

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LESCURE

## **Compactifications équivariantes par des courbes**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 26 (1987)

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1987\\_2\\_26\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_26__1_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 26.  
Supplément au Bulletin de la S.M.F.  
Tome 115, 1987, fascicule 1

## COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

par

François LESCURE (\*)

### RÉSUMÉ

Soit  $X$  un espace analytique complexe irréductible et  $G$  un groupe de Lie complexe connexe agissant sur  $X$ . Si  $G$  admet une orbite ouverte  $\Omega$  cette orbite est dense et  $X \setminus \Omega$  est un sous-espace analytique complexe fermé de  $X$  qui contient le lieu singulier de  $X$ . Si  $\dim_{\mathbb{C}} X \setminus \Omega \leq 1$  on dit que  $X$  est une compactification  $\mathbb{C}$ -analytique équivariante de l'espace homogène  $\Omega$  par une courbe : l'objet de ce travail est une classification, à isomorphisme près, de toutes les compactifications normales équivariantes par une courbe.

### ABSTRACT

Let  $X$  be a compact complex irreducible analytic space, and let also  $G$  be a complex connected Lie group with an holomorphic action of  $G$  on  $X$ ; if there is an orbit which is open and such that  $X \setminus \Omega$  is a complex analytic space of  $\mathbb{C}$ -dimension  $\leq 1$ , we say that  $X$  is an  $\mathbb{C}$ -analytic  $G$ -equivariant compactification (of  $\Omega$ ) by a curve : the object of this paper is the classification up to isomorphism of such normals  $\mathbb{C}$ -analytics equivariants compactifications by curves.

---

(\*) Texte reçu le 30 avril 1986

F. LESCURE, Département de Maths pures et appliquées,  
Université de Caen, 14032 CAEN CEDEX

Fondation HUMBOLDT, Ruhr Universität Bochum,  
Gebäude NA 150 4er Stock,  
4630 BOCHUM, R.F.A.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction .....	3
1. Preuve de la conjecture d'Huckleberry-Oeljeklaus : le cas de $SL(2, \mathbb{C})$ .....	10
2. Lemme de compacité ; le cas résoluble et le cas général de la conjecture .....	24
3. Le lemme de fibration ; les 3 cas .....	32
4. Le 1er cas : classes I et II .....	36
5. Le 2ème cas : la classe III.....	40
6. Le 3ème cas : classes IV et V .....	66
Conclusion .....	86
Bibliographie .....	87

## 0. - INTRODUCTION

Soient  $G$  un groupe de Lie complexe et  $Z$  un espace analytique complexe irréductible (réduit de surcroît comme tous ceux que nous considérerons désormais) sur lequel  $G$  agit holomorphiquement à gauche. Si  $G$  admet dans  $Z$  une orbite  $\Omega$  d'intérieur non vide,  $\Omega$  est ouverte et dense et  $Z \setminus \Omega$  est un sous-espace analytique fermé de  $Z$ . Sous ces hypothèses, on dira que  $Z$  est quasi-homogène sous  $G$  ou, plus brièvement,  $G$  quasi-homogène.

Une situation de cette espèce déjà considérée est celle où  $Z$  est une variété algébrique affine sur laquelle un groupe algébrique  $G$  opère rationnellement. Dans cette situation, si  $x \in \Omega$  a pour stabilisateur le sous-groupe algébrique  $H \subset G$ , on dira que  $Z$  est complétion affine  $G$ -équivariante de l'espace homogène quasi-affine  $\Omega := G/H$ . Un exemple important pour les théoriciens des groupes est celui d'un groupe semi-simple complexe  $G$  agissant par l'opération adjointe sur la variété affine  $Z$  des éléments nilpotents de son algèbre de Lie (th. de Richardson cf. [40] p. 136).

Une deuxième situation, en quelque sorte opposée à la première, et qui a aussi été considérée, est celle où l'espace analytique  $Z$  (resp. chaque composante connexe de  $Z \setminus \Omega$ ) est compact(e) : on dira alors,  $H$  étant le stabilisateur (dans  $G$ ) d'un point  $x \in \Omega$ , que  $Z$  est compactification (resp. semi-compactification)  $\mathbb{C}$ -analytique  $G$ -équivariante de  $G/H$  ou, plus brièvement le contexte étant clair, que  $Z$  est  $G$ -compactification (resp.  $G$ -semi-compactification) de

l'espace homogène  $G/H$ .

Si l'espace  $Z$  est normal, ou même localement irréductible, le théorème de "connexité locale" de Hilbert-Rückert montre qu'à chaque composante connexe de  $Z \setminus \Omega$  correspond exactement un bout (cf. [12] et [7]) de  $\Omega = G/H$ . On dira alors que  $Z$  est  $G$ -semi-compactification le long des bouts en question. Notons que si  $G/H$  n'a qu'un seul bout toute  $G$ -semi-compactification de  $G/H$  est en fait une  $G$ -compactification.

Ces définitions posées, on se persuade très vite que :

1) Il y a des espace homogènes  $G/H$  n'admettant aucune  $G$ -compactification : par exemple et de manière élémentaire on pourrait montrer que si  $\Gamma$  est un sous-groupe arithmétique d'un groupe semi-simple  $S$ , l'espace homogène  $S/\Gamma$  n'admet aucune  $S$ -semi-compactification.

2) Malgré cela toute tentative de classification des espaces homogènes  $G/H$  admettant une  $G$ -compactification est sans espoir, ainsi a fortiori que toute tentative de classification des espaces analytiques compacts quasi-homogènes.

Des résultats substantiels ont toutefois été obtenus dans cette direction avec des hypothèses restrictives. Ainsi en 1969, Potters (cf. [36] = [Po]) classe toutes les surfaces complexes lisses quasi-homogènes et minimales (au sens de la théorie des surfaces).

On observera que par des suites de modifications et contractions adéquates il est possible, à partir des surfaces de Potters, d'obtenir une telle multitude de surfaces normales quasi-homogènes que la tentative d'une classification, à isomorphisme près, de tels objets apparaît vaine.

Une autre hypothèse restrictive est que la  $\mathbb{C}$ -dimension d'une, ou de toute, composante connexe de  $Z \setminus \Omega$  soit petite. Comme cette hypothèse sera la nôtre, faisons un rappel plus précis des résultats obtenus et des méthodes utilisées dans cette situation.

En 1977, dans le cas algébrique, Ahiezer (cf. [1]) décrit tous les espaces  $Z$  normaux comme ci-dessus pour lesquels  $Z \setminus \Omega$  admet une composante réduite à un point. La généralisation (cf. [24]) nettement plus difficile de cette description dans le cas  $\mathbb{C}$ -analytique fut obtenue en 1980 par Huckleberry et Oeljeklaus : le résultat est que, si  $Z$  est compact (resp. non compact),  $Z$  est un cône projectif (resp. affine) de base une variété rationnelle homogène, l'action de  $G$  pouvant être "élargie" de telle manière que l'orbite dense soit le complémentaire du sommet.

En 1980 dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences, Huckleberry et Oeljeklaus annoncent aussi une classification des  $Z$  lisses tels que  $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$  pour lesquels une composante connexe de  $Z \setminus \Omega$  est une courbe. En attendant la publication par ces deux mêmes auteurs d'un ouvrage traitant, en autres, exhaustivement de ce problème, on renverra le lecteur à une version préliminaire (cf. [26] = [H.O.]) publiée par les "Annales de l'Institut Elie Cartan" en 1984.

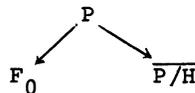
Le but essentiel de ce travail est la généralisation au cas singulier de la classification de Huckleberry-Oeljeklaus (voir le tableau qui conclut cette article). Avant même de donner des indications sur notre démarche, rappelons celle de [H.O.] ; on démontre d'abord le :

**LEMME DE FIBRATION.** Dans l'hypothèse ci-dessus, si  $\Omega := G/H$  est l'orbite ouverte, il existe un sous-groupe parabolique  $P$

(i.e. tel que  $G/P$  soit une variété rationnelle homogène) contenant  $H$  et tel que la fibre  $\cong P/H$  de la fibration  $G/H \rightarrow G/P$  soit de  $\mathbb{C}$ -dimension  $\leq 2$  ; la fibration  $G/H \rightarrow G/P$  étant de surcroît prolongeable en une méromorphie  $Z \dashrightarrow G/P$ .

Ce lemme de fibration acquis (en utilisant notamment la fibration de Tits), on observe que  $\overline{P/H} \rightarrow Z$  est un sous-espace analytique complexe fermé. On considère alors une modification  $P$ -équivariante lisse  $F \rightarrow \overline{P/H}$ .  $\tilde{Z} := G \times^P F$  est alors une variété quasi-homogène sous  $G$  et on a une  $G$ -modification  $\tilde{Z} \rightarrow Z$  induisant un isomorphisme sur les  $G$ -orbites ouvertes  $\cong \Omega$ .

En fonction de la manière dont une partie semi-simple  $S$  de  $G$  opère sur  $\tilde{Z} \setminus \Omega$ , se dégagent trois grands cas. Excluant ici la situation  $\dim_{\mathbb{C}} P/H = 1$  (d'ailleurs à peu près triviale), on introduit un modèle minimal (au sens de la théorie des surfaces)  $F_0$  de  $F$ . La connexité de  $P$  ( $P$  parabolique !) permet d'introduire le diagramme  $P$ -équivariant de modifications :



L'étude des trois grands cas évoqués précédemment consiste, pour chacun d'entre eux, à utiliser intensivement [Po] pour voir les possibilités envisagées pour la surface de Potters  $F_0$ .

L'objet propre de cet article, est l'étude (faite de manière plus exhaustive dans la thèse de l'auteur (Caen (1984) désignée

(\*) De manière plus générale, dans ce contexte de lissité, si  $Y := Z \setminus \Omega$ , [H.O.] montre l'existence d'une fibration  $G/H \rightarrow G/P$  ( $P$  parabolique) avec  $\dim_{\mathbb{C}} P/H < 1 + \dim_{\mathbb{C}} Y$ .

désormais [T]) des compactifications normales  $\mathbb{C}$ -analytiques équivariantes par des courbes. Plus précisément, il s'agit d'une généralisation de [H.O.] qui consiste en la recherche des espaces compacts normaux  $Z$  quasi-homogènes d'orbite dense  $\Omega$  tels que :

- 1)  $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$
- 2)  $\dim_{\mathbb{C}} Z \setminus \Omega \leq 1$

Notre démarche dans ce contexte généralisé est substantiellement la même que dans [H.O.] : démonstration du "lemme de fibration" puis étude des trois grands cas à l'aide de la géométrie de la surface de Potters  $F_0$ . Mais, dans le cas singulier, la démonstration du "lemme de fibration" est beaucoup moins évidente que dans le cas lisse. Ce lemme résultera essentiellement dans notre contexte généralisé du Théorème 2.6. qui est l'aboutissement de la première partie de cet article. Or la démonstration de ce théorème, exige deux ingrédients fondamentaux :

- 1) Le Théorème de Barlet (cf. [5]) de  $q$ -pseudo-convexité (et même de  $q$ -complétude), au sens d'Andreotti-Grauert, au voisinage d'un cycle analytique.

- 2) Une conjecture de Huckleberry-Oeljeklaus, déjà annoncée dans [32] et dont nous donnons ici une démonstration "in extenso" et dont une forme faible s'énonce comme suit : si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $SL(2, \mathbb{C})$  il n'existe pas de  $SL(2, \mathbb{C})$ -compactification de  $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$  par une courbe.

Bien qu'on ait sur une telle compactification des renseignements de géométrie globale très fins (cf. l'article de Huckleberry-Margulis [23]), c'est ici par des considérations de géométrie analytique locale qu'on la démontre, ce qui n'est guère étonnant si on remarque que cette conjecture de H. et O. est elle-même conséquence

de la célèbre conjecture de Lipman-Zariski.

Une autre difficulté spécifique au cas singulier est qu'il nous faudra des renseignements géométriques plus précis sur la surface  $\overline{P/H} \rightarrow Z$  dont H.O. pouvait se dispenser en utilisant des arguments directs résultant de la lissité de  $Z$  : cela exigera une étude des surfaces de Hirzebruch modifiées (cf. Chapitres 5 et 6 de la deuxième partie).

Nous obtenons évidemment infiniment plus d'espaces que H.O. n'obtient de variétés. Le cas le plus caricatural à cet égard étant la classe III (cf. Chapitre 5) où nous trouvons une série triple d'espace de  $\mathbb{C}$ -dimension arbitraire  $\geq 3$  alors que H.O. ne trouve que deux variétés lisses toutes deux de  $\mathbb{C}$ -dimension égale à trois.

Observons, toujours à propos de la classe III, mais aussi de la classe V, que la géométrie des espaces  $Z$  obtenus est probablement trop embrouillée pour qu'on puisse en donner une description vraiment concrète (par exemple comme variété projective définie par des équations). C'est la raison pour laquelle on se contente de décrire une désingularisation équivariante  $\tilde{Z} \rightarrow Z$  en précisant exactement quelles sont les parties de  $\tilde{Z}$  qui sont contractées en un point par la modification  $\tilde{Z} \rightarrow Z$ .

On obtient au total cinq grandes classes dont on trouvera la liste à la fin de la deuxième partie.

Notons, ici, qu'on aurait pu se poser le problème plus général suivant : quelles sont les  $\mathbb{C}$ -semi-compactifications normales d'un espace homogène  $\Omega := G/H$  tels qu'une composante de  $Z \setminus \Omega$  soit de  $\mathbb{C}$ -dimension  $\leq 1$ . Nous n'avons pas (contrairement à H.O. dans le cas lisse) répondu à cette question, elle est pourtant probablement moins difficile que celle (plus particulière) à laquelle nous avons répondu.

En effet ne subsiste, après notre étude, que le cas où  $\Omega$  a plus d'un bout. Or c'est la philosophie de [14] (Lemma 2) qu'un espace homogène "générique" n'ait qu'un bout et que, dans un contexte donné assez précis, on puisse comprendre suffisamment la structure géométrique de ceux qui en ont plusieurs.

Nous ne saurions achever cette introduction sans exprimer notre profonde reconnaissance au Professeur Huckleberry : outre que notre démarche d'ensemble est la même que dans le cas lisse, les indications précieuses et patientes du Professeur Huckleberry à l'occasion d'invitations répétées de l'Université allemande, ont constitué des conditions nécessaires à la rédaction de cet article.

## CHAPITRE 1

## CONJECTURE DE HUCKLEBERRY-OELJEKLAUS

0.- Introduction

L'objet de ce Chapitre 1 est de démontrer la conjecture de Huckleberry-Oeljeklaus :

**THEOREME 1.1.** - Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $SL(2, \mathbb{C})$  ; si  $Z$  est semi-compactification  $\mathbb{C}$ -analytique  $SL(2, \mathbb{C})$ -équivariante de l'espace homogène complexe  $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma = \Omega$  , aucune composante connexe de  $Z \setminus \Omega$  n'est de dimension complexe  $\leq 1$ .

La méthode pour démontrer la conjecture de H.O. consiste à montrer une contradiction sur un germe de surface que nous allons d'abord définir.

1.- Un germe de surface

Soit  $Z$  comme dans l'énoncé du Théorème 1.1. que nous pourrions, sans rien changer au problème, supposer normal. Désignons alors par  $T_Z$  (cf. [10]) le faisceau des germes de champs tangents holomorphes sur  $Z$  ; c'est aussi classiquement le faisceau des germes de  $\mathbb{C}$ -dérivations du faisceau structural  $\mathcal{O}_Z$  qu'on peut aussi définir par l'isomorphisme faisceutique  $T_Z \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(\Omega_Z^1, \mathcal{O}_Z) : T_Z$  est donc ( $Z$  localement irréductible !) sans torsion ; il s'interprète d'ailleurs aussi comme le faisceau des germes de sections holomorphes dans un fibré linéaire (cf. [10]) et vérifie ( $Z$  normal) en tant que tel

les théorèmes d'extension de Riemann et Hartogs.

Si  $X \in H^0(U, T_Z)$  est un champ tangent au dessus d'un ouvert de  $U$  et que  $a \in U$  on dira que  $X$  est nul en  $a$  et on écrira  $X(a) = 0$  si, en l'interprétant comme section dans un fibré linéaire, sa valeur en  $a$  est nulle, i.e. si  $\forall f \in \mathcal{O}_{Z,a}$ ,  $L_X f \in \mathcal{O}_{Z,a}$  est le germe en  $a$  d'une fonction holomorphe qui s'y annule i.e. encore est tel que, modulo un plongement local de Zariski  $(U \supset) U \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow T_a(Z)$ ,  $Z|_U$  est induit par un champ de vecteur  $\tilde{Z}$  sur  $\Omega$  tangent à  $U'$  (i.e. tel que la dérivation  $L_{\tilde{Z}}$  conserve  $I(U') \subset \mathcal{O}_\Omega$ ) pour lequel  $\tilde{Z}(a) = 0$ .

Généralisant alors sans peine le crochet de Lie de deux champs sur un tel espace singulier, on se rappellera que la  $G$ -action holomorphe à gauche sur  $Z$  permet d'associer à tout  $u \in \mathfrak{g} :=$  algèbre de Lie de  $G$ , le champ de Killing  $Y_u \in \Gamma(Z, T_Z)$  et qu'on a alors  $Y_{[u,v]} = -[Y_u, Y_v]$  et qu'enfin dire que  $X_u(a) = 0$ , est alors équivalent à dire que  $u$  appartient à l'algèbre de Lie du stabilisateur de  $a$  dans  $G$ .

Ceci rappelé soit maintenant  $Z, \Gamma$  etc ... comme dans l'énoncé du Théorème 1.1. Posant  $\Omega := SL(2, \mathbb{C})/\Gamma \hookrightarrow Z$  et supposant que  $Y$  soit une composante connexe de  $Z \setminus \Omega$  de  $\mathbb{C}$ -dimension  $\leq 1$ , trois cas sont alors possibles :

1)  $\dim_{\mathbb{C}} Y = 0$ . Mais une application combinée du théorème de linéarisation (cf. [24]) et de la "méthode du drapeau" permet d'exclure cette situation.

2)  $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$  et il existe un point  $SL(2, \mathbb{C})$ -fixe dans  $Y$ . Le théorème de linéarisation (cf. [24]) permettrait alors de construire une surface localement fermée dans  $\Omega$  infinitésimalement stable pour la  $SL(2, \mathbb{C})$ -action (i.e. telle que tous les champs de Killings lui

soient tangents) ; contradiction.

3)  $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$  et aucun point de  $Y$  n'est fixé par  $SL(2, \mathbb{C})$  alors nécessairement  $Y \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , chaque sous-groupe de Borel de  $SL(2, \mathbb{C})$  étant le stabilisateur d'exactly un point de  $Y$  et réciproquement.

Pour mieux étudier ce troisième cas considérons alors, dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  des matrices complexes  $2 \times 2$  de traces nulles, les générateurs :

$$h = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x_+ = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec d'ailleurs  $[h, x_+] = 2x_+$ ,  $[h, x_-] = -2x_-$ ;  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}x_+$  est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Borel  $B$  qui stabilise un point unique  $y_0 \in Y$ . De plus, si on considère sur l'espace analytique  $Z$  les champs de Killing  $H = Y_h$ ,  $X^+ = Y_{x_+}$  et  $X^- = Y_{x_-}$  on aura :

$$1) \quad [H, X^+] = -2X^+ \quad [H, X^-] = 2X^-$$

$$2) \quad H(y_0) = 0, \quad X^+(y_0) = 0 \quad \text{et} \quad X^-(y_0) \neq 0$$

Enfin, le tore complexe  $T_{\mathbb{C}} = \{\exp \xi h, \xi \in \mathbb{C}\}$  sera constitué de toutes les matrices  $\begin{pmatrix} e^{\xi} & 0 \\ 0 & e^{-\xi} \end{pmatrix}$  et  $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$  définira un isomorphisme de  $\mathbb{C}^*$  sur le sous-groupe de Cartan  $T_{\mathbb{C}}$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Notons alors que :

1) Par l'isomorphisme  $\mathbb{C}^* \rightarrow T_{\mathbb{C}}$  qui fait agir  $\mathbb{C}^*$  sur  $Z$ ,  $H$  est aussi le champ de Killing sur  $Z$  du vecteur  $1 \in T_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}$ .

2)  $T_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^*$  réductif fixant  $y_0$ , son action pourra se linéariser au voisinage de  $y_0$ .

Plus précisément,  $B$  et donc  $T_{\mathbb{C}}$  qui laissent fixe  $y_0$  agissent naturellement et linéairement à gauche sur l'espace vectoriel de

Zariski  $T_{y_0}(Z)$  en laissant de surcroît la droite complexe  $T_{y_0}(Y) \subset T_{y_0}(Z)$  invariante ; si bien qu'il existera un voisinage  $U_{y_0}$  de  $y_0$  dans  $Z$ , un ouvert  $V \subset T_{y_0}(Z)$  contenant l'origine, tous les deux  $T$ -invariants et une immersion  $\mathbb{C}$ -analytique injective :  $U_{y_0} \longrightarrow V$  envoyant  $y_0$  sur l'origine et de différentielle l'identité en  $y_0$  qui est  $T$ -équivariante (cf. [24]). Ayant identifié  $T_{\mathbb{C}}$  avec  $\mathbb{C}^*$  comme ci-dessus, on peut alors choisir une base de  $T_{y_0}(Z)$  l'identifiant avec  $\mathbb{C}^{n+1}$  telle qu'alors l'action locale de  $T_{\mathbb{C}}$  sur  $T_{y_0}(Z)$  s'écrive :

$$t.(z_0, \dots, z_n) = t^{q_0} z_0, \dots, t^{q_n} z_n$$

et telle que de surcroît  $\partial/\partial z_0 = X^-(y_0) \neq 0$ . Il résulte alors de tout ce qui précède qu'on peut restreindre suffisamment  $V$  et  $U_{y_0}$  de telle manière qu'on ait une identification  $V = \Delta_0 \times \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  et que  $X^-$  soit restriction à  $U_{y_0}$  d'un champ holomorphe  $\tilde{X}^-$  défini sur  $V$  qui soit transversal à toute hypersurface fermée  $\delta_0 \times \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n \subset V$  ( $\delta_0 \in \Delta_0$ ). Ceci rappelé le théorème du rang permet de trouver des disques  $\Delta'_0 \subset \Delta_0, \dots, \Delta'_n \subset \Delta_n$  tels que l'application :

$$(\delta'_0, \delta'_1, \dots, \delta'_n) \longmapsto \exp(\delta'_0 \tilde{X}^-)(0, \delta'_1, \dots, \delta'_n)$$

définisse un isomorphisme de  $\Delta'_0 \times \dots \times \Delta'_n$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $V$ . Posons alors  $W_{y_0} = U_{y_0} \cap \Omega$  et  $\Sigma = W_{y_0} \cap (0 \times \Delta'_1 \times \dots \times \Delta'_n)$ . Pour des raisons de codimension et aussi parce que le plongement  $W_{y_0} \hookrightarrow \Omega$  est minimal en  $y_0$  il résulte que  $\Sigma$  est une surface analytique fermée de  $W_{y_0}$ . Montrons alors que la restriction de l'application qui précède est un isomorphisme de  $\Delta'_0 \times \Sigma$  sur  $W_{y_0}$ .

1) Elle est injective.

2) Si  $v \in W_{y_0}$  s'écrit  $\exp(\delta'_0 \tilde{X}^-)(0, \delta'_1, \dots, \delta'_n)$  alors  $\exp(-\delta'_0 \tilde{X}^-)v \in 0 \times \Delta'_1 \times \dots \times \Delta'_n$ .

Mais alors comme  $\tilde{X}^-$  est constamment tangent à  $W_{Y_0}$  et que  $\forall t, 0 \leq t \leq 1$ ,  $\exp(-t\delta'_0 \tilde{X}^-)v$  est dans  $\Omega$  il en résulte que  $\exp(-\delta'_0 \tilde{X}^-)v = (0, \delta'_1, \dots, \delta'_n) \in W_{Y_0}$  et donc que  $\exp(-\delta'_0 \tilde{X}^-)v \in \Sigma$ ; ce qui démontre la surjectivité du morphisme  $\Delta'_0 \times \Sigma \rightarrow W_{Y_0}$ . Mais  $W_{Y_0}$  étant normal, le morphisme  $\mathbb{C}$ -analytique bijectif  $\Delta'_0 \times \Sigma \rightarrow W_{Y_0}$  est un isomorphisme  $\mathbb{C}$ -analytique. Notons qu'une application directe du théorème de Rossi 1.1. nous aurait donné un moins bon résultat parce qu'ici nous savons de surcroît que  $\Sigma$  est stable pour la  $\mathbb{C}^*$ -action locale. Enfin, il est clair que le lieu singulier de  $W_{Y_0}$  est  $W_{Y_0} \cap Y = \exp(\Delta'_0 \tilde{X}^-) \cdot (0, \dots, 0)$  et que  $W_{Y_0}$  étant lisse en dehors de  $Y$  et normal,  $\Sigma$  admet une singularité unique et normale en l'origine.

On remarquera alors que le champ tangent  $X^+$  à  $X_{Y_0}$  n'est a priori pas du tout tangent à  $\Sigma$  le long de  $\Sigma$ . Mais comme  $X^-$  est transversal à  $\Sigma$  sur  $W_{Y_0} \setminus Y$ ,  $\forall a \in \Sigma \setminus \{0\}$ ,  $\exists \lambda(a) \in \mathbb{C}$  unique tel que  $X^+(a) + \lambda(a)X^-(a)$  nécessairement distinct de zéro, soit tangent à  $\Sigma$ . Il est clair que  $\lambda$  est une fonction holomorphe sur  $\Sigma \setminus \{y_0\}$ , donc prolongeable à  $\Sigma$  (normalité);  $\lambda$  étant restriction à  $\Sigma$  d'une fonction  $\tilde{\lambda}$  définie sur  $W_{Y_0}$ , posons alors  $X' = X^+ + \tilde{\lambda} X^-$ : c'est un champ holomorphe sur  $W_0$ ; sur  $W_{Y_0} \setminus Y$  et donc sur  $W_{Y_0}$  tout entier, on a :

$$[H, X'] = -2X^+ + d\tilde{\lambda}(H)X^- + 2\tilde{\lambda} X^-$$

Or  $H$  et  $X'$  sont tous deux tangents à  $\Sigma$  ( $\Sigma \subset W_{Y_0}$  est stable par la  $T_{\mathbb{C}}$ -action locale) si bien qu'il en est de même de  $[H, X']$ , ce qui, compte-tenu de la  $\mathbb{C}$ -transversalité de  $X^-$  à  $\Sigma$  et de l'indépendance linéaire sur  $\mathbb{C}$  de  $X^+$  et  $X^-$  en tout point de  $\Sigma \setminus Y \supset \Sigma \setminus \{y_0\}$ , implique qu'en tout point  $\Sigma \setminus \{y_0\}$  on a :

$$[H, X'] \equiv -2X^+ + (d\lambda(H) + 2\lambda)X^- \equiv -2(X^+ + \lambda X^-).$$

D'où par prolongement sur  $\Sigma$  tout entier :

$$[H, X'] \equiv -2X' .$$

H et X' étant  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants en tout point de  $\Sigma \setminus \{y_0\}$ .

Tout ceci montre que le théorème 1.1. peut se ramener à démontrer le lemme suivant :

LEMME 1.2. - Supposons que  $\mathbb{C}^*$  opère linéairement sur un espace numérique  $\mathbb{C}^n$  et que  $\tilde{H}$  désigne le champ de Killing de  $\partial/\partial z \in T_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{C}$  de cette  $\mathbb{C}^*$ -action. Si  $\Delta : \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  est un produit de disque centrés en l'origine, que  $\Sigma \subset \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  en soit une surface normale admettant l'origine comme unique singularité et qui soit stable pour la  $\mathbb{C}^*$ -action locale (i.e. telle que  $\tilde{H}$  soit tangent à  $\Sigma$ ), il est impossible de trouver un champ de vecteurs holomorphe X sur  $\Sigma$  vérifiant simultanément :

i) En tout point  $\sigma \in \Sigma \setminus \{0\}$  les vecteurs  $H(\sigma)$ ,  $X(\sigma) \in T_\sigma(\Sigma)$  sont  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants où ici H désigne la restriction de  $\tilde{H}$  à  $\Sigma$ .

ii) On a l'identité  $[H, X] = -2X$  sur tout  $\Sigma$ .

## 2.- Démonstration du lemme 1.2.

Quelques sorites seront nécessaires. Tout d'abord il est clair qu'on pourra trouver n entiers relatifs  $q_1, \dots, q_n$  tels que la  $\mathbb{C}^*$ -action sur  $\mathbb{C}^n$  s'écrive :

$$t.(z_1, \dots, z_n) = (t^{q_1} z_1, \dots, t^{q_n} z_n)$$

Ceci posé, on dira qu'une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  (resp.  $f \in \mathcal{O}(\Sigma)$ ) est homogène de poids p relativement à la  $\mathbb{C}^*$ -action considérée, ou aussi plus brièvement qu'elle est de poids p, si  $\forall t \in \mathbb{C}$  et  $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \Delta$  (resp.  $\in \Sigma$ ) tel que  $t.(z_1, \dots, z_n)$

$\varepsilon \in \Delta$  (resp.  $p \in \Sigma$ ) on a :  $f(t.(z_1, \dots, z_n)) = t^p f(z_1, \dots, z_n)$ .

En écrivant le développement de Taylor  $f(z_1, \dots, z_n) =$

$\sum a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ , cela signifie aussi que dès que

$q_1 \alpha_1 + \dots + q_n \alpha_n \neq p$  on a :  $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = 0$ . Si  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  est donnée

par sa série de Taylor  $f(z_1, \dots, z_n) = \sum a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ , la

fonction  $f_p \in \mathcal{O}(\Delta)$  donnée par la série extraite :

$\sum a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$  s'appellera la composante (homogène)

$q_1 \alpha_1 + \dots + q_n \alpha_n = p$

de poids  $p$  de  $f$ ; uniformément sur tout compact de  $\Delta$  on a alors

$f = \sum_{-\infty < p < +\infty} f_p$ . Faisons alors la :

Remarque 1.3. - Toute fonction  $f \in \mathcal{O}(\Sigma)$  de poids  $p$  est la restriction à  $\Sigma$  d'une fonction  $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Delta)$  de poids  $p$ .

En effet ( $\Delta$  ouvert de Stein)  $f$  est la restriction à  $\Sigma$  d'une fonction  $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Delta)$ ; le fait que  $f$  soit de poids  $p$  permet aisément de voir que pour tout entier relatif  $p' \neq p$  la restriction de  $\hat{f}_{p'}$  à  $\Sigma$  est nulle et donc que  $f = \hat{f}_p|_{\Sigma}$ ; C.Q.F.D.

Le champ de Killing  $\hat{H}$  (resp.  $H$ ) de la  $\mathbb{C}^*$ -action locale sur  $\Delta$  (resp. sur  $\Sigma$ ) est alors donné par :

$$\hat{H}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{i=n} q_i z_i \partial / \partial z_i .$$

N.B. On fait ici la convention usuelle qui consiste à représenter les champs holomorphes réels par des combinaisons à coefficients holomorphes des champs complexes  $\partial / \partial z_k = \frac{1}{2}(\partial / \partial x_k - i \partial / \partial y_k)$ . Toutes les entités que nous considérerons étant holomorphes les formules usuelles (dérivées et crochets de Lie etc ...) s'appliqueront; en particulier le fait pour  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  (ou  $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Sigma)$ ) d'être homogène de poids  $p$  s'exprime par l' "identité d'Euler" :

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

$$df(\hat{H}) = \mathcal{L}_{\hat{H}} f \equiv p.f \quad (\text{ou si } f \in \mathcal{O}(\Sigma) \text{ par } \mathcal{L}_H f \equiv p.f)$$

Par un calcul élémentaire on en déduit maintenant :

LEMME 1.4. - Si  $\hat{X}$  (resp.  $X$ ) est un champ de vecteurs holomorphe sur  $\Delta$  (resp.  $\Sigma$ ) donné par la formule  $\hat{X} = \sum_1^n \hat{X}_j \partial/\partial z_j$  (resp.  $X = \sum_1^n X_j \partial/\partial z_j$ ) avec  $\hat{X}_j \in \mathcal{O}(\Delta)$ . (resp.  $X_j \in \mathcal{O}(\Sigma)$ ), les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $[\hat{H}, \hat{X}] \equiv m\hat{X}$  (resp.  $[H, X] \equiv mX$ ) ,  $m \in \mathbb{Z}$
- ii) Chaque fonction  $\hat{X}_j$  (resp.  $X_j$ ) est de poids  $q_j + m$ .

Si enfin  $X$  est un champ tangent holomorphe sur  $\Sigma$  y vérifiant l'identité  $[H, X] \equiv mX$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , une combinaison du lemme 1.4. et de la remarque 1.3. permet immédiatement de voir que  $X$  est la restriction à  $\Sigma$  d'un champ holomorphe  $\hat{X}$  sur  $\Delta$  (non unique en général avec cette propriété) vérifiant  $[\hat{H}, \hat{X}] \equiv m\hat{X}$  sur tout  $\Delta$ . En particulier :

LEMME 1.5. -  $\Sigma, \Delta, X$ , etc ... étant comme dans l'énoncé du lemme 1.2.,  $X$  est la restriction à  $\Sigma$  d'un champ  $\hat{X}$  défini sur tout  $\Delta$  et y vérifiant  $[\hat{H}, \hat{X}] = -2\hat{X}$ .

Nous allons maintenant en plusieurs étapes en déduire :

LEMME 1.6. - Sous les hypothèses du lemme 1.2. les entiers  $q_i$  définis plus haut sont tous strictement négatifs.

Démonstration. Par un changement de base dans  $\mathbb{C}^n$  qui ne change rien au problème, on peut supposer que  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$  ; on désignera alors par  $r$  (resp.  $s$ ) le plus grand indice  $i$  tel que  $q_i > 0$  (resp.  $q_i \geq 0$ ) avec une convention évidente pour les cas  $r$  ou  $s = 0$  ; clairement  $0 \leq r \leq s \leq n$ . Si maintenant  $\hat{X} = \sum \hat{X}_j \partial/\partial z_j$  est

un champ comme dans le lemme 1.5, montrons d'abord qu'il est nécessairement tangent à la sous-variété fermée  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0 \times \dots \times 0 = \Delta \cap \mathbb{C}^s \times \{0\}$  : il suffit pour cela de vérifier que les fonctions  $\tilde{X}_{s+1}, \dots, \tilde{X}_n$  sont nulles le long de  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times \dots \times 0$ . Mais si on écrit le développement en série de  $\tilde{X}_{s+k}$  ( $1 \leq k \leq n-s$ ) on obtient :

$$\tilde{X}_{s+k}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{q_1 \alpha_1 + \dots + q_n \alpha_n = q_{s+k} - 2} a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

Or comme  $q_1 \geq 0, \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq s$  et que  $q_{s+k} - 2 < 0$ , il n'apparaît aucun terme dans le développement :

$$\tilde{X}_{s+k}(z_1, \dots, z_s, 0 \dots 0) = \sum_{q_1 \alpha_1 + \dots + q_s \alpha_s = q_{s+k} - 2} a_{\alpha_1 \dots \alpha_s, 0 \dots 0} z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s}$$

Si bien que  $\tilde{X}_{s+k}(z_1, \dots, z_s, 0 \dots 0) \equiv 0$ . C.Q.F.D.

Se rappelant que  $\tilde{H}$  est tangent à  $\mathbb{C}^s \times \{0\}$  on va en déduire qu'il est impossible que  $s = n$  i.e. que l'on ait  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n \geq 0$ . Faute de quoi la formule :

$$\tilde{X}_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{q_1 \alpha_1 + \dots + q_n \alpha_n = q_n - 2} b_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$$

permettrait, par un argument presque identique à celui qui précède, de voir que  $\tilde{X}_n(z_1, \dots, z_n) = \text{Cste}$ . Mais la surface  $\Sigma$  ayant par hypothèse une singularité normale isolée en l'origine le lecteur vérifiera que le lemme de Rossi cf. [10] montrerait ici qu'en fait  $\tilde{X}_n \equiv 0$  puisque  $\tilde{X}(0 \dots 0) = 0$ . Si bien que  $\tilde{X}$ , mais aussi d'ailleurs  $\tilde{H}$ , serait tangent à  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0$ . Si  $\dim \Sigma \cap \Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0 = 2$  il résulterait de l'irréductibilité de  $\Sigma$  que en fait  $\Sigma \subset \Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0$ ; mais comme  $\Sigma$  est réduit, on en déduirait que la dimension de Zariski de  $\Sigma$  en l'origine serait  $\leq n-1$ , contradiction ! Si bien que nécessairement  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma \cap \Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0 = 1$ . Mais si  $\Gamma$  est la courbe

$\Sigma \cap \Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0$  et que  $\gamma \in \Gamma_{\text{reg}}$ ,  $X(\gamma)$  et  $\check{H}(\gamma)$  qui seraient tangents à la fois à  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_{n-1} \times 0$  et à  $\Sigma$  seraient tous les deux dans  $T_\gamma(\Gamma_{\text{reg}})$ , comme  $\dim_{\mathbb{C}} T_\gamma(\Gamma_{\text{reg}}) = 1$  on aurait une contradiction avec l'hypothèse i) du lemme 1.2. C.Q.F.D.

On en déduit que  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0 \times \dots \times 0 \cap \Sigma$  est discret i.e. réduit à l'origine si on rétrécit les  $\Delta_i$  : En effet  $\Sigma$  ne saurait être inclus dans  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0$  faute de quoi ( $\Sigma$  réduit)  $\dim_{\mathbb{C}} T_o(\Sigma) = s < n$  contradiction. Mais si  $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma \cap (\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0) = 1$  tenant compte de ce que  $\check{H}$  et  $\check{X}$  sont tangents et à  $\Sigma$  et à  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0$  on trouverait en considérant la courbe  $\Gamma := \Sigma \cap (\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times 0)$ , un point  $\gamma \in \Gamma_{\text{reg}} \subset \Sigma$ ,  $\gamma \neq 0$ , tel qu'encore en ce point les vecteurs  $X(\gamma)$  et  $H(\gamma)$  dans  $T_\gamma(\Gamma)$  soient  $\mathbb{C}$ -linéairement dépendants en contradiction avec les hypothèses du lemme 1.2.

Ceci montre, en rétrécissant si besoin est les disques  $\Delta_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), que la restriction à  $\Sigma$  de la projection  $p_2 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \{0\} \times \mathbb{C}^{n-s}$  définit un morphisme fini  $\check{p}_2 : \Sigma \longrightarrow \{0\} \times \Delta_{s+1} \times \dots \times \Delta_n$  qui, en tant que tel, est propre. On va en déduire que  $\Sigma \subset \{0\} \times \mathbb{C}^{n-s}$  : en effet, si tel n'est pas le cas, il existe  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Sigma$  tel que  $\xi_1, \dots, \xi_s$  soient non tous nuls. Deux cas apparaissent :

1er cas : Il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq r$  avec  $\xi_j \neq 0$ , mais alors il existe un plus petit nombre réel  $t$  nécessairement  $> 1$ , tel que :  $(t^{q_1} \xi_1, \dots, t^{q_s} \xi_s) \in \partial(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s) \subset \mathbb{C}^s$  ; alors  $t \cdot (\xi_1, \dots, \xi_n)$  qui se projette par  $p_2$  sur  $(t^{q_{s+1}} \xi_{s+1}, \dots, t^{q_n} \xi_n) \in 0 \times \Delta_{s+1} \times \dots \times \Delta_n$  ( $q_{s+1} < 0 \dots q_n < 0$  et  $t > 1$ ) est un point adhérent à  $\Sigma$  dans  $\partial(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s) \times \Delta_{s+1} \times \dots \times \Delta_n$ , ce qui contredit le propriété de  $\check{p}_2$ .

2ème cas :  $\forall j$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $\xi_j = 0$ , mais alors  $\forall t > 1$  le point  $(0, \dots, 0, \xi_{r+1}, \dots, \xi_s, t^{q_{s+1}} \xi_{s+1}, \dots, t^{q_n} \xi_n)$  appartient au

sous-ensemble fermé  $\Sigma$  de  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  ; en prenant  $t = +\infty$  on trouve alors que  $(0, \dots, 0, \xi_{s+1}, \dots, \xi_s, 0, \dots, 0) \neq 0$  appartient à  $\Sigma \cap \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  tout en se projetant par  $\tilde{p}_2$  sur  $0$ , ce qui contredit la relation (démontrée plus haut) :  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_s \times \{0\} \cap \Sigma = \{0\}$  .

Mais comme, en l'origine,  $\Sigma \longleftrightarrow \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  est un plongement de Zariski et que  $\Sigma$  est réduit, l'inclusion  $\Sigma \subset 0 \times \mathbb{C}^{n-s}$  montre que  $s = 0$  i.e. montre le lemme 1.6. qui, combiné au théorème de Orkik-Wagreich (cf. [35]), permet alors d'énoncer :

**LEMME 1.7.** -  $\Sigma$  est la trace sur  $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$  d'une variété al-  
brique  $\bar{\Sigma}$  irréductible stable pour la  $\mathbb{C}^*$ -action globale sur  
 $\mathbb{C}^n$  .

N.B. L'hypothèse que les  $q_i$  sont tous strictement négatifs est décisive. Si par exemple  $\Delta \subset \mathbb{C}^3$  désigne ici le polydisque unité et que  $\mathbb{C}^*$  agit avec les degrés  $q_1 = -1, q_2 = 1$  et  $q_3 = 1$  le lecteur vérifiera que l'hypersurface transcendante lisse  $\Sigma \longleftrightarrow \Delta$  définie par  $z_3 - z_2 \sin(\frac{1}{z_1 z_2 + 1}) = 0$  est  $\mathbb{C}^*$ -localement stable et non prolongeable à  $\mathbb{C}^3$  tout entier.

Pour démontrer le lemme 1.2. nous allons maintenant montrer que la surface  $\bar{\Sigma}$  vérifie des propriétés contradictoires : on pourra dire d'une certaine manière qu'on aura résolu un problème local (i.e. portant sur le germe de  $\Sigma$  en l'origine) au moyen de considérations globales.

Pour cela observons d'abord que la négativité des  $q_i$  permet de voir :

i) que le champ  $X = \sum X_j \partial/\partial z_j$  défini sur  $\Sigma$  se prolonge à  $\bar{\Sigma}$  tout entier puisque chaque fonction  $X_j$  homogène de poids  $q_j - 2$  est polynomiale.

ii) que  $\bar{\Sigma}$  est une variété lisse en dehors de l'origine car chaque  $\mathbb{C}^*$ -orbite dans  $\bar{\Sigma}$  rencontre  $\Sigma$ .

En désignant abusivement par  $X$  l'extension à  $\bar{\Sigma}$  tout entier du champ  $X$  défini sur  $\Sigma$ , il est clair qu'on a encore sur  $\bar{\Sigma}$  :  
 $[H, X] \equiv -2X$ .

Considérons maintenant le morphisme fini  $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  défini par  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^{-q_1}, \dots, z_n^{-q_n})$  et soit  $\tilde{\Sigma}_0$  une composante irréductible de  $\phi^{-1}(\bar{\Sigma})$ . Alors :

i)  $\tilde{\Sigma}_0$  est un cône droit dans  $\mathbb{C}^n$ . Plus exactement, si on considère l'action de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^n$  définie par  $t(z_1, \dots, z_n) = (t^{-1}z_1, \dots, t^{-1}z_n)$ ;  $\tilde{\Sigma}_0$  est stable pour cette action qui rend de surcroît le morphisme  $\phi|_{\tilde{\Sigma}_0} : \tilde{\Sigma}_0 \rightarrow \bar{\Sigma}$   $\mathbb{C}^*$ -équivariant.

ii) Cette  $\mathbb{C}^*$ -action définit  $\tilde{\Sigma}_0 \setminus \{0\}$  comme  $\mathbb{C}^*$ -fibré principal au dessus d'une courbe algébrique projective  $S_0$  éventuellement singulière. On observe alors que le choix (cf. i) ci-dessus) de la  $\mathbb{C}^*$ -action sur  $\tilde{\Sigma}_0 \setminus \{0\}$  permet d'y distinguer un "bout nul" et un "bout infini" : ainsi, par exemple,  $\tilde{\Sigma}_0$  peut-il s'interpréter comme compactification  $\mathbb{C}$ -analytique le long du "bout infini" de  $\tilde{\Sigma}_0 \setminus \{0\}$ .

Enfin, l'irréductibilité de  $\tilde{\Sigma}_0$  implique celle de  $S_0$  et donc aussi l'irréductibilité locale de  $\tilde{\Sigma}_0$  en l'origine : en particulier, l'image réciproque de l'origine par le morphisme de normalisation  $\tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}_0$  est réduite à un point noté  $\tilde{0}$ ; il est clair que  $\tilde{\Sigma} \setminus \{\tilde{0}\}$  est un  $\mathbb{C}^*$ -fibré principal au dessus du normalisé  $S$  de  $S_0$  et que, si la  $\mathbb{C}^*$ -action principale sur  $\tilde{\Sigma} \setminus \{\tilde{0}\}$  est choisie de manière à rendre le morphisme  $\tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}_0$  équivariant,  $\tilde{\Sigma}$  est une compactification  $\mathbb{C}$ -analytique de  $\tilde{\Sigma} \setminus \{\tilde{0}\}$  par un point le long du bout infini. Si on dit qu'un  $\mathbb{C}^*$ -fibré principal est ample (resp. positif, négatif, etc ...) lorsque le fibré en droites complexes qui lui est associé

(via la représentation naturelle de  $\mathbb{C}^*$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{C}$ ) est ample (resp. positif, négatif, etc ...), cette compactifiabilité par un point de  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\}$  le long du bout infini implique (théorème de négativité de Grauert, cf. [16]) que le fibré principal  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\} \rightarrow S$  est ample (ou positif).

En désignant maintenant par  $\psi$  le morphisme composé  $\psi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}_0 \xrightarrow{\phi} \bar{\Sigma}$  on voit que par le morphisme fini  $\psi|_{\tilde{\Sigma} \setminus \{0\}} : \tilde{\Sigma} \setminus \{0\} \rightarrow \bar{\Sigma} \setminus \{0\}$ , le champ de Killing de la  $\mathbb{C}^*$ -action sur  $\tilde{\Sigma}$  se projette exactement sur  $H$  qui n'est jamais nul (par contre, on n'a a priori aucun espoir de pouvoir relever le champ  $X$  sur  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\}$ ). On peut donc voir (algèbre linéaire) que  $\forall p \in \tilde{\Sigma} \setminus \{0\}$  l'espace  $\Lambda_p = \psi_*^{-1}(\mathbb{C}X(\psi(p))) \subset T_p(\tilde{\Sigma})$  est un supplémentaire algébrique de l'espace vertical pour la fibration  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\} \rightarrow S$ .

Interprétant localement l'application  $p \mapsto \Lambda_p$  comme une méromorphie dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  et observant que son lieu d'indétermination  $\mathbb{C}^*$ -localement stable ne saurait être de codimension  $\geq 2$  dans  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\}$ , on voit que  $\Lambda_p$  dépend holomorphiquement de  $p \in \tilde{\Sigma} \setminus \{0\}$ . La relation  $[H, X] = -2X$  qui s'écrit aussi :  $t_*^{-1} X(t.\bar{\sigma}) = t^{-2} X(\bar{\sigma}) \forall t \in \mathbb{C}^* \forall \bar{\sigma} \in \bar{\Sigma}$  permet, en se relevant, de voir que le champ d'espaces horizontaux  $p \mapsto \Lambda_p$  est stable pour la  $\mathbb{C}^*$ -action principale i.e. que ce champ définit une connexion principale holomorphe sur  $\tilde{\Sigma} \setminus \{0\} \xrightarrow{\mathbb{C}^*} S$  qui en tant que telle est intégrable : le  $\mathbb{C}^*$ -fibré est donc de classe de Chern de torsion ce qui est contradictoire avec l'amplitude (montrée plus haut) de cette  $\mathbb{C}^*$ -fibration principale. C.Q.F.D.

Donnons alors maintenant un énoncé qui généralise le théorème 1.1. :

**THÉORÈME 1.8.** - Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret d'un groupe de

Lie complexe semi-simple  $G$  et  $Z$  une semi-compactification  $\mathbb{C}$ -analytique équivariante de  $G/\Gamma$ , alors toute composante connexe (et même d'ailleurs irréductible) de  $Z \setminus G/\Gamma$  est de dimension complexe  $\geq 2$ .

Démonstration

Il suffit, compte-tenu du théorème 1.1. de se restreindre au cas  $\dim_{\mathbb{C}} G \geq 4$ , la démonstration consistant alors, via le théorème de linéarisation et la "méthode du drapeau" en une exacte reproduction "mutatis mutandis" de celle donnée par Huckleberry et Oeljeklaus dans [24] pour montrer que le quotient d'un groupe semi-simple par un sous-groupe discret n'est pas semi-compactifiable par un point : plus précisément si  $Y$  est une composante de  $Z \setminus G/\Gamma$  on montre que cette composante n'a pas de point  $G$ -invariant et qu'alors  $G$  opère nécessairement sur  $Y \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  avec une ineffectivité  $G_1 \subsetneq G$  semi-simple et non triviale ce qui permet, si  $y \in Y$ , de linéariser la  $G_1$ -action au voisinage de  $y$  ; si bien que, par un argument déjà utilisé plus haut, la  $G_1$ -action locale fixe un germe d'hypersurface  $\Sigma$  dans  $Z$  transversal à  $Y$  en  $y$  ;  $\Sigma$  étant induit par un supplémentaire  $E$  de  $T_Y(Y)$  dans  $T_Y(Z)$ .

Considérons alors un sous-groupe de Borel  $B_1$  de  $G_1$  : il fixe un drapeau  $\{0\} \subset E_1 \subset \dots \subset E_{v-1} \subset E$  ; il existe donc un  $k \geq 1$  tel que  $\dim_{\mathbb{C}}(E_k \cap \Sigma) = 1$  et, en restreignant si besoin,  $(E_k \cap \Sigma) \setminus \{y\} = (E_k \cap \Sigma) \cap \Omega$  est un sous-ensemble analytique localement fermé 1- $\mathbb{C}$ -dimensionnel de  $G/\Gamma$  stable par la  $B_1$ -action locale ce qui est contradictoire avec :

- 1)  $\dim_{\mathbb{C}} B_1 \geq 2$
- 2)  $\Gamma$  discret dans  $G$

et achève donc de montrer (par l'absurde ...) le théorème 1.8.

CHAPITRE 2

CAS RÉ SOLUBLE ET MIXTE

0.- Lemme de compacité

Ce lemme, utile aussi au chapitre 3, est l'analogie mutatis mutandis, du lemme de compacité déjà utilisé par Huckleberry et Oekjeklaus pour le "Kegel-Satz" (cf. [24]). Dans notre contexte sa démonstration exigera toutefois une utilisation du théorème de Barlet (cf. [5]).

Enonçons d'abord ce lemme de compacité :

LEMME 2.1. - Soit  $Z$  une semi-compactification  $G$ -équivariante d'un espace homogène complexe  $\Omega := G/H$ , s'il existe une composante connexe  $Y_0$  de  $Z \setminus \Omega$  de  $\mathbb{C}$ -dimension  $\leq 1$  et si  $I$  est un sous-groupe de Lie complexe de  $G$  tel que  $H \subset I$  et tel aussi que  $I/H$  soit connexe avec  $\dim_{\mathbb{C}} I/H \geq 2$  on a :

1)  $G/I$  est compact.

2) Et en conséquence l'adhérence de  $I/H$  dans l'ouvert de Zariski  $\Omega \cup Y_0 \hookrightarrow Z$  est un sous-espace analytique fermé de  $\Omega \cup Y_0$  qui est une  $I$ -semi compactification de  $I/H$  (et même a fortiori, en désignant par  $I_0$  la composante connexe de  $I$ , une  $I_0$ -semi-compactification de  $I_0/I_0 \cap H \cong I/H$ ) tel que son ensemble exceptionnel ait une composante connexe  $\neq \emptyset$  de dimension complexe  $\leq 1$ .

Il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme 2.1 avec l'hypothèse supplémentaire  $Z$  normal.

En vue de le démontrer avec cette hypothèse supplémentaire, rappelons que le théorème de Barlet (cf. [5]) affirme l'existence d'une base de voisinages ouverts 1-complets de  $Y_0$  dans  $Z$ . Plus précisément le lecteur vérifiera que le théorème de Barlet permet de démontrer immédiatement :

THÉORÈME 2.2.- Soient  $Z, Y_0$ , etc ... comme ci-dessus ; alors, il est possible de construire une suite décroissante  $V_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de voisinages ouverts 1-complets de  $Y_0$  dans  $Z$  et relativement compacts dans  $Z$ , tels que :

- 1)  $\bar{V}_{n+1} \subset V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2)  $\bigcap V_n = Y_0$ .
- 3) Chaque frontière  $\partial V_n \subset V_{n-1}$  est 1-fortement pseudo-convexe (\*).

Remarque : On notera alors (théorème de pénétration de Rothstein) que tout germe de variété  $S_x$  avec  $\dim_{\mathbb{C}} S_x \geq 2$ , passant par un point  $x \in \partial V$  de la frontière 1-fortement pseudo-convexe d'un voisinage 1-complet  $V$  de  $Y_0$  rencontre le complémentaire de  $\bar{V}$  dans  $Z$ .

Démontrons maintenant par l'absurde le 1) du lemme 2.1 :  
 Considérons la fibration  $\pi : G/H \rightarrow G/I$ . Si  $G/I$  est non compact deux cas sont possibles :

---

(\*) On prendra garde au fait que ceci correspond à 2-fortement pseudo-convexe dans la terminologie de Grauert.

1er cas :  $G/H$  a plus d'un bout, alors par le théorème de Gilligan, ([14], p. 549)  $I/H$  est nécessairement compact et les bouts de  $G/H$  sont les "images réciproques" des bouts de  $G/I$ . La normalité et donc l'irréductibilité locale de  $Z$  montrent qu'à  $Y_0$  correspond un bout de  $G/H$  et donc aussi un bout de  $G/I$ . Il est absolument clair que, si  $x_\nu$  est une suite de points de  $G/I$  tendant vers l'infini dans la direction du bout en question, pour  $\nu$  assez grand,  $\pi^{-1}(x_\nu)$  sera dans  $V$ . En particulier  $\pi(\Omega \setminus V)$  sera un ensemble fermé (propriété de  $\pi!$ ) strictement inclus dans  $G/I$ . Enfin, le morphisme  $\pi$  étant propre et ouvert, on a :  $\partial\pi(\Omega \setminus V) \subset \pi(\partial V)$ . Soit donc  $x \in \partial\pi(\Omega \setminus V) \subset \pi(\partial V)$  et soit  $v \in \partial V$  tel que  $\pi(v) = x$ ; comme le morphisme est ouvert  $\pi^{-1}(x)$  ne saurait rencontrer  $\Omega \setminus \bar{V}$ , si bien qu'au voisinage de  $v \in \partial V$ ,  $\pi^{-1}(x)$  définit un germe de sous-variété de dimension  $\geq 2$  qui ne peut pas rencontrer  $\Omega \setminus \bar{V}$ . Ceci n'est pas possible comme nous l'avons vu plus haut.

2ème cas :  $G/H$  n'a qu'un seul bout, alors le morphisme  $\pi : G/H \rightarrow G/I$  n'est plus nécessairement propre, mais dans ce cas,  $\Omega \setminus V$  et donc  $\pi(\Omega \setminus V)$  est compact; comme le morphisme  $\pi$  est toujours ouvert, on a :  $\partial\pi(\Omega \setminus V) \subset \pi(\partial V)$ . Soit donc  $x \in \partial\pi(\Omega \setminus V)$  et  $v \in \partial V \subset \Omega \setminus V$  tel que  $\pi(v) = x$ . On raisonne alors sur le germe  $\pi^{-1}(x) \ni v$  comme précédemment pour obtenir de nouveau une contradiction.

Pour montrer 2), observons d'abord que toute sous-variété analytique fermée connexe  $F$  avec  $\dim_{\mathbb{C}} F \geq 2$  qui rencontre  $\bar{V}_{n+1} \setminus V_{n+2}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) rencontre alors nécessairement  $\bar{V}_n \setminus V_{n+1}$ : en effet, si tel n'était pas le cas, on aurait évidemment  $F \cap \partial V_{n+1} = \emptyset$  et donc  $F \subset V_{n+1}$ , puisque  $F$  est connexe.

Mais alors  $\bar{F}$  serait en vertu du théorème de Remmert-Stein,

un cycle analytique compact inclus dans  $V_{n+1}$  ce qui, via le théorème de Barlet 2.2, est contradictoire avec le théorème de pénétration de Rothstein.

Ceci démontre qu'en posant  $K_n = \pi(\bar{V}_n \setminus V_{n+1})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) on a la suite d'inclusions de parties compactes non vides dans  $G/I$

$$\dots \supset \pi(K_n) \supset \pi(K_{n+1}) \supset \dots$$

Alors :  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi(K_n) \neq \emptyset$  et si  $\gamma \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi(K_n)$  il est clair, puisque  $\pi^{-1}(\gamma) \cap (\bar{V}_n \setminus V_{n+1}) \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , que :  $\pi^{-1}(\gamma) \cap Y_0 \neq \emptyset$ . La stabilité de  $Y_0$  par  $G$ , ainsi que la  $G$ -équivariance de la fibration  $\pi : G/H \rightarrow G/I$ , montre donc le 2) du lemme 2.1.

### 1.- Le cas résoluble

Énonçons le résultat que nous avons en vue dans ce paragraphe et pour lequel nous indiquerons grossièrement la démarche suivie (voir [T]) :

PROPOSITION 2.3. - Soit  $G$  un groupe de Lie complexe connexe résoluble de dimension complexe  $\geq 3$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret et que  $Z$  est semi-compactification  $\mathbb{C}$ -analytique  $G$ -équivariante de  $\Omega = G/\Gamma$  alors pour toute composante connexe  $Y$  de  $Z \setminus \Omega$  il est impossible que  $\dim_{\mathbb{C}} Y \leq 1$ .

Via la version "complexifiée" suivante (cf. [H.O.]) d'un théorème d'Auslander :

THÉORÈME 2.4. - Soit  $R$  un groupe de Lie complexe connexe résoluble et soit  $H \subset R$  un sous-groupe de Lie complexe. Alors, dès que  $\dim_{\mathbb{C}} R/H \geq 2$  si  $R/H$  n'est pas un tore complexe simple, il existe un sous-groupe de Lie complexe propre  $I$  de  $R$  tel

que  $I \supset H$  et  $\dim_{\mathbb{C}} I/H \geq 1$  et  $I/H$  connexe.

Le lemme de compacité permet de ramener la démonstration de la proposition 2.3. au lemme suivant :

LEMME 2.5.- Soit  $G$  un groupe de Lie complexe connexe résoluble tel que  $\dim_{\mathbb{C}} G \geq 3$ ,  $\Gamma$  un sous-groupe discret et  $Z$  une semi-compactification  $\mathbb{C}$ -analytique  $G$ -équivariante de  $G/\Gamma = \Omega$  tel qu'il existe un sous-groupe de Lie complexe  $J \supset \Gamma$  avec  $\dim_{\mathbb{C}} J \leq 2$  et tel que  $G/J$  soit un tore complexe et tel encore que  $J/\Gamma$  soit connexe. Alors, pour toute composante connexe  $Y$  de  $Z \setminus \Omega$ , il est impossible que  $\dim_{\mathbb{C}} Y \leq 1$ .

Une étude exhaustive (et fastidieuse ...) de toutes les possibilités, au nombre de sept, pour la surface homogène résoluble  $J/\Gamma$  permet alors de démontrer le lemme 2.5. Notons que lorsque la composante neutre  $J_0$  de  $J$  est non commutative la classification de J. Snow (cf. [39]) permet de notables simplifications.

## 2.- Le cas mixte

Ce paragraphe sera consacré à donner des indications sur la démonstration du :

THÉOREME 2.6. - Soit  $G$  un groupe de Lie complexe et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  et  $Z$  une semi-compactification  $\mathbb{C}$ -analytique  $G$ -équivariante de  $G/\Gamma$ . Alors, si  $\dim_{\mathbb{C}} G \geq 3$ , aucune composante connexe  $Y$  de  $Z \setminus G/\Gamma$  n'est de dimension (sur  $\mathbb{C}$ )  $\leq 1$ .

Si  $G$  est semi-simple (resp. résoluble) la théorème 2.6. est exactement le théorème 1.7 (resp. 2.3) il suffit donc de considérer le cas mixte i.e. celui de  $G$  (ou un de ses revêtements) admet une

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

décomposition semi-directe de Levi-Malcev  $G = R \times S$ . Mais ici encore une utilisation combinée du théorème de linéarisation et de la méthode du drapeau permet de montrer que  $S = SL(2, \mathbb{C})$  (ou  $SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$ ) opère transitivement sur  $Y \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ .

Cette structure nécessaire de la partie semi-simple de  $G$  va permettre, via le lemme de compacité 2.1, de déduire l'énoncé 2.6 pour le cas mixte de l'énoncé correspondant pour le cas résoluble i.e. de la proposition 2.3 et ce, essentiellement grâce à la "version complexe" du théorème d'Auslander que nous allons maintenant donner :

THÉOREME 2.7. - (cf. [2], p. 147 et [H.O.], prop. 9, p. 53).

Soit, comme plus haut,  $G$  un groupe de Lie complexe donné par un produit semi-direct de Levi-Malcev  $G = R \times S$  et dont  $\Gamma$  soit un sous-groupe discret : il existe alors un sous-groupe de Lie complexe fermé  $J$  tel que :

- i)  $R\Gamma \subset J \subsetneq G$ .
- ii)  $J/\Gamma$  est connexe.

En particulier par la fibration  $\pi : G \rightarrow S$  ( $\text{loc}^t \cong SL(2, \mathbb{C})$ ) de noyau  $R$ ,  $J$  a une image fermée  $\overset{\vee}{J} \subsetneq S$ . De plus dans ce contexte on a :

LEMME 2.8.-  $\overset{\vee}{J}$  est nécessairement discret et Zariski-dense dans  $S$  dès que  $G/\Gamma$  est  $G$ -semi-compactifiable par une courbe ou un point.

Indication sur la démonstration. - Une combinaison aisée des théorèmes de Gilligan [14] et du théorème d'extension de Riemann-Hartogs permet immédiatement d'exclure le cas où  $\overset{\vee}{J}$  est fini (puisque alors  $\emptyset (S/\overset{\vee}{J}) \neq \mathbb{C}$ ) ; si bien,  $J_0$  désignant maintenant la com-

posante neutre de  $\tilde{J}$ , que la non Zariski-densité de  $\tilde{J}$  dans  $S$  ne serait possible que dans deux cas seulement :

1er cas : Il existe un sous-groupe de Borel  $B \subset S$  tel que  $\tilde{J} \subset N_S(\tilde{J}_0) \subset B$ . (C'est notamment le cas lorsque l'adhérence de Zariski de  $\tilde{J}_0$  dans  $S$  est un sous-groupe unipotent mais aussi lorsque l'adhérence de  $\tilde{J}$  est un tore algébrique connexe de  $S$ ). En considérant alors le produit semi-direct connexe image réciproque  $\hat{B} = \pi^{-1}(B) = R \times B$  on obtiendrait une fibration de base compacte :

$$0 \longrightarrow \hat{B}/\Gamma \longrightarrow G/\Gamma \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

si bien, puisque  $\dim_{\mathbb{C}} \hat{B}/\Gamma \geq 3 \geq 2$ , que  $\hat{B}/\Gamma$  admettrait (cf. 2) du lemme de compacité 2.1) une  $\hat{B}$ -semi-compactification par un point ou une courbe ce qui est contradictoire par la proposition 2.3 avec la résolubilité de  $\hat{B}$ .

2ème cas : Il existe un tore algébrique connexe  $H \subset S$  pour lequel  $\tilde{J}_0 \subset H$  mais tel par contre que  $\tilde{J} \not\subset H$ . Le normalisateur  $N_S(H)$  de  $H$  dans  $S$  vérifie alors :

- i)  $N_S(H)/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- ii)  $\tilde{J} \subset N_S(H)$ .

En considérant de nouveau le produit semi-direct image réciproque  $\hat{N} = \pi^{-1}(N_S(H)) = R \times N_S(H)$  il est clair que  $\hat{N} \supset J$  et que  $\hat{N}/J$  est connexe ; mais alors par le 1) du lemme de compacité 2.1,  $\dim_{\mathbb{C}} \hat{N}/\Gamma \geq 2$  entraînerait que  $G/\hat{N} = S/N_S(H)$  serait compact. Contradiction.

Les démonstrations qui précèdent montrent même, non seulement que  $\tilde{J}$  est Zariski-dense dans  $S$ , mais aussi qu'il est discret et qu'on peut donc prendre  $J = R \cdot \Gamma$  et  $\tilde{J} = \pi(\Gamma) \subset S$ . D'où la fibration

holomorphe :

$$(F) \quad 0 \longrightarrow R/R \cap \Gamma \longrightarrow G/\Gamma \longrightarrow S/\pi(\Gamma) \longrightarrow 0 .$$

Si  $\dim_{\mathbb{C}} R = 1$  le produit  $R \times S$  est direct et  $R \cap \Gamma = \{e\}$  : si  $R$  est une courbe elliptique on aboutit immédiatement, via le théorème de linéarisation, à une contradiction, si  $R = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C}^*$  on sait, via la Zariski-densité de  $(\Gamma, \Gamma)$  dans  $S$  et un théorème de Tits (cf. [43]) qu'existe un tore algébrique  $H \subset S$  tel que  $H/H \cap \Gamma \longrightarrow G/\Gamma$  soit une courbe elliptique. Mais alors si  $Y_0 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est une composante de  $Z \setminus \Omega$ ,  $H$  en fixerait deux points distincts  $y_0 \in Y_0$  et  $y_1 \in Y_0$ . La démonstration consiste alors à linéariser la  $H$ -action locale dans un voisinage (par exemple)  $W_0$  de  $y_0 \in Y_0$  et alors de trouver  $r \in R$  et  $t \in H/H \cap \Gamma$  tel que  $rt \in W_0$  ait, lorsqu'on interprète  $W_0$  comme une partie de  $T_{Y_0}(Z)$  un stabilisateur dans  $H$  qui contient  $H \cap \Gamma$  ce qui contredit l'algébricité de la représentation linéaire de  $H$  dans  $T_{Y_0}(Z)$ . Enfin, si  $R$  est de dimension 2, écrivons la fibration :

$$0 \longrightarrow R/R \cap \Gamma \longrightarrow G/\Gamma \xrightarrow{\pi} S/\pi(\Gamma) \longrightarrow 0$$

on sait que  $\pi(\Gamma)$  est discret et Zariski-dense dans  $S$  et donc qu'existe un tore algébrique  $H \subset S$  tel que  $H/H \cap \Gamma$  soit une courbe elliptique (théorème de Tits, cf. [43]). D'autre part en vertu du lemme de compacité 2.1 2),  $\overline{R/R \cap \Gamma}$  rencontre  $Y_0$ , si bien que  $\pi^{-1}(H/H \cap \pi(\Gamma))$  qui est un espace homogène de  $\mathbb{C}$ -dimension  $\geq 3$  parallélisé sous l'action du groupe résoluble  $\overset{\vee}{H} = R \times H$  est semi-compactifiable par une courbe ou un point ce qui contredit la proposition 2.3 et achève de démontrer l'énoncé 2.6.

## CHAPITRE 3

## LEMME DE FIBRATION : GÉNÉRALITES

Soient  $G, H, \Omega: = G/H, Z, Y: = Z/\Omega$ , etc ... comme dans l'introduction. L'objet de la deuxième partie de cet article, qui débute par le présent chapitre, sera de classer tous les  $Z$  comme ci-dessus pour lesquels :

- 1)  $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$  et  $Z$  normal et compact.
- 2)  $\dim_{\mathbb{C}} Y \leq 1$ .

Ce qui rend le problème désormais accessible (via [Po]) est essentiellement le lemme de fibration qui suit immédiatement et qui généralise le théorème 3, p. 85 de [H.O] :

LEMME 3.1. - Soient  $Z, G, H$  etc ... comme ci-dessus vérifiant les hypothèses 1) et 2 ci-dessus, alors il existe un sous-groupe parabolique  $P \subset G$  contenant  $H$  tel que la fibre  $\Omega_P := P/H$  de la fibration holomorphe  $\phi : G/H \rightarrow G/P$  soit de dimension complexe  $\leq 2$ .

Démonstration : En effet si on considère la fibration de Tits  $G/H \rightarrow G/N_G(H_0)$ , le théorème 2.6. de la première partie, permet de voir que  $N_G(H_0) \neq G$ . Le corollaire 6, p. 49 [H.O] s'applique alors et, si on considère un groupe parabolique minimal  $P$  qui contient  $N_G(H_0)$ , on voit que nécessairement  $\dim_{\mathbb{C}} P/H \leq 2$  faute de quoi, d'une part,

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

une application des théorèmes de Remmert-Stein et de Hartogs montrerait que  $\mathcal{O}(P/H) = \mathbb{C}$  et d'autre part, une application du lemme 2.1. et du théorème 2.6. de la première partie montrerait que  $\dim_{\mathbb{C}} N_G(H_0)/H_0 \leq 2$ , ce qui (si  $\dim_{\mathbb{C}} P/H > 2$ ) impliquerait que  $N_P(H_0) \not\subset P$ , en contradiction (cf. [H.O] Corollaire 6, p. 49) avec l'hypothèse de minimalité faite sur  $P$ . C.Q.F.D.

On peut voir alors assez aisément que le morphisme de fibration  $G/H \rightarrow Q := G/P$  se prolonge en une méromorphie  $Z \dashrightarrow G/P$  et qu'en particulier, même si  $\dim_{\mathbb{C}} P/H = 1$ ,  $\overline{P/H}$  est un sous-espace analytique fermé de  $Z$  dont  $\Omega_F := P/H$  est un ouvert de Zariski.

Dans tout ce qui suivra, nous désignerons par  $F$  une désingularisation  $P$ -équivariante "minimale" de  $\overline{P/H}$  en ce sens que si  $F'$  est une autre  $P$ -désingularisation de  $\overline{P/H}$  telle qu'on ait un diagramme  $P$ -équivariant commutatif de modifications :

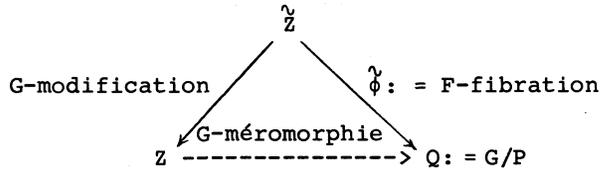
$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\chi_0} & \overline{P/H} \\ & \searrow & \nearrow \\ & F' & \end{array}$$

on sache aussitôt que  $F' = F$  ; on peut aisément en démontrer l'existence. Si  $F_0$  est un modèle minimal de la surface  $F$  en général  $F \neq F_0$  : on dira, pour plus de précisions, que  $F$  est un "modèle  $P$ -minimal" .

La connexité de  $P$  permet, via la modification  $F \rightarrow F_0$ , de définir  $F_0$  comme surface de Potters  $P$ -quasi homogène d'orbite ouverte  $\Omega_F$  ; on a alors clairement une  $P$ -méromorphie  $F_0 \dashrightarrow \overline{P/H}$  qui prolonge  $\text{Id}_{\Omega_F}$  .

Associée à cette  $P$ -désingularisée minimale  $F$  de  $\overline{P/H}$  introduisons la  $G$ -désingularisée  $\tilde{Z}$  de  $Z$  définie par :  $\tilde{Z} := G \times^P F$  .

$\tilde{Z}$  qui est un F-fibré holomorphe au-dessus de  $G/P$  est donc lisse et  $G$  quasi-homogène. Résumons tout ceci par le "G-diagramme" :



Naturellement  $\phi = \tilde{\phi}|_{\Omega} : G/H \rightarrow G/P$ .

$R$  (resp.  $S$ ) désignant maintenant le radical (resp. une partie semi-simple) de  $G$ , on voit que  $R$  (resp.  $S$ ) agit trivialement (resp. transitivement) sur  $G/P$ . On en déduit l'isomorphisme  $S/S \cap P \cong G/P$  et l'écriture semi-directe  $P = R \cdot (S \cap P)$ .

La  $G$ -équivariance de  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  permet alors de voir (cf. [3] p. 48-49) que le groupe structural de chacune de ces deux fibrations peut être réduit au sous-groupe parabolique  $S \cap P \subset S$ .

Si maintenant  $Y_0$  est une composante résiduelle de  $Z$ , la normalité de  $Z$  implique que  $\tilde{Y}_0 := \chi_0^{-1}(Y_0)$  est exactement une composante résiduelle de  $\tilde{Z}$ .

On se persuadera alors que chacune des trois propriétés qui suivent est indépendante du choix de la partie semi-simple  $S$  :

1) Il existe une composante résiduelle  $Y_0$  de  $Z$  telle que  $S$  opère transitivement sur  $\tilde{Y}_0$  et donc sur  $Y_0 = \chi_0(\tilde{Y}_0)$ .

2) La situation précédente ne se produit pour aucune composante résiduelle de  $Z$  mais il en existe au moins une,  $Y_0$ , sur laquelle  $S$  opère transitivement, ce qui (équivariance de  $\chi_0$ ) implique qu'alors  $S$  admet une orbite fermée hypersurfacique dans  $\tilde{Y}_0$  i.e. de codimension 2 dans  $\tilde{Z}$ .

3)  $S$  opère trivialement sur chaque composante résiduelle  $Y_0$  de  $Z$ .

En fait, comme une orbite connexe 1- $\mathbb{C}$ -dimensionnelle sous  $S$  ne peut être que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , la  $S$  équivariance de  $\tilde{\phi}$  montre que seuls ces trois cas sont à envisager. Nous les désignerons respectivement par cas n° 1, 2 et 3. On observera à ce propos que, si  $\dim_{\mathbb{C}} F = 1$ , nous sommes immédiatement dans le cas n° 1 car,  $F \setminus \Omega_F$  étant discret, la  $S$ -équivariance de  $\tilde{\phi}$  montre que toute  $S$ -orbite d'un point  $\epsilon \in F \setminus \Omega$  dans  $\tilde{Z}$  est alors compacte et de codimension 1. i.e. est une composante connexe de  $\tilde{Z} \setminus \Omega$ .

## CHAPITRE 4

## CAS N° = 1

C'est le cas le plus simple ; les idées de [H.O], mutatis mutandis, s'y transposent complètement. On distinguera les sous-classes I', I'' et II.

§1. Classe I' :  $\dim_{\mathbb{C}} F = 1$  et  $\Omega$  n'a qu'un seul bout ; nécessairement  $P/H \cong \mathbb{C}(\pi_1(G/P) = 0)$  et  $F = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . On peut montrer qu'alors existent deux sous-groupes distingués  $S_1$  et  $S_2$  dans  $S$  admettant respectivement des sous-groupes paraboliques  $P_1$  et  $P_2$  tels qu'on ait les produits presque-directs  $S = S_1 \cdot S_2$ ,  $P = P_1 \cdot P_2$  ;  $S_2$  étant ici en fait l'ineffectivité de la  $S$ -action sur  $Y_0$ , on voit que  $S_1/P_1 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  et que si  $Q_2 := S_2/P_2$ , on a le produit  $Q = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times Q_2$ .

En utilisant entre autres le "Kegelsatz" (cf. [24]) on peut montrer qu'existent  $k \in \mathbb{Z}$  et un fibré très ample  $\eta$  sur  $Q_2$  tel que  $\Omega$  soit l'espace total du fibré en droites complexes  $\xi := \mathcal{O}(k) \boxtimes \eta$  au dessus de  $Q^{(*)}$  et que  $\tilde{Z}^{\vee}$  soit le complété projectif  $\tilde{Z} := \mathbb{P}(\xi \otimes \mathcal{O})$ .

---

(\*)  $\boxtimes$  désigne le produit tensoriel externe.

Le géométrie de  $Z$  est alors claire : la restriction de  $\xi$  à chaque ensemble  $\{p_1\} \times Q_2$  ( $p_1 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ) est ample et l'espace total de cette restriction est quasi-homogène sous  $R.S_2.P_1$  qui est un sous-groupe fermé de  $G$ . On peut donc compactifier, d'une manière unique à isomorphisme près, cet espace total pour obtenir le cône projectif normal  $C_\eta$ , associé au fibré ("arithmétiquement" normal)  $\eta$  de base  $Q_2$ .

Ces cônes se recollent de manière naturelle en un  $C_\eta$ -fibré normal,  $Z = G \times^{R.S_2.P_1} C_\eta$  au-dessus de  $G/RS_2P_1 \cong S_1/P_1$  clairement  $G$ -quasi-homogène ; le complémentaire de la  $G$ -orbite dense étant le lieu  $\cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  des sommets de ces cônes. L'espace  $Z$  étant clairement normal, eu égard au fibré  $\eta$  et à l'entier  $k \in \mathbb{Z}$  on le désignera par  $C_{\eta,k}$ . Observons alors que :

$$1) C_{\eta,0} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times C_\eta$$

2) Si  $k > 0$   $C_{\eta,k}$  peut aussi être interprété comme modification d'un cône projectif de base  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times Q_2$  par "éclatement partiel" (ou "relatif") de son sommet. (Transformation généralisant les classiques désingularisations de Segré).

§2. Classe I" :  $\dim_{\mathbb{C}} F = 1$  et  $\Omega$  a deux bouts.  $\Omega$  est alors l'espace total d'un  $\mathbb{C}^*$ -fibré au-dessus de  $G/P$ . On peut alors montrer que nécessairement  $G/P \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , et qu'on peut trouver  $k > 0$  et  $\ell < 0$  tels que, à isomorphisme près,  $\Omega$  s'interprète comme le complémentaire de la section nulle dans l'espace total du fibré en droites  $\xi := \mathcal{O}(k) \boxtimes \mathcal{O}(\ell)$  au-dessus de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . On voit donc encore comment s'obtiennent les espaces  $Z$  recherchés (cf. toujours [30] à ce sujet) : On contracte chaque section infinie (resp. chaque section nulle) de la restriction de  $\xi$  à  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \{p_2\}$  (resp. à  $\{p_1\} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ) en un point pour obtenir par recollement (détails

laissés au lecteur ...) un espace normal que nous désignerons par  $P_{k,\ell}$ . Réciproquement, les espace  $P_{k,\ell}$  ( $k > 0, \ell < 0$ ) obtenus par ce procédé sont quasi-homogènes et décrivent exhaustivement la classe I".

Observons que  $P_{1,\ell}$  (resp.  $P_{k,-1}$ ) est lisse à l'"infini" (resp. le long du bout nul) et que le cas lisse envisagé par [H.O] est  $P_{1,-1} \cong P_3(\mathbb{C})$ , avec  $\Omega$  = complémentaire de deux droites projectives disjointes.

§3. Classe II : i.e. Cas n° 1 avec  $\dim_{\mathbb{C}} F = 2$ . Alors exactement comme dans [H.O] on peut montrer :

- 1)  $F_0$  est rationnelle
- 2)  $\Omega_F$  et  $\Omega$  n'ont qu'un bout et  $Y = Y_0 = Z \setminus \Omega \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ .
- 3) Qu'en fait  $F \cong F_0 \cong \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ,  $\Omega_F$  étant la partie  $\cong \mathbb{C}^2$  "à distance finie" de ce plan projectif complexe.

En plusieurs petites étapes il est aisé aussi de montrer qu'il existe un fibré en droites très ample  $\eta$  sur  $Q := G/P$  tel que  $\Omega_F$  soit l'espace total du fibré de rang 2  $\eta \oplus \eta$  au dessus de  $Q$  et que  $\tilde{Z}$  en soit la complétion projective  $\mathbb{P}(\eta \oplus \eta \oplus \mathcal{O}_Q)$ .

On observe alors que le fibré normal sur  $\tilde{Y} = \tilde{Z} \setminus \Omega = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times Q$  est  $\mathcal{O}(1) \boxtimes \eta^{-1}$  et que (théorème de Grauert "avec paramètre" (\*) combiné avec des "identifications et recollements", détails laissés au lecteur) il existe alors un espace normal  $Z$  ainsi qu'une modification  $\chi : \tilde{Z} \rightarrow Z$  qui consiste essentiellement à contracter chaque

---

(\*) Bien que l'on puisse ici s'en dispenser, le lecteur pourra consulter pour une version relative du théorème de Grauert : l'article de Knorr-Schneider : "Relativ exceptionnelle analytische Mengen" Math. Ann. 193(1971)p. 238-254.

ensemble  $\{p\} \times Q \subset \mathcal{Y}$  en un point. Cet espace  $Z$  est l'espace le plus général de classe II ; eu égard au fibré très ample  $\eta$  on le désignera par  $D_\eta$ .

L'espace  $D_\eta$  se décrit plus concrètement comme suit : le fibré très ample  $\eta$  définit un plongement  $Q \hookrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ . Réalisant alors  $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$  comme variété linéaire de codimension 2 dans  $\mathbb{P}_{N+2}(\mathbb{C})$  et considérant une droite  $\delta \subset \mathbb{P}_{N+2}(\mathbb{C})$  d'intersection vide avec  $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ , la réunion des droites rencontrant à la fois  $Q$  et  $\delta$  est un modèle de  $D_\eta$  comme le lecteur pourra s'en persuader (utiliser entre autres la normalité arithmétique de  $Q$  dans  $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ ).

## CHAPITRE 5

## CAS N° = 2 , CLASSE III

§1. Généralités et rappels : En sus du présent §1, ce chapitre contient deux paragraphes : dans le §2 nous associerons à la donnée d'une paire d'entiers  $\alpha, n \geq 1$  non simultanément égaux à 1 et d'un fibré en droites très ample  $\eta$  au dessus d'une variété rationnelle homogène  $\tilde{Q}$ , un espace quasi-homogène  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  de classe III sous l'action d'un groupe de Lie complexe  $G \subset \text{Aut}_O(\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta})$ . De manière surprenante démontrer que  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  est bien l'espace le plus général de classe III est relativement long et difficile : le §3 est consacré à donner des indications sur cette démonstration.

Précisons d'abord certains points de terminologie : si  $X$  est une variété projective lisse et que  $D$  en est un diviseur (non nécessairement effectif) on désignera par  $|D|$  le système linéaire complet des diviseurs effectifs qui lui sont linéairement équivalents. Si  $A \hookrightarrow X$  est une sous-variété lisse il existe (moving lemma ...) deux diviseurs effectifs  $D_1$  et  $D_2$  dans  $X$  tels que :

- i)  $D_1$  et  $D_2$  coupent proprement  $A$  y induisant (comptés avec multiplicité d'intersection) des diviseurs effectifs notés  $D_1|_A$  et  $D_2|_A$  ;
- ii)  $D \sim D_1 - D_2$  (équivalence linéaire) .

On appellera alors système virtuellement induit par  $D$  sur  $A$

le système linéaire  $|D_1|_A - D_2|_A|$ . Il est complètement défini par  $|D|$  et on l'écrira  $|D|_A$ ; plus souvent encore, le contexte étant clair, on l'appellera plus brièvement le système virtuel. Rappelons que ce système virtuel est le système linéaire complet associé à la restriction à  $A$  du fibré en droites complexes  $\mathcal{O}(D)$ . Si tout diviseur de  $|D|_A$  est la trace (comptée avec multiplicité) d'un diviseur de  $|D|$  on dira que le système virtuel est totalement induit; l'exactitude  $0 \rightarrow \mathcal{I}(A) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \mathcal{O}(D)|_A \rightarrow 0$  montre qu'une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est :

$$H^1(X, \mathcal{I}(A) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(D)) = 0 .$$

Si  $X$  est une variété rationnelle, on identifiera souvent, le contexte étant clair, une classe d'équivalence linéaire de diviseurs (non nécessairement effectifs) avec sa classe de Chern. En particulier, si  $c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ , on désignera par  $|c|$  le système linéaire complet des diviseurs effectifs de classe de Chern  $c$ .  $A$  étant une sous-variété rationnelle de  $X$  rappelons que l'inclusion  $i: A \hookrightarrow X$  permet alors d'écrire :  $|c|_A = |i^*c|$ .

Souvent il arrivera que nous ayons à considérer sur une variété holomorphe  $B$  des extensions holomorphes :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \xi \rightarrow L \rightarrow \eta \rightarrow 0$$

$\xi$  et  $\eta$  désignant des fibrés en droites complexes et  $L$  un fibré vectoriel holomorphe de rang 2. On définit alors sur le projectif  $\mathbb{P}(L)$  un diviseur appelé "section infinie" noté  $s_\infty(L)$ , ou plus brièvement  $s_\infty$ , par l'inclusion  $\mathbb{P}(\xi) \hookrightarrow \mathbb{P}(L)$ . Rappelons alors que si  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  et si  $\lambda$  désigne la  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -fibration holomorphe  $\lambda: \mathbb{P}(L) \rightarrow B$ , on a, pour les images directes et dérivées de  $\mathcal{O}(\alpha s_\infty)$  par  $\lambda$ , les formules :

$$(2) \quad R^i \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_\infty) = 0 \quad i \geq 1 \text{ et } R^0 \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_\infty) = S^\alpha(L^* \otimes \eta)$$

le dernier terme désignant ici la puissance symétrique  $\alpha^{\text{ème}}$  du fibré de rang 2  $L^* \otimes \eta$ . Dans le cas particulier où  $\eta = \mathcal{O}_B$  et  $L = \xi \otimes \mathcal{O}_B$ ,  $\mathbb{P}(L)$  n'est rien d'autre que le complété projectif ou "à l'infini" de  $\xi$  et  $s_\infty$  la classique "section infinie" qu'il faut adjoindre à l'espace total de  $\xi$  pour obtenir son complété, et que nous noterons  $s_\infty(\xi)$ , (2) se réécrivant alors :

$$(3) \quad R^i \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_\infty(\xi)) = 0 \quad i \geq 1 \text{ et } R^0 \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_\infty(\xi)) = \mathcal{O} \otimes \xi^{-1} \otimes \dots \otimes \xi^{-\alpha}.$$

Par opposition, nous appellerons "section finie" du complété projectif de  $\xi$  un diviseur "à distance finie" sur  $\mathbb{P}(\xi \otimes \mathcal{O})$  donné par l'image d'une section  $B \rightarrow \xi$ . On désignera génériquement l'une quelconque d'entre elles par  $s_0(\xi)$ . Notons qu'une section finie est privilégiée parmi toutes les autres : la section finie de  $\xi$  qui, modulo l'isomorphisme  $\mathbb{P}(\xi \otimes \mathcal{O}_B) \cong \mathbb{P}(\xi^{-1} \otimes \mathcal{O}_B)$ , s'identifie à la section infinie du complété projectif de  $\xi^{-1}$ . (2) s'exprime alors par :

$$(4) \quad R^i \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_0(\xi)) = 0 \text{ si } i \geq 1 \text{ et } R^0 \lambda_* \mathcal{O}(\alpha s_0(\xi)) = \mathcal{O} \otimes \xi \dots \otimes \xi^\alpha.$$

Un diviseur, effectif ou non, sur le complété à l'infini de  $\xi$  linéairement équivalent à une section finie, sera désormais appelé section finie virtuelle. En particulier, si  $D$  est un diviseur de  $B$  tel que  $\xi = \mathcal{O}(D)$  on se rappellera que  $s_\infty(\xi) + \lambda^*(D)$  est une section finie virtuelle (effective si  $D$  l'est aussi).

Observons enfin qu'en terme d'intersection de cycles (ou, via, la dualité de Poincaré, en terme de cup-produit des classes de cohomologie correspondantes) on a :  $s_0(\xi) \cdot s_\infty(\xi) = 0$ .

Cas particulier des surfaces de Hirzebruch : si maintenant  $r$  est un entier  $\geq 1$ , l'espace total  $\Sigma_r$  du complété à l'infini du

fibré  $\mathcal{O}(r)$  sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  s'appelle  $r^{\text{ème}}$  surface de Hirzebruch :  
 $\Sigma_r := \mathbb{P}(\mathcal{O}(r) \oplus \mathcal{O})$ .  $\Sigma_r$  est donc naturellement un  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -fibréholomorphe sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  par un morphisme  $\tilde{\omega}_r : \Sigma_r \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , qu'on désignera aussi plus simplement, le contexte étant clair, par  $\tilde{\omega}$ .

Par  $\nu_r$ , ou même plus brièvement  $\nu$  (resp. par  $\varepsilon_r$ , ou même  $\varepsilon$ ), le contexte étant clair, on désignera tantôt un diviseur "fibre" de la forme  $\tilde{\omega}_r^{-1}(p)$  (resp. une "section finie" de  $\Sigma_r$ ), tantôt sa classe de Chern, tantôt même la classe d'équivalence linéaire de  $\nu$  (resp.  $\varepsilon$ ). Pour désigner un élément de cette dernière classe, on parlera souvent de "diviseur de type  $\nu$ " (resp. "de type  $\varepsilon$ "). Enfin  $E_r$ , ou même  $E$ , désignant la section infinie  $s_\infty(\mathcal{O}(r)) \subset \Sigma_r$ , tout ce qui précède s'écrit alors dans ce cas particulier :

$$(5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &\sim E_r + r\nu_r \\ R_{\tilde{\omega}_r}^{\mathcal{O}} \mathcal{O}(\alpha\varepsilon) &= \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(r) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(\alpha r) \quad \text{si } \alpha \geq 0 \\ R_{\tilde{\omega}_r}^{\mathcal{O}} \mathcal{O}(\beta\nu) &= \mathcal{O}(\beta) \\ R_{\tilde{\omega}_r}^{\mathcal{O}} \mathcal{O}(\varepsilon) &= \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(r) \end{aligned}$$

Observons aussi que la cohomologie de  $\Sigma_r$  est nulle en dimension impaire, que  $H^2(\Sigma_r, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\varepsilon \oplus \mathbb{Z}\nu$  et que  $\varepsilon \cup \nu = \varepsilon \cdot \nu$  est la classe fondamentale de  $H^4(\Sigma_r, \mathbb{Z})$ . La structure d'anneau de  $H^*(\Sigma_r, \mathbb{Z})$  étant alors complètement déterminée par les formules  $\varepsilon^2 = r\varepsilon\nu$  et  $\nu^2 = 0$  (cf. [6] et [9]).

§2. Construction des  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  : Soit  $S_2$  un groupe semi-simple complexe dont  $P_2$  est un groupe parabolique et considérons un fibré en droites complexes très ample  $\eta$  sur  $\tilde{Q} := S_2/P_2$ .

En posant  $S_1 = \text{Aut}_0(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  il est clair que  $Q := \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$  est rationnelle homogène sous  $S_1 \times S_2$ . Considérons alors, sur  $Q$ , le fibré en droite très ample  $\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta$  ( $n \geq 1$ ) et,

par abus de notation désignons par  $\phi_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta) \oplus \mathcal{O}_Q$  son complété projectif ; c'est un  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -fibré holomorphe par la fibration naturelle  $\tilde{\omega} : \phi_n \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$ . Via  $\rho := p_2 \circ \tilde{\omega}$ ,  $\phi_n$  est un  $\Sigma_n$ -fibré holomorphe sur  $\tilde{Q}$  : On dira aussi quelquefois que  $\phi_n$  est une "surface de Hirzebruch  $\Sigma_n$  relative".

Par  $E$  nous désignerons la "section infinie" de  $\phi_n$  et par  $\epsilon$  un diviseur "section finie" (cf. §.1), il est alors clair que :

1)  $\phi_n$  est quasi-homogène sous le produit semi-direct  $H^0(Q, \mathcal{O}(n) \boxtimes \eta) \times (S_1 \times S_2)$ , l'orbite ouverte étant  $\phi_n \setminus E$ .

2) La très amplitude de  $\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta$  a pour conséquence que les sections finies séparent les points de  $\phi_n \setminus E$ . (Les "sections finies virtuelles effectives" séparant même infinitésimalement ces points).

Si maintenant  $p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , on désignera génériquement par  $v$  un diviseur de la forme  $\tilde{\omega}^{-1}(\{p\} \times \tilde{Q})$  qu'on appellera aussi "diviseur fibre relatif sur  $\phi_n$ " ou même "diviseur de (type)  $v$ " sur  $\phi_n$ . On comprendra aussi le sens de l'expression "diviseur  $v$  virtuel" etc ...

Si on désigne maintenant par  $\text{div}(\eta)$  un diviseur sur  $\tilde{Q}$  tel que  $\mathcal{O}(\text{div}(\eta)) = \eta$ ,  $E + nv + \rho^*(\text{div}(\eta))$ , est alors (cf. §.1) une "section finie virtuelle" de  $\phi_n$ , d'ailleurs effective si, ce qui est possible,  $\text{div}(\eta)$  l'est aussi. Au sens de l'intersection des cycles (ou du cup-produit des classes de cohomologie correspondantes) on en déduit aisément :

$$\epsilon^2 = \epsilon \cdot (nv + \rho^*(\text{div}(\eta)))$$

$$\epsilon \cdot E = v^2 = 0 .$$

Et aussi (cf. §.1) pour  $\alpha \geq 0$ , la formule :

$$R^0 \omega_* \mathcal{O}(\alpha\varepsilon) = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}} \oplus (\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta) \oplus \dots \oplus (\mathcal{O}(n\alpha) \boxtimes \eta^\alpha)$$

Considérons sur  $\phi_n$  le fibré en droites complexe  $\xi := \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu)$  ( $\alpha \geq 1, n \geq 1, n\alpha \geq 2$ ) alors  $R^i \omega_* \xi = 0$  si  $i \geq 1$  et :

$$(6) \quad R^0 \omega_* \xi = p_1^* \mathcal{O}(-2) \oplus (\mathcal{O}(n-2) \boxtimes \eta) \oplus \dots \oplus (\mathcal{O}(n\alpha-2) \boxtimes \eta^\alpha) .$$

Si bien que : (suite spectrale de Leray + théorème de Borel-Weil + formule de Künneth, cf. [28])  $H^1(\phi_n, \xi) = H^1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{Q}, p_1^* \mathcal{O}(-2)) = H^1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(-2)) = \mathbb{C}$ , et qu'alors toutes les extensions non triviales :

$$(7) \quad 0 \longrightarrow \xi \longrightarrow L \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{\phi_n} \longrightarrow 0$$

peuvent être toutes réalisées par le même fibré vectoriel  $L$  de rang 2 ; une extension non triviale s'obtenant simplement à partir d'une autre en multipliant le morphisme d'extension  $s$  par un scalaire complexe non nul.

L'espace  $\tilde{\lambda}_{\alpha, n, \mathbb{Q}, n} := \mathbb{P}(L)$  (noté aussi  $\tilde{\lambda}$  le contexte étant clair) ainsi que sa "section infinie" lisse  $\tilde{S} = s_\infty := \mathbb{P}(\xi) \hookrightarrow \tilde{\lambda}$  seront donc indépendants du choix de l'extension non triviale (7) choisie pour les définir.

En désignant par  $\pi$  la projection naturelle  $\pi : \tilde{\lambda} \longrightarrow \phi_n$ , on observe que  $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \longrightarrow \phi_n$  est un isomorphisme et que  $\pi|_{\tilde{\lambda} \setminus \tilde{S}} : \tilde{\lambda} \setminus \tilde{S} \longrightarrow \phi_n$  est un  $\mathbb{C}$ -fibré affine de fibré vectoriel sous-jacent  $\xi$ .

On fera désormais, à propos de  $\pi$ , la convention suivante : Si  $A$  désigne un sous-ensemble analytique de la base de la fibration  $\pi$  (ici  $\phi_n!$ ) et que  $x$  désigne une entité géométrique sur  $A$

(diviseur, classe de diviseurs, classe de cohomologie, faisceau cohérent, sous-ensemble etc ...) on désignera par  $\tilde{X}$  son image réciproque sur  $\pi^{-1}(A)$ . En vertu du même principe, nous écrirons aussi  $\pi^{-1}(A) = \tilde{A}$ .

Rappelons maintenant que  $\Phi_n$  est quasi-homogène sous  $\text{Aut}_O(\Phi_n)$  d'orbite dense  $\Phi_n \setminus E$  ce qui donne déjà un certain intérêt au résultat suivant :

**LEMME 5.1.** - Le morphisme naturel de groupe de Lie complexe (connexité des fibres de  $\pi$ )  $\pi_* : \text{Aut}_O(\tilde{X}) \longrightarrow \text{Aut}_O(\Phi_n)$  est surjectif.

La démonstration est standard : l'annulation de la variété de Picard de  $\Phi_n$  (rationnelle!) permet de voir que le "pull-back" de l'extension (7) par un élément de  $\text{Aut}_O(\Phi_n)$  est encore une extension non triviale de  $\mathcal{O}_{\Phi_n}$  par  $\xi$  elle aussi réalisée par le fibré vectoriel  $L$  de rang 2 puisque  $H^1(\Phi_n, \xi) = \mathbb{C}$ , ce qui permet de conclure aisément.

**PROPOSITION 5.2.** - La variété  $\tilde{X}_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  ( $\alpha, n \geq 1$  non simultanément égaux à 1) est quasi-homogène d'orbite dense  $\tilde{X} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$ .

Démonstration : Comme  $\pi|_{\tilde{X} \setminus \tilde{S}} : \tilde{X} \setminus \tilde{S} \longrightarrow \Phi_n$  est un  $\mathbb{C}$ -fibré affine de fibré vectoriel sous-jacent  $\xi$ , toute section holomorphe globale de  $\xi$  définit sur  $\tilde{X} \setminus \tilde{S}$  un champ tangent vertical (relativement à  $\pi$ ) constant sur chaque fibre affine et prolongeable à  $\tilde{X}$  tout entier (avec même une annulation d'ordre 2 le long de  $\tilde{S}$  ...). Compte tenu de l'homogénéité de  $\Phi_n \setminus E$  sous  $\text{Aut}_O(\Phi_n)$  et du lemme 5.1, il suffit donc de voir que  $H^0(\Phi_n, \xi) \neq 0$  pour montrer le proposition 5.2. Mais,  $H^0(\Phi_n, \xi) = H^0(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}, R^{\mathcal{O}\omega_*} \xi)$  et la formule (6) le font immédiatement voir, puisque  $n\alpha \geq 2$  et que  $\eta^\alpha$  est

ample. C.Q.F.D.

Remarque 5.3. - En fait si  $\alpha = n = 1$  la variété  $\Lambda$  est quand même quasi-homogène d'orbite ouverte  $\tilde{\lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})^{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$ , mais par un tout autre argument. Toutefois le lecteur vérifiera qu'alors  $\tilde{\lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$  admet des sous-variétés complexes fermées de dimension trois qui admettent des fonctions holomorphes globales non constantes et qu'en conséquence (Hartogs et Remmert-Stein)  $\Omega := \tilde{\lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$  ne saurait être compactifié  $\mathbb{C}$ -analytiquement par une courbe.

Comme conséquence immédiate de la proposition 5.2 on voit que via  $\gamma = \tilde{\omega} \circ \pi$ ,  $\tilde{\lambda}$  est un  $\Sigma_\alpha$ -fibré holomorphe au dessus de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$

Lorsque  $\tilde{Q}$  est réduit à un point la variété  $\tilde{\lambda}^{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  qui est tridimensionnelle sera notée  $\tilde{\vartheta}_{\alpha, n}$ . De tout ce qui précède on déduit un diagramme commutatif de fibrations :

$$(8) \quad \begin{array}{ccccc} & & \gamma & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \tilde{\lambda} & \xrightarrow{\pi} & \Phi_n & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q} \\ & \searrow \psi & \searrow \rho & & \swarrow p_2 \\ & & \tilde{Q} & & \end{array}$$

dans lequel  $\gamma$  est une  $\Sigma_\alpha$ -fibration holomorphe et  $\psi$  une  $\tilde{\vartheta}_{\alpha, n}$ -fibration holomorphe.

En fait, pour voir que  $\psi$  est une  $\tilde{\vartheta}_{\alpha, n}$ -fibration, il faut montrer que la restriction de (7) à une fibre  $\cong \Sigma_n$  de  $\rho$  ne saurait être une extension triviale ; or, si cette restriction à une fibre de  $\rho$  était triviale, il en serait de même pour la restriction à toute autre fibre de  $\rho$  (équivariance !), d'où l'annulation du morphisme naturel  $H^1(\Phi_n, \xi) \longrightarrow H^0(\tilde{Q}, R_{\rho_*}^1 \xi)$  ; mais comme  $R_{\rho_*}^0 \xi = R_{p_2}^0 * R_{\tilde{\omega}_*}^0 \xi$  combiné avec (6) montre que  $R_{\rho_*}^0 \xi$  est somme directe sur  $\tilde{Q}$  de fibrés en droites très amples, on a (Borel-Weil)

$H^1(Q, R_{\rho_*}^O \xi) = 0$  et l'annulation du morphisme ci-dessus impliquerait (suite spectrale de Leray)  $H^1(\phi_n, \xi) = 0$  ; contradiction.

Précisons maintenant la structure géométrique de  $\tilde{\lambda}$  et plus particulièrement celles de ses sous-variétés lisses  $\tilde{E} = \pi^{-1}(E)$  et  $\tilde{S} \hookrightarrow \tilde{\lambda}$  ; tout d'abord, modulo l'isomorphisme  $\tilde{\omega}|_E : E \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$ , (6) restreinte à  $E$  s'écrit ( $\epsilon \cdot E = 0$ ) :

$$(9) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{P}_1^* \mathcal{O}(-2) \longrightarrow L|_E \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0 .$$

En particulier (Künneth)  $H^1(E, \xi|_E) = \mathbb{C}$  montre que la non trivialité de cette extension (9) peut se déduire de la surjectivité du morphisme de restriction :  $H^1(\phi_n, \xi) \longrightarrow H^1(E, \xi|_E)$  ; or la suite exacte de faisceaux sur  $\phi_n$  :

$$0 \longrightarrow \xi \otimes_{\mathcal{O}_{\phi_n}} \mathcal{I}(E) \longrightarrow \xi \longrightarrow \xi|_E \longrightarrow 0$$

montre que cette surjectivité est conséquence de l'annulation de  $H^2(\phi_n, \xi \otimes_{\mathcal{O}_{\phi_n}} \mathcal{I}(E))$  ; mais l'égalité  $\xi \otimes \mathcal{I}(E) = \mathcal{O}(\alpha\epsilon - 2\nu - E)$  permet, si  $D$  désigne sur  $\tilde{Q}$  un diviseur effectif tel que  $\mathcal{O}(D) = \eta$  (très ample), de voir, puisque sur  $\phi_n$   $E + n\nu + \rho^*(D)$  est une section finie virtuelle effective (cf. §.1), que :

$$\xi \otimes \mathcal{I}(E) = \mathcal{O}((\alpha-1)\epsilon + (n-2)\nu + \rho^*(D)) .$$

D'où ( $\alpha \geq 1$ ) :

$$R^{2\nu}_{\omega_*} \mathcal{O}(\alpha\epsilon - 2\nu - E) = R^{1\nu}_{\omega_*} \mathcal{O}(\alpha\epsilon - 2\nu - E) = 0$$

et 
$$R^{\alpha\nu}_{\omega_*} \mathcal{O}(\alpha\epsilon - 2\nu - E) = S^{\alpha-1}(\mathcal{O} \oplus (\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta)) \otimes (\mathcal{O}(n-2) \boxtimes \eta) .$$

Ce qui montre que  $R^{\alpha\nu}_{\omega_*} \mathcal{O}(\alpha\epsilon - 2\nu - E)$  est somme directe de fibrés en droites  $\mathcal{O}(k) \boxtimes \eta'$  avec  $k \geq -1$  et  $\eta'$  très ample sur  $\tilde{Q}$  ; d'où (Künneth + Borel-Weil) :

$$H^2(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}, R^0 \tilde{\omega}_* \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu - E)) = 0$$

Toutes ces annulations montrant (Leray) que  $H^2(\tilde{\Phi}_n, \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu - E)) = 0$  ;

C.Q.F.D.

On en déduit alors aisément qu'en fait  $L|_E \cong (p_1 \circ \tilde{\omega})^*(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1))$  et donc que  $\tilde{E}$  est le  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -fibré trivial sur  $E$ . Nous sommes alors en mesure de parler des "sections horizontales" (ou constantes)  $E \rightarrow \tilde{E}$  ; elles sont en fait définies intrinséquement indépendamment de la trivialisatation choisie  $\tilde{E} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E$  : ce sont en effet les sections dont l'image a (au sens de l'homologie de  $\tilde{E}$ ) une auto-intersection nulle. Ce sont ces images en question (de  $\mathbb{C}$ -codimension 2 dans  $\tilde{\lambda}$ ) que nous appellerons désormais feuilles horizontales.

Observons que  $\tilde{S} \cap \tilde{E}$  est alors une "diagonale relative" i.e. que la fibration triviale  $\pi|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow E \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$  admet une trivialisatation globale  $\tilde{E} = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \tilde{Q}$  telle qu'on ait  $\tilde{S} \cap \tilde{E} = \Delta \times \tilde{Q}$  ( $\Delta$  diagonale de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ). On appellera désormais "hyperligne horizontale" une partie de  $\tilde{E}$  qui, dans la trivialisatation ci-dessus, s'écrit  $\{\delta\} \times \tilde{Q}$ ,  $\delta \in \Delta$ . Pour chaque feuille horizontale  $C$ ,  $C \cap \tilde{S}$  est une hyperligne horizontale. La transformation  $C \rightarrow C \cap \tilde{S}$  étant bijective.

Notons que si  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{\lambda} = 3$ , ces hyperlignes horizontales se réduisent à un point ...

Ces précisions faites, notre objectif sera maintenant de construire un espace normal  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta} = \Lambda$  et une modification  $\chi : \tilde{\lambda} \rightarrow \Lambda$  telle que si  $\Omega := \tilde{\lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$  on ait :

1)  $\chi|_{\Omega}$  est un isomorphisme de  $\Omega$  sur un ouvert de Zariski de  $\Lambda$ , ouvert, que nous désignerons aussi (abusivement) par  $\Omega$ .

2)  $\Lambda \setminus \Omega$  est une courbe.

Comme (connexité des fibres de  $\chi$ , normalité de  $\Lambda$ ) la  $G(\mathbb{C} \text{Aut}_0(\tilde{\Lambda}))$ -action est alors projetable par  $\chi$ , l'espace  $\Lambda$  sera  $G$ -quasi-homogène d'ensemble résiduel une courbe.

Pour définir  $\chi$  on va introduire un "bon" système linéaire complet de diviseurs effectifs sur  $\tilde{\Lambda}$  i.e. sans points bases ni composantes fixes qui séparera ponctuellement et infinitésimalement les points de  $\Omega$  mais pas ceux de  $\tilde{E} \cup \tilde{S}$  puisque ce dernier ensemble est appelé à être contracté en une courbe par  $\chi$ .

On est ainsi amené à considérer le système linéaire complet  $|\alpha\tilde{E} - \tilde{\nu} + \tilde{S}|$  sur  $\tilde{\Lambda}$  (cf. §.1 pour la signification de ce symbole). On remarquera tout d'abord que ce système n'est pas vide puisque  $\alpha\tilde{E} - \tilde{\nu} + \tilde{S}$  est linéairement équivalent au diviseur effectif  $\alpha\tilde{E} + (\alpha-1)\tilde{\nu} + \alpha\psi^{-1}(D) + \tilde{S}$  ( $D$  désignant un diviseur effectif de  $\tilde{Q}$  tel que  $\mathcal{O}(D) = \eta$ ).

Evaluons d'abord le système virtuellement induit  $|\alpha\tilde{E} - \tilde{\nu} + \tilde{S}|_{\tilde{S}}$ . Pour cela on observe qu'on a classiquement pour le fibré normal à  $\tilde{S}$  les expressions  $\mathcal{O}(\tilde{S})|_{\tilde{S}} = \pi^* \xi^* |_{\tilde{S}} = \xi^* |_{\tilde{S}} = \mathcal{O}(2\tilde{\nu} - \alpha\tilde{E})|_{\tilde{S}}$ ; d'où  $\mathcal{O}(\alpha\tilde{E} - \tilde{\nu} + \tilde{S})|_{\tilde{S}} = \mathcal{O}(\tilde{\nu})|_{\tilde{S}} = (p_1 \circ \gamma)^* |_{\tilde{S}}(\mathcal{O}(1))$ : ceci montre aisément que les diviseurs du système virtuel sont exactement les fibres (comptées avec multiplicité 1) du morphisme  $p_1 \circ \gamma|_{\tilde{S}}$ , on énoncera alors le :

**LEMME 5.4.-** Sur  $\tilde{\Lambda}$  le système  $|\alpha\tilde{E} - \tilde{\nu} + \tilde{S}|$  vérifie :

i) Il sépare ponctuellement et infinitésimalement les points de  $\Omega = \tilde{\Lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$ .

ii) Un diviseur du système ne rencontre pas une feuille horizontale (resp. une fibre de  $p_1 \circ \gamma|_{\tilde{S}}$ ) ou la contient entière-

rement.

iii) Par contre deux feuilles horizontales distinctes (resp. deux fibres distinctes de  $p_1 \circ \gamma|_{\tilde{S}}$ ) sont séparées par les systèmes linéaires.

Démonstration de ii) et iii) : On remarquera en premier lieu que le lemme 5.1 combiné au fait que  $\Phi_n \setminus E$  et  $E$  sont des  $\text{Aut}_0(\Phi_n)$ -orbites permet aisément de voir que  $\tilde{S} \setminus \tilde{E} \cap \tilde{E}$  et  $\tilde{E} \setminus \tilde{E} \cap \tilde{S}$  sont des  $\text{Aut}_0(\tilde{X})$ -orbites (observer dans le deuxième cas que  $\tilde{E} \cap \tilde{S}$  est nécessairement une orbite). Comme,  $\tilde{X}$  rationnelle, a une variété de Picard nulle, il est clair (connexité de  $\text{Aut}_0(\tilde{X})$ ) que si  $D$  est un diviseur du système, il en sera de même de  $gD$ . La  $\text{Aut}_0(\tilde{X})$ -stabilité des composantes fixes et de l'ensemble des points base qui en résulte, montre que seuls  $\tilde{E}$  et  $\tilde{S}$  sont éventuellement composantes fixes et que seul  $\tilde{E} \cap \tilde{S}$  est éventuellement l'ensemble des points base.

On voit alors que, si on montre la totale induction du système virtuel  $|\alpha\tilde{E} - \tilde{V} + \tilde{S}|_{\tilde{S}}$  i.e. que chaque ensemble  $\gamma|_{\tilde{S}}^{-1}(\{p\} \times Q) \subset \tilde{S}$  est la trace sur  $\tilde{S}$  d'un diviseur de la famille  $|\alpha\tilde{E} - \tilde{V} + \tilde{S}|$ , on aura montré :

1) Les parties des énoncés ii) et iii) qui concernent les fibres de  $p_1 \circ \gamma|_{\tilde{S}}$  et donc aussi que  $\tilde{S}$  n'est pas composante fixe du système.

2) Que  $\tilde{E} \cap \tilde{S}$  n'est pas ensemble des points base du système puisqu'à chaque fibre de  $p_1 \circ \gamma|_{\tilde{S}}$  correspond une hyperligne et une seule dans  $\tilde{E} \cap \tilde{S}$  (et réciproquement) qui appartient à cette fibre ; ce qui montre de surcroît que  $\tilde{E}$  ne saurait être composante fixe du système.

Or pour montrer cette totale induction il suffit de montrer (cf. §.1) l'annulation de  $H^1(\tilde{\lambda}, \mathcal{O}(\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu} + \tilde{S}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{\lambda}}} \mathcal{I}(\tilde{S})) = H^1(\tilde{\lambda}, \mathcal{O}(\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu}))$ . Mais (rationalité des fibres de  $\pi$ ) ce dernier groupe est isomorphe à  $H^1(\Phi_n, \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - \nu))$  dont l'annulation s'obtient, via Leray+Künneth+Borel-Weil, par  $R^1\omega_*\mathcal{O}(\alpha\varepsilon - \nu) = 0$  et  $R^0\omega_*\mathcal{O}(\alpha\varepsilon - \nu) =$  somme directe de fibrés en droites  $\mathcal{O}(k) \boxtimes \eta^\alpha$  ( $\alpha \geq 0$  et  $k \geq -1$ ). C.Q.F.D.

Comme un calcul d'intersection de cycles (détails laissés au lecteur) permet de voir que la restriction de  $\mathcal{O}(\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu} + \tilde{S})$  à une feuille horizontale est le fibré trivial, on en déduit facilement, avec ce qui précède, que la partie ii) de l'énoncé qui concerne les courbes horizontales est vraie.

Si maintenant  $C$  est une feuille horizontale, de tout ce qui précède, il résulte qu'il existe un unique diviseur  $D_C \in |\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu} + \tilde{S}|_{\tilde{S}}$  rencontrant  $C$  (aux points d'intersection de  $C$  avec  $\tilde{E} \cap \tilde{S}$ ). Il est alors clair, par tout ce qui précède, que si  $\tilde{D}$  est un diviseur du système induisant  $D_C$  sur  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{D}$  contiendra  $C$ , mais aucune autre feuille horizontale ; ce qui achève la démonstration de ii) et iii).

Démonstration de i) : Soient  $\tilde{q}_1$  et  $\tilde{q}_2$  deux points distincts de  $\Omega = \tilde{\lambda} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$ . Si  $p_1 \circ \gamma(\tilde{q}_1) \neq p_1 \circ \gamma(\tilde{q}_2)$  choisissons un diviseur effectif  $D$  sur  $\tilde{Q}$  associé au fibré très ample  $\eta$  qui ne contienne par  $\psi(\tilde{q}_2)$ . Il est aisé de voir que le diviseur effectif  $\alpha\tilde{E} + (\alpha-1)\gamma^{-1}(p_1 \circ \gamma(\tilde{q}_1) \times \tilde{Q}) + \alpha\psi^{-1}(D) + \tilde{S}$  appartient à la famille linéaire considérée, contient  $\tilde{q}_1$  ( $\alpha \geq 2$ ), mais pas  $\tilde{q}_2$  : i), et le lemme 5.4 résulteront donc du lemme 5.5 suivant :

**LEMME 5.5.** - Soit  $\tilde{\nu}$  un diviseur sur  $\tilde{\lambda}$  de la forme  $\gamma^{-1}(\{p\} \times \tilde{Q})$  (i.e. image réciproque par  $\pi$  d'un diviseur

"fibre"  $v$  sur  $\phi_n$ ). Alors le système virtuel  $|\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{v} + \tilde{S}|_{\tilde{v}}$  est totalement induit et sépare les points de  $\tilde{v} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$ .

Démonstration : Précisons d'abord la structure géométrique de  $\tilde{v}$ . Si  $v$  est un diviseur "fibre relatif" sur  $\phi_n$  il est clair qu'il est l'espace total complété  $\cong \mathbb{P}(\eta \oplus \mathbb{0})$  de la restriction  $\cong \eta$  de  $\mathbb{0}(n) \boxtimes \eta$  à  $\{p\} \times \tilde{Q}$ . La trace générique de  $\varepsilon$  sur  $v$  est une "section finie"  $s_0(\eta)$  de ce complété et la trace de  $E$  une "section infinie"  $s_\infty(\eta)$ . Enfin  $v \cdot v = 0$  achève de montrer que  $\xi|_v = \mathbb{0}(\alpha s_0(\eta))$ . Si bien que la projection  $\tilde{\omega}|_{v,v} \rightarrow \{p\} \times \tilde{Q}$  donne une image directe  $R^{\alpha} \tilde{\omega}|_{v,*} \xi|_v = \mathbb{0} \oplus \dots \oplus \eta^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) qui est un fibré acyclique en dimension  $> 0$  sur  $\tilde{Q}$  (Borel-Weil). Comme pour  $i > 0$   $R^i \tilde{\omega}|_{v,*} \xi|_v = 0$  on voit (Leray) que  $H^1(v, \xi|_v) = 0$ . En conséquence la restriction de (7) à  $v$  se scinde et  $\tilde{v} = \mathbb{P}(L|_v)$  s'interprète comme le complété à l'infini de  $\xi|_v$  au-dessus de  $v$  (de projection  $\pi$ ); la trace de  $\tilde{S}$  sur  $\tilde{v}$  étant alors la "section infinie"  $s_\infty(\xi|_v)$ , celle de  $\tilde{\varepsilon}$  (resp.  $\tilde{v}$ ) étant l'image réciproque  $\pi|_{\tilde{v}}^{-1}(s_0(\eta))$  (resp. étant nulle puisque  $\tilde{v} \cdot \tilde{v} = 0$ ). Si bien que la "trace" de  $\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{v} + \tilde{S}$  sur  $\tilde{v}$  est  $s_\infty(\xi|_v) + \pi|_{\tilde{v}}^{-1}(\alpha s_0(\eta))$ . Comme  $\mathbb{0}(\alpha s_0(\eta))$  est justement  $\xi|_v$  cela montre que cette trace est une "section finie virtuelle" de  $\tilde{v}$  quand on l'interprète comme complété à l'infini de  $\xi|_v$ .

Soient alors maintenant  $\tilde{q}_1$  et  $\tilde{q}_2$  distincts dans  $\tilde{v} \setminus (\tilde{E} \cup \tilde{S})$ ; si dans  $v \setminus (E \cap v)$ ,  $\pi(\tilde{q}_1) \neq \pi(\tilde{q}_2)$ , il existe (très amplitude de  $\eta$ ) une "section finie"  $s_1(\eta)$  du complété de  $\eta$  au-dessus de  $\{p\} \times \tilde{Q}$  telle que  $\pi(\tilde{q}_1) \in s_1(\eta)$  et  $\pi(\tilde{q}_2) \notin s_1(\eta)$ ; mais alors  $s_\infty(\xi|_v) + \alpha \pi|_{\tilde{v}}^{-1}(s_1(\eta))$  est un diviseur de la famille virtuelle qui contient  $\tilde{q}_1$  et non  $\tilde{q}_2$ .

Si par contre  $\pi(\tilde{q}_1) = \pi(\tilde{q}_2) = q \in v \setminus (E \cap v)$ , il existe une "section finie"  $s_0(\eta) \subset v$  qui ne contient pas  $q$ ; mais alors si,

ce qui est possible,  $\sigma$  est une section  $\sigma : \nu \longrightarrow \xi|_{\nu}$  qui s'annule avec multiplicité  $\alpha > 0$  le long de  $s_0(\eta)$ , on a obligatoirement  $\sigma(q) \neq 0$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour lequel  $\lambda\sigma(q) = \tilde{q}_1$  et  $\lambda\sigma(q) \neq \tilde{q}_2$ . L'image  $\lambda\sigma(\nu) \subset \tilde{\nu}$  est alors clairement, par ce qui précède, un diviseur du système virtuellement induit qui contient  $\tilde{q}_1$  et non  $\tilde{q}_2$ .

Démontrons maintenant la totale induction de ce système virtuel : il suffit là encore de montrer que  $H^1(\tilde{\lambda}, \mathcal{O}(\alpha\tilde{\varepsilon} - 2\tilde{\nu} + \tilde{\mathcal{S}})) = 0$ . Or la non trivialité de (7) permet de voir (puisque  $H^1(\phi_n, \xi) = \mathbb{C}$  et que  $\phi_n$  est rationnelle) que, dans le morceau de suite exacte :

$$\mathbb{C} \cong H^0(\phi_n, \mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^1(\phi_n, \xi) \longrightarrow H^1(\phi_n, L) \longrightarrow 0$$

$\partial$  est non nulle et donc que  $H^1(\phi_n, L) = 0$  ; mais alors une application standard de la suite spectrale de Leray de  $\pi$  combinée à  $\mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu) = \det L$  montre que :  $H^1(\tilde{\lambda}, \mathcal{O}(\alpha\tilde{\varepsilon} - 2\tilde{\nu} + \tilde{\mathcal{S}})) = H^1(\phi_n, \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu) \otimes R^0\pi_*\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{S}})) = H^1(\phi_n, \mathcal{O}(\alpha\varepsilon - 2\nu) \otimes L^*) = H^1(\phi_n, L) = 0$  (cf. plus haut dans le texte).

C.Q.F.D.

Le lemme 5.4 s'en déduit car l'homogénéité de  $\Omega$  permet de déduire la séparation infinitésimale à partir de la séparation ponctuelle.

Mais ce lemme 5.4 montre alors que le système linéaire  $|\alpha\tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu} + \tilde{\mathcal{S}}|$  définit un morphisme de  $\tilde{\lambda}_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  dans un espace projectif : le normalisé de l'image de ce morphisme sera par définition l'espace  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$ .

Il est clair qu'il existe une modification  $\chi : \tilde{\lambda}_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta} \longrightarrow \Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  et que  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  est G quasi-homogène d'ensemble résiduel une courbe sous  $G := \text{Aut}_0(\tilde{\lambda}) \longleftrightarrow \text{Aut}_0(\Lambda)$  et de plus alors

dans le cas n°3 .

N.B. Si  $\alpha \neq 1$  ,  $\tilde{\lambda}$  est une "G désingularisation minimale" ; par contre si  $\alpha = 1$  il existe une modification lisse intermédiaire  $\Lambda_1 : \tilde{\lambda} \longrightarrow \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda$ . Plus précisément dans ce cas  $\Lambda$  a la géométrie d'un espace de classe II, à savoir  $D_0(1) \boxtimes \eta$  , mais il est de classe III comme G-espace car  $G \not\subseteq \text{Aut}_O(D_0(1) \boxtimes \eta)$  .

§3. Etude générale du cas n°2 : Nous allons donner ici des indications sur le fait que tous les espaces du cas n°2 sont les espaces  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  . Considérons donc un G-espace  $Z \longleftarrow G/H$  dans le cas n°2 ainsi que la fibration :  $G/H \longrightarrow G/P$  ; on se persuade tout d'abord (étude plus longue et fastidieuse que vraiment difficile et que nous épargnons au lecteur) que  $F$  est rationnelle et que  $F_O \neq \Sigma_O = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  et donc que  $F_O = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  ou  $\Sigma_\beta (\beta \geq 2)$  .

Pour simplifier l'exposé restreignons nous au cas où  $F_O = \Sigma_\beta$  ( $\beta \geq 2$ ) ; désignant, comme au §.1, par  $E_\beta$  (resp.  $v_\beta$ ) le cycle exceptionnel (resp. un cycle fibre pour  $\tilde{\omega}_\beta : \Sigma_\beta \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ) il est possible de montrer que la P-orbite ouverte  $\Omega_P$  dans  $F_O$  est de la forme  $\Sigma_\beta \setminus (v_\beta \cup E_\beta) \cong \mathbb{C}^2$  . En particulier la restriction à  $\Omega_P$  de  $\tilde{\omega}_\beta$  définit une fibration intermédiaire de base et fibre  $\cong \mathbb{C}$  .

On peut alors montrer que dans la fibration intermédiaire qui s'en déduit :

$$G/H \xrightarrow{\mathbb{C}} G/J \xrightarrow{\mathbb{C}} G/P$$

que  $G/J$  est l'espace total d'un fibré en droites très ample au-dessus de  $G/P$ . Afin, via Borel-Weil, de mieux utiliser ce fait rappelons ici des résultats de [H.O.] (cf. p. 133) qui d'adaptent exactement à notre contexte élargi : via  $\tilde{\phi}$  (cf. chapitre 3) une S-orbite  $2\mathbb{C}$ -

codimensionnelle dans  $\tilde{Y}$  s'identifie à  $Q$  ; mais, via  $\chi$  (cf. chapitre 3) une telle orbite se fibre sur  $Y_0$  ; d'où en fait une  $S$ -fibration  $Q \xrightarrow{\chi^0} Y_0$ . Des considérations classiques (impossibilité pour une certaine racine simple d'être liée aux autres ...) montrent alors que, si  $S_2$  est le sous-groupe d'ineffectivité de l'action de  $S$  sur  $Y_0$ , il existe un sous-groupe distingué  $S_1 \subset S$ , localement isomorphe à  $SL(2, \mathbb{C})$ , tel qu'on ait les produits presque directs  $S = S_1 \cdot S_2$  et  $P \cap S = P_1 \cdot P_2$  ( $P_i$  parabolique dans  $S_i$   $i = 1, 2$ ) et les identifications  $Q = S_1/P_1 \times S_2/P_2$  et  $S_1/P_1 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Posant alors  $\tilde{Q} := S_2/P_2$  et observant que  $S_1$  opère transitivement sur  $Y_0$ , on peut en fait écrire  $Q = Y_0 \times \tilde{Q}$ , la projection sur le premier facteur s'identifiant justement au morphisme  $\chi^0$  ci-dessus.

Considérons d'autre part l'espace  $G \times^P Y_0$  ( $\longleftrightarrow G \times^P \overline{P/H}$ ) : c'est un  $Y_0$ -fibré au-dessus de la base  $Q \cong Y_0 \times \tilde{Q}$  ; par la modification :  $G \times^P \overline{P/H} \longrightarrow Z$  chacune de ses fibres est envoyée isomorphiquement sur  $Y_0$ , ce qui définit une trivialisation globale de ce fibré : on identifiera son espace total à  $Y_0 \times Q \cong (Y_0 \times Y_0) \times \tilde{Q}$ , cette dernière décomposition étant "adaptée" à la décomposition  $S = S_1 \times S_2$  au sens suivant (détails laissés au lecteur, cf. [H.O.]) : si  $(y_1, y_2, \tilde{q}) \in Y_0 \times Y_0 \times \tilde{Q}$  et si  $s = s_1 s_2 \in S$  la  $S$ -action sera alors donnée par la formule :

$$(10) \quad s \cdot (y_1, y_2, \tilde{q}) = (s_1 \cdot y_1, s_1 \cdot y_2, s_2 \cdot \tilde{q}) ,$$

la  $2\text{-}\mathbb{C}$ -codimensionnelle  $S$ -orbite étant  $\Delta \times \tilde{Q} \subset (Y_0 \times Y_0) \times \tilde{Q}$  avec  $\Delta =$  diagonale de  $Y_0 \times Y_0$ .

Précisons d'abord que, quitte à rajouter éventuellement de l'ineffectivité, ce qui ne changera rien au problème, on supposera désormais que  $S_1 = SL(2, \mathbb{C})$  et que  $P_1 := P \cap S_1$  est le sous-groupe de Borel, désormais désigné  $B$ , des matrices complexes  $2 \times 2$  unimo-

dulaires et triangulaires supérieures ;  $T$  désignant alors le sous-  
 groupe de Cartan des matrices complexes  $2 \times 2$  diagonales unimodulai-  
 res,  $N^+$  celui des matrices unipotentes triangulaires supérieures ,  
 $\mathfrak{t}$  et  $\mathfrak{n}^+$  leurs algèbres de Lie respectives,  $\mathfrak{h} := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}^+$  est clai-  
 rement l'algèbre de Lie de  $B$  .

Considérons maintenant l'unique système de racines positives  
 sur  $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \mathfrak{t})$  tel que  $\mathfrak{n}^+$  soit l'espace radiciel de la racine  
 positive  $\alpha_+ \in \mathfrak{t}^*$  , la coracine positive  $h_+ \in \mathfrak{t}$  étant classiquement  
 la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  . Si  $\rho : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$  est un caractère de  
 $T$  on dira que ce caractère est positif (resp. négatif) si la dé-  
 rivée  $\rho_* : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}$  est un poids  $p := \rho_*$  qui est positif (resp.  
 négatif) i.e. tel que  $p(h_+) > 0$  (resp.  $p(h_+) < 0$ ). Alors :

DÉFINITION 5.6. -  $T$  opérant holomorphiquement sur une variété  
 $\mathbb{C}$ -analytique  $k$ - $\mathbb{C}$ -dimensionnelle en fixant un point  $x \in X$  , on  
dira que ce point est attractif ou "puits" (resp. répulsif ou  
"source") si l'action naturelle de  $T$  sur  $T_x(X)$  s'écrit dans  
une base adaptée :  $\mathfrak{t} \cdot (x_1, \dots, x_k) = (\rho_1(t) x_1, \dots, \rho_k(t) x_k)$ , les  
 $\rho_i$   $1 \leq i \leq k$  étant tous des caractères négatifs (resp. posi-  
tifs).

Exemple 5.7.- Avec cette définition il est aisé de voir que  
 pour l'action naturelle à gauche de  $T$  sur  $B/T$  , la classe neutre  
 $e_0$  est un point répulsif.

Supposons maintenant désormais que  $T$  agisse non trivialement  
 sur une surface complexe lisse  $X$  ;  $C \subset X$  étant une courbe lisse  
 de  $X$  qui soit  $T$ -stable, si  $x \in C$  est fixé par  $T$  nous dirons  
 que  $x$  est attractif (sous-entendu pour l'action de  $T$ ) dans la di-  
 rection de  $C$  (resp. transversalement attractif ou attractif dans  
 la direction normale) si l'action naturelle de  $T$  sur le sous-espace  
 $T_x(C) \subset T_x(X)$  (resp. sur le quotient

$T_x(X)/T_x(C)$  est donnée par un caractère négatif. On dira aussi souvent que la  $T$ -action est attractive dans la direction  $C$  ou (le contexte étant clair) que  $T$  est attractif en  $x \dots$  On a les mêmes définitions en remplaçant partout les mots "attractif" et "négatif" par, respectivement, "répulsif" et "positif".

Observons que si  $T$  agit trivialement sur  $C$  lisse et connexe la  $T$ -action  $y$  est partout transversalement répulsive ou partout transversalement attractive.

Soient maintenant, toujours sur une surface  $X$ , une famille finie  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de courbes lisses chacune isomorphes à  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . On supposera que deux courbes de la famille se coupent au plus en un point, et alors dans ce cas transversalement, auquel cas on dira encore que les courbes en question sont contigües, leur point d'intersection s'appelant alors point de contigüité, et que, réciproquement, tout point de  $X$  appartient à au plus deux courbes de la famille. Soient maintenant  $C_1, C_2, \dots, C_k$  des courbes de la famille considérée, si pour les nombres d'intersections, on a les égalités  $C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_3 = \dots = C_{k-1} \cdot C_k = C_k \cdot C_1 = +1$  on dira que le sous-système de courbes constitué par les  $C_1, \dots, C_k$  forme un cycle pour la famille  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ . Un système de courbes  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ne possédant aucun cycle sera appelé arborescent. Dans notre contexte  $(\pi_1(C_\lambda) = 0)$  l'arborescence est clairement équivalente à la simple-connexité de  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda (\longleftrightarrow X)$ ; si de surcroît ce dernier ensemble est connexe, on dira que la famille  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est un arbre. Une courbe du système de courbes considéré s'appellera un rameau si elle ne possède qu'un point de contigüité, s'appellera ordinaire si elle en possède exactement deux, et embranchement si elle en possède trois ou plus.

Supposons maintenant que  $T$  agisse algébriquement et non tri-

vialement sur la surface, désormais projective lisse,  $X$  et que  $T$  stabilise chaque courbe de la famille  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  qu'on supposera être un arbre. Si  $C$  et  $C'$  sont deux courbes contiguës en  $x \in C \cap C'$  : on dira que  $x$  est un point de transmission pour la  $T$ -action si, ou bien  $x$  est répulsif (resp. attractif) dans la direction de  $C$  (resp.  $C'$ ) ou bien vice-versa. Dans ce cas, la configuration des  $T$ -orbites au voisinage de  $x$  est "selle de cheval" ; on dira aussi que la  $T$ -action se transmet de  $C$  à  $C'$ . Par opposition, si  $x$  est répulsif à la fois dans la direction de  $C$  et  $C'$ , ou si  $x$  est attractif à la fois le long de  $C$  et  $C'$ , on dira que  $x$  est un point de renversement pour la  $T$ -action. Dessinons :



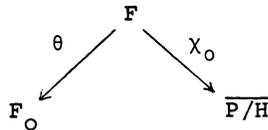
Il est aisé de voir que  $T$  ne peut agir trivialement sur deux courbes contiguës. Faisons l'

Observation 5.8. - L'adhérence d'une  $T$ -orbite  $1-\mathbb{C}$ -dimensionnelle générique contient chaque point de renversement ainsi qu'un point de chaque courbe du système sur laquelle  $T$  agit trivialement. (Courbe qui d'ailleurs ne contient aucun point de renversement ou de transmission).

Reconsidérant maintenant la  $P$ -fibration  $P/H \rightarrow P/J \cong \mathbb{C}$ , sa définition même montre que, si on pose  $x_\infty := \tilde{\omega}_\beta(v_\beta)$ , on a l'identification  $P/J \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\}$ . Le fait que  $G/J$  soit un fibré en droites s'exprime ici par l'existence d'un point  $x_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\} = P/J$  qui est  $P \cap S$  stabilisé : Le théorème de Borel-Weil montre ici directement que la très amplitude du fibré en droites complexes  $G \times^P P/J \cong S \times^{S \cap P} P/J$  a pour conséquence que  $x_0$  est un point

attractif pour la  $T$ -action naturelle à gauche sur  $P/J$  et qu'en conséquence  $x_\infty$  est répulsif pour la  $T$ -action sur  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  projetée par  $\tilde{\omega}_\beta$ . En particulier les  $T$ -orbites génériques dans  $F_0 = \Sigma_\beta$  de  $\mathbb{C}$ -dimension 1 auront leurs "sources" dans l'ensemble  $\tilde{\omega}_\beta^{-1}(x_\infty) = v_\beta$  et leurs "estuaires" dans l'ensemble  $\tilde{\omega}_\beta^{-1}(x_0)$ , en particulier encore, si  $\sigma_\beta := v_\beta \cap E_\beta$ , la  $T$ -action sera répulsive en  $\sigma_\beta$  dans la direction  $E_\beta$ .

Sauf dans le cas où  $F$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , on pourra trouver une surface de Hirzebruch  $F_0 = \Sigma_\beta$  ( $\beta \geq 1$ ,  $F_0$  minimale si  $\beta \geq 2$ ) et le diagramme de  $P$ -modifications :



Si  $\Gamma$  est une courbe dans  $F_0$  (resp.  $\overline{P/H}$ ) on désignera désormais par  $\theta^*(\Gamma)$  (resp.  $\chi_0^*(\Gamma)$ ) son image réciproque propre (\*) par la modification  $\theta$  (resp.  $\chi_0$ ).

Observons maintenant que dans notre contexte (structure des modifications monoïdales) l'ensemble  $\theta^{-1}(v_\beta \cup E_\beta) = \chi_0^{-1}(Y_0)$  est une réunion de courbes  $C_i \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , dont le système constitue un arbre, au sujet duquel nous énoncerons :

**LEMME 5.9.** -  $F, F_0, \theta, \chi_0$  etc ... étant comme ci-dessus :

- i) L'image réciproque propre  $\chi_0^*(Y_0)$  est une réunion de rameaux  $D_1, \dots, D_k$  de l'arbre  $\theta^{-1}(v_\beta \cup E_\beta)$ .
- ii) Si  $\tilde{x}_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) est l'unique point de contiguïté du

---

(\*) Quelquefois appelée aussi image réciproque stricte.

rameau  $D_i$  , l'action de  $T$  est attractive en  $x_i$  dans la  
direction  $D_i$  .

Démonstration :  $S_1$  agissant transitivement sur  $Y_0 \longleftrightarrow Z$  ,  
nécessairement, il existe un  $B$ -orbite  $\cong \mathbb{C}$  dans  $Y_0$  dont le com-  
plémentaire est un point  $y_0 \in Y_0$ . (En fait  $Y_0 \setminus \{y_0\}$  est même une  
 $P$ -orbite). Il existe alors un point  $z_0 \in Y_0 \setminus \{y_0\}$  qui est  $T$  sta-  
bilisé ; les identifications  $B/T \cong B.z_0 = Y_0 \setminus \{y_0\}$  montrant de plus  
(cf. exemple 5.7) que la  $T$ -action est répulsive en  $z_0$  . La  $B$ -équi-  
variance du morphisme  $\chi : \chi : \chi_0^*(Y_0) \longrightarrow Y_0$  montre alors que dans  
chaque composante irréductible  $D_i \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  ( $1 \leq i \leq k$ ) de  $\chi_0^*(Y_0)$  il  
existe une  $B$ -orbite  $\cong \mathbb{C}$  .  $B \subset P$  stabilisant tout le système de  
courbes et donc chaque point de contiguïté,  $D_i$  ne peut en avoir  
qu'un seul, ce qui démontre déjà i). Si pour chaque  $i \in [1, k]$   $z_i$   
est l'unique point de  $D_i$  tel que  $\chi_0(z_i) = z_0$  , on voit clairement  
( $B$ -équivariance) que  $T$  agit répulsivement en  $z_i$  le long de  $D_i$  ;  
ce  $z_i$  ne pouvant être un point de contiguïté, on en déduit ii).

LEMME 5.10. - Soient  $F, \chi_0, \theta, F_0$  etc ... comme dans tout ce  
qui précède, supposons que  $F_0$  soit une surface de Hirzebruch  
 $\Sigma_\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) telle que  $v_\alpha \setminus \{\sigma_\alpha\}$  soit une  $P$ -orbite ; alors :

i) Si  $C_0$  est une composante irréductible de  
 $\theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha) = \chi_0^{-1}(Y_0)$  telle que  $\chi_0(C_0) = Y_0$  , nécessairement  
 $C_0 = \theta^*(v_\alpha)$  ; en particulier  $\chi_0^*(Y_0)$  est alors irréductible.

ii) Si  $\alpha \geq 1$  , soit  $\check{\Sigma}_\alpha$  le cône normal obtenu par la  
 $P$ -modification  $\Sigma_\alpha \longrightarrow \check{\Sigma}_\alpha$  consistant à contracter en un point  
 $\check{\sigma}_\alpha$  le cycle exceptionnel  $E_\alpha \subset \Sigma_\alpha$  . Si  $\check{v}_\alpha$  désigne l'image  
( $\cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ) de  $v_\alpha$  par cette  $P$ -modification, le normalisé  
 $\hat{P}/\hat{H}$  de  $\check{P}/\check{H}$  est "P-isomorphe" à  $\check{\Sigma}_\alpha$  avec d'ailleurs encore  
 $\Omega_F \cong \check{\Sigma}_\alpha \setminus \check{v}_\alpha$  .

Démonstration de i) : Considérons les images réciproques propres :  $\tilde{E}_\alpha := \theta^*(E_\alpha)$ , et  $\tilde{v}_\alpha := \theta^*(v_\alpha)$ , on voit aisément (normalité de  $\Sigma_\alpha$ ) que ce sont des courbes connexes (\*)  $\cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , et que  $\tilde{E}_\alpha \neq C_0$  puisque dans  $C_0$  il y a clairement une B-orbite  $\cong \mathbb{C}$  et que, par contre, deux points distincts de  $\tilde{E}_\alpha$  sont stabilisés par  $B \subset S \cap P$  (car, via le P-morphisme  $\tilde{\omega}_\alpha$ , on a  $E_\alpha \setminus \{\sigma_\alpha\} \cong P/J \dots$ ). L'existence d'une P-orbite  $\cong \mathbb{C}$  dans  $\tilde{E}_\alpha$  (via  $\tilde{\omega}_\alpha$  il s'agit de  $P/J \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\}$ ) ainsi que dans  $C_0$  montrerait, avec l'hypothèse faite sur  $v_\alpha$ , que si  $\tilde{v}_\alpha \neq C_0$  les trois courbes distinctes deux à deux  $C_0$ ,  $\tilde{v}_\alpha$  et  $\tilde{E}_\alpha$  seraient des rameaux de l'arbre  $\theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha) = \chi_0^{-1}(Y_0)$  puisque ce dernier est P-stable. Le lecteur se persuadera aisément qu'il en résulterait l'existence d'un embranchement C pour le système de courbes :  $C \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  ayant trois points distincts T-stabilisés serait alors punctuellement stabilisé par T. Comme nécessairement  $\theta(C) = \sigma_\alpha$ , les T-orbites 1- $\mathbb{C}$ -dimensionnelles génériques dans F auraient donc nécessairement leurs sources en C (i.e. la T-action est transversalement répulsive le long de C), leurs estuaires appartenant à  $\theta^{-1}(\tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0))$  (cf. plus haut dans le texte) ; Or chaque T-orbite de  $\mathbb{C}$ -dimension 1 a exactement deux bouts : les points d'adhérences d'une T-orbite générique qui ne lui appartiennent pas ne peuvent donc être, par ce qui précède, que dans C ou dans  $\theta^{-1}(\tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0))$  : cela démontre déjà que C ne peut être que le seul embranchement de l'arbre considéré (et même la seule courbe possible du système sur laquelle T agit trivialement) et aussi puisque alors aucun point de contiguïté du système ne peut être répulsif ou attractif que tous les points de contiguïté du système qui ne sont pas sur C sont des points de transmission pour T-action.

---

(\*) En utilisant aussi le fait qu'elles sont chacune B-quasi-homogène

Trois branches (au moins) partiraient donc de  $C$ , constituées chacune d'une "chaîne" de courbes ordinaires le long de laquelle il y aurait transmission de la  $T$ -action, et aboutissant chacune à un des rameaux  $\tilde{E}_\alpha$ ,  $C_0$  et  $\tilde{Y}_\alpha$ .

Il résulterait alors aisément du lemme 5.9 que par "transmission" la  $T$ -action serait transversalement attractive à  $C$  en son point de contiguïté avec la "branche  $C_0$ " alors qu'elle serait transversalement répulsive à  $C$  en son point de contiguïté avec la "branche  $\tilde{E}_\alpha$ " (cf. Borel-Weil : répulsivité dans la direction  $E_\alpha$  en  $\sigma_\alpha$ ). Cette contradiction démontre déjà le i) de l'énoncé.

Il résulte de i) que l'image réciproque connexe ( $P/H$  n'a qu'un bout)  $\tilde{Y}_0$  de  $Y_0$  par le morphisme de normalisation :  $\widehat{P/H} \longrightarrow \overline{P/H}$  ne contient nécessairement qu'une composante irréductible : comme dans cette composante irréductible, il y a une  $B$ -orbite  $\cong \mathbb{C}$ , l'image réciproque de  $Y_0$  contenue dans l'adhérence de cette  $B$ -orbite est réduite à un point  $\tilde{Y}_0$ . Comme par le morphisme de normalisation  $\tilde{Y}_0 \setminus \{\tilde{y}_0\} \cong Y_0 \setminus \{y_0\}$ ,  $\widehat{P/H} \longrightarrow \overline{P/H}$  est clairement bijectif i.e.  $\overline{P/H}$  est localement irréductible.

Démonstration de ii) : Il suffit de montrer que le morphisme  $\chi_0 : F \longrightarrow \overline{P/H}$  se factorise par  $F \longrightarrow \tilde{\Sigma}_\alpha \longrightarrow \overline{P/H}$ , la première flèche étant ici la composition :  $F \longrightarrow \Sigma_\alpha \longrightarrow \tilde{\Sigma}_\alpha$  : la normalité de  $\tilde{\Sigma}_\alpha$  montre qu'il suffit de trouver une telle factorisation de  $\chi_0$  dans laquelle  $\tilde{\Sigma}_\alpha \longrightarrow \overline{P/H}$  est continue i.e. qu'il suffit de montrer que  $\chi_0(\theta^{-1}(E_\alpha)) = Y_0$  ; or i) nous dit aussi que le sous espace  $P$ -stable  $\chi_0(\theta^{-1}(E_\alpha))$  ne contient pas  $Y_0$  et donc ( $P$ -décomposition de  $\overline{P/H}$ ) qu'il est réduit à  $\{y_0\}$ . C.Q.F.D.

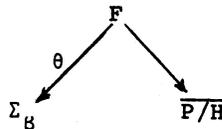
Si  $F = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  on peut voir directement qu'alors  $\widehat{P/H} = \tilde{\Sigma}_\alpha = \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ .

Le lemme 5.10 est l'étape décisive (mais pas encore ultime) pour démontrer la :

**PROPOSITION 5.11.** - Les espaces  $Z$  de classe III les plus généraux sont justement les espaces  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  "construits" au §.2 de ce chapitre.

Sans entrer dans les détails de la démonstration de la proposition 5.11 indiquons qu'elle n'est pas une conséquence directe du lemme 5.10 ; plus précisément, la difficulté pour montrer que  $\widehat{P/H}$  est un cône  $\sum_{\alpha}^{\vee}$  est que (lorsque  $F \neq \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ) si  $\theta : F \longrightarrow \Sigma_{\alpha}$  est une P-modification et que  $\Sigma_{\beta} \setminus (E_{\beta} \cup \nu_{\beta})$  est la P-orbite ouverte, les hypothèses du lemme 5.10 ne sont pas a priori vérifiées, i.e. qu'il est possible qu'en sus de  $\sigma_{\beta}$  il y ait un autre point  $\sigma'_{\beta} \in \nu_{\beta}$  qui soit P-stabilisé. Toutefois sous cette hypothèse on peut démontrer qu'existe une P-modification  $\theta : F \longrightarrow \Sigma_{\beta-1}$  et que, de proche en proche, par une suite combinée d'éclatement et de contractions, on puisse trouver  $\ell \geq 0$  tel que  $1 \leq \beta-\ell \leq \beta$  et tel que la modification  $\tilde{\theta} : F \longrightarrow \Sigma_{\beta-\ell}$  vérifie les hypothèses du lemme 5.10 et donc tel que  $\widehat{P/H} = \sum_{\alpha}^{\vee} (\alpha=\beta-\ell)$ .

Donnons une description brève sur ce processus de "rétrogradation" du modèle minimal de  $F$  dans la situation "presque générale" ou l'on a le "P-diagramme" :



avec  $\beta \geq 2$  et où  $\Sigma_{\beta} \setminus (E_{\beta} \cup \nu_{\beta})$  est la P-orbite dans  $\Sigma_{\beta}$  et tel encore qu'existe un point P-stable  $\sigma'_{\beta} \in \nu_{\beta} \setminus \{\sigma_{\beta}\}$  : l'éclatement de ce point donne une P-modification  $\Sigma_{\beta} \longrightarrow \Sigma_{\beta-1}$ . Des considérations

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES

combinatoires (nombre d'embranchements, d'arbres, de points de contiguïté, etc ...) permettent de voir que l'ensemble connexe  $\theta^{-1}(\sigma'_\beta)$  ne saurait être réduit à un point et donc (propriété universelle de l'éclatement) que  $\theta$  se factorise par la P-modification ci-dessus en une composée  $F \longrightarrow \tilde{\Sigma}_\beta \longrightarrow \Sigma_\beta$  de morphismes. Or la théorie élémentaire des surfaces permet de voir que  $\tilde{\Sigma}_\beta$  est aussi une modification de  $\Sigma_{\beta-1}$  ce qui, compte tenu de la connexité de  $P$  permet de définir la P-modification  $F \longrightarrow \Sigma_{\beta-1}$  que nous recherchions.

Cette description du normalisé  $\widehat{P/H}$  permet, moyennant quelques calculs standards de classes de cohomologie, de voir que  $Z$  est un espace  $\Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$  : Plus précisément  $G/J$  est l'espace total d'un fibré très amples  $\mathcal{O}(n) \boxtimes \eta$  sur  $G/P$ , d'où un plongement comme ouvert de Zariski  $G/J \hookrightarrow \Phi_n$ .

On peut alors vérifier que  $G \times^P \Sigma_\alpha$  est un  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ -fibré sur  $\Phi_n$  et qu'en fait  $G \times^P \Sigma_\alpha = \tilde{\Lambda}_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$ . L'existence de la modification  $G \times^P \Sigma_\alpha (= \tilde{\Lambda}) \longrightarrow Z$  et la description aisée des cycles contractés en un point permet ( $Z$  normal) de voir qu'alors  $Z = \Lambda_{\alpha, n, \tilde{Q}, \eta}$ .

C.Q.F.D.

CHAPITRE 6

CAS N° 3

Sous l'hypothèse que  $S$  agit trivialement sur  $Y_0$  (en faisant là encore une étude longue et fastidieuse de la géométrie possible de la surface de Potters  $F_0$ ), on peut montrer l'existence d'une fibration intermédiaire :

$$G/H \xrightarrow{F_1} G/J \xrightarrow{F_2} G/P$$

où  $F_1$  et  $F_2$  connexe sont de  $\mathbb{C}$ -dimension égale à 1 .

Après exclusion de certains cas, ne subsistent en fait que les possibilités :  $F_1 =$  courbe elliptique et  $F_2 = \mathbb{C}$  (classe IV),  $F_1 = \mathbb{C}$  et  $F_2 = T$  (classe IV<sub>0</sub>) et  $F_1 = F_2 = \mathbb{C}$  (classe V).

§1. Classe IV : On sait ici que  $G/J$  est l'espace total d'un fibré en droites très ample  $\eta$  sur  $G/P$  . On peut montrer que, dans ce contexte,  $F = F_0$  est une surface de Hopf de dimension algébrique 1 et que la réduction algébrique  $\gamma : F \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est une T-pseudo-fibration principale de Seifert ; plus précisément, il existe un point  $x_\infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  tel que si  $T_\infty := \gamma^{-1}(x_\infty)$  on ait :

1)  $\Omega_F = F \setminus T_\infty$

2) restreinte à  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\}$ ,  $\gamma$  est une T-fibration principale P-équivariante s'identifiant à la P-fibration  $P/H \longrightarrow P/J$  .  
 $T_\infty$  est évidemment isogène à  $T$  .

Le fait fondamental ici est alors que  $T$  est dans le centre de  $\text{Aut}_0(F)$  ; en particulier la commutation des actions de  $P$  et de  $T$  sur  $F$  permet de définir une  $T$ -action infinitésimalement libre holomorphe sur  $\tilde{Z} = G \times^P F$ .

Le quotient  $\tilde{C}_\eta := \tilde{Z}/T$  existe (cf. [21] §.2, p. 140) et n'est rien d'autre que le complété projectif du fibré à droites très ample  $G/J \longrightarrow G/P$  par une "section infinie". Cette section infinie se contracte en un point pour donner un cône normal  $C_\eta$  dont nous désignerons par  $c_\infty$  le sommet ;  $C_\eta$  est un  $G$ -compactification de  $G/J$ . La composition  $\tilde{Z} \longrightarrow \tilde{C}_\eta \longrightarrow C_\eta$  définit un morphisme propre surjectif  $\tilde{\gamma} : \tilde{Z} \longrightarrow C_\eta$  tel que  $\tilde{\gamma}^{-1}(c_\infty) = \tilde{Z} \setminus \Omega$ . Or  $Z$  étant topologiquement le quotient de  $\tilde{Z}$  par la modification  $\tilde{Z} \longrightarrow Z$ , modification par laquelle de surcroît  $\tilde{Z} \setminus \Omega$  est l'image réciproque de  $Z \setminus \Omega$ , on voit que  $\tilde{\gamma}$  admet une factorisation continue et donc (normalité de  $Z$ ) holomorphe donnée par le "G-diagramme" commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & C_\eta & \longleftarrow & G/J \\
 \searrow \chi & & \nearrow \tilde{\gamma} & & \nearrow \\
 & & Z & \longleftrightarrow & G/H
 \end{array}$$

Or (normalité de  $Z$ , connexité de  $T$  et des fibres de  $\chi$ ) la  $T$ -action holomorphe sur  $\tilde{Z}$  se projette sur  $Z$  en une action infinitésimalement libre qui redéfinit  $\tilde{\gamma} : Z \longrightarrow C_\eta$  comme  $T$ -fibration de Seifert d'unique éventuelle fibre spéciale  $\tilde{\gamma}^{-1}(c_\infty)$ .

Réciproquement,  $C_\eta$  étant un cône projectif quasi-homogène de sommet  $c_\infty$ , on peut montrer (en utilisant notamment le fait que la singularité  $c_\infty$  est rationnelle) que toute  $T$  pseudo-fibration principale normale de Seifert  $\tilde{\gamma} : Z \longrightarrow C_\eta$ , admettant  $T_\infty = \tilde{\gamma}^{-1}(c_\infty)$  comme unique éventuelle fibre spéciale, est un espace de classe IV

d'orbite dense  $\Omega = Z \setminus T_\infty$ .

§2. Classe  $IV_0$  :  $F_1 = \mathbb{C}$  et  $F_2 = T$ . Donnons des indications brèves sur cette classe ; tout d'abord à l'aide du théorème de réduction du groupe structural de Barth-Oeljeklaus, cf. [3] p. 59, il est possible de démontrer que la T-fibration  $G/J \longrightarrow G/P$  est triviale :  $G/J \cong T \times G/P$ . De plus il existe un fibré en droites très ample  $\eta$  au dessus de  $G/P$  dont l'espace total se compactifie par un point  $c_\infty$  pour donner le cône normal  $C_\eta$  de sommet  $c_\infty$  et tel alors qu'on puisse écrire  $Z = T \times C_\eta$ ,  $Y_0 = T \times \{c_\infty\}$  et  $\Omega = Z \setminus Y_0$  : les espaces de classe  $IV_0$  sont donc en fait les espaces de classe IV de l'espèce la plus simple i.e. la fibration T-principale triviale sur le cône  $C_\eta$ .

§3. Classe V,  $F_1 = \mathbb{C}$  et  $F_2 = \mathbb{C}$  : Avant même de donner des indications sur cette classe, nous allons faire quelques sorites sur les actions toriques sur les surfaces algébriques.

Soit  $T$  un tore algébrique (i.e.  $\cong (\mathbb{C}^*)^r$ ). L'ensemble des caractères algébriques  $\rho : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$  (qu'on appellera ici simplement les caractères) forment naturellement un  $\mathbb{Z}$ -module :  $\hat{T} \cong \mathbb{Z}^r$ . Si  $\rho \in \hat{T}$  est non trivial, le plus grand entier  $l(\rho) \geq 1$  par lequel  $\rho$  est divisible s'appellera longueur de  $\rho$  ; l'unique caractère  $\rho_0$  tel que  $\rho = \rho_0^{l(\rho)}$  s'appellera caractère primitif associé à  $\rho$ . Naturellement  $l(\rho_0) = 1$ , cette dernière propriété s'exprimant désormais en disant que  $\rho_0$  est primitif.

Soit maintenant  $T$  un tore algébrique agissant rationnellement sur une surface algébrique lisse  $\Sigma$  ; si les orbites génériques sont de  $\mathbb{C}$ -dimension 1 on dira qu'on a une "bonne T-action" sur  $\Sigma$ . Supposons maintenant que cette bonne T-action stabilise un arbre de

courbes lisses  $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sur  $\Sigma$  ; si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux courbes de l'arbre contiguës en  $\sigma \in \Sigma$ , il est clair que  $T$  va agir naturellement sur  $T_\sigma(\Gamma)$  (resp.  $T_\sigma(\Gamma')$ ) par l'intermédiaire d'un caractère  $\rho$  (resp.  $\rho'$ ). Le fait que la  $T$ -action soit bonne s'exprimera par la dépendance linéaire (sur  $\mathbb{Z}$ ) de  $\rho$  et  $\rho'$ , i.e. par l'existence d'un caractère primitif  $\rho_0$  et  $j$  et  $j'$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $\rho = \rho_0^j$  et  $\rho' = \rho_0^{j'}$ ; la non trivialité de la  $T$ -action s'exprimant alors par  $(j, j') \neq (0, 0)$ . Si  $jj' > 0$  (resp.  $jj' < 0$ ) on dira que  $\sigma$  est un point de retournement (resp. de transmission) pour la  $T$ -action. Si par exemple  $j > 0$  (resp.  $j < 0$ ) et que  $\rho$  est un caractère dont  $\rho_0$  est le caractère primitif associé, on dira que  $\sigma$  est  $\rho$ -répulsif (resp.  $\rho$ -attractif) dans la direction de  $\Gamma$ . Si  $\sigma \in \Sigma$  est  $T$ -stabilisé et que (modulo le théorème de linéarisation) au voisinage de  $\sigma$  cette  $T$ -action se diagonalise par les deux caractères  $\rho_0^j$  et  $\rho_0^{j'}$  tels que  $j > 0$  et  $j' > 0$  on dira que  $\sigma$  est  $\rho$ -répulsif ou  $\rho$ -source ;  $\sigma$  sera  $\rho$ -puits ou  $\rho$ -attractif s'il est  $\rho^{-1}$ -source.

Considérons maintenant la surface de Hirzebruch  $\Sigma_\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) comme le complété par la "section infinie"  $E_\alpha$  de l'espace total du fibré  $\mathcal{O}(\alpha)$  au dessus de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , et choisissons une fibre  $v_\alpha$  de  $\tilde{\omega}_\alpha : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C})$ .

Dans  $\text{Aut}_0(\Sigma_\alpha)$  qui stabilise évidemment  $E_\alpha$  on désignera par  $I_{v_\alpha}$  le stabilisateur de  $v_\alpha$  : la projection par  $\tilde{\omega}_\alpha$  de  $I_{v_\alpha}$  est évidemment le groupe affine des transformations de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  qui stabilisent  $x_\infty := \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(v_\alpha)$ . On posera  $v_\alpha \cap E_\alpha = \{\sigma_\alpha\}$  (cf. §3 du chap. 5).

Soit alors maintenant une bonne action du tore  $T$  sur  $\Sigma_\alpha$  qui stabilise, outre évidemment  $E_\alpha$ , la fibre  $v_\alpha$ . La projection, qu'on supposera désormais être non triviale, par  $\tilde{\omega}_\alpha$  de cette  $T$ -action va évidemment stabiliser un point  $x_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\}$ . Si bien que la

T-action stabilisera :

- 1) Une fibre  $\tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0) \neq v_\alpha$
- 2) Mais aussi classiquement une "section finie"

$$s_0(\theta(\alpha)) \subset \Sigma_\alpha \setminus E_\alpha .$$

On pourra donc définir les points T-fixes suivants :

$$\sigma'_\alpha = v_\alpha \cap s_0(\theta(\alpha))$$

$$\tau'_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0) \cap s_0(\theta(\alpha))$$

$$\tau_\alpha = E_\alpha \cap \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0)$$

Il est alors absolument clair que chacune des T-actions naturelles sur chacun des trois espaces tangents  $T_{x_\infty}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$ ,  $T_{\sigma'_\alpha}(s_0(\theta(\alpha)))$  et  $T_{\sigma'_\alpha}(E_\alpha)$  sont définies par un seul et même caractère  $\rho$ , les T-actions naturelles sur  $T_{x_0}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$ ,  $T_{\tau'_\alpha}(s_0(\theta(\alpha)))$  et  $T_{\tau'_\alpha}(E_\alpha)$  étant alors définies par le même caractère  $\rho^{-1}$  : on appellera le caractère  $\rho$  le caractère fondamental de la bonne T-action; nous l'avons par hypothèse supposé non trivial. Désignons maintenant par  $\rho_0$  le caractère primitif associé à  $\rho$  et par  $\ell$  la longueur  $\ell(\rho)$  : pour désigner le caractère  $\rho_0^n (n \in \mathbb{Z})$  on utilisera souvent la notation  $\rho^{n/\ell}$ . La description des tores maximaux de  $\text{Aut}_0(\Sigma_\alpha)$  permet alors de montrer l'existence d'un entier relatif  $j$  tel que :

- 1) La T-action naturelle sur  $T_{\sigma'_\alpha}(v_\alpha)$  est définie par le caractère  $\rho^{j/\ell} = \rho_0^j$ .

- 2) La T-action naturelle sur  $T_{\tau'_\alpha}(\tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0))$  (resp.  $T_{\tau'_\alpha}(\tilde{\omega}_0^{-1}(x_0))$ ) est définie par le caractère  $\rho^{\alpha+j/\ell} = \rho_0^{\alpha\ell+j}$  (resp.  $\rho^{-\alpha-j/\ell} = \rho_0^{-\alpha\ell-j}$ )

On dira que  $j \in \mathbb{Z}$  est l'entier effectif de la bonne T-action.

Réciproquement on peut montrer qu'à tout caractère non trivial  $\rho \in \hat{T}$  et tout entier  $j \in \mathbb{Z}$  est associé une bonne T-action de caractère fondamental  $\rho$  vérifiant 1) et 2) .

**N.B.** Il est aussi possible de démontrer que deux bonnes T-actions sur  $\Sigma_\alpha$  stabilisant  $v_\alpha$  et agissant sur  $T_{\sigma_\alpha}(E_\alpha)$  (resp.  $T_{\sigma_\alpha}(v_\alpha)$ ) par l'intermédiaire du caractère  $\rho$  (resp.  $\rho_0^j$ ) sont conjuguées entre-elles par un élément de  $I_{v_\alpha}$ , deux telles bonnes actions étant alors égales exactement quand elles stabilisent un même section finie  $s_0(\theta(\alpha))$  et une même fibre  $\omega^{-1}(x_0) \neq v_\alpha$  .

Abordons maintenant la :

Construction des surfaces  $\check{\Sigma}_{\alpha, \rho, j}$

Soient  $\Sigma_\alpha, E_\alpha, v_\alpha, x_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), s_0(\theta(\alpha)), \tau'_\alpha$  etc ... définies comme ci-dessus par une bonne T-action de caractère fondamental non trivial  $\rho$  et d'entier effectif  $j \in \mathbb{Z}$ .

A ces données, et en supposant de surcroît que  $-\ell < j < \ell$  et que si  $\alpha = 0$  alors  $j > 0$  nous nous proposons d'associer une T-modification  $\Sigma_{\alpha, \rho, j} \longrightarrow \Sigma_\alpha$  par le procédé suivant que nous allons d'abord décrire (en oubliant quelquefois certains indices le contexte étant clair) quand  $0 \leq j < \ell(\eta)$  :

Si  $j = 0$ , on pose  $\Sigma_{\alpha, \rho, 0} = \Sigma_\alpha$  la T-modification en question étant l'identité sur  $\Sigma_\alpha$  .

Si  $j > 0$ , on pose  $\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(0)}$  et on constate que  $\sigma_\alpha$  est  $\rho$ -répulsif. Par définition son éclatement est la T-modification  $\theta_1 : \Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(1)} \longrightarrow \Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(0)}$  (On remarquera ici que  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(1)}$  est aussi obtenue par éclatement d'un point de  $\Sigma_{\alpha+1}$ ) .

$\Gamma^{(1)} \subset \Sigma^{(1)}$  désignant la courbe  $:= \theta_1^{-1}(\sigma_\alpha)$ , on voit que l'image réciproque propre  $\theta_1^*(v_\alpha)$  rencontrera  $\Gamma^{(1)}$  en un point  $\rho$ -répulsif  $\sigma_\alpha^{(2)} \in \Sigma^{(1)}$ ; la T-action naturelle sur  $T_{\sigma^{(2)}}(\theta_1^*(v_\alpha))$  (resp.  $T_{\sigma^{(2)}}(\Gamma^{(1)})$ ) étant définie par le caractère  $\rho_0^j$  (resp.  $\rho_0^{\ell-j}$ ).

Si alors,  $j = \ell - j$  (i.e.  $j = \ell/2$ ) en éclatant  $\sigma^{(2)}$  dans  $\Sigma^{(1)}$  on obtiendra une T-modification  $\theta_2 : \Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(2)} \longrightarrow \Sigma^{(1)}$ . Sur la courbe exceptionnelle  $\Gamma^{(2)} := \theta_2^{-1}(\sigma^{(2)})$ , T agit trivialement : par définition  $\Sigma_{\alpha, \rho, \ell/2}$  sera cette variété  $\Sigma^{(2)}$  ainsi construite.

Si par contre  $j \neq \ell - j$ ,  $\Sigma^{(2)}$  contient un unique point  $\sigma^{(3)}$  qui soit  $\rho$ -répulsif ;  $\sigma^{(3)}$  est d'ailleurs un des deux points de contiguïtés de l'arbre  $(\theta_2 \circ \theta_1)^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha)$  situés sur  $\Gamma^{(2)}$ , sa détermination complète dépendant alors du signe de  $\ell - 2j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; la T-action naturelle au voisinage de  $\sigma^{(3)}$  se diagonalisant à l'aide des caractères  $\rho_0^{|\ell - 2j|}$  et  $\rho_0^{\inf(j, \ell - j)}$ . Par éclatement de  $\sigma^{(3)}$ , on obtient la T-modification  $\theta_3 : \Sigma^{(3)} \longrightarrow \Sigma^{(2)}$  d'ensemble exceptionnel  $\Gamma^{(3)} \subset \Sigma^{(3)}$ , là encore deux éventualités se présentent :

Si T agit trivialement sur  $\Gamma^{(3)}$  i.e. si  $j = \ell/3$  ou  $j = 2\ell/3$ , par définition (et en fonction du cas considéré) la variété  $\Sigma_{\alpha, \rho, \ell/3}$  ou  $\Sigma_{\alpha, \rho, 2\ell/3}$  sera la variété  $\Sigma^{(3)}$  que nous venons de construire.

Si par contre T agit non trivialement sur  $\Gamma^{(3)}$  il existe un unique point  $\sigma^{(4)} \in \Gamma^{(3)}$  qui est  $\rho$ -répulsif et au voisinage duquel la T-action "se diagonalise" à l'aide des caractères  $\rho_0^{m_1}$  et  $\rho_0^{m_2}$  avec  $0 \leq m_1, m_2 \leq \ell - 1$ , ces inégalités permettant alors de voir qu'en procédant de proche en proche on construit une suite finie de "T-transformations monoïdales" :

$$\Sigma^{(m)} \xrightarrow{\theta_m} \Sigma^{(m-1)} \xrightarrow{\theta_{m-1}} \dots \Sigma^{(1)} \xrightarrow{\theta_1} \Sigma^{(0)} = \Sigma_\alpha$$

telle que :

1) Les variétés  $\Sigma^{(i)}$   $0 \leq i \leq m-1$  contiennent chacune exactement un point  $\rho$ -répulsif  $\sigma^{(i+1)}$  dont l'éclatement est justement la modification  $\theta_{i+1}$ . Par définition, la courbe lisse de genre zéro  $\Gamma^{(i+1)} \subset \Sigma^{(i+1)}$  sera la courbe exceptionnelle  $\Gamma^{(i+1)} := \theta_{i+1}^{-1}(\sigma^{(i+1)})$  de la modification  $\theta_{i+1}$ .

2)  $\Sigma^{(m)}$  ne contient pas de point  $\rho$ -source, mais la courbe exceptionnelle  $\Gamma^{(m)} := \theta_m^{-1}(\sigma^{(m)})$  est ponctuellement T-stabilisée avec une  $\rho$ -répulsivité normale.

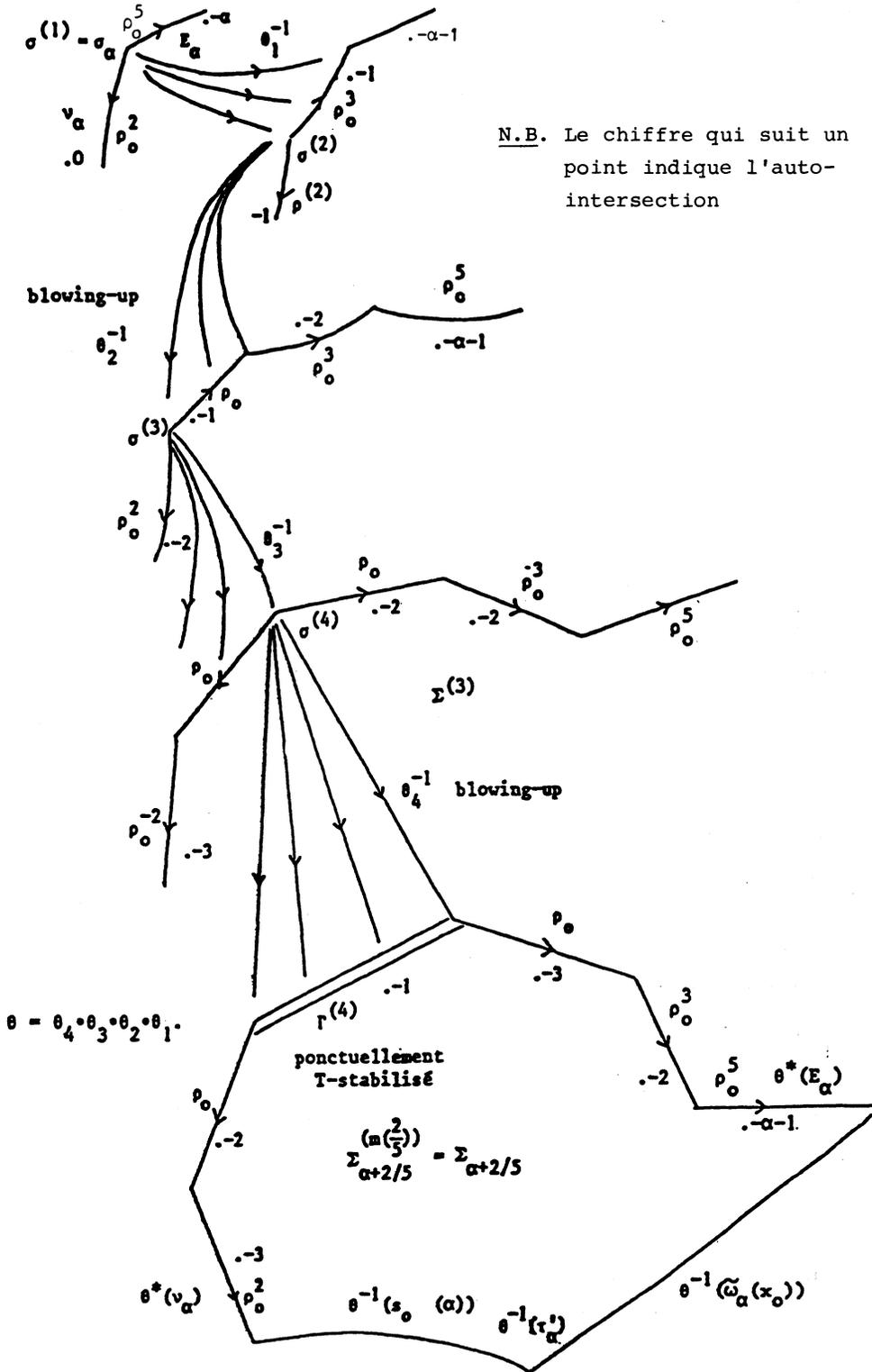
Par définition la variété  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  sera l'ultime variété  $\Sigma^{(m)}$  obtenue par ce processus : le lecteur se persuadera que sa géométrie ne dépend que de  $\alpha \in \mathbb{N}$  et de  $j/\ell \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$  et que de surcroît l'entier  $m \in \mathbb{N}$  qui indique le nombre successif d'éclatements au terme desquels on obtient  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  à partir de  $\Sigma_\alpha$  ne dépend que de  $j/\ell$ , on le désignera donc souvent pour plus de précisions  $m(j/\ell)$ .

Si  $j$  est négatif, le point  $\rho$ -répulsif est  $\sigma'_\alpha \in \nu_\alpha \setminus \{\sigma_\alpha\} \subset \Sigma_\alpha$  et c'est lui qu'il faut commencer par éclater pour embrayer le processus qui, mutatis mutandis, permet de définir la variété  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  (avec  $\ell < j < 0$ ) dont la géométrie ne dépend encore que de  $j/\ell \in ]-1, 0[$ . Si nous négligeons ce cas, c'est que se produit le phénomène suivant : Si T agit par une bonne action sur  $\Sigma_\alpha$  (resp.  $\Sigma_{\alpha+1}$ ) par le caractère fondamental  $\rho$  et l'indice effectif  $j$   $0 < j < \ell$  (resp.  $j-\ell$ ,  $-\ell < j-\ell < 0$ ) les variétés  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  et  $\Sigma_{\alpha+1, \rho, j-\ell}$  sont "T-isomorphes". Ceci résulte de ce que (détails laissés au lecteur) ce T-isomorphisme existe dès la première étape du processus i.e. entre les variétés  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}^{(1)}$  et  $\Sigma_{\alpha+1, \rho, j-\ell}^{(1)}$  obtenues respectivement en éclatant  $\sigma_\alpha \in \Sigma_\alpha$  et  $\sigma'_{\alpha+1} \in \Sigma_{\alpha+1}$ .

Toutes ces raisons justifient en outre que la variété sous-jacente à  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  soit désormais désignée par  $\Sigma_{\alpha+j/\ell} (j/\ell \in ]-1, +1[)$ . A conjugaison près la structure de "T-variété" de  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  est d'ailleurs définie par sa structure sous-jacente de " $\alpha+j/\ell$ ème - surface de Hirzebruch" et son caractère fondamental  $\rho$ .

Déssinons (par exemple ...) les modifications qui permettent d'obtenir  $\Sigma_{\alpha+2/5}$  :

COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES PAR DES COURBES



Désormais la courbe ponctuellement T-stabilisée  $\Gamma^{(m)}$  dans  $\Sigma_{\alpha, \rho, j} = \Sigma_{\alpha+j/\ell}$  sera désignée, le contexte étant clair,  $D_0$ .

Tout point de  $D_0$  est  $\rho$ -source d'une T-orbite de dimension 1. Sauf dans le cas où cette " $\rho$ -source" est point de contiguïté de l'arbre  $\theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha)$  (avec par définition  $\theta = \theta_m \circ \theta_{m-1} \circ \dots \circ \theta_1$ ) le " $\rho$ -estuaire" de cette T-orbite sera, dès que  $\alpha+j/\ell > 0^{(*)}$ , le point  $\tau'_\alpha$ . Soit  $\Delta$  l'adhérence (dans  $\Sigma_{\alpha+j/\ell}$ ) d'une telle T-orbite aboutissant en  $\tau'_\alpha$ , alors nos hypothèses sur  $\alpha$  et  $j$  permettent de vérifier que le système linéaire complet  $|\Delta|$  sur  $\Sigma_{\alpha, \rho, j}$  ne contient ni composantes fixes ni points base, qu'il sépare ponctuellement et infinitésimalement les points de  $\Omega_F = \Sigma_{\alpha+j/\ell} \setminus \theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha)$  et qu'enfin, en désignant par  $\tilde{\Sigma}_{\alpha, \rho, j}$  (ou par  $\tilde{\Sigma}_{\alpha+j/\ell}$ ) le normalisé de l'image du morphisme projectif défini par  $|\Delta|$  et par  $\tilde{\chi}_0 : \Sigma_{\alpha+j/\ell} \rightarrow \tilde{\Sigma}_{\alpha+j/\ell}$  la modification naturelle qui "relève" ce morphisme projectif, la restriction de  $\tilde{\chi}_0$  à  $D_0$  est une bijection sur son image, alors que, par contre, chaque composante irréductible (et même connexe) de  $\theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha) \setminus D_0$  est contractée en un point par  $\tilde{\chi}_0$ . Abordons maintenant la :

### Construction des espaces $E_{\alpha, Q, \eta, j}$

Considérons maintenant un fibré en droites très ample  $\eta$  sur une variété rationnelle homogène  $Q$  : on appellera longueur de  $\eta$  le plus grand entier  $\ell = \ell(\eta) \geq 1$  par lequel  $\eta \in H^1(Q, \theta_Q^*) (\cong H^2(Q, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_2(Q)})$  soit divisible. L'unique fibré  $\eta_0$  sur  $Q$  tel que  $\eta = \eta_0^{\ell(\eta)}$  s'appellera fibré primitif associé à  $\eta$  ; la relation alors évidente,  $\ell(\eta_0) = 1$  s'exprimera aussi en disant que  $\eta_0$  est

(\*) Notons que, dans notre contexte, cette hypothèse est toujours vérifiée puisque si  $\alpha = 0$  nous supposons  $j > 0$ .

un fibré primitif. Si  $q \in \mathbb{Z}$ , on comprendra le sens de  $\eta^{q/\ell}$  ( $\in H^1(Q, \mathcal{O}_Q^*)$ ).

Notre objet est maintenant, à la donnée de  $\eta$  comme ci-dessus et de deux entiers  $\geq 0$  non simultanément nuls  $\alpha, j$  tels que  $0 \leq j < \ell(\eta)$ , d'associer un espace  $E_{\alpha, Q, \eta, j}$  (ou plus brièvement  $E_{\alpha, \eta, j}$  ou même  $E \dots$ ) de classe  $V$  et dont l'orbite ouverte soit l'espace total du fibré vectoriel de rang  $2 \eta^{\alpha+j/\ell}$  sur  $Q$ .  $E_{\alpha, \eta, j}$  sera (mut. mut. comme au chapitre 2) définie à partir d'une modification lisse  $\chi : \tilde{E}_{\alpha, \eta, j} \longrightarrow E$ . Notre démarche consistera donc :

- 1) à décrire la géométrie de l'espace  $\tilde{E}_{\alpha, \eta, j}$  ;
- 2) à décrire les parties de  $\tilde{E}_{\alpha, \eta, j}$  exactement contractées en un point de  $\chi$ .

Notons qu'il nous arrivera, le contexte étant clair, de négliger quelques indices ...

La variété  $Q$  ci-dessus étant homogène sous l'action d'un groupe semi-simple  $S$ , si  $q_0 \in Q$  on désignera par  $\text{Stab}(q_0) (\subset S)$  le sous-groupe (parabolique) d'isotropie de  $q_0 \in Q$ . On sait alors que  $T := \text{Stab}(q_0) / (\text{Stab}(q_0), \text{Stab}(q_0))$  est un tore algébrique et qu'à chaque caractère  $T \longrightarrow \mathbb{C}^*$  est naturellement associé un caractère  $\text{Stab}(q_0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$  et réciproquement : on identifiera les caractères  $\text{Stab}(q_0) \longrightarrow \mathbb{C}^*$  avec les éléments de  $\hat{T}$  en allant jusqu'à les désigner par les mêmes symboles.

Le fibré  $S$ -équivariant  $\eta$  étant alors défini par un caractère  $\rho^{-1} : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$ , il est clair que  $\ell(\rho) = \ell(\eta)$ . Considérons (cf. tout ce qui précède) une bonne  $T$ -action sur  $\Sigma_\alpha$  de caractère fondamental  $\rho$  et d'indice effectif  $j$ ,  $0 \leq j < \ell(\eta)$ , avec  $j \neq 0$

dès que  $\alpha = 0$ . Les sous-objets  $\tau'_\alpha, s_\alpha(\emptyset(\alpha))$  etc ... de  $\Sigma_\alpha$  étant, comme plus haut, supposés T-stables on a vu que la simple donnée de son caractère fondamental et son indice effectif  $j$ , définit une bonne T-action privilégiée sur  $\Sigma_\alpha$  et donc sur  $\Sigma_{\alpha+j/\ell}$ : par composition avec l'épimorphisme  $\text{Stab}(q_0) \longrightarrow T$  on en déduit une  $\text{Stab}(q_0)$ -action sur  $\Sigma_{\alpha+j/\ell}$  qui permet de considérer le fibré S-équivariant au-dessus de  $Q$ :

$$\tilde{\Xi}_{\alpha, Q, \eta, j} := S \times^{\text{Stab}(q_0)} \Sigma_{\alpha+j/\ell}$$

Observons que la  $\text{Stab}(q_0)$ -stabilité de l'ouvert  $\Omega_F := \Sigma_{\alpha+j/\ell} \setminus \theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha)$  a pour conséquence la S-stabilité de l'ouvert  $\Omega := S \times^{\text{Stab}(q_0)} \Omega_F \hookrightarrow \tilde{\Xi}$ . Le fait que  $0_\alpha := \theta^{-1}(\tau'_\alpha) \in \Sigma_{\alpha+j/\ell}$  soit  $\text{Stab}(q_0)$ -stable et que la T-action s'y diagonalise, en son voisinage, par les caractères  $\rho^{-1}$  et  $\rho^{-\alpha-j/\ell}$  persuadera le lecteur qu'en fait  $\Omega$  est l'espace total du fibré vectoriel S-équivariant de rang 2  $\eta_0^\ell \oplus \eta_0^{\alpha\ell+j}$  sur  $Q$ .

Il est alors aisé de voir que les sections globales  $R := H^0(Q, \eta_0^\ell \oplus \eta_0^{\alpha\ell+j})$  de ce fibré agissent sur  $\Omega$  (par des transformations induisant des "translations" sur chaque fibre vectorielle de  $\Omega \longrightarrow Q$ ) et qu'en fait cette R-action se prolonge holomorphiquement à  $\tilde{\Xi}$ . Il est alors possible de définir  $\tilde{\Xi}$  comme espace G quasi-homogène d'orbite ouverte  $\Omega$  sous le produit semi-direct  $G := R \times S$ .

Ceci dit considérons maintenant la "fibre neutre"  $\tilde{\Xi}_{q_0} \cong \Sigma_{\alpha+j/\ell}$ : chaque point de non contiguïté  $\sigma_0 \in D_0$  est dans l'adhérence  $\Delta_{\sigma_0} \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  d'une unique  $\text{Stab}(q_0)$ -orbite  $\cong \mathbb{C}^*$  telle que  $\Delta_{\sigma_0} \ni 0_\alpha$  et il est alors clair que  $\tilde{\Delta}_{\sigma_0} := S \cdot \Delta_{\sigma_0}$  est un diviseur sur  $\tilde{\Xi}$ . De la même manière  $\tilde{D}_0 := S \cdot D_0$  est un diviseur de  $\tilde{\Xi}$  qui est composan-

te irréductible de  $\tilde{\mathbb{E}} \setminus \Omega$  et même la seule dans laquelle les  $S$ -orbites  $y$  soient toutes fermées et de codimension 2 dans  $\tilde{\mathbb{E}}$  (en particulier  $\tilde{D}_0 \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ).

Si on considère maintenant le système linéaire complet  $|\tilde{\Delta}_{\sigma_0}|$  il est alors possible de montrer qu'il est sans points-base ni composante fixe et qu'il sépare ponctuellement et infinitésimalement les points de  $\Omega$ , si bien que, comme plus haut, le système linéaire définit un espace normal  $\mathbb{E}_{\alpha, Q, \eta, j}$  (noté aussi  $\mathbb{E}$ ) ainsi qu'une modification  $\chi : \tilde{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathbb{E}$  qui possède les propriétés suivantes :

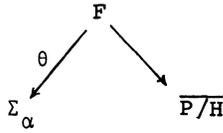
1) Si  $\tilde{D} \neq \tilde{D}_0$  est une composante irréductible de  $\tilde{\mathbb{E}} \setminus \Omega$ , son image par  $\chi$  est réduite à un point.

2) Modulo l'isomorphisme (cf. plus haut)  $\tilde{D}_0 \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , la restriction de  $\chi$  à  $\tilde{D}_0$  s'identifie à la deuxième projection, en particulier  $\chi$  contracte  $\tilde{D}_0$  en une courbe  $Y_0 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  qui est aussi l'image de  $\tilde{\mathbb{E}} \setminus \Omega$  par  $\chi$ .

Il est alors maintenant bien clair que  $\mathbb{E}_{\alpha, Q, \eta, j}$  est  $G$  quasi-homogène d'orbite ouverte  $\Omega$  et d'ensemble résiduel  $Y_0$  et que de surcroît  $S$  opère trivialement sur  $Y_0$  (cas n° 3 ...).

Indiquons ici, sans entrer dans les détails, par quelle démarche on peut montrer que les seuls espaces de classe  $V$  sont les espaces  $\mathbb{E}$  décrits ci-dessus.

Ecartant le cas où  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  peut être pris pour modèle pseudo-minimal de  $\overline{P/H} \longleftarrow Z$ , cas pour lequel on peut montrer directement que  $Z$  est un espace  $\mathbb{E}_{1, Q, \eta, 0}$  qui est, en faisant abstraction de sa structure quasi-homogène d'ailleurs isomorphe à l'espace  $D_{\eta, Q}$  de classe II, on a toujours un  $P$ -diagramme :



Cela résulte en effet de l'isomorphisme  $\Omega_F \cong \mathbb{C}^2$  qui (cf. [Po]) implique la rationalité de  $F$  ; de plus considéré comme ouvert  $\Omega_F \hookrightarrow \Sigma_\alpha$ ,  $\Omega_F$  est de la forme  $\Sigma_\alpha \setminus (v_\alpha \cup U_\alpha)$  ou on a posé  $v_\alpha = \omega_\alpha^{-1}(x_\infty)$ ,  $x_\infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ .

Ceci rappelé on démontre d'abord :

**LEMME 6.1.** - La P-normalisation  $\check{F} \longrightarrow \overline{P/H}$  est bijective i.e.  $\overline{P/H}$  est localement irréductible.

Idee de la démonstration : On montre que, si tel n'était pas le cas, la modification  $\check{Z} \longrightarrow Z$  avec  $\check{Z} = G \times^P \check{F}$  aurait au moins une fibre non connexe ce qui contredirait la normalité de  $Z$ .

Toujours pour préciser la géométrie de  $\overline{P/H}$  on montre ensuite que la P-modification  $F \xrightarrow{\omega_\alpha \circ \theta} \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  induit sur l'orbite ouverte une P-fibration  $\Omega_F \cong \overline{P/H} \longrightarrow P/J \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_0\}$  et qu'alors dans la fibration intermédiaire qui s'en déduit :

$$G/H \longrightarrow G/J \longrightarrow G/P$$

$G/J$  est l'espace total d'un fibré très ample  $\eta$  sur  $G := G/P$  défini par un caractère  $\rho^{-1} : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$  avec  $T := S \cap P / (S \cap P, S \cap P)$  ( $S \cap P$  parabolique dans  $S$ ).

$\rho_0$  (resp.  $l(\eta) = l(\rho)$ ) désignant alors le primitif (resp. la longueur) de  $\rho$  on aura  $\rho = \rho_0^{l(\eta)}$ .

Si maintenant  $C_\eta$  (resp.  $\check{C}_\eta = \mathbb{P}(\eta \oplus \theta_Q)$ ) désigne l'espace total de  $\eta$  (resp. le complété à l'infini de cet espace total) on a

$\tilde{C}_\eta = C_\eta \cup s_\infty(\eta)$  et on sait qu'en sus de  $s_\infty(\eta)$  existe une section finie  $s_0(\eta) \subset C_\eta$  qui est  $S$ -stabilisée; d'où l'existence d'un point  $x_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{x_\infty\} =$  fibre vectorielle de  $\eta$  au dessus de la classe neutre de  $G/P$  qui est  $S \cap P$ -stabilisé (ou ici  $x_\infty \in \tilde{C}_\eta$  est l'unique point dans la "fibre neutre" qui soit dans  $s_\infty(\eta)$ ). Or le  $P$ -morphisme  $\tilde{\omega}_\alpha \circ \theta : F \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  permet de définir un  $G$ -diagramme commutatif de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} \Omega = G/H & \xrightarrow{\pi|_\Omega} & G/J = C_\eta \\ \downarrow \eta & & \downarrow \\ \tilde{Z} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{C}_\eta \end{array}$$

tel que  $\pi|_\Omega^{-1}(s_0(\eta))$ , qui est compactifiable par un point (classe 3!) soit l'espace total d'un fibré en droites très ample  $\eta'$  sur  $Q$  défini par un caractère  $\rho' : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$ . Alors, comme plus haut, on en déduit en sus de  $\tau_\alpha := \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0) \cap E_\alpha$  l'existence d'un autre point  $\tau'_\alpha \in \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0) \setminus \{\tau_\alpha\} \in \Omega_F = P/H$  qui soit  $S \cap P$ -stabilisé ce qui permet de montrer que la partie semi-simple de  $S \cap P$  ainsi que son radical unipotent agissent trivialement sur  $\Sigma_\alpha$  (et donc sur  $F$  et  $\overline{P/H}$ ). Si bien qu'en fait c'est tout le sous-groupe dérivé  $(S \cap P, S \cap P)$  qui agit trivialement sur  $\Sigma_\alpha$  ce qui permet de définir une  $T$ -action sur  $\Sigma_\alpha$ ; le tore algébrique  $T$  étant, ici, par définition,  $S \cap P / (S \cap P, S \cap P)$ .

Il est alors aisé de voir qu'existe une section nulle

$\emptyset(\alpha) \subset \Sigma_\alpha \setminus E_\alpha$  globalement  $T$ -stabilisée telle que :

1)  $\tau'_\alpha = \emptyset(\alpha) \cap \tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0)$  .

2) Par la décomposition  $T_{\tau'_\alpha}(\Sigma_\alpha) = T_{\tau'_\alpha}(\emptyset(\alpha)) \oplus T_{\tau'_\alpha}(\tilde{\omega}_\alpha^{-1}(x_0))$

la  $T$ -action infinitésimale est diagonalisée via les carac-

tères  $\rho^{-1}$  et  $\rho'$ .

Le théorème de linéarisation combiné au "Kegelsatz" permet alors de voir que cette T-action est bonne i.e. que  $\rho$  et  $\rho'$  sont commensurables et que, plus précisément, (amplitude de  $\pi^{-1}(s_0(\eta))$ ) il existe  $j \in \mathbb{Z}$ , a priori assujetti à la seule condition  $\alpha l + j > 0$ , tel que  $\rho' = \rho^{-\alpha l - j}$ .  $\rho$  est donc le caractère fondamental de la bonne T-action sur  $\Sigma_\alpha$  et  $j$  son indice effectif.

Afin, maintenant, d'avoir des précisions sur l'entier  $j$  on démontre d'abord que  $\theta^{-1}(v_\alpha \cup E_\alpha) \subset F$  contient exactement une composante irréductible désormais notée  $D_0$  qui est ponctuellement T-stabilisée, ce qui a d'ailleurs pour conséquence que  $\overline{P/H} \setminus \Omega$  (et donc  $\check{F} \setminus \Omega$  cf. lemme 6.1) n'a qu'une composante irréductible ce qui permet de montrer :

**LEMME 6.2.** Dans notre contexte l'indice effectif de la bonne T-action vérifie  $-\ell(\eta) < j < \ell(\eta)$ .

Montrons par exemple que  $j \geq \ell(\eta)$  serait absurde : en effet  $\sigma_\alpha$  serait alors  $\rho$ -répulsif et nécessairement  $\theta(D_0) = \sigma_\alpha$  ; en éclatant  $\sigma_\alpha$  on obtient  $\Sigma_{\alpha+1/2} = (\check{\Sigma}_{\alpha+1})$  cf. processus de rétrogradation de la classe III) ainsi qu'une factorisation

$\theta : F \xrightarrow{\theta'} \Sigma_{\alpha+1/2} \longrightarrow \Sigma_\alpha$ . Si  $\check{v}_\alpha$  désigne l'image réciproque de  $v_\alpha$  dans  $\Sigma_{\alpha+1/2}$  il est clair que  $\check{v}_\alpha \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est lisse et que  $\check{v}_\alpha \cdot \check{v}_\alpha = -1$  et que deux cas seraient possibles :

1)  $\theta'$  est un isomorphisme i.e. en fait  $j = \ell(\eta)$  mais alors la T-action sur  $\check{v}_\alpha$  étant non triviale,  $\chi(\check{v}_\alpha)$  serait (cas n°3!) réduit à un point ce qui contredirait la P-minimalité de  $F$  en vertu du théorème de Castelnuovo-Enriques.

2)  $\theta'$  est une "vraie" modification :  $\theta'(D_0)$  ne peut être que l'unique point de  $\rho$ -répulsivité sur  $\Sigma_{\alpha + \frac{1}{2}}$  : mais  $j > l(\eta)$  implique que  $\theta'(D_0) \notin \check{V}_\alpha$  car il ne peut être que le point de contiguité (dans  $\Sigma_{\alpha + \frac{1}{2}}$ ) de la courbe éclatée de  $\sigma_\alpha$  avec l'image réciproque propre de  $E_\alpha$  dans  $\Sigma_{\alpha + \frac{1}{2}}$ . En faisant maintenant l'observation que si  $\theta : F \longrightarrow F'$  est une P-modification entre surfaces lisses qui n'est pas un isomorphisme, alors  $\theta'(D_0)$  est réduit à un point tel qu'on ait de plus l'isomorphisme :

$$F \setminus \theta'^{-1}(\theta'(D_0)) \longrightarrow F' \setminus \theta'(D_0) .$$

(Tout ceci résultant de ce que  $F$  est une P-désingularisée minimale de  $\overline{P/H}$ ) on obtiendrait que  $\theta'^{-1}(\check{V}_\alpha) \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  serait d'auto-intersection  $-1$  en ayant une image réduite à un point dans  $\overline{P/H}$  puisque  $T$  y agit non trivialement (cas n°3...) ce qui contredirait encore la "P-minimalité" de la désingularisée  $F$ .

De cette même observation on déduit en plus :

PROPOSITION 6.3. - Le caractère fondamental  $\rho$  et l'indice effectif,  $j$   $0 \leq j \leq l(\eta)$ , de la bonne  $T$ -action définie ci-dessus déterminent la géométrie de  $F$  et de  $\check{F}$  qui sont alors respectivement la "T-surface" lisse  $\Sigma_{\alpha + \frac{j}{l}}$  et sa contractée  $\check{\Sigma}_{\alpha + \frac{j}{l}}$ .

Démonstration : Pour  $j = 0$  on peut voir immédiatement que la minimalité de  $F$  (en tant que P-désingularisée) a pour conséquence que  $\theta : F \longrightarrow \Sigma_\alpha$  est un isomorphisme (on a exclu  $\alpha = 1$  i.e.  $\check{F} = \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \dots$ ). Si par contre  $j > 0$  on se rappelle que

$\Sigma_{\alpha + \frac{j}{l}} = (\Sigma_\alpha^{m(j/l)})$  est obtenue au terme de la suite de transformations

monoïdales T-équivariantes décrite plus haut :

$$\Sigma_{\alpha + \frac{j}{\ell}} = \Sigma^{(m)} \xrightarrow{\theta_n} \Sigma^{(m-1)} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\theta_1} \Sigma^{(0)} = \Sigma_{\alpha}$$

mais  $j > 0$  implique que par la P-modification  $\theta^{(0)} := \theta$  :

$F \longrightarrow \Sigma^{(0)} = \Sigma_{\alpha}$ , nécessairement  $\theta(D_0) = \sigma_{\alpha}$  d'où par l'observation qui précède la proposition 6.3, l'isomorphisme  $F \setminus \theta^{-1}(\sigma_{\alpha}) \cong \Sigma_{\alpha} \setminus \{\sigma_{\alpha}\}$  qui permet, via la propriété universelle de l'éclatement  $\theta_1 : \Sigma^{(1)} \longrightarrow \Sigma^{(0)}$ , de factoriser  $\theta^{(0)}$  par :

$$F \xrightarrow{\theta^{(1)}} \Sigma^{(1)} \xrightarrow{\theta_1} \Sigma_{\alpha}$$

on peut alors, en procédant de proche en proche (récurrence) comme ci-dessus, montrer l'existence pour  $1 < i < m$  d'une modification  $\theta^{(i)} : F \longrightarrow \Sigma^{(i)}$  telle que  $\theta^{(i-1)} = \theta_i \circ \theta^{(i)}$  et telle encore que  $\theta^{(i)}(D_0) =$  l'unique point  $\rho$ -répulsif  $\sigma_{\alpha}^{(i+1)} \in \Sigma_{\alpha}^{(i)}$ . Enfin une ultime utilisation de l'observation qui précède la proposition 6.3 montre que  $\theta^{(m-1)}$  se factorise par un isomorphisme  $\theta^{(m)} : F \longrightarrow \Sigma^{(m)}$  tel que " $\theta^{(m)}(D_0) = D_0$ ".

Si bien qu'en tant que "T-espace"  $F = \Sigma_{\alpha + \frac{j}{\ell}}$ , ce qui implique (cas n° 3...),  $D_0$  étant la seule composante T-stabilisée (et donc  $S \cap P$ -stabilisée) de  $F$ ,  $\tilde{F} = \sum_{\alpha + \frac{j}{\ell}}$ . C.Q.F.D.

L'espace  $\tilde{Z} = G \times^P F$  (qui est une  $G$ -désingularisée de  $Z$ ) est donc nécessairement l'espace  $\tilde{E}_{\alpha, Q, \eta, j}$  construit au paragraphe précédent et on en déduit aisément que  $Z$  est l'espace  $E_{\alpha, Q, \eta, j}$  du même paragraphe précédent. C.Q.F.D.

N.B. Le lecteur se persuadera que le théorème de Oeljeklaus (cf. [34]) permet de démontrer que le lieu singulier de  $E$  est discret (i.e. ne contient pas tout  $Y_0$ ) si et seulement si  $Q$  est un

espace projectif et que p.g.c.d.  $(\ell, j) = 1$ . Si de surcroît  $j = 0$  (et qu'alors nécessairement  $\eta = \mathcal{O}(1)$ ) il n'y a qu'un point singulier au plus,  $E$  étant lisse (cas envisagé par [H.0.]) quand de plus  $\alpha = 1$  auquel cas on peut retrouver que  $E$  est un espace projectif.

Résumons tous les résultats obtenus par le :

**THÉORÈME 6.1.** - Soit  $Z$  un espace analytique complexe connexe et normal quasi-homogène d'orbite dense  $\Omega$ . Si l'ensemble résiduel  $Y := Z \setminus \Omega$  n'est pas vide et vérifie  $\dim_{\mathbb{C}} Y \leq 1$  et que  $\dim_{\mathbb{C}} Z \geq 3$ , alors :

- i) Si  $\dim_{\mathbb{C}} Y = 0$ ,  $Z$  est un cône projectif rationnel dont  $Y = \{y_0\}$  est le sommet (Kegelsatz de Huckleberry-Oeljeklaus vrai aussi si  $\dim_{\mathbb{C}} Z = 2$ ).
- ii) Si  $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$ ,  $Z$  est un des espaces de classe I', I'', II, III, IV et V décrits dans tout ce qui précède. (cf. tableau page suivante) .

CONCLUSION

Classe	Type	Normalité de $\overline{P/H}$	Remarques	Cas n° 1
I'	Espace $C_{\eta,k}$ projectif rationnel	$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$		1
II'	Espace $P_{k,\ell}$ projectif rationnel	$\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$	toujours de dimension 3 possède deux bouts	1
II	Espace $D_{\eta}$ projectif rationnel	$\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$	En rétrécissant la partie semi-simple du groupe de quasi-homogénéité devient de classe III	1
III	Espace $\Lambda_{\alpha,n,Q,\eta}$ projectif rationnel	cône $\sum_{\alpha}$	toujours de dimension 3 lorsqu'il est lisse i.e. $Q_3$ et $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$	2
IV \setminus IV <sub>0</sub>	Fibration de Seifert sur un cône projectif quasi-homogène	Surface de Hopf de dimension algébrique 1	non Moishezon de "codimen- sion algébrique" égale à 1	3
IV <sub>0</sub>	$C_{\eta} \times E$ où $E$ désigne une courbe algébrique	$E \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$	algébrique avec une variété d'Albanèse non nulle	3
V	$\Xi_{\alpha,j,Q,\eta}$ projectif rationnel	espace $\sum_{\alpha} \frac{j}{\ell}$	très compliqué ...	3

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHIEZER D.N. - Dense orbits with two ends.  
Math. USSR, Izvestija II, 293-307 (1977)
- [2] AUSLANDER L. - On radicals of discrete subgroups of Lie groups.  
Amer. J. Math. 85, 145-150 (1963)
- [3] BARTH-W., OELJEKLAUS E.- Über die Albanese Abbildung einer fast  
homogenen Kähler-Mannigfaltigkeit.  
Math. Ann. 211, 47-62 (1974)
- [4] BARTH W. und OTTE M.- Über fast-uniforme Untergruppen Komplexer  
Liegruppen und auflösbare Komplexe Mannigfaltigkeiten.  
Comm. Math. Helv. 44, 269-281 (1969)
- [5] BARLET D.- Convexité au voisinage d'un cycle.  
Séminaire François NORGUET. Lecture Notes n° 807, Springer  
Verlag, 102-121 (1980)
- [6] BLANCHARD A.- Sur les variétés analytiques complexes.  
Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 73, 157-202 (1956)
- [7] BOREL A.- Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie.  
Ann. of Math. 58, 443-457 (1953)
- [8] BOTT R.- Homogeneous vector bundles.  
Ann. of Math. (2) 66, 203-248 (1957)
- [9] BRIESKORN E.- Über holomorphe  $\mathbb{P}_n$ -bündel über  $\mathbb{P}_1$   
Math. Ann. 157, 343-357 (1965)
- [10] FISCHER G.- Complex Analytic Geometry.  
Lecture Notes in Mathematics 538. Springer (1976)
- [11] FREEMAN M.- Local complex foliations of real submanifolds.  
Math. Ann. 209, 1-30 (1974)

- [12] FREUDENTHAL H.- Über die Enden topologischen Räume und Gruppen.  
Math. Z. 33, 692-713 (1931)
- [13] GILLIGAN B. and HUCKLEBERRY A.- Remarks on  $k$ -Leviflat complex manifolds.  
Can. J. Math. Vol. 31, 881-889 (1979)
- [14] GILLIGAN B.- Ends of complex homogeneous manifolds having non constant holomorphic functions.  
Arch. Math. 37, 544-555 (1981)
- [15] CRAUERT H.- Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen.  
Math. Ann. 135, 263-273 (1958)
- [16] GRAUERT H.- Über Modifikationen und exceptionelle analytische Mengen.  
Math. Ann. 146, 331-368 (1962)
- [17] GRAUERT H. und REMMERT R.- Komplexe Räume.  
Math. Ann. 136, 245-318 (1962)
- [18] GRIFFITHS Ph. and HARRIS J.- Principles of algebraic Geometry.  
New-York, J. Wiley (1978)
- [19] GUNNING R. and ROSSI H.- Analytic functions of several complex variables.  
Englewood Cliffs N.J., Prentice Hall (1965)
- [20] HIRZEBRUCH F.- Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexer Mannigfaltigkeit.  
Math. Ann. 124, 77-86 (1951)
- [21] HOLMANN H.- Seifertsche Faserräume.  
Math. Ann. 157, 138-166 (1964)
- [22] HUCKLEBERRY A. and LIVORNI L.- A classification of complex homogeneous surfaces.  
Can. J. Math. 33, 1096-1109 (1981)
- [23] HUCKLEBERRY A. and MARGULIS G.A.- Invariant analytic hypersurfaces.  
Inven. Math. 71, 235-240 (1983)

- [24] HUCKLEBERRY A. and OELJEKLAUS E.- A characterisation of complex homogeneous cônes "Kegelsatz".  
Math. Zeitschrift 170, 181-194 (1980)
- [25] HUCKLEBERRY A. and OELJEKLAUS E.- Sur les espaces analytiques complexes presque homogènes.  
Comptes-rendus Académie des Sciences Série A, 447-448 (1980)
- [26] HUCKLEBERRY A. and OELJEKLAUS E.- Classification theorems for almost homogeneous-Spaces. Désigné [HO] dans le texte.  
Annales de l'Institut Elie Cartan, volume 9, Nancy (1984)
- [27] HUCKLEBERRY A. and SNOW D.- Almost-homogeneous Kähler manifolds with hypersurface orbits.  
Osaka J. Math. 19, 763-786 (1982)
- [28] KAUP L.- Ein Künneth Formula für Frechet Garben.  
Math. Zeitschrift 97, 158-168 (1967)
- [29] KAUP W.- Infinitesimale transformations gruppen komplexer Räume.  
Math. Ann. 160, 72-92 (1965)
- [30] LESCURE F.- Elargissement du groupe d'automorphisme pour des variétés quasi-homogènes.  
Math. Ann. 261, 455-462 (1982)
- [31] LESCURE F.- Un résultat de type Borel-Weil. Application.  
Publication Institut Elie Cartan 6, Nancy (1982)
- [32] LESCURE F.- Démonstration d'une conjecture de Huckleberry-Oeljeklaus .  
C.R.A.S. 184-Série I, t. 297 (1983)
- [33] MORIMOTO A.- Non compact complex Lie Groups without non constant holomorphic functions.  
Proc. of the Conf. on Complex Analysis. Minnéapolis 256-272 (1964)
- [34] OELJEKLAUS E.- Ein Hebbarkeitssatz für Automorphismengruppen Kompakter Mannigfaltigkeiten.  
Math. Ann. 190, 154-166 (1970)
- [35] ORLIK P. and WAGREICH P.- Isolated singularities of algebraic

surfaces with  $\mathbb{C}^*$ -action.

Ann. of Math. Vol 93, 203-228 (1971)

- [36] POTTERS J.- On almost compact complex surfaces.  
Inv. Math. 8, 244-266 (1969). Désigné [Po] dans le texte.
- [37] REMMERT R. und STEIN K.- Über die wesentlichen Singularitäten analytischerer Mengen.  
Math. Ann. 126, 263-306 (1953)
- [38] ROTHSTEIN W.- Zur theorie des analytischen Mannigfaltigkeit im Raum von Komplexer Veränderlichen.  
Math. Ann. 129, 98-138 (1955)
- [39] SNOW J.- Complex solv-manifolds of dimension two and three.  
Thesis, Notre Dame University (1979)
- [40] STEINBERG R.- Conjugacy classes in algebraic groups.  
Lecture Notes in Mathematics n° 366, Springer Verlag (1974)
- [41] STEINSIEK M.- Homogeneous-rational manifolds and unique factorization.  
Compositio Mathematica 52, 221-229 (1984)
- [42] TITS J.- Espaces homogènes complexes compacts.  
Comm. Math. Helv. 37, 111-120 (1962)
- [43] TITS J.- Free subgroups in linear groups.  
J. Algebra 20, 250-270 (1974)
- [44] UENO K.- Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.  
Lecture Notes in Mathematics 439, Berlin-Heidelberg New-York Springer Verlag (1975)
- [45] VAN DE VEN T.- Analytic compactifications of complex homology cells.  
Math. Ann. 147, 189-204 (1962)

Mémoires de la Société Mathématique de France - nouvelle série

- 1980 - 1 . J. Briançon, A. Galligo, M. Granger - Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites.  
 2 . D. Bertrand, M. Waldschmidt - Fonctions abéliennes et nombres transcendants.  
 3 . Y. Félix - Dénombrement des types de K-Homotopie. Théorie de la déformation.  
 4 . L. Bégueri - Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos.
- 1981 - 5 . S. Ochanine - Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle.  
 6 . Nguyen Tien Dai, Nguyen Huu Duc, F. Pham - Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés. Appendice de Nguyen Tu Cuong.
- 1982 - 7 . P. Ellia - Sur les fibrés uniformes de rang  $(n + 1)$  sur  $P^n$ .
- 1983 - 8 . M. Granger - Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.  
 9/10 . S. Halperin - Lectures on minimal models.  
 11/12 . G. Henniart - La conjecture de Langlands locale pour  $GL(3)$ .
- 1984 - 13 . D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt - Les nombres transcendents.  
 14 . G. Dloussky - Structure des surfaces de Kato.  
 15 . M. Duflo, P. Eymard, G. Schiffmann (éditeurs) - Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.  
 16 . F. Delon, D. Lascar, M. Parigot, G. Sabbagh (éditeurs) - Compte rendu de la table ronde de Logique, octobre 1983, Paris.  
 17 . B. Perrin-Riou - Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa.
- 1985 - 18 . Corinne Blondel - Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur  $GL(2)$  et leurs caractères.  
 19 . J.P. Demailly - Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.  
 20 . F. Digne, J. Michel - Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani.  
 21 . M. Gros - Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.
- 1986 - 22 . H. Maillot - Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes.  
 23 . D. Barsky, P. Robba (Editeurs) - Introductions aux cohomologies p-adiques.  
 24/25 . B. Helffer, J. Sjöstrand - Résonances en limite semi-classique.
- 1987 - 26 . F. Lescure - Compactifications équivariantes par des courbes.