + \mathrm{Tr}_{K[c]/F[c]} + R.$$

On a $R \in P^{2r/e}_{F[c]}$. Si d est l'exposant différentiel de $F[c]$ sur F, on a $a(\theta) \leq \sup(m+2-d, m^+)$, puisque θ est compatible à c, donc donné par $\theta(1+x) = \psi_{F[c]}(cx)$ pour $x \in P^{m^+}_{F[c]}$.

Tenant compte de $m \geq 2$, on en déduit $2r/e \geq a(\theta)$ et

$$\theta_{K[c]}(1+x) = \theta(1 + \mathrm{Tr}_{K[c]/F[c]}(x)).$$

Mais $\mathrm{Tr}_{K[c]/F[c]}(x)$ appartient à A^{m^+} par a), d'où le résultat. On prouve b) de manière analogue si $p = 3$, en utilisant en outre $d \geq 3$ (puisque $F[c]$ est alors sauvagement ramifiée sur F).

6.5. Soit (c, θ, χ) un triplet formé

- d'un élément cuspidal c de G_F vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$ où m est un entier, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1$ modulo 3;
- d'un caractère θ de $F[c]^\times$ compatible à c (fortement compatible à c si p vaut 3);
- d'un caractère χ de $F^\times$.

A un tel triplet, on associe le triplet $(c, \theta_{K[c]}, \chi_K)$ qui est formé

- de l'élément c de G_K, qui est cuspidal et vérifie $v_K(\mathrm{Det}\, c) = -m_K - 2 - 3\nu^K$;

- du caractère $\theta_{K[c]}$ de $K[c]^\times$ compatible à c par le lemme précédent (fortement compatible à c si p vaut 3);

- du caractère χ_K de $K^\times$.

A ces triplets, on associe respectivement la représentation cuspidale $\chi\pi(c,\theta)$ de G_F, d'exposant minimal $m+2$, et la représentation cuspidale $\chi_K\pi(c,\theta_{K[c]})$ de G_K, d'exposant minimal m_K+2.

<u>Lemme 6.5</u>. Soient (c,θ,χ) et (c',θ',χ') deux triplets (relatifs à G_F). Si on a $\chi\pi(c,\theta) = \chi'\pi(c,\theta')$ dans $A_F^\circ(3)$, alors on a aussi

$$\chi_K\pi(c,\theta_{K[c]}) = \chi_K'\pi(c,\theta'_{K[c]}) \text{ dans } A_K^\circ(3).$$

Ce lemme nous permet de définir, pour tout $\pi \in A_F^\circ(3)$ d'exposant minimal $m+2$ non multiple de 3, une représentation cuspidale π_K de $A_K^\circ(3)$, d'exposant minimal $m_K + 2 = em + 3 - e$. En effet on a vu au chapitre précédent qu'il existe un triplet (c,θ,χ) comme plus haut tel que $\pi = \chi\pi(c,\theta)$. On pose alors

$$\pi_K = \chi_K\pi(c,\theta_{K[c]}),$$ ce qui ne dépend pas des choix effectués.

L'opération faisant passer de π à π_K s'appelle le <u>changement de base</u> (modéré) de F à K. Nous verrons au chapitre 7 que ce changement de base correspond effectivement, par la correspondance de Langlands, à l'opération de restriction $\sigma \longmapsto \sigma_K$ sur les représentations de groupes de Weil (cf. 2.12). Une première indication en est donnée par la proposition 6.7.

Remarquons dès maintenant un résultat qui nous servira par la suite; il se déduit immédiatement de 5.24, Remarque 4.

Corollaire. Soit π une représentation cuspidale de $A_F^\circ(3)$, d'exposant minimal premier à 3. Soit c_π un élément de $F^\times$ tel qu'on ait $\varepsilon(\chi\pi) = \chi(c_\pi)^{-1}\varepsilon(\pi)$ pour tout caractère modéré χ de $F^\times$. Alors l'élément c_{π_K} de $K^\times$, bien défini modulo U_K^1, tel qu'on ait $\varepsilon(\chi\pi_K) = \chi(c_{\pi_K})^{-1}\varepsilon(\pi_K)$ pour tout caractère modéré χ de $F^\times$, n'est autre que c_π.

Remarque 1. Si $\pi = \chi\pi(c,\theta)$ comme plus haut et que c_χ est choisi comme en 2.15, on a $c_\pi = c_{\pi_K} = \mathrm{Det}(c + c_\chi) \bmod U_K^1$.

Remrque 2. Le caractère central de π_K est $\omega_\pi \circ N_{K/F}$.

6.6. Démontrons le lemme utilisé en 6.5. En tensorisant par le caractère χ^{-1}, on se ramène au cas où χ est trivial. Mais alors $\chi'\pi(c',\theta')$ est minimale, puisque $\pi(c,\theta)$ l'est, et, remplaçant c' par $c' + c_{\chi'}$, θ' par $\theta' \cdot \chi'_{F[c]}$, on peut supposer que χ' est trivial (cf. 5.24, Remarque 1). L'hypothèse devient donc que $\pi(c,\theta)$ et $\pi(c',\theta')$ sont équivalentes, et la conclusion que $\pi(c,\theta_{K[c]})$ et $\pi(c,\theta'_{K[c']})$ sont équivalentes. Grâce à 5.9 et 5.18, on voit que l'hypothèse signifie qu'il existe $g \in G_F$ tel que, en posant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, on ait

$$gc'g^{-1} \equiv c \bmod U_{F[c]}^{m^-} H_{L(c)}^{m^+} \quad \text{si } p \neq 3 \text{ et } \bmod H_{L(c)}^{m^+} \text{ si } p \text{ vaut } 3,$$

$$(\text{d'où } gF[c']\, H_{L(c')}^{m^+} g^{-1} = F[c]^\times H_{L(c)}^{m^+}) \text{ et}$$

$$\mathrm{trace}\, \kappa(c',\theta')(g^{-1}xg) = \mathrm{trace}\, \kappa(c,\theta)(x) \quad \text{pour } x \in F[c]^\times H_{L(c)}^{m^+}.$$

Remplaçant c' par $gc'g^{-1}$ et θ' par le caractère $x \longmapsto \theta'(g^{-1}xg)$ de $F[gc'g^{-1}]$, on peut supposer qu'on a $g = 1$, et l'hypothèse se traduit alors par la condition suivante (où H désigne $H_{L(c)}$) : pour $g \in F[c]^\times$, $g' \in F[c']^\times$, $a \in H^{m^+}$, tels que $g' = ga$, on a

$$\theta'(g') = \theta(g)\psi \circ \mathrm{Tr}(c(a-1)).$$

De la même façon, le résultat qu'on veut prouver sous cette hypothèse s'exprime ainsi :

pour $g \in K[c]^{\times}$, $g' \in K[c']^{\times}$, $a \in H_K^{(m_K)^+}$, tels que $g' = ga$, on a :

$$\theta'_{K[c]}(g') = \theta_{K[c]}(g)\psi_K \circ \mathrm{Tr}(c(a-1))$$

Notons σ l'élément non trivial de $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(K/F)$, groupe auquel nous identifierons $\mathrm{Gal}(K[c]/F[c])$ et $\mathrm{Gal}(K[c']/F[c'])$. On a alors, si $g \in K[c]$, $g' \in K[c']$ et $a \in H_K^{(m_K)^+}$ vérifient $g' = ga$,

$$g'g'^{\sigma} = gag^{\sigma}a^{\sigma} = gg^{\sigma}(g^{-\sigma}ag^{\sigma}a^{\sigma}).$$

On a $g'g'^{\sigma} \in F[c']^{\times}$ et $gg^{\sigma} \in F[c]^{\times}$ et donc l'élément $g^{-\sigma}ag^{\sigma}a^{\sigma}$ de G_K appartient à $H_K^{(m_K)^+} \cap G_F$, donc à H^{m^+} (cf. lemme 6.3). On a donc par hypothèse

$$\theta'(g'g'^{\sigma}) = \theta(gg^{\sigma})\psi \circ \mathrm{Tr}(cg^{-\sigma}ag^{\sigma}a^{\sigma} - c).$$

Posant $a = 1+\alpha$, cela se traduit par

$$\theta'_{K[c']}(g') = \theta_{K[c]}(g)\psi \circ \mathrm{Tr}(c(g^{-\sigma}\alpha g^{\sigma} + \alpha^{\sigma} + g^{-\sigma}\alpha g^{\sigma}\alpha^{\sigma})).$$

Mais comme g^{σ} commute à c, on a

$$\mathrm{Tr}(cg^{-\sigma}\alpha g^{\sigma}) = \mathrm{Tr}(g^{-\sigma}c\alpha g^{\sigma}) = \mathrm{Tr}(c\alpha).$$

D'autre part, puisque $g^{-\sigma}\alpha g^{\sigma}\alpha^{\sigma}$ appartient à $A_K^{2(m_K)^+} \cap \mathrm{End}_K(V_K)$ donc à A^m (cf. lemme 6.3), on a

$$\mathrm{Tr}(cg^{-\sigma}\alpha g^{\sigma}\alpha^{\sigma}) \equiv 0 \mod P_F^{\nu}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}\psi \circ \mathrm{Tr}(c(g^{-\sigma}\alpha g^{\sigma} + \alpha^{\sigma} + g^{-\sigma}\alpha g^{\sigma}\alpha^{\sigma})) &= \psi \circ \mathrm{Tr}(c(\alpha + \alpha^{\sigma})) \\ &= \psi_K \circ \mathrm{Tr}(c\alpha) \\ &= \psi_K \circ \mathrm{Tr}(c(a-1)),\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat voulu.

6.7. Proposition 6.7. Soit $\pi \in A_F^\circ(3)$, d'exposant minimal premier à 3. Notant ω le caractère de $F^\times$ définissant K, on a

$$\frac{\varepsilon(\pi_K,\psi_K)}{\varepsilon(1_K,\psi_K)^3} = \frac{\varepsilon(\pi,\psi)\varepsilon(\omega\pi,\psi)}{\varepsilon(1_F,\psi)^3\varepsilon(\omega,\psi)^3} .$$

Remarque. Si $\sigma \in \mathcal{G}_F^\circ(3)$ et si σ_K désigne sa restriction à W_K, on a, grâce aux propriétés d'inductivité en degré 0 des facteurs ε galoisiens

$$\frac{\varepsilon(\sigma_K,\psi_K)}{\varepsilon(1_K,\psi_K)^3} = \frac{\varepsilon(\sigma,\psi)\varepsilon(\omega\sigma,\psi)}{\varepsilon(1_F,\psi)^3\varepsilon(\omega,\psi)^3} .$$

Au chapitre suivant, nous prouverons, en utilisant cette similitude, qu'on a $\pi(\sigma_K) = \pi_K$ si $\pi = \pi(\sigma)$.

Dans la démonstration qui suit, nous omettrons les caractères additifs ψ et ψ_K de la notation, ce qui ne pourra créer de confusion. Nous traitons d'abord en 6.8 le cas où F est de caractéristique résiduelle p distincte de 3, puis en 6.9 le cas où p vaut 3 et où $e=1$, et enfin en 6.10 le cas où $p=3$, $e=2$.

6.8. Si la caractéristique résiduelle p de F est distincte de 3, le fait à démontrer découle de l'appendice 5. En effet, écrivons $\pi = \chi\pi(c,\theta)$, où le triplet (c,θ,χ) est choisi comme en 6.5,*) et notons σ_θ la représentation de W_F induite par le caractère $\theta\circ\tau_{F[c]}$ de $W_{F[c]}$. Si $F[c]/F$ est cyclique, on a $\pi = \chi\pi(\sigma_\theta)$ et sinon $\pi = \chi\beta\pi(\sigma_\theta)$ où β est le caractère non ramifié d'ordre 2 de $F^\times$. La restriction de σ_θ à W_K étant l'induite du caractère $\theta_{K[c]}\circ\tau_{K[c]}$ de $W_{K[c]}$, on a $\pi_K = \chi_K\pi((\sigma_\theta)_K)$ si $K[c]/K$ est cyclique, et

$\pi_K = \chi_K\beta'\pi((\sigma_\theta)_K)$ sinon, où β' désigne le caractère non ramifié d'ordre 2 de $K^\times$. Si $F[c]/F$ n'est pas cyclique et que $K[c]/K$ l'est, alors K/F est non ramifiée et par suite $\beta_K = 1$; si $F[c]/F$ n'est pas cyclique et que $K[c]/K$ ne l'est pas non plus alors K/F est ramifiée et on a $\beta' = \beta_K$. Par suite, en écri-

*) c étant supposé séparable sur F.

vant π sous la forme $\pi(\sigma)$ pour $\sigma \in G_F^\circ(3)$, on obtient $\pi_K = \pi(\sigma_K)$, et on conclut par la remarque 6.7.

6.9. Supposons maintenant $p = 3$ et, dans un premier temps, K/F non ramifiée, i.e. $e = 1$. On a alors

$$\begin{aligned} n(\psi_K) &= \nu \\ a(\pi_K) &= a(\pi) \\ \varepsilon(1_F) &= q^{(1/2 - s)\nu} \\ \varepsilon(1_K) &= q^{(1-2s)\nu} \\ \varepsilon(\omega) &= (-1)^\nu q^{(1/2 - s)\nu}. \end{aligned}$$

Choisissons un triplet (c,θ,χ) comme en 6.5 tel que $\pi = \chi\pi(c,\theta)$, et soit $a_{min}(\pi)$ l'exposant minimal de π. Utilisant les résultats de 5.23, on obtient immédiatement

$$\varepsilon(\omega\pi) = (-1)^{a(\pi)+\nu}\varepsilon(\pi) \quad \text{et}$$

$$\varepsilon(\pi_K) = B\varepsilon(\pi)^2, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} B &= 1 && \text{si } a(\pi) \text{ est pair;} \\ B &= \frac{G(\chi_K, c_\chi)^3}{G(\chi, c_\chi)^6} && \text{si } a(\pi) \text{ est impair et } a(\pi) > a_{min}(\pi); \\ B &= \frac{G_K(\mathrm{Det}\, c)}{G_F(\mathrm{Det}\, c)} && \text{si } a(\pi) \text{ est impair et } a(\pi) = a_{min}(\pi). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver l'égalité $B = (-1)^{a(\pi)}$, ce qui est clair si $a(\pi)$ est pair. Supposons donc $a(\pi)$ impair et tout d'abord $a(\pi) > a_{min}(\pi)$. Utilisant l'expression de $\varepsilon(\chi)$ en termes de $G(\chi, c_\chi)$, de $\varepsilon(\chi_K)$ en termes de $G(\chi_K, c_\chi)$, et la propriété d'inductivité

$$\frac{\varepsilon(\chi)\varepsilon(\omega\chi)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\omega)} = \frac{\varepsilon(\chi_K)}{\varepsilon(1_K)}$$

on obtient $G(\chi_K, c_\chi) = (-1)^{a(\chi)}\ G(\chi, c_\chi)^2$; comme en ce cas on a $a(\pi) = 3a(\chi)$, on obtient bien $B = (-1)^{a(\pi)}$.

Supposons alors $a(\pi)$ impair et $a(\pi) = a_{min}(\pi)$. On a

$$G_F(\mathrm{Det}\,c) = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu+a(\pi)-1} \cdot \mathrm{Det}\,c \cdot \xi^2)$$

et

$$G_K(\mathrm{Det}\,c) = q^{-1} \sum_{\xi \in k_K} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu+a(\pi)-1} \cdot \mathrm{Det}\,c \cdot \mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(\xi^2)).$$

Pour $\xi \in k_K$, et $a, b \in k_F$, on a

$$(a\xi + b)^2 = a^2\xi^2 + b^2 + 2ab\xi$$

et $$\mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(a\xi + b)^2 = a^2 \mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(\xi^2) - b^2 - ab\,\mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(\xi).$$

On peut choisir ξ engendrant k_K sur k_F de sorte que $\xi^{q-1} = -1$; on a alors $\mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(\xi) = 0$ et $\mathrm{Tr}_{k_K/k_F}(\xi^2) = -\xi^2$ car $\xi^2 \in k_F$. On trouve donc

$$G_K(\mathrm{Det}\,c) = q^{-1} \sum_{a \in k_F} \sum_{b \in k_F} \psi(-\tilde{\omega}_F^{2\nu+a(\pi)-1} \cdot \mathrm{Det}\,c \cdot (a^2\delta + b^2)),$$

où $\delta = \xi^2$. On a donc, par 2.17,

$$G_K(\mathrm{Det}\,c) = G_F(\mathrm{Det}\,c)^2 \left(\frac{\delta}{q}\right) = -G_F(\mathrm{Det}\,c)^2$$

d'où le résultat $\quad B = -1 = (-1)^{a(\pi)}$.

6.10. Toujours dans le cas où p vaut 3, supposons maintenant K/F ramifiée, i.e. $e = 2$. On a alors

$$n(\psi_K) = 2\nu + 1$$
$$a(\pi_K) = 2a(\pi) - 3$$
$$\varepsilon(1_F) = q^{(1/2-s)\nu}$$
$$\varepsilon(1_K) = q^{(1/2-s)(2\nu+1)}$$
$$\varepsilon(\omega) = q^{(1/2-s)(\nu+1)} \omega(\tilde{\omega}_F)^{\nu+1} q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F^\times} \omega(\xi^{-1}) \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi).$$

Ecrivant comme en 6.5 $\pi = \chi\pi(c,\theta)$, on obtient grâce à 5.23

$$\varepsilon(\omega\pi) = \omega \circ \mathrm{Det}(c + c_\chi)\varepsilon(\pi)$$

et
$$\frac{\varepsilon(\pi_K)}{\varepsilon(1_K)^3} = \frac{\varepsilon(\pi)\varepsilon(\omega\pi)}{\varepsilon(1_F)^3\varepsilon(\omega)^3}\ \omega \circ \mathrm{Det}(c + c_\chi) \cdot G_\omega^3 \cdot B,$$

où $\varepsilon(\omega) = q^{(1/2-s)(\nu+1)}G_\omega$

et
$$B = G_K(\mathrm{Det}\, c) \quad \text{si } a(\pi) \text{ est pair et } a(\pi) = a_{min}(\pi)$$
$$B = \frac{G_K(\mathrm{Det}\, c)}{G_F(\mathrm{Det}\, c)} \quad \text{si } a(\pi) \text{ est impair et } a(\pi) = a_{min}(\pi)$$
$$B = G(\chi_K, c_\chi)^3 \quad \text{si } a(\pi) \text{ est pair, } a(\pi) > a_{min}(\pi)$$
$$B = \frac{G(\chi_K, c_\chi)^3}{G(\overline{\chi}, c_\chi)^6} \quad \text{si } a(\pi) \text{ est impair, } a(\pi) > a_{min}(\pi).$$

Il s'agit de prouver que $\omega \circ \mathrm{Det}(c+c_\chi) \cdot G_\omega^3 \cdot B$ vaut 1.

Dans les deux premiers cas des lignes précédentes, on a $\omega \circ \mathrm{Det}(c + c_\chi) = \omega \circ \mathrm{Det}(c)$, dans les deux derniers, $\omega \circ \mathrm{Det}(c + c_\chi) = \omega \circ \mathrm{Det}(c_\chi) = \omega(c_\chi)^3 = \omega(c_\chi)$. Il reste à calculer $G_\omega^3 B$.

Supposons d'abord $a(\pi) > a_{min}(\pi)$. On a

$$\varepsilon(\chi) = q^{(1/2-s)(a(\chi)+\nu)}\chi(c_\chi)^{-1}\psi(c_\chi)\, G \quad \text{et} \quad \varepsilon(\omega_\chi) = \omega(c_\chi)\varepsilon(\chi),$$

avec $G = 1$ si $a(\chi)$ est pair,

$G = G(\chi, c_\chi)$ si $a(\chi)$ est impair,

et
$$\varepsilon(\chi_K) = q^{(1/2-s)(2a(\chi)+2\nu+2)}\chi(c_\chi)^{-2}\psi(c_\chi)^2 G(\chi_K, c_\chi).$$

De la propriété d'inductivité

$$\frac{\varepsilon(\chi_K)}{\varepsilon(1_K)} = \frac{\varepsilon(\chi)\varepsilon(\omega_\chi)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\omega)},$$

On déduit alors l'égalité voulue : $\omega(c_\chi)\, G_\omega^3 B = 1$.

Il reste donc uniquement à traiter le cas où $a(\pi) = a_{min}(\pi)$. On a alors

$$G_K(\operatorname{Det} c) = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi \circ Tr_{K/F}(\tilde{\omega}_K^{4\nu+2a(\pi)-2} \cdot \operatorname{Det} c \cdot \xi^2),$$

où $\tilde{\omega}_K$ est une uniformisante de K, qu'on peut supposer choisir de sorte qu'on ait $\tilde{\omega}_K^2 = -\tilde{\omega}_F$ (quitte à changer le choix de $\tilde{\omega}_F$). On obtient alors

$$G_K(\operatorname{Det} c) = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu-a(\pi)-1} \cdot \operatorname{Det} c \cdot (-1)^{a(\pi)} \xi^2)$$

et, si $a(\pi)$ est impair,

$$G_F(\operatorname{Det} c) = G_K(\operatorname{Det} c)(-1)^{(q-1)/2} \quad \text{(cf. 2.17).}$$

On a $N_{K/F}(\tilde{\omega}_K) = -\tilde{\omega}_K^2 = \tilde{\omega}_F$ d'où $\omega(\tilde{\omega}_F) = 1$; d'autre part, $\omega(\xi) = \xi^{(q-1)/2}$ si ξ est une racine $(q-1)^e$ de l'unité dans F. On a donc

$$G_\omega = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F^\times} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi)\omega(\xi^{-1})$$

puis $q^{1/2} G_\omega = \frac{1}{2}\left[\sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2) - \sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2\delta)\right]$

où $\delta^{(q-1)/2} = -1$ dans F.

De 2.17 on tire alors aisément, en tenant compte de $\omega(\tilde{\omega}_F) = 1$,

$$G_\omega = q^{-1/2} \sum_{\xi \in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2) = G_K(\operatorname{Det} c)\,\omega((-1)^{a(\pi)}\operatorname{Det} c).$$

On a donc

$$\omega \circ \operatorname{Det}(c + c_\chi) \cdot G_\omega^3 \cdot B = G_K(\operatorname{Det} c)^4 = 1 \qquad \text{si } a(\pi) \text{ est pair}$$

$$= G_K(c)^2(-1)^{(q-1)/2} = 1 \quad \text{si } a(\pi) \text{ est impair.}$$

On a bien prouvé l'égalité de la proposition 6.7 dans tous les cas.

6.11. Proposition. Soient π_1, $\pi_2 \in \mathcal{A}^\circ_F(3)$ d'exposant minimal premier à 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\pi_{1K} = \pi_{2K}$ est qu'il existe un caractère η de $F^\times$ trivial sur $N_{K/F}(K^\times)$, tel qu'on ait $\eta\pi_1 = \pi_2$.

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant, qui servira à nouveau par la suite.

Lemme. Soient L une ligne de réseau dans V_F, L^K la ligne de réseaux correspondante dans V_K.

a) Pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et pour $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$H^i(\mathfrak{G}, A_K^r/A_K^{r+1}) = 0$$

b) Pour $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$ et pour $i = 0$ ou 1, on a

$$H^i(\mathfrak{G}, H_K^r) = 0$$

c) Soient c un élément L-cuspidal de G_F, et r un entier ≥ 0. On a, pour $i = 0$ ou 1,

$$H^i(\mathfrak{G}, U_{K[c]}H_K^r) = H^i(\mathfrak{G}, k_K^\times).$$

Démonstration. Comme $\mathfrak{G}$ est d'ordre 2, toutes ces assertions sont claires si p est impair, par des arguments standard de cohomologie (non abélienne), puisque les $\mathfrak{G}$-ensembles dont on prend la cohomologie sont essentiellement des p-groupes. Si p vaut 2, alors K/F est non ramifiée, A_K^r/A_K^{r+1} s'identifie à k_K^3 par le choix d'une base, d'où a) et b), et la partie c) provient de ce que $U_{K[c]}^s/U_{K[c]}^{s+1}$ s'identifie à $k_{K[c]} = k_K$ pour tout entier $s \geq 1$.

6.12. Prouvons maintenant la proposition 6.11. Comme en 6.5, choisissons des triplets (c_1, θ_1, χ_1) et (c_2, θ_2, χ_2) tels qu'on ait

$$\pi_i = \chi_i \pi(c_i, \theta_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2.$$

Comme dans la preuve du lemme 6.5, on se ramène au cas où $\chi_1 = \chi_2 = 1$, et on peut supposer que c_1 et c_2 définissent la même ligne de réseaux L. Posons $a(\pi_i) = m+2$.

Supposons d'abord $p \neq 3$.

Comme on a $\pi(c_1, (\theta_1)_{K[c_1]}) = \pi(c_2, (\theta_2)_{K[c_2]})$, il existe un élément g de H_K^0 tel qu'on ait

$$c_1 \equiv g c_2 g^{-1} \mod H_K^{(m_K)^-}.$$

On a alors $g^{-1} g^{\sigma} c_2 g^{-\sigma} g \equiv c_2 \mod H_K^{(m_K)^-}$, d'où

$$g^{-1} g^{\sigma} \in U_{K[c_2]} H^{(m_K)^-} \quad \text{et même}$$

$$g^{-1} g^{\sigma} \in U^1_{K[c_2]} H_K^{(m_K)^-} \quad \text{si } e \text{ vaut } 2.$$

Alors l'élément $g^{-1}g^{\sigma}$ définit un élément de $H^1(\mathfrak{G}, U_{K[c_2]} H_K^{(m_K)^-})$ dont l'image dans $H^1(\mathfrak{G}, k_K^{\times})$ est nulle puisque $g^{-1}g^{\sigma}$ appartient à $U^1_{K[c_2]} H_K^{(m_K)^-}$ si $e = 2$ et que $H^1(\mathfrak{G}, k_K^{\times}) = 0$ si $e = 1$. Par le lemme 6.11, l'élément de $H^1(\mathfrak{G}, U_{K[c_2]} H_K^{(m_K)^-})$ défini par $g^{-1}g^{\sigma}$ est trivial, et il existe donc $h \in U_{K[c_2]} H_K^{(m_K)^-}$ tel qu'on ait

$$g^{-1} g^{\sigma} = h^{1-\sigma},$$

d'où $$(gh)^{\sigma} = gh \quad \text{i.e.} \quad gh \in G_F,$$

et $$g h c_2 h^{-1} g^{-1} \equiv c_1 \mod H_K^{(m_K)^-},$$

d'où $$(gh) c_2 (gh)^{-1} \equiv c_1 \mod H^{m^-}.$$

Conjugant par gh, on se ramène au cas où

$$c_2 \equiv c_1 \mod H^{m^-}.$$

Grâce aux remarques de 5.9 et 5.18, on voit alors qu'il existe un caractère θ_1'

de $F[c_1]^\times$ tel qu'on ait

$$\pi(c_1,\theta_1') = \pi(c_2,\theta_2).$$

L'équivalence de $\pi(c_1,(\theta_1)_{K[c_1]})$ et $\pi(c_2,(\theta_2)_{K[c_2]})$ se traduit par l'égalité de $(\theta_1)_{K[c_1]}$ et $(\theta_1')_{K[c_1]}$, i.e. par l'existence d'un caractère η de $F^\times$ trivial sur $N_{K/F}(K^\times)$ tel que

$$\theta_1' = \theta_1 \cdot \eta_{F[c]}.$$

On a alors $$\pi(c_1,\theta_1') = \eta\pi(c_1,\theta_1)$$

d'où $\pi_2 = \eta\pi_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Le cas où $p=3$ se traite de la même manière, en remarquant grâce à 5.18 qu'on peut remplacer dans ce qui précède $(m_K)^-$ par $(m_K)^+$ et m^- par m^+.

6.13. <u>Théorème</u>. Soit $\Pi \in A_K^\circ(3)$, d'exposant minimal premier à 3. On suppose $\Pi^\sigma = \Pi$. Alors il existe $\pi \in A_F^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3 tel que $\pi_K = \Pi$.

<u>Corollaire</u>. Soit η un des deux caractères de $F^\times$ tels qu'on ait $\omega_\Pi = \eta_K$. Alors il existe un unique élément π de $A_K^\circ(3)$ tel que $\pi_K = \Pi$ et $\omega_\pi = \eta$.

Le corollaire découle immédiatement du théorème de la proposition 6.11 puisqu'on a $\omega_{(\pi_K)} = (\omega_\pi)_K$ pour $\pi \in A_F^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3.

Prouvons le théorème. On peut écrire, comme en 6.5, Π sous la forme $\chi\pi(c,\theta)$ où c est un élément cuspidal de G_K, θ un caractère de $K[c]^\times$ compatible à c (fortement si $p=3$) et χ un caractère de $K^\times$. On peut supposer que la ligne de réseaux définie par c, est, à translation des indices près, la ligne de réseaux $\mathcal{L}^K$ de 6.2.

Posons $a = a_{\min}(\pi)$; comme on a $\Pi^\sigma = \Pi$, on a aussi $\chi^{-1}\chi^\sigma\pi(c,\theta)^\sigma = \pi(c,\theta)$, donc

$\chi^{-1}\chi^{\sigma}\pi(c,\theta)^{\sigma}$ est minimale et on a $3a(\chi^{-1}\chi^{\sigma}) < a$. La restriction de χ à $U_K^{[a/3]+1}$ est donc invariante par σ. Comme on a $a \geq 4$, cette restriction se factorise par la norme de K à F, puisqu'alors, K/F étant modérée, le groupe $H^1(\mathbf{G}, U_K^{[a/3]+1})$ est nul.

Par suite on est ramené au cas où χ vaut 1, i.e. au cas où

$$\pi(c,\theta) = \pi(c^{\sigma},\theta^{\sigma}).$$

Posons $a = m+2$ et supposons d'abord $p \neq 3$. D'après 5.9 et 5.18, il existe un élément g de H_K^0 tel qu'on ait $c^{\sigma} \equiv gcg^{-1} \bmod H_K^{m^-}$. En particulier, on a $\mathrm{Det}\, c^{\sigma} \equiv \mathrm{Det}\, c \bmod U_K^1$. Si $e = 2$, la valuation de $\mathrm{Det}\, c$ est donc paire, et on en déduit aisément qu'on a $c^{\sigma} \equiv c$ modulo H_K^1. Supposons qu'on ait $c^{\sigma} = ch$ avec $h \in H_K^{\alpha} \smallsetminus H_K^{\alpha+1}$, $0 \leq \alpha < m^-$, et en outre $\alpha \geq 1$ si $e = 2$. On a alors

$$gcg^{-1} \equiv c \mod H_K^{\alpha}$$

d'où
$$g \in K[c]^{\times} H_K^{\alpha},$$

et on peut supposer que g est dans H_K^{α}. On a alors

$$g^{\sigma} gcg^{-1} g^{\sigma} \equiv c \mod H_K^{\alpha+1},$$

donc
$$g^{\sigma} g \in U_{K[c]}^{\alpha} H_K^{\alpha+1}.$$

Le groupe $U_{K[c]}^{\alpha} H_K^{\alpha+1}$ est stable par $\mathbf{G}$ et l'élément g définit un élément de $H^1(\mathbf{G},R)$, où $R = H_K^{\alpha}/U_{K[c]}^{\alpha} H_K^{\alpha+1}$. Mais on prouve aisément qu'on a $H^1(\mathbf{G},R) = 0$, et par suite il existe $h \in H_K^{\alpha}$, $u \in U_{K[c]}^{\alpha}$, $j \in H_K^{\alpha+1}$ tels que $g = h^{-\sigma} huj$. On en tire l'égalité $(hch^{-1})^{\sigma} \equiv hch^{-1} \bmod H_K^{\alpha+1}$. De cette façon, on se ramène au cas où $c^{\sigma} \equiv c \bmod H_K^{m^-}$.

Mais, grâce au lemme 6.11, on a $H^1(\mathbb{G},H_K^{\bar{m}}) = 1$ et on peut donc trouver un élément h' de $H_K^{\bar{m}}$ vérifiant $(ch')^\sigma = ch'$. On a donc $ch' \in A_K^{-a-3\nu^K} \cap \mathrm{End}_F(V_F)$.

Remarquons que si e vaut 2, cela implique que a est impair; en effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\mathrm{End}_F(V_F) \cap A_K^{-a-3\nu^K} = \mathrm{End}_F(V_F) \cap A_K^{1-a-3\nu^K}$$

et l'élément c ne pourrait vérifier $v_K(\mathrm{Det}\, c) = -a-3\nu^K$; ce qui est nécessaire puisque $a(\pi(c,\theta)) = a$. Par suite, écrivant $a = 2b-3$ si e vaut 2, et $a=b$ si e vaut 1, on voit que ch est un élément L-cuspidal de G_F vérifiant

$$v_F(\mathrm{Det}(ch)) = -b-3\nu.$$

Il est clair qu'on peut remplacer c par ch, et supposer que Π est de la forme $\pi(c,\theta)$ avec $c^\sigma = c$. Par suite, on a $\theta^\sigma = \theta$ et, comme $H^1(\mathbb{G},K[c]^\times)$ est nul, θ se factorise par la norme, c'est-à-dire qu'il existe un caractère Θ de $F[c]$ tel que $\theta = \Theta_{K[c]}$. Comme la norme de $K[c]$ à $F[c]$ est surjective sur $U^1_{F[c]}$, on déduit facilement de la compatibilité entre c et θ qu'on a, pour $x \in P^{b^+}_{F[c]}$, $\Theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$. On peut donc considérer la représentation $\pi = \pi(c,\Theta)$ de G_F, et on a $\Pi = \pi_K$, ce qu'il fallait démontrer.

Le cas où p vaut 3 se traite de la même façon en remarquant que grâce à 5.18 on peut alors remplacer m^- par m^+ dans ce qui précède.

7. Comparaison.

7.1. Le but de ce chapitre est de prouver le résultat suivant, et d'en déduire notre théorème principal 2.10.

Théorème 7.1. Soit K une extension quadratique modérée de F. Soit σ un élément de $G_F^\circ(3)$, d'exposant minimal premier à 3. Supposons que $\pi(\sigma_K)$ existe. Alors $\pi(\sigma_K)$ est cuspidale, $\pi(\sigma)$ existe et est l'unique élément π de $A_F^\circ(3)$ tel que

$$\pi_K = \pi(\sigma_K)$$

$$\text{et} \qquad \omega_\pi = \operatorname{Det}\sigma .$$

Remarque. Il est clair que σ_K est invariante par l'action du groupe de Galois de K sur F. Par conséquent il en est de même de $\pi(\sigma_K)$.*) De plus, σ_K est irréductible, et on a $a(\sigma_K) = ea(\sigma) - 3(e-1)$, où e désigne l'indice de ramification de K sur F; par suite $\pi(\sigma_K)$ est cuspidale, et d'exposant minimal premier à 3. Comme on a $\operatorname{Det}(\sigma_K) = (\operatorname{Det}\sigma)_K$, l'existence et l'unicité de l'élément π de $A_F^\circ(3)$ tel que $\pi_K = \pi(\sigma_K)$ et $\omega_\pi = \operatorname{Det}\sigma$ découlent du théorème 6.13 et de son corollaire. Il reste seulement à vérifier que cet élément π est bien $\pi(\sigma)$.

7.2. Montrons maintenant comment déduire le théorème 2.10 du résultat précédent. Rappelons que grâce au théorème 4.4 ii) et aux résultats du chapitre 3, il ne s'agit plus que de prouver l'assertion suivante.

Proposition 7.2. Supposons que F soit une extension de $\mathbb{Q}_3$.

a) Pour tout élément primitif σ de $G_F^\circ(3)$, $\pi(\sigma)$ existe (alors $\pi(\sigma)$ existe pour tout $\sigma \in G_F^\circ(3)$);

b) L'application $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ de $G_F^\circ(3)$ dans $A_F^\circ(3)$ est injective.

Remarque. Le théorème 7.1 exprime donc que pour $\sigma \in G_F^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3, et pour toute extension quadratique modérée K de F, on a $\pi(\sigma_K) = \pi(\sigma)_K$.

*) cf. la remarque de 3.3.

Le changement de base du chapitre 6 reflète donc bien la restriction des représentations de groupes de Weil.

Prouvons d'abord l'assertion a). Soit σ un élément primitif de $G_F^\circ(3)$. (alors σ est d'exposant minimal premier à 3). Il découle facilement des résultats de [Ko1] (voir 7.10) qu'il existe une extension modérée E de F, galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, telle que la restriction σ_E de σ à W_E soit irréductible et monomiale. Alors $\pi(\sigma_E)$ existe. Il suffit d'appliquer, une ou deux fois selon le cas, le théorème 7.1, pour obtenir l'existence de $\pi(\sigma)$.

Prouvons l'assertion b). Soient σ_1, σ_2 des éléments de $G_F^\circ(3)$, vérifiant $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$. Si σ_1 et σ_2 sont monomiales, on a $\sigma_1 = \sigma_2$ par les résultats du chapitre 3. On peut donc supposer σ_1 primitive, donc d'exposant minimal premier à 3; alors σ_2 sera aussi d'exposant minimal premier à 3. Soit E la plus petite extension modérée de F dans $\bar{F}$ telle que $(\sigma_1)_E$ et $(\sigma_2)_E$ soient monomiales. Le corps E est quadratique sur F, ou galoisien de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par application, répétée si nécessaire, du théorème 7.1, on trouve

$$\pi((\sigma_1)_E) = \pi(\sigma_1)_E = \pi(\sigma_2)_E = \pi((\sigma_2)_E)$$

d'où $(\sigma_1)_E = (\sigma_2)_E$ par le chapitre 3. Mais il n'y a qu'un seul élément σ de $G_F^\circ(3)$ vérifiant $\sigma_K = (\sigma_1)_K$ et $\operatorname{Det}\sigma = \operatorname{Det}\sigma_1$. Par suite on a $\sigma_1 = \sigma_2$. C.Q.F.D.

7.3. Le reste du chapitre est consacré à la preuve du théorème 7.1. Bien entendu, si F est de caractéristique résiduelle distincte de 3, le théorème 7.1 découle sans peine du résultat de l'appendice 5; l'existence de $\pi(\sigma)$ a été prouvée au chapitre 3. <u>Nous supposerons désormais que</u> F <u>est de caractéristique résiduelle</u> 3. Dans ce numéro et le suivant, nous réduisons la démonstration de 7.1 à des calculs de facteurs ε pour σ, qui sont effectués à partir de 7.5.

Soient donc K une extension quadratique modérée de F et σ un élément de $G_F^\circ(3)$ d'exposant minimal premier à 3. Nous avons déjà remarqué que $\pi(\sigma_K)$ est cuspidale, invariante par $\mathrm{Gal}(K/F)$, et d'exposant minimal premier à 3, et qu'il existe par conséquent un unique élément π de $A_F^\circ(3)$ tel qu'on ait $\pi_K = \pi(\sigma_K)$ et $\omega_\pi = \mathrm{Det}\,\sigma$. On veut prouver que pour tout caractère χ de $F^\times$, on a

$$\varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\sigma).$$

Soit χ un caractère de $F^\times$. De la proposition 6.7 et de la remarque qui suit, on déduit qu'on a, en désignant par ω le caractère de $F^\times$ définissant K,

$$(1) \qquad \varepsilon(\chi\pi)\varepsilon(\omega\chi\pi) = \varepsilon(\chi\sigma)\varepsilon(\omega\chi\sigma).$$

Soit $c_{\chi\sigma}$ (resp. $c_{\chi\pi}$) un élément de $F^\times$ tel qu'on ait

$$\varepsilon(\eta\chi\sigma) = \eta(c_{\chi\sigma})^{-1}\varepsilon(\chi\sigma)$$

$$(\text{resp. } \varepsilon(\eta\chi\pi) = \eta(c_{\chi\pi})^{-1}\varepsilon(\chi\pi)),$$

pour tout caractère modéré η de $F^\times$; l'existence de $c_{\chi\sigma}$ découle de 2.13 (remarquer qu'on a $a(\chi\sigma) > 3$ et donc que $\chi\sigma$ n'a aucun vecteur non nul fixé par $W_F^{1/3}$) et l'existence de $c_{\chi\pi}$ découle de la remarque 4 de 5.24.

Pour tout caractère modéré η de $K^\times$, on a alors

$$\varepsilon(\eta\chi_K\sigma_K) = \eta(c_{\chi\sigma})^{-1}\varepsilon(\chi_K\sigma_K) \quad (\text{cf. } 2.17),$$

$$\text{et} \quad \varepsilon(\eta\chi_K\pi_K) = \eta(c_{\chi\pi})^{-1}\varepsilon(\chi_K\pi_K) \quad (\text{cf. } 6.5, \text{ Corollaire}).$$

Comme $\chi_K\pi_K = \pi(\chi_K\sigma_K)$, on a $c_{\chi\sigma} \equiv c_{\chi\pi} \bmod U_K^1$, et par suite $\varepsilon(\omega_{\chi\pi})/\varepsilon(\chi\pi) = \omega(c_{\chi\pi})^{-1} = \omega(c_{\chi\sigma})^{-1} = \varepsilon(\omega\chi\sigma)/\varepsilon(\chi\sigma)$. On a donc

$$(2) \qquad \varepsilon(\chi\pi)^2 = \varepsilon(\chi\sigma)^2.$$

Soit M le groupe des racines de l'unité de $\mathbb{C}^\times$ d'ordre une puissance de 3. Vu l'égalité (2) il nous suffit de prouver dans $\mathbb{C}^\times/M$ l'égalité des facteurs $\varepsilon(\chi\pi)(1/2)$ et $\varepsilon(\chi\sigma)(1/2)$. Dorénavant, nous noterons ε' la classe dans $\mathbb{C}^\times/M$

de la valeur en $1/2$ d'un facteur ε. De plus nous supposerons, ce qui est loisible, que σ, donc aussi π, sont minimales, d'exposant premier à 3.

7.4. Remarquons que dans $\mathbb{C}^\times/M$, un élément x a une unique racine cubique, que nous noterons $x^{1/3}$.

Choisissons un élément c_π de $F^\times$ tel qu'on ait

$$\varepsilon(\eta\pi) = \eta(c_\pi)^{-1}\varepsilon(\pi)$$

et un élément c_χ de $F^\times$ tel qu'on ait

$$\varepsilon(\eta\chi) = \eta(c_\chi)^{-1}\varepsilon(\chi), \quad \text{pour tout caractère modéré } \eta \text{ de } F^\times.$$

Proposition 7.4.

a) Si $a(\chi\pi) > a(\pi)$, on a $\varepsilon'(\chi\pi) = \omega_\pi(c_\pi)^{-1}\varepsilon'(\chi)^3$

b) Si $a(\chi\pi) = a(\pi)$, on a $\varepsilon'(\chi\pi) = \omega_\pi(c_\pi)^{-1/3}\chi(c_\pi)^{-1}\, G$

où $G = 1$ si $a(\pi)$ est pair

$$G = G_F(c_\pi) = q^{-1/2} \sum_{\xi\in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{2\nu+a(\pi)-1} \cdot c_\pi \cdot \xi^2) \quad \text{sinon.}$$

Cette proposition se vérifie sans peine en utilisant 5.23 et 5.24, Remarque 1. L'hypothèse $a(\chi\pi) > a(\pi)$ équivaut à $a(\chi\sigma) > a(\sigma)$ et on a alors

$$\varepsilon'(\chi\sigma) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\chi)^{-1}\varepsilon'(\chi)^3 \quad \text{par } 2.13$$

d'où $\varepsilon'(\chi\sigma) = \varepsilon'(\chi\pi)$ en ce cas.

Il nous suffit donc de vérifier qu'on a aussi $\varepsilon'(\chi\sigma) = \varepsilon'(\chi\pi)$ au cas où $a(\chi\sigma) = a(\sigma)$ et par conséquent (quitte à remplacer σ par $\chi\sigma$) et tenant compte de l'égalité de c_π et c_σ modulo U_F^1, de prouver la proposition suivante.

<u>Proposition 7.4 bis</u>. Soit σ un élément de $\mathcal{G}_F^\circ(3)$ d'exposant premier à 3. On a alors $\varepsilon'(\sigma) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}\,G$

$$\text{où} \qquad G = 1 \ \text{ si } \ a(\sigma) \ \text{ est pair}$$
$$G = G_F(c_\sigma) \ \text{ sinon.}$$

Le reste du chapitre est consacré à la preuve de cette dernière proposition. On pose $\nu = n(\psi)$.

7.5. Supposons d'abord σ monomiale. Il existe alors une extension cubique E de F dans $\bar{F}$ et un caractère η de $E^\times$, tels que $\sigma = \operatorname{Ind}_E^F(\eta \circ \tau_E)$. Comme σ est d'exposant premier à 3, l'extension E/F est ramifiée, donc sauvagement ramifiée.

Supposons dans un premier temps que E soit cyclique sur F. Notons ϕ un caractère de $F^\times$ définissant E. On a, $d(E/F)$ désignant l'exposant différental de E sur F, $a(\sigma) = a(\eta) + 2a(\phi) = a(\eta) + d(E/F)$,

$$\operatorname{Det}\sigma = \eta_{|F^\times},$$

$$\text{et} \qquad \frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon(1_E)} = \frac{\varepsilon(\sigma)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\phi)\varepsilon(\phi^2)}\,.$$

$$\text{On calcule} \qquad \varepsilon'(1_E) = \varepsilon'(1_F) = 1,$$

$$\varepsilon'(\phi)\varepsilon'(\phi^2) = \varepsilon'(\phi)\varepsilon'(\check{\phi}) = \phi(-1) = 1,$$

$$\text{d'où} \qquad \varepsilon'(\eta) = \varepsilon'(\sigma).$$

De plus on a $c_\sigma \equiv N_{E/F}(c_\eta) \bmod U_F^1$, où c_η est choisi comme en 2.15, d'où $c_\sigma \equiv c^3 \bmod U_E^1$.

Si $a(\sigma)$ est pair, $a(\eta)$ l'est aussi et on a

$$\varepsilon'(\eta)^1 = \eta^{-1}(c_\eta) \ \text{ d'après 2.18,}$$

d'où l'égalité voulue $\varepsilon(\sigma) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}$.

Si $a(\sigma)$ est impair, $a(\eta)$ l'est aussi. Choisissons $c_\eta \in E^\times$ de sorte qu'on ait $\eta(1+x+x^2/2) = \psi_E(c_\eta x)$ pour $x \in P_E^{a(\eta)^-}$. On a alors cf. 2.18

$$\varepsilon'(\eta) = \eta^{-1}(c_\eta)G(\eta,c_\eta)$$

avec $G(\eta,c_\eta) = q^{-1/2} \sum_{\xi\in k_F} \psi_E(-c_\eta\tilde{\omega}_E^{2a(\eta)^-}\xi^2)$, $\tilde{\omega}_E$ étant une uniformisante de E.

Soit f un polynôme irréductible unitaire de degré 3 sur F tel que $f(\tilde{\omega}_E) = 0$. Alors $f'(\tilde{\omega}_E)$ engendre la différente de E/F, et comme on a $n(\psi_E) = 3n(\psi) + d(E/F)$, on peut écrire

$$c_\eta\tilde{\omega}_E^{2a(\eta)^-} = f'(\tilde{\omega}_E)^{-1}\tilde{\omega}_E^2\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v \quad \text{avec} \quad v \in U_E$$

d'où, par les relations d'Euler,

$$\mathrm{Tr}_{E/F}(c_\eta\tilde{\omega}_E^{2a(\eta)^-}) \equiv \tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v \bmod P_F^{-\nu}.$$

$$\text{et} \qquad G(\eta,c_\eta) = q^{-1/2} \sum_{\xi\in k_F} \psi(-\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v\xi^2)$$

D'autre part, écrivant $c_\sigma = \tilde{\omega}_F^{-3\nu-a(\sigma)}v'$ avec $v' \in U_F$, on tire de la congruence

$$c_\sigma \equiv c_\eta^3 \bmod U_E^1$$

$$\text{la congruence} \qquad v' \equiv v\, \tilde{\omega}_F^{2a(\phi)} f'(\tilde{\omega}_E)^{-3} \bmod U_E^1.$$

Comme E est cyclique sur F, le discriminant de E sur F est un carré et par suite $-N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))$ est un carré dans F. On a donc

$$-f'(\tilde{\omega}_E)^{-3} \equiv 1 \bmod (U_E)^2$$

$$\text{et} \qquad v' \equiv -v \bmod (U_E)^2.$$

Comme on a $G_F(c_\sigma) = q^{-1/2} \sum_{\xi\in k_F} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v'\xi^2)$, on en déduit $G_F(c_\sigma) = G(\eta,c_\eta)$, d'où l'égalité demandée $\varepsilon'(\sigma) = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3} G_F(c_\sigma)$

Ceci prouve la proposition 7.4 bis quand E/F est cyclique.

7.6. Supposons toujours σ monomiale, induite à partir du caractère η de l'extension cubique E de F, mais supposons maintenant que E ne soit pas cyclique sur F. Notons H l'extension quadratique de F telle que EH soit la clôture galoisienne de E sur F, θ le caractère de $F^\times$ définissant H, ϕ un caractère de $H^\times$ définissant EH. On a alors

$$a(\sigma) = a(\eta) + d(E/F)$$

et

$$\mathrm{Det}(\sigma) = \theta \cdot \eta_{|F^\times}.$$

On a aussi

$$\frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon(1_E)} = \frac{\varepsilon(\sigma)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\mathrm{Ind}_H^F(\phi))}$$

et

$$\frac{\varepsilon(\phi)}{\varepsilon(1_H)} = \frac{\varepsilon(\mathrm{Ind}_H^F(\phi))}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\theta)}$$

d'où

$$\frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon(1_E)} = \frac{\varepsilon(\sigma)\varepsilon(1_H)}{\varepsilon(1_F)^2\varepsilon(\theta)\varepsilon(\phi)} .$$

On en tire aisément $\varepsilon'(\sigma) = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\theta)\varepsilon'(\phi)$.

On utilisera aussi

$$c_\sigma \equiv N_{E/F} c_\eta \mod U_F^1$$

$$c_\sigma \equiv c_\eta^3 \qquad \mod U_E^1,$$

où c_η est un élément de $E^\times$ tel qu'on ait

$$\eta(1 + x + x^2/2) = \psi_E(c_\eta x) \quad \text{pour} \quad x \in P_E^{a(\eta)^-}.$$

<u>Lemme</u>. Dans la situation précédente, on a $\varepsilon'(\phi) = 1$

<u>Démonstration</u>. Comme E est sauvagement ramifié sur F, on a $a(\phi) \geq 2$. Si $a(\phi)$ est pair, la formule de 2.18 donne immédiatement $\varepsilon'(\phi) = 1$ puisque ϕ est d'ordre 3. Supposons $a(\phi)$ impair (donc $a(\phi) \geq 3$). Choisissant $c_\phi \in H^\times$ de sorte qu'on ait

$$\phi(1 + x + x^2/2) = \psi_H(c_\phi x) \quad \text{pour} \quad x \in P_H^{a(\phi)^-}$$

on obtient
$$\varepsilon'(\phi) = G(\phi, c_\phi)$$

avec
$$G(\phi, c_\phi) = q_H^{-1/2} \sum_{\xi \in k_H} \psi_H(-c_\phi \tilde{\omega}_H^{a(\phi)-1} \xi^2)$$

où $\tilde{\omega}_H$ est une uniformisante de H. En fait, je dis que comme $a(\phi)$ est impair, H est non ramifiée sur F (et on prendra $\tilde{\omega}_H = \tilde{\omega}_F$). En effet $\mathrm{Gal}(H/F)$ transforme ϕ en ϕ^2 donc agit de façon non triviale sur $U_H^{a(\phi)-1}/U_H^{a(\phi)}$, ce qui est impossible si H/F est ramifiée et $a(\phi)$ impair.

On a donc

$$\varepsilon'(\phi) = q^{-1} \sum_{\xi \in k_H} \psi_H(-c_\phi \tilde{\omega}_F^{a(\phi)-1} \xi^2).$$

Ecrivons $c_\phi = \tilde{\omega}_F^{-\nu - a(\phi)} v$ avec $v \in U_H$, et notons ι l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(H/F)$. On a

$$c_\phi^\iota \equiv -c_\phi \mod U_H^1,$$

d'où
$$v^\iota \equiv -v \mod U_H^1.$$

Si $\bar{v}$ désigne la classe de v modulo U_H^1, on a dans k_H

$$\bar{v}^{q-1} = -1 \quad \text{et} \quad \bar{v}^{(q^2-1)/2} = (-1)^{(q+1)/2},$$

d'où
$$\varepsilon'(\phi) = q^{-1}(-1)^{(q+1)/2} \sum_{\xi \in k_H} \psi_H(-\tilde{\omega}_F^{-\nu-1} \xi^2).$$

Mais tout élément ξ de k_H s'écrit de façon unique sous la forme $\xi = \alpha + \beta\bar{v}$ avec $\alpha,\beta \in k_F$, et ont $\mathrm{Tr}_{k_H/k_F}(\xi^2) = -\alpha^2 - \beta^2\bar{v}^2$. Par suite, on a

$$\varepsilon'(\phi) = q^{-1}(-1)^{(q+1)/2} \sum_{\alpha,\beta\in k_F} \psi_F(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}(\alpha^2 + \beta^2\bar{v}^2))$$

$$= (-1)^{(q+1)/2}(-1)^{(q-1)/2}\left(\frac{\bar{v}^2}{q}\right)$$

$$= (-1)^{q+1} = 1, \text{ ce qui prouve le lemme.}$$

Grâce à ce lemme, on obtient $\varepsilon'(\sigma) = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\theta)$. On va prouver le théorème 7.4 bis en le cas présent en deux temps, d'abord en supposant K/F non ramifiée (en 7.7) puis en supposant K/F ramifiée (en 7.8).

7.7. Gardons les hypothèses de 7.6, mais supposons en outre K/F non ramifiée. On a alors $a(\sigma) = a(\eta) + 2a(\phi)$ et $\varepsilon'(\theta) = (-1)^{\nu}$. Si $a(\sigma)$ est pair, $a(\eta)$ l'est aussi et on a

$$\varepsilon'(\eta) = \eta(c_\eta)^{-1} = \eta(c_\sigma)^{-1/3}$$

d'où $$\varepsilon'(\sigma) = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}\theta(c_\sigma)(-1)^{\nu} = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}.$$

Si $a(\sigma)$ est impair, on a

$$\varepsilon'(\eta) = \eta(c_\eta)^{-1}G(\eta,c_\eta) = \eta(c_\sigma)^{-1/3}G(\eta,c_\eta)$$

$$\varepsilon'(\sigma) = -\mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}G(\eta,c_\eta)$$

et on prouve l'égalité de $G_F(c_\sigma)$ et $-G(\eta,c_\eta)$ comme en 7.5, en tenant compte du fait que cette fois le discriminant de E sur F <u>n'est pas</u> un carré.

7.8. Gardons les hypothèses de 7.6, mais supposons cette fois K/F ramifiée. On a alors $a(\sigma) = a(\eta) + a(\phi) + 1$ et nous avons vu que $a(\phi)$ est pair. Supposons d'abord $a(\sigma)$ pair; alors $a(\eta)$ est impair et on trouve

$$\varepsilon'(\sigma) = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta)G(\eta,c_\eta).$$

Il s'agit donc de prouver l'égalité $\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta)G(\eta,c_\eta) = 1$.

Or on a, par 2.18,

$$\varepsilon'(\theta) = q^{-1/2}\theta(\tilde{\omega}_F^{\nu+1})\sum_{\xi\in k_F}\psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2)$$

et
$$G(\eta,c_\eta) = q^{-1/2}\sum_{\xi\in k_F}\psi_E(-c_\eta\tilde{\omega}_E^{a(\eta)-1}\xi^2)$$

où $\tilde{\omega}_E$ est une uniformisante quelconque de E. Soit f le polynôme minimal de $\tilde{\omega}_E$ sur F. Ecrivons

$$c_\eta\tilde{\omega}_E^{a(\eta)-1} = f'(\tilde{\omega}_E)^{-1}\tilde{\omega}_E^2\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v \quad \text{avec} \quad v\in U_E = U_FU_E^1$$

On a alors $$G(\eta,c_\eta) = q^{-1/2}\sum_{\xi\in k_F}\psi(-v\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2)$$

et, notant $\bar{v}$ la réduction de v modulo P_F,

$$\varepsilon'(\theta)G(\eta,c_\eta) = \theta(\tilde{\omega}_F^{\nu+1})\left(\frac{\bar{v}}{q}\right).$$

Il reste à calculer $\theta(c_\sigma)$. On a

$$c_\sigma \equiv N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))^{-1}N_{E/F}(\tilde{\omega}_E)^{3-3a(\eta)}\tilde{\omega}_F^{-3\nu-3}v^3 \bmod U_E^1$$

d'où $$\theta(c_\sigma) = \left(\frac{\bar{v}}{q}\right)\theta(N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))\theta(\tilde{\omega}_F^{\nu+1}).$$

Mais le corps H est engendré par la racine carrée de $-N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))$ et $N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))$ est donc une norme de K à F. Par suite on a

$$\theta(N_{E/F}(f'(\tilde{\omega}_E))) = 1$$

$$\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta)G(\eta,c_\eta) = 1$$

d'où $\varepsilon'(\sigma) = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}$, ce qu'on voulait démontrer.

Supposons maintenant $a(\sigma)$ impair; alors $a(\eta)$ est pair et on trouve

$$\varepsilon'(\sigma) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta).$$

Il s'agit donc de prouver l'égalité $\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta) = G_F(c_\sigma)$.

Pour cela, on écrit $c_\sigma = \tilde{\omega}_F^{-3\nu-a(\sigma)}v$ avec $v \in U_F$ et on trouve

$G_F(c_\sigma) = (\frac{\bar{v}}{q})q^{-1/2}\sum_{\xi\in k_F}\psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2)$.

Comme on a $\varepsilon'(\theta) = q^{-1/2}\theta(\tilde{\omega}_F^{\nu+1})\sum_{\xi\in k_F}\psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi^2)$, on obtient

$$\theta(c_\sigma)\varepsilon'(\theta) = \theta(v)(\frac{\bar{v}}{q})G_F(c_\sigma) = G_F(c_\sigma).$$

On a bien $\varepsilon'(\sigma) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1/3}G_F(c_\sigma)$, C.Q.F.D.

Jusqu'à maintenant nous avons prouvé la proposition 7.4 bis pour σ monomiale. Dans la suite nous supposerons au contraire que σ est primitive (et minimale).

7.9. Soit $\sigma \in \mathcal{G}_F^\circ(3)$ primitive et minimale. La démonstration de 7.4 bis en ce cas nécessite une bonne connaissance de σ et pour cela nous devons bien décrire son image. Nous choisirons une représentation dans la classe d'équivalence σ, la noterons également σ, et ainsi nous ne distinguerons pas entre σ et sa classe d'équivalence; cet abus ne prêtera d'ailleurs pas à confusion.

Soit V l'espace de la représentation σ. Notons G l'image de σ dans le groupe projectif linéaire $PGL(V)$; cette image est finie. La structure du groupe G a été étudié et décrite dans [Ko1]. Si G_1 est le groupe de ramification sauvage de G, le groupe quotient G/G_1 est, soit le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit le groupe des quaternions $H_8 = \{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$. Le groupe G_1 est abélien, en fait un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}_3$, muni d'une application bilinéaire alternée à valeurs dans le groupe μ_3 des racines cubiques de l'unité dans $\mathbb{C}$, forme donnée par le commutateur de relèvements dans $GL(V)$. Le groupe G/G_1 agit fidèlement par conjugaison sur G_1, en respectant cette application bilinéaire et G/G_1, dans le cas où il est d'ordre 4, est un tore maximal anisotrope du groupe spécial linéaire de l'espace vectoriel G_1 sur $\mathbb{F}_3$; s'il est d'ordre 8, c'est le normalisateur d'un tel tore.

Tous ces faits, nous l'avons dit, sont établis dans [Ko1], dans un cadre d'ailleurs beaucoup plus général (voir aussi [Ct3]). On peut aussi très facilement les déduire de la connaissance de tous les sous-groupes finis de $PGL(3,\mathbb{C})$ [Mi].

7.10. Notons R l'extension de F qui correspond à G : $G = Gal(R/F)$, et H la sous-extension de R fixée par G_1. Le groupe G/G_1 possède un unique élément d'ordre 2, que nous noterons g_o et nous noterons E la sous-extension de H fixée par g_o. Il est clair que σ_E n'est pas primitive (son image dans $PGL(V)$ n'étant pas du type voulu); l'extension E/F est modérée, galoisienne de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si G/G_1 est cyclique, et de groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sinon. (Cela justifie le fait utilisé dans la démonstration de 7.2).

La restriction de σ à R est multiple d'un caractère de W_R (appelé le caractère centrique de σ) qui définit donc un caractère $\tilde{\eta}$ de $R^{\times}$.

Le groupe G est produit semi-direct du groupe G_1 et d'un groupe Γ isomorphe à G/G_1. En fait on dispose même d'un relèvement canonique $\tilde{\Gamma}$ de G/G_1 dans $GL(V)$, obtenu comme suit : on considère G_1 comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{F}_3$, et G/G_1 comme un sous-groupe de $SL(G_1)$; la représentation σ nous fournit une représentation projective irréductible de G_1, et $\tilde{\Gamma}$ est l'image de G/G_1 par la représentation de Weil de $SL(G_1)$ associée à cette représentation projective. Nous prendrons pour Γ l'image de $\tilde{\Gamma}$ dans $PGL(V)$, et nous noterons L le sous-corps de R fixé par le sous-groupe Γ de $G = Gal(R/F)$.

Si $\tilde{\Gamma}$ est d'ordre 4, on tire de [Ge2,4.9.1 a)] que la représentation de $\tilde{\Gamma}$

sur V est somme de la représentation triviale et des deux caractères fidèles de $\tilde{\Gamma}$. Il existe donc un caractère η de $L^{\times}$, tel que $\tilde{\eta} = \eta_R$, et que σ_L soit somme de $\eta \circ \tau_L, (\Omega_L \eta) \circ \tau_L$ et $\Omega_L^3 \eta \circ \tau_L$, Ω étant un des caractères (d'ordre 4) de $F^{\times}$ définissant H, Ω_L définissant alors l'extension R de L; alors l'induite ρ, à W_F, de $\eta \circ \tau_L$ est somme de σ, $\Omega\sigma$ et $\Omega^3\sigma$.

Si $\tilde{\Gamma}$ est d'ordre 8, la même référence permet de prouver que la représentation de $\tilde{\Gamma}$ sur V est somme de la représentation triviale et de la représentation irréductible de degré 2 de $\tilde{\Gamma}$. Par suite il existe un caractère η de $L^{\times}$, tel que $\tilde{\eta} = \eta_R$, et que σ_L soit somme de $\eta \circ \tau_L$ et de la tordue par η de la représentation irréductible de degré 2 de W_L triviale sur W_R; l'induite ρ de $\eta \circ \tau_L$ à W_F est alors somme de σ et du produit tensoriel de σ par la représentation irréductible de degré 2 de W_F triviale sur W_H, qui est modérée et de déterminant trivial.

On a donc, que Γ soit d'ordre 4 ou 8,

$$\varepsilon(\sigma)^3 = \varepsilon(\rho),$$

$$(\operatorname{Det} \sigma)^3 = \operatorname{Det} \rho = \eta_{|F^{\times}},$$

et, si dans chacun des cas, on choisit un élément c_η de $L^{\times}$ tel qu'on ait $\eta(1 + x + x^2/2) = \psi_L(c_\eta x)$ pour $x \in P_L^{a(\eta)^-}$, on a aussi $c_\sigma \equiv c_\eta^3 \bmod U_L^1$. (en effet l'égalité $\varepsilon(\sigma)^3 = \varepsilon(\rho)$ donne $c_\sigma^3 \equiv N_{L/F}(c_\eta) \equiv c_\eta^9 \bmod U_L^1$)

Enfin, on note u le plus grand indice de ramification supérieure de G_1 tel que G_1^u soit non trivial (on a alors $G_1^{u'} = G_1$). L'indice u est un entier, $u \geq 1$, et on tire sans problème les égalités suivantes, où e est l'indice de ramification de H sur F.

$a(\sigma) = 3+4u/e,$

$a(\sigma_H) = 3+4u,$

$a(\eta) = 1+4u/e,$

$a(\alpha) = 1+u$ pour tout caractère $\alpha \neq 1$ de W_H, trivial sur W_R,

$\alpha(\eta_R) = 1+4u.$

Remarque. Si $e \neq 1$, alors u est impair. En effet H/E est alors ramifiée. Comme $\mathrm{Gal}(H/E)$ doit agir non trivialement sur G_1^u, on voit que ce n'est possible que si u est impair, puisque G_1^u est un quotient de U_H^u/U_H^{u+1}. En particulier, si $e=4$, $a(\sigma)$ et $a(\eta)$ sont pairs; c'est le cas si Γ est d'ordre 8.

7.11. Dans un premier temps, nous supposerons que G/G_1 est cyclique, et nous noterons Ω un caractère (modéré) de $F^\times$ définissant H. Le groupe G/G_1 agit sur les caractères de G_1, et y possède trois orbites, dont l'une est formée du caractère trivial, et les deux autres sont de longueur 4. Nous choisirons un élément dans chacune de ces deux orbites et noterons α et β les caractères de $H^\times$ correspondants. On vérifie que $\mathrm{Ind}_H^F \alpha$ et $\mathrm{Ind}_H^F \beta$ sont irréductibles et qu'on a

$$\mathrm{Ind}_L^F 1_L = 1_F \oplus \mathrm{Ind}_H^F \alpha \oplus \mathrm{Ind}_H^F \beta .$$

De la relation $\dfrac{\varepsilon(\rho)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_L^F 1_L)} = \dfrac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon(1_L)}$, on tire par conséquent

$$\varepsilon'(\rho) = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\alpha)\varepsilon'(\beta)(\varepsilon'(\Omega)\varepsilon'(\Omega^2)\varepsilon'(\Omega^3))^2.$$

Mais on a
$$\varepsilon'(\Omega)\varepsilon'(\Omega^3) = \varepsilon'(\Omega)\varepsilon'(\check{\Omega}) = \Omega(-1),$$

d'où
$$\varepsilon'(\rho) = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\alpha)\varepsilon'(\beta)(\varepsilon'(\Omega^2))^2.$$

De plus $\varepsilon'(\Omega^2)^2$ vaut 1 si Ω^2 est non ramifié, c'est-à-dire si $e \neq 4$, et vaut $(-1)^{(q-1)/2}$ (comme carré d'une somme de Gauss relative à $\mathbb{F}_q$ cf. 2.17) si Ω^2 est ramifié, i.e. si $e=4$.

<u>Lemme 7.11</u>. On a $\varepsilon'(\alpha) = \varepsilon'(\beta)$ et $\varepsilon'(\alpha)^2 = \varepsilon'(\beta)^2 = 1$.

<u>Démonstration</u>. C'est clair si u est impair, car alors $a(\alpha)$ et $a(\beta)$ sont pairs, et on utilise 2.18 et le fait que α et β sont d'ordre 3. On peut donc supposer que H est non ramifiée sur F et que u est pair. Il existe un élément γ générateur de G/G_1 tel qu'on ait $\beta = \alpha\alpha^\gamma$. Si on choisit $c_\alpha \in H^\times$ tel qu'on ait $\alpha(1+x+x^2/2) = \psi_H(c_\alpha x)$ pour $x \in P_H^{u/2}$, on a aussi $\beta(1+x+x^2/2) = \psi_H(c_\alpha + c_\alpha^\gamma)x)$ pour $x \in P_H^{u/2}$, d'où, par 2.18, on tire, par comparaison des sommes de Gauss intervenant dans $\varepsilon'(\alpha)$ et $\varepsilon'(\beta)$, qu'on a $\varepsilon'(\alpha) = \varepsilon'(\beta)$ si et seulement si l'image de $1 + c_\alpha^{\gamma-1}$ dans k_H est un carré dans k_H. Mais on a $\alpha^{\gamma^2} = \alpha^{-1}$ et par suite

$$c_\alpha^{\gamma^2} = -c_\alpha \bmod U_F^1 .$$

On a donc $(c_\alpha^{\gamma-1})^{\gamma^2} = c_\alpha^{\gamma-1}$ et l'image d de $c_\alpha^{\gamma-1}$ dans k_H appartient au sous-corps de k_H fixé par γ^2. On a donc $(1+d)^{q^2-1} = 1$ et a fortiori $(1+d)^{(q^4-1)/2} = 1$. L'égalité $\varepsilon'(\alpha)^2 = 1$ découle de l'expression du carré de la somme de Gauss associé à $\varepsilon'(\alpha)$, carré qui vaut $(-1)^{(q^4-1)/2} = 1$.

<u>Corollaire</u>. On a $\varepsilon'(\sigma)^3 = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\Omega^2)^2$ □

Supposons d'abord $a(\sigma)$ pair; alors e vaut 4, u est impair, et $a(\eta)$ est pair également. Comme l'extension H de F est totalement ramifiée, $q-1$ est divisible par 4 et on a donc

$$\varepsilon'(\Omega^2)^2 = (-1)^{(q-1)/2} = 1.$$

Par suite on a dans $\mathbb{C}^\times/M$,

$$\varepsilon'(\sigma)^3 = \varepsilon'(\eta) = \eta(c_\eta)^{-1} = \eta(c_\sigma)^{-1/3} = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1},$$

ce qui prouve la proposition 7.4 bis en ce cas.

Supposons ensuite $a(\sigma)$ impair; on a vu qu'alors e est distinct de $\dot{4}$, et par suite, Ω^2 étant non ramifié, que $\varepsilon'(\Omega^2)^2$ vaut 1. On a alors

$$\varepsilon'(\eta) = \eta(c_\eta)^{-1}G(\eta,c_\eta) = \mathrm{Det}\,\sigma\,(c_\sigma)^{-1}G(\eta,c_\eta)$$

avec $G(\eta,c_\eta) = q^{-1/2}\sum_{\xi\in k_L}\psi_L(-c_\eta\tilde{\omega}_L^{a(\eta)-1}\xi^2)$, $\tilde{\omega}_L$ étant une uniformisante de L.

Il s'agit donc de prouver l'égalité

$$G_F(c_\sigma)^3 = G(\eta,c_\eta),$$

ou encore, puisque $G_F(c_\sigma)$ a pour carré $(-1)^{(q-1)/2}$, de prouver qu'on a

$$G_F(c_\sigma) = (-1)^{(q-1)/2}G(\eta,c_\eta).$$

On utilise pour cela un raisonnement semblable à celui de 7.5.

Soit f le polynôme minimal de $\tilde{\omega}_L$ sur F. On écrit

$$c_\eta\,\tilde{\omega}_L^{a(\eta)-1} = f'(\tilde{\omega}_L)^{-1}\tilde{\omega}_L^{8}\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v \quad \text{avec} \quad v\in U_L,$$

d'où
$$\mathrm{Tr}_{L/F}(c_\eta\tilde{\omega}_L^{a(\eta)-1}) \equiv \tilde{\omega}_L^{-\nu-1}v \bmod P_F^{-\nu}.$$

On utilise alors la relation $c_\sigma \equiv c_\eta^3 \bmod U_F^1$ et, écrivant

$$c_\sigma\,\tilde{\omega}_F^{2\nu+a(\sigma)-1} = \tilde{\omega}_F^{-\nu-1}v' \quad \text{avec} \quad v'\in U_F, \quad \text{on trouve}$$

$$v' \equiv v^3(f'(\tilde{\omega}_L)^{-1}\tilde{\omega}_L^{9-a(\eta)}\tilde{\omega}_F^{-\nu-1})^3\tilde{\omega}_F^{3\nu+a(\sigma)} \bmod U_J^1,$$

d'où
$$v' \equiv v^3\tilde{\omega}_L^{6(4-a(\eta))}\tilde{\omega}_F^{a(\sigma)-3}f'(\tilde{\omega}_L)^{-3} \bmod U_L^1.$$

Mais on remarque que la représentation de permutation de G sur G/Γ est équivalente à la représentation de G (par conjugaison) sur G_1. Celle-ci a une orbite de longueur 1 et deux de longueur 4, et par conséquent le discriminant de

L sur F est un carré, et il en est de même de $N_{L/F}(f'(\tilde{\omega}_L))$. On en déduit qu'on a

$$v' \equiv v \bmod (U_L)^2,$$

et on conclut que $G_F(c_\sigma)$ et $G(\eta, c_\eta)$ diffèrent de $(-1)^{(q-1)/2}$, ce qu'il fallait démontrer.

On a donc prouvé la proposition 7.4 bis pour σ primitive, avec G/G_1 d'ordre 4.

7.12. Il nous reste seulement à prouver la proposition 7.4 bis dans le cas où σ est primitive, et G/G_1 d'ordre 8. On a alors $e = 4$, u est impair, et $a(\sigma), a(\eta)$ sont pairs.

Notons J l'extension non ramifiée de degré 2 de F dans H, ϕ le caractère de $F^\times$ définissant J, Ω un caractère de $J^\times$ définissant H, et α un caractère de $H^\times$, non trivial, et trivial sur $N_{R/H}(R^\times)$. On a alors

$$\mathrm{Ind}_L^F 1_L = 4 \cdot 1_F + 3\phi + \phi' + \phi\phi' + \mathrm{Ind}_H^F(\alpha - 1_H) + 2\,\mathrm{Ind}_J^F(\Omega - 1_J) ,$$

où ϕ' définit une sous-extension de H quadratique sur F, distincte de J. Comme on a

$$\frac{\varepsilon(\rho)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_L^F 1_L)} = \frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon(1_L)} ,$$

on en déduit

$$\varepsilon'(\sigma)^3 = \varepsilon'(\rho) = \varepsilon'(\eta)\varepsilon'(\phi)^3\varepsilon'(\phi')\varepsilon'(\phi\phi')\varepsilon'(\alpha)\varepsilon'(\Omega)^2.$$

Mais on calcule aisément

$$\varepsilon'(\phi) = (-1)^{\nu};$$
$$\varepsilon'(\phi\phi') = (-1)^{\nu+1}\varepsilon'(\phi');$$
$$\varepsilon'(\phi')^2 = (-1)^{(q-1)/2};$$
$$\varepsilon'(\alpha) = 1, \quad \text{car} \quad a(\alpha) = u+1 \quad \text{est pair;}$$
$$\varepsilon'(\eta) = \eta(c_\eta)^{-1} = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1} \quad \text{car} \quad a(\eta) = u+1 \quad \text{est pair;}$$

De plus, on remarque que $(-1)^{(q-1)/2}$ vaut -1; en effet, $\mathrm{Gal}(J/F)$ transforme Ω en Ω^3, c'est-à-dire qu'on a

$$q\,\frac{q^2-1}{4} \equiv -\frac{q^2-1}{4} \mod (q^2-1)$$

$$\text{i.e.} \qquad 4\,|\,(q+1).$$

On obtient donc $\varepsilon'(\alpha) = \operatorname{Det}\sigma\,(c_\sigma)^{-1}$ si l'on prouve le dernier lemme.

Lemme 7.12. On a $\varepsilon'(\Omega)^2 = 1$.

Démonstration. D'après 2.18, on a

$$\varepsilon'(\Omega) = \Omega(\tilde{\omega}_F)^{\nu+1}q^{-1}\sum_{\xi\in k_J}\Omega(\xi)\psi_J(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi),$$

Mais Ω est transformé en Ω^3 par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(J/F)$; on a donc $\varepsilon'(\Omega) = \varepsilon'(\Omega^3)$, d'où $\varepsilon'(\Omega)^2 = \Omega(-1) = (-1)^{\frac{q^2-1}{4}} = 1$.

La preuve de ce lemme est achevée, donc aussi la preuve de la proposition 7.4 bis et celle de notre théorème principal.

Appendice 1. Séries de Poincaré.

Théorème. Soient F un corps global, G un groupe réductif connexe sur F, Z son centre, ω un caractère unitaire de $Z(F) \setminus Z(\mathbb{A}_F)$, S un ensemble fini non vide de places finies de F, et pour $v \in S$, une représentation ρ_v admissible irréductible unitarisable de $G_v = G(F_v)$, de caractère central ω_v, et possédant un coefficient non nul à support compact modulo $Z_v = Z(F_v)$. Alors il existe une représentation automorphe irréductible cuspidale $\Pi = \otimes_v \Pi_v$ de $G(\mathbb{A}_F)$, de caractère central ω, telle que π_v et ρ_v soient équivalentes pour $v \in S$.

Démonstration. (folklore)

Pour toute place v dans S, on choisit un coefficient f_v de ρ_v, non nul en 1 et à support compact modulo Z_v. Pour toute place v non dans S, on choisit une fonction lisse f_v sur G_v non nulle en 1, se transformant par ω_v sous Z_v, et à support compact modulo $Z(F_v)$ Pour presque toute place v, on impose en outre à f_v d'être la fonction nulle hors de Z_vK_v où $K_v = G(\mathcal{O}_{F_v})$ est le compact maximal standard de G_v, et valant $\omega_v(z)$ sur les éléments zk, $z \in Z_v$ et $k \in K_v$. Pour toute place v on impose à f_v de vérifier $f_v(g) = \overline{f_v(g^{-1})}$, ce qui est loisible puisque ρ_v est unitarisable. On forme alors la série de Poincaré

$$Pf(g) = \sum_{\gamma \in Z(F) \setminus G(F)} f(\gamma g) \quad \text{pour } g \in G(\mathbb{A}_F)$$

où f est le produit des fonctions locales f_v. (La somme est prise sur un ensemble de représentants dans $G(F)$ de $Z(F) \setminus G(F)$ mais ne dépend pas de ce choix puisque ω est trivial sur $Z(F)$). Pour g dans un ensemble compact modulo $Z(\mathbb{A}_F)$, la somme définissant Pf est finie; a fortiori elle converge, et la fonction Pf est continue. De plus, la fonction $|Pf|^2$ est intégrable sur $Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$; en effet on a

$$|Pf(g)|^2 \leq \sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)} |f(\gamma g)||Pf(g)|,$$

et donc $|Pf(g)|^2$ est intégrable sur $Z(\mathbb{A}_F)G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ si et seulement si la fonction $f(g)\,Pf(g)$ est intégrable sur $Z(\mathbb{A}_F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$, ce qui est clair puisque f est continue et à support compact modulo $Z(\mathbb{A}_F)$.

Nous allons prouver que la fonction Pf est cuspidale, c'est-à-dire appartient à l'espace $L_0^2(G,\omega)$. Soit N le radical unipotent d'un parabolique rationnel de G, et fixons $g\in G(\mathbb{A}_F)$. Pour n variant dans un ensemble compact la fonction $\gamma \longrightarrow f(\gamma ng)$ est nulle sauf pour un nombre fini de γ. Ecrivant

$$Pf(ng) = \sum_{\gamma\in G(F)/Z(F)N(F)} \sum_{\gamma'\in N(F)} f(\gamma\gamma' ng)$$

et tenant compte du fait que $N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)$ est compact, on a

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} Pf(ng)dn = \sum_{\gamma} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A}_F)} (\sum_{\gamma'} f(\gamma\gamma' ng))\, dn$$

$$= \sum_{\gamma} \int_{N(\mathbb{A}_F)} f(\gamma ng)dn$$

$$= \sum_{\gamma} \prod_{v} (\int_{N(F_v)} f_v(\gamma n_v g_v)dn_v).$$

Mais pour $v\in S$, la fonction $g_v \longmapsto f_v(\gamma g_v)$ est un coefficient de ρ_v, donc $\int_{N(F_v)} f_v(\gamma ng_v)dn = 0$. Donc la fonction Pf est bien cuspidale.

Considérons $\overline{f(g)}Pf(g) = \sum_{\gamma\in Z(F)\backslash G(F)} f(g^{-1})f(\gamma g)$.

Comme le support de f est compact, il est clair que l'on peut restreindre le support d'une des fonctions f_v $(v \notin S)$ de façon à avoir $f(g^{-1})f(\gamma g) = 0$ si $\gamma \notin Z(F)$. On voit alors que la fonction $\check{f}$ de l'algèbre de Hecke relative à ω , n'annule pas la fonction cuspidale Pf ; en effet on a

$$\int_{Z(\mathbb{A}_F)\setminus G(\mathbb{A}_F)} f(g^{-1})Pf(g)dg = \int_{Z(\mathbb{A}_F)\setminus G(\mathbb{A}_F)} \overline{f(g)}f(g)dg \neq 0 ,$$

et la transformée de Pf par $\check{f}$ ne s'annule pas en 1 . Il existe donc une sous-représentation irréductible Π de $L^2_o(G,\omega)$ que $\check{f}$ n'annule pas. En particulier $\check{f}_v$ n'annule pas la composante Π_v en v ; pour $v \in S$, ce n'est possible que si Π_v et ρ_v sont équivalentes, puisque f_v est un coefficient de ρ_v.

Appendice 2. Convergence d'intégrales.

Proposition. Soient G un groupe réductif connexe sur un corps global

Z son centre

ω un caractère unitaire de $Z(F) \setminus Z(\mathbb{A}_F)$

f une fonction sur $G(\mathbb{A}_F)$, à support compact modulo $Z(\mathbb{A}_F)$ et se transformant par ω suivant $Z(\mathbb{A}_F)$. On suppose que f s'écrit comme produit de fonctions locales f_v, f_v étant pour presque toute place v comme dans la démonstration de l'appendice 1. Alors, la fonction qui à $g \in G(\mathbb{A}_F)$ associe $\Sigma|f(g^{-1}\gamma g)|$, où la somme porte sur des représentants des classes modulo $Z(F)$ des éléments elliptiques réguliers de $G(F)$, est à support compact modulo $G(F)Z(\mathbb{A}_F)$, et est continue et intégrable sur $G(F)Z(\mathbb{A}_F)\setminus G(\mathbb{A}_F)$.

Démonstration. Je ne connais pas de référence qui traite à la fois les corps de nombres et les corps des fonctions. Nous allons donc séparer ces deux cas. Le premier est mieux connu, et le lecteur trouvera dans [Ar 2] des lemmes qui, en fait, généralisent la proposition ci-dessus. Supposons donc que F soit un corps de nombres, et raisonnons comme dans [Ar 2], p. 941. Pour ne pas encore surcharger le texte, nous adoptons sans commentaire les notations de [Ar 2]. En particulier, nous remplaçons G par sa restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$, et considérons donc un groupe réductif G sur $\mathbb{Q}$. On rappelle au résultat standard de théorie de la réduction, contenu dans la preuve du Lemme 2.12 de [La2][(*)]. Soit ω un sous ensemble compact de $N_0(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ et T_0 un élément de $\mathfrak{a}_0^+$. Pour tout sous-groupe parabolique standard P_1, soit $\sigma^{P_1}(T_0,\omega)$ l'ensemble des éléments de $G(\mathbb{A})$ de la forme

$$pak\ ,\ p \in \omega\ ,\ a \in A_0(\mathbb{R})^0\ ,\ k \in K$$

(*) Langlands étudie la situation à l'infini, mais ses résultats impliquent facilement ce qui est dit ici, par les techniques du §12 de [Go].

tels que $\alpha(H_o(a)-T_o) > 0$ pour $\alpha \in \Delta_o^1$. On sait [Go] qu'on peut trouver ω et T_o de façon à obtenir, pour tout choix de P_1,

$$G(\mathbb{A}) = P_1(\mathbb{Q})\ \sigma^{P_1}(T_o,\omega)\ .$$

Si P et P_1 sont des sous groupes paraboliques (standard) de G, P contenant P_1, et x, δx des éléments de $\sigma^{P_1}(T_o,\omega)$ avec $\delta \in P(\mathbb{Q})$, vérifiant

$$\alpha(H_o(x)-T) > 0$$

$$\alpha(H_o(\delta x)-T) > 0^{(*)} \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta_o^P \smallsetminus \Delta_o^{P_1}\ ,$$

alors δ appartient à $P_1(\mathbb{Q})$.

Fixons T_o et ω de sorte que $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})\ \sigma^G(T_o,\omega)$. Appelons C le support de f, et prenons $x \in \sigma^G(T_o,\omega)$, et $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, γ elliptique régulier, tels que $x^{-1}\gamma x \in C$. Alors on a

$$\gamma x = x \cdot x^{-1}\gamma x \in xC\ .$$

Comme C est compact modulo $Z(\mathbb{A}_F)$, pour tout choix de $T \in \mathfrak{a}_o^+$ suffisamment régulier, il existe $T' \in \mathfrak{a}_o^+$ tel que, pour toute racine simple α, $\alpha(H_o(x)-T') > 0$ implique $\alpha(H_o(\gamma x)-T) > 0$ et $\alpha(H_o(x)-T) > 0$. Choisissons T de sorte que pour tout sous groupe parabolique propre maximal P_1 de G, la condition rappelée plus haut, avec $P = G$, soit vérifiée. Soit P_1 un tel parabolique, α la racine simple correspondante (i.e $\{\alpha\} = \Delta_o^G \smallsetminus \Delta_o^{P_1}$), et δ un élément de $P_1(\mathbb{Q})$ tel que

$$\delta^{-1}\gamma x \in \sigma^{P_1}(T_o,\omega)\ .$$

(*) Cette seconde condition est omise dans [Ar2], mais elle est nécessaire car sinon on pourrait démontrer que $\delta \in P(Q)$ implique $\delta \in P_1(Q)$.

Alors $\alpha(H_o(x)-T') > 0$ implique

$$\alpha(H_o(\gamma x)-T) > 0 \quad \text{et} \quad \alpha(H_o(x)-T) > 0 \ .$$

Mais on a $e^{\alpha(H_o(y))} = |\alpha(m)|$ si $y = nmk$, $n \in N_o(\mathbb{A})$ $m \in M_o(\mathbb{A})$, $h \in K$,
et aussi $e^{\alpha(H_{P_1}(y))} = |\alpha(m)|$

d'où $$e^{\alpha(H_{P_1}(y))} = e^{\alpha(H_o(y))}$$

et également $e^{\alpha(H_{P_1}(\delta y))} = e^{\alpha(H_o(\delta y))}$.

Mais comme $\delta \in P_1(\mathbb{Q})$, on a $H_{P_1}(\delta y) = H_{P_1}(y)$ et on obtient, pour $y = \delta^{-1}\gamma x$,
$\alpha(H_o(\gamma x)) = \alpha(H_o(\delta^{-1}\gamma x))$ et

$$\alpha(H_o(\delta^{-1}\gamma x)-T)) > 0 \ .$$

On a alors $\delta^{-1}\gamma \in P_1(\mathbb{Q})$ d'où $\gamma \in P_1(\mathbb{Q})$, ce qui contredit le fait que γ est elliptique régulier.

Par suite les éléments x de $\sigma^G(T_o,\omega)$ qui vérifient

$$x^{-1}\gamma x \in C$$

pour un $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ elliptique régulier, vérifient également

$$\alpha(H_o(x)-T') \leq 0$$

pour toute racine simple α . Mais alors il est clair qu'ils forment dans $G(\mathbb{A})$ un ensemble relativement compact modulo $Z(\mathbb{A})$. Donc le support de $x \to \Sigma|f(x^{-1}\gamma x)|$ est compact modulo $G(\mathbb{Q})\ Z(\mathbb{A})$. De plus cette fonction de x

est manifestement continue (pour x dans un compact, on n'a qu'un nombre fini de termes); elle est donc intégrable sur $G(F)Z(\mathbb{A})\setminus G(\mathbb{A})$. Ceci termine la démonstration pour les corps de nombres.

Supposons maintenant que le corps F soit de caractéristique positive; la référence sera [Ha], et nous adopterons ses notations dans la suite de la démonstration. On utilise le théorème 2.3.3 de [Ha]. Notons encore C le support de f et choisissons $x \in G(\mathbb{A})$ et γ elliptique régulier dans $G(F)$, vérifiant $x^{-1}\gamma x \in C$. Choisissons une constante $c_1 > 0$ telle que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, il il existe un sous-groupe parabolique minimal P rationnel sur F tel que

$$\nu_i(P,R^g) \geq c_1 \quad \text{pour tout } i.$$

(où R est un sous-groupe compact maximal standard fixé).

Choisissons le sous-groupe parabolique P de sorte qu'on ait

$$\nu_i(P,R^{x^{-1}}) \geq c_1 \quad \text{pour tout } i.$$

On a alors $$\nu_i(P^\gamma,R^{x^{-1}\gamma}) \geq c_1 \quad \text{pour tout } i.$$

Mais $x^{-1}\gamma = x^{-1}\gamma x \cdot x^{-1} \in Cx^{-1}$, et il est clair que $\bigcap_{k\in C} R \cap k^{-1}Rk$ est d'indice fini dans R. On déduit alors du lemme 1.3.3 de [Ha] qu'il existe une constante c_o, $0 < c_o < 1$, ne dépendant que de C, telle qu'on ait pour tout i

$$\nu_i(P^\gamma,R^{x^{-1}}) \geq c_o\ \nu_i(P^\gamma,R^{x^{-1}\gamma}).$$

Choisissons une constante c_2 telle que le théorème 2.3.3 de [Ha] soit applicable à c_oc_1 et c_2. Si on a, pour un i,

$$\nu_i(P,R^{x^{-1}}) \geq c_o^{-1}c_2,$$

on a aussi $\nu_i(P^\gamma,R^{x^{-1}}) \geq c_2$, d'où $P^\gamma \subset P_i$ d'après ce Théorème 2.3.3, où P_i est le sous-groupe parabolique propre maximal contenant P, déterminé par i. On en déduit $P_i^{\gamma} = P_i$ et $\gamma \in P_i$, ce qui est impossible puisque γ est elliptique régulier. On a donc pour tout i

$$c_1 \leq \nu_i(P, R^{x^{-1}}) \leq c_o^{-1} c_2$$

et par suite $|\alpha_i(x^{-1})|$ est borné pour tout i. On conclut alors, à l'aide du Théorème 2.2.2 et des Lemmes 2.2.3 et 2.3.5 de [Ha], que x appartient à un ensemble compact modulo $G(F)Z(\mathbb{A})$. La fonction $x \longmapsto \Sigma|f(x^{-1}\gamma x)|$ est donc à support compact modulo $G(F)Z(\mathbb{A})$. Comme dans le cas des corps de nombres, elle est manifestement continue, et par suite intégrable sur $G(F)Z(\mathbb{A})$.

Appendice 3. Calculs de germes.

A.3.1. Soit π une représentation cuspidale de $GL_n(F)$. On sait que sur l'ouvert G_e des éléments elliptiques réguliers, le caractère de π est donné par une fonction localement constante χ_π . Il est prouvé dans [Ho1] que cette fonction est constante au voisinage de l'élément neutre. Nous voulons prouver dans cet appendice que cette constante Γ_π est non nulle et vaut $(-1)^{n-1} \frac{d(\pi)}{d(St)}$ où d désigne le degré formel par rapport à une mesure de Haar fixée quelconque sur $PGL_n(F)$, et où St est la représentation de Steinberg. (Remarquer que le rapport des degrés formels ne dépend pas du choix de la mesure de Haar). Il sera prouvé dans [Ho2] que Γ_π est non nul. Pour obtenir en outre le renseignement plus précis sur la valeur de Γ_π , il nous faut rappeler le lien établi dans [Ho1] avec le développement en germes d'intégrales orbitales [Sk].

A.3.2. Soit ω le caractère central de π . Soient T un tore maximal elliptique de $GL_n(F)$ et T_e l'ouvert $T(F) \cap G_e$ des points réguliers de $T(F)$. Pour toute fonction $f \in C(GL_n(F),\omega)$, soit $F(f)$ la fonction sur T_e définie par

$$F(f)(t) = \int_{PGL_n(F)} f(gtg^{-1})dg .$$

On sait qu'il existe un voisinage V de l'unité dans $GL_n(F)$, et pour chaque partition α de n une fonction Γ_α définie sur $V \cap T_e$, tels que pour toute fonction $f \in C(GL_n(F),\omega)$, il existe un voisinage W de l'élément neutre dans $GL_n(F)$ tel que pour $t \in W \cap T_e$, on ait

$$F(f) = \sum_\alpha a_\alpha(f)\, \Gamma_\alpha(t)$$

où les a_α sont des distributions attachées à la classe d'unipotent de partition α . Il nous suffira de savoir que l'élément neutre est attaché à la partition (n) et qu'on a $a_{(n)}(f) = f(1)$.

Dans [Ho1] , R. Howe prouve qu'on a

$$\Gamma_\pi = d(\pi)\ \Gamma_{(n)}(t)$$

pour t proche de 1 dans T_e .

En particulier $\Gamma_{(n)}(t)$ est, comme germe de fonction sur T_e au voisinage de l'élément neutre, une constante indépendante de T . Cette constante est clairement indépendante de π , et même de ω puisque $\omega(z)$ vaut 1 pour z proche de 1 . C'est donc une constante attachée à $PGL(n,F)$ et nous voulons prouver qu'elle vaut $(-1)^{n-1}d(St)^{-1}$.

A.3.3. Dans le cas où F est de caractéristique nulle, ce résultat est démontré par J. Rogawski [Ro1] . Nous allons voir que, moyennant quelques transformations minimes, sa démonstration reste valable pour F de caractéristique p non nulle. Nous plaçant dans ce cas, prenons pour groupe G le groupe PGL_n sur F , et pour tore T un tore elliptique non ramifié de G : l'image inverse de $T(F)$ dans $GL_n(F)$ est le groupe des éléments inversibles d'une extension non ramifiée E de degré n de F . Fixons une racine primitive (q^n-1)ème ξ de l'unité dans $T(F)$, et un entier pair j assez grand. Notons x_o l'image dans $G(F)$ de $1+\xi\tilde{\omega}_F{}^j$, et posons $U_o = x_o{}^{\mathbb{Z}_p}$ et, pour $k \geq 0$, $U_k = x_o{}^{q^{nk}\mathbb{Z}_p}$, $x_k = x_o{}^{q^{nk}}$ image de $1+\xi\tilde{\omega}^{jq^{nk}}$. Alors, les lemmes 1 à 5 de [Ro1] restent valables (l'essentiel étant que tout élément de U_o sauf l'élément neutre est elliptique régulier). On remplace le Lemme 6 de [Rol] par l'assertion que si, comme dans [Rol], f_o est la fonction caractéristique du sous-groupe d'Iwahori fixé de $PGL_n(F)$, et $c(k)$ le nombre des chambres de l'immeuble X de $PGL_n(F)$ fixes par x_k, on a

$$F(f_o)(x_k) = nc(k) .$$

A.5.4. La propriété (*) de [Rol], p. 421 est à remplacer par la propriété d'homogénéité des germes suivantes, qui se démontre sans problème : pour $1+y$ elliptique régulier suffisament proche de 1, on a

$$\Gamma_\alpha(1+ty) = |t|_F^{-d(\alpha)/2}\Gamma_\alpha(1+y) \quad \text{pour} \quad t \in \mathcal{O}_F .$$

où $d(\alpha)$ est la dimension de l'orbite unipotente attachée à la partition α. En particulier, on a

$$\Gamma_\alpha(x_k) = q^{\frac{d(\alpha)j(q^{nk}-1)}{2}} \Gamma_\alpha(x_o) ,$$

d'où comme dans [Rol] p. 421 (**), une relation

$$F(f_o)(x_k) = \sum_{i=0}^{M} q^{\frac{ij}{2}(q^{nk}-1)} m_i$$

(si j a été choisi assez grand), où les m_i sont des nombres complexes. Pour $k = 0,\dots,M$ $F(f_o)(x_k)$ est rationnel par l'assertion de A.3.3. Mais le déterminant de la matrice $(M+1,M+1)$ de terme général

$$a_{ik} = q^{\frac{ij}{2}(q^{nk}-1)} = (q^{\frac{j}{2}(q^{nk}-1)})^i$$

vaut

$$\prod_{\substack{i,k \\ o\leq i<k\leq M}} \left(q^{j/2(q^{nk}-1)} - q^{j/2(q^{ni}-1)}\right)$$

et est donc rationnel non nul. Par suite les m_i sont rationnels et le Lemme 8 de [Ro1] est valable : $F(f_o)(x_k)$ tend vers m_o dans $\mathbb{Q}_p$ pour k tendant vers l'infini. La fin de la démonstration est comme dans [Ro1] p. 422-423.

Appendice 4. Représentations cuspidales non ramifiées.

A.4.1. Dans cet appendice, nous nous intéressons aux éléments minimaux non ramifiés de $A°(3)$ considérés par H. Carayol [Ca] (Rappelons qu'un élément de $A°(3)$ est dit non ramifié si son exposant minimal est multiple de 3). Nous montrerons brièvement dans les numéros suivants que ces éléments sont aussi obtenus par les constructions de P. Gérardin [Ge1]. On en tire le théorème 5.2 que nous répétons ici pour la commodité du lecteur.

Théorème. Pour chaque élément σ de $G°(3)$ dont l'exposant minimal est multiple de 3, $\pi(\sigma)$ existe, et on obtient ainsi une bijection $\sigma \longmapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble des éléments de $G°(3)$ d'exposant minimal multiple de 3 sur l'ensemble des éléments de $A°(3)$ possédant la même propriété.

Démonstration. Le résultat de surjectivité de la proposition 5.1 implique que tout élément non ramifié de $A°(3)$ est obtenu en tordant par un caractère de $F^{\times}$ un élément minimal non ramifié considéré par Carayol, donc (comme nous le prouvons dans les numéros suivants) s'obtient par les constructions de Gérardin.

Soit E l'extension non ramifiée de degré 3 de F dans $\bar{F}$. Notons M la F-algèbre $\mathrm{End}_F(E)$ des endomorphismes de E considéré comme espace vectoriel sur F, et G le groupe des éléments inversibles de M, formé des automorphismes du F-espace vectoriel E. Gérardin construit, pour chaque caractère θ de $E^{\times}$ qui ne se factorise pas par la norme de E à F, une classe $\theta_{M/F}$ de représentations cuspidales non ramifiées de G, donc un élément π_θ de $A°(3)$ (cf. 5.3). Le théorème 1.2 de [Ge1] dit, en substance, que si σ_θ désigne l'élément de $G°(3)$ que l'on obtient en induisant de W_E à W_F le caractère $\theta \circ \tau_E$ de W_E, alors on a $\pi_\theta = \pi(\sigma_\theta)$. Ainsi, tout élément non ramifié de $A°(3)$ est de la forme $\pi(\sigma_\theta)$ pour un choix de caractère θ de $E^{\times}$, ne se factorisant pas par la norme de E à F.

Mais on sait aussi que tout élément non ramifié de $G^\circ(3)$ est de la forme σ_θ [Ku1, théorème 1.3.3]. Par suite, pour tout tel élément σ de $G^\circ(3)$, $\pi(\sigma)$ existe (ce qui découle aussi de la proposition 3.4), et on obtient ainsi tous les éléments non ramifiés de $\mathcal{A}^\circ(3)$, chacun d'eux étant obtenu une seule fois à cause du résultat d'injectivité du théorème 3.9 (ou encore à cause de la proposition 4 de [Ge1]).

En A.4.2 nous rappelons les définitions de [Ca], en A.4.3 les constructions de [Ge1]; enfin en A.4.4 nous effectuons la comparaison. Nos indications seront brèves, les techniques utilisées étant tout à fait analogues à celles mises en oeuvre au chapitre 5 pour traiter le cas plus compliqué des représentations cuspidales ramifiées. Par abus de langage, on utilisera le terme représentation pour signifier classe d'équivalence de représentations; aucune confusion ne devrait en résulter.

A.4.2. Soient V un espace vectoriel de dimension 3 sur F, M l'algèbre des endomorphismes de V, G le groupe $M^\times$ des automorphismes de V, Z le centre de G, formé des homothéties, et qu'on pourra identifier à $F^\times$; on identifiera également le centre de M au corps F. Posons $\nu = n(\psi)$.

Soient L un $\mathcal{O}_F$-réseau dans V et H le stabilisateur de L dans G. Pour tout entier $m \geq 1$, H. Carayol définit une notion de représentation très cuspidale de niveau m du groupe ZH. L'induite compacte, de ZH à G, d'une représentation irréductible très cuspidale de niveau m de ZH est une représentation cuspidale de G, minimale et d'exposant $3m$. Nous qualifierons les représentations ainsi obtenues de très cuspidales. Deux choix distincts du réseau L conduisent aux mêmes représentations cuspidales de G.

Notons B la sous-$\mathcal{O}_F$-algèbre de M formée des éléments $x \in M$ tels que $xL \subset L$; alors H est le groupe des éléments inversibles de B. Pour tout entier i, posons $B^i = \tilde{\omega}_F^i B$ et, pour $i \geq 1$, $H^i = 1 + B^i$. On pose aussi $H^0 = H$. Pour $i \geq 0$, H^i est donc un sous-groupe distingué de H, et B^i un idéal bilatère de B. L'anneau B/B^1 s'identifie à l'anneau des endomorphismes du k_F-espace vectoriel $L/\tilde{\omega}_F L = L \otimes_{\mathcal{O}_F} k_F$, et le groupe H/H^1 au groupe des automorphismes de cet espace, donc à un groupe linéaire sur le corps fini k_F.

Soit m un entier $m \geq 1$. Rappelons la définition [Ca, § 4.1] des représentations très cuspidales de niveau m de ZH.

Une représentation très cuspidale de niveau 1 de ZH est une représentation (de dimension finie) de ZH, triviale sur H^1, et dont la restriction à H définit, par passage au quotient, une représentation cuspidale du groupe H/H^1.

Supposons $m \geq 2$. Une représentation très cuspidale de niveau m de ZH est une représentation (de dimension finie) de ZH, triviale sur H^m, et dont la restriction à H^{m-1} se décompose en caractères cuspidaux, i.e. de la forme $x \longrightarrow \psi \circ \mathrm{Tr}(\tilde{\omega}_F^{-m-\nu} v(x-1))$, où v est un élément de H dont la classe dans H/H^1 est elliptique régulière, ce qui, on le voit aisément, signifie que l'extension $F[v]$ de F engendrée par v est non ramifiée de degré 3.

A.4.3. Rappelons maintenant les constructions de Gérardin [Ge1]. Comme 3 est un nombre premier, celles-ci se simplifient un peu, et le lecteur se convaincra sans trop de peine que les pages 160 et 161 de [Ge1] décrivent bien, dans notre cas particulier, les constructions de ce numéro.

Soit E l'extension non ramifiée de degré 3 de F dans $\bar{F}$. Notons Γ le groupe de Galois de E sur F, et Γ' l'ensemble Γ privé de l'élément neutre. Nous conservons les notations de A.4.2, mais nous prenons cette fois pour V l'espace vectoriel E et pour L le réseau $\mathcal{O}_E$ de V. Alors E, agissant par multiplication sur E, s'identifie à une sous-algèbre de M, Γ à un sous-groupe de G

et k_E à une sous-algèbre de M/M_1. On a

$$M = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma E$$

et pour tout entier i

$$B^i = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma P_E^i.$$

Soit θ un caractère régulier de $E^\times$ (i.e. un caractère de $E^\times$ ne se factorisant pas par la norme de E à F). On pose $m = \inf a(\chi_E \theta)$, χ parcourant les caractères de $F^\times$. On a $m \geq 1$ et, pour $\gamma \in \Gamma'$, $m = a(\theta \circ \gamma / \theta)$. Gérardin construit une représentation κ_θ de $E^\times H^{m^-}$ dont l'induite (compacte) à G fournit une représentation cuspidale $\theta_{M/F}$ de G, d'exposant minimal $3m$, donc un élément de $A°(3)$ qui, nous l'avons dit, n'est autre que $\pi(\sigma_\theta)$.

Nous allons maintenant décrire la construction de κ_θ.

Supposons dans un premier temps qu'on ait $a(\theta) = m$. Si m vaut 1, on pose $K_0 = F^\times$, $K_1 = H$; on a donc $K_0K_1 = ZH$. La restriction de θ à U_E est triviale sur U_E^1 donc définit un caractère $\tilde{\theta}$ de $k_E^\times$ ne se factorisant pas par la norme de k_E à k_F. Notant T le tore elliptique de H/H^1 défini par k_E, on sait associer à $\tilde{\theta}$ [cf. DL, théorème 8.3] une représentation cuspidale $R_T(\tilde{\theta})$ de H/H^1, on obtient donc une représentation κ'_θ de H. En imposant que chaque élément x de $K_0 = F^\times$ agisse par multiplication par le scalaire $\theta(x)$, on prolonge κ'_θ en une représentation de ZH, qui est κ_θ.

Supposons maintenant $m \geq 2$, on pose alors $K_0 = F^\times$, $K_1 = U_E$, $K_i = U_E^{i^+}$ pour i entier, $1 < i \leq m$, et $K_m = 1 + P_E^{m^+} + \sum'_{\gamma \in \Gamma'} \gamma P_E^{m^-}$. On a alors $K_0K_1K_m = E^\times H^{m^-}$ et $K_0K_1 = E^\times$.

Soit ψ_θ un caractère additif de F tel qu'on ait

$$\theta(1+x) = \psi_\theta \circ \mathrm{Tr}_{E/F}(x) \quad \text{pour} \quad x \in P_E^{m^+} .$$

On construit la représentation κ_θ de $K_0 K_1 K_m$ de la façon suivante : Si m est pair, κ_θ est un caractère, donné par θ sur $E^\times$ et par la formule $\kappa_\theta(1+x) = \psi_\theta \circ \mathrm{Tr}(x)$ pour $x \in B^{m^+}$. Si m est impair, la représentation de H^{m^+} définie par la formule $1+x \longrightarrow \psi_\theta \circ \mathrm{Tr}(x)$ pour $x \in B^{m^+}$ s'étend de manière unique en une représentation κ'_θ de K_m (κ'_θ est notée κ_m dans [Ge1]). Sur l'espace de cette représentation, on a une représentation canonique $\tilde{\kappa}_\theta$ (notée $\tilde{\kappa}_m$ dans [Ge1]) du groupe H/H^1 (qui s'identifie aussi à U_E/U_E^1). Le lecteur prendra garde que la représentation $\tilde{\kappa}_\theta$ n'est pas une extension de la représentation κ'_θ. En fait on définit l'extension κ_θ de κ'_θ à $K_0 K_1 K_m$ en imposant que chaque élément x de K_0 agisse par multiplication par $\theta(x)$ et chaque élément x de $\bar{K}_1$ par l'opérateur $\theta(x)\tilde{\kappa}_\theta(x)$.

On vient de décrire la construction de κ_θ lorsqu'on a $a(\theta) = m$. Si maintenant on ne fait plus cette hypothèse, on peut choisir un caractère χ de $F^\times$ tel que $a(\chi_E\,\theta) = m$; alors $\kappa_{\chi_E\,\theta}$ est définie, et on pose $\kappa_\theta(x) = \chi^{-1}_\circ \mathrm{Det}(x)\kappa_{\chi_E\,\theta}(x)$ pour $x \in K_0 K_1 K_m$.

A.4.3. Gardant les notations précédentes, nous allons montrer que pour tout entier $m \geq 1$, les représentations très cuspidales (non ramifiées) de G d'exposant $3m$ sont les représentations $\theta_{M/F}$ de G construites par Gérardin, quand θ parcourt les caractères de $E^\times$ vérifiant $a(\theta) = m$ et $a(\theta) \leq a(\chi_E\theta)$ pour $\chi \in F^\times$ (ces caractères sont forcément réguliers). Les autres représentations cuspidales non ramifiées de G s'obtenant à partir des représentations très cuspidales par torsion par les caractères de $F^\times$, on a bien le résultat annoncé (et utilisé) en A.4.1.

Nous allons montrer plus précisément que pour tout entier $m \geq 1$ et toute représentation très cuspidale irréductible ρ, de niveau m de ZH, il existe un caractère θ de $E^\times$, vérifiant les conditions précédentes, tel que ρ soit l'induite à ZH de κ_θ. Remarquons d'abord que pour un tel caractère θ de $E^\times$, d'exposant m, l'induite ρ_θ de κ_θ à HZ est bien très cuspidale de niveau m (elle est irréductible puisque $\theta_{M/F}$ l'est). C'est clair si m vaut 1. Si m vaut au moins 2, choisissons un élément c de $E^\times$ tel qu'on ait $\theta(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/F}(cx)$ pour $x \in P_E^{m-1}$. Comme on a $a(\theta) \leq a(\chi_E\theta)$ pour $\chi \in \widehat{F^\times}$, on voit que c engendre E sur F; par suite un des caractères intervenant dans la restriction de ρ_θ à H^{m-1} (à savoir le caractère défini par la formule $1+x \longmapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$ pour $x \in B^{m-1}$) est cuspidal, et ρ_θ est donc très cuspidale de niveau m.

Examinons maintenant l'assertion réciproque. Soient m un entier ≥ 1 et ρ une représentation très cuspidale de niveau m de HZ.

Supposons d'abord que m vaille 1. La restriction de ρ à H définit une représentation cuspidale de H/H^1 qui, comme on sait, ([Bo] p. 117 et [DL] § 8) est de la forme $R_T(\tilde{\theta})$ pour un caractère régulier de $k_E^\times$. Si θ est l'unique caractère de $E^\times$ trivial sur U_E^1, définissant $\tilde{\theta}$ par passage au quotient, et coïncidant sur $F^\times$ avec le caractère central de ρ, on a bien $\rho = \rho_\theta$.

Supposons désormais $m \geq 2$. La restriction de ρ à H^{m^+} contient un caractère cuspidal η_c : $\eta_c(1+x) = \psi \circ \mathrm{Tr}(cx)$ pour $x \in B^{m^+}$, où $c \in \tilde{\omega}_F^{-m-\nu}H$ engendre une extension non ramifiée de degré 3 de F. Par suite c est conjugué dans M à un élément de $E^\times$; il est donc conjugué à cet élément dans ZH [Ca, Prop. 3.4.] et par suite on peut supposer que c appartient à E, donc engendre E. Le stabilisateur dans ZH de η_c est $E^\times H^{m^-}$. Par la théorie de Clifford (cf 5.7), ρ est l'induite à ZH d'une représentation irréductible κ de $E^\times H^{m^-}$, dont la restriction à H^{m^+} est isotypique de type η_c.

Si m est pair, $E^\times \mathrm{Ker}(\eta_c)/\mathrm{Ker}(\eta_c)$ est central dans $E^\times H^{m^-}/\mathrm{Ker}(\eta_c)$; par suite κ est un caractère de $E^\times H^{m^-}$; sa restriction à $E^\times$ définit un caractère θ

de $E^\times$ et on voit aussitôt qu'on a $\kappa = \kappa_\theta$ d'où $\rho = \rho_\theta$; on a également $a(\theta) = m$ et $a(\chi_E\theta) \leq a(\theta)$ pour tout caractère χ de $F^\times$, puisque θ coïncide avec η_c sur U_E^{m-1}.

Si m est impair, il n'y a qu'une représentation irréductible κ'_c de K_m dont la restriction à H^{m^+} soit isotypique de type η_c (cela découle de A.4.3 car il est immédiat que η_c est de la forme ψ_θ pour un caractère θ de $E^\times$). Le groupe $F^\times U_E^1 \mathrm{Ker}(\eta_c)/\mathrm{Ker}(\eta_c)$ est central dans $E^\times K_m/\mathrm{ker}(\eta_c)$; par suite $F^\times U_E^1$ agit dans l'espace de κ par multiplication par des scalaires. Soit θ^1 le caractère de $F^\times U_E^1$ ainsi obtenu. On étend κ'_c en une représentation de $F^\times U_E^1 K_m$ en imposant que $F^\times U_E^1$ agisse via θ^1. Alors κ est un composant de l'induite à $E^\times K_m (= E^\times H^{m^-})$ de cette représentation. Mais θ^1 possède $\frac{q^3-1}{q-1}$ extensions en des caractères θ de $E^\times$ qui fournissent $\frac{q^3-1}{q-1}$ représentations κ_θ distinctes, qui sont aussi des composants de cette induite. Comme $F^\times U_E^1 K_m$ est d'indice $\frac{q^3-1}{q-1}$ dans $E^\times K_m$, κ est l'un des κ_θ. Comme précédemment on voit qu'on a $a(\theta) = m$ et $a(\chi_E\theta) \leq a(\theta)$ pour tout caractère χ de $F^\times$. CQFD.

Appendice 5. Le cas modéré.

A.5.1. Nous voulons prouver ici les faits signalés en 5.24 Remarque 2). On garde les notations de 5.3 et on suppose F de caractéristique résiduelle p distincte de 3; on pose $\nu = n(\psi)$.

On se donne donc un entier m, $m \geq 2$, $m \not\equiv 1 \bmod 3$, un élément cuspidal c de M vérifiant $v_F(\mathrm{Det}\, c) = -m-2-3\nu$, et un caractère θ de $F[c]^\times$ compatible à c. On a construit au chapitre 5 une représentation*) cuspidale $\pi(c,\theta)$ d'exposant $m+2$.

On fixe une extension E de degré 3 de F dans $\bar{F}$, et un F-isomorphisme α de E sur $F[c]$. On note σ_θ l'induite à W_F du caractère $\theta \circ \alpha \circ \tau_E$ de W_E, et β le caractère non ramifié de degré 2 de $F^\times$.

Théorème. On a $\pi(c,\theta) = \pi(\sigma_\theta)$ si $F[c]/F$ est cyclique

$\pi(c,\theta) = \beta\pi(\sigma_\theta)$ sinon.

Remarque 1. On a $\mathrm{Det}(\sigma_\theta) = \theta|_{F^\times}$ si $F[c]/F$ est cyclique et $\mathrm{Det}(\sigma_\theta) = \beta \cdot \theta|_{F^\times}$ sinon, ce qui est compatible à la torsion par β dans la formule du théorème, puisqu'on a $\omega_{\pi(c,\theta)} = \theta|_{F^\times}$.

La représentation $\pi = \pi(c,\theta)$ est cuspidale. De plus θ est d'exposant $m \not\equiv 1 \bmod 3$ donc ne se factorise pas par la norme de E à F, et par conséquent σ_θ est irréductible. Par suite, on a, pour tout caractère χ de $F^\times$, $L(\chi\pi) = L(\chi\sigma_\theta) = 1$ et, pour prouver le théorème, il suffit de vérifier, pour tout caractère χ de $F^\times$, l'égalité

$$\varepsilon(\chi\pi) = \varepsilon(\chi\beta^\ell\sigma_\theta) \quad \text{où } \ell = 0 \text{ ou } 1 \text{ selon le cas.}$$

*) Comme aux chapitres 5, 6, 7 nous dirons représentation au lieu de classe de représentations.

Le reste de l'appendice est consacré à la vérification de cette égalité.

Remarque 2. On vérifie trivialement l'égalité des exposants

$$a(\chi\pi) = a(\chi\sigma_\theta) = \sup(3a(\chi),\ a(\theta)+2).$$

Il suffira donc de prouver l'égalité précédente pour les valeurs des facteurs ε en $s = 1/2$, par exemple. Nous noterons ε' la valeur d'un facteur ε en $s = 1/2$.

A.5.2. Rappelons les résultats obtenus en 5.23 et 5.24.

Pour tout caractère χ de $F^\times$ choisissons $c_\chi \in F^\times$ comme en 2.15.

On a alors $\varepsilon'(\chi\pi) = (\theta \cdot \chi \circ \mathrm{Det})^{-1}(c + c\chi) \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c + c\chi) \cdot A$

où A vaut 1 si $a(\chi\pi)$ est pair,

$G(\chi,c_\chi)^3$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) > a(\pi)$,

$(\frac{q}{3})\, G(\theta,c)$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) = a(\pi)$.

D'autre part $\varepsilon(\chi\sigma_\theta)$ se calcule, grâce aux propriétés d'induction des facteurs ε galoisiens, à partir de $\varepsilon(\theta \cdot \chi_{F[c]})$ (ce dernier facteur étant relatif au caractère additif $\psi_{F[c]}$).

On trouve (cf. 2.18)

$$\varepsilon'(\theta\chi_{F[c]}) = (\theta \cdot \chi_{F[c]})^{-1}(c + c_\chi) \cdot \psi \circ \mathrm{Tr}(c + c_\chi) \cdot B$$

où B vaut 1 si $a(\chi\pi)$ est pair

$G(\chi_{F[c]},c_\chi)$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) > a(\pi)$

$G(\theta,c)$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) = a(\pi)$.

A.5.3. Supposons d'abord $F[c]$ cyclique sur F, et notons ω un générateur du groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur les normes de $F[c]$ à F. Par la propriété d'inductivité en degré 0 des facteurs ε galoisiens, on obtient

$$\frac{\varepsilon(\chi\sigma_\theta)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\omega)\varepsilon(\omega^2)} = \frac{\varepsilon(\theta\chi_{F[c]})}{\varepsilon(1_{F[c]})} \quad .$$

Mais comme on a $\omega^2 = \check{\omega}$, on obtient $\varepsilon'(\omega)\cdot\varepsilon'(\omega^2) = 1$ par [De1, 5.4](cf. aussi 3.3). De plus on calcule aisément, utilisant 2.18,

$$\varepsilon'(1_F) = \varepsilon'(1_{F[c]}) = 1, \text{ d'où on tire}$$

$$\varepsilon'(\chi\sigma_\theta) = \varepsilon'(\theta\chi_{F[c]}).$$

La même propriété d'inductivité donne l'égalité

$$\frac{\varepsilon(\chi)\varepsilon(\chi\omega)\varepsilon(\chi\omega^2)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\omega)\varepsilon(\omega^2)} = \frac{\varepsilon(\chi_{F[c]})}{\varepsilon(1_{F[c]})}$$

Comme on a $\varepsilon(\chi\omega) = \omega(c_\chi^{-1})\varepsilon(\chi)$ pour $a(\chi) > 1$ (cf. 2.13, ω étant modéré) on en déduit $\varepsilon(\chi_{F[c]}) = \varepsilon(\chi)^3$ si $a(\chi) > 1$
d'où facilement, si $a(\chi)$ est impair, $a(\chi) \geq 3$

$$G(\chi_{F[c]}, c_\chi) = G(\chi, c_\chi)^3.$$

Par suite on déduit de A.5.2 les relations

$$\varepsilon'(\chi\pi) = \varepsilon'(\chi\sigma_\theta)\cdot C$$

avec $C = 1$ si $a(\chi\pi)$ est pair ou si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) > a(\pi)$, et $C = (\frac{q}{3})$ si $a(\chi)$ est impair, $a(\chi\pi) = a(\pi)$.

Mais, puisque $F[c]$ est une extension cyclique de degré 3 de F, totalement ramifiée, on a $3 | (q-1)$ et donc $(\frac{q}{3}) = 1$. Par suite on a l'égalité voulue $\pi = \pi(\sigma_\theta)$.

A.5.4. Supposons désormais que $F[c]/F$ ne soit pas cyclique. Alors 3 ne divise pas $(q-1)$. Notons K l'extension non ramifiée de degré 2 de F dans $\bar{F}$. La clôture galoisienne de E dans $\bar{F}$ est KE. On note ω un caractère de $K^\times$ définissant KE. Par inductivité, on trouve

$$\frac{\varepsilon(\chi\sigma_\theta)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\mathrm{Ind}_K^F\omega)} = \frac{\varepsilon(\theta\cdot\chi_{F[c]})}{\varepsilon(1_{F[c]})},$$

et
$$\frac{\varepsilon(\mathrm{Ind}_K^F\omega)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\beta)} = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(1_K)}.$$

De plus on calcule $\varepsilon'(1_F) = \varepsilon'(1_K) = \varepsilon'(1_{F[c]}) = 1$

$$\varepsilon'(\beta) = (-1)^\nu.$$

On prouvera en A.5.5 le lemme suivant

<u>Lemme</u>. $\varepsilon'(\omega) = 1$.

De ce lemme on déduit $\varepsilon'(\chi\sigma_\theta) = \varepsilon'(\theta\cdot\chi_{F[c]})(-1)^\nu$.

D'autre part, on a

$$\frac{\varepsilon(\chi)\varepsilon(\chi\,\mathrm{Ind}_K^F\omega)}{\varepsilon(1_F)\varepsilon(\mathrm{Ind}_K^F\omega)} = \frac{\varepsilon(\theta\cdot\chi_{F[c]})}{\varepsilon(1_{F[c]})}.$$

Mais $\mathrm{Ind}_K^F\omega$ étant modéré, on a par 2.13, si $a(\chi) > 1$,

$$\varepsilon(\chi\,\mathrm{Ind}_K^F\omega) = \beta(c_\chi^{-1})\varepsilon(\chi)^2 = (-1)^{a(\chi)+\nu}\varepsilon(\chi)^2$$

puisque $\beta = \mathrm{Det}(\mathrm{Ind}_K^F\omega)$ (cf. A.5.1, Remarque 1).

On en tire donc $\qquad \varepsilon(\chi_{F[c]}) = (-1)^{a(\chi)}\varepsilon(\chi)^3$

et, si $a(\chi)$ est impair, $G(\chi_{F[c]},c_\chi) = -G(\chi,c_\chi)^3$.

Des calculs de A.5.2 on conclut alors

$$\varepsilon'(\chi\pi) = \varepsilon'(\chi\sigma_\theta)\cdot D$$

avec $D = (-1)^\nu$ si $a(\chi\pi)$ est pair,

$D = (-1)^{\nu+1}$ si $a(\chi\pi)$ est impair, $a(\chi\pi) > a(\pi)$,

$$D = (\tfrac{q}{3})(-1)^{\nu} = (-1)^{\nu+1} \quad \text{si} \quad a(\chi\pi) \quad \text{est impair,} \quad a(\chi\pi) = a(\pi).$$

On a donc $\quad D = (-1)^{a(\chi\pi)+3\nu}$

et $\varepsilon'(\chi\pi) = \varepsilon'(\beta\chi\sigma_\theta)$. C.Q.F.D.

A.5.5. Il reste à prouver le lemme de A.5.4. On a

$$\varepsilon'(\omega) = \omega(\tilde{\omega}_F)^{\nu+1} q^{-1} \sum_{\xi \in U_K/U_K^1} \omega(\xi)\psi_K(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\xi)$$

Mais ω est transformé en ω^2 sous l'action de l'élément non trivial γ de $\mathrm{Gal}(K/F)$. On a donc $\omega(F^\times) = 1$. Il s'agit donc de prouver que la somme Σ au membre de droite de l'égalité précédente vaut q.

Si $\xi \in U_K/U_K^1$ vérifie $\omega(\xi) \neq 1$, on a $\omega(\xi^\gamma) = \omega^2(\xi)$ et $\omega(\xi^\gamma) + \omega(\xi) = -1$. On a donc

$$\Sigma = \sum_{\substack{\xi \in U_K/U_K^1 \\ \omega(\xi) = 1}} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\mathrm{Tr}_{K/F}(\xi)) - \sum_{\substack{\xi \in U_K/U_K^1 \\ \omega(\xi) = j}} \psi(\tilde{\omega}_F^{-\nu-1}\mathrm{Tr}_{K/F}(\xi)) .$$

où j est une racine primitive cubique de l'unité fixée dans $\mathbb{C}$. Identifions U_K/U_K^1 à k_K, où k_K est le corps résiduel de K, extension de degré 2 de k_F. Alors $\mathrm{Tr}_{K/F}$ s'identifie à Tr_{k_K/k_F}. On peut découper les sommes précédentes en classes modulo k_F, puisque ω est trivial sur $F^\times$. La classe des éléments de trace nulle contribue alors d'un facteur $q-1$ à la somme où elle apparaît, les q autres classes contribuant d'un facteur -1. Il nous suffit donc de voir que si $\xi \in k_K$ est de trace nulle, alors $\omega(\xi) = 1$. Mais soit ρ une racine primitive cubique de l'unité dans k_K. On a $k_K = k_F[\rho]$ et $1+2\rho$ est de trace nulle. Par suite, on a $\omega(\xi) = 1$ si et seulement si $(1+2\rho)^{(q^2-1)/3} = 1$ dans k_K. Si $p = 2$, c'est clair. Si $p \geq 5$ alors $q+1$ est divisible par 6, et comme $(1+2\rho)^2 = -3$, on a

$$(1+2\rho)^{(q^2-1)/3} = (-3)^{(q^2-1)/6} = (-3)^{(q-1)(q+1)/6} = 1$$

puisque $-3 \in k_F^{\times}$.

A.5.6. Remarque. Le résultat de cet appendice et celui de l'appendice 4 permettent, quand p est distinct de 3, de décrire explicitement la correspondance de Langlands $G^{\circ}(3) \longrightarrow A^{\circ}(3)$. Voir [Mo] pour des résultats dans le cas de $G^{\circ}(n)$, quand p ne divise pas n.

Appendice 6. Facteurs L et ε de paires et changement de base quadratique.

A.6.1. Dans cet appendice, nous donnons quelques compléments à la proposition 3.25. Quand F est une extension de $\mathbb{Q}_3$ et qu'on prend un élément σ_1 de $G^\circ(2)$ et un élément primitif σ_2 de $G^\circ(3)$, on aimerait prouver l'égalité

(1) $$\varepsilon\,(\pi(\sigma_1)\times\pi(\sigma_2)) = \varepsilon(\sigma_1\otimes\sigma_2)$$

ou même plus simplement (ce qui répond à une question de H. Yoshida) prouver l'égalité obtenue en regardant les exposants de q^{-s} dans la formule précédente :

(2) $$a\,(\pi(\sigma_1)\times\pi(\sigma_2)) = a(\sigma_1\otimes\sigma_2).$$

Remarquons que comme F est une extension de $\mathbb{Q}_3$, l'élément σ_1 s'obtient par induction : il existe une extension quadratique K de F dans $\bar{F}$ et un caractère θ de $K^\times$ tels qu'on ait

$$\sigma_1 = \mathrm{Ind}_K^F(\theta\circ\tau_K) \text{ et par suite}$$

(3) $$\frac{\varepsilon(\sigma_1\otimes\sigma_2)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_K^F 1_K)^3} = \frac{\varepsilon(\theta(\sigma_2)_K)}{\varepsilon(1_K)^3}.$$

Posant $\pi_\theta = \pi(\sigma_1)$, $\pi = \pi(\sigma_2)$ et $\pi_K = \pi((\sigma_2)_K)$, il s'agit donc de prouver qu'on a

(4) $$\frac{\varepsilon(\pi_\theta\times\pi)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_K^F 1_K)^3} = \frac{\varepsilon(\theta\pi_K)}{\varepsilon(1_K)^3}.$$

Il est naturel de penser qu'une bonne théorie du changement de base de F à K devrait permettre de prouver une telle égalité. Le changement de base défini au chapitre 6 (et qui s'appliquerait à π puisque K est modérée sur F et que σ_2, étant primitive, a son exposant minimal premier à 3) ne suffit malheureusement pas à notre propos. Il nous faudra développer une version globale du changement de base quadratique (théorème A.6.3) pour obtenir le résultat suivant :

A.6.2. Proposition. Supposons que F soit une extension de $\mathbb{Q}_3$. Soit K une extension quadratique de F dans $\bar{F}$ et σ un élément primitif de $G_F^\circ(3)$. Pour tout caractère η de $K^\times$, notons η^F l'élément $\mathrm{Ind}_K^F(\eta \circ \tau_K)$ de $G_F(2)$ et π_η l'élément $\pi(\eta^F)$ de $A_F(2)$.

a) Pour tout caractère η de $K^\times$, on a

$$a(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = a(\eta^F \otimes \sigma).$$

b) Supposons σ minimale. Soit c un élément de $F^\times$ tel qu'on ait

$$\varepsilon(\chi\sigma) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\sigma)$$

pour tout caractère modéré χ de $F^\times$. Supposons en outre que pour tout caractère modéré η de $K^\times$ on ait

$$\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \mathrm{Det}\, \pi_\eta(c)^{-1}\, \varepsilon(\sigma)^2. \tag{5}$$

Alors on a, pour tout caractère η de $K^\times$,

$$\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \varepsilon(\eta^F \otimes \sigma). \tag{6}$$

Remarques 1 - Les méthodes qui permettent de prouver le lemme 3.12.1 devraient également prouver que l'hypothèse exprimée par la formule (5) est toujours vérifiée. Nous espérons revenir sur ce point dans un travail prochain.

2 - La relation (5) est vraie si η^F est réductible, en particulier si η est non ramifié.

A.6.3. Soit M/L une extension finie de corps locaux. Conformément à notre usage antérieur (voir 2.12) nous notons $\sigma \longmapsto \sigma_M$ l'application de restriction de G_L dans G_M et pour chaque entier $i \leq 3$, nous notons $\pi \longmapsto \pi_M$ l'application correspondante de $A_L(i)$ dans $A_M(i)$, appelée changement de base de L à M.

Théorème. Soient F un corps global, K une extension quadratique séparable de F, R une représentation automorphe cuspidale de $GL(3,\mathbb{A}_F)$, Ω son caractère central. Soit S un ensemble fini de places de F contenant l'ensemble Σ des places finies v de F, non scindées dans K et telles que F_v soit une extension de $\mathbb{Q}_3$ et que R_v soit de la forme $\pi(\sigma_v)$ où σ_v est un élément primitif de $A^\circ_{F_v}(3)$.

a) Il existe une unique représentation automorphe cuspidale T de $GL(3,\mathbb{A}_K)$ telle que pour toute place v de F hors de S et pour toute place w de K au-dessus de v, on ait

$$T_w = (R_v)_{K_w}. \tag{7}$$

Le caractère central de T est $\Omega \circ N_{K/F}$.

b) L'égalité précédente a en fait lieu pour toute place v de F hors de Σ et pour toute place w de K au-dessus de v.

c) Soient v une place de F, w une place de K au-dessus de v. Pour tout caractère η de $K_w^\times$ posons $\pi_\eta = \pi(\mathrm{Ind}_{K_w}^{F_v}(\eta \circ \tau_{K_w}))$. On a alors

$$L(\pi_\eta \times R_v) = L(\eta T_w) = L(\eta (R_v)_{K_w}) \tag{8}$$

$$\frac{\varepsilon(\pi_\eta \times R_v)}{\varepsilon(\pi_1)^3} = \frac{\varepsilon(\eta T_w)}{\varepsilon(1)^3} \tag{9}$$

où on a noté 1 le caractère trivial de $K_w^\times$.

A.6.4. Corollaire. Gardons les notations de la proposition A.6.2 et du théorème précédent. Soit v une place de F appartenant à Σ, w la place de K au-dessus de F. Supposons donné un isomorphisme α de K_w sur K qui envoie F_v sur F et fasse correspondre $\pi(\sigma)$ à R_v. Supposons enfin que σ vérifie les conditions de la partie b) de la proposition A.6.2. Alors on a

$$T_w = (R_v)_{K_w}.$$

Prouvons la proposition A.6.2 à l'aide du théorème et de son corollaire. Il est clair que, quitte à tordre σ par une puissance de la norme sur $F^\times$, on peut supposer σ unitaire. On peut trouver une extension quadratique de corps globaux K/F, une place w de K et un isomorphisme de K_w sur K qui envoie F_v sur F. On peut également trouver (cf. appendice 1) une représentation automorphe cuspidale R de $GL(3,\mathbb{A}_F)$ dont le composant en v corresponde, via α, à l'élément $\pi(\sigma)$ de $A°(3)$. Plaçons-nous d'abord dans la situation de la partie b) de la proposition. On a alors $T_w = (R_v)_{K_w}$ par le corollaire et, grâce à la formule (9), on a aussi

$$\frac{\varepsilon(\pi_\eta \times R_v)}{\varepsilon(\pi_1)^3} = \frac{\varepsilon(\eta(R_v)_{K_w})}{\varepsilon(1)^3}$$

pour tout caractère η de $K_w^\times$.

Transportée via α, cette formule donne la formule (4) avec $\pi = \pi(\sigma)$ et $\theta = \eta\circ\alpha$, d'où immédiatement (6). Démontrons maintenant la partie a) de la proposition.

Notons τ l'élément de $A_K(3)$ qui correspond à T_w via α. Grâce à (8), on voit que τ est cuspidal, et (9) se traduit par

$$\frac{\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma))}{\varepsilon(\pi_1)^3} = \frac{\varepsilon(\eta\tau)}{\varepsilon(1)^3} \tag{10}$$

pour tout caractère η de $K^\times$, où l'on note 1 le caractère trivial de $K^\times$. Soit χ un caractère de $F^\times$ tel que $\chi^{-1}\sigma$ soit minimal. On a alors $\chi\pi_\eta = \pi_{\eta\chi_K}$ pour tout caractère η de $K^\times$, d'où $\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \varepsilon(\pi_{\eta\chi_K} \times \pi(\chi^{-1}\sigma))$ et $\varepsilon(\eta\tau) = \varepsilon(\eta\chi_K\, \chi_K^{-1}\tau)$.

On peut donc remplacer σ par $\chi^{-1}\sigma$ et supposer dans (10) que σ est minimale. En prenant $\eta = 1$ on obtient

$$a(\tau) = a(\sigma) \quad \text{si } K/F \text{ est non ramifiée}$$

$$a(\tau) = 2a(\sigma) - 3 \quad \text{sinon.}$$

On a donc $a(\tau) = a(\sigma_K)$ et $a(\tau)$ n'est pas multiple de 3 puisque, σ étant primitive et minimale, $a(\sigma)$ n'est pas multiple de 3. Par suite pour tout caractère η de $K^\times$, on a

$$a(\eta\tau) = \sup(3a(\eta), a(\tau)).$$

Si K/F est non ramifiée, on en déduit :

$$a(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = 2\sup(3a(\eta), a(\sigma)) = \sup(3a(\eta^F), 2a(\sigma)) = a(\eta^F \otimes \sigma).$$

Si K/F est ramifiée, on trouve :

$$a(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \sup(3a(\eta), a(\tau)) + 3 = \sup(3(a(\eta)+1), 2a(\sigma))$$

$$= \sup(3a(\eta^F), 2a(\sigma)) = a(\eta^F \otimes \sigma),$$

où, dans les deux calculs précédents, la dernière égalité découle du calcul des exposants en termes des indices $\alpha(\ )$ de 2.14.

A.6.5. Prouvons maintenant le corollaire A.6.2, en gardant les notations précédentes. On a donc la formule (10) pour tout caractère η de $K^\times$ et il s'agit de prouver qu'on a $\tau = \pi(\sigma_K)$. Comme σ est primitive et minimale, on voit comme précédemment que τ est minimale, d'exposant premier à 3. Comme T_w est pour presque toute place w invariant par $\mathrm{Gal}(K/F)$, il découle du théorème fort de multiplicité 1 que cela est vrai pour toute place w et ainsi τ est invariante sous $\mathrm{Gal}(K/F)$. Par conséquent, il existe un unique élément $\rho \in A_F^\circ(3)$ tel que $\tau = \rho_K$

et $\omega_\rho = \omega_\sigma$. Il s'agit donc de prouver qu'on a $\rho = \pi(\sigma)$.

Soit c_ρ un élément de $F^\times$ tel qu'on ait

$$\varepsilon(\chi\rho) = \chi(c_\rho)^{-1}\varepsilon(\rho) \text{ pour tout caractère modéré } \chi \text{ de } F^\times.$$

On a alors

$$\varepsilon(\eta\tau) = \eta(c_\rho)^{-1}\varepsilon(\tau) \text{ pour tout caractère modéré } \eta \text{ de } K^\times, \text{ et par suite}$$

$$\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \eta(c_\rho)^{-1}\varepsilon(\pi_1 \times \pi(\sigma)) = \eta(c_\rho)^{-1}\xi(c)^{-1}\varepsilon(\sigma)^2,$$

où ξ désigne le caractère de $F^\times$ définissant K.

Mais, par l'hypothèse faite sur σ, on a

$$\varepsilon(\pi_\eta \times \pi(\sigma)) = \eta(c)^{-1}\xi(c)^{-1}\varepsilon(\sigma)^2$$

d'où l'on tire

$$\eta(c) = \eta(c_\rho) \text{ pour tout caractère modéré } \eta \text{ de } K^\times$$

et donc $c \equiv c_\rho \mod U_F^1$.

Pour tout caractère χ de $F^\times$, on a $\pi_{\chi_K} = \pi(\chi \oplus \xi\chi)$ d'où, grâce à (10),

$$\varepsilon(\chi\sigma)\,\varepsilon(\chi\xi\sigma) = \varepsilon(\chi\rho)\,\varepsilon(\chi\xi\rho).$$

On utilise alors la même démarche que dans le chapitre 7. La congruence $c \equiv c_\rho \mod U_F^1$ implique qu'on a

$$\varepsilon(\chi\sigma)^2 = \varepsilon(\chi\rho)^2 \text{ pour tout caractère } \chi \text{ de } F^\times,$$

et il suffit de prouver $\varepsilon(\chi\sigma) \sim \varepsilon(\chi\rho)$ dans $\mathbb{C}^\times/M$, ce qui découle de la congruence $c \equiv c_\rho \mod U_F^1$ et de l'égalité $\omega_\sigma = \omega_\rho$.

A.6.6. Il nous reste à prouver le théorème.

Remarquons tout d'abord que l'assertion d'unicité dans la partie a) découle du théorème fort de multiplicité 1.

Notons T' la représentation de $GL(3,\mathbb{A}_K)$ dont la composante en une place w de K au-dessus d'une place v de F soit

$$T'_w = (R_v)_{K_w}.$$

Si Ω est le caractère central de R, celui de T' est $\Omega_K = \Omega \circ N_{K/F}$. En particulier, il est trivial sur les idèles principaux de K, et les conditions du paragraphe 13.1 de [JPS1] sont satisfaites, de sorte que nous pourrons faire usage des théorèmes 13.8 et 13.9 de [JPS1].

Soient χ un caractère du groupe des classes d'idèles de K et π_χ la représentation automorphe de $GL(2,\mathbb{A}_F)$ correspondant à χ. Son composant en une place v de F est l'élément noté π_{χ_w} dans la partie c) du théorème, s'il n'y a qu'une place w de K au-dessus de v, et vaut $\pi(\underset{w|v}{\bullet}\chi_w)$ s'il y en a deux.

On peut considérer la fonction L globale $L(\pi_\chi \times R, s)$ produit des composants locaux $L((\pi_\chi)_v \times R_v)(s)$, et, si on fixe un caractère additif non trivial Ψ de $\mathbb{A}_F/F$, le facteur $\varepsilon(\pi_\chi \times R, s)$ produit des composants locaux $\varepsilon((\pi_\chi)_v \times R_v, \Psi_v)(s)$. On sait [JPS5] que la fonction $s \longmapsto L(\pi_\chi \times R, s)$ est entière, bornée dans les bandes verticales si F est un corps de nombres, et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(\pi_\chi \times R, s) = \varepsilon(\pi_\chi \times R, s)\, L(\check{\pi}_\chi \times \check{R}, 1-s). \tag{11}$$

Soit v une place de F n'appartenant pas à Σ. Si v est scindée dans K, on vérifie qu'on a

$$\prod_{w|v} L(\chi_w T'_w) = L((\pi_\chi)_v \times R_v) \tag{12}$$

et (13) $$\prod_{w|v} \frac{\varepsilon(\chi_w T'_w, \Psi_{K_w})}{\varepsilon(1_{K_w}, \Psi_{K_w})^3} = \frac{\varepsilon((\pi_\chi) \times R_v, \Psi_v)}{\varepsilon(1_{F_v}, \Psi_v)^6} .$$

Si v est inerte dans K on a aussi, en désignant par w la place de K au-dessus de v

(14) $$L(\chi_w T'_w) = L((\pi_\chi)_v \times R_v)$$

et (15) $$\frac{\varepsilon(\chi_w T'_w, \Psi_w)}{\varepsilon(1_{K_w}, \Psi_{K_w})^3} = \frac{\varepsilon((\pi_\chi)_v \times R_v, \Psi_v)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_{K_w}^{F_v} 1_{K_w}, \Psi_v)^3} .$$

En effet toutes ces égalités découlent des identités analogues pour les représentations des groupes de Weil locaux W_{F_v} et W_{K_w} grâce à la proposition 3.27.

Remarquons maintenant que, si η est un caractère unitaire du groupe des classes d'idèles de F, alors pour prouver le théorème pour la représentation cuspidale R, il suffit de le prouver pour la représentation cuspidale ηR. Si A est un entier positif, on peut choisir η de sorte que η_v et η_{K_w} soient d'exposant $\geq A$ pour toute place v de F appartenant à Σ. Nous choisirons A (et η) de sorte que pour tout caractère χ du groupe des classes d'idèles C_K de K, non ramifié hors de Σ, on ait, pour chaque place v de Σ, les relations (14) et (15) : cela est possible à cause des propriétés de dégénérescence exprimées par le lemme 3.13.2.

Comme nous l'avons dit, on peut remplacer R par ηR, et par suite supposer que pour tout caractère χ de C_K, non ramifié en les places appartenant à Σ, on ait

$$L(\chi T', s) = L(\pi_\chi \times R, s)$$
$$L(\check{\chi} \check{T}', s) = L(\check{\pi}_\chi \times \check{R}, s)$$
et $$\varepsilon(\chi T', s) = \varepsilon(\pi_\chi \times R, s).$$

(en effet ces égalités découlent immédiatement des égalités (12) à (15)). Pour tout tel caractère χ de C_K, on a donc l'équation fonctionnelle traduction de (11) :

$$(16) \qquad L(\chi T', s) = \varepsilon(\chi T', s) L(\check{\chi}\check{T}', 1-s).$$

Par suite des théorèmes 13.8 et 13.9 de [JPS1], pour chaque $v \in \Sigma$, il existe un unique élément générique T_w de $A_{K_w}(3)$ (où w est la place de K au-dessus de v) tel que, en posant $T = \underset{w \in \Sigma'}{\otimes} T_w \underset{w \notin \Sigma'}{\otimes} T'_w$, ($\Sigma'$ désignant l'ensemble des places de K au-dessus de celles de F appartenant à Σ) on ait, pour tout caractère χ de C_K :

$$(17) \qquad L(\chi T, s) = \varepsilon(\chi T, s) L(\check{\chi}\check{T}, 1-s).$$

Pour $w \in \Sigma'$, T_w a même caractère central que T'_w et par suite T a pour caractère central $\Omega \circ N_{K/F}$. Par construction, la formule (7) est vraie pour toute place v de F hors de Σ, et on a donc les parties a) et b) du théorème.

Les formules (8) et (9) sont également vraies par construction pour toutes les places v de F hors de Σ, à cause des formules (12) à (15). Il nous reste donc seulement à prouver (8) et (9) en une place v_0 fixée de Σ, w_0 désignant la place de K au-dessus de v_0. Il suffit encore de prouver (8) et (9) quand η est un caractère unitaire de $K^\times_{w_0}$. On peut donc supposer que η est la composante en w_0 d'un caractère (unitaire) χ de C_K, très ramifié en les places de Σ' autres que w_0. On a alors les formules (12) et (13) avec T remplaçant T', et aussi les formules (14) et (15), sauf peut-être en la place v_0 de F.

Mais la comparaison des équations fonctionnelles (11) et (17) donne, par un raisonnement entièrement analogue à celui utilisé en 3.14 et 3.15, la première égalité de la formule (8) et la formule (9) en la place v_0. Enfin la seconde égalité de la formule (8) est facile car $(R_{v_0})_{K_{w_0}}$ étant cuspidale, on vérifie aussitôt qu'on a $L(\eta(R_{v_0})_{K_{w_0}}) = 1$ et, de même, $L(\pi_\eta \times R_{v_0}) = 1$.

Cela prouve la partie c) du théorème, et achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar1] J. Arthur : Eisenstein series and the trace formula, in [Co], Part 1, pp. 253-274.

[Ar2] J. Arthur : A trace formula for reductive groups I : terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$, Duke Math. J. vol. 45 n°4, pp. 911-952 (1978).

[Bo] A. Borel et alii : Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture Notes in Mathematics n°131, Springer-Verlag (1972).

[Ca] H. Carayol : Representations cuspidales du groupe linéaire, prépublication Université Paris VII (1982).

[Ct1] P. Cartier : Représentations of $\mathcal{P}$-adic groups : a survey, in [Co], Part 1, pp. 111-156.

[Ct2] P. Cartier : La conjecture locale de Langlands pour $GL(2)$ et la démonstration de Ph. Kutzko, Séminaire Bourbaki 1979/80, exposé n° 550, Lect. Notes in Math. n°842, Springer-Verlag (1981).

[Ct3] P. Cartier : Fonctions L d'Artin : théorie locale (Cours 1977/78 rédigé par Guy Henniart), prépublication IHES (1980).

[Cas] W. Casselman : Introduction to the theory of admissible representations of $\mathcal{P}$-adic reductive groups, notes polycopiées (1977).

[Co] : Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. pure Math. vol. 33, AMS, Providence (1979).

[De1] P. Deligne : Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in Modular functions of one variable II, Lect. Notes in Math. n° 349, Springer-Verlag (1973).

[De2] P. Deligne : Formes modulaires et représentations de GL(2), in Modular functions of one variable II, Lect. Notes in Math. n°349, Springer-Verlag (1973).

[De3] P. Deligne : Lettre à R.P. Langlands, datée du 21 mars 1977.

[DH] P. Deligne et G. Henniart : Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L, Inv. Math. 64, pp. 89-118 (1981).

[DK] P. Deligne et D. Kazhdan : On representations of local division algebras, prépublication 1982.

[DL] P. Deligne et G. Lusztig : Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. 103, pp. 103-161 (1976).

[Fa] D. Flath : A comparison of the automorphic representations of GL(3) and its twisted forms, Pacific J. of Math. 97, pp.373-402 (1981).

[Fk] Y. Flicker : The trace formula and base change for GL(3), Lect. Notes in Math. n° 927, Springer Verlag (1982).

[GeJ] S. Gelbart et H. Jacquet : A relation between automorphic representation of GL(2) and GL(3), Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 11, pp. 471-542 (1978).

[GGP] I. Gelfand, M. Graev, I. Pijatetskii-Shapiro : Representation theory and automorphic functions, W.B. Saunders Company, Philadelphia (1969)

[Ge1] P. Gérardin : Cuspidal unramified series for central simple algebras over local fields, in [Co], Part I, pp. 157-170.

BIBLIOGRAPHIE

[Ge2] P. Gérardin : Weil representations associated to finite fields, Journal of Algebra, vol. 46, n° 1, pp. 54-101 (1977).

[GeK] P. Gérardin et Ph. Kutzko : Facteurs locaux pour GL(2), Ann. Scient. E.N.S., t. 13, pp. 349-384 (1980).

[GeL] P. Gérardin et J.P. Labesse : The solution of a base change problem for GL(2), in [Co], Part II, pp. 115-133.

[Go] R. Godement : Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques, séminaire Bourbaki n° 257 (1963).

[GJ] R. Godement et H. Jacquet : Zeta functions of simple algebras, Lect. Notes in Math. n° 260, Springer-Verlag (1972).

[Ha] G. Harder : Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, Inv. Math. 7, pp. 33-54 (1969).

[HC] Harish-Chandra : Harmonic analysis on reductive p-adic groups, notes by G. van Dijk, Lect. Notes in Math. n° 162, Springer-Verlag (1970).

[He] G. Henniart : Représentations du groupe de Weil d'un corps local, L'Enseign. Math. t. 26, pp. 155-172. (1980).

[Ho1] R. Howe : The Fourier transform and germs of characters, (case of GL_n over a p-adic field), Math. Ann. 208, pp. 305-322 (1974).

[Ho2] R. Howe : Addendum à l'article précédent, à paraître.

[Ja1] H. Jacquet : Principal L-functions of the linear group, in [Co], Part 2, pp. 63-86.

[Ja2] H. Jacquet : Generic representations, in Non commutative harmonic analysis, Lect. Notes in Math. n° 587, Springer-Verlag (1977).

[Ja3] H. Jacquet : Lettre à l'auteur, datée du 13 mars 1981.

[JL] H. Jacquet, R.P. Langlands : Automorphic forms on GL(2), Lect. Notes in Math. n° 114, Springer-Verlag (1970).

[JPS1] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro, J.A. Shalika : Automorphic forms on GL(3), Ann. of Math. n° 109, pp. 169-258 (1979).

[JPS2] - id - : Facteurs L et ε du groupe linéaire C.R.A.S. Paris t. 289, pp. 59-61 (1979).

[JPS3] - id - : Conducteur des représentations du groupe linéaire, Math. Ann. 256, pp. 199-214 (1981).

[JPS4] - id - : Facteurs L et ε du groupe linéaire : théorie archimédienne, C.R.A.S. Paris t. 293, pp. 13-18 (1981).

[JPS5] - id - : Relèvement cubique non normal, C.R.A.S. Paris t. 292, pp. 567-571 (1981).

[JS] H. Jacquet, J.A. Shalika : On Euler products and the classification of automorphic I, II, Am. J. of Math. vol. 103, pp. 499-558 et pp. 777-815 (1981).

[Ko1] H. Koch : Classification of the primitive representations of the Galois group of local fields, Inv. Math. 40, pp. 195-216 (1977).

[Ko2] H. Koch : On the local Langlands conjecture for central division algebras of index p, Inv. Math. 62, pp. 243-268 (1980).

[KoZ] H. Koch, E.W. Zink : Zur Korrespondenz von Darstellungen der Galois-gruppen und der zentralen Divisionalgebren über lokalen Körpern, Math. Nachr. 98, pp. 83-119 (1980).

[Ku1] Ph. Kutzko : The irreducible imprimitive local Galois representations of prime dimension, J. of Algebra 57, pp. 101-110 (1979).

BIBLIOGRAPHIE

[Ku2] Ph. Kutzko : The Langlands conjecture for GL(2) of a local field Ann. of Math. 112, pp. 381-412 (1980).

[Lg] S. Lang : Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, Reading, 1970.

[La1] R.P. Langlands : On the classification of irreducible representations of real reductive groups, notes miméographiées, I.A.S., Princeton (1973).

[La2] R.P. Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lect. Notes in Math. n° 544, Springer-Verlag (1976).

[La3] R.P. Langlands : Base change for GL(2), Ann. of Math. studies n° 93, Princeton (1980).

[Mi] G.A. Miller, H.F. Blichtfeld, L.E. Dickson : Finite groups of linear homogeneous transformations, (by H.F. Blichtfeld) in Theory and applications of finite groups, Dover, New York (1961).

[Mo] A. Moy : Local constants and the tame Langlands correspondence Ph. D. Dissertation, Chicago (1982).

[Ro1] J. Rogawski : An application of the building to orbital integrals, Comp. Math. 42, pp. 417-423 (1981).

[Ro2] J. Rogawski : Representations of GL(n) and division algebras over a p-adic field, prépublication (1981).

[Se1] J.-P. Serre : Corps locaux, Hermann, Paris (1968).

[Se2] J.-P. Serre : Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris (1971).

[Sk] J. Shalika : A theorem on semi-simple p-adic groups, Ann. of Math. 95, pp. 226-242 (1972).

[Ta] J. Tate : Number theoretic background in [Co], Part II, pp. 3-26

[Tu1] J.B. Tunnell : On the local Langlands conjecture for GL(2), Inv. Math. 46, pp. 179-200 (1978).

[Tu2] J.B. Tunnell : Report on the local Langlands conjecture for GL(2), in [Co], Part II, pp. 135-138.

[Tu3] J.B. Tunnell : Artin's conjecture for representations of octahedral type B.A.M.S. vol. 5, n° 2, pp. 173-175 (1981).

[Vi] M.F. Vigneras : Représentation des algèbres centrales simples sur un corps local non archimédien, prépublication (1982).

[Wa] G. Warner : Selberg's trace formula for non-uniform lattices : the $\mathbb{R}$- rank one case, in Studies in Algebra and number theory, Advances in Math. Suppl. studies, vol. 6, pp. 1-141 (1979).

[We] A. Weil : Basic number theory, Springer-Verlag, Berlin (1973).

[We2] A. Weil : Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en s'en déduisent. Hermann, Paris, 1948.

[Z] A.V. Zelevinsky : Induced representations for reductive p-adic groups II. On irreducible representations of GL(n), Ann. Scient. E.N.S. 4ème série, t. 13, pp. 165-210 (1980).

[Zi] E.-W. Zink : Counting primitive projective representation of local Galois groups, prépublication (1978).