CORINNE BLONDEL

Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur $GL(2)$ et leurs caractères

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 18 (1985)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_18__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 18
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 113, 1985, fascicule 1

INTRODUCTION

L'origine de ce travail remonte à 1979 : Y. Flicker venait de prouver (par des moyens globaux) l'existence d'une correspondance biunivoque entre les classes de représentations admissibles irréductibles spécifiques du groupe métaplectique $\widetilde{G}$ d'ordre n sur $GL_2(F)$ (1) et certaines classes de représentations admissibles irréductibles de $GL_2(F)$, lorsque F est de caractéristique 0. P. Gérardin, qui avait calculé avec P. Kutzko les facteurs locaux des représentations supercuspidales irréductibles de $GL_2(F)$ en utilisant leur construction explicite par induction à partir de sous-groupes ouverts et compacts modulo le centre ([K1], [GK]), fut alors convaincu de la possibilité d'obtenir cette correspondance locale par des moyens purement locaux, et de façon très explicite : le cas des représentations non supercuspidales de $\widetilde{G}$ étant décrit explicitement par Y. Flicker, il fallait étudier les représentations supercuspidales de $\widetilde{G}$, avec l'espoir que leur construction par des méthodes analogues à celles de [K1] et [GK] permît d'obtenir la correspondance et de la décrire entièrement. Il me demanda de travailler cette question, et les résultats escomptés sont maintenant établis, pour tout corps F localement compact non archimédien <u>de caractéristique ou caractéristique résiduelle première à</u> n. J'ai montré dans [B] que des constructions voisines de celles effectuées pour $GL_2(F)$ donnaient naissance à des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\widetilde{G}$, et que <u>toutes</u> (à isomorphisme près) étaient obtenues par ces constructions. L'objet de cet article est d'utiliser ces constructions (que l'on rappellera) pour prouver le résultat suivant :

****

(1) Soit F un corps local non archimédien, et n un entier strictement positif tel que le groupe $\mu_n(F)$ des racines n-ièmes de l'unité dans F^* ait pour cardinal n. Le groupe métaplectique d'ordre n sur $G = GL_2(F)$ est l'extension centrale topologique $\widetilde{G}$ de G par $\mu_n(F)$ construite par T. Kubota ([K2]). Ses représentations spécifiques sont celles dans lesquelles le noyau $\mu_n(F)$ de l'extension opère par un caractère injectif i donné.

0037-9484/85-01/1-120/$ 14.20/ © Gauthier-Villars

Théorème :

Il existe une unique application $\widetilde{T} \longmapsto T$ de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\widetilde{G}$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de G, vérifiant :

$$(*) \quad \Delta(g^n)\, \Theta_{\widetilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \sum_{h^n = g^n} \Delta(h)\, \Theta_T(h) \qquad (2)$$

pour tout élément régulier g de G tel que g^n soit régulier.

Cette application est une injection dont l'image est constituée des classes de représentations irréductibles supercuspidales de G de caractère central trivial sur $\mu_n(F)$ et, si n est pair, des classes de représentations spéciales de G associées aux caractères de F^* non triviaux sur $\mu_n(F)$ dont le carré est trivial sur $\mu_n(F)$.

Dans le I, on rappellera la construction du groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$ (I.1) et ses propriétés essentielles (I.2). On donnera en I.3 la description de l'action des éléments réguliers de G sur l'arbre de $GL_2(F)$, qui sera beaucoup utilisée dans la suite. On rappellera en I.4 quelques définitions et résultats classiques sur les représentations supercuspidales et induites.

Le II est consacré à la construction des représentations supercuspidales irréductibles de $\widetilde{G}$: après avoir défini en II.1 les sous-groupes compacts utilisés, on donnera en II.2 la construction des représentations de la série ramifiée, en II.3 celle des représentations de la série non ramifiée, puis on rappellera en II.4 que ces constructions sont exhaustives.

Le III est consacré à la démonstration du théorème ci-dessus. On montrera en III.1 que le caractère d'une représentation admissible spécifique de $\widetilde{G}$ est nul en tout élément régulier qui n'est pas, à une racine n-ième de l'unité près, puissance n-ième d'un élément régulier (les éléments réguliers de $\widetilde{G}$ étant ceux dont la projection sur G est un élément régulier de G), résultat qui explique l'injecti-

---

(2) On désigne par $\Theta_{\widetilde{T}}$ (resp. Θ_T) le caractère de $\widetilde{T}$ (resp. T) ; c'est une fonction localement intégrable (cf III.2).
La section $g \longmapsto (g, s(g)^{-1})$ est définie en I.1.
On pose $\Delta(h) = \left| \dfrac{(a-b)^2}{ab} \right|_F^{\frac{1}{2}}$ si a et b sont les valeurs propres de h dans F ou dans une extension de F.

vité de la relation (*). On expliquera en III.2 comment les arguments de Jacquet-Langlands ([JL] chapitre 7) se généralisent au groupe métaplectique et montrent que les caractères des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\widetilde{G}$ sont des fonctions localement intégrables, localement constantes sur les éléments réguliers ; puis on énoncera le théorème ci-dessus, assorti de quelques remarques. Pour démontrer ce théorème, on choisira dans chaque classe d'équivalence de représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\widetilde{G}$ une représentation obtenue par les constructions de II et on lui associera une représentation de G obtenue par les constructions de [GK], ou bien spéciale, de sorte que la relation (*) soit vérifiée. La démonstration reposera donc essentiellement sur la comparaison des caractères de représentations induites $T = \mathrm{Ind}_H^G \pi$ et $\widetilde{T} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}} \widetilde{\pi}$ (où H estun sous-groupe ouvert, compact modulo le centre, de G) ; c'est pourquoi nous établirons en III.3 des formules donnant de façon aussi semblable que possible le caractère de $\widetilde{T}$ ou T en fonction de celui de $\widetilde{\pi}$ ou π : pour les éléments elliptiques, ce sont les formules de caractère induit classiques ; pour les éléments hyperboliques, en revanche, on obtiendra des formules compliquées mais se prêtant très bien à une comparaison terme à terme, le but recherché. Ces formules redémontrant au passage l'existence d'une fonction localement constante donnant le caractère de $\widetilde{T}$ ou T sur l'ouvert des éléments réguliers, le résultat d'intégrabilité locale de III.2 ne sera utilisé que pour montrer que l'application $\widetilde{T} \longmapsto T$ obtenue définit une injection par passage aux classes d'équivalence de représentations. On utilisera les formules obtenues en III.4 pour montrer qu'à toute représentation irréductible supercuspidale spécifique de la série ramifiée de $\widetilde{G}$ correspond une représentation irréductible supercuspidale de la série ramifiée de G, puis en III.5 pour montrer qu'à toute représentation irréductible supercuspidale spécifique de la série non ramifiée de $\widetilde{G}$ correspond une représentation irréductible supercuspidale de la série non ramifiée, ou bien une représentation spéciale, de G. Les calculs permettant d'aboutir à la formule (*) sont parfois longs ; ils sont détaillés en III.4, ne le sont plus en III.5. On verra que les représentations spéciales de G obtenues (si n est pair) correspondent à des représentations non ramifiées de $\widetilde{G}$ construites à partir de caractères "exceptionnels" d'une extension non ramifiée E^* de F : ce sont des caractères de conducteur relatif 1 dont la puissance n-ième est le composé d'un caractère de F^* avec la norme de E^* sur F^*. Si n=2, on obtient ainsi (III.5) une nouvelle construction des représentations de Weil impaires.

Les résultats de II et III permettent de préciser le théorème ci-dessus, d'une part par les théorèmes III.4.1 et III.5.1 qui décrivent explicitement la correspondance, d'autre part par quelques remarques :

- *si l'on normalise les mesures de Haar sur* $\widetilde{G}/\widetilde{F^{*n}}$ *et* G/F^* *de sorte que* $\widetilde{F^*K}/\widetilde{F^{*n}}$ *et* F^*K/F^* *aient même volume, et si* $\widetilde{T}$ *correspond à* T (*par* (*)), *alors leurs degrés formels* $d(\widetilde{T})$ *et* $d(T)$ *vérifient* $d(\widetilde{T}) = n\, d(T)$.

Cela résulte des théorèmes III.4.1 et III.5.1 : les degrés formels des représentations considérées sont donnés en II (2.4, 2.7, 3.4 et 3.7 ; le degré formel d'une représentation spéciale de $GL_2(F)$ est $\frac{1}{2}(q-1)$ si la mesure de Haar sur G/F^* donne à F^*K/F^* le volume 1).

- *le caractère d'une représentation irréductible supercuspidale spécifique* $\widetilde{T}$ *de* $\widetilde{G}$ *est constant au voisinage de* 1 *sur l'ouvert des éléments elliptiques réguliers de* $\widetilde{G}$.

C'est en effet le cas pour le caractère d'une représentation irréductible admissible de carré intégrable de G (cf [H] et [JL]). Or si $\widetilde{T}$ correspond à T, la relation (*) devient, pour g elliptique régulier voisin de 1 et g^n régulier :

$$\Theta_{\widetilde{T}}(g^n) = n\, \Theta_T(g).$$

- les résultats de P. Kutzko ([Ko2]) sur les caractères des représentations supercuspidales de $GL_2(F)$ permettront de dresser une table complète des caractères des représentations supercuspidales spécifiques de $GL_2(F)$.

Je ne puis terminer sans remercier P. Gérardin, qui fut l'instigateur de ce travail et me conseilla tout au long de sa réalisation, et F. Rodier, dont l'aide patiente et les encouragements me permirent de mener cette étude à son terme. De nombreuses conversations avec P. Barrat, H. Carayol et tous les participants du séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes de l'Université Paris VII, m'ont aussi beaucoup aidée. Je remercie enfin P.J. Sally et P. Kutzko de l'intérêt bienveillant qu'ils ont manifesté pour mon travail durant l'été 1983 à l'Université de Chicago.

TABLE DES MATIÈRES

I. LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

II. CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DE $\widetilde{G}$

III. LA CORRESPONDANCE LOCALE

Notations:

n : entier strictement positif.

F : corps local non archimédien, de caractéristique résiduelle première à n.

$\mathcal{O}$: anneau des entiers de F.

$\mathfrak{P}$: idéal maximal de $\mathcal{O}$.

k : corps résiduel de F, i.e. $\mathcal{O}/\mathfrak{P}$.

p : caractéristique de k.

q : cardinal de k.

ϖ : une uniformisante de F.

E : extension quadratique séparable de F, d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ ayant pour idéal maximal $\mathfrak{P}_E$, de corps résiduel k_E.

N : la norme de E^* dans F^*, de noyau Ker N.

Tr: la trace de E sur F, de noyau Ker Tr.

Les notions de conducteur d'un caractère de F, F^*, E, E^*, et de conducteur relatif (par rapport à F) d'un caractère de E^* sont définies en [GK], ainsi que celle de caractère régulier de E^*. Ici, caractère signifie homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^*$.

I. LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

I.1. LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE D'ORDRE n SUR $GL_2(F)$.

a) Les revêtements de $SL_2(F)$.

Soit G et C deux groupes topologiques localement compacts séparables, le groupe C étant commutatif. On appelle extension centrale de G par C la donnée d'une suite exacte de groupes : $1 \longrightarrow C \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$, telle que i(C) soit contenu dans le centre de E. L'extension centrale est dite topologique si i est un homéomorphisme de C sur un sous-groupe fermé de E, et si p induit un isomorphisme de groupes topologiques de E/i(C) sur G. Deux extensions centrales E et E' de G par C et C' respectivement sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupes φ : $E \longrightarrow E'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \mathrm{Id} & & \\ 1 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & G & \longrightarrow & 1 \end{array} \qquad (*)$$

Dans le cas d'extensions centrales topologiques, on demande que φ soit un homéomorphisme. Une extension centrale topologique E de G par C est un revêtement de G si le sous-groupe des commutateurs de E est dense dans E (C. Moore [Mo]). Un revêtement E de G de noyau C est dit universel si pour toute extension centrale topologique $1 \longrightarrow C' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1$, il existe un unique homomorphisme φ : $E \longrightarrow E'$ rendant le diagramme (*) commutatif. Si le groupe G possède un revêtement universel (ce qui suppose en particulier que le sous-groupe des commutateurs de G soit dense dans G), celui-ci est unique à isomorphisme unique près.

Soit G un groupe simple simplement connexe (comme groupe algébrique) déployé défini sur un corps topologique infini k. R. Steinberg [St], C. Moore [Mo], puis H. Matsumoto [Mat] ont étudié les extensions centrales du groupe G(k) des points de G sur le corps k. En utilisant la décomposition de Bruhat de G pour définir des sections particulières de ces extensions, ils ont ramené leur détermination à celle de certains cocycles sur k^*. Nous voulons rappeler ici ces résultats dans le cas du groupe $SL_2(F)$, où F est local non archimédien, sous la forme donnée par H. Matsumoto.

Définition 1.1 :

On appelle cocycle de Steinberg bilinéaire sur F^* à valeurs dans C, groupe commutatif localement compact séparable, toute application λ de $F^* \times F^*$ dans C vérifiant les propriétés suivantes, pour $x, y, z \in F^*$:

$$(H_1) \quad \lambda(xy,z) = \lambda(x,z)\lambda(y,z)$$

$$(H_2) \quad \lambda(x,yz) = \lambda(x,y)\lambda(x,z)$$

$$(H_3) \quad \lambda(x,1-x) = 1 \text{ si } x \neq 1.$$

Un cocycle de Steinberg λ sur F^* à valeurs dans C est topologique s'il vérifie de plus :

(H_4) L'application $(x,y) \longmapsto \lambda(x,y)$ est continue sur $F^* \times F^*$ et, quand on convient que $\lambda(1,0)=\lambda(0,1)=1$, l'application $(x,y) \longmapsto \lambda(x,1-xy)$, définie sur un voisinage de l'origine dans $F \times F$, est continue à l'origine.

Proposition 1.2 ([Mat] corollaire 5.12) :

Le groupe des cocycles de Steinberg bilinéaires sur F^* à valeurs dans C est isomorphe au groupe $H^2(SL_2(F),C)$ des classes d'isomorphismes d'extensions centrales de $SL_2(F)$ par C, par l'application qui associe au cocycle de Steinberg λ, la classe d'extensions correspondant au cocycle suivant sur $SL_2(F)$:

$$\alpha_\lambda(g,g') = \lambda(\chi(g),\chi(g'))\ \lambda(\chi(gg'),\ \frac{-\chi(g')}{\chi(g)})^{-1},$$

où $\chi(g) = \begin{cases} c \text{ si } c \neq 0 \\ d \text{ sinon} \end{cases}$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F)$.

Une extension centrale de cocycle α_λ est topologique si et seulement si le cocycle de Steinberg λ l'est.

Il reste à décrire les cocycles de Steinberg bilinéaires sur F^*. Certains d'entre eux jouent un rôle fondamental : les symboles de Hilbert. Soit $\mu(F)$ le groupe des racines de l'unité contenues dans F, et m son ordre. Pour tout diviseur n de m, on définit (voir [Mi] ou [S2]) le symbole de Hilbert d'ordre n sur F^* : c'est un cocycle de Steinberg bilinéaire topologique sur F^* à valeurs dans le groupe $\mu_n(F)$ des racines n-ièmes de l'unité de F, noté $(\ ,\ )_{n,F}$. En plus de (H_1)-(H_4), il vérifie les propriétés suivantes :

(H_5) $(a,b)_{n,F}\,(b,a)_{n,F} = 1$ pour tous $a,b \in F^*$
$(a,b)_{n,F}\,(-b/a,\ a+b)_{n,F} = 1$ si $a+b \neq 0$
$(a,-a)_{n,F} = 1$.

(H_6) $(a,b)_{n,F} = 1$ pour tout $b \in F^*$ si et seulement si $a \in F^{*n}$.

Le théorème suivant, dû à C. Moore ([Mo]; voir aussi [Mat] et [St]), montre qu'il suffit de s'intéresser aux extensions centrales topologiques de $SL_2(F)$ par les groupes $\mu_n(F)$, où n est comme ci-dessus.

Théorème 1.3 :

Soit m l'ordre du groupe $\mu(F)$ des racines de l'unité dans le corps F, et $(\ ,\ )_{m,F}$ le symbole de Hilbert d'ordre m sur F^*. Alors :

a) Le groupe $SL_2(F)$ possède un revêtement universel, dont le noyau est $\mu(F)$.

b) Soit C un groupe abélien localement compact séparable. Tout cocycle de Steinberg bilinéaire topologique sur F^* à valeurs dans C se factorise de manière unique à travers $(\ ,\ )_{m,F}$ en un homomorphisme continu de $\mu(F)$ dans C

Remarque :

Plus généralement, le groupe G(F) des points sur F d'un groupe G simple, simplement connexe, déployé sur F, possède un revêtement universel de noyau $\mu(F)$, associé au symbole de Hilbert d'ordre m de la manière indiquée dans [Mo] ou [Mat].

Corollaire 1.4 :

Soit n un entier tel que F contienne n racines n-ièmes de l'unité distinctes. Il y a exactement n classes d'extensions centrales de $SL_2(F)$ par $\mu_n(F)$, le groupe des racines n-ièmes de l'unité de F. Elles sont associées aux cocycles sur $SL_2(F)$ à valeurs dans $\mu_n(F)$ suivants :

$$\alpha_i(g,g') = (\chi(g),\chi(g'))^i_{n,F} \quad \left(\frac{-\chi(g')}{\chi(g)}, \chi(gg')\right)^i_{n,F}$$

$$= \left(\frac{\chi(gg')}{\chi(g)}, \frac{\chi(gg')}{\chi(g')}\right)^i_{n,F} \quad , \text{ pour } g,g' \in SL_2(F),\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\text{avec } \chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} c & \text{si } c \neq 0 \\ d & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit n tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n ; on pose $\alpha = \alpha_1$. Alors :

Définition 1.5 :

On appelle revêtement métaplectique d'ordre n de $SL_2(F)$, l'extension centrale de $SL_2(F)$ par $\mu_n(F)$: $1 \longrightarrow \mu_n(F) \longrightarrow \widetilde{SL_2(F)} \longrightarrow SL_2(F) \longrightarrow 1$, définie par la loi :

$$(g,\xi)\,(g',\xi') = (gg', \xi\xi'\alpha(g,g')),\ g,g' \in SL_2(F),\ \xi, \xi' \in \mu_n(F).$$

C'est une extension centrale topologique, associée au symbole de Hilbert d'ordre n sur F^*.

Remarques :

- Cette extension de $SL_2(F)$ par μ_n a été construite directement par T. Kubota [Ka1] indépendamment des travaux de C. Moore.
- Le cocycle α est trivial sur les deux sous-groupes unipotents standard.

b) Passage à $GL_2(F)$.

On ne parlera pas de revêtements pour le groupe $GL_2(F)$, qui n'est pas engendré par ses commutateurs. Cependant, partant du revêtement métaplectique d'ordre n de $SL_2(F)$, on va construire, comme l'a fait Kubota dans [Ka2], le groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$:

Théorème 1.6 :

Soit n un entier tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n. Il y a, à isomorphisme près, une unique extension centrale topologique de $GL_2(F)$ par $\mu_n(F)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Au dessus de $SL_2(F)$, l'extension est le revêtement métaplectique d'ordre n de $SL_2(F)$.

b) Sur le tore déployé standard, le cocycle est donné par :

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \longmapsto (a,d)_{n,F}.$$

Preuve :

Le groupe $GL_2(F)$ est produit semi-direct $F^* \times SL_2(F)$ par :

$$(\lambda, s) \in F^* \times SL_2(F) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} s \in GL_2(F).$$

L'injection $\lambda \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ de F^* dans $GL_2(F)$ est une section de l'application déterminant, et l'action de F^* sur $SL_2(F)$ correspondante est :

$$g \longmapsto g^{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\lambda \\ c\lambda^{-1} & d \end{pmatrix}, \text{ pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F), \lambda \in F^*.$$

Soit $1 \longrightarrow \mu_n(F) \longrightarrow E \xrightarrow{p} GL_2(F) \longrightarrow 1$ une extension centrale topologique de $GL_2(F)$ par $\mu_n(F)$ vérifiant les propriétés a) et b). Par composition avec le déterminant, on obtient la suite exacte :

$$1 \longrightarrow p^{-1}(SL_2(F)) \longrightarrow E \xrightarrow{\text{dét o p}} F^* \longrightarrow 1.$$

Par b) on peut trouver une section $\bar{\sigma} : F^* \longrightarrow E$ de la forme $\bar{\sigma}(\lambda) = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, qui soit un homomorphisme, avec dét o p o $\bar{\sigma}(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in F^*$. L'extension E est donc produit semi-direct $F^* \times p^{-1}(SL_2(F))$, avec la topologie produit. Par a), $p^{-1}(SL_2(F)) \simeq \widetilde{SL_2(F)}$ est connu. On note aussi σ une section de $SL_2(F)$ dans $\widetilde{SL_2(F)}$ telle que le cocycle correspondant soit α. L'extension E sera parfaitement déterminée par l'action de F^* sur $\widetilde{SL_2(F)}$, c'est-à-dire par l'application $\vartheta : F^* \times SL_2(F) \longrightarrow \mu_n(F)$ définie par :

$$\bar{\sigma}(\lambda)^{-1} \sigma(u) \bar{\sigma}(\lambda) = \vartheta(\lambda, u) \sigma(u^{\lambda}), \quad \lambda \in F^*, \ u \in SL_2(F).$$

On voit aisément que $\vartheta(\lambda, uu') = \alpha(u^{\lambda}, u'^{\lambda}) \alpha(u,u')^{-1} \vartheta(\lambda, u) \vartheta(\lambda, u')$ (*).

Il suffit donc de déterminer $\vartheta(\lambda, .)$ sur des générateurs de $SL_2(F)$. L'hypothèse b) donne :

$$\vartheta\left(\lambda, \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right) = (\lambda, t)_{n,F} \text{ pour } \lambda, t \in F^*.$$

D'autre part, on a pour $u \in F$, $t \in F^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & u(1-t^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Par application de la formule (*), $\vartheta\left(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & u(1-t^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ se transforme en produit de $\vartheta\left(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \vartheta\left(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ par des quotients du type $\dfrac{\alpha(g^{\lambda}, g'^{\lambda})}{\alpha(g, g')}$ où g et g' sont toujours des matrices triangulaires supérieures. L'action de λ n'affectant pas

$\chi(g), \chi(g'), \chi(gg')$, ces quotients sont égaux à 1. Pour la même raison, on voit en appliquant (*) que $\vartheta(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\ \vartheta(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$, d'où :

$$\vartheta(\lambda, \begin{pmatrix} 1 & u(1-t^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1,$$

et finalement $\vartheta(\lambda,.)$ est triviale sur le sous-groupe unipotent supérieur. On montre de façon analogue que $\vartheta(\lambda,.)$ est triviale sur le sous-groupe unipotent inférieur. L'application ϑ est ainsi entièrement déterminée, il en est de même de E, et le théorème est démontré.

La décomposition d'un $g \in GL_2(F)$ sur le produit semi-direct $F^* x SL_2(F)$ s'écrit

$$g = (\text{dét } g, g_o) \quad \text{où } g_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{dét } g \end{pmatrix}^{-1} g.$$

Gardant les notations de la démonstration précédente, on vérifie facilement que le cocycle correspondant à la section $\sigma(g) = \bar{\sigma}(\text{dét } g)\ \sigma(g_o)$ de $GL_2(F)$ est :

$$(g,g') \longmapsto \alpha(g_o^{\text{dét } g'}, g'_o)\ \vartheta(\text{dét } g', g_o).$$

De plus on peut expliciter ϑ de la manière suivante :

$$\vartheta(\lambda, g) = \begin{cases} 1 \text{ si } c \neq 0 \\ (\lambda, d)_{n,F} \text{ si } c = 0 \end{cases}, \text{ où } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F), \lambda \in F^*.$$

En fait, suivant T. Kubota [Ka], on choisira un cocycle équivalent au précédent. Posons, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$:

$$s(g) = \begin{cases} (c, \frac{d}{\text{dét } g})_{n,F} & \text{si } cd \neq 0 \text{ et si n ne divise pas la valuation de c} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

Définition 1.7 :

Soit n un entier tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n. On appelle groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$ l'extension centrale topologique :

$1 \longrightarrow \mu_n(F) \longrightarrow \widetilde{GL_2(F)} \longrightarrow GL_2(F) \longrightarrow 1$, définie par la loi :

$$(g,\zeta)\ (g',\zeta') = (gg', \zeta\zeta'\ \beta(g,g')),\ g,g' \in GL_2(F), \zeta, \zeta' \in \mu_n(F),$$

avec : $\beta(g,g') = \alpha(g_o^{\text{dét } g'}, g'_o)\ \vartheta(\text{dét } g', g_o)\ s(g)\ s(g')\ s(gg')^{-1}$.

On notera encore α le cocycle sur GL_2 défini par : $\alpha(g,g') = \alpha(g_0^{\text{dét } g'}, g'_0)\ \vartheta(\text{dét } g', g_0)$.

I.2. PROPRIÉTÉS DU GROUPE MÉTAPLECTIQUE.

L'entier n étant fixé (tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n), on note simplement $(\ ,\ )_F$ le symbole de Hilbert $(\ ,\ )_{n,F}$, et $\widetilde{G}$ le groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)=G$.

a) Propriétés élémentaires.

Elles découlent des propriétés du symbole de Hilbert d'ordre n sur F^* :

Proposition 2.1 :

Soit g et $g' \in GL_2(F)$:

a) Le cocycle β est trivial sur les deux sous-groupes unipotents standard $U^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in F \right\}$ et $U^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in F \right\}$.

b) Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$, alors $\beta(g,g') = (a,d')_F$.

c) Soit $r(g)$, $r(g')$ des relèvements de g et g' dans $\widetilde{GL_2}(F)$. Alors :
- le commutateur de $r(g)$ et $r(g')$ dans $\widetilde{G}$,
- l'automorphisme intérieur de $\widetilde{G}$ défini par $r(g)$,
- l'élément $r(g)^n$ de $\widetilde{G}$

sont indépendants des relèvements choisis.

d) On note $\tilde{g} = (g,1) \in \widetilde{G}$, et on identifie $\lambda \in F^*$ avec l'élément $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ du centre de G. Alors : $\tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{g}^{-1} = (\lambda, \text{dét } g)_F$.

e) Le centre de $\widetilde{GL_2}(F)$ est le produit direct : $F^{*n} \times \mu_n$.

f) Pour $a, a' \in F^{*n}$, on a : $\beta(ag, a'g') = \beta(g,g')$.

Preuve :

a) découle de la propriété analogue du cocycle α sur $SL_2(F)$, ou d'un calcul direct.

b) provient de a) et de la détermination de β sur le tore déployé standard, ou bien d'un calcul direct facile.

c) Les deux premières propriétés proviennent de ce que μ_n est central dans $\widetilde{G}$, la troisième de ce que μ_n est d'exposant n.

d) Le commutateur considéré appartient au noyau de l'extension, car F^* est central dans G, d'où une application : $F^* \times G \longrightarrow \mu_n$

$$(\lambda, g) \longmapsto \tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{g}^{-1}$$, qui est bimultiplicative puisque μ_n est central dans $\widetilde{G}$.

Pour g fixé, on obtient un homomorphisme de F^* dans μ_n, qui est trivial sur F^{*n} puisque μ_n est d'exposant n. Or Hom $(F^*/F^{*n}, \mu_n)$ s'identifie à F^*/F^{*n}, par l'isomorphisme inverse de : $F^*/F^{*n} \longrightarrow \text{Hom}(F^*/F^{*n}, \mu_n)$

$$a \longmapsto (\lambda \longmapsto (\lambda, a)_F).$$

On définit donc une application $\varphi : G \longrightarrow F^*/F^{*n}$, par $\tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{g}^{-1} = (\lambda, \varphi(g))_F$, pour tous $\lambda \in F^*$ et $g \in G$; c'est un homomorphisme par bimultiplicativité du commutateur. On vérifie aisément que $\varphi(g) = 1$ si g est dans l'un des sous-groupes unipotents standard ; pour $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, on a :

$$\tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{g}^{-1} = \frac{\beta(\lambda, g)}{\beta(g, \lambda)} = \frac{(\lambda, d)_F}{(a, \lambda)_F} = (\lambda, ad)_F,$$ d'où le résultat.

e) découle de d) et de la propriété (H6) du symbole de Hilbert citée en I.1.

f) Multiplier g et g' par des éléments de F^{*n} a pour effet de multiplier $\chi(g)$, $\chi(g')$ et $\chi(gg')$ par des puissances n-ièmes, ce qui ne change pas les symboles de Hilbert dans lesquels ils interviennent.

Remarque :

Si $g \in GL_2(F)$, on note $\tilde{g}$ le relèvement $(g,1)$ de g dans $\tilde{G}$. Par contre, lorsque H est un sous-groupe de G, on désigne par $\tilde{H}$ son image réciproque dans $\tilde{G}$, c'est-à-dire le sous-groupe de $\tilde{G}$ formé des $\tilde{h}\zeta$ pour $h \in H$, $\zeta \in \mu_n$.

b) Relèvement du sous-groupe compact maximal standard.

Commençons par des lemmes fort utiles (cf [CF] pour le premier, [Mi] ou [S2] pour le second) :

Lemme 2.2 :

Si n est premier à la caractéristique résiduelle de F, alors pour tout $i \geq 1$, tout élément de $1+\mathfrak{p}^i$ est puissance n-ième d'un unique élément de $1+\mathfrak{p}^i$.

Lemme 2.3 :

Si n est premier à la caractéristique résiduelle de F, on peut calculer le n-ième symbole de Hilbert dans le groupe des racines n-ièmes de l'unité du corps résiduel k, canoniquement isomorphe à $\mu_n(F)$ dans la projection de $\mathcal{O}^*$ sur $\mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}$:

si a et $b \in F^*$, l'élément $c = (-1)^{\text{val } a \text{ val } b} \dfrac{a^{\text{val } b}}{b^{\text{val } a}}$ est une unité,

et $(a,b)_F$ est l'image de $c^{\frac{q-1}{n}}$ dans $\mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p} \simeq k^*$.

Lemme 2.4 :

Sous les hypothèses du lemme 2.3, le n-ième symbole de Hilbert est trivial sur $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$, et même sur $F^{*(n)} \times F^{*(n)}$, où $F^{*(n)}$ est formé des éléments de valuation multiple de n.

Ces résultats permettent de montrer que l'hypothèse $(n,p)=1$ confère à $\tilde{G}$ des propriétés agréables . En particulier :

Proposition 2.5 :

Soit $K = GL_2(\mathcal{O})$ le sous-groupe compact maximal standard de G. Si n est premier à la caractéristique résiduelle de F, alors le cocycle β est trivial sur $K \times K$.

Remarques :

- Ce résultat est obtenu par Kubota dans [Ka]. On peut aussi faire les calculs directement en utilisant les lemmes 2.2 et 2.4 ci-dessus. L'avantage du cocycle β est précisément d'être trivial sur KxK.

- On trouve dans C. Moore [Mo] p.55 et H. Matsumoto [Mat] p.58 le résultat suivant : Lorsque le corps résiduel k possède au moins 4 éléments, l'extension centrale universelle $1 \longrightarrow \mu(F) \longrightarrow E(SL_2(F)) \xrightarrow{p} SL_2(F) \longrightarrow 1$ devient au-dessus de $SL_2(\mathcal{O})$:

$$1 \longrightarrow \mu(F)_p \longrightarrow p^{-1}(SL_2(\mathcal{O})) \longrightarrow SL_2(\mathcal{O}) \longrightarrow 1,$$

où $(\mu(F))_p$ est le p-sous-groupe de Sylow de $\mu(F)$.

On en déduit en particulier qu'une extension de $SL_2(F)$ par $\mu_n(F)$ où n est premier à p, est triviale au-dessus de $SL_2(\mathcal{O})$, lorsque k possède au moins 4 éléments (cette condition assure que $SL_2(\mathcal{O})$ est égal à son groupe des commutateurs).

c) Relèvement des extensions quadratiques.

Lemme 2.6 (Bass-Tate. cf [BT]) :

Soit L un corps commutatif, et E une extension de L de degré premier d, tel que L n'admette pas d'extension de degré compris strictement entre 1 et d. Alors $K_2(E)$ est engendré par les symboles $\{\alpha, b\}$ où $\alpha \in E^*$ et $b \in L^*$.

On utilisera ce lemme sous la forme suivante :

Lemme 2.6 bis :

Soit E une extension quadratique de F. Toute application bimultiplicative de $E^* \times E^*$ dans un groupe commutatif, triviale sur les couples $(x, 1-x)$ avec $x \in E^*, x \neq 1$, est entièrement déterminée par ses valeurs sur $E^* \times F^*$.

Proposition 2.7 :

Soit E une extension quadratique de F contenue dans $M_2(F)$. Alors, pour tous x et y dans $E^* \subset G$, on a : $\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{x}^{-1}\,\tilde{y}^{-1} = (x,\bar{y})_E$, où $(\ ,\ )_E$ désigne le n-ième symbole de Hilbert sur E, et $y \mapsto \bar{y}$ la conjugaison de E sur F si E est séparable, l'identité sinon.

Preuve :

L'application $(x,y) \longrightarrow \tilde{x}\,\tilde{\bar{y}}\,\tilde{x}^{-1}\,\tilde{\bar{y}}^{-1}$ est bimultiplicative de $E^* \times E^*$ dans $\mu_n(F)$, car E^* est commutatif et μ_n central dans $\tilde{G}$. Pour appliquer le lemme ci-dessus, il faut montrer que le commutateur de x et $1-\bar{x}$ dans $\tilde{G}$ est trivial (pour $x \neq 1$), c'est-à-dire que :

$$\beta(x, 1-\bar{x}) = \beta(1-\bar{x}, x).$$

Si $x \in F^*$, $x \neq 1$, c' est clair : $\beta(x, 1-x) = (x, 1-x)_F = 1 = \beta(1-x, x)$.

Si $x \in E^* - F^*$, on peut l'écrire $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$. On constate alors que $\chi(x) = \chi(1-\bar{x}) = \chi(x(1-\bar{x})) = c$, et un calcul facile donne le résultat voulu. Le lemme 2.6 bis assure que l'application considérée est caractérisée par ses valeurs sur $E^* \times F^*$. La proposition 2.1 (d) donne, pour $x \in E^*$ et $y \in F^*$:

$$\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{x}^{-1}\,\tilde{y}^{-1} = \tilde{y}^{-1}\,\tilde{x}\,\tilde{y}\,\tilde{x}^{-1} = (y^{-1}, N(x))_F = (x,y)_E$$ puisque le n-ième symbole de Hilbert sur E est relié à celui de F par : $(x,y)_E = (N(x),y)_F$ si $x \in E^*$,

$y \in F^*$ (où $N(x) = x\bar{x}$). D'où le résultat.

Remarque :

Cette démonstration m'a été suggérée par P. Barrat :elle remplace avantageusement un calcul direct fastidieux.

Proposition 2.8 :

L'image réciproque dans $\widetilde{G}$ du sous-groupe E^{*n} formé des puissances n-ièmes des éléments de E^*, est le centre de $\widetilde{E^*}$. On a, pour tous x et y dans E^* :

$$\widetilde{xy}^n = \tilde{x}^n \tilde{y}^n \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\widetilde{xy}^n = (\bar{x},y)_{2,E}\, \tilde{x}^n \tilde{y}^n \text{ si } n \text{ est pair,}$$ où $(\ ,\ )_{2,E}$ désigne le symbole de Hilbert d'ordre 2 sur E^*.

Preuve :

Le fait que $\widetilde{E^*}^n$ soit le centre de $\widetilde{E^*}$ découle de la proposition 2.7 et de la propriété (H6) du symbole de Hilbert. Par la proposition 2.1.c), on a :

$$\widetilde{xy}^n = (\tilde{x}\tilde{y})^n = \tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}\tilde{y} \ldots \tilde{x}\tilde{y}.$$

Or (Proposition 2.7) : $\tilde{y}\,\tilde{x} = (y,\bar{x})_E\, \tilde{x}\,\tilde{y}$,

d'où $$\widetilde{xy}^n = (y,\bar{x})_E^{\frac{1}{2}(n-1)n}\, \tilde{x}^n \tilde{y}^n.$$

Si n est impair, alors $\frac{1}{2}n(n-1) = n.\frac{1}{2}(n-1)$, d'où le résultat.

Si n est pair, on a $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n.(n-1)$ congru à $-\frac{1}{2}n$ modulo n. Il reste donc :

$$\widetilde{xy}^n = (\bar{x},y)_E^{\frac{1}{2}n}\, \tilde{x}^n \tilde{y}^n.$$

Il est facile de voir que $(\bar{x},y)_E^{\frac{1}{2}n} = (\bar{x},y)_{2,E}$, au moins si n est premier à p. C.Q.F.D.

Les propositions 2.7 et 2.8 jouent un rôle fondamental dans toute la suite de ce travail : on construira les représentations irréductibles supercuspidales de $\widetilde{G}$ à partir des caractères des groupes $\widetilde{E^*}^n$, d'une façon analogue à celle dont les représentations irréductibles supercuspidales de G s'obtiennent à partir des caractères des groupes E^* (cf [GK]). L'application $x \longmapsto \tilde{x}^n$ joue également un rôle fondamental, comme dans le travail de Y. Flicker ([F]), d'où est extrait le :

Lemme 2.9 :

L'application de G dans $\widetilde{G}$: $x \longmapsto \tilde{x}^n$ préserve les classes de conjugaison. On a : $\tilde{x}^n = (x^n, \gamma_x\, s(x^n)^{-1})$, où $\gamma_x = \alpha(x,x)\,\alpha(x,x^2) \ldots \alpha(x,x^{n-1})$.

Lorsque x^n est régulier, l'élément γ_x ne dépend que de la classe de conjugaison de x.

Dans toute la suite, on supposera toujours n premier à la caractéristique résiduelle de F.

I.3. L'ARBRE DE $GL_2(F)$.

a) Définitions et notations.

Ce paragraphe est essentiellement constitué de rappels. Les définitions manquantes et les démonstrations figurent dans le livre de J.P. Serre [S1], et l'article de J. Tits [T].

- A tout plan vectoriel V sur le corps F, on associe un graphe, dont les sommets sont les classes modulo F^* de $\mathcal{O}$-réseaux de V, deux classes de réseaux étant liées par une arête si et seulement si elles possèdent des représentants Λ et Λ' vérifiant $\Lambda' \subset \Lambda$ et $\Lambda/\Lambda' \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{p}$. Ce graphe est un arbre, l'arbre de V, noté Ψ_V. C'est un arbre homogène, le nombre d'arêtes partant d'un sommet donné est q+1.

Le groupe linéaire GL(V) opère à gauche naturellement sur les réseaux de V, et aussi sur leurs classes modulo F^*, en respectant la liaison définie plus haut. Il opère donc naturellement sur l'arbre de V.

- Le groupe $GL_2(F)$ opère naturellement sur l'arbre de FxF, appelé aussi arbre de $GL_2(F)$ (arbre standard), et noté Ψ. Le centre F^* de $GL_2(F)$ agit trivialement sur Ψ.

- Le choix d'un F-isomorphisme de V sur FxF, c'est-à-dire d'un repère (base ordonnée) de V, détermine à la fois un isomorphisme de l'arbre de V sur l'arbre de FxF, et un isomorphisme de groupes de GL(V) sur $GL_2(F)$. Ces isomorphismes sont compatibles avec les actions des deux groupes. En particulier, si E est une extension quadratique séparable de F, il sera parfois plus aisé d'étudier l'action de E^* sur l'arbre de E, que de faire agir E^* directement sur l'arbre de $GL_2(F)$, via un plongement dans $GL_2(F)$.

- Soit L_o un sommet de Ψ. On note $S(L_o,m)$ la sphère de centre L_o, rayon m, formée des points de Ψ à distance m de L_o. Elle s'identifie à l'ensemble des sous-$\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m\mathcal{O}$-modules libres de rang 1 facteurs directs de $\Lambda_o/\mathfrak{p}^m\Lambda_o$, Λ_o étant un représentant quelconque de L_o. En particulier $S(L_o,1)$ est en bijection avec $\mathbb{P}_1(k)$.

On note $B(L_o,m)$ la réunion des sphères de centre L_o, rayon $i \leq m$.

Si L_o et L_1 sont deux sommets voisins de l'arbre, on note $S(L_o,L_1,m+\frac{1}{2})$ la sphère de rayon $m+\frac{1}{2}$ centrée au milieu de l'arête $\{L_o,L_1\}$, i.e. :

$$S(L_o,L_1,m+\tfrac{1}{2}) = \left\{ L \in \Psi_V \ / \ d(L,L_o)=m \text{ et } d(L,L_1)=m+1, \text{ ou } d(L,L_o)=m+1 \text{ et } d(L,L_1)=m \right\}$$

On note $B(L_o,L_1,m+\frac{1}{2})$ la boule correspondante, soit :

$$B(L_o,L_1,m+\tfrac{1}{2}) = B(L_o,m) \cup B(L_1,m) = B(L_o,m+1) \cap B(L_1,m+1).$$

- L'ensemble des bouts de Ψ_V (que l'on peut définir comme limite projective des sphères de centre donné), est en bijection avec l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. Cette bijection étant compatible avec l'action de GL(V), les stabilisateurs des bouts de Ψ_V sont les sous-groupes de Borel de GL(V).

- On appelle ici <u>géodésique</u> de Ψ_V tout chemin doublement infini sans aller-retour de Ψ_V. Toute géodésique est associée de manière unique à une paire de droites distinctes de V. Rappelons le résultat suivant [T]:

<u>Lemme 3.1</u> :

<u>Un automorphisme</u> u <u>d'un arbre</u> Ψ <u>vérifie une et une seule des trois conditions suivantes</u> :

(i) u <u>fixe un sommet de</u> Ψ.

(ii) u <u>échange deux sommets voisins</u>.

(iii) u <u>induit sur une géodésique de</u> Ψ <u>une translation non triviale</u>.

- Soit S un sous-ensemble de Ψ_V, et $\bar{S}$ le sous-arbre qu'il engendre dans Ψ_V. Alors le fixateur de S et le fixateur de $\bar{S}$ dans GL(V) coïncident, et leur normalisateur dans GL(V) est le stabilisateur de $\bar{S}$. En particulier, si S est fini, on a le lemme suivant ([S1]) :

<u>Lemme 3.2</u> :

<u>Un sous-arbre de diamètre fini pair (resp. fini impair) possède un sommet (resp. une arête) conservé par tout automorphisme</u>.

- Il y a dans GL(V) deux classes de conjugaison de sous-groupes qui, modulo le centre F^*, sont compacts maximaux ; ce sont d'une part les fixateurs des points de l'arbre, d'autre part les stabilisateurs des arêtes de l'arbre. Ils sont ouverts dans GL(V).

- Soit L_o un sommet de Ψ_V. Le sous-groupe Fix L_o de GL(V) agit transitivement sur les bouts de l'arbre. D'autre part l'espace homogène GL(V)/Fix L_o s'identifie à l'arbre Ψ_V par :

$$t.(\mathrm{Fix}\ L_o) \longmapsto t\ L_o$$

- Soit $\{L_o,L_1\}$ une arête de Ψ_V. Le sous-groupe Stab $\{L_o,L_1\}$ de GL(V) agit aussi transitivement sur les bouts de l'arbre. L'espace homogène GL(V)/Stab $\{L_o,L_1\}$ s'identifie à l'ensemble des arêtes (non orientées) de Ψ_V par :

$$t.\mathrm{Stab}\{L_o,L_1\} \longmapsto \{t\ L_o, t\ L_1\}.$$

- Dans l'arbre de $GL_2(F)$ on privilégiera souvent les éléments suivants :

* La classe du réseau $(\mathcal{O},\mathcal{O})$ de $F\times F$, notée L_0. Son fixateur dans $GL_2(F)$ est $H=F^*GL_2(\mathcal{O})$. On notera souvent K le sous-groupe compact maximal $GL_2(\mathcal{O})$ de $GL_2(F)$.
* La géodésique orientée $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ associée aux droites $(F,0)$ et $(0,F)$ de $F\times F$, le sommet L_i étant la classe du réseau $(\mathfrak{p}^i,\mathcal{O})$. Son stabilisateur est le groupe $\begin{pmatrix} F^* & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & F^* \\ F^* & 0 \end{pmatrix}$. Un élément du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b\in F^*$, induit sur la géodésique la translation d'amplitude (val a - val b), et un élément du type $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $a, b\in F^*$, induit sur la géodésique la symétrie par rapport à $L_{\frac{1}{2}(\mathrm{val}\, b - \mathrm{val}\, a)}$ si val b - val a est pair, la symétrie par rapport au milieu de l'arête $\left\{L_{\frac{1}{2}(\mathrm{val}\, b - \mathrm{val}\, a - 1)}, L_{\frac{1}{2}(\mathrm{val}\, b - \mathrm{val}\, a + 1)}\right\}$ si val b - val a est impair.

Le fixateur de la géodésique est le groupe $\begin{pmatrix} \mathcal{O}^* & 0 \\ 0 & \mathcal{O}^* \end{pmatrix}$.
* L'arête $\{L_0,L_1\}$ de Ψ, dont le fixateur dans $GL_2(F)$ est le groupe F^*K', où $K' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^* & \mathfrak{p} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}^* \end{pmatrix}$ (sous-groupe d'Iwahori). Son stabilisateur dans $GL_2(F)$ est le groupe JK', où J est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
* Les sphères $S(L_0,i)$, $i\in\mathbb{N}$, de fixateur F^*K_i, avec $K_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^i \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}$, et de stabilisateur F^*K.
* Les sphères $S(L_0,L_1,i+\frac{1}{2})$, $i\in\mathbb{N}$, de fixateur $F^*K'_i$, avec $K'_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^{i+1} \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}$, et de stabilisateur JK'.

b) Classification des éléments de $GL_2(F)$ par leur action sur l'arbre.

L'action de $GL_2(F)$ sur les bouts de l'arbre, en bijection avec $\mathbb{P}_1(F)$, donne une première classification :

Lemme 3.3 :

Un élément de $GL_2(F)$ est :
- scalaire s'il fixe tous les bouts de l'arbre Ψ.
- régulier hyperbolique s'il fixe exactement deux bouts de l'arbre Ψ.
- unipotent (modulo F^*), s'il fixe un bout et un seul de Ψ.
- régulier elliptique s'il ne fixe aucun bout de Ψ, et si ses valeurs propres

dans une extension de F sont distinctes.

Il n'y a pas d'autre possibilité en caractéristique nulle ou impaire. Si F est de caractéristique 2, il y a de plus des éléments radiciels, qui ne fixent aucun bout de Ψ, mais dont les valeurs caractéristiques sont confondues dans une extension de F.

Les scalaires sont les éléments du centre F^* de $GL_2(F)$, l'action du groupe sur Ψ se réduisant à une action de $GL_2(F)/F^*$. Les unipotents ont la propriété suivante (bien connue par ailleurs) :

Lemme 3.4 :

Soit D un bout de Ψ. Le sous-groupe des éléments unipotents ou scalaires de $GL_2(F)$ fixant D agit transitivement (et simplement transitivement modulo F^*) sur l'ensemble des bouts de Ψ distincts de D.

On utilisera souvent cette propriété sous la forme particulière suivante :

Lemme 3.5 :

Le sous-groupe $\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p}^m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $GL_2(F)$ ($m \in \mathbb{Z}$) agit transitivement sur chacun des arcs de sphère de centre L_m suivants :

$$S(L_m,i) - (S(L_{m-1},i-1) \cap S(L_m,i)),\ i \geqslant 1.$$

Soit g un élément de G. On note Ψ^g l'ensemble des points fixes de g dans l'arbre Ψ, et on pose

$$\Delta(g) = \left| \frac{(a-b)^2}{ab} \right|^{\frac{1}{2}} ,$$

où a et b sont les valeurs caractéristiques de g (i.e. les racines, dans une extension convenable de F, du polynôme $X^2 - X\,\mathrm{Tr}\,g + \text{dét}\,g$) et où $|x| = q^{-\mathrm{val}\,x}$, $x \in F$, est la valeur absolue de F. Ainsi g est régulier si et seulement si $\Delta(g)$ est non nul.

On s'intéresse à présent à l'action sur l'arbre des éléments réguliers de G. Le cas le plus facile est celui des éléments hyperboliques :

Lemme 3.6 :

Soit g un élément hyperbolique régulier, de valeurs propres a et b.

(i) Si $\Delta(g) > 1$ (cas où a et b ont des valuations distinctes), alors g n'a aucun point fixe dans l'arbre.

(ii) Si $\Delta(g) = q^{-k}$ pour un entier $k \geqslant 0$ (cas où $1-a/b$ a pour valuation k), alors Ψ^g est constitué de la géodésique associée aux deux droites propres de g, et de tous les points à distance au plus k de cette géodésique.

Pour traiter le cas des éléments elliptiques, il est commode d'étudier directement l'action de E^*, où E est une extension quadratique séparable de F, sur l'arbre Ψ_E.

Proposition 3.1 :

Soit E une extension quadratique séparable non ramifiée de F, et L_o la classe du réseau $\mathcal{O}_E$ de E. Pour tout entier $k \geqslant 1$, l'application :

$$S(L_o,k) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, N / (1+\mathfrak{p}_E^k) \cap \mathrm{Ker}\, N$$

$$L \longmapsto \bar{u}/u \mod. (1+\mathfrak{p}_E^k),$$

où $u \in \mathcal{O}_E^*$ et $\mathcal{O}u+\mathfrak{p}_E^k$ est un représentant de L, est une bijection qui transforme l'action de $g \in E^*$ sur la sphère en la multiplication par l'image de $\bar{g}/g$ dans le groupe fini $\mathrm{Ker}\, N / (1+\mathfrak{p}_E^k) \cap \mathrm{Ker}\, N$.

Le groupe E^* agit transitivement sur chacune des sphères de centre L_o, et sur l'ensemble des bouts de Ψ_E.

Preuve :

Chaque point L de $S(L_o,k)$ possède un unique représentant contenu dans $\mathcal{O}_E$ et non dans $\mathfrak{p}_E$, qui s'écrit $\mathcal{O}u+\mathfrak{p}_E^k$ pour un $u \in \mathcal{O}_E^*$ bien déterminé modulo $\mathcal{O}^*(1+\mathfrak{p}_E^k)$, d'où une bijection $L \longmapsto u$ de $S(L_o,k)$ sur $\mathcal{O}_E^* / \mathcal{O}^*(1+\mathfrak{p}_E^k)$. D'autre part, l'application $u \longmapsto \bar{u}/u$ détermine, par le théorème 90 de Hilbert (voir [S2] p.158), un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}_E^* / \mathcal{O}^*(1+\mathfrak{p}_E^k)$ sur $\mathrm{Ker}\, N / (1+\mathfrak{p}_E^k) \cap \mathrm{Ker}\, N$, d'où la première partie de la proposition.

Les bijections ainsi définies pour $k \geqslant 1$ sont compatibles avec les projections évidentes de $S(L_o,k+1)$ sur $S(L_o,k)$, et de $\mathrm{Ker}\, N / (1+\mathfrak{p}_E^{k+1}) \cap \mathrm{Ker}\, N$ sur $\mathrm{Ker}\, N / (1+\mathfrak{p}_E^k) \cap \mathrm{Ker}\, N$, d'où une bijection de l'ensemble des bouts de Ψ_E sur Ker N, transformant l'action de $g \in E^*$ sur les bouts de Ψ_E (c'est-à-dire la multiplication par g dans $\mathbb{P}(E) \simeq E^*/F^*$), en la multiplication par $\bar{g}/g$ dans Ker N. Le théorème 90 de Hilbert affirme que $u \longmapsto \bar{u}/u$ est un isomorphisme de E^*/F^* sur Ker N, d'où le résultat.

Corollaire 3.1 :

Soit g un élément régulier elliptique non ramifié de $GL_2(F)$. Alors Ψ^g est une boule de rayon k tel que $\Delta(g)=q^{-k}$. De plus le sous-groupe $(F[g])^*$ de $GL_2(F)$ agit transitivement sur les bouts de l'arbre Ψ, et sur chacune des sphères de même centre que Ψ^g.

Preuve :

Il suffit de remarquer que $\Delta(g)=q^{-val_E(1-\bar{g}/g)}$, où $E=F[g]$ est l'extension quadratique séparable non ramifiée engendrée par g.

On traite de manière analogue le cas ramifié :

Proposition 3.2 :

Soit E une extension quadratique séparable ramifiée de F, de conducteur d, et L_o (resp. L_1) la classe du réseau $\mathcal{O}_E$ (resp. $\mathfrak{P}_E$) de E. Pour tout entier $k \geqslant 0$, l'application :

$$S(L_o,L_1,k+\tfrac{1}{2}) \longrightarrow \mathrm{Ker}\ N \Big/ (1+\mathfrak{P}_E^{2k+d}) \cap \mathrm{Ker}\ N$$

$$L \longmapsto \bar{u}/u \bmod. (1+\mathfrak{P}_E^{2k+d}),$$

où $u \in E^*$ et $\mathcal{O}u+\mathfrak{P}_E^{2k+val_E u}$ est un représentant de L, est une bijection qui transforme l'action de $g \in E^*$ sur la sphère en la multiplication par l'image de $\bar{g}/g$ dans le groupe fini $\mathrm{Ker}\ N \Big/ (1+\mathfrak{P}_E^{2k+d}) \cap \mathrm{Ker}\ N$.

Le groupe E^* agit transitivement sur chacune des sphères $S(L_o,L_1,k+\frac{1}{2})$, $k \geqslant 0$, et sur l'ensemble des bouts de Ψ_E.

Preuve :

C'est la même que celle de la proposition 3.1, puisque le théorème 90 de Hilbert affirme, là encore, que l'application $u \longmapsto \bar{u}/u$ est un isomorphisme de E^*/F^* sur Ker N. Cet isomorphisme passe aux quotients en un isomorphisme de $E^*/F^*(1+\mathfrak{P}_E^{2k+1})$ sur $\mathrm{Ker}\ N \Big/ (1+\mathfrak{P}_E^{2k+d}) \cap \mathrm{Ker}\ N$.

Remarques : (E extension quadratique séparable ramifiée de F, de conducteur d)

1) On a pour $k \geqslant 1$: $\mathcal{O}^*(1+\mathfrak{P}_E^{2k}) = \mathcal{O}^*(1+\mathfrak{P}_E^{2k+1})$,

et pour $k \geqslant 0$: $(1+\mathfrak{P}_E^{d+2k+1}) \cap \mathrm{Ker}\ N = (1+\mathfrak{P}_E^{d+2k+2}) \cap \mathrm{Ker}\ N$.

2) Le groupe Ker N est contenu dans $1+\mathfrak{P}_E^{d-1}$, et le quotient

$\mathrm{Ker}\ N \Big/ \mathrm{Ker}\ N \cap (1+\mathfrak{P}_E^{d})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la surjection $u \longmapsto \bar{u}/u$ de E^* sur ce quotient pouvant se lire $u \longmapsto (-1)^{val_E u}$, de noyau $F^*(1+\mathfrak{P}_E)$. Pour ces propriétés, voir [S2], chapitre V, §3.

3) Un point L de $S(L_o,L_1,k+\frac{1}{2})$, représenté par le réseau $\mathcal{O}u+\mathfrak{P}_E^{2k+val_E u}$, est du côté de L_o (i.e. $d(L,L_o)=k$) si $val_E u$ est paire, du côté de L_1 (i.e. $d(L,L_1)=k$)

si $\mathrm{val}_E u$ est impaire. La sphère $S(L_o,L_1,k+\frac{1}{2})$ est ainsi divisée en deux moitiés, conservées par l'action de $F^*(1+\mathfrak{p}_E)$, échangées par celle des éléments de E^* de valuation impaire ; ces deux moitiés correspondent aux deux classes du groupe $\mathrm{Ker}\, N / \mathrm{Ker}\, N \cap (1+\mathfrak{p}_E^{2k+d})$ modulo $\mathrm{Ker}\, N \cap (1+\mathfrak{p}_E^{d}) / \mathrm{Ker}\, N \cap (1+\mathfrak{p}_E^{2k+d})$.

Corollaire 3.2 :

Soit g un élément régulier elliptique ramifié de $GL_2(F)$, et d le conducteur de l'extension quadratique séparable ramifiée $F[g]$ qu'il engendre. Le sous-groupe $(F[g])^*$ de $GL_2(F)$ conserve une unique arête $\{L,L'\}$ de Ψ, et $\Delta(g)$ ne peut prendre que les valeurs suivantes :

- $\Delta(g)=q^{-\frac{1}{2}(d-1)}$. *Alors Ψ^g est vide, et g échange L et L'.*
- $\Delta(g)=q^{-\frac{1}{2}(d+2k)}$, *pour un entier $k \geq 0$. Alors $\Psi^g=B(L,L',k+\frac{1}{2})$.*

De plus le sous-groupe $(F[g])^*$ agit transitivement sur chacune des sphères $S(L,L',k+\frac{1}{2})$, $k \geq 0$, et sur l'ensemble des bouts de Ψ.

Preuve :

On a $\Delta(g)=q^{-\frac{1}{2}\mathrm{val}_E(1-\bar{g}/g)}$, où $E=F[g]$.

Pour établir en III la formule des traces que l'on a en vue, on aura besoin de comparer les ensembles de points fixes Ψ^g et Ψ^{g^n}, lorsque g est un élément régulier de $GL_2(F)$ tel que g^n soit aussi régulier. Nous allons le faire maintenant :

Proposition 3.3 :

(i) *Soit g un élément hyperbolique régulier de $GL_2(F)$, dont les valeurs propres sont des puissances n-ièmes de F. Il y a exactement n classes modulo $\mu_n(F)$ d'éléments h de $GL_2(F)$ vérifiant $h^n=g$. De plus :*

- a) *Si Ψ^g est vide, alors Ψ^h est vide pour tout h tel que $h^n=g$.*
- b) *Si Ψ^g est une géodésique, alors Ψ^h est la même géodésique pour tout h tel que $h^n=g$.*
- c) *Si Ψ^g est constitué d'une géodésique et des points à distance inférieure ou égale à k (k entier ≥ 1), alors il y a une et une seule telle classe d'éléments h vérifiant $\Psi^h=\Psi^g$; pour les autres classes, l'ensemble des points fixes est réduit à la géodésique.*

(ii) *Soit g un élément elliptique de $GL_2(F)$, tel que g^n soit régulier. Soit E l'extension quadratique séparable engendrée par g dans $M_2(F)$. Alors :*

- a) *Si n est impair, g et g^n ont mêmes points fixes dans l'arbre.*
- b) *Si n est pair, deux cas sont possibles :*

- <u>si</u> $\bar{g}/g \not\equiv -1 [\mathfrak{p}_E]$, <u>alors</u> g <u>et</u> g^n <u>ont mêmes points fixes dans l'arbre</u>.
- <u>si</u> $\bar{g}/g \equiv -1 [\mathfrak{p}_E]$, <u>alors</u> g <u>n'a qu'un point fixe si</u> E <u>est non ramifiée, et aucun point fixe si</u> E <u>est ramifiée. L'action de</u> g <u>sur l'ensemble des points fixes de</u> g^n <u>est une involution.</u>

<u>Preuve</u> :

(i) On se ramène à l'étude des points fixes de $g = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, a, b$\in$ F* et de $h_\xi = \begin{pmatrix} a\xi & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\xi \in \mu_n$.

On a $\Delta(g)=q^{-val(1-a^n/b^n)}$, $\Delta(h_\xi)=q^{-val(1-a\xi/b)}$, et il reste à remarquer que si $val(1-a^n/b^n)=k \geqslant 1$, il y a un unique $\xi_0 \in \mu_n$ tel que $a\xi_0/b \in 1+\mathfrak{p}^k$, et $a\xi/b \notin 1+\mathfrak{p}^k$ pour $\xi \neq \xi_0$. On fait alors usage du lemme 3.6.

(ii) Grâce aux corollaires 3.1 et 3.2, il suffit de comparer $\Delta(g)$ et $\Delta(g^n)$, c'est-à-dire $val_E(1-\bar{g}/g)$ et $val_E(1-(\bar{g}/g)^n)$.

- Si g^n n'a aucun point fixe (cas ramifié) ou un seul point fixe (cas non ramifié), il en est également de même pour g.
- Si $val_E(1-(\bar{g}/g)^n)=k$, avec $k \geqslant 1$ dans le cas non ramifié, $k \geqslant d$ dans le cas ramifié, alors $(\bar{g}/g)^n$ appartient à $1+\mathfrak{p}_E^k$, qui est formé de puissances n-ièmes. Il existe donc ξ dans μ_n, et a $1+\mathfrak{p}_E^k$, tels que $\bar{g}/g=\xi a$. Puisque $\bar{g}/g$ est de norme 1, on a $\xi=\pm 1$.
  - si $\xi=1$ (seule possibilité si n est impair) alors g et g^n ont mêmes points fixes.
  - si $\xi=-1$ (donc n est pair), alors $\bar{g}/g \equiv -1 [\mathfrak{p}_E^k]$.

L'action de $\bar{g}/g$ sur les groupes $\mathrm{Ker}\, N / \mathrm{Ker}\, N \cap (1+\mathfrak{p}_E^i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant k$, est donc la multiplication par -1, d'où le résultat en utilisant les propositions 3.1 et 3.2.

<u>Remarque</u> :

Si l'extension engendrée par g est ramifiée, on a $\bar{g}/g \equiv -1 [\mathfrak{p}_E]$ si et seulement si $val_E g$ est impaire.

Pour terminer, disons quelques mots des éléments radiciels, qui n'apparaissent qu'en caractéristique 2. Un tel élément a pour polynôme caractéristique X^2-a, où $a \in F^* - F^{*2}$, et ses valeurs caractéristiques sont confondues dans l'extension $F[\sqrt{a}]$, <u>non séparable</u>. De tels éléments ne sont pas réguliers, et n'interviendront pas dans la suite. Quant à leur comportement sur l'arbre, ils agissent comme une symétrie par rapport à un sommet ou au milieu d'une arête.

I.4. LES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DE $\widetilde{G}$.

a) Définitions.

On s'intéresse ici aux représentations de $\widetilde{G}$ dans des espaces vectoriels complexes qui ne proviennent pas d'une représentation de G (via la surjection $\widetilde{G} \longrightarrow G$), ni même d'une représentation d'une extension intermédiaire deG par un sous-groupe propre de $\mu_n(F)$: dans une telle représentation, le noyau $\mu_n(F)$ de la surjection $\widetilde{G} \longrightarrow G$ doit opérer de façon injective. Pour simplifier les notations, on fixe une fois pour toutes un isomorphisme de $\mu_n(F)$ sur $\mu_n(\mathbb{C})$, par lequel on identifie les deux groupes, parfois notés simplement μ_n. Une représentation T de $\widetilde{G}$, ou d'un sous-groupe de $\widetilde{G}$ de la forme $\widetilde{H}$, sera dite spécifique si $T(g,\zeta) = \zeta T(g)$ pour $\zeta \in \mu_n, g \in G$.

Précisons maintenant quelques définitions. Soit G un groupe localement compact totalement discontinu. Les notions de représentation lisse, admissible, de G, et de représentation contragrédiente sont définies par exemple par P. Cartier dans [Cr]. Si T est une représentation lisse de G dans un espace vectoriel V, et $(\check{T},\check{V})$ la représentation contragrédiente, les coefficients de T sont les fonctions de G dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$C_{\check{v},v}(g) = \langle \check{v}, T(g)v \rangle \text{ , pour } \check{v} \in \check{V},\ v \in V \text{ et } g \in G.$$

Une représentation T de G sera dite supercuspidale si elle est admissible, si le centre Z de G opère par homothéties, et si les coefficients de T sont à support compact modulo Z ([Cr]).

Enfin une représentation de G dans W sera dite irréductible si elle est algébriquement irréductible, c'est-à-dire si W n'a aucun sous-espace vectoriel propre invariant par G.

b) L'induction.

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, soit H un sous-groupe ouvert de G, compact modulo le centre de G, et π une représentation lisse de H dans un espace vectoriel V. On appelle représentation induite (compacte) de π à G, et on note $\mathrm{ind}_H^G \pi$ (notation standard) ou T_π (notation souvent utilisée ici), la représentation de G par translations à droite dans l'espace W des fonctions f de G dans V vérifiant les deux conditions suivantes :

- f est localement constante, à support compact modulo H.
- $f(hg) = \pi(h)f(g)$ pour tous $h \in H$, $g \in G$.

On a ainsi $(T_\pi(g)f)(x) = f(xg)$, pour $x, g \in G$ et $f \in W$.

La représentation T_π est lisse, et tout coefficient de π, prolongé par 0 sur G-H, est un coefficient de $\mathrm{ind}_H^G \pi$ (cf H. Carayol, [C1]).

Pour $g \in G$, on définit une représentation π^g du groupe $g^{-1}Hg$ par :

$$\pi^g(x) = \pi(gxg^{-1}), \quad x \in g^{-1}Hg.$$

On a le critère d'irréductibilité suivant (H. Carayol, [C1]) :

Proposition 4.1 :

Si π est une représentation lisse irréductible de H, sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de G, et si pour tout $g \in G-H$, les restrictions de π et π^g à $H_g = H \cap g^{-1}Hg$ sont disjointes (i.e. $\mathrm{Hom}_{H_g}(\pi, \pi^g) = 0$), alors la représentation $\mathrm{ind}_H^G \pi$ est irréductible.

H. Jacquet a montré dans [J] que toute représentation lisse irréductible d'un groupe réductif p-adique était admissible. Au lieu d'essayer d'adapter sa démonstration au groupe métaplectique, on utilisera le critère d'admissibilité suivant :

Proposition 4.2 :

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, séparable, de centre Z. Soit T une représentation lisse irréductible de G, de caractère central χ, telle que :

1°) $|\chi|$ peut se prolonger en un caractère de G.

2°) Au moins un coefficient non nul de T est à support compact modulo Z.

Alors T est admissible supercuspidale.

Preuve :

L'hypothèse 1°) permet de se ramener au cas où χ est unitaire, en tordant T par l'inverse d'un prolongement de $|\chi|$ à G.

Soit W l'espace de T, et $g \longmapsto \langle a, T(g)v_0 \rangle$ un coefficient non nul de T à support compact modulo Z (où $g \in G$, $a \in \check{W}$ et $v_0 \in W$). Supposant χ unitaire, on définit sur W une forme hermitienne définie positive et invariante par G en posant (cf [JL], proposition 2.20) :

$$\langle v,w \rangle = \int_{Z/G} \langle a, T(g)v \rangle \, \overline{\langle a, T(g)w \rangle} \, dy, \qquad v,w \in W$$

Cette intégrale a un sens, car tous les coefficients $\langle a, T(g)v \rangle$ pour $v \in W$ sont à support compact modulo Z : l'irréductibilité de T entraîne que W est engendré par les $T(g)v_0$, $g \in G$. Le même argument, lié au fait que T est lisse, montre que $\langle v,v \rangle > 0$ si $v \neq 0$. La représentation T est donc préunitaire, et en utilisant les résultats de Harish-Chandra ([HC], corollaire du théorème 2, ou théorème 3) on voit qu'elle est admissible. Alors la représentation contragrédiente $\check{T}$ est, comme T, admissible et irréductible, et son espace $\check{W}$ est engendré par les $\check{T}(g)a$, $g \in G$. On en déduit que tous les coefficients de T sont à support compact modulo Z, donc T est supercuspidale.

Résumons maintenant ces résultats sous la forme qui nous sera utile pour la suite :

Théorème 4.3 :

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, séparable, unimodulaire, et Z son centre. Soit H un sous-groupe ouvert de G, contenant Z, et compact modulo Z, et π une représentation lisse irréductible de H vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\forall\ g \in G-H$, les restrictions de π et π^g à $H \cap g^{-1}Hg$ sont disjointes.
2) Le module $|\chi|$ du caractère χ de Z tel que $\pi(z) = \chi(z).\mathrm{Id}$ pour $z \in Z$, se prolonge en un caractère de G.

Alors la représentation $\mathrm{ind}_H^G \pi$ de G est irréductible admissible supercuspidale.

Remarque :

Nous appliquerons ce théorème aux groupes $GL_2(F)$ et $\widetilde{GL_2}(F)$ pour lesquels la condition 2) est toujours vérifiée:

un prolongement est donné par g (ou (g,ζ)) $\longmapsto |\chi(\text{dét } g)|^{\frac{1}{2}}$.

II. CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DE $\widetilde{G}$

II.1. SOUS-GROUPES REMARQUABLES DU COMPACT MAXIMAL STANDARD (cf [GK])

Soit E une extension quadratique séparable de F, plongée dans $M_2(F)$ de l'une des deux façons suivantes (qui ne diffèrent que d'un automorphisme intérieur de G, par le théorème de Skolem-Noether) :

a) On choisit une base de E sur F et on écrit la représentation régulière gauche de E^* dans cette base.

b) On se donne a priori E^* comme sous-groupe de $GL_2(F)$.

Le groupe G agit sur E^*, dans le cas a) de façon évidente (E^* s'identifiant à $F\times F-\{0\}$ par choix d'une base), dans le cas b) de la manière suivante : on choisit un élément σ de G vérifiant $\sigma\, x\, \sigma^{-1} = \bar{x}$ (conjugué de x) pour $x \in E^*$, et $\sigma^2=\mathrm{Id}$ (l'existence d'un tel σ est assurée par le théorème de Skolem-Noether pour la première condition, et par conjugaison du cas a) pour la seconde ; un tel σ est déterminé à Ker $N_{E/F}$ près) ; alors $M_2(F)$ apparait comme somme directe $E \oplus \sigma E$, les éléments de σE étant de trace nulle, et G agit sur E^* par $(u+\sigma v)(x) = ux+\bar{v}\bar{x}$, $x\in E^*$, $u,v\in E$, $\det(u+\sigma v)\neq 0$.

Dans l'une ou l'autre de ces situations, on définit les groupes suivants :

$$U = \{ g\in G \ / \ \mathrm{val}_E g(x) = \mathrm{val}_E x \text{ pour tout } x\in E^*\}$$

$$A^*(m) = \{ g\in U \ / \ \mathrm{val}_E(g(x)-x) \geqslant m+\mathrm{val}_E x, \text{ pour tout } x\in E^*\} \ , \text{ pour } m\geqslant 1.$$

<u>Proposition 1.1</u> :

a) <u>Soit</u> E <u>une extension quadratique séparable ramifiée de</u> F. <u>On suppose</u> E^* <u>plongé dans</u> $GL_2(F)$ <u>de telle sorte que l'arête de l'arbre de</u> $GL_2(F)$ <u>conservée par</u> E^* <u>soit l'arête standard</u> $\{L_0,L_1\}$. <u>Alors</u> :

$$U = K' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^* & \mathfrak{p} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}^* \end{pmatrix}, \quad A^*(2m) = K'_m = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^{m+1} \\ \mathfrak{p}^m & 1+\mathfrak{p}^m \end{pmatrix} \quad \text{si } m\geqslant 1,$$

$$\text{et} \quad A^*(2m+1) = K''_m = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^{m+1} & \mathfrak{p}^{m+1} \\ \mathfrak{p}^m & 1+\mathfrak{p}^{m+1} \end{pmatrix} \quad \text{si } m\geqslant 0.$$

(Remarque : K''_m est le groupe engendré par K_{m+1} et $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} K_{m+1} \begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$)

b) <u>Soit</u> E <u>une extension quadratique séparable non ramifiée de</u> F. <u>On suppose</u> E^* <u>plongé dans</u> G <u>de telle sorte que le sommet de l'arbre de</u> G <u>fixé par</u> E^* <u>soit le sommet standard</u> L_0. <u>Alors</u> :

$$U = K = GL_2(\mathcal{O}), \quad A^*(m) = K_m = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^m \\ \mathfrak{p}^m & 1+\mathfrak{p}^m \end{pmatrix} \quad \text{pour } m\geqslant 1.$$

Preuve :

Elle s'appuie sur les résultats du I.3. Remarquons que les hypothèses faites ne sont pas restrictives : une extension ramifiée (resp. non ramifiée) conserve une unique arête (resp. sommet) de l'arbre, et on peut se ramener par une conjugaison au cas où cette arête (resp. sommet) est $\{L_0, L_1\}$ (resp. L_0).

a) On a $K' = \{ g \in G / g\Lambda_0 = \Lambda_0$ et $g\Lambda_1 = \Lambda_1$ pour tous réseaux Λ_0 et Λ_1 représentants de L_0 et $L_1 \}$.

Si $m \geq 1$, $K'_m = \{ g \in G / (g-I)\Lambda_0 \subset \mathfrak{p}_F^m \Lambda_0$ et $(g-I)\Lambda_1 \subset \mathfrak{p}_F^m \Lambda_1$ pour tous représentants Λ_0 et Λ_1 de L_0 et $L_1 \}$.

Si $m \geq 0$, $K''_m = \{ g \in G / (g-I)\Lambda_i \subset \mathfrak{p}_F^m \Lambda_j$ et $(g-I)\Lambda_j \subset \mathfrak{p}_F^{m+1} \Lambda_i$, avec $\{i,j\} = \{0,1\}$, pour tous représentants Λ_i et Λ_j de L_i et L_j vérifiant $\varpi\Lambda_i \subset \Lambda_j \subset \Lambda_i \}$.

Il est clair que les conditions demandées pour l'appartenance à K', K'_m ou K''_m sont vérifiées pour tout choix des représentants Λ_0 et Λ_1, si et seulement si elles le sont pour un choix particulier, par exemple $\mathcal{O}_E$ et $\mathfrak{p}_E$. Or les définitions de U et $A^*(m)$ peuvent s'écrire :

$$U = \{ g \in G / (g-I)\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_E \text{ et } (g-1)\mathfrak{p}_E = \mathfrak{p}_E \}$$

$$A^*(m) = \{ g \in G / (g-I)\mathcal{O}_E \subset \mathfrak{p}_E^m \text{ et } (g-I)\mathfrak{p}_E \subset \mathfrak{p}_E^{m+1} \}, \quad m \geq 1 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

b) La démonstration est semblable.

Il faut maintenant préciser la structure de $A^*(m)$ (pour ce qui suit, voir [GK]). Soit H le fixateur de la trace de E sur F : $H = \{ g \in G / \operatorname{Tr} g(x) = \operatorname{Tr} x$ pour tout $x \in E^* \}$. Alors $H = \{ 1+(\sigma-1)x / x \in E, \operatorname{Tr} x \neq 1 \}$. Posant pour $x \in E$, avec $\operatorname{Tr} x \neq 1$, $h(x) = 1+(\sigma-1)x$, les éléments $h(x)$ vérifient les relations suivantes :

$$\det h(x) = 1 - \operatorname{Tr} x$$

$$h(x)h(y) = h(x+y-y\operatorname{Tr} x) = h(y+\bar{y}x-\bar{x}y)h(x) = h(\bar{y}x-\bar{x}y)h(y)h(x)$$

$$h(x)^{-1} = h\left(\frac{-x}{1-\operatorname{Tr} x}\right)$$

De plus, tout élément de G se décompose de manière unique en produit $t\,h(x)$, $t \in E^*$, $h(x) \in H$, et :

$$t\,h(x) = h(\,x(1+j(t))\,(1+xj(t))^{-1})\;t\;(1+j(t)x)$$

$$h(x)\,t = t\,\left(1 - \frac{x}{1-\operatorname{Tr} x}\,j(\bar{t})\,\right)^{-1} h(x(1+j(\bar{t}))) + \frac{N(x)}{1-\operatorname{Tr} x}\,j(\bar{t})\,),$$

où $t \in E^*$, et $j(t) = \dfrac{\bar{t}}{t} - 1$.

Soit d le conducteur de E si E est ramifiée (i.e. $d = \operatorname{val}_E(\delta - \bar{\delta})$ pour toute uniformisante δ de E), ou $d=1$ si E est non ramifiée. On pose, pour $m \geq 1$:

$$H(m) = 1+(\sigma-1)\mathfrak{p}_E^{m-d+1},$$

$$\text{et } H(0) = H\cap U = \left\{ h(x) \ / \ x \in \mathfrak{p}_E^{-d+1}, \ 1-\mathrm{Tr}\ x \in \mathcal{O}_F^* \right\}.$$

La décomposition avec unicité de l'écriture $G=E^*H$ induit les décompositions :

$$A^*(m) = (1+\mathfrak{p}_E^m)\ H(m), \text{ pour } m \geqslant 1, \text{ et } U = \mathcal{O}_E^*\ H(0).$$

<u>Lemme 1.2</u> :

a) <u>Pour tout</u> $h(x) \in H$, <u>et tout</u> $r \in \mathbb{N}$, <u>on a</u> :

$$h(x)^r = h(x \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} C_r^i\ (\mathrm{Tr}\ x)^{i-1}).$$

b) <u>Pour</u> $m \geqslant 1$, <u>tout élément de</u> $A^*(m)$ <u>s'écrit sous la forme</u> $u^n h(x)^n$, <u>avec</u> $u \in 1+\mathfrak{p}_E^m$, $h(x) \in H(m)$.

<u>Preuve</u> :

a) s'obtient facilement par récurrence.

b) L'élévation à la puissance n-ième est un isomorphisme de $1+\mathfrak{p}_E^m$ sur lui-même puisque $(n,p)=1$ (Lemme I.2.2). Reste à résoudre, pour $h(y) \in H(m)$: $h(y)=h(x)^n$ avec $h(x) \in H(m)$. L'égalité des déterminants donne $1-\mathrm{Tr}\ y = (1-\mathrm{Tr}\ x)^n$, ce qui détermine uniquement $1-\mathrm{Tr}\ x$ dans $1+\mathfrak{p}^{[(m+1)/2]}$ ou $1+\mathfrak{p}^m$ (selon que E est ramifiée ou non) pour la même raison que ci-dessus. Posons $\mu=\mathrm{Tr}\ x$ et

$$\varphi(\mu) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} C_n^i\ \mu^{i-1}.$$

Puisque $\varphi(\mu)$ est congru à n modulo $\mathfrak{p}$, il appartient à $\mathcal{O}^*$, et x est déterminé par $x\,\varphi(\mu) = y$. (On vérifie aisément que $\mathrm{Tr}\ x=\mu$) c.q.f.d.

<u>Proposition 1.3</u> :

<u>Soit</u> E <u>une extension quadratique séparable de</u> F, <u>et</u> $E^* \subset GL_2(F)$ <u>un plongement tel que</u> E^* <u>conserve l'arête standard dans le cas ramifié, le sommet standard dans le cas non ramifié. Alors</u> :

a) <u>Les sous-groupes</u> U <u>et</u> $A^*(m)$ <u>de</u> G <u>sont normalisés par</u> E^* <u>et</u> U.

b) <u>Le sous-groupe de</u> U <u>engendré par les puissances n-ièmes des éléments de</u> U <u>est normalisé par</u> $\widetilde{E^*}$ <u>dans</u> $\widetilde{G}$.

c) <u>Pour</u> $m \geqslant 1$, <u>le normalisateur dans</u> $\widetilde{G}$ <u>du sous-groupe</u> $A^*(m)$ <u>de</u> $\widetilde{G}$ <u>est</u> $\widetilde{E^*}U$.

<u>Preuve</u> :

a) est clair.

b) Le cocycle β étant trivial sur U (proposition I.2.5), on note encore U le sous-groupe $\{ (u,1),\ u \in U \}$ de $\widetilde{G}$. Le résultat découle de l'égalité suivante :

pour tous $x \in E^*$, $u \in U$, on a : $\tilde{x}\widetilde{u^n}\tilde{x}^{-1} = \widetilde{xu^nx^{-1}}$, où l'on note $\tilde{x}=(x,1)$.
Pour l'obtenir, on remarque que $\widetilde{u^n}=\tilde{u}^n$ (car β est trivial sur U), d'où

$$\tilde{x}\widetilde{u^n}\tilde{x}^{-1} = (\tilde{x}\tilde{u}\tilde{x}^{-1})^n.$$

D'autre part, on a (prop. I.2.1 c) :

$$(\tilde{x}\tilde{u}\tilde{x}^{-1})^n = (\widetilde{xux^{-1}})^n.$$

Enfin E^* normalise U dans G, donc xux^{-1} appartient à U et $(\widetilde{xux^{-1}})^n = \widetilde{(xux^{-1})^n}$. C.Q.F.D.

c) provient de b) et du lemme 1.2.

Proposition 1.4 :

Soit $m \geqslant 1$.

a) Le groupe $C(E^*H(m))$ des commutateurs de $E^*H(m)$ est contenu dans $A^*(m)$.

b) Le groupe des commutateurs de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ dans $\tilde{G}$ est $(C(E^{*n}H(m)),1)$ contenu dans $A^*(m)$.

c) Si $u \in E^*$, $h(x) \in H(m)$, alors $\widetilde{uh(x)}^n$ est congru à $\tilde{u}^n\widetilde{h(x)}^n$ modulo $C(E^*H(m))$.

Preuve :

a) provient immédiatement de la proposition 1.3.a).

b) provient de la proposition 1.3.c) et du fait que $\widetilde{E^{*n}}$ est commutatif (proposition I.2.8) : le commutateur $(\tilde{u}^n h(x), \tilde{v}^n h(y))$, avec $u,v \in E^*$, $h(x),h(y) \in H(m)$, se transforme aisément en produit du commutateur $(\tilde{u}^n,\tilde{v}^n)$, trivial, et du commutateur $(u^n h(x), v^n h(y))$ dans G.

c) On a $\widetilde{uh(x)}^n = (\tilde{u}\widetilde{h(x)})^n = \tilde{u}(\widetilde{h(x)}\tilde{u})\widetilde{h(x)} \ \dots \ \tilde{u}\widetilde{h(x)}$. Or $\widetilde{h(x)}\tilde{u} = \tilde{u}\widetilde{h(x)}c$, où $c = \widetilde{h(x)}^{-1}\tilde{u}^{-1}\widetilde{h(x)}\tilde{u} = (h(x)^{-1}u^{-1}h(x)u,1)$ appartient à $C(E^*H(m))$, qui est contenu dans $A^*(m)$ donc normalisé par $\widetilde{E^*}H(m)$. On a donc $c\widetilde{h(x)}(\tilde{u}\widetilde{h(x)})^{n-2} = \widetilde{h(x)}(\tilde{u}\widetilde{h(x)})^{n-2}c'$, où $c' \in C(E^*H(m))$. En itérant, on obtient le résultat.

Remarque 1.5 :

Lorsque p est impair, on peut choisir tout simplement $E = F[\delta]$, avec

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

- dans le cas non ramifié, a est une unité de F^*, et n'est pas un carré.
- dans le cas ramifié, a est une uniformisante de F.

La classe de a modulo les carrés de F^* détermine alors E à F-isomorphisme près.
Pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors H est le groupe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F & F^* \end{pmatrix}$:

$$\text{on a } h(x+y\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2y & 1-2x \end{pmatrix}.$$

II.2. CONSTRUCTION DE LA SÉRIE RAMIFIÉE.

Soit E une extension quadratique séparable ramifiée de F, telle que $E^* \subset GL_2(F)$ conserve l'arête standard $\{L_0, L_1\}$ de l'arbre. On va construire la série supercuspidale ramifiée de $\tilde{G}$ à partir de certains caractères des groupes $\widetilde{E^{*n}}H(m)$, $m \geq 1$. Pour cela, on commence par étudier les caractères spécifiques de $\widetilde{E^{*n}}$. On note δ une uniformisante de E, vérifiant $\delta^2 = \varpi$ (uniformisante de F) si n est pair. On note E_0 le sous-groupe des éléments de E^* de valuation paire, i.e. $F^*(1+\mathfrak{P}_E)$.

Proposition 2.1 :

1°) L'application $x \longmapsto (x^n, s(x^n)^{-1})$ est un homomorphisme, de noyau $\mu_n(E)$, de E^* dans $\widetilde{E^{*n}}$ si n est impair, de E_0 dans $\widetilde{E^{*n}}$ si n est pair.

Si n est pair, on a $(\delta^n, s(\delta^n)^{-1})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}(\delta^{2n}, s(\delta^{2n})^{-1})$.
Dans tous les cas, on a $s(x^n)=1$ si $x \in E^*$ est de valuation paire.

2°) A tout caractère χ de E^* trivial sur $\mu_n(E)$, on peut associer un caractère spécifique $\tilde{\chi}$ de $\widetilde{E^{*n}}$ en posant :

a) n impair : $\tilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1}) = \chi(x)$ pour $x \in E^*$

b) n pair : $\tilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1}) = \chi(x)$ pour $x \in E_0$
$\tilde{\chi}(\delta^n, s(\delta^n)^{-1}) = \varepsilon(\chi)\chi(\delta)$, avec $\varepsilon(\chi)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}$.

On obtient ainsi, si n est impair, ou si n est pair et si $\chi \longmapsto \varepsilon(\chi)$ est donnée, telle que $\varepsilon(\chi)$ ne dépende que de la restriction de χ à E_0, une bijection de l'ensemble des caractères de E^* triviaux sur $\mu_n(E)$, sur l'ensemble des caractères spécifiques de $\widetilde{E^{*n}}$.

Preuve :

1°) Remarquons tout d'abord que l'on a montré un résultat voisin dans la proposition I.2.8, et l'on aurait pu songer à poser $\tilde{\chi}(x) = \chi(x^n)$ si $x \in E^*$ et n impair, ou si $x \in E_0$ et n pair. Il se trouve qu'une telle définition ne conduit pas au résultat de correspondance voulu (cf III.4).

Il s'agit de montrer que l'on a :

$$\beta(x^n, y^n) = s(x^n)s(y^n)s(x^n y^n)^{-1}, \text{ i.e. } \alpha(x^n, y^n) = 1,$$

pour n impair et $x, y \in E^*$, ou n pair et $x, y \in E_0$. Or si x est de valuation paire, alors $x^n \in F^{*n}(1+\mathfrak{P}_E) \subset F^{*n}\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{P} & \mathfrak{P} \\ \mathcal{O} & 1+\mathfrak{P} \end{pmatrix}$ (cf Proposition II.1.1), donc $s(x^n)=1$. Par la proposition I.2.5, le cocycle β est trivial sur $F^{*n}GL_2(\mathcal{O})$, donc :

$$\beta(x^n, y^n) = 1 = s(x^n)s(y^n)s(x^n y^n)^{-1} \text{ si x et y sont de valuation paire.}$$

Dans le cas impair, il suffit alors (en utilisant la propriété d'associativité des 2-cocycles) de montrer que $\alpha(\delta^n, x^n) = \alpha(\delta^n, \delta^n) = 1$ si δ est une uniformisante de E et $x \in E_0$. C'est une vérification facile, en utilisant le fait que $-1 \notin \mu_n$, que $x^n = \lambda^n \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\lambda \in F^*$, $\beta \in \mathfrak{p}$, $\gamma \in \mathcal{O}$, $\alpha, \delta \in 1+\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}^{*n}$, et que δ^n est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \varpi^{\frac{1}{2}(n+1)} \\ \varpi^{\frac{1}{2}(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$ u, avec $u \in K'$.

Dans le cas pair, il reste à montrer que :

$$\beta(\delta^n, \delta^n) s(\delta^n)^{-2} = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} s(\delta^{2n})^{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}, \text{ i.e. que}$$

$$\alpha(\delta^n, \delta^n) = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}.$$

Or $\delta^n = \begin{pmatrix} \varpi^{\frac{1}{2}n} & 0 \\ 0 & \varpi^{\frac{1}{2}n} \end{pmatrix}$, donc :

$$\alpha(\delta^n, \delta^n) = \left(\frac{\varpi^n}{\varpi^{\frac{1}{2}n}}, \frac{\varpi^n}{\varpi^{\frac{1}{2}n}} \right) = (\varpi^{\frac{1}{2}n}, -1) = ((-1)^{\frac{1}{2}n})^{(q-1)/n} = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2°) Clair par 1°).

•

Rappelons maintenant quelques définitions et résultats fondamentaux de [GK] (chapitre V) :

Le groupe des commutateurs de H(m) est $N(m) = 1 + (\sigma - 1)(\delta - \bar{\delta})\mathfrak{p}_F^{m-d+1}$
$= H(2m) \cap N$
$= H(2m+1) \cap N$.

Une représentation de degré 1 de H(m) est triviale sur N(m). On montre qu'elle s'induit à H en une représentation irréductible ne contenant aucun vecteur fixe par N, si et seulement si elle n'est pas triviale sur N(m-1).

<u>Définition 2.2</u> :

Un caractère de H(m) (resp. $E^*H(m)$, resp. $\widetilde{E^{*n}}H(m)$) est dit <u>non dégénéré</u> s'il est non trivial sur N(m-1).

Puisque $N(m) = H(2m) \cap N$, tout caractère η de H(m) est produit d'un caractère η_0 de H(m) trivial sur H(2m), par un caractère du déterminant. Mais H(m)/H(2m) est isomorphe à $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}/\mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$ via l'application $h(t) \longmapsto t$; ainsi η_0 s'identifie à un caractère de $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}$ trivial sur $\mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$. Le caractère η est non dégénéré si et seulement si η_0 est de conducteur 2m-d+1 exactement.

Lemme 2.3 :

1°) Soit θ un caractère de E^*, et η un caractère de $H(m)$ $(m \geqslant 1)$:

$$\eta(h(t)) = \eta_0(t)\tau(1-\mathrm{Tr}\ t),\ t \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1},$$

où η_0 est un caractère de $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}$ trivial sur $\mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$, et τ un caractère de F^*. Alors $\theta.\eta$ est un caractère de $E^*H(m)$ si et seulement si :

$$\theta(\tau o N)^{-1}(1+y)\eta_0(y) = 1 \text{ pour tout } y \in \mathfrak{p}_E^m.$$

2°) Pour qu'un caractère de E^* se prolonge en un caractère non dégénéré de $E^*H(m)$ $(m \geqslant 1)$, il faut et il suffit que :

a) si $m < d$, ce soit le relèvement (via la norme) d'un caractère de F^*.

b) si $m \geqslant d$, son conducteur relatif soit $2(m-d+1)$.

Théorème 2.4 :

Toute représentation de G induite par un caractère non dégénéré de $E^*H(m)$ $(m \geqslant 1)$, est irréductible admissible supercuspidale, et son degré formel pour la mesure de Haar sur G/F^* qui donne à E^*K'/F^* la masse 1 est $q^{m-1}(q-1)$.

On étudie à présent les caractères spécifiques de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ $(m \geqslant 1)$:

Lemme 2.5 :

Soit $\widehat{\theta}$ un caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}$, et η un caractère de $H(m)$:

$$\eta(h(t)) = \eta_0(t)\tau(1-\mathrm{Tr}\ t),$$

où τ est un caractère de F^* et η_0 un caractère de $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}$ trivial sur $\mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$. Alors

$$\widetilde{\chi}(\zeta\, \tilde{u}^n h(x)) = \zeta\, \widehat{\theta}(\tilde{u}^n)\eta(h(x)),\ u \in E^*,\ h(x) \in H(m),$$

définit un caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ si et seulement si sa restriction à $\mathfrak{U}_E^{*n}H(m)$ est prolongeable en un caractère de $E^{*n}H(m)$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\widehat{\theta}\,.\,(\tau o N)^{-1}(1+xj(u^n))\eta_0(xj(u^n)) = 1$$

pour $h(x) \in H(m)$, $u \in E^*$ (où $j(u^n) = \bar{u}^n/u^n - 1$). Tout caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ est de cette forme.

Preuve :

La spécificité étant assurée, il faut avoir :

$$\widetilde{\theta}(\tilde{u}^n)\eta(h(x)) = \zeta\, \widetilde{\theta}(\tilde{v}^n)\eta(h(y)) \text{ si } \tilde{u}^n\widetilde{h(x)} = \zeta\, \widetilde{h(y)}\tilde{v}^n.$$

De l'égalité $\tilde{u}^n\widetilde{h(x)} = \zeta\, \widetilde{h(y)}\tilde{v}^n$, on tire d'une part $u^n h(x) = h(y)v^n$, d'où $v^n = u^n(1+j(u^n)x)$, et d'autre part $\widetilde{h(y)}^{-1}\tilde{u}^n\widetilde{h(x)}\tilde{u}^{-n} = \zeta\, \tilde{v}^n\tilde{u}^{-n}$, soit (proposition 1.3) :

$$\zeta\, \tilde{v}^n\tilde{u}^{-n} = (h(y)^{-1}u^n h(x)u^{-n}, 1) = (1+xj(u^n), 1).$$

L'égalité à obtenir devient alors :

$$\widetilde{\theta}(1+xj(u^n)) = \eta(h(x)h(y)^{-1}),$$

égalité équivalente, comme on le voit facilement, à celle de la proposition, qui est exactement la relation de compatibilité pour les caractères de $E^{*n}H(m)$ (cf [GK]).

Remarque :

Si n est impair, alors l'application $x \longmapsto x^n$ est un isomorphisme de Ker N sur lui-même. Les éléments $j(u^n)$ et $j(u)$, pour $u \in E^*$, décrivent donc le même sous-ensemble de $\mathfrak{p}_E^{d-1}$, et la condition donnée s'écrit :

$$\widetilde{\theta}\,(\tau \circ N)^{-1}(1+y)\,\eta_0(y) = 1 \quad \text{si } y \in \mathfrak{p}_E^m,$$

ce qui signifie que $\widetilde{\chi}$ est obligatoirement trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$.

Si n est pair, alors $\mathrm{val}_E\, j(u^n) \geqslant d$ pour $u \in E^*$, (cf I.3.3), et la condition s'écrit :

$$\widetilde{\theta}\,(\tau \circ N)^{-1}(1+y)\,\eta_0(y) = 1 \quad \text{si } y \in \mathfrak{p}_E^{m+1}.$$

On aura besoin par la suite de supposer de plus $\widetilde{\chi}$ trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$.

Proposition 2.6 :

A tout caractère spécifique $\widetilde{\chi}$ de $\widetilde{E^{*n}H(m)}$ $(m \geqslant 1)$ trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$, on peut associer un caractère χ de $E^*H(m)$ en posant :

a) n impair : $\chi(x) = \widetilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1})$ pour $x \in E^*H(m)$.

b) n pair : $\chi(x) = \widetilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1})$ pour $x \in E_0H(m)$,

$$\chi(\delta) = \varepsilon(\widetilde{\chi})\,\widetilde{\chi}(\delta^n, s(\delta^n)^{-1}), \text{ avec } \varepsilon(\widetilde{\chi})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}.$$

On obtient ainsi, si n est impair, ou si n est pair et si $\varepsilon(\widetilde{\chi})$ ne dépend que de la restriction de $\widetilde{\chi}$ à $\widetilde{E_0^nH(m)}$, une bijection de l'ensemble des caractères spécifiques de $\widetilde{E^{*n}H(m)}$ triviaux sur les commutateurs de $E^*H(m)$, sur l'ensemble des caractères de $E^*H(m)$ triviaux sur $\mu_n(E)$.

De plus, χ est non dégénéré si et seulement si $\widetilde{\chi}$ l'est.

Preuve :

La restriction de χ à E^* est un caractère par la proposition 2.1.

D'autre part, pour $m \geqslant 1$, le groupe $H(m)$ est contenu dans $\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathcal{O} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$ (cf II.1.1), donc le cocycle β et la fonction s sont triviaux sur $H(m)$ d'où, pour $h(x) \in H(m)$:

$$\widetilde{\chi}(h(x)^n, s(h(x)^n)^{-1}) = \widetilde{\chi}(h(x)^n, 1) = [\widetilde{\chi}(h(x), 1)]^n,$$

et la restriction de χ à $H(m)$ est un homomorphisme. De plus l'application :

CONSTRUCTION

$$N(m-1)/N(m) \longrightarrow N(m-1)/N(m)$$
$$h(x) \longmapsto h(x)^n$$

est un isomorphisme car (Lemme II.1.2) $h(x)^n = h(nx)$ si $\mathrm{Tr}\ x = 0$, et val $n = 0$. Le caractère χ de $H(m)$ est donc non dégénéré si et seulement si $\tilde{\chi}$ l'est.

Il faut maintenant montrer que l'on a bien :

$$\tilde{\chi}(u^n, s(u^n)^{-1})\tilde{\chi}(h(x)^n, 1) = \tilde{\chi}((uh(x))^n, s((uh(x))^n)^{-1}),$$

pour $u \in E^*$ et $h(x) \in H(m)$ si n est impair, pour $u \in E_0$ et $h(x) \in H(m)$ si n est pair. Or, d'après la proposition II.1.4, on a :

$$\tilde{\chi}(\widetilde{uh(x)}^n) = \tilde{\chi}(\tilde{u}^n)\tilde{\chi}(\widetilde{h(x)}^n), \text{ car}$$
$$\widetilde{uh(x)}^n = \tilde{u}^n\widetilde{h(x)}^n(a,1) \text{ avec } a \in A^*(m).$$

Posant $\tilde{z}^n = (z^n, \gamma(z)s(z^n)^{-1})$ (cf Lemme I.2.9), on a donc :

$$\gamma(uh(x))s((uh(x))^n)^{-1} = \gamma(u)s(u^n)^{-1}\beta(u^n, h(x)^n a),$$

soit : $\gamma(uh(x)) = \gamma(u)\alpha(u^n, h(x)^n a)$ (car $(uh(x))^n = u^n h(x)^n a$, et $s(h(x)^n a) = 1$).

D'autre part :

$$\gamma(uh(x))\,\tilde{\chi}((uh(x))^n, s((uh(x))^n)^{-1}) = \gamma(u)\,\tilde{\chi}(u^n, s(u^n)^{-1})\,\tilde{\chi}(h(x)^n, 1).$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $\alpha(u^n, k) = 1$ si $k \in A^*(m)$, et $u \in E^*$ si n est impair, $u \in E_0$ si n est pair, ce que l'on vérifie exactement comme dans la démonstration du lemme 4.2, en utilisant le fait que $A^*(m)$ est contenu dans $\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathcal{O} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}$ et que $1+\mathfrak{p}$ est formé de puissances n-ièmes.

Enfin, la trivialité de $\tilde{\chi}$ sur les commutateurs de $E^*H(m)$, contenus dans $A^*(m)$, assure celle de χ. Ainsi χ est bien un caractère de $E^*H(m)$: la relation de compatibilité donnée en 2.3.1°) équivaut à la trivialité sur les commutateurs de $E^*H(m)$ puisque si $vh(y) = h(x)u$, on a $vh(y) = u\alpha h(\beta)h(x)$, où $\alpha h(\beta)$ est le commutateur $u^{-1}h(x)uh(x)^{-1}$. Il faut remarquer que l'hypothèse $\tilde{\chi}$ trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$ (toujours vérifiée si n est impair) sert effectivement à la construction de χ.

L'application $\tilde{\chi} \longmapsto \chi$ est clairement injective (sous les conditions données pour $\mathcal{E}(\tilde{\chi})$). De plus, étant donné un caractère χ de $E^*H(m)$ trivial sur $\mu_n(E)$, décomposé en $\chi = \theta.\eta$ comme dans le lemme 2.3, on peut lui associer, par la proposition 2.1, un caractère spécifique $\tilde{\theta}$ de E^{*n}, et un caractère $\tilde{\eta}$ de $H(m)$:

$$\tilde{\eta}(h(x)^n, 1) = \eta(h(x)).$$

Posant alors $\tilde{\chi} = \tilde{\theta}.\tilde{\eta}$, on vérifie aisément que $\tilde{\chi}$ est un caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ trivial sur les commutateurs de $\widetilde{E^*H(m)}$ (cf Lemme 2.5). Par les formules de la proposition 2.6, on associe alors à $\tilde{\chi}$ un caractère de $E^*H(m)$ qui a mêmes restrictions à E^* et à $H(m)$ que χ, donc est égal à χ, ce qui donne la surjectivité.

C.Q.F.D.

Théorème 2.7 :

Soit $\tilde{\chi}$ un caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$.

1°) La représentation induite à $\widetilde{E^*}H(m)$ de $\tilde{\chi}$ est multiple d'une unique représentation spécifique irréductible $\pi(\tilde{\chi})$ de $\widetilde{E^*}H(m)$. Le degré de $\pi(\tilde{\chi})$ est n, et sa multiplicité dans l'induite est n également. Le caractère de $\pi(\tilde{\chi})$ est nul en dehors de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$, et vaut :

$$\mathrm{Tr}\ \pi(\tilde{\chi})(g) = n\tilde{\chi}(g) \text{ si } g \in \widetilde{E^{*n}}H(m).$$

2°) Si $\tilde{\chi}$ est de plus non dégénéré , la représentation $T(\tilde{\chi})$ de $\tilde{G}$ induite par $\pi(\tilde{\chi})$ est spécifique irréductible admissible supercuspidale. Son degré formel pour la mesure de Haar sur $\tilde{G}/\widetilde{F^{*n}}$ qui donne à $\widetilde{E^*K'}/\widetilde{F^{*n}}$ la masse 1 est $nq^{m-1}(q-1)$.

Preuve :

1°) Le résultat découle de la construction standard d'Heisenberg ; il suffit d'établir les points suivants :

a) $\widetilde{E^{*n}}H(m)$ est distingué d'indice n^2 dans $\widetilde{E^*}H(m)$, le quotient est commutatif, isomorphe à E^*/E^{*n}.

En effet, la proposition 1.3.c) assure que l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{E^*}H(m) &\longrightarrow E^*/E^{*n} \\ (uh(x),\xi) &\longmapsto u \end{aligned}$$

est bien définie, et est un homomorphisme, de noyau $\widetilde{E^{*n}}H(m)$.

b) L'action de $\widetilde{E^*}H(m)$ par conjugaison fixe $\tilde{\chi}$.

En effet, avec les notations de la proposition 2.2, on a, pour u et $v \in E^*$:

$$\tilde{\theta}(\tilde{u}\tilde{v}^n\tilde{u}^{-1}) = \tilde{\theta}((u,\bar{v}^n)_E\tilde{v}^n) = \tilde{\theta}(\tilde{v}^n) \text{ (Prop. I.2.7)}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\tilde{u}\widetilde{h(x)}\tilde{u}^{-1}) &= \tilde{\chi}(\widetilde{uh(x)u^{-1}}\widetilde{h(x)}^{-1})\tilde{\chi}(h(x)) \\ &= \tilde{\chi}(uh(x)u^{-1}h(x)^{-1},1)\tilde{\chi}(h(x)), \end{aligned}$$

et le résultat découle de l'hypothèse : $\tilde{\chi}$ trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$.

c) L'application $(x,y) \longmapsto \tilde{\chi}(xyx^{-1}y^{-1})$ sur $\widetilde{E^*}H(m)\times\widetilde{E^*}H(m)$ passe au quotient en une application bimultiplicative alternée non dégénérée sur E^*/E^{*n}.

En effet, pour $x,y \in E^*$, on a : $\tilde{\chi}(\tilde{x}\tilde{y}\tilde{x}^{-1}\tilde{y}^{-1}) = \tilde{\chi}((x,\bar{y})_E) = (x,\bar{y})_E$ par la proposition I.2.7, d'où la non-dégénérescence. Il faut remarquer que la non-dégénérescence ici découle de la spécificité, et n'a aucun rapport avec une éventuelle non-dégénérescence de $\tilde{\chi}$ au sens de la définition 2.2.

2°) La spécificité est claire ; par le théorème I.4.3, il suffit de montrer que $\pi(\tilde{\chi})$ est disjointe de ses conjuguées par $\tilde{G}-\widetilde{E^*H(m)}$. Puisque $\tilde{G}=\tilde{E}^*\tilde{H}$, on se ramène à conjuguer $\pi(\tilde{\chi})$ par les éléments de $\tilde{H}-\widetilde{H(m)}$, et on va montrer un peu plus :

Pour tout $h(x)\in H-H(m)$, les représentations $\pi(\tilde{\chi})$ et $\pi(\tilde{\chi})^{h(x)}$ sont disjointes sur $\widetilde{H(m)}\cap\widetilde{h(x)}^{-1}\widetilde{H(m)}\widetilde{h(x)}$.

En effet, la restriction de $\pi(\tilde{\chi})$ à $\widetilde{H(m)}$ est n fois le caractère $\tilde{\chi}$; on va donc comparer $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\chi}^{h(x)}$. Or pour $h(y)\in H(m)$, on a :

$$\widetilde{h(x)}\widetilde{h(y)}\widetilde{h(x)}^{-1} = \xi\, \widetilde{h(\bar{y}x-\bar{x}y)h(y)} \text{ pour un } \xi\in\mu_n.$$

Lorsque cet élément appartient à $\widetilde{H(m)}$, c'est-à-dire lorsque $h(\bar{y}x-\bar{x}y)\in H(m)\cap N$, on a $\tilde{\chi}^{h(x)}(\widetilde{h(y)}) = \xi\,\tilde{\chi}(\widetilde{h(\bar{y}x-\bar{x}y)})\tilde{\chi}(\widetilde{h(y)})$, distinct de $\tilde{\chi}$ si $\tilde{\chi}(\widetilde{h(\bar{y}x-\bar{x}y)}) \neq 1$ (en effet, la restriction de $\tilde{\chi}$ à $H(m)\cap N$ est d'ordre une puissance de p, et ne peut être neutralisée par un $\xi\in\mu_n$).

Par non-dégénérescence de $\tilde{\chi}$ (et multiplication éventuelle de y par un élément de $\mathcal{O}^*$), tout revient à montrer que l'on peut trouver $h(y)\in H(m)$ vérifiant :

$$h(\bar{y}x-\bar{x}y)\in H(m)\cap N$$
$$h(\bar{y}x-\bar{x}y)\notin N(m),$$

ce qui est clair (par exemple, $val_E y = 2m-2d+1-val_E x$ convient).

Quant au degré formel pour la mesure de Haar indiquée, il est produit de l'indice $\left[E^*K : E^*H(m)\right] = q^{m-1}(q-1)$ (d'après le théorème 2.4) par le degré de $\pi(\tilde{\chi})$ qui vaut n. C.Q.F.D.

Remarque :

On a montré au passage que la représentation $\mathrm{Ind}_{\widetilde{H(m)}}^{\tilde{H}}\tilde{\chi}$ est irréductible, et que $\mathrm{Res}_{\tilde{H}}\pi(\tilde{\chi}) \simeq n\ \mathrm{Ind}_{\widetilde{H(m)}}^{\tilde{H}}\tilde{\chi}$.

II.3. CONSTRUCTION DE LA SÉRIE NON RAMIFIÉE.

Soit E une extension quadratique séparable non ramifiée de F ; on plonge E^* dans $GL_2(F)$ de sorte que E^* fixe le sommet standard L_0 de l'arbre, i.e. soit contenue dans F^*K. On note E_0 le sous-groupe $F^*(1+\mathfrak{P}_E)$ de E^* : c'est le sous-groupe des éléments de E^* fixant au moins deux points de l'arbre, noyau de l'homomorphisme de E^* dans Ker N / Ker $N\cap(1+\mathfrak{P}_E)$ qui à x associe la classe de $\bar{x}/x$ (cf I.3).

Les caractères spécifiques de $\widetilde{E^*}^n$ sont très faciles à décrire :

Proposition 3.1 :

1°) Le centre $\widetilde{E^{*n}}$ de $\widetilde{E^*}$ est produit direct $E^{*n} \times \mu_n$. La restriction à E^{*n} met en bijection les caractères spécifiques de $\widetilde{E^{*n}}$ avec les caractères de E^{*n}.

2°) A tout caractère θ de E^* trivial sur $\mu_n(E)$ on associe un caractère $\widetilde{\theta}$ de E^{*n} en posant $\widetilde{\theta}(x^n) = \theta(x)$, $x \in E^*$. On obtient ainsi un isomorphisme du groupe des caractères de E^* triviaux sur $\mu_n(E)$ sur le groupe des caractères de E^{*n}. Cet isomorphisme préserve le conducteur relatif, à une exception près : si n est pair, les caractères de E^{*n} de conducteur relatif 1 mais triviaux sur $(\text{Ker } N)^n$ proviennent, par cet isomorphisme, de caractères non réguliers de E^*, à savoir les caractères $\chi \circ N$ où χ est un caractère de F^* non trivial sur $\mu_n(F)$, mais dont le carré est trivial sur $\mu_n(F)$.

Remarque :

Dans cet énoncé, le conducteur relatif d'un caractère $\widetilde{\theta}$ de E^{*n} est défini relativement à E^* : c'est le conducteur relatif d'un prolongement quelconque de $\widetilde{\theta}$ à E^* ; il vaut 0 si $\widetilde{\theta}$ est trivial sur $\text{Ker } N \cap E^{*n}$, sinon c'est le plus petit entier $i \geq 1$ tel que $\widetilde{\theta}$ soit trivial sur $\text{Ker } N \cap (1+\mathfrak{P}_E^i)$. On profite ici du fait que Ker N est contenu dans $\mathfrak{O}_E^{*n}$: en effet $1+\mathfrak{P}_E$ est formé de puissances n-ièmes, et par ailleurs le noyau de la norme résiduelle de k_E^* sur k^* est formé des puissances (q-1)-ièmes de k_E^* (Théorème 90 de Hilbert), qui sont des puissances n-ièmes puisque n divise q-1. Par contre, on ne définira pas la notion de conducteur pour un caractère de E^{*n}, pour éviter les ambiguïtés.

Preuve :

1°) Par les propositions I.2.1.f et I.2.5, le cocycle β est trivial sur $E^{*n} = F^{*n}\mathfrak{O}_E^{*n}$, contenu dans $F^{*n}K$.

2°) L'isomorphisme $x \longmapsto x^n$ de $E^*/\mu_n(E)$ sur E^{*n} détermine l'isomorphisme annoncé entre les groupes de caractères. Il se restreint en des isomorphismes de $\text{Ker } N \cap (1+\mathfrak{P}_E^i)$ sur lui-même pour $i \geq 1$, et de $\text{Ker } N / \mu_n(E)$ sur $(\text{Ker } N)^n$. On en déduit aisément que les conducteurs relatifs de θ et $\widetilde{\theta}$ ne peuvent différer que si $\widetilde{\theta}$ est trivial sur $(\text{Ker } N)^n$ et non sur $\text{Ker } N \cap E^{*n}$: le conducteur relatif de $\widetilde{\theta}$ vaut alors 1, celui de θ vaut 0. Ce cas suppose que $(\text{Ker } N)^n$ soit distinct de Ker N, donc que n soit pair : le noyau de la norme résiduelle de k_E^* dans k_F^* est d'ordre q+1 ; si l'homomorphisme $x \longmapsto x^n$ n'y est pas surjectif, c'est que n et q+1 ne sont pas premiers entre eux ; puisque n divise q-1, cela implique que n est pair, et le p.g.c.d. de n et q+1 est alors 2. Dans ce cas $(\text{Ker } N)^n = (\text{Ker } N)^2$

est d'indice 2 dans Ker N. Le caractère θ de E^* est alors de la forme $\chi \circ N$, où χ est un caractère de F^*. De $\chi(N(x)) = \tilde{\theta}(x^n)$, $x \in E^*$, on déduit que χ^2 est trivial sur $\mu_n(E)$. D'autre part $\tilde{\theta}$ doit être non trivial sur Ker N ; si a est un élément de E^* d'ordre q^2-1, l'image de a^{q-1} engendre Ker N / Ker $N \cap (1+\mathfrak{P}_E)$, et $\tilde{\theta}(a^{q-1}) \neq 1$ s'écrit $\chi \circ N(a^{(q-1)/n}) \neq 1$, soit $\chi(a^{(q-1)(q+1)/n}) \neq 1$. Mais $a^{(q+1)(q-1)/n}$ est précisément un générateur de $\mu_n(F)$, d'où le résultat.

Définition 3.2 :

Un caractère de E^{*n} est dit exceptionnel s'il est trivial sur $(\text{Ker } N)^n$ et non trivial sur Ker N.

Les caractères exceptionnels n'existent que lorsque n est pair.

Rappelons maintenant comment on obtient la série supercuspidale non ramifiée de GL_2 (cf [GK] et [B]) :

Proposition 3.3 :

Soit θ un caractère régulier de E^*.

1°) Si θ est de conducteur relatif 2m, $m \geq 1$, il se prolonge en une unique représentation irréductible π_θ de degré 1 de $E^*K_m = E^*H(m)$.

2°) Si θ est de conducteur relatif 2m+1, $m \geq 1$, il détermine une unique représentation irréductible π_θ, de degré q, de E^*K_m, caractérisée par :

$$\operatorname{Tr} \pi_\theta(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } g \in E_0(H(m) - H(m+1)) \\ q\,\theta(g) \text{ si } g \in E_0 H(m+1) \\ -\theta(g) \text{ si } g \in E^* - E_0 \end{cases}$$

(où l'on note encore θ l'unique prolongement de θ à $E^*H(m+1)$).

De plus, la restriction de π_θ à E_0K_m est encore irréductible.

3°) Si θ est de conducteur relatif 1, il détermine une unique représentation irréductible π_θ de F^*K, de degré q-1.

Notant $\theta = \theta_0 . \tau \circ N$, où θ_0 est de conducteur 1 et τ un caractère de F^*, on a, pour $\lambda \in F^*$ et $u \in K$, d'image u_0 dans $GL_2(k)$:

$$\operatorname{Tr} \pi_\theta(\lambda u) = \begin{cases} (q-1)\theta(\lambda)\tau(\text{dét } u)\,\theta_0(u_0) \text{ si } u_0 \in k^* . \\ -\theta(\lambda)\tau(\text{dét } u)(\theta_0(u_0)+\theta_0(\bar{u}_0)) \text{ si } u_0 \in k_E^* - k^* \\ -\theta(\lambda)\tau(\text{dét } u) \text{ si } u_0 \text{ est conjugué à } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, a \in k^* \\ 0 \text{ si } u_0 \text{ est conjugué à } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a,b \in k^*, a \neq b \end{cases}$$

Théorème 3.4 :

Soit θ un caractère régulier de E^*. Alors la représentation T_θ induite de π_θ à G est irréductible admissible supercuspidale. Son degré formel pour la mesure de Haar sur G/F^* qui donne à F^*K/F^* la masse 1 est $q^{2m-1}(q-1)$ si θ est de conducteur relatif $2m$ $(m \geqslant 1)$, $q^{2m}(q-1)$ si θ est de conducteur relatif $2m+1$ $(m \geqslant 1)$, $q-1$ si θ est de conducteur relatif 1.

Soit $\tilde{\theta}$ un caractère régulier de E^{*n}, c'est-à-dire la restriction à E^{*n} d'un caractère régulier de E^*. Si $\tilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m$ ou $2m+1$ avec $m \geqslant 1$, on note $\pi_{\tilde{\theta}}$ l'unique représentation irréductible de $E^{*n}H(m)$ qu'il détermine (en effet, les restrictions à $E_0H(m)$ des représentations π_θ définies en 1°) et 2°) de la proposition 3.3 étant irréductibles, leurs restrictions à $E^{*n}H(m)$ le sont également, et ne dépendent évidemment que de la restriction du caractère θ à E^{*n}). Alors $\pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$ est une représentation spécifique irréductible de $\widetilde{E^{*n}H(m)} = E^{*n}H(m) \times \mu_n$, et on a :

Proposition 3.5 :

Soit $\tilde{\theta}$ un caractère de E^{*n} de conducteur relatif $2m$ ou $2m+1$, avec $m \geqslant 1$. Alors la représentation induite à $\widetilde{E^*H(m)}$ de $\pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$ est multiple d'une unique représentation spécifique irréductible $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})$ de $\widetilde{E^*H(m)}$. Le degré de $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})$ est n fois celui de $\pi_{\tilde{\theta}}$, et sa multiplicité dans l'induite est n. La trace de $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})$ est nulle en dehors de $E^{*n}H(m)$, et vaut :

$$\mathrm{Tr}\,\tilde{\pi}(\tilde{\theta})(g,\zeta) = n\zeta\,\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(g) \text{ si } g \in E^{*n}H(m),\ \zeta \in \mu_n.$$

Preuve :

La démonstration du théorème 2.7.1°) donne le résultat si $\tilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m$; on voit de la même façon que $\widetilde{E^{*n}H(m)}$ est distingué d'indice n^2 dans $\widetilde{E^*H(m)}$, le quotient étant commutatif, isomorphe à E^*/E^{*n}.

En fait, dans le cas non ramifié, on peut procéder différemment, exploitant le fait que le sous-groupe $\widetilde{E_nH(m)}$ (où E_n désigne le sous-groupe des éléments de E^* dont la valuation est multiple de n), intermédiaire entre $\widetilde{E^{*n}H(m)}$ et $\widetilde{E^*H(m)}$, est encore produit direct $E_nH(m) \times \mu_n$ (car $E_n = F^{*n}\mathfrak{O}_E^*$).

Ainsi, si $\tilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m$ ou $2m+1$, on note θ' un prolongement quelconque de $\tilde{\theta}$ à E_n, et $\pi_{\theta'}$ la représentation irréductible de $E_nH(m)$ qu'il détermine par la proposition 3.3. Alors :

$$\tilde{\pi}_{\theta'} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{E_nH(m)}}^{\widetilde{E^*H(m)}} \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id} \text{ est irréductible, de degré } n.d^\circ\pi_{\theta'}.$$

En effet, $\widetilde{E_n H(m)}$ est distingué d'indice n dans $\widetilde{E^*H(m)}$, et pour $t \in E^*-E_n$, et $u \in E_n$, on a :

$$\mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'} \otimes I(\widetilde{tut^{-1}}) = (t,\bar{u})_E\ \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'} \otimes I(\tilde{u}) \quad \text{(Proposition I.2.7).}$$

Si $t \notin E_n$ est fixé, on peut toujours trouver $u \in \mathcal{O}_E^*$ tel que

$$(t,\bar{u})_E = (\bar{u}^{\mathrm{val}_E t})^{(q-1)/n} \pmod{1+\mathfrak{P}_E)}$$

soit non trivial ; or la trace de $\pi_{\theta'}$ est non nulle sur les éléments de E_n, d'où l'irréductibilité par le critère de Mackey.

La multiplicité de $\pi_{\theta'}$ dans $\mathrm{Ind}_{\widetilde{E^{*n}H(m)}}^{\widetilde{E^*H(m)}}\ \pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$ est la multiplicité de $\pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$ dans la restriction de $\widetilde{\pi}_{\theta'}$ à $E^{*n}H(m)$. Or $E^{*n}H(m) = E^{*n}A^*(m)$ est normalisé par $\widetilde{E^*H(m)}$ dans $\widetilde{G}$ (Proposition 1.3), et $\pi_{\tilde{\theta}}$ est prolongeable à $E^*H(m)$ (Proposition 3.3), donc $\pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$ est fixée par conjugaison par E^*, et sa multiplicité dans la restriction de $\widetilde{\pi}_{\theta'}$ est n. On en déduit que $\pi_{\theta'}$ est la représentation $\widetilde{\pi}(\tilde{\theta})$ cherchée, de multiplicité n dans l'induite de $\pi_{\tilde{\theta}} \otimes \mathrm{Id}$; en particulier elle est indépendante du prolongement θ' choisi. Le calcul de la trace provient alors de ce que $\widetilde{E^{*n}H(m)}$ est distingué dans $\widetilde{E^*H(m)}$.

C.Q.F.D.

Si $\tilde{\theta}$ est de conducteur relatif 1, on voudrait obtenir une représentation spécifique de $\widetilde{E^*K} = \widetilde{F^*K}$ par induction à partir de $\widetilde{E^{*n}K} = \widetilde{F^{*n}K}$, qui est produit direct $F^{*n}K \times \mu_n$. Pour cela on choisit un prolongement θ' de $\tilde{\theta}$ à $E^{*(n)} = F^{*n}\mathcal{O}_E^*$, et on note $\pi_{\theta'}$ la représentation irréductible de degré q-1 de $F^{*n}K$ qu'il détermine par la proposition 3.3.3°).

Proposition 3.6 :

Soit $\tilde{\theta}$ un caractère de E^{*n} de conducteur relatif 1.

1°) La représentation induite à $\widetilde{F^*K}$ de $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ est irréductible si et seulement si $\tilde{\theta}$ n'est pas exceptionnel.

2°) Si $\tilde{\theta}$ n'est pas exceptionnel, cette représentation spécifique irréductible est indépendante du prolongement θ' de $\tilde{\theta}$ utilisé pour la construire ; on la note $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})$. Elle est de degré n(q-1), et a pour trace :

$$\mathrm{Tr}\ \widetilde{\pi}(\tilde{\theta})(\tilde{g}) = \begin{cases} 0 \text{ si } g \notin F^{*n}K \text{ ou si } \det g \notin F^{*n} \\ n\ \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}(g) \text{ si } g \in F^{*n}K \text{ et } \det g \in F^{*n} \end{cases}$$

3°) Si $\tilde{\theta}$ est exceptionnel, alors $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ admet deux prolongements non isomorphes à $\widetilde{F^{*\frac{1}{2}n}K}$. Ces prolongements se distinguent par leur trace sur les

<u>éléments de la forme</u> $\varpi^{\frac{1}{2}n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$, $a \in \mathcal{O}^*$, <u>de la façon suivante</u> :

<u>soit</u> η_1 <u>et</u> η_2 <u>les deux racines carrées dans</u> $\mathbb{C}$ <u>de</u> $(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\tilde{\theta}(\varpi^n)$, <u>et soit</u> Ψ <u>un caractère additif non trivial de</u> k <u>fixé ; on appelle</u> $\pi^i_{\theta'}$ (i=1 <u>ou</u> 2) <u>le prolongement de</u> $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ <u>tel que</u> :

$$\mathrm{Tr}\ \pi^i_{\theta'}\left(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}}\right) = \eta_i\left(\sum_{\lambda\in k^{*2}}\Psi(\lambda a) - \sum_{\lambda\in k^*-k^{*2}}\Psi(\lambda a)\right)$$

<u>pour tout</u> $a \in \mathcal{O}$.

<u>Pour</u> i=1 <u>ou</u> 2, <u>la représentation induite à</u> $\widetilde{F^*K}$ <u>de</u> $\pi^i_{\theta'}$, <u>est spécifique irréductible, de degré</u> $\frac{1}{2}n(q-1)$, <u>et ne dépend pas du prolongement</u> θ' <u>de</u> $\tilde{\theta}$ <u>utilisé pour la construire : on la note</u> $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i$. <u>Elle a pour trace</u> :

$$\mathrm{Tr}\ \tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i(\tilde{x}) = \begin{cases} 0 \ \underline{\text{si}}\ x \in F^*K \ \underline{\text{et}}\ \text{dét}\ x \notin F^{*n} \\ \frac{1}{2}n\ \mathrm{Tr}\ \pi^i_{\theta'}(x)\ \underline{\text{si}}\ x \in F^{*\frac{1}{2}n}K\ \underline{\text{et}}\ \text{dét}\ x \in F^{*n}. \end{cases}$$

<u>Preuve</u> :

1°) Elle repose essentiellement sur la propriété $\tilde{\lambda}\tilde{g}\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{g}^{-1} = (\lambda, \text{dét } g)_F$ si $\lambda \in F^*$, $g \in G$ (Proposition I.2.1.d). En effet, $\widetilde{F^{*n}K}$ est distingué dans $\widetilde{F^*K}$, et $\{\varpi^i,\ 0 \leq i \leq n-1\}$ est un système de représentants du quotient. Par le critère de Mackey, l'irréductibilité de l'induite sera assurée si et seulement si l'on peut trouver, pour tout i avec $1 \leq i \leq n-1$, un élément g de K tel que :

$$\mathrm{Tr}\ (\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id})(\tilde{\varpi}^i\tilde{g}\,\tilde{\varpi}^{-i}) \neq \mathrm{Tr}\ (\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id})(\tilde{g}),$$

i.e. tel que $(\varpi, \text{dét } g)^i \neq 1$ <u>et</u> $\mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}(g) \neq 0$.

Si n est impair, ou si $i \neq \frac{1}{2}n$, il suffit de choisir $g \in \mathcal{O}^*$ tel que $g^{2i(q-1)/n} \neq 1$ modulo $1+\mathfrak{P}$, ce qui est toujours possible.

Mais si n est pair, et $i = \frac{1}{2}n$, on a $(\varpi, \text{dét } g)^{\frac{1}{2}n} = (\text{dét } g)^{\frac{1}{2}(q-1)}$ (dans k^*) ; or les seuls éléments de $GL_2(k)$ dont le déterminant ne soit pas un carré, sont certains hyperboliques, sur lesquels la trace de $\pi_{\theta'}$ est nulle, et certains éléments t de k_E^*, sur lesquels la trace de $\pi_{\theta'}$ vaut :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}(t) &= -\theta'(t) - \theta'(\bar{t}) \\ &= -\theta'(t)\,(1+\theta'(\bar{t}/t)).\end{aligned}$$

Or dans le corps résiduel, $N(t) = t^{q+1}$ est un carré dans k^* si et seulement si $(t^{q+1})^{\frac{1}{2}(q-1)} = 1$, i.e. $(t^{q-1})^{\frac{1}{2}(q+1)} = 1$, i.e. si et seulement si $t^{q-1} = \bar{t}/t$ appartient à $(\mathrm{Ker}\ N)^2$. Si θ n'est pas trivial sur $(\mathrm{Ker}\ N)^2$, on peut trouver t tel que N(t) ne soit pas un carré, et $\theta(\bar{t}/t) \neq -1$, d'où l'irréductibilité. Mais si θ est trivial sur $(\mathrm{Ker}\ N)^2$, alors $\theta(\bar{t}/t) = -1$ pour tout t tel que $(\varpi, N(t))^{\frac{1}{2}n} \neq 1$, d'où la réductibilité.

2°) La trace de l'induite est nulle en dehors du sous-groupe distingué $\widetilde{F^{*n}K}$; sur un élément g de K, elle vaut :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}(\widetilde{\varpi}^i \tilde{g}\, \widetilde{\varpi}^{-i}) = \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}(g) \sum_{i=0}^{n-1} (\varpi, \text{dét } g)^i,$$

c'est-à-dire 0 si dét g n'est pas une puissance n-ième, et n Tr $\pi_{\theta'}(g)$ si dét g est une puissance n-ième. Or la trace de $\pi_{\theta'}$ sur les éléments g dont le déterminant est une puissance n-ième ne fait intervenir que les valeurs de θ' sur E^{*n}, i.e. celles de $\tilde{\theta}$, comme on le voit par la proposition 3.3.3°) en remarquant que, pour $t \in k_E^*$, on a :

$$\begin{aligned} N(t) \in \mathcal{O}^{*n} &\iff (t^{q+1})^{(q-1)/n} = 1 \\ &\iff t^{(q^2-1)/n} = 1 \\ &\iff t \in \mathcal{O}_E^{*n}. \end{aligned}$$

3°) Si $\tilde{\theta}$ est exceptionnel, alors $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ est isomorphe à sa conjuguée par $\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}$. Soit A un opérateur d'entrelacement de ces deux représentations ; il est caractérisé à un scalaire près par :

$$A . \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}(x) . A^{-1} = \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}\, \tilde{x}\, \widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}^{-1}).$$

On définit un prolongement de $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ à $\widetilde{F^{*\frac{1}{2}n}K}$ en faisant opérer $\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}$ par A, si et seulement si A vérifie :

$$\begin{aligned} A^2 &= \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}\ (\varpi^n, (\varpi^{\frac{1}{2}n}, \varpi^{\frac{1}{2}n})) \\ &= \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \tilde{\theta}\ (\varpi^n)\ 1_V, \end{aligned}$$

où 1_V est l'identité sur l'espace V de la représentation $\pi_{\theta'}$. D'où deux prolongements possibles $\pi_{\theta'}^1$ et $\pi_{\theta'}^2$, les valeurs propres des opérateurs $\pi_{\theta'}^i(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}})$ ayant pour carré $(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \theta(\varpi^n)$. De plus, de $\tilde{g}^{-1} \widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}} \tilde{g} = (\varpi^{\frac{1}{2}n}, \text{dét } g) \widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}$, on déduit que la trace de ces opérateurs est nulle, donc que leurs deux valeurs propres ont même multiplicité $\frac{1}{2}(q-1)$. On en déduit également que leurs sous-espaces propres sont conservés par $\pi_{\theta'}(g)$ si dét g est un carré, échangés par $\pi_{\theta'}(g)$ sinon ; ils sont en particulier conservés par les unipotents $\pi_{\theta'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathcal{O}^*$. Remarquant que si $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ opère sur $v \neq 0$ par le caractère $a \longmapsto \psi(ab)$, alors il opère sur $\pi_{\theta'}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$ par $a \longmapsto \psi(abx)$, on voit que si ψ est un caractère additif non trivial de k <u>fixé</u> (identifié avec le caractère additif de θ qui lui correspond), les sous-espaces propres de $\pi_{\theta'}^i(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}})$ sont :

$$V^+ = \bigoplus_{\lambda \in k^{*2}} \left\{ v \in V \ / \ \pi_{\theta'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} v = \psi(a\lambda)v, \text{ pour tout a dans } \mathcal{O} \right\}$$

$$V^- = \bigoplus_{\lambda \in k^* - k^{*2}} \left\{ v \in V \ / \ \pi_{\theta'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} v = \psi(a\lambda)v, \text{ pour tout a dans } \mathcal{O} \right\}.$$

Ainsi le choix de ψ permet de distinguer V^+ et V^-, donc les deux représentations $\pi_{\theta'}^1$ et $\pi_{\theta'}^2$: si η_i est la valeur propre de $\pi_{\theta'}^i(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}})$ de sous-espace propre V^+, alors :

$$\mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}^i\left(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}}\right) = \eta_i \left(\sum_{\lambda \in k^{*2}} \psi(\lambda a) - \sum_{\lambda \in k^*-k^{*2}} \psi(\lambda a) \right)$$

pour tout a dans $\mathcal{O}$, comme indiqué (si $a \in \mathfrak{P}$, alors $\psi(\lambda a) = 1$ pour tout $\lambda \in k^*$ et la somme est nulle).

Ensuite, l'irréductibilité de l'induite $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i$ provient de ce que $\widetilde{F^{*\frac{1}{2}n}K}$ est distingué dans $\widetilde{F^*K}$, et de ce que la restriction $\pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ de $\pi_{\theta'}^i$ à $\widetilde{F^{*n}K}$ est disjointe de ses conjugués par $\tilde{\varpi}^i$ pour $1 \leq i \leq \frac{1}{2}n-1$, par 1°). La trace de $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i$ est donc nulle en dehors de $\widetilde{F^{*\frac{1}{2}n}K}$, et nulle aussi sur les éléments x dont le déterminant n'est pas une puissance n-ième dans F^* (conjuguer par un λ de F^* tel que $(\lambda, \text{dét } x) \neq 1$). Si $x \in \widetilde{F^{*\frac{1}{2}n}K}$ et dét $x \in F^{*n}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ \tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i(\tilde{x}) &= \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}n-1} \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}^i(\tilde{\varpi}^j \tilde{x} \tilde{\varpi}^{-j}) \\ &= \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}^i(\tilde{x}) \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}n-1} (\varpi, \text{dét } x)^j \\ &= \tfrac{1}{2}n\ \mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'}^i(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Pour voir que $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})^i$ est indépendante de θ', il suffit de remarquer que l'on a, par réciprocité de Frobenius :

$$\mathrm{Ind}_{\widetilde{F^{*n}K}}^{\widetilde{F^*K}}\ \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id} \simeq \tilde{\pi}(\tilde{\theta})^1 \oplus \tilde{\pi}(\tilde{\theta})^2.$$

Or on voit par 2°) que la représentation $\mathrm{Ind}_{\widetilde{F^{*n}K}}^{\widetilde{F^*K}}\ \pi_{\theta'} \otimes \mathrm{Id}$ ne dépend pas de θ' ; ses deux composantes irréductibles n'en dépendent donc pas non plus, C.Q.F.D.

Théorème 3.7 :

Soit $\widetilde{\theta}$ un caractère régulier de E^{*n}.
Alors la représentation $\widetilde{T}(\widetilde{\theta})$ (resp. $\widetilde{T}(\widetilde{\theta})^i$, $i=1$ ou 2, si $\widetilde{\theta}$ est exceptionnel) induite à $\widetilde{G}$ de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ (resp. $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})^i$) est spécifique irréductible admissible super-cuspidale. Son degré formel pour la mesure de Haar sur $\widetilde{G}/\widetilde{F^{*n}}$ qui donne à $\widetilde{F^*K}/\widetilde{F^{*n}}$ la masse 1 est $nq^{2m-1}(q-1)$ si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m$ ($m \geqslant 1$), $nq^{2m}(q-1)$ si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m+1$ ($m \geqslant 1$), $n(q-1)$ si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif 1 et n'est pas exceptionnel, enfin $\frac{1}{2}n(q-1)$ si $\widetilde{\theta}$ est exceptionnel.

Preuve :

- Si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif $2m$ (resp. $2m+1$) avec $m \geqslant 1$, on procède exactement comme dans le cas ramifié (théorème 2.7) : on montre que pour $h(x) \notin H(m)$, $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ et $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})^{h(x)}$ sont disjointes sur $\widetilde{H(m)} \cap \widetilde{h(x)}^{-1}\widetilde{H(m)}\widetilde{h(x)}$ (resp. $\widetilde{H(m+1)} \cap \widetilde{h(x)}^{-1}\widetilde{H(m+1)}\widetilde{h(x)}$), en utilisant le fait que la restriction de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ à $H(2m-1) \cap N$ (resp. $H(2m) \cap N$) (où $N = \left\{ h(x) \ / \ x \in E \text{ et } \operatorname{Tr} x = 0 \right\}$) est une homothétie non triviale.

-Si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif 1, la remarque essentielle est que la restriction de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ ou $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})^i$ au sous-groupe $\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est-à-dire $n\pi_\theta$, si $\widetilde{\theta}$ n'est pas exceptionnel, $\frac{1}{2}n\,\pi_\theta$, si $\widetilde{\theta}$ est exceptionnel) est somme de caractères tous non triviaux, triviaux sur $\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Grâce à la décomposition d'Iwasawa de G, on peut choisir des représentants de $\widetilde{F^*K} \backslash \widetilde{G}$ dans le groupe $\begin{pmatrix} F^* & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sur lequel le cocycle β est trivial par la proposition I.2.1.b). Soit $t = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in F^*$, $x \in F$, et f un opérateur d'entrelacement sur $\widetilde{F^*K} \cap \widetilde{t}^{-1}\widetilde{F^*K}\widetilde{t}$ de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ sur $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})^t$. Si $v \neq 0$ est un vecteur de l'espace de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ tel que :

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}) \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \psi(y)\, v \text{ pour } y \in \mathcal{O},$$

où ψ est un caractère non trivial de $\mathcal{O}$ trivial sur $\mathfrak{p}$, on a pour tout y de $\mathcal{O}$ tel que val $ay \geqslant 0$:

$$f.\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}) \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}) \left(\widetilde{t} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{t}^{-1}\right) f(v), \text{ soit :}$$

$$\psi(y)\, f(v) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta}) \left(\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & ay \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right) f(v).$$

Si val $a > 0$, on en déduit que ψ est trivial sur $\mathcal{O}$ ce qui est exclu, ou que $f(v) = 0$; donc $f = 0$ puisque l'espace de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$ admet une base de vecteurs propres pour $\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si val $a < 0$, on en déduit que pour tout $y \in a^{-1}\mathcal{O}$:

$$\psi(y)\ f(v) = f(v) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})(\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & ay \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})\ f(v).$$

Puisque $f(v)$ est fixé par $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il doit être nul, donc $f=0$.

Si val $a = 0$, on peut prendre $t = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec val $x < 0$. Pour tout y de valuation $-$val x, $\begin{pmatrix} 1+y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ opère par un caractère du déterminant. On doit avoir pour tout v :

$$f.\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})\begin{pmatrix} 1+y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})\left(\begin{pmatrix} 1 & -xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) f(v),$$

donc $f(v)$ est fixé par $\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $f(v) = 0$ et $f = 0$.

Quant aux degrés formels, ils sont égaux au produit de l'indice $[\widetilde{F^*K} : \widetilde{E^*H(m)}] = q^{2m-1}(q-1)$ par 3.4 (ou 1 si $\widetilde{\theta}$ est de conducteur relatif 1), par le degré de $\widetilde{\pi}(\widetilde{\theta})$, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

II.4. LES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DU GROUPE MÉTAPLECTIQUE.

Rappelons le résultat suivant ([Ko1], [GK]) :

Théorème 4.1 :

Toute représentation supercuspidale irréductible de G est induite ou bien d'une représentation de F^*K (série non ramifiée) ou bien d'une représentation de JK' (série ramifiée) où J est le sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans le premier cas, elle est isomorphe à une des représentations T_θ définies au théorème 3.4, et dans le second à une des représentations décrites au théorème 2.4.

P. Kutzko a même donné en [Ko1] des conditions d'isomorphismes entre les représentations des théorèmes 2.4 ou 3.4.

Le même résultat est valable ici, et a été démontré dans [B] :

Théorème 4.2 :

Toute représentation supercuspidale irréductible spécifique de $\widetilde{G}$ est induite ou bien d'une représentation de $\widetilde{F^*K}$ (série non ramifiée) ou bien d'une représentation de $\widetilde{JK'}$ (série ramifiée). Dans le premier cas, elle est isomorphe à l'une des représentations définies dans le théorème 3.7, et dans le second à l'une des représentations définies dans le théorème 2.7.

La publication de plusieurs démonstrations du même type (cf [Cl], [Ko], [Man], ...) me paraît justifier l'omission de la démonstration du théorème 4.2, faite en détail dans [B].

III. LA CORRESPONDANCE LOCALE.

On rappelle que n est toujours supposé premier à p.

III.1. LES DISTRIBUTIONS SPECIFIQUES SUR LE GROUPE METAPLECTIQUE.

Par distribution sur le groupe $\widetilde{G}$, on entend une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{H}(\widetilde{G})$ des fonctions localement constantes à support compact sur $\widetilde{G}$. On dit qu'une distributior T est invariante si elle est fixée par les automorphismes intérieurs, c'est-à-dire si elle vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{H}(\widetilde{G}),\ \forall g \in \widetilde{G},\ T(f)=T(f^g),\ \text{où } f^g(x)=f(gxg^{-1}),\ x \in \widetilde{G}.$$

On dira que T est spécifique (en anglais : genuine) si elle réagit bien aux translatior par μ_n, c'est-à-dire si :

$$\forall f \in \mathcal{H}(\widetilde{G}),\ \forall \xi \in \mu_n,\ T(f')=\xi\, T(f),\ \text{si } f'(x)=f(\xi^{-1}x),\ x \in \widetilde{G}.$$

Proposition 1.1 :

Soit T une distribution invariante spécifique sur $\widetilde{G}$.

1°) Le support de T est contenu dans $\left\{ (g,\xi) \in \widetilde{G} / \text{dét } g \in F^{*n} \right\}$.

2°) L'intersection du support de T avec l'ouvert des éléments réguliers de $\widetilde{G}$ est contenue dans les puissances n-ièmes, c'est-à-dire dans

$$\left\{ (g^n, \xi),\ \xi \in \mu_n,\ g \in G,\ g^n \text{ régulier} \right\}.$$

Ces résultats sont en particulier valables si T est le caractère d'une représentation admissible spécifique de $\widetilde{G}$.

Preuve :

-Le caractère d'une représentation admissible spécifique de $\widetilde{G}$ est une distribution invariante spécifique (voir III.2.).

- Soit $g \in G$, $\lambda \in F^*$. On a par la proposition I.2.1.d :

$$\widetilde{\lambda}\, \widetilde{g}\, \widetilde{\lambda}^{-1} = (\lambda, \text{dét } g)_F\, \widetilde{g}.$$

Si dét g n'appartient pas à F^{*n}, on peut trouver $\lambda \in F^*$ tel que $(\lambda, \text{dét } g)_F$ soit différent de 1 ; posons $\xi = (\lambda, \text{dét } g)_F$. Pour tout voisinage ouvert compact assez petit V(g) de g, on a, pour tout $x \in V(g)$: dét $x \in$ dét $g\,[1+\mathfrak{p}]$, d'où $(\lambda, \text{dét } x)_F = \xi$, puisque $1+\mathfrak{p}$ est formé de puissances n-ièmes. Soit f la fonction caractéristique de V(g) ; la conjugaison par λ transforme V(g) en $\xi\, V(g)$, donc $T(f) = \xi\, T(f)$, d'où $T(f)=0$, c.q.f.d.

- La démonstration de 2°) est facile si T est donnée par une fonction localement intégrable Θ_T sur $\widetilde{G}$:

$$T(f) = \int_{\widetilde{G}} f(x)\, \Theta_T(x)\, dx,\quad f \in \mathcal{H}(\widetilde{G}).$$

En effet, les propriétés de T entraînent que Θ_T est invariante par conjugaison, et vérifie $\Theta_T(\xi x) = \xi\, \Theta_T(x)$ pour $\xi \in \mu_n$, $g \in \widetilde{G}$. Or :

- si g est régulier elliptique, engendrant l'extension quadratique séparable E de F, on a pour tout $a \in E^*$: $\tilde{a}\tilde{g}\tilde{a}^{-1} = (a,\bar{g})_E\tilde{g}$, par la proposition I.2.7. Si g n'appartient pas à E^{*n}, on peut trouver a dans E^* tel que $(a,\bar{g})_E$ soit différent de 1, d'où $\Theta_T(g)=0$.

- si g est régulier hyperbolique, soit à conjugaison près $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$,

on a pour $z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$: $\tilde{z}\tilde{g}\tilde{z}^{-1} = (\alpha,b)(\beta,a)\tilde{g}$ par la proposition I.2.1.b. Si g n'est pas

une puissance n-ième, c'est-à-dire si a ou b n'appartient pas à F^{*n}, on peut trouver α et β avec $(\alpha,a)(\beta,b) \neq 1$, d'où $\Theta_T(\tilde{g})=0$.

- Le cas général s'inspire directement de la démonstration qui précède.

- Cas elliptique : Soit g un élément régulier elliptique qui n'est pas une puissance n-ième. On peut se ramener par conjugaison au cas où l'extension quadratique E engendrée par g est telle que E^* conserve le sommet ou l'arête standard de l'arbre (cf Prop. II.1.1.). Alors $(\tilde{g}\ A^*(m))_{m \geq 1}$ est un système fondamental de voisinages ouverts compacts de $\tilde{g}$, et la proposition II.1.3. assure que $A^*(m)$ est normalisé par $\tilde{E}^*$ dans $\tilde{G}$. On choisit $a \in E^*$ tel que $(a,\bar{g})_E$ soit différent de 1, et on pose $\zeta = (a,\bar{g})_E$. La conjugaison par $\tilde{a}$ transforme $\tilde{g}\ A^*(m)$ en $\zeta\ \tilde{g}\ A^*(m)$. Si f_m est la fonction caractéristique de $\tilde{g}\ A^*(m)$, on a donc $T(f_m)=0$.

- Cas hyperbolique : Soit $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a \neq b$; par 1°) on peut supposer que $ab \in F^{*n}$;

si g n'est pas une puissance n-ième, on a alors $a \notin F^{*n}$ et $b \notin F^{*n}$. Si val a ou val b n'est pas multiple de n, par exemple val a, la démonstration du cas elliptique peut se recopier : on peut choisir $z = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ tel que $\alpha \in \mathcal{O}^{*n}$, $\beta \in \mathcal{O}^*$ et $(\beta,a)_F \neq 1$;

la conjugaison par z transforme alors $\tilde{g}K_i$ en $(\beta,a)_F\tilde{g}K_i$, où :

$$K_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^i \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}, \quad i \geq 1.$$

Si val a ou val b sont multiples de n, la méthode précédente (conjuguer un voisinage en son transformé par un élément non trivial de μ_n) ne suffit plus. La conjugaison par $\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie g sur ζ g, où $\zeta = (\varpi,b)_F$ est différent de 1 ($b \notin F^{*n}$), et envoie

gK_i sur $\zeta\ gR_i$, où $R_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^{i+1} \\ \mathfrak{p}^{i-1} & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}$, $i \geq 1$.

Soit f la fonction caractéristique de gK_i, f' celle de gR_i, f" celle de gK_i' (cf Prop. II.1.1.). On a $T(f') = \zeta\ T(f)$. On va montrer que par ailleurs :

$T(f)=T(f')=qT(f")$, ce qui achèvera la démonstration.

On remarque pour cela que K_i' est un sous-groupe distingué de K_i et de R_i, et que le groupe quotient K_i/K'_i (resp. R_i/K'_i) est isomorphe à $\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$ (resp. $\mathfrak{p}^{i-1}/\mathfrak{p}^i$) par l'application :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto b\,\mathfrak{p}^{i+1} \text{ (resp. } c\,\mathfrak{p}^i), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_i \text{ (resp. } R_i).$$

Soit $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ (resp. $(\gamma_r)_{1\leqslant r\leqslant q}$) un système de représentants de $\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$ (resp. $\mathfrak{p}^{i-1}/\mathfrak{p}^i$). On pose $u_k = \begin{pmatrix} 1 & \beta_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_r & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $f = \sum_{k=1}^{q} f_k$, où f_k est la fonction caractéristique de $gu_kK'_i$, et $f' = \sum_{r=1}^{q} f'_r$, où f'_r est la fonction caractéristique de $gv_rK'_i$. Or gu_k et g sont conjugués par $\begin{pmatrix} 1 & a(a-b)^{-1}\beta_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui normalise K'_i pourvu que val $(a(a-b)^{-1}\beta_k)$ soit supérieure à 1, i.e. $i \geqslant 1-\text{val } a + \text{val }(a-b)$. De même gv_r et g sont conjugués par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (a/b-a)\gamma_r & 1 \end{pmatrix}$ qui normalise K'_i si $i-1 \geqslant \text{val }(a-b) + \text{val } a$. Si i est assez grand, on a donc :

$$T(f) = \sum_{k=1}^{q} T(f_k) = \sum_{k=1}^{q} T(f'') = qT(f'') = T(f') \quad \text{c.q.f.d.}$$

III.2. QUELQUES REMARQUES SUR LA FORMULE DE CORRESPONDANCE.

Soit G un groupe localement compact totalement discontinu, séparable, et (π, V) une représentation admissible de G. L'algèbre $\mathcal{H}(G)$ des fonctions localement constantes à support compact sur G opère sur V par :

$$\pi(f).v = \int_G f(x)\pi(x)v\,dx, \quad f \in \mathcal{H}(G), \; v \in V.$$

L'admissibilité de π implique que $\pi(f)$ est un opérateur de rang fini, qui a donc une trace. Le <u>caractère</u> de π est la distribution sur G :

$$f \longmapsto \mathrm{Tr}\,\pi(f), \quad f \in \mathcal{H}(G).$$

C'est évidemment une distribution invariante sur G. Une question importante (à laquelle Harish-Chandra, entre autres, a consacré une partie de ses travaux ; voir [HC1], [HC2], ...) est de savoir à quelles conditions sur G et π cette distribution est donnée par une fonction (encore appelée dans ce cas, <u>caractère</u> de π). Pour $GL_2(F)$ et son revêtement métaplectique, on connait des résultats suffisants pour notre propos :

<u>Théorème 2.1</u> : (Jacquet-Langlands. [JL] 7.4)

<u>Soit π une représentation spécifique irréductible supercuspidale de $\tilde{G}$. Il existe une fonction Θ_π localement intégrable sur $\tilde{G}$, et localement constante sur l'ouvert dense des éléments réguliers de $\tilde{G}$, telle que</u> :

$$\mathrm{Tr}\,\pi(f) = \int_{\tilde{G}} f(g)\,\Theta_\pi(g)\,dg \quad \underline{\text{pour toute}}\ f \in \mathcal{H}(\tilde{G}).$$

<u>Preuve</u> :

Ainsi que l'a remarqué Y. Flicker ([F], lemme 2.3.1), la démonstration de la proposition 7.4 de [JL] s'applique intégralement, grâce aux remarques suivantes :

- comme on l'a vu en I.4.2, on peut supposer π préunitaire (après torsion par un caractère convenable).

- le lemme 7.4.1 est valable pour un groupe localement compact quelconque.

- le groupe G a la topologie quotient de $\tilde{G}$, donc les quotients $\tilde{H}\backslash\tilde{G}$ sont homéomorphes aux quotients $H\backslash G$ (où H est un sous-groupe fermé de G). De plus, l'indice de F^{*n} dans F^* est fini si n est premier à p, donc l'application canonique de $\widetilde{F^{*n}}\backslash\tilde{G}$ dans $F^*\backslash G$ est propre.

- en particulier, le lemme 7.4.2 s'applique immédiatement à $\tilde{G}$, et la proposition 7.5, donnant le caractère sur les éléments elliptiques, a une traduction évidente dans $\tilde{G}$ avec la même démonstration.

- la fonction ξ utilisée dans [JL] se relève en une fonction sur $\tilde{G}$ et reste évidemment localement constante sur les éléments réguliers, et localement intégrable sur $\tilde{G}$, $\widetilde{F^{*n}}\backslash\tilde{G}$ et $\widetilde{F^*}\backslash\tilde{G}$.

- il reste à étudier la dernière partie de la démonstration : pp. 268-271. Avec les notations de [JL], on doit majorer :

$$\varphi_r(h) = \int_{\widetilde{F^{*n}}\backslash\tilde{T}_r} (\pi(g^{-1}hg)u,u)\,dg.$$

Par la décomposition d'Iwasawa, et grâce au fait que N et K se relèvent trivialement dans $\tilde{G}$, et que π est lisse, on se ramène à une somme finie de termes :

$$\varphi_r^i(h) = \int_N \int_{\widetilde{F^{*n}}\backslash\tilde{A}} 1_{\tilde{T}_r}(an)\,(\pi(a^{-1}n^{-1}hna)u_i,u_i)\,d^*a\,dn.$$

La seule différence entre G et $\tilde{G}$ vient à ce point, de ce que $\widetilde{F^{*n}}\backslash\tilde{A}$ est "plus gros" que $F^*\setminus A$: ses éléments se représentent de manière unique sous la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c_j \end{pmatrix}$, où $a \in F^*$, et où c_j décrit un système de représentants fixé de F^*/F^{*n}, soit $\{c_j\}_{1 \leq j \leq n^2}$. Alors $\varphi_r^i(h)$ se décompose en somme de n^2 intégrales :

$$\varphi_r^{i,j}(h) = \int_F \int_{F^*} 1_{T_r} \begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & c_j \end{pmatrix} (\pi(\widetilde{\begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & c_j \end{pmatrix}}^{-1} h \widetilde{\begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & c_j \end{pmatrix}})u_i, u_i)\, d^*a\, dy.$$

Or :

$$\widetilde{\begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & c_j \end{pmatrix}}^{-1} h \widetilde{\begin{pmatrix} a & ay \\ 0 & c_j \end{pmatrix}} = (\beta, a)(\alpha, c_j) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-\beta/\alpha)(y+c_j a^{-1}x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais on voit facilement (cf III.1) que $\varphi_r^i(h) = 0$ pour tout r si α et β ne sont pas des puissances n-ièmes. Si α et β sont des puissances n-ièmes, il ne reste plus qu'à changer a en $c_j^{-1}a$ pour obtenir exactement la même expression (7.4.3) que dans [JL]. La suite de la démonstration s'applique alors sans changement, en utilisant la supercuspidalité de π.

C.Q.F.D.

Grâce au théorème 2.1, on sait que la classe d'équivalence d'une représentation irréductible spécifique supercuspidale de $\tilde{G}$ est caractérisée par la valeur de son caractère sur les éléments réguliers, et même (Proposition 1.1) sur les (g^n, ζ), $\zeta \in \mu_n$, g^n régulier. Le théorème 7.7 de [JL] assure également que la classe d'équivalence d'une représentation admissible irréductible de G est caractérisée par la valeur de son caractère sur les éléments réguliers de G. Ces remarques donnent tout son sens à la définition suivante, où l'on pose, pour $g \in G$ de valeurs propres a et b :

$$\Delta(g) = \left| \frac{(a-b)^2}{ab} \right|^{\frac{1}{2}}$$

<u>Définition 2.2</u> :

Une représentation spécifique irréductible supercuspidale $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ <u>correspond</u> à une représentation irréductible admissible T de G si leurs caractères vérifient la relation suivante :

$$(*) \quad \Delta(g^n)\, \Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \sum_{h^n = g^n} \Delta(h)\, \Theta_T(h),$$

pour tout $g \in G$ tel que g^n soit régulier.

<u>Remarques</u> :

a) La relation (*) pourrait également s'écrire :

$$\Delta(z)\,\Theta_{\widetilde{T}}(z,s(z)^{-1}) = \sum_{h^n=z} \Delta(h)\,\Theta_T(h),$$

pour tout élément régulier z de G. En effet les deux membres sont nuls si z n'est pas une puissance n-ième (Proposition 1.1).

b) Le membre de droite de la relation (*) ne dépend que de la classe de conjugaison de g^n. C'est pourquoi figure, dans le membre de gauche, la valeur de $\Theta_{\widetilde{T}}$ en $(g^n,s(g^n)^{-1})$: cet élément ne dépend que de g^n, et non du choix de g, et se comporte bien par conjugaison en vertu du lemme I.2.9.

c) Soit $\chi_{\widetilde{T}}$ le caractère central de $\widetilde{T}$, et χ_T celui de T. La formule (*) (appliquée à λg, où $\lambda \in F^*$ et $\Theta_{\widetilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) \neq 0$) entraîne :

$$\chi_{\widetilde{T}}(\lambda^n,1) = \chi_T(\lambda) \text{ si } \lambda \in F^*.$$

En particulier, si T correspond à $\widetilde{T}$, <u>le caractère central de</u> T <u>est trivial sur</u> $\mu_n(F)$.

d) Grâce à la remarque c), si g est elliptique et g^n régulier, la formule (*) devient :

$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\widetilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\Delta(g)\,\Theta_T(g).$$

e) La formule (*) n'est pas exactement celle qu'a donnée Y. Flicker : dans [F], il manque à la formule un facteur n dans le cas elliptique, n^2 dans le cas hyperbolique, ce qui est probablement dû à une mauvaise normalisation des mesures de Haar.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème essentiel de ce travail, qui sera démontré dans les paragraphes suivants (Théorèmes 4.1 et 5.1, et leurs corollaires) :

<u>Théorème 2.3</u> :

<u>La relation</u> (*) <u>définit une injection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles spécifiques supercuspidales de</u> $\widetilde{G}$ <u>dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de</u> G. <u>L'image de cette injection est constituée des classes de représentations irréductibles supercuspidales de</u> G <u>de caractère central trivial sur</u> $\mu_n(F)$, <u>et, si</u> n <u>est pair</u>, <u>des classes de représentations spéciales de</u> G <u>associées aux caractères de</u> F* <u>non triviaux sur</u> $\mu_n(F)$ <u>dont le carré est trivial sur</u> $\mu_n(F)$.

Remarque :

Soit χ un caractère de F^*. La représentation spéciale de G associée à χ est $\sigma(\chi|\ |^{\frac{1}{2}}, \chi|\ |^{-\frac{1}{2}})$ dans les notations de Jacquet-Langlands ([JL] Chapitre 3, pages 99 et 104) ; son caractère vaut $-\chi \circ$ dét sur les éléments elliptiques réguliers.

Remarque 2.4 :

L'injection définie au théorème 2.3 est entièrement caractérisée par la relation (*) pour les éléments elliptiques ; précisément, $\widetilde{T}$ correspond à T si et seulement si $\Delta(g^n)\ \Theta_{\widetilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = n\,\Delta(g)\ \Theta_T(g)$ pour g elliptique et g^n régulier.

On a en effet le résultat suivant :

Proposition 2.5 :

Soit $\widetilde{T}_1$ et $\widetilde{T}_2$ deux représentations spécifiques irréductibles supercuspidales de $\widetilde{G}$ de même caractère central supposé unitaire. Alors l'expression

$$\tfrac{1}{2} \sum_T \oint_{\widetilde{T^n}/\widetilde{F^{*n}}} \Theta_{\widetilde{T}_1}(g)\ \overline{\Theta_{\widetilde{T}_2}(g)}\,\Delta(g)^2\ dg$$

(où la sommation est étendue à un système de représentants des classes de conjugaison de tores elliptiques de G, et où $\oint$ signifie que la mesure choisie est de masse totale 1) vaut n^2 si $\widetilde{T}_1$ est isomorphe à $\widetilde{T}_2$, 0 sinon.

Preuve :

La démonstration de Y. Flicker ([F] Lemme 2.3.2) faite en caractéristique 0 reste entièrement valable ici grâce au théorème 2.1. L'absence du facteur n^2 (qui est le quotient des volumes de $\widetilde{T}/\widetilde{F^{*n}}$ et $\widetilde{T^n}/\widetilde{F^{*n}}$) dans l'énoncé de Y. Flicker provient d'une erreur de normalisation des mesures dans la démonstration.

La remarque 2.4 s'ensuit : en effet, la relation (*) pour les éléments elliptiques détermine le caractère central de $\widetilde{T}$ (remarque c) plus haut), et la proposition 2.5 montre qu'une représentation spécifique irréductible supercuspidale de $\widetilde{G}$ de caractère central donné est caractérisée, à isomorphisme près, par la valeur de son caractère sur les éléments elliptiques réguliers. Il en est de même pour les représentations irréductibles admissibles spéciales ou supercuspidales de G, par [JL], chapitre 7. D'où la remarque.

III.3. <u>CARACTÈRE DES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DE</u> $GL_2(F)$ <u>ET</u> $\widetilde{GL_2(F)}$.

Le théorème 2.3 reposant sur la relation de correspondance (*), il nous faut pour l'établir comparer les caractères des représentations supercuspidales de G et $\widetilde{G}$ décrites en II. Le but de ce paragraphe est d'établir pour ces représentations une formule de caractère induit se prêtant bien à des comparaisons terme à terme. Cela est chose facile pour les éléments elliptiques réguliers, mais demande du travail pour les éléments hyperboliques réguliers, travail qui nous a paru intéressantmalgré la remarque 2.4 plus haut.

Après quelques généralités, on établira la formule cherchée dans chacun des quatre cas suivants :

b) représentations supercuspidales de G induites de $H = F^*GL_2(\mathcal{O})$

c) représentations supercuspidales de G induites de $H' = JK'$

d) représentations supercuspidales de $\widetilde{G}$ induites de $\widetilde{H}$

e) représentations supercuspidales de $\widetilde{G}$ induites de $\widetilde{H'}$,

où les sous-groupes H et H', définis en I.3, représentent les deux classes de conjugaison de sous-groupes ouverts, compacts modulo le centre, et maximaux pour ces propriétés, de G. L'outil essentiel sera l'arbre de $GL_2(F)$.

a) On commence par étudier le caractère de certaines représentations induites dans un contexte plus général : soit G, Z, H, π (d'espace V), $T=\mathrm{ind}_H^G\pi$ (d'espace W), comme dans le théorème I.4.1. La représentation T est alors irréductible admissible supercuspidale, et on cherche à calculer $\Theta_T(f)$ pour $f\in\mathcal{H}(G)$. Pour cela on fixe un système fondamental $(K_i)_{i\geq 1}$ de voisinages de 1 dans G, formé de sous-groupes ouverts compacts, distingués dans H, avec $K_{i+1}\subset K_i$ pour tout i. On a alors

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_{i\geqslant 1}\mathcal{H}(G,K_i),$$ où $\mathcal{H}(G,K_i)$ est le sous-espace de $\mathcal{H}(G)$ formé

des fonctions invariantes à droite et à gauche par K_i. Sur chacun des groupes K_i, on normalise la mesure de Haar en donnant à K_i la masse 1, ce que l'on rappellera en écrivant $\oint_{K_i}$.

<u>Lemme 3.1</u> : (P. Cartier [Cr] p.120)

<u>Pour tout</u> $i\geqslant 1$, <u>l'opérateur</u> P_i <u>de</u> W <u>défini par</u> :

$$P_i(\varphi)(x) = \oint_{K_i}\varphi(xk)\,dk \qquad (x\in G,\varphi\in W),$$

est un projecteur de W sur l'espace de dimension finie W^i des vecteurs de W fixés par K_i, et l'on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G)$:

$$\mathrm{Tr}\, T(f) = \int_G f(g)\ \mathrm{Tr}(P_i T(g) P_i)\ dg, \quad \text{pour tout } i \text{ assez grand.}$$

Précisément, si $f \in \mathcal{H}(G,K_j)$, l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $i \geqslant j$.

Cela conduit à étudier la convergence de la suite $\mathrm{Tr}(P_i T(g) P_i)$, pour $g \in G$. Rappelons d'abord la structure de l'espace W de la représentation T.

Proposition 3.2 : (P. Gérardin [G] n°5.1.4)

Pour chaque double classe $\omega \in H\backslash G/H$, soit W_ω le sous-espace de W formé des fonctions de support contenu dans ω.

(i) $W = \bigoplus_{t \in H\backslash G} T(t)^{-1} W_H$, et $T(t)^{-1} W_H$ est constitué des fonctions de support Ht.

(ii) $W = \bigoplus_{\omega \in H\backslash G/H} W_\omega$. Chaque sous-espace W_ω est stable par $T(H)$, et la représentation de H dans W_ω obtenue par restriction de T est isomorphe, après choix d'un représentant x_ω de ω dans G, à la représentation $\mathrm{ind}_{H_\omega}^H \pi^\omega$ (où $H_\omega = H \cap x_\omega^{-1} H x_\omega$, et $\pi^\omega(h) = \pi(x_\omega h x_\omega^{-1})$), par l'application qui associe à une fonction $F \in W_\omega$, la fonction f de H dans V définie par $f(h) = F(x_\omega h)$. En particulier W_H est isomorphe à V (comme représentation de H) par $F \longmapsto F(1)$.

Remarques :

1) Les projecteurs P_i respectent la décomposition $W = \bigoplus_{\omega \in H\backslash G/H} W_\omega$:

on a $W^i = \sum_{\omega \in H\backslash G/H} W_\omega \cap W^i$, et $P_i(W_\omega) = W_\omega \cap W^i$.

2) L'admissibilité de T entraîne que les $W_\omega \cap W^i$ sont, à i fixé, presque tous nuls.

3) Puisque T est lisse, on a $W_\omega = \bigcup_{i \geqslant 1} W_\omega \cap W^i$. Mais W_ω est de dimension finie, donc, pour i assez grand, les vecteurs de W_ω sont tous fixés par K_i.

Le premier résultat obtenu est le suivant :

Lemme 3.3 :

Le support de la distribution $\mathrm{Tr}\, T$ sur G est contenu dans $\overline{\bigcup_{x \in G} x^{-1} H x}$.

Preuve :

Par le lemme 3.1, il suffit de voir que pour tout $g \in G - \overline{\bigcup_{x \in H\backslash G} x^{-1}Hx}$, il existe un voisinage de g sur lequel l'application $y \longmapsto Tr(P_i T(y) P_i)$ est nulle pour i assez grand. Or pour $f \in W$, x et $y \in G$, on a :

$$(P_i T(y) P_i)(f)(x) = \oint_{K_i} \oint_{K_i} f(xkyh)\, dk\, dh.$$

Si le support de f est Ht pour un $t \in G$, celui de $(P_i T(y) P_i)(f)$ est contenu dans $\left\{ x \in G \;/\; K_i y K_i \cap x^{-1}Ht \neq \emptyset \right\}$. En particulier, si $K_i y K_i$ ne rencontre pas $t^{-1}Ht$, alors pour toute $f \in T(t)^{-1}W_H$, son image $(P_i T(y) P_i)(f)$ a une composante nulle sur $T(t)^{-1} W_H$ dans la décomposition $W = \bigoplus_{t \in H\backslash G} T(t)^{-1}W_H$. Choisissant j assez grand pour que $K_j g K_j$ ne rencontre pas $\bigcup_{t \in G} t^{-1}Ht$, le voisinage $K_j g K_j$ de g vérifie la condition voulue.

Il s'agit maintenant d'étudier la distribution sur $\overline{\bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx}$. En fait on aura besoin par la suite de supposer $\bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx$ <u>fermé</u> dans G (hypothèse vérifiée pour $GL_2(F)$ et $\widetilde{GL_2(F)}$). Remarquant qu'une distribution se détermine localement, et que $Tr\, T$ est une distribution invariante par conjugaison, il suffit maintenant de l'étudier au voisinage de chaque point de H.

Lemme 3.4 :

Soit g un élément de H. On a, en désignant par χ_A la fonction caractéristique de A :

$$Tr\, P_i T(g) P_i = \sum_{\omega \in H\backslash G/H} \; \sum_{t \in H_\omega \backslash H} \oint_{K_i} \chi_{H_\omega}(tkgt^{-1})\, Tr\, \pi^{\omega}(tkgt^{-1})\, dk.$$

$$Tr\, P_i T(g) P_i = \sum_{t \in G/H} \oint_{K_i} \chi_H(t^{-1}kgt)\, Tr\, \pi(t^{-1}kgt)\, dk \;;$$

<u>en plus, pour i fixé, chacune de ces sommes n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.</u>

Preuve :

Puisque $g \in H$, l'opérateur $T(g)$ conserve les espaces W_ω. Ceci permet d'écrire :

$$Tr\, P_i T(g) P_i = \sum_{\omega \in H\backslash G/H} Tr_{W_\omega}\left(P_i T(g) P_i\big|_{W_\omega}\right),$$

somme dans laquelle presque tous les termes sont nuls, à i fixé. Il reste à déterminer ces termes. On note pour simplifier (U,X) la représentation $Ind_{H_\omega}^{H} \pi^{\omega}$ de H, obtenue après choix d'un $x_\omega \in \omega$. L'isomorphisme rappelé à la proposition 3.2 entre W_ω et X

transforme l'opérateur P_i en l'opérateur analogue, noté encore P_i, de X, soit :

$$P_i(f)(x) = \oint_{K_i} f(xk)\,dk, \text{ pour } f \in X,\ x \in H.$$

Il s'agit de calculer $Tr_X\ (P_i U(g) P_i)$. Or on a (formellement) :

$$P_i U(g) P_i\ (f) = \oint_{K_i} \oint_{K_i} U(h)U(g)U(k)f\ dh\ dk.$$

Cette intégrale peut se ramener à une somme finie car f est invariante par U(k) si k varie dans un sous-groupe K_j assez petit, et U(g)U(k)f est invariante par U(h) si h varie dans un sous-groupe K_l assez petit. Pour chaque $f \in X$, l'opérateur $P_i U(g) P_i$ agit donc sur f comme une combinaison linéaire finie d'opérateurs du type U(h)U(g)U(k), $h, k \in K_i$. L'espace X étant de dimension finie, on peut trouver une telle combinaison linéaire donnant $P_i U(g) P_i$ sur X entier. La trace de l'opérateur $P_i U(g) P_i$ est alors la même combinaison linéaire des traces des opérateurs U(h)U(g)U(k) intervenant, et par l'opération inverse, on a finalement :

$$Tr\ P_i U(g) P_i = \oint_{K_i} \oint_{K_i} Tr\ U(hgk)\ dh\ dk.$$

On se débarrasse de l'intégrale double en remarquant que $g \in H$ et que K_i est distingué dans H. Il reste :

$$Tr\ P_i U(g) P_i = \oint_{K_i} Tr\ U(hg)\ dh = \oint_{K_i} Tr\ U(gk)\ dk.$$

Puisque H et H_ω sont ouverts et compacts modulo le centre, on peut calculer Tr U suivant la formule de caractère induit pour les groupes finis :

$$Tr\ U(kg) = \sum_{\substack{t \in H_\omega \backslash H \\ tkgt^{-1} \in H_\omega}} Tr\ \pi^\omega(tkgt^{-1}),$$

ce qui donne la première égalité du lemme.

La seconde s'en déduit en remarquant que $\{x_\omega t\ /\omega \in H\backslash G/H,\ t \in H_\omega \backslash H\}$ est un système de représentants de $H\backslash G$, et en passant à l'inverse pour sommer sur G/H.

<u>Remarque</u> :

Comme on l'a vu dans la proposition 3.2, le groupe H_ω, la représentation π^ω, et l'isomorphisme de W_ω sur $\mathrm{ind}_{H_\omega}^H \pi^\omega$ dépendent du choix d'un représentant x_ω de chaque double classe $\omega \in H\backslash G/H$. Il est cependant clair que si l'on change de représentant, la représentation $\mathrm{ind}_{H_\omega}^H \pi^\omega$ est transformée en une représentation isomorphe, ayant donc même trace. L'expression :

$$\sum_{t \in H_\omega \backslash H} \oint_{K_i} \chi_{H_\omega}(k(tgt^{-1}))\ Tr\ \pi^\omega(k(tgt^{-1}))\ dk$$

ne dépend donc pas du choix d'un représentant de ω.

L'expression que l'on vient d'obtenir ne permet pas de conclure dans le cas général, la convergence quand $i \longrightarrow +\infty$ n'allant pas de soi. On aboutit toutefois à un résultat dans le cas particulier suivant :

Proposition 3.5 :

Supposons que H soit d'indice fini dans son normalisateur dans G, et que la réunion de tous les conjugués de H sauf un nombre fini d'entre eux soit toujours fermée dans G. Alors l'ensemble Ω des éléments de G qui n'appartiennent qu'à un nombre fini de conjugués de H est un ouvert de G, sur lequel la distribution Tr T est donnée par la fonction localement intégrable et localement constante suivante :

$$\Theta_T(x) = \sum_{\substack{t \in G/H \\ t^{-1}xt \in H}} \operatorname{Tr} \pi(t^{-1}xt), \qquad x \in \Omega.$$

Preuve :

Soit $g \in \Omega$. Grâce au lemme 3.3, on peut supposer que g appartient à un nombre fini non nul de conjugués de H, et, en conjuguant éventuellement, que l'un d'entre eux est H. Soit $\{t_k\}_{0 \leq k \leq r}$ un système de représentants de $\{ t \in G/H \,/ g \in tHt^{-1} \}$.

Les hypothèses entraînent que $\left(\bigcap_{k=0}^{r} t_k H t_k^{-1} \right) \cap \left(G - \bigcup_{\substack{t \in G/H \\ t \neq t_k \text{ pour } 0 \leq k \leq r}} tHt^{-1} \right)$

est un ouvert contenu dans Ω et contenant g, donc contenant $K_j g$ pour j assez grand.

Pour $h \in K_j$ et $i \geq j$, on a par le lemme 3.4 :

$$\operatorname{Tr} P_i T(hg) P_i = \sum_{s=0}^{r} \oint_{K_i} \operatorname{Tr} \pi(t_s^{-1} khg t_s)\, dk.$$

Or π est une représentation lisse irréductible de H, qui admet des petits sous-groupes ; son noyau n'est donc pas trivial, et l'on peut choisir j assez grand pour que $t_s^{-1} K_j t_s$ soit dedans pour $0 \leq s \leq r$. Il reste alors :

$$\operatorname{Tr} P_i T(hg) P_i = \sum_{s=0}^{r} \operatorname{Tr} \pi(t_s^{-1} g t_s) = \sum_{\substack{t \in G/H \\ g \in tHt^{-1}}} \operatorname{Tr} \pi(t^{-1}gt),$$

pour tout $i \geq j$ (déterminé comme ci-dessus) et tout $h \in K_j$, d'où le résultat.

Remarque :

La proposition 3.5 donne, pour les éléments de Ω, une formule de caractère analogue à la formule de caractère induit pour les groupes finis.

Pour terminer, on va montrer que le procédé ci- dessus permet effectivement de calculer le caractère lorsqu'on sait déjà que la distribution Tr T est donnée par une fonction :

Proposition 3.6 :

Soit U un ouvert de G sur lequel il existe une fonction localement constante Θ_T vérifiant :

$$\mathrm{Tr}\ T(f) = \int_U f(x)\, \Theta_T(x)\, dx$$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G)$ de support contenu dans U.

Alors pour tout $g \in U$, la suite $\mathrm{Tr}\ P_i T(g) P_i$ est stationnaire, égale à $\Theta_T(g)$ pour i assez grand.

Preuve :

- Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G)$, de support contenu dans U, et invariante à droite et à gauche par K_j, on a par le lemme 3.1, pour tout $i \geqslant j$:

$$\int_U f(x)\, (\Theta_T(x) - \mathrm{Tr}\ P_i T(x) P_i)\, dx = 0.$$

- La fonction $x \longmapsto \mathrm{Tr}\ P_i T(x) P_i$ est invariante à droite et à gauche par K_i puisque $P_i T(k) = T(k) P_i = P_i$, $\forall k \in K_i$.

- Soit $g \in U$ fixé. Il existe un entier r tel que $K_r g K_r$ soit contenu dans U et que Θ_T soit constante sur $K_r g K_r$.

- Pour $i \geqslant r$, la fonction caractéristique de $K_i g K_i$ appartient à $\mathcal{H}(G)$, son support est contenu dans U, et on a :

$$\int_{K_i g K_i} (\Theta_T(x) - \mathrm{Tr}\ P_i T(x) P_i)\, dx = 0, \text{ soit}$$

$$\int_{K_i g K_i} (\Theta_T(g) - \mathrm{Tr}\ P_i T(g) P_i)\, dx = 0. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

b) Caractère d'une représentation irréductible de G induite de H.

Soit L_0 le sommet de l'arbre fixé par H, c'est-à-dire la classe du réseau $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ de FxF. Rappelons (I.3.) que H est son propre normalisateur dans G, que $t \longmapsto tL_0$ est une bijection de G/H sur l'ensemble des sommets de Ψ, compatible avec l'action de G, et qu'un élément g de G appartient à tHt^{-1} si et seulement si il fixe le sommet tL_0. Dans la suite, les notations sont celles de I.3..

Lemme 3.7 :

L'ensemble des éléments de G dont les points fixes dans l'arbre figurent dans une partie finie donnée de Ψ est ouvert dans G.

Preuve :

Soit A une partie finie de Ψ ; elle est contenue dans une boule $B(L_0,m)$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $g \in G$ tel que Ψ^g soit non vide et contenu dans A. Alors pour tout $h \in F^*K_i$ (fixateur de la boule $B(L_0,i)$) avec $i > m$, on a $\Psi^{gh} = \Psi^g$. D'autre part, l'ensemble des éléments de G n'ayant aucun point fixe dans l'arbre est ouvert, car :

- Si $g \in G$ induit une translation d'amplitude $r \neq 0$ sur une géodésique, on voit facilement sur l'arbre que les éléments de gU, où U est le fixateur d'une boule centrée sur la géodésique, de rayon strictement supérieur à r, ne fixent aucun point de l'arbre.
- Si $g \in G$ échange deux sommets voisins, par exemple L_0 et L_1, alors les éléments de gK' ont la même propriété.

Ceci termine la démonstration (voir I, lemme 3.1).

Soit π une représentation lisse irréductible de H vérifiant l'hypothèse de la proposition I.4.1, c'est-à-dire disjointe de ses conjuguées par G-H. Alors la représentation $T = \mathrm{ind}_H^G \pi$ est supercuspidale irréductible, et le lemme précédent joint à la proposition 3.5 permet d'énoncer :

Proposition 3.8 :

Avec ces notations, alors :

(i) : Sur l'ouvert de G formé des éléments hyperboliques à valeurs propres de valuations distinctes, la distribution Tr T est nulle.

(ii) : Sur l'ouvert de G formé des éléments elliptiques réguliers, la distribution Tr T est donnée par la fonction localement constante suivante :

$$\Theta_T(g) = \sum_{\substack{t \in G/H \\ t^{-1}gt \in H}} \mathrm{Tr}\, \pi(t^{-1}gt), \text{ où } g \text{ est elliptique régulier.}$$

Remarque :

L'expression de $\Theta_T(g)$ donnée en (ii) s'applique aussi aux éléments de (i), la somme étant vide. La somme est vide également si g est elliptique ramifié de valuation impaire, le caractère Θ_T est donc nul en ces points.

Pour obtenir le caractère sur tous les éléments réguliers de $GL_2(F)$, il reste à traiter le cas des éléments hyperboliques réguliers fixant une géodésique de l'arbre. Soit g un tel élément ; alors $\Delta(g) = q^{-k}$ pour un $k \geqslant 0$. A conjugaison près et au centre près, on peut supposer que $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathcal{O}^*$ et $\mathrm{val}(\frac{a}{b} - 1) = k$. La géodésique associée à g est $D = (L_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ (définie en I.3. ainsi que les groupes K_i).

On suppose dans la suite $i > k$.

Lemme 3.9 :

(i) Pour tout $h \in K_i$ avec $i > k$, l'élément hg est hyperbolique régulier, de mêmes valeurs propres que g modulo $\mathfrak{P}^i$, et ses points fixes dans l'arbre sont tels que :

$$\Psi^{hg} \cap B(L_0,i) = \Psi^{g} \cap B(L_0,i) = \left\{ L \in \Psi \,/\, d(L,L_0) \leqslant i \text{ et } d(L,D) \leqslant k \right\}$$

(ii) L'ensemble des points fixes possibles des éléments de $K_i g$ est réunion disjointe des trois sous-ensembles suivants :

$$A = \left\{ L \in \Psi \,/\, d(L,L_0) \geqslant i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } |j| \geqslant i-k \right\}.$$
$$B = \left\{ L \in \Psi \,/\, i-k \leqslant d(L,L_0) < i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } |j| \geqslant i-k \right\}.$$
$$C = \left\{ L \in \Psi \,/\, d(L,D) \leqslant k \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } |j| < i-k \right\}.$$

(iii) On a les mêmes résultats pour les éléments de gK_i et $K_i g K_i$.

Preuve :

(i) Puisque h fixe $B(L_0,i)$, il est clair que $\Psi^{hg} \cap B(L_0,i) = \Psi^{g} \cap B(L_0,i)$. Pour $i > k$, la forme de $\Psi^{hg} \cap B(L_0,i)$ prouve que Ψ^{hg} ne peut être une boule de centre un point ou un milieu d'arête. D'autre part les coefficients du polynôme caractéristique de hg sont congrus à ceux du polynôme caractéristique de g modulo $\mathfrak{P}^i$. L'élément hg est donc régulier ; la forme de Ψ^{hg} montre qu'il n'est pas elliptique (corollaires I.3.1 et I.3.2), il est donc hyperbolique.

(ii) Soit L un point de Ψ fixé par hg pour un $h \in K_i$. Si $d(L,L_0) \geqslant i$, soit j tel que $d(L,L_j) = d(L,D)$. Si $|j| \leqslant i$, le sommet L_j est fixé par hg, le segment $[L_j, \ldots, L]$ l'est donc aussi. Le point d'intersection de ce segment avec $S(L_0,i)$ doit être fixé par hg, c'est-à-dire être à distance au plus k de L_j, d'où $|j| \geqslant i-k$. D'autre part la réunion de B et C constitue clairement $\Psi^{K_i g} \cap B(L_0,i-1)$. c.q.f.d.

Avec les notations de 3.1, on veut calculer $\operatorname{Tr} P_i T(g) P_i$ à l'aide de l'expression du lemme 3.4. Pour cela, on définit une fonction $\Theta_i(g)$ de Ψ dans $\mathbb{C}$ en posant :

$$\Theta_i(g,L) = \oint_{K_i} \chi_H(t^{-1}kgt) \operatorname{Tr} \pi(t^{-1}kgt)\, dk, \text{ où } t \in G \text{ vérifie } tL_0 = L.$$

La fonction Θ_i est bien définie, l'intégrale ne dépendant que de la classe à gauche de t modulo H. On a :

$$\operatorname{Tr} P_i T(g) P_i = \sum_{L \in \Psi} \Theta_i(g,L).$$

Puisque $\Theta_i(g,L) = 0$ quand aucun point de $K_i g$ ne fixe L, le calcul de $\operatorname{Tr} P_i T(g) P_i$ se ramène à celui de $\sum_{L \in A} \Theta_i(g,L)$ et des sommes analogues sur B et C.

Lemme 3.10 :

(i) Pour tout sommet L de Ψ, on a :

$$\theta_i(g,L) = \theta_i\left(g', \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L\right), \text{ où } g' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

(ii) Si L appartient à A ou B, et si L' est le point de la géodésique D déterminé par : $d(L,L_o)=d(L',L_o)$ et $d(L,L_{i-k})=d(L',L_{i-k})$, on a :

$$\theta_i(g,L) = \theta_i(g,L').$$

Autrement dit, on passe d'un côté à l'autre de L_o en échangeant les valeurs propres de g, et si $L \in A \cup B$, il suffit pour calculer $\theta_i(g,L)$ de "rabattre" L sur la géodésique en restant "du même côté" de L_o, et de calculer θ_i au point correspondant.

Preuve :

(i) La conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ conserve K_i et transforme g en g' ; on fait le changement de variable approprié dans l'intégrale donnant $\theta_i(g,L)$ pour obtenir celle donnant $\theta_i\left(g', \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L\right)$.

(ii) Supposons que $L \in A \cup B$ et que $d(L,D)=d(L,L_j)$ avec $j \geqslant i-k$. Il existe (Lemme I.3.5) un unipotent $u = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec val $v = j$, tel que $uL=L'$. En écrivant $L=tL_o$ avec un $t \in G$, on a $L'=utL_o$, et la propriété annoncée se ramène aux changements de variable suivants dans l'intégrale donnant $\theta_i(g,L')$:

- D'abord $k \longmapsto u^{-1}ku$, grâce au fait que $u \in H$ qui normalise K_i.
- Ensuite $k \longmapsto kw$, où $w = \begin{pmatrix} 1 & (1-a/b)v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $u^{-1}gu=wg$.

L'élément w appartient bien à K_i puisque val($(1-a/b)v$) = $k+j \geqslant i$ par hypothèse.

Lemme 3.11 :

Soit $t \in G/H$. Alors la fonction définie sur G par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Tr} \pi(t^{-1}xt) \text{ si } t^{-1}xt \in H, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

est une somme finie de coefficients de T.

Preuve :

Cela provient de ce que tout coefficient de π, prolongé par 0 en dehors de H, est un coefficient de T (cf I.4.).

Lemme 3.12 :

Pour tout $L \in A$, on a $\Theta_i(g,L) = 0$.

Preuve :

- Grâce au lemme 3.10, on peut supposer que $L=L_j$ avec $j > i$.
- Les éléments h de K_i tels que hg fixe L_j sont les éléments du sous-groupe

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^j \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}.$$

Tout élément de $B_{i,j}$ s'écrit de manière unique sous la forme ux avec $u \in N_j = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p}^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $x \in M_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & 0 \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}$.

- On a, si $L_j = tL_o$:

$$\Theta_i(g,L_j) = \left[K_i : B_{i,j}\right]^{-1} \int_{B_{i,j}} \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}kgt)\, dk$$

$$= c \int_{M_i} dx \int_{N_j} \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}uxgt)\, du,$$ la constante c dépendant du choix des mesures de Haar.

- Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque T est supercuspidale, on a , d'après le lemme 3.11 :

$$\int_N \chi_H(t^{-1}nxgt)\, \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}nxgt)\, dn = 0, \text{ pour tout } x \text{ fixé dans } M_i.$$

Or $\chi_H(t^{-1}nxgt)$ est non nul si et seulement si nxg fixe L_j, c'est-à-dire si et seulement si $n \in N_j$. Il reste :

$$\int_{N_j} \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}nxgt)\, dn = 0 \text{ pour tout } x \in M_i,$$

d'où le résultat.

Il reste alors, pour tout $i > k$:

$$\mathrm{Tr}\, P_i T(g) P_i = \sum_{L \in B} \Theta_i(g,L) + \sum_{L \in C} \Theta_i(g,L),$$

somme finie, mais dont le nombre de termes croît avec i.

Lemme 3.13 :

L'application : $\mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$v \longmapsto \mathrm{Tr}\,\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$$

<u>est invariante par</u> $\mathfrak{P}^k$, <u>et on a</u> :

$$\sum_{v\in \mathcal{O}/\mathfrak{P}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) = 0.$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> $k=0$, <u>on a</u> $\operatorname{Tr}\pi(g) = 0$.

<u>Preuve</u> :

Pour $v\in\mathcal{O}$ et $u\in\mathfrak{P}^k$, les éléments $\begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix} g$ et $\begin{pmatrix}1 & v+u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g$ sont conjugués par $\begin{pmatrix}1 & ub(b-a)^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$. On utilise alors le lemme 3.11 et la supercuspidalité de T.

<u>Lemme 3.14</u> :

<u>Pour tout entier</u> $i > k$ <u>et assez grand pour que</u> π <u>soit triviale sur</u> K_i, <u>la somme</u> $\sum_{L\in B}\Theta_i(g,L)$ <u>est indépendante de</u> i <u>et vaut</u> :

- <u>si</u> $k=0$: 0 (<u>B est vide</u>).
- <u>si</u> $k\geqslant 1$:

$$\sum_{r=0}^{k-1}\ \sum_{u\in\mathfrak{P}^{k-r}/\mathfrak{P}^k}\left[\operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) + \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix} g\right)\right].$$

<u>Preuve</u> :

Supposons $k\geqslant 1$. On calcule d'abord la somme $\sum_{L\in B^+}\Theta_i(g,L)$, où :

$$B^+ = \left\{ L\in\Psi \,/\, i-k \leqslant d(L,L_0) < i \text{ et } d(L,D)=d(L,L_j) \text{ avec } j\geqslant i-k\right\}.$$

On constate que B^+ est réunion disjointe d'arcs de cercles centrés en L_{i-k} : $B^+ = \bigcup_{r=0}^{k-1} B_r^+$,

avec $B_r^+ = \left\{ L\in\Psi \,/\, d(L,L_{i-k})=r \text{ et } d(L,L_{i-k-1})=r+1\right\}$. Le lemme 3.10 affirme que $\Theta_i(g,L)$ est constante sur chaque B_r^+. Posons :

$$t_j = \begin{pmatrix}\varpi^j & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ de sorte que } L_j = t_j L_0.$$

Remarquant que B_r^+ a q^r éléments, et que tous les éléments de $K_i g$ fixent B^+, on obtient :

$$\sum_{L\in B^+}\Theta_i(g,L) = \sum_{r=0}^{k-1} q^r I_r, \text{ avec } I_r = \int_{K_i}\operatorname{Tr}\pi\,(t_{i-k+r}^{-1} h g t_{i-k+r})\,dh.$$

Posant $J_r = t_{i-k+r}^{-1} K_i t_{i-k+r} = \begin{pmatrix}1+\mathfrak{P}^i & \mathfrak{P}^{k-r}\\ \mathfrak{P}^{2i-k+r} & 1+\mathfrak{P}^i\end{pmatrix}$, on a, puisque g commute à t_{i-k+r} :

$$I_r = \oint_{J_r} \mathrm{Tr}\,\pi(hg)\,dh.$$

Mais vu les hypothèses et le lemme 3.13, il reste :

$$I_r = q^{-r} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k} \mathrm{Tr}\,\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right),$$

d'où le résultat, la partie B^- s'obtenant à l'aide du lemme 3.10 (i).

Lemme 2.9 :

Soit $C_j = \left\{ L \in \Psi / \ d(L,D)=d(L,L_j) \leqslant k \right\}$, pour $-i+k+1 \leqslant j \leqslant i-k-1$. Pour $i > k$ et tel que π soit triviale sur K_i, on a :

$$\sum_{L \in C_j} \Theta_i(g,L) = 0.$$

Preuve :

- On suppose $j \geqslant 0$ (lemme 2.4 (i)). Soit $L \in C_j$ et $r=d(L,L_j)$. Si $r=0$, on a $L=L_j=t_j L_o$, où $t_j = \begin{pmatrix} \varpi^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et si $r \geqslant 1$: $L = \begin{pmatrix} 1 & u\varpi^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_{j+r}$, où $u \in \mathcal{O}^*$ est parfaitement déterminé modulo $1+\mathfrak{p}^r$ (cf lemme I.3.5). Alors :

$$\sum_{L \in C_j} \Theta_i(g,L) = \oint_{K_i} \mathrm{Tr}\,\pi(t_j^{-1} hg t_j)\,dh + \sum_{r=1}^{k} \sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}^r} \oint_{K_i} \mathrm{Tr}\,\pi\left(t_{j+r}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -u\varpi^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} hg \begin{pmatrix} 1 & u\varpi^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_{j+r}\right) d$$

- Posons $J_m = t_m^{-1} K_i t_m = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^{i-m} \\ \mathfrak{p}^{i+m} & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}$, et $u_r = \begin{pmatrix} 1 & (a/b-1)u\,\varpi^{-r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il reste :

$$\sum_{L \in C_j} \Theta_i(g,L) = \oint_{J_j} \mathrm{Tr}\,\pi(hg)\,dh + \sum_{r=1}^{k} \sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}^r} \oint_{J_{j+r}} \mathrm{Tr}\,\pi(hu_r g)\,dh.$$

- Toutes les fois que $r \leqslant i-k-j$, on a par le lemme 3.13 :

$$\oint_{J_{j+r}} \mathrm{Tr}\,\pi(hu_r g)\,dh = \mathrm{Tr}\,\pi(u_r g).$$

- D'autre part on a pour $r \geqslant 1$:

$$\sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}^r} \mathrm{Tr}\,\pi(u_r g) = \sum_{v \in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k - \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^k} \mathrm{Tr}\,\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right).$$

- Si $j \leqslant i-2k$, on obtient donc :

$$\sum_{L\in C_j} \theta_i(g,L) = \operatorname{Tr}\pi(g) + \sum_{r=1}^{k} \sum_{u\in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}^r} \operatorname{Tr}\pi(u_r g)$$

$$= \sum_{v\in\mathcal{O}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) = 0 \text{ par le lemme 3.13.}$$

- Si $i-2k < j \leqslant i-k-1$ (ce qui suppose $k>1$), on pose $i-k-j=m$. On a $1\leqslant m<k$, et par le lemme 3.13 :

$$\sum_{L\in C_j} \theta_i(g,L) = \operatorname{Tr}\pi(g) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{u\in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k - \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) +$$

$$+ \sum_{r=m+1}^{k} \sum_{u\in\mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k - \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^k} q^{m-r} \sum_{v\in\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u+v\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Or à u fixé dans $\mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k - \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^k$, lorsque v décrit $\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k$, l'élément $u+v$ décrit la classe de u modulo $\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k$, et $\sum_{v\in\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u+v\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)$ est l'intégrale sur $u+\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k$ de la fonction $\operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right)$. Lorsque l'on somme sur u, cette intégrale est comptée autant de fois qu'il y a d'éléments dans la classe $u+\mathfrak{p}^{k-r+m}/\mathfrak{p}^k$, soit q^{r-m} fois, ce qui compense le facteur q^{m-r} figurant plus haut. Pour $m+1\leqslant r\leqslant k$, le terme correspondant à r dans la sommation ci- dessus est donc :

$$\sum_{u\in\mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k - \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Et finalement, il reste :

$$\sum_{L\in C_j} \theta_i(g,L) = \sum_{u\in\mathcal{O}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) = 0.$$

Les lemmes précédents se résument en :

Lemme 3.16 :

Soit $g=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ avec val a = val b, et val (1-b/a) = k.

Alors la suite $\operatorname{Tr} P_i T(g) P_i$ est stationnaire, et vaut pour $i>k$ et assez grand pour que π soit triviale sur K_i :

- Si $k=0$: 0
- Si $k\geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{u\in\mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) + \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix} g\right)$.

On peut maintenant rassembler tous les résultats précédents :

Proposition 3.17 :

Soit π une représentation lisse irréductible de H telle que $T=\mathrm{ind}_H^G \pi$ soit une représentation irréductible supercuspidale de G. Alors la distribution Tr T sur G, est donnée sur l'ouvert des éléments réguliers de G, par la fonction localement constante Θ_T suivante :

- Si g est régulier elliptique, alors :

$$\Theta_T(g) = \sum_{\substack{t \in G/H \\ t^{-1}gt \in H}} \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}gt).$$

- Si g est régulier hyperbolique, conjugué à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors :

  - si val a $\neq$ val b, $\Theta_T(g)=0$.
  - si val a = val b et val (1-b/a) =0, $\Theta_T(g)=0$.
  - si val a = val b et val (1-b/a) = k $\geqslant$ 1 :

$$\Theta_T(g) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k} \left(\mathrm{Tr}\,\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) + \mathrm{Tr}\,\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) \right).$$

c) Caractère d'une représentation irréductible de G induite de H'.

Rappelons (voir I.3.) que H' est le stabilisateur de l'arête $\{L_0, L_1\}$ de Ψ, qu'il est donc son propre normalisateur dans $G=GL_2(F)$, et que $g \longmapsto \{gL_0, gL_1\}$ réalise une bijection de G/H' sur l'ensemble des arêtes (non orientées) de Ψ, compatible avec l'action de G. Un élément g de G appartient à $tH't^{-1}$ si et seulement si il conserve l'arête $\{tL_0, tL_1\}$ de Ψ. On utilisera la suite de sous-groupes distingués de H' suivante :

$$K'_i = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^{i+1} \\ \mathfrak{p}^i & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix}, \quad i \geqslant 1 \text{ (cf I.3.)}.$$

Soit π une représentation lisse irréductible de H' telle que $T=\mathrm{ind}_{H'}^G \pi$ soit irréductible supercuspidale. On voit facilement que la proposition 3.8 reste valable en remplaçant H par H' (en effet, on obtient un lemme analogue au lemme 3.7 par les mêmes méthodes, en utilisant le lemme I.3.1). Il reste à étudier le cas des éléments hyperboliques réguliers à valeurs propres de même valuation. Soit donc $g=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec val a = val b = 0 et val (1-b/a) = k $\geqslant$ 0, et soit $i > k$. Alors les éléments de $K'_i g$ fixent L_0 et L_1, donc, par le lemme I.3.1, conservent une arête si et seulement si ils fixent ses deux sommets. A l'aide de cette remarque, on peut refaire tous les calculs de a) avec les modifications évidentes (par exemple, dans le lemme 2.4, on doit remplacer la conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; dans le lemme 3.13 on obtient:

$$\sum_{u \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{k+1}} \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = 0, \text{ etc...}).$$

Donnons tout de suite le résultat :

Proposition 3.18 :

Soit π une représentation lisse irréductible de H' telle que $T=\operatorname{ind}_{H'}^{G}\pi$ soit irréductible supercuspidale. Alors la distribution $\operatorname{Tr} T$ sur G est donnée sur l'ouvert des éléments réguliers de G, par la fonction localement constante Θ_T suivante :

- si g est régulier elliptique, alors :

$$\Theta_T(g) = \sum_{\substack{t \in G/H' \\ t^{-1}gt \in H'}} \operatorname{Tr}\pi(t^{-1}gt).$$

- si g est régulier hyperbolique, conjugué à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors :

  - si $\operatorname{val} a \neq \operatorname{val} b$, $\Theta_T(g) = 0$.
  - si $\operatorname{val} a = \operatorname{val} b$ et $\operatorname{val}(1-b/a) = 0$, alors $\Theta_T(g) = 0$.
  - si $\operatorname{val} a = \operatorname{val} b$ et $\operatorname{val}(1-b/a) = k \geqslant 1$, alors :

$$\Theta_T(g) = \operatorname{Tr}\pi(g) + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \left(\operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\right)$$

Remarque :

La comparaison des propositions 3.17 et 3.18 pour $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $\operatorname{val} a = \operatorname{val} b$, et $\operatorname{val}(1-b/a) = k \geqslant 1$, donne :

- si $T=\operatorname{ind}_{H}^{G}\pi$ (proposition 3.17) :

$$\Theta_T(g) = 2\operatorname{Tr}\pi(g) + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^{k}} \left(\operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\right).$$

- si $T=\operatorname{ind}_{H'}^{G}\pi$ (proposition 3.18) :

$$\Theta_T(g) = \operatorname{Tr}\pi(g) + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \left(\operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) + \operatorname{Tr}\pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\right).$$

Le premier terme est $2\operatorname{Tr}\pi(g)$ dans un cas, $\operatorname{Tr}\pi(g)$ dans l'autre. Cela provient du fait que la sommation sur les arêtes fixes éventuelles des éléments de $K_1'g$ se ramène à une sommation sur les points fixes de ces éléments, mais ce faisant on compte deux fois l'arête $\{L_0, L_1\}$. Il faut donc retrancher le terme correspondant qui vaut précisément $\mathrm{Tr}\,\pi(g)$.

On donnera plus de détails dans le cas du groupe métaplectique.

d) <u>Caractère d'une représentation irréductible de $\widetilde{G}$ induite de $\widetilde{H}$.</u>

Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\widetilde{H}$ disjointe de ses conjuguées par $\widetilde{G}-\widetilde{H}$, et soit $T=\mathrm{ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}\pi$, qui est supercuspidale irréductible spécifique par le théorème I.4.3. On étudie la distribution Tr T sur l'ouvert des éléments réguliers de $\widetilde{G}$. La proposition 1.1 permet de se restreindre aux éléments réguliers qui sont des puissances n-ièmes. Le lemme 3.7 et la proposition 3.5 montrent que Tr T est nulle au voisinage des éléments hyperboliques dont les valeurs propres sont de valuations distinctes, et qu'elle est donnée sur l'ouvert des éléments elliptiques réguliers par la fonction suivante :

$\Theta_T(\widetilde{g})=0$ si g n'est pas une puissance n-ième,

$$\Theta_T(\widetilde{g}^n)=\sum_{\substack{t\in H\backslash G\\ (t^{-1}gt)^n\in H}} \mathrm{Tr}\,\pi\,(\widetilde{t^{-1}gt}^{\,n}) \quad \text{si } g \text{ est elliptique et } g^n \text{ régulier.}$$

Il reste à traiter le cas des hyperboliques de la forme suivante (à conjugaison près) :

$g^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, $a^n \neq b^n$, $a,b\in F^*$, et val a=val b. Au centre F^{*n} près, on peut supposer

val a=val b=0 ; soit $k=\mathrm{val}\,(a^n/b^n-1)$. On peut alors suivre pas à pas la démonstration de a), en remplaçant g par $\widetilde{g}^n$ et en faisant les modifications évidentes : la plupart des démonstrations sont valables sans changement, car les changements de variable ou les conjugaisons utilisés ont lieu dans $GL_2(\mathcal{O}_F)$, sur lequel le cocycle est trivial. Seuls les lemmes 3.14 et 3.15 font intervenir des éléments extérieurs à K, les

$t_j = \begin{pmatrix} \varpi^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\widetilde{t}_j^{-1}\widetilde{g}^n\widetilde{t}_j = \widetilde{g}^n$, car les valeurs propres de g^n sont des

puissances n-ièmes. Mais il faut vérifier (avec les notations du lemme 3.14)que l'on a dans $\widetilde{G}$: $J_r=\widetilde{t}_{i-k+r}^{-1}\,K_i\,\widetilde{t}_{i-k+r}$, c'est-à-dire $\widetilde{t}_j^{-1}\widetilde{k}\widetilde{t}_j = \widetilde{t_j^{-1}kt_j}$ pour $k\in K_i$, $j\geqslant 0$. C'est certainement vrai pour i assez grand, par un argument de continuité. En fait c'est vrai pour $i\geqslant j$ par un argument semblable à celui de la proposition II.1.3.b. (pour $i\geqslant 1$, le sous-groupe K_i est engendré par ses puissances n-ièmes, par les résultats de II.1.) Enonçons le résultat :

<u>Proposition 3.19</u> :

<u>Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\widetilde{H}$ telle que $T=\mathrm{ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}}\pi$ soit une représentation irréductible spécifique supercuspidale de $\widetilde{G}$. Alors la distribu-</u>

tion Tr T sur $\widetilde{G}$ est donnée, sur l'ouvert des éléments réguliers de $\widetilde{G}$, par la fonction localement constante spécifique Θ_T suivante :

- $\Theta_T(\tilde{g})=0$ si l'élément régulier g n'est pas puissance n-ième d'un élément régulier
- Si g est elliptique, et g^n régulier :

$$\Theta_T(\tilde{g}^n) = \sum_{\substack{t\in G/H \\ t^{-1}g^n t\in H}} \mathrm{Tr}\,\pi(\widetilde{t^{-1}gt}^{\,n})$$

- Si g est régulier hyperbolique, conjugué à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a^n \neq b^n$:

  - si val a $\neq$ val b : $\Theta_T(\tilde{g}^n)=0$
  - si val a = val b et $\mathrm{val}(1-b^n/a^n) = 0$: $\Theta_T(\tilde{g}^n)=0$
  - si val a = val b et $\mathrm{val}(1-b^n/a^n) = k \geqslant 1$:

$$\Theta_T(\tilde{g}^n) = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{u\in \mathfrak{p}^{k-r}/\mathfrak{p}^k} \left[\mathrm{Tr}\,\pi\left(\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}^n \right) + \mathrm{Tr}\,\pi\left(\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}^n \right) \right]$$

e) Caractère d'une représentation irréductible de $\widetilde{G}$ induite de $\widetilde{H'}$.

Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\widetilde{H'}$ disjointe de ses conjuguées par $\widetilde{G}-\widetilde{H'}$, et $T=\mathrm{ind}_{\widetilde{H'}}^{\widetilde{G}}\pi$. Là encore, le cas des elliptiques réguliers et des hyperboliques dont les valeurs propres sont de valuations distinctes est immédiat. A conjugaison près et au centre près, il ne reste donc qu'à étudier le cas des éléments

$g^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $a,b\in F^*$, $a^n\neq b^n$, val a = val b = 0, val $(1-b^n/a^n) = k \geqslant 0$. On

peut même supposer (cf Prop. I.3.3) que a et b vérifient val (1- b/a) = k, c'est-à-dire, posant $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, que $\Delta(g) = \Delta(g^n) = q^{-k}$. Si $k \geqslant 1$, cette condition détermine g à

μ_n près. Dans la suite, on suppose $i > k$.

Puisque g^n fixe au moins une géodésique de l'arbre, il ne conserve une arête que s'il fixe ses extrémités. Trouvant plus commode d'utiliser les sommets plutôt que les arêtes, on utilisera les conventions suivantes : on divise l'arbre Ψ en deux parties,

$\Psi^+ = \{ L \;/\; d(L, L_1) < d(L, L_0) \}$

$\Psi^- = \{ L \;/\; d(L, L_0) < d(L, L_1). \}$

Les deux parties sont échangées par l'élément $\delta = \begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de G qui échange L_0 et L_1,

et Ψ est réunion disjointe de Ψ^+ et Ψ^-. On peut alors définir une bijection de $\Psi - \{L_0, L_1\}$ dans l'ensemble des arêtes de Ψ privé de $\{L_0, L_1\}$ de la façon suivante : si $L\in\Psi^+$ (resp. Ψ^-) et $L\neq L_1$ (resp. $L\neq L_0$), il existe un unique sommet L' vérifiant $d(L,L')=1$ et $d(L',L_1)<d(L,L_1)$ (resp. $d(L',L_0)<d(L,L_0)$). On associe à L l'arête $\{L,L'\}$.

Réciproquement, si $\{L',L''\}$ est une arête contenue dans Ψ^+ (resp. Ψ^-), on lui associe celui de ses sommets qui est le plus éloigné de L_1 (resp. L_0). Pour compléter, l'arête $\{L_0,L_1\}$ sera associée indifféremment à L_0 ou L_1, et sera comptée deux fois, ce dont il faudra tenir compte à la fin du calcul.

Avec une démonstration analogue à celle du lemme 3.9, on obtient :

Lemme 3.20 :

(i) Pour tout $h \in K_i'$ avec $i > k$, l'élément hg^n est hyperbolique régulier, de mêmes valeurs propres que g^n modulo $\mathfrak{P}^i$, et ses points fixes dans l'arbre sont tels que :

$$\begin{aligned}\Psi^{hg} \cap S(L_0,L_1,i+\tfrac{1}{2}) &= \Psi^{g} \cap S(L_0,L_1,i+\tfrac{1}{2}) \\ &= \left\{ L \in S(L_0,L_1,i+\tfrac{1}{2}) \ / \ d(L,D) \leqslant k \right\}.\end{aligned}$$

(ii) L'ensemble des points fixes possibles des éléments de $K_i'g^n$ est réunion disjointe des sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A^+ &= \left\{ L \in \Psi / \ d(L,L_1) \geqslant i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } j \geqslant i+1-k \right\}\\
A^- &= \left\{ L \in \Psi / \ d(L,L_0) \geqslant i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } j \leqslant -i+k \right\}\\
B^+ &= \left\{ L \in \Psi / \ i-k \leqslant d(L_1,L) < i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } i+1-k \leqslant j < i+1 \right\}\\
B^- &= \left\{ L \in \Psi / \ i-k \leqslant d(L_0,L) < i \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } -i < j \leqslant -i+k \right\}\\
C^+ &= \left\{ L \in \Psi / \ d(L,D) \leqslant k \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } 1 \leqslant j \leqslant i-k \right\}\\
C- &= \left\{ L \in \Psi / \ d(L,D) \leqslant k \text{ et } d(L,D) = d(L,L_j) \text{ avec } -i+k+1 \leqslant j \leqslant 0 \right\}
\end{aligned}$$

On notera $A = A^+ \cup A^-$, etc ...

Soit $L \in \Psi$, et $t \in G$ tel que l'arête $\{tL_0,tL_1\}$ soit associée à L par l'application décrite plus haut. On pose alors :

$$\Theta_i(g^n,L) = \int_{K_i'} \chi_{H'}(t^{-1}kg^nt) \operatorname{Tr} \pi(\tilde{t}^{-1}\widetilde{kg}^n\tilde{t})\, dk.$$

Par les remarques précédentes, on a en fait :

$$\Theta_i(g^n,L) = \int_{K_i'} \chi_{H}(t^{-1}kg^nt) \operatorname{Tr} \pi(\tilde{t}^{-1}\widetilde{kg}^n\tilde{t})\, dk.$$

On cherche à calculer $\sum_{L \in \Psi} \Theta_i(g^n,L)$. Pour simplifier les notations, on supprimera les $\sim$ dans les calculs qui suivent, en convenant que t^{-1} signifie $\tilde{t}^{-1}$, et g^n signifie $\tilde{g}^n$, kg signifie $\widetilde{kg}$, etc ...

Lemme 3.21 :

(i) Pour tout sommet L de Ψ, on a :

$$\Theta_i(g^n,L) = \Theta_i(g'^n,\delta L), \text{ où } g'^n = \begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

(ii) Soit $L \in A \cup B$, et L' le point de la géodésique D déterminé par $d(L,L_0) = d(L',L_0)$ et $d(L,L_1) = d(L',L_1)$. Alors :

$$\theta_i\,(g^n,L) = \theta_i(g^n,L').$$

Preuve :

(i) On fait le changement de variable $k \longmapsto \delta^{-1}k\delta$ dans l'intégrale donnant $\theta_i(g^n,L)$. Le changement de variable n'introduit aucun cocycle non trivial par les propositions II.1.1 et II.1.3. La nouvelle intégrale fait alors intervenir l'élément δt de G, et on vérifie aisément que δL est le sommet de Ψ correspondant à l'arête $\{\delta t L_0, \delta t L_1\}$ par l'application ci-dessus. D'autre part, on a $\delta g^n \delta^{-1} = g'^n$, grâce au fait que les valeurs propres de g sont des puissances n-ièmes. Il ne reste plus qu'à remarquer que la conjugaison par δt dans $\tilde{G}$ ne dépend pas du représentant de δt choisi (i.e. $\tilde{\delta}\tilde{t}$ ou $\widetilde{\delta t}$).

(ii) Grâce à (i), il suffit de le montrer pour $L \in A^+ \cup B^+$. On a alors $d(L,D) = d(L,L_j)$ avec $j \geqslant i-k+1$, et $L' = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L$ avec val u = j. La démonstration du lemme 3.10 donne

le résultat : les manipulations effectuées dans l'intégrale n'introduisent aucun cocycle non trivial, car tout se passe dans $GL_2(\mathcal{O})$.

Lemme 3.22 :

Pour tout $L \in A$, on a $\theta_i(g^n,\ L) = 0$.

Preuve :

C'est la même que celle du lemme 3.12.

Lemme 3.23 :

L'application : $\begin{aligned} \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto \operatorname{Tr} \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right), \end{aligned}$ est invariante par $\mathfrak{p}^{k+1}$, et on a :

$$\sum_{v \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{k+1}} \operatorname{Tr} \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = 0.$$

En particulier, si k=0 on a $\operatorname{Tr} \pi(g) = 0$.

Preuve :

Pour $v \in \mathfrak{p}$ et $u \in \mathfrak{p}^{k+1}$, les éléments $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g$ et $\begin{pmatrix} 1 & v+u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g$ sont conjugués dans

G et dans $\tilde{G}$ (car tout se passe dans $GL_2(\mathcal{O})$, sur lequel le cocycle est trivial) par

$\begin{pmatrix} 1 & u(1-\frac{a}{b})^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui appartient à H' si val u - k $\geqslant$ 1.

Lemme 3.24 :

Pour tout entier $i \geq k$ et assez grand pour que π soit triviale sur K'_i, la somme

$\sum_{L \in B} \Theta_i(g^n, L)$ est indépendante de i et vaut :

- si $k=0$: 0 (B est vide)
- si $k \geq 1$:

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{u \in \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \left[\operatorname{Tr} \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{g}^n \right) + \operatorname{Tr} \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{g}'^n \right) \right]$$

Preuve :

Elle consiste à recopier celle du lemme 3.8, avec cependant quelques précautions : on a $B^+ = \bigcup_{r=0}^{k-1} B_r^+$ avec $B_r^+ = \left\{ L \in \Psi \,/\, d(L, L_{i-k+1}) = r \text{ et } d(L, L_{i-k}) = r+1 \right\}$. L'arête associée au sommet $L_{i-k+1+r}$ de B_r^+ par l'application décrite plus haut est l'arête $\left\{ L_{i-k+r}, L_{i-k+1+r} \right\}$, obtenue à partir de $\left\{ L_0, L_1 \right\}$ par :

$$t_{i-k+r} = \begin{pmatrix} \varpi^{i-k+r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ On aura donc :

$$\sum_{L \in B^+} \Theta_i(g^n, L) = \sum_{r=0}^{k-1} q^r I_r, \text{ avec } I_r = \oint_{K'_i} \operatorname{Tr} \pi(t_{i-k+r}^{-1} h g^n t_{i-k+r})\, dh.$$

Puisque g^n et t_{i-k+r} commutent dans $\tilde{G}$, il ne reste plus qu'à montrer que :

$$t_{i-k+r}^{-1} K'_i t_{i-k+r} = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^{k-r+1} \\ \mathfrak{p}^{2i-k+r} & 1+\mathfrak{p}^i \end{pmatrix} \text{ dans } \tilde{G},$$

c'est-à-dire $\widetilde{t_{i-k+r}}^{-1} \tilde{k} \widetilde{t_{i-k+r}} = \widetilde{t_{i-k+r}^{-1} k t_{i-k+r}}$ si $k \in K'_i$. Cette dernière propriété découle du fait que K'_i est engendré par les puissances n-ièmes de ses éléments, et que son conjugué par t_{i-k+r} est contenu dans $GL_2(\mathcal{O})$, par un argument semblable à celui de la Proposition II.1.3.

Lemme 3.25 :

Soit $C_j = \left\{ L \in \Psi \,/\, d(L, D) = d(L, L_j) \leq k \right\}$, pour $-i+k+1 \leq j \leq i-k$. Pour $i \geq k$ et assez grand pour que π soit triviale sur K'_i, on a :

$$\sum_{L \in C_j} \Theta_i(g^n, L) = 0.$$

Preuve :

Il suffit d'adapter convenablement la démonstration du lemme 3.15, en tenant compte des remarques faites dans la démonstration du lemme 3.24.

Il ne reste plus qu'à rassembler les résultats, en tenant compte du fait que le terme $\Theta_i(g^n,L_0) = \Theta_i(g^n,L_1) = \mathrm{Tr}\,\pi(g^n) = \mathrm{Tr}\,\pi(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}^n)$ a été compté deux fois.

Proposition 3.26 :

Soit π une représentation lisse irréductible spécifique de $\widetilde{H'}$, telle que $T=\mathrm{ind}_{\widetilde{H'}}^{\widetilde{G}}\pi$ soit admissible supercuspidale spécifique. Alors la distribution $\mathrm{Tr}\,T$ sur $\widetilde{G}$ est donnée sur l'ouvert des éléments réguliers de $\widetilde{G}$ par la fonction localement constante spécifique Θ_T suivante :

- si g régulier n'est pas puissance n-ième d'un élément régulier :

$$\Theta_T(\tilde{g}) = 0.$$

- si g est elliptique, et g^n régulier :

$$\Theta_T(\tilde{g}^n) = \sum_{\substack{t\in G/H' \\ t^{-1}g^nt\in H'}} \mathrm{Tr}\,\pi\,(\widetilde{t^{-1}gt}^{\,n})$$

- si g est hyperbolique, conjugué à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ avec $a^n\neq b^n$:

  - si val a $\neq$ val b : $\Theta_T(\tilde{g}^n) = 0$
  - si val a = val b et val $(1 - b^n/a^n) = 0$: $\Theta_T(\tilde{g}^n) = 0$
  - si val a = val b et val $(1 - b^n/a^n) = k \geqslant 1$:

$$\Theta_T(\tilde{g}^n) = \mathrm{Tr}\,\pi\,(\widetilde{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}}^n) + \sum_{r=1}^{k-1}\ \sum_{u\in\mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \left[\mathrm{Tr}\,\pi(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}}^n) + \mathrm{Tr}\,\pi(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}}^n)\right]$$

III.4. LA CORRESPONDANCE : SÉRIE RAMIFIÉE.

Soit E une extension quadratique séparable ramifiée de F, telle que $E^*\subset GL_2(F)$ conserve l'arête standard $\{L_0,L_1\}$ de l'arbre de $GL_2(F)$. Si n est pair (p est alors impair) on choisira une uniformisante δ de E vérifiant $\delta^2 = \varpi$, où ϖ est une uniformisante convenable de F. La classe de ϖ dans F^*/F^{*2} détermine alors E à F-isomorphisme près.

Si n est pair, on note L le caractère de $\mathcal{O}^*$ ou de k^* défini par $L(x)=1$ si x est un carré, $L(x)=-1$ sinon. Pour $x\in k^*$ (resp. $\mathcal{O}^*$) on a : $L(x) = x^{\frac{1}{2}(q-1)}$ (resp. $L(x)\in x^{\frac{1}{2}(q-1)}(1+\mathfrak{p})$).

CORRESPONDANCE LOCALE

Avec les notations de II.2, on peut énoncer le résultat essentiel :

Théorème 4.1 :

Soit $\tilde{\chi}$ un caractère spécifique de $\widetilde{E^{*n}}H(m)$, $(m \geqslant 1)$, trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$ et non dégénéré, et $\tilde{T}=T(\tilde{\chi})$ la représentation irréductible spécifique supercuspidale de $\tilde{G}$ qui lui est associée.

1°) Les égalités :

(a) $\chi(x) = \tilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1})$, $x \in E^*H(m)$, pour n impair

(b) $\chi(x) = \tilde{\chi}(x^n, s(x^n)^{-1})$, $x \in E_0 H(m)$,

et $\chi(\delta) = \varepsilon\, \tilde{\chi}(\delta^n, s(\delta^n)^{-1})$, pour n pair,

où ε est la racine carrée de $(-1)^{(q-1)/2}$ vérifiant :

$$\sum_{y \in k^*} L(y) \quad \tilde{\chi}(h(-2\delta(-\varpi)^{m-1}y)) = \varepsilon\, q^{\frac{1}{2}},$$

définissent un caractère non dégénéré de $E^*H(m)$.

2°) Les caractères des représentations irréductibles supercuspidales $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ et $T = \mathrm{Ind}_{E^*H(m)}^{G}\chi$ de G, vérifient :

$$(*) \quad \Delta(g^n)\,\Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \sum_{h^n = g^n} \Delta(h)\,\Theta_T(h),$$

pour tout élément régulier g de G tel que g^n soit régulier.

Corollaire 4.2 :

L'application $\tilde{T} \longmapsto T$ détermine une correspondance bijective, caractérisée par la relation (*), entre les classes d'équivalence de représentations irréductibles spécifiques supercuspidales de la série ramifiée de $\tilde{G}$, et les classes d'équivalence de représentations irréductibles supercuspidales, triviales sur $\mu_n(F)$, de la série ramifiée de G.

Preuve du corollaire :

L'application $\tilde{T} \longmapsto T$, bien définie dans le théorème, passe aux classes d'équivalence de représentations à cause de la formule de caractère (*) (cf III.2.).

La proposition II.2.6 assure que l'on obtient par $\tilde{\chi} \longmapsto \chi$ tous les caractères non dégénérés de $E^*H(m)$ triviaux sur $\mu_n(F)$. Les théorèmes II.4.1 et II.4.2 montrent alors qu'il s'agit bien d'une correspondance bijective entre les ensembles donnés.

Preuve du théorème :

a) Le point 1) découle de la proposition II.2.6, et la définition de $\mathcal{E}$ est détaillée dans la définition 4.13.

Remarquons au passage que si $\delta = \begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (cas n pair), alors pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

on a $h(-2\,\delta(-\varpi)^{m-1}y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4y(-\varpi)^{m-1} & 1 \end{pmatrix}$ (cf Remarque I.1.5) ; dire que $\widetilde{\chi}$ est non dégénéré équivaut à dire qu'il est non trivial sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{m-1} & 1 \end{pmatrix}$ (mais bien sûr trivial sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{m} & 1 \end{pmatrix}$), et la définition de $\mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{y \in k^*} L(y)\, \widetilde{\chi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y(-\varpi)^{m-1} & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{E}\, q^{\frac{1}{2}}.$$

La démonstration de 2°) repose en premier lieu sur l'étude du quotient $T^n \cap E^{*n}H(m)/(T \cap E^*H(m))^n$, où T est un tore elliptique de GL_2. Cette étude, jointe aux formules de caractère induit établies en III.3, donne le résultat rapidement si n est impair, ou si l'élément g de la formule (*) n'est pas un élément de E^* de valuation impaire. Si n est pair, et si g est un élément de valuation impaire de E^*, on est amené à calculer explicitement le caractère $\Theta_{\widetilde{T}}(\widetilde{g}^n)$, ce qui fournit la partie la plus pénible de la démonstration.

b) Premiers pas vers la formule (*).

Soit $\pi(\widetilde{\chi})$ la représentation irréductible de $E^*H(m)$ associée à $\widetilde{\chi}$ (Théorème II.2.7), de sorte que $\widetilde{T}$ soit l'induite à $\widetilde{G}$ de $\pi(\widetilde{\chi})$, c'est-à-dire l'induite à $\widetilde{G}$ de l'induite à $\widetilde{H'}$ de $\pi(\widetilde{\chi})$. Le caractère de l'induite à $\widetilde{H'}$ de $\pi(\widetilde{\chi})$ se calcule facilement à partir de celui de $\pi(\widetilde{\chi})$ par la formule de caractère induit classique. La Proposition 3.26 entraîne donc, pour g elliptique régulier tel que g^n soit elliptique régulier :

$$\Theta_{\widetilde{T}}(\widetilde{g}^n) = \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m) \\ t^{-1}g^nt \in E^*H(m)}} \mathrm{Tr}\, \pi(\widetilde{\chi})(\widehat{t^{-1}gt}^{\,n}).$$

Or par le théorème II.2.7 ,le caractère de $\pi(\widetilde{\chi})$ nous est connu : il est nul en dehors de $\widetilde{E^{*n}H(m)}$, et vaut $n\widetilde{\chi}$ sur ce sous-groupe. D'où :

$$\Theta_{\widetilde{T}}(\widetilde{g}^n) = \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m) \\ (t^{-1}gt)^n \in E^{*n}H(m)}} n\widetilde{\chi}(\widehat{t^{-1}gt}^{\,n}).$$

L'usage du lemme I.2.9 donne immédiatement :

$$(1)\quad \Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = n\,\Delta(g^n) \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m)\\ (t^{-1}gt)^n \in E^{*n}H(m)}} \tilde{\chi}((t^{-1}gt)^n, s((t^{-1}gt)^n)^{-1}),$$

<u>si</u> g <u>est elliptique régulier, et</u> g^n <u>régulier</u>.

Par ailleurs les $h \in G$ tels que $h^n = g^n$ sont les ζg, $\zeta \in \mu_n$; le caractère central de T est la restriction de χ à F^*, triviale sur μ_n. La formule (*) devient donc, pour g elliptique :

$$\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = n\,\Delta(g)\,\Theta_T(g).$$

La proposition 3.18 implique :

$$(2)\quad n\,\Delta(g)\Theta_T(g) = n\Delta(g) \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m)\\ t^{-1}gt \in E^*H(m)}} \chi(t^{-1}gt).$$

<u>Lemme 4.3</u> :

<u>Soit</u> g <u>un élément elliptique tel que</u> g^n <u>soit régulier</u>.

<u>On note</u> $\Omega(g) = \left\{ t \in G/E^*H(m) \;/\; t^{-1}gt \in E^*H(m) \right\}$, <u>et</u>

$\tilde{\Omega}(g) = \left\{ t \in G/E^*H(m) \;/\; (t^{-1}gt)^n \in E^{*n}H(m) \right\}$.

<u>Si</u> $\Omega(g) = \tilde{\Omega}(g)$ <u>et</u> $\Delta(g) = \Delta(g^n)$, <u>la formule</u> (*) <u>est vérifiée</u>.

<u>Preuve</u> :

Le lemme résulte de la comparaison terme à terme des formules (1) et (2) et de la définition de χ, à condition de montrer que si n est pair alors $\Delta(g) = \Delta(g^n)$ implique que $t^{-1}gt \in E_0H(m)$ pour tout $t \in \Omega$. Ce dernier point découle de la proposition I.3.3 :

- si g est ramifié, et n pair, alors $\Delta(g) = \Delta(g^n)$ implique que g fixe au moins deux sommets de l'arbre, donc $t^{-1}gt$ aussi.
- si g est non ramifié et n pair, alors $t^{-1}gt$ fixe un sommet de l'arbre ; si $t^{-1}gt$ appartient à $E^*H(m)$, il fixe obligatoirement L_0 et L_1, donc appartient à $E_0H(m)$ (cf Lemme I.3.1). C.Q.F.D.

Nous allons maintenant déterminer les cas dans lesquels les hypothèses du Lemme 4.3 sont vérifiées.

c) <u>Etude de l'intersection</u> $T \cap E^*H(m)$, T <u>tore elliptique de</u> G.

<u>Proposition 4.4</u> :

<u>Soit</u> T <u>un tore elliptique séparable de</u> $GL_2(F)$.

a) <u>Si</u> n <u>est impair, ou si</u> T <u>n'est pas isomorphe à</u> E^*, <u>on a</u> :

$$T^n \cap E^{*n}H(m) = (T \cap E^*H(m))^n.$$

b) <u>Si</u> n <u>est pair et</u> T <u>isomorphe à</u> E^*, <u>alors</u> $T^n \cap E^{*n}H(m) = (T\cap E^*H(m))^n$ <u>si et seulement si</u> T <u>est contenu dans</u> $E^*H(m)$.

<u>Si</u> T <u>n'est pas contenu dans</u> $E^*H(m)$, <u>alors</u> $(T\cap E^*H(m))^n$ <u>est d'indice</u> 2 <u>dans</u> $T^n\cap E^{*n}H(m)$; <u>l'élément non trivial du quotient est représenté par</u> δ^n, <u>où</u> δ <u>est une uniformisante de</u> E <u>de trace nulle</u>.

<u>Preuve</u> :

L'inclusion $(T\cap E^*H(m))^n \subset T^n\cap E^{*n}H(m)$ est claire ($E^{*n}H(m)$ est engendré par $(E^*H(m))^n$, cf Lemme II.1.2). Il suffit de montrer que ces deux groupes ont même indice dans $T\cap E^*H(m)$, sauf dans les cas indiqués en b).

<u>Lemme 4.5</u> :

a) <u>Soit</u> K <u>une extension quadratique séparable de</u> F, <u>et</u> U <u>un sous-groupe ouvert de</u> K^* <u>contenant</u> F^*. <u>Alors</u> $[U:U^n] = n^2$.

b) $[T\cap E^*H(m) : (T\cap E^*H(m))^n] = n^2$.

<u>Preuve</u> :

Puisque U contient F^*, il contient un élément u_0 de valuation strictement positive et minimale dans U. Alors :

$$U = u_0^{\mathbb{Z}}\,(U\cap \mathcal{O}_K^*),\quad U^n = u_0^{n\mathbb{Z}}(U\cap\mathcal{O}_K^*)^n,\ \text{et}$$
$$U/U^n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times U\cap\mathcal{O}_K^*/(U\cap\mathcal{O}_K^*)^n.$$

Or U est ouvert ; il contient donc $1+\mathfrak{P}_K^i$ pour i assez grand. Pour un tel i, on voit que $[U\cap\mathcal{O}_K^* : (U\cap\mathcal{O}_K^*)^n] = [U\cap\mathcal{O}_K^*/1+\mathfrak{P}_K^i : (U\cap\mathcal{O}_K^*/1+\mathfrak{P}_K^i)^n]$; on se ramène ainsi à des groupes finis. Puisque U contient F^*, il contient le noyau $\mu_n(F)$ de l'homomorphisme $x\longmapsto x^n$, d'où l'indice cherché.

Par ailleurs :

$$[T\cap E^*H(m) : T^n\cap E^{*n}H(m)] = [T\cap E^*H(m) : T^n\cap E^*H(m)]\,[T^n\cap E^*H(m) : T^n\cap E^{*n}H(m)]\ .$$

<u>Lemme 4.6</u> :

<u>L'indice de</u> $T^n\cap E^*H(m)$ <u>dans</u> $T\cap E^*H(m)$ <u>vaut</u> n^2 <u>si</u> n <u>est impair, ou si</u> n <u>est pair et</u> T <u>ramifié tel que</u> $T\cap E^*H(m)$ <u>contienne un élément de valuation impaire. Il vaut</u> $\frac{1}{2}n^2$ <u>dans les autres cas</u>.

<u>Preuve</u> :

- Si T est <u>non ramifié</u> un élément de T fixe un sommet de l'arbre, et ne peut donc échanger les deux extrémités d'une arête (Lemme I.3.1), d'où :

$$T\cap E^*H(m) = T\cap F^*(1+\mathfrak{P}_E)H(m)$$

(un simple raisonnement géométrique, utilisant les résultats de I.3, permet même de montrer que $T\cap E^*H(m) = T\cap F^*A^*(m)$). Un élément de $T\cap E^*H(m)$ fixe alors au moins deux sommets de l'arbre, et appartient à $F^*(1+\mathfrak{P}_T)$ (cf I.3.). D'où :

$$T\cap E^*H(m) = F^*\left[(1+\mathfrak{P}_T)\cap E^*H(m)\right],$$

$$\text{et} \quad T^n\cap E^*H(m) = F^{*n}(\mathcal{O}_T^{*n}\cap\mathcal{O}^*)((1+\mathfrak{P}_T)\cap E^*H(m)).$$

Alors :

$$T\cap E^*H(m) \,/\, T^n\cap E^*H(m) \simeq F^* \,/\, F^{*n}(\mathcal{O}_T^{*n}\cap\mathcal{O}^*)$$

$$\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times k^*/k^*\cap k_T^{*n}.$$

Enfin : $k^*\cap k_T^{*n} = \left\{ y^n/y\in k_T^*,\ (\bar{y}/y)^n=1\right\}$. Un tel y vérifie $\bar{y}/y=\zeta\in\mu_n\cap \mathrm{Ker}\, N$, d'où $\zeta=\pm 1$. L'indice cherché est donc n^2 si n est impair, $n^2/2$ si n est pair.

- Si T est <u>ramifié</u>, l'inclusion de $T\cap E^*H(m)$ dans T donne une inclusion :

$$T\cap E^*H(m) \,/\, T^n\cap E^*H(m) \xhookrightarrow{i} T/T^n.$$

Le choix d'une uniformisante δ_T de T fournit un isomorphisme :

$$T/T^n \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times k_T^*/k_T^{*n}$$

$$g \longmapsto (\mathrm{val}_T g[n], g\,\delta_T^{-\mathrm{val}_T(g)} \bmod \mathcal{O}_T^{*n}),$$

et k_T^*/k_T^{*n} est cyclique d'ordre n. Or $k_T^* = k^*$, et $T\cap E^*H(m)$ contient $\mathcal{O}^*$. L'image de i contient donc k_T^*/k_T^{*n}. D'autre part $T\cap E^*H(m)$ contient F^*, dont les éléments sont de valuation paire dans T. <u>Si</u> n <u>est impair</u>, alors $T\cap E^*H(m)$ contient un élément de valuation n+1, donc i est surjectif et l'indice cherché est n^2. <u>Si</u> n <u>est pair</u>, l'image de i contient le sous-groupe $2\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times k^*/k^{*n}$ de T/T^n. L'indice cherché vaut donc n^2 si et seulement si $T\cap E^*H(m)$ contient un élément de valuation impaire de T, et $\frac{1}{2}n^2$ dans le cas contraire. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> :

Lorsque T est ramifié, on peut parler des éléments de valuation impaire de $T\cap E^*H(m)$ sans préciser davantage. En effet un élément de valuation impaire de T appartenant à $E^*H(m)$ s'écrit nécessairement $uh(x)$, $u\in E^*$, $h(x)\in H(m)$, où u est également de valuation impaire.

Lorsque n est impair, les lemmes 4.5 et 4.6 impliquent la proposition 4.4. Lorsqu' n est pair, il faut encore étudier l'indice de $T^n\cap E^{*n}H(m)$ dans $T^n\cap E^*H(m)$.

<u>Lemme 4.7</u> :

<u>Si</u> n <u>est pair et</u> T <u>non isomorphe à</u> E^*, <u>alors</u> :

$$\left[T^n\cap E^*H(m) : T^n\cap E^{*n}H(m)\right] = 2.$$

<u>Si</u> n <u>est pair et</u> T <u>isomorphe à</u> E^*, <u>alors</u> :

$$T^n\cap E^*H(m) = T^n\cap E^{*n}H(m).$$

Preuve :

L'injection de $T^n \cap E^*H(m)$ dans $E^*H(m)$ suivie de la projection sur E^* fournit une injection :

$$T^n \cap E^*H(m) \ / \ T^n \cap E^{*n}H(m) \xhookrightarrow{j} E^*/E^{*n} \ ;$$

ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times k^*/k^{*n}$ après choix d'une uniformisante δ de E (voir plus haut). L'indice cherché ne peut valoir que 1 ou 2 à cause des lemmes précédents. Il suffira donc, pour montrer qu'il vaut 2, de trouver un élément non trivial dans l'image de j.

- Si T est <u>non ramifié</u>, il existe un élément de $\mathcal{O}_T^{*n} \cap \mathcal{O}^*$ qui n'appartient pas à $\mathcal{O}^{*n}$ (voir la démonstration du lemme 4.6). Son image par j est un élément non trivial de k^*/k^{*n}, donc l'indice vaut 2.

- Si T est <u>ramifié</u>, et si $g=uh(x)$ appartient à $T^n \cap E^*H(m)$, on voit en considérant les déterminants que $\mathrm{val}_E u = \mathrm{val}_T g$ est multiple de n. L'image de j est donc contenue dans k^*/k^{*n}. Puisque n est pair, p est impair, et F n'a, à isomorphisme près, que deux extensions quadratiques ramifiées. On peut choisir une uniformisante δ_T de T vérifiant $\delta_T^2 = \varpi = \delta^2$ si T est isomorphe à E^*, $\delta_T^2 = \varpi\,\varepsilon$, où ε est une racine primitive (q-1)-ième de l'unité, si T n'est pas isomorphe à E^*. Alors δ_T^n appartient à F^*, donc :

$$T^n \cap E^*H(m) = \delta_T^{n\mathbb{Z}}\,(\mathcal{O}_T^{*n} \cap E^*H(m)).$$

<u>Si</u> T <u>n'est pas isomorphe à</u> E^*, alors $j(\delta_T^n)$ est l'image de $\delta^{-n}\delta_T^n$ dans k_F^*/k_F^{*n}, c'est-à-dire $\varepsilon^{\frac{1}{2}n}$, qui est non trivial modulo k_F^{*n}. L'indice cherché vaut donc 2.

<u>Si</u> T <u>est isomorphe à</u> E^*, alors $j(\delta_T^n)=1$. Il reste à voir que :

$$j(\mathcal{O}_T^{*n} \cap E^*H(m)) = j((1+\mathfrak{P}_T) \cap E^*H(m)) = 1.$$

Or on voit géométriquement (i.e. dans l'arbre) que :

$$(1+\mathfrak{P}_T) \cap E^*H(m) = (1+\mathfrak{P}_T) \cap \mathcal{O}_F^*\,(1+\mathfrak{P}_E)H(m).$$

En considérant la norme et la trace d'un élément de l'intersection, on obtient facilement:

$$(1+\mathfrak{P}_T) \cap E^*H(m) = (1+\mathfrak{P}_T) \cap (1+\mathfrak{P}_E)H(m),$$

d'image triviale par j. C.Q.F.D.

La proposition 4.4 a) est maintenant démontrée. Il ne manque plus qu'un lemme pour obtenir 4.4 b) :

<u>Lemme 4.8</u> :

<u>On suppose</u> p <u>impair. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>$T \cap E^*H(m)$ contient un élément n'ayant aucun point fixe dans l'arbre</u>.

(ii) T <u>est conjugué de</u> E^* <u>par un élément de</u> H(m).

(iii) T <u>est contenu dans</u> $E^*H(m)$.

Preuve:

Un élément de $E^*H(m)$ qui ne fixe aucun point de l'arbre s'écrit $uh(x)$ où $u \in E^*-E_0$ et $h(x) \in H(m)$. Si $h(x)$ est égal à 1, alors $uh(x)$ appartient à E^*. Sinon $h(x)$ appartient à $H(i)-H(i+1)$ pour un $i \geqslant m$, et la conjugaison par un élément $h(y)$ de $H(m)$ donne : $h(y)uh(x)h(y)^{-1} = vh(z)$, avec $v = u(1-y(1-\mathrm{Tr}\ y)^{-1}j(\bar{u})^{-1} \in E^*-E_0$, et $z = y(1+j(\bar{u})) + N(y)j(\bar{u})(1-\mathrm{Tr}\ y)^{-1} + (x(1-\mathrm{Tr}\ y)-y(1-\mathrm{Tr}\ x))N(1-y(1-\mathrm{Tr}\ y)^{-1}j(\bar{u}))$, en posant $j(\bar{u})=u/\bar{u} - 1$, de valuation 0 si p est impair. Choisissant y de valuation i, on aura donc : $z \in yj(\bar{u})+x+\mathfrak{P}_E^{i+1}$, d'où $z \in \mathfrak{P}_E^{i+1}$ si l'on choisit y tel que $yj(\bar{u})+x \in \mathfrak{P}_E^{i+1}$. Ainsi $uh(x)$ est conjugué à un élément de $(E^*-E_0)H(i+1)$ par un élément de $H(i)$. En itérant le procédé, on obtiendra un élément de E^*-E_0 conjugué à $uh(x)$ par un élément de $H(m)$, d'où (i) $\Longrightarrow$ (ii). Les autres implications sont claires. C.Q.F.D.

Proposition 4.9 :

a) Si n est impair, la formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g tel que g^n soit régulier.

b) Si n est pair, la formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g (tel que g^n soit régulier) non conjugué à un élément de E^* de valuation impaire.

Preuve :

Dans les conditions indiquées, on a, grâce à la proposition 4.4, $\Omega(g)=\tilde{\Omega}(g)$. Si $\Delta(g)=\Delta(g^n)$, le lemme 4.3 donne le résultat. Sinon, n est pair, et on est dans un des cas suivants (proposition I.3.3) :

- g est non ramifié et n'a qu'un point fixe dans l'arbre. Alors g ne conserve aucune arête de l'arbre, et $\Omega(g)$ est vide, ainsi que $\tilde{\Omega}(g)$. Donc $\Theta_T(g)=0$ et $\Theta_{\tilde{T}}(\tilde{g}^n)=0$, d'où la formule (*).
- g est ramifié et n'a aucun point fixe dans l'arbre. Alors la valuation de g dans l'extension ramifiée qu'il engendre est impaire. Le lemme 4.8 montre encore que $\Omega(g)$ est vide, C.Q.F.D.

d) La formule (*) pour n pair, et g conjugué à un élément de E^* de valuation impaire.

On peut évidemment supposer que g appartient à E^* : $g=\delta x$, avec $\delta^2 = \varpi$ et $x \in E_0$. Alors g^n est régulier si et seulement si x^n est régulier ($\bar{x}/x=-1$ est impossible si x est de valuation paire), ce que l'on supposera. On a $\Delta(g)=1$ et :

$$\Delta(g^n) = \Delta(x^n)=\Delta(x) = q^{-\frac{1}{2}(2k+1)},$$

pour un entier $k \geqslant 0$, vérifiant $x \in F^*(1+\mathfrak{P}_E^{2k+1})$, et $x \notin F^*(1+\mathfrak{P}_E^{2k+2})$. Posant $j=\bar{x}/x - 1$, on a $\mathrm{val}_E j = 2k+1$ (pour tout ceci, voir I.3).

Le lemme 4.8 entraîne $\Omega(g)=\{1,\sigma\}$, d'où par la formule (2) :

$$n\Delta(g)\Theta_T(g) = n(\chi(g)+\chi(\bar{g})).$$

Or $\chi(\bar{\delta}/\delta) = \chi(-1) = 1$ car $-1\in\mu_n$, d'où

$$(2')\quad n\Delta(g)\Theta_T(g) = n\chi(\delta)(\chi(x)+\chi(\bar{x})).$$

D'autre part, on a $\widetilde{\Omega}(g) = \widetilde{\Omega}(x) = \Omega(x)$, d'où par la formule (1) :

$$(1')\quad \Delta(g^n)\Theta_T(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\Delta(x) \sum_{\substack{t\in G/E^*H(m)\\ t^{-1}xt\in E^*H(m)}} \tilde{\chi}((t^{-1}\delta xt)^n,s((t^{-1}\delta xt)^n)^{-1}).$$

Le premier travail consiste à déterminer $\Omega(x)$.

<u>Lemme 4.10</u> :

<u>Soit</u> r <u>un entier. On note</u> :

$$H_r = \left\{h(t)\ /\ val_E(t-\tfrac{1}{2})=2r\right\}.$$

<u>Alors, posant</u> $2k+1 = val_E(\bar{x}/x-1)\geqslant 1$, <u>on a</u> :

- <u>Si</u> $2k+1<m$: $\Omega(x) = H(m-(2k+1))/H(m) \cup \sigma H(m-(2k+1)/H(m)$

(<u>réunion disjointe</u>)

- <u>Si</u> $2k+1\geqslant m$: $\Omega(x) = \bigcup_{m-(2k+1)\leqslant 2r\leqslant 2k+1-m} (H(r+[\tfrac{1}{2}m]-k)\cap N)\ H_r/H(m)$

(<u>réunion disjointe</u>)

- En particulier, si $2k+1=m$ ou $m+1$:

$$\Omega(x) = H_0/H(m) = H(0)/H(m).$$

<u>Preuve</u> :

L'application : $G\longrightarrow H$

$$uh(t)\longmapsto h(t),\ u\in E^*,\ h(t)\in H,$$

passe au quotient en une bijection de $G/E^*H(m)$ sur $H/H(m)$, ce qui permet de calculer $\Omega(x)$ dans H. Par les formules du II.1, on a (avec $j=\bar{x}/x-1$) :

$$(a)\quad h(t)^{-1}xh(t) = h\left(\frac{t(1-t)j}{(1-Tr\ t)(1+tj)}\right)x(1+tj)$$

Cet élément appartient à $E^*H(m)$ si et seulement si :

(b) $val_E(t) + val_E(1-t) - val_E(1-Tr\ t) - val_E(1+tj)\geqslant m-(2k+1)$.

Or en prenant les déterminants dans (a), on obtient :

$$N(1+tj)\in 1 - Tr(\mathfrak{P}_E^m)\subset 1+\mathfrak{P},$$

donc $val_E(1+tj)=0$, et la condition (b) devient :

(c) $val_E t + val_E(1-t) - val_E(1-Tr\ t)\geqslant m-(2k+1)$.

Or $val_E(1-Tr\ t)\geqslant \inf(val_E t,\ val_E(1-t))$; la condition (c) impose donc :

(d) $\mathrm{Sup}\ (val_E t, val_E(1-t))\geqslant m-(2k+1)$.

<u>Si</u> $2k+1<m$, le lemme en résulte puisque $\sigma\ h(t) = h(1-t)$ (il suffit de considérer les déterminants modulo $\mathfrak{P}$ pour voir que la réunion est disjointe, car dét $\sigma = -1$).

On suppose à présent $2k+1 \geqslant m$. Alors les conditions $val_E tj \geqslant m$ et $val_E((1-t)j) \geqslant m$ sont équivalentes, et la condition (d) implique :

(e) $\inf(val_E t, val_E(1-t)) \geqslant m-(2k+1)$,

et en particulier :

$$val_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \geqslant m-(2k+1).$$

D'autre part, on déduit de la condition (c), en examinant tour à tour les cas $val_E t>0$, $val_E t<0$, $val_E t=0$, que $val_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \leqslant 2k+1-m$, d'où :

(f) $m-(2k+1) \leqslant val_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \leqslant 2k+1-m$.

Posons $2r = val_E(1-\mathrm{Tr}\ t)$, soit $r = val_F(1-\mathrm{Tr}\ t)$, et supposons que la condition (f) soit vérifiée : $m-(2k+1) \leqslant 2r \leqslant 2k+1-m$ (si $2k+1=m$ ou $m+1$, alors $r=0$ et on obtient aisément le résultat).

- si $r<0$, on déduit de : $\mathrm{Tr}\ \mathfrak{P}_E^i = \mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(i+1)]}$ qu'il existe $t' \in E$, de valuation $2r$, tel que $\mathrm{Tr}\ t' = \mathrm{Tr}\ t$. Alors $u=t-t'$ est de trace nulle, donc $h(u) \in N$ et $h(t)=h(u)h(t')$, avec $h(t') \in H_r$. Si $val_E t \geqslant 2r$, alors :

$$val_E(t) + val_E(1-t) - val_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \geqslant 2r \geqslant m-(2k+1),$$

donc $h(t) \in \Omega(x)$. Si $val_E t<2r$ (alors $val_E t = val_E u$ est nécessairement impaire) la condition (c) devient :

(g) $2\ val_E u - 2r \geqslant m-(2k+1)$,

ce qui équivaut à :

$$h(u) \in H\left(\left[\frac{m-(2k+1)+2r+1}{2}\right]\right) \cap N,$$

d'où le résultat.

- si $r>0$, alors $\mathrm{Tr}\ t \in 1+\mathfrak{P}^r = \mathrm{Tr}\ (\frac{1}{2}+\mathfrak{P}_E^{2r})$. Donc il existe $t' \in \frac{1}{2}+(\mathfrak{P}_E^{2r}-\mathfrak{P}_E^{2r+1})$ tel que $\mathrm{Tr}\ t = \mathrm{Tr}\ t'$, et on a $h(t)=h(u)h(t')$ avec $h(t') \in H_r$ et $h(u)=h(t-t') \in N$. Si $val_E t \geqslant 0$, la condition (c) est vérifiée. Si $val_E t<0$, la condition (c) devient (g), d'où le résultat.

- si $r=0$, il existe t' tel que $val_E(t'-\frac{1}{2})=0$ et $\mathrm{Tr}\ (\frac{1}{2}-t') = 1-\mathrm{Tr}\ t' = 1-\mathrm{Tr}\ t$ (remarquons au passage que $H_0=H(0)=\left\{ h(t)/t\in\mathcal{O}_E \text{ et } val_F(1-\mathrm{Tr}\ t)=0 \right\}$). On termine comme précédemment.

Le fait que la réunion soit disjointe découle de ce que :

$$h(x) \in h(y)H(m) \Longrightarrow (1-\mathrm{Tr}\ x) \in (1-\mathrm{Tr}\ y)(1+\mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(m+1)]}),$$

d'où en particulier val $(1-\mathrm{Tr}\ x)$ = val $(1-\mathrm{Tr}\ y)$. C.Q.F.D.

Lemme 4.11 :

a) Si $0 \leqslant i \leqslant m$, l'application $h(t) \longmapsto t$ fournit une bijection de $H(i)/H(m)$ sur $\mathfrak{P}_E^i/\mathfrak{P}_E^m$.

b) L'application $h(t) \longmapsto t$ fournit une bijection de $H(0)/H(m)$ sur $\mathcal{O}_E - (\frac{1}{2}+\mathfrak{P}_E)/\mathfrak{P}_E^m$.

c) Soit U_m un système de représentants dans $\mathcal{O}^*$ de $\mathcal{O}^*/1+\mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(m+1)]}$. Pour $2k+1 \geqslant m$ et $m-(2k+1) \leqslant 2r \leqslant 2k+1-m$, on note :

$$\Omega_r(x) = (H(r+[\tfrac{1}{2}m]-k)\cap N)\, H_r/H(m)$$

<u>et</u> $P_r(x)$ <u>un système de représentants de</u> $\mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(r+\frac{1}{2}m-k]}/\mathfrak{P}^{r+[\frac{1}{2}m]}$.
<u>Alors</u> $\{h(\delta\lambda)h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u)), \lambda\in P_r(x), u\in U_m\}$ <u>est un système de représentants de</u> $\Omega_r(x)$.

<u>Preuve</u> :

a) On a : $h(x)h(y) = h(x+y(1-\mathrm{Tr}\,x))$, d'où le résultat puisque val $(1-\mathrm{Tr}\,x) = 0$ si $x\in H(i), i\geq 0$.

b) Idem, en remarquant que $H(0) = \{h(t)/t\in\mathcal{O}_E$ et $1-\mathrm{Tr}\,t\in\mathcal{O}^*\}$
$= \{h(t)/t\in \mathcal{O}_E-(\tfrac{1}{2}+\mathfrak{P}_E)\}$.

c) Soit $h(t)\in\Omega(x)$, avec $\mathrm{val}_F(1-\mathrm{Tr}\,t) = r$. Alors $1-\mathrm{Tr}\,t = \text{dét}\,h(t)$ est déterminé modulo dét $H(m) = 1-\mathrm{Tr}\,\mathfrak{P}_E^m = 1+\mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(m+1)]}$, multiplicativement, donc la classe de $1-\mathrm{Tr}\,t$ est parfaitement déterminée dans $\mathfrak{P}^r-\mathfrak{P}^{r+1}/\mathfrak{P}^{r+[\frac{1}{2}(m+1)]}$, dont $\{(-\varpi)^r u, u\in U_m\}$ est un système de représentants. Pour tout $u\in U_m$, l'élément $h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u))$ appartient à H_r et a pour déterminant $(-\varpi)^r u$. Soit $u\in U_m$ tel que :

$$1-\mathrm{Tr}\,t \equiv (-\varpi)^r u\left[1+\mathfrak{P}^{[\frac{1}{2}(m+1)]}\right].$$

Alors il existe $h(y)\in H(m)$ tel que $h(t)$ et $h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u))h(y)$ aient même déterminant. Donc $t=z+\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u)+y(-\varpi)^r u$, pour un z de trace nulle, et $h(t)\in\Omega(x)$ implique $h(z)\in H(r+[\tfrac{1}{2}m]-k)\cap N$. On a $h(t)=h(z)h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u))h(y)$, donc $h(t)$ est congru à $h(z)h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u))$ modulo $H(m)$.

De plus, u étant fixé dans U_m, la condition :

$$h(z)h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u)) \in h(z')h(\tfrac{1}{2}(1-(-\varpi)^r u))H(m),$$

où z et z' sont de trace nulle, entraîne $z=z'+y(-\varpi)^r u$ pour un y dans $\mathfrak{P}_E^m$, soit $z\equiv z'\left[\mathfrak{P}_E^{m+2r}\right]$.

Enfin le noyau de la trace de E sur F est $F\delta$, et N est isomorphe à F par l'application : $1+(\sigma-1)\delta\lambda \longmapsto \lambda, \lambda\in F$. De plus :

$$H(2i)\cap N = H(2i+1)\cap N = N(i) = 1+(\sigma-1)\delta\mathfrak{P}^i.$$

On a donc :

$$H(r+[\tfrac{1}{2}m]-k)\cap N = N([\tfrac{1}{2}(r+[\tfrac{1}{2}m]-k)])$$
$$H(m+2r)\cap N = N(r+[\tfrac{1}{2}m]),$$ d'où le résultat.

Après ces préliminaires, passons au calcul proprement dit. Les propriétés indiquées dans les propositions I.2.1 et I.2.8 permettent d'obtenir :

$$\widetilde{t^{-1}gt}^n = \tilde{t}^{-1}\widetilde{\delta x}^n\tilde{t}$$
$$= (\bar{\delta},x)_{2,E}\,\tilde{t}^{-1}\tilde{\delta}^n\tilde{x}^n\tilde{t}$$
$$= (\bar{\delta},x)_{2,E}(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét}\,t)_F\,\tilde{\delta}^n\,\widetilde{t^{-1}xt}^n.$$

Soit, par le lemme I.2.9 :

$$((t^{-1}gt)^n, s(t^{-1}g^n t)^{-1}) = \gamma_g^{-1}\gamma_\delta\,\gamma_x(\bar{\delta},x)_{2,E}(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét}\,t)_F(\delta^n,s(\delta^n)^{-1}).$$
$$.(t^{-1}x^n t, s(t^{-1}x^n t)^{-1}).$$

Or la proposition I.2.8 équivaut à :

$$\gamma_{\delta}\gamma_{x} = (\bar{\delta},x)_{2,E}\,\alpha(\delta^{n},x^{n})\,\gamma_{\delta x}.$$

Calculons $\alpha(\delta^n,x^n)$:

on a : $\delta^{n} = \begin{pmatrix} \varpi^{\frac{1}{2}n} & 0 \\ 0 & \varpi^{\frac{1}{2}n} \end{pmatrix}$, et $x^{n} = \lambda^{n}\begin{pmatrix} 1+a & c \\ b & 1+d \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in F^{*}$,

val b = k, et a, c, d $\in \mathfrak{P}^{k+1}$, donc :

$$\alpha(\delta^{n},x^{n}) = \left(\frac{\varpi^{\frac{1}{2}n}b}{\varpi^{\frac{1}{2}n}},\ \frac{\varpi^{\frac{1}{2}n}b}{b}\right) = (b,\varpi^{\frac{1}{2}n})_{F}.$$

Il reste donc :

$((t^{-1}gt)^{n},s(t^{-1}g^{n}t)^{-1}) = (\varpi^{\frac{1}{2}n},b)_{F}(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét } t)_{F}(\delta^{n},s(\delta^{n})^{-1})(t^{-1}x^{n}t,s(t^{-1}x^{n}t)^{-1}).$

Remarquant que $s(t^{-1}x^{n}t)=1$ (Proposition II.2.1), la formule (1') devient :

(3) $\quad \Delta(g^{n})\,\Theta_{T}(g^{n},s(g^{n})^{-1}) = n(\varpi^{\frac{1}{2}n},b)_{F}\,\widetilde{\chi}(\delta^{n},s(\delta^{n})^{-1})\Delta(x)\,.$

$$.\sum_{t\in\Omega(x)}(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét } t)_{F}\,\widetilde{\chi}(t^{-1}x^{n}t,1).$$

On notera S(x) la somme $\displaystyle\sum_{t\in\Omega(x)}$ ..... figurant dans l'expression ci-dessus.

<u>Lemme 4.12</u> :

<u>Si</u> $2k+1<m$, <u>alors</u> :

$$S(x) = L(b(-\varpi)^{-k})\,\varepsilon\, q^{k}q^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\chi}(x^{n},1)+\widetilde{\chi}(\bar{x}^{n},1)).$$

<u>Preuve</u> :

Par les lemmes 4.10 et 4.11, on a :

$$S(x) = \sum_{t\in\mathfrak{P}_{E}^{m-(2k+1)}/\mathfrak{P}_{E}^{m}}\Big[(\varpi^{\frac{1}{2}n},1-\text{Tr } t)_{F}\,\widetilde{\chi}(h(t)^{-1}x^{n}h(t),1)+(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét}\,\sigma\, h(t))_{F}\,.\,.\,\widetilde{\chi}(h(t)^{-1}\bar{x}^{n}h(t),1)\Big]\,.$$

Dans ces conditions, $1-\text{Tr } t$ est une puissance n-ième, et dét $\sigma=-1$, d'où :

$(\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét }\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}$

D'autre part, posant $j = \bar{x}^{n}/x^{n} - 1$ (et non $\bar{x}/x - 1$ comme plus haut), d'où $\bar{j}=x^{n}/\bar{x}^{n} - 1$, on a (cf (a) dans la démonstration du lemme 4.10) :

$$h(t)^{-1}x^{n}h(t) = h\left(\frac{t(1-t)j}{(1-\text{Tr } t)(1+tj)}\right)x^{n}(1+tj).$$

Mais $h\left(\frac{t(1-t)j}{(1-\text{Tr } t)(1+tj)}\right)(1+tj)$ est de déterminant 1, d'où, avec les notations du lemme II.2.5 , et posant $\widetilde{\Theta}_{0}=\widetilde{\Theta}.(\tau\,\text{o}N)^{-1}$:

$$\widetilde{\chi}\left(h\left(\frac{t(1-t)j}{(1-\mathrm{Tr}\ t)(1+tj)}\right)(1+tj)\right)=\widetilde{\theta}_0(1+tj)\,\eta_0\left(\frac{t(1-t)j}{(1-\mathrm{Tr}\ t)(1+tj)}\right)$$

$$=\eta_0\left(\frac{N(t)j}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right),$$

après simplifications, en tenant compte du fait que η_0 est de conducteur 2m, et que $\widetilde{\theta}_0(1+y)=\eta_0(-y)$ si $y\in\mathfrak{p}_E^m$ (car $\widetilde{\chi}$ est trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$).
Il reste donc :

$$S(x)=\widetilde{\chi}(x^n,1)\left(\sum_{t\in\mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}/\mathfrak{p}_E^m}\eta_0\left(\frac{N(t)j}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right)\right)+(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\widetilde{\chi}(\bar{x}^n,1)\,.$$

$$\cdot\sum_{t\in\mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}/\mathfrak{p}_E^m}\eta_0\left(\frac{N(t)\bar{j}}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right)\Big).$$

Or η_0 est de conducteur 2m, et la condition $\mathrm{val}_E(jN(t)(1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1})\geqslant 2m$ équivaut à $\mathrm{val}_E t\geqslant m-k$. Soit $t\in\mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}$, avec $\mathrm{val}_E t<m-k$, et $u\in\mathfrak{p}_E^{m-k}$. On a :

$$\eta_0\left(\frac{N(t+u)j}{1-\mathrm{Tr}(t+u)}\right)=\eta_0\left(\frac{N(t)j}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right)\eta_0\left(\frac{j\mathrm{Tr}(u\bar{t}(1-\bar{t}))}{(1-\mathrm{Tr}\ t)^2}\right)\qquad\text{(après calcul).}$$

Posant $x^n=\lambda^n(1+a+b\delta)$ comme plus haut, on a :

$$j=\frac{\bar{x}^n-x^n}{x^n}=\frac{-2b\delta}{1+a+b\delta}\equiv-2b\,\delta\left[1+\mathfrak{p}_E^{2k+1}\right].$$

Puisque η_0 est de conducteur 2m, il est facile de voir que l'on peut remplacer j par $-2b\delta=f$ dans la sommation précédente, d'où :

$$\sum_{t\in\mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}/\mathfrak{p}_E^m}\eta_0\left(\frac{N(t)j}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right)=\sum_{t\in\mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}/\mathfrak{p}_E^{m-k}}\eta_0\left(\frac{fN(t)}{1-\mathrm{Tr}\ t}\right).$$

$$\cdot\sum_{u\in\mathfrak{p}_E^{m-k}/\mathfrak{p}_E^m}\eta_0\left(\frac{f\ \mathrm{Tr}(u\bar{t}(1-\bar{t}))}{(1-\mathrm{Tr}\ t)^2}\right).$$

Or l'application : $\lambda\longmapsto\eta_0(\delta\lambda)$ est un caractère de F^* de conducteur m, d'où :

$$(3)\qquad\sum_{\lambda\in\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^j}\eta_0(\delta\lambda)=0\ \text{si}\ i<m\leqslant j.$$

D'autre part, à t fixé, l'application :

$$\mathfrak{p}_E^{m-k} \longrightarrow \delta\, \mathfrak{p}_F^{k+\left[\frac{1}{2}(m-k+\mathrm{val}_E(t)+1)\right]}$$

$$u \longmapsto f\,\frac{\mathrm{Tr}(u\bar{t}(1-\bar{t}))}{(1-\mathrm{Tr}\ t)^2}\,,$$

est un homomorphisme surjectif.

On en déduit que si $k+\left[\frac{1}{2}(m-k+\mathrm{val}_E(t)+1)\right] < m$, alors la somme en u, à t fixé, est nulle. Or cette condition équivaut à $\mathrm{val}_E t < m-k-1$. Il reste donc :

$$\sum_{t\in \mathfrak{p}_E^{m-(2k+1)}/\mathfrak{p}_E^{m}} \eta_0\Big(\frac{N(t)j}{1-\mathrm{Tr}\ t}\Big) = q^k \sum_{t\in \mathfrak{p}_E^{m-k-1}/\mathfrak{p}_E^{m-k}} \eta_0\Big(f\,\frac{N(t)}{1-\mathrm{Tr}\ t}\Big).$$

On a : $\mathfrak{p}_E^{m-k-1} - \mathfrak{p}_E^{m-k} = \delta^{m-k-1}\mathcal{O}_E^{*} = \delta^{m-k-1}\mathcal{O}^{*}(1+\mathfrak{p}_E)$,

d'où : $N(\mathfrak{p}_E^{m-k-1} - \mathfrak{p}_E^{m-k}) = N(\delta)^{m-k-1}\mathcal{O}^{*2}(1+\mathfrak{p}_E)$,

et
$$\sum_{t\in \mathfrak{p}_E^{m-k-1}/\mathfrak{p}_E^{m-k}} \eta_0\Big(f\,\frac{N(t)}{1-\mathrm{Tr}\ t}\Big) = 1 + 2\sum_{v\in\mathcal{O}^{*2}} \eta_0(-2b\,\delta\,(-\varpi)^{m-k-1}v).$$

<u>Définition 4.13</u> :

<u>Soit</u> h <u>un élément de</u> E <u>de trace nulle, avec</u> $\mathrm{val}_E\ h = 2m-1$. <u>Soit</u> L <u>le caractère de</u> k^* <u>défini par</u> :

$L(y) = 1$ <u>si</u> $y \in k^{*2}$

$L(y) = -1$ <u>sinon</u>.

<u>On note</u> G(h) <u>la somme de Gauss</u> :

$$G(h) = \sum_{y\in k^*} L(y)\,\eta_0(hy).$$

<u>On a aussi</u> : $G(h) = 1 + 2\sum_{y\in k^{*2}} \eta_0(hy)$.

<u>De plus</u> : $G(h)^2 = L(-1)q = (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q$, <u>et si</u> h <u>et</u> h' <u>vérifient les conditions indiquées</u> :

$G(h) = G(h')$ <u>si</u> $hh'^{-1} \in \mathcal{O}^{*2}$

$G(h) = -G(h')$ <u>si</u> $hh'^{-1} \in \mathcal{O}^{*} - \mathcal{O}^{*2}$

<u>on pose</u> : $G(-2\,\delta\,(-\varpi)^{m-1}) = \varepsilon\, q^{\frac{1}{2}}$.

(Pour ces propriétés des sommes de Gauss, voir [W]).

On obtient donc :

$$\sum_{t\in \mathfrak{p}_E^{m-k-1}/\mathfrak{p}_E^{m-k}} \eta_0\Big(f\,\frac{N(t)}{1-\mathrm{Tr}\ t}\Big) = G(-2b\,\delta\,(-\varpi)^{m-k-1}).$$

D'où :

$$S(x) = q^k \tilde{\chi}(x^n,1)G(-2b\delta(-\varpi)^{m-k-1}) + (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}q^k \tilde{\chi}(\bar{x}^n,1)G(2b\delta(-\varpi)^{m-k-1}),$$

$$= q^k G(-2b\delta(-\varpi)^{m-k-1})(\tilde{\chi}(x^n,1)+\tilde{\chi}(\bar{x}^n,1)$$

$$= L(b(-\varpi)^{-k})\ q^k\ G(-2\delta(-\varpi)^{m-1})\ \left[\tilde{\chi}(x^n,1) + \tilde{\chi}(\bar{x}^n,1)\right] \quad \text{, C.Q.F.D.}$$

Corollaire 4.14 :

La formule (*) est vérifiée, lorsque n est pair, pour les éléments $g \in E^*$, de valuation impaire, et tels que $\Delta(g^n) > q^{-\frac{1}{2}m}$.

Preuve :

La formule (3) et le lemme 4.12 donnent :

$$\Delta(g^n)\Theta_T(g^n,s(g^n)^{-1}) = n(\varpi^{\frac{1}{2}n},b)L(b(-\varpi)^{-k})\,\varepsilon\,\tilde{\chi}(\delta^n,s(\delta^n)^{-1}).$$
$$\cdot\ \Delta(x)q^{k+\frac{1}{2}}\ (\tilde{\chi}(x^n,1) + \tilde{\chi}(\bar{x}^n,1)).$$

Or : $\Delta(x) = q^{-\frac{1}{2}(2k+1)}$,

et : $(\varpi^{\frac{1}{2}n},b) = ((-1)^k\varpi^k/b)^{\frac{1}{2}(q-1)} = L(b(-\varpi)^{-k})$.

Il reste donc :

$$\Delta(g^n)\Theta_T(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\,\varepsilon\,\tilde{\chi}(\delta^n,s(\delta^n)^{-1})(\tilde{\chi}(x^n,1) + \tilde{\chi}(x^{-n},1)),$$

d'où le résultat, par définition de χ, en comparant avec (2').

On suppose à présent $2k+1 \geq m$. Pour $m-(2k+1) \leq 2r \leq 2k+1-m$, on note $S_r(x)$ la somme :

$$S_r(x) = \sum_{t \in \Omega_r(x)} (\varpi^{\frac{1}{2}n},\text{dét } t)_F\ \tilde{\chi}(t^{-1}x^n t,1),$$

de sorte que $S(x)$ est la somme des $S_r(x)$.

Le point (e) de la démonstration du lemme 4.10 montre que, pour $h(t) \in \Omega(x)$, on a $1+tj \in 1+\mathfrak{P}_E^m$ (où $j=\bar{x}^n/x^n - 1$). On obtient donc, comme dans le lemme 4.12 :

$$S_r(x) = \tilde{\chi}(x^n,1) \sum_{h(t) \in \Omega_r(x)} (\varpi^{\frac{1}{2}n},1-\text{Tr } t)_F\ \eta_0\left(\frac{N(t)j}{1-\text{Tr } t}\right).$$

Grâce au lemme 4.11, on peut décomposer cette somme de la façon suivante :

$$S_r(x) = \tilde{\chi}(x^n,1) \sum_{u \in U_m} (\varpi^{\frac{1}{2}n},u)_F\ \eta_0\left(\frac{j(1-(-\varpi)^r u)^2}{4(-\varpi)^r u}\right) \sum_{z \in P_r(x)} \eta_0\left(\frac{-jz^2\varpi}{(-\varpi)^r u}\right).$$

Remarquant que $(\varpi^{\frac{1}{2}n},u)_F = u^{\frac{1}{2}(q-1)}$ (calculé modulo $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire dans k^*), on pose alors :

$$S_1(r) = \sum_{u\in U_m} L(u)\ \eta_0\left(\frac{j(1-(-\varpi)^r u)^2}{4(-\varpi)^r u}\right)$$

$$S_2(r) = \sum_{u\in U_m} \eta_0\left(\frac{j(1-(-\varpi)^r u)^2}{4(-\varpi)^r u}\right)$$

$$S_3(r,u) = \sum_{z\in P_r(x)} \eta_0\left(\frac{-jz^2\varpi}{(-\varpi)^r u}\right),\ \text{pour } u\in U_m.$$

<u>Proposition 4.15</u> :

a) $S_3(r,u) = q^{[\frac{1}{2}m]} q^{\frac{1}{2}(r+k-m+1)}$ <u>si</u> m-k+r <u>est impair</u>.

$S_3(r,u) = L(u)\, L(b(-\varpi)^{-k})\, q^{\frac{1}{2}}\, q^{[\frac{1}{2}m]} q^{\frac{1}{2}(k+r-m)}$ <u>si</u> m-k+r <u>est pair</u>.

b) <u>On a</u> $S_1(r) = S_1(-r)$, $S_2(r) = S_2(-r)$.

<u>Supposant</u> $r \geqslant 0$, <u>on a</u> :

- <u>Si</u> $m-k-r \leqslant 0$ <u>et</u> $m-k+r \leqslant 0$, <u>alors</u> $S_1(r) = 0$, <u>et</u>

$$S_2(r) = \eta_0(-\tfrac{1}{2}j)(q-1)q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-1}.$$

- <u>Si</u> $m-k-r \leqslant 0$ <u>et</u> $m-k+r = 1$, <u>alors</u> :

$$S_1(r) = L(b(-\varpi)^{-k})\ \varepsilon\ q^{\frac{1}{2}}\, q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-1},\ \underline{\text{et}}$$

$$S_2(r) = -q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-1}.$$

- <u>Si</u> $m-k-r \leqslant 0$ <u>et</u> $m-k+r \geqslant 2$, <u>alors</u> $S_1(r) = S_2(r) = 0$.

- <u>Si</u> $m-k-r > 0$ <u>et</u> $r > 0$, <u>alors</u> $S_1(r) = S_2(r) = 0$.

- <u>Si</u> m-k <u>est pair</u>, $m-k > 0$, <u>alors</u> :

$$S_1(0) = q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-\frac{1}{2}(m-k)}(1+(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(-j)),\ \underline{\text{et}}$$

$$S_2(0) = q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-\frac{1}{2}(m-k)}(1+\eta_0(-j)).$$

- <u>Si</u> m-k <u>est impair</u>, $m-k \geqslant 1$, <u>alors</u> :

$$S_1(0) = q^{[\frac{1}{2}(m+1)]-\frac{1}{2}(m-k+1)} q^{\frac{1}{2}}\, L(b(-\varpi)^{-k})\ \varepsilon\,(1+\eta_0(-j)),\ \underline{\text{et}}$$

$$S_2(0) = q^{\left[\frac{1}{2}(m+1)\right] - \frac{1}{2}(m-k+1)} q^{\frac{1}{2}} L(b(-\varpi)^{-k})\ \varepsilon\,(1+(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(-j)) \quad \text{(pour } m-k \neq 1\text{)}$$

<u>Preuve</u> :

a) Les inégalités que vérifie r permettent de remplacer j par $f = -2b\delta$ dans la somme ; on calcule alors cette somme par des moyens analogues à ceux employés dans la démonstration du lemme 4.12, en utilisant le point (3) et les propriétés indiquées en 4.13.

b) Les techniques sont les mêmes ; là encore, on remplace j par f, et on travaille par réductions successives. Le fait que $S_1(r) = S_1(-r)$, et $S_2(r) = S_2(-r)$, découle de ce que :

$$\frac{(1-(-\varpi)^r u)^2}{(-\varpi)^r u} = (-\varpi)^{-r} u^{-1} + (-\varpi)^r u - 2,$$

et l'on peut supposer que $U_m = U_m^{-1}$.

Seul le cas m-k=1, r=0 diffère un peu de la démonstration du lemme 4.12, c'est pourquoi je le traite ici :

On a :

$$S_1(0) = \eta_0(-\tfrac{1}{2}j) \sum_{u \in U_m} L(u)\ \eta_0(\tfrac{1}{4}ju)\eta_0(\tfrac{1}{4}ju^{-1})$$

$$= \eta_0(-\tfrac{1}{2}j) \sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{p}} u^{\frac{1}{2}(q-} \sum_{z \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\left[\frac{1}{2}(m+1)\right]}} \eta_0(\tfrac{1}{4}fu(1+z))\eta_0(\tfrac{1}{4}fu^{-1}(1+z)^{-1}).$$

Mais si m-k=1, on a val $z + k \geqslant m$, donc $\eta_0(\tfrac{1}{4}fuz)$ est trivial. Il reste :

$$S_1(0) = q^{\left[\frac{1}{2}(m+1)\right]-1} \eta_0(-\tfrac{1}{2}j) \sum_{u \in k^*} u^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(\tfrac{1}{4}fu)\eta_0(\tfrac{1}{4}fu^{-1}).$$

En remarquant que $u+u^{-1} = 2+u^{-1}(u-1)^2 = -2+u^{-1}(u+1)^2$, on s'aperçoit que l'équation $\lambda = u+u^{-1}+2$, $u \in k^*, \lambda \in k$, a une solution en u si et seulement si $\lambda(\lambda-4)$ est un carré dans k. De même, l'équation $\lambda = u+u^{-1}-2$ a une solution en u si et seulement si $\lambda(\lambda+4)$ est un carré dans k. De plus, ces équations admettent deux solutions distinctes en u si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 4$ pour la première, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$ pour la seconde. Enfin, si λ vérifie l'une des deux équations, on a $\lambda^{\frac{1}{2}(q-1)} = u^{\frac{1}{2}(q-1)}$, d'où :

$$\sum_{u \in k^*} u^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(\tfrac{1}{4}f(u+u^{-1})) = \eta_0(\tfrac{1}{2}f) + (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(-\tfrac{1}{2}f) + \sum_{\lambda(\lambda-4) \in k^{*2}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(\tfrac{1}{4}f(\lambda-2))$$

$$+ \sum_{\lambda(\lambda+4) \in k^{*2}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)} \eta_0(\tfrac{1}{4}f(\lambda+2)).$$

Or :

$$\sum_{\lambda(\lambda-4)\in k^{*2}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(\tfrac{1}{4}f\lambda) = \sum_{\lambda(\lambda-1)\in k^{*2}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(f\lambda)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\lambda\in k^*\\ \lambda\neq 1}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(f\lambda) + \sum_{\substack{\lambda\in k^*\\ \lambda\neq 1}} (\lambda-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(f\lambda)\Big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\substack{\lambda\in k^*\\ \lambda\neq 1}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(f\lambda) + \eta_0(f) \sum_{\substack{\lambda\in k^*\\ \lambda\neq -1}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(f\lambda)\Big)$$

$$= \tfrac{1}{2}\big((1+\eta_0(f))G(f) - \eta_0(f) - (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\big).$$

On obtient de même :

$$\sum_{\lambda(\lambda+4)\in k^{*2}} \lambda^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(\tfrac{1}{4}f\lambda) = \tfrac{1}{2}\big(G(f)(1+\eta_0(-f)) - (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(-f) - 1\big).$$

En regroupant les résultats, on trouve :

$$\sum_{u\in k^*} u^{\frac{1}{2}(q-1)}\eta_0(\tfrac{1}{4}f(u+u^{-1})) = G(f)\ (\eta_0(\tfrac{1}{2}f) + \eta_0(-\tfrac{1}{2}f)),$$

d'où le résultat puisque $\eta_0(\frac{1}{2}f) = \eta_0(\frac{1}{2}j)$.

<u>Corollaire 4.16</u> :

<u>La formule</u> (*) <u>est vérifiée pour les éléments</u> $g\in E^*$, <u>de valuation impaire, et tels que</u> $\Delta(g^n)\leqslant q^{-\frac{1}{2}m}$.

<u>Preuve</u> :

En regroupant les résultats précédents, on trouve dans tous les cas :

$$S(x) = L(b(-\bar{\omega})^{-k})\,\varepsilon\, q^{\frac{1}{2}}\, q^k(\tilde{\chi}(x^n,1) + \tilde{\chi}(\bar{x}^n,1)),$$

grâce aux faits suivants :

- lorsque $m-k$ est négatif ou nul, alors $2k+1\geqslant 2m$, donc $\eta_0(j)=1$, soit : $\tilde{\theta}(1+j) = \tilde{\theta}(\bar{x}^n/x^n) = 1$.

  On a ainsi $\tilde{\chi}(x^n,1) + \tilde{\chi}(\bar{x}^n,1) = 2\tilde{\chi}(x^n,1)$, et en calculant

$S(x) = \sum_r S_r(x)$, la somme des puissances entières de q apparaissant dans chaque $S_r(x)$ vaut $2q^k$.

- lorsque m-k est strictement positif, on fait apparaître le facteur :

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}(x^n,1)(1+\eta_0(-j)) &= \widetilde{\chi}(x^n,1)(1+\widetilde{\theta}(1+j)) \\ &= \widetilde{\chi}(x^n,1)(1+\widetilde{\chi}(\bar{x}^n,1)\,\widetilde{\chi}(x^n,1)^{-1}) \\ &= \widetilde{\chi}(x^n,1)+\widetilde{\chi}(\bar{x}^n,1).\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

e) La formule (*) pour les éléments hyperboliques réguliers.

D'après la remarque 2.4, la correspondance est déjà entièrement caractérisée. Il n'en est pas moins intéressant d'établir la formule (*) pour les éléments hyperboliques réguliers, d'autant que les propositions 3.18 et 3.26 rendent ce travail facile.

Soit z un élément hyperbolique régulier, qui est une puissance n-ième. Les propositions 3.18 et 3.26 montrent que la formule (*) est vérifiée si $\Delta(z) \geq 1$: on a alors $\Theta_{\widetilde{T}}(z,1)=0$, et $\Theta_T(h)=0$ pour tout h vérifiant $h^n=z$ car $\Delta(h) \geq 1$ également. Si $\Delta(z)=q^{-k}$ avec $k \geq 1$, la proposition I.3.3 affirme qu'il y a modulo $\mu_n(F)$ un seul élément h_0 vérifiant $h_0^n=z$ et $\Delta(h_0)=q^{-k}$; les autres éléments h tels que $h^n=z$ mais $h \notin \mu_n h_0$ vérifient $\Delta(h)=1$, d'où $\Theta_T(h)=0$. La formule (*) devient ainsi, en posant $g=h_0$ et $g^n=z$, et en rappelant que T est triviale sur $\mu_n(F)$:

$$(*)\quad \Theta_{\widetilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\,\Theta_T(g)$$

pour g^n hyperbolique régulier, et $\Delta(g^n)=\Delta(g)<1$.

L'invariance par conjugaison permet de supposer $g=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$ avec $a, b \in F^*$ et

$\mathrm{val}(1-b^n/a^n) = \mathrm{val}(1-b/a) = k \geq 1$. On pose $g_1 = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$. Si $\widetilde{R}$ est l'induite à $\widetilde{H'}$ de $\pi(\widetilde{\chi})$ et R l'induite à H' de χ, les propositions 3.18 et 3.26 nous donnent, grâce aux faits que $s(g^n)=s(g_1^n)=1$ et que le cocycle β est trivial sur $GL_2(\mathcal{O})$:

$$(1)\quad \Theta_{\widetilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\widetilde{R}((g^n,1)) + \sum_{r=1}^{k-1}\ \sum_{u\in \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \Big[\mathrm{Tr}\,\widetilde{R}(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix} g^n,1) + \mathrm{Tr}\,\widetilde{R}(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_1^n,1)\Big].$$

et :

$$(2)\quad \Theta_T(g) = \mathrm{Tr}\,R(g) + \sum_{r=1}^{k-1}\ \sum_{u\in \mathfrak{p}^{k-r+1}/\mathfrak{p}^{k+1}} \Big[\mathrm{Tr}\,R(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix} g) + \mathrm{Tr}\,R(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_1)\Big].$$

Les éléments intervenant dans la sommation (1) sont exactement les puissances n-ièmes des éléments de G intervenant dans la sommation (2), puisque :

$$\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix}1 & v\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$$

où $v = a^{n-1}/b^{n-1}\,(1 + b/a + b^2/a^2 + \ldots + b^{n-1}/a^{n-1})\,u$ appartient à $\mathcal{O}^*(n+\mathfrak{p}^k)u$, donc a même valuation que u.

Il suffit alors de montrer que pour $z = \begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g$ ou $\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_1$, avec $u \in \mathcal{O}$,

on a : $\mathrm{Tr}\,\tilde{R}(z^n,1) = n\,\mathrm{Tr}\,R(z)$, soit, en choisissant un système de représentants Ω de $H'/E^*H(m)$ contenu, comme z, dans K' (sur lequel le cocycle est trivial) et en utilisant le théorème II.2.7 :

$$\sum_{\substack{t\in\Omega\\ t^{-1}z^n t\,\in E^{*n}H(m)}} n\tilde{\chi}((t^{-1}zt)^n,1) = n \sum_{\substack{t\in\Omega\\ t^{-1}zt\,\in E^*H(m)}} \chi\,(t^{-1}zt).$$

Cette égalité est tout-à-fait évidente, par définition de $\tilde{\chi}$, à condition de montrer que pour tout $t \in \Omega$, les conditions $t^{-1}zt \in E^*H(m)$ et $t^{-1}z^nt \in E^{*n}H(m)$ sont équivalentes, et qu'elles entraînent $t^{-1}zt \in E_0H(m)$; or cela découle du lemme suivant :

<u>Lemme 4.17</u> :

a) <u>Si</u> z <u>est hyperbolique, et</u> $t \in K'$, <u>alors</u> $t^{-1}zt$ <u>appartient à</u> $E^*H(m)$ <u>si et seulement si</u> z <u>appartient à</u> $F^*A^*(m)$.

b) <u>Pour</u> $z = \begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, <u>alors</u> z <u>appartient à</u> $F^*A^*(m)$ <u>si et seulement si</u>

$\Delta(z) \leqslant q^{-[\frac{1}{2}(m+1)]}$ <u>et</u> $\mathrm{val}\,u \geqslant [\frac{1}{2}m] + 1$.

<u>Preuve</u> :

a) Si $t^{-1}zt$ appartient à $E^*H(m)$, il doit fixer L_0 et L_1 puisqu'il est hyperbolique (Lemme I.3.1). Or l'ensemble des points fixes dans l'arbre d'un élément hyperbolique, s'il est non vide, est tel que de tout point fixe est issu un chemin infini de pointsfixes (cf Lemme I.3.6). En particulier $t^{-1}zt$ doit fixer un rayon de la boule $B(L_0,L_1,[\frac{1}{2}m]+\frac{1}{2})$. Or H(m) fixe cette boule, et E^* yagit de telle sorte (Proposition I.3.2) qu'un élément de E^* fixant un rayon de la boule fixe la boule entière. Donc $t^{-1}zt$ doit fixer $B(L_0,L_1,[\frac{1}{2}m]+\frac{1}{2})$, c'est-à-dire appartenir à $F^*A^*(2[\frac{1}{2}m])$ qui est normalisé par K', d'où $z \in F^*A^*(2[\frac{1}{2}m])$, et le résultat si m est pair. Si m est impair, on obtient $z \in F^*A^*(m-1) \cap E^*H(m) = F^*(1+\mathfrak{p}_E^{m-1})H(m-1) \cap E^*H(m)$

$= F^*(1+\mathfrak{p}_E^{m-1})H(m)$ (car $E^* \cap H(m-1) = 1$).

Mais m-1 est pair, donc $1+\mathfrak{p}_E^{m-1} = (1+\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}(m-1)})(1+\mathfrak{p}_E^m)$ d'où le résultat.

b) Clair par l'écriture matricielle de $A^*(m)$ (cf Proposition II.1.1).

Corollaire 4.18 :

La formule (*) est vérifiée pour les éléments hyperboliques réguliers.

Remarque :

On pourrait utiliser les formules de caractère induit 3.18 et 3.26 pour calculer explicitement les caractères de T et $\widetilde{T}$. Ce travail me paraît inutile puisque P. Kutzkoa calculé les caractères des représentations supercuspidales de GL_2 ([Ko2]) et que la formule (*) permet d'en déduire immédiatement les caractères des représentations supercuspidales spécifiques de $\widetilde{G}$.

III.5. LA CORRESPONDANCE : SÉRIE NON RAMIFIÉE.

Soit E une extension quadratique séparable non ramifiée de F. On plonge E^* dans $GL_2(F)$ de sorte que E^* fixe le sommet standard L_0 de l'arbre (i.e. $E^* \subset F^*K$). Avec les notations et définitions de II.3, on peut énoncer le résultat essentiel :

Théorème 5.1 :

Soit $\widetilde{\theta}$ un caractère régulier de E^{*n}.

- Si $\widetilde{\theta}$ n'est pas exceptionnel, on note $\widetilde{T}$ la représentation irréductible spécifique supercuspidale $\widetilde{T}(\widetilde{\theta})$ de $\widetilde{G}$ qui lui est associée. On définit par $\theta(x) = \widetilde{\theta}(x^n)$, $x \in E^*$, un caractère régulier de E^*, et on note T la représentation irréductible supercuspidale T_θ de G associée à θ.
- Si $\widetilde{\theta}$ est exceptionnel, on note $\widetilde{\pi}$ l'une des deux représentations spécifiques irréductibles de $\widetilde{F^*K}$ qui lui sont associées, et $\widetilde{T}$ la représentation induite à $\widetilde{G}$ de $\widetilde{\pi}$. On définit un caractère χ de F^* par :

$$\begin{cases} \chi(x) = \widetilde{\theta}(g^n) \text{ si } x = N(g),\ g \in E^* \\ \frac{1}{2}n\, q^{\frac{1}{2}} \chi(-\varpi) = -\operatorname{Tr} \widetilde{\pi}\left(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\right). \end{cases}$$

On note T la représentation spéciale $\sigma(\chi|\ |^{\frac{1}{2}}, \chi|\ |^{-\frac{1}{2}})$ de G associée au caractère χ. (cf Remarque 2.3).

Alors $\widetilde{T}$ correspond à T, i.e. leurs caractères vérifient :

$$(*) \quad \Delta(g^n)\, \Theta_{\widetilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \sum_{h^n = g^n} \Delta(h)\, \Theta_T(h)$$

pour tout $g \in G$ tel que g^n soit régulier.

Corollaire 5.2 :

L'application $\tilde{T} \longmapsto T$ définit une injection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations spécifiques irréductibles supercuspidales de la série non ramifiée de $\tilde{G}$, dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de G. L'image de cette injection est formée des représentations irréductibles supercuspidales de la série non ramifiée de G de caractère central trivial sur $\mu_n(F)$, et, si n est pair, des représentations spéciales de G attachées aux caractères de F^* non triviaux sur $\mu_n(F)$ dont le carré est trivial sur $\mu_n(F)$.

Pour obtenir le corollaire, il suffit d'appliquer les théorèmes III.2.1, II.4.1 et II.4.2, et la proposition II.3.1.

Preuve du théorème:

Tout revient à prouver la formule (*), et pour cela on suivra, au moins dans le cas non exceptionnel, la même méthode que dans le cas ramifié (§ III.4). Pour plus de clarté, on prouvera la formule (*) successivement dans chacun des trois cas suivants :

PREMIER CAS : le conducteur relatif de $\tilde{\theta}$ est 2m ou 2m+1 avec $m \geq 1$.

DEUXIEME CAS : le conducteur relatif de $\tilde{\theta}$ est 1, et $\tilde{\theta}$ n'est pas exceptionnel.

TROISIEME CAS : $\tilde{\theta}$ est exceptionnel.

PREMIER CAS :

Il est très semblable au cas ramifié traité en détail en III.4, on se contentera donc de donner les grandes lignes de la démonstration. On utilisera systématiquement les notations de II.3 (Propositions 3.3 et 3.5).

a) Première réduction de la formule (*) pour les éléments elliptiques.

Soit g un élément elliptique de G tel que g^n soit régulier. Comme on l'a remarqué en III.2.d), la formule à démontrer devient :

$$(*)\quad \Delta(g^n)\,\theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1} = n\;\Delta(g)\,\theta_T(g).$$

L'usage des formules habituelles de caractère induit, puis de la proposition II.3.5 donne :

$$\Delta(g^n)\theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\Delta(g^n) \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m) \\ t^{-1}g^n t \in E^{*n}H(m)}} s(t^{-1}g^n t)^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}\,(t^{-1}g^n t),$$

tandis que :

$$n\,\Delta(g)\,\Theta_T(g) = n\,\Delta(g) \sum_{\substack{t \in G/E^*H(m) \\ t^{-1}gt \in E^*\,H(m)}} \mathrm{Tr}\,\pi_\theta\,(t^{-1}gt).$$

L'idée est de comparer terme à terme ces deux expressions, d'où l'intérêt du lemme suivant (où E_0 désigne le sous-groupe $F^*(1+\mathfrak{P}_E)$ de E^*) :

<u>Lemme 5.3</u> :

a) <u>On a</u> $s(x^n)=1$ <u>pour tout</u> x <u>de</u> $E^*H(m)$ <u>si</u> n <u>est impair, pour tout</u> x <u>de</u> $E_0H(m)$ <u>si</u> n <u>est pair</u>.

b) <u>On note encore</u> $\tilde\theta$ <u>(resp.</u> θ <u>) l'unique prolongement de</u> $\tilde\theta$ <u>(resp.</u> θ <u>) à</u> $E^{*n}H(m)$ <u>(resp.</u> $E^*H(m)$<u>) si le conducteur relatif de</u> $\tilde\theta$ <u>est</u> $2m$, <u>à</u> $E^{*n}H(m+1)$ <u>(resp.</u> $E^*H(m+1)$<u>) si le conducteur relatif de</u> $\tilde\theta$ <u>est</u> $2m+1$. <u>Alors</u> $\tilde\theta(x^n)=\theta(x)$ <u>pour tout</u> x <u>de</u> $E^*H(m)$ <u>ou</u> $E^*H(m+1)$ <u>(suivant la parité du conducteur relatif de</u> $\tilde\theta$).

c) <u>On a</u> $\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde\theta}(x^n) = \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(x)$ <u>pour tout</u> x <u>de</u> $E^*H(m)$ <u>vérifiant</u> $\Delta(x) = \Delta(x^n)$.

<u>Preuve</u> :

a) Voir la preuve de la proposition II.2.1.

b) Clair par unicité du prolongement, car $\tilde\theta$ est trivial sur les commutateurs de $E^*H(m)$.

c) Si le conducteur relatif de $\tilde\theta$ est pair, l'égalité annoncée n'est autre que b). Si le conducteur relatif de $\tilde\theta$ est impair, on a par la proposition II.3.3 :

$$\mathrm{Tr}\,\pi_\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in E_0(H(m)-H(m+1)) \\ q\,\theta(x) \text{ si } x \in E_0H(m+1) \\ -\theta(x) \text{ si } x \in E^*-E_0. \end{cases}$$

On a les mêmes formules pour $\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde\theta}(x)$, $x \in E^{*n}H(m)$, en remplaçant θ par $\tilde\theta$. En particulier, les éléments de $H(m+1)$ agissent sur l'espace de π_θ (resp. $\pi_{\tilde\theta}$) par le caractère θ (resp. $\tilde\theta$). Grâce à b), on en déduit l'égalité annoncée pour $x \in E_0H(m+1)$, et même pour tout $x \in E^*H(m+1)$ vérifiant $\Delta(x) = \Delta(x^n)$ (cette condition assure que $x \in (E^*-E_0)H(m+1)$ entraîne $x^n \in (E^*-E_0)H(m+1)$; cf Proposition I.3.3).

L'égalité est vérifiée pour les éléments de $E_0(H(m)-H(m+1))$, car leurs puissances n-ièmes appartiennent encore à $E_0(H(m)-H(m+1))$ (on montre comme dans la proposition II.1.4.c) que pour $u \in E_0$ et $h(x) \in H(m)-H(m+1)$, on a $(uh(x))^n = vh(z)$ où $v \in E_0$ et $z \in nx+\mathfrak{P}_E^{m+1}$). Il reste à la prouver pour les éléments de $(E^*-E_0)H(m)$ dont la puissance n-ième n'a qu'un point fixe dans l'arbre. Or :

<u>Soit</u> $u \in E^*-E_0$, <u>et</u> $h(x) \in H(m)$. <u>Il existe</u> $h(y) \in H(m)$ <u>tel que</u> $h(y)uh(x)h(y)^{-1}$ <u>appartienne à</u> $E^*H(m+1)$ (cf Lemme 4.8).

L'application $x \longmapsto x^n$ respectant la conjugaison, on a le résultat voulu.

C.Q.F.D.

Notons : $\Omega(g,m) = \{ t \in G/E^*H(m) \ / \ t^{-1}gt \in E^*H(m)\}$

et $\widetilde{\Omega}(g,m) = \{ t \in G/E^*H(m) \ / \ t^{-1}g^n t \in E^{*n}H(m)\}$.

Corollaire 5.4 :

Soit g *un élément elliptique de* G *tel que* g^n *soit régulier. Si* $\Omega(g,m) = \widetilde{\Omega}(g,m)$ *et si* n *est impair, ou bien* n *pair et* $\Delta(g) < 1$, *la formule* (*) *est vérifiée.*

Il s'agit maintenant de comparer $\Omega(g,m)$ et $\widetilde{\Omega}(g,m)$.

b) *Etude de l'intersection* $T \cap E^*H(m)$, T *tore elliptique séparable de* G.

Lemme 5.5:

Soit T *un tore elliptique séparable de* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $T \cap E^*H(m)$ *contient un élément n'ayant qu'un point fixe dans l'arbre.*

(ii) T *est conjugué de* E^* *par un élément de* $H(m)$.

(iii) T *est contenu dans* $E^*H(m)$.

Preuve:

Voir le lemme 4.8. On n'a pas besoin ici de supposer p impair, car pour tout $u \in E^* - E_0$, la valuation de $\bar{u}/u - 1$ est nulle.

Proposition 5.6 :

Soit T *un tore elliptique séparable de* G. *Alors* :

a) *Si* n *est impair, ou si* T *n'est pas isomorphe à* E^*, *on a* :

$$(T \cap E^*H(m))^n = T^n \cap E^{*n}H(m).$$

b) *Si* n *est pair et* T *isomorphe à* E^*, *alors* $(T \cap E^*H(m))^n = T^n \cap E^{*n}H(m)$ *si et seulement si* T *est contenu dans* $E^*H(m)$.

Si T *n'est pas contenu dans* $E^*H(m)$, *alors* $(T \cap E^*H(m))^n$ *est d'indice 2 dans* $T^n \cap E^{*n}H(m)$; *l'élement non trivial du quotient est représenté par* ζ^n, *où* ζ *est un élément de* $\mathcal{O}_E^*$ *fixe de trace nulle.*

Preuve :

Les raisonnements sont analogues à ceux du cas ramifié ; voir III.4.c).

Corollaire 5.7 :

a) Si n est impair, la formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g tel que g^n soit régulier.

b) Si n est pair, la formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g (tel que g^n soit régulier) non conjugué à un élément de δE_0 (i.e. n'agissant pas par une involution non triviale sur une sphère de rayon 1 de l'arbre).

Preuve :

Là encore, les raisonnements sont analogues à ceux du cas ramifié. Le seul cas où la formule (*) ne découle pas directement des résultats 5.3 à 5.6 (joints à ceux de I.3), est celui où n est pair et où g appartient (à conjugaison près) à E^* et vérifie $\Delta(g)=1$. Si g n'appartient pas à δE_0, alors $\bar{g}/g \notin -1+\mathfrak{P}_E$ et $\Delta(g^n) = \Delta(g) = 1$ par la proposition I.3.3. On a alors $\Omega(g,m) = \tilde{\Omega}(g,m) = \{1,\sigma\}$, et il faut montrer que :

$$s(g^n)^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(g^n) + s(\bar{g}^n)^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(\bar{g}^n) = \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(g) + \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(\bar{g}).$$

L'usage du lemme 5.3.c) nous ramène à prouver que $s(g^n) = s(\bar{g}^n) = 1$. C'est clair car g^n s'écrit $\lambda^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $\lambda \in F^*$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de $GL_2(\mathcal{O})$ ne fixant qu'un point de l'arbre ; donc val $c = 0$ et $s(g^n)=1$ par définition de s.

C.Q.F.D.

c) La formule (*) pour n pair, et g conjugué à un élément de $\delta(E_0-F^*)$.

A conjugaison près, on peut supposer $g=\delta x$ avec $x \in E_0-F^*$ (ce qui équivaut à g^n régulier). On a alors $\Delta(g)=1$, et $\Delta(g^n)= \Delta(x^n)=\Delta(x)=q^{-k}$ où k est un entier au moins égal à 1.

Lemme 5.8 :

Soit t un élément de G tel que $t^{-1}g^n t$ appartienne à $E^{*n}H(m)$. Alors $t^{-1}xt$ appartient à $E_0H(m)$ et on a :

$$(t^{-1}g^n t, s(t^{-1}g^n t)^{-1}) = (-1)^k\,(\delta^n, \text{dét } t)_F\,(\delta^n,1)\,(t^{-1}x^n t,1).$$

Preuve :

Il découle de b) que $t^{-1}xt$ appartient à $E_0H(m)$. L'utilisation des propositions I.2.1 et I.2.8 et du lemme I.2.9 donne :

$$(t^{-1}g^n t, s(t^{-1}g^n t)^{-1}) = \left[\gamma_g^{-1}\,\gamma_\delta\,\gamma_x(\delta,x)_{2,E}\right](\delta^n, \text{dét } t)_F\,(\delta^n, s(\delta^n)^{-1}).$$
$$.\,(t^{-1}x^n t, s(t^{-1}x^n t)^{-1}).$$

La partie entre crochets vaut $\alpha(\delta^n,x^n)^{-1} = (-1)^k$ (après calculs). De plus

δ^n est scalaire, donc $s(\delta^n)=1$, et le lemme 5.3.a) assure que $s(t^{-1}x^nt)$ vaut 1 également. C.Q.F.D.

Par la proposition 5.6 on a $\Omega(g,m) = \{1,\sigma\}$ donc :

$$\Delta(g)\Theta_T(g) = \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(g) + \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(\bar{g}).$$

D'autre part $\tilde{\Omega}(g,m) = \Omega(x,m)$; le lemme 5.8 montre alors que, <u>si</u> $\tilde{\theta}$ <u>est de conducteur relatif</u> $2m$, la formule (*) à démontrer équivaut à :

$$q^{-k}(-1)^k\tilde{\theta}(\delta^n)\sum_{t\in\Omega(x,m)}(\delta^n,\det t)_F\,\tilde{\theta}(t^{-1}x^nt) = \theta(g)+\theta(\bar{g}).$$

En revanche, <u>si</u> $\tilde{\theta}$ <u>est de conducteur relatif</u> $2m+1$ et si $t\in\Omega(x,m)$, on voit facilement (par b), le lemme 5.8 et la proposition II.3.3) que $t^{-1}xt\in E^*(H(m)-H(m+1))$ entraîne $\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(t^{-1}g^nt) = 0$, tandis que $t^{-1}xt\in E^*H(m+1)$ entraîne $\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(t^{-1}g^nt) = q\tilde{\theta}(t^{-1}g^nt)$. La formule (*) équivaut alors à :

$$q\,q^{-k}(-1)^k\tilde{\theta}(\delta^n)\sum_{\substack{t\in\Omega(x,m)\\ t^{-1}xt\in E^*H(m+1)}}(\delta^n,\det t)_F\,\tilde{\theta}(t^{-1}x^nt) = -\theta(g)-\theta(\bar{g}).$$

Or $E_0H(m+1)$ est distingué dans $E^*H(m)$, et comme on l'a remarqué plus haut, la condition $t^{-1}xt\in E^*H(m+1)$ équivaut à $t^{-1}xt\in E_0H(m+1)$; cette condition sur t est donc bien invariante à droite par $E^*H(m)$. D'autre part un élément t tel que $t^{-1}xt\in E^*H(m+1)$ a pour image dans $G/E^*H(m+1)$ un élément de $\Omega(x,m+1)$. Puisque $E^*H(m+1)$ est d'indice q^2 dans $E^*H(m)$, on pourra sommer sur les t de $\Omega(x,m+1)$, à condition de diviser ensuite par q^2. Finalement les deux formules ci-dessus peuvent se condenser en une seule : <u>soit</u> c <u>le conducteur relatif de</u> $\tilde{\theta}$, <u>et</u> $m' = [\frac{1}{2}(c+1)]$ (de sorte que $m'=m$ si $c=2m$, et $m'=m+1$ si $c=2m+1=2m'-1$) ; la formule (*) à démontrer équivaut à :

$$(*)\quad (-1)^k q^{c-2m'}q^{-k}\tilde{\theta}(\delta^n)\sum_{t\in\Omega(x,m')}(\delta^n,\det t)_F\,\tilde{\theta}(t^{-1}x^nt) = (-1)^c(\theta(g)+\theta(\bar{g})).$$

Pour établir cette formule, il faut tout d'abord déterminer $\Omega(x,m')$, ce que l'on fait de la même manière qu'en 4.d) :

<u>Lemme 5.9</u> :

<u>Soit</u> r <u>un entier. On note</u> $H_r = \left\{h(t)\ /\ \mathrm{val}_E(t-\frac{1}{2}) = r \text{ et } \mathrm{val}_F(1-\mathrm{Tr}\,t) = r\right\}$, <u>et</u> $N(r) = \left\{h(x\delta),\ x\in\mathfrak{P}^r\right\}$.

<u>Si</u> $k < m'$, <u>alors</u> $\Omega(x,m')$ <u>est réunion disjointe de</u> $H(m'-k)/H(m')$ <u>et de</u> $\sigma H(m'-k)/H(m')$.

Si $k \geqslant m'$, alors $\Omega(x,m')$ est réunion disjointe des $N\left(\left[\frac{1}{2}(m'-k+r+1)\right]\right) H_r \,/\, H(m')$, pour $m'-k \leqslant r \leqslant k-m'$.

Remarque :

En comparant les définitions de H_r en 4.10 et 5.8, on constate que dans le cas non ramifié on doit ajouter la condition $\mathrm{val}_F(1-\mathrm{Tr}\ t) = r$. Cette condition était obligatoirement vérifiée dans le cas ramifié (et p impair) car un élément elliptique ramifié x de valuation paire satisfaisait toujours à $\mathrm{val}_E x = 2\ \mathrm{val}_F \mathrm{Tr}\ x$.

Lemme 5.10 :

a) Pour $0 < i \leqslant m'$ l'application $h(t) \longmapsto t$ fournit une bijection de $H(i)/H(m')$ sur $\mathfrak{p}_E^i/\mathfrak{p}_E^{m'}$.

b) Soit $U_{m'}$ un système de représentants de $\mathfrak{o}^*/1+\mathfrak{p}^{m'}$, et $P_r(x)$ un système de représentants de $\mathfrak{p}^{[\frac{1}{2}(m'+r-k+1)]}/\mathfrak{p}^{m'+r}$. Pour $k \geqslant m'$ et $m'-k \leqslant r \leqslant k-m'$, on note $\Omega_r(x,m') = N\left(\left[\frac{1}{2}(m'-k+r+1)\right]\right) H_r/H(m')$. Alors

$$\left\{ h(\delta\lambda)\ h\left(\tfrac{1}{2}(1-\varpi^r u)\right),\ \lambda \in P_r(x),\ u \in U_{m'} \right\}$$

est un système de représentants de $\Omega_r(x,m')$.

Avant d'entamer le calcul, on remarque que la formule (*) est compatible avec la torsion de $\tilde{\theta}$ par un caractère $\tilde{\chi}$ de F^* (le caractère θ étant alors tordu par le caractère $x \longmapsto \tilde{\chi}(x^n)$ de F^*). Pour plus de clarté, on supposera désormais $\tilde{\theta}$ trivial sur $1+\mathfrak{p}_E^c$. Le prolongement de $\tilde{\theta}$ à $E^*H(m')$ est alors donné par : $\tilde{\theta}(h(y)) = \tilde{\theta}(1-y)$ si y appartient à $\mathfrak{p}_E^{m'}$.

Lemme 5.11:

a) On pose $j = (\bar{x}^n - x^n)/x^n$ et $\delta r = 2\,(\bar{x}^n - x^n)/\mathrm{Tr}\ x^n$. Alors $\mathrm{val}_E j = \mathrm{val}_E \delta r = k$, et $j \in \delta r + \mathfrak{p}_E^{2k}$.

b) Pour tout $h(t) \in \Omega(x,m')$, on a :

$$\tilde{\theta}(h(t)^{-1} x^n h(t)) = \tilde{\theta}(x^n)\,\tilde{\theta}(1-jN(t)(1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1}).$$

c) Si $k < m'$ et $h(t) \in H(m'-k)$, ou si $k \geqslant m'$ et $h(t) \in \Omega(x,m')$, on a :

$$\tilde{\theta}(1-jN(t)(1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1}) = \tilde{\theta}(1-\delta r\ N(t)(1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1}).$$

d) On pose pour $x \in \mathfrak{p}^{m'}$: $\eta(x) = \tilde{\theta}(1-\delta x)$. Alors η est un caractère de $\mathfrak{p}^{m'}$ de conducteur c.

Preuve :

a) car : $\frac{1}{2}j = \dfrac{\bar{x}^n - x^n}{\mathrm{Tr}\ x^n + x^n - \bar{x}^n}$

b) On a :

$$h(t)^{-1}x^n h(t) = h\left(\frac{t(1-t)j}{(1-\mathrm{Tr}\ t)(1+tj)}\right) x^n\ (1+tj).$$

Cet élément appartient à $E^*H(m')$ pour $h(t) \in \Omega(x,m')$. Appliquant $\tilde{\theta}(h(y)) = \tilde{\theta}(1-y)$ $(y \in \mathfrak{P}_E^{m'})$, il vient après calculs l'égalité annoncée.

c) Il suffit de vérifier que dans les cas annoncés, on a :

$$k + 2\ \mathrm{val}_E t - \mathrm{val}_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \geqslant m'$$

et $\quad 2k + 2\ \mathrm{val}_E t - \mathrm{val}_E(1-\mathrm{Tr}\ t) \geqslant c.$

d) On a pour $z \in \mathfrak{P}_E^{m'}$: $\tilde{\theta}\left(\dfrac{1+\bar{z}}{1+z}\right) = \tilde{\theta}(1+\bar{z}-z)$.

Or $z \longmapsto \dfrac{1+\bar{z}}{1+z}$ définit un homomorphisme de $\mathfrak{P}_E^{m'}/\mathfrak{P}_E^{c}$ sur $\mathrm{Ker}\ N \cap (1+\mathfrak{P}_E^{m'})\ /\ \mathrm{Ker}\ N \cap (1+\mathfrak{P}_E^{c})$,

et $z \longmapsto \bar{z}-z$ définit un homomorphisme de $\mathfrak{P}_E^{m'}/\mathfrak{P}_E^{c}$ sur $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \cap \mathfrak{P}_E^{m'}\ /\ \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \cap \mathfrak{P}_E^{c}$.
Puisque $\mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr} \cap \mathfrak{P}_E^{m'} = \delta\,\mathfrak{P}^{m'}$, le conducteur de η et le conducteur relatif de θ sont égaux. C.Q.F.D.

Pour établir (*), il nous faut calculer $S = \displaystyle\sum_{t \in \Omega(x,m')} (\delta^n, \mathrm{d\acute{e}t}\ t)_F\, \tilde{\theta}(t^{-1}x^n t)$.

Par les lemmes 5.9 et 5.10 on a, pour $t \in \Omega(x,m')$:

$$(\delta^n, \mathrm{d\acute{e}t}\ t)_F = \begin{cases} 1 & \text{si } k < m' \\ (-1)^r & \text{si } k \geqslant m' \text{ et } t \in \Omega_r(x,m'). \end{cases}$$

En appliquant les lemmes 5.10 et 5.11, on aboutit à :

$$S = \tilde{\theta}(x^n) \sum_{t \in \mathfrak{P}_E^{m'-k}/\mathfrak{P}_E^{m'}} \eta(f\ N(t)\ (1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1}) + \tilde{\theta}(\bar{x}^n) \sum_{t \in \mathfrak{P}_E^{m'-k}/\mathfrak{P}_E^{m'}} \eta(-f\ N(t)(1-\mathrm{Tr}\ t)^{-1}) \quad \text{si } k < m'$$

$$S = \tilde{\theta}(x^n) \sum_{r=m'-k}^{k-m'} (-1)^r \sum_{u \in U_{m'}} \eta\left(\frac{(1-\varpi^r u)^2 f}{4\varpi^r u}\right) \sum_{\lambda \in P_r(x)} \eta\left(\frac{-\lambda^2 \delta^2 f}{\varpi^r u}\right) \quad \text{si } k \geqslant m'.$$

Lemme 5.12 :

Soit η un caractère de F de conducteur $c \geq 2$ et $m' = \left[\frac{1}{2}(c+1)\right]$. On note L le caractère non trivial de $\mathcal{O}^*$ ou de k^* valant 1 sur les carrés, et si b est un élément de F de valuation c-1, on note G(b) la somme de Gauss :

$$G(b) = \sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{P}} L(u)\eta(bu) = \mathcal{E}(b)\, q^{\frac{1}{2}}, \text{ où } \mathcal{E}(b)^2 = L(-1).$$

a) Soit b un élément de F de valuation k avec $1 \leq k < m'$; la somme

$$S(k) = \sum_{t \in \mathfrak{P}_E^{m'-k}/\mathfrak{P}_E^{m'}} \eta\left(\frac{b\,N(t)}{1-\mathrm{Tr}\, t}\right) \text{ vaut :}$$

$S(k) = (-1)^k q^k$ si c est pair,

$S(k) = (-1)^{k+1} q^{k+1}$ si c est impair,

soit $S(k) = (-1)^{c-k} q^k q^{2m'-c}$.

b) Soit k et r des entiers avec $k \geq m'$ et $m'-k \leq r \leq k-m'$. Soit b un élément de F de valuation k-r. Alors la somme :

$$S(k,r,b) = \sum_{x \in \mathfrak{P}^{\left[\frac{1}{2}(m'+r-k+1)\right]}/\mathfrak{P}^{m'+r}} \eta(bx^2) \text{ vaut :}$$

$S(k,r,b) = q^{\frac{1}{2}(2m'-c)}\, q^{\frac{1}{2}(k+r)}$ si k+r-c est pair

$S(k,r,b) = q^{\frac{1}{2}(2m'-c)}\, q^{\frac{1}{2}(k+r-1)}\, G(b\varpi^{c-1-k+r})$ si k+r-c est impair.

c) Soit k et r comme en b), et soit b un élément de F de valuation k. Pour i=1 ou 2, on définit la somme :

$$S_i(r,b) = \sum_{u \in \mathcal{O}^*/1+\mathfrak{P}^{m'}} L(u)^i\, \eta(b\varpi^r u)\,\eta(b\varpi^{-r}u^{-1}).$$

Alors $S_i(r,b) = S_i(-r,b)$, et :

- si $r \geq \mathrm{Sup}(0, c-k, k-c+2)$, on a $S_i(r,b)=0$.
- si $k \geq c$ et $c-k \leq r \leq k-c$, on a $S_1(r,b)=0$ et $S_2(r,b)=(q-1)q^{m'-1}$.
- si $k \geq c$ et $r=k-c+1$, on a : $S_1(r,b)=q^{m'-1}G(b\varpi^{c-k-1})$ et $S_2(r,b)=-q^{m'-1}$.
- si $k < c$ et $0 < r < c-k$, on a : $S_i(r,b)=0$.
- si $c-k > 0$ est pair et $r=0$, on a :
$$S_i(0,b) = q^{\frac{1}{2}(2m'-c)}\, q^{\frac{1}{2}k}\, (\eta(2b) + L(-1)^i \eta(-2b)).$$
- si $c-k \geq 3$ est impair et $r=0$, on a :
$$S_i(0,b) = q^{\frac{1}{2}(2m'-c)} q^{\frac{1}{2}(k-1)}\, (\eta(2b)G(b\varpi^{c-k-1}) + L(-1)^i \eta(-2b)G(-b\varpi^{c-k-1})).$$
- si $c-k=1$ et $r=0$, on ne connait que S_1 :
$$S_1(0,b) = q^{m'-1}\, G(b)\, (\eta(-2b) + \eta(2b)).$$

<u>Preuve</u> :

a) On a $\eta\left(\dfrac{b\,N(t)}{1-\mathrm{Tr}\,t}\right) = 1$ si $\mathrm{val}_E t \geqslant r = \left[\frac{1}{2}(c-k+1)\right]$. On découpe alors la somme suivant les classes $t + \mathfrak{p}_E^r/\mathfrak{p}_E^{m'}$, $t \in \mathfrak{p}_E^{m'-k}/\mathfrak{p}_E^{m'}$, et on constate que la somme sur une telle classe est nulle si $\mathrm{val}_E t < c-k-r$, et vaut $q^{2(m'-r)}$ sinon. Si c-k est pair, il reste $S(k) = q^{2(m'-r)} = q^{2m'-c}\, q^k$. Si c-k est impair, il faut encore calculer $\sum_{t \in k_E} \eta(b'N(t))$, où $\mathrm{val}_F b' = c-1$, qui vaut $1 + (q-1) \sum_{\lambda \in k^*} \eta(b'\lambda) = -q$, d'où $S(k) = -q^{2m'-c}\, q^k$.

b) Le procédé est identique (on découpe la somme suivant les classes de $\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{m'+r}$, où $i = \left[\frac{1}{2}(c-k+r+1)\right]$).

c) C'est encore le même procédé dans la plupart des cas : on découpe la somme suivant les classes de $1+\mathfrak{p}^{c-k+r-1}/1+\mathfrak{p}^{m'}$, ou de $1+\mathfrak{p}^{c-k-r-1}/1+\mathfrak{p}^{m'}$ (selon les cas). Le cas particulier c-k=1, r=0, a été traité en détail en 4.15.

Il ne reste plus qu'à regrouper tous ces résultats :

- si $k < m'$, on a : $S = S(k)\,(\tilde{\theta}(x^n) + \tilde{\theta}(\bar{x}^n))$
$$= (-1)^c\,(-1)^k\, q^{2m'-c}\, q^k\,(\tilde{\theta}(x^n) + \tilde{\theta}(\bar{x}^n)),$$
et la formule (*) s'ensuit immédiatement.

- si $k \geqslant m'$, on écrit $S = \tilde{\theta}(x^n) \sum_{r=m'-k}^{k-m'} S_r$, avec :

$$S_r = (-1)^{k-c} q^{\frac{1}{2}(2m'-c)} q^{\frac{1}{2}(k+r)} \eta(-\tfrac{1}{2}f)\, S_2(r, \tfrac{1}{2}f) \text{ si } r+k-c \text{ est pair}$$
$$S_r = (-1)^{k-c-1} q^{\frac{1}{2}(2m'-c)} q^{\frac{1}{2}(k+r-1)} G(-\delta^2 f\, \varpi^{c-k-1})\, \eta(-\tfrac{1}{2}f)\, S_1(r, \tfrac{1}{2}f) \text{ si } r+k-c \text{ est impair.}$$

On fait alors usage du lemme 5.12.c) et on obtient :

- si $k \geqslant c$, les S_r sont nulles pour $|r| \geqslant k-c+2$ et pour $|r| \leqslant k-c$ et $r+k-c$ impair. Il reste :
$$S = \tilde{\theta}(x^n)\Big(S_{-k+c-1} + S_{k-c+1} + \sum_{i=0}^{k-c} S_{-(k-c)+2i}\Big).$$
On calcule les sommes intervenant en tenant compte de ce que :
  - on a $\eta(-\frac{1}{2}f) = 1$ et $\tilde{\theta}(x^n) = \tilde{\theta}(\bar{x}^n)$
  - $G(-f\delta^2\varpi^{c-k-1})\,G(f\varpi^{c-k-1}) = L(-\delta^2)L(-1)q = -q$ puisque δ^2 n'est pas un carré dans k^*.

- si $k < c$ les S_r sont toutes nulles si $r \neq 0$ et il reste $S = \tilde{\theta}(x^n) S_0$, que l'on calcule comme précédemment, en remarquant que :
$$\tilde{\theta}(x^n)(1 + \eta(-f)) = \tilde{\theta}(x^n) + \tilde{\theta}(x^{-n}).$$

Dans tous les cas, on obtient facilement la formule (*). Finalement :

Proposition 5.13 :

La formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g tel que g^n soit régulier.

d) La formule (*) pour les éléments hyperboliques réguliers.

Si g est un élément hyperbolique tel que $\Delta(g^n) \geqslant 1$, la formule (*) est trivialement vérifiée (0=0) par les propositions 3.17 et 3.19. Reste à étudier le cas où $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{val}(1-ba^{-1}) = \mathrm{val}(1-b^n a^{-n}) = k \geqslant 1$. La formule (*) devient alors : $\Theta_{\tilde{T}}(g^n,1) = n\,\Theta_T(g)$ et son établissement se réduit, exactement comme dans le cas ramifié (III.4.e)), aux points suivants :

- un élément hyperbolique appartient à $E^*H(m)$ si et seulement si il appartient à $F^*A^*(m)$, si et seulement si il fixe la boule $B(L_0,m)$ (cf Lemme 4.17).
- soit z un élément hyperbolique de F^*K tel que $\Delta(z) = q^{-k}$, et t un élément de K. Alors $t^{-1}z^n t$ appartient à $E^{*n}H(m)$ si et seulement si $t^{-1}zt$ appartient à $E^*H(m)$, si et seulement si $t^{-1}zt$ appartient à $F^*A^*(m)$ (en effet z et z^n ont mêmes points fixes).
- si z est un élément hyperbolique de $E^*H(m)$, alors $\mathrm{Tr}\,\tilde{\pi}(\tilde{\theta})(z^n,1) = n\,\mathrm{Tr}\,\pi_\theta(z)$ (en effet, cette égalité s'écrit $\mathrm{Tr}\,\pi_{\tilde{\theta}}(z^n) = \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(z)$; elle découle du lemme 5.3).

Proposition 5.14 :

La formule (*) est vérifiée pour tout élément hyperbolique g tel que g^n soit régulier.

DEUXIÈME CAS :

Soit $\tilde{\theta}$ un caractère de E^{*n} non exceptionnel, de conducteur relatif 1. La représentation $\tilde{\pi}(\tilde{\theta})$ est alors une représentation de $\widetilde{F^*K} = \tilde{H}$.

a) La formule (*) pour les éléments elliptiques réguliers.

Soit g un élément elliptique de G tel que g^n soit régulier. La formule (*) s'écrit pour g (avec les notations de la proposition II.3.6) :

$$\Delta(g^n) \sum_{\substack{t \in G/H \\ t^{-1}gt \in F^{*n}K}} s(t^{-1}g^n t)^{-1}\,\mathrm{Tr}\,\pi_{\theta'}(t^{-1}g^n t) = \Delta(g) \sum_{\substack{t \in G/H \\ t^{-1}gt \in F^*K}} \mathrm{Tr}\,\pi_\theta(t^{-1}gt).$$

La somme de droite est une somme sur les points fixes de g puisque $t^{-1}gt$ appartient à F^*K si et seulement si g fixe tL_0.

Lemme 5.15 :

Si g et g^n ont mêmes points fixes dans l'arbre, la formule (*) est vérifiée.

Preuve :

Si g et g^n ont mêmes points fixes, alors les conditions $t^{-1}g^n t \in F^{*n}K$ et $t^{-1}gt \in F^*K$ sont équivalentes. Il s'agit donc de montrer que si $t^{-1}gt$ appartient à F^*K, alors :

$$\mathrm{Tr}\ \pi_{\theta'} \otimes I\ (t^{-1}g^n t, s(t^{-1}g^n t)^{-1}) = \mathrm{Tr}\ \pi_\theta(t^{-1}gt).$$

En se reportant à la proposition II.3.3.3°), on constate que la trace de $\pi_{\theta'}$ (ou de π_θ) en un élément x de F^*K est donnée en fonction de $\widetilde{\theta}$ (ou de θ) par une expression qui dépend de l'image de x dans $GL_2(k)$; les quatre expressions possibles de cette trace correspondent (dans l'ordre de la proposition II.3.3) aux quatre cas suivants :

1- x fixe $S(L_0,1)$

2- x ne fixe aucun point de $S(L_0,1)$

3- x fixe un et un seul point de $S(L_0,1)$

4- x fixe exactement deux points de $S(L_0,1)$.

Ici, puisque g et g^n ont mêmes points fixes, les éléments $t^{-1}gt$ et $t^{-1}g^n t$ de $F^{*n}K$ relèvent tous deux du même cas (1, 2, 3 ou 4).

Dans le cas 1, $t^{-1}gt$ est conjugué dans H à un élément de $F^*A^*(1)$. On peut donc choisir t de sorte que $t^{-1}gt$ soit de la forme λu où $\lambda \in F^*$ et u est d'image scalaire dans $GL_2(k)$. Alors $s(\lambda^n u^n)=1$ et l'égalité de traces cherchée est évidemment vérifiée par définition de θ.

Dans le cas 2, on peut choisir t tel que l'élément $t^{-1}gt$ soit de la forme λ u où $\lambda \in F^*$ et $u \in ((\mathcal{O}_E^* - \mathcal{O}^*(1+\mathfrak{P}_E))A^*(1)$. Alors $s(\lambda^n u^n)=1$ (car u^n s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec val c = 0) et l'égalité est vérifiée.

Dans le cas 3, on choisit t tel que $t^{-1}gt \in \lambda \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{P} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{P} & 1+\mathfrak{P} \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in F^*$; alors $s(t^{-1}g^n t)=1$ et l'égalité est vérifiée.

Le cas 4 est impossible si g est elliptique (voir la forme de l'ensemble des points fixes de g en I.3).

C.Q.F.D.

Il faut maintenant traiter le cas des éléments elliptiques g tels que g et g^n n'aient pas les mêmes points fixes dans l'arbre. Alors (voir la proposition I.3.3) n est pair, et l'on est, à conjugaison près, dans l'un des deux cas suivants :

1- l'extension quadratique engendrée par g est <u>ramifiée</u>, conserve l'arête $\{L_0, L_1\}$ de l'arbre, et $g = \delta x$ où le carré de δ est une uniformisante de F et où x et g^n ont mêmes points fixes dans l'arbre.

Alors <u>la formule</u> (*) <u>est vérifiée</u>. En effet le membre de droite vaut 0 car g ne fixe aucun point de l'arbre, et le membre de gauche vaut 0, car si tL_0 est fixé par g^n, alors $t^{-1}g^n t = \delta^n(t^{-1}x^n t)$ appartient à F^*K mais n'appartient pas à $F^{*n}K$ ($\mathrm{val}_F\,\delta^n = \frac{1}{2}n$).

2- l'élément g appartient à E^* et s'écrit $g = \delta\lambda\, u$ où $\lambda \in F^*$, δ est un élément de $\mathcal{O}_E^*$ de trace nulle, et $u \in 1+\mathfrak{P}_E^k$ vérifie $\Delta(u) = \Delta(g^n) = q^{-k}$ avec $k \geqslant 1$. La valeur du caractère de $\tilde{T}$ en g^n s'exprime comme plus haut sous forme d'une somme portant sur les points fixes de g^n dans l'arbre, qui sont les points de la boule de centre L_0, rayon k, c'est-à-dire la réunion des sphères $S(L_0, i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant k$. Puisque E^* agit transitivement sur chacune de ces sphères (Proposition I.3.1), tout point de la sphère $S(L_0, i)$ est l'image de L_0 par un élément de G de la forme yt_i où $y \in E^*$ et $t_i = \begin{pmatrix} \varpi^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque y commute à g^n, on obtient :

$$\Delta(g^n)\,\Theta_T(g^n . s(g^n)^{-1}) = n\, q^{-k} \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Card}\, S(L_0, i)\; s(t_i^{-1} g^n t_i)^{-1}\; \mathrm{Tr}\, \Pi_{\theta'}(t_i^{-1} g^n t_i).$$

On calcule facilement $s(t_i^{-1} g^n t_i) = (-1)^{k+i}$.

Pour $i < k$, l'élément $t_i^{-1} g^n t_i$ fixe tous les points de $S(L_0, 1)$ et l'on obtient :

$$\mathrm{Tr}\, \Pi_{\theta'}(t_i^{-1} g^n t_i) = (q-1)\,\tilde{\theta}(\delta^n \lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } u^n)$$

(où l'on a posé $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 . \tilde{\tau} \circ \text{dét}$ comme dans la proposition II.3.3).

Pour $i = k$ l'élément $t_k^{-1} g^n t_k$ ne fixe qu'un point de $S(L_0, 1)$ (car les points de $S(L_0, k)$ sont extrémaux, au sens évident, dans l'ensemble des points fixes de g^n) et l'on obtient : $\mathrm{Tr}\, \Pi_{\theta'}(t_k^{-1} g^n t_k) = -\tilde{\theta}(\delta^n \lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } u^n)$.

Finalement :

$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = n\, q^{-k}\, \tilde{\theta}(\delta^n \lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } u^n)\,\Big((q-1)(-1)^k\big(1+(q+1)\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i q^{i-1}\big) - (q+1)q^{k-1}\Big)$$

$$= -2n\,\tilde{\theta}(\lambda^n \delta^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } u^n).$$

En revanche, g n'a qu'un point fixe dans l'arbre, donc :

$$\Delta(g)\,\Theta_T(g) = -\theta(\lambda)\,\tau(\text{dét } \delta\, u)\,(\theta_0(\delta) + \theta_0(\bar{\delta})),$$

où $\tau(x) = \tilde{\tau}(x^n)$, $x \in F^*$, et $\theta_0(x) = \tilde{\theta}_0(x^n)$, $x \in E^*$.

Or $\theta_0(\bar{\delta}/\delta) = \theta_0(-1) = \tilde{\theta}_0(1) = 1$ puisque n est pair.

Finalement $\Delta(g)\,\Theta_T(g) = -2\,\theta(\lambda\delta)\,\tau(\text{dét } u)$, et la formule(*) est vérifiée.

Proposition 5.16 :

La formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique g tel que g^n soit régulier.

b) La formule (*) pour les éléments hyperboliques réguliers.

Soit g un élément hyperbolique de G tel que g^n soit régulier. Le cas $\Delta(g^n) \geq 1$ étant trivial (car $\Theta_{\tilde{T}}(g^n) = \Theta_T(g) = 0$ par les propositions 3.17 et 3.19) on se ramène (comme dans le cas ramifié 4.e), ou dans le premier cas d) plus haut) à montrer que Tr $\Pi_{\theta'}(\lambda^n x^n) =$ Tr $\Pi_\theta(\lambda x)$ si $\lambda \in F^*$ et $x = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in 1+\mathfrak{p}^k$, $\Delta(x) = q^{-k}$ ($k \geq 1$) et $u \in \mathfrak{p}$. Les images de x et x^n dans $GL_2(k)$ sont alors triviales et les traces ci-dessus valent $(q-1)\,\tilde{\theta}(\lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } x^n) = (q-1)\,\theta(\lambda)\,\tau(\text{dét } x)$ par définition de θ et τ (où $\tilde{\tau}$ est un caractère de F^* tel que la restriction de $\tilde{\theta}$ à $1+\mathfrak{p}_E$ coïncide avec $\tilde{\tau} \circ N$, et $\tau(x) = \tilde{\tau}(x^n)$), d'où la formule (*). De plus, l'expression ci-dessus étant indépendante de u, il est très facile de calculer $\Theta_{\tilde{T}}(\lambda^n x^n, 1)$ à l'aide de la proposition 3.19 :

$$\Theta_{\tilde{T}}(\lambda^n x^n, 1) = n\,(q-1)\,\tilde{\theta}(\lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } x^n) \sum_{r=0}^{k-1} 2\,q^r$$
$$= 2\,n\,\tilde{\theta}(\lambda^n)\,\tilde{\tau}(\text{dét } x^n)(q^k-1).$$

Proposition 5.17 :

La formule (*) est vérifiée pour tout élément hyperbolique g tel que g^n soit régulier. Pour un tel g, on a de plus :

$$\Theta_{\tilde{T}}(g^n) = 0 \text{ si } \Delta(g^n) \geq 1$$
$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = 2n\,\tilde{\theta}(a^n)\,\tilde{\tau}(b^n/a^n)(1-\Delta(g^n)) \text{ si } \Delta(g^n) < 1,$$

où a^n et b^n sont les valeurs propres de g^n, et où $\tilde{\tau}$ est un caractère de F^* tel que la restriction de $\tilde{\theta}$ à $1+\mathfrak{p}_E$ coïncide avec $\tilde{\tau} \circ N$.

TROISIEME CAS :

On suppose n pair. Soit $\tilde{\theta}$ un caractère exceptionnel de E^{*n} (Définition II.3.2) et $\tilde{\pi}$ l'une des deux représentations spécifiques irréductibles de $\widetilde{F^*K}$ associées à $\tilde{\theta}$ par la proposition II.3.6.3°). Rappelons que si l'on fixe un caractère non trivial Ψ de k, la représentation $\tilde{\pi}$ est caractérisée par la racine carrée η de $(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\tilde{\theta}(\varpi^n)$ vérifiant :

$$\mathrm{Tr}\,\tilde{\pi}\left(\widetilde{\varpi^{\frac{1}{2}n}}\ \widetilde{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}\right) = \tfrac{1}{2}n\,\eta\,G(\Psi,1),$$

où $G(\Psi,a) = \sum_{\lambda\in k^*} L(\lambda)\,\Psi(\lambda a)$, pour $a\in\mathcal{O}$ (d'image a dans $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$). La définition de χ donnée au théorème 5.1 est donc convenable, puisque :

$$\begin{aligned}\chi(-\varpi)^2 &= q^{-1}\eta^2\,G(\Psi,1)^2\\ &= q^{-1}\eta^2\,(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}\,q\\ &= \tilde{\theta}(\varpi^n)\\ &= \chi(\varpi^2).\end{aligned}$$

Le caractère de la représentation spéciale $T = \sigma(\chi|\ |^{\frac{1}{2}},\chi|\ |^{-\frac{1}{2}})$ de G vaut ([JL] chapitre 7, Proposition 7.6 et Théorème 7.7) :

$$\Theta_T(g) = -\chi(N(g)) \text{ si g est elliptique régulier}$$

$$\Theta_T(g) = \Delta(g)^{-1}\,\chi(\text{dét } g)\,\left(|a/b|^{\frac{1}{2}} + |b/a|^{\frac{1}{2}} - \Delta(g)\right) \text{ si g est hyperbolique régulier, de valeurs propres a et b.}$$

Pour prouver la formule (*) de correspondance entre $\tilde{T}$ et T, nous allons voir que le choix de $\tilde{\pi}$, i.e. le choix de $\chi(-\varpi)$, n'intervient que dans le cas des éléments elliptiques ramifiés ne fixant aucun point de l'arbre, que nous traiterons en dernier.

a) <u>La formule</u> (*) <u>pour les éléments hyperboliques réguliers</u>.

On obtient exactement comme dans le deuxième cas (Proposition 5.17), en remplaçant n par $\frac{1}{2}$n, le :

<u>Lemme 5.18</u> :

Soit g un élément hyperbolique tel que g^n soit régulier. Alors :

$$\Theta_{\tilde{T}}(\widetilde{g^n}) = 0 \text{ si } \Delta(g^n) > 1$$

$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = n\,\tilde{\theta}(a^n)\,\tilde{\tau}(b^n/a^n)\,(1-\Delta(g^n)) \text{ si } \Delta(g^n) < 1,$$

où a^n et b^n sont les valeurs propres de g^n et où $\tilde{\tau}$ est un caractère de F^* tel que la restriction de $\tilde{\theta}$ à $1+\mathfrak{p}_E$ coïncide avec $\tilde{\tau}\circ N$.

Examinons maintenant le caractère de T :

- si $\Delta(g^n) \geqslant 1$, alors $\Delta(h) = \Delta(g^n)$ pour tout h tel que $h^n=g^n$ (Proposition I.3.3) et, si a^n et b^n sont les valeurs propres de g^n :

$$\sum_{h^n=g^n} \Delta(h)\,\Theta_T(n) = n \sum_{\gamma\in\mu_n} \chi(\gamma ab)\,\left(|a\gamma/b|^{\frac12} + |b\gamma/a|^{\frac12} - \Delta(g^n)\right).$$

La somme $\sum_{\gamma\in\mu_n} \chi(\gamma)$ est en facteur dans l'expression ci-dessus ; mais elle est nulle puisque χ est non trivial sur μ_n (Proposition II.3.1). La formule (*) est donc vérifiée.

- si $\Delta(g^n) < 1$, et si a^n et b^n sont les valeurs propres de g^n, on peut choisir a et b tels que $val(1-b/a) = val(1 - b^n/a^n)$; alors :

$$\begin{aligned}\sum_{h^n=g^n} \Delta(h)\,\Theta_T(h) &= n \sum_{\substack{\gamma\in\mu_n\\ \gamma\neq 1}} \chi(ab\gamma) + n\,\chi(ab)(2-\Delta(g^n))\\ &= n\,\chi(ab)(1-\Delta(g^n)).\end{aligned}$$

Pour obtenir la formule (*) il ne reste plus qu'à montrer que :

$$\chi(ab) = \widetilde{\theta}(a^n)\,\widetilde{\tau}(b^n/a^n).$$

Or : $\chi(ab) = \chi(a^2)\,\chi(b/a) = \widetilde{\theta}(a^n)\,\chi(b/a)$.

De plus b/a appartient à $1+\mathfrak{P}$, donc il existe $y\in\mathfrak{P}_E$ tel que $N(1+y) = b/a$. Alors $\chi(b/a) = \widetilde{\theta}((1+y)^n) = \widetilde{\tau}\circ N((1+y)^n) = \widetilde{\tau}(b^n/a^n)$ C.Q.F.D.

<u>Proposition 5.19</u> :

<u>La formule</u> (*) <u>est vérifiée pour tout élément hyperbolique</u> g <u>tel que</u> g^n <u>soit régulier</u>.

b) <u>La formule</u> (*) <u>pour les éléments elliptiques non ramifiés</u>.

Le caractère de T n'étant plus donné par la proposition 3.17, on ne peut plus employer la méthode de comparaison terme à terme pour établir (*), et il nous faut calculer explicitement le caractère de $\widetilde{T}$ en tout élément g^n elliptique régulier, à partir de l'expression :

$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\widetilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \tfrac12 n\,\Delta(g^n) \sum_{\substack{t\in G/F^*K\\ t^{-1}g^n t\in F^*K}} \mathrm{Tr}\,\pi(t^{-1}g^n t, s(t^{-1}g^n t)^{-1}),$$

où $\pi = \pi^1_{\theta}$, si $\eta = \eta_1$, dans les notations de la proposition II.3.6.

Si g est un élément elliptique non ramifié, on se ramène par conjugaison au cas où g appartient à E^*, et le raisonnement déjà fait dans le deuxième cas pour prouver 5.16 donne :

$$\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = \tfrac{1}{2}n\,\Delta(g^n)\sum_{i=0}^{k} \text{Card } S(L_0,i)\ \text{Tr}\,\pi(t_i^{-1}g^nt_i,s(t_i^{-1}g^nt_i)^{-1}),$$

où $t_i = \begin{pmatrix} \varpi^i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\Delta(g^n) = q^{-k}$.

- si $\Delta(g^n)=1$, on vérifie que $s(g^n)=1$ et l'on obtient $\text{Tr}\,\pi(g^n,1) = -\tilde{\theta}(g^n) - \tilde{\theta}(\bar{g}^n) = -2\chi(\text{dét } g)$, d'où la formule (*).

- si $\Delta(g^n) < 1$, alors :

$$\text{Tr}\,\pi(t_i^{-1}g^nt_i,1) = \begin{cases} (q-1)\,\tilde{\theta}(g^n) \text{ si } i<k \\ -\tilde{\theta}(g^n) \text{ si } i=k, \end{cases}$$

car $t_i^{-1}g^nt_i$ est scalaire modulo $A^*(1)$ si $i<k$, unipotent modulo $A^*(1)$ si $i=k$.

D'autre part : $s(t_i^{-1}g^nt_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } \Delta(g) = \Delta(g^n) \\ (-1)^{i+k} \text{ si } \Delta(g) = 1 \end{cases}$ (voir le deuxième cas).

On trouve donc :

- si $\Delta(g) = \Delta(g^n)$:

$$\begin{aligned}\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) &= \tfrac{1}{2}n\,\Delta(g^n)\,\tilde{\theta}(g^n)\,\Big((q-1)\big(1+(q+1)\sum_{i=1}^{k-1} q^{i-1}\big) - (q+1)q^{k-1}\Big) \\ &= -n\,\Delta(g^n)\,\tilde{\theta}(g^n) \\ &= -n\,\Delta(g)\,\chi(\text{dét } g),\end{aligned}$$

d'où la formule (*).

- si $\Delta(g) = 1$:

$$\begin{aligned}\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) &= \tfrac{1}{2}n\,\Delta(g^n)\,\tilde{\theta}(g^n)\,\Big((-1)^k(q-1)\big(1-(q+1)\sum_{i=1}^{k-1} (-q)^{i-1}\big) - (q+1)q^{k-1}\Big) \\ &= -n\,\tilde{\theta}(g^n) \\ &= -n\,\Delta(g)\,\chi(\text{dét } g),\end{aligned}$$

d'où la formule (*).

<u>Proposition 5.20</u> :

<u>La formule</u> (*) <u>est vérifiée pour tout élément elliptique non ramifié</u> g <u>tel que</u> g^n <u>soit régulier</u>.

c) La formule (*) pour les éléments elliptiques ramifiés.

Soit g un élément elliptique ramifié (régulier) de G ; on peut supposer (à conjugaison près) que le tore maximal T qu'il engendre dans G est contenu dans JK', i.e. conserve l'arête $\{L_0,L_1\}$ de l'arbre de G. Puisque n est pair, g^n a toujours des points fixes (Proposition I.3.3), et s'il est régulier l'ensemble de ses points fixes dans l'arbre est une boule $B(L_0,L_1,k+\frac12)$, $k\geqslant 0$, où $\Delta(g^n)=q^{-\frac12(2k+1)}$. Cette boule est la réunion pour $0\leqslant i\leqslant k$ des sphères $S(L_0,L_1,i+\frac12)$, contenant $L_{-i}=t_i^{-1}L_0$, et sur lesquelles T agit transitivement (Proposition I.3.2). On en déduit comme précédemment :

$$\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = \tfrac12 n\,\Delta(g^n)\sum_{i=0}^{k}\mathrm{Card}\ S(L_0,L_1,i+\tfrac12)\ \mathrm{Tr}\,\tilde\pi(t_ig^nt_i^{-1},s(t_ig^nt_i^{-1})^{-1}).$$

- si $\Delta(g)=\Delta(g^n)=q^{-\frac12(2k+1)}$, alors $g=\lambda x$ avec $\lambda\in F^*$ et $x\in 1+\mathfrak{P}_T^{2k+1}$. On a donc $g^n=\lambda^nx^n$ avec $x^n=\begin{pmatrix}1+a & b\\ c & 1+d\end{pmatrix}$, val $b=k+1$, val $c=k$, $a,d\in\mathfrak{P}^{k+1}$ (voir I.3 et la proposition II.1.1). Puisque $t_ig^nt_i^{-1}=\lambda^n\begin{pmatrix}1+a & b\varpi^i\\ c\varpi^{-i} & 1+d\end{pmatrix}$ et que $1+d$ est une puissance n-ième, on a $s(t_ig^nt_i^{-1})=1$. De plus l'image de $t_ix^nt_i^{-1}$ dans $GL_2(k)$ est 1 si $i<k$, ou un unipotent si $i=k$. Donc :

$$\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = \tfrac12 n\,\Delta(g^n)\tilde\theta(\lambda^n)\tilde\tau(\text{dét }x^n)\ \Big((q-1)\sum_{i=0}^{k-1}2q^i-2q^k\Big)$$

$$= -n\,\Delta(g^n)\tilde\theta(\lambda^n)\tilde\tau(\text{dét }x^n).$$

Mais dét x appartient à $1+\mathfrak{P}$, et peut donc s'écrire $N(y)$ avec $y\in 1+\mathfrak{P}_E$. Alors $\tilde\tau(\text{dét }x^n)=\tilde\tau(N(y^n))=\tilde\theta(y^n)=\chi(N(y))=\chi(\text{dét }x)$. Par ailleurs $\tilde\theta(\lambda^n)=\chi(\text{dét}\,\lambda)$. On a donc $\tilde\theta(\lambda^n)\tilde\tau(\text{dét }x^n)=\chi(\text{dét }g)$, et la formule (*) est vérifiée.

- si $\Delta(g)=1$, alors $g=\lambda\delta x$ où $\lambda\in F^*$, $x\in 1+\mathfrak{P}_T^{2k+1}$, et δ est une uniformisante de T de trace nulle ; on pose $\delta^2=\varpi\varepsilon$ où $\varepsilon\in\mathcal{O}^*$, la classe de ε modulo $\mathcal{O}^{*2}$ déterminant la classe de conjugaison de T. Dans ce cas $g^n=\lambda^n\varpi^{\frac12 n}\varepsilon^{\frac12 n}x^n$ appartient à $F^{*\frac12 n}K$ mais pas à $F^{*n}K$, et la valeur de $\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1})$ va dépendre effectivement du choix de $\tilde\pi$. Ecrivant matriciellement x^n comme ci-dessus, on constate que pour $i<k$, l'image de $t_ix^nt_i^{-1}$ dans $GL_2(k)$ est 1, donc la trace de $\tilde\pi(t_i^{-1}g^nt_i)$, proportionnelle à celle de $\tilde\pi(\varpi^{\frac12 n})$, est nulle. Il reste :

$$\Delta(g^n)\Theta_{\tilde{T}}(g^n,s(g^n)^{-1}) = \tfrac12 n\ \Delta(g^n)\ 2q^k\ \mathrm{Tr}\,\tilde\pi(t_kg^nt_k^{-1},s(t_kg^nt_k^{-1})^{-1})$$

$$= n\,q^{-\frac12}\tilde\theta(\lambda^n)\ \mathrm{Tr}\,\tilde\pi(\delta^nt_kx^nt_k^{-1},s(\delta^nt_kx^nt_k^{-1})^{-1}).$$

Or l'image de $t_kx^nt_k^{-1}$ dans $GL_2(k)$ est l'image de l'unipotent $\begin{pmatrix}1 & 0\\ c\varpi^{-k} & 1\end{pmatrix}$, donc :

$$\mathrm{Tr}\,\pi(\gamma^n t_k x^n t_k^{-1}, s(\gamma^n t_k x^n t_k^{-1})^{-1}) = \beta(\varpi^{\frac12 n}, \varepsilon^{\frac12 n})^{-1}\alpha(\varpi^{\frac12 n}\varepsilon^{\frac12 n}, t_k x^n t_k^{-1})^{-1}.$$
$$.\ \mathrm{Tr}\,\pi(\varepsilon^{\frac12 n}\varpi^{\frac12 n}\, t_k x^n t_k^{-1})$$
$$= (\varpi^{\frac12 n}, \varepsilon^{\frac12 n})_F(\varpi^{\frac12 n}\varepsilon^{\frac12 n}, c\varpi^{-k})_F\,\tilde\theta(\varepsilon^{\frac12 n}).$$
$$.\ \tilde\tau(\text{dét } x^n)\,\eta\, G(\psi, c\varpi^{-k})$$
$$= L(\varepsilon^{\frac12 n})\, L(c\varpi^{-k})\,\tilde\theta(\varepsilon^{\frac12 n})\,\tilde\tau(\text{dét } x^n)\,\eta.$$
$$.\ L(c\varpi^{-k})\, G(\psi, 1).$$

Finalement :

$$\Delta(g^n)\,\Theta_{\tilde T}(g^n, s(g^n)^{-1}) = n\,\tilde\theta(\lambda^n)L(\varepsilon^{\frac12 n})\,\tilde\theta(\varepsilon^{\frac12 n})\,\tilde\tau(\text{dét } x^n)\,\eta\, G(\psi,1)\, q^{-\frac12}.$$

Tandis que : $n\,\Delta(g)\,\Theta_T(g) = -n\,\chi(\text{dét } g)$.

L'égalité entre ces deux expressions sera donc assurée si on vérifie que :

$$\chi(\text{dét } g) = -\tilde\theta(\lambda^n)\, L(\varepsilon^{\frac12 n})\tilde\theta(\varepsilon^{\frac12 n})\tilde\tau(\text{dét } x^n)\eta\, G(\psi,1)\, q^{-\frac12}.$$

Or : $\chi(\text{dét } g) = \chi(\lambda^2)\,\chi(-\varpi)\,\chi(\varepsilon)\,\chi(\text{dét } x)$, et :

$\chi(\lambda^2) = \tilde\theta(\lambda^n)$

$\chi(\text{dét } x) = \chi(N(y)) = \tilde\theta(y^n) = \tilde\tau(N(y^n)) = \tilde\tau(\text{dét } x^n)$, si y est un élément de $1+\mathfrak{P}_E$ vérifiant $N(y) = \text{dét } x$.

$\chi(-\varpi) = -q^{-\frac12}\eta\, G(\psi,1)$.

Pour calculer $\chi(\varepsilon)$, on choisit $e \in \mathcal{O}_E^*$ vérifiant $N(e) = \varepsilon$. Alors :

$$\chi(\varepsilon) = \chi(N(e)) = \tilde\theta(e^n) = \tilde\theta((e^2)^{\frac12 n}) = \tilde\theta(N(e)^{\frac12 n})\,\tilde\theta((e/\bar e)^{\frac12 n}).$$

Puisque $\tilde\theta(N(e)^{\frac12 n}) = \tilde\theta(\varepsilon^{\frac12 n})$, il ne reste plus qu'à montrer que :

$$\tilde\theta((e/\bar e)^{\frac12 n}) = L(N(e)^{\frac12 n}),\ e \in \mathcal{O}_E^*.$$

Or $e/\bar e$ est de norme 1, donc :

$$\tilde\theta((e/\bar e)^{\frac12 n}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (e/\bar e)^{\frac12 n} \text{ appartient à } (\mathrm{Ker}\, N)^n \\ -1 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Mais $(e/\bar e)^{\frac12 n} \in (\mathrm{Ker}\, N)^n$ implique $e^{\frac12 n} = ay^n$, avec $a \in \mathcal{O}^*$, $y \in \mathcal{O}_E^*$, donc $N(e)^{\frac12 n} = a^2\, N(y)^n$ est un carré dans $\mathcal{O}^*$ et $L(N(e)^{\frac12 n}) = 1$. Réciproquement, si $N(e)$ est un carré dans $\mathcal{O}^*$, alors $e=ay$ où $a \in F^*$ et $N(y)=1$, donc $(e/\bar e)^{\frac12 n} = (y/\bar y)^{\frac12 n} = y^n$ appartient à $(\mathrm{Ker}\, N)^n$. On a bien l'égalité annoncée, et la formule (*) est vérifiée.

Proposition 5.21 :

La formule (*) est vérifiée pour tout élément elliptique ramifié g tel que g^n soit régulier.

d) Lien avec la représentation de Weil impaire.

Si $n=2$ (et p impair) et si $\widetilde{\theta}$ est un caractère de E^{*2} trivial sur $(\mathrm{Ker}\ N)^2$, mais non trivial sur Ker N, on vient de calculer entièrement le caractère de $\widetilde{T}$, où $\widetilde{T}$ est l'une des deux représentations spécifiques irréductibles de $\widetilde{G}$ associées à $\widetilde{\theta}$ (cf II.3) : si χ est défini comme au théorème 5.1, on a :

$$\Delta(g^2)\,\Theta_{\widetilde{T}}(g^2,s(g^2)) = \begin{cases} -2\,\Delta(g)\,\chi(\text{dét } g) \text{ si } g \text{ est elliptique, } g^2 \text{ régulier} \\ 0 \text{ si } g^2 \text{ est hyperbolique et } \Delta(g^2) \geqslant 1 \\ 2\,\chi(\text{dét } g)(1-\Delta(g)) \text{ si } g \text{ est hyperbolique régulier,} \\ \qquad\qquad \text{choisi tel que } \Delta(g)=\Delta(g^2) < 1 \end{cases}$$

La comparaison avec les résultats de Y. Flicker ([F] Lemme 2.2, convenablement rectifié) prouve alors que $\widetilde{T}$ est équivalente à la représentation de Weil impaire associée au caractère impair (i.e. $\chi(-1)=-1$) χ, dont la construction est rappelée en [F] 2.2.

Si n est pair (et p impair), les représentations supercuspidales de $\widetilde{G}$ associées aux caractères exceptionnels de l'extension quadratique non ramifiée de F (cf II.3) apparaissent ainsi comme les analogues, pour les revêtements métaplectiques d'ordre pair de $GL_2(F)$, des représentations de Weil impaires du revêtement métaplectique d'ordre 2 de $GL_2(F)$.

BIBLIOGRAPHIE

[BT] H. Bass et J. Tate : The Milnor ring of a global field ; in Algebraic K-théory II, Lecture Notes in Mathematics n°342, pp. 349-428, Corollaire 5.3, Springer-Verlag (1973)

[B] C. Blondel : Construction des représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur GL(2) ; thèse de 3° cycle, Université Paris VII (1981)

[Cl] H. Carayol : Représentations cuspidales du groupe linéaire ; Annales Scientifiques de l'E.N.S. Tome 17, pp.191-225 (1984)

[Cr] P. Cartier : Representations of p-adic groups : a survey ; Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 33, part 1, pp.111-155 (1979)

[CF] J. Cassels et A. Frohlich : Algebraic number theory ; Academic Press (1967)

[F] Y. Flicker : Automorphic forms on covering groups of GL(2) ; Inventiones Mathematicae 57, pp.119-182 (1980)

[G] P. Gérardin : Construction de séries discrètes p-adiques ; Lecture Notes in Mathematics n°462, Springer-Verlag (1975)

[GK] P. Gérardin et P. Kutzko : Facteurs locaux pour GL(2) ; Annales Scientifiques de l'E.N.S. Tome 13, pp.349-384 (1980)

[HC] Harish-Chandra : Harmonic Analysis on reductive p-adic groups, notes by C. van Dijk ; Lecture Notes in Mathematics n°162, Springer-Verlag (1970)

et : Harmonic Analysis on reductive p-adic groups, in Harmonic Analysis on homogeneous spaces ; Proccedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 26, pp.167-192 (1973)

[H] R. Howe : The Fourier transform and germs of characters (case of GL_n over a p-adic field) ; Math. Ann. 208, pp.305-322 (1974)

[J] H. Jacquet : Sur les représentations des groupes réductifs p-adiques ; Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série A, Tome 280, pp. 1271-1272 (1975)

[JL] H. Jacquet et R.P. Langlands : Automorphic Forms on GL(2) ; Lecture Notes in Mathematics n° 114, Springer-Verlag (1970)

[Ka] T. Kubota : 1- Topological covering of SL(2) over a local field ; J. Math. Soc. Japan, Vol. 19, n°1, pp.114-121 (1967)

et : 2- On automorphic functions and reciprocity law in a number field ; Lectures in Math. Kyoto University n°2, Kinokuniya book store C° (1969)

[Ko] P. Kutzko : 1- On the supercuspidal representations of GL(2), I et II ; American Journal of Mathematics Vol 100, pp.43-60 et pp.705-716 (1978)

et : 2- Characters of supercuspidal representations of GL_n ; preprint (1983)

[Man] D. Mandersheid : On the supercuspidal representations of SL_2 and its two-fold cover I et II ; Math. Ann. 266, pp.287-295 et 297-305 (1984)

[Mat] H. Matsumoto : Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés ; Annales Scientifiques del'E.N.S., 4° série, Tome 2, pp.1-62 (1969)

[Mi] J. Milnor : Introduction to algebraic K-theory ; Annals of Mathematics Studies n°72, Princeton University Press (1971)

[Mo] C. Moore : Group extensions of p-adic and adelic linear groups ; Publications mathématiques de l'I.H.E.S. n°35, pp.5-70 (1968)

BIBLIOGRAPHIE

[S] J.-P. Serre : 1- Arbres, amalgames et SL(2) ; S.M.F. Astérisques 46 (1977)

et : 2- Corps locaux ; Hermann, Paris (1968)

[St] R. Steinberg : Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques ; Colloque de Bruxelles (1962) pp.113-127

[T] J. Tits : Sur le groupe d'automorphismes d'un arbre ; in Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham, pp.188-211, Springer-Verlag (1970)

[W] A. Weil : La cyclotomie jadis et naguère ; Séminaire Bourbaki 1973/1974, n°452 (1974)