MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J. DIXMIER

Sur les sous-sommes d'une partition

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 35 (1988)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_35__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 35
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 4

SUR LES SOUS-SOMMES D'UNE PARTITION

J.Dixmier

Résumé . Soit $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ une partition de l'entier $n = a_1 + \ldots + a_s$. On appelle <u>sous-somme de</u> π toute somme $a_{i_1} + \ldots + a_{i_t}$ $(i_1 < \ldots < i_t)$. Soit $\Sigma(\pi) \subset [0,n]$ l'ensemble des sous-sommes de π . Le mémoire concerne $\Sigma(\pi)$. On étudie les 2 premières "composantes connexes" de $\Sigma(\pi)$, les partitions pour lesquelles $\Sigma(\pi)$ admet 1,2 ou 3 composantes connexes, et les partitions telles que $\Sigma(\pi)$ soit assez dense dans $[0,n]$. Soit Q un ensemble fini fixé d'entiers >0 ; soit $p(n;Q)$ le nombre de partitions π de n telles que $Q \cap \Sigma(\pi) = \emptyset$; on étudie le comportement asymptotique de $p(n;Q)$ quand $n \to \infty$; par exemple, $p(n;\{a\})/p(n) \sim (\pi/\sqrt{6})^{[a/2]+1}\, u(a)/n^{([a/2]+1)/2}$ quand $n \to \infty$, où $u(a)$ est un entier tel que $\log u(a) \sim (a/2)\log a$ quand $a \to \infty$. Pour n grand, presque toute partition π de n telle que $\Sigma(\pi) \cap \{1,2,\ldots,a\} = \emptyset$ vérifie $\Sigma(\pi) = \{a+1, a+2, a+3, \ldots, n-a-1\}$.

Abstract . Let $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ be an (integral) partition of the integer $n = a_1 + \ldots + a_s$. One calls <u>subsum of</u> π every sum $a_{i_1} + \ldots + a_{i_t}$ $(i_1 < \ldots < i_t)$. Let $\Sigma(\pi) \subset [0,n]$ be the set of all subsums of π . The paper is concerned with $\Sigma(\pi)$, which is far from being an arbitrary subset of $[0,n]$. One studies the 2 first "connected components" of $\Sigma(\pi)$, the partitions for which $\Sigma(\pi)$ has 1,2 or 3 connected components, and the partitions for which the complement of $\Sigma(\pi)$ in $[0,n]$ is not too big . On the other hand, let Q be a fixed finite set of positive integers ; let $p(n;Q)$ be the number of partitions π of n such that $Q \cap \Sigma(\pi) = \emptyset$ (so that $p(n;\emptyset)$ is the number classically denoted by $p(n)$); one studies the asymptotic behaviour of $p(n;Q)$ as $n \to \infty$; for instance, if a is an integer, one has $p(n;\{a\})/p(n) \sim (\pi/\sqrt{6})^{[a/2]+1}\, u(a)/n^{([a/2]+1)/2}$ as $n \to \infty$, where $u(a)$ is an integer such that $\log u(a) \sim (a/2)\log a$ as $a \to \infty$. One shows that, when n is big, almost all partitions π of n such that $\Sigma(\pi) \cap \{1,2,\ldots,a\} = \emptyset$ verify $\Sigma(\pi) = \{a+1, a+2, a+3, \ldots, n-a-1\}$.

Texte reçu le 3 février 1988.

J.DIXMIER, 11 bis rue du Val de Grâce, 75005 Paris, France.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION ET NOTATIONS.

0.1. Une partition est une suite $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ où les a_i sont des entiers tels que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_s > 0$. On admet la partition vide. Les a_i s'appellent les sommants de π. Si $a_1 + \ldots + a_s = n$, n s'appelle la somme de π et se note $\sigma(\pi)$; on dit que π est une partition de n.

On appelle sous-partition de π toute sous-suite $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_t})$ où $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$. Les sommes des sous-partitions de π s'appellent les sous-sommes de π. On note $\Sigma(\pi)$ l'ensemble des sous-sommes de π. On dit qu'un nombre est représenté par π s'il appartient à $\Sigma(\pi)$. On a

$$\Sigma(\pi) \subset \{0,1,2,\ldots,n\} \quad , \quad 0 \in \Sigma(\pi) \quad , \quad n \in \Sigma(\pi)$$

et $\Sigma(\pi)$ est symétrique, c'est-à-dire que

$$s \in \Sigma(\pi) \Rightarrow n-s \in \Sigma(\pi) .$$

Si π, π' sont des partitions, on note $\pi \amalg \pi'$, et l'on appelle somme directe de π et π', la suite obtenue en juxtaposant π et π', puis en réarrangeant dans l'ordre décroissant. Par exemple, $(3,2,1) \amalg (4,2) = (4,3,2,2,1)$.

0.2. Si $A, B \subset \mathbb{Z}$, $A + B$ (resp. $A - B$) désigne l'ensemble des $a + b$ (resp. $a - b$) où $a \in A$, $b \in B$. Rien à voir donc avec la différence ensembliste de 2 ensembles X et Y, qui est notée $X \setminus Y$. On écrit souvent x au lieu de $\{x\}$.

0.3. Les intervalles que nous considérerons seront toujours des intervalles finis d'entiers, i.e. des ensembles de la forme $\{x,x+1,\dots,y\}$ où $x,y \in \mathbb{Z}$, $x \leq y$. Un tel intervalle se note $[x,y]$.

Soit A une partie finie de $\mathbb{Z}$. Alors A s'écrit de manière unique

$$[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \dots \cup [a_{p+1},b_{p+1}]$$

où $a_i \leq b_i$ pour tout i , et $b_i + 2 \leq a_{i+1}$ pour $i \leq p$. On dira que $[a_i,b_i]$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de A . Posons $J_1 = [b_1+1,a_2-1]$, $J_2 = [b_2+1,a_3-1],\dots,$ $J_p = [b_p+1,a_{p+1}-1]$. On dira que J_i est le $i^{\text{ème}}$ trou de A .

0.4. Soit π une partition de n . Les composantes et les trous de $\Sigma(\pi)$ seront aussi appelés les composantes et les trous de π . Soit $\Sigma(\pi) = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{p+1}$ la décomposition de $\Sigma(\pi)$ en ses composantes. On a $0 \in I_1$, $n \in I_{p+1}$, $I_1 = n-I_{p+1}$, $I_2 = n-I_p,\dots$ Soient $J_1,J_2,\dots,J_p$ les trous de π . On a $J_1 = n-J_p$, $J_2 = n-J_{p-1},\dots$

Indépendamment de ces propriétés de symétrie, la répartition des trous et des composantes de $\Sigma(\pi)$ est loin d'être quelconque. En effet, pour n fixé, il y a $p(n)$ partitions de n , donc au plus $p(n)$ ensembles $\Sigma(\pi)$ possibles (et en fait beaucoup moins); or le nombre de sous-ensembles symétriques de $[0,n]$ est beaucoup plus grand que $p(n)$. Nous verrons que $\text{Card } I_j \geq \text{Card } I_1$ pour tout j (2.2), et que, si l'on pose $I_1 = [0,a]$ et $I_2 = [b,c]$, la connaissance de a et b impose des conditions assez délicates à c (2.9).

On a montré dans [1] que, si l'on note ρ la sous-partition de π formée des sommants $\leq a$ (où $I_1 = [0,a]$), alors $\sigma(\rho) = a$. Nous verrons en 2.11 un résultat analogue faisant intervenir I_1 et I_2.

0.5. Une partition π de n est dite pratique si $\Sigma(\pi) = [0,n]$. Cette notion, moins la terminologie, a été introduite dans [2] . On donnera au chap.I diverses caractérisations des partitions pratiques, par exemple (1.7) :

pour qu'une partition $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ soit pratique, il faut et il suffit que $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_s + 1$ pour $i = 1,2,\ldots,s$.

En fait, on étudie au chap.I une généralisation des partitions pratiques, à savoir les partitions qui n'ont pas de trop longs trous. Dans ce contexte, on généralise le développement asymptotique, établi dans [1], du nombre de partitions non pratiques (1.12).

0.6. Au chap.III, on donne quelques résultats sur les partitions à 1 ou 2 trous.

0.7. Fixons un ensemble fini Q d'entiers > 0 . Soit $p(n;Q)$ le nombre de partitions de n qui ne représentent aucun élément de Q . Au chap. IV, nous étudions le comportement asymptotique de $p(n;Q)$ quand $n \to \infty$. Voici quelques-uns des résultats. Soit a un entier ≥ 1 . Alors (notant $[x]$ la partie entière de x), on a (4.7, 4.2)

$$\frac{p(n;\{a\})}{p(n)} \sim \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{[a/2]+1} \frac{u(a)}{n^{([a/2]+1)/2}} \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

où $u(a)$ est un entier calculé au chap.V ; on a $\log u(a) \sim \frac{1}{2} a \log a$ quand $a \to \infty$ (5.30).

Si $a \geq 3$, on a

$$\frac{p(n;\{a-1,a\})}{p(n)} \sim \frac{\alpha}{n^{([a/2]+2)/2}} .$$

Si a est pair ≥ 6 ,

$$\frac{p(n;\{a-2,a\})}{p(n)} \sim \frac{\beta}{n^{([a/2]+2)/2}} .$$

Si a est impair ≥ 3,

$$\frac{p(n;\{a-2,a\})}{p(n)} \sim \frac{\gamma}{n^{([a/2]+1)/2}}$$

(α,β,γ nombres > 0 dépendant de a). Cf.4.32.

Comme dans [1] , on pose $p(n;\{1,2,\ldots,m-1\}) = r(n,m)$.

0.8. Erdös et Szalay ont montré que presque toute partition de n est pratique (cf. [2] , th.1 pour un énoncé précis, et [1], th.2, pour un renforcement du résultat). Au chap.VI, nous généralisons ce phénomène au cas des partitions de n n'admettant pas les sommants $1,2,\ldots,a$ (a fixé) :

presque toutes ces partitions représentent $a+1, a+2,\ldots,n-a-1$.

0.9. Dans certaines sections de ce mémoire, nous écrirons des partitions comme des suites d'entiers non nécessairement décroissantes; il sera sous-entendu alors qu'il s'agit du réarrangement décroissant de ces suites. Il serait en effet parfois très malcommode de s'imposer le respect absolu de la définition 0.1. Cela n'entraînera aucun risque de confusion.

I. Généralisation des partitions pratiques.

1.1. Soient π une partition de n , a un entier ≥ 1 . Il est clair que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) π n'a aucun trou de cardinal $\geq a$;

(ii) tout intervalle de a entiers $> -a$ et $< n+a$ possède un élément représenté par π ;

(iii) $\cup_{x \in \Sigma(\pi)} [x, x+a-1] = [0, n+a-1]$

(iii bis) $\cup_{x \in \Sigma(\pi)} [x-a+1, x] = [-a+1, n]$.

1.2. Définition. On dit que π est a-pratique si π vérifie les conditions de 1.1.

Les partitions 1-pratiques ne sont autres que les partitions pratiques.

Même pour $a = 1$, les prop. 1.5, 1.7, 1.8 sont nouvelles. Par contre, les prop. 1.9, 1.10, 1.12 étaient déjà connues pour $a = 1$ ([1], lemme 4 et th. 2).

1.3. Lemme. Soient $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ une partition, $\pi' = (a_2, \ldots a_s)$, et a un entier ≥ 1 . On suppose que π' est a-pratique, et que $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. Alors π est a-pratique.

Soit $n = a_1 + \ldots + a_s$. Soit I un intervalle de a entiers > 0 et $< n$. Si $I \leq a_2 + \ldots + a_s + a - 1$, I possède un élément représenté par π' donc par π . Sinon, le plus petit élément c de l'intervalle $n-I$ vérifie

$$c < n - (a_2 + \ldots + a_s + a - 1) = a_1 - a + 1 \leq a_2 + \ldots + a_s + 1$$

donc le plus grand élément de $n-I$ est $< a_2 + \ldots + a_s + a$. D'après ce qui précède, $n-I$ possède un élément représenté par π , donc I possède un élément représenté par π .

1.4. Lemme. Soient $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$, π' et a comme en 1.3. On suppose que tout intervalle de a entiers > 0 et $< a_1$ possède *un élément représenté par* π . *Alors* $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$, *et tout intervalle de* a *entiers* > 0 *et* $< a_2$ *possède un élément représenté par* π' .

Si $a_1 > a_2 + \ldots + a_s + a$, l'intervalle $[a_2 + \ldots + a_s + 1,\ a_2 + \ldots + a_s + a]$ ne possède aucun élément représenté par π , contrairement à l'hypothèse. Donc $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. La deuxième assertion du lemme est évidente.

1.5. *Proposition*. *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ *une partition*, a *un entier* ≥ 1 . *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) π *est* a-*pratique*,

(ii) *tout intervalle de* a *entiers* > 0 *et* $< a_1$ *possède un élément représenté par* π .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) . Supposons vérifiée la condition (ii).

Si $s = 1$, on a $a \geq a_1$, et il est clair que π est a-pratique.

Supposons $s > 1$, et raisonnons par récurrence sur s . Soit $\pi' = (a_2, \ldots, a_s)$. D'après 1.4 et l'hypothèse de récurrence, π' est a-pratique, et $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. Donc π est a-pratique (1.3).

1.6. *Lemme* . *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$, π' *et* a *comme en* 1.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) π *est* a-*pratique* ;

(ii) π' *est* a-*pratique et* $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de 1.3.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que π soit a-pratique. Alors $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$ (1.4). D'autre part, tout intervalle de a entiers > 0 et $< a_2$ possède un élément représenté par π' (1.4), donc π' est a-pratique (1.5).

1.7. *Proposition*. *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ *une partition,* a *un entier* ≥ 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) π *est a-pratique;*

(ii) $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_s + a$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Pour $s = 1$, la condition (ii) signifie que $a_1 (=a_s) \leq a$, et la proposition est évidente. Le cas général en résulte par récurrence sur s grâce à 1.6.

La proposition 1.7 fournit un procédé rapide pour construire les partitions a-pratiques par récurrence sur leur longueur. Voici par exemple les partitions pratiques de longueur ≤ 4 :

1

1,1 2,1

1,1,1;2,1,1;3,1,1;2,2,1;3,2,1;4,2,1

1,1,1,1;2,1,1,1;3,1,1,1;4,1,1,1;2,2,1,1;3,2,1,1;4,2,1,1;5,2,1,1; 3,3,1,1;
4,3,1,1;5,3,1,1;6,3,1,1;2,2,2,1;3,2,2,1;4,2,2,1;5,2,2,1;6,2,2,1;3,3,2,1;
4,3,2,1;5,3,2,1;6,3,2,1;7,3,2,1;4,4,2,1;5,4,2,1;6,4,2,1;7,4,2,1;8,4,2,1

1.8. *Proposition*. *Soit* $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *une partition a-pratique.*

(i) $a_1 + \ldots + a_s \leq (2^s - 1)a$.

(ii) Pour que $a_1 + \ldots + a_s = (2^s - 1)a$, il faut et il suffit que π soit la partition $(2^{s-1}a, 2^{s-2}a, 2^{s-3}a, \ldots, a)$ (laquelle est a-pratique).

C'est évident si $s = 1$. Supposons $s > 1$ et raisonnons par récurrence sur s.

D'après 1.6 et l'hypothèse de récurrence, on a

(1) $a_2 + \ldots + a_s \leq (2^{s-1} - 1)a$

(2) $a_1 \leq (2^{s-1} - 1)a + a = 2^{s-1}a$

donc $a_1 + \ldots + a_s \leq (2^{s-1} - 1 + 2^{s-1})\, a = (2^s - 1)a$.

La partition $(2^{s-1}, 2^{s-2}, \ldots, 1)$ est pratique : cela résulte de la représentation binaire des entiers. Donc la partition $(2^{s-1}a, 2^{s-2}a, \ldots, a)$ est a-pratique.

Si $a_1 + \ldots + a_s = (2^s - 1)a$, il résulte de (1) et (2) que

$a_2 + \ldots + a_s = (2^{s-1} - 1)a$ et $a_1 = 2^{s-1}a$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $a_2 = 2^{s-2}a, a_3 = 2^{s-3}a, \ldots, a_s = a$.

1.9. Proposition. Soient $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ une partition, a et n des entiers ≥ 1. On fait les hypothèses suivantes :

(i) tout intervalle de a entiers > 0 et $< n+a$ possède un élément représenté par π ;

(ii) l'intervalle $[n+1, n+a]$ ne possède aucun élément représenté par π,

(iii) $a_1 \leq n$.

Alors $a_1 + \ldots + a_s = n$.

D'après (i),(iii) et 1.5, π est a-pratique. Soit $m = a_1 + \ldots + a_s$. Puisque π est a-pratique, la condition (ii) entraîne $m \leq n$. D'après (i), $m \geq n$.

1.10. Proposition. *Soient a,b,n des entiers ≥ 1. Soit E l'ensemble des partitions π de n telles que le premier trou de π de cardinal $\geq a$ commence en b. Soit E' l'ensemble des partitions de $n-b+1$ dont tous les sommants sont $\geq a+b$. Soit E'' l'ensemble des partitions a-pratiques de $b-1$.*

Pour tout $\pi \in E$, soit π' (resp. π'') la sous-partition de π formée des sommants $\geq a+b$ (resp. $\leq b-1$). Alors l'application $\pi \mapsto (\pi', \pi'')$ est une bijection de E sur $E' \times E''$. La bijection réciproque est l'application $(\pi', \pi'') \mapsto \pi' \amalg \pi''$.

Soit $\pi \in E$. Les hypothèses de la proposition 1.9, où l'on remplace π, a, n par $\pi'', a, b-1$, sont vérifiées. Donc $\pi'' \in E''$. Alors $\sigma(\pi') = n - \sigma(\pi'') = n-b+1$, donc $\pi' \in E'$.

Comme $b, b+1, \ldots, b+a-1 \notin \Sigma(\pi)$, il est clair que $\pi = \pi' \amalg \pi''$. Donc l'application $\pi \mapsto (\pi', \pi'')$ est injective.

Enfin, soient $\pi' \in E'$, $\pi'' \in E''$. Posons $\pi = \pi' \amalg \pi''$. Alors $\sigma(\pi) = n$. Tout intervalle de a entiers > 0 et $< b-1+a$ possède un élément représenté par π'' donc par π. D'autre part, on a $b, b+1, \ldots, b+a-1 \notin \Sigma(\pi)$. Donc $\pi \in E$, et l'image de π par l'application de la proposition est (π', π'').

1.11. Lemme. *Soit c un entier ≥ 1. Alors*

$$\frac{\Sigma_{c \leq b \leq n/2}\, p(b)\, r(n, b+1)}{p(n)} = O(n^{-c/2}) \quad \textit{quand} \quad n \to \infty .$$

Cela est établi dans [1], upper bound of S_2, S_3, S_4.

1.12. Proposition. Soit a un entier fixé ≥ 1. Notons $M(n,a)$ le nombre de partitions de n qui ne sont pas a-pratiques. Quand $n \to \infty$, $M(n,a)/p(n)$ a un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-1/2}$. Le premier terme de ce développement est $\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^a a! \frac{1}{n^{a/2}}$.

Soit $X(n;a,b)$ le nombre de partitions π de n telles que le premier trou de π de cardinal $\geq a$ commence en b. Si π est une partition de n non a-pratique, elle admet des trous de cardinal $\geq a$; par symétrie, l'un de ces trous commence en un nombre $\leq n/2$. Donc

$$M(n,a) = \Sigma_{1 \leq b \leq n/2} X(n;a,b) .$$

Notons $p(x;y)$ le nombre de partitions y-pratiques de x. D'après 1.10, on a

$$X(n;a,b) = p(b-1;a) r(n-b+1,a+b),$$

donc

$$M(n,a) = \sum_{1 \leq b \leq n/2} p(b-1;a) r(n-b+1,a+b) .$$

Pour a et b fixés, $r(n-b+1,a+b)/p(n)$ admet, d'après [1], un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-1/2}$, qui commence par

$$(a+b-1)! \left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{a+b-1} .$$

Fixons provisoirement un entier $c > 0$. On a

$$\Sigma_{c \leq b \leq n/2} p(b-1;a) r(n-b+1,a+b) \leq \Sigma_{c \leq b \leq n/2} p(b) r(n,b+1)$$
$$= p(n) O(n^{-c/2})$$

d'après 1.11. Donc $M(n,a)/p(n)$ a un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-1/2}$, et le premier terme de ce développement est le même que celui de $r(n,a+1)/p(n)$, i.e. $a!\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^a$. (On a suivi la même marche que dans [1]).

II. Les deux premières composantes de $\Sigma(\pi)$.

2.1. Comme on en fera souvent usage, explicitons d'abord en changeant un peu les notations, un cas particulier de 1.10 qui est déjà dans [1] :

Proposition. *Soient* a,n *des entiers* ≥ 0 . *Soit* E *l'ensemble des partitions de* n *dont la première composante est* $[0,a]$. *Soit* E' *l'ensemble des partitions de* $n-a$ *dont les sommants sont* $\geq a+2$. *Soit* E'' *l'ensemble des partitions pratiques de* a .

Pour tout $\pi \in E$, *soit* π' (*resp.* π'') *la sous-partition de* π *formée des sommants* $\geq a+2$ (resp. $\leq a$). *Alors l'application* $\pi \mapsto (\pi', \pi'')$ *est une bijection de* E *sur* $E' \times E''$.

2.2. *Corollaire*. *Soient* π *une partition, et* $I_1, I_2, \ldots$ *ses composantes successives*. *Alors* $\mathrm{Card}\ I_k \geq \mathrm{Card}\ I_1$ *pour tout* k .

En effet, posons $I_1 = [0,a]$. Introduisons π', π'' comme dans 2.1. Alors

$$\Sigma(\pi) = \Sigma(\pi') + \Sigma(\pi'') = \Sigma(\pi') + [0,a] = \cup_{x\in\Sigma(\pi')}[x,x+a] .$$

2.3. *Proposition*. *Soient* π *une partition*, $[0,a]$ *et* $[b,c]$ *ses deux premières composantes (avec donc* $b \geq a+2$). *Introduisons* π', π'' *comme en* 2.1.

(i) b *est le plus petit sommant de* π' .

(ii) $c \geq b+a$.

En effet, tout sommant de π' est $\geq a+2$, et appartient à $\Sigma(\pi)$, donc est $\geq b$. D'autre part, $b \in \Sigma(\pi)$, donc $b = b' + b''$ avec $b' \in \Sigma(\pi')$, $b'' \in \Sigma(\pi'') = [0,a]$. Si $b' = 0$, on obtient $b \leq a$, contradiction. Donc b' est une somme non vide de sommants de π', qui sont tous $\geq b$. On voit que $b = b'$ est un sommant de π'. Cela prouve (i). L'assertion (ii) résulte de 2.2.

2.4. Lemme. Soient $a, e_1, e_2, \ldots, e_q$ des entiers ≥ 0. On suppose :

(3) $e_i \leq e_{i+1} \leq e_i + a + 1$ pour $0 \leq i < q$.

(4) $e_1 + e_2 \leq e_q + a + 1$.

Soit ρ la partition $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$. Alors

$$[0,a] + \Sigma(\rho) = [0,a] \cup [e_1, e_2+e_3+\ldots+e_q+a] \cup [e_1+e_2+\ldots+e_q, e_1+e_2+\ldots+e_q+a]$$

Soit Δ_i l'ensemble des sommes des sous-suites à i éléments de ρ. Soit $\Delta'_i = [0,a] + \Delta_i$. On a

$$\Sigma(\rho) = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_q$$

$$[0,a] + \Sigma(\rho) = \Delta'_0 \cup \Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \ldots \cup \Delta'_q$$

$$\Delta'_0 = [0,a] \qquad \Delta'_q = [e_1+e_2 \ldots + e_q, e_1 + e_2 + \ldots + e_q + a].$$

Soient $i \in \{1,2, \ldots, q-1\}$, et $\sigma \in \Delta'_i$. On a

$$\sigma = e_{j_1} + e_{j_2} + \ldots + e_{j_i} + a'$$

avec $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leq q$, $0 \leq a' \leq a$; donc $e_1 + e_2 + \ldots + e_i$ est le plus petit élément de Δ'_i et $e_{q-i+1} + e_{q-i+2} + \ldots + e_q + a$ est le plus grand élément de Δ'_i.

Supposons $\sigma < e_{q-i+1} + e_{q-i+2} + \ldots + e_q + a$, et prouvons que $\sigma + 1 \in \Delta'_i$. C'est clair si $a' < a$. Supposons $a' = a$.

Alors $e_{j_1} + e_{j_2} + \dots + e_{j_i} < e_{q-i+1} + e_{q-i+2} + \dots + e_q$. Il existe donc un entier r tel que

$e_{j_i} = e_q$, $e_{j_{i-1}} = e_{q-1}$, ..., $e_{j_{i-r+1}} = e_{q-r+1}$, $e_{j_{i-r}} < e_{q-r}$.

(On peut avoir $r = 0$, c'est-à-dire $e_{j_i} < e_q$). Sans changer σ, on peut supposer que $j_i = q$, $j_{i-1} = q - 1$, ..., $j_{i-r+1} = q - r + 1$. Soit k le plus petit entier $> j_{i-r}$ tel que $e_{j_{i-r}} < e_k$; puisque $e_{j_{i-r}} < e_{q-r}$, on a $k \le q-r$. D'autre part, $e_k \le e_{j_{i-r}} + a + 1$ d'après (3), donc

$$0 \le a + e_{j_{i-r}} - e_k + 1 \le a.$$

Alors

$$\sigma + 1 = (e_{j_1} + \dots + e_{j_{i-r-1}} + e_k + e_{j_{i-r+1}} + \dots + e_{j_i}) + (a + e_{j_{i-r}} - e_k + 1)$$

$$\in \Delta_i + [0,a] = \Delta_i'.$$

Ce qui précède prouve que

(5) $\Delta_i' = [e_i + e_2 + \dots + e_i \, , \, e_{q-i+1} + e_{q-i+2} + \dots + e_q + a]$.

D'après l'hypothèse (4), on a

$e_1 + e_2 + e_3 \le e_{q-1} + e_q + a + 1$

$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \le e_{q-2} + e_{q-1} + e_q + a + 1$

(6) $e_1 + e_2 + \dots + e_i \le e_{q-i+2} + e_{q-i+3} + \dots + e_q + a + 1$

si $i \le q-i+2$ (car $e_3 \le e_{q-1}$, $e_4 \le e_{q-2}$, ..., $e_i \le e_{q-i+2}$).

Mais, si $i > q-i+2$, les deux membres de (6) ont des termes communs, et l'inégalité (6) se réduit, pour $i \le q-1$, à l'une des inégalités déjà établies. Donc (6) est vrai pour $2 \le i \le q-1$.

Les relations (5) et (6) prouvent que :

origine de $\Delta'_i \leq$ (extrémité de Δ'_{i-1}) + 1 pour $2 \leq i \leq q-1$.

Donc

$$\Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \ldots \cup \Delta'_{q-1} = [e_1, e_2+e_3+\ldots+e_q+a].$$

2.5. _Lemme_. _Soient_ π _une partition_, $[0,a]$ _et_ $[b,c]$ _ses deux premières composantes_. _Soit_ k _un entier tel que_

(7) $1 \leq k \leq b-a-1$

(8) $c+1, c+2, \ldots, c+k+1 \notin \Sigma(\pi)$.

Soit $\tilde{\pi}$ _la partition_ $(\pi, c-a+1, c-a+2, \ldots, c-a+k)$. _Alors les deux premières composantes de_ $\tilde{\pi}$ _sont_ $[0,a]$ _et_ $[b,c+k]$.

On a $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup A$, où, d'après (8), tout élément de A majore $c+k+2$. Ensuite,

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = \Sigma(\pi) \cup (\Sigma(\pi)+c-a+1) \cup (\Sigma(\pi)+c-a+2) \cup \ldots \cup (\Sigma(\pi)+c-a+k) \cup B$$

où tout élément de B majore $(c-a+1) + (c-a+2) = 2c-2a+3$. Or, d'après 2.3 ,

$$\begin{aligned} 2c-2a+3 &\geq c+(b+a)-2a+3 = c+b-a+3 \\ &\geq c+k+4 && \text{d'après (7)} . \end{aligned}$$

Pour $i = 1,2,\ldots,k$, on a

$$\begin{aligned} b+(c-a+i) &\geq (b-a)+(c+1) \\ &\geq c+k+2 && \text{d'après (7)} . \end{aligned}$$

Donc

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = \Sigma(\pi) \cup [c-a+1, c+1] \cup [c-a+2, c+2] \cup \ldots \cup [c-a+k, c+k] \cup C$$

où tout élément de C majore $c+k+2$. Alors

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = [0,a] \cup [b,c] \cup [c-a+1,c+k] \cup A \cup C$$
$$= [0,a] \cup [b,c+k] \cup A \cup C$$

d'où le lemme.

2.6. Lemme. Soit π une partition à deux trous, de sorte que $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a,b+c]$, avec $a \geq 0, b \geq a+2, c \geq b$. Soit d un entier tel que $b \leq d \leq c-b+1$. Soit $\tilde{\pi} = (\pi,d)$. Alors

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = [0,a] \cup [b,c+d] \cup [c+d+b-a,c+d+b] .$$

On a

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a,b+c] \cup [d,d+a] \cup [b+d,c+d] \cup [b+c-a+d,b+c+d] .$$

Or :

$$b \leq d \leq d+a \leq d+b-2 \leq c \text{ , donc } [d,d+a] \subset [b,c] ;$$
$$b \leq b+d \leq c+1 \text{ , donc } [b,c] \cup [b+d,c+d] = [b,c+d];$$
$$b \leq b+c-a \leq b+c \leq d+c, \text{ donc } [b+c-a,b+c] \subset [b,c+d]$$

d'où le lemme.

2.7. Lemme. Soient π,a,b,c comme au lemme 2.6. On suppose :

(9) $c \geq 3b-2$.

Soient h un entier ≥ 0, b' un entier tel que $b \leq b' \leq 2b-1$, et $\tilde{\pi}$ la partition $(\pi,b,b,\dots,b,b')$, où l'on a écrit h fois l'entier b. Alors

$$\Sigma(\tilde{\pi}) = [0,a] \cup [b,c+hb+b'] \cup [c+hb+b'+b-a,c+hb+b'+b] .$$

Soit $\pi_1 = (\pi,b,b,\dots,b)$, où l'on a écrit h fois l'entier b. On a $b \leq c-b+1$ à cause de (9); donc, en appliquant h fois le lemme 2.6, on a

$$\Sigma(\pi_1) = [0,a] \cup [b,c+hb] \cup [c+hb+b-a,c+hb+b] .$$

On a

$$b \leq b' \leq 2b-1$$
$$\leq c-b+1 \qquad \text{d'après (9)}$$
$$\leq (c+hb)-b+1 .$$

On peut donc appliquer le lemme 2.6 à (π_1,b'), d'où le lemme.

2.8. L'énoncé de la prop. 2.9 étant un peu délicat, introduisons d'abord soigneusement une certaine fonction $c_o(a,b)$ (avec a entier ≥ 0, b entier $\geq a+2$) qui joue un rôle dans cet énoncé.

Soit $q = q(a,b)$ l'entier défini par :

(10) $q(a+1) < b \leq (q+1)(a+1)$.

Comme $b > a+1$, on a $q \geq 1$.

Posons maintenant :

$$c_o = c_o(a,b) = (2b-(a+1))+(2b-2(a+1))+(2b-3(a+1)) +\dots+(2b-q(a+1)) + b + a$$
$$= (2q+1)b - \frac{q(q+1)}{2}(a+1) + a .$$

Comme $q \geq 1$, on a

(11) $c_o \geq 2b-(a+1)+b+a = 3b-1$.

Si $a = 0$, on a $q = b-1$, et $c_o = (2b-1)b - \frac{1}{2}(b-1)b = \frac{1}{2}b(3b-1)$.

2.9. Proposition. *Soient a,b,c des entiers tels que $a \geq 0$, $b \geq a+2$, $c \geq b$; soit c_o comme en 2.8.*

Existe-t-il une partition admettant $[0,a]$ et $[b,c]$ pour deux premières composantes ?

(i) <u>Si</u> $b \leq c \leq b+a-1$, <u>réponse non</u>.

(ii) <u>Si</u> $b+a \leq c \leq 2b+a-1$, <u>réponse oui</u>.

(iii) <u>Si</u> $2b+a \leq c \leq c_0-1$, <u>réponse non</u>.

(iv) <u>Si</u> $c \geq c_0$, <u>réponse oui</u>, <u>sauf si l'on a à la fois</u> $a=0$ <u>et</u> $c = c_0+b-1$ $(= \frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}b-1)$; <u>si l'on est dans cette dernière situation</u>, <u>réponse non</u>.

α) L'assertion (i) résulte de 2.3 (ii).

β) Supposons :

(12) $b+a \leq c \leq b+2a+1$.

Soit π'' une partition pratique de a . Posons $\pi = (\pi'',b,c-a)$. On a

$$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,b+a] \cup [c-a,c] \cup [b+c-a,b+c] .$$

Or $b \leq c-a \leq b+a+1$ d'après (12), donc

$$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a,b+c] .$$

Comme $b+c-a \geq c+2$, on voit que les deux premières composantes de π sont $[0,a]$ et $[b,c]$.

γ) Supposons :

(13) $b+2a+1 \leq c \leq 2b+a-1$.

(Notons que $2b+a-1 \geq b+2a+1$). Soit π'' une partition pratique de a . Posons $\pi = (\pi'',c-a,c-a-1,c-a-2,\ldots,b+a+1,b)$ (notons que $c-a \geq b+a+1$ à cause de (13)). On a

$$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b+a+1,c] \cup [b,b+a] \cup A = [0,a] \cup [b,c] \cup A ,$$

où tout élément de A est $\geq (b+a+1)+b \geq c+2$ (d'après (13)).

Donc les deux premières composantes de π sont $[0,a]$ et $[b,c]$.

Les parties (β) et (γ) de la preuve établissent (ii).

δ) Dans (δ), on suppose $c \geq 2b+a$. Soit π une partition dont les deux premières composantes sont $[0,a]$ et $[b,c]$. Soient π',π'' comme en 2.1.

Considérons les sommants de π qui appartiennent à $[b,2b-1]$, et ne tenons pas compte de leurs multiplicités; nous obtenons une suite

$$b_o < b_1 < b_2 <\ldots< b_r$$

avec $b_o = b, b_r \leq 2b-1$. Montrons que :

(14) $b_{i+1} \leq b_i + a + 1$ pour $0 \leq i < r$,

(15) $2b \leq b_r + a + 1$.

Supposons $b_{i+1} \geq b_i + a + 2$. On a $b \leq b_i \leq b_i + a + 1 \leq b_{i+1} \leq 2b-1 \leq c$ donc $b_i + a + 1 \in \Sigma(\pi)$. Soit $b_i + a + 1 = \beta' + \beta''$ avec $\beta' \in \Sigma(\pi')$, $\beta'' \in \Sigma(\pi'')$, donc $0 \leq \beta'' \leq a$. Si $\beta' = 0$, on a $b_i + a + 1 \leq a$, contradiction. Supposons que β' soit un sommant de π' ; comme $\beta' \leq b_i + a + 1 < b_{i+1}$, on a $\beta' \leq b_i$ donc $b_i + a + 1 = \beta' + \beta'' \leq b_i + a$, contradiction. Enfin, si β' fait intervenir au moins deux sommants de π', on a $2b \leq \beta' \leq b_i + a + 1 \leq b_{i+1} \leq 2b - 1$, contradiction. On a donc prouvé (14).

On a $b \leq 2b-1 \leq c$, donc $2b-1 \in \Sigma(\pi)$. Soit $2b-1 = \beta'+\beta''$ avec $\beta' \in \Sigma(\pi')$, $0 \leq \beta'' \leq a$. Si $\beta' = 0$, on a $2b-1 \leq a$, contradiction. Si β' fait intervenir au moins deux sommants de π', on a $2b \leq \beta' \leq 2b-1$, contradiction. Donc β' est un sommant de π', et $\beta' \leq 2b-1$, donc $\beta' \leq b_r$, donc $2b-1 = \beta' + \beta'' \leq b_r + a$. Cela prouve (15).

D'après (14) et (15), on a

$$2b \leq b + (r+1)(a+1)$$

ou $b \leq (r+1)(a+1)$. Compte tenu de (10), on voit que

$$(16) \quad r \geq q \geq 1 .$$

D'autre part, (14) et (15) entraînent aussi :

$$b_r \geq 2b-(a+1),\ b_{r-1} \geq 2b-2(a+1), \ldots, b_1 \geq 2b - r(a+1) ,$$

donc, compte tenu de (16),

$$(17) \quad \begin{aligned} & b_r + b_{r-1} + \ldots + b_1 + b_o + a \\ & \geq 2b-(a+1) + 2b-2(a+1) + \ldots + 2b - q(a+1) + b + a \\ & = c_o(a,b) . \end{aligned}$$

Soit ρ la partition $(\pi'', b_o, b_o, b_1, b_2, \ldots, b_r)$. D'après (14), (15) et le lemme 2.4, on a

$$(18) \quad \begin{aligned} \Sigma(\rho) = {} & [0,a] \cup [b_o, b_o+b_1+b_2+\ldots+b_r+a] \\ & \cup [2b_o+b_1+b_2+\ldots+b_r, 2b_o+b_1+b_2+\ldots+b_r+a] . \end{aligned}$$

Cela posé, distinguons deux cas.

Premier cas : b est sommant de π avec multiplicité ≥ 2. Alors $\Sigma(\pi) \supset \Sigma(\rho)$, donc, d'après (18),

$$\begin{aligned} c & \geq b_o + b_1 + \ldots + b_r + a \\ & \geq c_o(a,b) \qquad \text{d'après (17).} \end{aligned}$$

Deuxième cas : b est sommant de π avec multiplicité 1.

Considérons les sommants de π qui appartiennent à $[b, b+b_1-1]$, et ne tenons pas compte de leurs multiplicités; nous obtenons une suite

$$b_o < b_1 < b_2 < \ldots < b_r < \ldots < b_s$$

avec $b_s \leq b+b_1-1$. On a $b+b_1-1 \leq b+(b+a+1)-1 = 2b+a \leq c$ (d'après l'hypothèse de (δ)). D'autre part, un élément de $\Sigma(\pi')$ qui fait intervenir au moins deux sommants de π' est $\geq b+b_1$ (parce que b est sommant de multiplicité 1). Cela dit, on démontre, exactement comme pour (14) et (15), que

(19) $b_{i+1} \leq b_i + a + 1$ pour $0 \leq i < s$

(20) $b + b_1 \leq b_s + a + 1$.

Soit $\rho' = (\pi'', b_o, b_1, \ldots, b_s)$. D'après (19), (20) et le lemme 2.4, on a

$$\Sigma(\rho') = [0,a] \cup [b_o, b_1+b_2+\ldots+b_s+a]$$
$$\cup [b_o+b_1+\ldots+b_s, b_o+b_1+\ldots+b_s+a].$$

Comme $\Sigma(\pi) \supset \Sigma(\rho')$, on a $c \geq b_1+b_2+\ldots+b_s+a$. Les inégalités (19) et (20) entraînent

$$b_s \geq b+b_1-(a+1), b_{s-1} \geq b+b_1-2(a+1), \ldots, b_{s-q+1} \geq b+b_1-q(a+1)$$

donc $b_{s-q+1} > b_1$ d'après (10). Par suite

$$b_s + b_{s-1} + \ldots + b_1 + a$$

$$\geq (b+b_1)-(a+1)+(b+b_1)-2(a+1)+\ldots+(b+b_1)-q(a+1)+b_1+a$$

$$\geq c_o .$$

Ainsi, dans les deux cas, $c \geq c_o$. Nous avons donc prouvé que

$$c \geq 2b + a \Rightarrow c \geq c_o$$

d'où (iii).

ε) Soit π'' une partition pratique de a . Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq a + 1$. Posons :

$$\pi_i = (\pi'', b, b+i, 2b-q(a+1)+i, 2b-(q-1)(a+1)+i, 2b-(q-2)(a+1)+i, \ldots, 2b-2(a+1)+i, 2b-(a+1)+i).$$

On a $b+i < 2b-q(a+1)+i \leq b+i+(a+1)$ d'après (10), et $b+(b+i) \leq 2b-(a+1)+i+(a+1)$. Alors le lemme 2.4 entraîne que

$$\begin{aligned}\Sigma(\pi_i) &= [0,a] \cup [b, (b+i)+(2b-q(a+1)+i)+\ldots+(2b-(a+1)+i)+a] \\ &\quad \cup [2b+i+2b-q(a+1)+i+\ldots+2b-(a+1)+i, 2b+i+2b-q(a+1)+i+\ldots+2b-(a+1)+i+a] \\ &= [0,a] \cup [b, c_o+(q+1)i] \cup [c_o+(q+1)i+b-a, c_o+(q+1)i+b] .\end{aligned}$$

Compte tenu du lemme 2.5, on voit que, si

$$c = c_o + (q+1)i + k \qquad (0 \leq i \leq a+1, 0 \leq k \leq b-a-2),$$

la réponse est oui.

ζ) Avec les notations de (ε), on a

$$\Sigma(\pi_o) = [0,a] \cup [b,c_o] \cup [c_o+b-a, c_o+b].$$

Tout entier $\geq b$ peut s'écrire $hb + b'$ où h est un entier ≥ 0 et $b \leq b' \leq 2b-1$. D'autre part, $c_o \geq 3b-1$ d'après (11). Alors, le lemme 2.7 prouve que, si $c \geq c_o + b$, la réponse est oui.

θ) Terminons dans le cas où $a = 0$.

D'après (ε) et (ζ), si $c \geq c_o$ et $c \neq c_o+b-1$, la réponse est oui. Soit π une partition telle que les deux premières composantes de $\Sigma(\pi)$ soient $\{0\}$ et $[b, c_o+b-1]$. Nous allons aboutir à une contradiction.

On a

(21) $c_o + b \notin \Sigma(\pi)$.

Rappelons que $c_o \geq 3b-1$. Donc $b, b+1, \ldots, 2b-1 \in \Sigma(\pi)$. Comme aucun de ces nombres n'est somme de deux nombres $\geq b$, ces nombres sont des sommants de π . On a aussi $2b \in \Sigma(\pi)$, et donc, ou bien $2b$ est un sommant, ou bien b est sommant de multiplicité ≥ 2 . On a

$$c_o = (2b-1) + (2b-2) + \ldots + (b+1) + b .$$

Si b est sommant de multiplicité ≥ 2, on a

$$c_o + b = (2b-1) + (2b-2) + \ldots + (b+1) + b + b \in \Sigma(\pi)$$

Si $2b$ est sommant, on a

$$c_o + b = 2b + (2b-1) + (2b-2) + \ldots + (b+1) \in \Sigma(\pi) .$$

Dans les deux cas, on a contradiction à cause de (21).

ι) Terminons dans le cas où $q+1 \leq b-a-1$.

Soit b' un entier tel que $0 \leq b' \leq b$. Effectuons la division de b' par $q+1$:

$$b' = i(q+1)+k \quad , \quad 0 \leq k \leq q(\leq b-a-2) .$$

On a, d'après (10),

$$(q+1)(a+1) \geq b \geq b' \geq i(q+1)$$

donc $0 \leq i \leq a+1$. D'après (ε), si $c = c_o+b'$, la réponse est oui. Combinant avec (ζ), on voit que, si $c \geq c_o$, la réponse est oui.

λ) Les seuls cas qui restent à examiner sont ceux où

$$a \geq 1 \text{ , et } q+1 > b-a-1 .$$

Alors, d'après (10),

$$b > q(a+1) \geq (b-a-1)(a+1)$$

d'où $ab < (a+1)^2$. Si $b \geq a+3$, on en déduit que $a^2+3a < a^2+2a+1$, d'où $a = 0$, contradiction. Donc

$$b = a+2.$$

Alors $q = 1$ et $c_o = 2b-(a+1)+b+a = 3b-1$.

Soit π'' une partition pratique de a, et posons $\pi = (\pi'',b,b,b')$, où $b+1 \leqslant b' \leqslant 2b-1$. On a $b'-b \leq b-1 = a+1$, et $b+b \leq b'+b-1 = b'+(a+1)$, donc le lemme 2.4 est applicable et

$$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,b+b'+a] \cup [2b+b',2b+b'+a] .$$

Quand b' parcourt $[b+1,2b-1]$, $b+b'+a$ parcourt $[2b+1+b-2,3b-1+b-2] = [c_o,c_o+b-2]$. Combinant avec ζ), on voit que, si $c \geq c_o$ et $c \neq c_o+b-1$, la réponse est oui .

Soit $\pi_1 = (\pi'',b,b+1,2b-1)$. On a $2b-1-(b+1) = b-2 \leq a+1$, et $b+(b+1) \leq 3b-2 = (2b-1)+(a+1)$ (car $b \geq a+2 \geq 3$). Donc le lemme 2.4 est applicable et l'on a

$$\Sigma(\pi_1) = [0,a] \cup [b,3b+a] \cup [4b,4b+a].$$

Or $3b+a = 4b-2 = c_o+(b-1)$. Donc, pour $c \geq c_o$, la réponse est oui.

2.10. Lemme. Soient a,x,y,z des entiers tels que

$$a \geq 0,\ z \geq 2,\ a+z \leq x \leq y+z$$

Soit A l'ensemble symétrique d'entiers :

$$A = [0,a] \cup [x,x+y] \cup [x+y+z,x+2y+z] \cup [2x+2y+z-a,2x+2y+z]$$

<u>Soient</u> $e_1 < e_2 < \ldots < e_r$ <u>des entiers tels que</u> :

e_1 <u>approche à a près par défaut les nombres</u> $x+y+1$, $x+y+2$, $\ldots$, $x+y+\ell$,

e_2 <u>approche à a près par défaut les nombres</u> $x+y+\ell+1$, $x+y+\ell+2$, $\ldots$, $x+y+m$

...

e_r <u>approche à a près par défaut les nombres</u> $x+y+n+1$, $x+y+n+2$, $\ldots$, $x+y+z-1$.

<u>Soient</u> τ <u>la partition</u> $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$, <u>et</u> $\sigma = \sigma(\tau)$. <u>Alors</u>

$$A + \Sigma(\tau) = [0,a] \cup [x, x+2y+z+\sigma] \cup [2x+2y+z-a+\sigma\ ,\ 2x+2y+z+\sigma]\ .$$

Il est clair que

$[0,a]$, $[2x+2y+z-a+\sigma,\ 2x+2y+z+\sigma] \subset A + \Sigma(\tau)$

x, $x+2y+z+\sigma \in A + \Sigma(\tau)$

et que tout élément de $A + \Sigma(\tau)$ qui n'appartient, ni à $[0,a]$, ni à

$[2x+2y+z-a+\sigma\ ,\ 2x+2y+z+\sigma]$, appartient à $[x,\ x+2y+z+\sigma]$ (observons que $e_1 \geqslant x+y+1-a \geqslant x+1$ car $y \geqslant a$). Soit $u \in A + \Sigma(\tau)$ tel que

(22) $\quad u \notin [0,a]$

(23) $\quad u \neq x+2y+z+\sigma$

(24) $\quad u \notin [2x+2y+z-a+\sigma\ ,\ 2x+2y+z+\sigma]$.

Nous allons prouver que $u+1 \in A + \Sigma(\tau)$. Le lemme sera alors établi.

On a $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in A$, $u_2 \in \Sigma(\tau)$. Si $u_1 + 1 \in A$, notre assertion est claire. Nous pouvons donc nous limiter au cas où

$$u_1 = a \quad \text{ou} \quad x+y \quad \text{ou} \quad x+2y+z \quad \text{ou} \quad 2x+2y+z$$

$$u_2 = e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_s} \qquad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant r).$$

Supposons que la suite $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ ne soit pas de la forme $(j, j+1, j+2, \ldots, r)$. Il existe une suite $1 \leqslant i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_s \leqslant r$ telle que $i'_p = i_p$ sauf pour un indice p_o, et $i'_{p_o} = i_{p_o} + 1$. Alors

$$e_{i_1} + \ldots + e_{i_s} + 1 \leqslant e_{i'_1} + \ldots + e_{i'_s} \leqslant e_{i_1} + \ldots + e_{i_s} + a + 1$$

(car $e_2 \leq x+y+\ell+1 = (x+y+\ell-a) + (a+1) \leq e_1 + (a+1)$, et de même $e_{i+1} \leq e_i + (a+1)$ pour $i = 1,2, \ldots, r-1$). Donc

$$a + (e_{i_1} + \ldots + e_{i_s}) + 1 = e_{i'_1} + \ldots + e_{i'_s} + a' \quad \text{avec } 0 \leq a' \leq a$$

$$\in A + \Sigma(\tau)$$

$$(x+y) + (e_{i_1} + \ldots + e_{i_s}) + 1 = e_{i'_s} + \ldots + e_{i'_s} + x' \quad \text{avec } x \leq x+y-a \leq x' \leq x+y$$

$$\in A + \Sigma(\tau)$$

et l'on raisonne de même pour $x+2y+z+e_{i_1} + \ldots + e_{i_s}$ et $2x+2y+z+e_{i_1} + \ldots + e_{i_s}$.

Nous pouvons donc nous limiter au cas où

(25) $\qquad u_2 = e_i + e_{i+1} + \ldots + e_r \qquad$ pour un $i \in [1,r+1]$

(le cas $i = r+1$ signifiant qu'on considère la somme vide, i.e. $u_2 = 0$).

Nous avons 4 cas à examiner :

1) $u_1 = a$, u_2 est de la forme (25), et $u_2 \neq 0$ à cause de (22). Alors

$$u + 1 = a + e_{i+1} + \ldots + e_r + 1$$
$$= e_i + e_{i+1} + \ldots + e_{r-1} + (e_r + a + 1).$$

Or $e_r + a + 1 \in [x+y+z, x+y+z+a] \subset [x+y+z, x+2y+z] \subset A$, donc $u+1 \in A + \Sigma(\tau)$.

2) $u_1 = x+y$, u_2 est de la forme (25). Si $i > 1$, on a

$$u + 1 = (x+y+1) + e_i + e_{i+1} + \ldots + e_r$$
$$\in e_1 + [0,a] + e_i + e_{i+1} + \ldots + e_r \in A + \Sigma(\tau).$$

Si $i = 1$, on a

$$u + 1 = (x+y+1) + e_1 + e_2 + \ldots + e_r.$$

En regroupant le premier et le dernier terme de la somme, on obtient

$$u + 1 \in e_1 + e_2 + \ldots + e_{r-1} + (x+y+1+x+y+z-1-[0,a])$$

$$= e_1 + e_2 + \ldots + e_{r-1} + [2x+2y+z-a, 2x+2y+z] \subset A + \Sigma(\tau).$$

3) $u_1 = x+2y+z$, u_2 est de la forme (25). Alors $i > 1$ à cause de (23), et

$$u + 1 = x+2y+z+1+e_i + e_{i+1} + \ldots + e_r$$

$$\in y+z+e_1 + [0,a] + e_i + e_{i+1} + \dots + e_r.$$

Or $x \leqslant y+z$ et $y+z+a \leqslant x+y$, donc $y+z+[0,a] \subset [x,x+y] \subset A$, et $u+1 \in A + \Sigma(\tau)$.

4) $u_1 = 2x+2y+z$, u_2 est de la forme (25). Alors $i > 1$ à cause de (24), et

$$\begin{aligned} u+1 &= 2x+2y+z+1+e_i + e_{i+1} + \dots + e_r \\ &\in x+y+z+e_1 + [0,a] + e_i + e_{i+1} + \dots + e_r \\ &\subset [x+y+z, x+2y+z] + e_1 + e_i + e_{i+1} + \dots + e_r \subset A + \Sigma(\tau). \end{aligned}$$

2.11 Proposition. Soient π une partition, $[0,a]$ et $[b,c]$ ses 2 premières composantes. On suppose $c \geqslant 2b+a$. Soit ρ la sous-partition de π formée des sommants $\leqslant c-b$. Alors ρ est une partition à 2 trous, et $\Sigma(\rho) = [0,a] \cup [b,c'] \cup [b+c'-a, b+c']$ avec $c-b+a+2 \leqslant c' \leqslant c$.

Soient π', π'' comme en 2.1.

D'après la preuve de 2.9, (δ), π admet des sommants $> b$, et, si b_1 est le plus petit d'entre eux, on a

(26) $\qquad b + 1 \leqslant b_1 \leqslant b+a+1.$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-partitions π_1 de π telles que :

1) $\pi'' \subset \pi_1$; 2) b, b_1 sont des sommants de π_1 ; 3) π_1 est une partition à 2 trous.

On a $(\pi'', b, b_1) \in \mathcal{P}$, car

$$\begin{aligned} \Sigma(\pi', b, b_1) &= [0,a] \cup [b,b+a] \cup [b_1, b_1+a] \cup [b+b_1, b+b_1+a] \\ &= [0,a] \cup [b, b_1+a] \cup [b+b_1, b+b_1+a] \end{aligned}$$

d'après (26). Donc $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Soit τ un élément maximal de $\mathcal{P}$. Montrons que :

($\star$) Tout sommant de π majoré par $c-b$ est un sommant de τ.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors

(27) $\qquad \pi = (\tau, d_1, d_2, \dots, d_s)$ avec $s \geqslant 1$, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_s$, $d_1 \leqslant c-b$.

Nous allons aboutir à une contradiction.

Comme d_1 est un sommant de π', on a

(28) $$d_1 \geqslant b.$$

Il existe un entier g tel que

(29) $$\Sigma(\tau) = [0,a] \cup [b,g] \cup [b+g-a,\ b+g]$$

avec

(30) $$g \geqslant b_1 + a \geqslant b+a+1$$

(31) $$g \leqslant c$$

(car τ est une sous-partition à 2 trous de π contenant π'', b, b_1).

Posons $\tau' = (\tau, d_1)$. On a

(32) $$\Sigma(\tau') = [0,a] \cup [b,g] \cup [b+g-a,\ b+g] \cup [d_1,\ d_1+a]$$
$$\cup [b+d_1,\ g+d_1] \cup [b+g-a+d_1,\ b+g+d_1].$$

<u>1er cas</u>. $d_1 \leqslant g-b+1$.

On a $b+d_1 \leqslant b+(g-b+1) = g+1$, donc

$$[b,g] \cup [b+d_1,\ g+d_1] = [b, g+d_1].$$

On a $d_1 \geqslant b$ (cf. (28)) et $d_1+g \geqslant d_1+a$, donc

$$[d_1,\ d_1+a] \subset [b, d_1+g].$$

On a $b+g-a \geqslant b$ et $b+g \leqslant g+d_1$ (cf. (28)), donc

$$[b+g-a,\ b+g] \subset [b,\ g+d_1].$$

Ainsi,

$$\Sigma(\tau') = [0,a] \cup [b, g+d_1] \cup [b+g-a+d_1,\ b+g+d_1]$$

et τ' est une partition à 2 trous, contradiction.

<u>2ème cas</u>. $g-b+2 \leqslant d_1 \leqslant g-a$.

On a $d_1 \geqslant b$ et $d_1 + a \leqslant g$, donc

$$[d_1,\ d_1+a] \subset [b,g].$$

On a $b+g-a \geqslant b+d_1$ et $b+g \leqslant g+d_1$, donc

$$[b+g-a,\ b+g] \subset [b+d_1,\ g+d_1].$$

Ainsi,

$$\Sigma(\tau') = [0,a] \cup [b,g] \cup [b+d_1,\ g+d_1] \cup [b+g-a+d_1,\ b+g+d_1],$$

et, comme $b+d_1 \geqslant g+2$, τ' est une partition à 3 trous.

On a $b+d_1 \leqslant b+(c-b) = c$ (cf. (27)), donc $[b,\ b+d_1] \subset \Sigma(\pi)$. Soit $i \in$

$[g+1,\ b+d_1-1]$. On a $i \in \Sigma(\pi)$, $i \notin \Sigma(\tau')$. Dans l'expression de i comme somme de sommants de π, intervient l'un des nombres $d_2, d_3, \ldots, d_s$, disons $d_{j(i)}$; on a

$$i - d_{j(i)} \leqslant i - d_1 \leqslant (b+d_1-1) - d_1 = b-1.$$

Comme $i-d_{j(i)} \in \Sigma(\pi)$, on voit que $0 \leqslant i-d_{j(i)} \leqslant a$. En considérant, pour chaque $i \in [g+1,\ b+d_1-1]$, le sommant $d_j \leqslant i$ qui est le plus proche de i, on obtient une suite $e_1 < e_2 < \ldots < e_r$ telle que :

e_1 approche à a près par défaut les nombres $g+1,\ g+2,\ \ldots,\ g+k-1$

e_2 approche à a près par défaut les nombres $g+k,\ g+k+1,\ \ldots,\ g+k'$,

.....

Appliquons 2.10 avec

$A = \Sigma(\tau')$ $\quad x=b \quad y=g-b \quad z=d_1-g+b.$

On a

$z = d_1-g+b = d_1 - (g-b+2) + 2 \geqslant 2$

$y+z = d_1 \geqslant b = x$

$a+z = a+d_1-g+b \leqslant b=x.$

On voit que $(\tau',\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_r)$ est une partition à 2 trous, contradiction.

<u>3ème cas</u>. $g-a+1 \leqslant g+1$.

On a

$$\Sigma(\tau') = [0,a] \cup [b,d_1+a] \cup [b+g-a,\ g+d_1] \cup [b+g-a+d_1\ ,\ b+g+d_1].$$

Si $b+g-a \leqslant d_1+a+1$, τ' est une partition à 2 trous, contradiction. Donc

(33) $\quad b+g-2a-1 > d_1.$

Alors τ' est une partition à 3 trous. On a (cf.(27))

$$b+g-a \leqslant b+d_1-1 \leqslant b+(c-b)-1 = c-1,$$

donc $[b,b+g-a] \subset \Sigma(\pi)$. Soit $i \in [d_1+a+1,\ b+g-a-1]$. On a $i \in \Sigma(\pi)$, $i \notin \Sigma(\tau')$. Dans l'expression de i comme somme de sommants de π, intervient l'un des nombres $d_2, d_3, \ldots, d_s$, disons $d_{j(i)}$; on a

$$i-d_{j(i)} \leqslant i-d_1 \leqslant (b+g-a-1) - d_1 \leqslant (b+g-a-1) - (g-a+1) = b-2$$

donc $i-d_{j(i)} \leqslant a$. Ainsi, on peut introduire $e_1, e_2, \ldots, e_r$ comme dans le 2ème cas. Appliquons 2.10 avec

$$A = \Sigma(\tau') \qquad x=b \qquad y=d_1+a-b \qquad z = b+g-2a-d_1.$$

On a

$z = b+g-2a-d_1 > 1$ d'après (33)

$y+z = g-a \geq b+a+1-a$ d'après (30)

$= b+1 \geq x$

$a+z = b+g-a-d_1 \leq b+g-a-(g-a+1) = b-1 \leq x.$

On voit que $(\tau', e_1, e_2, \ldots, e_r)$ est une partition à 2 trous, contradiction.

4ème cas. $d_1 \geq g+2$.

D'après (29) et les inégalités $g+2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_s$, on voit que $g+1$ est l'origine du 2ème trou de π, d'où $g = c \geq d_1+b$ (cf.(27)), ce qui contredit l'hypothèse du 4ème cas.

Nous avons donc établi l'assertion (*).

Supposons que τ admette un sommant $f > c-b$. D'après (11) et la prop.2.9, l'hypothèse $c \geq 2b+a$ entraîne $c \geq 3b-1$. Alors

$f \geq 3b-b = 2b \geq b+a+2 > b_1$ (cf.(26))

donc

$\sigma(\tau) \geq b+b_1+f > b+b+c-b = c+b \geq g+b$ (cf.(31))

et cela contredit (29).

Donc τ est la partition notée ρ dans l'énoncé de la proposition. Donc ρ est une partition à 2 trous, et $c' = g \leq c$.

Tout sommant de π qui n'est pas sommant de ρ est $> c-b$. D'autre part, $c'+1 \notin \Sigma(\rho)$. Donc, si $c' < c-b$, on a $c'+1 \notin \Sigma(\pi)$, donc $c'+1$ est l'origine du 2ème trou de π, d'où $c = c' < c-b$, contradiction. Donc $c' \geq c-b$.

Si $c' = c-b$, on a $b \leq c'+1 = c-b+1 \leq c$, donc $c'+1 \in \Sigma(\pi)$. Mais, si s est un sommant de π qui n'est pas un sommant de ρ, on a $s \geq c-b+1 = c'+1$. Comme $c'+1 \notin \Sigma(\rho)$, on voit que $c'+1$ est un sommant de π. Alors $(c'+1)+b \in \Sigma(\pi)$, c'est-à-dire $c+1 \in \Sigma(\pi)$, contradiction. Donc $c' \geq c-b+1$.

Si $c-b+1 \leq c' \leq c-b+a+1$, on a $b+c'-a \leq c+1 \leq b+c'$, d'où $c+1 \in \Sigma(\rho) \subset \Sigma(\pi)$, contradiction. Donc $c' \geq c-b+a+2$.

2.12. Corollaire. *Soit π une partition dont les 2 premières composantes vérifient la condition de 2.11. Soient J_1, J_2 les 2 premiers trous de π. Alors* Card $J_2 \leq$ Card J_1.

Utilisons les notations de 2.11. On a $c' \leq c \leq b+c'-a-2$. Comme $b+c'-a \in \Sigma(\rho) \subset \Sigma(\pi)$, on voit que

Card $J_2 \leq (b+c'-a-1) - c \leq (b+c'-a-1) - c' = (b-1)-a =$ Card J_1.

2.13. Corollaire. Soient π une partition, $[0,a]$ et $[b,c]$ ses 2 premières composantes. On suppose que tout sommant de π est majoré par $c-b+1$. Alors :

(i) $c \geqslant 2b+a$ (et donc $c \geqslant c_o$ avec la notation 2.8) ;

(ii) π est une partition à 2 trous (non triviale au sens de 3.5) ;

(iii) $\sigma(\pi) = b+c$.

Supposons $c \leqslant 2b+a-1$.

Puisque b est un sommant de π, l'hypothèse du corollaire entraîne $b \leqslant c-b+1$, donc

$$c \geqslant 2b - 1. \tag{34}$$

Si tous les sommants de π' sont égaux à b, on a $c = b+a$ contrairement à (34). Donc π' admet un sommant $b' \geqslant b+1$. L'hypothèse du corollaire entraîne $b+1 \leqslant b' \leqslant c-b+1$, d'où $c \geqslant 2b$. Ecrivons donc

$$c = 2b + i \qquad \text{avec } 0 \leqslant i \leqslant a-1. \tag{35}$$

On a $b+1 \leqslant b' \leqslant c-b+1 = b+i+1$, donc

$$b' = b+i' \qquad \text{avec } 1 \leqslant i' \leqslant i+1.$$

Alors, $0 \leqslant i+1-i' \leqslant i \leqslant a-1$ (cf. (35)), donc

$$b+b'+(i+1-i') \in \Sigma(\pi).$$

Or $b+b'+(i+1-i') = b+b+i'+i+1-i' = 2b+i+1 = c+1$ (cf. (35)), d'où $c+1 \in \Sigma(\pi)$, contradiction.

On a donc prouvé (i).

Alors $c-b+1 \geqslant b+a+1$. Si $c-b+1$ est un sommant de π, on a $c+1 = b+(c-b+1) \in \Sigma(\pi)$, contradiction. Donc tout sommant de π est $\leqslant c-b$. Alors la partition notée ρ dans 2.11 est égale à π, et cela prouve (ii). L'assertion (iii) résulte aussitôt de (ii).

2.14. Corollaire. Soient π une partition ayant au moins 3 trous, I_2 sa deuxième composante. Alors π admet un sommant qui est $\geqslant \operatorname{Card} I_2 + 1$.
Cela résulte aussitôt de 2.13.

2.15. Corollaire. Soient b,c des entiers tels que $b \geqslant 2$, $c \geqslant \frac{1}{2} b(3b-1)$. Soit $\mathcal{P}(n,b,c)$ l'ensemble des partitions π de n admettant $\{0\}$ et $[b,c]$ pour 2 premières composantes. Notons $q(x,y)$ le nombre de partitions ρ telles que $\Sigma(\rho) = \{0\} \cup [x,y] \cup \{x+y\}$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} \mathcal{P}(n,b,c) &\leqslant \Sigma_{c'=c-b+2}^{c}\, q(b,c')\,r(n-b-c',\ c-b+1)\\ &\leqslant (b-1)\,p(b+c)\,r(n,c-b+1).\end{aligned}$$

(cf.0.7. pour la définition de $r(.,.)$).

1) Pour tout $\pi \in \mathcal{P}(n,b,c)$, soit $\rho(\pi)$ la sous-partition de π formée des sommants $\leqslant c-b$. Alors $\Sigma(\rho(\pi)) = \{0\} \cup [b,c'(\pi)] \cup \{b+c'(\pi)\}$, où $c-b+2 \leqslant c'(\pi) \leqslant c$ (2.11). Pour $c-b+2 \leqslant c' \leqslant c$, soit $\mathcal{P}(n,b,c,c')$ l'ensemble des $\pi \in \mathcal{P}(n,b,c)$ telles que $c'(\pi) = c'$. Alors $\mathcal{P}(n,b,c)$ est la réunion disjointe des $\mathcal{P}(n,b,c,c')$ pour $c-b+2 \leqslant c' \leqslant c$, donc

$$\text{Card } \mathcal{P}(n,b,c) = \Sigma_{c-b+2 \leqslant c' \leqslant c} \text{ Card } \mathcal{P}(n,b,c,c').$$

2) Pour tout $\pi \in \mathcal{P}(n,b,c)$, soit $\rho'(\pi)$ la sous partition de π obtenue en prenant tous les sommants de π qui sont $\geqslant c-b+1$. Pour $\pi \in \mathcal{P}(n,b,c,c')$, on a

$$\sigma(\rho'(\pi)) = n - \sigma(\rho(\pi)) = n - (b+c').$$

L'application $\pi \mapsto (\rho(\pi), \rho'(\pi))$ est une injection de $\mathcal{P}(n,b,c,c')$ dans le produit des 2 ensembles suivants : 1) l'ensemble des partitions τ telles que $\Sigma(\tau) = \{0\} \cup [b,c'] \cup \{b+c'\}$; 2 l'ensemble des partitions de $n-(b+c')$ dont tous les sommants sont $\geqslant c-b+1$. Donc

$$\text{Card } \mathcal{P}(n,b,c,c') \leqslant q(b,c')\ r(n-b-c',\ c-b+1).$$

3) Les parties 1) et 2) entraînent la 1ère inégalité du corollaire ; la 2ème inégalité est évidente.

2.16. Remarque. Dans la propo.2.11, l'inégalité $c-b+a+2 \leqslant c' \leqslant c$ ne peut être améliorée. En effet, soit τ une partition à 2 trous non triviale, et posons $\Sigma(\tau) = [0,a] \cup [b,c'] \cup [b+c'-a,\ b+c']$. Soit c un entier tel que $c-b+a+2 \leqslant c' \leqslant c$ (d'où $c \leqslant (b+c'-a)-2$). On a $c-a \geqslant c'-a \geqslant b$ (2.3). Si $c-a > c'$, posons $d_1 = c'+1$, $d_2 = c'+2$, ..., $d_q = c-a$; si $c-a \leqslant c'$, posons simplement $d_1 = c-a$. Soit $\varphi = (\tau, d_1, d_2, \ldots, d_q)$. Tout élément de $\Sigma(\varphi)$ qui fait intervenir au moins deux d_i est $\geqslant 2(c'+1) \geqslant c'+b \geqslant c+2$. Tout élément de $d_i + [b,c']$ ou de $d_i + [b+c'-a,\ b+c']$ est $\geqslant c+2$. Enfin,

$$\cup_i (d_i + [0,a]) = \begin{cases} [c'+1,c] & \text{si } c-a > c' \\ [c-a,c] & \text{si } c-a \leqslant c'. \end{cases}$$

Donc $\Sigma(\varphi) \cap [0,c+1] = [0,a] \cup [b,c'] \cup [c'+1,c] = [0,a] \cup [b,c]$. Ainsi, les 2 premières composantes de φ sont $[0,a]$ et $[b,c]$. On a $c \geqslant c' \geqslant 2b+a$. Les d_i sont $> c-b$. Enfin, les sommants de τ sont $< c'-b-a+1$ (cf.3.4), donc sont $\leqslant c-b$. Ainsi :

Il existe une partition dont les 2 premières composantes sont $[0,a]$ et $[b,c]$, et telle que, pour la partition à 2 trous qu'on en déduit par le procédé de 2.11, les 2 premières composantes sont $[0,a]$ et $[b,c']$.

III. Partitions à 1 ou 2 trous.

3.1. Une partition de n à 1 trou est une partition π telle que $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [n-a,n]$, où $a+2 \leqslant n-a$, c'est-à-dire $2a+2 \leqslant n$. Les entiers a et n peuvent être choisis arbitrairement pourvu que $2a+2 \leqslant n$; en effet :

Proposition. Soient π une partition, a et n des entiers $\geqslant 0$ tels que $2a+2 \leqslant n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [n-a,n]$;

(ii) $\pi = (n-a, \pi")$ où $\pi"$ est une partition pratique de a.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : évident.

(i) $\Rightarrow$ (ii) . Supposons $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [n-a,n]$. Soient π', $\pi"$ comme en 2.1. Alors $\pi"$ est une partition pratique de a. D'après 2.3, n-a est le plus petit sommant de π'. Mais $\sigma(\pi') = \sigma(\pi) - \sigma(\pi") = n-a$; donc $\pi' = (n-a)$.

3.2. Une partition à 2 trous est une partition π telle que

$$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a, b+c]$$

où a,b,c sont des entiers tels que $a \geqslant 0$, $b \geqslant a+2$, $c \geqslant b$.

3.3. Proposition. Soient a,b,c des entiers tels que $a \geqslant 0$, $b \geqslant a+2$, $c \geqslant b$. Soit π une partition telle que $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a, b+c]$. Soient π',$\pi"$ comme en 2.1.

(i) π' a au moins 2 sommants, dont b.

(ii) Tout sommant de π' est $\leqslant c-a$.

(i) On sait que b est un sommant de π' (2.3). Si $\pi' = (b)$, on a $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,b+a]$, contradiction. Donc π' a au moins 2 sommants.

(ii) Soit x un sommant de π'. Si $x = b$, on a $x \leqslant c-a$ (2.3). Si $x \neq b$, on a $b+x \leqslant \sigma(\pi') = b+c-a$, d'où $x \leqslant c-a$.

3.4. Proposition. Soient a,b,c,π,π',$\pi"$, comme en 3.3. Soit s le plus grand sommant de π. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $c \leqslant b+2a+1$;

(ii) $c \leqslant 2b+a-1$

(iii) π' a exactement 2 sommants ;

(iv) $\pi' = (b,b')$ avec $b \leqslant b' \leqslant b+a+1$;

(v) $s \geqslant c-b+2$;

(vi) $s \geqslant c-b-a+1$.

Si ces conditions sont vérifiées, on a $c = b'+a$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Cela résulte de ce que $b+2a+1 \leqslant 2b+a-1$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons $c \leqslant 2b+a-1$. Alors $\sigma(\pi') = b+c-a \leqslant 3b-1$, donc π' a au plus 2 sommants d'après 2.3. Alors π' a exactement 2 sommants d'après 3.3.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons $\pi' = (b,b')$ avec $b' \geqslant b$ (cf.2.3). Alors

(36) $$\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,b+a] \cup [b',b'+a] \cup [b+b',b+b'+a].$$

Puisque π a deux trous, on a $b' \leqslant b+a+1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Supposons $\pi' = (b',b)$ avec $b \leqslant b' \leqslant b+a+1$. D'après (36), on a $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,b'+a] \cup [b+b',b+b'+a]$. Donc $c = b'+a \leqslant b+2a+1$.

Les conditions (i) à (iv) sont donc équivalentes.
Si ces conditions sont vérifiées, on a $s = b' = c-a \geqslant c-b+2$. Donc (i) $\Rightarrow$ (v). Il est clair que (v) $\Rightarrow$ (vi).
Si les conditions (i) à (iv) ne sont pas vérifiées, π' a au moins 3 sommants, tous $\geqslant b$, donc

$$s + 2b \leqslant \sigma(\pi') = b+c-a$$

d'où $s \leqslant c-b-a$. Donc (vi) $\Rightarrow$ (i).

3.5. Nous dirons qu'une partition à 2 trous est triviale si elle vérifie les conditions de 3.4. Les partitions à 2 trous triviales sont donc les partitions de la forme (b',b,π'') où π'' est une partition pratique de a, $b \geqslant a+2$, $b \leqslant b' \leqslant b+a+1$.

3.6. Proposition. Soient a,b,c des entiers tels que $a \geqslant 0$, $b \geqslant a+2$, $c \leqslant b$. Soit c_0 comme en 2.8. Existe-t-il une partition π telle que $\Sigma(\pi) = [0,a] \cup [b,c] \cup [b+c-a, b+c]$?

(i) Si $b \leqslant c \leqslant b+a-1$, réponse non.

(ii) Si $b+a \leqslant c \leqslant b+2a+1$, réponse oui (et π est triviale).

(iii) Si $b+2a+2 \leqslant c \leqslant c_0 - 1$, réponse non.

(iv) Si $c = c_0$ ou $c \geqslant c_0 + b$, réponse oui (et π est non triviale).

(i) résulte de 2.9(i).

(ii) résulte de 2.9, partie (β) de la preuve, car la partition construite en 2.9β est une partition à 2 trous.

(iii) Supposons $b+2a+2 \leqslant c \leqslant c_0-1$. D'après 3.4, on a $2b+a \leqslant c \leqslant c_0 - 1$, et la réponse est non d'après 2.9(iii).

(iv) résulte de 2.9, parties (ε) et (ζ) de la preuve, car les partitions construites en 2.9ε et 2.9ζ sont des partitions à deux trous.

3.7. La prop.3.6 ne résout pas complètement le problème qu'elle pose : il reste à traiter le cas $c_o < c < c_o+b$. On peut voir facilement qu'alors la réponse est non si $a = 0$, et que la réponse est oui si $a = b-2$ (cf.2.9. partie (λ) de la preuve). Le cas général ne présente certainement aucune difficulté majeure, mais je ne l'ai pas réglé complètement.

IV. Partitions ayant des sous-sommes interdites ; résultats asymptotiques.

4.1. Notations. Dans ce chapitre, $\mathbb{N}^* = \{1,2,3, \ldots\}$, et $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$. Si $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, sup Q désigne le plus grand élément de Q (si $Q \neq \emptyset$), $\mathcal{P}(n;Q)$ désigne l'ensemble des partitions de n dont aucune sous-somme n'appartient à Q, et $p(n;Q) = \mathrm{Card}\, \mathcal{P}(n;Q)$.

Si $Q \subset \mathbb{N}^*$, Q-b désigne le translaté de Q par -b, privé de ses éléments $\leqslant 0$.

T est l'opérateur "translation de 1" sur les fonctions f définies sur $\mathbb{Z}$:

$$(Tf)(n) = f(n-1).$$

4.2. Lemme. Soit $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$. Il existe un polynôme $f_Q \in \mathbb{Z}[X]$ et un seul tel que

$$p(n;Q) = (f_Q(T)p)(n) \qquad \text{pour } n = 0,1,2,\ldots$$

Comme la fonction $z \mapsto \Sigma_{n\geqslant 1} p(n)\, z^n$ est transcendante, la suite $(p(n))$ ne vérifie aucune relation de récurrence linéaire. Cela entraîne l'unicité de f_Q.

Prouvons l'existence de f_Q. Pour toute partition π, notons $\mathcal{P}_{n,\pi}$ l'ensemble des partitions de n qui admettent π pour sous-partition. On a $\mathrm{Card}\, \mathcal{P}_{n,\pi} = p(n-\sigma(\pi))$.

Considérons toutes les partitions de tous les éléments de Q. Soit $(\pi_1, \pi_2, \ldots)$ la famille finie de partitions, deux à deux distinctes, ainsi obtenue. Alors, $\mathcal{P}_{n,\pi_1} \cup \mathcal{P}_{n,\pi_2} \cup \ldots$ est l'ensemble des partitions de n qui admettent un élément de Q comme sous-somme. Donc

$$p(n;Q) = p(n) - \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n,\pi_1} \cup \mathcal{P}_{n,\pi_2} \cup \ldots)$$

$$= p(n) - \Sigma_i \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n,\pi_i}) + \Sigma_{i<j} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{n,\pi_i} \cap \mathcal{P}_{n,\pi_j}) - \ldots$$

Considérons un terme de cette somme :

$$\pm \operatorname{Card}(\mathcal{P}_{n,\pi_i} \cap \mathcal{P}_{n,\pi_j} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{n,\pi_\ell})$$

avec $i < j < \ldots < \ell$. Pour tout entier $r = 1,2, \ldots,$ soit m_r la plus grande des multiplicités avec laquelle r apparaît dans $\pi_i, \pi_j, \ \ , \pi_\ell$. Alors la suite $(1,1,\ldots, 1,2,2,\ldots, 2,\ldots)$ où 1 apparaît r_1 fois, 2 apparaît r_2 fois, ... est une partition $\pi(i,j,\ldots, l)$, et l'on a

$$\mathcal{P}_{n,\pi_i} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{n,\pi_\ell} = \mathcal{P}_{n,\pi(i,j,\ \ldots,\ell)} .$$

Les partitions $\pi(i,j, \ldots,\ell)$ ainsi construites dépendent de Q mais pas de n. Soit $\varepsilon_{ij\ldots\ell} = 1$ ou -1 suivant que $\operatorname{Card}\{i,j, \ldots,\ell\}$ est pair ou impair. On a

$$\begin{aligned} p(n;Q) &= \Sigma_{i<j<\ldots<\ell}\ \varepsilon_{ij\ldots\ell} \operatorname{Card} \mathcal{P}_{n,\pi(i,j,\ldots,\ell)} \\ &= \Sigma_{i<j<\ldots<\ell}\ \varepsilon_{ij\ldots\ell}\ p(n-\sigma(\pi(i,j,\ldots,\ell))). \end{aligned}$$

Posons

$$f_Q(X) = \Sigma_{i<j<\ldots<\ell}\, \varepsilon_{ij\ldots\ell}\ X^{\sigma(\pi(i,j,\ldots,\ell))} \qquad \in \mathbb{Z}\,[X] .$$

Alors $p(n;Q) = (f_Q(T)p)(n)$.

4.3. En suivant la preuve 4.2, on trouve par exemple

$$\begin{aligned} p(n\,;\{1\}) &= p(n) - p(n-1) \\ p(n\,;\{2\}) &= p(n) - 2p(n-2) + p(n-4) \\ p(n\,;\{3\}) &= p(n) - 3p(n-3) + p(n-5) + 2p(n-6) - p(n-8) \end{aligned}$$

donc

$f_{\{1\}}(X) = 1-X$, $f_{\{2\}}(X) = 1-2X^2+X^4$, $f_{\{3\}}(X) = 1-3X^3+X^5+2X^6-X^8$.

Le calcul des f_Q par cette méthode devient rapidement pénible quand $\sup Q$ grandit. Il est alors préférable d'utiliser les lemmes 4.9 et 4.10 ci-dessous, qui fournissent un algorithme assez rapide pour obtenir f_Q par récurrence descendante sur Q. Toutefois, ces lemmes ne peuvent servir à prouver <u>l'existence</u> des f_Q, à cause de la division qui apparaît dans 4.10(ii).

4.4. Pour des raisons typographiques, le polynôme $f_Q(X)$ sera aussi noté $f(Q\,;X)$.

4.5. <u>Remarque</u>. Le lemme 4.2 signifie que la série génératrice

$$\Sigma_{n \geqslant 0}\ p(n\ ;\ Q)\ z^n$$

est égale à $f_Q(z)/(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots$

4.6. Proposition. Soit $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^\star)$. Alors $p(n\ ;\ Q)/p(n)$ admet, quand $n \to \infty$, un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-1/2}$.

Cela résulte de 4.2 par le même argument que dans [1], "estimation of S_1".

4.7. En particulier, développons f_Q suivant les puissances de $1-X$:

$$f_Q(x) = a_o + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2 + \ldots \qquad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Soit v le plus petit entier tel que $a_v \neq 0$. Alors

$$p(n\ ;\ Q) = a_v((1-T)^v p)(n) + a_{v+1}((1-T)^{v+1}p)(n) + \ldots$$

donc, d'après [1], preuve du th.1,

$$\frac{p(n\ ;\ Q)}{p(n)} \sim a_v \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^v \frac{1}{n^{v/2}} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Il résulte de là que $a_v \in \mathbb{N}^\star$.

4.8. Notations $\psi(Q)$, $u(Q)$. Avec les notations de 4.7, on posera

$$v = \psi(Q) \qquad\qquad a_v = u(Q).$$

Ainsi, $\psi(Q)$ est un entier $\geqslant 0$, $u(Q)$ est un entier > 0, et l'on a

$$\frac{p(n\ ;\ Q)}{p(n)} \sim \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{\psi(Q)} u(Q)\ \frac{1}{n^{\psi(Q)/2}} \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{37}$$

On verra (4.20) que, si $a = \sup Q$, alors $[a/2] + 1 \leqslant \psi(Q) \leqslant a$.

4.9. Lemme. $f(\{1,2,\ldots,a\}\ ;\ X) = (1-X)(1-X^2)\ldots(1-X^a)$.

Cela résulte de [1], formule (11) (ou se voit facilement par récurrence sur a).

4.10. Lemme. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^\star)$, et $a = \sup Q$. On suppose que $Q \neq \{1,2,\ldots, a\}$. Soit alors b le plus petit entier > 0 tel que $b \notin Q$ (on a $b \in \{1,2,\ldots, a-1\}$).

(i) S'il existe des multiples de b appartenant à Q, soit ib

le plus petit de ces multiples (on a $i \geqslant 2$). Alors

$$f(Q\,;X) = f(b \cup Q\,;X) + X^{b} f(b \cup Q \cup (Q-b)\,;X) + X^{2b} f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup (Q-2b;X)$$

$$+ \ldots + X^{(i-1)b} f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-(i-1)b\,;X).$$

(ii) Supposons qu'aucun multiple de b n'appartienne à Q. Soit j le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que

$$Q - (j+1)b \subset b \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-jb)$$

(un tel entier existe évidemment ; rappelons les conventions de 4.1 sur les translatés de Q). Alors

$$\begin{aligned} f(Q\,;X) &= f(b \cup Q\,;Q) + X^{b} f(b \cup Q \cup (Q-b)\,;X) + \ldots \\ &+ X^{(j-1)b} f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-(j-1)b)\,;X) \\ &+ X^{jb} \frac{f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-jb)\,;X)}{1 - X^{b}} \end{aligned}$$

(Si $j = 0$, 4.10(ii) signifie que $f(Q\,;X) = f(b \cup Q\,;X)/(1 - X^{b})$).
(i) Soit i comme dans l'énoncé. Soit $\pi \in \mathcal{P}(n\,;Q)$. Alors $1,2\ldots,b-1$

ne sont pas sommants de π, et b peut apparaître $0,1,2,\ldots, i-1$ fois comme sommant de π, mais pas i fois ni davantage. Soit $\mathcal{P}(n,k,Q)$ l'ensemble des $\pi \in \mathcal{P}(n\,;Q)$ telles que b apparaîsse exactement k fois comme sommant de π. Alors $\mathcal{P}(n\,;Q)$ est réunion disjointe des $\mathcal{P}(n,k,Q)$ pour $k = 0,1,\ldots,i-1$. D'autre part, il existe une bijection évidente de $\mathcal{P}(n,k,Q)$ sur $\mathcal{P}(n-kb\,;b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-kb))$. Donc

$$\begin{aligned} p(n\,;Q) &= p(n\,;b \cup Q) + p(n-b\,;b \cup Q \cup (Q-b)) + \ldots \\ &+ p(n-(i-1)b\,;b \cup Q \cup (Q-b) \ldots \cup (Q-(i-1)b)) \end{aligned}$$

d'où le (i) du lemme.

(ii) Supposons qu'aucun multiple de b n'appartienne à Q. Soit j comme dans l'énoncé. La preuve de (i) donne ici

$$p(n\,;Q) = \Sigma_{k \geqslant 0}\, p(n-kb\,;b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-kb)).$$

Posons $Q' = b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-jb)$. D'après la définition de j, on a

$$\begin{aligned} &\Sigma_{k \geqslant j}\, p(n-kb\,;b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-kb)) \\ &= \Sigma_{k \geqslant j}\, p(n-kb\,;Q') = \Sigma_{k \geqslant j}((T^{kb} f(Q'\,;T))p)(n) \end{aligned}$$

(introduisant provisoirement une série formelle). Donc

$$((1-T^b)f(Q\ ;\ T)p)(n) = ((1-T^b)\sum_{k<j}(T^{kb}f(b\cup Q\cup\ldots\cup(Q-kb)\ ;\ T)p)(n)$$
$$+ (T^{jb}f(Q'\ ;\ T)p)(n)$$

et finalement

$$(1-X^b)f(Q\ ;\ X) = (1-X^b)\sum_{k<j} X^{kb}f(b\cup Q\cup\ldots\cup(Q-kb)\ ;X) + X^{jb}f(Q'\ ;\ X).$$

4.11. Al'aide de 4.10, on a calculé f_Q pour toutes les parties Q de $\{1,2,3,4,5\}$. Les résultats sont donnés dans l'Appendice A.

4.12. Proposition. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, et $a = \sup Q$. Si $1,2,\ldots,[a/2] \in Q$, on a

$$f(Q\ ;\ X) = \Pi_{i\in Q}(1-X^i) \qquad \psi(Q) = \operatorname{Card} Q \qquad u(Q) = \Pi_{i\in Q}\, i$$

$$\frac{p(n\ ;\ Q)}{p(n)} \sim (\Pi_{i\in Q}\, i)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{\operatorname{Card} Q}\frac{1}{(\sqrt{n})^{\operatorname{Card} Q}} \qquad \text{quand } n\to\infty.$$

Si $Q = \{1,2,\ldots,a\}$ cela résulte de 4.9. Maintenant, raisonnons par récurrence descendante sur Q. Soit b le plus petit entier > 0 tel que $b \notin Q$. D'après l'hypothèse, on a $[a/2] < b < a$. Donc, aucun multiple de b n'appartient à Q, et

$$Q - b \subset \{1,2,\ldots,[a/2]\} \subset b\cup Q.$$

Alors

$$f(Q\ ;X) = \frac{f(b\cup Q\ ;\ X)}{1-X^b} \qquad \text{(lemme 4.10 (ii))}$$
$$= (1-X^b)^{-1}\,\Pi_{i\in b\cup Q}(1-X^i) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
$$= \Pi_{i\in Q}(1-X^i).$$

Les autres assertions de la proposition résultent aussitôt de ce qui précède et de 4.7.

4.13. Proposition. Soit $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, tel que $a = \sup Q$ soit pair. Si $1,2,\ldots,(a/2)-1 \in Q$ et $(a/2) \notin Q$, on a

$$f(Q\ ;\ X) = (1-X^a)\,\Pi_{i\in Q}(1-X^i)$$

$$\psi(Q) = \operatorname{Card} Q + 1 \qquad u(Q) = a\,\Pi_{i\in Q}\, i$$

$$\frac{p(n\ ;\ Q)}{p(n)} \sim a\left(\Pi_{i\in Q}\, i\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{\operatorname{Card} Q+1}\frac{1}{(\sqrt{n})^{\operatorname{Card} Q+1}} \qquad \text{quand } n\to\infty.$$

On a

$$f(Q\ ;\ X) = f((a/2) \cup Q\ ;\ X) + X^{a/2} f((a/2) \cup Q\ ;\ X) \qquad \text{(lemme 4.10(i))}$$

$$= (1+X^{a/2})\ f((a/2) \cup Q\ ;\ X)$$

$$= (1+X^{a/2})(1-X^{a/2})\ \Pi_{i\in Q}\ (1-X^{i}) \qquad \text{(prop. 4.12)}$$

d'où la proposition.

4.14. Proposition. Soient i,m des entiers $\geqslant 0$, avec $i \leqslant m$. Soit

$Q = \{1,2,3,\ldots,2i,\ 2i+1,\ 2i+3,\ 2i+5,\ldots,\ 2m+1\}$. Alors

$$f(Q\ ;\ X) = \Pi_{j\in Q}(1-X^{j}), \qquad \psi(Q) = \text{Card } Q \qquad u(Q) = \Pi_{j\in Q}\ j$$

$$\frac{p(n\ ;\ Q)}{p(n)} \sim \left(\Pi_{j\in Q}\ j\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{\text{Card } Q} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\text{Card } Q}} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Si $i = m$, cela résulte de 4.9. Maintenant, raisonnons par récurrence descendante sur i. Aucun multiple de $2i+2$ n'appartient à Q, et $Q-(2i+2) \subset Q$, donc

$$f(Q\ ;\ X) = \frac{f((2i+2) \cup Q\ ;\ X)}{1-X^{2i+2}} \qquad \text{(lemme 4.10(ii))}$$

$$= (1-X^{2i+2})^{-1}\ \Pi_{j\in (2i+2)\ \cup\ Q}(1-X^{j}) \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= \Pi_{j\in Q}(1-X^{j}).$$

4.15. Lemme. Soient a,c des entiers tels que $1 \leqslant c \leqslant [a/2] + 1$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions des nombres $0,1,2,\ldots,\ c-1$. Alors $\mathcal{P}(n\ ;\ \{c,c+1,\ldots,\ a\})$ est réunion disjointe des ensembles

$$\rho \amalg \mathcal{P}(n-\sigma(\rho)\ ;\ \{1,2,\ldots,a\})$$

quand ρ parcourt $\mathcal{E}$.

Il est clair que, si $\rho \in \mathcal{E}$, on a $\rho \amalg \mathcal{P}(n-\sigma(\rho)\ ;\ \{1,2,\ldots,\ a\}) \subset \mathcal{P}(n\ ;\ \{c,c+1,\ldots,a\})$; et que, si $\rho,\rho' \in \mathcal{E}$ et $\rho \neq \rho'$, les ensembles $\rho \amalg \mathcal{P}(n-\sigma(\rho);\ \{1,2,\ldots,a\})$, $\rho' \amalg \mathcal{P}(n-\sigma(\rho')\ ;\ \{1,2,\ldots,a\})$ sont disjoints. Soit $\pi \in \mathcal{P}(n;\{c,c+1,\ldots,a\})$. Soit ρ (resp. τ) la sous-partition de π formée des sommants $\leqslant c-1$ (resp. $\geqslant a+1$). Alors $\pi = \rho \amalg \tau$, et $\tau \in \mathcal{P}(n-\sigma(\rho)\ ;\ \{1,2,\ldots,a\})$. Montrons que $\rho \in \mathcal{E}$. Ecrivons $\rho = (a_1,\ a_2,\ldots,a_s)$ où $c-1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_s$. Il s'agit de prouver que $a_1 + \ldots + a_s \leqslant c-1$. Supposons $a_1 + \ldots + a_s \geqslant c$. Il existe un entier t tel que $a_1 + \ldots + a_t \leqslant c-1$, $a_1 + \ldots + a_{t+1} \geqslant c$. Comme $(a_1,\ldots,\ a_{t+1})$ est une sous-partition de π, on a $a_1 + \ldots + a_{t+1} \geqslant a+1$, donc

$$a_{t+1} \geqslant (a+1) - (c-1) = a+2-c \geqslant a+2-([a/2]+1) \geqslant [a/2]+1 \geqslant c,$$

contradiction.

4.16. Proposition. Soient a,c des entiers tels que $1 \leqslant c \leqslant [a/2]+1$. On a

$$f(\{c,c+1,\dots,a\};X)=(p(0)+p(1)X+p(2)X^2+\dots+p(c-1)X^{c-1})(1-X)(1-X^2)\dots(1-X^a)$$

$$\psi(\{c,c+1,\dots,a\}) = a \quad u(\{c,c+1,\dots,a\}) = (p(0)+p(1)+\dots+p(c-1)).a!$$

Posons $Q = \{1,2,\dots,a\}$. Avec les notations de 4.15, on a

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(n;\{c,c+1,\dots,a\}) = \Sigma_{\rho\in\mathcal{E}}\ p(n-\sigma(\rho);Q) \qquad (4.15)$$

$$= \Sigma_{i=0}^{c-1} p(i)p(n-i;Q) = \Sigma_{i=0}^{c-1} p(i)(f(Q;T)p)(n-i)$$

$$= \Sigma_{i=0}^{c-1} p(i)(T^i f(Q;T)p)(n) = ((\Sigma_{i=0}^{c-1} p(i)T^i)f(Q;T)p)(n)$$

et $f(Q;T) = (1-T)(1-T^2)\ \dots\ (1-T^a)$ (lemme 4.9).

4.17. Lemme. Si $Q' \subset Q$, on a $\psi(Q') \leqslant \psi(Q)$. Si de plus $\psi(Q') = \psi(Q)$, on a $u(Q') \geqslant u(Q)$.

On a $p(n\ ;\ Q') \geqslant p(n\ ;\ Q)$ pour tout n, donc le lemme résulte de (37).

4.18. Lemme. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbf{N}^*)$, et $a = \sup Q$.

(i) Si $Q = \{1,2,\dots,a\}$, on a $\psi(Q) = a$.

(ii) Supposons désormais $Q \neq \{1,2,\dots,a\}$. Soit b le plus petit entier > 0 tel que $b \notin Q$. S'il existe un multiple de b appartenant à Q, on a $\psi(Q)=\psi(b \cup Q)$.

(iii) Si aucun multiple de b n'appartient à Q, on a

$$\psi(Q) = \inf(\psi(b \cup Q),\ \psi(b \cup Q \cup (Q-b) \cup (Q-2b) \cup \dots) - 1).$$

(i) résulte de 4.9.

(ii) Plaçons-nous dans les hypothèses de (ii). On a, quand $X \to 1$,

$$f(b \cup Q\ ;\ X) \sim u(b \cup Q)(1-X)^{\psi(b \cup Q)}$$

et, pour $k = 1,2,\dots$

$$X^{kb}f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\dots\cup (Q-kb)\ ;\ X)$$
$$\sim u(b \cup Q \cup\dots\cup (Q-kb))(1-X)^{\psi(b \cup Q \cup\dots\cup(Q-kb))}.$$

Or $\psi(b \cup Q \cup\dots\cup(Q-kb)) \geqslant \psi(b \cup Q)$ (4.17). Comme les entiers $u(.)$ sont > 0, on a, d'après 4.10(i)

$$f(Q\ ;\ X) \sim u(1-X)^{\psi(b \cup Q)} \qquad \text{quand } X \to 1$$

avec un $u > 0$, donc $\psi(Q) = \psi(b \cup Q)$.

(iii) Démonstration analogue à celle de (ii), en utilisant 4.10(ii).

4.19. Lemme. Soit $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$. Soit a un entier $\geq \sup Q$. Soit $Q' = Q \cup \{a+2\}$. On a $\psi(Q') \geq \psi(Q) + 1$.

Supposons d'abord $Q = \{1,2,\ldots,a\}$. Alors $\psi(Q) = a$ (4.18(i)). D'après 4.18(iii), on a

$$\psi(Q') = \inf(\psi(\{1,2,\ldots,a,a+1,a+2\}),\ \psi(\{1,2,\ldots,a,a+1,a+2\}) - 1)$$

$$= \inf(a+2,a+1) = a+1 = \psi(Q) + 1.$$

Maintenant, raisonnons par récurrence descendante sur Q. Soit b le plus petit entier > 0 tel que $b \notin Q$. S'il existe un multiple de b appartenant à Q', on a

$$\begin{aligned}\psi(Q') &= \psi(b \cup Q') && \text{(lemme 4.18(ii))}\\ &= \psi(b \cup Q \cup \{a+2\})\\ &\geq \psi(b \cup Q) + 1 && \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &\geq \psi(Q) + 1 && \text{(lemme 4.17).}\end{aligned}$$

Supposons qu'aucun multiple de b n'appartienne à Q'. Alors, aucun multiple de b n'appartient à Q, et l'on a (lemme 4.18(iii)) :

$$\psi(Q) = \inf(\psi(b \cup Q),\ \psi(b \cup Q \cup (Q-b) \cup (Q-2b) \cup\ldots) - 1)$$

$$\psi(Q') = \inf(\psi(b \cup Q'),\ \psi(b \cup Q' \cup (Q'-b) \cup (Q'-2b) \cup\ldots) - 1).$$

On a $b \cup Q' = b \cup Q \cup \{a+2\}$ donc $\psi(b \cup Q') \geq \psi(b \cup Q) + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. D'autre part,

$$b \cup Q' \cup (Q'-b) \cup\ldots = b \cup Q \cup (Q-b) \cup\ldots\cup \{a+2,\ a+2-b,\ a+2-2b,\ldots\}$$

$$\supset (b \cup Q \cup (Q-b) \cup\ldots) \cup \{a+2\}$$

donc

$$\begin{aligned}\psi(b \cup Q' \cup (Q'-b) \cup \ldots) &\geq \psi(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\ldots\cup \{a+2\}) && \text{(lemme 4.17)}\\ &\geq \psi(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\ldots) + 1 && \text{(hypothèse de récurrence).}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\psi(Q') \geq \inf(\psi(b \cup Q) + 1,\ \psi(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\ldots)) = \psi(Q)+1.$$

4.20. Proposition. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, et $a = \sup Q$. Alors

$$[a/2] + 1 \leq \psi(Q) \leq a.$$

L'inégalité $\psi(Q) \leq a$ résulte de 4.17 et 4.18(i). Prouvons l'autre inégalité. On raisonne par récurrence sur a. L'inégalité $\psi(Q) \geq [a/2] + 1$ est claire si $a = 1$ ou 2 (cf.4.3). Soient $a > 2$, et $R = Q \cap \{1,2,\ldots, a-2\}$. On a

$$\begin{aligned}\psi(Q) &\geq \psi(R \cup \{a\}) && \text{(lemme 4.17)}\\ &\geq \psi(R) + 1 && \text{(lemme 4.19)}\end{aligned}$$

$$\geqslant [(a-2)/2] + 1 + 1 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
$$= [a/2] + 1.$$

4.21. La proposition suivante précise 4.20.

Proposition. Soient $Q \in \mathcal{F}(N^\star)$, $a = \sup Q$, $a' = [a/2]$, et $Q' = Q \cap \{a'+1, a'+2, \ldots, a\}$.

(i) $a'+1 \leqslant \psi(Q) \leqslant a' + \operatorname{Card} Q'$.

(ii) Supposons qu'il existe $i \in \{0,1,\ldots,a'\}$ tel que

$$1,2,\ldots, i \in Q$$
$$i+1, i+2,\ldots, a' \in Q$$
$$Q' \subset \{a-i, a-i+1,\ldots, a\}.$$

Alors $\psi(Q) = a' + \operatorname{Card} Q'$.

Prouvons (ii). Si $i = a'$, on a $1,2,\ldots, a' \in Q$, donc $a' + \operatorname{Card} Q' = \operatorname{Card} Q$, et l'on applique 4.12.

Supposons $i \leqslant a' - 1$, et l'assertion (ii) prouvé pour $i+1$ au lieu de i. Soient $R = Q \cup \{i+1\}$ et $R' = R \cap \{a'+1,\ldots, a\}$. On a

$$1,2,\ldots, i+1 \in R \qquad i+2, i+3,\ldots, a' \notin R$$
$$R' = Q' \subset \{a-i, a-i+1,\ldots, a\} \subset \{a-(i+1), a-i,\ldots, a\}$$

et l'hypothèse de récurrence donne

$$\psi(R) = a' + \operatorname{Card} Q'. \tag{38}$$

S'il existe un multiple de $i+1$ appartenant à Q, on a

$$\psi(Q) = \psi(Q \cup \{i+1\}) \qquad \text{(lemme 4.18(ii))}$$
$$= \psi(R) = a' + \operatorname{Card} Q' \qquad \text{(d'après (38))}.$$

Supposons qu'aucun multiple de $i+1$ n'appartienne à Q. On a

$$a - (i+1) \geqslant a'+1. \tag{39}$$

En effet, si a est impair, on a $a-(i+1) \geqslant a - a' = a'+1$. Si a est pair, on ne peut avoir $i+1 = a'$ puisqu'alors $2(i+1) = a \in Q$ contrairement à l'hypothèse sur $i+1$; donc $i \leqslant a'-2$, et alors $a-(i+1) \geqslant a-(a'-1) = a'+1$.

Posons

$$S = (i+1) \cup Q \cup (Q-(i+1)) \cup (Q-2(i+1)) \cup \ldots$$
$$S^\star = S \cap \{a-i-1, a-i,\ldots,a\} \subset \{a'+1, a'+2,\ldots, a\} \qquad \text{d'après (39)}$$
$$T = \{1,2,\ldots, i+1\} \cup S^\star$$

$$T' = T \cap \{a'+1, a'+2, \dots, a\} = S^*.$$

On a $1, 2, \dots, i \in Q \subset S$, $i+1 \in S$, $S^* \subset S$, donc

$$T \subset S. \tag{40}$$

Par ailleurs,

$1, 2, \dots, i+1 \in T$ $\qquad$ $i+2, i+3, \dots, a' \notin T$

$$T' = S^* \subset \{a-i-1, a-i, \dots, a\}$$

et l'hypothèse de récurrence donne

$$\psi(T) = a' + \text{Card } T'. \tag{41}$$

On a $R \subset S$, donc $R' \subset S^* = T'$, $a-i-1 \notin R'$, $a-i-1 \in Q-i-1 \subset S$, d'où $a-i-1 \in S^* = T'$, donc

$$\text{Card } T' \geqslant \text{Card } R'+1 = \text{Card } Q'+1. \tag{42}$$

D'après (40), (41), (42), on a

$$\psi(S) \geqslant \psi(T) = a' + \text{Card } T' \geqslant a' + \text{Card } Q' + 1. \tag{43}$$

Alors

$$\psi(Q) = \inf(\psi(R), \psi(S)-1) \qquad \text{(lemme 4.18(iii))}.$$
$$= a' + \text{Card } Q' \qquad \text{(d'après (38) et (43))}.$$

Ainsi, la prop. 4.21(ii) est établie. Prouvons (i).
L'assertion $a'+1 \leqslant \psi(Q)$ résulte de 4.20. On a

$$\psi(\{1, 2, \dots, a'\} \cup Q') = a' + \text{Card } Q'$$

D'après 4.12 ou 4.21(ii). Or $Q \subset \{1, 2, \dots, a'\} \cup Q'$, d'où $\psi(Q) \leqslant a' + \text{Card } Q'$ d'après 4.17.

4.22. Corollaire. Soit a un entier > 0. On a

$$\psi(\{a\}) = [a/2] + 1.$$

4.23. Corollaire. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, $a = \sup Q$, $a' = [a/2]$, et $Q' = Q \cap \{a'+1, a'+2, \dots, a\}$.

(i) On a $\psi(Q) = a \Leftrightarrow Q' = \{a'+1, a'+2, \dots, a\}$.

(ii) Si $\psi(Q) = a$, on a

$$a! \leqslant u(Q) \leqslant (p(0) + p(1) + \dots + p(a')).a!$$

Si $\psi(Q) = a$, on a $\text{Card } Q' \geqslant a-a'$ (4.21(i)), donc $Q' = \{a'+1, a'+2, \dots, a\}$.
Supposons $Q' = \{a'+1, a'+2, \dots, a\}$. Alors

$$\{a'+1, a'+2, \dots a\} \subset Q \subset \{1, 2, \dots, a\}$$

donc

$$a \leqslant \psi(Q) \leqslant a \qquad (4.17,\ 4.16,\ 4.9)$$

d'où $\psi(Q) = a$, et, d'après 4.17,

$$u(\{a'+1, a'+2,\dots, a\}) \geqslant u(Q) \geqslant u(\{1,2,\dots, a\}).$$

Or $u(\{a'+1, a'+2,\dots, a\}) = (p(0)+p(1) +\dots+ p(a')).a!$ (4.16), et

$u(\{1,2,\dots, a\}) = a!$ (4.9).

4.24. Proposition. (i) $u(a) \geqslant a((a/2)!)$ si a est pair

(ii) $u(a) \geqslant 1.3.5\dots a$ si a est impair.

Supposons a pair. Soit $a' = a/2$. On a

$$\psi(a) = \psi(\{1,2,\dots,a',a\}) = a'+1 \qquad (4.22 \text{ et } 4.12)$$

donc

$$u(a) \geqslant u(\{1,2,\dots, a',a\}) \qquad (4.17)$$

$$= a(a'!) \qquad (4.12)$$

Supposons a impair. Soit $a' = [a/2]$. On a

$$\psi(a) = \psi(\{1,3,5,\dots, a\}) = a'+1 \qquad (4.22 \text{ et } 4.14)$$

donc

$$u(a) \geqslant u(\{1,3,5,\dots, a\}) \qquad (4.17)$$

$$= 1.3.5\dots a \qquad (4.14)$$

4.25. Proposition. Soient $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$ et $a = \sup Q$. Soit A l'ensemble des diviseurs de a. Alors $u(Q)$ est divisible par $\prod_{x\in Q \cup A} x$.

Pour $Q = \{1,2,\dots, a\}$, on a $u(Q) = a!$ (lemme 4.9), d'où la proposition dans ce cas. Maintenant, raisonnons par récurrence descendante sur Q. Soit b le plus petit entier > 0 tel que $b \notin Q$.

S'il existe un multiple de b appartenant à Q, soit ib le plus petit de ces multiples. D'après le lemme 4.10(i), $u(Q)$ est la somme de certains des nombres

$$u(b \cup Q),\ u(b \cup Q \cup (Q-b)),\dots,u(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\dots\cup (Q-(i-1)b)),$$

et il suffit d'appliquer à chacun de ces nombres l'hypothèse de récurrence.

Supposons qu'aucun multiple de b n'appartienne à Q. Soit j comme au lemme 4.10(ii). D'après ce lemme, $u(Q)$ est la somme de certains des nombres suivants :

$$(44)\quad u(b \cup Q),\ u(b \cup Q \cup (Q-b)),\dots,\ u(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\dots\cup (Q-(j-1)b)),$$

$$(45)\qquad \frac{u(b \cup Q \cup (Q-b) \cup\dots\cup (Q-jb))}{b}$$

le nombre (45) étant donc nécessairement un entier s'il intervient effectivement dans l'expression de $u(Q)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{x\in Q \cup A} x$ divise chacun des nombres (44).

Montrons que, si le nombre (45) intervient dans l'expression de $u(Q)$, il est divisible par $\Pi_{x\in Q \cup A}\, x$ (cela prouvera la proposition). D'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que

(46) $$Q \cup A \subset (b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-jb) \cup A) \setminus \{b\}.$$

Soit $y \in Q \cup A$. Si $y \in Q$, on a $y \neq b$ par définition de b ; si $y \in A$, un des multiples de y est égal à a, et $a \in Q$, donc $y \neq b$. Dans les deux cas, il est clair que y appartient au second membre de (46).

4.26. Corollaire. Soit a un entier > 0. Soit A l'ensemble des diviseurs de a. Alors $u(a)$ est divisible par $\Pi_{x\in A}\, x$.

4.27. Soient a, c des entiers tels que $0 < c < a$, c non diviseur de a. Soit n l'entier tel que $nc \leqslant [a/2] < (n+1)c$. On a

(47) $$nc < a/2 < (n+1)c \qquad 2nc < a < (2n+2)c$$

(48) $$a - nc > a/2 \geqslant [a/2]$$

(49) $$a - (n+1)c < a/2.$$

Nous appellerons cas A le cas où $2nc < a < (2n+1)c$, cas B le cas où $(2n+1)c < a < (2n+2)c$. D'après (47), on est dans le cas A ou dans le cas B.
On a

(50) $$a - (n+1)c < nc < a - nc \qquad \text{dans le cas A}$$

(51) $$a - (n+2)c < nc < a - (n+1)c \qquad \text{dans le cas B.}$$

4.28. Lemme. On utilise les notations de 4.27. Supposons $n \geqslant 1$, et soit $i \in \{0,1,\ldots, n-1\}$. On a, dans le cas A,

$$\psi(\{1,2,3,\ldots, (n-i)c-1, a-(n+i)c, a-(n+i-1)c,\ldots, a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n-i$$

et, dans le cas B,

$$\psi(\{1,2,3,\ldots, (n-i)c-1, a-(n+i+1)c, a-(n+i)c,\ldots, a-c,a\}) \leqslant [a/2]+ n-i.$$

(Observons que $a-(n+i)c > (n-i)c-1$ dans le cas A, et $a-(n+i+1)c > (n-i)c-1$ dans le cas B).

On a

(52) $$\psi(\{1,2,3,\ldots, [a/2], a-nc, a-(n-1)c,\ldots, a-c,a\}) = [a/2] + n + 1$$

d'après 4.12 (rappelons l'inégalité (48)).

Cas A. D'après (52), la définition de n, et le lemme 4.17, on a

(53) $$\psi(\{1,2,3,\ldots, nc, a-nc, a-(n-1)c,\ldots, a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n + 1.$$

Aucun multiple de nc n'appartient à $\{a-nc, a-(n-1)c,\ldots, a-c, a\}$ (puisque c est non diviseur de a). Soit Q l'ensemble figurant dans (53). Compte tenu de (50), on a $Q - nc \subset Q$. D'après le lemme 4.18(iii),

$$\psi(\{1,2,3,\ldots,\ nc-1,\ a-nc,\ a-(n-1)c,\ldots,\ a-c,a\})$$
$$= \inf\ (\psi(Q),\ \psi(Q)-1) = \psi(Q) - 1$$
$$\leqslant [a/2] + n \qquad \text{d'après (53).}$$

La formule du lemme est donc établie pour $i = 0$. Raisonnant par récurrence sur i, en supposant la formule établie pour $i-1$:

(54) $$\psi(\{1,2,3,\ldots,\ (n-i+1)c-1,\ a-(n+i-1)c,\ a-(n+i-2)c,\ldots,\ a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n - i + 1.$$

On a $(n-i)c < a-(n+i)c \leqslant (n-i+1)c-1$, donc (54) et le lemme 4.17 entraînent

(55) $$\psi(\{1,2,3,\ldots,\ (n-i)c,a-(n+i)c,a-(n+i-1)c,\ldots,a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n-i+1.$$

Utilisant comme plus haut le lemme 4.18(iii), on en déduit

$$\psi(\{1,2,3,\ldots,\ (n-i)c-1,a-(n+i)c,a-(n+i-1)c,\ldots,a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n-i.$$

Le lemme est donc établi dans le cas A.

<u>Cas B</u>. D'après (52), (49), (51) et le lemme 4.17, on a

$$\psi(\{1,2,3,\ldots,\ nc,\ a-(n+1)c,\ a-nc,\ldots,\ a-c,a\}) \leqslant [a/2] + n + 1.$$

Cela posé, la démonstration se poursuit exactement comme dans le cas A, en utilisant (51) au lieu de (50).

4.29. <u>Proposition</u>. <u>Soient</u> a, <u>c des entiers</u> > 0. <u>On suppose</u> c <u>non diviseur de</u> a, <u>et</u> $c,\ 2c,\ldots,\ hc < a$. <u>Alors</u>

$$\psi(\{a-hc,\ a-(h-1)\ c,\ldots,\ a - c,\ a\}) = [a/2] + 1.$$

Si $c > (a/2)$, on a

$$[a/2]+1 \leqslant \psi(\{a-hc,\ a-(h-1)c,\ldots,a\}) \leqslant \psi(\{1,2,\ldots,\ [a/2],a\}) = [a/2] + 1$$

(4.20, 4.17, 4.12), d'où la proposition. Supposons $c < (a/2)$. Utilisons les notations de 4.27 et 4.28. On a $n \geqslant 1$. Appliquons le lemme 4.28 avec $i = n-1$. On obtient, dans le cas A,

(56) $$\psi(\{1,2,\ldots,\ c-1,\ a-(2n-1)c,\ a-(2n-2)c,\ldots,\ a-c,a\}) \leqslant [a/2] + 1.$$

On a $hc < a$, donc $h \leqslant 2n$, et $a-2nc \in \{1,2,\ldots,\ c-1\}$, donc (56) et le lemme 4.17 entraînent

$$\psi(\{a-hc,\ a-(h-1)c,\ldots,\ a-c,a\}) \leqslant [a/2] + 1$$

d'où la proposition. Dans le cas B,

$$\psi(\{1,2,\ldots,c-1,\ a-2nc,\ a-(2n-1)c,\ldots,\ a-c,a\}) \leqslant [a/2] + 1.$$

On a $h \leqslant 2n+1$, et $a-(2n+1)c \in \{1,2,\ldots,\ c-1\}$; on termine comme dans le cas A.

4.30. <u>Lemme</u>. <u>Soient</u> d <u>un entier</u> > 0, n <u>un entier</u> > 2, $j \in \{0,1,\ldots,\ d-1\}$, <u>et</u> $R \in \mathfrak{F}(\mathbb{N}^*)$ <u>tel que</u> $nd \in R \subset \{nd-j,\ nd-j+1,\ldots,\ nd\}$. <u>Alors</u>

$$\psi(\{1,2,\ldots,j,\ (n-1)d\} \cup R) = [a/2] + \text{Card } R+1.$$

Pour $j = d-1$, on a, compte tenu de $n > 2$,

$\psi(\{1,2,\ldots,d-1,\ (n-1)d\} \cup R)$

$= \psi(\{1,2,\ldots,d\} \cup (\{(n-1)d\} \cup R))$ (lemme 4.18(ii))

$= [a/2] + \text{Card } R+1$ (prop.4.21(ii)).

Supposons $j < d-1$, et le lemme établi pour $j+1$. Si $j+1$ a un multiple appartenant à $\{(n-1)d\} \cup R$, on a

$\psi(\{1,2,\ldots,j,\ (n-1)d\} \cup R) = \psi(\{1,2,\ldots,j+1,(n-1)d\} \cup R)$ (lemme 4.18(ii))

$= [a/2] + \text{Card } R+1$ (hypothèse de récurrence).

Sinon, on a

(57) $\psi(\{1,2,\ldots,j,\ (n-1)d\} \cup R)$

$= \inf(\psi(\{1,2,\ldots,j+1,\ (n-1)d\} \cup R),\ \psi(\{1,2,\ldots,j+1,\ (n-1)d\} \cup R')-1)$

où $R' \supset R$ et $nd-(j+1) \in R'$. Compte tenu du lemme 4.17,

$\psi(\{1,2,\ldots,j+1,(n-1)d\} \cup R') \geqslant \psi(\{1,2,\ldots,j+1,(n-1)d\} \cup (\{nd-j-1\} \cup R))$

$= [a/2] + (\text{Card } R+1) + 1$

d'après l'hypothèse de récurrence (car $nd-j-1 \notin R$). Alors (57) donne, en utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence,

$\psi(\{1,2,\ldots,j,(n-1)d\} \cup R) = [a/2] + \text{Card } R+1.$

Le lemme est donc établi.

4.31. Proposition. Soient a,b des entiers tels que $0 < b < a$.

(i) Si $b = \frac{2}{3}a$ ou $\frac{3}{4}a$ ou $\frac{4}{5}a\ldots$ (autrement dit, si $b = a-\delta$ avec δ diviseur de a et $\delta < \frac{a}{2}$), on a

$$\psi(\{b,a\}) = [a/2] + 2.$$

(ii) Sinon, $\psi(\{b,a\}) = [a/2] + 1$.

Le lemme 4.30, où l'on fait $j = 0$, donne (i). La prop. 4.29 donne (ii), sauf si $a = 2b$. Dans ce cas, on a

$$b + 1 \leqslant \psi(\{b,a\}) \leqslant \psi(\{1,2,\ldots,\ b,a\}) = b + 1$$

(4.20, 4.17, 4.12), d'où $\psi(\{b,a\}) = b + 1$.

4.32. Exemples. $\psi(\{a-1,a\}) = [a/2] + 2$ si $a \geqslant 3$

$\psi(\{a-2,a\}) = [a/2] + 2$ si a est pair et $\geqslant 6$

$\psi(\{a-2,a\}) = [a/2] + 1$ si a est impair et $\geqslant 3$.

D'où certains des résultats annoncés dans l'introduction.

4.33. Soient $Q,Q' \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$, tels que $Q \cap Q' = \emptyset$. On notera $\mathcal{P}(n\ ;\ Q,Q')$ l'ensemble des partitions π de n telles que $\Sigma(\pi) \cap Q = \emptyset$ et $\Sigma(\pi) \supset Q'$.
Soit $p(n\ ;\ Q,Q') = \mathrm{Card}\ \mathcal{P}(n\ ;\ Q,Q')$.
On a $\mathcal{P}(n\ ;\ Q) = \mathcal{P}(n\ ;\ Q,\emptyset)$, $p(n\ ;\ Q) = p(n\ ;\ Q,\emptyset)$. Les résultats 4.34, 4.35 sont donc des généralisations de 4.2 et 4.6.

4.34. Lemme. Soient Q,Q' comme en 4.33. Posons

$$f_{Q,Q'} = f_Q - \Sigma_{i\in Q'} f_{Q\cup i} + \Sigma_{i,j\in Q',\ i<j} f_{Q\cup i\cup j} - \Sigma_{i,j,k\in Q',\ i<j<k} f_{Q\cup i\cup j\cup k} + \dots$$

Alors

$$p(n\ ;\ Q,Q') = (f_{Q,Q'}(T)p)(n).$$

En effet,

$$\mathcal{P}(n\ ;\ Q,Q') = \mathcal{P}(n\ ;\ Q) \setminus \cup_{i\in Q'} \mathcal{P}(n\ ;\ Q\cup i)$$

et il suffit d'appliquer le principe d'inclusion-exclusion.

4.35. Proposition. Soient Q,Q' comme en 4.33. Quand $n \to \infty$, $p(n\ ;\ Q,Q')/p(n)$ admet un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-1/2}$.

Même raisonnement que pour 4.6, en utilisant cette fois 4.34.

V. Calcul de u(a)

Soit a un entier > 0, fixé dans tout ce chapitre. On pose $\tilde{a} = \frac{a}{2} - 1$ si a est pair, $\tilde{a} = [a/2]$ si a est impair ; $\tilde{a}$ est donc le plus grand entier k tel que $k < a/2$.

5.1. Notations. Nous allons construire un arbre A_a. Le lecteur fera bien de suivre la construction dans le cas de l'arbre A_{30}, que nous avons figuré à l'Appendice C.

Les sommets de A_a seront certaines suites strictement croissantes $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ d'entiers appartenant à $[1,\tilde{a}]$. Le niveau d'un tel sommet sera r. Pour chaque sommet s de niveau r, nous définirons l'ensemble des sommets successeurs de s, qui seront des sommets de niveau r+1. Un sommet peut n'avoir aucun successeur ; il est dit alors terminal. Si s, s' sont deux sommets, on écrit $s < s'$ s'il existe une suite $(s_1, \ldots, s_n)$ de sommets avec $s_1 = s, s_n = s'$, s_{i+1} successeur de s_i pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Certains sommets de A_a seront dits distingués. On notera A'_a l'ensemble des sommets distingués de A_a.

5.2. Construction de A_a. La suite $\emptyset$ est l'unique sommet de niveau 0. La construction procède ensuite par récurrence sur le niveau. Pour la clarté, nous explicitons la définition des sommets de niveau 1 ou 2.

Un sommet de niveau 1 est un entier $i \in [1,\tilde{a}]$ tel que a ne soit pas multiple de i.

Soit i un sommet de niveau 1. Soit E l'ensemble des entiers $j \in [i+1,\tilde{a}]$ tels qu'aucun multiple de j n'appartienne à $a-\mathbb{N}i$ $(=\{a, a-i, a-2i, \ldots,\})$, autrement dit tels que $a \notin \mathbb{N}i + \mathbb{N}j$.

Il est clair que $[i+1,\tilde{a}] \cap \mathbb{N}i \subset E$. Si $[i+1,\tilde{a}] \cap \mathbb{N}i = \emptyset$, les successeurs de i sont les suites (i,j) où $j \in E$. Si $[i+1,\tilde{a}] \cap \mathbb{N}i \neq \emptyset$, soit j_o son plus petit élément ; alors les successeurs de i sont les suites (i,j) où $j \in E$ et $j \leq j_o$.

On suppose définis les sommets de niveau r, et vérifiée la propriété : si $(i_1, \ldots, i_r)$ est un sommet de niveau r, on a $a \notin \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$.

Soit $(i_1, \ldots, i_r)$ un sommet de niveau r. Soit E l'ensemble des $j \in [i_r+1,\tilde{a}]$ tels que $a \notin \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r + \mathbb{N}j$. D'après l'hypothèse de récurrence, l'ensemble $E' = [i_r+1,\tilde{a}] \cap (\mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r)$ est contenu dans E. Les successeurs de $(i_1,\ldots, i_r)$ sont les $(i_1,\ldots, i_r,j)$, où $j \in E$ et j est majoré par les éléments de E'. (Si $E' = \emptyset$, cela signifie seulement que $j \in E$).

5.3. Sommets distingués. Avec les notations de 5.2, le sommet $(i_1,\ldots, i_r)$ est dit distingué si $E' = \emptyset$.

Si $E' \neq \emptyset$, on a $E \neq \emptyset$, et $(i_1,\ldots, i_r)$ est non terminal. Donc un sommet terminal est distingué.

5.4. Exemple. La suite $\emptyset$ est un sommet distingué.

5.5. Exemple. Soit i un sommet de niveau 1. Alors i est distingué si $2i > \frac{a}{2}$, non distingué si $2i < \frac{a}{2}$. (On ne peut avoir $2i = \frac{a}{2}$). Plus généralement, si $(i,2i,3i,\ldots, hi)$ est un sommet, et si h a été choisi maximal, ce sommet est distingué.

5.6. Exemple. Si $a \leq 4$ ou $a = 6$, l'arbre A_a se réduit à la suite vide. On a $A_5 = A_5' = \overset{\emptyset}{\bullet}\!\!\frac{\quad\quad}{}\!\!\overset{2}{\bullet}$

5.7. Lemme. Soit $(i_1,\ldots, i_r)$ un sommet.

(i) $[1,i_r] \cap (\mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r) = \{i_1,\ldots, i_r\}$.

(ii) Si $(i_1,\ldots, i_r)$ est distingué,

$$[1,\tilde{a}] \cap (\mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r) = \{i_1,\ldots, i_r\}.$$

(iii) Si $(i_1,\ldots, i_r)$ est distingué,

$$[1,\tilde{a}] \cup (a - \mathbb{N}i_1 - \ldots - \mathbb{N}i_r) = [1,\tilde{a}] \cup \{a,a-i_1,\ldots,a-i_r\}.$$

(Conformément aux conventions du chap. IV, on supprime les nombres ≤ 0),

Prouvons (i). L'assertion est claire si $r = 1$. On raisonne par récurrence sur r. Soit $j = n_1 i_1 +\ldots+ n_r i_r$ avec $n_1,\ldots, n_r \in \mathbb{N}$.

Supposons $j \in [1,i_r]$, et prouvons que $j \in \{i_1,\ldots, i_r\}$. Si $j = i_r$, c'est clair. Supposons $j < i_r$. Alors $n_r = 0$, donc $j \in \mathbb{N}i_1 +\ldots+\mathbb{N}i_{r-1}$. On a $j < i_r \leq \tilde{a}$; si de plus $j > i_{r-1}$, la définition récurrente de $(i_1,\ldots, i_r)$ à partir de $(i_1,\ldots, i_{r-1})$ entraîne $i_r \leq j$, contradiction. Donc $j \leq i_{r-1}$. Alors

$j \in [1,i_{r-1}] \cap (\mathbb{N}i_r + \ldots + \mathbb{N}i_{r-1})$, et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Supposons $(i_1,\ldots, i_r)$ distingué. Alors $(\mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r) \cap [i_r+1,\tilde{a}] = \emptyset$, donc (i) entraîne (ii). Prouvons (iii). Soit $j = a-b$, avec $b \in \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$ et $j \geq 1$, et prouvons que $j \in [1,\tilde{a}] \cup \{a, a-i_1,\ldots, a-i_r\}$. Il suffit d'envisager le cas où $j \geq \tilde{a}+1$. Si a est impair, on a $j \geq [a/2]+1$, donc $b \leq [a/2] = \tilde{a}$, donc $b \in \{0,i_1, i_2,\ldots, i_r\}$ d'après (ii). Si a est pair, on a $j \geq \frac{a}{2}$, donc $b \leq \frac{a}{2}$. Si $b < \frac{a}{2}$, on a $b \leq \tilde{a}$ et l'on applique encore (ii). Si $b = \frac{a}{2}$, on a $\frac{a}{2} \in \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$, donc $a \in \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$, contradiction.

5.8. <u>Remarque</u>. Si $(i_1,\ldots, i_r)$ est un sommet, on a $i_{n+1} \leq i_n + i_1$ pour $n = 1,2,\ldots, r-1$. Cela résulte aussitôt de 5.7(i).

5.9. <u>Lemme</u>. <u>Soit $(i_1, i_2,\ldots, i_r)$ un sommet distingué. On a</u> $i_r > \tilde{a} - i_1$.

Si $i_r + i_1 \leq \tilde{a}$, on a $i_r + i_1 \in [i_r+1,\tilde{a}] \cap (\mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r)$, donc $(i_1,\ldots, i_r)$ est non distingué.

5.10 <u>Lemme</u>. <u>Soit $(i_1,\ldots, i_r)$ un sommet distingué non terminal et non vide. Soient $(i_1,\ldots, i_r,j)$, $(i_1,\ldots, i_r,j')$, ..., $(i_1,\ldots, i_r, j'')$ les successeurs de $(i_1,\ldots, i_r)$, avec $j < j' < \ldots < j''$. Alors ces successeurs sont tous distingués, et $(i_1,\ldots, i_r, j'')$ est terminal.</u>

Soit $(i_1,\ldots, i_{r+1})$ un successeur non distingué, et aboutissons à une contradiction. Il existe $n_1,\ldots, n_{r+1} \in \mathbb{N}$ tels que

$$i_{r+1} + 1 \leq n_1\, i_1 + \ldots + n_{r+1}\, i_{r+1} \leq \tilde{a}.$$

Comme $(i_1,\ldots, i_r)$ est distingué, on a $n_{r+1} \geq 1$. Si l'un des entiers $n_1,\ldots, n_r$ est > 0, ou si $n_{r+1} \geq 2$, on a

$$n_1\, i_1 + \ldots + n_{r+1}\, i_{r+1} \geq i_1 + i_{r+1} \geq i_1 + i_r > \tilde{a}$$

d'après 5.9, ce qui est contradictoire. Donc $n_1 = \ldots = n_r = 0$, $n_{r+1} = 1$, d'où

$i_{r+1} + 1 \le i_{r+1}$, contradiction.

On a donc prouvé que $(i_1,\dots, i_r,j)$, $(i_1,\dots, i_r,j')$,..., $(i_1,\dots i_r,j")$ sont distingués.

Soit $k \in [j"+1,\tilde{a}]$. Supposons $a \notin \mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r+\mathbb{N}k$. Comme $(i_1,\dots, i_r)$ est distingué, $(i_1,\dots, i_r,k)$ est un successeur de $(i_1,\dots, i_r)$, ce qui contredit la définition de $j"$. Donc

$$a \in \mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r+\mathbb{N}k \subset \mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r+\mathbb{N}j"+\mathbb{N}k.$$

Donc $(i_1,\dots, i_r,j",k)$ n'est pas successeur de $(i_1,\dots, i_r,j")$. Ainsi, $(i_1,\dots, i_r, j")$ est terminal.

5.11. Remarque. Par contre, bien que la suite vide soit un sommet distingué, il existe des sommets de niveau 1 non distingués (du moins si $a \ge 13$).

5.12. Lemme. *Soit $(i_1,\dots, i_r)$ une suite strictement croissante d'entiers, avec $i_1 > \frac{a}{3}$ et $i_r \le \tilde{a}$. Alors $(i_1,\dots, i_r)$ est un sommet distingué.*

C'est clair si $r=1$. Raisonnons par récurrence sur r. On peut donc supposer que $(i_1,\dots, i_{r-1})$ est un sommet distingué. Supposons $a = n_1i_1+\dots+n_ri_r$ avec $n_1,\dots, n_r \in \mathbb{N}$. Si $n_1+\dots+n_r \ge 3$, on a $a \ge 3i_1 > a$, contradiction. Si $n_1+\dots+n_r \le 2$, on a $a \le 2i_r \le 2\tilde{a} < a$, contradiction. Donc $(i_1,\dots, i_r)$ est un sommet, et ce sommet est distingué d'après 5.10.

5.13. Notation Q_s. Soit $s = (i_1,\dots, i_r)$ un sommet. On pose

$$Q_s = [1,i_r] \cup (a-\mathbb{N}i_r-\dots-\mathbb{N}i_r)$$

(où l'on supprime les nombres ≤ 0).

On a $Q_\emptyset = \{a\}$.

5.14. Lemme. *Soit s un sommet de niveau r. Il existe un entier $v_s \ge 0$ tel que*

$$f(Q_s\ ;\ X) \equiv v_s(1-X)^{[a/2]+r+1} \quad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

On a $\qquad Q_s \supset [1,i_r] \cup \{a,a-i_1, a-i_2,\dots,a-i_r\}$, donc

$$\psi(Q_s) \ge [a/2]+r+1 \qquad (4.17 \text{ et } 4.21).$$

Cela signifie que

$$f(Q_s\ ;\ X)\ \equiv\ v_s(1-X)^{[a/2]\ +\ r\ +\ 1} \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]\ +r+2}$$

avec un $v_s \in \mathbb{Z}$. Si $v_s = 0$, le lemme est prouvé. Si $v_s \neq 0$, on a

$$\psi(Q_s) = [a/2] + r + 1,\ u(Q_s) = v_s,\ \text{donc}\ v_s > o\ \text{d'après 4.8.}$$

5.15. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $s = (i_1,\dots, i_r)$ <u>un sommet</u>. <u>Soit</u> $b \in [\,i_r+1,\ \tilde{a}]$. <u>On suppose que</u> $a \in \mathbb{N}i_1 +\dots+ \mathbb{N}i_r + \mathbb{N}b$. <u>Posons</u>

$$Q = Q_s \cup [\,i_r+1,\ b-1] = [\,1,b-1] \cup (a-\mathbb{N}i_1 -\dots- \mathbb{N}i_r)$$

$$Q' = Q \cup b = [\,1,b] \cup (a-\mathbb{N}i_1 -\dots- \mathbb{N}i_r).$$

<u>Alors</u>

$$f(Q\ ;\ X)\ \equiv\ f(Q'\ ;\ X) \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]\ +r+2}$$

Soit $n\,b$ le plus petit multiple de b qui appartienne à Q, autrement dit qui appartient à $a-\mathbb{N}i_1 -\dots- \mathbb{N}i_r$ (ce multiple existe puisque $a \in \mathbb{N}i_r +\dots+ \mathbb{N}i_r + \mathbb{N}\,b$). D'après 4.10(i),

$$f(Q\,;X) = f(Q'\,;X) + X^b\,f(Q' \cup (Q-b)\ ;X) + X^{2b}\,f(Q' \cup (Q-b) \cup (Q-2b)\ \ ;\ X)$$

$$+\dots+ X^{(n-1)b}\,f(Q' \cup (Q-b) \cup \dots \cup (Q-(n-1)b)\ \ ;\ X).$$

Or

$$Q' \cup (Q-b) \supset [\,1,b] \cup \{a,a-i_1,\ a-i_2,\dots,\ a-i_r,\ a-b\}$$

donc (4.17 et 4.21)

$$[a/2] + r + 2 \le \psi\ (Q' \cup (Q-b)) \le \psi\ (Q' \cup (Q-b) \cup (Q-2b)) \le \dots ;$$

autrement dit,

$$f(Q' \cup (Q-b)\,;X),\ f(Q' \cup (Q-b) \cup (Q-2b)\,;X),\dots \equiv 0 \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2},$$

d'où le lemme.

5.16. <u>Lemme</u>. <u>Soient</u> $s = (i_1,\dots, i_r)$ <u>un sommet</u>, $s' = (i_1,\dots, i_r,b)$ <u>un sommet successeur</u>, $Q = Q_s \cup [\,i_r+1,\ b-1]$, $Q' = Q_s \cup [\,i_r+1,b] = b \cup Q$.

(i) <u>Si</u> $b \in \mathbb{N}i_r +\dots+ \mathbb{N}i_r$, <u>on a</u>

$$f(Q;X) = \frac{f(Q_{s'};X)}{1-X^b} \equiv \frac{v_{s'}}{b}(1-X)^{[a/2]+r+1} \quad \text{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

(ii) Si $b \notin \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$, <u>on a</u>

$$f(Q;X) \equiv \frac{f(Q_{s'};X)}{1-X^b} + f(Q';X) \quad \text{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}$$

$$\equiv \frac{v_{s'}}{b}(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(Q';X) \quad \text{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

<u>(les fonctions rationnelles écrites étant des polynômes)</u>.

Puisque s' est un sommet, aucun multiple de b n'appartient à $a - \mathbb{N}i_1 - \ldots - \mathbb{N}i_r$, donc aucun multiple de b n'appartient à Q.

Supposons $b \in \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$. Alors

$$Q_{s'} = [1,b] \cup (a - \mathbb{N}i_1 - \ldots - \mathbb{N}i_r - \mathbb{N}b)$$

$$= [1,b] \cup (a - \mathbb{N}i_1 - \ldots - \mathbb{N}i_r) = Q \cup b.$$

D'après un cas particulier, déjà signalé, de 4.10(ii), on a alors

$$f(Q;X) = \frac{f(Q_{s'};X)}{1-X^b}.$$

Comme s' est de niveau $r+1$, on a, d'après 5.14,

$$f(Q_{s'};X) \equiv v_{s'}(1-X)^{[a/2]+r+2} \quad \text{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+3}$$

donc $$\frac{f(Q_{s'};X)}{1-X^b} \equiv \frac{v_{s'}}{b}(1-X)^{[a/2]+r+1} \quad \text{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

Supposons $b \notin \mathbb{N}i_1 + \ldots + \mathbb{N}i_r$. Soit nb le plus petit multiple de b tel que $Q-(n+1)b \subset b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-nb)$. Alors, d'après 4.10(ii),

$$f(Q;X) = X^{nb}\,\frac{f(b \cup Q \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-nb)\ ;X)}{1-X^b}$$

$$+ f(Q';X) + X^b f(Q' \cup (Q-b);X) + \ldots + f(Q' \cup (Q-b) \cup \ldots \cup (Q-(n-1)b);X).$$

Comme dans la démonstration du lemme 5.15, on a

$$[a/2]+r+2 \leqslant \psi(Q' \cup (Q-b)) \leqslant \psi(Q' \cup (Q-b) \cup (Q-2b)) \leqslant \dots$$

D'autre part, par définition de n, on a

$$b \cup Q \cup (Q-b) \cup \dots \cup (Q-nb) = [1,b] \cup (a-\mathbb{N}i_1-\mathbb{N}i_2-\dots-\mathbb{N}i_r-\mathbb{N}b) = Q_{s'},$$

donc

$$f(Q\,;X) \equiv X^{nb}\,\frac{f(Q_{s'}\,;X)}{1-X^b} + f(Q'\,;X) \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

Comme plus haut, on a

$$\frac{X^{nb}f(Q_{s'}\,;X)}{1-X^b} \equiv \frac{f(Q_{s'}\,;X)}{1-X^b} \equiv \frac{v_{s'}}{b}\ (1-X)^{[a/2]+r+1} \ \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2}$$

d'où le lemme.

5.17. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> s <u>un sommet non distingué</u>. <u>Soient</u> $b < b' < \dots < b''$ <u>les entiers tels que</u> $t=(s,b)$, $t'=(s,b'),\dots,$ $t''=(s,b'')$ <u>soient les successeurs de</u> s. <u>On a</u>

$$v_s = \frac{1}{b}\,v_t + \frac{1}{b'}\,v_{t'} + \dots + \frac{1}{b''}\,v_{t''}\ .$$

Nous supposerons pour simplifier les notations que s a 3 successeurs (s,b), (s,b'), (s,b''). Il sera clair que la démonstration est générale.

Posons $s=(i_1, i_2,\dots, i_r)$. Par définition des successeurs et des sommets non distingués : 1) b'' est le seul entier de $[i_r+1, b'']$ qui appartient à $\mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r$; 2) b,b',b'' sont les seuls entiers $k \in [i_r+1, b'']$ tels que $a \notin \mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r+\mathbb{N}k$.

D'après le lemme 5.15 appliqué de proche en proche, on a

$$f(Q_s\,;S) \equiv f(Q_s \cup [i_r+1,b-1]\,;X) \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2} \tag{58}$$

(cette partie du raisonnement est vide si $b=i_r+1$).

D'après (58) et le lemme 5.16(ii), on a, en posant $R=Q_s \cup [i_r+1,b] = [1,b] \cup (a-\mathbb{N}i_1-\dots-\mathbb{N}i_r)$:

$$f(Q_s\,;X) \equiv \frac{v_t}{b}\,(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(R\,;X) \qquad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

Appliquons de nouveau plusieurs fois le lemme 5.15 et le lemme 5.16(ii) ; posant $R' = Q_s \cup [\,i_r+1,\ b'\,]$, on a, modulo $(1-X)^{[a/2]+r+2}$,

$$\begin{aligned} f(R;X) &\equiv f(Q_s \cup [\,i_r+1,\ b'-1\,]\ ;X) \\ &\equiv \frac{v_{t'}}{b'}\,(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(R'\,;X) \\ &\equiv \frac{v_{t'}}{b'}\,(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(Q_s \cup [\,i_r+1,\ b''-1\,]\ ;X). \end{aligned}$$

Enfin, d'après le lemme 5.16(i),

$$f(Q_s \cup [\,i_r+1,\ b''-1\,]\ ;X) \equiv \frac{v_{t''}}{b''}\,(1-X)^{[a/2]+r+1} \qquad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

De tout ce qui précède, on déduit

$$f(Q_s\,;X) \equiv \left(\frac{v_t}{b} + \frac{v_{t'}}{b'} + \frac{v_{t''}}{b''}\right)(1-X)^{[a/2]+r+1} \qquad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2},$$

d'où le lemme.

5.18. Lemme. Soit $s = (i_1,\dots,i_r)$ un sommet distingué. Soient $b < b' < \dots < b'$ les entiers tels que $t = (s,b),\dots,\ t'' = (s,b'')$ soient les successeurs de s. On a

$$v_s = \frac{1}{b}\,v_t + \frac{1}{b'}\,v_{t'} + \dots + \frac{1}{b''}\,v_{t''} + a!\,a^{\varepsilon}(a-i_1)(a-i_2)\dots(a-i_r)$$

avec $\varepsilon = 1$ si a est impair, $\varepsilon = 2$ si a est pair.

Supposons pour simplifier les notations que s a 3 successeurs (s,b), (s,b'), (s,b''). Raisonnant comme au lemme 5.17, on trouve d'abord

$$f(Q_s\,;X) \equiv \left(\frac{1}{b}\,v_t + \frac{1}{b'}\,v_{t'}\right)(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(Q_s \cup [\,i_r+1,\ b''-1\,]\ ;X) \qquad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}. \tag{59}$$

Comme s est distingué, on a $b'' \notin \mathbb{N}i_1+\dots+\mathbb{N}i_r$. En appliquant le lemme 5.16(ii), on a, en posant $Q' = [\,1,b''\,] \cup (a-\mathbb{N}i_1-\dots-\mathbb{N}i_r)$,

$$f(Q_s \cup [\,i_r+1,b''-1\,]\,;X) \equiv \frac{v_{t''}}{b''}\,(1-X)^{[a/2]+r+1} + f(Q';X) \qquad \mathrm{mod.}\,(1-X)^{[a/2]+r+2}. \tag{60}$$

Par définition de b" et des sommets distingués, tous les entiers $k \in [b"+1,\tilde{a}]$ sont tels que $a \in \mathbb{N}i_1+\ldots+\mathbb{N}i_r+\mathbb{N}k$. Donc, d'après le lemme 5.15 appliqué de proche en proche,

$$(61)\qquad f(Q' ; X) \equiv f([1,\tilde{a}] \cup (a-\mathbb{N}i_1-\ldots-\mathbb{N}i_r) ; X) \qquad \mathrm{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2}$$

$$= f([1,\tilde{a}] \cup \{a,a-i_1,\ldots, a-i_r\};X) \qquad (5.7(\mathrm{iii})).$$

Si a est pair, on a, d'après la prop.4.13,

$$(62)\qquad f([1,\tilde{a}] \cup \{a,a-i_1,\ldots, a-i_r\};X) = (1-X^a)^2(1-X^{a-i_1})\ldots(1-X^{a-i_r}) \prod_{1\leqslant j\leqslant \tilde{a}}(1-X^j)$$

$$\equiv a!a^2(a-i_1)\ldots(a-i_r)(1-X)^{(a/2)+r+1} \qquad \mathrm{mod.}\ (1-X)^{(a/2)+r+2}.$$

Si a est impair, on a, d'après la prop. 4.12,

$$(63)\qquad f([1,\tilde{a}] \cup \{a,a-i_1,\ldots,a-i_r\} ;X) = (1-X^a)(1-X^{a-i_1})\ldots(1-X^{a-i_r}) \prod_{1\leqslant j\leqslant \tilde{a}}(1-X^j)$$

$$\equiv a!a(a-i_1)\ldots(a-i_r)(1-X)^{[a/2]+r+1} \qquad \mathrm{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

Le lemme résulte de (59), (60), (61), (62), (63).

5.19. <u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $s = (i_1,\ldots, i_r)$ <u>un sommet terminal. On a</u>

$$v_s = \tilde{a}!a^{\varepsilon}(a-i_1)\ldots(a-i_r)$$

<u>avec</u> $\varepsilon = 1$ <u>si a est impair</u>, $\varepsilon = 2$ <u>si a est pair</u>.

Comme s est distingué (5.3), c'est un cas particulier de 5.18.

5.20. <u>Définition de</u> $\gamma(s)$. Soit $s = (i_1,\ldots, i_r)$ un sommet distingué. On pose

$$\gamma(s) = \frac{\tilde{a}!}{i_1 i_2\ldots i_r} a^{\varepsilon}(a-i_1)(a-i_2)\ldots(a-i_r)$$

avec $\varepsilon = 1$ si a est impair, $\varepsilon = 2$ si a est pair.

5.21. <u>Exemple</u>. $\gamma(\emptyset) = \tilde{a}!a^2 = 2(a/2)!a$ si a est pair, $\gamma(\emptyset) = [a/2]!a$ si a est impair.

5.22. <u>Exemple</u>. Supposons a impair. Soit $s = (2,4,6,\ldots, 2n)$ où 2n est le plus grand entier pair $\leqslant \tilde{a}$. Alors s est un sommet distingué, et $\gamma(s) = 1.3.5\ldots a$.

5.23. Lemme. Soit s un sommet distingué. Si a est pair, on a

$$2(a/2)!a \leqslant \gamma(s) \leqslant 2a!/((a/2)-1)!$$

Si a est impair, on a

$$\tilde{a}!a \leqslant \gamma(s) \leqslant a!/\tilde{a}!$$

Posons $s = (i_1,\dots, i_r)$.

Supposons a pair. Comme $a-i_1,\dots, a-i_r > (a/2) > i_1,\dots, i_r$, on a évidemment $\gamma(s) \geqslant \tilde{a}!a^2 = 2(a/2)!a$. Soit $\{j_1,j_2,\dots, j_q\}$ le complémentaire de $\{i_1,i_2,\dots, i_r\}$ dans $[1,\tilde{a}]$. On a

$$\frac{\tilde{a}!}{i_1i_2\dots i_r} = j_1j_2\dots j_q \leqslant (a-j_1)(a-j_2)\dots(a-j_q)$$

donc

$$\gamma(s) \leqslant a^2(a-i_1)\dots(a-i_r)(a-j_1)\dots(a-j_q)$$

$$= a^2(a-1)(a-2)\dots(a-\tilde{a}) = 2a(a-1)(a-2)\dots(a/2) = 2a!(((a/2)-1)!)^{-1}.$$

Supposons a impair. Raisonnant de même, on a $\gamma(s) \geqslant \tilde{a}!a$ et $\gamma(s) \leqslant a(a-i_1)\dots(a-i_r)(a-j_1)\dots(a-j_q) = a(a-1)(a-2)\dots(a-\tilde{a}) = a!/(\tilde{a}!)$.

5.24. Lemme. Soit $s = (i_1,i_2,\dots,i_r)$ un sommet. On a

$$f(Q_s;X) \equiv i_1i_2\dots i_r\ (\Sigma_{r\in A',r\geqslant s}\ \gamma(r))(1-X)^{[a/2]+r+1} \qquad \text{mod.}\ (1-X)^{[a/2]+r+2}.$$

Supposons s terminal. Alors,

$$\Sigma_{r\in A'_a\ ,\ r\geqslant s}\ \gamma(r) \qquad = \gamma(s) = \frac{v_s}{i_1i_2\dots i_r} \tag{5.19}$$

d'où le lemme dans ce cas. Maintenant, on raisonne par récurrence décroissante sur le niveau de s.

Supposons donc s non terminal, et soient $t = (s,b)$, $t' = (s,b'),\dots,$ $t'' = (s,b'')$ les successeurs de s. On a, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$v_t = i_1i_2\dots i_rb\ \Sigma_{r\in A'_a\ ,\ r\geqslant t}\ \gamma(r)$$

$$v_{t'} = i_1i_2\dots i_rb'\ \Sigma_{r\in A'_a\ ,\ r\geqslant t'}\ \gamma(r)$$

.....

$$v_{t''} = i_1i_2\dots i_rb''\ \Sigma_{r\in A'_a\ ,\ r\geqslant t''}\ \gamma(r).$$

Supposons s non distingué. D'après le lemme 5.17,

$$v_s = \frac{1}{b} v_t + \frac{1}{b'} v_{t'} + \ldots + \frac{1}{b''} v_{t''}$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_r (\Sigma_{r \in A'_a\,,\; r \geqslant t}\, \gamma(r) + \ldots + \Sigma_{r \in A'_a\,,\; r \geqslant t''} \gamma(r))$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_r\, \Sigma_{r \in A'_a\,,\; r \geqslant s} \gamma(r)$$

(on utilise une deuxième fois l'hypothèse que s est non distingué).

Supposons s distingué. D'après le lemme 5.18,

$$v_s = \frac{1}{b} v_t + \frac{1}{b'} v_{t'} + \ldots + \frac{1}{b''} v_{t''} + a!a^{\varepsilon}(a-i_1)\ldots(a-i_r)$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_r\, \Sigma_{r \in A'_a\,,\; r > s}\, \gamma(r) + a!a^{\varepsilon}(a-i_1)\ldots(a-i_r)$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_r\, [\Sigma_{r \in A'_a\,,\; r > s}\, \gamma(r) + \gamma(s)]$$

$$= i_1 i_2 \ldots i_r\, \Sigma_{r \in A'_a\,,\; r \geqslant s}\, \gamma(r).$$

5.25. Remarque. Comme $\gamma(r) > 0$ pour tout r, on déduit de 5.24 que $v_s > 0$, donc que $\psi(Q_s) = [a/2]+r+1$ et $u(Q_s) = v_s$ pour tout sommet s.

5.26. Proposition. $u(a) = \Sigma_{t \in A'_a}\, \gamma(t)$.

(Cf. 5.2 et 5.3 pour la définition de A'_a, et 5.20 pour la définition de $\gamma(s)$).

La prop. 5.26 est un cas particulier de 5.24.

5.27. Proposition. Soit i un entier tel que $(a/3) < i < (a/2)$. Soit B_i l'ensemble des suites strictement croissantes d'entiers appartenant à $[i,\tilde{a}]$ (la suite vide est incluse ; on a $B_i \subset A'_a$ d'après 5.12). Alors

$$\Sigma_{s \in B_i}\, \gamma(s) = \begin{cases} (i-1)!a^{\tilde{a}-i+3} & \text{si a est pair} \\ (i-1)!a^{\tilde{a}-i+2} & \text{si a est impair.} \end{cases}$$

Supposons a pair. On a, pour $(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in B_i$,

$$\frac{i(i+1)\ldots\tilde{a}}{a^2\tilde{a}!}\; \gamma(s) = j_1 j_2 \ldots j_q (a-i_1)(a-i_2)\ldots(a-i_r)$$

où $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ est le complémentaire de $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ dans $[i,\tilde{a}]$ ($j_1, j_2 \ldots, j_q$ deux à deux distincts). Le cardinal de $[i,\tilde{a}]$ est a-i+1 ; donc

$$a^{\tilde{a}-i+1} = \Pi_{i \leqslant j \leqslant a}\, (j + (a-j)).$$

Si l'on développe ce produit, on obtient la somme, pour toutes les parties $\{i_1,\dots i_r\}$ de $[i,\tilde{a}]$, des produits $j_1 j_2 \dots j_q$ $(a-i_1)(a-i_2)\dots(a-i_r)$ considérés plus haut. Donc

$$\Sigma_{s\in B_i} \gamma(s) = \frac{a^2\tilde{a}!}{i(i+1)\dots\tilde{a}} a^{\tilde{a}-i+1} = (i-1)!a^{\tilde{a}-i+3}.$$

On raisonne de même si a est impair.

5.28. La prop.5.26, simplifiée grâce à 5.27, permet un calcul assez rapide de $u(a)$ pour $a \leqslant 20$. Les résultats sont donnés dans l'Appendice B. On a $u(2n) \leqslant u(2n+1)$ pour $n=2,3,4,\dots,9$. Compte tenu de 4.22, il résulte de là que, pour a parcourant $[4,19]$, le comportement de $p(n\,;\{a\})$ pour n grand est "en dent de scie". Curieusement, on a aussi $p(n\,;\{2\}) \leqslant p(n\,;\{3\})$ pour $n \leqslant 106$, parce que les termes d'ordre $\geqslant 2$ des développements asymptotiques de $p(n\,;\{2\})$ et $p(n\,;\{3\})$ jouent alors un rôle non négligeable.

Il me paraît probable que l'inégalité $u(2n) \leqslant u(2n+1)$ reste vraie pour $n \geqslant 10$. Par contre, je ne pense pas que la fonction $a \mapsto u(a)$ soit croissante pour $a \geqslant 3$, malgré ce que laisserait supposer l'Appendice B.

5.29. Proposition. (i) Si a est pair,

$$([a/3]-1)!\; a^{(a/6)+3} \leqslant u(a) \leqslant 2^{(a/2)} a!/((a/2)-1)!.$$

(ii) Si a est impair,

$$([a/3]-1)!\; a^{(a/6)+2} \leqslant u(a) \leqslant 2^{[a/2]} a!/[a/2]!.$$

Les majorations résultent des 5.26, 5.23 et de la majoration évidente $\mathrm{Card}\, A_a \leqslant 2^{\tilde{a}}$. Les minorations résultent de 5.27, où l'on prend pour i le plus petit entier qui majore strictement a/3.

5.30. Corollaire. On a $\log u(a) \sim \frac{1}{2} a \log a$ quand $a \to \infty$.

On a

$$\log 2^{(a/2)} a!/((a/2)-1)! = a \log a - (a/2)\log(a/2) + o(a \log a) \sim (a/2) \log a$$

$$\log ([a/3]-1)!a^{(a/6)+3} = [a/3] \log [a/3] + (a/6)\log a + o(a \log a) \sim (a/2)\log a$$

d'où le résultat pour a pair. On raisonne de façon analogue pour a impair.

5.31. Bien entendu, la prop. 4.24 résulte du présent chapitre.

VI. Généralisation du phénomène d'Erdös-Szalay

6.1. Lemme. Soient b, c des entiers tels que $2 \leqslant b \leqslant c$. Soit $\mathcal{P}(n,b,c)$ l'ensemble des partitions de n dont les 2 premières composantes sont $\{0\}$ et $[b,c]$. Alors, quand $n \to \infty$,

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(n,b,c)/p(n) \sim (c+1)(b-1)!\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{b}\frac{1}{n^{b/2}} \qquad \text{si } c \leqslant 2b-2$$

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(n,b,c)/p(n) \sim (2b)b!\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}} \qquad \text{si } c = 2b-1.$$

Soit $\mathcal{P}'(n,b,c)$ l'ensemble des partitions π de n telles que $1,2,\dots, b-1 \notin \Sigma(\pi)$ et $c+1 \notin \Sigma(\pi)$. Pour $b \leqslant i \leqslant c$, soit $\mathcal{P}''(n,b,c,i)$ l'ensemble des $\pi \in \mathcal{P}'(n,b,c)$ telles que $i \notin \Sigma(\pi)$. Alors

$$\mathcal{P}(n,b,c) = \mathcal{P}'(n,b,c)\setminus \cup_{b\leqslant i\leqslant c}\mathcal{P}''(n,b,c,i).$$

Donc

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(n,b,c) = \operatorname{Card}\mathcal{P}'(n,b,c) + \Sigma_j \pm p(n\,;\,Q_j)$$

où, pour tout j, Q_j est la réunion de $\{1,2,\dots, b-1, c+1\}$ et d'une partie non vide de $[b,c]$.

Supposons $c \leqslant 2b-2$. Alors $[(c+1)/2] \leqslant b-1$, et 4.12 entraîne

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}'(n,b,c)/p(n) \sim (c+1)(b-1)!\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{b}\frac{1}{n^{b/2}}$$

$$p(n\,;\,Q_j)/p(n) = O\left(\frac{1}{n^{(b+1)/2}}\right) \qquad \text{pour tout } j,$$

d'où le lemme.

Supposons $c = 2b-1$. D'après 4.13, on a

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}'(n,b,2b-1)/p(n) \sim (2b)(b-1)!(2b)\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}}$$

$$= (4b)b!\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}}\,.$$

La prop. 4.13 donne aussi

$$p(n\,;Q_j)/p(n) = O\left(\frac{1}{n^{(b+2)/2}}\right)$$

sauf si $Q_j = \{1,2,\ldots, b,2b\}$. Dans ce cas, d'après 4.12, on a

$$p(n\,;Q_j)/p(n) \sim (2b)b!\,(\frac{\pi}{\sqrt{6}})^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}}\,.$$

Donc

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,2b-1)/p(n) \sim (4b)b!\,(\frac{\pi}{\sqrt{6}})^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}} - (2b)b!\,(\frac{\pi}{\sqrt{6}})^{b+1}\frac{1}{n^{(b+1)/2}}$$

d'où le lemme.

6.2. Proposition. Soient b un entier ≥ 2, $\mathcal{R}(n,b)$ l'ensemble des partitions de n dont tous les sommants sont $\geq b$, $R(n,b)$ le nombre de $\pi \in \mathcal{R}(n,b)$ qui ne représentent pas tous les nombres $b, b+1,\ldots, n-b$. Alors, quand $n \to \infty$, $R(n,b)/p(n)$ a un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-(1/2)}$. Le premier terme de ce développement est

$$\frac{3}{2}(b-1)b!\,(\frac{\pi}{\sqrt{6}})^{b}\frac{1}{n^{b/2}}\,.$$

(Rappelons [1] que $(\mathrm{Card}\,\mathcal{R}(n,b))/p(n) \sim (b-1)!\,(\frac{\pi}{\sqrt{6}})^{b-1}\frac{1}{n^{(b-1)/2}})$.

1) Soit $\mathcal{P}(n,b,c)$ comme dans 5.1. Alors

$$R(n,b) = \Sigma_{c=b}^{[n/2]}\ \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,c)\,.$$

Si $2b-1 < c < \frac{1}{2}b\,(3b-1)$, on a $\mathcal{P}(n,b,c) = \emptyset$ (prop.2.9). Donc

$$R(n,b) = \Sigma_{c=b}^{2b-1}\ \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,c) + \Sigma_{c=\frac{1}{2}b(3b-1)}^{[n/2]}\ \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,c)\,.$$

2) Pour chaque c fixé, $(\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,c))/p(n)$ a un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-(1/2)}$ (4.36).

3) Si $k \geq \frac{1}{2}\,b(3b-1)$, on a, d'après 2.14,

$$\Sigma_{c=k}^{[n/2]}\ \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(n,b,c) \leq (b+1)\ \Sigma_{c=k}^{[n/2]}\ p(b+c)\,r(n,c-b+1)$$

$$= (b+1)\ \Sigma_{d=k-b}^{[n/2]-b}\ p(d+2b)\,r(n,d+1)$$

$$= O\ (\Sigma_{d=k-b}^{[n/2]}\ p(d)\,r(n,d+1)) \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Donc, d'après 1.11,

$$(64)\qquad \Big(\sum_{c=k}^{[n/2]} \operatorname{Card} \mathcal{P}(n,b,c)\Big)/p(n) = O(n^{-(k-b)/2}) \qquad \text{quand } n \to \infty,$$

et, a fortiori,

$$(65)\qquad \Big(\sum_{c=k}^{[n/2]} \operatorname{Card} \mathcal{P}(n,b,c)\Big)/p(n) = O(n^{-((b+1)/2)}) \qquad \text{quand } n \to \infty,$$

car $k-b \geqslant (3b-1)-b = 2b-1 \geqslant b+1$.

4) Il résulte de 2) et de (64) que $R(n,b)/p(n)$ a un développement limité d'ordre aussi grand qu'on veut suivant les puissances de $n^{-(1/2)}$.

5) D'après 6.1, le développement limité de

$$\Big(\sum_{c=b}^{2b-1} \operatorname{Card} \mathcal{P}(n,b,c)\Big)/p(n)$$

commence par

$$(b-1)!\,\Big(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\Big)^b \Big(\sum_{c=b}^{2b-2} (c+1)\Big) \frac{1}{n^{b/2}}$$

$$= (b-1)!\,\Big(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\Big)^b \frac{3b}{2}(b-1) \frac{1}{n^{b/2}} = \frac{3}{2}(b-1)b!\,\Big(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\Big)^b \frac{1}{n^{b/2}}.$$

Compte tenu de (65), la proposition en résulte.

6.3. Le phénomène d'Erdös-Szalay n'est plus vrai pour un ensemble $Q \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)$ arbitraire. Par exemple, pour a entier $\geqslant 3$, on a, d'après un cas particulier facile de 5.16,

$$f(\{a\}; X) \sim f(\{1,a\}; X) \qquad \text{quand } X \to 1.$$

Par suite, $p(n;\{a\}) \sim p(n;\{1,a\})$ quand $n \to \infty$. Ainsi, parmi les partitions π de n telles que $a \notin \Sigma(\pi)$, presque toutes vérifient $1 \notin \Sigma(\pi)$.

On a $f(\{2\}; X) \sim 4(1-X)^2$ et $f(\{1,2\}; X) \sim 2(1-X)^2$ quand $X \to 1$; ainsi, parmi les partitions π de n telles que $2 \notin \Sigma(\pi)$, à peu près la moitié vérifient $1 \notin \Sigma(\pi)$.

Problèmes :

1. Caractériser les ensembles de la forme $\Sigma(\pi)$.
2. Généraliser 2.11 et 2.13 en faisant intervenir les k premières composantes de $\Sigma(\pi)$ $(k > 2)$.
3. Compléter la prop. 3.6 (cf. 3.7).
4. En généralisant convenablement le chap. V, on doit pouvoir "calculer" $\psi(Q)$ et $u(Q)$.

5. A-t-on $u(2n+1) \geqslant u(2n)$ pour $n \geqslant 2$?
6. Quels sont les ensembles Q pour lesquels le phénomène de Erdös-Szalay est valable (i.e., pour n grand, presque toutes les partitions $\pi \in \mathcal{P}(n\ ;\ Q)$ représentent tous les nombres de $[0,n] \setminus (Q \cup (n-Q)))$?
7. Quel est l'ordre de grandeur de $p(2n\ ;\ \{n\})$ pour n grand ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.DIXMIER et J.L.NICOLAS, Partitions without small parts, to be published in the proceedings of Colloquium in number theory, Budapest, July 1987.

[2] P.ERDÖS and M.SZALAY, On some problems of J.Dénes and P.Turán, Studies in pure Mathematics to the memory of P.Turán, Editor P.Erdös, Budapest 1983, p.187-212.

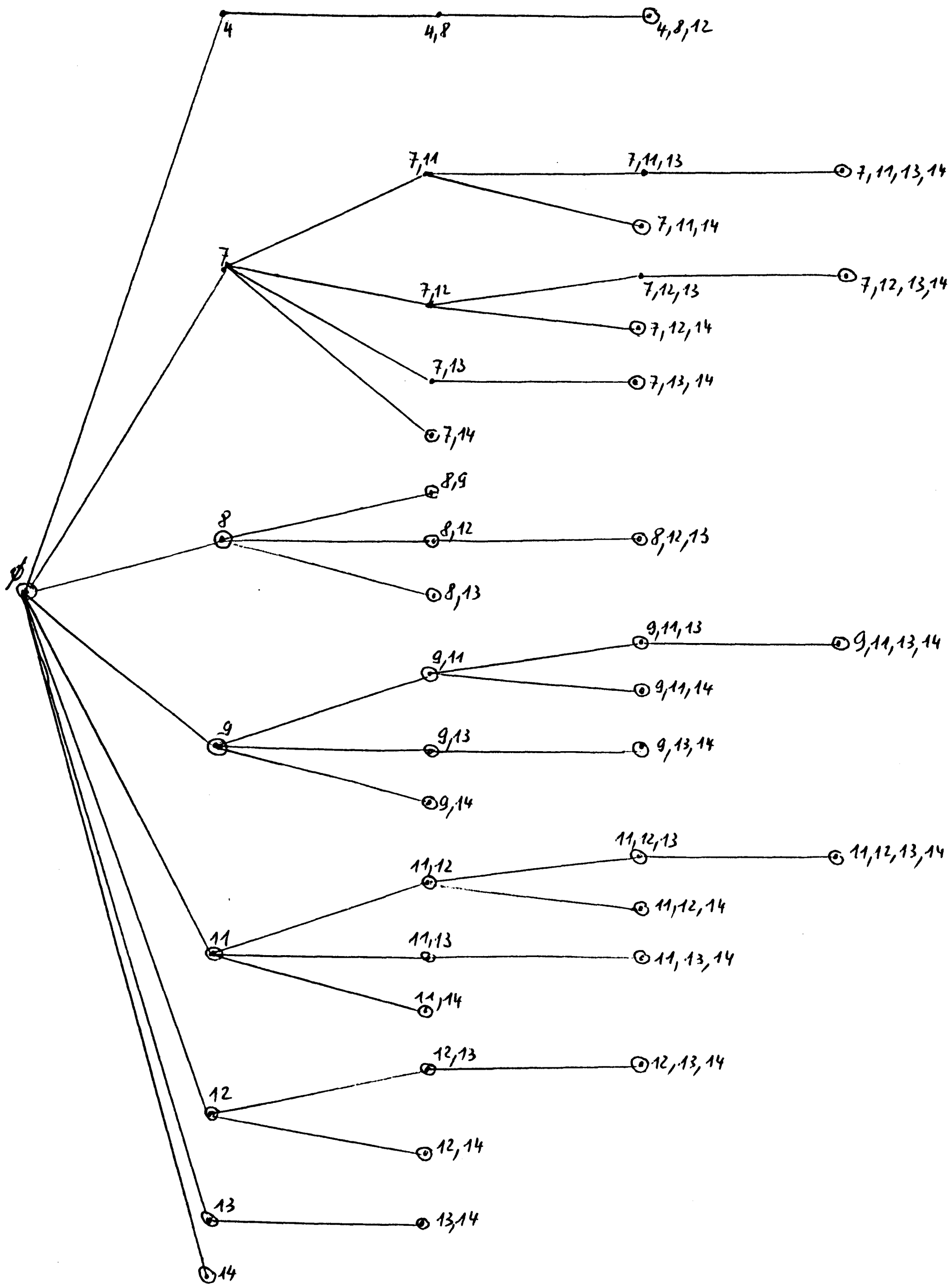
	Appendice A.		
Q	$f(Q\ ;\ X)$	$\psi(Q)$	$u(Q)$
$\{1\}$	$1-X$	1	1
$\{1,2\}$	$(1-X)(1-X^2)$	2	2
$\{2\}$	$(1-X^2)^2$	2	4
$\{1,2,3\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)$	3	6
$\{2,3\}$	$(1-X^2)^2(1-X^3)$	3	12
$\{1,3\}$	$(1-X)(1-X^3)$	2	3
$\{3\}$	$(1-X)(1-X^3)(1+X+X^2-X^3-X^4)$	2	3
$\{1,2,3,4\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^4)$	4	24
$\{2,3,4\}$	$(1-X^2)^2(1-X^3)\ (1-X^4)$	4	48
$\{1,3,4\}$	$(1-X)(1-X^3)(1-X^4)^2$	4	48
$\{1,2,4\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)$	3	8
$\{3,4\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^4)(1+X+2X^2)$	4	96
$\{2,4\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1+X-X^4)$	3	8
$\{1,4\}$	$(1-X)(1-X^4)^2$	3	16
$\{4\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1+X+2X^2+2X^3-X^4-X^5-2X^6)$	3	16
$\{1,2,3,4,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^4)(1-X^5)$	5	120
$\{2,3,4,5\}$	$(1-X^2)^2(1-X^3)(1-X^4)(1-X^5)$	5	240
$\{1,3,4,5\}$	$(1-X)(1-X^3)(1-X^4)^2(1-X^5)$	5	240
$\{1,2,4,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^5)$	4	40
$\{1,2,3,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^5)$	4	30
$\{3,4,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^4)(1-X^5)(1+X+2X^2)$	5	480
$\{2,4,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^5)(1+X-X^4)$	4	40
$\{1,4,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^5)(1+X^2-X^5)$	4	40
$\{2,3,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)(1-X^5)(1+X-X^5)$	4	30
$\{1,3,5\}$	$(1-X)(1-X^3)(1-X^5)$	3	15
$\{1,2,5\}$	$(1-X)(1-X^2)(1-X^5)$	3	10

{4,5}	$(1-X)(1-X^2)(1-X^4)(1-X^5)(1+X+2X^2+2X^3-X^4-2X^5-2X^6)$	4	40
{3,5}	$(1-X)(1-X^3)(1-X^5)(1+X+X^2-X^3-X^4-X^5-X^6+X^7+X^8)$	3	15
{2,5}	$(1-X)(1-X^2)(1-X^5)(1+X-X^5)$	3	10
{1,5}	$(1-X)(1-X^5)^2$	3	25
{5}	$(1-X)^2(1-X^5)(1+2X+3X^2+4X^3+5X^4-5X^6-7X^7-6X^8-X^9+3X^{10}+4X^{11}+$ $2X^{12}$	3	25

Appendice B.

a	u(a)	a	u(a)	a	u(a)	a	u(a)
1	1	6	$72=2^3.3^2$	11	$21901=11^2.181$	16	$23670784 = 2^{12}.5779$
2	$4=2^2$	7	$203=7.29$	12	$41472=2^9.3^4$	17	$64522939 = 13.17.281.1039$
3	3	8	$1024=2^{10}$	13	$269893=13^2.1597$	18	$295659072 = 2^6.3^6.6337$
4	$16=2^4$	9	$1431=3^3.53$	14	$1964704=2^5.7^3.179$	19	$1149903389 = 19.29.2086939$
5	$25=5^2$	10	$11600=2^4.5^2.29$	15	$2951775=3^3.5^2.4373$	20	$5402368000 = 2^{11}.5^3.47.449$

Appendice C : l'arbre A_{30} .



(On a encerclé les sommets distingués) .