MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME

Une construction du groupe de Fischer $Fi(24)$

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 27 (1987)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_27__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n°27
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 115, 1987, fascicule 2

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

PAR

MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME (*)

RÉSUMÉ. — A tout graphe ε d'un certain type —type $\mathcal{F}$— on sait associer un groupe G presque simple (i.e. $\mathcal{S}(G/Z(G))$ est simple non abélien) admettant comme classe de Fischer l'ensemble des sommets D de ε. On a alors $G = <D>$ et ε est le graphe de Fischer de G.

C'est en étendant le graphe de Fischer de Fi(23) que l'on construit celui de Fi(24). On définit le graphe associé à un «quadruple» (ensemble de données incluant celle du graphe que l'on cherche à étendre) et on donne des conditions nécessaires pour qu'un tel graphe soit de type $\mathcal{F}$ (conditions EXT.) et pour que le groupe associé soit unique à isomorphisme près (conditions U.).

A partir d'un sous-groupe maximal de Fi(23) et de Fi(23) lui-même, on exhibe un quadruple satisfaisant aux conditions EXT. et U. ce qui donne l'existence et l'unicité (à isomorphisme près) du groupe de Fischer Fi(24).

ABSTRACT. — To all graph ε of a certain type —type $\mathcal{F}$— we know how to associate an almost simple group G (i.e. $\mathcal{S}(G/Z(G))$ is simple and non abelian) for which the set of vertices D of ε is a Fischer class. So we have $G = <D>$ and ε is the Fischer graph of G.

By extending the Fischer graph of Fi(23) we construct the graph of Fi(24). We define the graph associated to a «quadruple» (set of data including that of the graph we are going to extend) and we set necessary conditions so that such a graph be of type $\mathcal{F}$ (conditions EXT.) and its associated group be unique up to isomorphism (conditions U.).

From a maximal subgroup of Fi(23) and from Fi(23) itself we construct a quadruple satisfying the conditions EXT. and U.; in this way the existence and uniqueness (up to isomorphism) of the Fisher groupe Fi(24) are established.

(*) Texte reçu le 18 novembre 1985, révisé le 25 juin 1987.

0037-9484/87 02 1-74 $ 9.40 © Gauthier-Villars

TABLE DES MATIÈRES

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

INTRODUCTION

Une *classe de Fischer* (ou classe fischérienne) d'un groupe G est une classe de conjugaison D d'involutions telle que le produit de deux éléments quelconques de D soit d'ordre au plus 3; on dit alors que (G,D) est un couple fischérien. L'exemple typique est celui des transpositions dans le groupe symétrique . Ayant eu l'idée de caractériser les groupes symétriques par l'existence d'une telle classe, B.Fischer a été amené à déterminer tous les groupes finis " presque simples " (définition ci-dessous I.§1.1.(b)) de centre trivial possèdant une classe fischérienne et il a de la sorte découvert les trois groupes sporadiques qui portent son nom (Fi(22),Fi(23),$\mathcal{D}$Fi(24)). Ces résultats sont exposés dans une prépublication $[F_2]$ dont seuls les quatre premiers chapitres ont fait l'objet d'un version définitive $[F_1]$. En outre, les principes généraux permettant d'obtenir l'existence de couples fischériens presque simples, notamment celle de Fi(24) ($[F_2]$. ch19), sont exposés de manière très succinte et parfois imprécise, ce qui , sans compromettre l'exactitude du résultat final, reste très génant pour se convaincre de l'existence de Fi(24). On dispose, il est vrai, d'un autre moyen de prouver cette existence qui passe par la construction préalable du " Monstre " ([Gr] p.86). Mais outre que cette preuve n'est qu'implicite dans la littérature, elle donne sur les groupes Fi un éclairage tout différent de celui fourni par l'approche de Fischer . Il est apparu intéressant de publier une démonstration de l'existence de Fi(24) dans *l'esprit* de Fischer. C'est le but principal de cet article.

Au cours de ce travail, nous sommes amenés à axiomatiser, en les généralisant, certains procédés de construction de Fischer. L'axiomatique en question, exposée dans la premiere partie, s'applique à l'ensemble du travail de Fischer (y compris les preuves d'existence de Fi(22) et Fi(23)).

Cet article est une refonte d'une partie de la thèse de Doctorat de l'auteur.

Je tiens à remercier Jacques Tits pour sa lecture minutieuse du manuscrit et pour ses nombreux conseils qui ont contribué, entre autres, à en améliorer la rédaction.

Première partie: AXIOMATIQUE

A tout couple fischérien (G,D) est associé un graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les éléments de D et dont les arêtes sont les paires d'éléments distincts qui commutent. Parfois le graphe $\mathcal{G}$ détermine le couple (G,D) ; c'est le cas, notamment, lorsque le groupe G est presque simple de centre trivial. Dans le premier paragraphe, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe $\mathcal{G}$ soit associé à un couple fischérien presque simple; nous disons alors que $\mathcal{G}$ est de type $\mathcal{F}$.

La méthode suivie par Fischer est essentiellement inductive. Cela se traduit ici par le concept d'extension de graphes; il s'agit, à partir du graphe d'un couple fischérien non nécessairement presque simple et de quelques données supplémentaires, de construire un graphe "plus gros", extension du premier et de démontrer qu'il est de type $\mathcal{F}$. Cela fait l'objet des paragraphes 2 et 3 .Au paragraphe 2, nous étudions une situation plus générale et plus "abstraite" : à un ensemble de données - un "quadruple" - est associé un graphe et notre théorème principal donne des conditions suffisantes (les conditions EXT) pour que ce graphe soit de type $\mathcal{F}$. Nous spécialisons ce résultat au paragraphe 3, où sont introduites les q-extensions, pour un entier q égal à 1 , 2 ou 3 (reflétant les situations les plus importantes rencontrées dans la pratique) et où divers exemples de telles extensions sont donnés.

Enfin au paragraphe 4, nous montrons que sous certaines conditions (les conditions U), un isomorphisme entre graphes se prolonge de façon unique à des 2-extensions de ceux-ci. Ce résultat sera utile non seulement pour établir l'unicité du groupe Fi(24) mais encore pour prouver son existence.

§1. GRAPHES DE TYPE $\mathcal{F}$ - COUPLES FISCHÉRIENS PRESQUE SIMPLES

1. Notations. Définitions.

(a) Soit D un ensemble d'involutions d'un groupe fini G engendrant G tel que l'ordre du produit de deux éléments quelconques soit au plus 3.

Si D est une réunion $\cup_{1 \leq i \leq m} D_i$ de classes de conjugaison, on dit que D est un ensemble de Fischer de G; le groupe G est alors le produit central des sous-groupes $\langle D_i \rangle$ ($1 \leq i \leq m$).

Si D est une seule classe, on dit que D est une classe de Fischer de G et que (G,D) est un couple fischérien.

On démontre facilement que, si D est un ensemble de Fischer fini de G, G est un groupe fini; on fera ,ici, toujours l'hypothèse que D est fini.

(b) Lorsque le groupe dérivé $\mathcal{D}(G/Z(G))$ du quotient de G par son centre est simple non abélien, on dit que G est un groupe presque simple.

On démontre aisément que si (G,D) est un couple fischérien avec $|G|>2$, le centre de G/Z(G) est trivial et que les assertions "est une classe de Fischer" et "est presque simple" passent au quotient modulo Z(G). En particulier, D est en bijection avec son image modulo Z(G).

(c) Graphe de Fischer. Soit G un groupe possédant un ensemble de Fischer D (D fini). Le groupe G opère de manière naturelle sur le graphe défini de la manière suivante:

- les sommets de $\mathcal{G}$ sont les éléments de D,
- les arêtes de $\mathcal{G}$ sont les paires d'éléments (distincts) de D dont le produit est d'ordre 2 .

On dit que $\mathcal{G}$ est le graphe de Fischer de (G,D).

Lorsque $D \cap Z(G)=\emptyset$, en particulier lorsque D est une classe de Fischer de G et que l'on a $|G|>2$, D est isomorphe à son image $\overline{D}$ modulo Z(G), on identifie le graphe de Fischer de (G,D) et celui de $(G/Z(G),\overline{D})$.

La décomposition de D en classes de conjugaison correspond à la partition de $\mathcal{G}$ en composantes anti-connexes (composantes connexes du graphe opposé). Le graphe de Fischer d'un couple fischérien est donc anti-connexe.

(d) D-sous-groupe. Un sous-groupe d'un groupe G possédant un ensemble de Fischer D est un D-sous-groupe de G s'il est engendré par un sous-ensemble de D . Il est clair que si H est un D-sous-groupe de G, $H\cap D$ est un ensemble de Fischer de H.

(e) Soit D un ensemble de Fischer d'un groupe G. Pour tout élément d de D, on pose:

$$D_d = \{\, e\in D \mid 1\neq ed=de \,\}$$
$$A_d = \{\, x\in D \mid xd\neq dx \,\}$$

on a :

$$D = D_d \cup \{d\} \cup A_d \ .$$

(f) Soient $\mathcal{E}$ un graphe, E l'ensemble de ses sommets.On appelle triple de $\mathcal{E}$ tout sous-ensemble T de cardinal 3 ne contenant aucune arête, tel que tout sommet de $\mathcal{E}$ lié à deux points de T est lié à tous les autres points de T.

On dit que $\mathcal{E}$ est de type $\mathcal{T}$ si les conditions suivantes sont remplies:

(1) le cardinal de E est au moins égal à 4;

(2) la composante anti-connexe de chaque sommet est de cardinal au moins égal à 2;

(3) chaque paire de sommets non liés de $\mathcal{E}$ est contenue dans un unique triple;

(4) pour tout sommet e de $\mathcal{E}$ la fonction $x \mapsto t_e(x)$ où $t_e(x)=x$ si $\{e,x\}$ est une arête de $\mathcal{E}$ ou si $e=x$, et où $\{e,x,t_e(x)\}$ est l'unique triple de $\mathcal{E}$ contenant $\{e,x\}$ dans le cas contraire, est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

La fonction $x \mapsto t_e(x)$ s'appelle l'indicatrice du sommet e. Pour tout sommet e de $\mathcal{E}$, on désigne par E_e l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ qui sont liés à e ; on a donc

$$E_e = \{\, f\in E \mid \{e,f\} \text{ est une arête de } \mathcal{E} \,\} \ .$$

Remarque. Soient (G,D) un couple fischérien et $\mathcal{G}$ son graphe de Fischer . Toute paire $\{d,x\}$ d'éléments de D qui ne commutent pas entre eux, détermine un triple $T = \{d,x,dxd\}$ -. Si pour chaque paire $\{d,x\}$ avec $dx\neq xd$, on impose que

$\{d,x,xdx\}$ soit l'unique triple contenant $\{d,x\}$, l'application $d \rightarrow xdx$ est l'indicatrice de x ($x \in A_d$) : c'est un automorphisme de $\mathcal{G}$.

Dans toute la suite, nous appellerons sous-graphe d'un graphe $\mathcal{G}$ porté par un sous-ensemble E' de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ le sous-graphe plein porté par E'.

2. Équivalence entre graphe de type $\mathcal{F}$ et couple fischérien presque simple. Énoncé du théorème.

Le théorème suivant établit le lien qui existe entre "groupe presque simple" et "graphe de type $\mathcal{F}$". De manière précise, il montre que prouver qu'un couple fischérien est presque simple c'est prouver que son graphe de Fischer est de type $\mathcal{F}$. En outre, il montre qu'à chaque graphe de type $\mathcal{F}$ est associé un couple fischérien presque simple.

C'est d'ailleurs en construisant un graphe de type $\mathcal{F}$ que nous donnerons une preuve de l'existence de Fi(24).

THÉORÈME I.1. -
(a) Le graphe d'un couple fischérien presque simple est de type $\mathcal{F}$.
(b) Soit $\mathcal{E}$ un graphe de type $\mathcal{F}$. Soient D l'ensemble des indicatrices de $\mathcal{E}$ et G le sous-groupe de Aut($\mathcal{E}$) engendré par D. L'ensemble D est un ensemble de Fischer de G. Si $\mathcal{E}$ est anti-connexe, (G,D) est un couple fischérien presque simple de centre trivial. Le graphe de Fischer de (G,D) est isomorphe à $\mathcal{E}$.

La démonstration de (a) fait appel à la connaissance de certains couples fischériens classiques - ceux pour lesquels $\langle D_d\rangle/Z(\langle D_d\rangle)$ ($d \in D$) n'est pas presque simple -. Toutefois, on peut caractériser les graphes de type $\mathcal{F}$ en n'utilisant que des résultats issus de l'étude générale des couples fischériens.

PROPOSITION I.1. - Soient (G,D) un couple fischérien et $\mathcal{G}$ son graphe. Les conditions ci-après sont nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{G}$ soit de type $\mathcal{F}$.

(i) $|G|>2$ et $O_3(G)$ est central dans G.

(ii) Si x et y sont des éléments de D qui ne commutent pas entre eux, les seuls éléments de D centralisant $D_x \cap D_y$ et n'appartenant pas à $D_x \cap D_y$

sont x, y, x^y .
(Réf. $[F_2]$ 10.3 ;[VD] 2-106).

3. Préliminaires nécessaires à la démonstration.

(a) Soit (G,D) un couple fischérien non résoluble; G admet un D-sous-groupe isomorphe à Σ_5 (Réf. $[F_2]$ 5.1.1 ; [VD] 2-97).

(b) Sur la presque simplicité. Soit (G,D) un couple fischérien.

1- Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) D est un G-ensemble primitif de cardinal au moins égal à 4,

(ii) G est presque simple;

en outre, sous l'une des conditions ci-dessus, le graphe de (G,D) est connexe.

2- Soit d un élément de D. Si G est presque simple, on a:

(i) D_d est une classe de Fischer de $\langle D_d \rangle$ et $\langle D_d, d \rangle$ opère transitivement sur le sous-ensemble $A_d = \{e \in D \mid ed \neq de\}$; en particulier, les sous-groupes $\langle D_d \cap D_x \rangle$ $(x \in A_d)$ sont conjugués dans $\langle D_d \rangle$;

(ii) si $\mathbb{O}_2(\langle D_d \rangle)$ et $\mathbb{O}_3(\langle D_d \rangle)$ sont centraux, $(\langle D_d \rangle, D_d)$ est presque simple.

(Réf. $[F_1]$ 3.2.2, 3.3.3, 3.3.4 ; [VD] 2-82, 2-89, 2-90, 2-93).

(c) Sur le centre de $\langle D_d \rangle$.

1- On appelle niveau d'un couple fischérien (G,D) le cardinal commun des sous-ensembles minimaux d'une clique de D dont le produit des éléments est 1. Si de tels sous-ensembles n'existent pas, on dit que (G,D) est de niveau nul.

Si (G,D) est un couple fischérien de niveau non nul, quel que soit l'élément d dans D, d appartient à $\langle D_d \rangle$, donc il est dans le centre de $\langle D_d \rangle$.

(Réf. [VD] 3-1-3 c).

2- Soit $\mathcal{E}$ un graphe anti-connexe de type $\mathcal{F}$, E l'ensemble de ses sommets, e un élément de E et ν un automorphisme de $\mathcal{E}$ qui induit l'identité sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ liés à e . Alors ou bien ν est l'identité sur E, ou bien ν est l'indicatrice de sommet e.

(Réf. $[F_2]$ 10.5 (iii) ; [VD] 2-109).

3- Soit (G,D) un couple fischérien dont le graphe est de type $\mathcal{F}$. Pour tout élément d de D, le centre de $\langle D_d \rangle$ est ou bien trivial ou bien égal à $\langle d \rangle$.

(Réf. [VD] 2-110).

Observons que le théorème I.1 permet d'affirmer que , si (G,D) est un couple fischérien presque simple de niveau non nul, le centre de $<D_d>$ ($d \in D$) est $<d>$.

(d) Caractérisation de certains groupes classiques. Soient (G,D) un couple fischérien presque simple de centre trivial et d un élément de D . Alors:

(i) Si $\mathbb{O}_3(<D_d>) \not\subset Z(<D_d>)$, G est isomorphe à Σ_5 .

(ii) Si $\mathbb{O}_2(<D_d>) \not\subset Z(<D_d>)$, il existe un entier $n \geq 4$ pour lequel ou bien G est isomorphe à Sp(n,2) (n est alors pair) et D est la classe des réflexions symplectiques, ou bien G est isomorphe à PSU(n,4), D est la classe des réflexions unitaires.

(Réf. [F_1] 5.1.10 , [DGW] , [Z] 3-23 et [F_2] 8.2 , 9.2.11 ,[VD] 6-27 , [W]).

On vérifie à la main que le graphe de Fischer de chacun des couples fischériens mentionnés ci-dessus est de type $\mathcal{F}$.

(e) Soit (G,D) un couple fischérien dont le graphe est connexe. Si pour tout élément d de D le sous-graphe (plein) $\mathcal{G}_d$ de $\mathcal{G}$ porté par D_d est de type $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ est également de type $\mathcal{F}$.

(Réf. [VD] 2-112).

4. Preuve du théorème.

Prouvons d'abord l'assertion (a).

Soit (G,D) un couple fischérien presque simple. Son graphe est isomorphe à celui du couple fischérien $(\overline{G},\overline{D})$ obtenu modulo Z(G) (§1. 1.(c)). En outre les assertions "G presque simple" et "$\overline{G}$ presque simple" sont équivalentes (§1. 1.(b)). Nous pouvons alors faire l'hypothèse que le centre de G est trivial pour établir que le graphe de (G,D) est de type $\mathcal{F}$.

Il résulte de (§1. 3.(a)) que G contient un D-sous-groupe isomorphe à Σ_5. Comme le graphe de Fischer de Σ_5 (Σ_5 étant muni de manière naturelle d'une classe de Fischer: celle des transpositions) est de type $\mathcal{F}$ - vérification facile -, nous allons démontrer le résultat par récurrence sur l'ordre de G.

Soit d un élément de D; posons $E = D_d$. Puisque G n'est pas isomorphe à Σ_5, nous avons $\mathbb{O}_3(<E>) \subset Z(<E>)$ (§1. 3.(d)). Deux cas se présentent suivant que $\mathbb{O}_2(<E>)$ est contenu dans $Z(<E>)$ ou qu'il ne l'est pas. Si on a $\mathbb{O}_2(<E>) \not\subset Z(<E>)$, on sait qu'il existe un entier n, $n \geq 4$, pour lequel G est isomorphe soit à Sp(n,2) soit à PSU(n,4) (§1. 1.(d)). Comme les graphes de Fischer associés à ces groupes sont de type $\mathcal{F}$, le théorème est établi dans ce cas. Si par contre, on a $\mathbb{O}_2(\langle E \rangle) \subset Z(\langle E \rangle)$, le couple fischérien $(\langle E \rangle, E)$ est presque simple (§1. 3. (b)2). En vertu de l'hypothèse de récurrence, le graphe de Fischer de $(\langle E \rangle, E)$ est de type $\mathcal{F}$. De là on en déduit qu'il en est de même du graphe de (G,D) (§1. 3.(e)).

Prouvons l'assertion (b).

Soit $\mathcal{E}$ un graphe de type $\mathcal{F}$. Désignons par D l'ensemble de ses indicatrices et par G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ engendré par D.

On vérifie sans difficulté que D est un ensemble de Fischer de G.

Supposons en outre que $\mathcal{E}$ soit anti-connexe; D est alors une classe de Fischer de G . L'application $e \mapsto t_e$ de l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ dans D qui associe à chaque sommet e son indicatrice est clairement un isomorphisme du graphe $\mathcal{E}$ sur le graphe de (G,D). Les automorphismes de $\mathcal{E}$ stabilisent D, par conséquent le groupe G est normal dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Enfin, il résulte de (§1. 3.(c)2) que le centre de G est trivial.

Pour établir que G est un groupe presque simple, il nous suffit de démontrer que le seul sous-groupe normal de G qui ne contient pas $\mathcal{D}G$ est le groupe trivial.

Soit N un sous-groupe de G ayant les propriétés ci-dessus. Notons $\rho : g \mapsto \overline{g}$ l'application canonique de G sur $G/N = \overline{G}$. Si la restriction de ρ à D est injective, N est central dans G car la relation

$$\overline{d} = \overline{n}\,\overline{d}\,\overline{n}^{-1} \qquad (d \in D \ , \ n \in N)$$

entraîne que n centralise D, donc G. Dans cette situation, N est trivial. Dans le cas contraire, il existe des éléments a et b dans D pour lesquels on a $\overline{a} = \overline{b}$. Comme D est une classe de conjugaison et comme $|G| \neq 2$, $\overline{a}$ n'est pas central dans $\overline{G}$. Il existe alors un élément x dans D tel que $\overline{ax}$ soit d'ordre 3. Cet élément x appartient donc à A_d . Soit S l'unique triple du graphe de Fischer de (G,D) qui contient a et x . Nous avons

$$D_a \cap D_x = D_b \cap D_x \quad \text{et} \quad D_a \cap D_{axa} = D_b \cap D_{axa}$$

puisque ce sont les images réciproques de $\overline{D}_{\overline{a}} \cap \overline{D}_{\overline{x}}$ et de $\overline{D}_{\overline{a}} \cap \overline{D}_{\overline{axa}}$. En conséquence, nous avons les égalités suivantes:

$$D_a \cap D_x = D_x \cap D_{axa} = D_{axa} \cap D_a = D_b \cap D_x = D_b \cap D_{axa} \quad ;$$

elles prouvent que b est un élément de S . Comme $\overline{bx}$ et $\overline{baxa}$ sont d'ordre 3, b est distinct de x et de axa. Il en résulte que l'on a $a = b$ ce qui achève la démonstration.

§2. GRAPHE ASSOCIÉ A UN QUADRUPLE - THÉORÈME PRINCIPAL

La connaissance d'un graphe de type $\mathcal{F}$ est liée à celle de ses indicatrices et par conséquent à celle de ses sommets. Les graphes que nous allons construire dépendront essentiellement des données abstraites suivantes: un ensemble E, un sous-ensemble non vide D de E, une fonction μ de D dans Perm(E), un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $E{\times}E$. A un tel graphe, on impose des conditions telles qu'il soit de type $\mathcal{F}$ et que $\mu(d)$ $(d \in D)$ soit l'indicatrice du sommet d .

1. Définition.

Soient E un ensemble, D un sous-ensemble non vide de E, μ une fonction de D dans le groupe des permutations de E et $\mathcal{A}$ un ensemble de paires d'éléments distincts de E-D . On appelle <u>graphe associé au quadruple</u> $(E,D,\mu,\mathcal{A})$ le graphe $\mathcal{E}$ dont E est l'ensemble des sommets et dont les arêtes sont les paires A d'éléments distincts de E satisfaisant à l'une des conditions suivantes:

(i) A est un élément de $\mathcal{A}$;

(ii) il existe des éléments d dans D et e dans $E-\{d\}$ tels que l'on ait $A = \{d,e\}$ et $\mu(d)e = e$.

Rappelons que pour e dans E, E_e désigne l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ liés à e .

On désigne par $\mathcal{E}_e$ le sous-graphe (plein) de $\mathcal{E}$ porté par E_e: pour toute partie F de E, $\mathcal{E}_F$ est le sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par F.

On pose $X = E-D$.

Soient $(E,D,\mu,\mathcal{A})$ un quadruple et $\mathcal{E}$ le graphe qui lui est associé. Les conditions que nous imposons à ce quadruple pour que $\mathcal{E}$ soit de type $\mathcal{F}$ peuvent se classer de la manière suivante:

- celles qui portent explicitement sur μ (EXT.0,1,2);
- celles qui permettent d'étudier les situations spécifiques dans un sous-graphe $\mathcal{E}_d$ $(d \in D)$, ce sont les conditions de D-connexité (EXT.4,5);
- la condition EXT.3, la plus difficile, justifie l'intérêt des conditions de D-connexité puisqu'elle impose aux sous-graphes $\mathcal{E}_d$ $(d \in D)$ d'être de type $\mathcal{F}$.

2. Énoncé des conditions et du théorème principal.

EXT.0 - Quels que soient les éléments a et b de D, les conditions suivantes sont remplies: $\mu(a)^2 = 1$,

$\mu(a)a = a$,

$\mu(a)b \in D \cap \{b, \mu(b)a\}$,

$\mu(\mu(a)b) = \mu(a)\mu(b)\mu(a)$.

EXT.1 - Quels que soient les éléments d dans D, x et y dans X, si $\{x,y\}$ est une arête de $\mathcal{E}$ il en est de même de $\{\mu(d)x, \mu(d)y\}$.

EXT.2 - Si d et d' sont des éléments de D, liés dans $\mathcal{E}$, et si x est un élément de X qui n'est lié ni à d ni à d', alors $\{\mu(d)x, \mu(d')x\}$ est une arête de $\mathcal{E}$.

EXT.3 - Pour tout élément d de D, le sous-graphe $\mathcal{E}_d$ de $\mathcal{E}$ est anti-connexe de type $\mathcal{F}$.

EXT.4 - Si a et b sont des éléments de D, x et y des éléments distincts de $E_a \cap E_b \cap X$, le triple de $\mathcal{E}_a$ contenant $\{x,y\}$ est un triple de $\mathcal{E}_b$.

EXT.5 - Si e est un élément de E, x un élément de X distinct de e et non lié à e, $D \cap E_e \cap E_x$ est non vide; si de plus y est un élément de X lié à e , $D \cap E_e \cap E_x \cap E_y$ est non vide .

Ext.6 - Si des points a et b appartiennent à des composantes connexes distinctes du sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par D, il existe au plus un triple de $\mathcal{E}$ contenant a et b .

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant (théorème principal):

THÉORÈME I.2. - Soit $\mathcal{E}$ le graphe associé au quadruple $(E,D,\mu,\mathcal{A})$. Si les conditions EXT.i $(0 \leq i \leq 6)$ sont remplies, le graphe $\mathcal{E}$ est un graphe de type $\mathcal{F}$ pour lequel $\mu(d)$ est l'indicatrice de chaque sommet d de D .

Avant de donner la démonstration de ce théorème, remarquons que les conditions EXT.0,1,2 sont nécessaires et que, si EXT.3 est remplie, alors EXT.4 est nécessaire.

Remarquons en outre que la condition EXT.0 remplace la condition suivant laquelle D est un ensemble de Fischer d'un groupe G tel que $\mu(d)d'=dd'd$ $(d',d \in D)$. De manière plus précise, nous avons le résultat suivant dont la démonstration (élémentaire) est laissée au lecteur:

PROPOSITION I.2. - (Sous l'hypothèse EXT.0). Pour tout élément d de D désignons par $\mu_D(d)$ la permutation de D induite par $\mu(d)$. Soient D^* l'ensemble des $\mu_D(d)$ $(d \in D)$ et G^* le sous-groupe de Perm(D) engendré par D^*.

(a) Si a et b sont des éléments de D, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) ou bien a et b sont liés, ou bien ils sont égaux;

(ii) on a $\mu(a)b=b$;

(iii) on a $\mu(b)a=a$;

(iv) $\mu(a)$ et $\mu(b)$ commutent ;

(v) $\mu_D(a)$ et $\mu_D(b)$ commutent.

(b) Les ordres de $\mu(a)\mu(b)$ et de $\mu_D(a)\mu_D(b)$ appartiennent à $\{1,2,3\}$. En particulier, D^* est un ensemble de Fischer de G^* .

(c) Si des éléments différents a et b de D ne sont pas liés dans $\mathcal{E}$ et appartiennent à la même composante connexe du sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par D, l'ensemble $D \cap E_a \cap E_b$ est non vide .

(Réf. [VD] 5-2).

Comme réciproque à ce résultat, nous pouvons énoncer sans démonstration:

PROPOSITION I.3. - Soit G un groupe dont D est un ensemble de Fischer et pour lequel la restriction μ_D de μ à D est l'application qui à tout élément d de D fait correspondre l'automorphisme intérieur qui lui est associé . Supposons que l'on ait $\mu(a)^2=1$ et $\mu(aba)=\mu(a)\mu(b)\mu(a)$ $(a,b\in D)$. Alors

(a) la condition EXT.0 est satisfaite;

(b) si on a $D \cap Z(G) = \emptyset$, μ_D induit un isomorphisme des graphes de Fischer associés à (G,D) et (G*,D*), G* et D* étant définis dans I.2 .

(Réf. [VD] 5-3).

Pour terminer ces préliminaires, établissons le résultat suivant:

PROPOSITION I.4. - (Sous les hypothèses EXT.0.1). Pour tout élément d de D, $\mu(d)$ est un automorphisme du graphe $\mathcal{E}$.

<u>Preuve</u>. Puisque $\mu(d)$ est une permutation d'ordre fini de E, il suffit de prouver que si $\{e,e'\}$ est une arête de $\mathcal{E}$, il en est de même de $\{\mu(d)e,\mu(d)e'\}$. Si $\{e,e'\}$ appartient à $\mathcal{A}$, cela résulte de EXT.1 . Si $\{e,e'\}$ est une arête de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à $\mathcal{A}$ l'un des éléments e et e' est dans D. On a donc $\mu(e')e=e$ et $e'\in D$. Par suite on a $\mu(\mu(d)e')=\mu(d)\mu(e')\mu(d)$ (EXT.0), et en conséquence $\mu(\mu(d)e')(\mu(d)e) = \mu(d)\mu(e')e = \mu(d)e$ ce qui prouve que $\{\mu(d)e',\mu(d)e\}$ est une arête de $\mathcal{E}$.

3. Démonstration du théorème principal (I.2).

Rappelons que $(E,D,\mu,\mathcal{A})$ désigne un quadruple, $\mathcal{E}$ le graphe qui lui est associé et X l'ensemble E-D.

Nous allons d'abord établir que tout couple (e,e') d'éléments distincts et non liés de E est contenu dans au plus un triple de $\mathcal{E}$. Puis nous montrerons que , sous les seules conditions EXT.i (i=0,1,3,5,6), l'indicatrice d'un sommet d de E qui appartient à D est $\mu(d)$. Enfin, les conditions supplémentaires EXT.2,4 permettent d'affirmer que tout couple de sommets distincts et non liés de E-D est contenu dans un triple de $\mathcal{E}$ et que les indicatrices des sommets de E-D sont des automorphismes de $\mathcal{E}$.

Cette présentation met en évidence certaines propriétés du graphe $\mathcal{E}$ quand l'ensemble des conditions EXT.i ($0 \le i \le 6$) n'est que partiellement satisfait.

LEMME I.1. - (Sous les hypothèses EXT.0,3,5,6). Soient e et e' des éléments distincts et non liés de E. Il y a au plus un triple de $\mathcal{E}$ contenant $\{e,e'\}$.

Preuve. S'il existe un élément d dans D lié à e et à e', tout triple de $\mathcal{E}$ est un triple de $\mathcal{E}_d$ comme cela résulte immédiatemment de la définition d'un triple (§1. 1.(f)). La conclusion est alors une conséquence de EXT.3 .

Si l'un des points e,e' appartient à X, le sous-ensemble $D \cap E_e \cap E_{e'}$ n'est pas vide (EXT.5); de même, si e et e' appartiennent à une même composante connexe du sous-graphe $\mathcal{E}_D$, $D \cap E_e \cap E_{e'}$ est non vide (prop.I.2). Le lemme résulte alors de ce qui précède.

Enfin, si e et e' appartiennent à des composantes distinctes de $\mathcal{E}_D$, la conclusion de notre assertion est vraie en vertu de EXT.6 .

LEMME I.2. - (Sous EXT.0). Si a et b sont des éléments de D, non liés dans $\mathcal{E}$, $\{a,b,\mu(a)b\}$ est un triple de $\mathcal{E}$.

Preuve. De EXT.0, il résulte que $\mu(a)b$ appartient à $\{b,\mu(b)a\}$; comme a et b ne sont pas liés, on a $\mu(a)b=\mu(b)a$. Par ailleurs, on a $\mu(a)(\mu(a)b)=b$, donc a et $\mu(a)b$ ne sont pas liés. De même, b et $\mu(a)b$ ne sont pas liés. Ainsi les éléments de $S=\{a,b,\mu(a)b\}$ sont distincts et mutuellement non liés. Si on pose $c=\mu(a)b$, on a $\mu(a)c=b=\mu(c)a$ et $\mu(b)c=a=\mu(c)b$. Pour démontrer que S est un triple de $\mathcal{E}$, il suffit donc de démontrer que tout élément e de E , lié à deux sommets de S -par exemple a et b- est lié au troisième sommet - c - . Or, si $\mu(a)e=\mu(b)e=e$, nous avons: $\mu(c)e=\mu(\mu(a)b)e=\mu(a)\mu(b)\mu(a)e=e$.

LEMME I.3. - (Sous EXT.0,1,3). Soient a et b des éléments de D, distincts et liés dans $\mathcal{E}$. La permutation $\mu(b)$ transforme E_a en lui-même. S'il y a un élément de E_a non lié à b dans $\mathcal{E}$, la permutation de E_a induite par $\mu(b)$ est l'indicatrice de b dans le graphe $\mathcal{E}_a$.

Preuve. Comme $\mu(b)a=a$ et comme $\mu(b)$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$ (prop.I.4), on a $\mu(b)E_a \subset E_a$, et par suite $\mu(b)E_a = E_a$. Ainsi, $\mu(b)$ induit un automorphisme γ de $\mathcal{E}_a$. Il est clair que cet automorphisme fixe b et tous les sommets de $\mathcal{E}_a$ liés à b. S'il existe un élément de E_a, non lié à b, cet élément n'est pas fixé par γ. Dans ce cas γ n'est pas l'identité sur E_a ; puisque $\mathcal{E}_a$ est anti-connexe de type $\mathcal{F}$ (EXT.3) γ est donc l'indicatrice de b dans $\mathcal{E}_a$ (§1. 3.(c)2).

LEMME I.4. - (Sous EXT.0,1,3,5). Si d et x sont des éléments non liés de D et X respectivement, $\{d,x,\mu(d)x\}$ est un triple de $\mathcal{E}$.

Preuve. Posons $S=\{d,x,\mu(d)x\}$. Démontrons tout d'abord que S est un triple de $\mathcal{E}_b$ quel que soit l'élément b dans $D \cap E_d \cap E_x$. L'automorphisme de $\mathcal{E}_b$ induit par $\mu(d)$ est l'indicatrice de d dans $\mathcal{E}_b$ (lemme I.3). En conséquence, l'hypothèse "d non lié à x" prouve que $\mu(d)x$ est non lié à x et que S est le triple de $\mathcal{E}_a$ contenant deux des trois sommets de S .

Cela étant, démontrons que S est un triple de $\mathcal{E}$. Soit e un élément de $E_d \cap E_x$ (resp. $E_d \cap E_{\mu(d)x}$). Les éléments $e=\mu(d)e$ et $\mu(d)x$ (resp. x) sont liés (prop.I.4). On a donc:

$$E_d \cap E_x \subset E_d \cap E_{\mu(d)x} \cap E_x$$

$$(\text{resp. } E_d \cap E_{\mu(d)x} \subset E_d \cap E_x \cap E_{\mu(d)x})$$

et par suite

$$E_d \cap E_x = E_d \cap E_{\mu(d)x} \subset E_x \cap E_{\mu(d)x} .$$

Soit e un élément de $E_x \cap E_{\mu(d)x} \cap X$. D'après EXT.5, il existe un élément a dans D qui est lié à e, x et à $\mu(d)x$. En conséquence, S est un triple de $\mathcal{E}_a$. L'élément a est donc lié à d, et par suite e qui est lié à x et à $\mu(d)x$, est lié à d .

Soit ,maintenant, e un élément de $E_x \cap E_{\mu(d)x} \cap D$. Nous avons $\mu(e)x=x$ et $\mu(e)\mu(d)x=\mu(d)x$ ce qui donne $\mu(d)\mu(e)\mu(d)x=x$. Par ailleurs $\mu(e)\mu(d)\mu(e)x=\mu(e)\mu(d)x$ est un élément distinct de x puisque l'on a $\mu(e)x=x$ et $\mu(d)x\neq x$. En conséquence les éléments $\mu(e)\mu(d)\mu(e)x$ et $\mu(d)\mu(e)\mu(d)x$ sont distincts ce qui prouve que l'on a : $\mu(e)d=d$ (EXT.0), c'est-à-dire que e et d sont liés dans $\mathcal{E}$. Le lemme en résulte immédiatemment.

COROLLAIRE - (Sous EXT.0,1,3,5).

(a) Soient d et x des éléments non liés de $\mathcal{E}$ contenus dans D et X respectivement. Si y appartient à $X \cap E_x$, alors $D \cap E_d \cap E_x \cap E_y$ est non vide .

(b) Soient d et d' des éléments de D, e un élément de E qui n'est lié ni à d, ni à d'.

i- Si $\mu(d)e$ et $\mu(d')e$ sont liés, il en est de même de d et d'.

ii- Si d et d' sont liés, et si ou bien e est dans D, ou bien $D \cap E_e \cap E_d \cap E_{d'}$ est non vide, alors $\mu(d)e$ et $\mu(d')e$ sont liés.

Preuve. Supposons les conditions de (a) remplies. Nous savons que $\{d,x,\mu(d)x\}$ est un triple de $\mathcal{E}$ (lemme I.4); en conséquence $E_d \cap E_x = E_d \cap E_{\mu(d)x}$. Soit y un élément de X lié à x. Il résulte de la condition EXT.5 appliquée à x, $\mu(d)x$ et y que le sous-ensemble $D \cap E_x \cap E_{\mu(d)x} \cap E_y$ est non vide; il en est donc de même pour $D \cap E_x \cap E_d \cap E_y$ ce qui établit (a).

Démontrons (b). Remarquons que, si e est un élément de D, on a $\mu(d)e = \mu(e)d$ et $\mu(d')e = \mu(e)d'$. Les assertions i- et ii- résultent alors du fait que $\mu(e)$ est un automorphisme du graphe $\mathcal{E}$ (prop.I.4).

Supposons donc que e appartienne à X, et supposons en outre que $D \cap E_e \cap E_d \cap E_{d'}$ contienne un élément a. Posons $S = \{d,e,\mu(d)e\}$ et $S' = \{d',e,\mu(d')e\}$; S et S' sont des triples de $\mathcal{E}$ contenus dans $\mathcal{E}_a$. Puisque le graphe $\mathcal{E}_a$ est de type $\mathcal{F}$ (EXT.3), S et S' sont les uniques triples de $\mathcal{E}_a$ contenant respectivement $\{d,e\}$ et $\{d',e\}$. Soit t l'indicatrice du sommet e dans le graphe $\mathcal{E}_a$. Nous avons:

$$t(d) = \mu(d)e \quad \text{et} \quad t(d') = \mu(d')e \quad .$$

Comme t est un automorphisme de $\mathcal{E}_a$, les assertions i- et ii- sont établies. Il nous reste à prouver que $D \cap E_e \cap E_d \cap E_{d'}$ est non vide. Dans le cas ii-, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $\mu(d)e$ et $\mu(d')e$ soient liés (cas i-). Les éléments e et $\mu(d)e$ ne sont pas liés et le sous-ensemble $D' = D \cap E_{\mu(d)e} \cap E_e \cap E_{\mu(d')e}$ est non vide (EXT.5). Comme S et S' sont des triples de $\mathcal{E}$ (lemme I.4), on a les égalités suivantes:

$$D \cap E_{\mu(d)e} \cap E_e = D \cap E_e \cap E_d$$

$$D \cap E_{\mu(d')e} \cap E_e = D \cap E_e \cap E_{d'} \quad .$$

On en déduit alors l'égalité de D' avec $D \cap E_e \cap E_d \cap E_{d'}$ ce qui achève la démonstration .

LEMME I.5. - (Sous EXT.0,1,3,5). Soit a un élément de D. Tout triple $S_a = \{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathcal{E}_a$ est un triple de $\mathcal{E}$.

Preuve. Si $\{e_1,e_2\}$ est contenu dans un triple $S' = \{e_1,e_2,e'\}$ de $\mathcal{E}$, le sommet a qui est lié à e_1 et e_2, est lié à e'. Le triple S' est donc contenu dans $\mathcal{E}_a$, et par suite on a $S' = S_a$ puisque le graphe $\mathcal{E}_a$ est de type $\mathcal{F}$ (EXT.3). L'assertion est donc démontrée sous l'hypothèse où il existe un triple de $\mathcal{E}$ contenant deux sommets de S_a.

Si l'un des sommets de S_a appartient à D, le résultat se déduit facilement des lemmes I.2 et I.4 .

Supposons maintenant que S_a soit contenu dans X. Soient x un élément de X et d un élément de D liés à e_1 et e_2. Il résulte de la condition EXT.5 appliquée à e_1,e_2,x que l'ensemble $D \cap E_x \cap E_{e_1} \cap E_{e_2}$ est non vide ; soit b un de ses éléments. Désignons par S_b (resp. S_d) le triple de $\mathcal{E}_b$ (resp. $\mathcal{E}_d$) contenant $\{e_1,e_2\}$. Nous avons $S_a = S_b = S_d$ (EXT.4). Il s'ensuit que d est lié à tous les sommets de S_a est que x, sommet de $\mathcal{E}_b$ lié à deux sommets distincts de S_a, est lié à e_1,e_2,e_3. De là il résulte que S_a est un triple de $\mathcal{E}$.

COROLLAIRE - (Sous EXT.0,1,3,4,5,6). Deux sommets distincts de X et non liés dans $\mathcal{E}$ sont contenus dans un unique triple.

Preuve. Soient x et y des éléments distincts et non liés de X. Le sous-ensemble $D \cap E_x \cap E_y$ est non vide (EXT.5); soit a un de ses éléments. Comme le graphe $\mathcal{E}_a$ est de type $\mathcal{F}$ (EXT.3), $\{x,y\}$ est contenu dans un triple de $\mathcal{E}_a$; celui-ci est un triple de $\mathcal{E}$ (lemme I.5) . L'unicité de ce triple a déjà été prouvée (lemmeI.1).

LEMME I.6. - (Sous EXT.i , $0 \leq i \leq 6$). Pour tout élément x de X, l'indicatrice t de x dans $\mathcal{E}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Preuve. Soient e et e' des éléments de E liés dans $\mathcal{E}$. Comme $t^2=1$, il suffit de montrer que t(e) et t(e') sont liés. On peut évidemment supposer que e et e' sont distincts de x.

Nous distinguons quatre situations.

1) L'élément x est lié à e et à e'. On a alors $t(e)=e$ et $t(e')=e'$ ce qui entraîne le résultat.

2) L'élément x est lié à e et non à e'. On a $t(e)=e$ et e est lié aux deux sommets x et e' du triple de $\mathcal{E}$ contenant $\{x,e'\}$. Ce triple est $\{x,e',t(e')\}$, t(e) est donc lié à t(e').

3) L'élément x n'est lié ni à e ni à e', et l'un des deux éléments e, e' (e par exemple) appartient à X. Alors $D \cap E_e \cap E_x \cap E_{e'}$ contient un élément d (EXT.5). Comme $\{x,e,t(e)\}$ et $\{x,e',t(e')\}$ sont des triples de $\mathcal{E}$ dont deux des sommets sont liés à d, ce sont aussi des triples de $\mathcal{E}_d$. Ainsi, t(e) et t(e') sont les images de e et e' par l'indicatrice t_d de x dans le graphe $\mathcal{E}_d$. Puisque $\mathcal{E}_d$ est un graphe de type $\mathcal{F}$, t_d est un automorphisme de $\mathcal{E}_d$ et par suite

les sommets $t(e)=t_d(e)$ et $t(e')=t_d(e')$ sont liés dans $\mathcal{E}_d$ donc dans $\mathcal{E}$.

4) Les éléments e et e' appartiennent à D et ne sont pas liés à x . Nous savons alors que $\mu(e)x$ est lié à $\mu(e')x$ (EXT.2). Nous allons montrer que $\mu(e)x=t(e)$ et $\mu(e')x=t(e')$. Le triple $\{e,x,t(e)\}$ contenant $\{e,x\}$ s'écrit aussi $\{e,x,\mu(e)x\}$ (lemmes I.1,I.4). En conséquence, $\mu(e)x=t(e)$. De la même manière on a $\mu(e')x=t(e')$ ce qui achève la démonstration.

Énonçons maintenant certains résultats partiels déjà obtenus.

PROPOSITION I.5. - (Sous EXT.0,1,3,5,6). Tout couple d'éléments distincts de E, non liés dans $\mathcal{E}$, dont l'un au moins appartient à D, est contenu dans un unique triple de $\mathcal{E}$. Pour chaque élément d dans D, $\mu(d)$ est l'indicatrice de sommet d du graphe $\mathcal{E}$.

<u>Preuve</u>. Ces assertions résultent de la proposition I.4 et des lemmes I.1 , I.2 et I.4 .

PROPOSITION I.6. - (Sous EXT.0,1,3,5). L'axiome EXT.2 est une conséquence de l'axiome suivant:

EXT.2' - Si d et d' sont des éléments de D, liés dans $\mathcal{E}$, et si x est un élément de X qui n'est lié ni à d, ni à d', alors le sous-ensemble $D \cap E_d \cap E_{d'} \cap E_x$ est non vide .

<u>Preuve</u>. C'est une conséquence immédiate du corollaire du lemme I.4 .

La proposition suivante permet, sous certaines des conditions EXT.i, de remplacer EXT.4 par la condition ci-dessous EXT.4', en général plus facile à vérifier que EXT.4, puisqu'elle porte sur la famille des sous-ensembles $D \cap E_x$ $(x \in X)$.

PROPOSITION I.7. - (Sous EXT.0,1,3,5,6) . La condition EXT.4 est une conséquence de la condition suivante EXT.4':

(a) Si x,x',x" sont des éléments distincts et non liés de X, mais liés à un même élément d de D pour lequel on a:

$$D \cap E_d \cap E_x \cap E_{x'} = D \cap E_d \cap E_x \cap E_{x''} .$$

alors on a:

$$D \cap E_x \cap E_{x'} = D \cap E_x \cap E_{x''} \quad .$$

(b) Si x et y sont des éléments distincts de X, non liés de $\mathcal{E}$ tels que, pour tout élément d de D, $\mu(d)x$ et y soient distincts, alors l'une des deux assertions est satisfaite :

(i) le cardinal du sous-ensemble $\{z \in X \mid D \cap E_x \cap E_y = D \cap E_x \cap E_z\}$ est 2,

(ii) le sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par $D \cap E_x \cap E_y$ est anti-connexe.

<u>Preuve</u>. Soient a et b des éléments distincts de D, x et y des éléments distincts, non liés entre eux, de $E_a \cap E_b \cap X$. Désignons par S_a et S_b les triples de $\mathcal{E}_a$ et de $\mathcal{E}_b$ contenant $\{x,y\}$. Posons $S_a = \{x,y,z_a\}$ et $S_b = \{x,y,z_b\}$. Nous devons démontrer que $S_a = S_b$.

Si z_a est un élément de D, S_a est le triple de $\mathcal{E}_a$ contenant $\{x,z_a\}$; nous avons donc $S_a = \{x,z_a,\mu(z_a)x\}$ (lemme I.4). Par conséquent, $\mu(z_a)x=y$, et S_a est un triple de $\mathcal{E}$ (lemme I.4). Comme b est lié à x et à y, b est lié à z_b . Cela entraîne que S_a est contenu dans $\mathcal{E}_b$; S_a est donc un triple de $\mathcal{E}_b$, et par suite on a $S_a = S_b$.

Nous pouvons donc supposer que z_a et z_b sont des éléments de X. En particulier, y n'est l'image de x par aucun automorphisme $\mu(d)$, $d \in D$.

Le fait que S_a et S_b soient des triples de $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b$, entraîne que l'on a les égalités suivantes:

$$D \cap E_a \cap E_x \cap E_y = D \cap E_a \cap E_x \cap E_{z_a} \text{ et } D \cap E_b \cap E_x \cap E_y = D \cap E_b \cap E_x \cap E_{z_b} \quad .$$

Nous en déduisons:

$$D \cap E_x \cap E_y = D \cap E_x \cap E_{z_a} = D \cap E_x \cap E_{z_b} \qquad \text{(condition (a)).}$$

En particulier, a et b sont liés à z_a et z_b respectivement.

Nous avons alors que, sous l'hypothèse (b)(i), nous avons $z_a = z_b$, donc $S_a = S_b$.

Supposons maintenant que (b)(ii) soit remplie. Démontrons d'abord que si a et b sont des éléments non liés dans $\mathcal{E}$, l'automorphisme $\mu(a)\mu(b)$ de $\mathcal{E}$ (lemme I.6) induit un isomorphisme γ de $\mathcal{E}_a$ sur $\mathcal{E}_b$ qui fixe x et y . Les éléments de $E_a \cap E_b$ sont fixes par $\mu(a)$ et $\mu(b)$, x et y sont donc fixés par $\mu(a)\mu(b)$. Par ailleurs, on a $\mu(a)a=a$ et $\mu(a)(\mu(b)a)=\mu(a)(\mu(a)b)=b$ (EXT.0). En outre, quel que soit l'élément e de E_a, $\mu(a)\mu(b)e$ est lié à $\mu(a)\mu(b)a = b$ en vertu de la proposition I.4 . Il s'ensuit que $\mu(a)\mu(b)$ induit un isomorphisme γ de $\mathcal{E}_a$ sur $\mathcal{E}_b$. En conséquence, l'image par γ du triple S_a de $\mathcal{E}_a$ est le triple de $\mathcal{E}_b$ contenant $\gamma(x)$ et $\gamma(y)$. Nous avons donc $S_b = \gamma(S_a)$ et $z_b = \gamma(z_a)$.

Mais les éléments a et b sont liés à z_a, on a donc

$$\gamma(z_a) = \mu(a)\mu(b)z_a = z_a$$

ce qui prouve que $z_a = z_b$ et démontre notre assertion.

Il reste à étudier le cas où a est lié à b . Par hypothèse, le sous-graphe porté par $D \cap E_x \cap E_y$ est anti-connexe; il existe donc une suite d'éléments distincts $(d_i)_{o \le i \le p}$ dans $D \cap E_x \cap E_y$ telle que $d_o = a$, $d_p = b$ et telle que d_i et d_{i-1} ne soient pas liés $(1 \le i \le p)$. D'après ce qui précède, les triples S_{d_i} et $S_{d_{i-1}}$ de $\mathcal{E}_{d_i}$ et $\mathcal{E}_{d_{i-1}}$ contenant x et y sont identiques $(1 \le i \le p)$. On en déduit les égalités

$$S_a = S_{d_o} = S_{d_p} = S_b$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Preuve du théorème principal</u> (I.2). Soient e et e' des éléments distincts et non liés de $\mathcal{E}$. Il existe un triple de $\mathcal{E}$ contenant e et e' (lemmes I.2, I.4 , corollaire du lemme I.5); ce triple est unique (lemme I.1). L'indicatrice de chaque sommet peut ,alors, être définie; c'est un automorphisme du graphe $\mathcal{E}$ (lemme I.6 , proposition I.5).

§3. PRINCIPE D'EXTENSION DE GRAPHES

Soit $\mathcal{G}$ le graphe de Fischer associé à un ensemble de Fischer D d'un groupe G; le principe de construction d'un graphe $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{G}$ comme sous-graphe repose essentiellement sur la construction d'un ensemble E contenant D et d'une fonction μ de D dans le groupe des permutations de E tels que $\mathcal{E}$ soit le graphe associé au quadruple $(E, D, \mu, \mathcal{A})$ pour un sous-ensemble convenable $\mathcal{A}$ de $E \times E$.

Dans cette situation, G opère de manière naturelle sur D (via les automorphismes intérieurs), le problème est donc de déterminer un ensemble X qui sera E-D , et une fonction μ_X de D dans Perm(X) de telle manière que l'on puisse vérifier les axiomes EXT.i $(0 \leq i \leq 6)$ pour un ensemble $\mathcal{A}$ convenable, ou que l'on puisse exhiber un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur un graphe connu.

Remarquons cependant que la donnée de l'ensemble X est liée d'une certaine manière à celle d'une famille de sous-groupes de G . En effet, soit x un élément de X; les éléments de D qui, dans le graphe à construire, seront liés à x , sont exactement ceux de $D \cap E_x$. Lorsque l'application $\theta : x \rightarrow D \cap E_x$ est injective, les éléments de X peuvent être représentés par des sous-ensembles de D ou des D-sous-groupes de G . La situation se complique lorsque cette application n'est pas injective.

Dans les cas que nous avons étudiés et que nous mentionnons en 2. à titre d'exemples, ainsi que pour la construction de Fi(24) (cf. la seconde partie) les fibres de θ sont de cardinal au plus égal à 3. Ceci nous conduit à la notion de q-extension.

1. Définitions.

Soit G un groupe admettant un ensemble de Fischer D non vide dont le graphe est noté $\mathcal{G}$. Soient E un ensemble contenant D, μ_X une application de D dans Perm(X) où X désigne E-D, μ l'application de D dans Perm(E) qui prolonge μ_X par l'opération induite par l'action naturelle de D sur lui-même. Désignons par A un ensemble de paires d'éléments distincts de $X \times X$. Soit π une permutation de X , d'ordre q (q=1,2,3) commutant avec les éléments de $\mu(D)$ et telle que les fibres de l'application

$$\theta : x \to \{d \varepsilon D \mid \mu(d)x = x\}$$

de X dans l'ensemble des parties de D soient les sous-ensembles $\{\pi(x),\dots,\pi^q(x)\}$.

Lorsque les fibres de cette application θ sont toutes de cardinal q, sauf éventuellement pour q=2 auquel cas on admet l'existence d'au plus un point de X, noté ∞, dont la fibre est de cardinal 1, le graphe $\mathcal{E}$ associé au quadruple (E,D,μ,A) est appelé <u>q-extension du graphe</u> $\mathcal{G}$ <u>relative à</u> $X,\pi,\ \mu_X$ et A.

Toute q-extension $\mathcal{E}$ de $\mathcal{G}$ est définie, à isomorphisme près, par les données $X,\ \pi,\ \mu_X,\ A$. On dira que $\mathcal{E}$ est la q-<u>extension</u> de $\mathcal{G}$ définie par $X,\pi,\ \mu_X,\ A$; sous-entendu que $\mathcal{E}$ est déterminée à isomorphisme près.

Une 1-extension est appelée <u>extension simple</u>. Si $\mathcal{E}$ est une extension simple, les éléments de X sont en bijection avec une famille $\mathcal{B}$ de D-sous-groupes de G : les D-sous-groupes $\langle d \varepsilon D \mid \mu(d)x = x \rangle,\ x \varepsilon X$. On dira que $\mathcal{E}$ est définie par la famille $\mathcal{B}$, l'application μ_X et A .

Supposons q=2 ou q=3 . Nous dirons que $\mathcal{E}$ est la q-<u>extension standard du graphe</u> $\mathcal{G}$ définie par $X,\pi,\ \mu_X$ si $\mathcal{E}$ est la q-extension de $\mathcal{G}$ relative à X, $\pi,\ \mu_X,\ A$ où A est l'ensemble des paires $\{x,x'\}$ d'éléments distincts de X remplissant les conditions suivantes:

si q=2 , il existe un élément d dans D pour lequel on a:

$$\text{(i)} \quad \mu(d)x \neq x,$$
$$\text{(ii)} \quad \mu(d)x = \pi x' \ ;$$

si q=3 , il existe deux éléments distincts d et d' de D commutant l'un avec l'autre pour lesquels on a:

$$\text{(i)} \quad \mu(d)x \neq x \neq \mu(d')x \ ,$$
$$\text{(ii)} \quad \mu(d)\mu(d')x = x' \ .$$

<u>Remarque</u> - Dans le cas q=3, $\mathcal{E}$ est déterminée à isomorphisme près, par les données $X,\ \mu_X,q$. Il en est de même dans le cas q=2 si π opère librement sur X.

On omettra de mentionner π dans la définition d'une q-extension standard. Dans le cas $q=2$, on précisera l'existence du point ∞ en disant que l'on a alors une <u>2*-extension standard</u>.

PROPOSITION I.8.- Supposons $q\neq 1$. Soient D un ensemble de Fischer d'un groupe G , $\mathcal{G}$ le graphe associé. Soit $\mathcal{E}$ une q-extension standard de $\mathcal{G}$ relative à un ensemble X et une fonction μ_X .

Si la condition EXT.0 est remplie, il en est de même de la condition EXT.1 . En particulier, sous ces hypothèses, pour tout élément d de D, $\mu(d)$ est un automorphisme du graphe $\mathcal{E}$. De plus, prolongée par l'identité sur D, la permutation π induit un automorphisme du graphe $\mathcal{E}$.

<u>Preuve</u>. Soient d un élément de D, x et y des éléments de X liés dans $\mathcal{E}$. Il existe des éléments distincts d_1 et d_2 dans D, commutant entre eux tels que l'on ait :

$$\mu(d_1)x = \pi y \quad \text{et} \quad \mu(d_1)x \neq x \quad \text{si} \quad q=2 ,$$

$$\mu(d_1)\mu(d_2)x = y \quad \text{et} \quad \mu(d_1)x \neq x \neq \mu(d_2)x \quad \text{si} \quad q=3 .$$

En appliquant à ces égalités la permutation $\mu(d)$, et en tenant compte du fait que $\mu(d)^2=1$, on obtient, sous l'hypothèse EXT.0 :

$$\mu(d)\mu(d_i)\mu(d) = \mu(dd_id) \qquad (i=1,2) .$$

Comme π commute avec $\mu(d)$, nous obtenons les égalités:

$$\mu(dd_1d)\mu(d)x = \pi\mu(d)y$$
$$\mu(dd_1d)\mu(dd_2d)\mu(d)x = \mu(d)y \quad .$$

Or, les éléments dd_1d et dd_2d commutent et sont distincts, et de plus, ni $\mu(dd_1d)$, ni $\mu(dd_2d)$ ne fixent $\mu(d)x$. Par conséquent les éléments $\mu(d)x$ et $\mu(d)y$ sont liés dans $\mathcal{E}$: la condition EXT.1 est donc satisfaite; en outre $\mu(d)$, $d\in D$, est un automorphisme de $\mathcal{E}$ (proposition I.4).

La dernière assertion résulte de ce que π et $\mu(d)$, $d\in D$, commutent entre eux.

2. Exemples.

(a) <u>Le graphe de Fischer de</u> PSU(6,4). On démontre que ce graphe est une extension simple du graphe de $O^+(6,3)$ définie par une classe de sous-groupes isomorphes au quotient central de $W(E_6)$ par un ensemble $\mathcal{A}$ convenable.

Ici, $\mathcal{O}^+(n,3)$ désigne le quotient central du sous-groupe $G^+(n,3)$ du groupe orthogonal de la forme quadratique $Q=-\Sigma x_i^2$ engendré par les réflexions t_v pour lesquelles $Q(v)=-1$. L'ensemble de ces réflexions est une classe de Fischer de $G^+(n,3)$.

(Réf. [VD] 8- §5).

(b) Les graphes de Fischer de Fi(22) et Fi(23). Les extensions simples des graphes de Fischer de $\mathcal{O}^+(7,3)$ et $\mathcal{DO}^+(8,3)\rtimes\Sigma_3$ (voir ci-dessous) définies à partir de classes de sous-groupes respectivement isomorphes à $Sp(6,2)$ et $\mathcal{D}O_+(8,2)\rtimes\Sigma_3$ pour de "bons" ensembles $\mathcal{A}$ satisfont aux conditions du théorème principal (thm. I.2) . Ce sont donc des graphes de type $\mathcal{F}$; en outre, ils sont anti-connexes. Les groupes presque simples qui leur sont associés sont appelés Fi(22) et Fi(23) (thm.I.1).

Rappelons que $O_+(8,2)$ est le groupe d'une forme quadratique sur $\mathbb{F}_2$ non dégénérée d'indice maximal. Le produit $H\rtimes\Sigma_3$ (où H désigne respectivement $\mathcal{D}O_+(8,2)$ et $\mathcal{DO}^+(8,3)$) s'identifie au groupe des automorphismes de H puisque H est isomorphe à un groupe simple de Chevalley de type D_4 . Pour plus de détails se reporter à la seconde partie, §1. 2. .

(Réf. [VD] 8- §6).

(c) Le graphe de Fi(24). Il est obtenu comme une 2^*-extension standard du graphe de Fischer de Fi(23) (objet de la seconde partie).

(d) Le graphe d'un couple fischérien presque simple. Soient $(G°,D°)$ un couple fischérien presque simple, $\mathcal{G}°$ son graphe de Fischer et e un élément de $D°$. Posons $D° = D_e^°\cup\{e\}\cup A_e^°$ et $D = D_e^°$. Désignons par π la permutation naturelle induite par e sur $X=\{e\}\cup A_e^°$ ($\pi : x\to exe$) et par μ_X l'application naturelle de D dans Perm(X) définie par $\mu_X(d)x=dxd$ $(d\in D,\ x\in X)$.
Les applications π et $\mu_X(d)$ $(d\in D)$ commutent entre elles; π est d'ordre 2, son seul point fixe est e .

Soit x un élément de X-{e}. Les éléments d de D pour lesquels on a $\mu_X(d)x=x$, sont ceux de $D_e^°\cap D_x^°$; comme $G°$ est presque simple, $\{x,\pi x\}$ est la fibre au dessus de $D_e^°\cap D_x^°$ de l'application $y\mapsto D_e^°\cap D_y^°$ $(y\in X)$.

Soient y et y' des éléments distincts de X-{e}. Ils sont liés dans $\mathcal{G}°$ si et seulement s'il existe un élément d dans D qui n'est lié ni à y ni à y', et tel que $edyde=y'$ (propriété du sous-groupe engendré par e,y et y'). Pour un tel élément d, on a donc $\mu_X(d)y=\pi y'$ et $\mu_X(d)y\neq y$.

Ainsi, $\mathcal{G}^\circ$ est la 2^*-extension standard du sous-graphe $\mathcal{G}^\circ_D$ définie par X et μ_X .

(e) <u>Le graphe de</u> PSU(n,4). Désignons par V un espace vectoriel de dimension n ($n\geq 6$) sur $\mathbb{F}_2$ muni d'une forme bilinéaire alternée ϕ et par G le groupe des isométries de ϕ. Les transvections symplectiques forment une classe D de Fischer de G; on montre facilement que (G,D) est presque simple. Soit P un plan isotrope de V et soit R son stabilisateur dans G. On montre que le D-sous-groupe $S=\langle R\cap D\rangle$ est le fixateur de P dans G, que R/S est isomorphe à Σ_3 et que S est contenu dans un sous-groupe B d'indice 2 de R. On peut donc écrire $R = B\cup rB$ ($r\in R$, $r^2=1$).

Soit X l'ensemble des classes à gauche de G suivant B; G opère naturellement sur X, on a : $\mu_X(d)gB = dgB$ ($d\in D$, $g\in G$). Soit π la permutation de X : $\pi(gB) = grB$ ($g\in G$).

Pour un sous-ensemble A de $X\times X$ bien choisi, on montre que la 2-extension du graphe de Fischer de (G,D) relative à X,μ_X et A est isomorphe au graphe de Fischer des transvections unitaires de PSU(n,4).

(Réf. [VD] 5-27).

(f) <u>Le graphe de</u> SU(n+1,4). Soit D la classe des réflexions unitaires de G=SU(n,4). Soit $\langle v_o\rangle$ une droite non isotrope de l'espace vectoriel associé, R son stabilisateur dans G. On démontre que le D-sous-groupe $B=\langle B\cap D\rangle$ est d'indice 3 dans R. Pour un élément r bien choisi de R, on a: $R=B\cup rB\cup r^2B$. Soit $X=G/B$. Désignons par μ_X l'opération naturelle de G dans X : $\mu_X(d)gB=dgB$ ($d\in D$) et par π la permutation d'ordre 3 : $\pi gB = rgB$.

On démontre que les éléments de D pour lesquels $\mu_X(d)gB=dgB$ ($g\in G$) sont ceux de $D\cap gBg^{-1}$; en conséquence, $\{gB,\pi gB,\pi^2 gB\}$ est la fibre de l'application $gB\to D\cap gBg^{-1}$. Nous pouvons donc considérer la 3-extension standard du graphe de (G,D) relative à X et μ_X ; elle est isomorphe au graphe des réflexions unitaires de SU(n+1,4).

(Réf. [VD] 5-28) .

§4. PROLONGEMENT DE CERTAINS ISOMORPHISMES - THÉORÈME D'UNICITÉ

Lorsque les graphes de deux couples fischériens presque simples sont isomorphes, il est facile de démontrer que les quotients centraux de ces groupes sont isomorphes et que cet isomorphisme induit sur les graphes associés celui dont on est parti.

Le problème d'unicité, pour un couple fischérien (G,D) presque simple de centre trivial pour lequel $\langle D_d\rangle/Z(\langle D_d\rangle)$ est connu à isomorphisme près, se ramène donc, comme on pouvait s'y attendre, à un problème d'unicité pour un graphe de type $\mathcal{F}$ contenant un sous-graphe donné : celui des sommets liés à un sommet donné.

On peut alors formuler ce problème de la manière suivante : soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des graphes, D et D' leur ensemble de sommets, e et e' des éléments de D et D', sous quelles conditions certains isomorphismes de $\mathcal{G}_e$ sur $\mathcal{G}'_{e'}$ se prolongent-ils en un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$?

1. Notations. Énoncé des conditions U .

Nous faisons les hypothèses suivantes:

- $\mathcal{G}$ est le graphe d'un couple fischérien presque simple (G,D); en particulier $\mathcal{G}$ est un graphe de type $\mathcal{F}$ (thm. I.1);
- $\mathcal{G}'$ est un graphe satisfaisant à l'une des conditions suivantes:

  a) $\mathcal{G}'$ est le graphe d'un couple fischérien presque simple (G',D'),

  b) $\mathcal{G}'$ est une 2*-extension standard du graphe $\mathcal{E}'$ d'un couple fischérien (H',E') définie par $X' = \{\infty\} \cup X$ et μ_X . Dans ce cas on pose $\infty = e'$.

Lorsque $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition a), le résultat que nous allons obtenir nous permettra de démontrer l'unicité , à isomorphisme près, de graphes de type $\mathcal{F}$ admettant des sous-graphes $\mathcal{G}_e$ et $\mathcal{G}'_{e'}$ isomorphes .

Lorsque $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition b), nous obtenons un moyen de démontrer la condition EXT.3 du théorème principal (thm. I.2). En effet, supposons donnée une 2*-extension standard $\mathcal{E}$ du graphe de Fischer d'un couple fischérien $(G°,D°)$ définie par $Y'=\{\infty\}\cup Y$ et $\mu_{Y'}$. Supposons que la condition EXT.0 soit remplie. Soit d un élément de D°; vérifier la condition EXT.3 c'est prouver que le sous-graphe $\mathcal{E}_d$ (porté par les éléments liés à d) est anti-connexe de type $\mathcal{F}$. Or les sous-graphes $\mathcal{E}_{d,\infty}$ et $\mathcal{G}_d$ sont isomorphes, en fait ici, ce sont les mêmes. Si $\mathcal{E}_d$ peut être considéré comme une 2*-extension standard et si certaines conditions U sont satisfaites, le théorème que nous nous proposons d'établir, prouvera que l'isomorphisme de $\mathcal{G}_d$ sur $\mathcal{E}_{d,\infty}$ se prolonge en un isomorphisme des graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}_d$ ce qui entraînera la conclusion.

<u>Notations</u>. Dans le cas où $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition b), on note μ la fonction de E' dans Perm(D') pour laquelle:

$$\mu(d)a = dad \quad (d,a \in E')$$
$$\mu(d)_{|X'} = \mu_{|X'}(d) \quad (d\in E') \ .$$

On a : $D' = E'\cup\{e'\}\cup X$,

$E' = D'_{e'} = \{ a\in D' \mid \{a',e'\} \text{ arête dans } \mathcal{G}'\}$,

$X = A'_{e'} = \{ x\in D' \mid x \neq e',\ \{x,e'\} \text{ non arête dans } \mathcal{G}'\}$.

On rappelle que $\mathcal{G}_e$ $(e\in D)$ est le sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par l'ensemble D_e $(e\in D)$ des éléments de D liés à e .

Soit e un élément de D. On note η un isomorphisme du sous-graphe $\mathcal{G}_e$ sur le sous-graphe $\mathcal{G}'_{e'}$.

U.0 - Le graphe $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition b). En outre, on a :

(i) quels que soient les éléments a et b de E', $\mu(a)^2=1$ et $\mu(aba) = \mu(a)\mu(b)\mu(a)$;

(ii) quels que soient les éléments a, b dans E', et x dans $X-(D'_a\cap D'_b)$, $\{a,b\}$ est une arête si et seulement si $\{\mu(a)x,\mu(b)x\}$ en est une ;

(iii) si x et y sont des éléments de X, liés dans $\mathcal{G}'$, il existe un unique élément a de E' tel que $\mu(a)x = \pi y$

(iv) pour tout élément x de X, $X \cap D'_x \cap D'_{\pi x} = \emptyset$.

U.1 - Le graphe $\mathcal{G}$ est de type $\mathcal{F}$.

U.2 - Les conditions suivantes sont remplies:

(i) quels que soient les éléments a et b de D_e, on a:

$$\eta(aba) = \eta(a)\eta(b)\eta(a) ;$$

(ii) quel que soit l'élément x de A_e (resp. x' de X), il existe au moins un élément x' dans X (resp. x dans A_e) tel que l'on ait

$$\eta(D_e \cap D_x) = D'_{e'} \cap D'_{x'} .$$

U.3 - L'une des trois conditions suivantes est remplie:

(a) Le groupe G ne possède aucun sous-groupe isomorphe à l'un des groupes $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}^*$ (cf. note ci-après).

(b) Soient e,y,y',z,z' des éléments de D pous lesquels les sous-groupes $\langle e,y,y'\rangle$ et $\langle e,z,z'\rangle$ sont isomorphes à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$. Si l'une des conditions suivantes est remplie :

1. $z \in D_y \cap D_{y'}$ et $\langle y,y',z\rangle$ est isomorphe à Σ_4 ou à $\Sigma_3 \times \Sigma_2$,
2. $z' = y'$ et $\langle e,y,z\rangle$ est isomorphe à Σ_4 ,

alors le sous-ensemble $A_e \cap D_y \cap D_{y'} \cap D_z \cap D_{z'}$ est non vide .

(c) (i) Le graphe $\mathcal{G}'$ est de type $\mathcal{F}$.

(ii) Soient a,b,c des éléments de D pour lesquels $\langle a,b,c\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$. Le plus petit sous-ensemble F de $D_a \cap D_b$ contenant $D_a \cap D_b \cap A_c$ et pour lequel on a $tFt = F$ $(t \in F)$, est $D_a \cap D_b$.

Note. On désigne par $\mathcal{H}$ un groupe d'ordre 54 engendré par trois involutions a,b,c ne commutant pas entre elles, telles que abac, ab, bc et ac soient d'ordre 3. Ce groupe possède une seule classe de Fischer ; c'est la classe de conjugaison de l'un quelconque des éléments a,b,c; elle est de cardinal 9 et ses éléments ne commutent pas entre eux. Le centre de $\mathcal{H}$ est d'ordre 3, il est engendré par $(abc)^2$. On pose $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}/Z(\mathcal{H})$. (Réf. [VD] 3-4-4).

Remarque 1. La condition U.0 est toujours satisfaite lorsque le graphe $\mathcal{G}'$ est de type $\mathcal{F}$ puisqu'un tel graphe peut-être considéré comme une 2*-extension standard (§3. 2.(d)). Les propriétés énoncées résultent alors du fait que, pour tout sommet d' de E', $\mu(d')$ est la conjugaison par d'e'.

Remarque 2. Le graphe $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition EXT.0 puisque l'on a $\mu(f)f' = ff'f$ quels que soient les éléments f et f' de E'.

Remarque 3. Les permutations $\mu(f)$ ($f \in E'$) et π de D' induisent des automorphismes du graphe $\mathcal{G}'$ puisque la condition EXT.0 est remplie (prop.I.8).

La condition U.3-(c)(ii) est une conséquence d'une propriété du sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par $D_a \cap D_b$ ($a,b \in D$). Plus précisément, nous avons le résultat suivant:

LEMME I.7. - Si pour tout couple (a,b) d'éléments distincts de D qui ne commutent pas, le sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par $D_a \cap D_b$ est anti-connexe, la condition U.3-(c)(ii) est remplie.

Preuve. Soient a,b,c des éléments de D qui engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$. Soit t un élément de $D_a \cap D_b$ n'appartenant pas au plus petit sous-ensemble F de $D_a \cap D_b$ contenant $D_a \cap D_b \cap A_c$ pour lequel on a $F^f = F$, quel que soit l'élément f de F.

Cet élément t n'appartient pas à A_c, il centralise donc c et par conséquent, nous avons $(D_a \cap D_b \cap A_c)^t = D_a \cap D_b \cap A_c$.

Posons $F_1 = F^t \cap F$; F_1 contient $D_a \cap D_b \cap A_c$. Si f est un élément de F_1, f^t appartient à F_1. De plus, tout élément y de F_1 s'écrit x^t avec x dans F et y^f appartient à F. Par conséquent on a:

$$y^f = (x^t)^{f(tt)} = x^{(tft)t} .$$

Comme x et tft sont des éléments de F, il en est de même de x^{tft} ; ainsi y^f appartient à F^t. Compte tenu du choix de F, nous avons donc $F_1 = F$ et par suite $F_1 = F = F^t$.

Quel que soit l'élément f de F, f^t appartient alors à F. Comme t n'est pas dans F , f^t est distinct de t^f; en conséquence les éléments t et f commutent entre eux. Les éléments de $(D_a \cap D_b)-F$ centralisent donc F contrairement au fait que le sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par $D_a \cap D_b$ est anti-connexe. Nous en déduisons que $(D_a \cap D_b)-F$ est vide ce qui entraîne l'assertion.

2. Énoncé des résultats · Théorème d'unicité.

THÉORÈME I.3 - Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des graphes satisfaisant respectivement aux conditions U.1 et U.0 ci-dessus. Soit $\mathcal{E}'$ le sous-graphe de $\mathcal{G}'$ dont $\mathcal{G}'$ est la 2*-extension standard et soit e' le sommet de $\mathcal{G}'$ pour lequel on a $\mathcal{E}' = \mathcal{G}'_{e'}$. Soient e un sommet de $\mathcal{G}$ et η un isomorphisme de graphes de $\mathcal{G}_e$ sur $\mathcal{G}'_{e'}$ satisfaisant à la condition U.2 . Si l'une des conditions U.3-(a),(b),(c) est remplie, il existe un isomorphisme $\bar{\eta}$ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$ dont la restriction à $\mathcal{G}_e$ est η .

COROLLAIRE (théorème d'unicité) - Soient (G,D) et (G',D') des couples fischériens dont les graphes, notés respectivement $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, sont de type $\mathcal{F}$. Soient d et d' des éléments de D et D' respectivement. Si l'une des conditions U.3-(a) ou U.3-(c)(ii) est satisfaite, tout isomorphisme du sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par D_d sur le sous-graphe de $\mathcal{G}'$ porté par $D'_{d'}$, remplissant la condition U.2 se prolonge en un isomorphisme de graphes de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$.

Compte tenu de la remarque 1 , le corollaire résulte immédiatement du théorème I.3 .

3. Preuve du théorème de prolongement.

Le principe de la démonstration est le suivant: à un élément x de A_e on fait correspondre un élément x' de A'_e, et l'on construit un isomorphisme des sous-graphes de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ portés respectivement par $A_e \cap D_x$ et $A'_{e'} \cap D'_{x'}$. Puis l'on montre qu'un certain nombre de sous-ensembles $A_e \cap D_y$ ($y \in A_e$) suffit à recouvrir A_e. Enfin, la partie la plus délicate de la démonstration consiste à vérifier que ces isomorphismes se recollent bien, c'est alors que l'on utilise la condition U.3 .

(a) <u>Établissement des isomorphismes partiels</u>. <u>Conditions</u> U.0,1,2 <u>remplies</u>.

Nous dirons qu'un élément x' de $A'_{e'}$ est <u>associé</u> à un élément x de A_e si η applique $D_e \cap D_x$ sur $D'_{e'} \cap D'_{x'}$. Puisque η est une bijection, un élément x de A_e est associé à un élément x' de $A'_{e'}$ si η^{-1} applique $D'_{e'} \cap D'_{x'}$ sur $D_e \cap D_x$.

Les assertions "x associé à x'" et "x' associé à x" sont équivalentes; si elles sont satisfaites, nous dirons que x et x' sont <u>associés</u>.

LEMME I.8 - Soient x un élément de A_e et x' un élément de $A'_{e'}$ qui lui est associé.

(i) Tout élément de $\{x, x^e\}$ est associé à tout élément de $\{x', \pi x'\}$. Les seuls éléments de $A'_{e'}$ (resp. A_e) associés à x (resp. x') sont x' et $\pi x'$ (resp. x et x^e).

(ii) Si a est un élément de D_e, $\mu\eta(a)x'$ est l'élément de $A'_{e'}$ associé à x^a.

(iii) Si y (resp. y') est un élément de $A_e \cap D_x$ (resp. $A'_{e'} \cap D'_{x'}$), il existe un élément y' (resp. y) et un seul de $A'_{e'} \cap D'_{x'}$ (resp. $A_e \cap D_x$) qui est associé à y (resp. y').

Si a' (resp. a) est l'élément de $D'_{e'}$ (resp. D_e) non lié à x' (resp. x) pour lequel $\mu(a')x' = \pi y'$ (resp. $a = e^{xy}$), en posant $\eta(a) = a'$, nous avons $a = e^{xy}$ (resp. $\mu(a')x' = \pi y'$) et a (resp. a') appartient à $D_e \cap A_x \cap A_y$ (resp. $D'_{e'} \cap A'_{x'} \cap A'_{y'}$).

<u>Preuve</u>. Soient x et x' des éléments de A_e et $A'_{e'}$ associés.

Comme D est une classe de Fischer, $D_e \cap D_x = D_e \cap D_{x^e}$; comme $\mathcal{G}'$ satisfait à la condition U.0, on a:

$$D'_{e'} \cap D'_{x'} = D'_{e'} \cap D'_{\pi x'} \quad .$$

La première assertion de (i) est donc établie.

Puisque $\mathcal{G}'$ est une 2*-extension standard, x' et $\pi x'$ sont les seuls éléments y' de $A'_{e'}$ pour lesquels $D'_{e'} \cap D'_{y'} = D'_{e'} \cap D'_{x'}$, x' et $\pi x'$ sont les seuls éléments de $A'_{e'}$ associés à x. Par ailleurs, $\mathcal{G}$ est un graphe de type $\mathcal{F}$ (U.1), donc x et x^e sont les seuls éléments de D associés à x', d'où (i).

Soit a un élément de D_e. L'élément x^a est dans A_e et l'on a

$$D_e \cap D_{x^a} = a(D_e \cap D_x)a \ .$$

donc

$$\eta(D_e \cap D_{x^a}) = \eta(a)(D'_{e'} \cap D'_{x'})\eta(a) \ .$$

Or, $\eta(a)(D'_{e'} \cap D'_{x'})\eta(a)$ est l'ensemble des éléments de $D'_{e'}$ liés à $\mu(\eta(a))x'$; on a donc

$$\eta(D_e \cap D_{x^a}) = D'_{e'} \cap D'_{\mu(\eta(a))x'} \;.$$

En conséquence $\mu(\eta(a))x'$ et x^a sont associés ce qui établit l'assertion (ii).

Soit y un élément de $A_e \cap D_x$. L'élément $a = e^{xy}$ appartient à $D_e \cap A_x \cap A_y$. Posons $\eta(a) = a'$; nous avons $y = x^{ae}$ et, en vertu de (i), y est associé aux seuls éléments $\mu(a')x'$ et $\mu(a')\pi x'$. Puisque a n'est pas lié à x dans $\mathcal{G}$, a' n'appartient pas à $D'_{e'} \cap D'_{x'}$; ainsi, $\mu(a')\pi x'$ est lié à x'. Or, nous savons que x' ne peut être lié à la fois à $\pi\mu(a')x'$ et à $\mu(a')x'$ (U.0-(iv)), nous en concluons que $y' = \pi\mu(a')x'$ est l'unique élément de $A'_{e'} \cap D'_{x'}$ associé à y. Il s'ensuit que a' n'est pas lié à y'.

Inversement, si y' est un élément de $A'_{e'} \cap D'_{x'}$, il existe un unique élément a' dans $D'_{e'} \cap A'_{x'} \cap A'_{y'}$ tel que $\mu(a')x' = \pi y'$. Posons $\eta^{-1}(a') = a$. Il est clair que a est un élément de $D_e \cap A_x \cap A_y$. Comme x^a et $\mu(a')x'$ sont associés et comme x^{ae} commute à y et est associé à $\mu(a')x'$ (assertion (i)), nous en concluons que $y = x^{ae}$ est l'unique élément de $A_x \cap D_e$ associé à y', ce qui démontre (iii).

Conservons les notations du lemme I.8. Désignons par $\Phi_{xx'}$ la fonction de $A_e \cap D_x$ dans D' qui fait correspondre à chaque élément y de $A_e \cap D_x$ l'unique élément y' de $A'_{e'} \cap D'_{x'}$ qui lui est associé.

Le lemme précédent montre que la fonction $\Phi_{x'x}$ définie sur $A'_{e'} \cap D'_{x'}$ qui à chaque élément y' fait correspondre l'unique élément de $A_e \cap D_x$ qui lui est associé, est telle que :

$$\Phi_{xx'} \circ \Phi_{x'x}(y') = y' \qquad (\; y' \in A'_{e'} \cap D'_{x'} \;)$$
$$\Phi_{x'x} \circ \Phi_{xx'}(y) = y \qquad (\; y \in A_e \cap D_x \;) \;.$$

Ainsi $\Phi_{xx'}$ est une bijection de $A_e \cap D_x$ sur $A'_{e'} \cap D'_{x'}$ dont la bijection réciproque est $\Phi_{x'x}$. De manière plus précise, nous avons le résultat suivant:

LEMME I.9. - Si x' est un élément de $A'_{e'}$ associé à un élément x de A_e , $\Phi_{xx'}$ est un isomorphisme des sous-graphes de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ portés respectivement par $A_e \cap D_x$ et $A'_{e'} \cap D'_{x'}$.

L'isomorphisme réciproque est induit par $\Phi_{x'x}$.

De plus, si d est un élément de D_e et y un élément de $A_e \cap D_x$, $\{d, y\}$ est une arête de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\{\eta(d), \Phi_{xx'}(y)\}$ est une arête de $\mathcal{G}'$.

<u>Preuve</u>. Soient y et z des éléments de $A_e \cap D_x$ et soient y' et z' leurs images par $\phi_{xx'}$. Puisque y' et z' sont liés à x', il existe des éléments a' et b' dans D'_e, tels que $\mu(a')x' = \pi y'$ et $\mu(b')x' = \pi z'$. Posons $a = \eta^{-1}(a')$ et $b = \eta^{-1}(b')$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que {y',z'} soit une arête de $\mathcal{G}'$ est que {a',b'} en soit une (U.0-(ii)), c'est-à-dire que {a,b} soit une arête de $\mathcal{G}$ (puisque η , donc η^{-1}, est un automorphisme). Il résulte du lemme I.8 que $y = x^{ae}$ et $z = x^{be}$, ce qui entraîne que a et b sont liés dans $\mathcal{G}$ si et seulement si y et z sont eux-mêmes liés dans $\mathcal{G}$. Nous avons ainsi établi la première assertion.

Soient d un élément de D_e et y un élément de $A_e \cap D_x$; posons $\eta(d) = d'$ et $\phi_{xx'}(y) = y'$. Les éléments y^d et $\mu(d')y'$ sont associés (lemme I.8.(ii)).
Si {d,y} est une arête, $\mu(d')y'$ est l'un des éléments associés à y : y' ou $\pi y'$ car on a $y^d = y$. L'égalité $\mu(d')y' = y'$ signifie que d' est lié à y', tandis que l'égalité $\mu(d')y' = \pi y'$ signifie que y' est lié à lui-même ce qui est exclu.

Réciproquement, observons que , si d' et y' sont liés, $\mu(d')y'$ est égal à y' et est associé à y et à y^e. Par conséquent, on bien on a $y^d = y$ ce qui prouve que {d,y} est une arête, ou bien on a $y^d = y^e$ ce qui est exclu puisque d et e sont distincts.

(b) <u>Recouvrement de</u> A_e . <u>Condition</u> U.1 <u>satisfaite</u>.

Nous venons de construire des isomorphismes de certains sous-graphes de $\mathcal{G}$ - dont l'ensemble des sommets est contenu dans A_e - sur des sous-graphes de $\mathcal{G}'$. Nous allons établir que A_e peut être recouvert par des sous-ensembles sur lesquels de tels isomorphismes peuvent être définis.

Démontrons d'abord le lemme suivant:

LEMME I.10. - Soient a et b des sommets distincts et non liés de $\mathcal{G}$, et soit c un élément de $A_a \cap A_b$ n'appartenant pas à l'ensemble $\{a, b, a^b\}$.
Alors, il existe un élément d dans D lié à a et à b et non lié à c .

<u>Preuve</u>. Soit M l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ qui sont liés à a et à b . Si tous les éléments de M sont liés à c, il résulte de (§1. 3.(b)1.) -applicable puisque $\mathcal{G}$ est de type 7 (U.1)- que l'élément c appartient à $M \cup \{a, b, a^b\}$ contrairement à l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

LEMME I.11.- Soit x un élément de A_e. On a:

$$A_e - \{x^e\} = \bigcup_{y\in(D_x\cap A_e)\cup\{x\}} A_e\cap D_y \quad .$$

De plus, si G ne contient aucun D-sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$, on a:

$$A_e - \{x^e, x\} = (A_e\cap D_x)\cup(A_e\cap D_{x^e}) \quad .$$

Preuve. Soit z un élément de A_e distinct de x^e qui ne commute pas à x. En vertu du lemme précédent appliqué à a=z, b=x et c=e, nous voyons qu'il existe un élément y dans $A_e\cap D_z\cap D_x$. Ainsi, il existe un élément y dans $A_e\cap D_x$ pour lequel on a $z\in A_e\cap D_y$.

La dernière assertion résulte du fait que $A_e\cap A_x$ est contenu dans $A_e\cap D_{x^e}$ lorsque G ne contient aucun D-sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$ (§1.1.(g)).

(c) Problème du recollement des $\Phi_{xx'}$. Conditions U.0, U.1, U.2 remplies.

Nous allons montrer que l'on peut construire une application de $A_e - \{x^e\}$ dans $A'_{e'}$, en recollant des applications $\Phi_{yy'}$, avec y dans $(A_e\cap D_x)\cup\{x\}$, définies précédemment.

Pour cela, il suffit de montrer que deux d'entre elles coïncident sur l'intersection de leur domaine de définition. Nous verrons en outre que l'application Φ de $A_e - \{x^e\}$ dans $A'_{e'}$ que l'on peut alors définir, envoie toute arête de $\mathcal{G}$ dont les sommets sont dans $A_e - \{x^e\}$ sur une arête de $\mathcal{G}'$ dont les sommets sont dans $A'_{e'}$. Ensuite, nous vérifierons que cette application, prolongée à D_e par η et définie en e, x et x^e par $\Phi(e)=e'$, $\Phi(x)=x'$ et $\Phi(x^e)=\pi x'$, est un isomorphisme de graphes.

Nous appelons chemin de A_e (resp. $A'_{e'}$) toute suite finie $\Gamma = (x_i)_{0\le i\le n}$ d'éléments de A_e (resp. $A'_{e'}$) telle que x_i et x_{i-1} soient liés, $1\le i\le n$. Soit $\Gamma = (x_i)_{0\le i\le n}$ un chemin de A_e (resp. $A'_{e'}$). Les points x_0 et x_n s'appellent respectivement l'origine et l'extrémité de Γ, on dit que n est la longueur de Γ et que les points x_i et x_{i+k} $(0\le i\le i+k\le n)$ sont à distance k dans Γ.

Si on a $x_0 = x_n$, on dit que le chemin Γ est fermé.

Un chemin $\Gamma' = (x'_i)_{0\le i\le n'}$ de $A'_{e'}$ est dit associé à un chemin $\Gamma = (x_i)_{0\le i\le n}$ de A_e si l'on a n=n' et si pour tous les i $(0\le i\le n)$ x_i et x'_i sont associés;

dans ces conditions, on dit que les Γ et Γ' sont <u>associés</u>.

LEMME I.12. -

(i) Si Γ (resp. Γ') est un chemin de A_e (resp. $A'_{e'}$) et a' (resp. a) un élément de $A'_{e'}$ (resp. A_e) associé à l'origine a de Γ (resp. a' de Γ'), il existe un et un seul chemin Γ' (resp. Γ) associé à Γ (resp. Γ') d'origine a' (resp. a).

(ii) Soient $\Gamma=(x_i)_{o\leq i\leq n}$ un chemin de A_e et d un élément de $D_e \cup \{e\}$. Alors $\Gamma^d=(x_i^d)_{o\leq i\leq n}$ est un chemin de A_e.

Soit $\Gamma'=(x'_i)_{o\leq i\leq n}$ un chemin de $A'_{e'}$ associé à Γ ; alors $\Gamma'^{\pi}=(\pi x'_i)_{o\leq i\leq n}$ si d=e et $\Gamma'^{\eta(d)}=(\mu(\eta(d))x'_i)_{o\leq i\leq n}$ si $d\neq e$ sont des chemins associés à Γ^d.

En outre, Γ' et Γ'^{π} sont les seuls chemins de $A'_{e'}$ associés à Γ ; Γ et Γ^e sont les seuls chemins de A_e associés à Γ'.

(iii) Soit Γ un chemin fermé de A_e (resp. $A'_{e'}$). Si l'un des deux chemins de $A'_{e'}$ (resp. A_e) associés à Γ est fermé, ils le sont tous les deux.

(iv) Soit $\Gamma=(x_i)_{o\leq i\leq n}$ un chemin de A_e (resp. $A'_{e'}$) pour lequel on a $x_n=x_o^e$ (resp. $x_n=\pi x_o$) . Soit p un entier, $o\leq p\leq n$; posons $y_j=x_{p+j}$ pour $o\leq j\leq n-p$ et $y_j=(x_{j-n+p})^e$ (resp. $y_j=\pi x_{j-n+p}$) pour $n-p<j\leq n$.

Alors, si Γ est associé à un chemin fermé, $\Gamma_p=(y_j)_{o\leq j\leq n}$ est aussi associé à un chemin fermé.

<u>Preuve</u>. Démontrons l'assertion (i) par récurrence sur la longueur n du chemin. La conclusion de (i) est vraie si n=0. Supposons que n soit au moins égal à 1 et qu'à tout chemin Δ d'origine a dans A_e (resp. d'origine a' dans $A'_{e'}$) de longueur n-1 soit associé un chemin uniquement déterminé de $A'_{e'}$ (resp. A_e) d'origine a' (resp. a).

Soit $\Gamma=(x_i)_{o\leq i\leq n}$ un chemin de A_e (resp. $A'_{e'}$) d'origine $a=x_o$ (resp. $a'=x_o$). Posons $\Delta=(x_i)_{o\leq i\leq n-1}$ et désignons par $\Delta'=(x'_i)_{o\leq i\leq n-1}$ le chemin de $A'_{e'}$ (resp. A_e) d'origine $a'=x'_o$ (resp. $a=x'_o$) qui lui est associé.

Il existe un unique élément x'_n associé à x_n et lié à x_{n-1} (lemme I.8.(iii)); $(x'_i)_{o\leq i\leq n}$ est alors un chemin de $A'_{e'}$ (resp. A_e) d'origine $a'=x'_o$ (resp. $a=x'_o$) associé à Γ. Si $(x''_i)_{o\leq i\leq n}$ est un chemin d'origine $x'_o=x''_o$ associé à Γ, le chemin $(x''_i)_{o\leq i\leq n-1}$ dont l'origine est $x'_o=x''_o$ est associé à Δ ; c'est donc Δ'. On en déduit alors $x''_n=x'_n$ ce qui établit l'assertion.

Prouvons (ii). Il est clair, si x_i et x_{i-1} sont des éléments liés de A_e, leurs conjugués x_i^d et x_{i-1}^d $(d \in D_d \cup \{e\})$ le sont aussi. Par conséquent, si $(x_i)_{o \leq i \leq n}$ est un chemin de A_e, il en est de même de $(x_i^d)_{o \leq i \leq n}$. Comme $\mu(d')$ $(d' \in D'_{e'})$ et π induisent des automorphismes de $\mathcal{G}'$ (remarque 3), si Γ' est un chemin de $A'_{e'}$, il en est de même de $\Gamma'^{d'}$ et de Γ'^{π}. Il résulte du lemme I.8 que si les chemins Γ et Γ' sont associés, les chemins Γ^d et $\Gamma^{\eta(d)}$ d'une part $(d \in D)$ et Γ^e et Γ^{π} d'autre part sont associés.

Les deux dernières assertions de (ii) résultent immédiatemment de (i).

Les assertions (iii) et (iv) sont des conséquences de ce qui précède.

LEMME I.13.- Tout chemin fermé de A_e (resp. $A'_{e'}$) dont la longueur est au plus 3, est associé à un chemin fermé de $A'_{e'}$ (resp. A_e).En particulier, si a et b sont des éléments liés de A_e (resp. $A'_{e'}$) et a', b' des éléments liés qui leur sont associés, on a:

$$\phi_{aa'}(x) = \phi_{bb'}(x) \quad , x \in D_a \cap D_b \cap A_e \quad (\text{resp. } D'_a \cap D'_b \cap A'_{e'}) .$$

<u>Preuve</u>. L'assertion est claire si le chemin est de longueur nulle. Il n'y a pas de chemin fermé de longueur 1.

Soit $\Gamma = (a,b,a)$ un chemin fermé de A_e (resp. $A'_{e'}$). Soit b' un élément associé à b; $\Gamma' = (\phi_{bb'}(a), b', \phi_{bb'}(a))$ est un chemin fermé de $A'_{e'}$ (resp. A_e) associé à Γ.

Soient $\Gamma = (a,b,c,a)$ un chemin fermé de A_e (resp.$A'_{e'}$) et $\Gamma' = (a',b',c',a'')$ un chemin de $A'_{e'}$ (resp.A_e) qui lui est associé. Comme les éléments a et c sont liés, les éléments $\phi_{bb'}(a) = a'$ et $\phi_{bb'}(c) = c'$ le sont aussi (lemme I.9). Par suite, nous avons $a' = a''$ ce qui démontre que Γ' est fermé; la dernière assertion en résulte immédiatement.

Désignons par H(j) l'hypothèse suivant laquelle les chemins fermés de A_e (resp. $A'_{e'}$) de longueur j, sont associés à des chemins fermés.

PROPOSITION I.9. - (Sous les hypothèses U.O, U.1, U.2, H(4), H(5)).

Soient x un élément de A_e et x' un élément de $A'_{e'}$ qui lui est associé. Pour chaque élément y dans $D_x \cap A_e$ posons $\phi_{xx'}(y) = y'$. Soit Φ la fonction de D dans D' définie de la manière suivante:

$\Phi(d) = \eta(d)$ pour tout élément d de D_e,

$\Phi(e) = e'$ et $\Phi(x^e) = \pi x'$,

$\Phi(z)$, $z \in A_e - \{x^e\}$, est la valeur commune en z de toutes les applications $\phi_{yy'}$ pour les éléments y de $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ tels que z appartienne à $A_e \cap D_y$.

La fonction ϕ est une bijection de D sur D', elle induit un isomorphisme du graphe $\mathcal{G}$ sur le graphe $\mathcal{G}'$.

Preuve. Établissons d'abord que la fonction ϕ de $A_e - \{x^e\}$ dans A'_e, est une application. Soient y et z des éléments distincts de $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ et t un élément de $A_e \cap D_z \cap D_y$. Nous devons établir que $\phi_{zz'}(t) = \phi_{yy'}(t)$.

Si on a $y=x$, (t,z,x,t) est un chemin fermé de A_e de longueur 3; ce chemin est associé au chemin $(\phi_{zz'}(t),z',x',\phi_{yy'}(t))$ car on a $x'=y'$ par définition de y' et de $\phi_{xx'}$. Il résulte du lemme I.13 que ce dernier est un chemin fermé. Nous avons donc $\phi_{zz'}(t) = \phi_{yy'}(t)$.

Si y et z sont des éléments distincts de x, (t,z,x,y,t) est un chemin fermé de longueur 4. En vertu de H(4), le chemin Γ qui lui est associé est fermé. Comme Γ est le chemin $(\phi_{zz'}(t),z',x',y',\phi_{yy'}(t))$, il s'ensuit que $\phi_{zz'}(t) = \phi_{yy'}(t)$ ce qui démontre notre assertion.

Démontrons que l'application ϕ est injective.

Soient a et b des éléments de $A_e - \{x^e\}$ tels que $\phi(a) = \phi(b)$. Il existe donc, dans $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$, des éléments y_1 et y_2 respectivement liés à a et b et pour lesquels on a:

$$\phi_{y_1 y_1'}(a) = \phi(a) = \phi(b) = \phi_{y_2 y_2'}(b) .$$

Suivant que l'on a $y_1 \neq x \neq y_2$, $y_1 = x \neq y_2$ (resp. $y_1 \neq x = y_2$) ou $y_1 = x = y_2$, on peut joindre a et b par des chemins $\Gamma_1 = (a,y_1,x,y_2,b)$, $\Gamma_2 = (a,y_1=x,y_2,b)$ ou $\Gamma_3 = (a,y_1=x=y_2,b)$. Puisque $\phi(a)$ est égal à $\phi(b)$, chacun de ces chemins est associé à un chemin fermé de A'_e . Il résulte donc du lemme I.13 et de l'hypothèse H(4) que les chemins Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont fermés et par suite, on a : $a=b$.

Observons que x^e est le seul élément de A_e dont l'image par ϕ est $\pi x'$. En effet, si on avait $\phi(a) = \pi x'$ pour un élément a dans $A_e - \{x^e\}$, il existerait un élément y de $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ tel que $\phi_{yy'}(a) = \phi(a) = \pi x'$. Un tel élément y est nécessairement distinct de x car il est associé à un élément y' lié à $\phi(a) = \pi x'$. Par ailleurs, y' est un élément de $A'_e \cap D'_x$ (cf. construction de $\phi_{yy'}$), comme y' ne peut être lié à la fois à x'et à $\pi x'$ (L'.O.(iv)), nous avons donc une contradiction et notre assertion est démontrée.

L'application ϕ est donc une injection de A_e dans A'_e.

Démontrons que ϕ est surjective .

Soit t' un élément de $A'_{e'}$, distinct de x' et de $\pi x'$. Soit t un élément de A_e associé à t' (U.2), et soient y et z des éléments de $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ tel que t soit lié à y et que t^e soit lié à z. Nous avons:

$$\Phi(t) = \Phi_{yy'}(t) \quad \text{et} \quad \Phi(t^e) = \Phi_{zz'}(t^e) .$$

Comme l'application Φ est injective, les éléments $\Phi(t)$ et $\Phi(t^e)$ sont distincts; or, ce sont des éléments associés à t . L'un d'eux est donc t' ce qui démontre l'assertion.

Démontrons maintenant que Φ induit un isomorphisme du sous-graphe de $\mathcal{G}$ porté par A_e sur le sous-graphe de $\mathcal{G}'$ porté par $A'_{e'}$.

Soit $\{a,b\}$ une arête de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$) contenue dans $A_e-\{x^e\}$ (resp. $A'_{e'}-\{\pi x'\}$). Il existe donc des éléments y_1 et y_2 dans $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ (resp. $(A'_{e'} \cap D'_{x'}) \cup \{x'\}$) liés respectivement à a et à b . Du sous-ensemble $\{a,y_1,x,y_2,b,a\}$ (resp. $\{a,y_1,x',y_2,b,a\}$) on peut extraire un chemin fermé d'origine a se terminant par b,a) dont la longueur est au moins 3 et au plus 5 . Ce chemin est associé à un chemin fermé (lemme I.13, H(4), H(5)) dont l'origine est $\Phi(a)$ (resp. $\Phi^{-1}(a)$) et qui contient $\Phi(b)$ (resp. $\Phi^{-1}(b)$). Les éléments $\Phi(a)$ et $\Phi(b)$ (resp. $\Phi^{-1}(a)$ et $\Phi^{-1}(b)$) sont donc liés dans $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$).

Soient a un élément de $A_e-\{x^e\}$ et y un élément $(A_e \cap D_x) \cup \{x\}$ lié à a et pour lequel on a $\Phi_{yy'}(a) = \Phi(a)$. Si $\{a,x^e\}$ est une arête, $\{a,x\}$ n'en est pas une (U.0-(iv)); le chemin (a,y,x,a^e) n'est donc pas fermé, en particulier, il est associé à un chemin non fermé $(\Phi_{yy'}(a),y',x',\pi\Phi_{yy'}(a))$. Il s'ensuit que $\pi\Phi(a)$ est lié à x', c'est-à-dire que $\{\Phi(a),\pi x'\}$ est une arête de $\mathcal{G}'$.

Réciproquement, si $\{x',\Phi(a)\}$ est une arête de $\mathcal{G}'$, le chemin $(\Phi(a),y',x',\pi\Phi(a))$ n'est pas fermé. Le chemin (a,y,x,a_1) qui lui est associé n'est pas fermé (H(4)) donc l'élément a_1, associé à $\Phi(a)$, est distinct de a. Nous avons donc $a_1 = a^e$ et par suite a^e est lié à x.

Le fait que l'application Φ prolongée à D_e par η et à e par $\Phi(e)=e'$ soit un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$ résulte du lemme I.13. Ceci achève la démonstration .

Maintenant, il nous reste à établir que, si l'une des conditions U.3 est satisfaite, les conditions H(4) et H(5) sont remplies.

Observons d'abord que la condition U.3-(c)(i) établit une symétrie entre les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ puisque, dans ce cas, ils sont tous les deux de type $\mathcal{T}$. Ils peuvent être considérés comme les graphes d'un ensemble de Fisher d'un groupe, isomorphe à un sous-groupe du groupe de leurs automorphismes (thm.I.1).

En particulier, nous avons $\pi y' = y'^{e'}$ pour tout élément y' dans $A'_{e'}$. Nous pouvons alors compléter les propriétés énoncées dans le lemme I.8 relatives aux éléments associés.

LEMME I.14. - (Sous U.0, U.1, U.2). Supposons la condition U.3-(c)(i) remplie. Soient a et a' des éléments associés de A_e et de $A'_{e'}$, soient x et y des éléments de $A_e \cap D_a$, x' et y' leurs images par $\Phi_{aa'}$, enfin soient t' et u' les images par η de $t=e^{ax}$ et $u=e^{ay}$.

Nous avons les assertions suivantes:

(i) les éléments x^y et $x'^{y'}$ sont liés à a et a' respectivement;

(ii) on a $x^y = (t^u)^{ae}$ et $x'^{y'} = (t'^{u'})^{a'e'}$;

(iii) si x^y et e ne commutent pas, on a $\Phi_{aa'}(x^y) = x'^{y'}$;

(iv) si x^y et e sont liés, on a $\eta(x^y) = x'^{y'}$, en outre, y commute à x^e et y' est lié à $x'^{e'}$.

<u>Preuve</u>. Les éléments x et y sont liés à a (resp. x' et y' sont liés à a'), l'égalité $x^y = a$ (resp. $x'^{y'} = a'$) implique x=a (resp. x'=a'). Il s'ensuit que x^y (resp. $x'^{y'}$) est lié à a (resp. a') ce qui prouve (i).

Nous avons les égalités suivantes:

$$x = a^{te} = t^{ae}$$
$$y = a^{ue} = u^{ae}$$
$$x' = t'^{a'e'}$$
$$y' = a'^{u'e'};$$

par conséquent, nous avons aussi :

$$x^y = (t^u)^{ae}$$
$$x'^{y'} = (t'^{u'})^{a'e'}$$

ce qui donne l'assertion (ii).

L'égalité $x^y = (t^u)^{ae}$ entraîne $(x^y)^{ea} = t^u$; quand x^y est un élément de A_e, l'élément t^u, qui est dans D_e, s'écrit:

$$t^u = e^{(x^y)a}.$$

Nous avons alors $\eta(t^u) = t'^{u'}$ et par suite:

$$\Phi_{aa'}(x^y) = \Phi_{aa'}((t^u)^{ae}) = \eta(t^u)a'^{e'}\eta(t^u) = (t'^{u'})^{e'a'e'} = x'^{y'}.$$

L'assertion (iii) est donc établie.

Si les éléments x^y et e sont liés, on a $x^y = (t^u)^{ae}$ donc $x^y = (t^u)^a$. Mais a est lié à x^y, nous avons alors $x^y = t^u$. Échangeons les rôles de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}'$, si $x'^{y'}$ ne commute pas à e', nous voyons qu'en vertu de (iii), $\Phi_{a'a}(x'^{y'}) = x^y$

ne commute pas à e, ce qui est exclu. Par conséquent, $x'^{y'}$ commute à e'. En particulier, en échangeant à nouveau les rôles de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$, nous voyons que $x'^{y'} = t'^{u'}$ ce qui entraîne l'égalité $\eta(x^y) = x'^{y'}$ et achève la démonstration.

LEMME I.15. - (Sous U.0, U.1, U.2). Soit $\Gamma = (a,x,y,z,a_1)$ un chemin de A_e tel que l'on ait $a_1 \in \{a,a^e\}$ et que l'une des conditions suivantes soit remplie:

(i) $aya = a$,

(ii) $aya = yay \in D_e$.

Alors, le chemin Γ est fermé si et seulement s'il est associé à un chemin fermé de $A'_{e'}$.

<u>Preuve</u>. Désignons par $\Gamma' = (a',x',y',z',a'_1)$ un chemin de $A'_{e'}$ associé à Γ .

Supposons que l'assertion (i) soit vraie.

Si a est distinct de y, le chemin (a,x,y,a) est fermé, il est de longueur 3; il est associé au chemin fermé (a',x',y',a') (lemme I.13). En conséquence, les chemins $\Gamma_1 = (a,y,z,a_1)$ et $\Gamma'_1 = (a',y',z',a'_1)$ sont associés. Si Γ (resp. Γ') est fermé, il en est de même pour Γ_1 (resp. Γ'_1) . Cela entraîne que Γ'_1 (resp. Γ_1) soit fermé (lemme I.12) donc que Γ' (resp. Γ) soit également un chemin fermé. L'assertion est démontrée dans ce cas.

Si l'on a $a=y$, le chemin $\Gamma = (a,x,a=y,z,a_1)$ est associé à $\Gamma' = (a',x',a',z',a'_1)$. Comme les chemins (a,z,a_1) et (a',z',a'_1) sont associés, et comme ils sont de longueur 3, ils sont fermés si $a_1 = a$ et non fermés si $a_1 = a^e$. Il en résulte que les chemins Γ et Γ' sont tous les deux fermés ou bien ils ne le sont ni l'un ni l'autre.

Supposons que l'assertion (ii) soit vraie.

Posons $d = aya$ et $d' = \eta(d)$. L'élément y s'écrit donc dad et il est associé à $\mu(d)\pi a'$ (lemme I.8). Par hypothèse a et y ne sont pas liés, a' et y' ne le sont pas non plus . En conséquence, $y' = \mu(d')a'$. Si Γ est fermé, les éléments $\phi_{zz'}(a)$ et $\phi_{zz'}(y)$ ne sont pas liés (lemme I.9); puisque $\phi_{zz'}(y)$ est y' , $\phi_{zz'}(a)$ est l'associé de a qui n'est pas lié à y', on a donc $\phi_{zz'}(a) = a'$ ce qui prouve que le chemin Γ' est fermé.

Réciproquement, si Γ' est un chemin fermé, $\phi_{z'z}(y')$ et $\phi_{z'z}(a')$ ne sont pas liés puisque y' et a' ne le sont pas. L'élément y n'est donc pas lié à a_1. Or, a_1 est soit a soit a^e; comme nous avons $y = ada$, nous en déduisons que a_1 est a ce qui prouve que Γ est fermé et achève la démonstration.

LEMME I.16. - (Sous U.0, U.1, U.2). Chacune des conditions U.3-(a), U.3-(b), U.3-(c)(i) implique la condition H(4).

<u>Preuve</u>. Soit Γ un chemin de longueur 4 de A_e. Désignons par Γ' un chemin de A'_e, qui lui est associé. Faisons l'hypothèse que Γ ou Γ' est fermé. Posons $\Gamma = (a,x,y,z,a_1)$; on a alors $a_1 = a$ ou $a_1 = a^e$.

Les paires de sommets de Γ qui sont à distance 2 sont : $\{a,y\}$, $\{x,z\}$, $\{y,a_1\}$. Considérons les chemins $\Gamma^\circ = (x,y,z,a_1,x)$ et $\Gamma^{\infty} = (y,z,a_1,x_1,y_1)$ où $x_1 \in D_{a_1} \cup \{x,x^e\}$ et $y_1 \in D_{x_1} \cup \{y,y^e\}$.

Comme on le vérifie aisément, les assertions " Γ fermé", " Γ° fermé" et "Γ^{∞} fermé" sont équivalentes. Si deux sommets s et t de Γ, situés à distance 2, sont tels que (i) $st=ts$ ou que (ii) $sts=tst \in D_e$, l'un des chemins Γ, Γ°, Γ^{∞} satisfait aux conditions du lemme I.15 . Il s'ensuit que notre lemme est alors démontré.

Désormais, nous faisons l'hypothèse que deux sommets à distance 2 de Γ ne remplissent aucune des conditions (i) et (ii) ci-dessus. Il en résulte que chacun des D-sous-groupes $\langle e,a,y \rangle$ et $\langle e,x,z \rangle$ est isomorphe à un groupe $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{H}^*$ (cf. §4. 1. note à U.3).

Sous l'hypothèse U.3-(a) , cette situation ne se présente jamais. Le lemme est donc établi.

Supposons la condition U.3-(b) remplie. Observons que l'on a d'une part $y \in D_x \cap D_z$ et que d'autre part $\langle x,z,a \rangle$ est isomorphe à Σ_4 si $a_1 = a^e$ (car on a alors $az \neq za$) et à $\Sigma_3 \times \Sigma_2$ si $a_1 = a$. L'assertion 1. de la condition U.3-(b) est donc remplie, nous en déduisons l'existence d'un élément t de A_e qui est lié à chacun des points a, x, y, z . Posons $\Gamma' = (a',x',y',z',a'_1)$ et $t' = \Phi_{aa'}(t)$. l'image par $\Phi_{tt'}$ du chemin Γ est le chemin

$$\Gamma_1 = (\Phi_{tt'}(a), \Phi_{tt'}(x), \Phi_{tt'}(y), \Phi_{tt'}(z), \Phi_{tt'}(a_1));$$

les images par $\Phi_{tt'}$ de x, y, z, a_1 sont respectivement x', y', z' et a'_1 (lemme I.13). Si le chemin Γ (resp. Γ') est fermé, nous avons $a = a_1$ (resp. $a' = a'_1$); le chemin Γ_1 est donc fermé d'où $a' = a'_1$ (resp. $\Phi_{t't}(a'_1) = a_1 = \Phi_{t't}(a') = a$) ce qui prouve que Γ (resp. Γ') est un chemin fermé.

Enfin, supposons la condition U.3-(c)(i) remplie. Les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont alors de type $\mathcal{T}$; quitte à échanger les rôles de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}'$, il nous suffit de vérifier que si Γ est fermé, il en est de même pour Γ'. Supposons donc que Γ soit fermé et que Γ' ne le soit pas. Montrons que cette situation est impossible.

On a donc $a'_1 = a^e$; par suite l'unique élément de $A'_{e'}$ associé à z et lié à a' est $z'^{e'}$. Comme l'élément a est lié à x et à z, il est lié à x^z et par suite a' est lié à $\phi_{aa'}(x^z) = x'^{e'z'e'}$ (lemme I.14). Par ailleurs, comme y est lié à x et à z, y' est lié à $\phi_{yy'}(x^z) = x'^{z'}$. Les éléments $x'^{e'z'e'}$ et $x'^{z'}$ sont des éléments distincts et associés à x^z; nous en déduisons les égalités

$$x'^{e'z'e'} = (x'^{z'})^{e'} = x'^{z'e'}$$

ce qui impose $x'^{e'} = x'$ contrairement au fait que x' ne commute pas à e'.

LEMME I.17. - (Sous U.0, U.1, U.2). Chacune des conditions U.3-(a), U.3-(b) et U.3-(c) implique la condition H(5).

Preuve. Soient $\Gamma = (a,x,y,z,b,a_1)$ un chemin de longueur 5 de A_e et $\Gamma' = (a',x',y',z',b',a'_1)$ un chemin qui lui est associé. Nous faisons l'hypothèse que Γ ou Γ' est un chemin fermé et nous allons montrer qu'ils sont fermés tous les deux. Par hypothèse, nous avons donc $a_1 = a$ ou $a_1 = a^e$.

Démontrons d'abord que si a et y remplissent l'une des deux assertions (i) ay=ya ou (ii) $aya = yay \in D_e$, alors Γ et Γ' sont des chemins fermés.

Si a est lié à y, le chemin $\Gamma_1 = (a,y,z,b,a_1)$ est associé au chemin $\Gamma'_1 = (a',y',z',b',a'_1)$. Or Γ_1 est de longueur 4 et en vertu des hypothèses, Γ_1 ou Γ'_1 est un chemin fermé. Ces chemins sont alors tous les deux fermés (lemme I.16) et il en est de même pour Γ et Γ'.

Si on a a=y. Les éléments a' et z' sont liés; le chemin $\Gamma_2 = (a,z,b,a_1)$ est associé au chemin $\Gamma'_2 = (a',z',b',a'_1)$. Comme l'un des chemins Γ_2, Γ'_2 est fermé, ils le sont tous les deux (lemme I.13) et par conséquent Γ et Γ' sont des chemins fermés.

Supposons que a et y soient tels que aya=yay soit un élément de D_e. Les éléments y et a^e sont liés, et les éléments $a' = \phi_{xx'}(a)$ et $y' = \phi_{xx'}(y)$ ne le sont pas. En conséquence, $\phi_{yy'}(a^e) = \pi a'$ qui est associé à a, est lié à y'. Dans ces conditions, les chemins $\Gamma_2 = (a^e,y,z,b,a_1)$ et $\Gamma'_2 = (\phi_{yy'}(a^e) = \pi a', y', z', b', a'_1)$ sont associés. Si Γ (resp. Γ') est fermé, on a $a = a_1$ (resp. $a' = a'_1$); aucun des chemins Γ_2, Γ'_2 n'est fermé (lemme I.16) ce qui prouve que $\pi a' = \pi a'_1$ (resp. $a = a_1$) et entraîne que Γ' (resp. Γ) est fermé.

Ainsi, nous pouvons désormais faire l'hypothèse suivante: deux sommets de Γ, à distance 2, ne satisfont à aucune des conditions (i) et (ii) ci-dessus.

Les D-sous-groupes <e,a,y> et <e,b,y> sont isomorphes à H ou à H^*.

Sous l'hypothèse U.3-(a), cette situation est exclue. Le résultat est donc établi dans ce cas.

Supposons que la condition U.3-(b) soit satisfaite. Comme les éléments a et b commutent entre eux, le sous-groupe <e,a,b> est isomorphe à Σ_4. Il existe donc un élément t dans A_e qui est lié à a, y, z, b. Posons $t' = \phi_{yy'}(t)$. Les chemins $\Gamma_1 = (a,t,y,z,b,a_1)$ et $\Gamma_2 = (a,x,y,t,b,a_1)$ sont respectivement associés aux chemins $\Gamma_1' = (\phi_{tt'}(a),t',y',z',b',a_1')$ et $\Gamma_2' = (a',x',y',t',\phi_{tt'}(b)=b'',\phi_{bb''}(a_1))$. Supposons que Γ soit fermé. Alors, chacun des chemins Γ_1 et Γ_2 est fermé. Comme t commute à z, les sommets t et z du chemin (t,y,z,b,a,t) satisfont à la condition (i) ci-dessus, nous en déduisons que $(t',y',z',b',a_1',\phi_{aa_1'}(t))$ est un chemin fermé. il s'ensuit que Γ_1' est également un chemin fermé. De la même manière, le fait que t commute à a implique que Γ_2' est un chemin fermé. Ainsi, nous avons $\phi_{bb''}(a_1)=a'$. Comme les éléments $a_1' = \phi_{tt'}(a)$ et $b'' = \phi_{tt'}(b)$ sont liés puisque a et b le sont, a_1' est l'élément associé à a qui est lié à b''. Nous avons donc $a' = a_1'$ ce qui prouve que Γ' est fermé.

Réciproquement, si Γ' est un chemin fermé et si Γ ne l'est pas, nous avons $a=a_1'$ et $a_1=a^e$. Aucun des chemins Γ_1 et Γ_2 n'est fermé, et il en est de même pour Γ_1' et Γ_2' . Par conséquent, on a : $\phi_{tt'}(a)=\pi a'$ et $\phi_{bb''}(a^e)=\pi a'$. Or les éléments t et a^e ne sont pas liés; il en est donc de même pour leurs images par $\phi_{bb''}$: t' et $\pi a'$ ce qui contredit le fait que a' soit l'unique associé de a qui appartienne à $D_{t'}' \cap A_{e'}'$. Sous l'hypothèse U.3-(b) le lemme est établi.

Étudions enfin le cas où la condition U.3-(c) est remplie.

Supposons que l'un des deux chemins Γ et Γ' soit fermé et non l'autre, et démontrons que cette situation est impossible.

Établissons d'abord chacune des assertions suivantes:

(α) e^{yz} appartient à $D_e \cap D_a$.

(β) e^{yz} centralise $A_e \cap D_b \cap D_x$.

<u>Preuve de</u> (α) . Comme les éléments y et z sont liés, il en est de même pour e^{yz} et e . Montrons que e^{yz} est lié à a.

L'hypothèse U.3-(c)(i) est telle que les graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ont des rôles symétriques; compte-tenu de ce qui précède, nous pouvons faire l'hypothèse supplémentaire que les éléments de Γ (resp. Γ') situés à distance 2 ne satisfont à aucune des conditions (i) et (ii) ci-dessus. Par conséquent, si s et t sont des sommets de Γ (resp. Γ') situés à distance 2, on a: sts=tst et $sts \in A_e$ ce qui entraîne $s \in A_t \cap A_{t^e}$.

Les éléments a et y sont dans D_x . par consequent a^y appartient à D_x; en vertu de la remarque précédente, a^y appartient a A_e .

Supposons que le chemin Γ soit fermé. Les éléments z et a de Γ sont à distance 2, on a $a^z = z^a$ et $a^z \varepsilon A_e$; en particulier les éléments $a^y = y^a$ et $a^z = z^a$ sont liés. Nous en déduisons que $\Phi_{xx'}(a^y)$ est lié à l'un des éléménts t' associés à a^z. En vertu du lemme I.14-(iii), applicable grâce à la condition U.3-(c)(i), nous savons que $\Phi_{xx'}(a^y) = a'^{y'}$ et que $t' = (a'^{e'})^{z'}$ ou $t' = (a'^{e'})^{z'e'}$ (rappelons que $a'_1 = a'^{e'}$). Par ailleurs, les éléments y' et z' de Γ' sont respectivement à distance 2 de a' et de $a'^{e'}$, ce sont donc des éléments de $A'_{a'} \cap A'_{(a'^{e'})}$. Ainsi, $a'^{y'}$ qui est lié à $a'^{z'}$ et non à $a'^{e'}$, n'est pas lié à $(a'^{z'})^{(a'^{e'})}$. Or, nous avons les égalités suivantes:

$$(a'^{z'})^{(a'^{e'})} = (z'^{a'})^{e'a'e'} = z'^{e'a'} = (z'^{e'})^{a'} = a'^{e'z'e'} ;$$

il s'ensuit que l'élément t', associé à a^z, qui est lié à $a'^{y'}$, est $a'^{e'z'}$. Ainsi $a'^{y'z'}$ est lié à $a'^{e'}$; par ailleurs, $a'^{y'z'}$ est lié à a' (car y' et z' sont liés entre eux et ne sont pas liés à a'). Il en résulte que $a'^{y'z'}$ est lié à e' et par suite a' est lié à $e'^{z'y'}$. Ainsi, $e'^{y'z'}$ est un élément de $D'_{e'} \cap D'_{a'}$ ce qui prouve que e^{yz} appartient à $D_e \cap D_a$.

Si le chemin Γ' est fermé, nous avons $a_1 = a^e$ et $a'_1 = a'$. Les éléments y' et z' sont à distance 2 de a'; par conséquent y' et z' appartiennent à $A'_{a'}$, et $A'_{e'}$ contient $a'^{y'}$ et $a'^{z'}$. Comme y' et z' sont liés, $a'^{y'}$ et $a'^{z'}$ le sont aussi et $\Phi_{xx'}(a'^{y'})$ est lié à l'un des éléments associés à $a'^{z'}$, c'est-à-dire à a^{ez} ou à a^{eze}. Comme ci-dessus, on a $\Phi_{x'x}(a'^{y'}) = a^y$ et les éléments y et z appartiennent à $A_a \cap A_{(a^e)}$. L'élément a^y est lié à a^z, il n'est lié ni à $(a^z)^{(a^e)} = (a^z)^{eae}$ ni à a^e; comme $(a^z)^{eae} = z^{ea} = a^{eze}$, a^y est lié à a^{ez}. Nous en déduisons donc que a^{yz} qui est lié à a, est lié à $a^e = e^a$, donc à e ; par suite, les éléments e^{yz} et a sont liés ce qui établit l'assertion (α).

<u>Preuve de</u> (β). Soit t un élément de $A_e \cap D_b \cap D_x$. Posons $x_1 = x$ si $a_1 = a$ et $x_1 = x^e$ si $a_1 = a^e$. Considérons le chemin $\Gamma_1 = (x, t, b, a_1, x_1)$ et le chemin $\Gamma'_1 = (\Phi_{tt'}(x), t', b', a'_1, x'_1)$ qui lui est associé ; on a $\Phi_{bb'}(t) = t'$.

Si Γ est fermé, on a $a_1 = a$ et $x_1 = x$. Le chemin Γ_1 est donc fermé et il en est de même de Γ'_1 car Γ_1 est de longueur 4 (lemme I.16). Comme Γ' n'est pas fermé, nous avons $a'_1 = a'^{e'}$, donc $x'_1 = x'^{e'}$ et par suite $\Phi_{tt'}(x) = x'^{e'}$.

Si Γ' est fermé, on a $a'_1 = a'$ et en outre Γ n'est pas fermé. Il s'ensuit que $a_1 = a^e$ et $x_1 = x^e$. Les chemins Γ_1 et Γ'_1 ne sont donc pas fermés (lemme I.16). Par conséquent, nous avons encore $\Phi_{tt'}(x) = x'^{e'}$.

Ainsi, en toute hypothèse, nous avons $\Phi_{bb'}(t) = t'$ et $\Phi_{xx'}(t) = t'^{e'}$.

Considérons alors le chemin $\Gamma_2 = (t,x,y,z,b,t)$ et le chemin $\Gamma'_2 = (t'^{e'},x',y',z',b',t')$ qui lui est associé. Comme Γ_2 est un chemin fermé de longueur 5 et comme Γ'_2 est non fermé, les sommets à distance 2 de Γ_2 ne satisfont à aucune des conditions (i) et (ii) décrites précédemment. Nous en déduisons que e^{yz} appartient à $D_e \cap D_t$ (condition (α) ci-dessus) c'est-à-dire que t centralise e^{yz}. L'assertion (β) est donc établie.

Maintenant, posons $F = D_b \cap D_x \cap D_{(e^{yz})}$. Il est clair que F contient $D_b \cap D_x \cap A_e$ (assertion (β)); par ailleurs, tout élément f de F est tel que $F^f = F$. Puisque la condition U.3-(c)(ii) est satisfaite, nous en déduisons l'égalité $F = D_b \cap D_x$. Ainsi e^{yz} centralise $D_b \cap D_x$, comme $\mathcal{G}$ est de type $\mathcal{F}$ (U.1), e^{yz} est un élément de $(D_b \cap D_x) \cup \{b,x,b^x\}$ (prop. I.1). Or, e^{yz} est lié à e, c'est donc nécessairement un élément de $D_b \cap D_x$. Comme, dans ces conditions, e^{yz} commute à x, e^z commute à $x^y = x$; ainsi e centralise x^z contrairement à l'hypothèse que x et z ne satisfont pas à la condition (ii). Nous obtenons ainsi une contradiction, ce qui achève la démonstration.

Seconde partie: EXISTENCE DE Fi(24)

Dans cette seconde partie, nous construisons un graphe $\mathcal{E}$ de type $\mathcal{F}$ comme 2*-extension du graphe de Fischer de Fi(23) et nous vérifions que le couple fischérien (H,E) qui lui est associé, possède les propriétés requises pour que H soit Fi(24), à un unique isomorphisme près.

Pour cela, on considère un certain sous-groupe maximal R de Fi(23) et, à partir de la réunion disjointe $E = D \cup G/\mathcal{D}R \cup \{\infty\}$ où D désigne la classe de Fischer de $G = Fi(23)$, on construit un quadruple dont le graphe associé $\mathcal{E}$ sera celui de Fi(24) (§2).

Il s'agit alors de prouver que le graphe $\mathcal{E}$ est de type $\mathcal{F}$, c'est-à-dire, compte tenu de la première partie I, qu'il satisfait aux conditions EXT. (I.§2.2). Les arguments utilisés pour traiter le cas des conditions EXT.i ($i \neq 3$) reposent essentiellement sur les propriétés de la classe de conjugaison de R dans G (§3.1.). Par contre, la condition EXT.3 est plus difficile à établir. Pour elle, on utilise les conditions U. (I.§4.1) appliquées au sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ qui sont liés à un élément donné de D (§3.2). Ensuite, on vérifie que le graphe $\mathcal{E}$ satisfait lui-même aux conditions U. , ce qui permet d'obtenir l'existence et l'unicité (au sens du théorème II.1) du couple fischérien (Fi(24),E) (§3.3.).

Dans ce travail , les renseignements auxiliaires nécessaires concernant les autres groupes de Fischer, certains groupes classiques (sous-groupes, classes de Fischer....) ont été rappelés sans démonstration, pour une part, avec les notations (§1) notamment sous forme de tableau (§1.4), pour l'autre part en appendice. Pour ces résultats, il existe le plus souvent des références assez explicites dans $[F_2]$, et à défaut, on peut se reporter à [VD] .

§1. NOTATIONS COMPLÉMENTAIRES - RAPPELS

1. Couples fischériens (G^i, D^i).

On désigne par (G^i, D^i) un couple fischérien $(1 \leq i \leq 4)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

- (G^1, D^1) est isomorphe à $(PSU(6,4), D(PSU(6,4)))$ où $D(PSU(6,4))$ est la classe des réflexions unitaires;
- G^i est un groupe presque simple de centre trivial;
- soit π_d l'application canonique de $\langle D_d^i \rangle$ sur $\langle D_d^i \rangle / Z(\langle D_d^i \rangle)$, pour tout d dans D^i et avec $i \geq 2$, $(\pi_d(\langle D_d^i \rangle), \pi_d(D_d^i))$ est isomorphe à (G^{i-1}, D^{i-1}).

Les groupes G^2 et G^3 sont respectivement isomorphes aux groupes de Fischer Fi(22) et Fi(23).

2. Groupes R^i et B^i .

On rappelle que $O^\varepsilon(n,3)$ est le quotient central du sous-groupe du groupe orthogonal en dimension n sur le corps $\mathbb{F}_3$ (pour une forme quadratique non dégénérée) engendré par les réflexions t_v pour lesquelles $Q(v)=-1$. Ce sous-groupe est d'indice 2 et $\{ t_v \mid Q(v)=-1 \}$ en est une classe de Fischer. Le symbole ε appartient à $\{+,-\}$. On a $\varepsilon=+$ si l'espace vectoriel associé admet une base orthogonale formée de vecteurs v tels que $Q(v)=-1$. Dans le cas contraire, on a $\varepsilon=-$.

On rappelle que $O_+(n,2)$ est le groupe des isométries d'une forme quadratique non dégénérée d'indice maximal en dimension n sur $\mathbb{F}_2$ (I.§3.2.) .

Le groupe dérivé H de $\mathcal{O}^+(8,3)$ (resp. $O_+(8,2)$) est isomorphe à un groupe simple de Chevalley de type D_4. Les automorphismes de H provenant des automorphismes du graphe de Dynkin forment un groupe S isomorphe à Σ_3 . On démontre que le produit semi-direct $H \rtimes S$ qui s'identifie à Aut(H), est engendré par une classe de Fischer et que celle-ci est la réunion de trois composantes connexes permutées circulairement par les éléments d'ordre 3 (notés α,α^{-1}) de S et engendrant chacune un sous-groupe d'indice 3 isomorphe à $\mathcal{O}^+(8,3)$ (resp. $O_+(8,2)$) (I. §3 2.(b)).

On désigne par R^i et B^i ($1 \leq i \leq 3$) des D^i-sous-groupes de G^i pour lesquels on a $B^i \subset R^i$ et les isomorphismes suivants:

i	1	2	3
R^i	$\mathcal{O}^+(6,3)$	$\mathcal{O}^+(7,3)$	$\mathcal{D}\mathcal{O}^+(8,3) \rtimes \Sigma_3$
B^i	$W^*(D_6)$	$Sp(6,2)$	$\mathcal{D}O_+(8,2) \rtimes \Sigma_3$

En outre, pour i=2,3, soit d un élément de $D^i \cap R^i$ (resp. $D^i \cap B^i$). Le quotient central de $\langle D^i_d \cap R^i \rangle$ (resp. $\langle D^i_d \cap B^i \rangle$) est isomorphe à R^{i-1} (resp. B^{i-1}). De plus, $D^i \cap R^i$ (resp. $D^i \cap B^i$) est l'unique classe de Fischer de R^i (resp. B^i)

3. Groupes K^i .

On désigne par $V(5+i)$ ($0 \leq i \leq 3$) un espace vectoriel de dimension 5+i sur $\mathbb{F}_3$ muni d'une forme bilinéaire symétrique ψ non dégénérée pour laquelle V(5+i) admet un base orthonormale. Soit P(i) un plan isotrope de V(5+i) et soit $S_{P(i)}$ l'image dans $\mathcal{O}^+(5+i,3)$ du sous-groupe du groupe orthogonal de ψ engendré par les réflexions t_v ($\psi(v,v)=1$) qui stabilisent P(i).

(a) On désigne par $\mathcal{H}$ un groupe isomorphe à $S_{P(o)}$. Ce groupe possède une unique classe de Fischer, elle est de cardinal 9 et le produit de deux quelconques de ses éléments est d'ordre 1 ou 3 . Le groupe $\mathcal{H}$ est d'ordre 54 ; son centre est d'ordre 3 . (Le groupe $\mathcal{H}$ a déjà été introduit,(I.§4.2. note de U.3)).

On désigne par $\mathcal{H}^*$ le quotient de $\mathcal{H}$ par son centre.

(b) On désigne par K^i un D^i-sous-groupe de R^i isomorphe à $S_{P(1)}$ si i=1 et à $S_{P(2)}$ si i=2; pour i=3, l'intersection de K^3 avec chaque composante connexe de D^3 engendre un sous-groupe isomorphe à $S_{P(3)}$. On a:

$$K^3 \simeq S_{P(3)} \cdot \langle \alpha \rangle \text{ et } S_{P(3)}/\Phi_3(S_{P(3)}) \simeq W(D_4) .$$

Le groupe K^1 (resp. K^2) est isomorphe à un produit central de 2 (resp. 3) groupes isomorphes à $\mathcal{H}$; il est engendré par une classe de Fischer.

Le groupe K^3 possède une classe de Fischer qui admet 9 composantes connexes. Chacune d'elles engendre un groupe isomorphe à un produit central de 4 groupes isomorphes à $\mathcal{H}$.

4. Résultats numériques.

Nous avons déjà défini le niveau d'un couple fischérien, (I.§1.3.(c)). Pour les groupes G^i, on a:

	G^1	G^2	G^3
niveau	6	7	8

Soient X un D^i-sous-groupe de G^i , d et e des éléments distincts de $D^i \cap X$ qui commutent et x un élément de $D^i \cap X$ appartenant à la même composante connexe que d et ne commutant pas à d .

On a les résultats ci-contre:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$\lvert G \rvert$	$2^{15}\ 3^{6}\ 5\ 7\ 11$	$2^{17}\ 3^{9}\ 5^{2}\ 7\ 11\ 13$	$2^{18}\ 3^{13}\ 5^{2}\ 7\ 11\ 13\ 17\ 23$
$\lvert G^i \cap D^i \rvert$	693	3 510	31 671
$\lvert G^i \cap D^i_d \rvert$	180	693	3 510
$\lvert G^i \cap D^i_d \cap D^i_e \rvert$	51	180	693
$\lvert G^i \cap D^i_d \cap D^i_x \rvert$	45	126	351
$\lvert R^i \rvert$	$2^{8}\ 3^{6}\ 5\ 7$	$2^{9}\ 3^{9}\ 5\ 7\ 13$	$2^{13}\ 3^{13}\ 5^{2}\ 7\ 13$
$\lvert R^i \cap D^i \rvert$	126	351	3 240
$\lvert R^i \cap D^i_d \rvert$	45	126	351
$\lvert R^i \cap D^i_d \cap D^i_e \rvert$	12	45	126
$\lvert R^i \cap D^i_d \cap D^i_x \rvert$	18	45	108
$\lvert B^i \rvert$	$2^{8}\ 3^{2}\ 5$	$2^{9}\ 3^{4}\ 5\ 7$	$2^{13}\ 3^{6}\ 5^{2}\ 7$
$\lvert B^i \cap D^i \rvert$	30	63	360
$\lvert K^i \rvert$	$2^{2}\ 3^{5}$	$2^{3}\ 3^{7}$	$2^{6}\ 3^{11}$
$\lvert K^i \cap D^i \rvert$	18	27	324
$\lvert N_{R^i}(K^i) \rvert$	$2^{5}\ 3^{6}$	$2^{6}\ 3^{9}$	$2^{9}\ 3^{13}$

§2. ÉNONCÉ DU THÉORÈME - PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION

THÉORÈME II.1.- A isomorphisme près, il existe un unique couple fischérien (G',D') possédant les propriétés suivantes:

(i) (G',D') est presque simple et $Z(G') = \{1\}$,

(ii) pour tout élément d dans D, le couple fischérien $(\pi_d(\langle D'_d\rangle), \pi_d(D'_d))$ est isomorphe à (G^3,D^3), π_d désignant l'application canonique de $\langle D'_d\rangle$ sur $\langle D'_d\rangle/Z(\langle D'_d\rangle)$.

Remarque 1. La presque simplicité de (G',D') implique que $\pi_d(D'_d)$ est une classe de Fischer de $\pi_d(\langle D'_d\rangle)$ (I.§1.1.(b)-2).

Remarque 2. De l'isomorphisme entre $(\pi_d(\langle D'_d\rangle), \pi_d(D'_d))$ et (G^3,D^3), on déduit les cardinaux de D'_d et de $D'_d \cap D'_e$ $(e \in D'_d)$; on a

$$|D'_d| = 31\,671 \quad \text{et} \quad |D'_d \cap D'_e| = 3\,510 \ .$$

En outre, pour tout élément x dans D' qui ne commute pas à d, il résulte du fait que $\langle d,x\rangle$ est isomorphe à Σ_3 et du numéro 2.4 de l'appendice que $\langle D'_d \cap D'_x\rangle$ est isomorphe à $D\mathcal{O}^+(8,3) \rtimes \Sigma_3$; on a

$$| D'_d \cap D'_x | = 3\,240 \ .$$

Remarque 3. Les paramètres du graphe de Fischer de (G',D') sont :

$$\begin{array}{rrl} |D'| = & 306\,936 & \\ |D'_d| = & 31\,671 & \\ |A'_d| = & 275\,264 & \\ |D'_d \cap D'_e| = & 3\,510 & (e \in D'_d) \\ |D'_d \cap D'_x| = & 3\,240 & (x \in A'_d) \ . \end{array}$$

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

Outre les notations générales, on désigne par $\mathcal{G}$ le graphe de Fischer du couple fischérien (G^3,D^3). On pose $G=G^3$, $D=D^3$, $R=R^3$, $B=B^3$ et $K=K^3$. De plus, pour tout élément g dans G, on désigne par $\mathcal{B}(R^g)$ et $\mathcal{K}(R^g)$ les classes de conjugaison des D-sous-groupes $\langle D \cap R^g \cap (R^g)^h \rangle$ de R^g $(h \in G-R^g)$ respectivement isomorphes à B et à K (§1.2, §1.3(b),app.n°1.1).

Les étapes de la démonstration sont les suivantes.

(1) On détermine un quadruple $(E,D,\mu,\mathcal{A})$ de telle sorte que le graphe $\mathcal{E}$ qui lui est associé soit une 2*-extension standard de $\mathcal{G}$ pour laquelle les conditions EXT.0 et EXT.1 sont remplies.

Puis on démontre que les conditions EXT.2' ,EXT.4' , EXT.5 et EXT.6 sont satisfaites. Les arguments utlisés reposent essentiellement sur les propriétés de la classe de conjugaison de R rappelées en appendice.

(2) On établit la condition EXT.3. En fait, pour un élément d arbitrairement choisi dans D, nous construisons un isomorphisme entre le sous-graphe $\mathcal{E}_d$ de $\mathcal{E}$ porté par les éléments de E qui sont liés à d et le graphe $\mathcal{G}$. Cela prouve que $\mathcal{E}_d$ est un graphe anti-connexe de type $\mathcal{F}$ (condition EXT.3). De plus, cela démontre en partie l'assertion (ii) du théorème II.1 .

(3) L'existence d'un couple fischérien satisfaisant aux conditions du théorème II.1 (donc l'existence de Fi(24)) repose sur le fait que l'on peut alors utiliser le théorème principal sur les extensions, il en résulte que $\mathcal{E}$ est de type $\mathcal{F}$.

(4) On achève la démonstration en établissant l'unicité, à isomorphisme près, du couple fischérien que l'on vient de construire. On a donc l'unicité de Fi(24).

§3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

1. Détermination d'une 2*-extension standard satisfaisant aux conditions EXT.i ($i \neq 3$).

(a) L'ensemble des sommets. Soit X' l'ensemble des classes à gauche de G suivant $\mathcal{D}R$:

$$X' = \{ g\mathcal{D}R \mid g \in G\} .$$

Comme $\mathcal{D}R$ est un sous-groupe d'indice 2 de R, l'ensemble X' est muni d'une permutation involutive π opérant sans point fixe telle que pour tout élément g de G on ait :

$$gR = g\mathcal{D}R \cup \pi g\mathcal{D}R .$$

Soient ∞ un point, X la réunion disjointe de X' et de ∞ , E la réunion disjointe de D et de X; nous avons:

$$E = D \cup \{\infty\} \cup X' = D \cup X .$$

(b) L'application μ de D dans $\mathrm{Perm}(E)$. Désignons par μ' l'application de D dans le groupe des permutations de X' définie de la manière suivante:

$$\mu'(d)(g\mathcal{D}R) = \pi(dg\mathcal{D}R) \qquad (d \in D \ , g \in G \ ) .$$

Comme l'application canonique $G/\mathcal{D}R \to G/R$ est un morphisme d'espaces homogènes, l'opération à gauche du groupe G sur $G/\mathcal{D}R$ et G/R commute avec π . Il en est donc de même de $\mu(d) = \pi(d)$. De plus $\mu(d)$ est une permutation involutive.

Prolongeons π en une permutation de X en posant

$$\pi(\infty) = \infty ,$$

et pour tout élément d dans D , prolongeons $\mu'(d)$ en une permutation $\mu(d)$

de E par

$$\begin{aligned} \mu(d)\infty &= \infty \\ \mu(d)d' &= d\,d'd \qquad (\, d' \in D\,) \\ \mu(d)x &= \mu'(d)x \qquad (\, x \in X'\,)\;. \end{aligned}$$

Nous déterminons ainsi une application μ de D dans le groupe des permutations de E pour laquelle nous avons les propriétés suivantes:

LEMME II.1.-

(i) Soit x un élément de X'. Pour tout élément d de D, les assertions « $\mu(d)x = x$ » et « $\mu(d)\pi x = \pi x$ » sont équivalentes.

(ii) Si $x = g\mathcal{D}R$, on a :

$$D \cap R^{g^{-1}} = \{\, d \in D \mid \mu(d)x = x \,\}.$$

<u>Preuve</u>. La première assertion résulte du fait que les permutations $\mu(d)$ et π de X' commutent entre elles.

Soit d un élément de D pour lequel on a $\mu(d)x = x$. Par définition nous avons $\pi dg\mathcal{D}R = g\mathcal{D}R$; cela entraîne que les classes à gauche dgR et gR sont égales. En particulier, d est un élément de $gRg^{-1} \cap D$.

Réciproquement, soit d un élément de $gRg^{-1} \cap D$. L'élément dg appartient à gR, donc à $g\mathcal{D}R$ ou à $\pi g\mathcal{D}R$. Si dg appartient à $g\mathcal{D}R$, $g^{-1}dg$ est un élément de D qui appartient à $\mathcal{D}R$; or $D \cap R$ est une classe de conjugaison de R qui engendre R , et $\mathcal{D}R$ est un sous-groupe d'indice 2 de R : cette situation est donc exclue. Ainsi, l'élément dg appartient à $\pi g\mathcal{D}R$ ce qui prouve que l'on a $dg\mathcal{D}R = \pi g\mathcal{D}R$, c'est-à-dire $\mu(d)x = x$.

En conséquence nous voyons que les fibres de l'application

$$\theta : x \longmapsto \{\, d \in D \mid \mu(d)x = x \,\}$$

de X' dans l'ensemble des parties de D sont de cardinal 2 ; elles sont formées des paires d'éléments $\{x, \pi x\}$. On peut donc considérer la 2*-extension standard $\mathcal{E}$ de $\mathcal{G}$ relative à X et à la fonction de D dans Perm(X) induite par μ .

(c) <u>L'ensemble des arêtes de $\mathcal{E}$</u>. Par définition des arêtes d'une 2*-extension standard, une arête de $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de cardinal 2 de l'un des types suivants :

$$\{d, d'\} \quad \text{avec } d \text{ et } d' \text{ dans } D \text{ et } dd' = d'd \neq 1 \;,$$

$\{d,x\}$ avec d dans D, x dans X et $\mu(d)x = x$,

$\{x,y\}$ avec x et y distincts dans X' tels qu'il existe un élément a dans D pour lequel on a $\mu(a)x = \pi y$ et $\mu(a)x \neq x$.

On note E_e l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ liés à e $(e \in E)$.

En vertu du lemme II.1, si $x = g^{-1}\mathcal{D}R$, on a $E_x \cap D = D \cap R^g$.

Remarquons que la condition EXT.0 est remplie puisque pour tout élément d de D, $\mu(d)$ induit sur D la conjugaison par d . Le fait que $\mathcal{E}$ soit une 2*-extension standard entraîne que EXT.1 est également remplie.

LEMME II.2.- Soient $x = g^{-1}\mathcal{D}R$ et $y = h^{-1}\mathcal{D}R$ des éléments distincts de X', liés dans $\mathcal{E}$.

(i) On a : $D \cap E_x \cap E_y = D \cap R^g \cap R^h$;

(ii) il existe un unique élément a dans D pour lequel

$$R^{ga} = R^h \quad \text{et} \quad D \cap R^g \cap R^h = D_a \cap R^g = D_a \cap R^h \ ;$$

(iii) $\langle D \cap R^g \cap R^h \rangle$ est un élément de $\mathcal{B}(R^g)$.

<u>Preuve</u>. L'assertion (i) est une conséquence immédiate du lemme II.1 .

Par hypothèse x et y sont liés dans $\mathcal{E}$; il existe donc un élément a dans D pour lequel (1) $\mu(a)x = \pi y$

(2) $\mu(a)x \neq x$.

L'inégalité (2) signifie que $\pi a g^{-1}\mathcal{D}R = \pi h^{-1}\mathcal{D}R$; on a donc $ag^{-1}\mathcal{D}R = h^{-1}\mathcal{D}R$ et par suite $R^{ga} = R^h$. Il en résulte l'égalité $R^h \cap R^g = R^{ga} \cap R^g$. En vertu de (1) a n'appartient pas à $D \cap R^g$ (lemme II.1), en conséquence $R^{ga} \cap R^g$ est un élément de $\mathcal{B}(R^g)$ et a est l'unique élément de D satisfaisant à (ii) (app. n°1.1, n°1.3).

(d) <u>Condition</u> EXT.2. Soient d et d' des éléments de D, liés dans $\mathcal{E}$, et x un élément de X qui n'est lié ni à d ni à d'. On doit établir que $\{\mu(d)x, \mu(d')x\}$ est une arête de $\mathcal{E}$.

Puisque d n'est pas lié à x, x est un élément de X' : soit $x = g^{-1}\mathcal{D}R$. Comme dd' est d'ordre 2, il résulte du numéro 2.3 de l'appendice que $R^{gd} \cap R^{gd'}$ est un élément de $\mathcal{B}(R^{gd})$. Le groupe $R^{gd} \cap R^{gd'}$ est donc centralisé par un unique élément a de D (app. n°1.3) qui commute à d et d' ($d \neq a \neq d'$) et pour lequel dad' appartient à $\mathcal{D}R^g$ (app.n°2.3). Par conséquent $dad'g^{-1}$ appartient à $g^{-1}\mathcal{D}R$. On a donc $ad'g^{-1}\mathcal{D}R = dg^{-1}\mathcal{D}R$ c'est-à-dire $\mu(a)\mu(d')x = \pi\mu(d)x$, d'où l'assertion.

(e) Condition EXT.4' (cf. prop.I.7). Pour établir l'assertion (a), nous devons démontrer que si x, x', x" sont des éléments distincts de X liés à un élément d de D pour lesquels

$$(*) \qquad D \cap E_d \cap E_x \cap E_{x'} = D \cap E_d \cap E_x \cap E_{x''} ,$$

alors:

$$D \cap E_x \cap E_{x'} = D \cap E_x \cap E_{x''} .$$

Observons que si les éléments x, x', x" appartiennent tous à X', cette assertion résulte du numéro 2.2 de l'appendice et du lemme II.1.

Supposons que l'un des éléments x, x', x" soit ∞ ; les autres sont donc des éléments distincts $g^{-1}\mathcal{D}R$ et $h^{-1}\mathcal{D}R$. La relation (*) s'écrit alors:

$$D_d \cap R^g \cap R^h = D_d \cap R^h \quad \text{si} \quad x \neq \infty,$$
$$D_d \cap R^h = D_d \cap R^g \quad \text{si} \quad x = \infty.$$

La nature des intersections du type $D \cap R$, $D \cap R \cap R^g$ et de celles du type $D_d \cap R$, $D_d \cap R \cap R^g$ (app. n°1.1) impose que l'on ait $x = \infty$. L'élément d, étant lié à x' et à x", appartient à $D \cap R^g \cap R^h$ (lemme II.1). A nouveau, l'égalité $D \cap R^g = D \cap R^h$ est une conséquence du numéro 2.2 de l'appendice.

Démontrons l'assertion (b). Soient x et y des éléments dixtincts de X, non liés dans $\mathcal{E}$ tels que pour tout d de D les éléments $\mu(d)x$ et y soient distincts.

Suivant que x désigne ∞ ou un élément $g^{-1}\mathcal{D}R$, le sous-ensemble $F = D \cap E_x \cap E_y$ est égal à $D \cap E_y$ ou à $D \cap R^g \cap E_y$. Comme y est distinct de x, nous pouvons supposer que y est un élément $h^{-1}\mathcal{D}R$ de X' ; F est donc égal soit à $D \cap R^h$ soit à $D \cap R^g \cap R^h$. Or <F>, élément de $\mathcal{R}(G)$, $\mathcal{B}(R^h)$ ou $\mathcal{A}(R^h)$, admet F comme classe de Fischer (app.n°1.1). Par conséquent, le sous-graphe $\mathcal{E}_F$ de $\mathcal{E}$ porté par F est anti-connexe, ce qui est l'assertion (b)ii .

(f) Condition EXT.5 . Prouvons l'assertion (i). Pour cela, nous devons vérifier que si e est un élément de E et x un element de X distinct de e et non lié à e, le sous-ensemble $F = D \cap E_e \cap E_x$ est non vide.

Observons d'abord que si e est un élément d de D, x appartient nécessairement à X'. Soit $x = g^{-1}\mathcal{D}R$. Puisque $D \cap E_x = D \cap R^g$ (lemme II.1), on a

$F = D_d \cap R^g \neq \emptyset$ (app.n°1.1).

Si on a $e = \infty$, tous les éléments de D sont liés à e; donc x est un élément $g^{-1}\mathcal{D}R$ de X'. Par suite on a

$$F = D \cap E_x = D \cap R^g \neq \emptyset .$$

Supposons enfin que e soit un élément $h^{-1}\mathcal{D}R$ de X'. On a donc $F = D \cap R^h \cap E_x$. Suivant que x est ∞ ou un élément $g^{-1}\mathcal{D}R$ de X', F est égal à $D \cap R^h$ ou à $D \cap R^h \cap R^g$. L'assertion résulte encore une fois du numéro 1.1 de l'appendice.

Assertion (ii). Etant donnés un élément e dans E, un élément x dans X distinct de e et un élément y dans X lié à e, nous devons montrer que le sous-ensemble $F = D \cap E_e \cap E_x \cap E_y$ est non vide. En vertu de (i) nous pouvons supposer que y appartient à X'; soit $y = g^{-1}\mathcal{D}R$. L'élément e qui est lié à y, est donc soit un élément d de D, soit un élément $h^{-1}\mathcal{D}R$ de X'.

Dans le premier cas, x est un élément $k^{-1}\mathcal{D}R$ de X' et d n'appartient pas à R^k. On a donc $F = D_d \cap R^k \cap R^g \neq \emptyset$ (app.n°2.1).

Dans le second cas, x est ∞ ou un élément $k^{-1}\mathcal{D}R$ de X'. Si $x = \infty$, on a encore $F = D \cap R^h \cap R^k \neq \emptyset$ (app.n°2.1). Si $x = k^{-1}\mathcal{D}R$, le sous-groupe $\langle D \cap R^g \cap R^k \rangle$ appartient à $\mathcal{K}(R^g)$ ou à $\mathcal{B}(R^g)$. Par ailleurs $\langle D \cap R^g \cap R^h \rangle$ appartient à $\mathcal{B}(R^g)$; il résulte alors de l'appendice n°2.1 ou n°4.2 que $F = D \cap R^h \cap R^k \cap R^g$ est non vide.

(g) <u>Condition</u> EXT.6. Cette condition est remplie puisque le graphe $\mathcal{G}$ est connexe en tant que graphe de Fischer d'un couple fischérien presque simple (I.§3.(b)1).

2. La condition EXT.3 .

Soit d un élément de D; posons $X'_d = X' \cap E_d$. On a alors

$$E_d = D_d \cup \{\infty\} \cup X'_d .$$

Pour démontrer que la condition EXT.3 est remplie, nous allons établir un isomorphisme entre le sous-graphe de $\mathcal{E}$ porté par E_d, désigné $\mathcal{E}_d$, et le graphe $\mathcal{G}$ qui est un graphe de type $\mathcal{F}$ puisque c'est le graphe de Fischer de G^3 ($G^3 \simeq Fi(23)$).

Observons que l'on a $E_d \cap E_\infty = D_d$; par construction, nous avons un isomorphisme η entre le sous-graphe de $\mathcal{E}_d$ porté par $E_d \cap E_\infty$, noté $\mathcal{E}_{d,\infty}$, et le sous-graphe $\mathcal{G}_d$ de $\mathcal{G}$ porté par D_d.

Nous allons démontrer que les conditions du théorème I.3 sont remplies; l'isomorphisme η se prolongera alors en un isomorphisme de $\mathcal{E}_d$ sur $\mathcal{G}$.

(a) <u>Le graphe $\mathcal{E}_d$ est une 2*-extension standard relative à X_d et à une application de D_d dans $Perm(E_d)$ obtenue par restriction de μ à D_d.</u>

Désignons par $\mu°$ la restriction de μ à D_d; $\mu°$ est une application de D_d dans le groupe des permutations de E. Il est clair que pour tout élément d' de D_d, $\mu°(d')$ stabilise $D_d \cup \{\infty\}$. Soit x un élément de X'_d ; x est un élément $g^{-1}\partial R$ de X' et d appartient à $D \cap R^g$. Nous avons donc $\mu(d')x = \pi d' g^{-1}\partial R$ pour d' dans D ; posant $\mu(d')x=y$, il vient $D \cap E_y = D \cap R^{gd'}$. Si d' est un élément de D_d, d appartient à $D \cap R^{gd'}$; c'est donc un élément de E_y, ce qui signifie que y appartient à X'_d. Par conséquent, quel que soit l'élément d' de D_d, $\mu(d')$ stabilise X'_d. Nous voyons ainsi que, pour tout élément d' de D_d, $\mu(d')$ détermine une permutation de E_d ; l'application

$$d' \to \mu(d')_{|E_d}$$

ainsi définie est une application de D_d dans $Perm(E_d)$ que l'on note encore μ.

La permutation involutive π de X induit une permutation de X_d; nous la notons à nouveau π.

Les fibres de l'application $\theta : x \to D_d \cap E_x$ de X'_d dans l'ensemble des sous-ensembles de D_d sont de cardinal 2 ; la fibre de $\theta(x)$ est $\{x, \pi x\}$.

Nous pouvons alors considérer la 2*-extension standard $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}_{d,\infty}$ relative à X'_d et à μ.

L'ensemble des sommets de $\mathcal{E}'$ est $E_d = D_d \cup \{\infty\} \cup X'_d = D_d \cup X_d$.

L'ensemble des arêtes de $\mathcal{E}'$ est formé des sous-ensembles de cardinal 2 de

E_d qui sont des arêtes dans $\mathcal{E}$. En effet, soit $\{x,y\}$ un sous-ensemble de cardinal 2 de E_d.

Si on a $\{x,y\} = \{d',\infty\}$ avec d' dans D , $\{d',\infty\}$ est une arête de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$.

Si on a $\{x,y\} = \{d',d''\}$ avec d' et d'' dans D_d , $\{d',d''\}$ est une arête de $\mathcal{E}'$ si et seulement si c'est une arête de $\mathcal{E}$.

Si on a $\{x,y\} = \{d',y\}$ avec d' dans D_d et $y=g^{-1}\partial R$ dans X_d , $\{d',y\}$ est une arête de $\mathcal{E}'$ si et seulement si d' est un élément de $R^g \cap D$, ce qui équivaut à ce que $\{d',y\}$ soit une arête de $\mathcal{E}$.

Supposons maintenant que x et y soient des éléments de X'_d . Si $\{x,y\}$ est une arête de $\mathcal{E}'$, il existe un élément a de D_d pour lequel on a

$$\mu(a)x = \pi y \text{ et } \mu(a)x \neq x \quad ;$$

$\{x,y\}$ est alors une arête de $\mathcal{E}$. Réciproquement, si $\{x,y\}$ est une arête de $\mathcal{E}$, il existe un élément a de D pour lequel on a

$$\mu(a)x = \pi y \text{ et } \mu(a)x \neq x \ .$$

Pour démontrer que $\{x,y\}$ est une arête de $\mathcal{E}'$, on doit juste vérifier que l'élément a appartient à D_d . Or d est un élément de $D \cap E_x$ et de $D \cap E_y$. Soit $x=g^{-1}\partial R$; d est un élément de $D \cap R^g \cap R^{ga}$ car $D \cap E_y = D \cap R^{ga}$ (lemme II.2(ii)). L'assertion résulte alors de l'égalité $D \cap R^g \cap R^{ga} = D_a \cap R^g$ (lemme II.2(ii)).

(b) <u>Les conditions</u> U.O-(i), U.O-(iii) <u>et</u> U.1 <u>sont remplies</u> .

La condition U.O-(i) est une conséquence immédiate des propriétés de μ . Le lemme II.2 implique U.O-(iii); la condition U.1 est satisfaite puisque $\mathcal{G}$ est un graphe de type $\mathcal{F}$.

(c) <u>Les conditions</u> U.O-(ii) <u>et</u> U.O-(iv) <u>sont remplies</u>.

Soient a et b des éléments de D_d , x un élément de X'_d qui n'est lié ni à a ni à b . Etablir U.O-(ii) c'est démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\{a,b\}$ soit une arête de $\mathcal{E}_d$ est que $\{\mu(a)x,\mu(b)x\}$ soit une arête de $\mathcal{E}_d$.

Si $\{\mu(a)x,\mu(b)x\}$ est une arête de $\mathcal{E}_d$, il existe un élément c dans D_d pour lequel $\mu(c)\mu(a)x = \pi\mu(b)x$. Soit $x=g^{-1}\partial R$; on a

$$cag^{-1}\partial R = bg^{-1}\partial R$$

ce qui entraîne que bca appartient à $g^{-1}\partial Rg$ et que $D \cap R^{gac} = D \cap R^{gb}$. Le sous-groupe $R^{ga} \cap R^{gb} = R^{ga} \cap R^{gac}$ est un élément de $\mathcal{B}(R^{ga})$ centralisé par c (lemme II.2). Si le produit ab est d'ordre 3, nous avons $c=bab$ (app.n°2.3); par suite $bca=c$. L'élément c appartient alors à $D \cap \partial R^g$ ce qui est exclu car $D \cap \partial R^g \neq \emptyset$ (puisque D est une classe de conjugaison dans G, engendrant G et que $|R^g:\partial R^g| = 2$). En conséquence ab est un élément d'ordre 2, ainsi $\{a,b\}$ est une arête de $\mathcal{E}_d$.

La réciproque de notre assertion n'est autre que la condition EXT.2 : elle est donc établie (§3,1.(d)).

Soit x un élément de X'_d. Il n'existe aucun élément dans X'_d qui soit lié à la fois à x et à πx (condition U.O-(iv)).

Supposons qu'un tel élément existe; notons-le y. Il existe des éléments a et b dans D_d pour lesquels on a :

$$\mu(a)x = \pi y \quad , \quad \mu(a)x \neq x$$
$$\mu(b)\pi x = \pi y \quad , \quad \mu(b)\pi x \neq \pi x \ .$$

Posons $x = g^{-1}\partial R$. La relation

$$\mu(a)x = \pi y = \mu(b)\pi x$$

implique $D \cap R^{ga} = D \cap R^{gb}$ (lemme II.1). En particulier, $D \cap R^g \cap R^{ga} = D \cap R^g \cap R^{gb}$ engendre un élément de $\mathcal{B}(R^g)$ (lemmeII.2 (iii)) qui est centralisé par a et b (app.n°1.3). On a donc $a=b$ (app.n°1.3). Nous obtenons alors l'égalité

$$\mu(a)x = \mu(a)\pi x \ ;$$

cette situation est impossible puisque $\mu(a)x$ et $\mu(a)\pi x$ sont les éléments distincts de la partition $ag^{-1}\partial R \cup \pi ag^{-1}\partial R$ de $ag^{-1}R$.

. (d) <u>La condition</u> U.2 <u>est satisfaite</u>.

L'identité $d' \mapsto d'$ de $E_d \cap D$ sur D_d détermine un ismorphisme de graphes de $\mathcal{E}_{d,\infty}$ sur $\mathcal{G}_d$.

Soit ρ l'homomorphisme canonique de $\langle D_d\rangle$ sur $\langle D_d\rangle/Z(\langle D_d\rangle)$. Tout élément de E_d qui n'est pas lié à ∞, appartient à X'_d ; il est de la forme $g^{-1}\partial R$ ($g\in G$) et d est un élément de $D \cap R^g$. L'image par ρ de $\langle D_d \cap R^g\rangle$ est un $\rho(D_d)$-sous-groupe de $\rho(\langle D_d\rangle)$ isomorphe à $O^+(7,3)$ (§1.2.). Désignons par $\mathcal{K}'$ l'ensemble des sous-groupes $\rho(\langle D_d \cap R^g\rangle)$ lorsque $g^{-1}\partial R$ décrit X'_d. On sait que $\mathcal{K}'$ est une classe de conjugaison dans $\rho(\langle D_d\rangle)$ (app.n°2.2). Pour tout élément y de D qui ne commute pas à d, le D-sous-groupe $\langle D_d \cap D_y\rangle$ est isomorphe à son image dans $\rho(\langle D_d\rangle)$, et celle-ci est un $\rho(D_d)$-sous-groupe isomorphe à $O^+(7,3)$

(app.n°2.4). L'ensemble des sous-groupes $\rho(\langle D_d \cap D_y \rangle)$ ($y \in D$, $yd \neq dy$) est une classe de conjugaison $\mathcal{R}''$ dans $\rho(\langle D_d \rangle)$ (car $\langle D_d, d \rangle$ opère transitivement sur l'ensemble des éléments de D qui ne commutent pas à d ([I],§1.3.(b)2). Il résulte alors des numéros 3.1 et 3.2 de l'appendice que les classes $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$ sont échangées entre elles par un automorphisme η de $\rho(\langle D_d \rangle)$ qui stabilise $\rho(D_d)$. Cet automorphisme détermine un isomorphisme de graphes de $\mathcal{E}_{d,\infty}$ sur $\mathcal{G}_d$ qui remplit la condition U.2(i). Comme la composée de l'application de l'ensemble des conjugués de R contenant d dans $\mathcal{R}'$ avec la bijection de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}''$ induite par η est une bijection (app.n°2.2), la condition U.2 (ii) est satisfaite.

(e) La condition U.3-(b) est remplie.

Soient y, y', z, z' des éléments de D pour lesquels les D-sous-groupes $Y = \langle d,y,y' \rangle$ et $Z = \langle d,z,z' \rangle$ sont isomorphes à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$ (§1.3.(a)). Cela implique, en particulier, que $Y \cap D$ (resp. $Z \cap D$) est une classe de Fischer formée d'éléments qui ne commutent pas entre eux.

Désignons encore par A_d l'ensemble des éléments de D qui ne commutent pas à d. Etablir U.3-(b) c'est prouver que dans chacune des situations suivantes, le sous-ensemble $A_d \cap D_y \cap D_{y'} \cap D_z \cap D_{z'}$ est non vide :

1. z centralise y et y', le D-sous-groupe $\langle z',y,y' \rangle$ est isomorphe à $\Sigma_3 \times \Sigma_2$ ou à Σ_4;
2. on a $z' = y'$, le D-sous-groupe $\langle d,y,z \rangle$ est isomorphe à Σ_4.

Dans la première situation, nous voyons que si $\langle z',y,y' \rangle$ est isomorphe à $\Sigma_3 \times \Sigma_2$, z' centralise $\langle y,y' \rangle$ (cas 1.i). Par contre, si $\langle z',y,y' \rangle$ est isomorphe à Σ_4, z' centralise un seul des éléments y, y', $y^{y'}$; nous supposerons que $z'y' = y'z' \neq 1$ (cas 1.ii).

Dans la seconde situation, $\langle d,z,y \rangle$ est isomorphe à Σ_4. Par conséquent on a ou bien $yz = zy \neq 1$ (cas 2.i) ou bien $d\,y^z = y^z d \neq 1$ (cas 2.ii).

Posons $F = D_y \cap D_{y'} \cap D_z \cap D_{z'}$ et $F' = F \cap D_d$. Dans chacun des cas ci-dessus nous allons évaluer les cardinaux de F et de F' et nous constaterons que celui de F est strictement supérieur à celui de F'. Comme d n'est pas un élément de F, nous en déduirons que le sous-ensemble $F \cap A_d$ est non vide.

Evaluons $|F|$. Dans la situation 1.i, z et z' sont des éléments de $D_y \cap D_{y'}$ qui ne commutent pas. Comme $\langle D_y \cap D_{y'}\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{O}^+(7,3)$ (app.n°2.4b), il résulte de (§1.4) que $|F| = 45$.

Dans la situation 1.ii, le D-sous-groupe $\langle D_{z'} \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$ est isomorphe à Sp(6,2) (app.n°2.4c); de plus, il ne contient pas l'élément z. Or, $\langle D_y \cap D_{y'}\rangle$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{O}^+(7,3)$ contenant z ; le sous-groupe engendré par F est donc isomorphe à Σ_7 (app.n°4.2). On a donc $|F| = 21$.

Dans la situation 2.i, le D-sous-groupe $\langle D_z \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$ est encore isomorphe à Sp(6,2); on a donc $|F| = 63$ (§1,4).

Dans la situation 2.ii, le D-sous-groupe $\langle z,y,y'\rangle$ est isomorphe à Σ_4 ou à $\mathcal{H}$. En conséquence, $\langle D_z \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$ est isomorphe soit à Sp(6,2), soit à K^2 (app.n°2.4 c,d). On a donc ou bien $|F| = 63$, ou bien $|F| = 27$ (§1,4).

Evaluons $|F'|$. Observons d'abord que dans chacune des situations ci-dessus, F' est contenu dans $\langle D_d \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$. Comme $\langle d,y,y'\rangle$ est isomorphe à $\mathcal{H}$, nous avons $|D_d \cap D_y \cap D_{y'}| = 27$ (app. n°2.4d). En conséquence, on a $|F'|<|F|$ dans les cas 1.i, 2.i et 2.ii quand le sous-groupe $\langle y,y',z\rangle$ est isomorphe à Σ_4.

Dans le cas 1.ii, posons $F_1 = D_d \cap D_y \cap D_z$ et $F_2 = D_d \cap D_{y'} \cap D_z$. Toujours en vertu du numéro 2.4 de l'appendice, les sous-groupes engendrés par F_1 et F_2 sont isomorphes à Sp(6,2) puisque l'on a $\langle d,y,z\rangle \simeq \langle d,y',z\rangle \simeq \Sigma_4$; en outre $\langle D_d \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$ est isomorphe à K^2. Comme $F_1 \cap F_2$ est contenu dans $D_d \cap D_y \cap D_{y'}$, son cardinal est strictement inférieur à 27; il en résulte que $\langle F_1 \cap F_2\rangle$ est isomorphe à $\Sigma_3 \times \Sigma_3 \times \Sigma_3$ (app.n°4.2). On a donc $|F_1 \cap F_2| = |F'| = 9$ et par suite $|F'| < |F|$.

Dans le cas 2.ii, lorsque l'on suppose que $\langle y,y',z\rangle$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}$ ou à $\mathcal{H}^*$, les sous-groupes $\langle d,y,y^z\rangle$ et $\langle d,y',y^z\rangle$ sont isomorphes à Σ_4. Posons

$$F_3 = D_d \cap D_y \cap D_{(y^z)} \quad \text{et} \quad F_4 = D_d \cap D_{y'} \cap D_{(y^z)} \ ;$$

F_3 et F_4 engendrent des sous-groupes isomorphes à Sp(6,2) (app.n°2.4c). On a $F_3 \cap F_4 = F'$. Comme précédemment, $\langle F_3 \cap F_4\rangle$ qui est contenu dans $\langle D_d \cap D_y \cap D_{y'}\rangle$ est isomorphe à $\Sigma_3 \times \Sigma_3 \times \Sigma_3$. On a donc $|F'| = 9$ et par suite $|F'|$ est strictement inférieur à $|F|$.

3. Existence de Fi(24).

Nous venons de démontrer que chacune des conditions EXT.0, EXT.1, EXT.2, EXT.3, EXT.4', EXT.5, EXT.6 est remplie; il en est de même pour EXT.4 (prop.I.7). Ainsi, le théorème principal sur les extensions est applicable (thm.I.2): le graphe $\mathcal{E}$ est de type $\mathcal{F}$.

De plus, il est anti-connexe. En effet, le sous-graphe $\mathcal{E}_D$ est anti-connexe puisque c'est le graphe $\mathcal{G}$ lui-même. Quel que soit l'élément x dans E n'appartenant pas à $D \cup \{\infty\}$, il existe un élément d dans D qui n'est pas lié à x puisque, si $x = g^{-1} \mathcal{D} R$, le sous-ensemble $D-(D \cap R^g)$ est non vide. Deux éléments quelconques de E, liés dans $\mathcal{E}$, peuvent être joints par une chaîne d'éléments du graphe opposé, ce qui entraîne l'assertion .

Soient D' l'ensemble des indicatrices des sommets du graphe $\mathcal{E}$ et G' le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathcal{E}$ engendré par D'. Comme $\mathcal{E}$ est anti-connexe, D' est une classe de Fischer de G' et (G',D') est donc un couple fischérien presque simple de centre trivial (thm.I.1). De plus, le graphe $\mathcal{E}$ est connexe (I.§1.3.(b)2).

En prouvant EXT.3, nous avons démontré que $\langle D'_d \rangle / Z(\langle D'_d \rangle)$ est isomorphe à Fi(23); puisque D' est une classe de conjugaison dans G', cette assertion est vraie quel que soit l'élément d de D'

Nous avons donc établi l'existence de Fi(24).

4. Unicité de Fi(24).

Soient (G',D') et (G",D") des couples fischériens satisfaisant aux conditions du théorème II.1 . soient $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ leurs graphes de Fischer respectifs; ce sont des graphes de type $\mathcal{F}$. Nous allons démontrer que chacune des conditions U.3-(c)(ii) et U.2 du théorème d'unicité (cor du thm.I.3) sont remplies et conclure que les couples fischériens (G',D') et (G",D") sont isomorphes , en vertu du théorème d'unicité (cor. du thm.I.3).

Soient a et b des éléments distincts de D' qui ne commutent pas. Le sous-graphe de $\mathcal{G}'$ porté par $D'_a \cap D'_b$ est isomorphe à celui de la classe de Fischer de R (app. n°2.4b), il est donc anti-connexe. Il résulte du lemme 1.7 que la condition U.3-(c)(ii) est remplie.

Soient d'et d" des éléments de D' et de D" respectivement, soit η un isomorphisme de $<D'_{d'}>/Z(<D'_{d'}>)$ sur $<D''_{d''}>/Z(<D''_{d''}>)$. Notons $A'_{d'}$ (resp. $A''_{d''}$) l'ensemble des éléments de D' (resp. D") qui ne commutent pas à d' (resp. d"). Pour tout élément x' dans $A'_{d'}$ (resp. x" dans $A''_{d''}$) le D'-sous-groupe $<D'_{d'} \cap D'_{x'}>$ (resp. le D"-sous-groupe $<D''_{d''} \cap D''_{x''}>$) est isomorphe à R (app.n°2.4b). Comme G -rappelons que G désigne toujours G^3 - possède une unique classe de D-sous-groupes isomorphes à R (app.n°2.4b), pour tout élément x' de $A'_{d'}$ (resp. x" de $A''_{d''}$) il existe un élément x" dans $A''_{d''}$ (resp. x' dans $A'_{d'}$) tel que l'on ait

$$\eta(D'_{d'} \cap D'_{x'}) = D''_{d''} \cap D''_{x''} .$$

La condition U.2 est satisfaite.

Les centres des groupes G' et G" sont triviaux. Cela étant, il résulte du théorème d'unicité (cor. du thm.I.3) que les couples fischériens (G',D') et (G",D") sont isomorphes. Ainsi, il existe un isomorphisme de G' sur G" qui envoie D' sur D" et détermine un isomorphisme de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{G}''$ compatible avec les actions naturelles de G' et de G" sur $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ respectivement.

Nous avons ainsi démontré l'existence et l'unicité -à isomorphisme près- d'un couple fischérien (G',D') presque simple de centre trivial, tel que pour tout élément d dans D', le couple fischérien $(\rho(<D'_d>),\rho(D'_d))$ où ρ désigne l'application canonique de $<D'_d>$ sur $<D'_d>/Z(<D'_d>)$ soit isomorphe à (G^4, D^4). Un tel couple fischérien (G',D') est désigné (Fi(24),D(Fi(24))).

Enonçons sous forme de proposition les propriétés de Fi(24) qui se déduisent immédiatement des résultats précédents.

PROPOSITION II.1. - Soit D la classe de Fischer de Fi(24).

1) Le groupe Fi(24) est de niveau 8.
2) Soit d un élément de D; $<D_d>$ est le centralisateur de d dans Fi(24).
3) On a: $|Fi(24)| = 2^{22}\ 3^{13}\ 5^2\ 7^3\ 11\ 13\ 17\ 23\ 29$.

<u>Preuve</u>. La première assertion résulte de ce que G est de niveau 7 (§1.4). Soit d un élément de D et soit g un élément de Fi(24) qui le centralise. L'automorphisme intérieur σ_g associé à g stabilise D_d et A_d ; par conséquent

il normalise la classe des D-sous-groupes $<D_d \cap D_x>$ $(x \in A_d)$ (§1.3.(b)2). Soit σ^* l'automorphisme de $<D_d>^* = <D_d>/Z(<D_d>)$ défini à partir de σ_g. L'ensemble des images de $<D_d \cap D_x>$ dans $<D_d>^*$ est une classe de conjugaison de $<D_d>^*$ stable par σ^*. Il s'ensuit que σ^* est un automorphisme intérieur de $<D_d>^*$ (app.n°3.2). Il existe alors un élément h dans $<D_d>$ pour lequel $\sigma_g\sigma_h$ opère sur $<D_d>$ soit comme l'identité soit comme σ_d. Puisque $\sigma_g\sigma_h$ fixe d, $\sigma_g\sigma_h$ opère sur D comme l'identité ou comme σ_d (I.§1.3.(c)2). De là, on en déduit que g est un élément de $<D_d, d>$, donc de $<D_d>$ puisque d appartient à $<D_d>$ (I.§1.3.(c)1).

Le centre du groupe $<D_d>$ est $<d>$ (I.§1.3.(c)3); on a donc:

$$|<D_d>| = 2|<D_d>/Z(<D_d>)| = 2|Fi(23)| \ ;$$

comme D est une classe de conjugaison, nous avons la relation

$$|Fi(24)| = |D|.|<D_d>|,$$

et par suite l'ordre de Fi(24) (app.n°3.5).

APPENDICE

n°1 - Classe de conjugaison de R^i dans G^i $(1 \leq i \leq 3)$.

Soit $\mathcal{R}(G^i)$ la classe de conjugaison de R^i dans G^i. On pose $G = G^i$, $D = D^i$, $R = R^i$, ...

1.1 Le groupe G opère sur $\mathcal{R}(G)$ comme un groupe de permutations de rang 3. Les orbites de R opérant sur $\mathcal{R}(G) - \{R\}$, notées $\Omega_1(R)$ et $\Omega_2(R)$ sont les suivantes :

$$\Omega_1(R) = \{R^g \mid g \in G \ , \ \langle R^g \cap R \cap D\rangle \simeq B\}$$

$$\Omega_2(R) = \{R^g \mid g \in G \ , \ \langle R^g \cap R \cap D\rangle \simeq K\} .$$

On a

$$|\Omega_1(R)| = 567 \ , \ 3\,159 \ , \ 28\,431$$

$$|\Omega_2(R)| = 840 \ , \ 10\,920 \ , \ 109\,200 \ ;$$

de plus, $\{\langle R^g \cap R \cap D\rangle \mid R^g \in \Omega_1(R)\}$ et $\{\langle R^g \cap R \cap D\rangle \mid R^g \in \Omega_2(R)\}$ sont les classes de de conjugaison dans R .

Enfin, pour chaque élément g dans G, $R^g \cap R \cap D$ est une classe de Fischer de $\langle R^g \cap R \cap D\rangle$.

1.2 Le groupe R est un sous-groupe maximal de G ; en particulier, R est son propre normalisateur.

1.3 L'application $y \to R^y$ de D-R dans $\mathcal{R}(G)$ a pour image $\Omega_1(R)$; c'est une bijection. De plus $C_D(R^y \cap R) = \{y\}$; on a :

$$D \cap R^y \cap R = D_y \cap R^y = D_y \cap R .$$

(Réf. [F_2] 16.1.16, 17.3.7, 17.3.10, 18.3.18; [VD] 9-6, 3-1-4, 9-24).

n°2 - Intersections des conjugués de R^i.

Pour $i=1,2$. Soit $\mathcal{R}(G)$ la classe de conjugaison de $R=R^i$ dans $G=G^i$ et soient $\Omega_1(R)$ et $\Omega_2(R)$ les orbites de R dans $\mathcal{R}(G)-\{R\}$.

2.1 Pour tout élément d dans D et pour tout élément R' dans $\mathcal{R}(G)$, on a :

$$D_d \cap R \cap R' \neq \emptyset ;$$

quels que soient les éléments R' dans $\Omega_1(R)$ et R" dans $\Omega_2(R)$, on a :

$$D_d \cap R \cap R' \cap R'' \neq \emptyset .$$

(Réf. [VD] 9-29).

2.2 Quels que soient les éléments R' et R" dans $\mathcal{R}(G)$, s'il existe un élément d dans D tel que $D_d \cap R \cap R' = D_d \cap R \cap R''$, alors : $R \cap R' = R \cap R''$.

En particulier, soit d dans $D-(D \cap R)$ et soit ρ l'application canonique de $\langle D_d\rangle$ sur $G^\circ = \langle D_d\rangle/Z(\langle D_d\rangle)$. L'application

$$R^g \longrightarrow \rho(\langle R^g \cap D_d\rangle)$$

est une bijection de l'ensemble des conjugués de R contenant d sur la classe de conjugaison de $\rho(\langle R^g \cap D_d\rangle)$ dans G°.

(Réf. [VD] 9-31, 9-32).

Pour $i=1,2,3$. Soient x et y des éléments de $D=D^i$ n'appartenant pas à $R=R^i$.

2.3 Pour que $R^x \cap R^y$ soit un D-sous-groupe isomorphe à $B=B^i$ il faut et il suffit que l'une des deux assertions suivantes soit satisfaite:

(a) xy est d'ordre 2 ;

(b) xy est d'ordre 3, xyx appartient à $R \cap D$.

Lorsque l'une des conditions (a) ou (b) est remplie, $R^x \cap R^y$ est centralisé par un unique élément de D, noté z, pour lequel on a

- dans le cas (b): $z = xyx$,
- dans le cas (a): $z \in D_x \cap D_y$, $zxy \in R$; de plus, si $G=G^3$, $zxy \in \mathcal{D}R$.

(Réf. [VD] 9-26, 9-27).

Pour $2 \leq i \leq 4$. Soient x, y, z des éléments de D^i tels que xy et xz soient d'ordre 3. On pose $T = \langle x,y,z\rangle$.

2.4 (a) $\mathcal{C}_{D^i}(T) = D^i_x \cap D^i_y \cap D^i_z$ et $\mathcal{C}_{D^i}(\mathcal{C}_{D^i}(T)) = D^i \cap T$.

(b) Si T est isomorphe à Σ_3, alors $\langle \mathcal{C}_{D^i}(T)\rangle$ est isomorphe à R^{i-1}.

(c) Si T est isomorphe à Σ_4, alors $<\mathcal{C}_{D^i}(T)>$ est isomorphe à B^{i-1}.

(d) Si T est isomorphe à $\mathcal{H}$, alors $<\mathcal{C}_{D^i}(T)>$ est isomorphe à K^{i-1}.

(Réf. [VD] 9-25, 9-15).

n°3 - Automorphismes de G^i ($1 \leq i \leq 3$).

3.1 Le groupe G^i possède 4-i classes de conjugaison de D^i-sous-groupes isomorphes à R^i.
(Réf. [VD] 9-5).

3.2 Tout automorphisme de G^i qui stabilise D^i et normalise chacune des classes de conjugaison de D^i-sous-groupes isomorphes à R^i, est un automorphisme intérieur.
(Réf. $[F_2]$ 16.1.20, 17.2.4 ; [VD] 9-5).

3.3 La classe D^1 est l'unique classe de Fischer de G^1; le groupe des automorphismes de G^1 est isomorphe au produit semi-direct de G^1 par Σ_3.
(Réf. [VD] 3-2-4, 9-10).

3.4 Les résultats de ce numéro ne seront pas utilisés pour construire Fi(24).
Pour i=1,2 , D^i est l'unique classe de Fischer de G^i. Le groupe des automorphismes de G^2 est isomorphe au produit semi-direct de G^2 par un groupe cyclique d'ordre 2. Le groupe G^3 est complet.

3.5 Données numériques concernant G^i et D^i (cf.aussi II,§1,4.):

		i=1	i=2	i=3
	$\lvert D^i\rvert$	693	3 510	31 671
$d\in D^i$	$\lvert D^i_d\rvert$	180	693	3 510
$d\in D^i$, $e\in D^i_d$	$\lvert D^i_e \cap D^i_d\rvert$	51	180	693
$d,x\in D^i$, $dx\neq xd$	$\lvert D^i_d \cap D^i_x\rvert$	45	126	351
	$\lvert G^i\rvert$	$2^{15}\ 3^6\ 5\ 7\ 11$	$2^{17}\ 3^9\ 5^2\ 7\ 11\ 13$	$2^{18}\ 3^{13}\ 5^2\ 7\ 13\ 17\ 23$

n°4 - Action de B^i sur sa classe de conjugaison dans R^i.

Pour $1 \leq i \leq 3$, on peut décrire entièrement l'action de B^i sur sa classe de conjugaison $\mathcal{B}(R^i)$ dans R^i.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats qui nous sont utiles. Pour les autres, nous renvoyons à $[F_2]$ 15.1.1, 15.1.13 et à [VD] 8-6, 8-8, 8-16 .

Posons $B=B^i$ et $R=R^i$ pour $i=2,3$. Désignons par Δ la classe de Fischer de R .

4.1 Le sous-groupe B de R est maximal dans R ; en particulier, B est son propre normalisateur dans R.

4.2 Pour $i=2$ (resp.3) désignons par X_o, S_o, Z_o les groupes $W(D_4)\times(C_2)^3$ (resp. $(W(D_4)*W(D_4)).\langle\alpha\rangle$) Σ_7 (resp. Σ_9) et $(\Sigma_3)^3$ (resp. $(\Sigma_3)^4.\langle\alpha\rangle$) .

(a) L'opération par conjugaison de B sur $\mathcal{B}(R)-\{R\}$ admet trois orbites:

$$\delta_o(B) = \{B^r \mid r \in R,\ \langle B \cap B^r \cap \Delta\rangle \simeq X_o\}$$
$$\delta_1(B) = \{B^r \mid r \in R,\ \langle B \cap B^r \cap \Delta\rangle \simeq S_o\}$$
$$\delta_2(B) = \{B^r \mid r \in R,\ \langle B \cap B^r \cap \Delta\rangle \simeq Z_o\}.$$

(b) On a :
$$|\delta_o(B)| = 630 \quad (\text{resp. } 3\,150)$$
$$|\delta_1(B)| = 288 \quad (\text{resp. } 2\,880)$$
$$|\delta_2(B)| = 2\,240 \quad (\text{resp. } 22\,400)\ .$$

(c) Pour $j=0,1,2$ les Δ-sous-groupes $\langle B \cap B^r \cap \Delta\rangle$ pour lesquels B^r appartient à $\delta_j(B)$ forment une classe de conjugaison dans B.

4.3 L'application $d \to \langle\Delta_d \cap B\rangle$ est une bijection de $\Delta-(\Delta \cap B)$ sur une classe de Δ-sous-groupes isomorphes à Σ_7 si $i=2$ et à Σ_9 si $i=3$.
(Réf. $[F_2]$ 15.3.12, 15.3.16 ; [VD] 8-8, 8-16, 8-21).

BIBLIOGRAPHIE

[DGW] DANIELSON (S), GUTERMAN (M), WEISS (R) - On Fischer's characterization of Σ_5 and Σ_n . Comm.Algebra. 11 (1983) 1501-1510 .

[F_1] FISCHER (B) - Groups generated by 3-transpositions. Invent.Math.13 (1971), 232-246.

[F_2] FISCHER (B) - Groups generated by 3-transpositions. Université de Warwick (preprint).

[Gr] GRIESS (R) - The friendly giant. Invent.Math.69 (1982), 1-102.

[VD] VIROTTE-DUCHARME (M.M) - Couples fischériens presque simples. Thèse (Paris 7, 1985).

[W] WEISS (R) - On Fischer's characterization of Sp(2n,2) and $U_n(2)$. Comm. Algebra 11, n°22 (1983) 2527-2553 .

[Z] ZARA (F) - Classification des couples fischériens. Thèse (Amiens, 1985).

Mme M.M.VIROTTE-DUCHARME

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05

Mémoires de la Société Mathématique de France - nouvelle série

1980 - 1 . J. Briançon, A. Galligo, M. Granger - Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites.

2 . D. Bertrand, M. Waldschmidt - Fonctions abéliennes et nombres transcendants.

3 . Y. Félix - Dénombrement des types de K-Homotopie. Théorie de la déformation.

4 . L. Bégueri - Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos.

1981 - 5 . S. Ochanine - Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle.

6 . Nguyen Tien Dai, Nguyen Huu Duc, F. Pham - Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés. Appendice de Nguyen Tu Cuong.

1982 - 7 . P. Ellia - Sur les fibrés uniformes de rang (n + 1) sur P^n.

1983 - 8 . M. Granger - Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.

9/10 . S. Halperin - Lectures on minimal models.

11/12 . G. Henniart - La conjecture de Langlands locale pour GL(3).

1984 - 13 . D. Bertrand, M. Emsalem, F. Gramain, M. Huttner, M. Langevin, M. Laurent, M. Mignotte, J.-C. Moreau, P. Philippon, E. Reyssat, M. Waldschmidt - Les nombres transcendants.

14 . G. Dloussky - Structure des surfaces de Kato.

15 . M. Duflo, P. Eymard, G. Schiffmann (éditeurs) - Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.

16 . F. Delon, D. Lascar, M. Parigot, G. Sabbagh (éditeurs) - Compte rendu de la table ronde de Logique, octobre 1983, Paris.

17 . B. Perrin-Riou - Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa.

1985 - 18 . Corinne Blondel - Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur GL(2) et leurs caractères.

19 . J.P. Demailly - Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.

20 . F. Digne, J.Michel - Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani.

21 . M. Gros - Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.

1986 - 22 . H. Maillot - Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes.

23 . D. Barsky, P. Robba (Editeurs) - Introductions aux cohomologies p-adiques.

24/25 . B. Helffer, J. Sjöstrand - Résonances en limite semi-classique.

1987 - 26 . F. Lescure - Compactifications équivariantes par des courbes.

27 . M.-M. Virotte-Ducharme - Une construction du groupe de Fischer Fi(24).