PIERRE BERTHELOT

Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique *p*

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 23 (1986), p. 7-32

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_23__R3_0>

Société Mathématique de France
2e Série, Mémoire n° 23, 1986, p. 7-32

GÉOMÉTRIE RIGIDE ET COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE CARACTÉRISTIQUE p

par Pierre BERTHELOT[(1)]

Depuis une vingtaine d'années, le problème de la définition d'une théorie cohomologique "p-adique" pour les variétés algébriques sur un corps k de caractéristique p a suscité de nombreux travaux. Les théories qui ont été introduites sont en gros de deux types :

a) La cohomologie de Dwork-Monsky-Washnitzer.

Dans diverses situations (hypersurfaces [6 ; 7 ; 8 ; 9] , revêtements d'Artin-Schreier [10], etc), Dwork a construit et étudié des groupes de cohomologie, munis d'une action de Frobenius, et dont la variation, dans le cas d'une famille de variétés, est contrôlée par une équation différentielle. L'idée de considérer des espaces de séries formelles "surconvergentes", qui est à la base de la théorie de Dwork, a été reprise par Monsky et Washnitzer [23 ; 24 ; 25], grâce à la notion d'algèbre "faiblement complète" : ils ont défini une théorie cohomologique pour les variétés affines et lisses, en prenant la cohomologie du complexe des formes différentielles à coefficients dans une algèbre faiblement complète relevant l'algèbre affine d'une telle variété. Mentionnons aussi, dans le même ordre d'idées, les travaux de Lubkin sur l'homologie p-adique [22], basés sur l'emploi de faisceaux d'algèbres faiblement complètes.

----

(1) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 305.

0037-9484/1986/02 7 26 /$ 4.60

b) La cohomologie cristalline.

Motivée notamment par l'étude de phénomènes spécifiques aux variétés de caractéristique p et reliés à la p-torsion de la cohomologie, la cohomologie cristalline fournit des modules de cohomologie sur l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (supposé parfait pour simplifier), grâce à une technique permettant d'intégrer les formes différentielles par rapport à certains paramètres : l'adjonction formelle de "puissances divisées" à un idéal. Pour les variétés propres et lisses, cette méthode fournit une théorie ayant les propriétés usuelles des théories cohomologiques [2 ; 4 ; 15] , et les phénomènes de torsion sont maintenant bien compris, grâce aux travaux d'Illusie, Raynaud et Ekedahl sur le complexe de De Rham-Witt [16 ; 17 ; 18 ; 19]. En dehors du cas propre et lisse, la théorie est par contre moins satisfaisante, d'une part parce qu'elle ne prend pas en compte les phénomènes de surconvergence dans le cas non propre, d'autre part parce qu'elle introduit une pathologie particulière aux algèbres à puissances divisées dans le cas singulier.

Nous allons ici expliquer comment ces deux théories peuvent s'interpréter du point de vue de la géométrie analytique rigide (à torsion près en ce qui concerne la cohomologie cristalline), et montrer comment cette interprétation mène à une généralisation commune, la "cohomologie rigide" ; celle-ci devrait fournir, pour les schémas séparés de type fini sur un corps de caractéristique $p>0$, une théorie ayant des propriétés analogues à celles de la cohomologie ℓ-adique, pour $\ell \neq p$, ou de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 (au sens de [14]). Dans le cadre de cet exposé, nous chercherons seulement à expliciter les idées qui permettent de définir une telle théorie ; les démonstrations seront publiées ailleurs [3 a]. Nous renvoyons d'autre part à [3] pour un exemple des liens étroits qui existent entre cette théorie et les travaux de Dwork, Sperber [29 ; 30], Adolphson-Sperber [1], Robba [28],... . Indiquons simplement ici le principe qui semble se dégager : les espaces de "cohomologie analytique" étudiés dans ces articles (munis de leur Frobenius et éventuellement du système différentiel qui contrôle la variation de ces espaces) s'interprètent comme certains faisceaux de cohomologie rigide associés à une famille de variétés en caractéristique p, faisceaux qui possèdent dans les cas considérés une structure naturelle de "F-cristal surconvergent" (cf. § 4) ; d'autre part, la "théorie duale" est l'étude de la cohomologie rigide à support propre dans la même situation.

Ce travail est le prolongement d'une réflexion menée avec Ogus sur la cohomologie cristalline "à isogénie près" [5], et c'est un plaisir de le remercier pour les nombreuses et stimulantes discussions que nous avons eues. En particulier, la notion de "cristal convergent" explicitée en 4.1 a été dégagée au cours d'un travail commun, et correspond à celle qu'étudie Ogus dans le cadre de la géométrie formelle dans [26].

On désignera par K un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur absolue non archimédienne ; on notera $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, supposé de caractéristique $p > 0$, et $\Gamma^* := |K^*| \otimes \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^*$, où $|K^*|$ est le groupe multiplicatif des valeurs absolues des éléments non nuls de K. Enfin, pour tout anneau topologique A, $A\{t_1,\ldots,t_n\}$ désignera l'anneau des séries formelles restreintes (i.e. dont les coefficients tendent vers 0) à coefficients dans A.

1. Tubes et cohomologie naïve.

Le lien entre les schémas sur k et les espaces analytiques rigides sur K s'établit par l'intermédiaire des schémas formels sur $\mathcal{V}$, grâce à la construction de la fibre générique d'un schéma formel, due à Raynaud [27].

(1.1) Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique. Rappelons que le $\mathcal{V}$-schéma formel affine $P := \mathrm{Spf}(A)$ a pour espace topologique sous jacent celui de $P_n := \mathrm{Spec}(A/p^nA)$ (qui est aussi celui de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$), et pour faisceau d'algèbres le faisceau $\mathcal{O}_P := \varprojlim_n \mathcal{O}_{P_n}$. Un $\mathcal{V}$-schéma formel est un espace topologique P muni d'un faisceau de $\mathcal{V}$-algèbres $\mathcal{O}_P$, possédant un recouvrement ouvert (P_i) tel que $(P_i, \mathcal{O}_P|_{P_i})$ soit un $\mathcal{V}$-schéma formel affine ; les morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels sont définis de manière évidente. Nous dirons que P est de type fini si P possède un recouvrement fini par des ouverts affines de la forme $\mathrm{Spf}(A_i)$, où A_i est quotient d'une algèbre $\mathcal{V}\{t_1,\ldots,t_n\}$, et que P est séparé si le morphisme diagonal est une immersion fermée ; tous les schémas et schémas formels considérés ici seront supposés séparés et de type fini. Si $u : P' \longrightarrow P$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels, on dira que u est lisse si sa réduction modulo p^n est un morphisme lisse pour tout n.

A tout $\mathcal{V}$-schéma formel P, on associe un espace analytique rigide $\tilde{P}$ sur K de la façon suivante.

(i) Si $P = \mathrm{Spf}(A)$, où A est quotient de $\mathcal{V}\{t_1,\ldots,t_n\}$, alors $A \otimes K$ est une algèbre de Tate, et on définit $\tilde{P}$ par $\tilde{P} := \mathrm{Sp}(A \otimes K)$. On observe que, si $x \in \mathrm{Sp}(A \otimes K)$ correspond à un idéal maximal $a \subset A \otimes K$, l'image R de A dans $K(x) := (A \otimes K)/a$ est une $\mathcal{V}$-algèbre finie, plate et intègre. Réciproquement, la donnée d'un tel quotient R de A détermine par tensorisation avec K un idéal maximal de $A \otimes K$.

(ii) On tire de cette remarque la description des points de $\tilde{P}$ dans le cas général : par définition, les points de $\tilde{P}$ sont les sous-schémas formels fermés de P, intègres, finis et plats sur $\mathcal{V}$. L'algèbre R d'un tel sous-schéma Z est une $\mathcal{V}$-algèbre locale, telle que $R/\mathfrak{m}R$ soit artinienne. En particulier, le support de Z est réduit à un point $z \in P$, qu'on appellera spécialisation du point $x \in \tilde{P}$ correspondant à Z.

(iii) Soit $sp : \tilde{P} \longrightarrow P$ l'application qui à $x \in \tilde{P}$ associe sa spécialisation. Si $U \subset P$ est un ouvert affine, $sp^{-1}(U)$ est en bijection avec $\tilde{U}$, et est donc muni d'une structure d'espace analytique rigide. On vérifie que, pour U variable, ces structures se recollent, ce qui munit $\tilde{P}$ d'une structure d'espace analytique rigide, fonctorielle en P. On dira que $\tilde{P}$ est la <u>fibre générique</u> de P ; l'application $sp : \tilde{P} \longrightarrow P$ s'étend de façon évidente en un morphisme d'espaces annelés, qu'on appellera <u>morphisme de spécialisation</u>.

<u>Exemples</u>. On suppose K algébriquement clos.

a) $P = \hat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$, l'espace affine formel sur $\mathcal{V}$. Alors $P = \mathrm{Spf}(\mathcal{V}\{t_1,\dots,t_n\})$, et $\tilde{P} = \mathrm{Sp}(K\{t_1,\dots,t_n\})$ est la boule unité fermée de $\mathbb{A}^{n\,an}$. Un point x de $\tilde{P}$ est défini par $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathcal{V}^n$, et sp(x) est le point $(\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_n)$ de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ sur k, les $\bar{\xi}_i$ étant les classes résiduelles des ξ_i.

b) $P = \hat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$, l'espace projectif formel sur $\mathcal{V}$. Alors $\tilde{P}$ est l'espace projectif analytique sur K. Un point $x \in \tilde{P}$ peut être représenté par des coordonnées homogènes $(\xi_0,\dots,\xi_n)$, où $\xi_i \in \mathcal{V}$, et l'un des ξ_i n'est pas dans $\mathfrak{m}$, et sp(x) est le point de coordonnées homogènes $(\bar{\xi}_0,\dots,\bar{\xi}_n)$ de $\mathbb{P}^n_k$.

(1.2) Supposons la valuation de K discrète, et k parfait ; soit $\mathcal{W}$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Soient X un k-schéma lisse (non nécessairement propre), et $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse relevant X ; on note $H^*_{cris}(X/\mathcal{W})$ la cohomologie cristalline de X, et $H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V})$ la cohomologie du complexe $\Omega^{\cdot}_{\mathfrak{X}/\mathcal{V}}$ des formes différentielles sur $\mathfrak{X}$ relativement à $\mathcal{V}$ (cohomologie de De Rham de $\mathfrak{X}/\mathcal{V}$). Si l'indice de ramification absolu e de $\mathcal{V}$ satisfait $e \leq p-1$, il existe un isomorphisme canonique [2] :

$$H^*_{cris}(X/\mathcal{W}) \otimes_{\mathcal{W}} \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V}) .$$

Si e est quelconque, un tel isomorphisme existe encore après tensorisation par K [5] :

$$H^*_{cris}(X/\mathcal{W}) \otimes_{\mathcal{W}} K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} K .$$

Comme la cohomologie des faisceaux Ω^i peut se calculer par la cohomologie de Čech en géométrie formelle comme en géométrie analytique, $H^*_{DR}(\mathfrak{X}/\mathcal{V})\otimes_{\mathcal{V}}K$ s'identifie à $H^*_{DR}(\tilde{\mathfrak{X}}/K) := H^*(\tilde{\mathfrak{X}},\Omega^{\cdot}_{\tilde{\mathfrak{X}}/K})$. On en déduit un isomorphisme canonique

$$H^*_{cris}(X/\mathcal{V})\otimes_{\mathcal{V}}K \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(\tilde{\mathfrak{X}}/K) ,$$

qui fournit une interprétation analytique de la cohomologie cristalline de X lorsque X est relevable sur $\mathcal{V}$.

En général, X n'est pas relevable, mais l'on peut souvent remplacer $\mathfrak{X}$ par un plongement $X \hookrightarrow P$, où P est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, et la considération d'un voisinage, en un sens convenable, de X dans P (par exemple, si X est quasi-projectif, on pourra prendre pour P un espace projectif sur $\mathcal{V}$) ; c'est aussi la méthode à utiliser lorsque X est une variété singulière. Il y a alors lieu de vérifier que la cohomologie de De Rham de ce voisinage ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du plongement choisi, ce qu'on déduit d'un résultat du type "lemme de Poincaré".

Notre point de départ va consister à remplacer les voisinages à puissances divisées utilisés en cohomologie cristalline par des voisinages analytiques. On revient aux hypothèses initiales sur K.

(1.3) <u>Définition</u>. *Soit* $X \hookrightarrow P$ *une* $\mathcal{V}$*-immersion d'un* k*-schéma* X *dans un* $\mathcal{V}$*-schéma formel* P. *Le tube de* X *dans* P *est l'ouvert admissible* $]X[_P$ *de* $\tilde{P}$ *défini par*

$$]X[_P = sp^{-1}(X) .$$

Supposons P affine, et X fermé dans P ; l'idéal de X dans P est donc engendré par $\mathfrak{m}$ et par des sections $f_1,\dots,f_r \in \Gamma(P,\mathcal{O}_P)$. On vérifie alors facilement

$$]X[_P = \{x \in \tilde{P} \mid \forall i\ ,\ |f_i(x)| < 1\} ,$$

les f_i étant considérées comme des fonctions holomorphes sur $\tilde{P}$ de manière évidente.

Il en résulte, sans hypothèse sur P, que $]X[_P$ est bien un ouvert admissible de $\tilde{P}$, et, lorsque P est affine, que $]X[_P$ est quasi-Stein au sens de Kiehl [21].

Pour $\lambda \in \Gamma^*$, $\lambda < 1$, on posera

$$]X[_{P,\lambda} = \{x \in \tilde{P} \mid \forall i\ ,\ |f_i(x)| < \lambda\}.$$

Si la valuation est discrète, et si $|a| < \lambda$ pour tout $a \in \mathfrak{m}$, $]X[_{P,\lambda}$ ne change pas si on remplace les f_i par un autre système d'équations de X dans P, ce qui permet d'étendre la définition de $]X[_{P,\lambda}$ au cas où P n'est pas affine ; lorsque la valuation n'est pas discrète, deux choix différents pour les équations de X dans P donnent des ouverts qui coïncident pour λ assez près de 1, si bien que le système inductif des $]X[_{P,\lambda}$, pour $\lambda \longrightarrow 1$, garde un sens, et peut être défini même si P n'est pas affine ; on dira que $]X[_{P,\lambda}$ est le <u>tube ouvert de rayon</u> λ <u>de</u> X <u>dans</u> P.

(1.4) L'importance des tubes du point de vue cohomologique provient de la propriété topologique suivante :

<u>Lemme</u> 1 : *Soient* X *un* k-*schéma,* $i : X \hookrightarrow P$, $i' : X \hookrightarrow P'$ *deux immersions de* X *dans des* $\mathcal{V}$-*schémas formels,* $u : P' \longrightarrow P$ *un morphisme lisse au voisinage de* X*, tel que* $u \circ i' = i$. *Alors le morphisme* $\tilde{u} : \tilde{P}' \longrightarrow \tilde{P}$ *défini par* u *induit une fibration en polydisques unité ouverts de* $]X[_{P'}$, *sur* $]X[_P$: *il existe un recouvrement affine* (P_i) *de* P, *et des isomorphismes commutant aux projections*

$$\begin{tikzcd}]X[_{P'} \cap \tilde{u}^{-1}(\tilde{P}_i) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\tilde{u}"'] & & (]X[_P \cap \tilde{P}_i) \times D(0,1^-)^n \arrow[dl] \\ &]X[_P \cap \tilde{P}_i & \end{tikzcd}$$

L'existence de primitives globales sur un disque ouvert et le théorème B [21] permettent d'en déduire :

Proposition 1 : *Sous les hypothèses du lemme* 1, *l'homomorphisme canonique*

$$\Omega^{\cdot}_{]X[_P} \longrightarrow \tilde{u}_* \, \Omega^{\cdot}_{]X[_{P'}}$$

induit un isomorphisme entre les faisceaux de cohomologie des deux complexes, et les $R^q\tilde{u}_* \, \Omega^i_{]X[_{P'}}$ *sont nuls pour* $q \geq 1$.

(1.5) La proposition précédente entraîne que l'homomorphisme

$$H^*(]X[_P \, , \, \Omega^{\cdot}_{]X[_P}) \longrightarrow H^*(]X[_{P'} \, , \, \Omega^{\cdot}_{]X[_{P'}})$$

induit par $\tilde{u}$ est un isomorphisme. Supposons alors qu'il existe un plongement $X \hookrightarrow P$ de X dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X. La méthode classique dite "du plongement diagonal" permet d'en déduire que $H^*(]X[_P \, , \, \Omega^{\cdot}_{]X[_P})$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix du plongement, et est un foncteur contravariant en X ; on définit alors la <u>cohomologie naïve</u> de X/K par

$$H^*_{\text{naïf}}(X/K) := H^*(]X[_P \, , \, \Omega^{\cdot}_{]X[_P}) \, .$$

De tels plongements $X \hookrightarrow P$ existent toujours localement, mais pas nécessairement globalement sur X ; la définition peut s'étendre au cas général, par exemple en choisissant un recouvrement ouvert (X_i) de X, et des plongements $X_i \hookrightarrow P_i$, et en procédant par une méthode du type "cohomologie de Čech" (cf. [14] pour une situation du même type).

En utilisant le plongement $X \hookrightarrow P$ pour calculer la cohomologie cristalline, on montre sans difficulté :

Proposition 2 : *Supposons que* $\mathcal{V}$ *soit un anneau de valuation discrète, et que* k *soit parfait. Alors il existe un homomorphisme canonique*

$$H^*_{\text{naïf}}(X/K) \longrightarrow H^*_{\text{cris}}(X/\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} K \, ,$$

et c'est un isomorphisme si X *est lisse sur* k.

Remarque : Lorsque X est propre et lisse, la cohomologie naïve conserve donc les bonnes propriétés de la cohomologie cristalline ; comme nous le verrons plus loin, il semble raisonnable de s'attendre à ce que ce soit encore une bonne cohomologie lorsque X est propre, mais éventuellement singulier. Par contre, la proposition 2 montre que ce n'est pas le cas si X n'est pas propre : par exemple, la cohomologie naïve de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ sur k est la cohomologie de De Rham du polydisque fermé $D(0,1^+)^n$, qui n'est pas de dimension finie sur K.

2. Surconvergence et cohomologie rigide.

Pour obtenir une définition raisonnable de la cohomologie dans le cas non propre, il faut introduire des conditions de surconvergence. Rappelons d'abord l'interprétation analytique de la cohomologie de Monsky-Washnitzer.

(2.1) Soient A_o une k-algèbre lisse, $X = \mathrm{Spec}(A_o)$. On peut alors trouver une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A telle que $A/\mathfrak{m}A \simeq A_o$ [11]. Choisissons une présentation $A \simeq \mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]/I$, ce qui fixe un plongement de $\mathfrak{X} := \mathrm{Spec}(A)$ dans l'espace affine $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$. On note $\mathfrak{X}_K$, $\mathbb{A}^n_K$ les fibres génériques de $\mathfrak{X}$ et $\mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$, et $\mathfrak{X}_K^{an}$, $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$ les espaces analytiques rigides associés [12 ; 13]. Soit d'autre part $\hat{\mathfrak{X}} := \mathrm{Spf}(\hat{A})$ le complété formel p-adique de $\mathfrak{X}$; sa fibre générique $U := \hat{\mathfrak{X}}^{\sim}$ s'identifie à l'intersection de $\mathfrak{X}_K^{an}$ avec la boule unité de $(\mathbb{A}^n_K)^{an}$, et la cohomologie naïve de X est la cohomologie de De Rham de l'algèbre $\hat{A}\otimes K$ des fonctions holomorphes sur U. Soit enfin $A^\dagger$ le complété faible de A pour la topologie p-adique ; la cohomologie de Monsky-Washnitzer de X est la cohomologie de De Rham de $A^\dagger\otimes K$. Du point de vue analytique, on peut décrire $A^\dagger\otimes K$ en introduisant, pour $\lambda < 1$, l'intersection U_λ de $\mathfrak{X}_K^{an}$ et de la boule fermée de centre 0 et de rayon $1/\lambda$; on obtient alors

$$A^{\dagger}\otimes K \simeq \varinjlim_{\lambda\to 1} \Gamma(U_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K^{an}}) ,$$

et on peut regarder $A^{\dagger}\otimes K$ comme l'algèbre des "germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{U}$".

Pour faire le lien avec la section précédente, on interprète U_λ en termes de tubes. On considère pour cela l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}} \supset \mathbb{A}^n_{\mathcal{V}}$, et l'adhérence $\bar{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$; si $\hat{\bar{\mathfrak{X}}}$ est le complété formel de $\bar{\mathfrak{X}}$, sa fibre générique $(\hat{\bar{\mathfrak{X}}})^{\sim}$ s'identifie à l'espace analytique $(\bar{\mathfrak{X}}_K)^{an}$ associé à la fibre générique de $\bar{\mathfrak{X}}$. Soient $\bar{X} := \bar{\mathfrak{X}} \times \mathrm{Spec}(k)$ la fibre spéciale de $\bar{\mathfrak{X}}$, et $Z := \bar{X} - X$ le "lieu à l'infini" de X. On peut alors écrire

$$U = \{x \in \bar{\mathfrak{X}}_K^{an} \mid sp(x) \in X\} ,$$

$$\bar{\mathfrak{X}}_K^{an} - U = \{x \in \bar{\mathfrak{X}}_K^{an} \mid sp(x) \in Z\} = \,]Z[_{\hat{\bar{\mathfrak{X}}}} .$$

Un exercice facile sur les coordonnées projectives montre que, pour $\lambda < 1$, on a encore

$$\bar{\mathfrak{X}}_K^{an} - U_\lambda = \,]Z[_{\hat{\bar{\mathfrak{X}}},\lambda} .$$

Soit j_λ l'inclusion de U_λ dans $\bar{\mathfrak{X}}_K^{an}$; d'après [21], les faisceaux cohérents sont acycliques pour $j_{\lambda *}$, ce qui entraîne grâce à la quasi-compacité de $\bar{\mathfrak{X}}_K^{an}$ la description suivante de la cohomologie de Monsky-Washnitzer $H^*_{MW}(X/K)$:

$$H^*_{MW}(X/K) \simeq H^*(\bar{\mathfrak{X}}_K^{an}, \varinjlim_{\lambda\to 1} j_{\lambda *} j_\lambda^* \Omega^{\cdot}_{\bar{\mathfrak{X}}_K^{an}}) .$$

(2.2) La discussion précédente suggère donc, dans le cas général, de modifier le complexe $\Omega^{\cdot}_{]X[_P}$ utilisé dans la première partie en considérant les formes différentielles "surconvergentes à l'infini".

Techniquement, il faut partir d'une situation un peu plus générale. On considère un k-schéma Y, un ouvert $X \hookrightarrow Y$, et une immersion fermée $Y \hookrightarrow P$ de Y dans un $\mathcal{V}$-schéma lisse ; soit $Z = Y - X$. On note comme précédemment $U_\lambda :=]Y[-]Z[_\lambda$ le complémentaire dans $]Y[$ du tube de rayon λ de Z dans P, et j_λ l'inclusion de U_λ dans $]Y[$. A tout faisceau E sur $]Y[$, on associe le faisceau $j^\dagger E$ des "germes de sections de E au voisinage de $]X[$" , défini par

$$j^\dagger E = \varinjlim_{\lambda \to 1} j_{\lambda *} j_\lambda^* E \quad .$$

Si $f_1, \ldots, f_r \in \Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ relèvent des équations de Z dans Y, on vérifie facilement qu'on peut, dans la définition de $j^\dagger E$, remplacer les ouverts U_λ par les ouverts U'_λ définis par

$$U'_\lambda := \{x \in]Y[\mid \exists\, i \text{ tel que } |f_i(x)| \geq \lambda\} .$$

Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & P' \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, hook] & P \end{tikzcd}$$

où X' est ouvert dans Y', et Y' fermé dans P', et tout faisceau E sur $]Y[_P$, on définit un homomorphisme canonique

$$j^\dagger E \longrightarrow \tilde{u}_* j'^\dagger \tilde{u}^{-1} E ,$$

où $j'^\dagger$ est défini sur $]Y'[_{P'}$, de la même manière que $j^\dagger$ sur $]Y[_P$. Appliqué au complexe $\Omega^\bullet_{]Y[_P}$, et composé avec les homomorphismes déduits de $\tilde{u}^{-1}(\Omega^\bullet_{]Y[_P}) \longrightarrow \Omega^\bullet_{]Y'[_{P'}} \longrightarrow I^\bullet$, où $I^\bullet$ est une résolution injective de $\Omega^\bullet_{]Y'[_{P'}}$, on en déduit un morphisme canonique dans la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de K-vectoriels sur $]Y[_P$:

(2.2.1) $$j^\dagger \Omega^\bullet_{]Y[_P} \longrightarrow \mathbb{R}\tilde{u}_* j'^\dagger \Omega^\bullet_{]Y'[_{P'}} ,$$

où $\mathbb{R}\tilde{u}_*$ désigne le foncteur dérivé total du foncteur image directe $\tilde{u}_*$.

On montre alors un énoncé d'indépendance par rapport à P :

(2.3) Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes, soient* $i : Y \hookrightarrow P$ *et* $i' : Y \hookrightarrow P'$ *deux immersions fermées de* Y *dans des* $\mathcal{V}$*-schémas formels, et* $u : P' \longrightarrow P$ *un morphisme tel que* $u \circ i' = i$. *Si* u *est lisse au voisinage de* X, *le morphisme canonique* (2.2.1) *est un isomorphisme.*

On peut alors définir la cohomologie rigide de (X,Y)/K en choisissant un plongement $Y \hookrightarrow P$, où P est un $\mathcal{V}$-schéma formel, lisse au voisinage de X, et en posant

$$H^*_{rig}(X \subset Y/K) := H^*(]Y[_P\,,\ j^\dagger \Omega^\cdot_{]Y[_P})\ ;$$

lorsqu'il n'existe pas de plongement global $Y \hookrightarrow P$, on peut encore utiliser une définition à la Čech. On obtient ainsi une théorie contravariante par rapport aux morphismes $v : Y' \longrightarrow Y$ tels que $v(X') \subset X$. On observera que, dans la situation de (2.1), on prend $Y = \overline{X}$, $P = \hat{\mathfrak{X}}$, si bien que P n'est pas lisse en général aux points de Z. Cela explique l'absence d'hypothèse sur u aux points de Z dans l'énoncé du théorème 1, dont la démonstration nécessite une étude "à la frontière" de]X[complétant la proposition 1.

Pour achever la définition de la cohomologie rigide de X, on prouve un énoncé d'indépendance par rapport à Y :

(2.4) Théorème 2. *Soient* $j : X \hookrightarrow Y$, $j' : X \hookrightarrow Y'$ *deux immersions ouvertes, et* $v : Y' \longrightarrow Y$ *un morphisme tel que* $j = v \circ j'$. *Si* v *est propre, l'homomorphisme canonique*

$$v^* : H^*_{rig}(X \subset Y/K) \longrightarrow H^*_{rig}(X \subset Y'/K)$$

est un isomorphisme.

Le principe de la démonstration consiste, en calculant v^* grâce à des plongements $Y \hookrightarrow P$, $Y' \hookrightarrow P'$ et à un morphisme $u : P' \longrightarrow P$ convenablement choisis, à effectuer une suite de dévissages, et de changements de base sur P induisant sur la fibre générique un recouvrement admissible d'un voisinage strict de $]X[_P$, de manière à se ramener au cas où il existe une section $P \longrightarrow P'$ prolongeant la section $X \longrightarrow P'x_P X$ définie par j' ; on montre alors qu'on peut remplacer Y' par l'image de Y dans P', et déduire le théorème 2 du théorème 1.

D'après un théorème de Nagata, tout k-schéma séparé de type fini X est isomorphe à un ouvert d'un k-schéma propre $\overline{X}$ (on dit que $\overline{X}$ est une compactification de X). La méthode du plongement diagonal permet encore de déduire du théorème 2 que $H^*_{rig}(X \subset \overline{X}/K)$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de la compactification $\overline{X}$, et est un foncteur contravariant en X. On définit donc la <u>cohomologie rigide de</u> X/K en posant

$$H^*_{rig}(X/K) := H^*_{rig}(X \subset \overline{X}/K) .$$

Si X est propre sur K, la cohomologie rigide coïncide donc avec la cohomologie naïve.

(2.5) <u>Remarques</u>.

a) Plaçons-nous dans la situation de (2.2). Nous appellerons <u>voisinage strict de</u> $]X[$ <u>dans</u> $]Y[$ un ouvert admissible $V \subset]Y[$ tel que :

(i) $]X[\subset V$;

(ii) pour tout affinoïde $W \subset]Y[$, il existe $\lambda < 1$ tel que $W \cap U_\lambda \subset W \cap V$.

On vérifie facilement que, si V est un voisinage strict de $]X[$, et E un faisceau abélien sur $]Y[$, $j^\dagger E$ est déterminé par la restriction de E à V, et que $H^*(]Y[, j^\dagger E) = H^*(V, j^\dagger E)$.

b) Supposons que X soit la réduction d'un $\mathcal{V}$-schéma lisse $\mathfrak{X}$, compactifiable sur $\mathcal{V}$ par $\mathfrak{X} \hookrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$; soient $\overline{X}$ la réduction de $\overline{\mathfrak{X}}$, et $\hat{\mathfrak{X}}$, $\hat{\overline{\mathfrak{X}}}$ les schémas formels associés à $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$. Alors, si $\mathfrak{X}_K^{an}$ est l'espace analytique associé à la fibre générique $\mathfrak{X}_K$ de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_K^{an}$ est un voisinage strict de $]X[_{\hat{\overline{\mathfrak{X}}}} = (\hat{\mathfrak{X}})^{\sim}$ dans $]\overline{X}[_{\hat{\overline{\mathfrak{X}}}} = (\hat{\overline{\mathfrak{X}}})^{\sim} = (\overline{\mathfrak{X}}_K)^{an}$. La remarque précédente permet alors de ne pas introduire $\overline{X}$ pour définir $H^*_{rig}(X/K)$, en faisant les constructions de (2.2) sur $\mathfrak{X}_K^{an}$ au lieu de $\overline{\mathfrak{X}}_K^{an}$: c'est en particulier la situation considérée en (2.1).

c) On peut donner une variante de cette construction pour une famille $f : X \longrightarrow S$ de k-schémas paramétrée par un k-schéma S. On suppose fixé un plongement $S \hookrightarrow T$ de S dans un $\mathcal{V}$-schéma formel, on choisit une compactification $X \hookrightarrow \overline{X}$ de X au-dessus de S, et un plongement $\overline{X} \hookrightarrow P$ de $\overline{X}$ dans un T-schéma formel, tel que $g : P \longrightarrow T$ soit lisse au voisinage de X. Les théorèmes 1 et 2 restent valables en prenant les complexes de formes différentielles relativement à $\tilde{T}$, et on définit la cohomologie rigide relative de X/T par

$$R^q f_{rig*}(X/T) := R^q \tilde{g}_*(j^{\dagger}\Omega^{\cdot}_{]\overline{X}[/\tilde{T}}) ,$$

où $\tilde{g}$ est le morphisme $]\overline{X}[_P \longrightarrow]S[_T$ défini par g.

3. Cohomologie rigide à support propre.

(3.1) Nous allons maintenant voir comment associer à tout k-schéma X séparé de type fini des groupes de cohomologie à support propre, notés $H^i_c(X)$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Il existe un homomorphisme canonique $H^i_c(X) \longrightarrow H^i_{rig}(X)$, et c'est un isomorphisme si X est propre.

(ii) $H^*_c(X)$ est un foncteur contravariant par rapport aux morphismes propres, covariant par rapport aux immersions ouvertes.

(iii) Si X est un ouvert de Y, et si $Z = Y-X$, il existe une suite exacte longue de cohomologie

$$\ldots \longrightarrow H^{q-1}_c(Z) \longrightarrow H^q_c(X) \longrightarrow H^q_c(Y) \longrightarrow H^q_c(Z) \longrightarrow H^{q+1}_c(X) \longrightarrow \ldots .$$

La démarche est la même que celle que nous avons suivie pour définir la cohomologie rigide.

(3.2) Soient donc Y un k-schéma, X un ouvert de Y, $Y \hookrightarrow P$ un plongement de Y dans un $\mathcal{V}$-schéma formel. On note $Z := Y-X$, et i l'inclusion du tube $]Z[_P$ dans le tube $]Y[_P$; rappelons que $]Z[_P$ est un ouvert admissible de $]Y[_P$. Pour tout faisceau abélien E sur $]Y[_P$, on pose

$$\underline{\Gamma}_{]X[}(E) := \mathrm{Ker}(E \longrightarrow i_*i^*E) .$$

Le foncteur $\underline{\Gamma}_{]X[}$ est exact à gauche, et possède des dérivés droits. Si E est cohérent sur $\mathcal{O}_{]Y[}$, il résulte du théorème B que $R^q i_*(i^*E) = 0$ pour $q \geq 1$, et le complexe dérivé total $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(E)$ est isomorphe, dans la catégorie dérivée, au complexe à deux termes

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow i_*i^*E \longrightarrow 0 .$$

On considère un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X' & \hookrightarrow & Y' & \hookrightarrow & P' \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ X & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & P \end{array}$$

comme en (2.2), mais on suppose maintenant que $v(Z') \subset Z$: c'est le cas notamment si w est propre et X' dense dans Y'. Cette condition entraîne l'existence, pour tout faisceau abélien E sur $]Y[_P$, d'un homomorphisme canonique

$$\underline{\Gamma}_{]X[}(E) \longrightarrow \tilde{u}_* \underline{\Gamma}_{]X'[}(\tilde{u}^{-1}E) .$$

On en déduit comme en (2.2) qu'il existe un morphisme canonique

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\Omega^{\cdot}_{]Y[}) \longrightarrow \mathbb{R}\tilde{u}_* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X'[}(\Omega^{\cdot}_{]Y'[}) . \tag{3.2.1}$$

(3.3) Théorème 3. *Soient* $i : Y \hookrightarrow P$, $i' : Y \hookrightarrow P'$ *deux immersions fermées de* Y *dans des* $\mathcal{V}$*-schémas formels,* $u : P' \longrightarrow P$ *un morphisme tel que* $u \circ i' = i$, X *un ouvert de* Y. *Si* u *est lisse au voisinage de* X, *le morphisme* (3.2.1) *est un isomorphisme.*

Si on suppose u lisse au voisinage de Y, le théorème 3 est une conséquence immédiate de la proposition 1, compte tenu de la description donnée plus haut de $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(E)$ pour E cohérent. Dans le cas général, on observe que le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\Omega^{\cdot}_{]Y[})$ et sa cohomologie ne dépendent que d'un voisinage strict de $]X[$ dans $]Y[$, et on se ramène au cas précédent en utilisant comme en (2.3) la structure d'un voisinage strict assez petit de $]X[$ dans $]Y[$.

Considérons alors les groupes de cohomologie

$$H^*_c(X \subset Y/K) := H^*(]Y[_P , \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\Omega^{\cdot}_{]Y[})) ,$$

où $Y \hookrightarrow P$ est un plongement de Y dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X ; ils sont indépendants de P, et fonctoriels par rapport aux morphismes $v : Y' \longrightarrow Y$

tels que $v(X') \subset X$, $v(Z') \subset Z$. Leur définition s'étend encore au cas où on ne dispose pas d'un plongement global $Y \longrightarrow P$.

<u>Théorème</u> 4. *Soient* $j : X \hookrightarrow Y$, $j' : X \hookrightarrow Y'$ *deux immersions ouvertes*, $v : Y' \longrightarrow Y$ *un morphisme tel que* $v \circ j' = j$, *et que* $v(Z') \subset Z$. *Si* v *est propre, l'homomorphisme canonique*

$$H_c^*(X \subset Y/K) \longrightarrow H_c^*(X \subset Y'/K)$$

est un isomorphisme.

Soit alors $\overline{X}$ une compactification de X. On définit la cohomologie rigide à support propre de X/K par

$$H_c^*(X/K) := H_c^*(X \subset \overline{X} / K) .$$

Le théorème 4 entraîne que $H_c^*(X/K)$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de $\overline{X}$, et est un foncteur contravariant en X par rapport aux morphismes propres. Les propriétés (i), (ii) et (iii) de (3.1) résultent facilement des définitions.

(3.4) <u>Remarques</u>.

a) La définition de la cohomologie rigide dans le cas propre et les propriétés (i), (ii), (iii) de (3.1) imposent pratiquement la définition de la cohomologie rigide à support propre. Inversement, le fait que celle-ci puisse effectivement être définie (i.e. soit indépendante des choix), est une indication importante que la définition proposée en (1.5) est raisonnable dans le cas propre. En particulier, en utilisant la proposition 2 et la finitude de la cohomologie cristalline dans le cas propre et lisse, on voit par récurrence sur la dimension que la cohomologie à support propre est de dimension finie pour tout schéma de dimension $\leq m$ si l'on dispose de la résolution des singularités en caractéristique p en dimension $\leq m$: c'est donc le cas actuellement si $m \leq 3$.

b) La cohomologie à support propre ne dépend que d'un voisinage strict de $]X[$ dans $]\overline{X}[$. Dans la situation de (2.5), b), on peut donc encore éviter d'introduire $\overline{X}$, et calculer sur $\mathfrak{X}_K^{an}$.

Exemple : $X = \mathbb{A}_k^1$. Le complémentaire de $]X[$ dans $\mathbb{A}_K^{1\,an}$ est la couronne C définie par $|x| > 1$; soit comme plus haut i son inclusion dans $\mathbb{A}_K^{1\,an}$. Le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\Omega^{\bullet}_{\mathbb{A}_K^{1\,an}})$ s'identifie au complexe simple associé au bicomplexe

$$\Omega^{\bullet}_{\mathbb{A}_K^{1\,an}} \longrightarrow i_*\Omega^{\bullet}_C .$$

Comme $\mathbb{A}_K^{1\,an}$ et C sont des variétés de Stein, la cohomologie de ce complexe se réduit à celle du complexe des sections globales. On a une inclusion $\Gamma(\mathbb{A}_K^{1\,an}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^{1\,an}}) \hookrightarrow \Gamma(C,\mathcal{O}_C)$, et le quotient M est l'espace des séries formelles de la forme

$$M = \{ \sum_{n\geq 1} a_n t^{-n} \mid \forall \eta < 1 , \ |a_n|\eta^n \longrightarrow 0 \ \text{ pour } n \to \infty\} .$$

Les groupes $H_c^q(\mathbb{A}_k^1/K)$ sont donc les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d} M\otimes\Omega^1 \longrightarrow 0 ,$$

où M est placé en degré 1. On obtient ainsi

$$H_c^0(\mathbb{A}_k^1/K) = H_c^1(\mathbb{A}_k^1/K) = 0 , \quad H_c^2(\mathbb{A}_k^1/K) = K ,$$

conformément à ce que donne la suite exacte (3.1) (iii) appliquée à $\mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$.

4. Cristaux surconvergents.

Nous avons considéré jusqu'ici le cas de la cohomologie "à coefficients constants", mais il est nécessaire, pour obtenir un formalisme cohomologique suffisamment souple, de disposer de faisceaux de coefficients plus généraux. Nous allons esquisser ici la construction de la catégorie des "F-cristaux surconvergents" sur X ; cette catégorie (ou une sous-catégorie pleine convenable) devrait jouer en cohomologie rigide un rôle analogue à celui de la catégorie des faisceaux lisses en cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq p$).

(4.1) Soient T un espace analytique rigide lisse, (M,∇) un $\mathcal{O}_T$-module (localement libre de type fini) muni d'une connexion intégrable. Supposons données des coordonnées locales $t_1,\ldots,t_n$ sur T, et soient $D_1,\ldots,D_n$ les dérivations correspondantes. On définit la "série de Taylor" de (M,∇) en $m \in M$ comme étant la série formelle

$$\sum_{\underline{q}} \frac{1}{\underline{q}!} \nabla(\underline{D})^{\underline{q}}(m) \otimes \underline{\tau}^{\underline{q}} \in M \otimes \mathcal{O}_T[[\tau_1,\ldots,\tau_n]] \ .$$

Il est bien connu [2 ; 4] que, si l'on regarde l'immersion diagonale $\Delta : T \hookrightarrow T \times T$, définie par l'idéal $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}_{T\times T}$, et que l'on identifie le faisceau $\mathcal{O}_{\hat{\Delta}} := \varprojlim_n \mathcal{O}_{T\times T}/\mathfrak{J}^n$ à $\mathcal{O}_T[[\tau_1,\ldots,\tau_n]]$ en posant $\tau_i := 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$, la série de Taylor définit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}$-linéaire

$$\varepsilon : \mathcal{O}_{\hat{\Delta}} \otimes_{\mathcal{O}_T} M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{\hat{\Delta}}$$

(où les produits tensoriels font intervenir les deux structures de $\mathcal{O}_T$-algèbre de $\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}$ fournies par les deux projections) grâce à la formule

$$\varepsilon(1 \otimes m) = \sum_{\underline{q}} \frac{1}{\underline{q}!} \nabla(\underline{D})^{\underline{q}}(m) \otimes \underline{\tau}^{\underline{q}} \ .$$

Soient X un k-schéma, $X \hookrightarrow P$ un plongement de X dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X, et (M,∇) un module à connexion intégrable sur l'espace analytique (lisse) $T =]X[_P$. Si Δ est l'image de T par l'application diagonale $\tilde{P} \longrightarrow \tilde{P} \times \tilde{P}$, on a

$$\Delta \subset]X[_{P^2} \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}}]X[_P \ .$$

On dira que la connexion ∇ est <u>convergente</u> (pour X) si ε est induit par un isomorphisme analytique (nécessairement unique) sur $]X[_{P^2}$:

$$\varepsilon : p_2^*(M) \xrightarrow{\sim} p_1^*(M) .$$

On vérifie facilement que la catégorie des $\mathcal{O}_{]X[}$-modules à connexion intégrable et convergente ne dépend, à équivalence canonique près, que de X, et est fonctorielle en X/K : par définition, c'est la catégorie des <u>cristaux convergents sur</u> X/K. La structure de cristal convergent fournit des informations sur la convergence en chaque point des solutions du système différentiel correspondant : pour tout $x \in]X[_P$, de spécialisation x_o, soit $B(x) =]x_o[$; alors (M,∇) a une base de solutions convergentes dans B(x).

Supposons donné un automorphisme $\sigma : K \longrightarrow K$ respectant la valuation, et induisant l'automorphisme de Frobenius sur k (supposé parfait). Par extension des scalaires par σ, puis fonctorialité par rapport au Frobenius relatif de X/k, on obtient un foncteur F_σ^* de la catégorie des cristaux convergents sur X dans elle-même. Un F-<u>cristal convergent sur</u> X/(K,σ) est un cristal convergent M, muni d'un isomorphisme de cristaux convergents $\Phi : F_\sigma^* M \xrightarrow{\sim} M$. On montre que tout "F-cristal" sur X définit un F-cristal convergent sur X (cf. [20,3.1], et [26] pour une étude de la notion de F-cristal convergent dans le cadre de la géométrie formelle).

(4.2) On peut reprendre les constructions du § 1 pour définir la cohomologie naïve (et donc la cohomologie rigide dans le cas propre) à coefficients dans un cristal convergent E. Dans le cas non propre, c'est par contre une notion trop faible pour pouvoir définir la cohomologie rigide, ou la cohomologie rigide à support propre, à coefficients dans E. On introduit donc une notion plus forte, celle de cristal surconvergent, par un procédé analogue à celui que nous avons employé pour définir la cohomologie.

(4.2.1) Soient $X \hookrightarrow Y$ une immersion ouverte, $Y \hookrightarrow P$ une immersion fermée de Y dans un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse au voisinage de X ; soit Z = Y-X. On considère comme plus haut les deux projections $p_i :]Y[_{P^2} \longrightarrow]Y[_P$; elles induisent deux foncteurs p_1^*, p_2^* de la catégorie des $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_P}$-modules dans celle des $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_{P^2}}$-modules (où $j^\dagger$ est défini comme en (2.2)). Par définition, un <u>cristal sur X surconvergent le long de</u> Z est un $j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_P}$-module E localement libre de rang fini, muni d'un isomorphisme $p_2^* E \xrightarrow{\sim} p_1^* E$ astreint à la condition de cocycle usuelle sur $]Y[_{P^3}$. Il revient au même de se donner un module à connexion intégrable (M,∇) sur un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$, dont la série de Taylor soit induite par un isomorphisme analytique $p_2^* M \xrightarrow{\sim} p_1^* M$ sur un voisinage strict de $]X[_{P^2}$ dans $]Y[_{P^2}$.

La catégorie ainsi obtenue ne dépend, à équivalence canonique près, que de $X \hookrightarrow Y$, est de nature locale sur Y, et est fonctorielle en $(X,Y)/K$.

(4.2.2) Soient $i : X \hookrightarrow Y$, $i' : X \hookrightarrow Y'$ deux immersions ouvertes, $v : Y' \longrightarrow Y$ un morphisme propre tel que $v \circ i' = i$. On montre alors que le foncteur image inverse v^*, de la catégorie des cristaux sur X surconvergents le long de Z dans celle des cristaux sur X surconvergents le long de Z', est une équivalence de catégories.

Soit $\overline{X}$ une compactification de X ; la catégorie des cristaux sur X surconvergents le long de $\overline{X}$-X ne dépend donc, à équivalence canonique près, que de X, et est par définition la catégorie des <u>cristaux surconvergents</u> sur X/K. Elle est de nature locale sur X, et dépend fonctoriellement de X/K. En particulier, si on suppose donné un automorphisme σ de K respectant la valuation et induisant le Frobenius de k, la catégorie des F-<u>cristaux surconvergents sur</u> $X/(K,\sigma)$ est définie comme plus haut. Lorsque X est affine et lisse d'algèbre A_0 sur k, on peut la décrire en choisissant une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A de réduction A_0 sur k, et de complétée faible $A^\dagger$, et un endomorphisme φ de $A^\dagger$ relevant l'endomorphisme de Frobenius de A_0 : la catégorie des F-cristaux surconvergents sur X s'identifie alors à la catégorie des $A^{\dagger}\otimes K$-modules projectifs de type fini M, munis :

(i) d'une connexion intégrable $\nabla : M \longrightarrow M\otimes\Omega^1_{A^{\dagger}}$, dont la série de Taylor est induite par un isomorphisme analytique $p_2^*M \xrightarrow{\sim} p_1^*M$ sur un voisinage strict du tube de la diagonale de $X\times X$ (par exemple dans $(\bar{\mathfrak{X}}\times\bar{\mathfrak{X}})^{an}$, où $\bar{\mathfrak{X}}$ est une compactification de $\mathfrak{X} := \mathrm{Spec}(A)$) ;

(ii) d'un isomorphisme $\Phi : M^{\varphi} \xrightarrow{\sim} M$ (où M^{φ} est déduit de M par l'extension des scalaires $\varphi : A^{\dagger} \longrightarrow A^{\dagger}$), compatible à la connexion ∇ sur M et à la connexion ∇^{φ} sur M^{φ} qui s'en déduit par extension des scalaires.

(4.2.3) Exemple : Le "F-cristal de Dwork" $\mathcal{L}_{\pi}$. Soit $\pi \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que $\pi^{p-1} = -p$; on pose $K = \mathbb{Q}_p(\pi)$, et on choisit pour Frobenius de K l'automorphisme identique. Soit X la droite affine sur $\mathbb{F}_p$; on définit un F-cristal surconvergent $\mathcal{L}_{\pi}$ sur $X/(K,\mathrm{Id})$ de la façon suivante :

a) On a $A^{\dagger}\otimes K = \mathcal{V}[t]^{\dagger}\otimes K$, anneau des séries dont le rayon de convergence est > 1. Le $A^{\dagger}\otimes K$-module sous-jacent à $\mathcal{L}_{\pi}$ est simplement $A^{\dagger}\otimes K$.

b) La connexion $\nabla : \mathcal{L}_{\pi} \longrightarrow \mathcal{L}_{\pi}\otimes\Omega^1$ est donnée par

$$\nabla(1) = \pi\otimes dt .$$

Choisissons la compactification naturelle $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} = \bar{X}$. Le tube de X dans $\mathbb{P}^{2\,an}_K$ peut être décrit comme l'ouvert admissible $]X[$ de $\mathbb{A}^{2\,an}_K$ défini par

$$|t| \leq 1 , \qquad |t-t'| < 1 .$$

La trace sur $\mathbb{A}^{2\,an}_K$ du tube de $\bar{X}$ dans $\mathbb{P}^{1\,an}_K \times \mathbb{P}^{1\,an}_K$ est l'ouvert admissible $]\bar{X}[$ défini par :

$$|t-t'| < 1 \quad \text{si} \quad |t| \leq 1 , \qquad |t-t'| < |tt'| \quad \text{si} \quad |t| \geq 1 ;$$

c'est un voisinage strict de $]X[$. Par linéarité, il suffit de regarder la série de de Taylor associée à la section $1 \in \mathcal{L}_{\pi}$; elle est donnée par

$$\varepsilon(1) = \sum_q \frac{1}{q!}\pi^q(t'-t)^q = \exp\pi(t'-t) .$$

La fonction $\exp\pi(t'-t)$ est analytique (rigide) sur l'ouvert admissible U de $\mathbb{A}_K^{2\,an}$ définie par

$$|t-t'| < 1 ;$$

on vérifie immédiatement que U est un voisinage strict de $]X[$ dans $]\overline{X}[$.

c) La connexion $\nabla^{\varphi}: \mathcal{L}_\pi^{\varphi} \longrightarrow \mathcal{L}_\pi^{\varphi}\otimes\Omega^1$ est donnée par

$$\nabla^{\varphi}(1) = \pi p t^{p-1}\otimes dt$$

pour l'endomorphisme défini par $\varphi(t)=t^p$. On définit $\Phi : \mathcal{L}_\pi^{\varphi} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\pi$ en posant

$$\Phi(1) = \exp\pi(t^p-t) ,$$

série dont la surconvergence est classique.

(4.2.4) Soient X un k-schéma, E un cristal surconvergent sur X. Choisissons une compactification $\overline{X}$ de X, et supposons pour simplifier qu'il existe un plongement de $\overline{X}$ dans un $\mathcal{V}$-schéma formel P lisse au voisinage de X. Alors E correspond à un $j^\dagger\mathcal{O}_{]\overline{X}[}$-module $E_{]\overline{X}[}$, localement libre de rang fini, muni en particulier d'une connexion intégrable $\nabla : E_{]\overline{X}[} \longrightarrow E_{]\overline{X}[}\otimes\Omega^1_{]\overline{X}[}$; celle-ci permet de définir un complexe $E_{]\overline{X}[}\otimes\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}$. Les théorèmes 1 et 2 s'étendent à celui-ci, et permettent de définir la cohomologie rigide de X à coefficients dans E par

$$H^*_{rig}(X/K,E) := H^*(]\overline{X}[,\ E_{]\overline{X}[}\otimes\Omega^\bullet_{]\overline{X}[}) .$$

Par ailleurs, E correspond aussi à un $\mathcal{O}_{]X[}$-module localement libre $\mathcal{E}_{]\overline{X}[}$ sur un voisinage strict V de $]X[$ dans $]\overline{X}[$, muni également d'une connexion intégrable. On peut alors généraliser les théorèmes 3 et 4, et définir la cohomologie rigide à support propre de X à coefficients dans E par

$$H^*_c(X/K,E) := H^*(V,\ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{]X[}(\mathcal{E}_{]\overline{X}[}\otimes\Omega^\bullet_{]\overline{X}[})) .$$

<u>Exercice</u> : Vérifier que, si $K = \mathbb{Q}_p(\pi)$ et $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$, on a

$$H^*_{rig}(X/K,\mathcal{L}_\pi) = H^*_c(X/K,\mathcal{L}_\pi) = 0.$$

(4.3) Soient S un k-schéma, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse ; supposons pour simplifier que k soit parfait, et qu'il existe une compactification $S \hookrightarrow \overline{S}$ possédant un plongement $\overline{S} \hookrightarrow T$ dans un schéma formel lisse T sur l'anneau $\mathcal{W}$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k (par exemple si S est quasi projectif sur k). On peut alors former, comme on l'a vu en (2.5) c), les faisceaux de cohomologie rigide relative $R^q f_{rig*}(X/T)$; si $j^\dagger$ est associé comme en (2.2) à l'inclusion $]S[_T \hookrightarrow]\overline{S}[_T$, ce sont de façon naturelle des $j^\dagger \mathcal{O}_{]\overline{S}[}$-modules. Je conjecture que les $R^q f_{rig*}(X/T)$ possèdent une structure canonique de F-cristal surconvergent (Φ étant induit par fonctorialité par le Frobenius de X). Cette conjecture est notamment vérifiée sous les hypothèses suivantes :

<u>Théorème</u> 5. *Supposons que* S *soit lisse sur* k*, et qu'il existe un* $\mathcal{W}$*-schéma formel propre* $\overline{\mathcal{S}}$*, et un ouvert* $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$ *lisse sur* $\mathcal{W}$*, relevant* S *; supposons également qu'il existe un morphisme propre* $g : \overline{\mathfrak{X}} \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ *de* $\mathcal{W}$*-schémas formels, tel que, si* $\mathfrak{X} = g^{-1}(\mathcal{S})$*, le morphisme* $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{S}$ *soit un relèvement lisse de* $X \longrightarrow S$*. Alors les* $R^i f_{rig*}(X/\overline{\mathcal{S}})$ *sont des* F*-cristaux surconvergents.*

On remarquera que ces hypothèses sont en particulier satisfaites si S peut être relevé en un $\mathcal{W}$-schéma lisse S', et s'il existe un morphisme propre et lisse $X' \longrightarrow S'$ de $\mathcal{W}$-schémas relevant $X \longrightarrow S$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ADOLPHSON, S. SPERBER, *Twisted Kloosterman sums and* p*-adic Bessel functions*, Amer. Journ. of Math. 106, n° 3, 549-592 (1984).

[2] P. BERTHELOT, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* p > 0, Lecture Notes in Math. 407, Springer Verlag (1974).

[3] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque 119-120, 17-49 (1984).

[3 a] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, en préparation.

[4] P. BERTHELOT, A. OGUS, *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes 21, Princeton Univ. Press (1978).

[5] P. BERTHELOT, A. OGUS, F*-isocrystals and De Rham cohomology* I, Inventiones Math. 72, 159-199 (1983).

[6] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface* : II, Annals of Math. 80, n° 2, 227-299 (1964).

[7] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface* : III, Annals of Math. 83, n° 3, 457-519 (1966).

[8] B. DWORK, *On the zeta function of a hypersurface* : IV. *A deformation theory for singular hypersurfaces*, Annals of Math. 90, n° 2, 335-352 (1969).

[9] B. DWORK, p*-adic cycles*, Publ. Math. I.H.E.S. 37, 27-115 (1969).

[10] B. DWORK, *Bessel functions as* p*-adic functions of the argument*, Duke Math. Journ. 41, 711-738 (1974).

[11] R. ELKIK, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 6, n° 4, 553-604 (1973).

[12] J. FRESNEL, M. VAN DER PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math. 18, Birkhäuser (1981).

[13] L. GERRITZEN, M. VAN DER PUT, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Math. 817, Springer Verlag (1981).

[14] R. HARTSHORNE, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.E.S. 45, 5-99 (1976).

[15] L. ILLUSIE, *Report on crystalline cohomology*, Proc. of Symp. in pure Math. 29, 459-478 (1975).

[16] L. ILLUSIE, *Complexe de De Rham-Witt*, Astérisque 63, 83-112 (1979).

[17] L. ILLUSIE, *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 12, 501-661 (1979).

[18] L. ILLUSIE, M. RAYNAUD, *Les suites spectrales associées au complexe de De Rham-Witt*, Publ. Math. I.H.E.S. 57, 73-212 (1983).

[19] L. ILLUSIE, *Finiteness, duality, and Künneth theorems in the cohomology of the De Rham-Witt complex*, in "Algebraic Geometry", Lecture Notes in Math. 1016, 20-72 (1983).

[20] N. KATZ, *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 1971-72, exposé 409, Lecture Notes in Math. 317, 167-200, Springer Verlag (1973).

[21] R. KIEHL, *Theorem* A *und Theorem* B *in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inventiones Math. 2, 256-273 (1967).

[22] S. LUBKIN, *Finite generation of lifted* p*-adic homology with compact supports*, Journ. of Number Theory 11, 412-464 (1979).

[23] P. MONSKY, G. WASHNITZER, *Formal cohomology :* I, Annals of Math. 88, 181-217 (1968).

[24] P. MONSKY, *Formal cohomology :* II, Annals of Math. 88, 218-238 (1968).

[25] P. MONSKY, *Formal cohomology :* III. *Fixed point theorems*, Annals of Math. 93, 315-343 (1971).

[26] A. OGUS, F*-isocrystals and De Rham cohomology* II, Duke Math. Journal 51, n° 4, p. 765-850 (1984).

[27] M. RAYNAUD, *Géométrie analytique rigide*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39,40, 319-327 (1974).

[28] P. ROBBA, *Index of* p*-adic differential operators :* III. *Application to twisted exponential sums*, Astérisque 119-120, p. 191-266 (1984).

[29] S. SPERBER, p*-adic hypergeometric functions and their cohomology*, Duke Math. Journ. 44, 535-589 (1977).

[30] S. SPERBER, *Congruence properties of the hyperkloosterman sum*, Compositio Mathematica 40, 3-33 (1980).

P. BERTHELOT
U.E.R. Mathématiques
Université de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 - RENNES CEDEX
FRANCE