

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GEORGES DLOUSSKY

Structure des surfaces de Kato

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 14 (1984)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_14__R1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

DLOUSSKY Georges

On étudie certaines surfaces de la classe VII_0 de K. KODAIRA, construites par Ma. KATO.

Dans la première partie, on attache à toute surface de KATO des invariants de natures diverses : des germes d'endomorphisme de surfaces, un nombre complexe "la trace", une famille d'entiers "la famille des opposés des self-intersections des courbes rationnelles du revêtement universel", et on donne certaines de leurs propriétés.

Dans la seconde partie, on étudie les surfaces de Kato "de trace non nulle" au moyen des germes d'application associés. On introduit la courbe formelle et les champs de vecteurs formels invariants par ces germes, et on constate sur des exemples que ces objets ne sont pas convergents en général. On étudie enfin les courbes de ces surfaces en décrivant toutes les matrices d'intersection et on montre que lorsque "la trace" est nulle, la matrice est définie négative.

Some surfaces of the VII_0 th class of KODAIRA, constructed by Ma. KATO are studied.

In the first part, different kinds of invariants are attached to KATO's surfaces : germs of mappings between surfaces, a complex number "the trace", a family of integers "the family of the opposite of self-intersections of rational curves of the universal covering space", and some properties are given.

In the second part, KATO's surfaces with "non vanishing trace" are studied by mean of germs of mappings. A formal curve and formal vector fields invariant by these germs are introduced and it can be checked on examples that these objects are not convergent in general. All intersection matrices of rational curves are described and it is shown that when "trace" vanishes the matrix is negative definite.

Introduction	1
Invariants associés	3
Surfaces de trace non nulle et courbes	53
Bibliographie	119

INTRODUCTION

La classification des surfaces analytiques complexes compactes due à K. KODAIRA [13][14] est incomplète pour les surfaces S pour lesquelles le premier nombre de Betti $b_1(S)$ vérifie $b_1(S) = 1$ (c'est la classe VII dans la terminologie de Kodaira) et dont les seules fonctions méromorphes sont les constantes.

Dans [1] BOGOMOLOV affirme que lorsque le deuxième nombre de Betti $b_2(S)$ vérifie $b_2(S) = 0$, les seules surfaces vérifiant cette propriété sont les surfaces de Hopf non elliptiques et certaines surfaces d'Inoue [9].

Reste le cas $b_2(S) > 0$: M. INOUE a construit deux types d'exemples [10][11] et M. KATO [12] a démontré que ces surfaces contenaient une coquille sphérique globale (C.S.G.). On n'a actuellement aucun exemple de surface pour laquelle $b_2(S) > 0$ ne contenant pas de C.S.G.

L'objet de ce travail est l'étude des surfaces contenant une C.S.G. On montre en reprenant une idée de M. Kato qu'on peut associer à ces surfaces des germes d'applications contractantes $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ qui permettent de reconstituer la surface. L'étude de ces germes permet une étude "fine" de ces surfaces, et en traduisant les problèmes géométriques en terme de germes d'application, on a un outil parfaitement adapté, qu'on se propose de développer.

Dans la première partie, on définit des invariants associés aux surfaces contenant une C.S.G. et on étudie toutes les configurations possibles des courbes de revêtement universel. Dans la seconde partie, on donne un début de classement du cas générique (i.e. $\text{tr}(S) \neq 0$) et on étudie les matrices d'intersection des courbes de S .

Tous les résultats ont été annoncés dans deux notes [2][3]. Je remercie I. NAKAMURA de m'avoir signalé une erreur : dans le thm 2 [3] il faut garder l'hypothèse $\text{tr}(S) \neq 0$.

La classification des surfaces lorsque $b_2(S) = 1$ annoncée dans [2] a été trouvée indépendamment et par d'autres méthodes par I. NAKAMURA [17]. En outre :

1) I. ENOKI [5] a classé les surfaces pour lesquelles $b_1(S) = 1$, $b_2(S) > 0$ pour

G. DLOUSSKY

lesquelles il existe un diviseur $D \neq 0$ pour lequel $D^2 = 0$: c'est exactement le cas $\text{tr}(S) \neq 0$ (ou $\sigma_n(S) = 2n$) ; 2) I. NAKAMURA [16][17] a caractérisé les surfaces d'Inoue S_ω et \tilde{S}_ω [11] par l'existence de respectivement 2 ou 1 cycle de courbes rationnelles et sans supposer l'existence d'une C.S.G.

Je remercie André HIRSCHOWITZ pour son aide au cours de ce travail.

*
* *

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO I
INVARIANTS ASSOCIES

§ 0 - Introduction.

§ 1 - Surfaces contenant une coquille sphérique globale.

1.2 Données de Kato et surfaces $S(\Pi, \sigma)$ associées.

1.6 Une caractérisation des surfaces contenant une C.S.G.

1.9 Revêtement universel des surfaces $S(\Pi, \sigma)$.

1.12 Bouts du revêtement universel d'une surface contenant une C.S.G.

§ 2 - Surfaces minimales contenant une C.S.G.

2.1 Introduction.

2.4 Contraction des courbes exceptionnelles.

2.9 Données de Kato minimales.

§ 3 - Surfaces de Kato.

3.2 Effondrement du revêtement universel sur une courbe.

3.11 Germes d'applications associés à une surface de Kato.

3.19 Configuration des courbes compactes du revêtement universel.

3.35 Formes différentielles et champs de vecteurs globaux.

3.37 Invariants cohomologiques.

Références.

Notations

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on note :

$$\|z\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$$

$$B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1 + \varepsilon\} \quad , \quad B_{-\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1 - \varepsilon\} \quad , \quad B := B_0$$

$$\Sigma_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|z\| < 1 + \varepsilon\}$$

$$\Sigma_\varepsilon^+ := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < \|z\| < 1 + \varepsilon\} \quad , \quad \Sigma_\varepsilon^- := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|z\| < 1\}$$

$$\Sigma := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| = 1\} \quad .$$

On appellera : surface une variété analytique complexe de dimension 2 ,
courbe un espace analytique irréductible de dimension 1 .

§ 0.- Introduction.

0.1 - La classification des surfaces complexes compactes minimales due à K. KODAIRA est incomplète en ce qui concerne les surfaces de la classe VII_0 pour lesquelles les nombres de Betti $b_1(S)$ et $b_2(S)$ vérifient :

$$b_1(S) = 1 \quad \text{et} \quad b_2(S) \geq 1 .$$

Ma. INOUE en a exhibé des exemples dans [10] et [11] et Ma. KATO a montré que les surfaces S_α [10] et S_ω [11] contiennent une "coquille sphérique globale".

L'objet de cet article est l'étude des surfaces compactes contenant une "coquille sphérique globale".

0.2 - Définition : Soit S une surface compacte et

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

un germe d'isomorphisme. On dit que f est une coquille sphérique globale - ce qu'on abrégera C.S.G. - si $S \setminus f(\Sigma)$ est connexe.

Le point de départ est une observation due à Ma. KATO [12]: toutes les surfaces compactes contenant une C.S.G. sont isomorphes à une surface $S(\Pi, \sigma)$ (Proposition 1.7) , qui est obtenue de la façon suivante :

Définition : Soit $\Pi : B^\Pi \rightarrow B$ une succession finie d'éclatements au-dessus d'un nombre fini de points de la boule unité B de \mathbb{C}^2 et

$$\sigma : \bar{B} \rightarrow B^\Pi$$

une application biholomorphe sur son image. En recollant holomorphiquement par $\sigma\Pi$ des voisinages isomorphes des deux bords de $B^\Pi \setminus \sigma(\bar{B})$, on obtient une surface compacte, notée $S(\Pi, \sigma)$ qui est canoniquement munie d'une C.S.G.

Dans le cas où $S(\Pi, \sigma)$ est minimale on montre (théorème 2.13) que Π et σ peuvent être choisis de sorte que :

- les éclatements composant Π aient lieu au-dessus de 0 ,
- $\bar{\Pi}^{-1}(0)$ ne contiennent qu'une seule courbe exceptionnelle de première espèce Γ .
- $\sigma(0)$ appartient à Γ .

0.3 - Définition : On appellera surface de Kato une surface compacte minimale contenant une C.S.G. et pour laquelle $b_2(S) \geq 1$.

A une surface de Kato S on associe une famille de germes d'applications $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ indexée par l'ensemble $\mathfrak{C}(\tilde{S})$ des courbes rationnelles du revêtement universel \tilde{S} de S . Ces germes sont isomorphes à des germes de la forme

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$F = \mathbb{P}^1$ et à chacun d'eux on peut associer une surface isomorphe à S (Proposition 3.16), ce qui permet de montrer (§ 3.11) que la recherche des classes d'isomorphisme des surfaces de Kato est équivalente à celle des classes d'isomorphisme des germes de la forme $F = \mathbb{P}^1$.

L'invariant analytique $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ étant d'un emploi malaisé, on introduit d'autres invariants associés à S plus grossiers :

- 1) $b_2(S)$ qui correspond au nombre d'éclatements qui composent chaque germe F_C ;
- 2) la famille des self-intersections des courbes rationnelles du revêtement universel \tilde{S} de S noté $a(S) := (C_i \cdot C_i)_{i \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$:

On montre que $\mathfrak{C}(\tilde{S})$ est principal homogène sous \mathbb{Z} (Corollaire 3.7) et on décrit toutes les configurations possibles des courbes compactes de \tilde{S} (Théorème 3.27) ;

- 3) la trace de S , notée $tr(S)$ et définie pour tout germe $F = \mathbb{P}^1$ associée à S par

$$tr(S) := tr DF(0)$$

On montre que $tr(S)$ ne dépend pas du choix de F et on a :

Théorème : Soit S une surface de Kato. Alors :

- i) $0 \leq |tr(S)| < 1$
- ii) $tr(S) \neq 0$ si et seulement si $C_i \cdot C_i = -2$ pour tout $i \in \mathfrak{C}(\tilde{S})$.

Les invariants analytiques $a(S)$ et $tr(S)$ déterminent le graphe des éclatements de tout germe $F = \mathbb{P}^1$ associés à S .

0.4 - On montrera dans un travail ultérieur que, dans certains cas, notamment lorsque $b_2(S) = 1$ les invariants $b_2(S)$, $a(S)$ et $tr(S)$ permettent de reconstituer $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ et donc la surface S . On en déduira dans ces cas la classification des surfaces de Kato, leur déformation semi-universelle et leur groupe d'automorphismes.

Je remercie André HIRSCHOWITZ pour toute l'aide apportée au cours de ce travail.

§ 1 . Surfaces contenant une coquille sphérique globale.

Définition 1.1 [12]

Soit S une surface analytique complexe compacte, U un voisinage ouvert de la sphère unité Σ dans \mathbb{C}^2 et

$$f : U \rightarrow S$$

une application analytique biholomorphe sur son image. On appellera le germe d'application

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

une coquille sphérique de S , et on dira que f est une coquille sphérique globale - ce qu'on abrégera par C.S.G. - si

$$S \setminus f(\Sigma)$$

est connexe.

Les surface de Hopf primaires contiennent des C.S.G. ; par exemple si

$\theta : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < 1$, G est le groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ engendré par θ et

$\Pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / G$ est l'application canonique, alors

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

induit par Π est une C.S.G. de la surface de Hopf S .

1.2 Données de Kato et surfaces $S(\Pi, \sigma)$ associées.

Définition 1.3

Soit

$$\Pi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$$

une succession finie d'éclatements au-dessus d'un nombre fini de points de la boule unité B de \mathbb{C}^2 et

$$\sigma : \bar{B} \rightarrow B^\Pi := \Pi^{-1}(B)$$

une application analytique définie sur un voisinage ouvert de \bar{B} et biholomorphe sur son image dans B^Π .

On appellera (Π, σ) une donnée de Kato, et on dira qu'elle est centrée si 0 est un point fixe de $F := \Pi \sigma$, c'est-à-dire

$$F(0) = \Pi \sigma(0) = 0.$$

Dans [12] Ma. Kato donne un procédé de construction de surfaces contenant une C.S.G. :

Notons pour $\varepsilon > 0$ petit

$$B_\varepsilon^\Pi := \Pi^{-1}(B_\varepsilon).$$

L'application

$$\sigma^\Pi : B_\varepsilon^\Pi \rightarrow B_\varepsilon^\Pi$$

envoie biholomorphiquement un voisinage du bord ∂B^Π de B^Π dans B_ε^Π , sur un

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO .

voisinage du bord $\partial(\sigma(B))$ de $\sigma(B)$; en recollant par $\sigma\Pi$ ces voisinages isomorphes, on obtient une surface analytique complexe compacte notée

$$S(\Pi, \sigma) .$$

$S(\Pi, \sigma)$ est canoniquement munie d'un plongement ouvert

$$i : A_0 = \text{Ann}(\Pi, \sigma) := B^\Pi \setminus \sigma(B) \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

de plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit pour que sur $\Sigma_\varepsilon, \Pi^{-1}$ existe, les applications

$$\begin{aligned} f^+ : \Sigma_\varepsilon^+ &\rightarrow S(\Pi, \sigma) \\ z &\rightarrow i\sigma(z) \\ f^- : \Sigma_\varepsilon^- &\rightarrow S(\Pi, \sigma) \\ z &\rightarrow i\Pi^{-1}(z) \end{aligned}$$

se recollent par construction sur Σ pour donner une C.S.G.

$$f = f(\Pi, \sigma) : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S(\Pi, \sigma) .$$

Définition 1.4.

On dira que $S(\Pi, \sigma)$ (resp. $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$, $f(\Pi, \sigma)$) est la surface (resp. l'anneau, la C.S.G.) associée à la donnée de Kato (Π, σ) .

Dans la suite $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$ sera identifié à son image par i .

On va maintenant construire à partir d'une donnée de Kato quelconque (Π, σ) une donnée de Kato centrée (Π', σ') de sorte que $S(\Pi, \sigma)$ et $S(\Pi', \sigma')$ soient isomorphes. Plus précisément on a :

Lemme 1.5. : Soit (Π, σ) une donnée de Kato et $F = \Pi\sigma$.

Alors : Il existe une donnée de Kato centrée (Π', σ') , un automorphisme de la boule φ et un isomorphisme

$$\Psi : S(\Pi', \sigma') \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

pour lesquels le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, \Sigma) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^2, \Sigma) \\ f(\Pi', \sigma') \downarrow & & \downarrow f(\Pi, \sigma) \\ S(\Pi', \sigma') & \xrightarrow{\Psi} & S(\Pi, \sigma) \end{array}$$

soit commutatif.

De plus, si $F' := \Pi'\sigma'$ on a :

$$F = \varphi F' \varphi^{-1}$$

□ Démonstration :

D'après le théorème du point fixe de Brouwer, F admet un point fixe $z_0 \in B$; d'autre part les automorphismes de la boule opèrent transitivement et se prolongent analytiquement à un voisinage de \bar{B} [21]. Soit alors un automorphisme

G. DLOUSSKY

$$\varphi : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$$

tel que

$$\varphi(0) = z_0$$

et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} B^{\Pi'} & := & B \times B \xrightarrow{\Psi} B \\ & & \downarrow \Pi \\ & & B \xrightarrow{\varphi} B \end{array}$$

En posant

$$\sigma' := \Psi^{-1} \sigma \varphi : \overline{B} \rightarrow B^{\Pi'}$$

on obtient une donnée de Kato centrée (Π', σ') et Ψ induit l'isomorphisme Ψ cherché. \square

1.6. Une caractérisation des surfaces contenant une C.S.G.

On va voir que toute surface contenant une C.S.G. est isomorphe à une surface $S(\Pi, \sigma)$.

Proposition 1.7. (Kato [12])

Soit S une surface compacte contenant une C.S.G. Pour toute C.S.G.

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

il existe une unique donnée de Kato $K(f) = (\Pi, \sigma)$ et un unique isomorphisme

$$\alpha : S(\Pi, \sigma) \rightarrow S$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & S(\Pi, \sigma) \\ & \nearrow f(\Pi, \sigma) & \downarrow \alpha \\ (\mathbb{C}^2, \Sigma) & & S \\ & \searrow f & \end{array}$$

soit commutatif.

\square Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que f soit biholomorphe sur Σ_ε . Notons

$$X := S \setminus f(\Sigma).$$

Les ouverts

$$\Sigma_\varepsilon^+ \hookrightarrow B \quad \text{et} \quad f(\Sigma_\varepsilon^+) \hookrightarrow X \quad \text{d'une part}$$

$$\Sigma_\varepsilon^- \hookrightarrow \Sigma_\varepsilon \quad \text{et} \quad f(\Sigma_\varepsilon^-) \hookrightarrow X \quad \text{d'autre part,}$$

sont isomorphes par f et disjoints deux à deux. Soit

$$Z := B_\varepsilon \amalg Z_\varepsilon^+ X$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

la variété obtenue en recollant B_ϵ et X le long de Σ_ϵ^+ par f et

$$Z_\epsilon := \Sigma_\epsilon \amalg_{Z_\epsilon^-} Z$$

la variété obtenue en recollant Σ_ϵ avec Z le long de Σ_ϵ^- par f . Les deux variétés sont obtenues en "rebouchant" X , et Z_ϵ est un ouvert strictement pseudoconvexe de Z_ϵ qui ne dépend que de f . D'après [7] (p. 337), Z est une modification d'un espace de Stein normal Y .

Notons

$$\rho : Z \rightarrow Y$$

cette modification.

2. Il existe un unique isomorphisme.

$$a : B \rightarrow Y$$

qui fasse commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow & \downarrow a \\ \Sigma_\epsilon^- & & Y \\ & \searrow \rho f & \end{array}$$

En effet :

$$\rho f : \Sigma_\epsilon^- \rightarrow Y$$

étant à valeurs dans un espace de Stein se prolonge à B d'après un théorème de Hartogs en une application analytique

$$a : B \rightarrow Y$$

L'application a est propre, surjective puisque $a(B)$ qui est un sous-ensemble analytique de Y , contient un ouvert, et à fibres finies puisque B ne contient pas de courbes compactes; de plus, en dehors du lieu de ramification R qui est composé d'un nombre fini de points de Y , la restriction

$$a|_{B \setminus a^{-1}(R)} : B \setminus a^{-1}(R) \rightarrow Y \setminus R$$

est un revêtement qui est nécessairement trivial. On en déduit d'après [8] que (B, a) est une normalisation de Y . Comme Y est normal, a est un isomorphisme.

3. Construction de $K(f) = (\Pi, \sigma)$:

Soit (B^Π, Π) définis par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} B^\Pi : B \times_Z Z & \xrightarrow{\sim} & Z \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \rho \\ B & \xrightarrow[\sim]{a} & Y \end{array}$$

Comme ρ est une succession d'éclatements ([15] p. 83), Π aussi.

De plus le plongement ouvert canonique

$$i : B_\varepsilon \rightarrow Z$$

permet de définir :

$$\sigma := A^{-1}i : B_\varepsilon \rightarrow B^\Pi$$

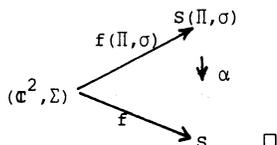
qui est biholomorphe sur son image.

L'assertion résulte alors du fait que A induit des isomorphismes

$$A = \text{Ann}(\Pi, \sigma) \rightarrow X \quad \text{et}$$

$$\alpha : S(\Pi, \sigma) \rightarrow S$$

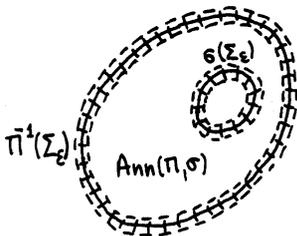
qui, par construction, fait commuter le diagramme



Définition 1.8 On dira qu'une C.S.G. est centrée si sa donnée de Kato associée (Π, σ) est centrée.

D'après la proposition 1.7 l'étude des surfaces contenant une C.S.G. est ramenée à l'étude des surfaces $S(\Pi, \sigma)$; d'après le lemme 1.5 on pourra supposer que les C.S.G. ainsi que les données de Kato sont centrées.

1.9 Revêtement universel des surfaces $S(\Pi, \sigma)$.



Notons $\text{Ann}_\varepsilon(\Pi, \sigma)$ le voisinage d'ordre ε de $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$

$$\text{Ann}_\varepsilon(\Pi, \sigma) := \Pi^{-1}(B_\varepsilon) \setminus \overline{\sigma(B_{-\varepsilon})}$$

$g = \sigma\Pi$ envoie biholomorphiquement un voisinage du bord strictement pseudoconvexe "extérieur" de $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$ sur un voisinage du bord strictement pseudoconcave "intérieur" de $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$.

Si $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une famille d'exemplaires de $\text{Ann}_\varepsilon(\Pi, \sigma)$, soit \tilde{S} la variété obtenue en recollant le bord pseudoconcave de A_i avec le bord pseudoconvexe de A_{i+1} par g . En notant $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la famille des exemplaires d'un même point de $\text{Ann}_\varepsilon(\Pi, \sigma)$, \tilde{S} est muni de l'automorphisme

$$\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

défini sur A_i par

$$g(z_i) = z_{i+1}$$

De plus, l'application canonique

$$\omega : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S} / \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \simeq S(\Pi, \sigma)$$

fait de \tilde{S} un revêtement de $S(\Pi, \sigma)$.

Lemme 1.10 Soit (Π, σ) une donnée de Kato où

$$\Pi = \Pi_1 \dots \Pi_n$$

est une succession de n éclatements

$$B^{\Pi} = B_n \xrightarrow{\Pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\Pi_{n-1}} \dots \rightarrow B_1 \xrightarrow{\Pi_1} B_0 = B$$

Alors : i) $H_1(\text{Ann}(\Pi, \sigma)) = 0$ et

$$H_2(\text{Ann}(\Pi, \sigma)) = \bigoplus^n \mathbb{Z}$$

ii) (\tilde{S}, ω) est le revêtement universel de $S(\Pi, \sigma)$

iii) $H_1(S(\Pi, \sigma)) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_2(S(\Pi, \sigma)) \simeq \bigoplus^n \mathbb{Z}$.

En particulier

$$b_1(S) = 1 \quad \text{et} \quad b_2(S) = n.$$

□ Démonstration :

i) Il est bien connu que

$$H_1(B^{\Pi}) = 0 \quad \text{et} \quad H_2(B^{\Pi}) = \bigoplus^n \mathbb{Z}$$

Considérons alors le recouvrement de B^{Π} formé des deux ouverts

$$U = \text{Ann}(\Pi, \sigma) \quad \text{et} \quad V = \sigma(B_{\varepsilon})$$

la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_2(U \cap V) &\rightarrow H_2(U) \oplus H_2(V) \rightarrow H_2(U \cup V) \rightarrow \\ (*) \quad H_1(U \cap V) &\rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(U \cup V) \rightarrow \\ H_0(U \cap V) &\rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(U \cup V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H_2(U \cap V) &\simeq H_1(U \cap V) \simeq 0 \\ H_2(V) &\simeq H_1(V) \simeq 0 \\ H_0(U \cap V) &\simeq H_0(U) \simeq H_0(V) \simeq H_0(U \cup V) \simeq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donne d'une part

$$H_2(\text{Ann}(\Pi, \sigma)) \simeq H_2(B^{\Pi}) \simeq \bigoplus^n \mathbb{Z}$$

et d'autre part

$$H_1(\text{Ann}(\Pi, \sigma)) = 0$$

ii) est immédiat d'après le théorème de Van Kampen et i).

iii) $S(\Pi, \sigma)$ est recouvert par

$$U = \text{Ann}(\Pi, \sigma) \quad \text{et} \quad V = f(\Sigma_\epsilon)$$

Comme $U \cap V$ est formé de deux composantes connexes homéomorphes à Σ_ϵ , on a

$$H_1(U \cap V) \simeq H_2(U \cap V) \simeq 0$$

$$H_0(U \cap V) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

D'après la suite exacte (*) précédente et i), on obtient d'une part

$$H_2(S) \simeq \bigoplus^n \mathbb{Z}$$

et d'autre part la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Le résultat découle alors du fait que le noyau d'un morphisme surjectif de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Z} est isomorphe à \mathbb{Z} .

Proposition 1.11 Les courbes compactes du revêtement universel (\tilde{S}, ω) d'une surface S contenant une C.S.G. sont toutes rationnelles non singulières.

□ Démonstration. Soit C une telle courbe de \tilde{S} . Une C.S.G. de S étant choisie, on recouvre \tilde{S} par les anneaux ouverts $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Par compacité, il existe

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $C \subset \bigcup_{\alpha < i < \beta} A_i$.

Comme $A_\beta \hookrightarrow B_\epsilon^\Pi$, on peut recoller $\bigcup A_i$ non pas avec A_β mais avec B_ϵ^Π le $\alpha < i < \beta - 1$

long des mêmes ouverts. On obtient une variété isomorphe à la boule éclatée un nombre fini de fois, ce qui donne le résultat. □

1.12 Bouts du revêtement universel d'une surface contenant une C.S.G.

Considérons une surface de Hopf S ; par définition, son revêtement universel est isomorphe à $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ qui peut être compactifié en lui rajoutant ses deux bouts [6] :

L'un 0 a un système fondamental de voisinages strictement pseudoconvexes et ∞ avec un système fondamental de voisinages pseudoconcaves.

La proposition suivante montre que cette propriété est indépendante du choix de la C.S.G., c'est-à-dire qu'on peut distinguer les deux bouts :

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

l'automorphisme

$$\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$$

va vers le bout "pseudoconvexe" $\underline{0}$ tandis que \tilde{g}^{-1} va vers le bout "pseudoconvexe" ∞ .

Proposition 1.13

Soit S une surface compacte contenant une C.S.G.

- 1) Le revêtement universel (\tilde{S}, ω) de S a deux bouts notés $\underline{0}$ et ∞ .

En notant

$$\tilde{\underline{S}} = \tilde{S} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$$

ces bouts sont distingués par la propriété suivante :

$\underline{0}$ (resp ∞) a un système fondamental de voisinages ouverts strictement pseudoconvexes (resp. pseudoconvexes) .

De plus, pour tout relèvement $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$ d'une C.S.G f de S , $\underline{0}$ (resp. ∞) est dans la composante strictement pseudoconvexe (resp. pseudoconvexe) de $\tilde{\underline{S}} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$.

- 2) \tilde{g} ne dépend pas du choix de la C.S.G. f et se prolonge continuellement en

$$\tilde{g} : \tilde{\underline{S}} \rightarrow \tilde{\underline{S}}$$

De plus \tilde{g} vérifie :

i) $\tilde{g}(\underline{0}) = \underline{0}$, $\tilde{g}(\infty) = \infty$

- ii) \tilde{g} est contractant en $\underline{0}$ au sens suivant :

Pour tout voisinage V de $\underline{0}$ relativement compact dans $\tilde{S} \cup \{0\}$

on a

$$\bigcap_{i \geq 0} \tilde{g}^{-i}(V) = \{0\} ;$$

Si V est la composante pseudoconvexe du complémentaire de $\tilde{f}(\Sigma)$ dans $\tilde{\underline{S}}$ pour une C.S.G f quelconque, alors

$$\tilde{g}(V) \subset \subset V .$$

□ Démonstration.

- 1) Il s'agit de voir que les bouts définis en choisissant une C.S.G. f , n'en dépendent pas. Soit pour cela f' une autre C.S.G. et soit

$$\tilde{f}, \tilde{f}' : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$$

deux relèvements de f et f' respectivement.

Notons \tilde{S}_0 (resp. \tilde{S}'_0) la composante de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$ (resp $\tilde{S} \setminus \tilde{f}'(\Sigma)$) à bord strictement pseudoconvexe, et \tilde{S}_∞ (resp \tilde{S}'_∞) celle à bord strictement pseudoconvexe.

Il suffit de montrer que

$\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}'_0$ et $\tilde{S}_\infty \cap \tilde{S}'_\infty$ sont non relativement compacts tandis que

$\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}'_\infty$ et $\tilde{S}'_0 \cap \tilde{S}_\infty$ sont relativement compacts.

En changeant au besoin de relèvement de f , on peut supposer que

$$\partial\tilde{S}'_0 \subset \tilde{S}_0$$

et il suffit de montrer que

$$\tilde{S}_0 \cap \tilde{S}'_0 = \tilde{S}'_0$$

est non relativement compact, ce qui découle du Lemme 1.14 qui suit.

2) résulte immédiatement de 1) et de la construction des bouts. \square

Lemme 1.14. Soit Ω un domaine relativement compact et strictement pseudoconvexe dans une variété complexe de dimension ≥ 2 . Alors le bord $\partial\Omega$ de Ω est connexe et Ω n'a qu'un bout.

\square Démonstration :

Supposons $\partial\Omega$ non connexe. On peut alors écrire

$$\partial\Omega = F_1 \cup F_2$$

où F_1 et F_2 sont deux compacts disjoints non vides, et trouver deux voisinages ouverts W_1 et W_2 de F_1 et F_2 disjoints et ne rencontrant aucun sous-ensemble analytique compact de Ω . Notons

$$\rho : \Omega \rightarrow Z$$

la réduction de Remmert de Ω , où Z est un espace de Stein normal [7] .

D'une part, la restriction de ρ à $(W_1 \cup W_2) \cap \Omega$ est un isomorphisme, et d'autre part

$$K = \Omega \setminus (W_1 \cup W_2)$$

est compact dans Ω .

Notons $U_i = \rho(W_i \cap \Omega)$ $i = 1, 2$, : ce sont des ouverts disjoints de Z et

$$L = Z \setminus (U_1 \cup U_2)$$

est un compact de Z dont le complémentaire a au moins deux composantes connexes non relativement compactes.

Cette propriété est conservée pour tout compact $L' \supset L$ en particulier pour un polyèdre analytique contenant L ([20] thm 6.2).

On obtient alors une contradiction en vertu du fait que le bord d'un polyèdre analytique est connexe ([20] thm 6.3). Comme $\partial\Omega$ est connexe Ω n'a qu'un bout d'après la définition [6] .

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

§ 2. - Surfaces minimales contenant une C.S.G.

2.1 Introduction.

Définition 2.2. Soit X une surface. Une courbe rationnelle non singulière C contenue dans X est dite exceptionnelle de première espèce si

$$C.C = -1$$

On dira que X est minimale si X ne contient aucune courbe exceptionnelle de première espèce.

On sait que si S est une surface compacte, il existe une surface minimale S' telle que S soit obtenue à partir de S' par un nombre fini d'éclatements. Dans le cas où S contient une C.S.G., on va chercher à déterminer dans ce paragraphe ces surfaces minimales S'. Commençons par le cas le plus simple, à savoir celui, où s'étant fixé une C.S.G., la surface $S \simeq S(\Pi, \sigma)$ contient une courbe exceptionnelle de première espèce C vérifiant :

$$C \subset \text{Ann}(\Pi, \sigma)$$

on a le

Lemme 2.3 Soit (Π, σ) une donnée de Kato centrée et C une courbe exceptionnelle de première espèce vérifiant

$$C \subset \text{Ann}(\Pi, \sigma)$$

Décomposons Π en

$$\begin{array}{ccccc} \Pi & & \Pi & & \Pi' \\ \downarrow & \xrightarrow{\Pi_0} & \downarrow & \xrightarrow{\Pi_0} & \downarrow \\ B & & B & & B \end{array}$$

où Π_0 est la contraction de C en un point

$$z' = \Pi_0(C)$$

Soit $\sigma' := \Pi_0 \sigma : B \rightarrow B$

Alors : i) (Π', σ') est une donnée de Kato centrée

ii) Il existe une unique application

$$p_0 : S(\Pi, \sigma) \rightarrow S(\Pi', \sigma')$$

faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Ann}(\Pi, \sigma) & \xrightarrow{\Pi_0} & \text{Ann}(\Pi', \sigma') \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(\Pi, \sigma) & \xrightarrow{p_0} & S(\Pi', \sigma') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & S(\Pi, \sigma) \\ & \nearrow f(\Pi, \sigma) & \downarrow p_0 \\ (\mathbb{C}^2, \Sigma) & & S(\Pi', \sigma') \\ & \searrow f(\Pi', \sigma') & \end{array}$$

et cette application est l'éclatement de $S(\Pi', \sigma')$ au point $z' \in \text{Ann}(\Pi', \sigma')$

□ Démonstration: immédiate □

... cependant, si $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$ ne contient pas C , le couple (Π', σ') défini précédemment n'est plus une donnée de Kato, puisque σ' n'est plus biholomorphe sur son image. On va donc dans la suite s'attacher à définir une donnée de Kato (Π'', σ'') pour laquelle existe un éclatement

$$S(\Pi, \sigma) \rightarrow S(\Pi'', \sigma'').$$

L'idée consiste à bouger la C.S.G. de façon à se ramener à la situation du Lemme 2.3.

2.4 Contraction des courbes exceptionnelles.

Montrons avant de continuer le

Lemme 2.5

Soit $F : B \rightarrow B$ une application analytique vérifiant

$$F(0) = 0 \text{ et } F(B) \subset\subset B$$

Alors :

- 1) Il existe une constante $0 < k < 1$ telle que pour tout $z \in B$

$$\|F(z)\| \leq k \|z\|$$

En particulier, toute valeur propre λ de $DF(0)$ vérifie $|\lambda| < 1$.

- 2) 0 est le seul point fixe de F .

□ Démonstration.

- 1) Comme $F(B) \subset\subset B$, il existe $0 < k < 1$ tel que $F(B)$ soit contenu dans la boule de rayon k .

Soit $z \neq 0$ fixé. On peut supposer $F(z) \neq 0$, sinon il n'y a rien à montrer.

Notons Δ (resp Δ_1) le disque obtenu en prenant l'intersection de la droite passant par 0 et z (resp $F(z)$) avec B . Soit

$$P : B \rightarrow \Delta_1$$

la projection de B sur Δ_1 , $R : B \rightarrow B$

une rotation amenant Δ_1 sur Δ et

$$H_{1/k} : \Delta(k) \rightarrow \Delta$$

l'homothétie de rapport $1/k$ du disque de rayon k sur Δ . L'application

$$f = : H_{1/k} \circ R \circ P \circ F : \Delta \rightarrow \Delta$$

a 0 comme point fixe. D'après le lemme de Schwarz

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$$\|f(z)\| \leq \|z\|$$

Par conséquent

$$\|F(z)\| = \|R P F(z)\| \leq k \|z\|$$

2) Si z_0 est un point fixe de F on a

$$\|z_0\| = \|F(z_0)\| \leq k \|z_0\|$$

c'est à dire $z_0 = 0$. □

Soit

$$f_\varepsilon : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

une C.S.G. centrée et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que f soit définie sur Σ_ε .

Remarquons tout d'abord qu'on peut faire bouger f dans S , par exemple en mettant f dans la famille holomorphe $(f_\lambda)_\lambda$ de C.S.G.

$$(\mathbb{C}^2, \Sigma) \times \{1 - \varepsilon < |\lambda| < 1 + \varepsilon\} \rightarrow S$$

$$(z, \lambda) \rightarrow f_\lambda(z) := f h_\lambda(z)$$

où h_λ est l'homothétie de rapport λ .

Si S égale $S(\Pi, \sigma)$, la donnée de Kato $(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$ associée à f_λ est donnée par le diagramme cartésien

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \Pi_\lambda & & \Pi \\ B \times B_\varepsilon & \xrightarrow{H_\lambda} & B_\varepsilon \\ \Pi_\lambda \downarrow & & \downarrow \Pi \\ B & \xrightarrow{h_\lambda} & B_\varepsilon \end{array}$$

avec

$$\sigma_\lambda := H_\lambda^{-1} \sigma h_\lambda$$

qui est bien définie puisque H_λ est biholomorphe sur son image et F est contractante d'après le lemme 2.5.

Le lemme suivant montre qu'on peut étendre la famille précédente de C.S.G.

Lemme 2.6

i) Notons par $p \geq 0$ a_1, \dots, a_p les points modifiés de B . Alors, avec les notations précédentes : la famille holomorphe $(f_\lambda)_\lambda$ de C.S.G. centrées de S se prolonge à toute la couronne

$$\text{Max}_{1 \leq i \leq p} \{\|a_i\|\} < |\lambda| < 1$$

et il existe une unique immersion

$$\phi : \{z \mid \text{Max}_{1 \leq i \leq p} \{\|a_i\|\} < \|z\| < 1\} \rightarrow S$$

pour laquelle

$$f_\lambda = \phi \circ h_\lambda$$

De plus la donnée de Kato centrée associée à f_λ est :

$$K(f_\lambda) = (\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$$

ii) Soit $0 < k < 1$ une constante pour laquelle

$$\|F(z)\| \leq k \|z\|$$

et posons

$$F_\lambda := \Pi_\lambda \sigma_\lambda$$

Alors :

$$F_\lambda = h_\lambda^{-1} \circ F \circ h_\lambda \quad \text{et} \quad \|F_\lambda(z)\| \leq k \|z\|.$$

□ Démonstration.

1) Commençons par la seconde assertion :

Pour tout λ tel que $0 < |\lambda| < 1$, $(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$ peut être défini et c'est une donnée de Kato centrée puisque

$$F_\lambda(0) = \Pi_\lambda \sigma_\lambda(0) = \Pi_\lambda H_\lambda^{-1} \sigma h_\lambda(0) = 0$$

De plus,

$$h_\lambda F_\lambda = h_\lambda \Pi_\lambda \sigma_\lambda = \Pi H_\lambda \sigma_\lambda = \Pi \sigma h_\lambda = F h_\lambda, \text{ ce qui donne l'inégalité.}$$

2) On va d'abord montrer que la famille $(f_\lambda)_\lambda$ se prolonge à la couronne :

$$\text{Max} \{ \|a_1\|, \dots, \|a_p\|, k \} < |\lambda| < 1.$$

En effet, $h_\lambda(\Sigma)$ ne rencontre aucune courbe compacte, et vu la condition imposée

$$\Pi^{-1} h_\lambda(\Sigma) \subset \text{Ann}(\Pi, \sigma)$$

donc

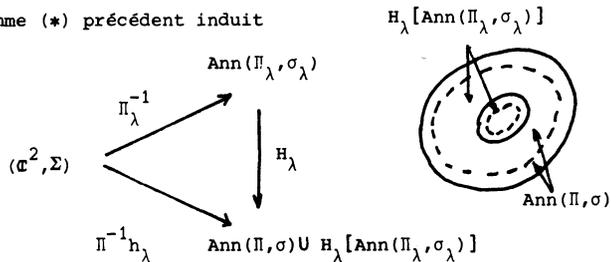
$$f_\lambda := \Pi^{-1} h_\lambda : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

est une C.S.G de $S(\Pi, \sigma)$, et

$$\phi = \Pi^{-1} : \{ z \mid \text{Max} \{ \|a_1\|, \dots, \|a_p\|, k \} < \|z\| < 1 \} \rightarrow S$$

est l'immersion qui a la propriété voulue.

De plus, le diagramme (*) précédent induit



STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

où H_λ est biholomorphe sur son image. Comme, par ailleurs

$$H_\lambda \sigma_\lambda = \sigma h \lambda \quad \text{et}$$

$\sigma \Pi$ est biholomorphe de $\overline{\text{Ann}(\Pi, \sigma)} \setminus H_\lambda [\text{Ann}(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)]$

sur $\overline{H_\lambda [\text{Ann}(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)]} \setminus \text{Ann}(\Pi, \sigma)$

on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & S(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda) \\ & \nearrow f(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda) & \downarrow \alpha_\lambda \\ (\mathbb{C}^2, \Sigma) & & S(\Pi, \sigma) \\ & \searrow f_\lambda & \end{array}$$

où α_λ est un isomorphisme, ce qui d'après la proposition 1.7 montre

$$K(f_\lambda) = (\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$$

3) Soit $\delta > 0$ qu'on introduit au cas où $p = 0$ et N le plus petit entier vérifiant

$$k^N \leq \text{Max} \{ \|a_1\|, \dots, \|a_p\|, \delta \}$$

Pour obtenir i) il suffit de montrer par récurrence sur $1 \leq n \leq N$ que l'assertion est vraie pour tout λ vérifiant

$$M_n := \text{Max} \{ \|a_1\|, \dots, \|a_p\|, k^n \} < |\lambda| < 1$$

Or, pour $n=1$ cela a déjà été vérifié; si l'assertion est vraie pour un entier $1 \leq n \leq N-1$, et μ vérifie $M_{n+1} < |\mu| < 1$, il suffit d'écrire

$$\mu = \lambda_\circ \lambda$$

avec $M_1 < |\lambda| < 1$ et $M_n < |\lambda| < 1$ et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $S(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$ qui est isomorphe à $S(\Pi, \sigma)$, et où les points modifiés sont

$$b_1 = \frac{a_1}{\lambda}, \dots, b_p = \frac{a_p}{\lambda}, \text{ ce qui est possible puisque}$$

$$\text{Max} \{ \|b_1\|, \dots, \|b_p\|, k \} < |\lambda_\circ| < 1 \quad \square$$

Lemme 2.7

Soit (Π, σ) une donnée de Kato centrée. On suppose qu'il existe des points a_1, \dots, a_p dans $B \setminus \{0\}$ tels que $\Pi^{-1}(a_1), \dots, \Pi^{-1}(a_p)$ soient des courbes compactes. Alors : il existe une donnée de Kato centrée (Π', σ') telle que

$$\Pi' : B^{\Pi'} \setminus \Pi'^{-1}(0) \rightarrow B \setminus \{0\}$$

soit biholomorphe, et pour laquelle existe une modification.

$$\rho : s(\Pi, \sigma) \rightarrow s(\Pi', \sigma')$$

□ *Démonstration.*

On fait une démonstration par récurrence sur p , le cas $p=0$ étant trivial. On peut supposer que $\|a_p\| \geq \|a_i\|$ pour $i=1, \dots, p-1$.

Soit λ vérifiant

$$k |\lambda| < \|a_p\| < |\lambda| < 1$$

où $0 < k < 1$ est tel que $\|F(z)\| \leq k \|z\|$ sur la boule. Soit $(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$ la donnée de Kato obtenue par le lemme 2.6. Π_λ modifie le point $b_p = \frac{a_p}{\lambda}$ et comme $b_p \notin \overline{F(B)}$,

$$\Pi_\lambda^{-1}(b_p) \subset \text{Ann}(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$$

D'après le lemme 2.3 il existe une donnée de Kato centrée (Π'', σ'') où Π'' ne modifie que $p-1$ points de $B \setminus \{0\}$ et $S(\Pi_\lambda, \sigma_\lambda)$ est obtenue par modification de $S(\Pi'', \sigma'')$.

On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

Exemple 2.8 : La situation où deux courbes compactes $\Pi^{-1}(0)$ et $\Pi^{-1}(a)$, $a \neq 0$ de B , rencontrent toutes deux $\sigma(B)$ peut effectivement se produire. Par exemple, soit

$$\Pi : B^\Pi \rightarrow B$$

obtenu en éclatant les points 0 et $a = (0, \frac{1}{4})$ de B .

Recouvrons B^Π par les cartes dont les ouverts sont

$$\{(u, v) \mid |v|^2(1 + |u|^2) + |v - \frac{1}{4}|^2 < 1\}, \{(u', v') \mid |v'|^2(|u'v' - \frac{1}{4}|^2 + |u'|^2) < 1\}$$

et $\{(U', V') \mid |V'|^2 + |U'V' + \frac{1}{4}|^2 < 1\}$

recollés par les conditions :

$$\begin{aligned} u &= 1/u', \text{ sur } u \neq 0, u' \neq 0 & u &= 1/U' (U'V' + \frac{1}{4}) \text{ pour } U' \neq 0, U'V' \neq -\frac{1}{4} \\ v &= u'v' & v &= U'V' + \frac{1}{4} \quad uv \neq 0 \end{aligned}$$

et sur lesquels Π s'écrit

$$\Pi(u, v) = (uv(v - \frac{1}{4}), v), \Pi(u', v') = ((u'v' - \frac{1}{4})v', u'v'), \Pi(U', V') = (V', U'V' + \frac{1}{4})$$

Par conséquent $\Pi^{-1}(0) = \{v=0\} \cup \{v'=0\}$

$$\Pi^{-1}(a) = \{v = \frac{1}{4}\} \cup \{u'v' = \frac{1}{4}\} \cup \{v' = 0\}$$

En choisissant

$$\begin{aligned} \sigma : B &\rightarrow B^\Pi \\ z &\rightarrow (u, v) = (\frac{z_1}{2}, \frac{z_2}{2}) \end{aligned}$$

$\sigma(B)$ rencontre aussi bien $\Pi^{-1}(0)$ que $\Pi^{-1}(a)$.

2.9. Données de Kato minimales.

Définition 2.10. Soit (Π, σ) une donnée de Kato centrée. On dira que (Π, σ) est minimale, si

- i) B^Π ne contient qu'une seule courbe exceptionnelle de première espèce C ,
- ii) $\sigma(0) \in C$.

Remarques 2.11 Si Π est une succession de n éclatements

$$B^\Pi = B_n \xrightarrow{\Pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\Pi_{n-1}} \dots B_1 \xrightarrow{\Pi_1} B$$

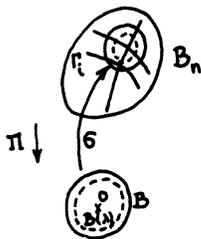
en des points $0_k \in B_k$ et $C_k := \Pi_k^{-1}(0_{k-1})$, la condition précédente signifie que :

- i) $0_k \in C_k$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$
- ii) $\sigma(0) \in C_n$.

Lemme 2.12 Soit (Π, σ) une donnée de Kato centrée telle que 0 soit le seul point modifié par Π . Si (Π, σ) n'est pas minimale, il existe une donnée de Kato minimale (Π', σ') pour laquelle existe une modification non triviale

$$\rho : S(\Pi, \sigma) \rightarrow S(\Pi', \sigma')$$

□ Démonstration : Notons $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ les courbes irréductibles de B^Π auxquelles $\sigma(0)$ n'appartient pas. Soit $\lambda > 0$ assez petit pour que l'image par σ de la boule fermée $B(\lambda)$ centrée en 0 et de rayon λ , ne rencontre pas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$.



D'après le lemme 2.6 l'homothétie h_λ de rapport λ induit une C.S.G. f_λ qui ne passe pas par $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$. En appliquant alors le lemme 2.3 on contracte toutes les courbes exceptionnelles de première espèce, ce qui permet d'obtenir la donnée de Kato minimale cherchée □

Théorème 2.13

Soit S une surface compacte contenant une C.S.G.

Alors : 1) il existe une donnée de Kato minimale (Π, σ) telle que S s'obtienne par un nombre fini d'éclatements de $S(\Pi, \sigma)$.

2) S est minimale si et seulement si toute donnée de Kato (Π, σ) centrée de S est minimale.

□ Démonstration :

- 1) D'après la Proposition 1.7 et le lemme 1.5, S est isomorphe à une surface $S(\Pi', \sigma')$ où (Π', σ') est centrée. On conclut par les lemmes

2.7 et 2.12.

- 2) La condition est nécessaire d'après le lemme 2.12. La condition est suffisante puisque le revêtement universel de $S(\Pi, \sigma)$ ne contient aucune courbe exceptionnelle de première espèce. \square

Proposition 2.14 (Kato [12])

Soit (Π, σ) une donnée de Kato et A la réunion des courbes compactes de B^Π . Si $\sigma(0) \not\subset A$, alors $S(\Pi, \sigma)$ est obtenue à partir d'une surface de Hopf primaire par un nombre fini d'éclatements.

\square Démonstration :

On peut supposer (Π, σ) centrée. En prenant $\lambda > 0$ assez petit, l'image de la boule fermée de rayon λ par σ ne rencontre pas A . On conclut à nouveau par les lemmes 2.7 et 2.12, et par le fait qu'un automorphisme contractant de $(\mathbb{C}^2, 0)$ définit une surface de Hopf primaire. \square

Remarque 2.15.

Si (Π, σ) est une donnée de Kato minimale, 0 est le seul point modifié. Le lemme 2.6 i) signifie alors que $S(\Pi, \sigma)$ ne dépend que du germe en 0 de $F = \Pi\sigma$. On en déduit qu'à tout germe

$$F = (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

de la forme $F = \Pi\sigma$ on peut associer une surface de Kato $S = S(F)$ qui est canoniquement munie d'un germe d'immersion

$$\phi : (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, 0) \rightarrow S$$

induit par Π^{-1} .

§ 3. - Surfaces de Kato.

Définition 3.1. On appelle surface de Kato une surface analytique complexe minimale S , contenant une C.S.G. et dont le deuxième nombre de Betti $b_2(S)$ vérifie

$$b_2(S) \geq 1.$$

D'après le § 2.9, les surfaces compactes minimales contenant une C.S.G. se répartissent en deux groupes :

- les surfaces de Hopf primaires, pour lesquelles $b_2 = 0$.
- les surfaces de Kato, pour lesquelles $b_2 \geq 1$.

Vu le lemme 1.10 $b_2(S)$ est précisément le nombre d'éclatements composant toute donnée de Kato (Π, σ) de S . De plus en appliquant le lemme 2.6, on pourra toujours supposer que $\sigma(\bar{B})$ ne rencontre que les courbes passant par $\sigma(0)$.

3.2 Effondrement du revêtement universel sur une courbe.

Définition 3.3 Soit S une surface de Kato, $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ son revêtement universel et C une courbe compacte de \tilde{S} . On appelle effondrement de \tilde{S} sur la courbe C , la donnée de (\hat{S}_C, p_C) où :

- 1) \hat{S}_C est une surface n'ayant qu'un bout, noté ∞ .
- 2) $p_C : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}_C$ est une application analytique envoyant isomorphiquement un voisinage du bout ∞ dans \tilde{S} sur un voisinage du bout ∞ dans \hat{S}_C .
- 3) $\hat{C} := p_C(C)$ est une courbe exceptionnelle de première espèce de \hat{S}_C .

On va montrer la

Proposition 3.4.

- 1) Pour toute courbe compacte C de \tilde{S} , il existe un effondrement (\hat{S}_C, \hat{p}_C) de \tilde{S} sur C , unique à isomorphisme unique près.

De plus, il existe $\hat{o}_C \in \hat{C} := p_C(C)$ tel que

$$p_C : \tilde{S} \setminus p_C^{-1}(\hat{o}_C) \rightarrow \hat{S}_C \setminus \{\hat{o}_C\}$$

soit un isomorphisme.

- 2) Pour deux courbes compactes C et C' de \tilde{S} la relation $C \leq C'$ si et seulement si il existe une application

$$\Pi_{C'}^C : \hat{S}_{C'} \rightarrow \hat{S}_C$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ p_{C'} \swarrow & & \searrow p_C \\ \hat{S}_{C'} & \xrightarrow{\quad} & \hat{S}_C \\ & \Pi_{C'}^C & \end{array}$$

est une relation d'ordre total sur l'ensemble $\mathcal{C}(\tilde{S})$ des courbes compactes de S . De plus l'application $\Pi_{C'}^C$ est unique.

- 3) Si $C \leq C'$, il existe des courbes de \tilde{S} , uniquement déterminées par C et C' ,

$$C_0 = C, C_1, C_2, \dots, C_r, \dots, C_{p-1}, C_p = C'$$

telles que $\Pi_{C'}^C$ se factorise en

$$\hat{S}_{C'} \xrightarrow{\Pi_P} \hat{S}_{C_{p-1}} \xrightarrow{\Pi_{P^{-1}}} \dots \rightarrow \hat{S}_{C_r} \xrightarrow{\Pi_r} \dots \rightarrow \hat{S}_{C_1} \xrightarrow{\Pi_1} \hat{S}_C,$$

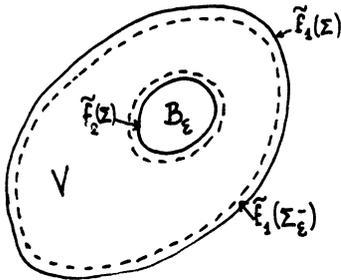
où Π_r est l'éclatement d'un point $\hat{o}_{C_{r-1}} \in \hat{C}_{r-1}$ et,

$$\hat{c}_r = \pi_r^{-1}(\hat{c}_{r-1}).$$

La démonstration de la proposition 3.4 se déduira des deux lemmes suivants : le lemme 3.5 qui montre que si on "rebouche" par une boule un ouvert de \tilde{S} délimité par deux relèvements d'une C.S.G., on obtient une modification de la boule, et le lemme 3.6 qui permet de contracter une infinité de courbes du revêtement universel \tilde{S} . L'idée de la démonstration de 2) est la suivante : Etant donné une donnée de Kato (Π, σ) de S , on a une relation d'ordre naturelle sur l'ensemble des courbes compactes de B^Π correspondant à l'ordre des éclatements. Il s'agit de prolonger cette relation à l'ensemble $\mathcal{C}(\tilde{S})$ de toutes les courbes compactes de \tilde{S} .

Lemme 3.5.

Soit $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$ deux relèvements d'une même C.S.G. centrée f de S , et soit V le domaine relativement compact de \tilde{S} dont le bord est $\tilde{f}_1(\Sigma) \cup \tilde{f}_2(\Sigma)$. On suppose que $\tilde{f}_2(\Sigma)$ est son bord strictement pseudoconcave.



Notons \hat{V} la variété obtenue en recollant V et B_ϵ par \tilde{f}_2 le long des ouverts

$$\tilde{f}_2(\Sigma_\epsilon^+) \subset V \text{ et } \Sigma_\epsilon^+ \subset B_\epsilon. \text{ Alors :}$$

$\tilde{f}_1^{-1} : \tilde{f}_1(\Sigma_\epsilon^-) \rightarrow B$ se prolonge en une application

$$\hat{\Pi} : \hat{V} \rightarrow B$$

qui se factorise en une suite d'éclatements au-dessus de 0 :

$$\hat{V} = B_k \xrightarrow{\Pi_k} B_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_r \xrightarrow{\Pi_r} \dots \rightarrow B_1 \xrightarrow{\Pi_1} B$$

où pour tout $2 \leq r \leq k$, Π_r est l'éclatement d'un point

$$0_{r-1} \in C_{r-1} := \pi_{r-1}^{-1}(0_{r-2})$$

et si $n = b_2(S)$ alors n divise k .

□ Démonstration.

Soit $K(f) = (\Pi, \sigma)$ la donnée de Kato associée à la C.S.G. f . D'après le § 1.9 le revêtement universel \tilde{S} de S peut être recouvert par des ouverts $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où A_0 est isomorphe à $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$, et pour $i \neq 0$ les A_i sont isomorphes à l'anneau $\text{Ann}_\epsilon(\Pi, \sigma)$ ($\epsilon > 0$ petit pour faire les recollements). En changeant au besoin la numérotation, on peut supposer que

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$$V = V_p := \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_i$$

On va montrer que $k = np$ et que $\hat{\Pi}$ a la factorisation voulue par récurrence sur $p \geq 1$.

Cas $p = 1$: $\hat{V} = B^{\Pi}$ et le lemme résulte immédiatement du fait que S étant minimale, (Π, σ) l'est aussi d'après le théorème 2.13.

Soit $p \geq 2$: D'après l'hypothèse de récurrence \tilde{f}_1^{-1} se prolonge à $\bigcup_{1 \leq i \leq p-1} A_i$, puis

à tout \hat{V} d'après le cas $p = 1$ et puisque toute application analytique définie sur un voisinage du bord d'une boule modifiée B' , à valeurs dans B , se prolonge à tout B' .

Par ailleurs, d'après le cas $p = 1$, \hat{V}_p est obtenue par $n = b_2(S)$ éclatements du type voulu de la variété \hat{V}_{p-1} au dessus d'un point noté $\hat{O}_{n(p-1)}$. D'après l'hypothèse de récurrence \hat{V}_{p-1} n'a qu'une seule courbe exceptionnelle de première espèce, $\hat{O}_{n(p-1)}$ lui appartient vu la définition 2.10 et donc $\hat{\Pi}$ est composé de np éclatements du type voulu. \square

Lemme 3.6.

Soit $\tilde{f}: (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$ un relèvement d'une C.S.G. centrée f de S , et U la composante strictement pseudoconvexe de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$. Alors le germe d'isomorphisme

$$\tilde{f}^{-1}: (\tilde{S}, \partial U) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \Sigma)$$

se prolonge en une application analytique

$$\tilde{\Pi}: \bar{U} \rightarrow \bar{B}$$

surjective et inversible en dehors de l'origine.

□ Démonstration :

a) On a $U = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ en choisissant bien la numérotation des anneaux A_i .

D'après le lemme 3.5, f^{-1} se prolonge à $V_p := \bigcup_{0 \leq i \leq p} A_i$ pour tout p , ce qui donne l'application

$$\tilde{\Pi}: \bar{U} \rightarrow \bar{B}$$

b) Notons :

* $\tilde{g}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ l'automorphisme de \tilde{S} qui est contractant en $\underline{0}$ (Cf. §1.12) et par lequel $\tilde{S}/\{\tilde{g}^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ est isomorphe à S .

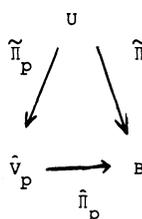
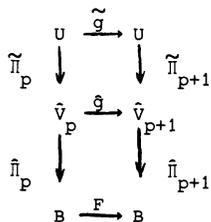
* $\tilde{\Pi}_p: U \rightarrow \hat{V}_p$ le prolongement de l'identité $\text{id}: A_0 \rightarrow A_0$ grâce à a) où \hat{V}_p est la variété "rebouchée" définie au lemme 3.5.

* $\hat{g}: \hat{V}_p \rightarrow \hat{V}_{p+1}$ le prolongement de $\tilde{g}: V_p \rightarrow V_{p+1}$.

* $\hat{\Pi}_p: \hat{V}_p \rightarrow B$ l'application donnée par le lemme 3.5.

* $F = \Pi\sigma$, où (Π, σ) est la donnée de Kato associée à f .

Dans ces conditions les diagrammes suivants sont commutatifs pour tout $p \geq 0$.



Il suffit pour le voir, de restreindre les diagrammes à $\tilde{f}(\Sigma_\varepsilon^-)$

c) Remarquons d'abord que si $u \in \tilde{g}^k(A_0)$, alors d'après les diagrammes précédents, $\tilde{\Pi}(u) \in F^k(B)$.

Soit alors $z \in B \setminus \{0\}$ et $p = \sup\{k \mid z \in F^k(B)\}$;

p existe d'après le lemme 2.5. D'après la remarque que nous venons de faire il s'agit de trouver $u \in \hat{V}_p$ unique pour lequel $\tilde{\Pi}(u) = z$, ou encore, d'après les diagrammes précédents $v \in \hat{V}_p$ unique tel que $\hat{\Pi}_p(v) = z \dots$ mais ceci résulte du lemme 3.5. \square

\square Démonstration de la proposition 3.4.

a) Existence.

Soit f une C.S.G quelconque de S ; il existe d'une part un relèvement

$$\tilde{f}_1 : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$$

de f tel que C soit contenu dans la composante U strictement pseudoconvexe de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}_1(\Sigma)$, et d'autre part il existe un relèvement

$$\tilde{f}_2 : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$$

de f tel que C soit contenu dans la composante W strictement pseudoconcave de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}_2(\Sigma)$.

Le germe d'isomorphisme

$$\tilde{f}_2 : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow (\tilde{S}, \partial W)$$

permet alors de recoller analytiquement W avec B_ε , ce qui donne une variété \hat{S} munie d'après le lemme 3.6, d'une application

$$p : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}$$

qui vérifie 1) et 2) de la Définition 3.3.

Comme, d'après le lemme 3.5 la variété \hat{V} qui se déduit de

$$V = U \cap W$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

est une modification de la boule et

$$\hat{V} \subset \hat{S}$$

il suffit de contracter un nombre fini de courbes de \hat{S} uniquement déterminées pour obtenir la variété \hat{S}_C cherchée.

On va maintenant construire la relation d'ordre sur $\mathcal{E}(\tilde{S})$ de laquelle se déduira le reste de la proposition. Nous allons la construire en plusieurs étapes:

- b) Soit $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$ un relèvement de f , une C.S.G quelconque de S , et W (resp. U) la composante strictement pseudoconcave (resp. pseudoconvexe) de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$. On peut choisir f de sorte que

$$p_C : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}_C$$

soit un isomorphisme sur W . Posons

$$\hat{V}_C := p_C(U)$$

\hat{V}_C est un domaine strictement pseudoconvexe de \hat{S}_C et par un raisonnement analogue à celui de la proposition 1.7 on montre que le germe d'isomorphisme

$$\tilde{f}^{-1} p_C^{-1} : (\hat{S}_C, \partial \hat{V}_C) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \Sigma)$$

se prolonge en une application

$$\hat{\Pi}_C : \hat{V}_C \rightarrow B$$

qui : i) fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ p_C \swarrow & & \searrow \tilde{\Pi} \\ \hat{V}_C & \xrightarrow{\hat{\Pi}_C} & B \end{array}$$

où $\tilde{\Pi}$ est le prolongement de $\tilde{f}^{-1} : (\tilde{S}, \partial U) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \Sigma)$ donné par le lemme 3.6.

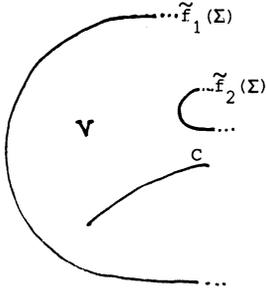
ii) fait de B la réduction de Remmert de \hat{V}_C .

Par conséquent $\hat{\Pi}_C$ est composé d'un nombre fini d'éclatements au-dessus de 0 .

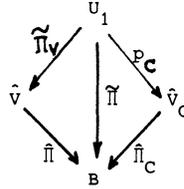
- c) Soit C une courbe compacte fixée de \tilde{S} et f une C.S.G. de S .

On choisit : - un relèvement \tilde{f}_1 de f de sorte que C soit contenue dans la composante strictement pseudoconvexe U_1 de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}_1(\Sigma)$, et p_C soit un isomorphisme sur le complémentaire de U_1 .

- un relèvement \tilde{f}_2 de f de sorte que C soit contenu dans la composante strictement pseudoconcave W_2 de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}_2(\Sigma)$.



On note $V := U_1 \cap W_2$. D'après les lemmes 3.5, 3.6 et b), on a le diagramme commutatif :



Soit

$$\hat{V} = B_p \xrightarrow{\Pi_p} B_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow B_1 \xrightarrow{\Pi_1} B \quad \bullet$$

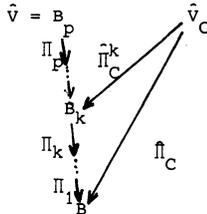
la factorisation de $\hat{\Pi}$ donnée par le lemme 3.5 et $q < p$ tel que $C_q = \tilde{\Pi}_V(C)$.

On va montrer que \hat{V}_C est isomorphe à B_q :

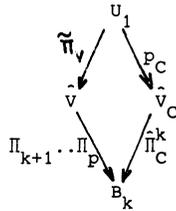
On montre tout d'abord par récurrence sur k , $1 \leq k \leq q$ qu'il existe une modification

$$\Pi_C^k : \hat{V}_C \rightarrow B_k$$

qui fait commuter le diagramme



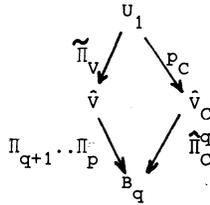
Pour $k=1$, c'est évident; si le résultat est établi pour un entier $1 \leq k \leq q-1$ la commutativité du diagramme



montre d'une part que les éclatements $\Pi_{k+1} \dots \Pi_p$ et $\hat{\Pi}_C^k$ ont lieu au-dessus d'un même point, et d'autre part que $\hat{\Pi}_C^k$ n'est pas l'éclatement trivial. On en déduit la factorisation à travers B_{k+1} .

Maintenant, vu la commutativité du diagramme

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO



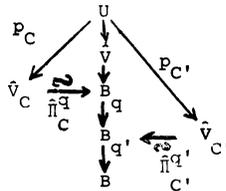
et puisque

$$p_C(C) \cdot p_C(C) = -1$$

$\hat{\Pi}_C^q$ est un isomorphisme.

- d) Soient C et C' deux courbes compactes de \tilde{S} . On choisit des relèvements \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 de f de sorte que C et C' soient contenus dans V . D'après c) il existe un entier $q < p$ (resp $q' < p$) tel que \hat{V}_C (resp. $\hat{V}_{C'}$) soit isomorphe à B_q (resp. $B_{q'}$).

Supposons $q \geq q'$; puisque on a le diagramme commutatif :



$$\hat{\Pi}_C^{C'} := p_{C'} \circ p_C^{-1} : \hat{S}_C \setminus \{\hat{O}_C\} \rightarrow \hat{S}_{C'}$$

se prolonge en une modification

$$\hat{\Pi}_C^{C'} : \hat{S}_C \rightarrow \hat{S}_{C'}$$

Comme elle ne dépend pas du choix des relèvements \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 on obtient la relation d'ordre cherchée. Dans le cas où $C = C'$ on obtient la première assertion; enfin l'unicité et le diagramme précédent donnent le théorème. \square

Corollaire 3.7 Soit $\mathcal{C}(\tilde{S})$ l'ensemble des courbes compactes de \tilde{S} .

Pour tout $C \in \mathcal{C}(\tilde{S})$ il existe C' et $C'' \in \mathcal{C}(\tilde{S})$ uniques tels que :

- i) $\hat{\Pi}_C^C : \hat{S}_C \rightarrow \hat{S}_C$ existe et soit l'éclatement de \hat{S}_C en \hat{O}_C .
- ii) $\hat{\Pi}_C^{C''} : \hat{S}_C \rightarrow \hat{S}_{C''}$ existe et soit la contraction de \hat{C} sur $\hat{O}_{C''}$.

En posant $C' = C+1$, on fait de $\mathcal{C}(\tilde{S})$ un espace principal homogène sous \mathbb{Z} .

Lemme et Définition 3.8.

- 1) Soit V une surface et $O \in V$. On appellera boule centrée en O l'image

par une carte $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (V, 0)$ d'une boule centrée en $0 \in \mathbb{C}^2$.

2) Soit $F : (V, 0) \rightarrow (V, 0)$ un germe d'application et U un voisinage ouvert de 0 sur lequel F soit défini. On a équivalence des propriétés suivantes :

- i) Il existe une boule $B \subset U$ centrée en 0 telle que $F(B) \subset B$.
- ii) Toute valeur propre λ de $DF(0)$ vérifie $|\lambda| < 1$.

Si l'une des conditions précédentes est vérifiée, on dira que F est contractant.

□ Démonstration : i) \Rightarrow ii) d'après le lemme 2.5; la réciproque est évidente. □

Proposition 3.9

Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. Pour toute courbe C du revêtement universel \tilde{S} de S , il existe un unique isomorphisme

$$\sigma_C^{C+n} : \hat{S}_C \rightarrow \hat{S}_{C+n}$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{S} \\ p_C \downarrow & & \downarrow p_{C+n} \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{\sigma_C^{C+n}} & \hat{S}_{C+n} \end{array}$$

De plus, pour tout C , $\sigma_C^{C+n}(\hat{0}_C) = \hat{0}_{C+n}$,

$F_C := \prod_{C+n}^C \sigma_C^{C+n} : (\hat{S}_C, \hat{0}_C) \rightarrow (\hat{S}_{C+n}, \hat{0}_{C+n})$ est contractant et les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}_{C+1} & \xrightarrow{\sigma_{C+1}^{C+n+1}} & \hat{S}_{C+n+1} \\ \prod_{C+1}^C \downarrow & & \downarrow \prod_{C+n+1}^{C+n} \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{\sigma_C^{C+n}} & \hat{S}_{C+n} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{S} \\ p_C \downarrow & & \downarrow p_C \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{F_C} & \hat{S}_C \end{array}$$

sont commutatifs.

□ Démonstration :

L'unicité de σ_C^{C+n} est assurée par le premier diagramme.

Pour prouver l'existence, il suffit de considérer la construction de \hat{S}_C à l'aide d'anneaux : si $\tilde{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, il existe un indice p tel que $C \subset \bigcup_{i < p} A_i$.

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

On a alors $C+n \subset \cup_{i=1}^p A_i$ et
 $i \leq p+1$

$$\tilde{g} : \cup_{i=1}^p A_i \rightarrow \cup_{i=1}^{p+1} A_i$$

se prolonge en

$$\sigma_{C'}^{C'+n} : \hat{S}_{C'} \rightarrow \hat{S}_{C'+n}$$

où $C' \geq C$ et $\sigma_{C'}^{C'+n}(\hat{O}_{C'}) = \hat{O}_{C'+n}$ puisque $\tilde{g}(A_i) = A_{i+1}$; les contractions de C' et $C'+n$ permettent de définir $\sigma_{C'-1}^{C'+n-1}$

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{C'}^{C'+n} & \\ & \hat{S}_{C'} \longrightarrow \hat{S}_{C'+n} & \\ \Pi_{C'}^{C'-n} \downarrow & & \downarrow \Pi_{C'+n}^{C'+n-1} \\ & \sigma_{C'-1}^{C'+n-1} & \\ & \hat{S}_{C'-1} \longrightarrow \hat{S}_{C'-1+n} & \end{array}$$

Au bout d'un nombre fini de contractions, on a l'application voulue.

Montrons maintenant que $F_C : (\hat{S}_C, \hat{O}_C) \rightarrow (\hat{S}_C, \hat{O}_C)$ est contractant :

Soit pour cela une boule B centrée en \hat{O}_C . Comme $p_C^{-1}(B)$ est un voisinage de \underline{O} relativement compact dans $\tilde{S} \cup \{\underline{O}\}$, d'après le lemme 1.13

$$\tilde{g}(p_C^{-1}(B)) \subset \subset p_C^{-1}(B)$$

et donc

$$p_C \tilde{g}(p_C^{-1}(B)) \subset \subset B$$

Par ailleurs, d'après le premier diagramme, sur $\hat{S}_C \setminus \{\hat{O}_C\}$

$$p_C \tilde{g} p_C^{-1} = \Pi_{C+n}^C p_{C+n} \tilde{g} p_C^{-1} = \Pi_{C+n}^C \sigma_C^{C+n}$$

Par conséquent

$$F_C(B) \subset \subset B$$

et F_C est contractante.

Le dernier diagramme est commutatif d'après les Propositions 3.4.2) et 3.9. \square

Les propositions 3.4 et 3.9 donnent immédiatement :

Proposition 3.10

1) $\{\hat{S}_C, \Pi_C^{C'}\}$ forme un système projectif et les applications $\{p_C\}_{C \in \mathcal{C}(\tilde{S})}$ et

$\{\sigma_C^{C+n}\}_{C \in \mathcal{E}(\tilde{S})}$ induisent des applications continues.

$$p : \tilde{S} \rightarrow \lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C \quad \text{avec} \quad p(z) = \{p_C(z)\}_{C \in \mathcal{E}(\tilde{S})}$$

$$g : \lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C \rightarrow \lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C \quad g(\{z_C\}) = \{\sigma_C^{C+n}(z_C)\}_C$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{S} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C & \xrightarrow{\tilde{g}} & \lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C \end{array}$$

2) \tilde{S} est homéomorphe à l'ouvert $p(\tilde{S})$ et son complémentaire dans $\lim_{\leftarrow C} \hat{S}_C$ est la famille cohérente

$$\underline{0} = \{\hat{0}_C\}_C$$

3.11 Germes d'applications associés à une surface de Kato.

Définition 3.12 Soit $F : (V, O) \rightarrow (V, O)$ et $F' : (V', O') \rightarrow (V', O')$ deux germes d'applications. On dit que F et F' sont isomorphes s'il existe un germe d'isomorphisme

$$\varphi : (V, O) \rightarrow (V', O')$$

tel que

$$\begin{array}{ccc} (V, O) & \xrightarrow{F} & (V, O) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (V', O') & \xrightarrow{F'} & (V', O') \end{array}$$

soit commutatif.

Définition 3.13 Soit S une surface de Kato avec $b_2(S) = n$. On appellera germes d'applications associés à S la famille de germes $\{F_C\}_{C \in \mathcal{E}(\tilde{S})}$

où

$$F_C := \prod_{C+n}^C \sigma_C^{C+n}$$

Proposition 3.14 Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. Pour tout $C \in \mathcal{E}(\tilde{S})$ les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}_C & \xrightarrow{F_C} & \hat{S}_C \\ \sigma_C^{C+n} \downarrow & & \downarrow \sigma_C^{C+n} \\ \hat{S}_{C+n} & \xrightarrow{F_{C+n}} & \hat{S}_{C+n} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \hat{S}_{C+1} & \xrightarrow{F_{C+1}} & \hat{S}_{C+1} \\ \prod_{C+1}^C \downarrow & & \downarrow \prod_{C+1}^C \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{F_C} & \hat{S}_C \end{array}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

En particulier F_C et F_{C+n} sont des germes isomorphes.

□ *Démonstration* :

Ces deux diagrammes résultent de l'utilisation itérée du second diagramme de la Proposition 3.9 puisque $\prod_{C+n}^C = \prod_{C+1}^C \prod_{C+2}^{C+1} \dots \prod_{C+n}^{C+n-1}$. □

Remarque 3.15 Si on itère n fois la seconde relation de la proposition 3.14 on récupère la première : on a en effet

$$\prod_{C+n}^C F_{C+n} = F_C \prod_{C+n}^C$$

c'est-à-dire en simplifiant à gauche par \prod_{C+n}^C

$$F_{C+n} = \sigma_C^{C+n} \prod_{C+n}^C ,$$

puis en composant à droite par σ_C^{C+n} on obtient

$$F_{C+n} \sigma_C^{C+n} = \sigma_C^{C+n} F_C .$$

A une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n$ on vient d'associer des germes $\{F_C\}_C \in \mathcal{E}(\tilde{S})$ tels que F_C et F_{C+n} soient isomorphes. Si S et S' sont deux surfaces isomorphes il existe par functorialité de toutes les constructions un isomorphisme d'ensembles ordonnés

$$\begin{aligned} I : \mathcal{E}(\tilde{S}) &\rightarrow \mathcal{E}(\tilde{S}') \\ C &\rightarrow I(C) = C' \end{aligned}$$

tel que F_C et $F_{C'}$ soient isomorphes.

D'après la proposition 3.9 ces germes sont contractants.

Réciproquement on a :

Proposition 3.16 Soit

$$F : (V, O) \rightarrow (V, O)$$

un germe contractant qui se factorise en

$$F = \Pi \sigma$$

où : $\Pi : V_n \rightarrow V$ est une succession de n éclatements au-dessus de O avec une seule courbe exceptionnelle de première espèce Γ .

$\sigma : (V, O) \rightarrow (V_n, \sigma(O))$ est un germe d'isomorphisme avec $\sigma(O) \in \Gamma$,

Alors : il existe : - une surface de Kato S telle que $b_2(S) = n$, unique à isomorphisme près.

- une courbe C de $\mathcal{E}(\tilde{S})$,

telles que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, F_{C+kn} soit isomorphe à F .

Remarque 3.17 On n'a pas, en général, unicité du germe d'isomorphisme

$\phi_k F_{C+kn} = F \phi_k$. Cf II. Exemple 1.22 .

□ Démonstration :

a) Existence : Soit $B \subset V$ une boule centrée en $0 \in V$ telle que

$$F(B) \subset \subset B$$

Par le procédé décrit au §1.2, on construit une surface $S = S(F)$ contenant une C.S.G., qui est minimale d'après le thm. 2.13 et ne dépend pas de B d'après la Remarque 2.15.

Notons C_1, \dots, C_n les courbes rationnelles de V_n numérotées dans l'ordre des éclatements et recouvrons \tilde{S} par les anneaux A_i , $i \in \mathbb{Z}$ associés à (Π, σ) ; soit C l'une des courbes de \tilde{S} induites par C_n . Si i_0 est le plus petit indice pour lequel

$$C \subset \bigcup_{i > i_0} A_i$$

\hat{S}_C (resp. \hat{S}_{C+n}) est obtenu en recollant holomorphiquement $\bigcup_{i < i_0} A_i$ avec un voisinage de \bar{B} (resp. $\bar{\Pi}^1(B)$) par σ (resp. $\sigma\Pi$) le long de voisinages isomorphes de leur bord.

Par construction, on a le diagramme doublement commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\Pi}^1(B) & \xleftarrow{\varphi_1} \hat{S}_{C+n} \\ \sigma \uparrow & \Pi \downarrow & \Pi_{C+n}^C \downarrow \\ & B & \xrightarrow{\varphi_0} \hat{S}_C \end{array} \quad \sigma_C^{C+n}$$

où φ_0 et φ_1 sont les inclusions canoniques. On en déduit que $\varphi_0^F = F_C \varphi_0$. Comme d'après la proposition 3.14 F_C et F_{C+kn} sont isomorphes, on a le résultat.

b) Unicité : des deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} (V, 0) & \xrightarrow{F} & (V, 0) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (\hat{S}_C, \hat{O}_C) & \xrightarrow{F_C} & (\hat{S}_C, \hat{O}_C) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (V, 0) & \xrightarrow{F} & (V, 0) \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) & \xrightarrow{F'_C} & (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) \end{array}$$

on déduit, en posant $\Psi := \varphi' \varphi^{-1}$, la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} (\hat{S}_C, \hat{O}_C) & \xrightarrow{F_C} & (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) & \xrightarrow{F'_C} & (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) \end{array}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

ce qui, par récurrence sur $k \geq 0$, permet de montrer que pour tout $k \geq 0$, Ψ se relève au-dessus d'un voisinage de \hat{O}_C en un isomorphisme Ψ_k qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\hat{S}_{C+k}, \hat{O}_{C+k}) & \xrightarrow{\Psi_k} & (\hat{S}'_{C'+k}, \hat{O}'_{C'+k}) \\ \Pi_{C+k}^C \downarrow & & \downarrow \Pi'_{C'+k} \\ (\hat{S}_C, \hat{O}_C) & \xrightarrow{\Psi} & (\hat{S}'_C, \hat{O}'_C) \end{array}$$

Par conséquent, vu la Proposition 3.10, Ψ induit un germe d'isomorphisme

$$\tilde{\Psi} : (\tilde{S}, \underline{O}) \rightarrow (\tilde{S}', \underline{O}')$$

qui envoie biholomorphiquement un voisinage du bout \underline{O} dans un voisinage de \underline{O}' .

Comme enfin, d'après la Proposition 3.9., le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{S}, P_{C+k}^{-1}(\hat{O}_{C+k})) & \xrightarrow{\tilde{g}} & (\tilde{S}', P_{C+k}^{-1}(\hat{O}'_{C+k})) \\ P_{C+k} \downarrow & & \downarrow P_{C+k} \\ (\hat{S}_{C+k}, \hat{O}_{C+k}) & \xrightarrow{F_{C+k}} & (\hat{S}'_{C+k}, \hat{O}'_{C+k}) \end{array}$$

est lui aussi commutatif, $\tilde{\Psi}$ est compatible avec \tilde{g} , ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{S}, \underline{O}) & \xrightarrow{\tilde{g}} & (\tilde{S}', \underline{O}') \\ \tilde{\Psi} \downarrow & & \downarrow \tilde{\Psi} \\ (\tilde{S}', \underline{O}') & \xrightarrow{\tilde{g}'} & (\tilde{S}'', \underline{O}'') \end{array}$$

Ceci montre que $\tilde{\Psi}$ induit un isomorphisme

$$\Psi : S \rightarrow S' \quad \square$$

Remarque 3.18 En conclusion du § 3.11, la recherche des classes d'isomorphisme de surfaces de Kato est équivalente à celle des classes d'isomorphisme des germes contractants $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de la forme $\Pi \sigma$.

3.19 Configuration des courbes compactes du revêtement universel.

Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. On note $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ son revêtement universel et $\mathcal{C}(\tilde{S})$ l'ensemble des courbes compactes de \tilde{S} . On sait d'après la proposition 1.11 que toutes ces courbes sont rationnelles non singulières et que $\mathcal{C}(\tilde{S})$ est principal homogène sous \mathbb{Z} d'après le corollaire 3.7. On note maintenant

$(C_i)_{i \in \mathcal{E}(S)}$ la famille des courbes compactes de \tilde{S} .

Lemme 3.20

Pour toutes courbes compactes C_i, C_j de \tilde{S}

$$C_i \cdot C_j = C_{i+n} \cdot C_{j+n}$$

□ Démonstration :

$$\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$$

est un automorphisme du revêtement pour lequel

$$\tilde{g}(C_i) = C_{i+n} \quad \text{pour tout } i \in \mathcal{E}(\tilde{S})$$

ce qui donne le résultat. □

D'après le lemme précédent, l'application

$$a : \mathcal{E}(\tilde{S}) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$i \rightarrow a_i = -C_i \cdot C_i$$

est périodique, de période n .

On introduit un nouvel invariant analytique associé à S :

Définition 3.21 On appellera famille des self-intersections des courbes du revêtement universel \tilde{S} d'une surface de Kato S , la famille périodique de période $n = b_2(S)$

$$a(S) := (a_i)_{i \in \mathcal{E}(\tilde{S})} \quad \text{où } a_i = -C_i \cdot C_i$$

et on notera $\sigma_n(S)$ l'entier indépendant de $i \in \mathcal{E}(\tilde{S})$ défini par :

$$\sigma_n(S) := \sum_{j=i}^{i+n-1} a_j$$

On va déterminer quelles sont les familles d'entiers qui sont les familles de self-intersections. Il nous faut auparavant démontrer les lemmes suivants :

Lemme 3.22

Soit $C \in \mathcal{E}(\tilde{S})$. Alors il existe une C.S.G. f et un relèvement

$$\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S}$$

tels que, en notant U la composante connexe strictement pseudoconvexe de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$, C soit la première courbe contenue dans U .

□ Démonstration : Le germe

$$F_{C-1} : (\hat{S}_{C-1}, \hat{O}_{C-1}) \rightarrow (\hat{S}_{C-1}, \hat{O}_{C-1})$$

est contractant, ce qui permet de choisir une boule centrée en \hat{O}_{C-1} qu'on identifie à B telle que

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$$F_{C-1}(B) \subset \subset B .$$

Comme

$$p_{C-1} : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}_{C-1}$$

est inversible en dehors de \hat{O}_{C-1} d'après la Proposition 3.4 ,

$$\tilde{f} := (p_{C-1})^{-1} : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow \tilde{S} \text{ est une coquille sphérique de } \tilde{S} .$$

Comme $\tilde{f}(\Sigma) \cap \tilde{g} \tilde{f}(\Sigma) = \emptyset$, \tilde{f} passe au quotient pour donner une coquille sphérique f de S qui est globale et a la propriété voulue puisque la composante pseudoconvexe de $\tilde{S} \setminus \tilde{f}(\Sigma)$ contient toutes les courbes C' vérifiant $C' \geq C$. \square

Lemme 3.23

Soit (Π, σ) une donnée de Kato minimale, C_1, \dots, C_n ses courbes exceptionnelles numérotées dans l'ordre des éclatements et j_0 le plus petit entier $2 \leq j \leq n-1$ où $n \geq 3$ pour lequel

$$O_j = C_j \cap C_{j-1} .$$

Alors : i) $C_j \cdot C_j = -2$ pour $j \leq j_0 - 2$

$$C_{j_0-1} \cdot C_{j_0-1} \leq -3$$

ii) aucune composante irréductible de la transformée stricte de $\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$ par $\Pi_1 \dots \Pi_{j_0}$:

$$\overline{\Pi_{j_0}^{-1} \dots \Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0)) \setminus \{0\})}$$

ne passe par O_{j_0} .

\square Démonstration :

i) est clair.

ii) $\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$ comporte une ou deux composantes irréductibles passant par l'origine. Il y a au plus une composante, disons Γ , dont la transformée stricte Γ_1 par Π_1

$$\Gamma_1 := \overline{\Pi_1^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})}$$

passe par O_1 . On conclut alors en remarquant que si pour $1 \leq k \leq j_0-1$

$$\Gamma_k := \overline{\Pi_k^{-1} \dots \Pi_1^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})}$$

passe par O_k , Γ_k est transverse à C_k et donc Γ_{k+1} ne passera pas par $C_{k+1} \cap C_k$. \square

Définition 3.24 Soit $a = (a_i)_i \in \mathbb{Z}$ une famille d'entiers, périodique de période $n \geq 1$.

1) Pour $1 \leq p \leq n$, on appelle p -séquence de a un p -uplet

$$(a_i, \dots, a_{i+p-1})$$

2) On dira que la p -séquence (a_i, \dots, a_{i+p-1}) est singulière si

$$(a_i, \dots, a_{i+p-1}) = (p+2, 2, \dots, 2).$$

3) On dira que la p -séquence (a_i, \dots, a_{i+p-1}) est régulière si

$$a_{i+k} = 2 \text{ pour tout } 0 \leq k \leq p-1 \text{ et}$$

(a_i, \dots, a_{i+p-1}) n'a aucun terme commun avec une p -séquence singulière.

Lemme et Définition 3.25

Notons pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'ensemble des familles d'entiers

$a = (a_i)_i \in \mathbb{Z}$, périodiques de période n qui vérifient

i) pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$2 \leq a_i \leq n+2$$

ii) Si $a_i = \ell \geq 4$, on a pour tout $i+1 \leq j \leq i+\ell-3$

$$a_j = 2$$

Alors : Si $a \in A_n$, il existe une unique partition de a en séquences singulières ou régulières; plus précisément, il existe une famille d'entiers relatifs strictement croissante $(i_k)_k \in \mathbb{Z}$ unique au numérotage près telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $s_k = (a_{i_k}, \dots, a_{i_{k+1}-1})$ soit une séquence singulière ou régulière.

□ Démonstration :

évidente. □

Lemme 3.26

Pour tout n -uplet d'entiers (a_1, \dots, a_n) vérifiant les deux conditions :

i) $2 \leq a_i \leq n$ pour $1 \leq i \leq n-2$

$$a_{n-1} = 2$$

$$a_n = 1$$

ii) Si $a_i = \ell$ avec $4 \leq \ell \leq n$ alors :

$$i+\ell-1 \leq n \text{ et } a_{i+1} = \dots = a_{i+\ell-3} = 2,$$

Il existe une succession de n éclatements au-dessus de l'origine

$$\Pi : B^{\Pi} \rightarrow B$$

en des points $O_j \in C_j := \Pi_j^{-1}(O_{j-1})$, telle que pour tout $1 \leq j \leq n$

$$C_j \cdot C_j = -a_j.$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

□ Démonstration :

Pour $n = 1, 2, 3$ c'est évident. Supposons le résultat vrai pour $n-1 > 3$.

. S'il existe a_i tel que $a_i = n$, c'est nécessairement a_1 et $(n, 2, 2, \dots, 2, 1)$ est obtenu en éclatant à chaque fois le point d'intersection de C_i avec la transformée stricte de C_1 .

. Sinon $a_i \leq n-1$ pour tout i et on est dans l'une des deux situations suivantes :

* Il existe $a_i = \ell$ avec $4 \leq \ell \leq n-1$ et $i+\ell-1 = n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une succession de $n-1$ éclatements donnant le $(n-1)$ -uplet

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, \ell-1, 2, \dots, 2, 1) = (a_1, \dots, a_{i-1}, n-i, 2, \dots, 2, 1)$$

Dans cette suite d'éclatements $C_i \cdot C_{n-1} = 1$. En éclatant à nouveau le point $C_i \cap C_{n-1}$, on obtient le n -uplet cherché

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, \ell, 2, \dots, 2, 1)$$

* S'il existe $a_i = \ell$, avec $4 \leq \ell \leq n-1$, alors $i+\ell-1 \leq n-1$.

Dans ces conditions l'un des deux $(n-1)$ -uplets

$$(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}^{-1}) \quad \text{ou}$$

$$(a_1, \dots, a_{n-2}^{-1}, a_{n-1}^{-1})$$

peut être obtenu par $n-1$ éclatements. Pour obtenir (a_1, \dots, a_n) il suffit alors d'éclater un point distinct de $C_{n-1} \cap C_n$ dans le premier cas, et $C_{n-1} \cap C_n$ dans le second. □

Théorème 3.27.

1) Soit S une surface de Kato, $n = b_2(S)$ et $(C_i)_i \in \mathcal{C}(\tilde{S})$ les courbes compactes de son revêtement universel \tilde{S} .

Les self-intersections des courbes C_i ont les propriétés suivantes :

i) pour tout $i \in \mathcal{C}(\tilde{S})$

$$-(n+2) \leq C_i \cdot C_i \leq -2 \quad \text{et} \quad C_{i+n} \cdot C_{i+n} = C_i \cdot C_i$$

ii) Si $n \geq 2$ et s'il existe un indice $i \in \mathcal{C}(\tilde{S})$ pour lequel

$$C_i \cdot C_i = -\ell \quad \text{avec} \quad 4 \leq \ell \leq n+2$$

$$\text{alors} \quad C_j \cdot C_j = -2 \quad \text{pour tout} \quad i+1 \leq j \leq i+\ell-3.$$

2) Réciproquement, pour toute famille périodique de période n , $a = (a_i)_i \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux conditions :

i) pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$2 \leq a_i \leq n+2$$

ii) Si $n \geq 2$ et s'il existe un indice $i \in \mathbb{Z}$ pour lequel

$$\begin{aligned} a_i &= \ell && \text{avec} && 4 \leq \ell \leq n+2 \\ \text{alors } a_j &= 2 && \text{pour tout } i+1 \leq j \leq i+\ell-3 \end{aligned}$$

il existe une surface de Kato S pour laquelle, en identifiant $\mathcal{E}(\tilde{S})$ à \mathbb{Z} , on ait

$$C_i \cdot C_i = -a_i \quad \text{pour tout } i \in \mathcal{E}(\tilde{S})$$

3) Les self-intersections $C_i \cdot C_i$ déterminent complètement la configuration des courbes compactes du revêtement universel. Plus précisément, on a :

i) Pour tous i et $j \in \mathcal{E}(\tilde{S})$

$$C_i \cdot C_j = C_{i+n} \cdot C_{j+n}$$

ii) Si $C_i \cdot C_i = -\ell$ avec $2 \leq \ell \leq n+2$ alors :

$$\begin{aligned} C_i \cdot C_j &= 0 && \text{pour } j > i, \quad j \neq i+\ell-1 \text{ et} \\ C_i \cdot C_{i+\ell-1} &= 1. \end{aligned}$$

□ Démonstration :

Si $n = 1$ on a soit $C_i \cdot C_i = -2$ pour tout $i \in \mathcal{E}(\tilde{S})$, soit $C_i \cdot C_i = -3$ pour tout $i \in \mathcal{E}(\tilde{S})$. La configuration des courbes est décrite à l'exemple 3.34.

On supposera désormais que $n \geq 2$ et on va démontrer simultanément les parties 1) et 3) du théorème.

(A) a) Soit C une courbe compacte de \tilde{S} . D'après le lemme 3.22, il existe une donnée de Kato minimale (Π, σ) de S telle que C soit induite par la courbe C_1 de B^Π , où C_1, \dots, C_n sont les n courbes compactes de B^Π . On a

$$-n \leq C_1 \cdot C_1 \leq -2$$

et les cas suivants peuvent se produire :

1. $C_1 \cap C_n = \emptyset$ ou $C_1 \cap C_n \neq \{\sigma(0)\}$.

Dans ces conditions, quitte à modifier (Π, σ) , C_1 est contenu dans

$$A_0 = \text{Ann}(\Pi, \sigma) \subset \tilde{S} \text{ et}$$

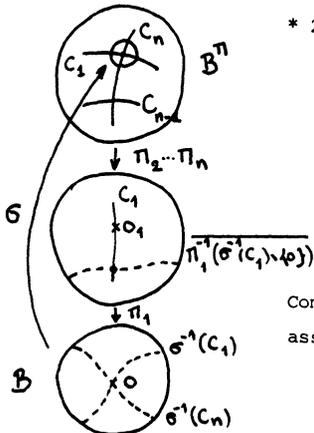
$$-n \leq C \cdot C = C_1 \cdot C_1 \leq -2$$

2. $C_1 \cap C_n = \{\sigma(0)\}$.

On a donc $C_1 \cdot C_1 = -n$; de plus :

* 2.1 Si la transformée stricte $\Pi_1^{-1}(\sigma_1^{-1}(C_1) \setminus \{0\})$ ne contient pas O_1 .

C n'est pas contenu dans l'anneau A_0 , mais est contenu dans la réunion des deux anneaux $A_0 \cup A_1$. D'après l'hypothèse $C \cdot C = -(n+1)$ et $C \cdot (C+n) = 1$.



* 2.2 Si la transformée stricte $\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_1) \setminus \{0\})$

_____ passe par O_1 . Alors,

$\Pi_2^{-1}\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_1) \setminus \{0\})$ ne passe pas par $O_2 \in C_2$

si $n \geq 3$ d'après le lemme 3.23, et pas par $\sigma(O)$ si $n = 2$ puisque $\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_1) \setminus \{0\})$ est transverse à C_1 . Par conséquent

$$C.(C+n+1) = 1 \text{ et } C.C = -(n+2)$$

Compte-tenu du lemme 3.20, ce qui précède prouve les assertions 1)i) et 3)i) .

b) Si $C.C = -2$ on est dans le cas 1. de l'alinéa a) par conséquent $C.(C+1) = 1$ et $C.C' = 0$ pour $C' > C+1$.

c) Si $C.C = -3$ on est dans le cas 1. de a) si $n > 2$ et dans le cas 2.1 de a) si $n = 2$. Quoi qu'il en soit :

$$C.(C+1) = 0 , C.(C+2) = 1 \text{ et } C.C' = 0 \text{ si } C' > C+2$$

d) Si $C.C = -l$ où $4 \leq l \leq n$. Pour tout $2 \leq k \leq l-1$ on a

$$O_k = C_1 \cap C_k$$

Par conséquent $C_j.C_j = -2$ pour tout $2 \leq j \leq l-2$ d'après le lemme 3.23.

$$C_1.C_j = 0 \text{ pour tout } 2 \leq j \leq l-1$$

$$\text{et } C_1.C_l = 1 .$$

Comme on est dans le cas 1. de a) , $C_1 \subset \text{Ann}(\Pi, \sigma)$ et on a les intersections voulues pour C .

e) Si $C.C = -(n+1)$ ou $-(n+2)$. Pour tout $2 \leq k \leq n-1$ on a

$$O_k = C_1 \cap C_k$$

Par conséquent, dans la réunion de deux anneaux $A_1 \cup A_2$ on a :

$$C_j.C_j = -2 \text{ pour } 2 \leq j \leq n-1 \text{ et } C_1.C_j = 0 \text{ pour tout } 2 \leq j \leq n .$$

De plus dans le premier cas $C_1.C_{n+1} = 1$ et $C_1.C_j = 0$ si $j > n+1$ puisque on est dans la situation 2.1 de a); dans le second

$$C_1.C_{n+1} = 0 , C_1.C_{n+2} = 1 \text{ et } C_1.C_j = 0 \text{ si } j > n+2 \text{ puisque}$$

on est dans la situation 2.2 de a) ; enfin $C_n.C_n = -2$ puisque

$C_n \cap C_{n+1}$ n'est pas le point éclaté.

... ce qui achève la démonstration de 1)ii) et 3)ii) .

(B) Soit $a = (a_i) \in A_n$. Il s'agit de montrer qu'il existe une surface $S(\Pi, \sigma)$ pour laquelle $a(S) = a$. Le cas $n = 1$ étant traité en exemple au § 3.34, on supposera $n \geq 2$. On va considérer les différents cas suivants :

1. $a_i = 2$ ou 3 pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

D'après le lemme 2.11 il existe un éclatement $\Pi = \Pi_1 \dots \Pi_n$ dont le n-uplet des self-intersections est

$$(a_1, \dots, a_{n-2}, 2, 1)$$

Il suffit alors de choisir σ de sorte que :

. $\{\sigma(0)\} = C_{n-1} \cap C_n$ si $a_{n-1} = 3$, $\{\sigma(0)\} \neq C_{n-1} \cap C_n$ si $a_{n-1} = 2$

. $\overline{\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_{n-1}) \setminus \{0\})}$ ne passe pas par O_1 .

. $\overline{\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_n) \setminus \{0\})}$ passe par O_1 si et seulement si $a_n = 3$.

2. Il existe $a_i \geq 4$. On peut supposer par un choix adapté de la numérotation que $a_1 \geq 3$ et $a_n = 2$.

2.1 Si $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{n-2}, 3, 2)$.

On choisit Π dont le n-uplet de self-intersections est

$$(a_1, \dots, a_{n-2}, 2, 1)$$

puis on choisit σ de sorte que :

. $\{\sigma(0)\} = C_{n-1} \cap C_n$

. $\overline{\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_i) \setminus \{0\})}$ ne passe pas par O_1 pour $i = n-1, n$.

2.2 Si $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{n-\ell+2}, \ell, 2, \dots, 2)$ où $4 \leq \ell \leq n+2$.

On choisit Π dont le n-uplet de self-intersections est

$$(a_1, \dots, a_{n-\ell+2}, \ell-2, 2, \dots, 2, 1)$$

Dans cet éclatement $C_{n-\ell+3} \cdot C_n = 1$. On choisit alors σ tel que

$$\{\sigma(0)\} = C_{n-\ell+3} \cap C_n \text{ et}$$

la transformée stricte $\overline{\Pi_1^{-1}(\sigma^{-1}(C_{n-\ell+3}) \setminus \{0\})}$ passe par O_1 .

2.3 Si $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{n-\ell+1}, \ell, 2, \dots, 2)$ où $4 \leq \ell \leq n+1$.

On choisit Π dont le n-uplet de self-intersections est

$$(a_1, \dots, a_{n-\ell+1}, \ell-1, 2, 2, \dots, 2, 1)$$

Dans cet éclatement $C_{n-\ell+2} \cdot C_n = 1$. On choisit alors σ tel que

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$$\{\sigma(0)\} = C_{n-\ell+2} \cap C_n$$

mais aucune des transformées strictes de $\bar{\sigma}^{-1}(C_{n-\ell+2})$ et $\bar{\sigma}^{-1}(C_n)$ ne passe par O_1 .

2.4 Si $(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_i, \ell, 2, \dots, 2)$ où $i < n-\ell+1$ et $4 \leq \ell \leq n$.

On choisit Π pour lequel on a

$$(a_1, \dots, a_i, \ell, 2, \dots, 2, 1)$$

et σ tel que $\sigma(0)$ soit générique dans C_n et la transformée stricte de $\bar{\sigma}^{-1}(C_n)$ par Π_1 ne passe pas par O_1 . \square

Avec le thm. 3.27.1) on obtient immédiatement le

Corollaire 3.28

Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}(\tilde{S})$ on a

$$2n \leq \sigma_n(S) := - \sum_{j=i}^{i+n-1} C_j \cdot C_j \leq 3n.$$

Corollaire 3.29

Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. Notons \tilde{C} la réunion de toutes les courbes compactes de \tilde{S} . Alors :

- i) \tilde{C} a au plus deux composantes connexes.
- ii) \tilde{C} a deux composantes connexes si et seulement si $\sigma_n(S) = 3n$.

\square Démonstration :

a) Si $\sigma_n(S) = 3n$ alors \tilde{C} a deux composantes connexes. En effet, $a(S)$ n'est formé que de séquences singulières

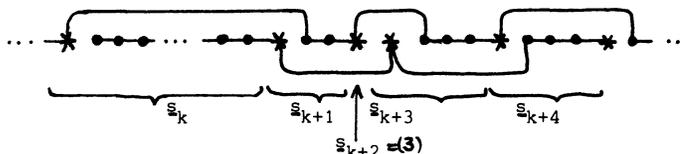
$$\underline{s}_k = (a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_{k+1}}) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

D'après le théorème 3.27.3) :

- La réunion des courbes de self-intersection -2 d'une séquence \underline{s}_k avec la première courbe de la séquence suivante \underline{s}_{k+1} est connexe.

- La première courbe d'une séquence \underline{s}_k ne rencontre pas les autres courbes de cette séquence, mais par contre rencontre la deuxième courbe de \underline{s}_{k+1} si elle existe (i.e. si $\underline{s}_{k+1} \neq (3)$) et la première courbe de \underline{s}_{k+2} sinon ... ce qui donne le résultat.

En représentant par $*$ la première courbe d'une séquence singulière et par \bullet les autres, la situation précédente peut être représentée de la façon suivante :



b) Si $\sigma_n(S) < 3n$ alors \tilde{C} n'a qu'une composante connexe.

En effet : il existe une séquence régulière r . Si $a(S)$ n'est formé que de n -séquences régulières, le résultat est clair. Sinon r se trouve entre deux séquences singulières. Notons

$$\dots r' s_1 \dots s_k r s_{k+1} \dots$$

la succession des séquences où s_i sont des séquences singulières et r' est régulière. Il suffit de montrer que la réunion des courbes associées à s_1, \dots, s_k, r avec la première associée à s_{k+1} est connexe, ce qui est clair. \square

3.30 Trace d'une surface de Kato.

On va introduire dans ce § un troisième invariant analytique associé aux surfaces de Kato.

Lemme 3.31

Soit pour tout $C \in \mathcal{E}(\tilde{S})$

$$F_C : (\hat{S}_C, \hat{O}_C) \rightarrow (\hat{S}_C, \hat{O}_C)$$

les germes d'application associés à une surface de Kato.

Alors : la trace $\text{tr DF}_C(\hat{O}_C)$ ne dépend pas de $C \in \mathcal{E}(\tilde{S})$.

\square *Démonstration :*

On a, d'après la proposition 3.9 :

$$\begin{aligned} \text{tr DF}_C(\hat{O}_C) &= \text{tr D}(\Pi_{C+n}^C \sigma_C^{C+n}) (\hat{O}_C) = \text{tr D}(\Pi_{C+n-1}^C \Pi_{C+n}^{C+n-1} \sigma_C^{C+n}) (\hat{O}_C) \\ &= \text{tr D}(\Pi_{C+n-1}^C \sigma_{C-1}^{C+n-1} \Pi_C^{C-1}) (\hat{O}_C) \\ &= \text{tr D}(\Pi_{C+n-1}^C \sigma_{C-1}^{C+n-1}) (\hat{O}_{C-1}) \circ \text{D}\Pi_C^{C-1} (\hat{O}_C) \\ &= \text{tr D}\Pi_C^{C-1} (\hat{O}_C) \circ \text{D}(\Pi_{C+n-1}^C \sigma_{C-1}^{C+n-1}) (\hat{O}_{C-1}) \\ &= \text{tr D}(\Pi_{C+n-1}^{C-1} \sigma_{C-1}^{C+n-1}) (\hat{O}_{C-1}) = \text{tr DF}_{C-1}(\hat{O}_{C-1}) . \square \end{aligned}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

Définition 3.32

Soit S une surface de Kato. On appelle trace de S et on note

$$t = \text{tr}(S)$$

le nombre complexe

$$\text{tr } DF_C(\tilde{O}_C)$$

qui ne dépend pas de C .

Théorème 3.33

Soit S une surface de Kato. Alors :

i) $0 \leq |\text{tr}(S)| < 1$

ii) $\text{tr}(S) \neq 0$ si et seulement si $a(S) = (a_i)_{i \in \mathfrak{E}(\tilde{S})}$ vérifie $a_i = 2$ pour tout $i \in \mathfrak{E}(\tilde{S})$.

□ Démonstration :

Soit (Π, σ) une donnée de Kato de S et $n = b_2(S)$.

On va considérer les deux cas suivants :

1) On est en situation "générique", c'est-à-dire pour tout $3 \leq i \leq n$, Π_i est un éclatement en un point $O_{i-1} \neq C_{i-1} \cap C_{i-2}$ et $O_n = \sigma(o) \neq C_n \cap C_{n-1}$.

a) Soit Δ_0 la droite passant par l'origine dont la direction soit le point $O_1 \in C_1$. On a

$$\text{Im } D\Pi_1(O_1) = \Delta_0$$

Comme $D\Pi(\sigma(o))$ est de rang 1 on en déduit

$$\text{Im } DF(o) = \Delta_0$$

Par ailleurs

$$\text{Ker } D\Pi(\sigma(o)) = T_{\sigma(o)} C_n, \text{ donc}$$

$$\Delta_1 := \text{Ker } DF(o) = D\sigma(o)^{-1} (T_{\sigma(o)} C_n).$$

Par conséquent

$$\text{tr}(S) = \text{tr } DF(o) = 0 \text{ si et seulement si } \Delta_0 = \Delta_1$$

b) D'autre part $a_i = 2$ pour tout $i \in \mathfrak{E}(\tilde{S})$ si et seulement si la transformée stricte de $\sigma^{-1}(C_n)$ par Π_1 ne passe pas par O_1 ce qui s'écrit :

$$D\sigma(o)^{-1} \cdot (T_{\sigma(o)} C_n) \neq \text{Im } D\Pi_1(O_1).$$

D'après a) on a donc :

$\text{tr}(S) \neq 0$ si et seulement si $a_i = 2$ pour tout $i \in \mathfrak{E}(\tilde{S})$. La condition $|\text{tr}(S)| < 1$ résulte immédiatement du Lemme 2.5.

2) Il existe $2 \leq i \leq n$ tel que $O_i = C_i \cap C_{i-1}$. On a alors :

$$D(\prod_{i-1} \prod_i) (O_i) = 0$$

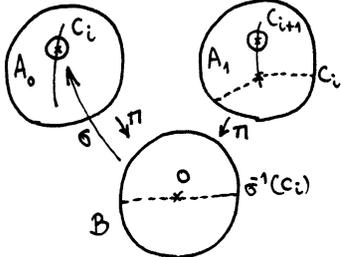
En particulier $DF(O) = D\prod(\sigma(O))D\sigma(O) = 0$ et $\text{tr } DF(O) = 0$.

Exemples 3.34

Cas $b_2(S) = 1$.

Etant donnée qu'une surface de Kato ne dépend que du germe en O de $F = \Pi\sigma$ on est dans l'une des deux situations suivantes :

. La transformée stricte de $\sigma^{-1}(C)$ par Π ne passe pas par $\sigma(O)$.



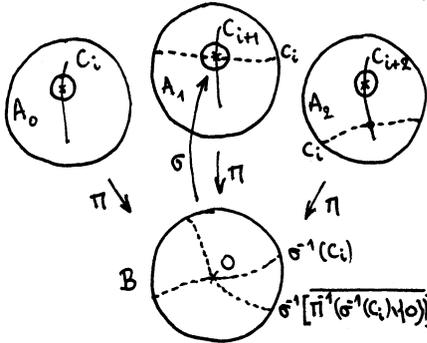
Dans \tilde{S} une courbe C_i est contenue dans la réunion de deux anneaux. On a donc

$$C_i \cdot C_{i+1} = 1 \quad C_i \cdot C_j = 0 \quad \text{si } j > i+1,$$

et en calculant la self-intersection dans $A_0 \cup B^\Pi$ on a :

$$C_i \cdot C_i = -2.$$

. La transformée stricte de $\sigma^{-1}(C)$ par Π passe $\sigma(O)$:



Dans \tilde{S} une courbe C_i est contenue dans la réunion de trois anneaux et

$$C_i \cdot C_{i+2} = 1 \quad C_i \cdot C_j = 0 \quad \text{si } j > i \quad \text{et } j \neq i+2$$

$$C_i \cdot C_i = -3$$

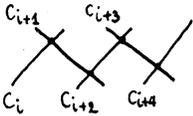
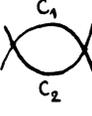
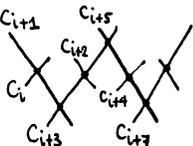
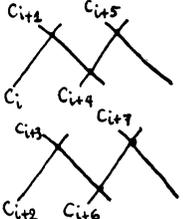
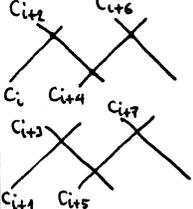
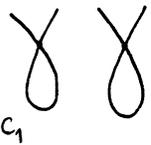
Les configurations des courbes rationnelles sont résumées dans le tableau suivant :

t(S)	a(S)	Configuration dans \tilde{S}	Configuration dans S
$\neq 0$	(2)	$C_i \cdot C_j = 1 \quad \text{si } i-j = 1$ $C_i \cdot C_i = -2$	$C \cdot C = 0$
0	(3)	$C_i \cdot C_j = 1 \quad \text{si } i-j = 2$ $C_i \cdot C_i = -3$	$C \cdot C = -1$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

Cas $b_2(S) = 2$.

Le théorème 3.27 donne la configuration de courbes rationnelles suivantes :

t(S)	a(S)	Configuration dans S	Configuration dans S
$\neq 0$	$(\overline{2,2})$	 $C_i \cdot C_j = 1$	 $C_1 \cdot C_2 = 2$ $C_1 \cdot C_1 = C_2 \cdot C_2 = -1$
0	$(\overline{2,3})$	 $C_{i+2k} \cdot C_{i+2k} = -2$ $C_{i+2k+1} \cdot C_{i+2k+1} = -3$ $C_{i+2k} \cdot C_{i+2k+1} = 1$ $C_{i+2k+1} \cdot C_{i+2k+3} = 1$	 $C_1 \cdot C_2 = 1$ $C_1 \cdot C_1 = -1$ $C_2 \cdot C_2 = -2$
	$(\overline{2,4})$	 $C_{i+2k} \cdot C_{i+2k+1} = 1$ $C_{i+2k+1} \cdot C_{i+2k+4} = 1$ $C_{i+2k} \cdot C_{i+2k} = -2$ $C_{i+2k+1} \cdot C_{i+2k+1} = -4$	 $C_1 \cdot C_2 = 2$ $C_1 \cdot C_1 = -2$ $C_2 \cdot C_2 = -4$
	$(\overline{3,3})$	 $C_j \cdot C_{j+2} = 1$ $C_j \cdot C_j = -3$	 $C_1 \cdot C_2 = 0$ $C_1 \cdot C_1 = C_2 \cdot C_2 = -1$

3.35 Formes différentielles et champs de vecteurs globaux.

Définition et lemme 3.36 :

Soit $F = F_C$ un germe d'application associé à une surface de Kato S .

1) on note \mathcal{A} le faisceau des germes de sections de

$$\Lambda^p T^* S \quad (p=1,2)$$

ou un produit tensoriel ou un produit symétrique de ces fibrés; soit \mathcal{A}_F le \mathbb{C} -espace vectoriel des germes de sections s du fibré analogue sur $(\mathbb{C}^2, 0)$

pour lesquelles

$$F^* s = s$$

Alors les \mathbb{C} -espaces vectoriels $H^0(S, \mathcal{A})$ et \mathcal{A}_F sont isomorphes.

2) On note \mathcal{B} le faisceau des germes de sections de

$$\bigwedge^p T S \quad (p=1,2)$$

ou un produit tensoriel ou un produit symétrique de ces fibrés; soit \mathcal{B}_F le \mathbb{C} -espace vectoriel des germes de sections θ du fibré analogue sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ pour lesquelles

$$DF(z) \cdot \theta(z) = \theta(F(z)) \quad (\text{pour } p=1), \quad \det DF(z) \cdot \theta(z) = \theta(F(z)) \quad (\text{pour } p=2)$$

Alors les \mathbb{C} -espaces vectoriels $H^0(S, \mathcal{B})$ et \mathcal{B}_F sont isomorphes.

□ Démonstration.

1) On définit une application linéaire

$$\alpha : H^0(S, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}_F$$

de la façon suivante : si $s \in H^0(S, \mathcal{A})$

$$\tilde{s} := \tilde{\omega}^* s$$

vérifie

$$\tilde{g}^* \tilde{s} = \tilde{s}.$$

D'après la Proposition 3.9 le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{s} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{s} \\ p_C \downarrow & F_C & \downarrow p_C \\ \hat{s}_C & \xrightarrow{\quad} & \hat{s}_C \end{array}$$

est commutatif. Comme p_C est un isomorphisme en dehors de $p_C^{-1}(\hat{0}_C)$, sur $\hat{s}_C \setminus \{\hat{0}_C\}$

$$s_C := (p_C^{-1})^* \tilde{s}$$

vérifie

$$F_C^* s_C = s_C.$$

D'après le thm de prolongement de Riemann, s_C se prolonge en $\hat{0}_C$ ce qui permet de définir

$$\alpha(s) := s_C.$$

L'application est évidemment injective. Réciproquement, soit $s'_C \in \mathcal{A}_F$; s'_C admet un représentant sur un voisinage U de $\hat{0}_C$;

$$\text{alors } \tilde{s}' = p_C^* s'_C \text{ est défini sur } p_C^{-1}(U),$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

vérifie $\tilde{g}^* \tilde{s}' = \tilde{s}'$ et donc se prolonge à tout \tilde{S} , ce qui définit $\tilde{\alpha}^{-1}(s'_c)$.
 2) En remarquant que toute section $\theta \in H^0(S, \mathfrak{B})$ induit sur \tilde{S} une section $\tilde{\theta}$ qui vérifie

$$\tilde{g}_* \tilde{\theta} = \theta$$

une démonstration analogue donne le résultat. \square

3.37 Invariants cohomologiques.

Soit S une surface compacte minimale sans fonctions méromorphes pour laquelle le premier nombre de Betti $b_1(S)$ vérifie

$$b_1(S) = 1.$$

D'après [14] I p. 790, on a :

$$p_g := h^0(S, \mathcal{O}(K)) = 0 \\ q := h^1(S, \mathcal{O}) = 1.$$

D'après la formule de Noether :

$$12(p_g - q + 1) = c_1^2 + c_2,$$

où c_i est la i -ième classe de Chern de S , on a

$$c_1^2 = -c_2$$

enfin la formule de Gauss-Bonnet donne, en notant

$$\chi(S) := \sum_{0 \leq i \leq 4} (-1)^i b_i = b_2$$

la caractéristique d'Euler de la surface :

$$c_2 = \chi(S)$$

ce qui donne finalement les relations :

$$(*) \quad c_1^2 = -b_2 \\ c_2 = b_2$$

qui vont permettre de préciser la dimension de la base de la déformation semi-universelle des surfaces de Kato. Le résultat suivant est bien connu :

Lemme 3.38

Soit S une surface compacte, V un fibré de rang 2 sur S et \mathcal{V} le faisceau des sections de V . Notons :

$$\chi(S, V) := \sum_{0 \leq i \leq 2} (-1)^i h^i(S, \mathcal{V}) \quad \text{où} \quad h^i(S, \mathcal{V}) := \dim_{\mathbb{C}} H^i(S, \mathcal{V})$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré de V . Alors :

$$\chi(S, V) = \frac{1}{6} (c_1^2 + c_2) + \frac{1}{2} (c_1(V)^2 - 2c_2(V) + c_1 \cdot c_1(V))$$

En particulier si $V = TS$ est le fibré tangent

$$\chi(S, TS) = \frac{7}{6} c_1^2 - \frac{5}{6} c_2.$$

Démonstration :

D'après le Théorème de Atiyah-Singer , $\chi(S,V)$ s'exprime comme un polynôme en $c_1, c_2, c_1(V), c_2(V)$, dont il suffit de calculer les coefficients. Choisissons pour cela un fibré V qui scinde en $V = L_1 \oplus L_2$, où L_i ($i=1,2$) est un fibré en droites. La formule de Riemann-Roch nous donne pour tout fibré en droites :

$$\chi(S,L) = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) + \frac{1}{2} (c_1(L))^2 + c_1 \cdot c_1(L) .$$

Vu l'additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré, on obtient :

$$\chi(S,V) = \chi(S,L_1) + \chi(S,L_2) = \frac{1}{6} (c_1^2 + c_2) + \frac{1}{2} (c_1(L_1))^2 + c_1(L_2)^2 + c_1 \cdot (c_1(L_1) + c_1(L_2)) ,$$

ce qui donne le résultat puisque

$$\begin{aligned} c_1(V) &= c_1(L_1) + c_1(L_2) \\ c_2(V) &= c_1(L_1) \cdot c(L_2) . \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3.39

Soit S une surface de Kato. Notons Θ le faisceau des champs de vecteurs sur S . Alors :

$$H^2(S, \Theta) = 0$$

En particulier la base de la déformation semi-universelle de S est lisse.

\square Démonstration :

Si Ω^p désigne le faisceau des p -formes différentielles holomorphes sur S , on a d'après la dualité de Serre

$$h^2(S, \Theta) = h^0(S, \Omega^1 \otimes \Omega^2) .$$

Soit F un germe d'application associé à S ; d'après le lemme 3.36 il suffit de montrer que si ω_p est un germe de p -forme différentielle sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ ($p=1,2$) pour lequel

$$F^*(\omega_1 \otimes \omega_2) = \omega_1 \otimes \omega_2$$

alors $\omega_1 \otimes \omega_2 = 0$.

Remarquons pour cela que $\det DF(z)$ est d'ordre au moins 1 ; comme pour tout $m \geq 1$

$$\omega_1 \otimes \omega_2(z) = (F^m)^*(\omega_1 \otimes \omega_2)(z) = (F^m)^* \omega_1(z) \otimes (\det DF^m(z)) \omega_2(F^m(z))$$

cela signifie que $\omega_1 \otimes \omega_2$ s'annule à l'ordre au moins m en 0 , et donc

$$\omega_1 \otimes \omega_2 = 0$$

La dernière assertion est un théorème de Kodaira-Spencer. \square

Proposition 3.40

Soit S une surface de Kato. Alors en notant Θ le faisceau des champs de vec-

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

teurs on a :

$$h^1(S, \mathcal{O}) = 2 b_2(S) + h^0(S, \mathcal{O})$$

□ Démonstration :

D'après les lemmes 3.38, 3.39 et les relations (*) précédentes

$$\begin{aligned} h^1(S, \mathcal{O}) &= h^0(S, \mathcal{O}) + h^2(S, \mathcal{O}) - \chi(S, \mathcal{O}) = h^0(S, \mathcal{O}) - \frac{7}{6} c_1^2 + \frac{5}{6} c_2 = \\ &= h^0(S, \mathcal{O}) + 2 b_2(S) \quad \square \end{aligned}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO II

SURFACES DE TRACE NON NULLE ET COURBES

§ 0. INTRODUCTION

REFERENCES

§ 1. SURFACES DE KATO DE TRACE NON NULLE

1.1. Courbes formelles invariantes

1.14. Classification formelle des germes génériques.

1.24. Champs de vecteurs invariants

1.29. Champs de vecteurs globaux et voisinage formel des courbes rationnelles d'une surface de Kato de trace non nulle.

§ 2. DIVISEURS D'UNE SURFACE DE KATO.

2.1. Courbes elliptiques

2.5. Quelques matrices écrites sur un tore

2.24. Configuration des courbes rationnelles.

2.32. Arbres et cycles d'une surface de Kato.

§ 0. INTRODUCTION.

0.1. LES RESULTATS.

On appelle surface de Kato une surface compacte minimale S contenant une coquille sphérique globale pour laquelle le deuxième nombre de Betti $n = b_2(S)$ est strictement positif. Toutes ces surfaces sont dans la classe VII_0 de Kodaira. On a vu dans I, qu'à de telles surfaces on sait associer des germes d'applications de la forme $F = \Pi\sigma$, où $\Pi = \Pi_1 \dots \Pi_n : B^{\Pi} \rightarrow B$ est une succession de n éclatements de la boule de \mathbb{C}^2 avec une seule courbe exceptionnelle de première espèce C_n et $\sigma : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (B^{\Pi}, 0_n)$ est un germe d'isomorphisme où $0_n \in C_n$, et réciproquement à un tel germe $F = \Pi\sigma$ on sait associer une surface de Kato $S(F)$, de sorte que l'isomorphisme de deux surfaces de Kato se traduise par l'isomorphisme de certains germes associés.

Dans cette deuxième partie on continue le "dictionnaire", commencé en I, qui peut être résumé de la façon suivante :

S surface de Kato	Référence	$F = \Pi\sigma$ germe d'application
. deuxième nombre de Betti $b_2(S)$	I.1.10	nombre n d'éclatements composant Π
. champ de vecteur global	I.3.36	champ invariant par F
. courbe elliptique dans S	II.2.3 et 2.4.	courbe invariante par F
. les voisinages formels des courbes rationnelles de S et S' sont isomorphes	II.1.32 (\Leftarrow)	F est formellement isomorphe à F' .

Ce "dictionnaire" permet de remplacer certains problèmes sur les surfaces de Kato par des problèmes équivalents sur des germes d'application.

Le résultat clé sur les germes d'application est le suivant

THEOREME : Soit $F = \Pi\sigma(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe d'application où Π est composé

de n éclatement et $t = \text{tr } DF(0)$ vérifie $0 < |t| < 1$

Alors :

1) F est formellement isomorphe à N , où

$$N(z) := (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$$

2) On a l'équivalence des propriétés suivantes :

- i) F est isomorphe à N
- ii) La courbe formelle invariante associée à F (Déf. 1.2) est convergente.
- iii) tout champ de vecteurs formel invariant par F (Déf. 1.24) est convergent.

Ceci nous permettra de montrer :

- Si S et S' sont deux surfaces de Kato pour lesquelles

$$b_2(S) = b_2(S') \text{ et } \text{tr}(S) = \text{tr}(S') \neq 0 \text{ (Déf. I.3.32)}$$

alors les voisinages formels de la réunion des courbes rationnelles de S et S' sont isomorphes (thm. 1.33).

- Si S est une surface de Kato, l'espace $H^0(S, \Theta)$ des champs de vecteurs globaux de S vérifie

$$0 \leq \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Theta) \leq 1$$

et $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Theta) = 1$ si et seulement si S est isomorphe à la surface d'Inoue $S_{\mathbb{C}}^n$ (thm. 1.31).

Par la formule de Noether on en déduit $\dim H^1(S, \Theta)$, qui est la dimension de la base de la déformation semi-universelle de S : on généralise ainsi [El thm 3.1] .

- Si S est une surface de Kato et $\Gamma \subset S$ est une courbe de S non rationnelle, alors Γ est elliptique et S est isomorphe à la surface d'Inoue $S_{\mathbb{C}}^n$; en particulier S ne peut contenir qu'une seule courbe non rationnelle (thm.2.4). On obtient dans le cas des surfaces contenant une C.S.G. un résultat dû à Kato et Nakamura [16]

On s'intéresse ensuite à la matrice d'intersection $M(S)$ des $n=b_2(S)$ courbes rationnelles de S . On définit explicitement toutes les matrices qui sont matrice d'intersection $M(S)$ (thm.2.25) ceci permet de montrer que le matrice $M(S)$ est négative, et même définie négative si $\text{tr}(S)=0$ (c'est à dire dans le revêtement universel \tilde{S} de S , il existe des courbes rationnelles de self-intersection ≤ -3); la démonstration, délicate, utilise la forme explicite de $M(S)$.

De plus, si $\text{tr}(S) \neq 0$ (c'est à dire toutes les courbes rationnelles de \tilde{S} ont pour self-intersection -2) et D est un diviseur de S , $D^2=0$ si et seulement si D est de la forme

$$D = m(D_0 + \dots + D_{n-1})$$

où $m \in \mathbb{Z}$ et D_0, \dots, D_{n-1} sont les n courbes rationnelles de S .

Ce dernier résultat permet de situer la classification due à Enoki ([41] et [52]) par rapport au présent travail : les surfaces classées sont exactement celles pour lesquelles $\text{tr}(S) \neq 0$.

0.2. PLAN DE L'ARTICLE.

Au § 1 on commence par introduire la notion de courbe formelle Γ invariante par un germe $F = \Pi\sigma$ (Déf. 1.2). La raison pour laquelle on introduit des courbes "formelles" et non pas seulement des courbes "convergentes" est que, même lorsque σ est linéaire, Γ peut ne pas être "convergente" (Exemple 1.11). L'existence d'une telle courbe n'est pas claire a priori - lorsque Π n'est pas une succession d'éclatements "génériques", une telle courbe formelle n'existe pas - si bien que lorsque Π est "générique" on montre l'existence de Γ en même temps que l'existence d'un "redressement" c'est à dire un changement de coordonnées formel qui permet d'obtenir Γ sous la forme $\Gamma = \{z_1 = 0\}$ (lemme 1.8). Les changements de coordonnées formels nous amènent naturellement à considérer des endomorphismes formels $F = \Pi\sigma$ où σ est un isomorphisme formel avec comme relation d'équivalence l'isomorphisme formel (Def. 1.14).

Au § 1.13 on montre (Prop. 1.19) qu'il existe un changement de coordonnées formel, dont l'un des axes de coordonnées est précisément Γ , dans lequel F devient

$$N(z) = (z_1 z_2^n, tz_2)$$

ce résultat montre que tous les germes $F = \Pi\sigma$ où Π est composé de n éclatements "génériques" sont formellement équivalents à N . Ce résultat est d'une grande importance car il permet de se ramener à un cas dans lequel les calculs sont simples.

On étudie au § 1.23 les champs de vecteurs formels θ invariants par F ; le fait que la courbe formelle Γ invariante par F est le lien d'annulation de θ permet de montrer au § 1.23 grâce au "dictionnaire" que les surfaces d'Inoue sont les seules surfaces de trace non nulle qui ont un champ de vecteurs global. (thm. 1.32).

Au § 2, on montre que les courbes invariantes "convergentes" correspondent à des courbes elliptiques, et on étudie les configurations des courbes rationnelles. Si D_0, \dots, D_{n-1} sont les n courbes rationnelles, la connexité de $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$, la présence d'une composante irréductible singulière, le calcul de la self intersection D^2 de $D = D_0 + \dots + D_{n-1}$ se ramènent à l'étude de la matrice d'intersection $M(S)$. On étudie en détail ces matrices "écrites sur un tore". Dans le cas où $\text{tr}(S) = 0$, ces matrices sont définies négatives (thm 2.27), ce qui signifie que la réunion des courbes rationnelles est exceptionnelle et qu'à une telle surface de Kato on peut canoniquement associer une ou deux singularités normales.

§ 1. SURFACES DE KATO DE TRACE NON NULLE.

1.1. COURBES FORMELLES INVARIANTES.

PREMIERES PROPRIETES.

DEFINITION 1.2.

Soit $\Pi_i : B_i \rightarrow B_{i-1}$ ($i \geq 1$) une suite d'éclatements au dessus de l'origine de $B_0 = \mathbb{C}^2$, où :

(1.2.1) Pour tout $i \geq 2$ Π_i est l'éclatement d'un point O_{i-1} de $C_{i-1} : = \Pi_{i-1}^{-1}(O_{i-2})$.

On appellera $(O_i)_{i \geq 1}$ une suite de points infiniment proches de 0, et on dira qu'elle est générique si $C_i^2 = -2$ pour tout $i \geq 1$.

On va s'intéresser dans la suite à des suites de points infiniment proches de 0 particulières :

Soit

$$\Pi = \Pi_1 \dots \Pi_p : B_p \rightarrow \mathbb{C}^2$$

une succession de p éclatements au dessus de l'origine de \mathbb{C}^2 qui vérifie (1.2.1).

Si $1 \leq m \leq p$ on note

$$\mathcal{J}_{m,p}$$

le faisceau des germes de fonctions qui s'annulent sur

$$C_m \cup \dots \cup C_p = (\Pi_m \dots \Pi_p)^{-1}(O_{m-1})$$

et on désigne par

$$V_{m,p}^\infty := (C_m \cup \dots \cup C_p, \varprojlim_k \mathcal{O}_{m,p} / \mathcal{I}_k), \quad V_p^\infty := V_{1,p}^\infty$$

le voisinage formel du sous-ensemble analytique $C_m \cup \dots \cup C_p$.

Notons

$$\mathbb{C}_\infty^2 := (0, \mathbb{C}[[z_1, z_2]])$$

le voisinage formel de l'origine de \mathbb{C}^2 et soit

$$F = \Pi \sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

un endomorphisme de \mathbb{C}_∞^2 où

$\Pi = \Pi_1 \dots \Pi_n$ est une succession de n éclatements comme précédemment

et

$\sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow (O_n, \mathbb{C}[[u,v]])$, avec $O_n \in C_n$, est un isomorphisme.

Pour tout $p \geq 1$, les relèvements successifs de $\sigma = \sigma^0$

$$\sigma^p : V_p^\infty \rightarrow V_{n,n+p}^\infty$$

définissent une suite d'éclatements

$$\Pi_{n+p} : V_{n,n+p}^\infty \rightarrow V_{n,n+p-1}^\infty$$

aux points $O_{n+p-1} = \sigma^{p-1}(O_{p-1})$ sur la courbe

$$C_{n+p-1} = \Pi_{n+p-1}^{-1}(O_{n+p-2})$$

DEFINITION 1.3.

Soit

$$F = \Pi\sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

1) On dira qu'une courbe formelle Γ de \mathbb{C}_∞^2 est invariante par F si

$$F|_\Gamma \text{ induit un automorphisme de } \Gamma.$$

2) On appellera la suite (O_p) la suite des points infiniment proches de O associée à F (ou plus brièvement la suite de points proches associée à F).

3) On appellera lieu critique de F la courbe

$$F^{-1}(O)$$

LEMME 1.4.

Soit

$$F = \Pi\sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

et Γ une courbe de \mathbb{C}_∞^2 . On a équivalence des conditions suivantes :

i) Γ est invariante par F

ii) $\sigma(\Gamma)$ est égale à la transformée stricte $\overline{\Pi^{-1}(\Gamma \setminus \{O\})}$ de Γ par Π .

iii) Pour tout $p \geq 0$ la transformée stricte Γ_p de Γ par $\Pi_1 \dots \Pi_p$ passe par O_p et Γ_p est invariante par $F_p = \Pi_{p+1} \dots \Pi_{n+p} \sigma^p$;

S'il existe une courbe Γ possédant ces propriétés, elle est irréductible et unique.

□ DEMONSTRATION.

i) \Leftrightarrow ii) clair

iii) \Rightarrow i) évident

ii) \Rightarrow iii) $\sigma(\Gamma)$ passe par $O_n = \sigma(O)$. Comme $\sigma(\Gamma) = \Gamma_n := \overline{\Pi^{-1}(\Gamma \setminus \{O\})}$ toutes les transformées strictes Γ_p et Γ par $\Pi_1 \dots \Pi_p$ passent par O_p pour tout $1 \leq p \leq n$.

De plus pour tout $1 \leq p \leq n$

$$\begin{aligned} \Pi_1 \dots \Pi_p F_p(\Gamma_p \setminus \{O_p\}) &= F \Pi_1 \dots \Pi_p(\Gamma_p \setminus \{O_p\}) = F(\Gamma \setminus \{O\}) \\ &= \Gamma \setminus \{O\} = \Pi_1 \dots \Pi_p(\Gamma_p \setminus \{O_p\}) \end{aligned}$$

donc $F_p(\Gamma_p \setminus \{O_p\}) = \Gamma_p \setminus \{O_p\}$ et Γ_p est invariante par F_p .

En particulier Γ_n est invariante par F_n : comme on se trouve à nouveau dans la situation précédente, on montre facilement le résultat par récurrence. □

EXISTENCE ET REDRESSAGE DES COURBES FORMELLES INVARIANTES.

DEFINITION 1.5.

Soient (O_p) et (O'_p) deux suites de points infiniment proches de O et

$$\psi : \mathfrak{C}_\infty^2 \rightarrow \mathfrak{C}_\infty^2$$

un endomorphisme de \mathfrak{C}_∞^2 . On dira que ψ envoie (O_p) sur (O'_p) si pour tout $p \geq 0$

ψ admet un relèvement ψ^p qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} v_p^\infty & \xrightarrow{\psi^p} & v'_p \\ \Pi_p \downarrow & & \downarrow \Pi \\ v_{p-1}^\infty & \xrightarrow{\psi^{p-1}} & v'_{p-1} \end{array}$$

et $\psi^p(O_p) = (O'_p)$

On munit \mathfrak{C}_∞^2 du système de coordonnées canonique (z_1, z_2) et on construit par récurrence une suite de points proches (δ_p) de la façon suivante : Soit Δ_0 la droite définie par l'idéal (z_1) et Δ_1 la transformée stricte par Π_1 de Δ_0 ; $\delta_1 := \Delta_1 \cap \Pi_1^{-1}(O)$, c'est à dire un point ; supposons δ_p défini et soit Π_{p+1} l'éclatement de v_p^∞ au point δ_p ; si Δ_{p+1} est la transformée stricte de Δ_p par Π_{p+1} , $\delta_{p+1} := \Delta_{p+1} \cap \Pi_{p+1}^{-1}(\delta_p)$.

Le lemme suivant donne les endomorphismes $F = \|\sigma : \mathfrak{C}_\infty^2 \rightarrow \mathfrak{C}_\infty^2$, pour lesquels Δ_0 est une courbe invariante.

LEMME 1.6.

- Soit $\psi = (\psi_1, \psi_2) : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ un endomorphisme de \mathbb{C}_∞^2 tel que $\psi(\Delta_0) \neq \{0\}$.
 On a équivalence des conditions suivantes :
- i) z_1 divise ψ_1 et $\psi_2(0, z_2)$ est d'ordre 1
 - ii) $\psi|_{\Delta_0}$ est un automorphisme de Δ_0 .
 - iii) ψ envoie (δ_p) sur (δ_p) .

□ DEMONSTRATION.

- i) \Rightarrow ii) puisque $\psi_2(0, z_2)$ est d'ordre 1
 ii) \Rightarrow iii) résulte immédiatement du fait que pour tout $p \geq 0$ $\psi_p|_{\Delta_p}$ est un automorphisme de Δ_p .
 iii) \Rightarrow i) si $\psi_2(0, z_2)$ est d'ordre ≥ 2 on a $D\psi(0) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ et $D\psi(0)\Delta_1 = \{z_2=0\}$
 ou $D\psi(0) \Delta_1 = \{0\}$; $\psi_2(0, z_2)$ est donc d'ordre 1.

D'autre part, on peut écrire

$$\psi_1(z) = z_1 \psi_1'(z) + \sum_{i \geq 1} \alpha_i z_2^i$$

On va montrer par récurrence sur $k \geq 1$ que

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 \text{ si et seulement si le relèvement } \psi^k \text{ de } \psi \text{ existe et} \\ \psi^k(\delta_k) = \delta_k. \end{cases}$$

Pour $k=1$ on a

$$D\psi(0) = \begin{pmatrix} \psi_1'(0) & \alpha_1 \\ * & \neq 0 \end{pmatrix}$$

donc $\alpha_1=0$ si et seulement si $D\psi(0)(\Delta_0) = \Delta_0$.

Soit $k \geq 2$; d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$$

Remarquons alors qu'on peut choisir un système de coordonnées (u_k, v_k) dans lequel

$$\Pi_1 \dots \Pi_k(u_k, v_k) = (u_k, v_k^k, v_k)$$

et

$$\delta_k = (0, 0)$$

Dans ce système de coordonnées la relation de commutativité

$$\psi \prod_1 \dots \prod_k = \prod_1 \dots \prod_k \psi^k$$

s'écrit

$$\begin{cases} \psi_1^k(u_k, v_k) = \frac{1}{\theta(u_k, v_k)^k} (u_k \psi_1' \prod_1 \dots \prod_k(u_k, v_k) + \sum_{i \geq k} \alpha_i v_k^{i-k}) \\ \psi_2^k(u_k, v_k) = v_k \theta(u_k, v_k) \text{ où } \theta(0) \neq 0 \end{cases}$$

ce qui donne le résultat. \square

EXEMPLE 1.7.

Soit $N(z) : = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$, où $t \neq 0$; la courbe $\Gamma = (z_1)$ est invariante par N et la suite de points proches associée à N est (δ_p) .

Le groupe $\text{Aut } \mathbb{C}_\infty^2$ des automorphismes de \mathbb{C}_∞^2 opère sur l'ensemble des suites génériques de points infiniment proches de 0. On va voir que $\text{Aut } \mathbb{C}_\infty^2$ opère transitivement et, plus précisément on va exhiber un groupe $G(2)$ lié au système de coordonnées qui opère transitivement sur l'ensemble des suites génériques (O_p) de points infiniment proches de 0 telles que O_1 ne corresponde pas à $\{z_2 = 0\}$.

DEFINITION 1.8.

On note $G(2)$ le groupe commutatif des automorphismes ψ de \mathbb{C}_∞^2 de la forme

$$\psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z)) = (z_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_2^i, z_2)$$

avec la composition.

LEMME 1.9.

Soient (O_p) et (O'_p) deux suites génériques de points infiniment proches de 0. On suppose que O_1 et O'_1 ne sont pas la direction de $\{z_2=0\}$ alors :

- 1) Il existe un unique $\psi \in G(2)$ qui envoie (O_p) sur (O'_p) .
- 2) Si $(O'_p) = (\delta_p)$, un automorphisme

$$\psi' = (\psi'_1, \psi'_2) : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

envoie (O_p) sur (δ_p) si et seulement si $\psi'_2(0, z_2)$ est d'ordre 1 et il existe $\theta \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ tel que

$$\theta(0) \neq 0 \text{ et } \psi' = (\psi_1 \theta, \psi'_2)$$

□ DEMONSTRATION.

1) Il suffit de montrer l'existence et l'unicité lorsque $(O'_p) = (\delta_p)$.
 Dans ce cas, si $\psi, \psi' \in G(2)$ envoient (O_p) sur (δ_p) , z_1 divise la première composante de $\psi' \psi^{-1}$ d'après le lemme 1.6 donc $\psi' \psi^{-1} = \text{id}$ ce qui prouve l'unicité.
 D'autre part, d'après l'hypothèse, O_p (resp δ_p) se trouve dans le domaine du système de coordonnées (u_p, v_p) (resp. (w_p, t_p)) de $V_{p, \infty}$ (resp $V'_{p, \infty}$) dans lequel

$$O_p = (a_p, 0) \text{ (resp. } \delta_p = (0, 0)) \text{ et}$$

$$\Pi(u_p, v_p) = (u_p, v_p + a_{p-1}, v_p) \text{ (resp. } \Pi'(w_p, t_p) = (w_p, t_p, t_p)).$$

On montre alors facilement par récurrence sur $p \geq 0$ que si

$$\psi(z) := (z_1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_i z_2^i, z_2)$$

ψ^p existe pour tout $p > 0$ et que $\psi^p(O_p) = \delta_p$.

Ceci prouve l'existence.

2) Posons

$$\phi(z) := \psi' \psi^{-1}(z)$$

ϕ envoie (δ_p) sur (δ_p) , donc d'après le lemme 1.6

$$\phi(z) = (z_1 \mu(z), \phi_2(z))$$

où $\mu(0) \neq 0$ et $\phi_2(0, z_2)$ est d'ordre 1.

Par conséquent

$$\psi'(z) = (\psi_1(z) \mu(\psi(z)), \phi_2(\psi(z)))$$

ce qui donne le résultat.

Réciproquement, si

$$\psi'(z) = (\psi_1(z), \theta(z), \psi_2'(z))$$

et

$$\phi(z) := (z_1 \theta(\psi^{-1}(z)), \psi_2'(\psi^{-1}(z)))$$

on a

$$\psi' = \phi\psi$$

et ψ' envoie (O_p) sur (δ_p) d'après le lemme 1.6. □

PROPOSITION 1.10.

Soit $F = \Pi\sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$

Alors : 1) F admet une courbe formelle invariante Γ si et seulement si

$$t = \text{tr } DF(0) \neq 0$$

2) Si $t = \text{tr } DF(0) \neq 0$, et si

$\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ est un automorphisme de \mathbb{C}_∞^2 tel que

$$\phi(\Gamma) = \Delta_0$$

on a

$$\Gamma = (\phi_1)$$

En particulier Γ est irréductible et non singulière.

□ DEMONSTRATION.

En faisant au besoin une rotation, on peut supposer que O_1 n'est pas la direction de $\{z_2=0\}$.

Si $\text{tr } DF(0) \neq 0$ et (O_p) est la suite de points proches de F , il existe un automorphisme ϕ qui envoie (O_p) sur (δ_p) d'après le lemme 1.9; $F' := \phi F \phi^{-1}$ envoie alors (δ_p) sur (δ_p) et d'après le lemme 1.6, la courbe Δ_0 est invariante par F' , on en déduit que $\Gamma := \phi^{-1}(\Delta_0)$ est invariante par F .

Comme $\Delta_0 = (z_1)$ la deuxième assertion est évidente.

Si $\text{tr } DF(0) = 0$, soit Γ une courbe formelle de \mathbb{C}_∞^2 . D'après le théorème de désingularisation des courbes formelles, il existe un entier N tel que si les transformées strictes Γ_p de Γ par $\Pi_1 \dots \Pi_p$ passent par O_p pour $1 \leq p \leq N-1$, Γ_N soit non singulière et transverse à C_N .

Cependant comme $\text{tr } DF(0) = 0$, il existe vu la périodicité des éclatements $N' > N$ tel que $O_{N'} = C_{N'} \cap C_{N'-1}$; comme toutes les transformées strictes $\Gamma_N, \dots, \Gamma_{N'-1}$ sont toutes transverses respectivement à $C_N, \dots, C_{N'-1}$, $\Gamma_{N'}$ ne passe pas par $O_{N'}$, ce qui montre, d'après le lemme 1.4 qu'il n'existe aucune courbe invariante par F . □

COROLLAIRE 1.11.

Soit $F = \Pi\sigma : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ tel que

$$t = \text{tr } DF(0) \neq 0$$

alors, la courbe Γ invariante par F et le lieu critique de F sont transverses

□ DEMONSTRATION.

La transformée stricte Γ_n de Γ par Π est transverse à $\Pi^{-1}(0)$; Comme $\Gamma_n = \sigma(\Gamma)$ d'après le lemme 1.4, $\Gamma = \sigma^{-1}(\Gamma_n)$ et $\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$ sont transverses. □

EXEMPLE 1.12.

Soit $F(z) = ((z_1 + \alpha_1) tz_2, tz_2)$.

Les automorphismes ψ pour lesquels $\psi^{-1} F\psi(z) = N(z) = (z_1 tz_2, tz_2)$ sont exactement les automorphismes

$$\psi(z) = (az_1 + \alpha_1 \sum_{k \geq 1} z_2^k t^{-k(k-1)/2}, z_2), \text{ où } a \neq 0.$$

$$\text{Pour } a=1, \psi \in G(2) \text{ et } \Gamma = (z_1 - \alpha_1 \sum_{k > 1} z_2^k t^{-k(k-1)/2}).$$

Lorsque $|t| < 1$ la série est divergente pour tout $\alpha_1 \neq 0$ donc F et N sont non isomorphes ainsi que les surfaces de Kato $S(F)$ et $S(N)$ associées. Cependant les voisinages formels de la courbe rationnelle de $S(F)$ et $S(N)$ sont isomorphes.

REMARQUE 1.13.

Soient $F = \Pi\sigma$ et $F' = \Pi'\sigma'$ des germes d'applications associés à deux surfaces de Kato S et S' vérifiant

$$\begin{aligned} a(S) &= a(S') \text{ et} \\ \sigma_n(S) &= \sigma_n(S') = 3n \end{aligned}$$

Si Π et Π' ont même graphe d'éclatement, les suites des points proches sont isomorphes.

1.14. CLASSIFICATION FORMELLE DES GERMES GENERIQUES.

DEFINITION 1.15.

Soit $F : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ et $F' : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ deux endomorphismes de \mathbb{C}_∞^2 . On dit que F et F' sont formellement isomorphes s'il existe un automorphisme

$$\phi : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

pour lequel le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_\infty^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}_\infty^2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C}_\infty^2 & \xrightarrow{F'} & \mathbb{C}_\infty^2 \end{array}$$

soit commutatif.

Si F , F' et ϕ sont convergents on dira seulement qu'ils sont isomorphes.

Les conditions nécessaires pour que $F = \Pi\sigma$ et $F' = \Pi'\sigma'$ soient formellement isomorphes sont

- i) Π et Π' sont composés du même nombre n d'éclatements.
- ii) si (O_p) et (O'_p) sont les suites de points proches de O associées à F et F' , la suite (Π_p) et (Π'_p) des éclatements aux points (O_p) et (O'_p) respectivement ont même graphe.
- iii) $\text{tr } DF(O) = \text{tr } DF'(O)$

Nous allons voir dans ce § que lorsque la trace est non nulle ces conditions sont aussi suffisantes.

PROPOSITION 1.16.

Soient $F = \Pi\sigma$ et $F' = \Pi'\sigma'$ dont les suites de points proches sont $(O_p)_{p \geq 0}$ et $(O'_p)_{p \geq 0}$ respectivement. Désignons par F^p et F'^p les $p^{\text{ièmes}}$ itérés de F et F' .

Si $O_p = O'_p$ pour tout $p \geq 0$

Alors : 1) Pour tout $p \geq 0$ existe un unique isomorphisme

$$G_p : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

pour lequel

$$F^p = F'^p G_p$$

De plus si σ et σ' sont convergents, G_p est convergent

2) Si (G_p) converge vers un automorphisme formel

$$G : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

alors F et F' sont formellement isomorphes.

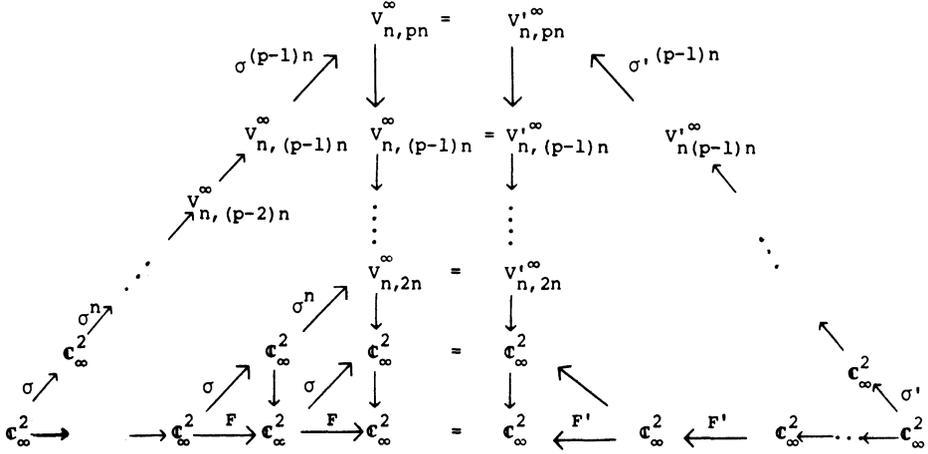
Si F et F' sont convergents et (G_p) converge uniformément dans un voisinage de O vers un automorphisme

$$G : (\mathbb{C}^2, O) \rightarrow (\mathbb{C}^2, O)$$

alors F et F' sont isomorphes.

□ DEMONSTRATION.

Pour tout $p \geq 0$, le diagramme commutatif



montre que si

$$G_p = (\sigma'^{(p-1)n} \dots \sigma')^{-1} (\sigma^{(p-1)n} \dots \sigma)$$

on a

$$F^p = F' P G_p$$

2) Pour tout $p \geq 1$

$$F' P F' G_{p+1} = F^{p+1} = F^p F = F' P G_p F$$

donc

$$F' G_{p+1} = G_p F$$

ce qui donne le résultat si (G_p) converge. □

LEMME 1.17.

Soit $F(z) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1(z)) (1+\theta_2(z))^n, tz_2(1+\theta_2(z)))$

où $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ sont d'ordre ≥ 1 et $0 < |t| < 1$

Alors :

$$1) F^p(z) = (t^{np} z_1^{p-1} z_2^{pn} \prod_{i=0}^{p-1} (1+\theta_1(F^i)) \prod_{i=0}^{p-1} (1+\theta_2(F^i))^{n(p-i)}, t^p z_2 \prod_{i=0}^{p-1} (1+\theta_2(F^i)))$$

2) Si les séries θ_j sont convergentes pour $j=1,2$, les produits

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1+\theta_j(F^i))$$

sont uniformément convergents sur un voisinage de zéro par $j=1,2$.

DEMONSTRATION.

1) est clair par récurrence sur $p \geq 1$.

2) Il suffit de montrer que les séries

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta_j(F^i(z)) \quad j=1,2$$

sont normalement convergentes sur un voisinage de 0.

Choisissons pour cela $0 < r < |t|$ assez petit pour que sur le polydisque $\Delta(r)$

(i) Il existe une constante $M > 0$ vérifiant :

$$|\theta_j(z)| \leq M \|z\|_{\infty} \quad j=1,2, \quad \text{où } \|z\|_{\infty} = \text{Max} \{|z_1|, |z_2|\}.$$

(ii) $|t| (1+Mr) < 1$

Nous allons montrer, par récurrence sur $p \geq 1$ que dans ces conditions

$$\|F^p(z)\|_{\infty} \leq |t|^p \|z\|_{\infty} (1+Mr)^p$$

ce qui donne immédiatement la convergence normale des séries

$$\sum_{i \geq 0} \theta_j(F^i(z))$$

d'après (i).

Pour $p=1$: On a d'après (i) et (ii) :

$$\begin{aligned} |F_1(z)| &\leq |t|^n \|z\|_{\infty} r^n (1+Mr)^{n+1} \leq |t|^n \|z\|_{\infty} (1+Mr) \\ &\leq |t| \|z\|_{\infty} (1+Mr) \end{aligned}$$

$$|F_2(z)| \leq |t| \|z\|_{\infty} (1+Mr).$$

Supposons l'inégalité vérifiée pour $p-1 \geq 1$; alors

$$\begin{aligned} |F_1^p(z)| &\leq |t|^n \frac{(p+1)}{2} \|z\|_{\infty} r^{pn} \prod_{i=0}^{p-1} (1+M \|F^i(z)\|_{\infty}) \prod_{i=0}^{p-1} (1+M \|F^i(z)\|_{\infty})^{n(p-i)} \\ &\leq |t|^n \frac{(p+1)}{2} \|z\|_{\infty} r^{pn} (1+Mr)^p (1+Mr)^{np \frac{(p+1)}{2}} \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence et (ii). En utilisant à nouveau (ii) et $r < |t|$ on en déduit

$$|F_1^p(z)| \leq |t|^{pn} \|z\|_\infty (1+Mr)^p \leq |t|^p \|z\|_\infty (1+Mr)^p.$$

De plus

$$|F_2^p(z)| \leq |t|^p \|z\|_\infty \prod_{i=0}^{p-1} (1+M \|F^i(z)\|_\infty) \leq |t|^p \|z\|_\infty (1+Mr)^p$$

ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 1.18.

Soit $F = \Pi\sigma: \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$, tel que $t = \text{tr } DF(0)$ vérifie
 $t \neq 0$

Alors F est formellement isomorphe à un endomorphisme $F' = \Pi'\sigma' : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$
 qui admet la droite Δ_0 d'idéal (z_1) comme courbe invariante.

\square DEMONSTRATION.

Si (O_p) est la suite de points proches de F , il existe ψ qui envoie (O_p) sur (δ_p) d'après le lemme 1.9.1) ; $F' = \psi F \psi^{-1}$ est l'endomorphisme cherché. \square

LEMME 1.19.

Soit $f(z) = tz+k(z)$ un générateur de l'idéal maximal \mathfrak{M} de $\mathbb{C}[[z]]$ où k est d'ordre ≥ 2 . On suppose que $t \neq 0$ et t n'est pas une racine de l'unité. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ il existe un unique générateur s de \mathfrak{M} tel que

$$(*) \quad s(f(z)) = t s(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial z}(0) = a$$

De plus, si f est une série convergente et $0 < |t| < 1$, s est convergente.

\square DEMONSTRATION.

Posons $s(z) := a z + \theta(z)$ où $a \neq 0$ et θ est d'ordre ≥ 2 , l'équation (*) est équivalente à

$$(**) \quad ak(z) + \theta(f(z)) = t \theta(z).$$

Si on note $k(z) = \sum_{i \geq 2} k_i z^i$, $\theta(z) = \sum_{i \geq 2} \theta_i z^i$, une démonstration par récurrence sur $i \geq 2$ montre que les coefficients θ_i existent et sont uniques.

En effet la comparaison des termes d'ordre 2 donne :

$$ak_2 + \theta_2 t^2 = t \theta_2$$

ce qui détermine θ_2 . Si θ_i est défini pour $i \leq p$, la comparaison des termes de degré $p+1$ donnera :

$$a k_{p+1} + P(\theta_2, \dots, \theta_p, t, k_2, \dots, k_p) + \theta_{p+1} t^{p+1} = t \theta_{p+1}$$

et ainsi θ_{p+1} sera déterminé de façon unique.

Supposons maintenant que f soit une série convergente ; si

$$\sum_{i \geq 0} \frac{k(f^i(z))}{t^i},$$

où f^i est la i -ème itérée de f , est une série convergente, une simple vérification montre que

$$\theta(z) = \frac{a}{t} \sum_{i \geq 0} \frac{k(f^i(z))}{t^i}$$

vérifie (**). Pour cela :

soit $r > 0$, $C > 0$, et $M > 0$ des constantes qui vérifient

- i) $|t| < C < 1$
- ii) $C^2 < |t|$
- iii) $|k(z)| \leq M|z|^2$ si $|z| < r$
- iv) $|t| + Mr < C$

Dans ces conditions :

pour tout $i \geq 1$ $|f^i(z)| \leq C^i |z|$ si $|z| < r$

et donc

$$|\theta(z)| \leq \left| \frac{a}{t} \right| \sum_{i \geq 0} \frac{|k(f^i(z))|}{|t|^i} \leq Mr^2 \left| \frac{a}{t} \right| \sum_{i \geq 0} \left| \frac{C^2}{t} \right|^i < +\infty. \quad \square$$

Le corollaire 1.11 montrait que la courbe invariante de F et son lieu critique étaient transverses. On va maintenant montrer qu'il existe un système de coordonnées ayant précisément ces courbes pour axes dans lequel F s'écrit $(t^n z_1 z_2^n, t z_2)$

PROPOSITION 1.20.

Soit $F = \Pi\sigma: \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ un endomorphisme de \mathbb{C}_∞^2 . On suppose que $t = \text{tr } DF(0)$ vérifie $0 < t < 1$

et que la droite Δ_0 d'idéal (z_1) est invariante par F . Alors :

1) Il existe un automorphisme

$$\phi : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

qui vérifie

(*) $\phi F = N\phi$, où $N(z) := (t^n z_1, z_2^n, t z_2)$.

De plus, ϕ est convergent si σ est convergent.

2) Si $\phi, \phi' : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ sont deux automorphismes vérifiant la propriété (*), il existe $a, b \in \mathbb{C}^*$ uniques tels que

$$b^n = 1 \text{ et } \phi' = h_{a,b} \phi,$$

où $h_{a,b}(z) := (az_1, bz_2)$

□ DEMONSTRATION.

1.a) Un endomorphisme F qui se factorise en $\Pi\sigma$ où Π est générique, peut s'écrire sous la forme $F(z) = (\sigma_1 \sigma_2^n(z) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_2(z)^i, \sigma_2(z))$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$, $\det D\sigma(0) \neq 0$. Comme l'idéal de la courbe invariante est (z_1) , z_1 ne divise pas σ_2 mais doit diviser le premier membre de F ; par conséquent $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ et z_1 divise σ_1 et on a

$$F(z) = (z_1 \mu_1(z) \sigma_2^n(z), \sigma_2(z)) \text{ où } \mu_1(0) \neq 0$$

b) Comme la transformée stricte Δ_n de Δ_0 par Π est transverse à $\Pi^{-1}(0)$, $\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$ et $\sigma^{-1}(\Delta_n) = \Delta_0$ sont aussi transverses; donc il existe un automorphisme ϕ qui envoie $\{z_2=0\}$ sur $\sigma^{-1}(\Pi^{-1}(0))$ en conservant Δ_0 . Dans ce système de coordonnées F se lit

$$F'(z) = \phi^{-1} F \phi(z) = (z_1 \mu_1'(z) z_2^n \mu_2'^n(z), z_2 \mu_2'(z))$$

où $\mu_1'(0) \neq 0$ et $\mu_2'(0) = t \neq 0$.

En remplaçant au besoin F' par $\varphi F' \varphi^{-1}$ où

$$\varphi(z) := (z_1, \beta z_2) \text{ où } \beta^n = \mu_1'(0)$$

on peut supposer que $\mu_1'(0) = 1$. On peut finalement supposer que

$$F(z) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1(z)) (1+\theta_2(z))^n, tz_2(1+\theta_2(z)))$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

où θ_1 et θ_2 sont d'ordre ≥ 1 .

Si σ est convergent, on peut remarquer que ϕ aussi et donc que θ_1 et θ_2 sont convergents. Les endomorphismes F et N ont maintenant même courbe invariante Δ_0 et même lieu critique $\{z_2=0\}$.

c) Restreignons F à Δ_0 . On a :

$$F(0, z_2) = (0, tz_2(1+\theta_2(0, z_2)))$$

D'après le lemme 1.19 avec

$$f(z) = tz_2(1+\theta_2(0, z_2))$$

il existe $s(z_2) = z_2 \pmod{(z_2^2)}$ tel que

$$(**) \quad s(f(z_2)) = ts(z_2)_2$$

Si

$$\varphi(z) = (z_1, s(z_2))$$

φ conserve la courbe invariante et le lieu critique de F, et vu la condition (**)

(***)

$$F'(z) = \varphi F \varphi^{-1}(z) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1'(z))(1+z_1 \theta_2'(z))^n, tz_2(1+z_1 \theta_2'(z)))$$

où $\theta_1'(0) = 0$, c'est à dire F' induit l'homothétie de rapport t sur la courbe invariante.

De plus si θ_2 est convergente, θ_1' et θ_2' le sont aussi.

d) Soit $F(z) = (F_1(z), F_2(z)) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1(z))(1+z_1 \theta_2(z))^n, tz_2(1+z_1 \theta_2(z)))$ et notons $F^i(z) = (F_1^i(z), F_2^i(z))$. Puisque, $F_1^i(z)$ est d'ordre $ni+1$ d'après le lemme 1.17.1) la suite (ϕ_p) où

$$\phi_p(z) = (z_1, z_2 \prod_{i=0}^p (1+F_1^i(z) \theta_2(F^i(z))))$$

converge vers un automorphisme

$$\phi : \mathbb{C}_\infty^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty^2 .$$

En posant

$$\theta_1'(z) = \frac{1 + \theta_1(\phi^{-1}(z))}{\prod_{i=1}^{\infty} \{1 + F_1^i(\phi^{-1}(z)) \theta_2(F^i(\phi^{-1}(z)))\}^n}^{-1} .$$

une simple vérification montre que

$$\phi F = F' \phi$$

où $F'(z) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1'(z)), tz_2)$

En outre d'après le lemme 1.17.2), θ_1' est convergent si F est convergent.

e) Il s'agit maintenant de montrer que si

$$F(z) = (t^n z_1 z_2^n (1+\theta_1(z)), tz_2),$$

F est formellement isomorphe à

$$N(z) = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$$

et même isomorphe à N si F est convergent. Remarquons pour cela que si on cherche un automorphisme de conjugaison ϕ qui conserve courbe invariante et fibre, sous la forme

$$\phi(z) = (z_1(1+\alpha(z)), z_2),$$

la condition

$$\phi F = N \phi$$

est équivalente à

$$(***) \quad (1+\theta_1(z)) (1+\alpha(F)) = 1+\alpha(z).$$

Vu la forme de F , une démonstration par récurrence sur le degré permet de déterminer les coefficients de α de façon unique.

D'autre part, en itérant la relation (***) , on obtient pour tout $p \geq 0$

$$\prod_{i=0}^{p-1} (1+\theta_1(F^i(z))) (1+\alpha(F^p)) = 1+\alpha(z).$$

Comme la suite $(\alpha(F^p))$ converge vers 0, en tant que série formelle, on en déduit que le produit infini converge et que

$$1+\alpha(z) = \prod_{i=0}^{\infty} (1+\theta_1(F^i(z)))$$

c'est à dire

$$\phi(z) = (z_1 \prod_{i=0}^{\infty} (1+\theta_1(F^i(z))), z_2).$$

Dans le cas où θ_1 est convergent, ϕ aussi d'après le lemme 1.17.

2) Si $\phi F = N \phi$ et $\phi' F = N \phi'$ on a

$$\phi' \phi^{-1} N = N \phi' \phi^{-1}$$

le résultat est alors une conséquence de l'exemple 1.22, ci dessous. \square

REMARQUE 1.21. D'après la proposition 1.16, il existe un automorphisme G_p tel que

$$F^p = N^p G_p$$

Avec $F(z) = (t^n z_1 z_2^n (1 + \theta_1(z)), tz_2)$, un calcul direct montre précisément que

$$G_p(z) = F^p N^{-p}(z) = \prod_{i=0}^{p-1} (1 + \theta_1(F^i(z))).$$

La démonstration de la Prop. 1.20 consiste à prouver que la suite (G_p) converge.

EXEMPLE 1.22.

Soit $N(z) = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$ et $\phi(z)$ un automorphisme de \mathbb{C}_∞^2 . Si

$$(*) \quad \phi N = N\phi,$$

ϕ conserve la courbe invariante de N , ainsi que son lieu critique ; par conséquent

$\phi(z) = (az_1(1+\phi'_1(z)), bz_2(1+\phi'_2(z)))$ où $a \neq 0$, $b \neq 0$ la comparaison des secondes coordonnées de $(*)$ donne

$$btz_2(1+\phi'_2(N(z))) = tbz_2(1+\phi'_2(z))$$

donc $\phi'_2 \equiv 0$. En reportant dans les premières coordonnées de $(*)$ on obtient

$$a t^n z_1 z_2^n (1+\phi'_1(N(z))) = t^n az_1(1+\phi'_1(z)) b^n z_2^n$$

c'est à dire

$$b^n = 1 \text{ et } \phi'_1 \equiv 0.$$

Finalement

$$\phi(z) = (az_1, bz_2) \text{ où } a \neq 0 \text{ et } b^n = 1.$$

COROLLAIRE 1.23.

Soient $F = \prod \sigma$ et $F' = \prod \sigma'$ où Π et Π' sont composés de n éclatements et

$$0 < |\text{tr } DF(0)| < 1, \quad 0 < |\text{tr } DF'(0)| < 1$$

Alors : F est formellement isomorphe à F' si et seulement si

$$\text{tr } DF(0) = \text{tr } DF'(0).$$

□ DEMONSTRATION.

Si $\phi F = F' \phi$ on a $D\phi(0) DF(0) = DF'(0) D\phi(0)$, ce qui prouve que $\text{tr } DF(0) = \text{tr } DF'(0)$ puisque la trace est invariante par changement de base.

Réciproquement, si $\text{tr } DF(0) = \text{tr } DF'(0)$, F et F' sont formellement isomorphes d'après le lemme 1.18 et la proposition 1.20. \square

1.24. CHAMPS DE VECTEURS INVARIANTS.

DEFINITION 1.25.

On dira qu'un champ de vecteurs (resp. champ de vecteurs formels) θ défini sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ (resp \mathbb{C}_∞^2) est invariant par

$$F = \Pi\sigma: (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \quad (\text{resp. } F = \Pi\sigma: \mathbb{C}_\infty^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\infty^2)$$

si

$$\theta(F(z)) = DF(z) \cdot \theta(z)$$

EXEMPLE 1.26.

Soit $N(z) := (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$ où $0 < |t| < 1$, $n \geq 1$, et posons :

$$\theta(z) := a(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + b(z) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

où $a, b \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$.

Comme

$$DN(z) = \begin{pmatrix} t^n z_2^n & nt^n z_1 z_2^{n-1} \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

l'équation $\theta(N(z)) = DN(z) \cdot \theta(z)$ est équivalente aux conditions :

i) $a(N(z)) = t^n z_2^n a(z) + nt^n z_1 z_2^{n-1} b(z)$

ii) $b(N(z)) = tb(z)$

D'après ii), par un calcul élémentaire on a

$$b(z) = \beta z_2 \text{ où } \beta \in \mathbb{C}.$$

En remplaçant dans i) on obtient :

iii) $a(N(z)) = t^n z_2^n a(z) + \beta n t^n z_1 z_2^n$

Il est clair que $a(0) = 0$. Posons

$$a(z) = \sum a_I z^I.$$

Il est immédiat que

$$a_{01} = \dots = a_{0n} = 0.$$

De plus, la comparaison des termes de degré $n+1$ donne

$$\beta = 0 \text{ et } a_{0 \ n+1} = 0,$$

celle des termes de degré $n+2$ donne

$$a_I = 0 \text{ si } |I| = 2 \text{ et } a_{0 \ n+2} = 0$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

On montre alors par récurrence sur $p \geq 3$ que
 $a_I = 0$ pour tout $I \neq (1,0)$ et $2 \leq |I| \leq p-1$ et
 $a_{0i} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n+p-1$.

Finalement

$$a(z) = \alpha z_1$$

$$b(z) = 0 \quad \text{et}$$

$$\theta(z) = \alpha z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Les champs θ sont convergents, s'annulent sur la courbe invariante associée à N , et forment un espace vectoriel de dimension 1.

LEMME 1.27.

Soit $F = \Pi\sigma: \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$. On suppose que Π est composé de n éclatements et $t = \text{tr } DF(0)$ vérifie

$$0 < |t| < 1$$

Alors : 1) le \mathbb{C} -espace vectoriel des champs de vecteurs formels invariants par F est de dimension 1; et tout champ formel s'annule sur la courbe formelle invariante par F .

2) Si F est convergent, les champs de vecteurs sont convergents si et seulement si F est isomorphe à

$$N(z) = (t^n z_1^n, tz_2)$$

□ DEMONSTRATION.

1) D'après le corollaire 1.23, il existe un automorphisme

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$$

pour lequel

$$\phi F = N\phi.$$

Dans ces conditions, si θ est un champ invariant par N , le champ formel

$$(*) \quad \mu(z) := D\phi^{-1}(\phi(z)) \cdot \theta(\phi(z))$$

est invariant par F puisque

$$\begin{aligned} \mu(F(z)) &= D\phi^{-1}(\phi F(z)) \cdot \theta(\phi F(z)) = D\phi^{-1}(N\phi(z)) \cdot \theta(N\phi(z)) \\ &= D\phi^{-1}(N\phi(z)) \cdot DN(\phi(z)) \cdot \theta(\phi(z)) \\ &= D(\phi^{-1}N)(\phi(z)) \cdot \theta(\phi(z)) = D(F\phi^{-1})(\phi(z)) \cdot \theta(\phi(z)) \\ &= DF(z) \cdot \mu(z). \end{aligned}$$

D'après l'exemple 1.26 les champs invariants par N sont donnés par $\theta(z) = \alpha z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}$ et forment un espace vectoriel de dimension 1, il en est donc de même pour F et les champs μ s'annulent sur la courbe invariante

$$\Gamma = (\phi_1)$$

2) Supposons F convergent

- . Si F est conjugué à N , les champs μ sont convergents d'après (*)
- . D'après la Proposition 1.10, il existe $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in G(2)$ tel que $\Gamma = (\psi_1)$.

Supposons maintenant F non isomorphe à N . D'après la Proposition 1.20, ψ est divergente, donc ψ_1 est divergente ainsi que Γ . Comme tout champ de vecteurs formel s'annule sur Γ , on en déduit que tout champ non nul est divergent. \square

THEOREME 1.28.

Soit $F = \Pi\sigma: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe d'application où Π est composé de n éclatements et $t = \text{tr } DF(0)$ vérifie

$$0 < |t| < 1$$

Alors : 1) F est formellement isomorphe à N , où

$$N(z) = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$$

2) On a équivalence des propriétés suivantes :

- i) F est isomorphe à N .
- ii) la courbe formelle invariante associée à F est convergente.
- iii) tout champ de vecteurs formel invariant par F est convergent.

\square DEMONSTRATION.

- 1) est un cas particulier du corollaire 1.23.
- 2) i) \Leftrightarrow iii) d'après le lemme 1.27.2).
- iii) \Rightarrow ii) d'après le lemme 1.27.1)
- ii) \Rightarrow i) d'après les Propositions 1.10 et 1.20. \square

1.29 CHAMPS DE VECTEURS GLOBAUX ET VOISINAGE FORMEL DES COURBES RATIONNELLES D'UNE SURFACE DE KATO DE TRACE NON NULLE.

On va traduire en termes de surface les résultats obtenus précédemment sur les champs de vecteurs.

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

DEFINITION 1.30.

On appellera surface d'Inoue de trace $t \neq 0$ et de deuxième nombre de Betti

$b_2(S) = n$, la surface associée au germe d'application

$$N(z) := (t^n z_1 z_2^n, t z_2) \quad 0 < |t| < 1.$$

On notera

$$S_t^n$$

cette surface.

Nous étudierons en détail ces surfaces à l'Exemple 2.2. Nous allons cependant montrer un résultat dû à Enoki ([E1] thm 3.1).

THEOREME 1.31.

Soit S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n$ et $t = \text{tr}(S) \neq 0$. On note Θ le faisceau des champs de vecteurs sur S . Alors

- 1) On a $0 \leq \dim H^0(S, \Theta) \leq 1$ et $2n \leq \dim H^1(S, \Theta) \leq 2n+1$.
- 2) On a équivalence des propriétés suivantes :
 - i) S est isomorphe à S_t^n
 - ii) $\dim H^0(S, \Theta) = 1$
 - iii) $\dim H^1(S, \Theta) = 2n+1$.

□ DEMONSTRATION.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1.27, du théorème 1.28 et de la Proposition I.3.40. □

LEMME 1.32.

Soient S et S' deux surfaces de Kato, F_{C_0} et F'_{C_0} deux germes d'applications respectivement associés à S et S' .

On désigne par D^∞ et D'^∞ les voisinages formels de la réunion des courbes rationnelles de S et S' .

Si F_{C_0} et F'_{C_0} sont formellement isomorphes alors D^∞ et D'^∞ sont isomorphes.

□ DEMONSTRATION.

On désigne par V^∞ (resp V'^∞) le voisinage formel de la réunion des courbes de \tilde{S} (resp. \tilde{S}'), les automorphismes \tilde{g} et \tilde{g}' de \tilde{S} et \tilde{S}' induisent canoniquement des automorphismes de V^∞ et V'^∞ .

si, maintenant ϕ est un automorphisme de \mathbb{C}_∞^2 pour lequel

$$\phi_{C_0}^F = F'_{C'_0} \phi$$

ϕ induit un isomorphisme

$$\phi^\infty : V_{C_0+1}^\infty \rightarrow V_{C'_0+1}^\infty$$

entre les voisinages formels de UC et UC' respectivement dans \tilde{S} et \tilde{S}'
 $C > C_0 \quad C' > C'_0$

qui vérifie

$$\begin{array}{ccc} V_{C_0+1}^\infty & \xrightarrow{\phi^\infty} & V_{C'_0+1}^\infty \\ p_{C_0} \downarrow & & \downarrow p'_{C'_0} \\ \mathbb{C}_\infty^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}_\infty^2 \end{array}$$

Enfin comme

$$p_{C_0} \tilde{g} = F_{C_0} p_{C_0} \quad \text{et} \quad p'_{C'_0} \tilde{g}' = F'_{C'_0} p'_{C'_0}$$

on en déduit que

$$p'_{C'_0} \phi^\infty \tilde{g}' = \phi p_{C_0} \tilde{g} = \phi F_{C_0} p_{C_0} = F'_{C'_0} \phi p_{C_0} = F'_{C'_0} p'_{C'_0} \phi^\infty = p'_{C'_0} \tilde{g}' \phi^\infty$$

ce qui prouve que

$$\phi^\infty \tilde{g}' = \tilde{g}' \phi^\infty$$

et que ϕ^∞ induit un isomorphisme φ^∞ entre D^∞ et D'^∞ . \square

THEOREME 1.33.

Soient S et S' deux surfaces de Kato pour lesquelles

$$n = b_2(S) = b_2(S') \quad \text{et} \quad t = \text{tr}(S) = \text{tr}(S') \neq 0$$

Notons D_0, \dots, D_{n-1} (resp. D'_0, \dots, D'_{n-1}) les n courbes rationnelles de S (resp S') et soit D^∞ (resp D'^∞) le voisinage formel de $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$ (resp $D'_0 \cup \dots \cup D'_{n-1}$).

Alors : pour tout $0 \leq p \leq n-1$ et tout $0 \leq p' \leq n-1$, il existe un isomorphisme

$$\varphi^\infty : D^\infty \rightarrow D'^\infty$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

pour lequel

$$\varphi^{\infty}(D_p) = D'_p,$$

De plus, pour tout $0 \leq q \leq n-1$

$$\varphi^{\infty}(D_q) = D'_q,$$

de sorte que $q-p \equiv q'-p' \pmod{n}$.

□ DEMONSTRATION.

Soit C (resp C') une courbe de \tilde{S} (resp \tilde{S}') telle que $\tilde{\omega}(C) = D_p$ (resp $\omega'(C') = D'_p$) et F_C (resp F'_C) le germe d'application associé à C (resp C'). D'après le corollaire 1.23, il existe un automorphisme $\phi : \mathbb{C}_{\infty}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}^2$ tel que $\phi F_C = F'_C \phi$. On conclut par le lemme 1.32 et en remarquant que l'isomorphisme ϕ^{∞} induit par ϕ est compatible avec les relations d'ordre sur $\mathcal{C}(\tilde{S})$ et $\mathcal{C}(\tilde{S}')$. □

§ 2. DIVISEURS D'UNE SURFACE DE KATO.

2.1. Courbes elliptiques.

On commence par étudier les surfaces d'Inoue S_t^n , qui nous donnent des exemples de surfaces de Kato contenant une courbe elliptique. Nous verrons que cette propriété caractérise les surfaces S_t^n .

Exemple 2.2 Surface d'Inoue S_t^n :

a) Courbes :

Les n éclatements qui composent $N(z) = (t^n z_1 z_2^n, tz_2)$ donnent n courbes rationnelles D_0, \dots, D_{n-1} non singulières qui vérifient les conditions suivantes :

- . pour tout $0 \leq i \leq n-1$ $D_i \cdot D_j = 1$ si et seulement si $j-i \equiv \pm 1 \pmod{n}$.
- . pour tout $0 \leq i \leq n-1$ $D_i^2 = -2$

D'autre part, la courbe invariante $\{z_1 = 0\}$ par N induit une courbe E , qui est elliptique puisque par construction

$$E = \mathbb{C}^* / \{t^p | p \in \mathbb{Z}\}.$$

D'après le lemme 1.4

$$E \cdot D_i = 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq n-1$$

Dans ce qui suit, nous reproduisons la démonstration de [10] (donnée dans le cas $n = 1$).

On a; $E^2 = -n$.

Remarquons pour cela que

$$\begin{aligned} N : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ (z_1, z_2) &\rightarrow (t^n z_1 z_2^n, tz_2) \end{aligned}$$

donne par passage au quotient un fibré en droites sur E .

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / \{N^p | p \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}^* / \{t^p | p \in \mathbb{Z}\} = E$$

où l'espace total est isomorphe à $S \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} D_i$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

Comme N se prolonge en \bar{N} à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ notons

$$R := \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* / \{ \bar{N}^p \mid p \in \mathbb{Z} \}$$

et E_∞ le diviseur $\{(\infty, z_2)\} / \{ \bar{N}^p \}$. On identifie $S \setminus UD_1$ et $R \setminus E_\infty$, et E avec la section nulle.

Considérons la section holomorphe sur \mathbb{C}^*

$$f(z_2) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^{nk(k-1)/2} z_2^{n(k-1)}$$

On a :

$$(*) \quad f(tz_2) = \frac{f(z_2)}{t^n z_2^n}, \quad \text{et sur } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$$

$z_1 \cdot f(z_2)$ est invariante par N : on en déduit que

$$z_1 \cdot f(z_2)$$

est une fonction méromorphe sur R .

Soit ζ_1, \dots, ζ_n les n racines n èmes de -1 ; on a pour tout $1 \leq i \leq n$, en regroupant deux à deux les termes d'indices k et $-(k-1)$

$$f(\zeta_i) = 0.$$

On en déduit d'après (*) que f a n zéros sur les cercles de rayons $|t|^p$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Comme de plus pour $a > 0$ on a d'après (*)

$$\int_{|z|=a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{|z|=|t|a} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi n,$$

f n'a, d'après le théorème des résidus que les zéros indiqués précédemment.

En notant L une fibre de R , on en déduit que

$$E - E_\infty + nL = (z_1 f(z_2)) \text{ est homologue à } 0.$$

Comme

$$L \cdot E = 1$$

on a

$$E^2 = E \cdot (E_\infty - nL) = -n.$$

b) Fibré canonique :

D'après le Lemme I.3.20 la recherche d'une 2-forme différentielle méro-

morphe sur S_t^n est équivalente à la recherche d'un germe de deux-forme différentielle méromorphe

$$\omega(z) = \frac{a(z)}{b(z)} dz_1 \wedge dz_2$$

invariant par N c'est-à-dire qui vérifie

$$\frac{a(N(z))}{b(N(z))} \det DN(z) dz_1 \wedge dz_2 = \frac{a(z)}{b(z)} dz_1 \wedge dz_2 .$$

Comme $\det DN(z) = t^{n+1} z_2^n$, $a(z)$ et $b(z)$ doivent vérifier

$$\frac{a(N(z))}{b(N(z))} t^n z_1^n z_2^n = \frac{a(z)}{b(z)} z_1 z_2 .$$

Mais ceci signifie précisément que

$$\frac{a(z)}{b(z)} z_1 z_2$$

est une fonction méromorphe invariante par N . Comme les seules fonctions méromorphes sur S_t^n sont les constantes, il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{a(z)}{b(z)} = \frac{C}{z_1 z_2}$$

c'est-à-dire

$$\omega(z) = \frac{C}{z_1 z_2} dz_1 \wedge dz_2 .$$

Par conséquent, si K désigne le fibré canonique

$$\dim H^0(S_t^n, \mathcal{M} \otimes K) = 1 \quad \text{et}$$

$$K = [-(D_0 + \dots + D_{n-1}) - E]$$

En particulier

$$\begin{aligned} K^2 &= (D_0 + \dots + D_{n-1})^2 + 2E \cdot (D_0 + \dots + D_{n-1}) + E^2 \\ &= -n \end{aligned}$$

LEMME 2.3

Soit S une surface de Kato. Alors

S contient une courbe non rationnelle E si et seulement si tout germe

d'application F associé à S admet une courbe invariante Γ .

□ DEMONSTRATION.

1) Supposons que E soit une courbe non rationnelle de S

Soit $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ le revêtement universel de S et $E = \tilde{\omega}^{-1}(E)$.

Comme \tilde{g} est contractant en $\underline{0}$ d'après la Proposition I.1.13 \tilde{E} rencontre tout voisinage du bout $\underline{0}$. Soit C une courbe compacte de \tilde{S} et $p_C : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}_C$ l'effondrement de \tilde{S} sur \hat{S}_C . Comme d'après la proposition I.3.4 $p_C^{-1}(\hat{O}_C)$ contient exactement les courbes rationnelles C' de \tilde{S} telles que $C' \supset C$ et p_C sur un isomorphisme en dehors de $p_C^{-1}(\hat{O}_C)$, $p_C(\tilde{E})$ est une courbe de $\hat{S}_C \setminus \hat{O}_C$ dont \hat{O}_C est un point adhérent. Donc $\Gamma_C = \overline{p_C(\tilde{E})}$ est une courbe passant par \hat{O}_C .

Comme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{S} \\ p_C \downarrow & & \downarrow p_{C+n} \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{\sigma^{C+n}} & \hat{S}_{C+n} \end{array}$$

est commutatif d'après la proposition I.3.9 on en déduit avec la proposition I.3.4.2)

$$\begin{aligned} p_C(\Gamma_C \setminus \hat{O}_C) &= \pi_{C+n}^C \sigma_C^{C+n}(\Gamma_C \setminus \hat{O}_C) = \pi_{C+n}^C \sigma_C^{C+n} p_C(\tilde{E}) \\ &= \pi_{C+n}^C p_{C+n} \tilde{g}(\tilde{E}) = \pi_{C+n}^C p_{C+n}(\tilde{E}) = p_C(\tilde{E}) = \Gamma_C \setminus \hat{O}_C \end{aligned}$$

c'est-à-dire Γ_C est invariante par F .

2) Soit $F = F_C$ un germe associé à S et Γ une courbe invariante par F .

D'après la proposition 1.10 Γ est non singulière; alors d'après le lemme 1.4,

$$\tilde{E} = p_C^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})$$

est une courbe irréductible non singulière non compacte de \tilde{S} , invariante par \tilde{g} et donc induit une courbe E sur S . Cette courbe est non rationnelle, puisque $\tilde{\omega} : \tilde{E} \rightarrow E$ est un revêtement. □

THEOREME 2.4

Soit S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n \geq 1$.

Alors : 1) S contient exactement n courbes rationnelles D_0, D_1, \dots, D_{n-1} .

2) S contient une courbe non rationnelle E si et seulement si S est isomorphe à la surface d'Inoue S_t^n .

Dans ce cas E est unique, elliptique et vérifie

$$E^2 = -n, \quad E \cdot D_i = 0 \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

3) Les seules fonctions méromorphes sur S sont les constantes et S est dans la classe VII_0 de Kodaira.

□ DEMONSTRATION :

- 1) Soit $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ le revêtement universel de S et $\mathcal{C}(\tilde{S})$ l'ensemble des courbes compactes de \tilde{S} . On sait qu'elles sont toutes rationnelles (Prop. I.11) et que $\tilde{\omega}(C_i) = \tilde{\omega}(C_{i+n})$, ce qui donne n courbes rationnelles dans S . Comme pour toute courbe rationnelle C de S , $\tilde{\omega}^{-1}(C)$ est réunion d'une famille de courbes rationnelles de \tilde{S} il n'y en a pas d'autres.
- 2) L'assertion résulte immédiatement du lemme 3.3, du Théorème 1.28 et de l'exemple 2.2.
- Enfin 3) résulte du fait que S ne contient qu'un nombre fini de courbes. □

2.5. QUELQUES MATRICES ECRITES SUR UN TORE :

Les matrices que nous allons introduire se révèleront au §2.24 les opposées des matrices d'intersection des courbes rationnelles d'une surface de Kato. Nous allons voir que ces matrices sont positives et voir dans quels cas elles sont définies positives. Commençons cependant par rappeler et raffiner les Définitions I.3.26 et I.3.27.

DEFINITION 2.6.:

- 1) On note pour tout entier $n \geq 1$, A_n l'ensemble des familles d'entiers $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, périodiques de période n qui vérifient
- i) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $2 \leq a_i \leq n+2$
- ii) si $a_i = \ell \geq 4$, on a pour tout $i+1 \leq j \leq i+\ell-3$
- $$a_j = 2$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

2) On dira que la p -séquence (a_i, \dots, a_{i+p-1}) est singulière si

$$(a_i, \dots, a_{i+p-1}) = (p+2, 2, \dots, 2)$$

On notera s_p cette p -séquence.

3) On dira que la p -séquence (a_i, \dots, a_{i+p-1}) est régulière si

$$a_{i+k} = 2 \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq p-1, \text{ et}$$

(a_i, \dots, a_{i+p-1}) n'a aucun terme commun avec une séquence singulière.

On notera r_p cette p -séquence.

4) On appellera séquence caractéristique de $a \in \Lambda_n$ une n -séquence

(a_i, \dots, a_{i+n-1}) qui commence par une séquence singulière ou régulière.

On notera K_n une telle n -séquence.

Si la décomposition de K_n en séquences régulières ou singulières est

$$K_n = \sigma_1 \dots \sigma_\ell$$

on notera suivant les besoins

$$a = \overline{(a_i, \dots, a_{i+n-1})} = \overline{(\sigma_1 \dots \sigma_\ell)}.$$

5) On notera : $\sigma_n(a)$ l'entier $\sum_{j=i}^{i+n-1} a_j$;

$v_n(a)$ le nombre d'indices $j \leq i \leq j+n-1$ pour lesquels $a_j = n+1$

$\sigma_n(a)$ et $v_n(a)$ sont indépendants de $j \in \mathbb{Z}$.

LEMME 2.7.

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } n = 2 & v_n(a) = 0, 1 \text{ ou } 2 . \\ \text{si } n \geq 3 & v_n(a) = 0 \text{ ou } 1 . \end{array} \right.$$

□ DEMONSTRATION :

Comme $2n \leq \sigma_n(a) \leq 3n$, $v_n(a)$ doit vérifier

$$v_n(a) (n-1) \leq n \quad \square$$

DEFINITION 2.8 :

On note pour tout entier $n \geq 2$ \mathcal{A}_n l'ensemble des matrices symétriques de type (n, n) définies de la façon suivante :

A tout $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}_n$ on associe une matrice

$$M(a) = (m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$$

définie par :

i) $m_{ii} = a_i$ si $a_i \neq n+1$

$m_{ii} = n-1$ si $a_i = n+1$

ii) Soient $0 \leq i < j \leq n-1$ et posons $a_i = k$, $a_j = \ell$

. $m_{ij} = m_{ji} = -2$ si $k + \ell \equiv 2 \pmod{n}$ et $i+k-1 \equiv j \pmod{n}$

. $m_{ij} = m_{ji} = -1$ si $k + \ell \not\equiv 2 \pmod{n}$ et $(i+k-1 \equiv j$ ou $j+\ell-1 \equiv i \pmod{n})$

. $m_{ij} = m_{ji} = 0$ dans les autres cas.

DEFINITION 2.9.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de type (n, n) .

1) On dira que M est irréductible si pour tout couple (i, j) d'indices, il existe des indices

$$0 \leq k_1, \dots, k_p \leq n-1$$

tels que

$$m_{ik_1} \neq 0, m_{k_1 k_2} \neq 0, \dots, m_{k_p j} \neq 0$$

On appellera une telle suite d'indices une chaîne.

On dira que M est réductible si M n'est pas irréductible.

2) On dira que M est à diagonale dominante, si pour tout $0 \leq i \leq n-1$

on a

$$(*) \quad |m_{ii}| - \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \geq 0$$

et s'il existe au moins un indice j pour lequel l'inégalité (*) est stricte.

Le critère de positivité suivant est bien connu :

LEMME 2.10

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de type (n,n) symétrique irréductible et à diagonale dominante. On suppose que pour tout $0 \leq i \leq n-1$

$$m_{ii} > 0$$

Alors M est définie positive.

□ DEMONSTRATION : 1) Posons $\Lambda_i := \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$

$$\begin{aligned} \text{On a pour tout } x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j &= \sum_i m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} m_{ij} x_i x_j \\ &\geq \sum_i \left(\sum_{j \neq i} |m_{ij}| \right) x_i^2 - 2 \sum_{i < j} |m_{ij}| |x_i| |x_j| \\ &= \sum_{i < j} |m_{ij}| x_i^2 + \sum_{i < j} |m_{ij}| x_j^2 - 2 \sum_{i < j} |m_{ij}| |x_i| |x_j| \\ &= \sum_{i < j} |m_{ij}| (|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que M est positive.

Pour voir que M est définie positive, il suffit de montrer que 0 n'est pas valeur propre.

2) Supposons que 0 soit valeur propre et soit $x \in \text{Ker } M$ tel que $\|x\|_\infty = 1$;

comme pour tout $0 \leq i \leq n-1$ $\sum_j m_{ij} x_j = 0$, pour tout indice i tel que

$|x_i| = 1$ on a d'après (*)

$$(**) \quad \Lambda_i \leq m_{ii} = m_{ii} |x_i| \leq \sum_{j \neq i} m_{ij} |x_j| \leq \Lambda_i$$

Par conséquent si $m_{ij} \neq 0$ on a $|x_j| = 1$.

3) Fixons un indice $0 \leq k \leq n-1$ et soit $0 \leq i \leq n-1$ tel que $|x_i| = 1$.

Comme M est irréductible, il existe des indices j_1, \dots, j_p pour lesquels

$$m_{ij_1} \neq 0, m_{j_1 j_2} \neq 0, \dots, m_{j_p k} \neq 0$$

Une utilisation itérée de 2) montre alors que $|x_k| = 1$. D'après (**) cela

signifie que

$$m_{kk} = \Lambda_k ;$$

l'indice k ayant été choisi arbitrairement cela contredit l'hypothèse suivant

laquelle M est à diagonale dominante. \square

LEMME 2.11

Soit $M(a) = (m_{ij}) \in \mathcal{A}_n$. Alors

- 1) $\text{Tr}(M(a)) = \sigma_n(a) - 2v_n(a)$
- 2) $M(a)$ est réductible si et seulement si toute séquence caractéristique de a est formée d'un nombre pair de séquences singulières.

En particulier, si $M(a)$ est réductible, $\sigma_n(a) = 3n$, et il existe une unique partition de $\{0, \dots, n-1\}$ en deux parties I et J de sorte que les matrices

$$(m_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{et} \quad (m_{ij})_{i,j \in J}$$

soient irréductibles, et $(m_{ij})_{i \in I, j \in J} = 0$ $(m_{ij})_{i \in J, j \in I} = 0$

$$3) \sum_{i=0}^{n-1} (m_{ii} - \sum_{j \neq i} |m_{ij}|) = \sum_{i=0}^{n-1} (m_{ii} + \sum_{j \neq i} |m_{ij}|) = \sigma_n(a) - 2n.$$

\square DEMONSTRATION :

1) Résulte immédiatement de la Déf. 2.8 .

2) D'après la Déf. 2.8 , si $m_{ii} = k$ et $m_{jj} = l$,

$$m_{ij} \neq 0 \iff (i+k-1 \equiv j \pmod{n} \quad \text{ou} \quad j+l-1 \equiv i \pmod{n}) .$$

En particulier, lorsque $m_{ii} = 2$ et $j \equiv i+1 \pmod{n}$, on a $m_{ij} \neq 0$.

. Lorsque $a = \overline{(2, 2, \dots, 2)}$ il est clair que

$$M(a) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & -1 \\ -1 & & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ -1 & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

est irréductible.

. Lorsque a contient au moins une séquence régulière r et une séquence singulière, une séquence caractéristique de a peut s'écrire :

$$rs \dots s_1 s_2 \dots s_k$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

où s_1, s_2, \dots, s_k sont des séquences singulières, avec éventuellement $k=1$ ou $s=s_1$. Il est immédiat de voir que tout élément de la séquence caractéristique est relié à un élément de s_k ou r ; dans ces conditions, pour voir que $M(a)$ est irréductible, il suffit de montrer que tout indice i de r ou de s_k peut être relié au premier indice j de s par une chaîne (j_1, \dots, j_ρ) , ce qui est clair.

Lorsque a ne contient que des séquences singulières, c'est-à-dire

$\sigma_n(a) = 3n$, on peut écrire

$$a = (\overline{s_1, \dots, s_p})$$

Comme : le premier indice de s_i est relié par une chaîne au premier indice de s_j si $j \equiv i+2 \pmod{n}$

. tous les indices i' de s_i pour lesquels $a_{i'} = 2$ sont reliés par une chaîne au premier indice de s_j si $j \equiv i'+1 \pmod{n}$,

on en déduit que $M(a)$ est réductible si et seulement si p est pair et dans ce cas on a la partition voulue.

3) a) si a ne contient pas $n+1$:

Soit $0 \leq i \leq n-1$, et $j \equiv i+a_1-1 \pmod{n}$.

Puisque a ne contient pas $n+1$, i n'est pas congru à $j \pmod{n}$, donc à tout indice $0 \leq i \leq n-1$, on associe un indice $j \neq i$ pour lequel

$$m_{ij} \neq 0 \text{ et } m_{ji} \neq 0,$$

c'est-à-dire à tout $0 \leq i \leq n-1$ on associe deux coefficients de $M(a)$ non nuls. Comme tout coefficient non nul de $M(a)$ est obtenu de cette façon, il s'agit de voir dans quels cas il existe deux indices i' et i'' auxquels on associe la même paire de coefficients de $M(a)$, c'est-à-dire des indices i' et i'' pour lesquels :

$$(i', j') = (j'', i'') \text{ , où } j' = i' + a_1 - 1 \text{ et } j'' = i'' + a_1 - 1.$$

Or :

$$(i', j') = (j'', i'') \iff \begin{cases} i' = i'' + a_1 - 1 \\ i'' = i' + a_1 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} i' = i'' + a_1 - 1 \\ a_1 + a_1 = 2 \pmod{n} \end{cases}$$

D'après la Déf. 2.8 on en déduit que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij}) = \text{Tr}(M(a)) - 2n = \sigma_n(a) - 2n .$$

b) Si a contient n+1 : on peut supposer que $a_0 = n+1$; alors les matrices correspondantes sont :

$$M(n+1, 2, \dots, 2) = \begin{pmatrix} n-1 & & & & & & & & & -1 \\ & 2 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ -1 & & & & & -1 & 2 & & & \end{pmatrix} \quad M(n+1, 2, \dots, 2, 3) = \begin{pmatrix} n-1 & & & & & & & & & -1 \\ & 2 & -1 & & & & & & & \\ & -1 & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ -1 & & & & & 2 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 3 & & & \end{pmatrix}$$

avec, dans le cas $n=2$ la matrice supplémentaire

$$M(\overline{3,3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement dans tous ces cas, d'après 1), que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij}) = \text{Tr}(M(a)) - 2n + 2v_n(a) = \sigma_n(a) - 2n \quad \square$$

LEMME 2.12.

Soit $M(a) \in \mathcal{A}_n$. Si $M(a)$ est à diagonale dominante, alors $M(a)$ est définie positive.

□ DEMONSTRATION :

Si $M(a)$ est irréductible, c'est un cas particulier du Lemme 2.10 .

Si $M(a)$ est réductible, alors d'après le Lemme 2.11.2) $M(a)$ se décompose en deux blocs irréductibles; comme $\sigma_n(a) = 3n$ chaque bloc est à diagonale dominante; on conclut à nouveau par le Lemme 2.10. □

On va voir que lorsque $\sigma_n(a) > 2n$, $M(a)$ est définie positive. Si $M(a)$ est à diagonale dominante, nous venons de le voir; la difficulté provient des matrices qui ne sont pas à diagonale dominante, par exemple

$$M(\overline{3,2,2}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La (p+1)-ième ligne (ou colonne) n'est pas à diagonale dominante; on va compenser cette déficience par l'excédent des deux premières lignes. On a :

$$M(\overline{s_r}_{p, n-p}) = P_{0n-1}(1) + P_{0,p+1}(p+1) + P_{12}(2) + P_{23}(\frac{3}{2}) + \dots + P_{p-1,p}(\frac{p}{p-1}) + P_{p,p+1}(\frac{p+1}{p})$$

$$+ \begin{pmatrix} \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ \dots & \dots \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ p+1 \\ n-1 \end{matrix}$$

$$= P_{0n-1}(1) + P_{0p+1}(p+1) + P_{12}(2) + \dots + P_{p,p+1}(\frac{p+1}{p}) + P_{p+1,p+2}(1) + \dots + P_{n-2,n-1}(1)$$

c'est-à-dire $M = M(\overline{s_r}_{p, n-p})$ est la somme de n matrices positives; par conséquent M est positive; de plus si

$${}^t_x M x = 0 ,$$

cela se traduit d'après le lemme 3.13 par les équations

$$\begin{aligned} \sqrt{p+1} x_0 - \frac{x_{p+1}}{\sqrt{p+1}} &= \sqrt{2} x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{2}} = \dots = \sqrt{\frac{p+1}{p}} x_p - \sqrt{\frac{p}{p+1}} x_{p+1} \\ &= x_{p+1} - x_{p+2} = \dots = x_{n-2} - x_{n-1} = x_0 - x_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

qui prouvent

$$x = 0$$

c'est-à-dire, les formes linéaires

$$x \rightarrow \sqrt{{}^t_x P_{\alpha\beta}(k)} x$$

sont toutes linéairement indépendantes, et M est définie positive.

... cependant si on considère

$$M(3 \ 3 \ 2 \ 2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice 2 n'est plus excédentaire, ce qui empêche d'appliquer directement le procédé de l'Exemple 2.14 . Nous allons donc préciser dans quelles conditions les matrices M(a) ne sont pas à diagonale dominante et raffiner

le procédé précédent.

LEMME 2.15

Soit $M(a) = (m_{ij}) \in \mathcal{A}_n$. Alors :

1) Pour tout $0 \leq i \leq n-1$

$$-1 \leq m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij} .$$

De plus

$$m_{ii} + \sum_{j \neq i} m_{ij} = -1$$

si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que

$$(a_{i-k-1}, \dots, a_i) = (s_k, r_2) = (k+2, 2, \dots, 2)$$

2) Soit $0 \leq i \leq n-1$ pour lequel $a_i = \ell \geq 4$. Alors, si $j \equiv i+1 \pmod{n}$

$$0 \leq m_{jj} + \sum_{p \neq j} m_{jp} .$$

De plus

$$m_{jj} + \sum_{p \neq j} m_{jp} = 0$$

si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que

$$(a_{i-k}, \dots, a_i, a_{i+1}) = (s_k, a_i, a_{i+1}) = (k+2, 2, \dots, 2, \ell, 2).$$

□ DEMONSTRATION :

claire d'après les Définitions 2.6.1) et 2.8. □

Le procédé de l'exemple 2.14 ne peut pas être appliqué à $s_p r_q$ ($q \geq 2$) lorsque :

1) La ligne (ou colonne) correspondant au premier indice de s_p n'est pas suffisamment excédentaire, c'est-à-dire lorsque a contient la $(k+p+q+1)$ -séquence

$$s_k r_1 s_p r_q$$

2) La ligne (ou colonne) correspondant au deuxième indice de s_p (s'il existe !) n'est pas suffisamment excédentaire, c'est-à-dire, d'après le Lemme 2.15.2) lorsque a contient la $(k+p+q)$ -séquence

$$s_k s_p r_q$$

Cette remarque justifie la

DEFINITION 2.16

Soit $a \in A_n$. On appelle séquence complète de a toute séquence

$$c = \sigma_1 \dots \sigma_N s_p r_q$$

telle que :

i) $q \geq 2$

ii) Pour tout $1 \leq i \leq N$ σ_i est soit une séquence singulière s_k , soit une séquence $s_k r_1$.

iii) a contient la séquence $r_{q'} \sigma_1 \dots \sigma_N s_p r_q$ où $q' \geq 2$.

LEMME 2.17

Soit $a \in A_n$. On suppose que a contient une $(p+q)$ -séquence $s_p r_q$, où $q \geq 2$. Alors : il existe une unique partition de a en séquences complètes.

$$a = \overline{(c_1 \dots c_N)}$$

□ DEMONSTRATION.

évidente. □

DEFINITION 2.18

Soit $M(a) = (m_{ij}) \in \mathcal{A}_n$ et $c = (a_\alpha, \dots, a_\beta)$ une séquence complète de a .

On appelle bloc complet de $M(a)$ associé à c , la sous-matrice

$$B := (m_{ij})_{\alpha \leq i, j \leq \beta}$$

LEMME 2.19

Soit $M(a) = (m_{ij}) \in \mathcal{A}_n$. On suppose que $M(a)$ n'est pas à diagonale dominante. Alors modulo une permutation circulaire des coordonnées, il existe $N \geq 1$ et des indices

$$\alpha_1 = 0 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{N+1} = n$$

tels que les sous-matrices

$$B_k := (m_{ij})_{\alpha_k \leq i, j \leq \alpha_{k+1} - 1} \quad 1 \leq k \leq N$$

soient des blocs complets de $M(a)$, et les seuls coefficients non nuls

une matrice de type $(k+2, k+2)$ où $k \geq 2$, $\alpha \geq 2$, $1 < \beta \leq 2$

Alors : $N = P_{0, k+1}(\alpha) + P_{12}(\beta) + P_{23}(\varphi^1(\beta)) + \dots + P_{k-1, k}(\varphi^{k-2}(\beta)) + N'$

où

$$N' = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \begin{matrix} a' & b \\ b & c' \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ k+1 \end{matrix}$$

et $a' = a + \varphi^{k-1}(\beta)$, $c' = c + \varphi(\alpha)$

3) On a : $N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & b \\ -1 & b & c+2 \end{pmatrix} = P_{02}(\alpha) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & b \\ 0 & b & c' \end{pmatrix}$ où $\alpha \geq 2$, et $c' = c + \varphi(\alpha)$

□ DEMONSTRATION :

1) On montre par récurrence sur $p \geq 1$ que $\varphi^p(\beta) = \frac{(p+1)\beta - p}{p\beta - (p-1)}$. En effet, c'est clair pour $p = 1$ et

$$\varphi^{p+1}(\beta) = \varphi(\varphi^p(\beta)) = 2 - \frac{p\beta - (p-1)}{(p+1)\beta - p} = \frac{(p+2)\beta - (p+1)}{(p+1)\beta - p}$$

Comme $\psi(x) = \frac{(x+1)\beta - x}{x\beta - (x-1)} = \frac{x(\beta-1) + \beta}{x(\beta-1) + 1}$ vérifie : $\psi(1) = 2 - \frac{1}{\beta}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 1$

$$\text{et } \psi'(x) = - \frac{(\beta-1)^2}{(x(\beta-1) + 1)^2} < 0$$

on a le résultat.

2) et 3) sont clairs. □

LEMME 2.21

Soit $M(a) = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. On suppose que $a = (\bar{c})$, où c est une n -séquence complète.

Alors la matrice $M(a)$ admet une décomposition en n matrices de la forme

$P_{\alpha\beta}(\ell)$ parmi lesquelles $P_{0, n-1}(1)$, de sorte que les formes linéaires

$$x \rightarrow \sqrt{x} P_{\alpha\beta}(\ell) x$$

soient linéairement indépendantes. En particulier $M(a)$ est définie positive.

□ DEMONSTRATION :

1) On suppose que $c = s_{k_1} \dots s_{k_N} r_q$ où $N \geq 1$ et $q \geq 2$.

a) on définit par récurrence α_i , et éventuellement β_i de la façon sui-

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

vante pour $1 \leq i \leq N$:

$k_1 = 1$	$k_1 \geq 2$
$\alpha_1 = 2$	$\alpha_1 = k_1 + 1$ $\beta_1 = 2^1$

$i = 2$	$k_1 = 1$	$k_1 \geq 2$
$k_2 = 1$	$\alpha_2 = 3$	$\alpha_2 = 1 + \varphi^{k_1-1}(2)$
$k_2 \geq 2$	$\alpha_2 = k_2 + 2$ $\beta_2 = \varphi(2)$	$\alpha_2 = k_2 + \varphi^{k_1-1}(2)$ $\beta_2 = \varphi(k_1 + 1)$

$i > 2$	$k_{i-1} = 1$	$k_{i-1} \geq 2$
$k_i = 1$	$\alpha_i = 1 + \varphi(\alpha_{i-2})$	$\alpha_i = 1 + \varphi^{k_{i-1}-1}(\beta_{i-1})$
$k_i \geq 2$	$\alpha_i = k_i + \varphi(\alpha_{i-2})$ $\beta_i = \varphi(\alpha_{i-1})$	$\alpha_i = k_i + \varphi^{k_{i-1}-1}(\beta_{i-1})$ $\beta_i = \varphi(\alpha_{i-1})$

où $\varphi^p(\beta) = \frac{(p+1)\beta - p}{p\beta - (p-1)}$; de plus même si $k_N = 1$, on pose $\beta_N = \varphi(\alpha_{N-1})$

b) On montre par récurrence sur $i \geq 2$ que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } k_i = 1 \quad \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi(\alpha_{i-1})} = 1 \\ \text{si } k_i \geq 2 \quad \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi^{k_i-1}(\beta_i)} = 1 \end{array} \right.$$

Cas $i = 2$

. si $k_1 = k_2 = 1$, $\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\varphi(\alpha_1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = 1$

. si $k_1 \geq 2, k_2 = 1$, $\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\varphi(\alpha_1)} = \frac{1}{1 + \varphi^{k_1-1}(2)} + \frac{1}{\varphi(k_1 + 1)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 + 1}{k_1}} + \frac{1}{2 - \frac{1}{k_1 + 1}} = 1$

. si $k_1 = 1, k_2 \geq 2$ $\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\varphi^{k_2-1}(\beta_2)} = \frac{1}{k_2 + 2} + \frac{1}{\varphi^k(2)} = 1$

. si $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2$ $\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\varphi^{k_2-1}(\beta_2)} = \frac{1}{k_2 + \varphi^{k_1-1}(2)} + \frac{1}{\varphi^2(k_1 + 1)} = 1$

Cas $i > 2$: On a d'après l'hypothèse de récurrence :

. si $k_i = k_{i-1} = 1$, $\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi(\alpha_{i-1})} = \frac{1}{1 + \varphi(\alpha_{i-2})} + \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha_{i-1}}} = \frac{1}{1 + \varphi(\alpha_{i-2})} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi(\alpha_{i-2})}} = 1$

. si $k_i = 1, k_{i-1} \geq 2$, $\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi(\alpha_{i-1})} = \frac{1}{1 + \varphi^{k_{i-1}-1}(\beta_{i-1})} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi^{k_{i-1}-1}(\beta_{i-1})}} = 1$

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{ si } k_i \geq 2, k_{i-1} = 1, \quad \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi^{k_i-1}(\beta_i)} &= \frac{1}{k_i + \varphi(\alpha_{i-2})} + \frac{1}{\varphi^{k_i}(\alpha_{i-1})} = \\
 &= \frac{1}{k_i + \varphi(\alpha_{i-2})} + \frac{k_i \alpha_{i-1} - k_i + 1}{(k_i + 1) \alpha_{i-1} - k_i} \\
 &= \frac{1}{k_i + \varphi(\alpha_{i-2})} + \frac{1 + (k_i - 1) / \varphi(\alpha_{i-2})}{1 + k_i / \varphi(\alpha_{i-2})} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \text{ si } k_i \geq 2, k_{i-1} \geq 2, \quad \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\varphi^{k_i-1}(\beta_i)} &= \frac{1}{k_i + \varphi^{k_{i-1}-1}(\beta_{i-1})} + \frac{1}{\varphi^{k_i}(\alpha_{i-1})} = \\
 &= \frac{1}{k_i + \frac{1}{1 - 1/\alpha_{i-1}}} + \frac{k_i \alpha_{i-1} - k_i + 1}{(k_i + 1) \alpha_{i-1} - k_i} = 1
 \end{aligned}$$

c) Grâce au Lemme 3.20, on va montrer que, en posant $k_0 = 0$,

$$(*) \left\{ \begin{aligned}
 M(\bar{c}) &= P_{0n-1}(1) + \sum_{i=1}^N \left\{ P_{k_1 + \dots + k_{i-1}, k_1 + \dots + k_{i+1}}(\alpha_i) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{k_i-1} P_{k_1 + \dots + k_{i-1} + \ell, k_1 + \dots + k_{i-1} + \ell + 1}(\varphi^{\ell-1}(\beta_i)) \right\} \\
 &\quad + P_{k_1 + \dots + k_N, k_1 + \dots + k_{N+1}}(\varphi^{k_N-1}(\beta_N)) + \sum_{j=k_1 + \dots + k_N + 1}^{n-2} P_{j, j+1}(1)
 \end{aligned} \right.$$

(Si β_i n'a pas été défini, les termes correspondants sont nuls).

Pour $N = 1$ c'est l'exemple 3.14 et si $N > 1$, on montre par récurrence sur $1 \leq r \leq N-1$ grâce au lemme 2.20 que

$$M(\bar{c}) = P_{0n-1}(1) + \sum_{i=1}^r \left\{ \dots \right\} + \left(\begin{array}{c|c} \text{O} & \text{O} \\ \hline \text{O} & \begin{array}{c} N_{r+1} \\ \vdots \\ m'_{st} \end{array} \end{array} \right)_{n-1} k_1 + \dots + k_r$$

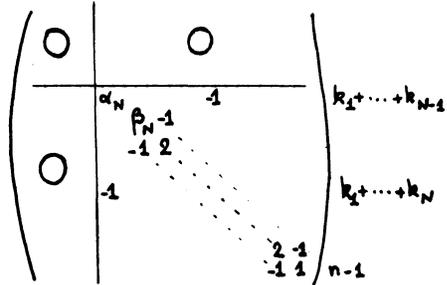
où :

$$\begin{aligned}
 m'_{st} &= \alpha_{r+1} \quad \text{si } (s, t) = (k_1 + \dots + k_r, k_1 + \dots + k_r) \\
 m'_{st} &= \beta_{r+1} \quad \text{si } (s, t) = (k_1 + \dots + k_r + 1, k_1 + \dots + k_r + 1) \text{ et } k_{r+1} \geq 2 \\
 m'_{st} &= \alpha_{r+2} \quad \text{si } (s, t) = (k_1 + \dots + k_r + 1, k_1 + \dots + k_r + 1) \text{ et } k_{r+1} = 1 \\
 m'_{n-1, n-1} &= m_{n-1, n-1} - 1, \\
 m'_{st} &= m_{st} \quad \text{dans les autres cas si } k_1 + \dots + k_r \leq s \leq n-1 \text{ et } k_1 + \dots + k_r \leq t \leq n-1
 \end{aligned}$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

Pour $r = N-1$ on a :

$$M(\bar{c}) = P_{on-1}(1) + \sum_{i=1}^{N-1} \{ \quad \} +$$



D'après b) pour $i = N$ on obtient le résultat.

Maintenant, d'après (*), $M(\bar{c})$ est décomposé en

$$1 + \sum_{i=1}^N k_i + (q-1) = n$$

matrices positives, comme par construction les formes linéaires

$$x \rightarrow \sqrt{t_x P_{\alpha\beta}(\ell) x}$$

sont toutes linéairement indépendantes, $M(\bar{c})$ est bien définie positive.

2) c est maintenant une séquence complète quelconque :

$$c = \sigma_1 \dots \sigma_N s_p r_q$$

On démontre le résultat par récurrence sur $N \geq 0$.

Si $N = 0$ c'est l'exemple 2.14. Supposons le résultat démontré pour un entier $N \geq 0$ et soit

$$c = \sigma_1 \dots \sigma_{N+1} s_p r_q.$$

Si toutes les séquences σ_i sont singulières, on a le résultat d'après 1).

Sinon notons $1 \leq N' \leq N+1$ le plus petit entier tel que

$$\sigma_{N'} = s_{k_{N'}} r_1$$

On peut construire les entiers α_j et β_j comme dans 1) a); comme

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_{N'}} + \frac{1}{\varphi(\alpha_{N'-1})} = 1 \quad \text{si } k_{N'} = 1 \\ \frac{1}{\alpha_{N'}} + \frac{1}{\varphi^{k_{N'}-1}(\beta_{N'})} = 1 \quad \text{si } k_{N'} \geq 2 \end{array} \right.$$

On a comme dans (*)

$$M(\bar{c}) = P_{0n-1}(1) + \sum_{i=1}^{N'-1} \left\{ \dots \right\} +$$

$$+ P_{k_1+\dots+k_{N'-1}, k_1+\dots+k_{N'}+1}(\alpha_{N'}) + \sum_{\ell=1}^{k_{N'}} P_{k_1+\dots+k_{N'-1}+\ell, k_1+\dots+k_{N'+1}+\ell}(\varphi^{\ell-1}(\beta_{N'}))$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}_{n-1}^{k_1+\dots+k_{N'}+1}$$

Grâce à (**) et l'hypothèse de récurrence la matrice de type

$$(n-k_1-\dots-k_{N'}-1, n-k_1-\dots-k_{N'}-1)$$

$$M' + P_{k_1+\dots+k_{N'}+1, n-1}^{(1)}$$

est définie positive et se décompose en une somme de $n-(k_1+\dots+k_{N'}+1)$

matrices positives $P_{\alpha\beta}^{(\ell)}$.

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

Par conséquent $M(\bar{c})$ est la somme de

$$1 + \left(\sum_{i=1}^{N'-1} k_i \right) + (k_{N'}+1) + n - (k_1 + \dots + k_{N'}+1) - 1 = n$$

matrices positives de la forme $P_{\alpha\beta}(\ell)$.

De plus, les formes linéaires

$$x + \sqrt{t_x P_{\alpha\beta}(\ell)} x$$

sont toutes linéairement indépendantes. En effet : vu la définition d'une séquence complète, il existe des indices i_1, \dots, i_p et des réels

$\ell_o > 0, \dots, \ell_p > 0$ tels que

$$\ell_o \dots \ell_p > 1$$

les matrices $P_{oi_1}(\ell_o), P_{i_1 i_2}(\ell_1), \dots, P_{i_p n-1}(\ell_p)$ soient dans la dé-

composition de M .

Si ${}^t_x Mx = 0$, on en déduit que

$$x_o = \frac{x_{n-1}}{\ell_o \dots \ell_p};$$

Comme par ailleurs $P_{on-1}(1)$ est aussi dans la décomposition de M on a également

$$x_o = x_{n-1}$$

on en déduit que $x_o = x_{n-1} = 0$,

ce qui permet de montrer facilement que $x = 0$.

Ceci achève la démonstration. \square

EXEMPLE 2.22

$$M(\overline{s_2 s_1 r_2}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = P_{04}(1) + P_{03}(3) + P_{12}(2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

$$= P_{04}(1) + P_{03}(3) + P_{12}(2) + P_{24}(5/2) + P_{34}(5/3)$$

où $M(\bar{c}_i)'$ signifie qu'on a complété la matrice $M(\bar{c}_i)$ par des 0 pour en faire une matrice de type (n,n) .

D'après le lemme 2.21 $M(a)$ est ainsi une somme de n matrices positives de la forme $P_{\alpha\beta}(\ell)$ telles que les formes linéaires associées soient linéairement indépendantes. En particulier $M(a)$ est définie positive. \square

2.24. CONFIGURATION DES COURBES RATIONNELLES.

Dans l'exemple I.3.36 nous avons vu qu'une surface de Kato S pour laquelle $b_2(S) = 1$ contient une courbe rationnelle singulière de self-intersection 0 ou -1. Lorsque $b_2(S) \geq 2$, et en identifiant l'ensemble $\mathcal{C}(\tilde{S})$ des courbes rationnelles du revêtement universel $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ de S avec \mathbb{Z} nous avons le

THEOREME 2.25.

Soient S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) \geq 2$

$(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ les courbes rationnelles de $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$

$a(S)$ la famille des self-intersections des courbes $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$D_i = \tilde{\omega}(C_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$) les n courbes rationnelles de S .

Alors : 1) la matrice d'intersection $M(S)$ des courbes rationnelles de S vérifie

$$M(S) = -M(a(S))$$

2) D_i est non singulière si et seulement si $a_i \neq n+1$; dans ce cas $D_i^2 = -a_i$.

D_i a une singularité qui est un point double ordinaire si et seulement si $a_i = n+1$; dans ce cas $D_i^2 = -n+1$

En particulier : si $n=2$, S a deux courbes singulières si $a(S) = (\overline{3,3})$, une seule si $a(S) = (\overline{3,2})$ et aucune dans les autres cas.

si $n \geq 3$ S a au plus une courbe singulière.

3) $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$ a au plus deux composantes connexes et $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$ a deux composantes connexes si et seulement si $\sigma_n(S) = 3n$ et toute séquence caractéristique de a est formée d'un nombre pair de sé-

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

quences singulières.

□ DEMONSTRATION.

- a) D'après le théorème I.3.27 et comme $n > 2$, D_i a une singularité qui est un point double ordinaire $\Leftrightarrow C_i \cdot C_{i+n} = 1 \Leftrightarrow i + a_i - 1 = i + n$
 $\Leftrightarrow a_i = n + 1$.

Dans ce cas

Notons $\Pi : S' \rightarrow S$ l'éclatement de S au point double de D_i
 $\tilde{\Pi} : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ l'éclatement de \tilde{S} en tous les points d'intersection

$$C_{i+kn} \cap C_{i+(k+1)n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Il existe une application analytique

$$\tilde{\omega} : \tilde{S}' \rightarrow S'$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}' & \xrightarrow{\tilde{\omega}'} & S' \\ \tilde{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & S \end{array}$$

et fait de \tilde{S}' le revêtement universel de S' .

Notons D'_i et C'_i les transformées strictes de D_i et C_i ; comme $\tilde{\omega}'$ est un isomorphisme entre des voisinages de D'_i et C'_i , on a, en notant A la courbe exceptionnelle de première espèce dans S' :

$$\begin{aligned} D'_i \cdot D'_i &= \Pi^* D_i \cdot \Pi^* D_i = (D'_i + 2A) \cdot (D'_i + 2A) = D'^2_i + 4 = C'^2_i + 4 \\ &= (C'^2_i - 2) + 4 = C'^2_i + 2 = -(n+1) + 2 = -(n-1). \end{aligned}$$

D'autre part, si $a_i \neq n+1$, $\tilde{\omega}$ est un isomorphisme entre des voisinages de C_i et D_i et donc $D^2_i = -a_i$.

Enfin, si $n=2$, les suites $a(S)$ possibles sont $(\overline{2,2}), (\overline{3,2}), (\overline{4,2})$ et $(\overline{3,3})$, et

si $n > 3$, on ne peut avoir deux indices i, j tels que

$$i \neq j \pmod{n} \quad \text{et} \quad a_i = a_j = n+1.$$

Ceci démontre d'une part que la diagonale de $M(a(S))$ est bien formée des opposés des self intersections des courbes D_i , et d'autre part l'assertion 2).

b) Remarquons d'abord que si $k+l \equiv 2 \pmod{n}$

$$i+k-1 \equiv j \pmod{n} \iff j+l-1 \equiv i \pmod{n}$$

De plus, d'après le théorème I.3.27

$$\begin{aligned} D_i \cdot D_j \neq 0 &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } C_i \cdot C_{j+kn} = 1 \\ &\iff \{i + a_i - 1 \equiv j \pmod{n} \text{ ou } j + a_j - 1 \equiv i \pmod{n}\} \end{aligned}$$

Enfin le seul cas où $D_i \cdot D_j = 2$ est précisément le cas où

$$i + a_i - 1 \equiv j \pmod{n} \text{ et } j + a_j - 1 \equiv i \pmod{n}$$

c'est-à-dire

$$a_i + a_j \equiv 2 \pmod{n}$$

ce qui achève de montrer 1) .

c) D'après le Corollaire I.3.31 $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$ a au plus deux composantes

connexes et $D_0 \cup \dots \cup D_{n-1}$ a deux composantes connexes si et seulement si

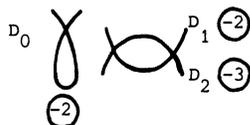
$M(a(S))$ est réductible; on conclut donc par le lemme 2.11.2) \square

EXEMPLE 2.26

Si $n = 3$ et $a(S) = \overline{(423)}$, $D_0 \cup D_1 \cup D_2$ a deux composantes connexes, D_0 est singulière et la matrice d'intersection est

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & +2 \\ 0 & +2 & -3 \end{pmatrix}$$

La configuration des courbes est



THEOREME 2.27.

Soit S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n \geq 1$ et $M(S)$ la matrice d'intersection des courbes rationnelles D_0, \dots, D_{n-1} de S .

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

- Alors : 1) Si $\sigma_n(S) = 2n$, $M(S)$ est négative et le vecteur $(1, \dots, 1)$ engendre l'espace isotrope.
- 2) Si $\sigma_n(S) > 2n$, $M(S)$ est définie négative.

□ DEMONSTRATION.

Immédiat d'après le théorème 2.23 et 2.25. □

COROLLAIRE 2.28

Soit S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n \geq 1$, D_0, \dots, D_{n-1} les courbes rationnelles de S et soit D un diviseur quelconque de S .

Alors : 1) si $\sigma_n(S) = 2n$ $D^2 \leq 0$ et $D^2 = 0$ si et seulement si il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$D = m(D_0 + \dots + D_{n-1})$$

2) Si $\sigma_n(S) > 2n$

$$D^2 \leq -1$$

$$\text{et } (D_0 + \dots + D_{n-1})^2 = 2n - \sigma_n(S) .$$

□ DEMONSTRATION.

D'après le théorème 2.4 S contient n courbes rationnelles D_0, \dots, D_{n-1} et éventuellement une courbe elliptique E lorsque S est isomorphe à la surface d'Inoue S_t^n . Comme dans ce cas

$$E \cdot D_i = 0 \quad \text{et} \quad E^2 = -n$$

on peut supposer que

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} m_i D_i$$

le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème 2.27 et du lemme 2.11.3). □

EXEMPLES 2.29

1) Si $b_2(S) = n$ et $a(S) = (\overline{n+1, 2, \dots, 2, 3})$, la matrice d'intersection est

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO.

$$\theta : S \rightarrow S'$$

tels que

i) $\theta(D_0 \cup \dots \cup D_{n-1})$ soit le lieu singulier de S' , contienne deux points si toute séquence caractéristique de $a(S)$ contient un nombre pair de séquences singulières et un point dans les autres cas.

ii) (S, θ, S') soit une modification.

□ DEMONSTRATION.

C'est une conséquence immédiate d'un théorème de GRAUERT [7] p. 367.

2.32 ARBRES ET CYCLES D'UNE SURFACE DE KATO.

DEFINITION 2.33

Soient D_0, \dots, D_{n-1} n courbes compactes irréductibles dans une surface S et $D = D_0 + \dots + D_{n-1}$.

1) On appelle sommet de D une courbe régulière D_s , $0 \leq s \leq n-1$ telle que

$$D_s \cdot \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq s}} D_k = 1$$

2) On appelle arbre de D un diviseur

$$A_I := \sum_{i \in I} D_i, \quad I \subset \{0, \dots, n-1\}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(A0) D_i est régulière pour tout $i \in I$

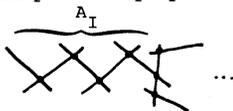
(A1) Il existe un unique $s \in I$ tel que D_s soit un sommet.

(A2) Pour tout $j \in I$, $j \neq s$

$$D_j \cdot \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ k \neq j}} D_k = 2 \quad \text{et} \quad D_j \cdot D_k \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

(A3) A_I est connexe.

(A4) A_I est maximal pour les propriétés (A0), (A1), (A2) et (A3).



3) On appelle racine de D une courbe D_r pour laquelle il existe un arbre

A_I vérifiant :

$$r \notin I \quad \text{et} \quad D_r \cdot A_I = D_r \cdot \sum_{i \in I} D_i = 1$$

- 4) On appelle cycle de D un diviseur $Z = D_{i_1} + \dots + D_{i_p}$ tel que :
- . Z est une courbe avec un point double ordinaire si $p = 1$.
 - . $D_{i_1} \cdot D_{i_2} = 2$ si $p = 2$.
 - . $D_{i_j} \cdot D_{i_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j-k = \pm 1 \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$ si $p \geq 3$.

LEMME ET DEFINITION 2.34

- i) Tout arbre A_I admet un unique sommet D_s
 - ii) Tout sommet D_s est le sommet d'un unique arbre
- On dira que D_s est le sommet de A_I .

□ DEMONSTRATION : i) est la condition (A1) de la définition 2.33; ii) est évidente puisque un sommet vérifie les conditions (A0), (A1), (A2) et (A3). □

LEMME 2.35

Soit S une surface de Kato pour laquelle $b_2(S) = n$, $\mathcal{C}(\tilde{S}) = (C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la famille des courbes rationnelles du revêtement universel $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ de S et $a(S) := - (C_i^2)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Alors : toute courbe C_i rencontre au plus trois autres courbes rationnelles et C_i rencontre 3 courbes si et seulement si $a(S)$ contient la $(k+2)$ -séquence

$$(a_{i-k-1}, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i) = (s_k^2 a_i) \quad \text{où } k \geq 1 \text{ et } s_k = (k+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-1}) .$$

Dans ce cas, en posant $\ell = a_i$,

$$C_{i-k-1} \cdot C_i = C_{i-1} \cdot C_i = C_i \cdot C_{i+\ell-1} = 1 .$$

□ DEMONSTRATION.

Une courbe C_i ne peut rencontrer qu'au plus trois autres courbes car ces courbes sont obtenues par éclatements successifs (Définition I.2.10 et thm. I.2.13) Le reste du lemme résulte du théorème I.3.27 3). □

LEMME 2.36

Soit S une surface de Kato telle que $b_2(S) = n$. On note D_0, \dots, D_{n-1} ses n courbes rationnelles.

Pour tout $0 \leq r \leq n-1$ fixé, on a équivalence des conditions suivantes :

- i) D_r est une racine.
- ii) $D_r \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq r}} D_i = 3$ si D_r est régulière

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO.

$$D_r \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq r}} D_i = 1 \quad \text{si } D_r \text{ a un point double ordinaire.}$$

iii) Il existe $k \geq 1$ tel que pour tout $\rho \in \mathbb{Z}$ tel que $D_r = \tilde{\omega}(C_\rho)$, la famille $a(S)$ contient la $(k+2)$ -séquence

$$(s_k \cdot 2a_\rho)$$

Dans cette situation il existe des entiers $\ell \geq 1, p \geq 1, k_1 \geq 1, \dots, k_p \geq 1$ tels que $a(S)$ contienne la séquence

$$(a_{\rho-\ell-k_1-\dots-k_p-1}, \dots, a_\rho) = (r_\ell s_{k_1} \dots s_{k_p} \cdot 2a_\rho)$$

et D_r est la racine de l'unique arbre A_I dont le sommet D_s est :

$$D_s = \tilde{\omega}(C_{\rho-k_1-\dots-k_p})$$

□ DEMONSTRATION.

1) Si $a(S)$ contient l'entier $n+1$, $a(S) = (n+1, 2, \dots, 2, 3)$ ou $(n+1, 2, \dots, 2, 2)$ ce qui donne des configurations du type :



sur lesquelles on vérifie directement le résultat.

2) Supposons que $a(S)$ ne contienne pas l'entier $n+1$: dans ce cas toutes les courbes sont régulières, d'après le thm. 2.25.

i) \Rightarrow ii)

Soit A_I un arbre tel que $A_I \cdot D_r = 1$. On peut numéroter les indices de I de sorte que

$$D_s = D_{i_1}, \quad D_{i_1} \cdot D_{i_2} = D_{i_2} \cdot D_{i_3} = \dots = D_{i_{p-1}} \cdot D_{i_p} = 1, \quad \text{où } p = \text{Card } I$$

$$\text{et} \quad D_{i_p} \cdot D_r = 1$$

Choisissons maintenant une courbe C_{j_1} dans le revêtement universel $(\tilde{S}, \tilde{\omega})$ de S pour laquelle $\tilde{\omega}(C_{j_1}) = D_{i_1}$.

D'après le théorème I.3.27.3), toute courbe rationnelle C de \tilde{S} rencontre une et une seule courbe C' telle que $C' > C$; il existe donc des courbes uniquement déterminées par le choix de C_{j_1}

$$C_{j_1} < C_{j_2} \dots < C_{j_p} < C_{j_{p+1}}$$

telles que

$$D_{i_k} = \tilde{\omega}(C_{j_k}) \quad 1 \leq k \leq p$$

$$D_r = \tilde{\omega}(C_{j_{p+1}})$$

De plus $C_{j_{p+1}}$ rencontre encore une courbe $C' > C_{j_{p+1}}$ dont l'image $D' = \tilde{\omega}(C')$

est distincte des courbes D_{i_k} ($1 \leq k \leq p$) vu la définition d'un arbre et de D_r puisque $C_{j_{p+1}}^2 \neq -(n+1)$.

On en déduit que

$$D_r \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq r}} D_i \geq 2$$

Comme A_I est maximal

$$D_r \cdot \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i \neq r}} D_i \geq 3$$

On conclut grâce au lemme 2.35

ii) \Leftrightarrow iii) d'après le lemme 2.35

On va maintenant montrer iii) \Rightarrow i) et le reste du lemme :

Il existe $\ell \geq 1, p \geq 1, k_1 \geq 1, \dots, k_p \geq 1$ tels que $a(S)$ contienne la séquence

$$(a_{\rho-k_1-\dots-k_p-1}, \dots, a_\rho) = (r_\ell s_{k_1} \dots s_{k_p} 2 a_\rho)$$

la première courbe C qui suit $C_{\rho-k_1-\dots-k_p-1}$, telle que

$C_{\rho-k_1-\dots-k_p-1}^2 = -(k_1+2)$, est la seule courbe qui vérifie

$$C' < C \Rightarrow C' \cdot C = 0;$$

$\tilde{\omega}(C) = \tilde{\omega}(C_{\rho-k_1-\dots-k_p-1})$ est donc le sommet d'un arbre, et comme toute courbe

$C' < C_{\rho-1}$ est liée par une chaîne à C_ρ , D_p est bien une racine. L'unicité

de l'arbre résulte du fait que la "deuxième courbe" de r_ℓ si $\ell \geq 2$, ou la "première courbe" de s_{k_1} si $\ell = 1$ est une racine et que toute courbe qui lui est inférieure est liée à elle par une chaîne. \square

LEMME ET DEFINITION 2.37.

Soit S une surface de Kato, $n = b_2(S)$ et $D = D_0 + \dots + D_{n-1}$. On a égalité entre les entiers suivants :

- i) le nombre de séquences régulières de toute séquence caractéristique de $a(S)$
- ii) le nombre de racines de D .
- iii) le nombre d'arbres de D .
- iv) le nombre de sommets de D .

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO.

On notera $\rho(S)$ cet entier.

□ DEMONSTRATION :

Résulte immédiatement des lemmes 2.34 et 2.36 .

NOTATIONS 2.38

Soit S une surface de Kato et $n = b_2(S)$. D'après I.3.7 l'ensemble des courbes de \tilde{S} est principal homogène sous \mathbb{Z} , donc l'ensemble des courbes de S est principal homogène sous $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Pour tout diviseur

$$Z = D_{i_1} + \dots + D_{i_p}$$

où $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_p}$ sont donnés dans un ordre compatible avec l'action de

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on choisit pour $1 \leq k \leq p$ C_{j_k} tel que

$$\tilde{\omega}(C_{j_k}) = D_{i_k}$$

On notera

$$\text{Selfint}(Z) = (-C_{i_1}^2, \dots, -C_{i_p}^2)$$

On déduit du lemme 2.36 le théorème suivant, annoncé dans [18]

THEOREME 2.39

Soit S une surface de Kato , $n = b_2(S)$, D_0, \dots, D_{n-1} ses n courbes rationnelles et $D = D_0 + \dots + D_{n-1}$.

1) Si $\sigma_n(S) = 2n$, alors $\rho(S) = 0$ et D est un cycle tel que

$$D_i^2 = -2 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1$$

2) Si $2n < \sigma_n(S) < 3n$ alors $\rho(S) \geq 1$ et

$$D = \sum_{s=1}^{\rho(S)} (A_s + \Gamma_s)$$

où : i) A_s est un arbre pour tout $1 \leq s \leq \rho(S)$

ii) $\Gamma = \sum_{s=1}^{\rho(S)} \Gamma_s$ est un cycle

iii) A_s et Γ_s sont définis de la façon suivante :

Pour chaque séquence

$$(a_{t+1}, \dots, a_{t+l+k_1+\dots+k_p+2}) = (r_l s_{k_1} \dots s_{k_p} 2 a_t)$$

où $l \geq 1$, $p \geq 1$, $k_1 \geq 1$, \dots , $k_p \geq 1$, $a_t \geq 2$, contenue dans $a(S)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Selfint}(A_s) = (2, \dots, 2, \underbrace{k_2+2}_{k_1-1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p-1}+2}_{k_3-1}, 2, \dots, 2, 2) \\ \text{Selfint}(\Gamma_s) = (2, \dots, 2, \underbrace{k_1+2}_{\ell-1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p-2}+2}_{k_2-1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_p+2}_{k_{p-1}-1}) \end{array} \right. \text{ si } p \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Selfint}(A_s) = (2, \dots, 2, \underbrace{k_2+2}_{k_1-1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p-2}+2}_{k_3-1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_p+2}_{k_{p-1}-1}) \\ \text{Selfint}(\Gamma_s) = (2, \dots, 2, \underbrace{k_1+2}_{\ell-1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p-1}+2}_{k_2-1}, 2, \dots, 2, 2) \end{array} \right. \text{ si } p \equiv 0 \pmod{2}$$

iv) le sommet de l'arbre A_s est sa première courbe; la racine de A_s est la première courbe de Γ_t où

$$t = s+1 \pmod{\rho(S)}$$

3) Si $\sigma_n(S) = 3n$ alors $\rho(S) = 0$ et

i) si toute séquence caractéristique de $a(S)$ est formée d'un nombre pair de séquences singulières i.e.

$$a(S) = (\overline{s_{k_1} \dots s_{k_{2p}}})$$

alors

$$D = \Gamma + \Gamma'$$

Γ et Γ' étant deux cycles dont les courbes sont déterminées par :

$$\text{Selfint}(\Gamma) = (k_1+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2-1}, k_3+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_4-1}, \dots, k_{2p-1}+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_{2p}-1})$$

$$\text{Selfint}(\Gamma') = (\underbrace{2, \dots, 2}_{k_1-1}, k_2+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_3-1}, k_4+2, \dots, 2, \dots, 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_{2p-1}-1}, k_{2p}+2)$$

ii) si toute séquence caractéristique de $a(S)$ est formée d'un nombre impair de séquences singulières, i.e.

$$a(S) = (\overline{s_{k_1} \dots s_{k_{2p+1}}})$$

alors D est un cycle dont les courbes sont déterminées par :

$$\text{Selfint}(D) =$$

$$(k_1+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2-1}, k_3+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_4-1}, \dots, k_{2p+1}+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_1-1}, k_2+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_3-1}, k_{2p}+2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_{2p+1}-1})$$

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

REMARQUE 2.40

Dans [18] (3.2), 5), l'auteur donne une description légèrement différente du cas général, elle ne respecte pas la relation d'ordre canonique sur les courbes du revêtement universel de la surface. La correspondance est la suivante :

Notons respectivement (N1) et (N2) les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zykel } (C_k) = (p_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_1-3}, p_2, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_2-3}, \dots, p_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_{n-1}-3}, p_n) \\ \text{Zykel } (D_k) = (\underbrace{2, \dots, 2}_{p_n-2}, q_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{p_{n-1}-3}, q_{n-2}, \dots, q_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{p_1-3}) \\ \text{pour des entiers } n \geq 1, p_n \geq 2, p_j, q_j \geq 3 \quad (1 \leq j \leq n-1) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zykel } (C_k) = (p_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_1-3}, p_2, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_2-3}, \dots, p_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{q_{n-1}-3}, p_n) \\ \text{Zykel } (D_k) = (\underbrace{2, \dots, 2}_{p_n-2}, q_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{p_{n-1}-3}, q_{n-2}, \dots, q_2, \underbrace{2, \dots, 2}_{p_2-3}) \\ \text{pour des entiers } n \geq 2, p_1 = 2, q_1 \geq 3, p_j, q_j \geq 3 \quad (2 \leq j \leq n-1), \\ p_n \geq 2, \text{ et } p_n \geq 3 \text{ si } n = 2. \end{array} \right.$$

Le cas	{(N1), $p_n = 2$ }	correspond au cas	$\{p \equiv 0 \pmod{2}, \ell = 1\}$	du théorème
"	$\{(N1), p_n \geq 3\}$	"	$\{p \equiv 1 \pmod{2}, \ell = 1\}$	"
"	$\{(N2), p_n = 2\}$	"	$\{p \equiv 0 \pmod{2}, \ell \geq 2\}$	"
"	$\{(N2), p_n \geq 3\}$	"	$\{p \equiv 1 \pmod{2}, \ell \geq 2\}$	"

NOTATION 2.41

Si Z est un diviseur de S on note

$$\#(Z)$$

le nombre de composantes irréductibles du support de Z .

Le corollaire suivant généralise un théorème de "dualité" de [19] dans le cadre des surfaces contenant une C.S.G.

COROLLAIRE 2.42

Soit S une surface de Kato, $n = b_2(S)$, D_0, \dots, D_{n-1} ses n courbes rationnelles, $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i$

1) Si $2n \leq \sigma_n(S) < 3n$ D contient un et un seul cycle Γ

De plus si A est la somme des arbres de D on a

$$-\Gamma^2 = \#(A)$$

2) Si $\sigma_n(S) = 3n$ on est dans l'une des deux situations suivantes :

. D est formé de deux cycles Γ et Γ' c'est-à-dire

$$D = \Gamma + \Gamma'$$

on a alors

$$-\Gamma^2 = \#(\Gamma') \quad \text{et} \quad -\Gamma'^2 = \#(\Gamma)$$

. D est un cycle; on a alors

$$-D^2 = \#(D)$$

□ DEMONSTRATION :

1) a) Si $\rho(S) = 1$. Supposons p impair, le cas p pair étant analogue;

on a : $\#(\Gamma) = \ell + k_2 + \dots + k_{p-1}$, $-\Gamma^2 = k_1 + k_3 + \dots + k_p = \#(A)$

b) Si $\rho(S) > 1$, on a, pour tout $1 \leq s \leq \rho(S)$,

$$\text{Si } p \text{ est impair et } p \geq 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \#(\Gamma_s) = \ell + k_2 + \dots + k_{p-1} \\ -\Gamma_s^2 = k_1 + k_3 + \dots + k_{p-2} + 2 = \#(A_s) + 2 \end{array} \right.$$

$$\text{Si } p \text{ est pair} \quad \left\{ \begin{array}{l} \#(\Gamma_s) = \ell + k_2 + k_4 + \dots + k_p \\ -\Gamma_s^2 = k_1 + k_3 + \dots + k_{p-1} + 2 = \#(A_s) + 2 \end{array} \right.$$

$$\text{On en déduit :} \quad -\Gamma^2 = - \left(\sum_{s=1}^{\rho(S)} \Gamma_s^2 + 2\rho(S) \right) = \#(A)$$

2) On a par exemple si D contient deux cycles

$$\#(\Gamma) = k_2 + k_4 + \dots + k_{2p}, \quad \#(\Gamma') = k_1 + \dots + k_{2p-1}$$

$$\text{et } -\Gamma'^2 = 2(k_1-1) + (k_2+2) + \dots + 2(k_{2p-1}-1) + (k_{2p}+2) - 2(k_1 + \dots + k_{2p-1}) \\ = \#(\Gamma)$$

si D est un cycle, c'est immédiat □

COROLLAIRE 2.43

Soit S une surface de Kato et Γ un cycle contenu dans S. S'il existe une courbe rationnelle de S non contenu dans le support de Γ , alors :

$$b_2(S) = \#(\Gamma) - \Gamma^2$$

□ DEMONSTRATION :

D'après le corollaire 2.42 : si $2n \leq \sigma_n(S) < 3n$, $b_2(S) = \#(\Gamma) + \#(A) = \#(\Gamma) - \Gamma^2$

si $\sigma_n(S) = 3n$, S contient deux cycles □

le théorème suivant constitue une réciproque du théorème 2.39, il montre que la

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

donnée d'un cycle (avec "sens de rotation") et des racines détermine toutes les courbes.

THEOREME 2.44

Soit $\gamma \geq 1$ un entier et $\sigma = (a_0, \dots, a_{\gamma-1})$ une γ -séquence où $a_i \geq 2$ pour tout $0 \leq i \leq \gamma-1$ et il existe au moins un indice j tel que $a_j \geq 3$.

Alors : pour tout partage (modulo γ) de σ en $\rho \geq 1$ séquences σ_s de la forme

$$\sigma_s = \begin{cases} (2, \dots, 2, \underbrace{k_1^s + 2}_{\ell^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_2^s - 1}_{k_2^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_{p_s - 2}^s + 2}_{k_{p_s - 1}^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_{p_s}^s + 2}_{k_{p_s}^s - 1}) & \text{si } p_s \text{ impair} \\ (2, \dots, 2, \underbrace{k_1^s + 2}_{\ell^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_2^s - 1}_{k_2^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_{p_s - 1}^s + 2}_{k_{p_s}^s - 1}, 2, \dots, 2, 2) & \text{si } p_s \text{ pair,} \end{cases}$$

où pour tout $1 \leq s \leq \rho(S)$

$$\ell^s \geq 1, p^s \geq 1, k_1^s \geq 1, \dots, k_{p_s}^s \geq 1,$$

il existe une surface de Kato S telle que :

i) $n = b_2(S) = \sum_{s=1}^{\rho} \ell^s + k_1^s + k_2^s + \dots + k_{p_s}^s$,

ii) $\rho(S) = \rho$.

Notons D_0, \dots, D_{n-1} les n courbes rationnelles de S et

$$D = \sum_{0 \leq i \leq n-1} D_i$$

on a de plus :

iii) $D = \sum_{s=1}^{\rho(S)} (A_s + \Gamma_s)$ où A_s est un arbre et $\Gamma = \sum_{s=1}^{\rho(S)} \Gamma_s$ est un cycle

pour lesquels

Selfint $(\Gamma_s) = \sigma_s$

$$\text{Selfint}(A_s) = \begin{cases} (2, \dots, 2, \underbrace{k_1^s + 2}_{k_1^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_2^s + 2}_{k_3^s - 1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p_s - 1}^s + 2}_{k_{p_s}^s - 1}, 2, \dots, 2, 2) & \text{si } p_s \text{ est impair} \\ (2, \dots, 2, \underbrace{k_1^s + 2}_{k_1^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_2^s + 2}_{k_3^s - 1}, 2, \dots, 2, \dots, \underbrace{k_{p_s - 2}^s + 2}_{k_{p_s}^s - 1}, 2, \dots, 2, \underbrace{k_{p_s}^s + 2}_{k_{p_s}^s - 1}) & \text{si } p_s \text{ pair} \end{cases}$$

Selfint $(\Gamma) = \sigma$

En particulier la matrice d'intersection $M(S)$ de S est uniquement déterminée par le cycle Γ et la donnée de la décomposition $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\rho)$.

□ DEMONSTRATION :

Il est clair que toute γ -séquence σ peut être partagée (modulo γ) en séquences σ^S du type voulu.

Toute surface S pour laquelle $a(S)$ contient successivement les séquences

$$(a_{t^\alpha+1}, \dots, a_{t^\alpha+l} + k_1^\alpha + \dots + k_p^\alpha + 2) = (r_{l^\alpha} s_{k_1^\alpha} \dots s_{k_p^\alpha})$$

pour $1 \leq \alpha \leq \rho$ vérifie les conditions voulues d'après le lemme 2.36 ; $a(S)$ et $M(S)$ sont uniquement déterminées par cette condition. □

EXEMPLES 2.45.

Soit $\sigma = (3, 4)$ c'est-à-dire on a le cycle . Dans tout les cas

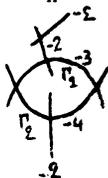
$n = b_2(S) = 5$. On donne toutes les configurations possibles suivant le partage de σ .

1er cas : $\rho(S) = 1$

Selfint(Γ)	l	k_1	k_2	k_3	Selfint(A)	$\sigma_n(S)$	$a(S)$	Configuration
(3,4)	1	1	1	2	(3,2,2)	14	$\overline{(23342)}$	
(4,3)	1	2	1	1	(2,3,2)	14	$\overline{(24233)}$	

2ème cas : $\rho(S) = 2$. On a alors :

Selfint(Γ_1) = (3), $l^1 = 1$, $k_1^1 = 1$, Selfint(A_1) = 2, Selfint(Γ_2) = 4, $l^2 = 1$, $k_1^2 = 2$, Selfint(A_2) = (2,2), $\sigma_n = 13$, $a(S) = \overline{(23242)}$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] F.A. BOGOMOLOV : Surfaces of class VII₀ and affine geometry (Russian),
Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat. 46 (1982) pp. 710-761.
- [2] G. DLOUSSKY : Sur les surfaces compactes de la classe VII₀ contenant une
coquille sphérique globale. CRAS, T. 292 pp. 727-730 (1981).
- [3] G. DLOUSSKY : Sur les courbes et champs de vecteurs globaux des surfaces
analytiques de la classe VII₀ admettant une coquille sphérique globale.
CRAS t. 295 pp. 111-114 (1982).
- [4] I. ENOKI : Surfaces of class VII₀ with curves . Proceedings Japan Acad. 56
ser. A (1980).
- [5] I. ENOKI : Surfaces of class VII₀ with curves. Tôhoku Math. J. 33 (1981)
453-492.
- [6] H. FREUDENTHAL : "Über die Enden topologischer Räume und Gruppen."
Math. Zeitschrift 33 (1931) 692-713.
- [7] H. GRAUERT : "Über Modifikationen und exzeptionnelle analytischen Mengen."
Math. Annalen 146 (1962), 331-368.
- [8] C. HOUZEL : Séminaire Cartan 1960-61 Exposé 21 E.N.S. Paris.
- [9] M. INOUE : On surfaces of class VII₀ . Invent. Math. 24 (1974) pp. 269-310.
- [10] M. INOUE : New surfaces with no meromorphic function. Proceedings of the Int.
Congress of Math. Vancouver 1974 Vol 1 R. James Ed. 1975 pp. 423-426.
- [11] M. INOUE : New surfaces with no meromorphic functions II Complex Analysis
and Algebraic Geometry. Iwanami Shoten Publ. Tokyo 1977.
- [12] Ma. KATO : Compact complex manifolds containing "global spherical shells" I
Proceedings of the Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977. Kinokuniya
Book Store. Tokyo 1978.
- [13] K. KODAIRA : On compact complex analytic surfaces I,II,III . Annals of Math.
vol. 71 (1960) pp. 111-152; vol. 77 (1963) pp. 563-626; vol. 78 (1963)
pp. 1-40.
- [14] K. KODAIRA : On the structure of compact complex analytic surfaces I,II .
Am. J. of Math . vol 86 (1964) pp. 751-798; vol. 88 (1966) pp. 682-721.
- [15] H. LAUFER : Normal two-dimensional singularities. Annals of Math. Studies
Princeton Univ. Press (1971).

G. DLOUSSKY

- [16] I. NAKAMURA : On surfaces of class VII_0 with positive b_2 . Preprint.
- [17] I. NAKAMURA : On surfaces of class VII_0 with curves. Proceedings of the Japan Acad. vol. 58 (1982), sér. A, pp. 380-383.
- [18] I. NAKAMURA : On surfaces of class VII_0 with global spherical shells. Proceedings of the Japan Acad., vol. 59, ser. A, n° 2 (1983) pp. 29-32.
- [19] I. NAKAMURA : On surfaces of class VII_0 with curves. Preprint.
- [20] H. ROSSI : Vector fields on analytic spaces. Annals of Math. vol. 78 (1963) 455-467.
- [21] W. RUDIN : Function theory in the unit ball of \mathbb{C}^n . Springer Verlag 1980.

Georges DLOUSSKY
Université de Provence
U.E.R. de Mathématiques
3, place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3
France