MÉMOIRES DE LA S. M. F.

P. TORASSO

La formule de Poisson-Plancherel pour un groupe presque algébrique à radical abélien : cas où le stabilisateur générique est réductif

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 41-42 (1990)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1990_2_41-42__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 41-42
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 118, 1990, fascicule 2

LA FORMULE DE POISSON-PLANCHEREL POUR UN GROUPE PRESQUE ALGÉBRIQUE A RADICAL ABÉLIEN : CAS OÙ LE STABILISATEUR GÉNÉRIQUE EST RÉDUCTIF

P. TORASSO

URA CNRS D 1322 "*Groupes de Lie et Géométrie*"
Département de Mathématiques
UFR Sciences de l'Université de POITIERS
40, Avenue du Recteur Pineau
F-86022 POITIERS CEDEX

RÉSUMÉ :

La formule de Poisson-Plancherel, conjecturée par M. Vergne et dont nous donnons une forme plus précise dans l'introduction, détermine la mesure de Plancherel d'un groupe de Lie au voisinage de l'élément neutre. Nous établissons cette conjecture dans le cas précisé par le titre de cet article. Cela nous amène à introduire et étudier des intégrales orbitales, non pas seulement sur l'algèbre de Lie comme dans le cas réductif, mais aussi et surtout sur le dual de celle-ci. Cette étude se fait d'une part en montrant l'existence d'une classe particulière de polynômes invariants sous l'action co-adjointe et d'autre part en établissant un résultat d'estimation a priori de type L^1 pour des fonctions C^∞ dans une chambre de Weyl d'un sous-système de racines. De plus les propriétés de ces intégrales orbitales sont moins plaisantes que dans le cas réductif, si bien que nous devons établir la formule sommatoire de Poisson pour une classe de fonction de plusieurs variables présentant des singularités importantes.

POISSON-PLANCHEREL FORMULA FOR QUASI-ALGEBRAIC GROUPS WITH ABELIAN NILRADICAL : THE CASE OF REDUCTIVE GENERIC STABILIZER

ABSTRACT :

The Poisson-Plancherel formula which gives the Plancherel measure of a Lie group near its neutral element, was conjectured by M. Vergne. We give a more precise statement of this conjecture in the introduction of this paper and then prove it in the case announced in the title. In order to do that, we introduce and study orbital integrals, not only on the Lie algebra itself (this was sufficient in the reductive case) but also on the dual space of the Lie algebra. To study these orbital integrals, we prove firstly the existence of a class of polynomials which are invariant under the coadjoint action, and secondly a L^1-type a priori estimates for functions which are C^∞ on a Weyl chamber for a roots subsystem. The properties of these orbital integrals being not so simple as in the reductive case, we need and prove the Poisson's summation formula for a class of functions with great singularities.

Texte reçu le 9 janvier 1989, révisé le 8 septembre 1989.

SOMMAIRE

§ I - INTRODUCTION

Considérons un groupe presque algébrique, c'est-à-dire un triplet $(\mathbf{G},j,G)$, où $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, G un groupe de Lie réel séparable, et j un morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathbf{G}$ dont l'image soit un sous-groupe ouvert du groupe des points réels de $\mathbf{G}$ et dont le noyau soit un sous-groupe discret central de G. Nous supposons de plus que G est unimodulaire.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Rappelons qu'une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ est dite très régulière si elle est régulière, auquel cas son stabilisateur $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}$ est commutatif, et si, de plus, l'unique facteur réductif $\mathfrak{j}_f$ de $\mathfrak{g}(f)$, qui est un tore algébrique, est de dimension maximale. On note $\mathfrak{g}^*_r$ l'ensemble des formes très régulières sur $\mathfrak{g}$, lequel est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*$, et $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des $\mathfrak{j}_f$ pour f parcourant $\mathfrak{g}^*_r$. Les éléments de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ sont appelés "sous-algèbres de Cartan-Duflo" de $\mathfrak{g}$; les raisons ayant dicté le choix d'une telle dénomination sont expliquées dans le § III. On note $\mathrm{Car}(G)$ un système de représentants des classes de G-conjugaison des éléments de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, lesquelles sont en nombre fini. Si $\mathfrak{j}$ est un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ désigne le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*_r$ constitué des formes linéaires f telles que $\mathfrak{j}_f$ soit G-conjugué à $\mathfrak{j}$; alors $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ est un ouvert et $\mathfrak{g}^*_r$ est la réunion disjointe des $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ pour $\mathfrak{j}$ parcourant $\mathrm{Car}(G)$. Si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ on note $\mathfrak{h}_\mathfrak{j}$ son centralisateur dans $\mathfrak{g}$, $H_\mathfrak{j}$ (resp. $H'_\mathfrak{j}$) son centralisateur (resp. normalisateur) dans G, et $W_\mathfrak{j}$ le groupe quotient $H'_\mathfrak{j}/H_\mathfrak{j}$, lequel est d'ordre fini. Alors $\mathfrak{h}^*_\mathfrak{j}$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathfrak{g}^*$, et, si on note $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ son intersection avec $\mathfrak{g}^*_r$, toute G-orbite dans $\mathfrak{g}^*_{r,j}$ rencontre $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ suivant une H'_j-orbite, si bien que pour décrire une partie G-invariante de $\mathfrak{g}^*_{r,j}$ il suffit de décrire son intersection avec $\mathfrak{h}^*_j$.

Soit f appartenant à $\mathfrak{g}^*$, $G(f)$ son stabilisateur dans G et $G(f)^f$ le revêtement métaplectique canonique de ce dernier, construit par M. Duflo dans [Du 1] (voir aussi le § IX). On note $X_G(f)$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles τ de $G(f)^f$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(*i*) la restriction de τ à la composante neutre de $G(f)^f$ est multiple d'un caractère de celle-ci dont la différentielle est $if_{|\mathfrak{g}(f)}$

(*ii*) si ε désigne l'élément non trivial du noyau de la projection naturelle de $G(f)^f$ sur $G(f)$, on a

$$\tau(\varepsilon) = -\mathrm{Id}.$$

Le sous-groupe $\mathrm{Ker}j$ de G est contenu dans $G(f)$ et il se relève de manière naturelle en un sous-groupe de $G(f)^f$. Si χ est un élément de $\mathrm{Ker}j\hat{}$, le dual unitaire de $\mathrm{Ker}j$, on note $X_{G,\chi}(f)$ le sous-ensemble de $X_G(f)$ constitué des représentations satisfaisant à la condition supplémentaire :

(*iii*) $\tau(\gamma) = \chi(\gamma)\,\mathrm{Id}, \quad \forall\gamma\in\mathrm{Ker}j$.

Soit χ appartenant à $\mathrm{Ker}j\hat{}$. On dit qu'une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ est G-χ-admissible (resp. G-admissible) si $X_{G,\chi}(f)$ (resp. $X_G(f)$) est non vide ; en fait un élément f de $\mathfrak{g}^*$ est G-admissible si et seulement s'il existe χ appartenant à $\mathrm{Ker}j\hat{}$ tel que f soit G-χ-admissible. Nous noterons alors $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G$) l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui sont très régulières et G-χ-admissibles (resp. G-admissibles).

On note E_G (resp. $\tilde{E}_G$) l'ensemble des éléments T de $\mathfrak{g}$ tels que $\exp_G T$ soit égal à 1 (resp. appartienne à $\mathrm{Ker}j$). Alors E_G (resp. $\tilde{E}_G$) est une partie G-invariante de $\mathfrak{g}$ constituée d'éléments elliptiques. On définit une fonction $\tilde{\imath}_G$ sur $\tilde{E}_G$, généralisant la fonction ζ_ρ définie lorsque G est réductif dans [Du-Ve], en décidant que, pour T appartenant à $\tilde{E}_G$, $\tilde{\imath}_G(T)$ est l'exponentielle de la demi-somme des valeurs propres λ de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}T$, telles que $i\lambda$ soit positif, comptées avec leur multiplicité, et, si χ est un élément de $\mathrm{Ker}j^{\wedge}$, on définit la fonction $\tilde{\chi}_G$ en posant, pour T appartenant à $\tilde{E}_G$,

$$\tilde{\chi}_G(T) = \tilde{\imath}_G(T)\ \chi(\exp T).$$

Alors si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, un élément f de $\mathfrak{h}_j^*$ est G-χ-admissible (resp. G-admissible) si et seulement si :

$$(*)\qquad \begin{array}{l} \tilde{\chi}_G(T) = e^{i\langle f,\ T\rangle}, \quad \forall T\in\tilde{E}_G\cap j \\ (\text{resp. } \tilde{\imath}_G(T) = e^{i\langle f,\ T\rangle} \quad \forall T\in E_G\cap j). \end{array}$$

Soit $\mathfrak{t}$ la partie anisotrope du tore algébrique j et $\mathfrak{t}(G)$ le sous-espace de $\mathfrak{t}$ engendré par $E_G\cap j$. Alors $\tilde{E}_G\cap j$ (resp. $E_G\cap j$) est un réseau de $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{t}(G)$) noté $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ (resp. $\mathfrak{t}_G$) et la restriction de $\tilde{\chi}_G$ (resp. $\tilde{\imath}_G$) à $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ (resp. $\mathfrak{t}_G$) est un caractère de ce dernier, si bien que $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}\cap\mathfrak{h}^*_j$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G\cap\mathfrak{h}^*_j$) est un ouvert de

$$\bigcup_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \mathfrak{t}^{\perp}_{\mu} \qquad (\text{resp. } \bigcup_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{G,1}} \mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu})$$

où, d'une part, $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{t}^*_{G,1}$) est le translaté du réseau dual de $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ (resp. $\mathfrak{t}_G$) constitué des formes linéaires sur $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{t}(G)$) satisfaisant à la condition (*), et d'autre part, si E est un espace vectoriel dont F est un sous-espace, et si μ est une forme linéaire sur F, on note $F^{\perp}_{\mu}$ le sous-espace de E^* constitué des formes linéaires dont la restriction à F est μ. Pour être plus précis, pour tout μ élément de $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{t}^*_{G,1}$), l'intersection de $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G$) avec $\mathfrak{t}^{\perp}_{\mu}$ (resp. $\mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu}$) est un ouvert de Zariski de celui-ci. Maintenant il résulte de la formule sommatoire de Poisson que la série

$$\sum_{T\in\tilde{\mathfrak{t}}_G} \tilde{\chi}_G(T)e^{i\langle f,\ T\rangle} \qquad (\text{resp. } \sum_{T\in\mathfrak{t}_G} \tilde{\imath}_G(T)e^{i\langle f,\ T\rangle})$$

converge dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathfrak{h}^*_j$ vers une mesure de Radon sur cet espace, notée $m^j_{G,\chi}$ (resp. m^j_G), dont le support est

$$\bigcup_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \mathfrak{t}^{\perp}_{\mu} \qquad (\text{resp. } \bigcup_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{G,1}} \mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu}),$$

sa restriction à chacun des sous-espaces affines $\mathfrak{t}^{\perp}_{\mu}$, $\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu}$, $\mu\in\mathfrak{t}^*_{G,1}$) étant une mesure de Lebesgue. Alors la restriction de la mesure $m^j_{G,\chi}$ (resp. m^j_G) à $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ est une mesure de Radon H'_j-invariante et, à ce titre, se prolonge de manière unique en une mesure de Radon G-invariante sur l'ouvert $\mathfrak{g}^*_{r,j}$, notée $m_{G,\chi,j}$ (resp. $m_{G,j}$) (voir le lemme 3 du § III et aussi le § IX). On prolonge alors les mesures $m_{G,\chi,j}$ et $m_{G,j}$ en des mesures boréliennes sur $\mathfrak{g}^*$ pour lesquelles le complémentaire de $\mathfrak{g}^*_{r,j}$ est négligeable, et on définit les mesures boréliennes positives et G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*$, $m_{G,\chi}$ et m_G, en posant :

$$m_{G,\chi} = \sum_{j\in\mathrm{Car}(G)} m_{G,\chi,j} \qquad m_G = \sum_{j\in\mathrm{Car}(G)} m_{G,j}\,.$$

Notons Y_G l'ensemble des couples (f,τ) avec f élément de $\mathfrak{g}^*_G$ et τ de $X_G(f)$. Alors M. Duflo a défini une fonction ζ_G sur l'ensemble Y_G permettant de décrire la formule de Plancherel de G (voir [Du-3] V.5 theorem 40). On définit alors une fonction G-invariante, $q_{G,\chi}$, sur $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, en posant :

$$q_{G,\chi}(f) = [G(f):\mathrm{Ker}j\; \overset{\circ}{G}(f)]^{-1} \sum_{\tau\in X_{G,\chi}(f)} (\dim\tau)^2\, \zeta_G(f,\tau), \quad \forall f\in\mathfrak{g}^*_{G,\chi}\,.$$

Remarquons que si f appartient à $\mathfrak{g}^*_G$, il existe un caractère χ_f de Kerj tel que f soit un élément de $\mathfrak{g}^*_{G,\chi_f}$ et, de plus, l'ensemble des éléments χ de Kerj^ ayant cette propriété est égal à la classe $\chi_f(\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t})^{\perp}$, où $(\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t})^{\perp}$ dèsigne le sous-groupe du groupe dual Kerj^ constitué des caractères triviaux sur $\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t}$. Comme Kerj est un groupe abélien discret dénombrable, $(\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t})^{\perp}$ est un groupe compact dont on note $d\chi$ la mesure de Haar de masse totale 1. On définit alors une fonction G-invariante q_G sur $\mathfrak{g}^*_G$ en posant :

$$q_G(f) = \int_{(\mathrm{Ker}\,j \cap \exp \mathfrak{t})^{\perp}} q_{G,\chi_f\chi}(f)\, d\chi, \qquad \forall f \in \mathfrak{g}_G^* .$$

Soit T un élément elliptique de $\mathfrak{g}$. Pour toute valeur propre λ de $\mathrm{ad}T$ on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ le sous-espace propre correspondant dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et on pose

$$\mathfrak{u}^+ = \oplus_{\lambda}\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\lambda} ,$$

la somme étant étendue aux valeurs propres λ de $\mathrm{ad}T$ telles que $i\lambda$ soit strictement positif ; alors $\mathfrak{u}^+$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui, de plus, est $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^T$-invariante, si bien que l'on peut définir un polynôme ω_T sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^T$ en posant :

$$\omega_T(H) = \det_{\mathfrak{u}^+} \mathrm{ad}T, \qquad \forall T \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^T .$$

Dans ces conditions on définit une distribution tempérée G-invariante sur $\mathfrak{g}$, dont le support est contenu dans la G-orbite de T, et qui ne dépend que de cette dernière, en posant pour tout élément φ de $\mathscr{S}(\mathfrak{g})$:

$$M_{G,T}(\varphi) = (i/2\pi)^{d_T} \int_{G/G^T} \partial_{\pi_T} [\omega_T(H)\ \varphi(g.H)]\Big|_{\substack{H=T \\ H\in\mathfrak{g}^T}} dg,$$

où π_T est un élément de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}^T)$ dont la valeur en un élément f de $\mathfrak{g}^{T^*}$ est le pfaffien de la forme bilinéaire alternée κ_f^T, que ce dernier définit naturellement sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^T$, relativement à une forme volume bien choisie, et d_T est la dimension complexe de $\mathfrak{u}^+$ (voir le § V). En fait la distribution $M_{G,T}$ est non nulle seulement s'il existe une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ contenant T. On note $\Theta_{G,T}$ la transformée de Fourier de la distribution $M_{G,T}$.

Lorsque G est un groupe réductif la distribution $M_{G,T}$ est, à un facteur entier multiplicatif près, à savoir le nombre d'éléments de la G-orbite de T contenus dans une sous-algèbre de Cartan fondamentale fixée de $\mathfrak{g}$, égale à la distribution invariante construite à partir de l'intégrale invariante de Harish-Chandra, comme dans [Du-Ve] par exemple. D'autre part M. Duflo a défini dans [Du-2], lorsque G est un groupe algébrique complexe, une telle distribution dont $M_{G,T}$ est encore un multiple entier, le facteur multiplicatif étant ici le nombre d'éléments de $G.T$ contenus dans une sous-algèbre de Cartan-Duflo fixée de $\mathfrak{g}$. La raison pour laquelle il n'est pas possible de généraliser telle quelle la notion de distribution invariante introduite par les auteurs précédents, c'est qu'il n'existe pas de notion naturelle de sous-algèbre de Cartan-Duflo fondamentale, ni même de moyen naturel d'associer à un élément elliptique T de $\mathfrak{g}$ un élément de $\mathrm{Car}(G)$. Plus précisément, si on note $\mathrm{Car}^T(G)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Car}(G)$ constitué des éléments rencontrant $G.T$, il y a en général dans $\mathrm{Car}^T(G)$ plusieurs éléments dont la partie anisotrope est de dimension maximale, et, si j est un tel élément , le cardinal de $G.T\cap j$ en dépend fortement. De plus les résultats que nous avons établis au § V montrent que ces éléments de $\mathrm{Car}^T(G)$ jouent tous le même rôle vis-à-vis de T.

Si Θ est une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$ nous noterons $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}\Theta$ sa transformée de Fourier.

Remarquons que l'écriture de la formule sommatoire de Poisson ayant servi, pour j appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, à définir les mesures $m^j_{G,\chi}$ et m^j_G , aussi bien que la définiton des mesures $m_{G,\chi}$ et m_G , ou celles des distributions invariantes $M_{G,T}$ et de la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}$, nécessitent un choix cohérent de mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, ainsi que sur certains de leurs sous-quotients. Ces choix sont expliqués dans le § II.

Nous pouvons maintenant énoncer la conjecture suivante qui précise une conjecture de M. Vergne [Ve-1].

Conjecture. *Soit* (G,j,G) *un groupe presque algèbrique et unimodulaire, et soit* χ *un caractère de* $\mathrm{Ker} j$. *Alors*

(i) $m_{G,\chi}$ *et* m_G *sont des mesures de Radon tempérées sur* $\mathfrak{g}^*$

(ii) a) les séries distributions,

$$(**) \qquad \sum_{T\in\tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\, M_{G,T} \quad \text{et} \quad \sum_{T\in E_G/G} \tilde{1}_G(T)\, M_{G,T} ,$$

convergent dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ *vers des distributions notées respectivement* $V_{G,\chi}$ *et* V_G .

b) il existe un ouvert de Zariski V *de* $\mathfrak{g}^*$ *tel que* $V \cap \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ *(resp.* $V \cap \mathfrak{g}^*_G$*) soit de complémentaire* $m_{G,\chi}$*- (resp.* m_G*-) négligeable dans* $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ *(resp.* $\mathfrak{g}^*_G$*), et que la fonction* $q_{G,\chi}$ *(resp.* q_G*) soit continue sur* $V \cap \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ *(resp.* $V \cap \mathfrak{g}^*_G$*). De plus les mesures* $q_{G,\chi} dm_{G,\chi}$ *et* $q_G dm_G$ *induisent des mesures de Radon tempérées sur* $\mathfrak{g}^*$*.*

c) on a les formules de Poisson-Plancherel pour le groupe (G,j,G)

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}\Big(\sum_{T \in \tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\, M_{G,T} \Big) = q_{G,\chi} dm_{G,\chi} ,$$

et celle pour le groupe G*,*

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}\Big(\sum_{T \in E_G/G} \tilde{I}_G(T)\, M_{G,T} \Big) = q_G dm_G .$$

En particulier les distributions tempérées $V_{G,\chi}$ *et* V_G *sont de type positif.*

Cette conjecture a été démontrée, d'abord par M. Vergne, [Ve-2], dans le cas des groupes semi-simples connexes linéaires, puis par P. Dourmashkin, [Do], dans le cas des groupes connexes de type B_n , et, enfin, par M. Duflo et M. Vergne dans le cas semi-simple connexe. De plus M. Duflo a démontré une forme affaiblie de la conjecture pour un groupe algébrique complexe ; en particulier il n'a pas démontré la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ des séries (**) (voir [Du-2]).

Dans ce travail nous démontrons la conjecture lorsque (G,j,G) est un groupe presque algébrique possédant les propriétés suivantes :

(*i*) le radical unipotent, N, de G est abélien

(*ii*) le quotient, G/N, est un groupe semi-simple, noté S

(*iii*) si $\mathfrak{n}$ désigne l'algèbre de Lie de N, on suppose que les sous-groupes d'isotropie dans S des éléments de $\mathfrak{n}^*$ sont génériquement réductifs, ou, ce qui revient au même (voir le § II), que les S-orbites dans $\mathfrak{n}^*$ sont génériquement fermées.

Le cas que nous considérons ici englobe celui que nous avons traité dans [To].

Nous n'insisterons pas sur l'intérêt qu'il y a, dans la perspective de décrire explicitement la mesure de Plancherel pour le groupe G, à démontrer cette conjecture ; nous renvoyons simplement le lecteur à l'introduction de [Du-Ve].

Essayons plutôt de préciser les résultats que nous obtenons dans le cas considéré, et de donner quelques idées sur leur démonstration.

Tout d'abord il existe un polynôme S-invariant, q, sur $\mathfrak{n}^*$ tel que, si V désigne le complémentaire de l'ensemble de ses zéros, pour tout élément u de V, S(u) soit un groupe réductif et, de plus, pour toute paire d'éléments u et v de la même composante connexe de V, S(u) et S(v) soient S-conjugués.

On note alors $\mathcal{V}$ l'intersection de $\mathfrak{g}_r^*$ avec l'image inverse de V par l'application de restriction, ρ, de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{n}^*$. Si f appartient à $\mathfrak{g}^*$, nous noterons u son image par ρ.

Si j est un élément de car($\mathfrak{g}$), on note $\mathcal{V}^j$ l'intersection de $\mathcal{V}$ avec $\mathfrak{h}_j^*$, et on définit une relation d'équivalence, notée $\sim$, sur $\mathcal{V}^j$ en disant que $f \sim f'$ si et seulement si S(u) et S(u') sont S^j-conjugués, où S^j désigne le centralisateur dans S de l'image, dans $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, de j. Enfin on note π_j le polynôme sur $\mathfrak{h}_j^*$ tel que, pour tout élément f de $\mathfrak{h}_j^*$, $\pi_j(f)$ soit le pfaffien de la forme bilinéaire alternée, κ^f, sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}^j$, naturellement associée à f (voir le § III).

Si f appartient à $\mathcal{V}$ on choisit un facteur réductif J de G(f), et un facteur réductif R de G(u) contenant J. On note J (resp. R) le facteur réductif de G(f) (resp. G(u)) correspondant à J (resp. R). Alors (R,j,R) est un groupe presque algébrique, tel que R soit naturellement isomorphe à S(u). On note r l'algèbre de Lie de R, et λ la restriction de f à r. On a alors les résultats suivants :

(*i*) si j appartient à car($\mathfrak{g}$), et f à $\mathcal{V}^j$, alors j est un élément de car(r), c'est-à-dire que j est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie réductive r. De plus le système des racines de $j_{\mathbb{C}}$ dans $r_{\mathbb{C}}$ ne dépend ni du choix de l'élément f de V^j, ni de celui de R, et on le note $\Delta_{j,s}$. D'autre part, si α appartient à $\Delta_{j,s}$, sa coracine, H_α, dans la sous-algèbre dérivée de $\mathfrak{r}$ ne dépend pas, non plus, de ces choix. Dans ces conditions, et si $\Delta^+_{j,s}$ est un choix de racines positives dans $\Delta_{j,s}$, on pose :

$$\pi_{j,s} = i^\sigma \prod_{\alpha\in\Delta^+_{j,s}} H_\alpha ,$$

où σ désigne le nombre de racines imaginaires pures contenues dans $\Delta^+_{j,s}$. Alors $\pi_{j,s}$ est un polynôme réel sur $\mathfrak{h}^*_j$, diviseur de π_j, et tel que le quotient, $\pi_{j,n}$, de π_j par $\pi_{j,s}$ soit un élément de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{n}^j$, le centralisateur de j dans $\mathfrak{n}$.

De plus l'intersection, notée $j^{*\prime}$, de j^* avec $\mathfrak{r}^*_r$ est le complémentaire dans j^* de l'ensemble des zéros de $\pi_{j,s}$.

(*ii*) on peut choisir le polynôme q satisfaisant, de plus, aux conditions suivantes :

d'une part il existe un entier k strictement positif et un polynôme π_q, G-invariant, tels que pour toute sous-algèbre de Cartan-Duflo, j, de $\mathfrak{g}$, on ait :

$$\pi_{q|\mathfrak{h}^*_j} = \pi^2_{j,s}\, q^k\circ\rho_{|\mathfrak{h}^*_j} ,$$

d'autre part, si j est un élément de car($\mathfrak{g}$), les classes d'équivalence dans V^j pour la relation $\sim$ sont des ouverts de $\mathfrak{h}^*_j$, réunions de composantes connexes de V^j.

(*iii*) soit χ un caractère de Kerj, et f un élément de V. Alors f appartient à $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G$) si et seulement si λ est un élément de $\mathfrak{r}^*_{\mathring{R},\chi_0}$ (resp. $\mathfrak{r}^*_{\mathring{R}}$), où χ_0 désigne la restriction de χ à Kerj$\cap\mathring{R}$, et, de plus, on a :

$$q_{G,\chi}(f) = q_{\mathring{R},\chi_0}(\lambda) \quad (\text{resp. } q_G(f) = q_{\mathring{R}}(\lambda)).$$

D'autre part, si j est un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}^j/\sim$ et f de $\mathcal{W}$, le nombre $q_{G,\chi}(f)$ (resp. $q_G(f)$) ne dépend que de la restriction de f à j (mais pas de $\mathcal{W}$, *cf.* § XI).

(*iv*) si T est un élément elliptique de $\mathfrak{g}$, la distribution $\Theta_{G,T}$ est une fonction mesurable bornée sur $\mathfrak{g}^*$, et analytique sur $\mathcal{V}$, telle que :

$$\Theta_{G,T}(f) = \sum_{T'\in(G.T)\cap r/R} \dot{\Theta}_{R,T'}(\lambda) \quad \forall f\in\mathcal{V}.$$

Soit j appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, et $\mathcal{W}$ un élément de $\mathcal{V}^j/\sim$. Alors on pose

$$\tilde{\mathcal{W}} = j^{\perp}\cap\mathfrak{h}_j^*\cap(\rho^{-1}(\rho(\mathcal{W}))),$$

et, pour tout élément φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, on définit une fonction $F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}$ sur $j^{*'}$ à l'aide de la formule suivante

$$F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f) = \pi_{j,s}(f)\int_{G/H_j} \left\{\int_{\tilde{\mathcal{W}}} \varphi(g.(f+u))\ \pi_{j,n}(u)^2\ du\right\} d\dot{g} \quad \forall f\in j^{*'}.$$

Lorsque G est semi-simple, *i.e.* le radical N est trivial, $\mathcal{W}$ est toujours égal à $j^{*'}$, et les fonctions $F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}$ ne sont rien d'autre que les intégrales orbitales de Harish-Chandra. Nous appellerons donc les fonctions $F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}$ les intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}^*$ pour le groupe G.

Lorsque G est semi-simple, Harish-Chandra a démontré que les intégrales orbitales en question sont des éléments de l'espace $\mathcal{S}(j^{*'})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $j^{*'}$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. Cependant dans le cas que nous considérons les propriétés de ces intégrales orbitales sont beaucoup plus subtiles ; en fait, si φ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, $F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}$ est un élément de $L^1_\infty(j^{*'},|\pi_{j,s}|df)$, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $j^{*'}$, intégrables, ainsi que toutes leurs dérivées, pour la mesure $|\pi_{j,s}|df$. La démonstration de cette assertion qui reprend en les adaptant, les idées de Varadarajan (voir [Va] Part I.3.), repose sur l'existence du polynôme π_q .

Alors en utilisant la formule intégrale (15') du lemme 3 (§ III), similaire à celle de Hermann Weyl ou de Harish-Chandra, on montre que la formule de Poisson-Plancherel, pour le groupe (G,j,G) et le caractère χ de $\mathrm{Ker}\,j$, se ramène à l'assertion suivante :

si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, f est un élément de $\mathcal{V}^j$ et R est un facteur réductif de $G(u)$, on a pour tout élément λ de $j^{*\prime}_{\bullet}$,

$$(***)\qquad \pi_{j,s}(\lambda) \sum_{T\in \tilde{E}_R/R} \tilde{\chi}_R(T)\, \Theta_{R,T}(\lambda) = \pi_{j,s}(\lambda)\, q_{R,\chi}(\lambda)\, dm^j_{R,\chi}(\lambda)\ ,$$

cette égalité devant être entendue comme une égalité entre distributions opérant sur l'espace fonctionnel $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$.

L'égalité (***), considérée comme une égalité entre distributions opérant sur l'espace $\mathcal{S}(j^{*\prime})$, a été démontrée par M. Duflo et M. Vergne dans [Du-Ve], et une bonne partie de notre travail consiste à montrer que cette égalité est encore vraie dans le cadre plus général que nous avons indiqué.

La démonstration de ce fait repose sur les résultats d'analyse établis dans le § VII, lequel comprend deux parties.

La première partie du § VII est consacrée à établir, puis à en tirer les conséquences, des majorations a priori pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur un cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{R}^n$, et dont suffisamment de dérivées sont intégrables pour une mesure de la forme $|\pi(x)|dx$, où π est un produit de formes linéaires complexes sur $\mathbb{R}^n$. Pour démontrer ces majorations, on se ramène d'abord au cas où π ne s'annule pas sur Γ, et où ce dernier contient le cône C des x "positifs" de $\mathbb{R}^n$, *i.e.*

$$C = \left\{x\in\mathbb{R}^n /\ x_1>0,\dots,\ x_n>0\right\}\ ,$$

et ensuite on utilise une solution élémentaire d'une puissance suffisament grande de l'opérateur différentiel

$$(1-\partial/\partial_{x_1})\dots(1-\partial/\partial_{x_n}),$$

solution élémentaire dont le support est le cône $-\bar{C}$ des x "négatifs ou nuls" de $\mathbb{R}^n$, et dont l'expression est remarquablement simple. Nos résultats contiennent, dans le cas d'un cône convexe, ceux établis par Varadarajan dans [Va] Part I Appendice 1, 2 et 3, et sont obtenus, du moins le croyons-nous, plus facilement (voir le théorème 2).

La deuxième partie du § VII est consacrée à la démonstration de la formule sommatoire de Poisson pour une classe suffisamment large de fonctions (voir le théorème 4).

Enfin nous achevons notre travail en montrant, par des exemples, que, d'une part, contrairement à ce qui se passe dans le cas où le groupe G est algébrique (voir le lemme 34, § XI), si j appartient à car($\mathfrak{g}$), et f à $\mathcal{V}^j$, le nombre $q_G(f)$ dépend fortement de la classe de H_j-conjugaison du groupe R, et, d'autre part, les intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}^*$ sont loin d'avoir d'aussi bonnes propriétés que dans le cas semi-simple.

Je ne saurais terminer cette introduction sans remercier M. Duflo et M. Vergne, dont les idées sont à l'origine de ce travail, ainsi que J.Y. Charbonnel et M. Raïs pour d'utiles discussions. Enfin je n'oublierai pas Mlle C. Mâle et Mme B. Brault qui ont assuré avec beaucoup de patience la dactylographie et la mise en page de ce travail.

§ II - GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

Si E est un ensemble nous noterons $[E]$ son cardinal.

Si E est un ensemble sur lequel agit un groupe H, nous noterons, si x appartient à E, $h.x$ ou hx le résultat de l'action de l'élément h de H sur x, $H.x$ la H-orbite de x dans E, et $H(x)$ le stabilisateur de x dans H. De même si φ est une fonction définie sur E et h un élément de H nous noterons, $h.\varphi$ ou $h\varphi$, le résultat de l'action de h sur φ par translation à gauche, *i.e.* $h.\varphi$ est la fonction sur E telle que

$$h.\varphi(x) = \varphi(h^{-1}x) \qquad \forall x \in E .$$

Si $\mathfrak{l}$ est une algèbre de lie, réelle ou complexe, et E un espace vectoriel, réel ou complexe, sur lequel $\mathfrak{l}$ agit au moyen d'une représentation, nous noterons, pour x appartenant à E, $X.x$ ou Xx le résultat de l'action de l'élément X de $\mathfrak{l}$ sur x, $\mathfrak{l}(x)$ le stabilisateur de x dans $\mathfrak{l}$, et $\mathfrak{l}.x$ l'image de $\mathfrak{l}$ par l'application $X \longrightarrow Xx$. Nous noterons $E^{\mathfrak{l}}$ le sous-espace vectoriel de E constitué des points stabilisés par $\mathfrak{l}$.

Si E est un espace vectoriel réel ou complexe, F un sous-espace, et u (resp. ρ) un endomorphisme de E (resp. une représentation d'un groupe, ou d'une algèbre de Lie, dans E) laissant stable F, on note u_F et $u_{E/F}$ (resp. ρ_F et $\rho_{E/F}$) les endomorphismes (resp. les représentations) induit(e)s par u (resp. ρ) dans les espaces respectifs, E et E/F.

Si L est un groupe de Lie on note $\overset{\circ}{L}$ sa composante neutre, et on désigne par la même lettre gothique, $\mathfrak{l}$, son algèbre de Lie. Nous noterons $\exp_L$ l'application exponentielle de $\mathfrak{l}$ dans L.

Si V est une variété analytique réelle, on désigne par TV le fibré tangent de V, et, pour x appartenant à V, par T_xV l'espace tangent au point x à V. Si p est un entier naturel, on note Λ^pTV la puissance extérieure p-ième du fibré tangent de V. On note $\mathscr{C}_c(V)$ l'espace des fonctions continues et à support compact sur V. On note aussi $\mathscr{E}(V)$ (resp. $\mathscr{D}(V)$) l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact) sur V, muni de la topologie usuelle, et par $\mathscr{E}'(V)$ (resp. $\mathscr{D}'(V)$) l'espace dual, muni de la topologie de la convergence faible.

Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, nous noterons $\mathscr{S}(E)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur E, muni de sa topologie usuelle, et $\mathscr{S}'(E)$ l'espace des distributions tempérées, muni de la topologie de la convergence faible.

Si E est un espace vectoriel réel nous noterons $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié.

Si E est un espace vectoriel réel ou complexe nous noterons E^* son dual, et $S(E)$ l'algèbre symétrique construite sur E ; nous noterons

$$(x,f) \longrightarrow \langle x, f\rangle \; ; \quad x\in E,\ f\in E^*,$$

la dualité canonique entre E et E^*.

Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, $S(E_{\mathbb{C}})$ s'identifie à l'algèbre des polynômes à valeurs complexes sur E^*. Si p appartient à $S(E_{\mathbb{C}})$, nous noterons ∂_p l'opérateur différentiel à coefficients constants sur E qui lui correspond ; plus précisément l'application, $p \longrightarrow \partial_p$, est l'unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $S(E_{\mathbb{C}})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur E, tel que pour tout élément v de E, ∂_v soit la dérivation le long de v. En fait l'application, $p \longrightarrow \partial_p$, est un isomorphisme entre les algèbres considérées.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et dx une mesure de Lebesgue sur E. Si φ est une fonction Lebesgue-intégrable sur E, on définit sa transformée de Fourier, $\mathscr{F}_E\varphi$, comme étant la fonction sur E^* telle que :

$$(1) \quad \mathscr{F}_E\varphi(f) = \int_E \varphi(x)\, e^{-i\langle f,\, x\rangle}\, dx \; ; \quad \forall f\in E^*.$$

On appelle mesure de Lebesgue duale de la mesure dx l'unique mesure de Lebesgue df sur E^* telle que, pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(E)$ on ait

$$(2) \qquad \varphi(0) = \int_{E^*} \mathcal{F}_E\varphi(f)\, df.$$

La tranformation de Fourier $\varphi \longrightarrow \mathcal{F}_E\varphi$ induit un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}(E^*)$. Si T appartient à $\mathcal{S}'(E)$ on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_E T$ comme étant l'unique élément de $\mathcal{S}'(E^*)$ tel que

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}_E T, \mathcal{F}_E\varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(E).$$

Nous supposerons choisie sur tout espace vectoriel réel de dimension finie E une mesure de Lebesgue notée $d_E x$ telle que la mesure $d_{E^*}x$ soit la mesure duale : c'est possible d'après (1) et (2). Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible nous noterons dx au lieu de $d_E x$. Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie et F un sous-espace de E nous noterons $d_{E/F}\dot{x}$ (ou plus simplement $d\dot{x}$) l'unique mesure de Lebesgue sur E/F telle que pour toute fonction φ Lebesgue intégrable sur E on ait

$$(3) \qquad \int_E \varphi(x)\, d_E x = \int_{E/F} \left\{\int_F \varphi(x+y)\, d_F y\right\} d_{E/F}\dot{x}.$$

Si L est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ nous noterons $d_L x$ (ou plus simplement dx) la mesure de Haar invariante à gauche sur L correspondant à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{l}$ (*i.e.* $d_L \exp X/d_{\mathfrak{l}} X$ vaut 1 en $X=0$).

Soit L un groupe de Lie, M un sous-groupe fermé de L et, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$ leurs algèbres de Lie respectives. Nous désignerons par $\mathcal{C}_c(L:M)$ (resp $\mathcal{D}(L:M)$) l'espace des fonctions φ continues (resp C^∞) sur L à support compact modulo H et vérifiant la relation

$$(4) \qquad \varphi(xy) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}}\, y|\, \varphi(x)\ , \quad \forall x\in L, \quad \forall y\in M.$$

Alors la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}}\dot{X}$ détermine une unique forme linéaire positive L-invariante à gauche définie sur l'espace $\mathcal{C}_c(L:M)$ et notée $d_{L/M}\dot{x}$ (ou plus simplement $d\dot{x}$). D'autre part il existe une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L ne prenant que des valeurs strictement positives et satisfaisant à la relation (4) ; dans ces conditions l'application $\varphi \longrightarrow \rho^{-1}\varphi$ définit un isomorphisme de $\mathscr{C}_c(L:M)$ sur $\mathscr{C}_c(L/M)$ et nous noterons μ_ρ l'image de la forme linéaire $d_{L/M}\dot{x}$ par cet isomorphisme. C'est une mesure quasi-invariante sur L/M.

Soit φ une fonction définie sur L et satisfaisant à la relation (4). Nous dirons que φ est $d_{L/M}\dot{x}$-mesurable, intégrable, négligeable etc... si et seulement si la fonction $\rho^{-1}\varphi$ est μ_ρ-mesurable, intégrable, négligeable etc... En fait pour que la fonction φ considérée soit $d_{L/M}\dot{x}$-mesurable ou négligeable il suffit qu'elle soit $d_L x$-mesurable ou négligeable.

Si φ est une fonction $d_{L/M}\dot{x}$-mesurable et positive ou $d_{L/M}\dot{x}$-intégrable on pose

$$\int_{L/M} \varphi(x)\, d_{L/M}\dot{x} = \int_{L/M} \rho^{-1}\varphi\, d\mu_\rho .$$

Bien entendu, les notions que nous venons de définir ne dépendent pas du choix de la fonction ρ que nous avons considérée.

Maintenant soit φ une fonction $d_L x$-intégrable définie sur L ; alors :

(*i*) pour presque tout x dans L la fonction

$$y \longrightarrow \varphi(xy)\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}} y|^{-1}$$

est $d_M y$-intégrable

(*ii*) la fonction

$$x \longrightarrow \int_M \varphi(xy)\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}} y|^{-1}\, d_M y$$

est $d_{L/M}\dot{x}$ intégrable, et on a

$$(5)\qquad \int_L \varphi(x)\, d_L x = \int_{L/M} \left\{\int_M \varphi(xy)\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}} y|^{-1}\, d_M y\right\} d_{L/M}\dot{x}$$

Pour ce qui précède voir [Be] Chapitre V.

Soit L un groupe de Lie, M un sous-groupe fermé et E un espace vectoriel réel de dimension finie dans lequel M opère au moyen d'une représentation analytique. Alors on note $L\times_M E$ le fibré vectoriel L-homogène de fibre E et de base L/M naturellement associé à ces données (voir [Wa] Chapter 5).

Nous désignerons par une lettre majuscule en caractère gras un groupe algébrique complexe ; si **A** (resp. X) est un groupe (resp. une variété) algébrique complexe définie sur $\mathbb{R}$ on note $A_{\mathbb{R}}$ (resp. $X_{\mathbb{R}}$) le sous-groupe (resp. la sous-variété) des points réels.

Dans la suite G désignera un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(6)
(i) le radical unipotent N de G est abélien,

(ii) le groupe algébrique quotient G/N est un groupe semi-simple noté S.

L'action naturelle de G dans N induite par les automorphismes intérieurs de G, induit une représentation rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ de S dans N ainsi que dans N^*, cette dernière représentation de S étant la contragrédiente de la précèdente. Alors il résulte de [Ri-1] Theorem A et de [Ri-2] Theorem 2.3 que l'on peut trouver un ouvert de Zariski non vide S-invariant et défini sur $\mathbb{R}$, U, de N^* tel que

(7) *(i)* si x et y appartiennent à U, les sous-groupes d'isotropies S(x) et S(y) sont conjugués sous $\overset{\circ}{S}$,

(7) *(ii)* $U \cap N^*_{\mathbb{R}}$ est un ouvert de Zariski non vide de $N^*_{\mathbb{R}}$ et, si x et y sont deux éléments de $U \cap N^*_{\mathbb{R}}$ situés dans la même composante connexe de $U \cap N^*_{\mathbb{R}}$, les sous-groupes d'isotropie $S_{\mathbb{R}}(x)$ et $S_{\mathbb{R}}(y)$ sont conjugués sous $\overset{\circ}{S}_{\mathbb{R}}$.

Nous supposerons que G satisfait de plus à la condition suivante :

(6)' *(iii)* il existe un ouvert de Zariski non vide et G-invariant de N^*, constitué de points dont le stabilisateur dans S soit réductif,

laquelle condition est équivalente à :

(6) *(iii)'* il existe un ouvert de Zariski non vide et G-invariant de N^* constitué de points dont la S-orbite soit un fermé de Zariski de N^*.

Pour ce qui concerne ce dernier point nous renvoyons, par exemple, à [Mu-Fo] Appendix to Chapter 1 F.

Lemme 1. *Soit* R *un groupe algébrique réductif défini sur* $\mathbb{R}$, E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel défini sur* $\mathbb{R}$ *sur lequel* R *agit au moyen d'une représentation rationnelle définie sur* $\mathbb{R}$. *Soit* U *un ouvert de Zariski non vide et* R*-invariant de* E *constitué de points dont la* R*-orbite soit un fermé de Zariski de* E. *Alors il existe une fonction polynôme* p *sur* E *définie sur* $\mathbb{R}$ *et* R*-invariante telle que l'ouvert affine* E_p , *complémentaire de l'ensemble des zéros de* p, *soit non vide et contenu dans* U. *De plus l'intersection de* E_p *avec* $E_{\mathbb{R}}$, *le sous-espace des points réels de* E, *est non vide.*

Démonstration. On sait que les fonctions polynômes R-invariantes sur E séparent les fermés de Zariski R-invariants (voir [Mu-Fo] Chapter 1 §2) ; comme les orbites sous R des points de U sont des fermés de Zariski dans E on voit qu'il existe une fonction polynôme, q, R-invariante sur E non nulle sur U et nulle sur le complémentaire de U. Soit σ l'automorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de l'algèbre des fonctions polynômes sur E induit par la conjugaison par rapport à la forme réelle $E_{\mathbb{R}}$ de E : plus précisémment si r est une fonction polynôme sur E on a

$$\sigma(r)(x) = \overline{r(\bar{x})} , \quad \forall x \in E,$$

où, $x \longrightarrow \bar{x}$ désigne la conjugaison dans E relativement à $E_{\mathbb{R}}$. Alors le polynôme

$$p = q\ \sigma(q)$$

répond à la question. Comme $E_{\mathbb{R}}$ est Zariski dense dans E, $E_p \cap E_{\mathbb{R}}$ est non vide. Q.E.D.

D'après Whitney [Wh] un ouvert de Zariski d'une variété algébrique réelle a, au plus, un nombre fini de composantes connexes. Le lemme énoncé ci-dessous est alors clair.

Lemme 2. *Il existe une fonction polynôme réelle,* q, *définie sur* $N^*_{\mathbb{R}}$ *et* S*-invariante telle que l'ouvert affine* U *de* N^* *complémentaire de l'ensemble des zéros de* q *ait les propriétés suivantes*

(i) les sous-groupes d'isotropie S(x), x *parcourant* U, *sont ré-*

ductifs et sont tous $\overset{\circ}{S}$*-conjugués à un même sous-groupe réductif de* S

(ii) $V = U \cap N^*_{\mathbb{R}}$ *est réunion d'un nombre fini d'ouverts* $S_{\mathbb{R}}$*-invariants,* $V_1, \dots, V_r$ *, tels que, si* $1 \leq j \leq r$*, les sous-groupes d'isotropie* $S_{\mathbb{R}}(x)$*,* x *parcourant* V_j *, sont tous* $\overset{\circ}{S}_{\mathbb{R}}$*-conjugués à un même sous-groupe réductif de* $S_{\mathbb{R}}$ *.*

Nous appellerons groupe presque algébrique la donnée d'un triplet $(A, j, \mathbf{A})$ tel que A soit un groupe de Lie réel séparable, $\mathbf{A}$ un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ et j un morphisme de groupes de Lie de A dans $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ dont le noyau est un sous-groupe discret central de A et dont l'image est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$.

Soit $(A, j, \mathbf{A})$ un groupe presque algébrique ; la différentielle dj de j permet d'identifier l'algèbre de Lie de A avec celle de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Nous appellerons radical unipotent de A le sous-groupe analytique de A ayant même algèbre de Lie que le radical unipotent de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Le radical unipotent de A est un sous-groupe fermé distingué de A et le morphisme j induit un isomorphisme de groupes de Lie du radical unipotent de A sur celui de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Nous appellerons facteur réductif de A l'image inverse par j d'un facteur réductif de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$. Alors deux facteurs réductifs de A sont conjugués sous l'action du radical unipotent et, étant donné un facteur réductif de A, A est naturellement isomorphe au produit semi-direct de ce facteur réductif par le radical unipotent. Pour ce qui concerne ce que nous venons de dire sur les groupes presque algébriques on peut consulter [Du-3] IV 1.

Etant donné un groupe algébrique $\mathbf{A}$ défini sur $\mathbb{R}$ nous appellerons groupe presque algébrique associé à $\mathbf{A}$ la donnée d'un couple (A, j) tel que le triplet $(A, j, \mathbf{A})$ soit un groupe presque algébrique.

Dans la suite (G, j), ou plus simplement G, désignera un groupe presque algébrique associé à $\mathbf{G}$. Le radical unipotent de G sera noté N tandis qu'un facteur réductif de G sera génériquement noté S. Alors S est naturellement isomorphe au groupe de Lie quotient G/N et le morphisme j induit un morphisme encore noté j de S dans $\mathbf{S}_{\mathbb{R}}$; de plus (S, j) est un groupe presque algébrique associé à $\mathbf{S}$.

Les algèbres de Lie de G, S, N seront notées respectivement $\mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{n}$; leurs complexifiées s'identifient naturellement aux algèbres de Lie respectives de $\mathbf{G}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$. L'application exponentielle du groupe $\mathbf{G}$ et le morphisme j induisent respectivement un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels entre $\mathfrak{n}$ et N, d'une part, et N et $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$, d'autre part, permettant d'identifier entre eux ces trois espaces vectoriels, ce que nous ferons librement. Dans ces conditions l'ouvert affine U du lemme 2 est un ouvert affine de $\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$; de plus il est immédiat de voir que $V = U \cap \mathfrak{n}^*$ est réunion d'un nombre fini d'ouverts $V'_1,\ldots,V'_{r'}$, S-invariants tels que si $1 \leq j \leq r'$, les sous-groupes d'isotropie $S(u)$, u parcourant $\overset{\circ}{V'_j}$, sont tous S-conjugué à un même sous-groupe réductif de S.

Soit S un facteur réductif de G. Alors l'application,

$$(s,n) \longrightarrow sn,$$

induit un isomorphisme de groupes de Lie du produit semi-direct $S \times N$, muni de la loi

$$(8) \qquad (s_1, n_1)(s_2, n_2) = (s_1 s_2, s_2^{-1} n_1 + n_2),$$

$$s_i \in S,\ n_i \in N,\ i = 1,2,$$

sur le groupe G. D'autre part on a les décompositions en somme directe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{g}^* = \mathfrak{s}^* \oplus \mathfrak{n}^*,$$

le crochet dans $\mathfrak{g}$ étant donné par

$$(9) \qquad [X_1+\xi_1, X_2+\xi_2] = [X_1,X_2] + X_1.\xi_2 - X_2.\xi_1,$$

$$X_i \in \mathfrak{s},\ \xi_i \in \mathfrak{n},\ i = 1, 2,$$

et les représentations adjointes de G et co-adjointes de G et $\mathfrak{g}$ obéissant aux formules dans lesquelles s appartient à S, n à N, X à $\mathfrak{s}$, ξ à $\mathfrak{n}$, f à $\mathfrak{s}^*$ et u à $\mathfrak{n}^*$,

$$(10) \qquad \mathrm{Ad}(sn)(X+\xi) = s.X + (s.X).(s.n) + s.\xi$$

$$(11) \qquad \mathrm{Ad}^*(sn)(f+u) = s.f + \Phi(s.u,s.n) + s.u$$

$$(12) \qquad \mathrm{ad}^*(X+\xi)(f+u) = X.f + \Phi(u,\xi) + X.u,$$

où Φ est l'application bilinéaire de $\mathfrak{n}^* \times \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{s}^*$ définie par

$$(13) \qquad \langle \Phi(u,\xi),\ X\rangle = \langle u,\ X.\xi\rangle.$$

Si on identifie S avec un facteur réductif de G, l'application,

$$(s,n) \longrightarrow sn,$$

induit un isomorphisme de groupes algébriques du produit semi-direct $S\times N$, muni de la loi définie par la formule (8), sur G, tandis que l'on a les décompositions en sommes directes

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}\ ,\quad \overset{*}{\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} = \overset{*}{\mathfrak{s}}_{\mathbb{C}} \oplus \overset{*}{\mathfrak{n}}_{\mathbb{C}}\ ,$$

le crochet dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ étant donné par (9), et les représentations adjointe de G et co-adjointes de G et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ obéissant aux formules (10) à (13).

§ III - FORMES LINÉAIRES TRÈS RÉGULIÈRES ET FORMULES INTÉGRALES

Soit $(B,j,\mathbf{B})$ un groupe presque algébrique et $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de B. Si f appartenant à $\mathfrak{b}^*$ est une forme régulière, *i.e.* telle que la dimension de $\mathfrak{b}(f)$ soit minimale, on sait que $\mathfrak{b}(f)$ est une algèbre commutative qui, par suite, a un unique facteur réductif, lequel est un tore algébrique que nous noterons $\mathfrak{j}_f$. On dit que la forme linéaire f dans $\mathfrak{b}^*$ est très régulière, si elle est régulière et si la dimension de $\mathfrak{j}_f$ est maximale.

L'ensemble $\mathfrak{b}^*_r$ des formes linéaires très régulières est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{b}^*$ et, si f et f' sont deux formes linéaires très régulières situées dans la même composante connexe de $\mathfrak{b}^*_r$, les sous-algèbres $\mathfrak{j}_f$ et $\mathfrak{j}_{f'}$ sont B-conjuguées. Les sous-algèbres $\mathfrak{j}_f$, f parcourant $\mathfrak{b}^*_r$ ont été introduites par Duflo et généralisent la notion de sous-algèbre de Cartan des algèbres de Lie semi-simples ou réductives (*i.e.* si $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Lie réductive, $\mathfrak{b}^*_r$ est l'ouvert de Zariski de $\mathfrak{b}^*$ constitué des formes linéaires semi-simples et régulières et les sous-algèbres $\mathfrak{j}_f$, f parcourant $\mathfrak{b}^*_r$, sont exactement les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{b}$) ; pour cette raison nous appellerons sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{b}$ les sous-algèbres $\mathfrak{j}_f$, f décrivant $\mathfrak{b}^*_r$. Nous noterons $\mathrm{car}(\mathfrak{b})$ leur ensemble et $\mathrm{Car}(B)$ un système de représentants de leurs classes de conjugaison sous B ; il est clair que $\mathrm{Car}(B)$ est un ensemble fini. De plus si, pour $\mathfrak{j}$ dans $\mathrm{Car}(B)$, on désigne par $\mathfrak{b}^*_{r,\mathfrak{j}}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{b}^*_r$ constitué des formes linéaires f telles que $\mathfrak{j}_f$ soit B-conjugué à $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{b}^*_{r,\mathfrak{j}}$ est un ouvert réunion de certaines des composantes connexes de $\mathfrak{b}^*_r$, et $\mathfrak{b}^*_r$ est la réunion disjointe des $\mathfrak{b}^*_{r,\mathfrak{j}}$ pour $\mathfrak{j}$

parcourant Car(B). Si $\mathfrak{b}$ a une structure complexe alors $\mathfrak{b}_r^*$ est connexe et $[\mathrm{Car}(B)] = 1$.

Soit j appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{b})$; on note $\mathfrak{h}_{\mathfrak{b},j}$ ou plus simplement $\mathfrak{h}_j$ son centralisateur dans $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_j$ l'espace $[j,\mathfrak{b}]$, $H_{B,j}$ et $H'_{B,j}$ (ou H_j et H'_j) respectivement, son centralisateur et son normalisateur dans B. Alors $\mathfrak{b}$ est la somme directe de $\mathfrak{h}_j$ et $\mathfrak{b}_j$ et par suite $\mathfrak{h}_j^*$ et $\mathfrak{b}_j^*$ s'identifient à des sous-espaces dont $\mathfrak{b}^*$ est la somme directe ; plus précisément on a

$$\mathfrak{h}_j^* = \mathfrak{b}^{*j} \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_j^* = j.\mathfrak{b}^* = \sum_{f\in\mathfrak{b}^*} j.f.$$

De plus les groupes de Lie H_j et H'_j admettent $\mathfrak{h}_j$ comme algèbre de Lie et le groupe quotient H'_j/H_j , noté $W_{B,j}$ (ou W_j) est un groupe fini.

On choisit maintenant sur $\mathfrak{b}_j$ une forme volume η_j telle que, modulo l'identification naturelle de $\mathfrak{b}_j$ avec $\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_j$, elle induise sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_j$ la mesure de Lebesgue $\dot{d}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_j}X$. Si f appartient à $\mathfrak{h}_j^*$ on note $\kappa_{\mathfrak{b},f}$ (ou κ_f) la forme bilinéaire alternée définie sur $\mathfrak{b}_j$ par

$$\kappa_f(X,Y) = \langle f, [X,Y]\rangle, \quad \forall X, Y\in\mathfrak{b}_j \ .$$

Alors il existe f, élément de $\mathfrak{h}_j^*$, telle que κ_f soit non dégénérée, de telle sorte que $\dim \mathfrak{b}_j$ est un entier pair, en fait indépendant du choix de j, et noté $2d_{\mathfrak{b}}$. On définit alors un élément non nul et homogène de $S(\mathfrak{h}_j)$, noté $\pi_{\mathfrak{b},j}$ (ou π_j), par le fait que, pour f dans $\mathfrak{h}_j^*$, $\pi_j(f)$ soit le pfaffien de la forme bilinéaire alternée κ_f relativement à la forme volume η_j . On a alors le résultat suivant, où $\mathfrak{h}_{j,r}^*$ désigne l'intersection de $\mathfrak{h}_j^*$ avec $\mathfrak{b}_r^*$:

Lemme 3.

(i) toute B-orbite dans $\mathfrak{b}_{r,j}^*$ *rencontre* $\mathfrak{h}_j^*$ *suivant une* H'_j*-orbite*

(ii) une forme linéaire f *de* $\mathfrak{h}_j^*$ *est un élément de* $\mathfrak{h}_{j,r}^*$ *si et seulement si elle est régulière dans* $\mathfrak{h}_j^*$ *et vérifie* $\pi_j(f) \neq 0$.

(iii) l'application $(x,f) \longrightarrow x.f$ *induit une submersion de* $B\times\mathfrak{h}_{j,r}^*$ *sur* $\mathfrak{b}_{r,j}^*$ *, laquelle passe au quotient pour définir un isomorphisme de l'ouvert*

$B\times_{H'_j}\mathfrak{h}^*_{j,r}$ *du fibré vectoriel* $B\times_{H'_j}\mathfrak{h}^*_j$ *sur* $\mathfrak{b}^*_{r,j}$.

(iv) soit φ *une fonction mesurable et positive (resp. intégrable) sur* $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ *, alors la fonction*

$$(14)\qquad \psi(x) = |\det \mathrm{Ad}x|^{-1} \int_{\mathfrak{h}^*_j} \varphi(x.f)\ \pi_j(f)^2\ df$$

est $d_{B/H_j}\dot{x}$*-mesurable (resp. intégrable) et on a*

$$(15)\qquad \int_{\mathfrak{b}^*_{r,j}} \varphi(f)\ df = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{b}}}[W_j]^{-1} \int_{B/H_j} \psi(x)\ d\dot{x}.$$

De plus, si φ *est une fonction continue à support compact sur* $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ *, la fonction* ψ *définie par (14) est un élément de* $\mathcal{C}_c(B:H_j)$.

(v) a) si φ *appartient à* $\mathcal{D}(\mathfrak{b}^*_{r,j})$ *et* δ *à* $\mathcal{D}'(\mathfrak{h}^*_{j,r})^{H'_j}$*, la fonction* ψ_δ *définie par*

$$(14')\qquad \psi_\delta(x) = |\det \mathrm{Ad}x|^{-1} \int_{\mathfrak{h}^*_j} \varphi(x.f)\ \pi_j(f)^2\ d\delta(f)$$

est un élément de $\mathcal{D}(B:H'_j)$

b) si θ *appartient à* $\mathcal{D}'(\mathfrak{b}^*_{r,j})^B$*, il existe une unique distribution* H'_j*-invariante sur* $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ *appelée restriction de* θ *à* $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ *et notée* $\theta|_{\mathfrak{h}^*_{j,r}}$ *telle que, pour toute fonction* φ *dans* $\mathcal{D}(\mathfrak{b}^*_{r,j})$*, on ait*

$$(15')\qquad \int_{\mathfrak{b}^*_{r,j}} \varphi(f)\ d\theta(f) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{b}}}\ [W_j]^{-1} \int_{B/H_j} \psi_{\theta|_{\mathfrak{h}^*_{j,r}}}(x)\ d\dot{x}$$

L'application

$$\theta \longrightarrow \theta|_{\mathfrak{h}^*_{j,r}}$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{D}'(\mathfrak{b}^*_{r,j})^B$ *sur* $\mathcal{D}'(\mathfrak{h}^*_{j,r})^{H'_j}$*. Cette application prolonge l'application qui à une fonction* B*-invariante sur* $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ *fait correspondre sa restriction en tant que fonction à* $\mathfrak{h}^*_{j,r}$.

(vi) soit p *une fonction polynôme* B*-invariante sur* $\mathfrak{b}$ *et* $p_{\mathfrak{h}_j}$ *sa restriction à* $\mathfrak{h}_j$ *. Alors pour toute fonction* φ *dans* $\mathcal{E}(\mathfrak{b}^*_{r,j})^B$ *on a*

$$(16) \qquad (\partial_p\varphi)\Big|_{\mathfrak{h}^*_{j,r}} = (\pi_j^{-1}\circ\partial_{p_{\mathfrak{h}_j}}\circ\pi_j)\,(\varphi\Big|_{\mathfrak{h}^*_{j,r}}),$$

autrement dit la composante radiale suivant $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ *de l'opérateur différentiel à coefficients constants et* B*-invariant sur* $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ *,* ∂_p *, n'est autre que l'opérateur différentiel à coefficients rationnels et* H'_j*-invariant sur* $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ *,* $\pi_j^{-1}\circ\partial_{p_{\mathfrak{h}_j}}\circ\pi_j$.

Les points (*i*) (*ii*) (*iii*) et (*v*) du lemme 3 sont établis et démontrés dans [Du-3] V.3, de même que le point (*iv*) mais seulement pour les fonctions φ de $\mathcal{D}(\mathfrak{b}^*_{r,j})$; cependant il n'est pas difficile d'étendre ce dernier résultat aux fonctions φ qui sont mesurables positives ou intégrables et nous laissons ce soin au lecteur. Pour ce qui concerne le point (*vi*) voir [To].

Si j appartient à car($\mathfrak{b}$) nous noterons $\Delta_{\mathfrak{b},j}$ (ou Δ_j) l'ensemble des racines de $j_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ ou, ce qui revient au même, dans $\mathfrak{b}_{j,\mathbb{C}}$. Si l'élément f de $\mathfrak{b}^*_r$ est tel que $j = j_f$ alors κ_f est une forme symplectique j-invariante sur $\mathfrak{b}_j$ et, en conséquence, si α appartient à Δ_j , $-\alpha$ aussi et a la même multiplicité.

Pour ce qui concerne le groupe G qui nous intéresse nous adopterons les notations et nous lui appliquerons les résultats ci-dessus, que nous allons d'ailleurs préciser.

Dans la suite nous désignerons par q un élément de $S(\mathfrak{n})^S$, ayant les propriétés énoncées dans le lemme 2 ainsi que d'autres que nous préciserons au paragraphe IV, par U l'ouvert affine de $\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$ complémentaire de la variété des zéros de q, et par V l'ouvert affine de $\mathfrak{n}^*$ trace de l'ouvert U.

Nous noterons ρ l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{n}^*$ duale de l'injection naturelle de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. Nous désignerons par $\mathfrak{n}^*_r$ l'image de $\mathfrak{g}^*_r$ par ρ ; c'est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{n}^*$.

Si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, on notera $V^{\mathfrak{j}}$ l'intersection de V avec $\mathfrak{n}^{*\mathfrak{j}}$, et, si $\mathfrak{s}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{j}$, on notera $\mathfrak{n}_{\mathfrak{j}}$ (resp. $\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}$) l'espace $[\mathfrak{j},\mathfrak{n}]$ (resp. $[\mathfrak{j},\mathfrak{s}]$). On a alors les décompositions en somme directe

$$
(17)\qquad
\begin{array}{ll}
\mathfrak{g}_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{j}} & \mathfrak{g}_{\mathfrak{j}}^{*} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}^{*} \oplus \mathfrak{n}_{\mathfrak{j}}^{*} \\
\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{s}^{\mathfrak{j}} & \mathfrak{s}^{*} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}^{*} \oplus \mathfrak{s}^{\mathfrak{j}*} \\
\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{n}^{\mathfrak{j}} & \mathfrak{n}^{*} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{j}}^{*} \oplus \mathfrak{n}^{\mathfrak{j}*} \\
\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{s}^{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{n}^{\mathfrak{j}} & \mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}^{*} = \mathfrak{s}^{\mathfrak{j}*} \oplus \mathfrak{n}^{\mathfrak{j}*}
\end{array}
$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 4. *Soit $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle ou complexe et $\mathfrak{r}$ une sous-algèbre de Lie algèbrique et réductive de $\mathfrak{s}$. Alors la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ à $\mathfrak{r}$ est non dégénérée.*

Démonstration. Désignons par K la forme de Killing de $\mathfrak{s}$. On remarque tout d'abord qu'il suffit de montrer le résultat dans le cas complexe. En effet si $\mathfrak{s}$ est réelle, la forme de Killing $K_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ est le prolongement naturel de la forme de Killing K de $\mathfrak{s}$, et, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{s}$, $K_{|E}$ est non dégénérée si et seulement si $K_{\mathbb{C}}{}_{|E_{\mathbb{C}}}$ l'est.

Nous supposons donc que $\mathfrak{s}$ est complexe. Ecrivons alors

$$\mathfrak{r} = \bigoplus_{i=0}^{s} \mathfrak{r}_i ,$$

où $\mathfrak{r}_0$ est le centre de $\mathfrak{r}$ et les $\mathfrak{r}_i$, $1\le i\le s$, sont les idéaux simples de la sous-algèbre dérivée de $\mathfrak{r}$. Les sous-espaces $\mathfrak{r}_i$, $0\le i\le s$, sont deux à deux orthogonaux pour K. En effet soit $0\le i<j\le s$ et X et Y des éléments respectifs de $\mathfrak{r}_i$ et $\mathfrak{r}_j$; comme $\mathfrak{r}_j$ est simple il existe Y_1 et Y_2 appartenant à $\mathfrak{r}_j$ tels que $Y = [Y_1, Y_2]$ et dans ces conditions on a

$$K(X,Y) = K(X,[Y_1,Y_2]) = K([X,Y_1],Y_2) + K(Y_1,[X,Y_2]),$$

chacun des termes de la somme étant nul puisque r_i et r_j commutent. Ainsi, pour démontrer que $K_{|r}$ est non dégénérée il nous suffit de montrer ce résultat dans le cas où r est soit un tore algébrique, soit une sous-algèbre de Lie simple de $\mathfrak{s}$, et, en fait ce dernier cas est, comme nous allons le voir, conséquence du premier.

Soit donc r une sous-algèbre de Lie simple de $\mathfrak{s}$; comme $K_{|r}$ est une forme bilinéaire symétrique ad_r-invariante elle est proportionnelle à la forme de Killing de r et il nous suffit donc de voir que $K_{|r}$ est non nulle. Considérons alors une sous-algèbre de Cartan j de r. Il est clair que j est un tore algébrique de $\mathfrak{s}$ et, si nous faisons l'hypothèse que la restriction de K à tout tore algébrique de $\mathfrak{s}$ est non dégénérée, nous voyons immédiatement que $K_{|r}$ est non nulle comme nous l'espérions.

Nous supposons maintenant que r est un tore algébrique de $\mathfrak{s}$. On sait alors, voir par exemple [Bo] Theorem (5.1) p. 161, qu'il existe une représentation rationnelle de $\mathfrak{s}$ dans un espace vectoriel complexe E et un vecteur non nul x de E tel que

$$(18) \qquad r = \left\{ X \in \mathfrak{s} \ / \ X.x \in \mathbb{C}x \right\}.$$

Soit j une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ contenant r et $j_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de j engendré par les co-racines des éléments de Δ_j. On sait alors que $K_{|j_{\mathbb{R}}}$ est définie positive. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des poids de j dans E. Si, pour λ dans $\mathcal{P}$, on note E^{λ} le sous-espace des vecteurs de E de poids λ, on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} E_{\lambda} \ .$$

Ainsi on peut écrire

$$x = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x_{\lambda} \quad \text{avec, } \forall \lambda \in \mathcal{P},\ x_{\lambda} \in E_{\lambda} \ ;$$

désignons alors par $\mathcal{P}_x$ l'ensemble des éléments λ de $\mathcal{P}$ tels que x_{λ} soit non nul.

Soit X un élément de j. La relation (18) montre que X appartient à r si et seulement si

$$\lambda(X) = \mu(X),\ \forall\lambda,\ \forall\mu\in\mathcal{P}_X .$$

Cependant comme

$$j = j_{\mathbb{R}} + ij_{\mathbb{R}}$$

on peut écrire

$$X = Y + iZ,\quad Y \text{ et } Z\in j_{\mathbb{R}} .$$

Utilisant le fait que tout élément de $\mathcal{P}$ ne prend que des valeurs réelles sur $j_{\mathbb{R}}$, on voit facilement que X appartient à r si et seulement si

$$\lambda(Y) = \mu(Y) \text{ et } \lambda(Z) = \mu(Z),\quad \forall\lambda \text{ et } \forall\mu\in\mathcal{P}_X .$$

Une autre façon d'exprimer ceci est de dire que r est le complexifié du tore réel $r\cap j_{\mathbb{R}}$. La restriction de K à $j_{\mathbb{R}}$ étant définie positive, il est clair que $K_{|r}$ est non dégénérée. Q.E.D.

Nous aurons aussi besoin de la remarque suivante :

Remarque. Soit $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, r une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{s}$ et j une sous-algèbre de Cartan de r. Alors si λ est un poids de j dans $\mathfrak{s}/r$, il en est de même de $-\lambda$ et ils interviennent tous deux avec la même multiplicité. Ceci est conséquence de ce que, d'une part, les poids non nuls de j dans $\mathfrak{s}/r$ sont les mêmes et interviennent avec la même multiplicité que ceux de j dans $\mathfrak{s}/[r,r]$ et que, d'autre part, la restriction de la forme de Killing à $[r,r]$ étant, d'après le lemme 4, non dégénérée, elle induit sur $\mathfrak{s}/[r,r]$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, manifestement j-invariante.

Si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, j s'identifie via la projection naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ avec un tore algébrique de cette dernière algèbre de Lie semi-simple, laquelle est, d'après le lemme 4, somme directe de j et de son orthogonal relativement à la forme de Killing de $\mathfrak{s}$; par suite j^* s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathfrak{s}^*$. Cependant $\mathfrak{s}^*$ s'injecte naturellement dans $\mathfrak{g}^*$ (au moyen de l'application transposée de la projection naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{s}$) et par suite $\mathfrak{j}^*$ est aussi, de manière naturelle, un sous-espace de $\mathfrak{g}^*$. Il est clair que l'on a

$$\mathfrak{j}^* \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}^* .$$

De même, si u appartient à V et si $\mathfrak{s}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{s}$ est somme directe de $\mathfrak{s}(u)$ et de son orthogonal pour la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ et, de ce fait, $\mathfrak{s}(u)^*$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{s}^*$ et donc de $\mathfrak{g}^*$.

Si f est un élément de $\mathfrak{g}^*$ nous noterons u_f ou plus simplement u sa restriction à $\mathfrak{n}$. Il est clair que les groupes $(G(f), \mathfrak{j}, G(f))$ et $(G(u), \mathfrak{j}, G(u))$ sont presque algébriques. On a alors le

Lemme 5. *Soit f appartenant à $\rho^{-1}(V)$ et $\mathfrak{s}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$. Alors f est très régulière si et seulement si $f_{|\mathfrak{s}(u)}$ l'est relativement à $\mathfrak{s}(u)$.*

Supposons que f appartienne à $\rho^{-1}(V)\cap\mathfrak{g}_r^*$ et soit J (resp. R) un facteur réductif de $G(f)$ (resp. $G(u)$) dont on note $\mathfrak{j}$ (resp. $\mathfrak{r}$) l'algèbre de Lie, tel que R contienne J. Alors si λ désigne la restriction de f à $\mathfrak{r}$ on a $J = R(\lambda)$. De plus le radical unipotent de $G(f)$ est égal à $G(f)\cap N$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, si f appartient à $\mathfrak{g}^*$, on a

$$(19) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{n}.f &= \mathfrak{g}(u)^{\perp} \\ N.f &= f + \mathfrak{g}(u)^{\perp}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que f appartienne à $\rho^{-1}(V)$. Alors, d'une part, si n appartient à N, la restriction de $n.f$ à $\mathfrak{g}(u)$ et donc à $\mathfrak{s}(u)$ ne dépend pas de n et, d'autre part, il existe n dans N tel que

$$n.f-u \in \mathfrak{s}(u)^* .$$

On peut donc supposer, pour démontrer la première partie du lemme, que $f-u$ appartient à $\mathfrak{s}(u)^*$.

Nous allons calculer $\mathfrak{g}(f)$; comme il est contenu dans $\mathfrak{g}(u)$ chacun de ses éléments s'écrit sous la forme

$$X+\xi, \text{ avec } X\in\mathfrak{s}(u) \text{ et } \xi\in\mathfrak{n}.$$

Grâce aux relations (12) et (19) on voit qu'un tel élément est dans $\mathfrak{g}(f)$ si et seulement si

$$X.(f-u) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(u,\xi) = 0,$$

c'est-à-dire, si et seulement si

$$X \in \mathfrak{s}(u)(f-u) \quad \text{et} \quad \xi \in (\mathfrak{s}.u)^{\perp}.$$

On a donc l'égalité

$$(20) \qquad \mathfrak{g}(f) = \mathfrak{s}(u)(f-u) \oplus (\mathfrak{s}.u)^{\perp}.$$

Comme $\rho^{-1}(V)$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$ on voit que f est régulière (resp. très régulière) si et seulement si $f-u$ est régulière (resp. très régulière) dans $\mathfrak{s}(u)^*$. Mais, avec l'hypothèse faite sur f on a

$$f-u = f_{|\mathfrak{s}(u)},$$

si bien que la première partie du lemme est démontrée.

Maintenant soit f un élément de $\rho^{-1}(V)\cap\mathfrak{g}_r^*$. Comme J est un groupe réductif presque algébrique, si E est un J-module de dimension finie, le sous-espace E^J de E admet un unique sous-espace supplémentaire J-invariant et noté E_J. De plus, comme f est J-invariant, l'application $\xi \longrightarrow \xi.f$ induit un morphisme de J-module de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}^*$, de telle sorte qu'il résulte de (19) que l'on a

$$\mathfrak{n}^J.f = \mathfrak{g}(u)^{\perp}\cap\mathfrak{g}^{*J}$$

$$N^J.f = f + \mathfrak{g}(u)^{\perp}\cap\mathfrak{g}^{*J}.$$

Soit S un facteur réductif de G contenant R. Alors on a

$$R = S(u)$$

et on voit qu'il existe n dans N^J tel que $n.f$ appartienne à $\mathfrak{s}(u)^*$. Comme, pour tout élément n de N^J, les groupes $G(f)$ et $G(n.f)$ ont même intersection avec N et admettent tous deux J comme facteur réductif, il nous suffit de démontrer la deuxième assertion lorsqu'il existe un facteur réductif S de G tel que

$$R = S(u)$$

et que $f-u$ appartienne à $\mathfrak{r}^*$. Dans ce cas on a

$$\lambda = f-u.$$

Il résulte alors de la formule (20), et de ce que, d'après la première partie de la démonstration, λ est un élément très régulier de $\mathfrak{r}^*$, que l'on a

$$\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\lambda) = \mathfrak{j}.$$

Ainsi $R \cap G(f)$ est un sous-groupe réductif de $G(f)$ contenant le facteur réductif J. Par suite J est égal à $R \cap G(f)$ et, à ce titre, est contenu dans $R(\lambda)$. L'inclusion réciproque est alors conséquence de ce que, comme $f-u = \lambda$ appartient à $\mathfrak{r}^*$, tout élément de $R(\lambda)$ stabilise f. Enfin le fait que $G(f) \cap N$ soit le radical unipotent de $G(f)$ découle aussi de la formule (20) Q.E.D.

Comme conséquence immédiate du lemme 5 on a le

Corollaire.

(i) l'ouvert affine V *est contenu dans* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{r}}^*$

(ii) un tore algèbrique $\mathfrak{j}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est un élément de* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ *si et seulement s'il existe* u *dans* V *et un facteur réductif* $\mathfrak{s}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $\mathfrak{j}$ *appartienne à* $\mathrm{car}(\mathfrak{s}(u))$.

Remarque. Soient u appartenant à V, $\mathfrak{s}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{j}$ un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{s}(u))$, alors les injections successives,

$$\mathfrak{j}^* \subset \mathfrak{s}(u)^* \subset \mathfrak{g}^*,$$

induisent l'injection naturelle de $\mathfrak{j}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ décrite précédemment.

Lemme 6. *Soit* $\mathfrak{j}$ *appartenant à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{s}$ *un facteur réductif de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{j}$ *et* u *un élément de* $V^{\mathfrak{j}}$. *Alors le système des racines de* $\mathfrak{j}$ *dans* $\mathfrak{s}(u)$ *ne dépend ni du choix de* $\mathfrak{s}$ *ni de celui de* u. *On le note* $\Delta_{\mathfrak{j},\mathfrak{s}}$.

Démonstration. Il est clair que le système des racines de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{s}(u)$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{s}$, car, modulo l'identification de $\mathfrak{j}$ avec son image dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, ce système de racines est celui de $\mathfrak{j}$ dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})(u)$.

Soit f dans $\mathfrak{g}_{\mathfrak{r}}^*$ tel que $\rho(f) = u$. Comme, d'une part, si X appartient à $\mathfrak{g}_{\mathfrak{j}}$ et Y à $\mathfrak{n}_{\mathfrak{j}}$, on a

$$\kappa_f(X,Y) = \langle u, [X,Y]\rangle$$

et, d'autre part, $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{n}^j]$ est contenu dans $\mathfrak{n}_j$, on voit que l'orthogonal de $\mathfrak{n}_j$ dans $\mathfrak{g}_j$ relativement à κ_f est égal à $\mathfrak{g}_j \cap \mathfrak{g}(u)$. Cependant κ_f est non dégénérée et il est alors clair que l'application

$$(X,Y) \longrightarrow \langle u, [X,Y]\rangle$$

induit une dualité j-invariante entre $\mathfrak{s}_j/\mathfrak{s}(u)\cap\mathfrak{s}_j$ et $\mathfrak{n}_j$. En particulier, compte tenu de la remarque suivant la démonstration du lemme 4, les racines de $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{s}_{j,\mathbf{C}}/\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}(u)\cap\mathfrak{s}_{j,\mathbf{C}}$ et dans $\mathfrak{n}_{j,\mathbf{C}}$ sont les mêmes et interviennent avec la même multiplicité. Si, pour tout sous-espace j-invariant $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ et tout λ dans $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}^*$, nous désignons par $\mathfrak{l}^\lambda$ le sous-espace des vecteurs de poids λ de $\mathfrak{l}$, il est clair que, pour tout α dans Δ_j, on a

$$\dim \mathfrak{s}(u)_{\mathbf{C}}^\alpha = \dim \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^\alpha - 2\dim \mathfrak{n}_{j,\mathbf{C}}^\alpha .$$

Ceci achève la démonstration du lemme. Q.E.D.

Comme conséquence de la démonstration du lemme précédent on a le

Corollaire. *Sous les hypothèses du lemme 6, les espaces* $\mathfrak{s}_j/\mathfrak{s}(u)\cap\mathfrak{s}_j$ *et* $\mathfrak{n}_j$ *ont la même dimension et celle-ci est paire.*

Lemme 7. *Sous les hypothèses du lemme 6, si* α *appartient à* $\Delta_{j,s}$ *la co-racine de* α *dans* $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}\cap[\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}(u), \mathfrak{s}_{\mathbf{C}}(u)]$ *ne dépend ni du choix de* $\mathfrak{s}$ *ni de celui de* u *et on la note* H_α. *Plus précisément si* K *désigne la forme de Killing de* $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}$, *la restriction de* K *à* $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ *ne dépend pas du choix de* $\mathfrak{s}$ *et, de plus,* H_α *est l'unique élément de* $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ *tel que*

$$(21) \quad \begin{cases} (i)\ \alpha(H) = 0 \iff K(H,H_\alpha) = 0, \quad \forall H\in\mathfrak{j}_{\mathbf{C}} \\ (ii)\ \alpha(H_\alpha) = 2. \end{cases}$$

Démonstration. La restriction de K à $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{s}$ car, modulo identification de $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ avec son image dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, la restriction de K à $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$ n'est rien d'autre que la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ à $\mathfrak{j}_{\mathbf{C}}$. Si u appartient à V^j alors le centre de $\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}(u)$ est l'intersection des noyaux dans $j_{\mathbb{C}}$ des éléments de $\Delta_{j,s}$; il ne dépend donc pas du choix de u dans V^j ; on le note $\mathfrak{z}_{j_{\mathbb{C}}}$, et on pose

$$\mathfrak{z}_j = \mathfrak{z}_{j_{\mathbb{C}}} \cap j.$$

Il est clair que, pour tout u dans V^j, $\mathfrak{z}_j$ est le centre de $\mathfrak{s}(u)$. Soit $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$, l'ensemble des idéaux simples de $[\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u), \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)]$. Alors on a

$$j_{\mathbb{C}} = \mathfrak{z}_{j_{\mathbb{C}}} \oplus \left\{ \bigoplus_{k=1}^{s} j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k \right\}$$

et, pour $1 \le k \le s$, $j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{a}_k$. Si α appartient à $\Delta_{j,s}$, il existe un entier k, $1 \le k \le s$, tel que H_α ,la co-racine de α dans $j_{\mathbb{C}} \cap [\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u), \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)]$, appartienne à $j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k$; et, si K_k désigne la forme de Killing de $\mathfrak{a}_k$, on sait alors que H_α est l'unique élément de $j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k$ satisfaisant aux relations

$$(21') \quad \begin{aligned} &(i) \quad \alpha(H) = 0 \Longleftrightarrow K_k(H, H_\alpha) = 0, \quad \forall H \in j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k \\ &(ii) \quad \alpha(H_\alpha) = 2 \ . \end{aligned}$$

Cependant $K_{|j_{\mathbb{C}}}$ est non dégénérée, les sous-espaces $\mathfrak{z}_{j_{\mathbb{C}}}$ et $j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k$, $1 \le k \le s$, de $j_{\mathbb{C}}$ sont deux à deux orthogonaux pour K et, enfin, pour $1 \le k \le s$, $K_{|j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k}$ est non nulle et proportionnelle à $K_{k|j_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{a}_k}$, comme il résulte du lemme 4 et de sa démonstration. Il est alors clair que la relation (21') est équivalente à la relation (21). Q.E.D.

Nous définissons alors l'élément $\pi_{j,s}$ de $S(j)_{\mathbb{C}}$ en posant

$$(22) \quad \pi_{j,s} = i^{\sigma} \prod_{\alpha \in \Delta^+_{j,s}} H_\alpha ,$$

où $\Delta^+_{j,s}$ est un choix de racines positives dans $\Delta_{j,s}$, et σ est le nombre de racines imaginaires pures contenues dans $\Delta^+_{j,s}$. C'est en fait, un élément de $S(j)$, et, si $\mathfrak{s}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ contenant j, et u appartient à V^j, il existe une forme volume, $\eta_{j,u}$, sur $\mathfrak{s}(u)_j = \mathfrak{s}_j \cap \mathfrak{s}(u)$, telle que, pour tout élément λ de j^*, le pfaffien de $\kappa_{\mathfrak{s}(u),\lambda}$ relativement à $\eta_{j,u}$ soit $\pi_{j,s}(\lambda)$.

Proposition 1. *Soit* $\mathfrak{j}$ *appartenant* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$. *Alors il existe un unique élément de* $S(\mathfrak{n}^{\mathfrak{j}})$, *noté* $\pi_{\mathfrak{j},\mathfrak{n}}$, *tel que*

$$\pi_{\mathfrak{j}} = \pi_{\mathfrak{j},\mathfrak{s}}\, \pi_{\mathfrak{j},\mathfrak{n}} \ . \tag{23}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{s}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{j}$, f un élément de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}^{*}\cap\rho^{-1}(V)$ (d'après le lemme 5, ce dernier ensemble est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}^{*}$), et,

$$X_1^u ,\dots, X_{2p}^u , Y_1^u ,\dots, Y_{2q}^u , \xi_1 ,\dots, \xi_{2p} ,$$

une base de $\mathfrak{g}_{\mathfrak{j}}$ univolumique par rapport à $\eta_{\mathfrak{j}}$, telle que

(*i*) $X_1^u,\dots,X_{2p}^u$ soit une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{s}(u)_{\mathfrak{j}}$ dans $\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}$

(*ii*) $Y_1^u,\dots,Y_{2q}^u$ soit une base de $\mathfrak{s}(u)_{\mathfrak{j}}$ univolumique par rapport à $\eta_{\mathfrak{j},u}$

(*iii*) $\xi_1 ,\dots, \xi_{2p}$ soit une base de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{j}}$,

u désignant comme convenu la restriction de f à $\mathfrak{n}$.

Si p désigne la projection de $\mathfrak{s}$ sur $\mathfrak{s}^{\mathfrak{j}}$ parallèlement à $\mathfrak{s}_{\mathfrak{j}}$ la matrice, A_f , de κ_f dans la base considérée de $\mathfrak{g}_{\mathfrak{j}}$ s'écrit par blocs

$$A_f = \begin{pmatrix} * & * & C_u \\ * & B_f & 0 \\ -{}^tC_u & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

avec

$$B_f = (\langle f, p([Y_i^u , Y_j^u])\rangle)_{1\le i,j\le 2q}$$

$$C_u = (\langle u, [X_i^u , \xi_j]\rangle)_{1\le i,j\le 2p} .$$

Comme on a

$$\mathfrak{s}(u) = \mathfrak{s}(u)_{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{j},$$

on voit que, pour $1\le i, j\le 2q$, $p\big([Y_i^u,Y_j^u]\big)$ est un élément de $\mathfrak{j}$ et, par suite, B_f n'est rien d'autre que la matrice de la forme bilinéaire alternée $\kappa_{\mathfrak{s}(u),\lambda}$, relativement à la base $Y_1^u ,\dots, Y_{2q}^u$ de $\mathfrak{s}(u)_{\mathfrak{j}}$, λ désignant la restriction de f à $\mathfrak{j}$. De tout ceci résulte que l'on a

$$\pi_{\mathfrak{j}}(f) = \pi_{\mathfrak{j},\mathfrak{s}}(f)\, q(u) ,$$

avec

$$q(u) = \det C_u .$$

Utilisant la décomposition

$$\mathfrak{h}_j^* = \mathfrak{s}^{j*} \oplus \mathfrak{n}^{j*} ,$$

nous pouvons donc écrire que l'on a

$$\text{(23')} \qquad \pi_j(\lambda+u) = \pi_{j,s}(\lambda)\ q(u), \quad \forall\lambda\in\mathfrak{s}^{j*}, \quad \forall u\in V^j.$$

Choisissant un élément λ_0 de $\mathfrak{s}^{j*}$, tel que $\pi_{j,s}(\lambda_0)$ soit non nul, et faisant $\lambda = \lambda_0$ dans l'égalité (23)', nous voyons que q est la restriction à l'ouvert affine V^j de $\mathfrak{n}^{j*}$ d'une fonction polynôme sur $\mathfrak{n}^{j*}$, que l'on note $\pi_{j,n}$. Ainsi les fonctions polynômes sur $\mathfrak{h}_j^*$, π_j et $\pi_{j,s}\ \pi_{j,n}$, sont égales sur l'ouvert affine non vide $\rho^{-1}(V)\cap\mathfrak{h}_j^*$ et, par suite, elles sont égales partout. Q.E.D.

Remarquons que $\pi_{j,s}$ est, comme élément de $S(\mathfrak{j})$, H_j-invariant. D'autre part H'_j laisse invariant l'ensemble de racines, $\Delta_{j,s}$ (en effet si u appartient à V^j et, h à H'_j , il est clair que hu est un élément de V^j, et ainsi, $h.\Delta_{j,s}$, l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(hu)$, est, d'après le lemme 6, égal à $\Delta_{j,s}$), et, par suite, le polynôme $\pi_{j,s}^2$ étant égal à

$$\prod_{\alpha\in\Delta_{j,s}} H_\alpha ,$$

est H'_j-invariant.

De plus, H_j opérant trivialement dans $S(\mathfrak{j})$, l'action de H'_j dans cette algèbre de polynômes, y induit une action de W_j . On voit alors qu'il existe un caractère ε_j de W_j à valeurs dans le groupe à deux éléments, $\{1,-1\}$, tel que pour tout $w \in W_j$ on ait

$$\text{(24)} \quad w\pi_{j,s} = \varepsilon_j(w)\ \pi_{j,s}$$

§ IV - UNE CLASSE DE POLYNÔMES INVARIANTS SUR $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$

Ce paragraphe est essentiellement consacré à la démonstration du fait suivant

Proposition 2. *On peut choisir le polynôme* q *sur* $\mathfrak{n}^*$, *ayant les propriétés énoncées dans le lemme 2, de telle sorte que*

(i) U/S *soit naturellement muni d'une structure de variété analytique quotient*

(ii) pour tout u *élément de* U *on ait :*

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*)^{S(u)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.u.$$

Dans ces conditions on a les propriétés suivantes :

(iii) soit $S_{\mathbb{C}}$ *un facteur réductif de* G, $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ *son algèbre de Lie,* u *un élément de* U *et* p *un polynôme sur* $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*$ *invariant sous l'action du normalisateur, dans* $S_{\mathbb{C}}$, *de* $S_{\mathbb{C}}(u)$. *Alors il existe un entier naturel* m *et un polynôme* r *sur* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, *G-invariant, uniquement déterminé par* p *et* m, *tels que*

$$(25) \qquad r(\lambda+v) = p(\lambda)\, q(v)^m \quad \forall \lambda \in \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*, \quad \forall v \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(u)}$$

(iv) soient $\mathfrak{j}$ *appartenant à* $\operatorname{car}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *et* p *un polynôme sur* $\mathfrak{j}^*$, *invariant sous l'action du normalisateur dans* G *de* $\mathfrak{j}$. *Alors il existe un entier naturel* m *et un polynôme* r *sur* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ *G-invariant, uniquement déterminé par* p *et* m, *tels que*

$$(26) \qquad r(f) = p(f_{|\mathfrak{j}})\, q^m \circ \rho(f) \quad \forall f \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{j}}^* .$$

Démonstration. Soient q' un élément de $S(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})^S$ ayant les propriétés énoncées dans le lemme 2, et U' l'ouvert affine de $\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$ qu'il définit. D'après un théorème de Rosenlicht, [Ro], on peut trouver un ouvert de Zariski non vide et S-invariant, U'', contenu dans U' tel que U''/S soit une variété quotient. Soient u un élément de U'', et $\mathfrak{p}$ un supplémentaire S(u)-invariant de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.u$ dans $\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$, où, pour le moment, $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe algébrique $S = G/N$.

Nous allons montrer l'inclusion

$$\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}})^{S(u)}.$$

Pour ce faire il suffit de montrer que, pour v appartenant à $\mathfrak{p}$ et suffisamment voisin de 0, on a

$$S(u) \subset S(v)$$

Mais, puisque U''/S est une variété quotient, et $u+\mathfrak{p}$ est transverse, en u, à l'orbite S.u, il existe un voisinage V (pour la topologie usuelle) de 0 dans $\mathfrak{p}$ tel que pour v appartenant à V, l'orbite S.(u+v) intersecte $u+V$ suivant le point u+v. Supposons alors qu'il existe v appartenant à V tel que S(u) ne soit pas inclus dans S(v), et soit s un élément de S(u) qui n'appartienne pas à S(v) ; comme s.v est un élément de $\mathfrak{p}$, quitte à multiplier v par un scalaire non nul, on peut supposer de plus que s.v est contenu dans V et, dans ces conditions, on voit que u+v et s.(u+v) = u+s.v sont deux points distincts de la S-orbite de (u+v), contenus dans $u+V$; une contradiction.

Ainsi nous avons l'égalité

$$\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.u$$

et il est alors immédiat qu'il existe un ouvert de Zariski non vide, W, de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)}$ contenu dans U'', tel que, pour tout v appartenant à W on ait

$$\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.v \quad . \tag{27}$$

De plus si v appartient à W on a

$$S(u) = S(v).$$

En effet on sait déjà que S(u) est inclus dans S(v) ; d'autre part comme W

est contenu dans U'', $S(v)$ est S-conjugué à $S(u)$. Ainsi $S(u)$ est un sous-groupe fermé du groupe algébrique $S(u)$ ayant même dimension et même nombre de composantes connexes : ces deux groupes algébriques sont donc égaux.

Considérons maintenant l'application, $(s,v) \longrightarrow s.v$, de $S\times W$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$. Il résulte de (27) que c'est une submersion en tout point de $S\times W$ et, par suite, son image est un ouvert de Zariski non vide et S-invariant, U''', de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$, lequel est contenu dans U''. Alors, en utilisant la remarque suivant l'égalité (27), on voit facilement que, pour tout u appartenant à U''', on a

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.u \ .$$

En appliquant le lemme 1 à l'ouvert de Zariski U''', on trouve un polynôme q sur $\mathfrak{n}^*$ ayant les propriétés énoncées dans le lemme 2 et satisfaisant aux conditions (*i*) et (*ii*) de la proposition.

Avant d'aller plus loin dans la démonstration de cette proposition nous aurons besoin du

Lemme 8. *On se place dans le cadre des hypothèses du point (iii) de la proposition 2. Alors l'application* ψ *de*

$$G \times \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* \times U^{S(u)}$$

dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ *définie par*

$$(28) \qquad \psi(g,\lambda,v) = g.(\lambda+v) \quad \forall g\in G, \quad \forall\lambda\in\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*, \quad \forall v\in U^{S(u)},$$

est une submersion dont l'image est l'ouvert affine, $\rho^{-1}(U)$, *de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$.

De plus, si $S_{\mathbb{C}}$ *désigne un facteur réductif de* G, *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$, *et* $N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))$ *le normalisateur dans* $S_{\mathbb{C}}$ *de* $S_{\mathbb{C}}(u)$, *pour tout* λ *et* λ' *éléments de* $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*$ *et,* v *et* v' *de* $U^{S(u)}$, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\lambda' + v' \in G.(\lambda+v)$

(ii) il existe s *appartenant à* $N_S(S_{\mathbb{C}}(u))$ *tel que* $\lambda' = s.f$ *et* $v' = s.v$.

Démonstration. Si l'on fait agir G sur

$$G \times \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* \times U^{S(u)}$$

par translation à gauche sur le premier facteur il est clair que ψ devient un G-morphisme. Par suite pour montrer que ψ est une submersion il suffit de le montrer en tout point de la forme $(1,\lambda,v)$, avec λ appartenant à $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*$ et v à $U^{S(u)}$. Mais, d'après la relation (12), on a,

$$d\psi_{(1,\lambda,v)}(X+\xi,\mu,w) = X.\lambda + \mu + \Phi(v,\xi) + w + X.v,$$

$$\text{pour } X\in\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}\ ,\ \xi\in\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}\ ,\ \mu\in\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* \text{ et } w\in\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)}\ ,$$

et notre assertion découle du fait que, d'une part, d'après le point (*ii*) de la proposition

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.v = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$$

et, d'autre part, d'après la relation (19), on a

$$(29) \qquad \Phi(v,\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(v)^{\perp} = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^{\perp}\ ,$$

l'orthogonal étant pris dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$.

En appliquant les résultats de Luna et Richardson, plus précisément Lemma 3.5 et Lemma 4.1 de [Lu-Ri], à l'action de S dans l'ouvert affine U on voit que

(30) toute S-orbite dans U rencontre $U^{S(u)}$ suivant une $N_S(S(u))$-orbite.

Maintenant le fait que $\mathrm{Im}\psi$ soit inclus dans $\rho^{-1}(U)$ est clair, tandis que l'inclusion réciproque résulte de ce que, d'une part, d'après l'assertion (30), tout élément de $\rho^{-1}(U)$ est $S_{\mathbb{C}}$-conjugué à un élément de $\rho^{-1}(U^{S(u)})$ et, d'autre part, d'après la relation (19) tout élément de $\rho^{-1}(U^{S(u)})$ est N-conjugué à un élément de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* + U^{S(u)}$.

Enfin soient λ et λ' deux éléments de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*$, v et v' de $U^{S(u)}$ et g appartenant à G tels que

$$\lambda' + v' = g.(\lambda+v).$$

Si on écrit $g = s.n$, avec s élément de $S_{\mathbb{C}}$ et n de N, l'égalité ci-dessus est équivalente aux relations

$$s.v = v'$$

$$s.f + \Phi(sv,sn) = f'.$$

La première de celles-ci entraîne, d'après l'assertion (30), que s appartient à $N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))$. D'une part $N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))$ stabilise $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)$ ainsi que son orthogonal dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ pour la forme de Killing, et, d'autre part, on a

$$\Phi(sv,sn) = s.\Phi(v,n).$$

Ainsi grâce à l'égalité (29), la seconde des relations ci-dessus entraîne que l'on a

$$\Phi(v,n) = 0 \quad \text{et} \quad s.f = f'.$$

La dernière assertion du lemme est alors claire. Q.E.D.

Reprenons la démonstration de la proposition et plaçons-nous dans les hypothèses du point (*iii*). Désignons par X la variété algébrique affine $G \times \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* \times U^{S(u)}$, et notons $\tilde{p}$ la fonction définie sur X par :

$$\tilde{p}(g,\lambda,v) = p(\lambda) \ , \quad \forall(g,\lambda,v)\in X \ .$$

Alors $\tilde{p}$ est une fonction rationnelle G-invariante et, d'après la deuxième partie du lemme 8, constante sur les fibres de ψ. Comme ψ est une submersion de X sur la variété lisse $\rho^{-1}(U)$, $\tilde{p}$ est en fait une fonction rationnelle sur $\rho^{-1}(U)$ (voir par exemple [Bo] Lemma (6.2) p 173), qui est manifsestement G-invariante. Mais $\rho^{-1}(U)$ est l'ouvert affine de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, complémentaire de l'ensemble des zéros du polynôme G-invariant $q\circ\rho$. Par suite il existe un entier m et un élément r de $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ tels que

$$r(f) = p(f)\ q^m\circ\rho(f), \quad \forall f\in\rho^{-1}(U) \ ;$$

il est clair que r est G-invariant et qu'il satisfait à la relation (25). Comme l'image de ψ est l'ouvert affine $\rho^{-1}(U)$, tout polynôme G-invariant sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ est entièrement déterminé par sa restriction à $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* + U^{S(u)}$; l'unicité de r pour m fixé est conséquence de cela.

Il nous reste à démontrer le dernier point de la proposition. Pour cela considérons un facteur réductif $S_{\mathbb{C}}$ de G dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ contienne $\mathfrak{j}$ et un élément u de $U^{\mathfrak{j}}$ choisi de telle sorte que $\mathfrak{j}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)$ et que $\mathfrak{j}^*$ soit un sous-espace de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^*$. Nous allons d'abord démontrer le

Lemme 9. *Avec les notations que nous venons d'introduire les assertions suivantes sont vraies :*

(i) pour tous v *et* w *éléments de* $\mathcal{U}^j$, *les stabilisateurs* $S_{\mathbb{C}}(v)$ *et* $S_{\mathbb{C}}(w)$ *sont* $S_{\mathbb{C}}^j$*-conjugués*

(ii) on a les égalités

$$(31)\quad \begin{aligned} N_{S_{\mathbb{C}}}(j) &= (N_{S_{\mathbb{C}}}(j) \cap N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))).S_{\mathbb{C}}^j \\ N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u)) &= ((N_{S_{\mathbb{C}}}(j) \cap N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))).S_{\mathbb{C}}(u), \end{aligned}$$

où $N_{S_{\mathbb{C}}}(j)$ *désigne le normalisateur dans* $S_{\mathbb{C}}$ *de* j.

(iii) l'application de restriction de $S(\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u))$ *sur* $S(j)$, *induit un isomorphisme d'algèbres de*

$$S(\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u))^{N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))}$$

sur $S(j)^{N_{S_{\mathbb{C}}}(j)}$.

Démonstration. En tant qu'ouvert de Zariski de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j}$, $\mathcal{U}^j = \mathcal{U}\cap\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j}$ est connexe. Par suite pour montrer la première assertion du lemme il suffit de montrer, qu'étant donné v appartenant à $\mathcal{U}^j$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de v dans $\mathcal{U}^j$ tel que, pour tout w élément de $\mathcal{V}$, $S_{\mathbb{C}}(w)$ soit $S_{\mathbb{C}}^j$-conjugué à $S_{\mathbb{C}}(v)$. Considérons alors l'application η de

$$S_{\mathbb{C}}^j \times \mathcal{U}^{S_{\mathbb{C}}(u)}$$

dans $\mathcal{U}^j$, définie par

$$\eta(s,w) = s.w, \quad \forall(s,w) \in S_{\mathbb{C}}^j \times \mathcal{U}^{S_{\mathbb{C}}(u)}.$$

Si nous montrons que η est une submersion, il sera clair que son image est un ouvert de $\mathcal{U}^j$ répondant à la question. De la même manière que pour l'application ψ du lemme 8, il nous suffit de montrer que η est une submersion en tout point de la forme $(1,w)$ avec w élément de $\mathcal{U}^{S_{\mathbb{C}}(v)}$; mais l'image de $d\eta_{(1,w)}$ est clairement égale à

$$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j.w + \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(v)}.$$

Cependant d'après le point *(ii)* de la proposition on a

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(w)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.w \ ,$$

d'où l'on déduit, puisque $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(w)}$ est contenu dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j}$,

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(w)} + (\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.w)^{j} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(w)} + \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^{j}.w \ .$$

Ainsi η est bien une submersion, et la première partie du lemme est démontrée.

Le fait que

$$(N_{S_{\mathbb{C}}}(j) \cap N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u)))S_{\mathbb{C}}^{j}$$

soit inclus dans $N_{S_{\mathbb{C}}}(j)$ est clair. Réciproquement soit s appartenant à $N_{S_{\mathbb{C}}}(j)$. Alors $s^{-1}u$ appartient à U^{j} et, d'après le point (i) du lemme, il existe un élément s_1 de $S_{\mathbb{C}}^{j}$ tel que

$$S_{\mathbb{C}}(s^{-1}.u) = s_1 S_{\mathbb{C}}(u)s_1^{-1}, \ \textit{i.e.}\ s^{-1}S_{\mathbb{C}}(u)s = s_1 S_{\mathbb{C}}(u)s_1^{-1} \ .$$

De là il résulte que ss_1 appartient à

$$N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u)) \cap N_{S_{\mathbb{C}}}(j)$$

et la première des égalités (31) est démontrée.

La démonstration de la deuxième égalité (31) est encore plus simple et est laissée au lecteur.

La dernière assertion du lemme est conséquence des égalités (31), et d'une généralisation facile du théorème de restriction de Chevalley au cas d'un groupe algébrique réductif, en l'occurrence le groupe des automorphismes de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)$ induits par les éléments de $N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))$; on peut aussi utiliser [Lu-Ri] Theorem 4.2. Q.E.D.

Comme le normalisateur de j dans **G** est égal à

$$N_{S_{\mathbb{C}}}(j) \exp \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{j} \ ,$$

les polynômes considérés dans le point (iv) de la proposition sont les éléments de $S(j)^{N_{S_{\mathbb{C}}}(j)}$. Soit donc p appartenant à $S(j)^{N_{S_{\mathbb{C}}}(j)}$. D'après le lemme 9 il existe un unique élément, $\overline{p}$, de $S(\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u))^{N_{S_{\mathbb{C}}}(S_{\mathbb{C}}(u))}$ tel que $p = \overline{p}|_{j^*}$. Nous savons alors qu'il existe m appartenant à $\mathbb{N}$, et r à $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ tels que

$$(32) \qquad \overline{r}(\lambda+v) = \overline{p}(\lambda)\, q(v)^m, \quad \forall\lambda\in\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)^* \quad \forall v\in\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S(u)}.$$

Nous allons voir que $\overline{r}$ répond à la question ; pour cela il nous faut montrer que l'égalité (26), avec $\overline{r}$ à la place de r, est satisfaite pour tout élément f de $\mathfrak{h}_j^*$. Remarquons d'abord que la restriction, ψ', de l'application ψ du lemme 8, à la variété $H_j \times j^* \times U^{S(u)}$, est une submersion de cette dernière sur un ouvert de Zariski de $\mathfrak{h}_j^*$; en fait il suffit de montrer que ψ' est une submersion en tout point de la forme $(1,\lambda,v)$ avec λ élément de j^*, et v de $U^{S(u)}$. Cependant on a

$$\mathfrak{h}_j = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^j$$

et, si

$$X\in\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j, \quad \xi\in\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^j, \quad \mu\in j^* \quad \text{et} \quad w\in\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(u)},$$

il vient

$$d\psi'_{(1,\lambda,v)}(X+\xi,\mu,w) = X.\lambda + \Phi(v,\xi) + w + X.v.$$

Alors notre assertion découle, d'une part de ce que, comme on l'a vu au cours de la démonstration du lemme 9,

$$\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j} = \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*S_{\mathbb{C}}(u)} + (\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}.v)^j$$

et d'autre part de la relation

$$\Phi(v,\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^j) = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j(v)^\perp = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j(u)^\perp,$$

l'orthogonal étant pris dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^{j*}$. Cette dernière relation est conséquence de (29) et de ce que

$$\Phi(v,\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})^j = \Phi(v,\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^j), \text{ et } (\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(v)^\perp)^j = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^j(v)^\perp,$$

comme on le vérifie facilement en tenant compte du fait que v appartient à $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^{*j}$.

Ainsi, l'image de ψ' est un ouvert de Zariski H_j-invariant de $\mathfrak{h}_j^*$ et, par suite, tout polynôme H_j-invariant, défini sur $\mathfrak{h}_j^*$, est entièrement déterminé par sa restriction à $j^* + \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}^{*S(u)}$. Cependant la relation (32) entraîne que la relation (26), avec $\bar{r}$ à la place de r, est satisfaite pour tout f appartenant à

$$j^* + \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}^{*S(u)},$$

tandis que les deux membres de cette relation définissent des polynômes sur $\mathfrak{h}_j^*$ qui sont clairement H_j-invariants : d'où notre assertion.

Enfin l'unicité, pour m appartenant à $\mathbb{N}$ donné, du polynôme r de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ satisfaisant à la relation (26) est une conséquence immédiate du lemme 3 (*iii*). Ceci achève la démonstration de la proposition 2. Q.E.D.

Désormais nous supposerons le polynôme q choisi comme dans la proposition 2.

Compte tenu de la remarque à la fin du paragraphe III on a le

Corollaire. *Soit* j *appartenant à* car$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. *Alors il existe un entier naturel* m *et un polynôme* π_q *de* $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^G$ *tels que*

$$(33) \qquad \pi_q(f) = \pi_{j,s}^2(f)\, q^m \circ \rho(f), \quad \forall f \in \mathfrak{h}_j^* .$$

Remarque. On voit facilement par transport de structure que, pour tout élément g de G, on a

$$\pi^2_{\mathrm{Adg}(j),s} = \mathrm{Adg}.\pi^2_{j,s}$$

et, par suite, le polynôme π_q du corollaire ne dépend pas, pour m fixé, du choix de l'élément j de car$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Nous noterons $\mathcal{U}$ l'ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^*$, intersection de $\rho^{-1}(U)$ avec $\mathfrak{g}_{\mathbf{C},r}^*$. Si r est une algèbre de Lie réductive complexe, et j est un élément de car(r), on sait que le polynôme π_j^2, défini sur j^*, se prolonge de manière unique en un polynôme sur r^*, invariant sous l'action du groupe des automorphismes de r, et tel que r_r^* soit l'ouvert affine, complémentaire de l'ensemble des zéros de celui-ci. Il est alors clair que, compte tenu du lemme 5, on a le

Lemme 10. *L'ouvert de Zariski* $\mathcal{U}$ *est, en fait, l'ouvert affine de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, *complémentaire de l'ensemble des zéros du polynôme* π_q.

Nous noterons $\mathcal{V}$ la trace de l'ouvert $\mathcal{U}$ sur $\mathfrak{g}^*$ et, pour tout j élément de $\operatorname{car}(\mathfrak{g})$, nous poserons

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V} \cap \mathfrak{g}_{r,j}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{V}^j = \mathcal{V} \cap \mathfrak{h}_j^* .$$

Alors on a

$$\mathcal{V} = \bigcup_{j \in \operatorname{Car}(G)} \mathcal{V}_j ,$$

la réunion étant disjointe. De plus les résultats du lemme 3 s'appliquent avec, j appartenant à $\operatorname{car}(\mathfrak{g})$ fixé, G à la place de B, $\mathcal{V}_j$ à la place de $\mathfrak{g}_{r,j}^*$ et $\mathcal{V}^j$ à la place de $\mathfrak{h}_{j,r}^*$.

Nous rassemblons ci-dessous quelques résultats concernant l'existence de variétés quotient pour l'action de G et de certains de ses sous-groupes. Nous aurons besoin du :

Lemme 11. *Soit* A *un groupe algébrique, et* X *une variété algébrique lisse, sur laquelle le groupe* A *agit de telle sorte que* X/A *soit une variété lisse quotient. On suppose de plus que* A, X, *et l'action de* A *sur* X *sont définis sur* $\mathbb{R}$, *et on considère un groupe presque algébrique,* (A,j,A), *associé à* A. *Alors la variété* $X_{\mathbb{R}}$, *des points réels de* X, *est lisse et* $X_{\mathbb{R}}/A$ *est une variété analytique quotient.*

Démonstration. Le fait que $X_{\mathbb{R}}$ est une variété lisse résulte de [Wh] Theorem 1 et Lemma 9.

Rappelons qu'étant données une variété analytique Y et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Y les conditions suivantes sont équivalentes

(*i*) $Y/\mathcal{R}$ est naturellement muni d'une structure de variété quotient

(*ii*) le graphe Γ de $\mathcal{R}$ dans $Y \times Y$ satisfait aux hypothèses suivantes

(34) (a) Γ est une sous-variété fermée de $Y \times Y$

(34) (b) la première projection de $Y \times Y$ sur Y induit, par restriction, une submersion de Γ sur Y.

Pour ce qui précède on pourra se référer à [Go] Tome 1 § 4, Théorème 5.

Désignons par Γ (resp. Γ_A) le graphe de la relation d'équivalence induite par l'action de $\mathbf{A}$ (resp. A) sur X (resp. $X_{\mathbb{R}}$).

Remarquons tout d'abord que Γ est une sous-variété algébrique fermée et définie sur $\mathbb{R}$ de X×X. En effet, d'une part, Γ étant l'image du morphisme défini sur $\mathbb{R}$, $(g,x) \longrightarrow (x,gx)$, de $\mathbf{A}\times X$ dans X×X, c'est un constructible de X dont l'adhérence pour la topologie de Zariski est définie sur $\mathbb{R}$ (cf [Bo] Corollary (10.2) et Corollary (14.5)), et, d'autre part, pour un sous-ensemble constructible d'une variété algébrique complexe son adhérence, au sens de la topologie de Zariski, et celle, au sens de la topologie usuelle, sont égales (cf [Mu] § 10 Corollary 1).

Ensuite soit $\Gamma_{\mathbb{R}}$ l'intersection de Γ avec $X_{\mathbb{R}}\times X_{\mathbb{R}}$. C'est une variété lisse réelle et, si (x,y) est un point de $\Gamma_{\mathbb{R}}$, l'espace tangent $T_{(x,y)}(\Gamma_{\mathbb{R}})$ est l'intersection des espaces tangents $T_{(x,y)}(\Gamma)$ et $T_{(x,y)}(X_{\mathbb{R}}\times X_{\mathbb{R}})$. Comme la première projection de X×X sur X est un morphisme, bien évidemment défini sur $\mathbb{R}$, nous voyons que $\Gamma_{\mathbb{R}}$ satisfait à la condition (b), et qu'il en est de même de tout ouvert de $\Gamma_{\mathbb{R}}$. Enfin soit $X_1, \dots, X_l$ les composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$, $x_1, \dots, x_l$, des éléments respectifs de $X_1, \dots, X_l$, et, $a_1, \dots, a_m$, des représentants, dans A, des classes de conjugaison modulo $\mathring{A}$. Alors il est clair que Γ_A est la réunion des composantes connexes dans $\Gamma_{\mathbb{R}}$ des éléments $(x_i, a_j x_i)$, $1\le i\le l$, $1\le j\le m$. De tout ceci résulte que Γ_A satisfait aux conditions (a) et (b) ci-dessus. Le lemme est démontré. Q.E.D.

Si j appartient à car(g) nous poserons

$$\mathcal{V}_j = \rho(V_j).$$

En fait $\mathcal{V}_j$ est l'ouvert de $\mathfrak{n}^*$, sous-ensemble des éléments de $\mathcal{V}$ dont la S-orbite rencontre $\mathcal{V}^j$. Nous poserons aussi

$$j^{*\prime} = \left\{ f\in j^* \ / \ \pi_{j,s}(f)\neq 0 \right\}$$

On a alors le

Lemme 12. *Soit* j *appartenant à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ *et* S *un facteur réductif de* G *dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{s}$ *contient* j.

(i) *toute* S-*orbite de* V_j *rencontre* V^j *suivant une* $N_S(j)$-*orbite.*

(ii) V_j/S *et* $V^j/N_S(j)$ *sont des variétés quotients, et l'application, qui, à une* S-*orbite, fait correspondre son intersection avec* V^j, *induit un isomorphisme de la première sur la seconde. De plus* V^j/S^j *est une variété quotient.*

(iii) V^j/H_j *est une variété quotient, sur laquelle l'action de* H'_j *sur* V^j, *induit une opération du groupe* W_j *.De plus, l'application*

$$(\lambda,u) \longrightarrow \lambda+u, \text{ de } j^{*'} \times V^j \text{ dans } V^j,$$

induit, par passage au quotient, un isomorphisme de variétés de

$$j^{*'} \times V^j/S^j \text{ sur } V^j/H_j \,.$$

Démonstration. Soit x un élément de V^j. Alors il est clair que

$$\left\{s\in S \;/\; s.x \in V^j\right\} = \left\{s\in S \;/\; s.x \in U^j\right\} \cap S$$

Ainsi, pour établir le premier point, il nous suffit de montrer que

$$N_{S(j_{\mathbb{C}})} = \left\{s\in S \;/\; s.x \in U^j\right\}.$$

Soit donc s un élément de S tel que $s.x$ appartienne à U^j. Alors $j_{\mathbb{C}}$ est inclus, à la fois dans $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(x)$ et $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(sx)$; autrement dit $j_{\mathbb{C}}$ et $s^{-1}j_{\mathbb{C}}$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(x)$. Par suite il existe s_1 appartenant à $S(x)$ tel que

$$s_1 j_{\mathbb{C}} = s^{-1} j_{\mathbb{C}} \,,$$

c'est-à-dire tel que ss_1 appartienne à $N_S(j_{\mathbb{C}})$, d'où notre assertion.

Maintenant il résulte de ce que U/S est une variété quotient, de ce que V_j est un ouvert S-invariant de U, et du lemme 11, que V_j/S est une variété quotient. Le fait que $V^j/N_S(j)$ est une variété quotient, isomorphe, comme expliqué dans l'énoncé du lemme, à V_j/S est alors conséquence de (*i*).

Désignons par $\Gamma_{N_S(j)}$ (resp. Γ_{S^j}) le graphe, dans $V^j \times V^j$, de la relation d'équivalence dans V^j induite par l'action de $N_S(j)$ (resp. S^j). Comme S^j est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $N_S(j)$, on voit, comme dans la démonstration du lemme 11, que Γ_{S^j} est réunion de composantes connexes de $\Gamma_{N_S(j)}$ lesquelles sont en nombre fini, et que, par suite, Γ_{S^j} satisfait aux conditions (34) (a) et (b). Ceci montre que V^j/S^j est bien une variété quotient.

Le fait que W_j opère dans V^j/H_j est clair. Pour achever la démonstration de *(iii)*, il suffit de montrer que toute H_j-orbite dans V^j rencontre j^*+V^j suivant une S^j-orbite. Mais cela résulte de ce que, pour v élément de V^j, on a

$$\Phi(v,\mathfrak{n}^j) = \mathfrak{s}^j(v)^{\perp},$$

l'orthogonal étant pris dans $\mathfrak{s}^{j*}$. Les détails sont laissés au lecteur. Q.E.D.

Enfin pour terminer ce paragraphe remarquons que la même technique, que celle utilisée pour démontrer le lemme 9 *(i)*, permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 13. *Soit* j *appartenant à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, *W une composante connexe de* V^j, *et* S *un facteur réductif de* G, *dont l'algèbre de Lie contienne* j. *Si* u *et* v *sont deux éléments de* W, *leurs stabilisateurs dans* S *sont* S^j*-conjugués.*

Si j *est* un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, et S un facteur réductif dont l'algèbre de Lie contient j, on définit une relation d'équivalence, notée $\sim$, sur V^j en décidant que, pour f et f' éléments de V^j, on a

(35) $f \sim f'$ si et seulement si $S(u_f)$ et $S(u_{f'})$ sont S^j-conjugués.

Cette relation d'équivalence ne dépend pas du choix de S, comme on le vérifie facilement. De plus comme conséquence du lemme 13 on a le

Corollaire. *Si* j *appartient à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ *les classes d'équivalence dans* V^j *pour la relation* $\sim$ *sont ouvertes et réunion de composantes connexes de* V^j.

§ V - LES INTÉGRALES ORBITALES SUR $\mathfrak{g}$ ET LEUR TRANSFORMÉE DE FOURIER

Soit $(B,j,\mathbf{B})$ un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et soit T un élément elliptique de $\mathfrak{b}$, *i.e.* $\mathrm{ad}T$ est semi-simple et ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures. Nous noterons $\mathfrak{h}_T$ (resp. H_T) ou, si l'on tient à préciser, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{b},T}$ (resp. $H_{B,T}$), le centralisateur de T dans $\mathfrak{b}$ (resp. dans B), et $\mathfrak{b}_T$ l'image de $\mathrm{ad}T$. Alors, $\mathfrak{b}_T$ est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}_T$ et de H_T, et, on a la décomposition en somme directe

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_T \oplus \mathfrak{b}_T ,$$

induisant la décomposition analogue au niveau des espaces duaux. On note Δ_T (ou $\Delta_{\mathfrak{b},T}$) l'ensemble des valeurs propres de T dans $\mathfrak{b}_{T,\mathbb{C}}$ et Δ_T^+ (ou $\Delta_{\mathfrak{b},T}^+$) le sous-ensemble des éléments λ de Δ_T tels que $i\lambda$ soit un nombre strictement positif. Alors Δ_T est la réunion disjointe de Δ_T^+ et $-\Delta_T^+$ et, si λ appartient à Δ_T, les valeurs propres λ et $-\lambda$ ont la même multiplicité. Si λ est dans Δ_T, on note $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ le sous-espace propre correspondant. On considère alors les sous-espaces $\mathfrak{u}_T^{\pm}$ (ou $\mathfrak{u}_{\mathfrak{b},T}^{\pm}$) de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ définis par

$$\mathfrak{u}_T^+ = \bigoplus_{\lambda\in\Delta_T^+} \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{\lambda} , \text{ et } \quad \mathfrak{u}_T^- = \bigoplus_{\lambda\in-\Delta_T^+} \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{\lambda} .$$

Alors $\mathfrak{u}_T^+$ et $\mathfrak{u}_T^-$ sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ qui sont H_T-invariantes. De plus la conjugaison dans $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ relativement à la forme réelle $\mathfrak{b}$, notée $X \longrightarrow \bar{X}$, induit un isomorphisme antilinéaire de $\mathfrak{u}_T^+$ sur $\mathfrak{u}_T^-$ lequel envoie, pour tout λ dans Δ_T^+, le sous-espace propre $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{\lambda}$ sur $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{-\lambda}$. Nous noterons d_T (ou $d_{\mathfrak{b},T}$) la dimension complexe de $\mathfrak{u}_T^+$; c'est un entier naturel tel que $2d_T$ soit la dimension de $\mathfrak{b}_T$.

Si f appartient à $\mathfrak{h}_T^*$, on note κ_f^T la forme bilinéaire alternée définie sur $\mathfrak{b}_T$ de la manière habituelle, à savoir

$$\kappa_f^T(X,Y) = \langle f, [X,Y]\rangle, \quad \forall X, \forall Y\in\mathfrak{b}_T .$$

Soit η_T une forme volume sur $\mathfrak{b}_T$ induisant sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_T \simeq \mathfrak{b}_T$ la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_T}X$. Si f est dans $\mathfrak{h}_T^*$, nous noterons $\pi_T(f)$ (ou $\pi_{\mathfrak{b},T}(f)$) le pfaffien de κ_f^T relativement à η_T. Alors π_T est un polynôme homogène de degré d_T sur $\mathfrak{h}_T^*$, lequel n'est déterminé par la mesure de Lebesgue choisie sur $\mathfrak{b}_T$ qu'au signe près. Nous expliquerons plus loin comment lever cette ambiguïté. Auparavant nous allons démontrer le

Lemme 14. *La fonction polynôme* π_T *est non nulle si et seulement s'il existe un élément* j *de* $\mathrm{car}(\mathfrak{b})$ *tel que* T *appartienne à* j.

Démonstration. Supposons π_T non nul et notons $\mathfrak{h}_T^{*\prime}$ l'ouvert affine de $\mathfrak{h}_T^*$ complémentaire de l'ensemble des zéros de π_T. Alors l'application ψ de $B\times\mathfrak{h}_T^{*\prime}$ dans $\mathfrak{b}^*$ définie par

$$\psi(b,f) = b.f$$

est une submersion.

En effet si f appartient à $\mathfrak{h}_T^{*\prime}$, X à $\mathfrak{b}_T$ et u à $\mathfrak{h}_T^*$, tout d'abord on a

$$d\psi_{(1,f)}(X,u) = \gamma_f(X) + u,$$

où γ_f est l'application de $\mathfrak{b}_T$ dans $\mathfrak{b}_T^*$ définie par

$$\gamma_f(X) = X.f, \quad \forall X\in\mathfrak{b}_T ,$$

et, de plus, si on choisit une base de $\mathfrak{b}_T$ univolumique pour η_T, le déterminant de γ_f relativement à cette base et à sa base duale n'est rien d'autre que $\pi_T(f)$, d'où notre assertion.

Ainsi l'image de ψ est un ouvert non vide de $\mathfrak{b}^*$ et, par suite, il rencontre l'ouvert de Zariski partout dense $\mathfrak{b}_r^*$. Il est alors clair que $\mathfrak{h}_j^{*\prime} \cap \mathfrak{b}_r^*$ est non vide et que, si f est un élément de cet ensemble, T appartient à j_f.

Réciproquement, si j est un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{b})$ contenant T, $\mathfrak{h}_T$ (resp. $\mathfrak{b}_j$) contient $\mathfrak{h}_j$ (resp. $\mathfrak{b}_T$) et on a les décompositions en somme directe

$$\mathfrak{h}_T = \mathfrak{h}_j \oplus \mathfrak{h}_T \cap \mathfrak{b}_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_j = \mathfrak{b}_T \oplus \mathfrak{h}_T \cap \mathfrak{b}_j \ ,$$

induisant les décompositions analogues pour les espaces duaux et permettant en particulier de considérer $\mathfrak{h}_j^*$ comme un sous-espace de $\mathfrak{h}_T^*$. Si f appartient à $\mathfrak{h}_{j,r}^*$, on vérifie immédiatement que chacun des sous-espaces $\mathfrak{b}_T$ et $\mathfrak{h}_T \cap \mathfrak{b}_j$ de $\mathfrak{b}_j$ est l'orthogonal de l'autre relativement à κ_f, tandis que

$$\kappa_f^T = \kappa_f|_{\mathfrak{b}_T} \ ;$$

de là il résulte que κ_f^T est non dégénérée et donc que $\pi_T(f)$ est non nul. Q.E.D.

Pour lever l'ambiguïté sur le signe de π_T il nous suffit, bien évidemment, de le faire lorsqu'il est non nul. Dans ce cas soit $X_1, \dots, X_{d_T}$ une base de $\mathfrak{u}_T^+$; alors $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{d_T}$ est une base de $\mathfrak{u}_T^-$ et on vérifie facilement que

$$i^{d_T} \eta_T(X_1, \dots, X_{d_T}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{d_T})$$

est un nombre réel dont le signe ne dépend pas du choix de la base $X_1, \dots, X_{d_T}$. D'autre part si f est dans $\mathfrak{h}_T^*$, la matrice de κ_f^T dans la base $X_1, \dots, X_{d_T}, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{d_T}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & A_f \\ -{}^tA_f & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } A_f = (\langle f, [X_i, \bar{X}_j] \rangle)_{1 \le i,j \le d_T} \ .$$

Compte tenu des propriétés du pfaffien d'une forme bilinéaire alternée relativement aux changements de base on voit, alors, qu'il existe un unique choix de η_T pour lequel on puisse trouver une base $X_1, \dots, X_{d_T}$ de $\mathfrak{u}_T^+$ satisfaisant à la relation

$$(36) \qquad \pi_T(f) = i^{d_T} \det A_f \ , \quad \forall f \in \mathfrak{h}_T^* \ ;$$

de plus, il est immédiat de voir qu'une telle base vérifie

$$(37)\qquad i^{d_T}\eta_T(X_1,\dots,X_{d_T},\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_{d_T}) = 1\ .$$

Nous déterminerons π_T à l'aide de ce choix de η_T ou de la formule (36).

On définit maintenant un polynôme noté ω_T (ou $\omega_{\mathfrak{b},T}$) sur $\mathfrak{h}_T$ en posant

$$\omega_T(H) = \det \operatorname{ad}_{\mathfrak{u}_T^+} H,\ \forall H\in\mathfrak{h}_T$$

Alors, si on désigne par ${}^n\mathfrak{h}_T$ le radical nilpotent de $\mathfrak{h}_T$, on a

$$(38)\qquad \omega_T(H+X) = \omega_T(H),\ \forall H\in\mathfrak{h}_T\ ,\ \forall X\in{}^n\mathfrak{h}_T\ .$$

Proposition 3. *Soit* T *un élément elliptique de* $\mathfrak{b}$. *Si* φ *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathfrak{b}$, *la fonction* ψ_φ *définie sur* B *par la formule*

$$\psi_\varphi(b) = \partial_{\pi_T}[\omega_T(H)\ \varphi(b.H)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}}\qquad \forall b\in B,$$

satisfait à la relation (4) *relativement à* B *et* H_T . *De plus si* φ *appartient à* $\mathscr{S}(\mathfrak{b})$, *la fonction* ψ_φ *est* $d_{B/H_T}\dot{b}$*-intégrable, et on définit une distribution tempérée et* B*-invariante* $M_{B,T}$ *sur* $\mathfrak{b}$, *en posant pour toute fonction* φ *de* $\mathscr{S}(\mathfrak{b})$

$$(39)\qquad M_{B,T}(\varphi) = (i/2\pi)^{d_T}\int_{B/H_T}\partial_{\pi_T}[\omega_T(H)\ \varphi(b.H)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}} d_{B/H_T}\dot{b}.$$

Enfin la distribution $M_{B,T}$ *ne dépend pas du choix de la mesure de Lebesgue sur* $\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_T$, *et, si* T *et* T' *sont des éléments elliptiques de* $\mathfrak{b}$ *situés sur la même* B*-orbite, les distributions* $M_{B,T}$ *et* $M_{B,T'}$ *sont égales.*

Avant de procéder à la démonstration de la proposition, nous devons rappeler un certain nombre de faits concernant l'intégration sur les variétés et plus particulièrement sur les variétés lisses réelles.

Etant donnés une variété différentiable X, dont on note n la dimension, et un nombre complexe λ, nous appellerons λ-densité sur X, toute fonction γ de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie sur l'ouvert $\Lambda_+^n\,TX$ du fibré en droite Λ^nTX, complémentaire de la section nulle, et satisfaisant à la relation

$$\gamma(t\vartheta) = |t|^\lambda\gamma(\vartheta)\quad ;\quad \forall t\in\mathbb{R}\ ;\quad \forall\vartheta\in\Lambda_+^nTX.$$

L'ensemble des λ-densités sur X est un espace vectoriel que nous noterons

$\Gamma^{\lambda}(X)$, et les éléments de $\Gamma^{1}(X)$ seront simplement appelés densités sur X. Nous dirons qu'une λ-densité sur X est à support compact, lorsque l'image de son support, par la projection naturelle p de $\Lambda^{n}TX$ sur X, est un compact de X ; nous noterons, $\Gamma_{c}^{\lambda}(X)$, le sous-espace de $\Gamma^{\lambda}(X)$ constitué des λ-densités à support compact. On remarquera que l'application,

$$\varphi \longrightarrow \varphi \circ p,$$

permet d'identifier de manière naturelle $\mathcal{E}(X)$ (resp. $\mathcal{D}(X)$) avec $\Gamma^{0}(X)$ (resp. $\Gamma_{c}^{0}(X)$). Etant donnés, pour $i=1,2$, λ_i un nombre complexe, et γ_i une λ_i-densité sur X, il est clair que le produit $\gamma_1\gamma_2$ est une $(\lambda_1+\lambda_2)$-densité, qui est à support compact dès que γ_1 ou γ_2 l'est. On voit en particulier que, pour tout nombre complexe λ, $\Gamma^{\lambda}(X)$ devient un $\mathcal{E}(X)$-module, et que, si φ appartient à $\mathcal{D}(X)$ et γ à $\Gamma^{\lambda}(X)$, alors $\varphi\gamma$ appartient à $\Gamma_{c}^{\lambda}(X)$.

De la même manière que, sur une variété orientée de dimension n, on sait définir l'intégrale d'une forme différentielle de degré n et à support compact, on sait définir sur X l'intégrale d'une densité à support compact ; si γ appartient à $\Gamma_{c}^{1}(X)$ on notera

$$\int_X \gamma ,$$

son intégrale sur X.

On appelera forme volume impaire sur X, toute densité γ de $\Gamma_{1}(X)$, ne prenant que des valeurs strictement positives.

Soit γ une forme volume impaire sur X. Alors l'application,

$$\varphi \longrightarrow \varphi\gamma,$$

induit une bijection de $\mathcal{E}(X)$ (resp. $\mathcal{D}(X)$) sur $\Gamma^{1}(X)$ (resp. $\Gamma_{c}^{1}(X)$). De plus l'application,

$$\varphi \longrightarrow \int_X \varphi\gamma,$$

définie sur $\mathcal{D}(X)$, se prolonge de manière unique en une mesure de Radon sur X notée μ_{γ} .

Si X est une variété orientable, et si γ est une forme volume impaire sur X on lui associe de manière naturelle une forme volume définie au signe près : si ϑ est une section de $\Lambda^n TX$ ne s'annulant jamais, il existe une unique forme volume, ω_γ , sur X, telle que

$$\omega_\gamma(\vartheta(x)) = \gamma(\vartheta(x)), \quad \forall x \in X ,$$

et on vérifie que, au signe près, ω_γ ne dépend pas du choix de ϑ. De plus si on munit X de l'orientation déterminée par la forme volume ω_γ on a

$$\int_X \varphi \; d\mu_\gamma = \int_X \varphi \; \omega_\gamma , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(X) .$$

Soient L un groupe de Lie, M un sous-groupe fermé, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$ leurs algèbres de Lie respectives, et X l'espace homogène L/M. La mesure de Lebesgue, $d_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}}X$, permet d'identifier naturellement l'ensemble des densités (resp. formes volumes impaires) sur X avec l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne prenant que des valeurs strictement positives) sur L et satisfaisant à la relation (4) ; plus précisément, à toute densité γ sur X, on associe la fonction φ_γ sur L telle que

$$(40) \qquad \varphi_\gamma(x) = \gamma(xX_1 ,\dots, xX_p),$$

où $X_1 ,\dots, X_p$ est une base de $\mathfrak{l}/\mathfrak{m}$ $(= T_1(L/M))$, univolumique pour la mesure $d_{\mathfrak{l}/\mathfrak{m}}X$. La densité γ est à support compact si et seulement si la fonction φ_γ est à support compact modulo M, et, dans ces conditions on a

$$\int_{L/M} \varphi_\gamma(x) \; d_{L/M}\dot{x} = \int_X \gamma.$$

Maintenant si γ est une forme volume impaire sur X, l'application

$$\varphi \longrightarrow \varphi\varphi_\gamma^{-1}$$

induit une bijection de l'espace des fonctions $d_{L/M}\dot{x}$-mesurables (resp. $d_{L/M}\dot{x}$-intégrables) sur L sur l'espace des fonctions $d\mu_\gamma$-mesurables (resp. $d\mu_\gamma$-intégrables) sur X, et, pour toute fonction φ, $d_{L/M}\dot{x}$-mesurable et positive ou $d_{L/M}\dot{x}$-intégrable sur L, on a

$$(41) \qquad \int_{L/M} \varphi(x) \; d_{L/M}\dot{x} = \int_{L/M} \varphi\varphi_\gamma^{-1} \; d\mu_\gamma .$$

Soient X une sous-variété affine fermée de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{J}(X)$ l'idéal de $\mathbb{R}[X_1 ,\dots, X_n]$ constitué des polynômes s'annulant sur X, et, $X_{\mathbb{C}}$, la variété de $\mathcal{J}(X)$: $X_{\mathbb{C}}$ est la plus petite sous-variété affine fermée de $\mathbb{C}^n$ contenant

X. Nous dirons qu'une fonction définie sur un ouvert de Zariski $\mathcal{U}$ de X est une fonction régulière sur $\mathcal{U}$ si elle est la restriction d'une fonction rationnelle sur $X_{\mathbb{C}}$ définie en tout point de $\mathcal{U}$.

Si X est une variété affine lisse de dimension n, et, si γ appartient à $\Gamma^{\lambda}(X)$, nous dirons que γ est régulière si et seulement si γ est une fonction régulière sur l'ouvert $\Lambda^n_+T(X)$ de la variété affine lisse $\Lambda^nT(X)$; nous noterons $\Gamma^{\lambda}_r(X)$ le sous-espace de $\Gamma^{\lambda}(X)$ constitué des λ-densités régulières. Il est clair que si $\Gamma^{\lambda}_r(X)$ est non nul, λ est un entier pair. Un élément de γ de $\Gamma^1(X)$ sera dit semi-régulier si γ^2 est une 2-densité régulière.

Si X est une sous-variété affine fermée et lisse de dimension p de $\mathbb{R}^n$, on définit une forme volume impaire semi-régulière γ_0 sur X de la manière suivante :

$$\gamma_0(X_1,\dots,X_p) = \mathrm{Gram}(X_1,\dots,X_p)^{1/2},\ \forall x\in X,\ \forall X_1,\dots,\forall X_p\in T_xX,$$

où $\mathrm{Gram}(X_1,\dots,X_p)$ désigne le déterminant de Gram des vecteurs $X_1,\dots,X_p$ relativement au produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors utilisant les lemma 1 et 2 et les idées de la démonstration de la proposition 1' de [Gi] il est facile de démontrer le

Lemme 15. *Soient* X *une sous-variété affine lisse et fermée de* $\mathbb{R}^n$, γ *une forme volume impaire semi-régulière sur* X, *et* $\|\ \|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors il existe un entier naturel* k *tel que l'intégrale*

$$\int_X (1+\|x\|)^{-k}\, d\mu_\gamma(x)$$

soit convergente. En particulier l'application

$$\varphi \longrightarrow \int_X \varphi\, d\mu_\gamma$$

définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration de la proposition 3. Il est clair que l'on peut supposer T choisi de telle manière que π_T soit non nul (dans le cas contraire la proposition est évidente).

Remarquons que, si φ appartient à $\mathcal{E}(\mathfrak{b})$, h à H_T et b à B, on a

$$\psi_\varphi(bh) = \partial(\pi_T \circ \mathrm{Ad}^* h^{-1})[\omega_T \circ \mathrm{Ad} h^{-1}(H)\ \varphi(b.H)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}} .$$

Cependant il est clair que

$$\omega_T \circ \mathrm{Ad} h^{-1} = \omega_T ,$$

tandis qu'il résulte facilement de la relation (36) que l'on a

$$(42) \qquad \pi_T \circ \mathrm{Ad}^* h^{-1} = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{u}+_T} h|^2\ \pi_T .$$

D'autre part, comme $\mathfrak{b}_{T,\mathbb{C}}$ est somme directe des sous-espaces conjugués $\mathfrak{u}+_T$ et $\mathfrak{u}-_T$, on a

$$(43) \qquad \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}_T} h = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{u}+_T} h|^2 .$$

Nous voyons donc que la fonction ψ_φ satisfait à la relation (4) relative à B et H_T. De plus il résulte aisément de la relation (43) que la variété B/H_T est orientable, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

Désignons par $\mathbb{D}(\mathfrak{b})$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{b}$ et, pour tout entier naturel k, par $\mathbb{D}_k(\mathfrak{b})$ le sous-espace de $\mathbb{D}(\mathfrak{b})$ constitué des éléments de degré total au plus k, *i.e.*, si $X_1, \ldots, X_n$ est une base de $\mathfrak{b}$ dont on désigne par $x_1, \ldots, x_n$ la base duale, $\mathbb{D}_k(\mathfrak{b})$ est le sous-espace de $\mathbb{D}(\mathfrak{b})$ engendré par les opérateurs différentiels $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\, \partial_{(X_1)^{\beta_1} \ldots (X_n)^{\beta_n}}$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des entiers naturels tels que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n \leq k.$$

Le groupe B opère naturellement dans $\mathbb{D}(\mathfrak{b})$ en laissant invariants les sous-espaces $\mathbb{D}_k(\mathfrak{b})$, $k \in \mathbb{N}$. Si nous étendons le polynôme ω_T en un polynôme sur $\mathfrak{b}$ en décidant que

$$\omega_T(X+Y) = \omega_T(X), \quad \forall X \in \mathfrak{h}_T \quad \text{et} \quad \forall Y \in \mathfrak{b}_T ,$$

l'opérateur,

$$\Delta_T = \partial_{\pi_T} \circ \omega_T ,$$

est un élément de $\mathbb{D}_{2d_T}(\mathfrak{b})$. Si $P_1, \ldots, P_t$ est une base de $\mathbb{D}_{2d_T}(\mathfrak{b})$ il existe des fonctions régulières $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ sur B telles que pour tout b dans B on ait

$$b.\Delta_T = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(b)\, P_i \; .$$

Il résulte de la définition de ω_T que l'on a toujours

$$\omega_T \circ \mathrm{Ad}h^{-1} = \omega_T \, , \quad \forall h \in H_T \, ,$$

et, par suite, comme conséquence des relations (42) et (43) on voit que les fonctions α_i, $1 \leq i \leq l$, satisfont à la relation

$$\alpha_i \circ j(bh) = \alpha_i \circ j(b) \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}_T} h, \quad \forall b \in B, \quad \forall h \in H_T \; .$$

Maintenant si φ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{b})$, on a

$$\psi_\varphi(b) = b.\Delta_T(\varphi)(b.T) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \circ j(b)\, P_i \varphi(b.T), \quad \forall b \in B.$$

Comme T est semi-simple, l'orbite de T sous B est une sous-variété algébrique affine fermée de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ et, par suite, $X = B.T$ est réunion d'un certain nombre de composantes connexes d'une sous-variété affine fermée de $\mathfrak{b}$.

Soient γ_0 une forme volume impaire semi-régulière sur X et φ_{γ_0} la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur B qui lui est associée selon (40). De même, pour $1 \leq i \leq l$, désignons par γ_i la densité sur X telle que

$$\varphi_{\gamma_i} = \alpha_i \circ j \; ;$$

alors γ_i est semi-régulière et il existe une fonction q_i sur X telle que q_i^2 soit régulière et que

$$\gamma_i = q_i \gamma_0 \, ,$$

ceci pour $1 \leq i \leq l$.

Comme toute fonction régulière sur X est majorée en valeur absolue par une fonction polynôme (cf [Gi], lemma 2) il existe d'après le lemme 15, un entier k tel que, pour $1 \leq i \leq l$, on ait

$$\int_X (1+\|y\|)^{-k} \, |q_i(Y)| \; \gamma_0 < +\infty,$$

où $\| \ \|$ est une norme sur $\mathfrak{b}$. Comme on a, pour tout élément Y de X,

$$(\psi_\varphi \, \varphi_{\gamma_0}^{-1})(Y) = \sum_{i=1}^{l} q_i(Y)\, P_i \varphi(Y),$$

et compte tenu de (41), on voit que la fonction ψ_φ est $d_{B/H_T}\dot{b}$-intégrable, et que la formule (39) définit bien une distribution tempérée sur $\mathfrak{b}$.

Le fait que la distribution $M_{B,T}$ est invariante est évident. De plus, si la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_T}X$ est multipliée par un scalaire $\lambda>0$, il en est de même pour $d_{B/H_T}\dot{b}$, tandis que le polynôme π_T est multiplié par λ^{-1} ; ceci montre que $M_{B,T}$ ne dépend pas des choix de mesures de Lebesgue effectués. Enfin, par transport de structure, il est clair que la distribution $M_{B,T}$ ne dépend que de la B-orbite de T. Q.E.D.

Remarque. L'utilisation du théorème 2.6 [Ch] nous aurait permis de démontrer la proposition sans faire appel à la notion de forme volume impaire semi-régulière.

Dans la suite, avec les notations introduites ci-dessus, nous désignerons par $\Theta_{B,T}$ la transformée de Fourier de $M_{B,T}$: c'est une distribution tempérée sur $\mathfrak{b}^*$.

Soit $(\mathbf{R},j,R)$ un groupe presque algébrique réductif, d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$. Si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{r})$ nous noterons $\mathbf{J}_{\mathbb{R}}$ (resp. J) le sous-groupe de Cartan de $\mathbf{R}$ (resp. R) correspondant, $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{A}$) le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{J}_{\mathbb{R}}$ (resp. le tore maximal connexe déployé sur $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathring{\mathbf{J}}_{\mathbb{R}}$), T (resp. A) l'image inverse par j de $\mathbf{T}_{\mathbb{R}}$ (resp. le relèvement à R de $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$) et enfin $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{a}$) l'algèbre de Lie de T (resp. A). On a

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a} .$$

On dira que $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{r}$ si la dimension de $\mathfrak{t}$ est maximale. Soit $\mathfrak{j}_0$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{r}$. Comme tout élément elliptique de $\mathfrak{r}$ est $\mathring{R}$-conjugué à un élément de $\mathfrak{t}_0$, l'étude des distributions $M_{R,T}$ se ramène à l'étude de celles pour lesquelles T appartient à $\mathfrak{t}_0$. Soit T_0 un élément régulier de $\mathfrak{t}_0$; on peut, alors, choisir le polynôme $\pi_{\mathfrak{j}_0}$ égal à π_{T_0} et, on pose

$$\omega_{\mathfrak{j}_0} = \omega_{T_0} .$$

Il est alors immédiat de voir que, si T est un élément régulier de t_0, on a, pour tout élément φ de $\mathcal{S}(r)$

$$M_{R,T}(\varphi) = (i/2\pi)^{d_r} \partial_{\pi_{j_0}} \left[\omega_{j_0}(T') \int_{R/J} \varphi(rT')\, d_{R/J}\dot{r}\right]_{|T'=T}.$$

Nous voyons donc que les distributions $M_{B,T}$ généralisent les distributions invariantes de Harish-Chandra, définies pour les groupes réductifs (contrairement à ce qui est supposé par Harish-Chandra, le groupe R n'est pas connexe, mais nous nous ramenons à ce cas dans le § X). Plus précisément, si T est un élément régulier de r contenu dans une sous-algèbre de Cartan fondamentale j_0, la distribution invariante de Harish-Chandra, $\tilde{M}_{R,T}$, correspondante, est définie par :

$$\tilde{M}_{R,T}(\varphi) = (i/2\pi)^{d_r} [W_R]^{-1} \partial_{\pi_{j_0}} \left[\omega_{j_0}(T') \int_{R/J} \varphi(rT')\, d_{R/J}\dot{r}\right]_{|T'=T}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(r)$$

où, pour tout groupe réductif R, W_R désigne le groupe de Weyl de R, relativement à une sous-algèbre de Cartan fondamentale, j_0, de son algèbre de Lie ; comme ces sous-algèbres de Cartan sont toutes $\mathring{R}$-conjugués, les groupes de Weyl correspondants sont tous isomorphes et leur ordre ne dépend donc pas du choix de j_0. Comme de plus, un élément régulier de r est contenu dans un unique élément de $car(r)$, il est clair que, comme le suggère la notation, $\tilde{M}_{R,T}$ ne dépend que de T ; en fait $\tilde{M}_{R,T}$ ne dépend que de la R-orbite de T. Si j_0 est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de r, Harish-Chandra a démontré que l'application,

$$T \longrightarrow \tilde{M}_{R,T},$$

définie sur les éléments réguliers de j_0 se prolonge de manière unique en une application continue,

$$T \longrightarrow \tilde{M}^{j_0}_{R,T},$$

de j_0 dans $\mathcal{S}'(r)$, et, cette application est telle que, $\tilde{M}^{j_0}_{R,0}$ soit la mesure de Dirac à l'origine (cf [Va] Part I ou [Ha]). De plus on voit facilement que, $\tilde{M}^{j_0}_{R,T}$ ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan fondamentale, j_0, contenant T ; ainsi, si T est un élément de r, contenu dans une sous-algèbre de Cartan fondamentale j_0, nous noterons $\tilde{M}_{R,T}$ au lieu de $\tilde{M}^{j_0}_{R,T}$.

Si T est un élément elliptique de $\mathfrak{r}$, le groupe, $H_T = R(T)$, est un groupe presque algébrique réductif, dont l'algèbre de Lie admet comme sous-algèbre de Cartan fondamentale, toute sous-algèbre de Cartan fondamentale pour $\mathfrak{r}$, et contenant T. En utilisant la même méthode que dans la démonstration du lemme 4.2 de [Ve-2] on peut établir le résultat suivant :

Lemme 16. *Avec les notations ci-dessus, pour tout élément elliptique,* T, *de* $\mathfrak{r}$ *on a*

$$(44) \qquad \tilde{M}_{R,T} = ([W_{R(T)}]/[W_R])\, M_{R,T}\ .$$

D'après Harish-Chandra, les distributions $\Theta_{R,T}$ (resp. $\tilde{\Theta}_{R,T}$) transformées de Fourier des distributions $M_{R,T}$ (resp. $\tilde{M}_{R,T}$) sont des fonctions mesurables bornées sur $\mathfrak{r}^*$ et analytiques sur l'ouvert $\mathfrak{r}^*_r$ (voir par exemple [Ve-2]).

Avant de procéder à la détermination des distributions $\Theta_{G,T}$, pour T élément elliptique de $\mathfrak{g}$, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires.

Lemme 17. *Soit* $(B,j,\mathbf{B})$ *un groupe presque algébrique, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{b}$, *et* V *un* B*-module de dimension finie, défini sur* $\mathbb{R}$. *Alors si* T *est un élément semi-simple de* $\mathfrak{b}$, *pour tout élément* x *de* $V^T_{\mathbb{R}}$, *l'intersection de* $B.x$ *avec* $V^T_{\mathbb{R}}$ *est une réunion finie de* $B(T)$*-orbites.*

Démonstration. D'après un résultat de Borel et Harish-Chandra (cf [Bo-Ha] Proposition 2.3), si $(B,j,\mathbf{B})$ est un groupe presque algébrique, et, V est un $\mathbf{B}$-module défini sur $\mathbb{R}$, toute $\mathbf{B}$-orbite dans V rencontre $V_{\mathbb{R}}$ suivant une réunion finie de $\mathring{B}$-orbite. Ainsi, pour démontrer notre lemme, il nous suffira d'établir que si x appartient à V^T, l'intersection de $\mathbf{B}.x$ avec V^T est la réunion d'un nombre fini de $\mathbf{B}(T)$-orbites. Cependant, le lemma 3.1 de [Ri-3], nous assure que ce résultat est vrai dès que

$$\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}.x \cap V^T \subset \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}(T).x\ ;$$

or, cette inclusion, est une conséquence immédiate du fait que T est semi-simple. Q.E.D.

Soient S un facteur réductif de G, et T un élément elliptique de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{s}$, l'algèbre de Lie de S. Si u est un élément de $\mathfrak{n}^*$, on pose

$$S_{u,T} = \left\{s \in S \;/\; s^{-1}T \in \mathfrak{s}(u)\right\}.$$

Alors il est clair que l'application,

$$s \longrightarrow S(T)su,$$

induit une bijection, de l'ensemble des doubles classes

$$S(T) \backslash S_{u,T} / S(u)$$

sur l'ensemble des $S(T)$-orbites contenues dans $S.u \cap \mathfrak{n}^{*T}$. Il résulte donc du lemme 17, que

$$S(T) \backslash S_{u,T} / S(u)$$

est un ensemble fini, pouvant éventuellement être vide.

Soit j un élément de $car(\mathfrak{g})$ contenu dans $\mathfrak{s}$, et, soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}^j$ une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ définie par (35). Nous noterons, $S(\mathcal{W})$, un représentant de la classe de S^j-conjugaison des stabilisateurs, $S(u_f)$, pour f parcourant $\mathcal{W}$, et nous poserons, pour T comme ci-dessus,

$$S_{\mathcal{W},T} = \left\{s \in S \;/\; s^{-1}T \in \mathfrak{s}(\mathcal{W})\right\},$$

où $\mathfrak{s}(\mathcal{W})$ désigne, bien sûr, l'algèbre de Lie de $S(\mathcal{W})$.

Remarquons enfin, qu'un élément de $Car(G)$, possède toujours un représentant contenu dans $\mathfrak{s}$. On a alors le

Théorème 1. *Soit* T *un élément elliptique de* $\mathfrak{g}$. *Alors la distribution* $\Theta_{G,T}$ *est une fonction mesurable bornée sur* $\mathfrak{g}^*$ *et analytique sur l'ouvert* $\mathcal{V}$. *De plus elle satisfait aux conditions suivantes qui la déterminent entièrement : si* S *est un facteur réductif de* G *tel que son algèbre de Lie* $\mathfrak{s}$ *contienne* T, *et si* j *est un élément de* $car(G)$ *contenu dans* $\mathfrak{s}$, *pour toute classe d'équivalence,* $\mathcal{W}$, *de* $\mathcal{V}^j$ *pour la relation* $\sim$, *et pour tout* f *élément de* $\mathcal{W}$, *on a*

$$(45) \qquad \Theta_{G,T}(f) = \sum_{\sigma \in S(T) \backslash S_{\mathcal{W},T} / S(\mathcal{W})} \Theta_{S(\mathcal{W}),\sigma^{-1}T}(f_{|j}).$$

Démonstration. Il est clair que l'existence d'éléments j de $\mathrm{Car}(G)$ et $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}^j/\sim$ tels que $S_{\mathcal{W},T}$ soit non vide, est équivalente au fait que π_T soit non nul. Il suffit donc de démontrer la proposition dans ce cas.

Nous poserons alors

$$\mathfrak{s}_T = \mathfrak{s}\cap\mathfrak{g}_T\ ,\ \text{et,}\quad \mathfrak{n}_T = \mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_T\ ,$$

si bien que $\mathfrak{g}_T$ est somme directe de $\mathfrak{s}_T$ et $\mathfrak{n}_T$. Nous munirons $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{s}(T)$, $\mathfrak{s}_T$, $\mathfrak{n}_T$) de la mesure de Lebesgue induite, via l'identification naturelle

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}\ (\text{resp. } \mathfrak{s}(T) = \mathfrak{h}_T/\mathfrak{n}(T),\quad \mathfrak{s}_T = \mathfrak{s}/\mathfrak{s}(T),\quad \mathfrak{n}_T = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}(T)),$$

par la mesure

$$d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}\dot{X}\ (\text{resp.} d_{\mathfrak{h}_T/\mathfrak{n}(T)}\dot{X},\ d_{\mathfrak{s}/\mathfrak{s}(T)}\dot{X},\ d_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(T)}\dot{X}).$$

Les espaces duaux seront munis des mesures duales, et les groupes de Lie seront munis des mesures de Haar à gauche, correspondant aux mesures de Lebesgue considérées sur leurs algèbres de Lie.

Pour déterminer $\Theta_{G,T}$ nous devons calculer, pour φ élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ donné, $M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi)$. Remarquons, dans un premier temps, que pour toute fonction ψ, $d_{G/H_T}\dot{g}$-mesurable et positive, ou $d_{G/H_T}\dot{g}$-intégrable, on a

$$\int_{G/H_T}\psi(g)\ d\dot{g} = \int_{S/S(T)}\left\{\int_{\mathfrak{n}_T}\psi(s\ \exp\xi)\ d\xi\right\}\ d\dot{s},$$

les mesures $d\xi$ et $d\dot{s}$ étant déterminées par les conventions rappelées ci-dessus (ici $d\dot{s}$ est en fait une mesure S-invariante). Nous pouvons donc écrire

$$(46)\qquad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (i/2\pi)^{d_T}\int_{S/S(T)}\left\{\int_{\mathfrak{n}_T}\partial_{\pi_T}[\omega_T(H)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi\ (s.\exp\xi.H)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}}\ d\xi\right\}\ d\dot{s}$$

Nous allons d'abord évaluer l'intégrale entre accolades. Comme $\mathfrak{h}_T$ est la somme directe de $\mathfrak{s}(T)$ et $\mathfrak{n}(T)$, il existe un nombre fini de fonctions polynômes sur $\mathfrak{s}^*$ (resp. $\mathfrak{n}^*$) p_k (resp. q_k), $1\le k\le l$, éléments de $S(\mathfrak{s}(T))$ (resp. $S(\mathfrak{n}(T))$), les q_k, $1\le k\le l$, étant homogènes et linéairement indépendantes, telles que

$$\pi_T = \sum_{k=1}^{l} p_k\, q_k\ .$$

Le polynôme ω_T satisfait à la relation (38), et, par suite, on a

$$\partial_{\pi_T} \circ \omega_T = \sum_{k=1}^{l} \partial_{p_k} \circ \omega_T \circ \partial_{q_k}.$$

Comme N est commutatif, les q_k, $1 \le k \le l$, sont N-invariants. Le groupe G étant unimodulaire, il est aisé de voir que, pour s élément de S, ξ de $\mathfrak{n}$ et H de $\mathfrak{h}_T$, on a

$$(47)\quad \partial_{\pi_T} [\omega_T(H) \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1} \varphi(s.\exp \xi.H)] = \sum_{k=1}^{l} \partial_{p_k} [\omega_T(H)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H-H.\xi)],$$

les opérateurs différentiels ∂_{π_T} et ∂_{p_k}, $1 \le k \le l$, opérant sur la variable H de $\mathfrak{h}_T$, et $\tilde{q}_k$ désignant, pour $1 \le k \le l$, le polynôme sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ défini par

$$\tilde{q}_k(f) = q_k(if),\ \forall f \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*\ .$$

Mais, T étant elliptique, il est clair que $\det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} T)$ est un nombre réel strictement positif et, par suite, l'ensemble, $\mathfrak{h}_T'$, des éléments H de $\mathfrak{h}_T$, tels que le nombre $\det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} H)$ soit strictement positif, est un ouvert (en fait réunion de composantes connexes d'un ouvert de Zariski) de ce dernier contenant T. Si s est un élément de S, H de $\mathfrak{h}_T'$ et k un entier compris entre 1 et l, on a

$$\int_{\mathfrak{n}_T} \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H-H.\xi)\ d\xi = (\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} H)^{-1} \int_{\mathfrak{n}_T} \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H+\xi)\ d\xi.$$

Notons ω_T' la fonction rationnelle partout définie sur $\mathfrak{h}_T'$ par

$$\omega_T'(H) = \omega_T(H).(\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} H)^{-1}.$$

Comme, pour tout élément s de S, $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ on peut dériver sous le signe somme la première des intégrales ci-dessus, pour obtenir, s étant un élément de S et k un entier compris entre 1 et l,

$$\int_{\mathfrak{n}_T} \partial_{p_k}[\omega_T(H)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H-H.\xi)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}} d\xi$$

$$= \partial_{p_k}[\omega_T'(H) \int_{\mathfrak{n}_T} \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H+\xi)\ d\xi]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}},$$

où, d'une part, on a posé

$$\mathfrak{s}(T)' = \mathfrak{s}(T)\cap\mathfrak{h}_T' ,$$

et d'autre part, la restriction de $\mathfrak{h}_T'$ à $\mathfrak{s}(T)'$, se justifie par le fait que p_k appartient à $S(\mathfrak{s}(T))$. Maintenant, si $\mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}$ désigne la transformation de Fourier partielle inverse par rapport à la variable f de $\mathfrak{s}^*$ des fonctions définies sur $\mathfrak{g}^*$, il vient

$$(48)\quad \int_{\mathfrak{n}_T} \partial_{p_k}[\omega_T(H)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}(\tilde{q}_k\ s^{-1}\varphi)(H-H\xi)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}} d\xi$$

$$= \partial_{p_k}[\omega_T'(H) \int_{\mathfrak{n}^{*T}} \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H,s.u)\ \tilde{q}_k(u)\ du]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}$$

$$= \int_{\mathfrak{n}_T^*} \partial_{p_k}[\omega_T'(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H,s.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}} \tilde{q}_k(u)\ du ,$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que, $\mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi$ appartenant à l'espace des fonctions de Schwartz sur $\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*$, on peut dériver sous le signe somme. Utilisant (47) et (48) on obtient

$$(49)\quad \int_{\mathfrak{n}_T} \partial_{\pi_T}[\omega_T(H)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi(s\ \exp\xi.H)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_T}} d\xi$$

$$= \int_{\mathfrak{n}^{*T}} \left\{ \sum_{k=1}^{l} \tilde{q}_k(u)\ \partial_{p_k}[\omega_T'(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H,s.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}} \right\} du.$$

Mais, nous pouvons considérer π_T comme une application polynôme, $\tilde{\pi}_T$, de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans $S(\mathfrak{s}(T))$ et, même, à valeurs dans le sous-espace de $S(\mathfrak{s}(T))$ constitué des éléments de degré inférieur ou égal à d_T. Dans ces conditions, après avoir reporté (49) dans (46), on obtient

$$(50)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi)=\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{d_T}\int_{S/S(T)}\left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}}\partial_{\tilde{\pi}_T(iu)}[\omega'_T(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H,s.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}du\right\}d\dot{s},$$

les intégrales étant successivement convergentes. Nous allons montrer que cette intégrale double est, en fait, absolument convergente. Plus précisément nous allons voir que l'application

$$(51)\quad \psi\longrightarrow\int_{S/S(T)}\left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}}\left|\partial_{\tilde{\pi}_T(iu)}[\omega'_T(H)\ \psi(s.H,su)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}\right|du\right\}d\dot{s}$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*)$. Considérons

$$\Sigma=\left\{(X,u)\in\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*\ /\ X\in S.T\quad\text{et}\quad X.u=0\right\}.$$

Alors, Σ est réunion d'un certain nombre de composantes connexes d'une sous-variété affine fermée de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*$, et c'est même un fibré vectoriel au-dessus de $X = S.T$.

Etendons la fonction polynôme

$$H\longrightarrow\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T}H\ ,$$

définie sur $\mathfrak{s}(T)$, en une fonction polynôme ω''_T définie sur $\mathfrak{s}$ à l'aide de la formule

$$\omega''_T(H+X)=\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T}H,\ \text{pour}\ \ H\in\mathfrak{s}(T),\ \text{et},\ X\in\mathfrak{s}_T\ .$$

Alors la fraction rationnelle ω'_T s'étend, en posant

$$\omega'_T=\omega_T{\omega''_T}^{-1}\ ,$$

en une fraction rationnelle, partout définie sur l'ouvert de $\mathfrak{s}$,

$$\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}(T)'+\mathfrak{s}_T\ .$$

De plus il existe un entier naturel, m, et un opérateur différentiel, Δ'_T, à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*$, tels que, pour toute fonction ψ, élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*)$, on ait,

$$\partial_{\tilde{\pi}_T(iu)}[\omega'_T(X')\ \psi(X',u)]\Big|_{\substack{X'=X\\ X'\in\mathfrak{s}'}}={\omega''_T}^{-m}(X)\ \Delta'_T\psi(X,u),\quad\forall X\in\mathfrak{s}',\quad\forall u\in\mathfrak{n}^*.$$

Il est immédiat de vérifier que Δ'_T satisfait à la relation

$$s.\Delta'_T=(\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_T}s)\ \Delta'_T=(\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_T}s)\ \Delta'_T\ ,\quad\forall s\in S(T).$$

Par suite il existe des opérateurs différentiels, $P_1, \dots, P_t$, à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*$, et, des fonctions régulières sur S, $\alpha_1, \dots, \alpha_t$, qui satisfont à la relation

$$\alpha_j(s\sigma) = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_T} \sigma\, \alpha_j(s), \quad \forall s\in S,\ \forall \sigma\in S(T),\ 1\le j\le t,$$

tels que l'on ait

$$s.\Delta'_T = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j(s)\, P_j\,, \quad \forall s\in S.$$

Ainsi, si ψ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*)$, on a, pour s élément de S, et, u de $\mathfrak{n}^*$,

$$\partial_{\pi_T(iu)}[\omega'_T(H)\ \psi(s,H,su)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}} = (\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} T)^{-m} \sum_{j=1}^{t} \alpha_j(s)\, P_j\psi(s.T,s.u),$$

et, par suite, on a la majoration

$$(52)\quad \int_{S/S(T)} \left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}} \left|\partial_{\tilde{\pi}_T(iu)} [\omega'_T(H)\ \psi(s.H,\dot{s}.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}\right| du\right\} d\dot{s}$$

$$\le (\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} T)^{-m} \sum_{j=1}^{t} \int_{S/S(T)} \left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}} |P_j\psi(s.T,s.u)|\, du\right\} |\alpha_j(s)|\, d\dot{s}.$$

Cependant comme, pour σ appartenant à $\mathfrak{s}(T)$, on a

$$\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}_T} \sigma = \det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*T}}\sigma,$$

il existe, pour $1\le j\le t$, une densité semi-régulière γ_j sur Σ telle que

$$\gamma_j(sX_1\wedge\dots\wedge sX_{2p}\ ,\ su_1\wedge\dots\wedge su_q) = |\alpha_j(s)|, \quad \forall s\in S,\ \forall u\in\mathfrak{n}^{*T},$$

où $X_1, \dots, X_{2p}$ (resp. $u_1, \dots, u_q$) est une base de $\mathfrak{s}/\mathfrak{s}(T)$ (resp. $\mathfrak{n}^{*T}$) univolumique pour la mesure de Lebesgue sur cet espace, choisie comme indiqué plus haut. On montre alors facilement, que, pour toute fonction η, définie sur Σ, on a

$$\int_\Sigma \eta\gamma_j = \int_{S/S(T)} \left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}} \eta(s.T,s.u)\ du\right\} |\alpha_j(s)|\, d\dot{s}\ .$$

Utilisant le lemme 15 comme nous l'avons fait dans la démonstration de la proposition 3 on montre qu'il existe un entier naturel k, tel que pour $1\le j\le t$, on ait

$$\int_{S/S(T)}\left\{\int_{\mathfrak{n}^{*T}}(1+\|(s.T,s.u)\|)^{-k}du\right\}|\alpha_j(s)|d\dot{s} < +\infty,$$

où $\|\ \|$ désigne une norme sur $\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*$. En utilisant la majoration (52) on voit alors que l'application (51) définit bien une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{s}\times\mathfrak{n}^*)$ comme annoncé.

Comme nous avons supposé π_T non nul, V^T est un ouvert affine non vide de $\mathfrak{n}^{*T}$. Soient u un élément de V^T, et f une forme linéaire appartenant à V^T, telle que

$$\rho(f) = u$$

(il est facile de vérifier qu'une telle forme linéaire existe). Il résulte de ce que κ_f^T est non dégénérée, que l'application

$$(X,Y) \longrightarrow \langle u, [X,Y]\rangle$$

induit une dualité, $\mathfrak{s}(u)(T)$-invariante, entre $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+/\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u) \cap \mathfrak{u}_T^+$ et $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^-$. Nous voyons donc, que les espaces $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+/\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u) \cap \mathfrak{u}_T^+$ et $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^-$ ont la même dimension, que nous noterons $d_{n,T}$; comme, de plus

$$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u) \cap \mathfrak{u}_T^+ = \mathfrak{u}_{\mathfrak{s}(u),T}^+ ,$$

il vient

$$(53) \qquad d_T = d_{\mathfrak{s}(u),T} + 2d_{n,T} .$$

On déduit aussi de l'existence de la dualité $\mathfrak{s}(u)(T)$-invariante ci-dessus que, pour tout élément H de $\mathfrak{s}(u)(T)$, on a

$$\det \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{u}_T^+/\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)\cap\mathfrak{u}_T^+} H = (-1)^{d_{n,T}} \det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{u}_T^-} H ,$$

et, en tenant compte de ce que $\mathfrak{u}_T^+$ est la somme directe de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+$ et $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+$, il vient

$$\omega_T(H) = (-1)^{d_{n,T}} \det \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u)\cap\mathfrak{u}_T^+} H \det \mathrm{ad}_{\mathfrak{n}_T} H, \quad \forall H \in \mathfrak{s}(u)(T),$$

égalité que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(54) \qquad \omega_T'(H) = i^{2d_{n,T}}\, \omega_{\mathfrak{s}(u),T}(H), \quad \forall H\in \mathfrak{s}(u)(T) = \mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}.$$

Soit,

$$X_1^u ,\ldots, X^u_{d_T-d_{n,T}} , X_{d_T-d_{n,T}+1} ,\ldots, X_{d_T} ,$$

une base de $\mathfrak{u}_T^+$ telle que

(55) (*i*) le polynôme π_T satisfasse à la relation (36) relativement à elle ;

(55) (*ii*) $X_{d-d_{n,T}+1},\dots,X_{d_T}$, soit une base de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+$ satisfaisant à la relation

$$|\eta_{\mathfrak{n}_T}(X_{d_T-d_{n,T}+1},\dots,X_{d_T}, \bar{X}_{d_T-d_{n,T}+1},\dots,\bar{X}_{d_T})| = 1,$$

où $\eta_{\mathfrak{n}_T}$ désigne une forme volume sur $\mathfrak{n}_T$ y induisant la mesure de Lebesgue considérée ;

(55) (*iii*) $X^u_{d_{n,T}+1},\dots, X^u_{d_T-d_{n,T}}$, soit une base de $\mathfrak{u}^+_{\mathfrak{s}(u),T}$ pour laquelle le polynôme $\pi_{\mathfrak{s}(u),T}$ satisfasse à la relation (36) ;

(55) (*iv*) $X^u_1,\dots, X^u_{d_T-d_{n,T}}$, soit une base de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u}_T^+$.

Dans ces conditions, avec les notations intervenant dans (36), pour toute forme linéaire, f sur $\mathfrak{h}^*$, telle que $\rho(f) = u$, on a

$$A_f = \begin{pmatrix} * & * & C_u^T \\ * & B_f^T & 0 \\ -{}^t\bar{C}_u^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec,}$$

$$B_f^T = (\langle f, [X_i,\bar{X}_j]\rangle)_{d_{n,T}+1\le i,j\le d_T-d_{n,T}}$$

$$(56) \qquad C_u^T = (\langle u, [X_i,\bar{X}_j]\rangle)_{\substack{1\le i\le d_{n,T} \\ d_T-d_{n,T}+1\le j\le d_T}}$$

De ceci il résulte facilement que

$$(57) \qquad \tilde{\pi}_T(iu) = i^{d_{n,T}}\, \pi_{n,T}(u)\, \pi_{\mathfrak{s}(u),T}\ ,$$

où on a posé

$$(58) \qquad \pi_{n,T}(u) = |\det C_u^T|^2.$$

Reportant (57) et (54) dans la formule (50) on obtient

$$(59)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{g}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-d_T}\int_{S/S(T)}\left\{\int_{V^T} i^{d_{s(u),T}}\right.$$
$$\left.\times\, \partial_{\pi_{s(u),T}}[\omega_{s(u),T}(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_{s}^{-1}\varphi(s.H,s.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_{s(u),T}}} \pi_{n,T}(u)du\right\}d\dot{s}.$$

Si u appartient à V, on note ψ_u la restriction à $S\times V^{S(u)}$ de l'application de $S\times V$ dans V définissant l'action de S dans V ; de même, on note ψ_T la restriction de cette dernière à $S\times V^T$. Il résulte de la proposition 2(*ii*) que, pour tout élément u de V, ψ_u est une submersion, et que l'image de ψ_u est un ouvert V_u, ensemble des éléments v de V tels que S(v) soit S-conjugué à S(u) ; il est clair que deux tels ouverts sont soit égaux soit disjoints et, par suite, chaque ouvert V_u est réunion de certaines composantes connexes de V. Nous voyons donc que ψ_T est une submersion, dont l'image, V_T, est réunion des ouverts V_u, pour u parcourant V^T. Ainsi V_T est un ouvert S-stable, réunion de composantes connexes de V, et, d'après la proposition 2(*i*) et le lemme 11, V_T/S est une variété quotient. En fait, V_T/S est l'ensemble des S-orbites dans V qui rencontrent V^T et l'application,

$$u \longrightarrow S.u,$$

induit une submersion, p^T, de V^T sur V_T/S. D'après le lemme 17, pour toute orbite Ω appartenant à V_T/S, $\Omega\cap V^T$ est une réunion finie de S(T)-orbites ; nous noterons $[\Omega]_T$ leur ensemble.

Avant d'aller plus loin dans la démonstration du théorème nous allons établir un certain nombre de faits concernant la désintégration de mesures sur une variété, mesures associées à une forme volume impaire. Soient donc X et Y deux variétés différentiables, p une submersion de X sur Y, et, γ_X et γ_Y des formes volumes impaires, sur X et Y respectivement. Si y appartient à Y, il existe une unique forme volume impaire sur la fibre $p^{-1}(y)$, notée $\gamma_{p^{-1}(y)}$, telle que, si x est un élément de $p^{-1}(y)$ et, si $X_1,\dots,X_n$ est une base de $T_x(X)$ choisie de façon que ses p premiers vecteurs constituent une base de $T_x(p^{-1}(y))$, on ait

$$\gamma_X(X_1\wedge\ldots\wedge X_n) = \gamma_{p^{-1}(y)}(X_1\wedge\ldots\wedge X_p)\ \gamma_Y(dp_x(X_{p+1})\wedge\ldots\wedge dp_x(X_m)).$$

Alors, la forme volume impaire $\gamma_{p^{-1}(y)}$ s'appelle le quotient de la forme volume impaire γ_X par la forme volume impaire γ_Y le long de la fibre $p^{-1}(y)$. Dans ces conditions, si ψ est une fonction $d\mu_{\gamma_X}$-mesurable et positive (resp. $d\mu_{\gamma_X}$-intégrable) définie sur X,

(*i*) pour presque tout élément y de Y, la restriction de ψ à $p^{-1}(y)$ est $d\mu_{\gamma_{p^{-1}(y)}}$-mesurable (resp. -intégrable),

(*ii*) la fonction

$$y \longrightarrow \int_{p^{-1}(y)} \psi(x)\, d\mu_{\gamma_{p^{-1}(y)}}(x)$$

est $d\mu_{\gamma_Y}$-mesurable (resp. -intégrable),

(*iii*) et on a

$$\int_X \psi(x)\, d\mu_{\gamma_X}(x) = \int_Y \left\{\int_{p^{-1}(y)} \psi(x)\, d\mu_{\gamma_{p^{-1}(y)}}(x)\right\} d\mu_{\gamma_Y}(y). \tag{60}$$

Notons $\gamma_{\mathfrak{n}^{*T}}$, la forme volume impaire sur $\mathfrak{n}^{*T}$, y définissant la mesure de Lebesgue choisie, et choisissons une forme volume impaire γ sur V/S. Alors, pour toute orbite Ω de V_T/S, nous notons γ_Ω^T la forme volume impaire quotient le long de $\Omega \cap V^T = p^{T^{-1}}(\Omega)$ de $\gamma_{\mathfrak{n}^{*T}}$ par γ. Il est aisé de vérifier que, pour tout élément s de $S(T)$, on a

$$s.\gamma_\Omega^T = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}^{*T}} s|^{-1} \gamma_\Omega^T .$$

Enfin si u appartient à V^T, on a

$$|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{n}^{*T}} s| = 1,\ \forall s \in H_{S(u),T} .$$

En effet, comme l'application,

$$(X,Y) \longrightarrow \langle u, [X,Y]\rangle,$$

induit une dualité $H_{S(u),T}$-invariante, entre $\mathfrak{s}_T/\mathfrak{s}_T \cap \mathfrak{s}(u)$ et $\mathfrak{n}_T$, et comme l'action de S et, donc, celle de $H_{S(u),T}$ sur $\mathfrak{n}$ est unimodulaire, il nous suffit de montrer que l'on a

$$|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{s}_T/\mathfrak{s}_T\cap\mathfrak{s}(u)} s| = 1,\ \forall s\in H_{S(u),T} \ ;$$

or $\mathfrak{s}/\mathfrak{s}(u)$ est la somme directe de $\mathfrak{s}_T/\mathfrak{s}_T \cap \mathfrak{s}(u)$ et de $\mathfrak{s}(T)/\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}$ et, les groupes S(T), S(u) et $H_{S(u),T}$ étant réductifs, il est clair que l'action de $H_{S(u),T}$ sur ces espaces quotients est unimodulaire, ce qui montre notre assertion.

Il résulte de ce qui précède que, si u appartient à V^T, il existe une unique mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}$ telle que, Ω (resp. Ω') désignant la S-orbite (resp. S(T)-orbite) de u, on ait, pour toute fonction ψ $d\mu_{\gamma_\Omega}$-intégrable sur Ω',

$$(61)\qquad \int_{\Omega'} \psi \, d\mu_{\gamma_\Omega^T} = \int_{S(T)/H_{S(u),T}} \psi(su)|\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*T}} s|\, d\dot{s} \ ;$$

c'est cette mesure de Lebesgue que nous supposerons désormais choisie sur $\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}$, $u \in V^T$. Pour toute S(T)-orbite Ω' contenue dans V^T, on choisit un élément $u_{\Omega'}$ de Ω'. Alors pour Ω élément de V_T/S et, pour ψ fonction $d\mu_{\gamma_\Omega^T}$-intégrable sur $\Omega \cap V^T$, on a

$$(62)\qquad \int_{\Omega\cap V^T} \psi \, d\mu_{\gamma_\Omega^T} = \sum_{\Omega'\in[\Omega]_T} \int_{S(T)/H_{S(u_{\Omega'}),T}} \psi(su_{\Omega'})|\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*T}} s|\, d\dot{s} \ .$$

Maintenant, si σ est un élément de S(T), compte tenu de (54) et (57), et, du fait que, d'une part on a

$$\pi_T\circ \mathrm{Ad}^*\sigma = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_T} \sigma|^{-1}\pi_T \ ,$$

et que d'autre part, l'action de S(T) dans $\mathfrak{s}_T$ et $\mathfrak{n}$ étant unimodulaire, on a

$$|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_T} \sigma| = |\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*T}} \sigma|,$$

il vient

$$(63)\quad \partial_{\pi_{s(\sigma u),T}}[\omega_{s(\sigma u),T}(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_s^{-1}\varphi(s.H, s\sigma.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_{s(\sigma u),T}}}\ \pi_{n,T}(\sigma u)$$

$$= i^{-d_{n,T}}\ \partial_{\tilde{\pi}_T(i\sigma u)}[\omega'_T(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_s^{-1}\varphi(s.H, s\sigma.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}$$

$$= i^{-d_{n,T}}|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_T}\sigma|^{-1}\ \partial_{\tilde{\pi}_T(iu)}[\omega'_T(\sigma H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_s^{-1}\varphi(s\sigma.H, s\sigma.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{s}(T)'}}$$

$$= \partial_{\pi_{s(u),T}}[\omega_{s(u),T}(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_s^{-1}\varphi(s\sigma.H, s\sigma.u)]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_{s(u),T}}}$$

$$\times\ \pi_{n,T}(u)\,|\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^*T}\sigma|^{-1},$$

ceci pour tout s élément de S et u de V^T. Utilisant alors (60), (62), et (63), nous pouvons écrire la formule (59) comme suit

$$(64)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_g^{-1}\varphi)$$

$$= (2\pi)^{-d_T}\int_{S/S(T)}\int_{V_T/S}\Big\{\sum_{\Omega'\in[\Omega]_T}\Big\{\int_{S(T)/H_{S(u_{\Omega'}),T}} i^{d_{s(u_{\Omega'}),T}}$$

$$\times\ \partial_{\pi_{s(u_{\Omega'}),T}}[\omega_{s(u_{\Omega'}),T}(H)\ \mathcal{P}\mathcal{F}_s^{-1}\varphi(s\sigma.H, s\sigma.u_{\Omega'})]\Big|_{\substack{H=T\\ H\in\mathfrak{h}_{s(u_{\Omega'}),T}}} d\dot\sigma\Big\}$$

$$\times\ \pi_{n,T}(u_{\Omega'})\Big\}d\mu_\gamma(\Omega)\,d\dot s\ .$$

Compte tenu du fait que l'intégrale double apparaissant dans la formule (50) est, nous l'avons vu, absolument convergente, il en est de même de l'intégrable triple ci-dessus. Par suite, nous pouvons, dans la formule (64), permuter entre elles les intégrations portant sur $S/S(T)$ et V_T/S. Comme, de plus, pour toute fonction ψ $d\dot s$-mesurable sur $S/H_{S(u),T}$, on a

$$\int_{S/H_{S(u),T}} \psi(s)\, d\dot{s} = \int_{S/S(u)} \left\{ \int_{S(u)/H_{S(u),T}} \psi(s\dot{\sigma})\, d\dot{\sigma} \right\} d\dot{s}$$

$$= \int_{S/S(T)} \left\{ \int_{S(T)/H_{S(u),T}} \psi(s\dot{\sigma})\, d\dot{\sigma} \right\} d\dot{s},$$

toutes ces intégrales étant absolument convergentes dès que l'une d'entre elles l'est, on obtient

(65) $M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi)$

$$= (2\pi)^{-d_T} \int_{V_T/S} \left\{ \sum_{\Omega' \in [\Omega]_T} i^{d_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),T}} \pi_{n,T}(u_{\Omega'}) \int_{S/H_{S(u_{\Omega'}),T}} \right.$$

$$\left. \partial_{\pi_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),T}} [\omega_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),T}(H)\, \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H, s.u_{\Omega'})] \Big|_{\substack{H=T \\ H\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),T}}} d\dot{s} \right\} d\mu_{\gamma}(\Omega),$$

et aussi, pour u appartenant à V^T,

(66) $$\int_{S/H_{S(u),T}} \partial_{\pi_{\mathfrak{s}(u),T}} [\omega_{\mathfrak{s}(u),T}(H)\, \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s.H, s.u)] \Big|_{\substack{H=T \\ H\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}}} d\dot{s}$$

$$= \int_{S/S(u)} \left\{ \int_{S(u)/H_{S(u),T}} \right.$$

$$\left. \partial_{\pi_{\mathfrak{s}(u),T}} [\omega_{S(u),T}(H)\, \mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\, \varphi(s\sigma.H, s.u)] \Big|_{\substack{H=T \\ H\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}}} d\dot{\sigma} \right\} d\dot{s}.$$

L'orthogonal de $\mathfrak{s}(u)$ dans $\mathfrak{s}^*$, noté $\mathfrak{s}(u)^{\perp}$, s'identifiant naturellement à l'espace dual de $\mathfrak{s}/\mathfrak{s}(u)$, est muni, comme nous en avons convenu, de la mesure duale de la mesure de Lebesgue de ce dernier. Dans ces conditions on a, pour s appartenant à S, σ à $S(u)$, et H à $\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}(u),T}$

$$\mathcal{P}\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}^{-1}\varphi(s\sigma.H,s.u) = \int_{\mathfrak{s}(u)^{*}\times\mathfrak{s}(u)^{\perp}} \varphi(f+g+s.u)\ e^{i\langle f+g,\ s\sigma.H\rangle}\ df\ dg,$$

$$= \int_{\mathfrak{s}(u)^{*}\times\mathfrak{s}(u)^{\perp}} \varphi(s\sigma.f+s.g+s.u)\ e^{i\langle f,\ H\rangle}\ df\ dg,$$

car, d'une part, S agit unimodulairement sur $\mathfrak{s}^{*}$ et, d'autre part, $\mathfrak{s}(u)^{\perp}$ est stable par S(u), l'action de celui-ci sur celui-là étant unimodulaire. Nous voyons donc apparaître dans l'intégrale entre accolade figurant au second membre de la formule (66), l'intégrale orbitale $M_{S(u),T}$ pour le groupe S(u). Compte tenu des résultats de Harish-Chandra sur les groupes réductifs que nous avons rappelés après l'énoncé du lemme 16, le second membre de (66) s'écrit

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{-d_{\mathfrak{s}(u),T}} \int_{S/S(u)} \left\{\int_{\mathfrak{s}(u)^{*}\times\mathfrak{s}(u)^{\perp}} \varphi(s(f+g+u))\ \Theta_{S(u),T}(f)\ df\ dg\right\} d\dot{s}$$

et, en reportant ceci dans (65), on obtient

$$(67)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-d_T} \int_{V_T/S} \left\{ \sum_{\Omega'\in[\Omega]_T} (2\pi)^{d_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),T}}\ \pi_{n,T}(u_{\Omega'}) \right.$$

$$\left. \times \int_{S/S(u_{\Omega'})} \left\{ \int_{\mathfrak{s}^{*}} \varphi(s(f+u_{\Omega'}))\ \Theta_{S(u_{\Omega'}),T}(f|_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'})})\ df \right\} d\dot{s} \right\} d\mu_{\gamma}(\Omega),$$

les intégrales n'étant, a priori, que successivement convergentes.

Nous allons maintenant montrer que l'intégrale triple ci-dessus est bien absolument convergente. C'est une conséquence des résultats de Harish-Chandra (voir les lemmes 29 et relations (173) et (174) du § X de ce travail), et du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison, sous S, de groupes de stabilisateurs S(u), u parcourant V^{T}, que les expressions, $\Theta_{S(u),T}(f|_{\mathfrak{s}(u)})$, sont uniformément bornées pour u appartenant à V^{T}, et f à $\mathfrak{s}^{*}$. Ainsi, pour montrer la convergence absolue de l'intégrale triple ci-dessus, il nous suffit de montrer que l'intégrale (d'après (53), $d_{\mathfrak{s}(u),T}$ ne dépend pas de l'élément u de V^{T}) :

$$(68)\quad \int_{V_T/S}\left\{\sum_{\Omega'\in[\Omega]_T}\pi_{n,T}(u_{\Omega'})\int_{S/S(u_{\Omega'})}\left\{\int_{s^*}|\varphi(s(f+u_{\Omega'}))|\,df\right\}d\dot{s}\right\}d\mu_\gamma(\Omega)$$

est finie. Or cette dernière s'écrit

$$(69)\quad \int_{V_T/S}\left\{\sum_{\Omega'\in[\Omega]_T}\pi_{n,T}(u_{\Omega'})\int_{S/S(u_{\Omega'})}\psi_\varphi(s.u_{\Omega'})d\dot{s}\right\}d\mu_\gamma(\Omega),$$

où on a posé

$$\psi_\varphi(u) = \int_{s^*}|\varphi(f+u)|\,df, \quad \forall u\in n^*.$$

On remarque que, puisque φ appartient à $\mathcal{S}(g^*)$, la fonction ψ_φ est intégrable sur n^*.

Maintenant si Ω est un élément de V/S, on note γ_Ω la forme volume impaire quotient, le long de Ω, de la forme volume impaire γ_{n^*}, définissant la mesure de Lebesgue sur n^*, par γ. On vérifie aisément que, si u appartient à Ω, il existe un nombre λ_u strictement positif tel que, pour toute fonction ψ $d\mu_{\gamma_\Omega}$-mesurable et positive, ou $d\mu_{\gamma_\Omega}$-intégrable, sur Ω, on ait

$$(70)\quad \int_\Omega \psi\, d\mu_{\gamma_\Omega} = \lambda_u \int_{S/S(u)} \psi(s.u)\, d\dot{s}\ .$$

Nous allons déterminer les scalaires λ_u lorsque u appartient à $\Omega\cap V^T$. Pour cela, on note γ_u (resp. γ_u^T) la forme volume impaire définissant la mesure invariante $d\dot{s}$ sur $S/S(u)$ (resp. $S(T)/H_{S(u),T}$). Soit $Y_1,\dots,Y_q$ une base de $s/s(u)$ univolumique pour la mesure de Lebesgue, telle que $Y_1,\dots,Y_p$ soit une base de $s(T)/\mathfrak{h}_{s(u),T}$, univolumique pour la mesure de Lebesgue et que $Y_{p+1},\dots,Y_q$ soient des éléments de $s_T/s_T\cap s(u)$. Alors, $Y_1.u,\dots,Y_q.u$ (resp. $Y_1.u,\dots,Y_p.u$), est une base de $T_u(\Omega)$ (resp. $T_u(\Omega\cap V_T)$) et on a par définition de λ_u,

$$\lambda_u = \gamma_\Omega(Y_1.u\wedge\dots\wedge Y_q.u),$$

et comme conséquence de (61)

$$(71)\quad 1 = \gamma_\Omega^T(Y_1 u\wedge\dots\wedge Y_p.u).$$

Maintenant complétons $Y_1.u,\dots,Y_q.u$ en une base de n^*, univolumique pour

$\gamma_{\mathfrak{n}^*}$, à l'aide de vecteurs $u_{q+1},\dots,u_r$ que l'on peut choisir dans $\mathfrak{n}^{*T}$ puisque,

$$\mathfrak{s}.u + \mathfrak{n}^{*T} = \mathfrak{n}^*,$$

comme il résulte de la proposition 2(ii) et du fait que $\mathfrak{n}^{*S(u)}$ est inclus dans $\mathfrak{n}^{*T}$. Si p désigne la projection de V sur V/S, on a

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\mathfrak{n}^*}(Y_1.u \wedge\dots\wedge Y_q.u \wedge u_{q+1} \wedge\dots\wedge u_r)\\
&= \gamma_\Omega(Y_1.u \wedge\dots\wedge Y_q.u)\ \gamma(dp_u(u_{q+1}) \wedge\dots\wedge dp_u(u_r))\\
&= \lambda_u\ \gamma(dp_u(u_{q+1}) \wedge\dots\wedge dp_u(u_r))
\end{aligned}$$

et aussi, si $\gamma_{\mathfrak{n}(T)^\perp}$ désigne la forme volume impaire définissant la mesure de Lebesgue sur l'orthogonal de $\mathfrak{n}(T)$ dans $\mathfrak{n}^*$,

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\mathfrak{n}^*}(Y_1.u \wedge\dots\wedge Y_q.u \wedge u_{q+1} \wedge\dots\wedge u_r)\\
&= \gamma_{\mathfrak{n}^{*T}}(Y_1.u \wedge\dots\wedge Y_p.u \wedge u_{q+1} \wedge\dots\wedge u_r)\ \gamma_{\mathfrak{n}(T)^\perp}(Y_{p+1}.u \wedge\dots\wedge Y_q.u)\\
&= \gamma_\Omega^T(Y_1.u \wedge\dots\wedge Y_p.u)\ \gamma_{\mathfrak{n}(T)^\perp}(Y_{p+1}.u \wedge\dots\wedge Y_q.u)\ \gamma(dp_u^T(u_{q+1}) \wedge\dots\wedge dp_u^T(u)).
\end{aligned}$$

Comme p^T est la restriction à $\mathfrak{n}^*$ de p, on a, pour $q+1 \le j \le r$,

$$dp_u^T(u_j) = dp_u(u_j),$$

et, par suite, compte tenu de (71), on obtient

$$\lambda_u = \gamma_{\mathfrak{n}(T)^\perp}(Y_{p+1}.u \wedge\dots\wedge Y_q.u),$$

que nous préférons réécrire, puisque

$$q-p = \dim \mathfrak{s}_T/\mathfrak{s}_T \cap \mathfrak{s}(u) = \dim \mathfrak{n}_T = 2d_{n,T},$$

sous la forme :

$$\lambda_u = \gamma_{\mathfrak{n}(T)^\perp}(Y_{p+1}.u \wedge\dots\wedge Y_{p+2d_{n,T}}.u).$$

Soit $Z_1,\dots,Z_{2d_{n,T}}$, une base de $\mathfrak{n}_T$ univolumique pour la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{n}_T$; alors $(1/2\pi)Z_1,\dots,(1/2\pi)Z_{2d_{n,T}}$, est la base duale d'une base univolumique de $\mathfrak{n}_T^* = \mathfrak{n}(T)^\perp$, si bien que l'on a :

$$\lambda_u = (2\pi)^{-2d_{n,T}} \left|\det\left(\langle Y_{p+i}.u,\ Z_j\rangle\right)_{1\le i,j\le 2d_{n,T}}\right|$$

$$= (2\pi)^{-2d_{n,T}} \left|\det\left(\langle u,\ [Y_{p+i}, Z_j]\rangle\right)_{1\le i,j\le 2d_{n,T}}\right|$$

Maintenant rappelons-nous la base,

$$X_1^u, \dots, X^u_{d_T-d_{n,T}},\quad X_{d_T-d_{n,T}+1}, \dots, X_{d_T},$$

de $\mathfrak{u}_T^+$, satisfaisant aux conditions (55)(i) à (iv), et ayant servi à calculer π_T. Pour $1\le j\le d_T-d_{n,T}$, notons $\dot{X}_j^u$, l'image de X_j^u par la projection canonique de $\mathfrak{s}_{T,\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{s}_{T,\mathbb{C}}/\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u) \cap \mathfrak{s}_{T,\mathbb{C}}$. Alors,

$$\dot{X}_1^u, \dots, \dot{X}^u_{d_{n,T}},\ \bar{\dot{X}}_1^u, \dots, \bar{\dot{X}}^u_{d_{n,T}}$$

$$(\text{resp. } X_{d_T-d_{n,T}+1}, \dots, X_{d_T},\ \bar{X}_{d_T-d_{n,T+1}}, \dots, \bar{X}_{d_T})$$

est une base de $\mathfrak{s}_{T,\mathbb{C}}/\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}(u) \cap \mathfrak{s}_{T,\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{n}_{T,\mathbb{C}}$), et le déterminant du système de vecteurs, $Y_{p+1}, \dots, Y_{p+2d_{n,T}}$ (resp. $Z_1, \dots, Z_{2d_{n,T}}$), relativement à cette base, est de module 1. Compte tenu de ces remarques et des formules (56) et (58) définissant $\pi_{n,T}(u)$ on obtient

$$(72)\qquad \lambda_u = (2\pi)^{-2d_{n,T}}\ \pi_{n,T}(u).$$

Si u et v sont deux éléments de V^T, tels que $S(u)$ et $S(v)$ soient S-conjugués, il est immédiat de voir que les ensembles de doubles classes, $S(T)\backslash^{S_{u,T}}/S(u)$ et $S(T)\backslash^{S_{v,T}}/S(v)$, sont naturellement en bijection ; par suite, les ensembles $[S.u]_T$ et $[S.v]_T$ ont même cardinal. Comme l'ensemble des classes de conjugaison sous S des sous-groupes $S(u)$, u parcourant V, sont en nombre fini, on voit qu'il existe un entier M tel que

$$[[\Omega]_T] \le M,\ \forall \Omega \in V_T/S.$$

De tout ceci, résulte que l'on peut majorer l'intégrale (69), par

$$(2\pi)^{-2d_{n,T}}\ M \int_{\mathfrak{n}} {}_*\psi_\varphi(u)\ du,$$

qui est clairement un nombre fini. Ainsi nous avons démontré la convergence absolue de l'intégrale triple de la formule (67).

Soit j un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ contenu dans $\mathfrak{s}$. Nous munissons $\mathfrak{s}^j$ (resp. $\mathfrak{s}_j$, $\mathfrak{n}_j$) de la mesure de Lebesgue induite, via l'identification naturelle

$$\mathfrak{s}^j = \mathfrak{h}_j/\mathfrak{n}^j \text{ (resp. } \mathfrak{s}_j = \mathfrak{s}/\mathfrak{s}^j,\ \mathfrak{n}_j = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^j),$$

par la mesure

$$d_{\mathfrak{h}_j/\mathfrak{n}^j}\dot{X} \text{ (resp. } d_{\mathfrak{s}/\mathfrak{s}^j}\dot{X},\ d_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^j}\dot{X}),$$

et, nous notons, $\gamma_{\mathfrak{n}^{*j}}$, la forme volume impaire, définissant sur $\mathfrak{n}^{*j}$ la mesure de Lebesgue choisie.

L'application,

$$u \longrightarrow S.u,$$

induit une submersion, notée p^j, de V^j sur la variété quotient V_j/S, comme il résulte facilement du lemme 12. Alors, pour tout Ω appartenant à V_j/S, nous notons γ_Ω^j la forme volume impaire quotient, le long de $\Omega \cap V^j = p^{j^{-1}}(\Omega)$, de $\gamma_{\mathfrak{n}^{*j}}$ par γ. Si Ω est un élément de V_j/S, on sait que $\Omega \cap V^j$ est une $N_S(j)$-orbite et, par suite, est une réunion finie de S^j-orbites, dont on note $[\Omega]_j$ l'ensemble. Alors, de la même façon que l'on a établi (61) et (62), on montre que si u appartient à V^j il existe une unique mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}_{s(u),j} = j$ telle que, Ω (resp. Ω') désignant la S-orbite (resp. S^j-orbite) de u, on ait, pour toute fonction ψ $d\mu_{\gamma_\Omega^j}$-intégrable sur Ω',

$$(73) \qquad \int_{\Omega'} \psi \, d\mu_{\gamma_\Omega^j} = \int_{S^j/H_{S(u),j}} \psi(s.u)\,|\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*j}} s|\, d\dot{s}.$$

Si, pour toute S^j-orbite Ω' contenue dans V^j, on choisit un élément $u_{\Omega'}$ de Ω', alors, pour tout élément Ω de V_j/S et pour toute fonction ψ, $d\mu_{\gamma_\Omega^j}$-intégrable sur $\Omega \cap V^j$, on a

$$(74) \qquad \int_{p^{j^{-1}}(\Omega)} \psi \, d\mu_{\gamma_\Omega^j} = \sum_{\Omega' \in [\Omega]_j} \int_{S^j/H_{S(u_{\Omega'}),j}} \psi(s.u_{\Omega'})\,|\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{*j}} s|\, d\dot{s}.$$

Nous avons vu précédemment que l'entier $\dim \mathfrak{n}_j$ est pair ; nous le notons $2d_{n,j}$. Alors si u est un élément de V^j, on choisit une base,

$$X_1^u ,\dots, X_{2d_{n,j}}^u \ , \ Y_1^u ,\dots, Y_{2d_{s(u),j}}^u \ , \ Z_1 ,\dots, Z_{2d_{n,j}} \ ,$$

de $\mathfrak{g}_j$, univolumique pour la forme volume η_j , telle que $Z_1 ,\dots, Z_{2d_{n,j}}$ (resp. $Y_1^u ,\dots, Y_{2d_{s(u),j}}^u$) soit une base de $\mathfrak{n}_j$ (resp. $\mathfrak{s}_j \cap \mathfrak{s}(u) = \mathfrak{s}(u)/j$) univolumique par rapport à la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^j} X$ (resp. $d_{\mathfrak{s}(u)/j} \dot{X}$).

Alors, si f est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}_j$ telle que $\rho(f)$ soit égale à u, en exprimant la matrice de κ_f dans la base de $\mathfrak{g}_j$ que nous venons de choisir, on voit que

$$(75) \qquad \pi_j(f) = \pi_{s(u),j}(f_{|j}) \ \pi_{n,j}(u)$$

avec

$$\pi_{n,j}(u) = \det \left(\langle u, \ [X_i^u, Z_j] \rangle\right)_{1\le i,j\le 2d_{n,T}} \ ,$$

le pfaffien $\pi_{s(u),j}(f_{|j})$ de $\kappa_{s(u),f_{|j}}$ étant calculé relativement à la forme volume sur $\mathfrak{s}_j \cap \mathfrak{s}(u)$ prenant la valeur 1 sur la base $Y_1^u,\dots,Y_{2d_{s(u),j}}^u$

De la même façon que nous avons établi la formule (72), on peut montrer que, pour u appartenant à V^j, le nombre λ_u déterminé par la relation (70) est donné par

$$(76) \qquad \lambda_u = (2\pi)^{-2d_{n,j}} |\pi_{n,j}(u)|,$$

d'où il résulte que, si u appartient à $V^T \cap V^j$,on a

$$(77) \qquad \pi_{n,T}(u) = (2\pi)^{2(d_{n,T}-d_{n,j})} |\pi_{n,j}(u)|.$$

Maintenant, en utilisant le lemme 3 (v) formule (15)' pour les groupes S(u) et pour la distribution $\Theta_{S(u),T}$ lorsque u parcourt V^T, et compte tenu de (53), on réécrit (67) sous la forme :

$$(78)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi)=\int_{V_T/S}\Bigg\{\sum_{\Omega'\in[\Omega]_T}\ \sum_{j\in\mathrm{Car}(S(u_{\Omega'}))}(2\pi)^{-2d_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'})}-2d_{n,j}}\,[W_{S(u_{\Omega'}),j}]^{-1}$$

$$\times\ |\pi_{n,j}(u_{\Omega'})|\int_{S/H_{S(u_{\Omega'}),j}}\int_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'})^{\perp}\times j^{*}}\varphi(s(f+g+u_{\Omega'}))$$

$$\times\ \Theta_{S(u_{\Omega'}),T}(g)\ \pi_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),j}(g)^{2}\ df\ dg\ d\dot{s}\Bigg\}\ d\mu_{\gamma}(\Omega).$$

Soit $\mathrm{Car}_T(G)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Car}(G)$ constitué des éléments vérifiant une des conditions équivalentes suivantes

(79)(*i*) il existe W appartenant à $V^j/\sim$ tel que $S_{W,T}$ soit non vide,

(79)(*ii*) il existe u appartenant à V^T tel que j soit S-conjugué à un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{s}(u))$.

Il est clair que nous pouvons choisir les éléments de $\mathrm{Car}_T(G)$ de telle sorte qu'ils soient contenus dans $\mathfrak{s}$.

Si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ et est contenu dans $\mathfrak{s}$ et si u est un élément de V, on pose

$$S_{j,u}=\Big\{s\in S\ /\ s.j\subset S\ u)\Big\},$$

et on désigne par $\mathrm{Car}_j(S(u))$ le sous-ensemble des éléments de $\mathrm{Car}(S(u))$ S-conjugués à j. Alors $\mathrm{Car}_j(S(u))$ est non vide, si et seulement si $S_{j,u}$ l'est ; plus précisément l'application

$$s\longrightarrow s.j$$

induit une bijection de l'ensemble des doubles classes, $_{S(u)}\backslash^{S}{}_{j,u}/_{N_S(j)}$, sur $\mathrm{Car}_j(S(u))$ et, de plus, elle induit une surjection de $_{S(u)}\backslash^{S}{}_{j,u}/_{S^j}$ sur $\mathrm{Car}_j(S(u))$, dont la fibre au-dessus de s.j, pour s appartenant à $S_{j,u}$, s'identifie naturellement à l'espace homogène $W_j/W_{S(s^{-1}u),j}$. D'autre part l'application

$$s\longrightarrow S^j.su,$$

induit une bijection de $_{S(u)}\backslash^{S}{}_{j,u}/_{S^j}$ sur l'ensemble des S^j-orbites contenues dans $S.u \cap V^j$, si bien que $S_{j,u}$ est non vide, si et seulement si u est un élément de V_j. Enfin, si u appartient à V, $\mathrm{Car}(S(u))$ est la réunion disjointe des $\mathrm{Car}_j(S(u))$, pour j parcourant $\mathrm{Car}(G)$, tandis que V_T est la réunion disjointe des V_j pour j parcourant $\mathrm{Car}_T(G)$.

D'après le corollaire du lemme 6, si j appartient à $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ et u à V^j on a :

$$d_{\mathfrak{g}} = d_{\mathfrak{s}(u),j} + 4d_{\mathfrak{n},j} .$$

En utilisant les notations que nous venons d'introduire, et cette dernière relation, il vient

$$(80)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi)$$

$$= \sum_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} (2\pi)^{-2(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{n},j})}[W_j]^{-1}\int_{V_j/S} \Big\{ \sum_{\Omega'\in[\Omega]_T} \sum_{\sigma\in S(u_{\Omega'})\backslash S_{j,u_{\Omega'}}/S^j}$$

$$|\pi_{\mathfrak{n},\sigma j}(u_{\Omega'})| \int_{S/H_{S(u_{\Omega'}),\sigma j}} \int_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'})^{\perp}\times \sigma j^*} \varphi(s(f+g+u_{\Omega'}))$$

$$\times\ \Theta_{S(u_{\Omega'}),T}(g)\ \ \pi_{\mathfrak{s}(u_{\Omega'}),\sigma j}(g)^2\ df\ dg\ d\dot{s} \Big\}\ d\mu_{\gamma}(\Omega).$$

Cependant si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, u à V^j, et g à $\mathfrak{s}^j$, l'application,

$$Z \longrightarrow \exp Z.(g+u) - (g+u),$$

induit un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{n}_j$ sur $\mathfrak{s}(u)^{\perp} \cap \mathfrak{s}_j^*$ dont le jacobien est, on le vérifie sans peine,

$$(2\pi)^{2d_{\mathfrak{n},j}}|\pi_{\mathfrak{n},j}(u)|.$$

Alors, compte tenu de (75), la formule (80) devient

$$(81) \quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1} \int_{V_j/S}$$

$$\Big\{ \sum_{\Omega'\in[\Omega]_T} \sum_{\sigma\in S(u_{\Omega'})\backslash S_{j,u_{\Omega'}}/S^j} \int_{S/H_{S(u_{\Omega'}),\sigma j}}$$

$$\int_{\mathfrak{n}_{\sigma j}\times \mathfrak{s}^{\sigma j*}} \varphi(s\ \exp Z.(f+u_{\Omega'}))\ \Theta_{S(u_{\Omega'}),T}(f_{|\sigma j})$$

$$\times\ \pi_{\sigma j}(f+u_{\Omega'})^2\ dZ\ df\ d\dot{s} \Big\}\ d\mu_\gamma(\Omega)\ .$$

Maintenant soient j appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, u à V_j et σ à $S_{j,u}$. Alors le théorème de changement de variable permet d'écrire

$$(82) \quad \int_{S/H_{S(u),\sigma j}} \int_{\mathfrak{n}_{\sigma j}\times\mathfrak{s}^{\sigma j*}} \varphi(s\ \exp Z.(f+u))\ \Theta_{S(u),T}(f_{|\sigma j})\ \pi_{\sigma j}(f+u)^2\ dZ\ df\ d\dot{s}$$

$$= \delta(\sigma) \int_{S/H_{S(\sigma^{-1}u),j}} \int_{\mathfrak{n}_j\times\mathfrak{s}^{j*}} \varphi(s\ \exp Z.\ (f+\sigma^{-1}u))$$

$$\times\ \Theta_{S(u),T}(\sigma f_{|\sigma j})\ \pi_j(f+\sigma^{-1}u)^2\ dZ\ df\ d\dot{s},$$

avec,

$$\delta(\sigma) = \det\,(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{n}_j \longrightarrow \mathfrak{n}_{\sigma j})\ \det\,(\mathrm{Ad}^*\sigma : \mathfrak{s}^{j*} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j*})$$

$$\times\ \det\,(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}/j \longrightarrow \mathfrak{s}/\sigma j)\ \pi_{\sigma j}(\sigma f+u)^2\ \pi_j(f+\sigma^{-1}u)^{-2}.$$

Mais on a, pour tout élément f de $\mathfrak{s}^{j*}$,

$$\pi_{\sigma j}(\sigma f+u)^2\ \pi_j(f+\sigma^{-1}u)^{-2} = \det\,(\mathrm{Ad}\sigma^{-1} : \mathfrak{g}_{\sigma j} \longrightarrow \mathfrak{g}_j)^2,$$

et aussi,

$$\det\,(\mathrm{Ad}^*\sigma : \mathfrak{s}^{j*} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j*}) = \det\,(\mathrm{Ad}\sigma^{-1} : \mathfrak{s}^{\sigma j} \longrightarrow \mathfrak{s}^j),$$

$$\det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{n}_j \longrightarrow \mathfrak{n}_{\sigma j}) \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}/\mathfrak{j} \longrightarrow \mathfrak{s}/\sigma\mathfrak{j})$$

$$= \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g}_{\sigma j}) \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}^j/\mathfrak{j} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j}),$$

$$\det(\mathrm{Ad}\sigma^{-1} : \mathfrak{g}_{\sigma j} \longrightarrow \mathfrak{g}_j) = \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}^j \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j}) \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{n}^j \longrightarrow \mathfrak{n}^{\sigma j}).$$

D'où l'on tire les égalités :

$$\delta(\sigma) = \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}^j/\mathfrak{j} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j}) \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{n}^j \longrightarrow \mathfrak{n}^{\sigma j})$$

$$= \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}^j/\mathfrak{j} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j}) \det(\mathrm{Ad}\sigma^{*-1} : \mathfrak{n}^{*\sigma j} \longrightarrow \mathfrak{n}^{*j}).$$

Si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, et u à V^j, on notera $\gamma^u_{\mathfrak{s}^j/\mathfrak{j}}$ la forme volume impaire sur $\mathfrak{s}^j/\mathfrak{j}$ induisant sur $S^j/H_{S(u),j}$ la mesure invariante satisfaisant à la relation (73). Pour achever le calcul de $\delta(\sigma)$, nous considérons une base $X_1, \dots, X_p$, de $\mathfrak{s}^j/\mathfrak{j}$ univolumique pour $\gamma^{\sigma^{-1}u}_{\mathfrak{s}^j/\mathfrak{j}}$ et nous choisissons des vecteurs, $u_{p+1}, \dots, u_q$, de $\mathfrak{n}^{*j}$ complétant $X_1.\sigma^{-1}u, \dots, X_p.\sigma^{-1}u$ en une base de $\mathfrak{n}^{*j}$ univolumique pour $\gamma_{\mathfrak{n}^{*j}}$. Nous avons alors :

$$\det(\mathrm{Ad}^*_\sigma : \mathfrak{n}^{*j} \longrightarrow \mathfrak{n}^{*\sigma j}) = \gamma_{\mathfrak{n}^{*\sigma j}}(\sigma(X_1.\sigma^{-1}u)\wedge\dots\wedge\sigma(X_p.\sigma^{-1}u) \wedge \sigma u_{p+1}\wedge\dots\wedge\sigma u_q)$$

$$= \gamma_{\mathfrak{n}^{*\sigma j}}((\sigma X_1).u \wedge\dots\wedge (\sigma X_p).u \wedge \sigma u_{p+1} \wedge\dots\wedge \sigma u_q) ;$$

tandis que, par définition de $\gamma^u_{\mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j}}$, on a

$$(83)\quad \gamma_{\mathfrak{n}^{*\sigma j}}((\sigma X_1).u \wedge\dots\wedge (\sigma X_p).u \wedge \sigma u_{p+1} \wedge\dots\wedge \sigma u_q)$$

$$= \gamma^u_{\mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j}}(\sigma X_1 \wedge\dots\wedge \sigma X_p)\ \gamma(dp^{\sigma j}_u(\sigma u_{p+1}) \wedge\dots\wedge dp^{\sigma j}_u(\sigma u_q))$$

$$= \det(\mathrm{Ad}\sigma : \mathfrak{s}^j/\mathfrak{j} \longrightarrow \mathfrak{s}^{\sigma j}/\sigma\mathfrak{j})\ \gamma(dp^{\sigma j}_u(\sigma u_{p+1}) \wedge\dots\wedge dp^{\sigma j}_u(\sigma u_q)).$$

Mais les applications p^j et $p^{\sigma j}$ étant les restrictions respectives de la projection p à V^j et $V^{\sigma j}$, laquelle est invariante par σ, on voit que

$$\gamma(dp^{\sigma j}_u(\sigma u_{p+1}) \wedge\dots\wedge dp^{\sigma j}_u(\sigma u_q)) = \gamma(dp^j_{\sigma^{-1}u}(u_{p+1}) \wedge\dots\wedge dp^j_{\sigma^{-1}u}(u_q)).$$

Alors que la relation (83), écrite au point $\sigma^{-1}u$ de $\mathfrak{n}^{*j}$ et pour la base, $X_1.\sigma^{-1}u, \ldots, X_p.\sigma^{-1}u, u_{p+1}, \ldots, u_q$, montre que

$$\gamma(dp^j_{\sigma^{-1}u}(u_{p+1}) \wedge \ldots \wedge dp^j_{\sigma^{-1}u}(u_q)) = 1.$$

De tout ceci résulte que

$$\delta(\sigma) = 1.$$

Enfin, toujours sous les mêmes hypothèses, il est clair, par transport de structure, que, pour tout élément f de j^*, on a

$$\Theta_{S(u),T}(\sigma f) = \Theta_{S(\sigma^{-1}u),T}(f).$$

Alors, reportant (82) dans (81), on obtient

$$(84) \quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1}$$

$$\int_{V_j/S} \Big\{ \sum_{\Omega'\in[\Omega]_T} \; \sum_{\sigma\in S(u_{\Omega'})\backslash S_{j,u_{\Omega'}}/S^j} \; \int_{S/H_{S(\sigma^{-1}u_{\Omega'}),j}}$$

$$\int_{\mathfrak{n}_j\times \mathfrak{s}_{j^*}} \varphi(s\,\exp Z.(f+\sigma^{-1}u_{\Omega'}))\, \Theta_{S(\sigma^{-1}u_{\Omega'}),\sigma^{-1}T}(f\,|_j)$$

$$\times\ \pi_j(f+\sigma^{-1}u_{\Omega'})^2\, dZ\, df\, d\dot{s} \Big\}\, d\mu_\gamma(\Omega).$$

Soient j appartenant à $\mathrm{Car}_T(G)$, et Ω à V_j/S. Pour tout couple d'orbites (Ω',Ω'') dans $[\Omega]_T \times [\Omega]_j$, choisissons un élément $\sigma_{\Omega',\Omega''}$ de S tel que

$$\sigma^{-1}_{\Omega',\Omega''}\, u_{\Omega'} = u_{\Omega''}\,.$$

Alors, pour Ω' appartenant à $[\Omega]_T$ (resp. Ω'' appartenant à $[\Omega]_j$) fixée, l'ensemble des $\sigma_{\Omega',\Omega''}$, Ω'' parcourant $[\Omega]_j$ (resp. $\sigma_{\Omega',\Omega''}$, Ω' parcourant $[\Omega]_T$) constitue un système de représentants de $S(u_{\Omega'})\backslash S_{j,u_{\Omega'}}/S^j$ (resp. $S(T)\backslash S_{u_{\Omega''},T}/S(u_{\Omega''})$). A l'aide de ces remarques on transforme la relation (84) en

$$(85)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1}$$

$$\int_{V_j/S} \Big\{ \sum_{\Omega''\in[\Omega]_j} \sum_{\sigma\in S(T)\backslash S_{u_{\Omega''},T}/S(u_{\Omega''})} \int_{S/S^j} \Big\{ \int_{S^j/H_{S(u_{\Omega''}),j}}$$

$$\int_{\mathfrak{n}_j\times \mathfrak{s}^{j*}} \varphi(s\tau\ \exp Z.(f+u_{\Omega''}))\ \Theta_{S(u_{\Omega''}),\sigma^{-1}T}(f|_j)$$

$$\times\ \pi_j(f+u_{\Omega''})^2\ dZ\ df\ d\dot{\tau} \Big\}\ d\dot{s}\ d\mu_\gamma(\Omega).$$

Un simple changement de variables dans l'intégrale portant sur $\mathfrak{n}_j \times \mathfrak{s}^{j*}$ montre que l'on a

$$(86)\quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1} \int_{V_j/S}$$

$$\Big\{ \sum_{\Omega''\in[\Omega]_j} \sum_{\sigma\in S(T)\backslash S_{u_{\Omega''},T}/S(u_{\Omega''})} \int_{S/S^j} \Big\{ \int_{S^j/H_{S(u_{\Omega''}),j}}$$

$$\Big\{ \int_{\mathfrak{n}_j\times \mathfrak{s}^{j*}} \varphi(s\ \exp Z.(f+\tau u_{\Omega''}))\ \Theta_{S(u_{\Omega''}),\sigma^{-1}T}(f|_j)$$

$$\times\ \pi_j(f+\tau u_{\Omega''})^2\ dZ\ df \Big\}\ |\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{j*}}\tau|\ d\dot{\tau} \Big\}\ d\dot{s} \Big\}\ d\mu_\gamma(\Omega).$$

En permutant les intégrations portant sur V_j/S et S/S^j, en tenant compte de (74) et de (60), relativement à la submersion p^j de V^j sur V_j/S, et en remarquant que, par transport de structure, on a la relation,

$$\Theta_{S(u),T}(f) = \Theta_{S(\tau u),T}(f), \qquad \forall \tau \in S^j,\ \forall f \in j^*,\ \forall T \in j,$$

on obtient

$$(87) \quad M_{G,T}(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}^{-1}\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j \in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1} \int_{S/S^j \times \mathfrak{n}_j}$$

$$\left\{ \int_{\mathfrak{s}^{j^*} \times \mathfrak{n}^{j^*}} \varphi(s \ \exp Z.(f+u)) \left\{ \sum_{\sigma \in S(T) \backslash S_{u,T}/S(u)} \Theta_{S(u),\sigma^{-1}T}(f|_j) \right\}\right.$$

$$\left. \times\ \pi_j(f+u)^2 \ df \ du \right\} dZ \ d\dot{s} = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j \in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1} \int_{G/H_j} \left\{ \int_{\mathfrak{h}_j^*} \varphi(g.f) \right.$$

$$\left. \left\{ \sum_{\sigma \in S(T) \backslash S_{u_f,T}/S(u_f)} \Theta_{S(u_f),\sigma^{-1}T}(f|_j) \right\} \pi_j(f)^2 \ df \right\} d\dot{g}.$$

Il nous faut cependant justifier la permutation des intégrations portant sur V_j/S et S/S^j et, pour cela, il nous suffit de montrer que l'intégrale apparaissant dans (86) est absolument convergente. En utilisant les mêmes remarques que celle ayant permis d'établir la convergence absolue de l'intégrale apparaissant dans (67), on voit que l'intégrale (86), dans laquelle l'intégrande est remplacée par sa valeur absolue, est majorée par la même intégrale, où on a supprimé la sommation indexée par

$$S(T) \backslash S_{u_{\Omega''},T}/S(u_{\Omega''}),$$

et, où on a remplacé l'intégrande par

$$M|\varphi(s \ \exp Z.(f+\tau u_{\Omega''})| \ \pi_j(f+\tau u_{\Omega''})^2 \ |\det \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{n}^{j^*}}\tau|,$$

M étant un réel positif. Alors les calculs ayant conduit de (86) à (87) montrent que l'intégrale (86), où on a remplacé l'intégrande par son module, est majorée par

$$(2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} M \sum_{j \in \mathrm{Car}_T(G)} [W_j]^{-1} \int_{G/H_j} \left\{ \int_{\mathfrak{h}_j^*} |\varphi(g.f)| \, |\pi_j(f)|^2 df \right\} d\dot{g}$$

$$= M \sum_{j \in \mathrm{Car}_T(G)} \int_{\mathcal{V}_j} |\varphi(f)| df \le M \int_{\mathfrak{g}^*} |\varphi(f)| df$$

d'où notre assertion.

Soit j un élément de $\mathrm{Car}_T(G)$, et considérons la fonction $\Theta_{j,T}$ définie sur $\mathcal{V}_j$ par

$$\Theta_{j,T}(f) = \sum_{\sigma \in {}_{S(T)} \backslash {}^{S_{u_f,T}} /_{S(u_f)}} \Theta_{S(u_f),\sigma^{-1}T}(f_{|j}).$$

Nous allons d'abord voir que $\Theta_{j,T}$ est une fonction H'_j-invariante sur $\mathcal{V}^j$. Remarquons d'abord que, si n appartient à N^j, et, si f est un élément de $\mathcal{V}^j$, alors

$$u_{n.f} = u_f \quad \text{et} \quad nf_{|j} = f_{|j} \, ,$$

ce qui montre que $\Theta_{j,T}$ est N^j-invariante. Par suite il nous suffit de montrer que $\Theta_{j,T}$ est $N_S(j)$-invariante, mais cela se démontre facilement par des arguments du type "transport de structure" : les détails sont laissés au lecteur.

De plus, si f et f' sont des éléments de $\mathcal{V}^j$ ayant même restriction à j et tels que $S(u_f)$ et $S(u_{f'})$ soient S^j-conjugués, on montre aisément (voir la remarque 2 ci-après) que

$$\Theta_{j,T}(f) = \Theta_{j,T}(f').$$

Alors le théorème 1 est conséquence de ces deux remarques portant sur les fonctions $\Theta_{j,T}$, j parcourant $\mathrm{Car}_T(G)$, et de la formule (15') du lemme 3(v). Q.E.D.

Remarque 1. Il résulte de la formule (87) que, sous les hypothèses du théorème 1, le support de $\Theta_{G,T}$ est contenu dans

$$\bigcup_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} \overline{V_j} = \bigcup_{j\in \mathrm{Car}_T(G)} \overline{\mathfrak{g}^*_{r,j}}.$$

Remarque 2. Soient $\mathfrak{j}$ appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, et $\mathcal{A}$ une partie H'_j-invariante de V^j. Supposons que Θ soit une fonction H'_j-invariante définie sur $\mathcal{A}$ et satisfaisant de plus à la condition suivante :

si f et f' sont deux formes linéaires appartenant à $\mathcal{A}$, ayant même restriction à $\mathfrak{j}$, et telles que $S(u_f) = S(u_{f'})$ (ici on a identifié S et G/N), alors on a $\Theta(f) = \Theta(f')$.

Sous ces hypothèses, la fonction Θ satisfait, alors à la condition a priori plus forte :

soient W un élément de $V^j/\sim$, et f et f' des éléments de $\mathcal{A} \cap W$ ayant même restriction à $\mathfrak{j}$, alors on a $\Theta(f) = \Theta(f')$.

Remarque 3. Soit T un élément elliptique de $\mathfrak{g}$. Alors si f appartient à V, si R est un facteur réductif de $G(u_f)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$, et si λ désigne la restriction de f à $\mathfrak{r}$, on a

$$(45)' \quad \Theta_{G,T}(f) = \sum_{T'\in(G.T\cap\mathfrak{r})/R} \Theta_{R,T'}(\lambda),$$

comme il résulte facilement de la formule (45) du théorème 1.

§ VI - LES INTÉGRALES ORBITALES SUR $\mathfrak{g}^*$

Soit $\mathfrak{j}$ appartenant à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$. Nous supposerons choisie une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{j}$, choix qui induit une mesure sur l'espace quotient $\mathfrak{h}_j/\mathfrak{j}$ et sur les espaces duaux respectifs $\mathfrak{j}^*$ et $\mathfrak{j}^\perp \cap \mathfrak{h}_j^*$, comme expliqué. Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{V}^j$, on pose

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathfrak{j}^\perp \cap \mathfrak{h}_j^* \cap \rho^{-1}(\rho(\mathcal{A})).$$

Par définition de la relation d'équivalence $\sim$ et, grâce au lemme 5, on voit que, pour toute partie $\sim$-saturée $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}^j$, on a

$$\mathcal{W} = \bigcup_{f \in \mathfrak{j}^{*\prime}} f + \tilde{\mathcal{W}} \ ,$$

tandis que $\mathcal{W}$ et $\tilde{\mathcal{W}}$ sont tous deux H_j-stables. Il est alors aisé de démontrer le résultat suivant :

Lemme 18. *Soient* $\mathfrak{j}$ *appartenant à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{W}$ *un ouvert* $\sim$*-saturé non vide de* $\mathcal{V}^j$ *et* φ *une fonction mesurable et positive (resp. intégrable) sur* $\mathfrak{g}^*$. *Alors*

(i) pour presque tout élément f *de* $\mathfrak{j}^*$, *la fonction* $\psi^{\mathcal{W}}_{\varphi,f}$ *, définie sur* G *par*

$$\psi^{\mathcal{W}}_{\varphi,f}(g) = \int_{\tilde{\mathcal{W}}} \varphi(g.(f+u))\ \pi_{j,n}(u)^2\, du,$$

est $d_{G/H_j}\dot{g}$*-mesurable et positive (resp. intégrable)*

(ii) la fonction $F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}$ *, définie sur* $\mathfrak{j}^*$ *par*

$$(88) \qquad F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(f) = \pi_{j,s}(f) \int_{G/Hj} \left\{ \int_{\tilde{\mathcal{W}}} \varphi(g.(f+u))\pi_{j,n}(u)^2\, du \right\} d\dot{g},$$

est $|\pi_{j,s}(f)|\,df$*-mesurable (resp.* $|\pi_{j,s}(f)|\,df$ *-intégrable), et on a*

$$\int_{j^*} |F^{W}_{j,\varphi}(f)|\ |\pi_{j,s}(f)|df \le (2\pi)^{2d_{\mathfrak{g}}}[W_j]\int_{\mathfrak{g}^*_{r,j}} |\varphi(f)|df.$$

Ce paragraphe, ainsi que les deux suivants, est consacré à l'étude des fonctions $F^{W}_{j,\varphi}$, lorsque φ est dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$. Pour justifier l'introduction de ces intégrales orbitales d'un type particulier, remarquons tout d'abord que, si G est semi-simple, *i.e.* si le radical N est trivial, on a toujours $W = j^{*\prime}$, et

$$F^{W}_{j,\varphi}(f) = \pi_j(f)\int_{G/H_j} \varphi(g.f)\, d\dot{g} \quad ;$$

ainsi, dans ce cas, les fonctions $F^{W}_{j,\varphi}$ ne sont rien d'autre que les intégrales invariantes de Harish-Chandra. Ensuite, si S est un facteur réductif de G, T un élément elliptique de $\mathfrak{g}$ contenu dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de S et si les éléments de $\mathrm{Car}(G)$ sont supposés contenus dans $\mathfrak{s}$, pour tout élément φ de $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, on a

$$(89)\quad \int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(f)\Theta_{G,T}(f)df = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})} [W_j]^{-1} \sum_{W\in V^j/\sim}\ \sum_{\sigma\in S(T)\backslash S_{W,T}/S(W)}$$

$$\int_{j^*} F^{W}_{j,\varphi}(f)\ \Theta_{S(W),\sigma^{-1}T}(f)\ \pi_{j,s}(f)\ df,$$

comme il résulte du théorème 1.

Lorsque W sera égal à V^j, nous noterons l'intégrale invariante correspondante $F_{j,\varphi}$, au lieu de $F^{V^j}_{j,\varphi}$.

Pour étudier les intégrales invariantes ci-dessus, lorsque φ appartient à $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, nous sommes amenés à introduire d'autres intégrales invariantes moins naturelles, puisqu'elles dépendent d'un choix supplémentaire. Tout d'abord, si on munit $j^{*\prime} \times \tilde{V}^j$ de l'action produit de celle de H_j sur $j^{*\prime}$, qui est triviale, par celle de H_j sur $\tilde{V}^j$, l'application

$$(f,u) \longrightarrow f+u$$

induit un isomorphisme de variétés H_j-équivariant de $j^{*\prime} \times \tilde{V}^j$ sur V^j ; il résulte alors du lemme 12, que $\tilde{V}^j/H_j$ est une variété quotient isomorphe à V^j/S^j, lorsque S est un facteur réductif dont l'algèbre de Lie contient j. De plus le groupe W_j opère naturellement sur $\tilde{V}^j/H_j$. Soit alors γ^j la forme volume impaire, image réciproque, par la projection naturelle de $\tilde{V}^j/H_j = V^j/S^j$ sur V/S, de γ ; alors γ^j est clairement W_j-invariante. Pour toute orbite Ω de $\tilde{V}^j/H_j$, soit $\tilde{\gamma}^j_\Omega$ la forme volume impaire quotient, le long de Ω, de la forme volume impaire $\gamma_{\tilde{V}^j}$, définissant la mesure de Lebesgue sur l'ouvert $\tilde{V}^j$ de $j^\perp \cap \mathfrak{h}^*_j$, par la forme volume impaire γ^j. Le résultat suivant est alors immédiat :

Lemme 19. *Soient* j *appartenant à* car($\mathfrak{g}$) *et* φ *une fonction mesurable et positive (resp intégrable) sur* $\mathfrak{g}^*$. *Alors*

(i) pour $df\times d\mu_{\gamma^j}$*-presque tout* (f,Ω) *dans* $j^{*'} \times \tilde{V}^j/H_j$, *la fonction* $\psi_{\varphi,f,\Omega}$ *définie sur* G *par*

$$\psi_{\varphi,f,\Omega}(g) = \int_\Omega \varphi(g.(f+u))\ \pi_{n,j}(u)^2\ d\mu_{\tilde{\gamma}^j_\Omega}(u), \quad \forall g\in G,$$

est $d_{G/H_j}\dot{g}$*-mesurable et positive (resp-intégrable)*

(ii) la fonction $\tilde{F}_{j,\varphi}$, *définie sur* $j^{*'} \times \tilde{V}^j/H_j$ *par*

$$(90) \qquad \tilde{F}_{j,\varphi}(f,\Omega) = \pi_{j,s}(f) \int_{G/H_j} \left\{ \int_\Omega \varphi(g.(f+u))\ \pi_{n,j}(u)^2\ d\mu_{\tilde{\gamma}^j_\Omega}(u) \right\} d\dot{g},$$

$$\forall f\in j^{*'}, \qquad \forall \Omega\in\tilde{V}^j/H_j,$$

est $|\pi_{j,s}(f)|\,df\times d\mu_{\gamma^j}$*-mesurable (resp. intégrable)*

(iii) si W *est un ouvert ~-saturé non vide de* V^j *on a, pour presque tout élément* f *de* j^*,

$$(91) \qquad F^{W}_{j,\varphi}(f) = \int_{\tilde{W}/H_j} \tilde{F}_{j,\varphi}(f,\Omega)\ d\mu_{\gamma^j}(\Omega).$$

Nous allons consacrer la fin de ce paragraphe à l'étude des fonctions $\tilde{F}_{j,\varphi}$, lorsque φ appartient à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$.

Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$; alors la projection naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{s}$ induit une injection naturelle de $\mathfrak{s}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ et, par suite, de $S(\mathfrak{s}^*)$ dans $S(\mathfrak{g}^*)$. L'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ étant naturellement muni d'une structure de G-module, laquelle est induite par l'action adjointe de $S = G/N$ sur $\mathfrak{s}$, et la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ étant un morphisme de G-module, on voit que l'injection naturelle de $\mathfrak{s}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ ou de $S(\mathfrak{s}^*)$ dans $S(\mathfrak{g}^*)$ est un morphisme de G-modules. En particulier, cette injection envoie $S(\mathfrak{s}^*)^S$ dans $S(\mathfrak{g}^*)^G$. Si p appartient à $S(\mathfrak{g}^*)$, nous noterons p_j sa restriction à j. Alors l'application,

$$p \longrightarrow p_j ,$$

induit un homomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{g}^*)^G$ dans $S(j^*)^{W_j}$. Nous noterons S_j la sous-algèbre de $S(j^*)^{W_j}$ image par cet homomorphisme de $S(\mathfrak{s}^*)^S$.

Lemme 20. *L'algèbre* $S(j^*)$ *est un* S_j*-module de type fini.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$ contenant j, que l'on a identifié avec son image par la projection naturelle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Si $S_{\mathfrak{a}}$ désigne l'image de l'application qui, à un élément de $S(\mathfrak{s}^*)^S$, fait correspondre sa restriction à $\mathfrak{a}$, on sait que $S_{\mathfrak{a}}$ est une sous-algèbre de $S(\mathfrak{a}^*)$, sur laquelle cette dernière est un module de type fini. De plus, l'application, qui à un élément de $S(\mathfrak{a}^*)$ fait correspondre sa restriction à j, induit un morphisme surjectif d'algèbres de $S(\mathfrak{a}^*)$ (resp. $S_{\mathfrak{a}}$) sur $S(j^*)$ (resp. S_j). Le résultat cherché est alors évident. Q.E.D.

Si Y est un espace mesurable et μ une mesure, nous noterons, pour $1 \leq \tau < +\infty$, $L^{\tau}(Y,\mu)$ l'espace de Banach des fonctions de puissance $\tau^{\text{ième}}$ μ-intégrable sur Y, et nous noterons $L^{\infty}(Y,\mu)$ celui des fonctions μ-essentiellement bornées sur Y.

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, π une fonction polynôme non nulle sur E qui soit le produit d'un nombre fini de formes linéaires complexes sur E, et S une sous-algèbre unitaire de $S(E)$ sur laquelle cette dernière soit un module de type fini.

Soient (Y,μ) un espace mesuré σ-fini et Γ un cône ouvert dans E.

Nous noterons $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$, où dx désigne la mesure de Lebesgue choisie sur E, l'espace des fonctions φ définies sur $\Gamma\times Y$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

(*i*) φ est $|\pi| dx\, d\mu$ -mesurable

(*ii*) pour μ-presque tout y dans Y, la fonction $\varphi_y = \varphi(.,y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ

(*iii*) pour tout p appartenant à S, $\partial_p\varphi$ est un élément de $L^1(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$.

Si p appartient à S et φ à $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$, on pose

$$(92) \qquad \nu^\pi_p(\varphi) = \|\partial_p\varphi\|_{1,\pi} ,$$

où $\| \ \|_{1,\pi}$ désigne la norme usuelle pour l'espace $L^1(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$. Alors les applications ν^π_p , $p\in S$, définissent des semi-normes sur l'espace $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$, que nous supposerons muni de la structure d'espace vectoriel topologique correspondante. Lorsque S est égal à $S(E)$, l'espace $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$ est noté plus simplement $L^1_\infty(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$. Lorsque Y est l'espace réduit à un point et μ la mesure de masse totale 1, l'espace $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi| dxd\mu)$, que nous noterons simplement $L^1_S(\Gamma, |\pi| dx)$, n'est rien d'autre que l'espace des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ telles que pour tout p dans S, $\partial_p\varphi$ appartienne à $L^1(\Gamma, |\pi| dx)$, muni des semi-normes ν^π_p , $p\in S$, définies par (92). Les propriétés de ces espaces fonctionnels seront étudiées dans le prochain paragraphe. Pour le moment nous nous contenterons d'établir le résultat suivant :

Proposition 4. *Soit* j *un élément de* car($\mathfrak{g}$). *Si* φ *appartient à* $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, *pour tout* (f,Ω) *appartenant à* $j^{*\prime} \times \tilde{\mathcal{V}}^j/H_j$, *l'intégrale* (90) *est absolument convergente et, de plus, la fonction* $\tilde{F}_{j,\varphi}$ *est un élément de* $\mathcal{E}(j^{*\prime} \times \tilde{\mathcal{V}}^j/H_j)$, *tandis que l'on a*

$$(93) \qquad \tilde{F}_{j,\partial_p\varphi} = \partial_{p_j}(\tilde{F}_{j,\varphi}), \quad \forall p\in S(\mathfrak{s}^*)^S.$$

L'application,

$$\varphi \longrightarrow \tilde{F}_{j,\varphi},$$

induit un homomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, *muni de la topologie induite par celle de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, *dans* $L^1_{S_j}(\mathfrak{j}^{*\prime} \times \tilde{V}^j/H_j\ ,\ |\pi_j|\mathrm{df}\ d\mu_{\gamma^j})$.

Pour pouvoir démontrer cette proposition, nous devons d'abord établir le

Lemme 21. *Soit* g_0 *appartenant à* V^j. *Alors il existe une fonction* ψ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathfrak{g}^*$ *et G-invariante, ayant les propriétés suivantes*

(i) *le support de* ψ *est contenu dans* V_j

(ii) *pour tout élément* g *de* $\mathfrak{g}^*$, *on a,*

$$0 \leq \psi(g) \leq 1$$

(iii) il existe un voisinage de g_0 *dans* V_j , *sur lequel la fonction* ψ *soit constante et égale à* 1.

Démonstration. Soit π_q un polynôme sur $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ comme dans le corollaire de la proposition 2. Alors π_q est un élément de $S(\mathfrak{g})^G$, et, d'après le lemme 10, V est le complémentaire de l'ensemble des zéros de π_q . Soit alors δ une fonction de la variable réelle, élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ayant les propriétés suivantes :

(*i*) $\forall t\in\mathbb{R}$, si $|t| > 1/2|\pi_q(g_0)|$, alors $\delta(t)=0$

(*ii*) $\forall t\in\mathbb{R}$, si $|t| < 1/4|\pi_q(g_0)|$, alors $\delta(t)=1$

(*iii*) $\forall t\in\mathbb{R}$, $0\leq \delta(t) \leq 1$.

Dans ces conditions, il est clair que la fonction ψ, définie par

$$\psi(g) = \chi_{V_j}(g)\ \delta(\pi_q(g) - \pi_q(g_0)),\quad \forall g\in\mathfrak{g}^*,$$

où χ_{V_j} désigne la fonction caractéristique de l'ouvert V_j , répond à la question. Q.E.D.

Démonstration de la proposition 4. Soient f_0 appartenant à $\mathfrak{j}^{*\prime}$, Ω_0 à $\tilde{V}^j/H_j$, et u_0 à Ω_0 . Considérons alors une fonction ψ sur $\mathfrak{g}^*$ vérifiant les propriétés énoncées dans le lemme 21 relativement à $g_0 = f_0 + u_0$. Alors il est clair que, pour (f,Ω) élément de $\mathfrak{j}^{*\prime} \times \tilde{V}^j/H_j$ suffisamment voisin de

(f_0,Ω_0), on a

$$\varphi(g.(f+u)) = \psi\varphi(g.(f+u)) \qquad \forall g\in G \qquad \forall u\in\Omega$$

$$\partial_p\varphi(g.(f+u)) = \partial_p(\psi\varphi)(g.(f+u)) \qquad \forall g\in G \qquad \forall u\in\Omega \qquad \forall p\in S(g^*),$$

si bien que, pour démontrer la première partie de la proposition, on peut supposer que φ est un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{V}_j)$. Dans ce cas, il est facile de démontrer que l'intégrale (90) est absolument convergente, et que la fonction $\tilde{F}_{j,\varphi}$ qu'elle définit est un élément de $\mathcal{D}(j^{*'} \times \tilde{\mathcal{V}}^j/H_j)$. De plus, il résulte de ce que la forme volume impaire γ^j choisie sur $\tilde{\mathcal{V}}^j/H_j$ est W_j-invariante, et de la relation (24), que $\tilde{F}_{j,\varphi}$ satisfait à

$$(94) \qquad \tilde{F}_{j,\varphi}(wf,w\Omega) = \varepsilon_j(w)\, \tilde{F}_{j,\varphi}(f,\Omega), \quad \forall f\in j^{*'}, \quad \forall \Omega\in\tilde{\mathcal{V}}^j/H_j\ , \ \forall w\in W_j\ .$$

Soit p un élément de $S(s^*)^S$; pour démontrer la formule (93), il nous suffit donc d'établir que, pour toute fonction Θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et W_j-invariante sur $j^{*'} \times \tilde{\mathcal{V}}^j/H_j$, on a

$$(95) \qquad \int_{j^{*'}\times\tilde{\mathcal{V}}^j/H_j} \Theta(f,\Omega)\, \tilde{F}_{j,\partial_p\varphi}(f,\Omega)\, \pi_{j,s}(f)\, df\, d\mu_{\gamma^j}(\Omega)$$

$$= \int_{j^{*'}\times\tilde{\mathcal{V}}_j/H_j} \Theta(f,\Omega)\, \partial_{p_j}(\tilde{F}_{j,\varphi})(f,\Omega)\, \pi_{j,s}(f)\, df\, d\mu_{\gamma^j}(\Omega).$$

Cependant, il résulte de la caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et G-invariantes sur $\mathcal{V}_j$ (cf le lemme 3 (v)), qu'il existe une unique fonction, $\tilde{\Theta}$, appartenant à $\mathcal{E}(\mathcal{V}_j)^G$, telle que, pour tout f dans $j^{*'}$ et tout Ω dans $\tilde{\mathcal{V}}^j/H_j$, on ait

$$\Theta(f,\Omega) = \tilde{\Theta}(f+u) \qquad \forall u\in\Omega.$$

La formule d'intégration (15) du lemme 3 montre alors, que

$$\int_{j^{*'}\times\tilde{\mathcal{V}}^j/H_j} \Theta(f,\Omega)\, \tilde{F}_{j,\partial_p\varphi}(f,\Omega)\, \pi_{j,s}(f)\, df\, d\mu_{\gamma^j}(\Omega)$$

$$= (2\pi)^{2d_g}\, [W_j] \int_{\mathcal{V}_j} \tilde{\Theta}(f)\, \partial_p\varphi(f)\, df$$

$$= (2\pi)^{2d_{\mathfrak{g}}} [W_j] \int_{\mathcal{V}_j} \partial_{p^{\#}} \tilde{\Theta}(f)\, \varphi(f)\, df,$$

$p^{\#}$ désignant le polynôme p dans lequel on a effectué le changement de variable $X \longrightarrow -X$. Utilisant alors le lemme 3 (*vi*), formule (16), on obtient

$$(2\pi)^{2d_{\mathfrak{g}}} [W_j] \int_{\mathcal{V}_j} \partial_{p^{\#}} \tilde{\Theta}(f)\, \varphi(f)\, df$$

$$= \int_{G/H_j} \left\{ \int_{\mathcal{V}^j} (\partial_{p^{\#}_{\mathfrak{h}_j}} \circ \pi_j)(\tilde{\Theta}_{|\mathfrak{h}_j^*})(f)\, \varphi(g.f)\, \pi_j(f)\, df \right\} d\dot{g}.$$

Comme $p^{\#}_{\mathfrak{h}_j} = p^{\#}_j$ est un élément de $S(j^*)$, on a

$$\partial_{p^{\#}_{\mathfrak{h}_j}} \circ \pi_j = \pi_{j,n} \circ \partial_{p^{\#}_j} \circ \pi_{j,s}$$

et, par suite, on obtient

$$(2\pi)^{2d_{\mathfrak{g}}} [W_j] \int_{\mathcal{V}_j} \partial_{p^{\#}} \tilde{\Theta}(f)\, \varphi(f)\, df$$

$$= \int_{G/H_j} \left\{ \int_{\mathcal{V}^j} \partial_{p^{\#}_j} \circ \pi_{j,s}(\tilde{\Theta}_{|\mathfrak{h}_j^*})(f)\, \varphi(g.f)\, \pi_{j,s}(f)\, \pi_{j,n}(f)^2\, df \right\} d\dot{g}$$

$$= \int_{j^{*\prime} \times \tilde{\mathcal{V}}^j / H_j} \partial_{p^{\#}_j} \circ \pi_{j,s}(\Theta)(f,\Omega)\, \tilde{F}_{j,\varphi}(f,\Omega)\, df\, d\mu_{\gamma^j}(\Omega)$$

$$= \int_{j^{*\prime} \times \tilde{\mathcal{V}}^j / H_j} \Theta(f,\Omega)\, \partial_{p_j}(\tilde{F}_{j,\varphi})(f,\Omega)\, \pi_{j,s}(f)\, df\, d\mu_{\gamma^j}(\Omega).$$

De cette dernière égalité, on tire la formule (95) ; ainsi s'achève la démonstration de la première partie de la proposition. La deuxième partie en est une conséquence immédiate. Q.E.D.

§ VII - ÉTUDE DES ESPACES $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi|dx\ d\mu)$ - UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $e_1,\dots,e_n$ une base de E, qui soit univolumique pour la mesure de Lebesgue choisie sur E. Nous désignerons par $x, y,\dots$ (resp. $\xi, \zeta,\dots$), les éléments de E (resp. E^*), et par $x_1,\dots,x_n$ (resp. $\xi_1,\dots,\xi_n$), le système des coordonnées sur E (resp. E^*) par rapport à la base $e_1,\dots,e_n$ (resp. la base duale). Soit D l'opérateur différentiel sur E défini par

$$(96)\qquad D = (1-\partial_{e_1})\dots(1-\partial_{e_n}).$$

Nous allons nous intéresser aux propriétés d'une solution élémentaire particulière de D. Soit C le cône ouvert de E défini par

$$(97)\qquad C = \left\{x\in E\ /\ x_j>0,\ \ 1\le j\le n\right\},$$

et soit T_1 la fonction définie sur E par

$$(98)\qquad T_1(x) = \chi_{-C}(x)\ \exp(x_1+\dots+x_n),\ \ \forall x\in E.$$

On voit que T_1 appartient à $L^1(E,dx)$, si bien que l'on peut définir, par récurrence sur l'entier naturel non nul m, une fonction T_m, élément de $L^1(E,dx)$, en posant

$$(99)\qquad T_m = T_1 * T_{m-1},\ \ \forall m\ge 2.$$

On conviendra que T_0 est la mesure de Dirac à l'origine de E. Dans ces conditions il est aisé de démontrer le

Lemme 22. *(i) Pour tout entier naturel* m, T_m *est une distribution tempérée sur* E *dont le support est contenu dans le cône convexe fermé adhérence de* $-C$ *et dont la transformée de Fourier est la fonction* $\mathcal{F}_E T_m$ *définie sur*

E^* *par*

$$(100) \qquad \mathcal{F}_E T_m(\xi) = \prod_{j=1}^{m} (1-i\xi_j)^{-m}, \quad \forall \xi \in E^*.$$

(ii) Pour toute paire d'entiers, k *et* m, *tels que* $0 \le k \le m$, *on a*

$$(101) \qquad D^k T_m = T_{m-k} ,$$

si bien que T_m *est une solution élémentaire tempérée de l'opérateur différentiel* D^m.

(iii) Pour tout entier strictement positif m, *on a*

$$(102) \qquad T_m(x) = \frac{(-1)^{(m-1)n}}{(m-1)!} \chi_{-C}(x) \, (x_1 \ldots x_n)^{m-1} \exp(x_1+\ldots+x_n),$$

si bien que, d'une part, $T_{m|-C}$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telle que, pour tout élément* p *de* S(E) *et pour tout* τ *appartenant à* $[1, +\infty]$, $\partial_p T_{m|-C}$ *est un élément de* $L^\tau(-C,dx)$, *et, d'autre part,* T_m *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^{m-2}$ *sur* $\mathbb{R}^n$. *Pour être plus précis, si* p *appartient à* S(E), *il existe une fonction polynôme* $Q_{m,p}$ *sur* E, *de degré au plus* m, *telle que*

$$(103) \qquad \partial_p T_m(x) = Q_{m,p}(x) \exp(x_1+\ldots+x_n), \quad \forall x \in -C.$$

Maintenant soient π un élément non nul de $S(E^*_{\mathbb{C}})$, produit de formes linéaires, S une sous-algèbre unitaire de $S(E)$ sur laquelle cette dernière soit un module de type fini, et Γ un cône ouvert de E de sommet l'origine et admettant un nombre fini de composantes connexes, chacunes d'entre elles étant un cône convexe. Pour $1 \le \tau < +\infty$, on note $L^\tau_S(\Gamma, |\pi| dx)$, l'espace des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ telles que, pour tout élément p de S, $\partial_p \varphi$ appartienne à $L^\tau(\Gamma, |\pi| dx)$. Si φ est une fonction dans $L^\tau_S(\Gamma, |\pi| dx)$ et si p est un élément de S, on pose

$$\nu^\pi_p(\varphi) = \| \partial_p \varphi \|_{\tau,\pi} ,$$

où $\| \ \|_{\tau,\pi}$ est la norme usuelle de l'espace de Banach $L^\tau(\Gamma, |\pi| dx)$. On munit alors l'espace $L^\tau_S(\Gamma, |\pi| dx)$ de la topologie définie par les semi-normes ν^π_p , $p \in S(E)$. Lorsque S est égal à $S(E)$, l'espace $L^\tau_S(\Gamma, |\pi| dx)$ sera noté $L^\tau_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$.

Enfin nous noterons $L^\infty_\infty(\Gamma)$, l'espace des fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur

Γ et dont toutes les dérivées sont bornées. Si φ appartient à $L^{\infty}_{\infty}(\Gamma)$ et p à $S(E)$, nous poserons

$$\nu^{\infty}_{p}(\varphi) = \|\partial_p \varphi\|_{\infty} = \sup_{x\in\Gamma} |\partial_p \varphi(x)|.$$

Alors, muni de la topologie définie par les semi-normes ν^{∞}_{p}, $p\in S(E)$, l'espace $L^{\infty}_{\infty}(\Gamma)$ devient un espace de Frèchet. Dans ces conditions on a le

Théorème 2. *Soit* τ *un élément de l'intervalle* $[\,1, +\infty\,[$. *Alors*

(i) l'espace $L^{\tau}_{S}(\Gamma, |\pi|dx)$ *est contenu dans* $L^{\infty}_{\infty}(\Gamma)$, *et l'injection est continue*

(ii) l'espace $L^{\tau}_{S}(\Gamma, |\pi|dx)$ *est un espace de Frèchet*

(iii) l'espace $L^{\tau}_{S}(\Gamma, |\pi|dx)$ *est égal à l'espace* $L^{\tau}_{\infty}(\Gamma, |\pi|dx)$, *et la topologie sur ce dernier est, en fait, définie par les semi-normes* ν^{π}_{p}, $p\in S$.

Démonstration. Ecrivons,

$$\pi = \alpha_1^{n_1} \ldots \alpha_l^{n_l},$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ des éléments deux à deux linéairement indépendants (ou premiers entre eux) de $E^*_{\mathbb{C}}$, et $n_1, \ldots, n_l$ des entiers strictement positifs. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_m$, un système de représentants dans E^* des classes dans l'espace projectif de E^* des éléments non nuls parmi les formes linéaires $\mathrm{Re}\alpha_1, \ldots, \mathrm{Re}\alpha_l$, $\mathrm{Im}\alpha_1, \ldots, \mathrm{Im}\alpha_l$, et soit

$$\pi_1 = \beta_1 \ldots \beta_m .$$

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert d'un espace vectoriel réel, et p est un polynôme sur ce dernier, on pose

$$\mathcal{U}'_p = \left\{ x\in\mathcal{U} \;/\; p(x)\neq 0 \right\}.$$

Dans ces conditions, on voit que Γ'_{π_1} est un cône ouvert de sommet l'origine, réunion d'un nombre fini de composantes connexes qui sont autant de cônes ouverts convexes de sommet l'origine. Soit Γ_0 une de ces composantes connexes, et soit $e_1, \ldots, e_n$ une base univolumique de E constituée d'éléments de Γ_0. Nous allons utiliser les notations et définitions relatives à cette base introduites au début de ce paragraphe. Nous noterons $\| \ \|$ la norme euclidienne définie sur E par

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad \forall x \in E.$$

Si u est une distribution sur E, nous noterons $u^\#$, la distribution définie par

$$\langle u^\#, \varphi \rangle = \int_E \varphi(-x)\, du(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(E).$$

En particulier, si u est une fonction, on a

$$u^\#(x) = u(-x), \quad \forall x \in E.$$

Il est clair que C est contenu dans Γ_0. D'autre part, si β est l'une des formes linéaires, $\mathrm{Re}\,\alpha_j$ ou $\mathrm{Im}\,\alpha_j$, $1 \le j \le l$, pour tout x et y appartenant à Γ_0, on a

$$|\beta(x+y)| = |\beta(x)| + |\beta(y)|,$$

si bien que

$$(104) \qquad |\pi(x+y)| \ge |\pi(x)|, \quad \forall x, \forall y \in \Gamma_0 .$$

Soit φ un élément de $L^\tau_S(\Gamma, |\pi|\,dx)$. Il résulte de (104) que pour tout x appartenant à Γ_0, et pour tout p dans S, $\partial_p \varphi$ est un élément de $L^\tau(x+\Gamma_0, dx)$. Si ψ est une fonction définie sur Γ, nous noterons ψ_{Γ_0} la fonction définie sur E telle que ψ_{Γ_0} soit nulle en dehors de Γ_0, et ψ_{Γ_0} et ψ aient même restriction à Γ_0. Avec ces notations on voit que, si τ' désigne l'exposant conjugué de τ et si l'élément u de $L^{\tau'}(E, dx)$ a son support contenu dans $-\bar{C}$, pour tout x appartenant à Γ_0, la fonction,

$$y \longrightarrow u(x-y)\varphi_{\Gamma_0}(y),$$

est un élément de $L^1(E, dx)$, dont le support est contenu dans $x+C$, et dont la restriction à ce dernier ensemble est la fonction,

$$y \longrightarrow u(x-y)\varphi(y).$$

Alors on pose

$$u * \varphi(x) = \int_E u(x-y)\, \varphi_{\Gamma_0}(y)\,dy = \int_{x+C} u(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad \forall x \in \Gamma_0 .$$

Soient m un entier supérieur ou égal à 1, et p un élément de $S(E)$ de degré au plus $m-2$. Alors il résulte du lemme 22, que l'on peut définir, comme ci-dessus, pour tout x appartenant à Γ_0, $T_m * \varphi(x)$ et $\partial_p T_m * \varphi(x)$.

Nous allons voir que, dans ces conditions, $T_m * \varphi$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^{m-2}$ sur Γ_0 et que

$$\text{(105)} \qquad \partial_p(T_m * \varphi) = \partial_p T_m * \varphi, \quad \forall p \in S(E),\ d^\circ p \leq m-2.$$

Soit x_0 appartenant à Γ_0. Choisissons y_0 appartenant à Γ_0 tel que x_0 soit dans y_0+C, et un nombre réel strictement positif, ε, tel que $B(x_0,\varepsilon)$, la boule de centre x_0 et de rayon ε pour $\| \ \|$, soit contenue dans y_0+C. Alors, pour tout élément x de $B(x_0,\varepsilon)$, on a

$$T_m * \varphi(x) = \int_{y_0+C} T_m(x-y)\varphi(y)dy.$$

Comme T_m est une fonction de classe $\mathscr{C}^{m-2}$, pour établir notre assertion il suffit de montrer que, pour p appartenant à $S(E)$ et de degré au plus $m-2$, la fonction,

$$y \longrightarrow \partial_p T_m(x-y),$$

est majorée sur y_0+C et uniformément par rapport à x dans $B(x_0,\varepsilon)$, par une fonction, élément de $L^{\tau'}(y_0+C,dx)$. Soit donc p un élément de $S(E)$ de degré au plus $m-2$, et soit $Q_{m,p}$ le polynôme intervenant dans la formule (103). Alors, il existe un nombre positif M tel que

$$|Q_{m,p}(x)| \leq M\,(1+\|x\|)^m, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et, si on pose

$$M' = \sup_{x \in B(x_0,\varepsilon)} \exp(x_1+\ldots+x_n),$$

on voit que, pour tout y appartenant à y_0+C on a

$$\sup_{x \in B(x_0,\varepsilon)} |\partial_p T_m(x-y)| \leq MM'\Big[\sup_{x \in B(x_0,\varepsilon)} (1+\|x-y\|)^m\Big]\exp-(y_1+\ldots+y_n)$$

$$\leq MM'(1+\varepsilon+\|x_0\|+\|y\|)^m \exp-(y_1+\ldots+y_n),$$

d'où notre assertion.

Soit p un élément de $S(E)$; alors $\partial_p(T_m * \varphi)$ est une distribution sur Γ_0 que nous allons évaluer. Soit donc ψ un élément de $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ et calculons

$$\langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi\rangle = \langle T_m * \varphi, \partial_{p^\#}\psi\rangle$$

$$= \int_{\Gamma_0} \Big\{\int_E T_m(x-y)\,\varphi_{\Gamma_0}(y)\,dy\Big\}\partial_{p^\#}\psi(x)\,dx.$$

Il existe y_0 appartenant à Γ_0 tel que, Suppψ, le support de ψ, soit contenu dans $y_0 + \Gamma_0$. En effet, comme Suppψ est un compact, et que l'ensemble des $x + \Gamma_0$, x parcourant Γ_0, constitue un recouvrement ouvert de Γ_0, il existe des éléments de Γ_0 en nombre fini, $x_1, \ldots, x_p$, tels que

$$\mathrm{Supp}\psi \subset \bigcup_{j=1}^{p} (x_j + \Gamma_0),$$

et on se ramène à montrer qu'il existe y_0 appartenant à Γ_0 tel que, pour $1 \leq j \leq p$, x_j soit un élément de $y_0 + \Gamma_0$. Cependant, l'intersection des $(x_j - \Gamma_0)$, pour $1 \leq j \leq p$, est un voisinage ouvert de 0 et, par suite, son intersection avec Γ_0 est non vide : il suffit de prendre y_0 dans cette dernière. Dans ces conditions, on a

$$(106) \quad \int_{\Gamma_0 \times E} |T_m(x-y)\, \varphi_{\Gamma_0}(y)\, \partial_{p^\#}\psi(x)|\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathrm{Supp}\psi \,\times\, (y_0+\Gamma_0)} |T_m(x-y)\, \varphi(y)\, \partial_{p^\#}\psi(x)|\, dx\, dy$$

$$\leq \| \partial_{p^\#}\psi \|_\infty \,\mathrm{vol}(\mathrm{Supp}\psi)\, \| T_m \|_{\tau'} \left\{ \int_{y_0+\Gamma_0} |\varphi(y)|^\tau\, dy \right\}^{1/\tau} < +\infty,$$

et, par suite, il vient

$$\langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi \rangle = \int_E \left\{ \int_{\Gamma_0} T_m(x-y)\, \partial_{p^\#}\psi(x)\, dx \right\} \varphi_{\Gamma_0}(y)\, dy$$

$$= \int_{\Gamma_0} T_m{}^\# * \partial_{p^\#}\psi(y)\, \varphi(y)\, dy,$$

la dernière intégrale étant absolument convergente, et le produit de convolution, $T_m{}^\# * \partial_{p^\#}\psi$ étant le produit de convolution usuel de la distribution $T_m{}^\#$, élément de $\mathcal{D}'(E)$, par la fonction $\partial_{p^\#}\psi$, élément du sous-espace $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ de $\mathcal{D}(E)$. On sait, alors, que l'on a

$$T_m{}^\# * \partial_{p^\#}\psi = (\partial_p T_m)^\# * \psi,$$

si bien que l'on peut écrire

$$(107) \qquad \langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi\rangle = \int_{\Gamma_0} (\partial_p T_m)^{\#} * \psi(y)\, \varphi(y)\, dy.$$

En particulier si $p = D^k$, avec $0 \le k \le m$, on obtient

$$(108) \qquad \langle D^k(T_m * \varphi), \psi\rangle = \int_{\Gamma_0} T_{m-k}{}^{\#} * \psi(y)\, \varphi(y)\, dy,$$

et, grâce à nouveau à (107), il vient, pour $0 \le k \le m-1$,

$$\langle D^k(T_m * \varphi), \psi\rangle = \langle T_{m-k} * \varphi, \psi\rangle,$$

c'est-à-dire que l'on a l'égalité des distributions

$$(109) \qquad D^k(T_m * \varphi) = T_{m-k} * \varphi, \quad 0 \le k \le m-1.$$

Tandis que, lorsque $k=m$, la formule (108) donne directement l'égalité des distributions

$$(110) \qquad D^m(T_m * \varphi) = \varphi_{|\Gamma_0}.$$

D'autre part, si p appartient à $\mathcal{S}$ et ψ à $\mathcal{D}(\Gamma_0)$, on a

$$(111) \qquad \langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi\rangle = \int_{\Gamma_0} \left\{ \int_E T_m(y)\, \varphi_{\Gamma_0}(x-y) dy \right\} \partial_{p^{\#}}\psi(x)\, dx.$$

Mais on a aussi

$$\int_{\Gamma_0 \times E} |T_m(y)\, \varphi_{\Gamma_0}(x-y)\, \partial_{p^{\#}}\psi(x)|\, dx\, dy = \int_{\Gamma_0 \times E} |T_m(x-y)\, \varphi_{\Gamma_0}(y)\, \partial_{p^{\#}}\psi(x)|\, dx\, dy$$

si bien que, d'après (106), on peut permuter les intégrations successives dans (111) pour obtenir

$$\langle \partial_p(T_m * \phi), \psi\rangle = \int_E \left\{ \int_{\Gamma_0} \varphi_{\Gamma_0}(x-y)\, \partial_{p^{\#}}\psi(x)\, dx \right\} T_m(y)\, dy$$

$$= \int_{-C} \left\{ \int_{\Gamma_0} \varphi(x-y)\, \partial_{p\#}\psi(x)\, dx \right\} T_m(y)\, dy,$$

et, finalement,

$$(112) \qquad \langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi\rangle = \int_{-C} \left\{ \int_{\Gamma_0} \partial_p\varphi(x-y)\, \psi(x) dx \right\} T_m(y)\, dy.$$

Comme $\partial_p\varphi$ appartient à $L^{\tau}_S(\Gamma, |\pi| dx)$, on peut appliquer (112) en prenant $p = 1$ et en remplaçant φ par $\partial_p\varphi$, ce qui donne

$$\langle T_m * \partial_p\varphi, \psi\rangle = \langle \partial_p(T_m * \varphi), \psi\rangle.$$

Ainsi, nous avons obtenu l'égalité entre distributions

$$\text{(113)} \qquad \partial_p(T_m * \varphi) = T_m * \partial_p\varphi, \qquad \forall p\in S.$$

Maintenant, soient p appartenant à $S(E)$, et k l'entier $d^\circ p + 2$. Comme $S(E)$ est un S-module de type fini, il existe un entier m plus grand que 1, et des éléments de S, $p_1, \dots, p_m$, tels que

$$D^{km} = \sum_{j=1}^{m} D^{k(m-j)} \partial_{p_j}.$$

En appliquant cette égalité entre opérateurs différentiels à la distribution $T_{km} * \varphi$, et en tenant compte des relations (110) d'une part, et (109) et (113) d'autre part, on obtient l'égalité entre distributions

$$\varphi_{|\Gamma_0} = \sum_{j=1}^{m} T_{kj} * \partial_{p_j}\varphi.$$

Cependant $\varphi_{|\Gamma_0}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Γ_0, tandis que, pour $1\le j\le m$, $T_{kj} * \partial_{p_j}\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{kj-2}$ sur Γ_0, et on a, d'après (105),

$$\partial_p(T_{kj} * \partial_{p_j}\varphi) = (\partial_p T_{kj}) * \partial_{p_j}\varphi .$$

On obtient alors, pour tout x élément de Γ_0, l'égalité

$$\text{(114)} \qquad \partial_p\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \partial_p T_{kj} * \partial_{p_j}\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{x+C} \partial_p T_{kj}(x-y)\, \partial_{p_j}\varphi(y)\, dy.$$

Alors, on utilise (114) pour obtenir la majoration

$$|\partial_p\varphi(x)| \le \sum_{j=1}^{m} \|\partial_p T_{kj}\|_{\tau'} \left\{\int_{x+C} |\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau\, dy\right\}^{1/\tau}, \quad \forall x\in\Gamma_0.$$

Cependant, compte tenu de l'inégalité (104), on a pour $1\le j\le m$,

$$\left\{\int_{x+C} |\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau dy\right\}^{1/\tau} \le |\pi(x)|^{-1/\tau} \left\{\int_{x+C} |\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau\, |\pi(y)|\, dy\right\}^{1/\tau}$$

$$\le |\pi(x)|^{-1/\tau}\, \nu^\pi_{p_j}(\varphi),$$

et, par suite, il vient

$$|\partial_p\varphi(x)| \le |\pi(x)|^{-1/\tau} \sum_{j=1}^{m} \|\partial_p T_{kj}\|_{\tau'}\, \nu^\pi_{p_j}(\varphi), \quad \forall x\in\Gamma_0.$$

Comme Γ'_{π_1} possède un nombre fini de composantes connexes, on voit que pour tout élément p de $S(E)$, il existe une semi-norme continue, η_p, sur $L^1_S(\Gamma, |\pi| dx)$ telle que, pour tout x appartenant à Γ'_{π_1}, on ait

$$(115) \qquad |\partial_p \varphi(x)| \leq |\pi(x)|^{-1/\tau}\, \eta_p(\varphi).$$

Pour déduire le point *(i)* de la majoration (115), nous devons d'abord rappeler un résultat établi dans [Va] Part I Appendix Lemma 5 .

Lemme 23. *Soit* γ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'intervalle* $]0,1]$ *telle qu'il existe un entier positif ou nul,* q, *et des constantes,* L_m, $m \in \mathbb{N}$, *tels que*

$$|\gamma^{(m)}(t)| \leq L_m\, t^{-q}, \quad \forall t \in\ ]0,1], \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Alors, on a la majoration

$$|\gamma^{(m)}(t)| \leq 2^q\, (L_m + \ldots + L_{m+q+1}), \quad \forall t \in\ ]0,1], \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Revenons à la démonstration du théorème, et pour cela soit Γ_0 une composante connexe de Γ'_{π_1}, et x_0 un élément fixé de Γ_0. Pour x appartenant à Γ_0 et p à $S(E)$, soit $\varphi_{p,x}$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\varphi_{p,x}(t) = \partial_p \varphi(x + t x_0), \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors, pour tout m appartenant à $\mathbb{N}$, on a

$$\varphi^{(m)}_{p,x}(t) = \partial_{x_0^m p}\, \varphi(x + t x_0), \quad \forall t \in [0,1],$$

si bien que, compte tenu de (115) et (104), on a la majoration

$$|\varphi^{(m)}_{p,x}(t)| \leq |\pi(x + t x_0)|^{-1/\tau}\, \eta_{x_0^m p}(\varphi) \leq |\pi(t x_0)|^{-1/\tau}\, \eta_{x_0^m p}(\varphi), \quad \forall t \in\ ]0,1].$$

Si on désigne par q' le degré du polynôme π, on obtient alors

$$|\varphi^{(m)}_{p,x}(t)| \leq |\pi(x_0)|^{-1/\tau}\, \eta_{x_0^m p}(\varphi)\, t^{-q'/\tau}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in\ ]0,1],$$

si bien que l'on peut appliquer le lemme (23) à la fonction $\varphi_{p,x}$ pour obtenir

$$|\partial_p \varphi(x)| = |\varphi_{p,x}(0)| \leq 2^q |\pi(x_0)|^{-1/\tau}\, (\eta_p(\varphi) + \ldots + \eta_{x_0^{q+1} p}(\varphi)),$$

avec q un entier naturel supérieur ou égal à q'/τ. Nous voyons donc, qu'étant donné un élément p de $S(E)$, on peut trouver une semi-norme continue sur $L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx)$, que nous noterons η'_p , telle que l'on ait

$$|\partial_p\varphi(x)| \le \eta'_p(\varphi), \quad \forall\varphi\in L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx), \quad \forall x\in\Gamma'_{\pi_1}.$$

Comme Γ'_{π_1} est partout dense dans Γ, on obtient alors la majoration

$$\nu^\infty_p(\varphi) \le \eta'_p(\varphi), \quad \forall\varphi\in L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx),$$

ce qui achève de démontrer l'assertion (*i*) du théorème.

Pour montrer l'assertion (*ii*), considérons une suite de Cauchy dans $L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx)$, que nous appellerons φ_k , $k\in\mathbb{N}$. Alors, il résulte de (*i*), que la suite φ_k est une suite de Cauchy dans $L^\infty_\infty(\Gamma)$. Soit φ la limite de la suite φ_k dans ce dernier espace. Il est immédiat de voir que φ appartient à $L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx)$, et que φ est la limite, dans cet espace, de la suite φ_k , $k\in\mathbb{N}$. D'où notre assertion.

Soient à nouveau Γ_0 une composante connexe de Γ'_{π_1} , φ appartenant à $L^\tau_S(\Gamma,|\pi|dx)$ et p à $S(E)$. En utilisant (104) et (114) on obtient la majoration suivante, valable pour tout élément x de Γ_0

$$|\partial_p\varphi(x)|\,|\pi(x)|^{1/\tau} \le \sum_{j=1}^m \int_{x+C} |\partial_p T_{kj}(x-y)\ \partial_{p_j}\varphi(y)|\,|\pi(y)|^{1/\tau}dy.$$

Utilisant alors l'inégalité de Hölder, on trouve pour $1\le j\le m$, et x appartenant à Γ_0

$$\int_{x+C} |\partial_p T_{kj}(x-y)\partial_{p_j}\varphi(y)|\,|\pi(y)|^{1/\tau}dy$$

$$\le \|\partial_p T_{kj}\|_1^{1-1/\tau} \left\{\int_{x+C} |\partial_p T_{kj}(x-y)|\,|\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau |\pi(y)|dy\right\}^{1/\tau},$$

et, par suite, comme pour tout x appartenant à Γ_0, $x+C$ est inclus dans Γ_0, il vient, dans les mêmes conditions pour x,

$$|\partial_p\varphi(x)|\,|\pi(x)|^{1/\tau} \le \sum_{j=1}^m \|\partial_p T_{kj}\|_1^{1-1/\tau} \left\{\int_{\Gamma_0} |\partial_p T_{kj}(x-y)|\,|\partial_p\varphi(y)|^\tau |\pi(y)|dy\right\}^{1/\tau}.$$

Appliquant alors l'inégalité de Minkowski au membre de droite de cette inégalité, qui comme fonction de x est clairement mesurable et positive, on a

$$\left\{\int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)|^\tau |\pi(x)|dx\right\}^{1/\tau} \le \sum_{j=1}^{m} \|\partial_p T_{kj}\|_1^{1-1/\tau}$$

$$\times \left\{\int_{\Gamma_0\times\Gamma_0} |\partial_p T_{kj}(x-y)|\,|\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau |\pi(y)|dx\,dy\right\}^{1/\tau}.$$

Cependant le calcul montre que, pour $1\le j\le m$,

$$\int_{\Gamma_0\times\Gamma_0} |\partial_p T_{kj}(x-y)|\,|\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau |\pi(y)|dx\,dy$$

$$= \| \partial_p T_{kj} \|_1 \int_{\Gamma_0} |\partial_{p_j}\varphi(y)|^\tau |\pi(y)|dy \le \|\partial_p T_{kj}\|_1 \left\{\nu^\pi_{p_j}(\varphi)\right\}^\tau,$$

d'où il résulte que l'on a

$$\left\{\int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)|^\tau |\pi(x)|dx\right\}^{1/\tau} \le \sum_{j=1}^{m} \|\partial_p T_{kj}\|_1\, \nu^\pi_{p_j}(\varphi).$$

Comme d'une part, $\Gamma-\Gamma'_{\pi_1}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, et d'autre part, Γ'_{π_1} n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, il est maintenant clair qu'il existe une semi-norme, η''_p, continue sur $L^\tau_S(\Gamma, |\pi|dx)$, et telle que, pour tout φ, élément de $L^\tau_S(\Gamma, |\pi|dx)$, on ait

$$\left\{\int_{\Gamma} |\partial_p\varphi(x)|^\tau |\pi(x)|dx\right\}^{1/\tau} \le \eta''_p(\varphi).$$

Mais il est manifeste que $L^\tau_\infty(\Gamma, |\pi|dx)$ est contenu dans $L^\tau_S(\Gamma, |\pi|dx)$, l'inclusion étant continue. Nous avons donc démontré le théorème 2. Q.E.D.

Maintenant, soit Y un espace mesurable muni d'une mesure σ-finie, μ. On a alors le

Corollaire. *L'espace* $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$ *est un espace de Frèchet. De plus les espaces* $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$ *et* $L^1_\infty(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$ *sont égaux, et la topologie du dernier d'entre eux est, en fait, définie par les semi-normes* ν^π_p, p *parcourant* S.

Démonstration. Comme toute base de S est dénombrable, pour toute fonction φ appartenant à $L^1_S(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$, on peut trouver un sous-ensemble μ-négligeable, N_φ , de Y, tel que, pour tout y élément de $Y-N_\varphi$, φ_y appartienne à $L^1_S(\Gamma,|\pi|dx)$. Il est alors clair que, pour tout p élément de $S(E)$, on a

$$(116)\quad \int_{\Gamma\times Y}|\partial_p\varphi(x,y)|\,|\pi(x)|dx\ d\mu(y) = \int_Y \nu_p^\pi(\varphi_y)\ d\mu(y),\quad \forall\varphi\in L^1_S(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu).$$

La deuxième assertion du corollaire est une conséquence immédiate de cette remarque et du point (*iii*) du théorème.

Pour montrer la première assertion du corollaire, on peut donc supposer que S est égal à $S(E)$. Soit donc φ_k , $k\in\mathbb{N}$, une suite de Cauchy de $L^1_\infty(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$. Pour tout p élément de $S(E)$, il existe une fonction, φ^p, dans $L^1(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$, telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\|\partial_p\varphi_k - \varphi^p\|_{1,\pi} = 0.$$

On montre alors par récurrence, que pour tout entier naturel s, il existe un ensemble μ-négligeable N_s inclus dans Y, et une suite strictement croissante d'entiers naturels,

$$k_{s,0}\ ,\ k_{s,1}\ ,\dots,\ k_{s,l}\ ,\dots$$

tels que

(*i*) $N_s\subset N_{s+1}$

(*ii*) $(k_{s+1,l})_{l\in\mathbb{N}}$ soit une suite extraite de la suite $(k_{s,l})_{l\in\mathbb{N}}$

(*iii*) pour tout élément y, de $Y-N_s$, et tout entier naturel k, $\varphi_{k,y}$ appartienne à $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$ et pour tout élément p de $S(E)$ de degré au plus s, on ait

$$\lim_{l\to+\infty}\|\partial_p\varphi_{k_{s,l},y} - \varphi^p_y\|_{1,\pi} = 0.$$

Posons alors

$$N = \bigcup_{s=0}^{+\infty} N_s\ ;$$

c'est une partie μ-négligeable de y, et il est aisé de voir que pour tout y appartenant à $Y-N$, la suite $\varphi_{k_{s,s},y}$, $s\in\mathbb{N}$, est une suite de Cauchy dans $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$; désignons par φ_y la limite de cette dernière. Alors la fonction φ, définie sur $\Gamma\times Y$ par

$$\varphi(x,y) = \varphi_y(x), \quad \forall x\in\Gamma, \quad \forall y\in Y-N,$$

$$\varphi(x,y) = 0, \quad \forall x\in\Gamma, \quad \forall y\in N,$$

est une fonction mesurable telle que, pour tout y appartenant à Y, φ_y soit de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, pour tout élément y de $Y-N$, et p de $S(E)$, on a, dans $L^1(\Gamma,|\pi|dx)$,

$$\partial_p\varphi_y = \varphi_y^p .$$

On a alors, pour tout entier naturel s et tout élément p de $S(E)$,

$$\int_{\Gamma\times Y}|\partial_p\varphi_{k_{s,s}}(x,y) - \partial_p\varphi(x,y)|\,|\pi(x)|dx\, d\mu(y)$$

$$= \int_{\Gamma\times Y}|\partial_p\varphi_{k_{s,s}}(x,y) - \varphi^p(x,y)|\,|\pi(x)|dx\, d\mu(y) ;$$

ce qui montre d'une part que φ appartient à $L^1(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$, et d'autre part que la suite $\varphi_{k_{s,s}}$, $s\in\mathbb{N}$, converge vers la fonction φ dans $L^1_\infty(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$. Il est alors clair que φ est la limite, dans $L^1_\infty(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$, de la suite φ_k, $k\in\mathbb{N}$. Q.E.D.

Maintenant soit π' un diviseur de π dans $S(E^*_{\mathbb{C}})$. Alors sous les hypothèses habituelles on a la

Proposition 5. *L'espace* $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$ *est contenu dans l'espace* $L^1_\infty(\Gamma,|\pi'|dx)$, *et l'injection est continue.*

Démonstration. Comme π est un produit de formes linéaires, on se ramène immédiatement au cas où il existe un élément non nul, α, de $E^*_{\mathbb{C}}$ tel que

$$\pi = \pi'\alpha.$$

On peut même supposer que $\mathrm{Re}\alpha$ est non nul et, dans ces conditions, puisque pour tout élément x de E on a

$$|\alpha(x)| \geq |\mathrm{Re}\alpha(x)|,$$

on peut remplacer π par $\pi'\mathrm{Re}\alpha$. Autrement dit, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où il existe α élément non nul de E^*, tel que

$$\pi = \pi'\alpha.$$

Soit Γ_0 une composante connexe de Γ'_{π_1}, et soit $e_1,\dots,e_n$ une base univolumique de E constituée d'éléments de Γ_0. On peut supposer, quitte à la multiplier par un scalaire non nul, que la forme linéaire α prend la valeur 1 au point e_1. Par suite, pour tout x élément de Γ_0, $\alpha(x)$ est un nombre strictement positif.

Nous noterons H l'hyperplan de E, noyau de α, que nous munirons de l'unique mesure de Lebesgue $d_H x$ telle que, pour toute fonction φ dans $L^1(E, dx)$, on ait

$$\int_E \varphi(x)dx = \int_{H\times\mathbb{R}} \varphi(x+te_1)\, d_H x\, dt.$$

Pour tout réel strictement positif t, nous noterons Γ_t l'ensemble des éléments x, de H tels que $x+te_1$ appartienne à Γ_0. Alors, pour toute fonction φ dans $L^1(\Gamma_0,dx)$, on a

$$\int_{\Gamma_0} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty}\left\{\int_{\Gamma_t} \varphi(x+te_1)d_H x\right\} dt.$$

Maintenant soit φ un élément de $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$. Alors on a, pour tout élément p de $S(E)$,

$$\int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)|\,|\pi(x)|dx = \int_0^{+\infty} \left\{\int_{\Gamma_t} |\partial_p\varphi(x+te_1)|\,|\pi'(x+te_1)|d_H x\right\}t\, dt,$$

si bien que la fonction ψ_p, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$(117)\qquad \psi_p(t) = \int_{\Gamma_t} |\partial_p\varphi(x+te_1)|\,|\pi'(x+te_1)|d_H x,$$

est intégrable pour la mesure $t\,dt$. De plus on a

$$(118)\qquad \int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)|\,|\pi(x)|dx = \int_0^{+\infty} \psi_p(t)t\, dt,$$

et aussi

$$(119)\qquad \int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)|\,|\pi'(x)|dx = \int_0^{+\infty} \psi_p(t)dt.$$

De plus comme, pour tout x appartenant à Γ_0 et tout p élément de $S(E)$, la fonction $\partial_p\varphi$ est intégrable sur le cône convexe $x+C$, on peut écrire

$$\partial_p\varphi(x) = (-1)^n \int_C \partial_{pe_1\ldots e_n}\varphi(x+y)dy, \quad \forall x\in\Gamma_0, \quad \forall p\in S(E).$$

Il résulte de là que, si x appartient à Γ_0 et p à $S(E)$, la fonction $\varphi_{p,x}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi_{p,x}(t) = (-1)^n\int_0^{+\infty}\ldots\int_0^{+\infty}\partial_{pe_1\ldots e_n}\varphi(x+te_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n)dy_2\ldots dy_n ,$$

est Lebesgue-intégrable, et qu'elle satisfait à la relation

$$\partial_p\varphi(x+te_1) = \int_0^{+\infty} \varphi_{p,x}(t+\tau)d\tau, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Nous voyons donc que, pour x élément de Γ_0 et p de $S(E)$, la fonction

$$t \longrightarrow \partial_{pe_1}\varphi(x+te_1),$$

qui n'est autre que la dérivée de la fonction

$$t \longrightarrow \partial_p\varphi(x+te_1),$$

est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$ et que

$$(120) \qquad \partial_p\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \partial_{pe_1}\varphi(x+\tau e_1)d\tau.$$

En reportant cette dernière relation dans la formule (117) on obtient, p étant un élément fixé de $S(E)$,

$$\psi_p(t) \le \int_0^{+\infty}\left\{\int_{\Gamma_t}|\partial_{pe_1}\varphi(x+(t+\tau)e_1)|\,|\pi'(x+te_1)|\,d_Hx\right\}d\tau, \quad \forall t>0.$$

Comme il est clair que l'inégalité (104) est encore vraie avec π' à la place de π, on a

$$\psi_p(t) \le \int_0^{+\infty}\left\{\int_{\Gamma_t}|\partial_{pe_1}\varphi(x+(t+\tau)e_1)|\,|\pi'(x+(t+\tau)e_1)|\,d_Hx\right\}d\tau, \quad \forall t>0.$$

Enfin Γ_0 étant convexe, pour tout paire t et τ de réels strictement positifs, Γ_t est inclus dans $\Gamma_{t+\tau}$ et, par suite, on peut majorer le second membre de l'inégalité ci-dessus pour obtenir

$$(121) \qquad \psi_p(t) \le \int_t^{+\infty}\psi_{pe_1}(\tau)d\tau, \quad \forall t>0.$$

De cette dernière relation et de l'égalité (118), on tire

$$t\,\psi_p(t) \le \int_t^{+\infty}\psi_{pe_1}(\tau)\tau\, d\tau \le \int_{\Gamma_0}|\partial_{pe_1}\varphi(x)|\,|\pi(x)|dx, \quad \forall t>0,$$

ou, si l'on préfère,

$$(122) \qquad \psi_p(t) \leq \nu^{\pi}_{pe_1}(\varphi)\, t^{-1}, \quad \forall t>0.$$

Utilisant (121) et (122) on obtient, pour $0\leq t\leq 1$,

$$\psi_p(t) \leq \int_t^{+\infty} \psi_{pe_1}(\tau)d\tau = \int_t^1 \psi_{pe_1}(\tau)d\tau + \int_1^{+\infty} \psi_{pe_1}(\tau)d\tau$$

$$\leq \nu^{\pi}_{pe_1^2}(\varphi) \int_t^1 \tau^{-1}d\tau + \int_0^{+\infty} \tau\, \psi_{pe_1}(\tau)\, d\tau$$

soit finalement, en tenant compte de (118),

$$\psi_p(t) \leq -\nu^{\pi}_{pe_1^2}(\varphi)\, \mathrm{Log}t + \nu^{\pi}_{pe_1}(\varphi).$$

Utilisant alors la relation (119), on trouve

$$\int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)\ \pi'(x)|\,dx \leq -\nu^{\pi}_{pe_1^2}(\varphi) \int_0^1 \mathrm{Log}t\ dt + \nu^{\pi}_{pe_1}(\varphi) + \int_1^{+\infty} \psi_p(t)dt$$

et, enfin

$$\int_{\Gamma_0} |\partial_p\varphi(x)\ \pi'(x)|\,dx \leq \nu^{\pi}_{pe_1^2}(\varphi) + \nu^{\pi}_{pe_1}(\varphi) + \nu^{\pi}_p(\varphi).$$

Alors la proposition 5 est conséquence de cette égalité et de ce que, d'une part $\Gamma-\Gamma'_{\pi_1}$ est Lebesgue-négligeable et, d'autre part Γ'_{π_1} a un nombre fini de composantes connexes. Q.E.D.

Soit à nouveau (Y,μ) un espace mesuré σ-fini. En utilisant la relation (116), on démontre le

Corollaire 1. *L'espace* $L^1_\infty(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$ *est contenu dans l'espace* $L^1_\infty(\Gamma\times Y, |\pi'|dxd\mu)$, *l'injection étant continue.*

Si W est un ouvert de E contenant Γ et contenu dans $\overline{\Gamma}$, on notera $L^1_\infty(\Gamma,W)$ l'espace des fonctions continues sur W et dont la restriction à Γ est un élément de $L^1_\infty(\Gamma,dx)$. Si p est un élément de $S(E)$, on pose pour toute fonction φ dans $L^1_\infty(\Gamma,W)$,

$$\nu_p(\varphi) = \int_\Gamma |\partial_p\varphi(x)|\,dx = \nu^1_p(\varphi|_\Gamma).$$

Il résulte du théorème 2 (i) et du fait que Γ est partout dense dans W que $L^1_\infty(\Gamma,W)$ est un espace de Frèchet.

Soit $V(\pi)$ l'ensemble des zéros du polynôme π dans E ; c'est une réunion d'un nombre fini de sous-espaces propres de codimension au plus deux de E. Nous noterons Γ^π l'intérieur de $\Gamma \cup V(\pi)$. Comme $V(\pi)$ est d'intérieur vide, on a

$$\Gamma \subset \Gamma^\pi \subset \bar{\Gamma} .$$

Corollaire 2. *Si* φ *appartient à* $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$ *, la fonction* $\pi\varphi$ *se prolonge de manière unique en une fonction continue définie sur* Γ^π*, encore notée* $\pi\varphi$ *; cette fonction est nulle sur* $\Gamma^\pi - \Gamma$*, et de plus elle appartient à l'espace* $L^1(\Gamma, \Gamma^\pi)$*. Enfin l'application*

$$\varphi \longrightarrow \pi\varphi$$

est une injection continue de $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$ *dans* $L^1_\infty(\Gamma, \Gamma^\pi)$.

Démonstration. Soit φ appartenant à $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$; l'unicité du prolongement résulte de ce que Γ est partout dense dans Γ^π. Comme, d'après le théorème 2 (*i*), la fonction φ est bornée sur Γ, l'existence du prolongement est clair.

Maintenant, si p est un élément de $S(E)$, il existe des éléments $p_1, \dots, p_k$, dans $S(E)$, et des diviseurs $\pi_1, \dots, \pi_k$, de π, en nombre fini, tels que

$$\partial_p \circ \pi = \sum_{l=1}^{k} \pi_l \circ \partial_{p_l} .$$

On a alors, pour tout φ appartenant à $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$,

$$\nu_p(\varphi) \le \sum_{l=1}^{k} \int_\Gamma |\partial_{p_l} \varphi(x)| \, |\pi_l(x)| dx.$$

Le corollaire est alors une conséquence immèdiate de la proposition 5. Q.E.D.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le :

Théorème 3. *Soit* φ *un élément de* $L^1_\infty(\Gamma \times Y, |\pi| dx d\mu)$*. Pour tout* x *appartenant à* Γ*, l'intégrale*

$$(123) \qquad \int_Y \varphi(x,y) \, d\mu(y),$$

est absolument convergente. Si on définit la fonction F_φ *sur* Γ *par*

$$(124)\qquad F_\varphi(x) = \int_Y \varphi(x,y)\, d\mu(y),$$

alors F_φ *appartient à* $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$ *et, pour tout élément* p *de* $S(E)$ *on a*

$$(125)\qquad \partial_p F_\varphi = F_{\partial_p \varphi}.$$

De plus l'application

$$\varphi \longrightarrow F_\varphi$$

est un morphisme continu de $L^1_\infty(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$ *dans* $L^1_\infty(\Gamma,|\pi|dx)$.

Démonstration. Soit φ appartenant à $L^1_\infty(\Gamma\times Y,|\pi|dxd\mu)$, et x à Γ. Alors il existe une base $e_1,\dots,e_n$ de E telle que, pour tout z dans un voisinage W de x, $z+C$ soit contenu dans Γ. En effet, considérons W un voisinage convexe de x contenu dans Γ, et soit $\Gamma(W)$ le cône de E engendré par W ;il suffit alors de choisir $e_1,\dots,e_n$ dans $\Gamma(W)$.

Maintenant, d'après le coroiiaire 1 de la proposition 5, on sait que φ appartient à $L^1_\infty(\Gamma\times Y,dxd\mu)$. Par suite, il existe une partie μ-négligeable, N_φ, de Y telle que, pour tout y appartenant à $Y-N_\varphi$, φ_y appartienne à $L^1_\infty(\Gamma,dx)$. Alors si y appartient à $Y-N_\varphi$ et z à W, on a, l'intégrale étant absolument convergente,

$$(126)\qquad \varphi(z,y) = (-1)^n \int_C \partial_{e_1\dots e_n}\varphi(z+t,y)dt.$$

Il vient alors

$$\int_Y |\varphi(z,y)|\, d\mu(y) \le \int_{C\times Y} |\partial_{e_1\dots e_n}\varphi(z+t,y)|dt\, d\mu(y)$$

$$\le \int_{\Gamma\times Y} |\partial_{e_1\dots e_n}\varphi(z,y)|dz\, d\mu(y),$$

ce qui montre que l'intégrale (122) est bien absolument convergente.

Il est clair que F_φ appartient à $L^1(\Gamma,dx)$, et à ce titre, F_φ définit une distribution sur l'ouvert Γ de E. Nous allons, pour un élément donné p, de $S(E)$ évaluer la distribution $\partial_p F_\varphi$. Soit donc ψ appartenant à $\mathcal{D}(\Gamma)$, et calculons

$$\langle \partial_p F_\varphi , \psi\rangle = \int_\Gamma \partial_{p^\#}\psi(x) F_\varphi(x)dx = \int_\Gamma \left\{\int_Y \varphi(x,y)d\mu(y)\right\}\partial_{p^\#}\psi(x)\, dx$$

$$= \int_Y \left\{\int_\Gamma \varphi(x,y)\partial_{p^\#}\psi(x)dx\right\}d\mu(y).$$

Mais, si y appartient à $Y-N_\varphi$, on a

$$\int_\Gamma \varphi(x,y)\partial_{p^\#}\psi(x)dx = \int_\Gamma \partial_p\varphi(x,y)\psi(x)dx,$$

et par suite, il vient

$$\langle \partial_p F_\varphi , \psi\rangle = \int_Y \int_\Gamma \partial_p\varphi(x,y)\psi(x)dx\, d\mu(y) = \langle F_{\partial_p\varphi} , \psi\rangle.$$

Ainsi nous avons montré l'égalité (125) au sens distribution. Pour montrer que F_φ est de classe $\mathcal{E}^\infty$ et que cette égalité est vraie au sens des fonctions $\mathcal{E}^\infty$, il nous suffit de montrer que, pour toute fonction φ appartenant à $L^1_\infty(\Gamma\times Y, |\pi|dxd\mu)$, F_φ est continue. Considérons alors x un élément de Γ, ainsi qu'un voisinage W de x et une base $e_1 ,\dots, e_n$ de E, comme ci-dessus. Utilisant la formule (126) on obtient, pour tout z élément de W,

$$F_\varphi(z) - F_\varphi(x) = (-1)^n \left\{\int_{(z+C)\times Y} \partial_{e_1\dots e_n}\varphi(t,y)\, dt\, d\mu(y) - \int_{(x+C)\times Y} \partial_{e_1\dots e_n}\varphi(t,y)dt\, d\mu(y)\right\},$$

et si, pour A et B deux ensembles, on note $A\Delta B$ leur différence symétrique, on a

$$|F_\varphi(z) - F_\varphi(x)| \le \int_{[(z+C)\Delta(x+C)]\times Y} |\partial_{e_1\dots e_n}\varphi(t,y)|dt\, d\mu(y) ;$$

relation que nous préférons écrire sous la forme

$$|F_\varphi(z) - F_\varphi(x)| \le \int_{\Gamma\times Y} \chi_{[(z+C)\Delta(x+C)]}(t)|\partial_{e_1\dots e_n}\varphi(t,y)|dt\, d\mu(y),$$

où, si A est un ensemble, χ_A désigne sa fonction caractéristique.

Lorsque z tend vers x dans W, la fonction $\chi_{[(z+C)\Delta(x+C)]}$ converge simplement vers 0, et le théorème de convergence dominée montre que l'intégrale à droite du signe "$\le$" tend vers zéro. Ainsi F_φ est bien une fonction continue. De plus il est clair que F_φ appartient à $L^1_\infty(\Gamma, |\pi|dx)$.

Le dernier point du théorème est une conséquence immédiate du premier. Q.E.D.

Considérons à nouveau la décomposition en facteurs premiers

$$\pi = \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_l^{n_l},$$

avec pour $1 \leq j \leq l$, α_j élément de $E_{\mathbb{C}}^*$ et n_j entier strictement positif, et désignons par Δ l'ensemble dont les éléments sont $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, et par Δ_c le sous-ensemble de Δ constitué des éléments qui sont totalement complexes, *i.e.* qui ne sont pas proportionnels à un élément de E^*. Posons alors

$$\pi_{\mathbb{C}} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq l \\ \alpha_i \in \Delta_c}} \alpha_i^{n_i},$$

$$\pi_{\mathbb{R}} = \pi / \pi_{\mathbb{C}} .$$

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 2 (*i*), et de [Va] Lemma 21, Part I, §3.

Lemme 24. *Soit* φ *un élément de* $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$. *Alors, pour tout* p *appartenant à* $S(E)$ *et toute composante connexe* Γ_0 *de* Γ, $\partial_p \varphi$ *se prolonge continuement à* $\bar{\Gamma}_0 \cap \Gamma^\pi$. *De plus* φ *se prolonge de manière unique en une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\Gamma^{\pi_{\mathbb{C}}}$ *élément de* $L^1_\infty(\Gamma^{\pi_{\mathbb{C}}}, |\pi| dx)$. *Enfin l'application qui, à* φ *appartenant à* $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$, *fait correspondre son prolongement* $\mathscr{C}^\infty$ *à* $\Gamma^{\pi_{\mathbb{C}}}$, *encore noté* φ, *est un isomorphisme d'espaces de Frèchet de* $L^1_\infty(\Gamma, |\pi| dx)$ *sur* $L^1_\infty(\Gamma^{\pi_{\mathbb{C}}}, |\pi| dx)$.

Remarque. Lorsqu'on prend $\Gamma = E'_{\pi_1}$, on a $\Gamma^{\pi_{\mathbb{C}}} = E'_{\pi_{\mathbb{R}}}$, si bien que tout élément φ de $L^1_\infty(E'_\pi, |\pi| dx)$ se prolonge en un élément, encore noté φ, de $L^1_\infty(E'_{\pi_{\mathbb{R}}}, |\pi| dx)$, tandis que l'application, qui à φ fait correspondre ce prolongement, permet d'identifier naturellement les espaces de Frèchet $L^1_\infty(E'_\pi, |\pi| dx)$ et $L^1_\infty(E'_{\pi_{\mathbb{R}}}, |\pi| dx)$.

Maintenant nous allons établir un résultat permettant d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à une classe suffisamment large de fonctions.

Nous supposerons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique, au moyen duquel on l'identifie à son dual. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne correspondante, et dx la mesure de Lebesgue canonique sur $\mathbb{R}^n$. Dans ces conditions, la transformée de Fourier, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi$, d'un élément φ de $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, e^{-i\langle x,\, y\rangle} dy.$$

Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $x_1, \dots, x_n$, ses coordonnées dans la base canonique, de telle sorte que

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

Soit $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{C}$ en les n indéterminées $X_1, \dots, X_n$; si p appartient à $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, on note ∂_p l'opérateur différentiel $p(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Nous noterons $\mathbb{R}^{n\prime}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$x_1 \dots x_n \neq 0,$$

et nous désignerons par $\mathcal{E}_n$ l'espace $L^1_\infty(\mathbb{R}^{n\prime}, \mathbb{R}^n)$.

Soit c_l, $l \in \mathbb{Z}^n$, la série définie par

$$c_l = \prod_{j=1}^{n} (1 + |l_j|)^{-1}, \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n.$$

Il est manifeste qu'elle est de carré sommable et on pose, pour tout entier strictement positif m,

$$u_m = \Big\{ \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^n \\ \|l\| \geq m}} c_l^2 \Big\}^{1/2}.$$

Enfin désignons par M_n la maille du réseau $\mathbb{Z}^n$:

$$M_n = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 \leq x_j < 1, \quad 1 \leq j \leq n \Big\}.$$

On a alors le

Théorème 4. *Si la fonction* φ *appartient à* $\mathcal{E}_n$, *elle satisfait à la relation suivante :*

$$(127) \qquad \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{x \in M_n} |\varphi(x+k)| \leq 2^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} \int_{t \in \mathbb{R}^n} |\partial_{X_{j_1} \dots X_{j_s}} \varphi(t)|\, dt.$$

D'autre part il existe une semi-norme η, continue sur $\mathcal{E}_n$, telle que

$$\text{(128)} \qquad \sup_{x\in 2\pi M_n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ \|k\|\geq m}} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+2\pi k)| \leq u_m\, \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_n, \quad \forall m\geq 0.$$

De plus, tout élément φ de $\mathcal{E}_n$ satisfait à la formule sommatoire de Poisson valable pour tout x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$:

$$\text{(129)} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x+k)e^{-i\langle x+k,\, y\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(y+2\pi k)\, e^{i\langle 2\pi k,\, x\rangle} \; ;$$

les séries étant uniformément convergentes sur tout compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit ε (resp. $\tilde{\varepsilon}$) la fonction définie sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}^n$) par

$$\varepsilon(l) = 1, \text{ si } l\in\mathbb{Z} \text{ et } l\neq 0, \quad \varepsilon(0) = -1,$$

$$\tilde{\varepsilon}(l) = \prod_{j=1}^{n} \varepsilon(l_j), \text{ si } l\in\mathbb{Z}^n.$$

Nous allons d'abord établir une formule donnant une représentation intégrale des fonctions de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, si φ appartient à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, on a pour tout k élément de $\mathbb{Z}^n$, et tout x élément de l'intérieur, $\mathring{M}_n$, de M_n,

$$\text{(130)} \qquad \varphi(x+k) = \tilde{\varepsilon}(k) \sum_{s=0}^{n} \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_s\leq n} \int_{k_1-\varepsilon(k_1)}^{k_1} \cdots \int_{k_n-\varepsilon(k_n)}^{k_n} \left\{\prod_{l=1}^{s} (t_{j_l}-k_{j_l}+\varepsilon(k_{j_l}))\right\} \partial_{x_{j_1}\ldots x_{j_s}} \varphi(x+t)\, dt.$$

Remarquons d'abord que, si $n=1$, la formule (130) devient, pour φ appartenant à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^1)$, k à $\mathbb{Z}$, et x à $]0,1[$,

$$\varphi(x+k) = \int_{k-1}^{k} \varphi(x+t)dt + \int_{k-1}^{k} (t-k+1)\varphi'(x+t)dt, \quad \text{si } k\neq 0$$

$$\varphi(x) = -\int_{1}^{0} \varphi(x+t)dt - \int_{1}^{0} (t-1)\varphi'(x+t)dt, \quad \text{sinon.}$$

Lorsque k est non nul, considérons la fonction de la variable réelle

$$\psi_k(t) = (t-k+1)\, \varphi(x+t) \; ;$$

elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[k-1,k]$ et elle satisfait aux relations

$$\psi_k(k) = \varphi(x+k), \quad \psi_k(k-1) = 0$$

$$\psi_k'(t) = \varphi(x+t) + (t-k+1)\varphi'(x+t), \quad \forall t\in[k-1,k].$$

Alors, dans ce cas, la formule (130) se ramène à

$$\psi_k(k) - \psi_k(k-1) = \int_{k-1}^{k} \psi_k'(t)\, dt.$$

Le cas où l'entier k est nul, se traite de façon analogue en considérant la fonction de la variable réelle,

$$\psi_0(t) = (1-t)\, \varphi(x+t),$$

sur l'intervalle $[0,1]$.

La démonstration de la formule (130) dans le cas général se fait par récurrence sur l'entier naturel n : les détails sont laissés au lecteur.

Nous noterons $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ l'espace des fonctions, φ, définies sur $\mathbb{R}^n$ telles que

(*i*) φ soit continue et $\mathbb{Z}^n$-périodique

(*ii*) $\varphi|_{\mathring{M}_n}$ soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ bornée ainsi que toutes ses dérivées.

Si p appartient à $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, et φ à $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$, on pose

$$\nu_p^\infty(\varphi) = \sup_{x\in\mathring{M}_n} |\partial_p\varphi(x)|.$$

Alors, muni des semi-normes ν_p^∞ , $p \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, l'espace $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ est un espace de Frèchet. Il est clair que si φ appartient à $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$, et si k appartient à $\mathbb{Z}^n$, la fonction $\varphi|_{k+\mathring{M}_n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout élément p de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, on a

$$\partial_p\varphi(x+k) = \partial_p\varphi(x), \quad \forall x\in\mathring{M}_n.$$

Alors, il résulte de [Va] Part I §3, Lemma 21, que, pour k appartenant à $\mathbb{Z}^n$, φ à $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ et p à $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, la fonction $\partial_p\varphi|_{k+\mathring{M}_n}$ se prolonge continuement à $k+\overline{M}_n$.

Soient φ un élément de $\mathcal{E}_n$, et p de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$. Alors il résulte de la formule (130) appliquée à $\partial_p\varphi$ que l'on a, pour tout p élément de $\mathbb{Z}^n$, et tout point x de $\mathring{M}_n$,

$$|\partial_p\varphi(x+k)| \leq \sum_{s=0}^{n} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_s\leq n} \int_{\prod_{l=1}^{n}]k_l-\varepsilon(k_l),k_l]} |\partial_{pX_{j_1}\ldots X_{j_s}}\varphi(x+t)|\,dt,$$

d'où l'on déduit la majoration uniforme par rapport à x parcourant $\mathring{M}_n$,

$$(131)\qquad |\partial_p\varphi(x+k)| \leq \sum_{s=0}^{n} \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_s\leq n} \int_{k_1-1}^{k_1+1}\cdots\int_{k_n-1}^{k_n+1} |\partial_{pX_{j_1}\ldots X_{j_s}}\varphi(t)|\,dt.$$

Cependant, si p appartient à $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$, on a

$$(132)\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{k_1-1}^{k_n+1}\cdots\int_{k_n-1}^{k_n+1} |\partial_p\varphi(t)|\,dt \leq 2^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_p\varphi(t)|\,dt.$$

La relation (127) est alors conséquence des relations (131) et (132), et de ce que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, pour tout l appartenant à $\mathbb{Z}^n$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{x\in l+M_n} |\varphi(x+k)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{x\in M_n} |\varphi(x+k)|,$$

ce qui montre que la série,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x+k),$$

est normalement convergente sur tout translaté, par un élément de $\mathbb{Z}^n$, de la maille M_n, et donc, sur tout compact de $\mathbb{R}^n$. En particulier, il est clair que le membre de gauche de (129) est une série uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Soit σ_φ la somme de la série,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x+k).$$

Alors il n'est pas difficile de voir, en utilisant les inégalités (131) et (132), que l'application,

$$\varphi \longrightarrow \sigma_\varphi ,$$

est un homomorphisme d'espace de Frèchet de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$.

Si ψ est une fonction Lebesgue-intégrable sur M_n, on définit, pour l appartenant à $\mathbb{Z}^n$, le coefficient de Fourier d'indice l, $\hat{\psi}(l)$, de ψ en posant

$$(133)\qquad \hat{\psi}(l) = \int_{M_n} \psi(x)\, e^{-i\langle 2\pi l, x\rangle} dx.$$

Avant d'aller plus loin dans la démonstration du théorème 4, nous allons établir le

Lemme 25. *Soit* ψ *appartenant à* $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. *Alors la série* $\hat{\psi}(l)$, $l\in\mathbb{Z}^n$, *est absolument convergente, et* ψ *est la somme de sa série de Fourier ; plus précisément on a*

$$(134)\qquad \psi(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \hat{\psi}(l)\, e^{i\langle 2\pi l, x\rangle}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

De plus il existe une semi-norme continue, η *sur* $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ *telle que, pour tout* $m\geq 0$, *on ait*

$$(135)\qquad \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ \|k\|\geq m}} |\hat{\psi}(l)| \leq u_m\, \eta(\psi), \quad \forall\psi \in \mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n).$$

Démonstration. Soit ψ un élément de $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. Nous allons d'abord montrer que si $s, j_1, \dots, j_s$, sont des entiers tels que $1\leq s\leq n$ et $1\leq j_1<\dots<j_s\leq n$, on a, pour tout l parcourant $\mathbb{Z}^n$,

$$(136)\qquad l_{j_1}\dots l_{j_s}\hat{\psi}(l) = (2i\pi)^{-s}\int_{M_n} \partial_{x_{j_1}\dots x_{j_s}} \psi(x)\, e^{-i\langle 2\pi l, x\rangle} dx.$$

Lorsque $n = 1$ la formule (136) s'écrit, pour l appartenant à $\mathbb{Z}$,

$$l\, \hat{\psi}(l) = (2i\pi)^{-1}\int_0^1 \psi'(x)\, e^{-2i\pi l x}\, dx.$$

Or, la fonction ψ étant par hypothèse continuement dérivable sur $[0,1]$, une simple intégration par partie montre que la formule (136) est vraie dans ce cas.

Pour démontrer cette formule dans le cas général, nous allons procéder par récurrence . Soit donc n un entier plus grand que 1, et supposons le résultat vrai pour tout entier au plus égal à $n-1$. Identifions $\mathbb{R}^{n-1}$ avec le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs dont la $n^{\text{ième}}$ coordonnée est nulle et soit e_n, le $n^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit ψ un élément de $\mathscr{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, nous noterons ψ_x la fonction de la variable réelle t définie par

$$(137) \qquad \psi_x(t) = \psi(x+te_n), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Nous allons montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^{n-1}$, ψ_x appartient à $\mathscr{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, et que si, pour t parcourant $]0,1[$ et k parcourant $\mathbb{N}$, on définit la fonction de n-1 variables réelles $\psi_{t,k}$, par

$$(138) \qquad \psi_{t,k}(x) = \psi_x^{(k)}(t), \quad \forall x\in\mathbb{R}^{n-1},$$

alors $\psi_{t,k}$ est un élément de $\mathscr{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1})$, et on a

$$(139) \qquad \psi_{t,k}(x) = \partial_{X_n^k}\psi(x+te_n), \quad \forall x\in\mathring{M}_n .$$

Soit x dans $\mathbb{R}^{n-1}$; il existe un unique élément l, de $\mathbb{Z}^{n-1}$ tel que x soit dans $l+M_{n-1}$. Soit y appartenant à $l+\mathring{M}_{n-1}$. Si t appartient à $]0,1[$, il est clair que la fonction,

$$\tau \longrightarrow \psi(y+\tau(x-y)+te_n),$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$ et, par suite, on a

$$(140) \qquad \psi_x(t) = \psi_y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} (x_j-y_j) \int_0^1 \partial_{X_j}\psi(y+\tau(x-y)+te_n)d\tau .$$

Pour τ parcourant $[0,1[$, la fonction,

$$t \longrightarrow \partial_{X_j}\psi(y+\tau(x-y)+te_n),$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,1[$, chacune de ses dérivées, à savoir les fonctions,

$$t \longrightarrow \partial_{X_jX_n^k}\psi(y+\tau(x-y)+te_n), \quad k\in\mathbb{N},$$

étant bornée sur l'intervalle $]0,1[$, uniformément par rapport à τ dans $[0,1[$. Il résulte alors, du théorème de dérivation sous le signe somme que la fonction ψ_x , qui par définition est continue et $\mathbb{Z}$-périodique sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,1[$ et satisfait à la relation

$$(141)\qquad \psi_x^{(k)}(t) = \psi_y^{(k)}(t) + \sum_{j=1}^{n-1}(x_j-y_j)\int_0^1 \partial_{X_jX_n^k}\psi(y+\tau(x-y)+te_n)d\tau,$$

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall t\in]0,1[.$$

Mais la relation (141) entraîne que, pour tout entier naturel k, $\psi_x^{(k)}$ est bornée sur $]0,1[$, et cette dernière remarque achève de montrer que ψ_x appartient à $\mathscr{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Maintenant il résulte de (137) que l'on a, pour x appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ et l à $\mathbb{Z}^{n-1}$,

$$\psi_{x+l} = \psi_x ,$$

ce qui montre que, pour t élément de $]0,1[$ et k de $\mathbb{N}$, la fonction $\psi_{t,k}$ est $\mathbb{Z}^{n-1}$-périodique. Comme la relation (139) est immédiate, pour montrer que $\psi_{t,k}$ appartient à $\mathscr{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1})$, il suffit de montrer qu'elle est une fonction continue sur $\overline{M}_{n-1}$. Pour cela on remarque que la relation (141) est, pour t appartenant à $]0,1[$, k à $\mathbb{N}$ et y à $\mathring{M}_{n-1}$, valable pour tout x dans $\overline{M}_{n-1}$ et qu'elle s'écrit,

$$\psi_{t,k}(x) = \psi_{t,k}(y) + \sum_{j=1}^{n-1}(x_j-y_j)\int_0^1 \partial_{X_jX_n^k}\psi(y+\tau(x-y)+te_n)d\tau,\quad \forall x\in\overline{M}_{n-1}.$$

Mais, si j est un entier compris entre 1 et $n-1$, et si τ appartient à $[0,1[$, la fonction de $n-1$ variables réelles

$$x \longrightarrow \partial_{X_jX_n^k}\psi(y+\tau(x-y)+te_n)$$

est continue et uniformément bornée, par rapport à τ, sur $\overline{M}_n$; de là résulte la continuité de la fonction $\psi_{t,k}$ sur $\overline{M}_n$.

Soit donc s, $j_1,\dots,j_s$, des entiers comme ceux intervenant dans la formule (136). Quitte à effectuer une permutation des coordonnées on peut supposer que $n = j_s$, si bien que le premier membre de (136) s'écrit, l étant un élément fixé de $\mathbb{Z}^n$,

$$l_{j_1}\dots l_{j_{s-1}} l_n \int_{M_n}\psi(x)e^{-i\langle 2\pi l,x\rangle}dx = l_{j_1}\dots l_{j_{s-1}}\int_{M_{n-1}} l_n\,\hat{\psi}_x(l_n)e^{-i\langle 2\pi l,x\rangle}dx.$$

Grâce au fait que la relation (136) est vraie lorsque $n=1$, on obtient alors

$$l_{j_1}\cdots l_{j_{s-1}} l_n \hat{\psi}(l)$$

$$= l_{j_1}\cdots l_{j_{s-1}} \int_{M_{n-1}} \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_0^1 \psi'_x(t)\, e^{-2i\pi t l_n}\, dt \right\} e^{-i\langle 2\pi l,\, x\rangle}\, dx$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \left\{ l_{j_1}\cdots l_{j_{s-1}} \int_{M_{n-1}} \psi_{1,t}(x)\, e^{-i\langle 2\pi l',\, x\rangle}\, dx \right\} e^{-2i\pi t l_n}\, dt,$$

où on a posé

$$l' = (l_1,\ldots,l_{n-1}).$$

Appliquant alors l'hypothèse de récurrence aux fonctions $\psi_{1,t}$, $t\in]0,1[$, et remarquant que, pour x dans $\mathring{M}_{n-1}$ et t dans $]0,1[$, on a

$$\psi_{1,t}(x) = \partial_{X_n} \psi(x+te_n),$$

on obtient la relation (136) pour la fonction ψ.

C'est alors une conséquence immédiate de cette relation, que l'on a

$$(142)\qquad |\hat{\psi}(l)| \le c_l \left\{ \sum_{s=0}^{n} (2\pi)^{-s} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n} |(\partial_{X_{j_1}}\ldots X_{j_s}\psi)\hat{\ }(l)| \right\},$$

d'où l'on tire, en utilisant l'inégalité de Parseval-Bessel pour les fonctions $\partial_{X_{j_1}\ldots X_{j_s}}\psi$, $1\le j_1<\ldots<j_s\le n$, $0\le s\le n$, que, pour tout entier positif m, on a

$$\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^n \\ \|l\|\ge m}} |\hat{\psi}(l)| \le u_m \left\{ \sum_{s=0}^{n} (2\pi)^{-s} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n} \left\{ \int_{M_n} |\partial_{X_{j_1}}\ldots X_{j_s}\psi(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \right\}.$$

L'existence d'une semi-norme η continue sur $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$ satisfaisant, pour tout entier positif m, à la relation (135), découle de là.

Considérons à nouveau un élément ψ de $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. D'après la relation (135) la série des coefficients de Fourier de ψ est absolument convergente. Comme la fonction ψ est continue et $\mathbb{Z}^n$-périodique on sait alors qu'elle est, en tout point de $\mathbb{R}^n$, somme de sa série de Fourier. Q.E.D.

Reprenons la démonstration du théorème 4. Si x appartient à $\mathbb{R}^n$ on note μ_x (resp. τ_x) l'opérateur agissant sur les fonctions de n variables réelles (resp. les polynômes complexes en n indéterminées) défini par

$$\mu_x\varphi(y) = e^{-i\langle x,\, y\rangle}\varphi(y), \quad \forall y\in\mathbb{R}^n$$

$$\tau_x p(y) = p(y-ix), \quad \forall y\in\mathbb{C}^n.$$

Alors, si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\partial_p\, \mu_x\varphi = \mu_x(\partial_{\tau_x p}\, \varphi).$$

De cette dernière relation il découle que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^n$, μ_x opère dans l'espace $\mathcal{E}_n$ et que, de plus, pour toute partie bornée B de $\mathbb{R}^n$ et toute semi-norme η continue sur $\mathcal{E}_n$, il existe une autre semi-norme, η', continue sur $\mathcal{E}_n$ telle que

$$(143) \qquad \sup_{x\in B} \eta(\mu_x\varphi) \le \eta'(\varphi), \quad \forall\varphi \in \mathcal{E}_n\,.$$

D'autre part, si φ appartient à $\mathcal{E}_n$ et x à $\mathbb{R}^n$, on a

$$(144) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(2\pi l) = \sigma_\varphi\hat{}\,(l), \quad \forall l\in\mathbb{Z}^n \\ &(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\mu_x\varphi)(y) = \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\,\varphi(x+y), \quad \forall y\in\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant la deuxième assertion du lemme 25, ainsi que le fait que l'application $\varphi \longrightarrow \sigma_\varphi$ est un morphisme d'espaces de Frèchet de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{C}_b^{0,\infty}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$, on voit qu'il existe une semi-norme, η, continue sur $\mathcal{E}_n$ telle que, pour tout entier positif m et tout élément x de $\mathbb{R}^n$, on ait

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ \|k\|\ge m}} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\,\varphi(x+2\pi k)| \le u_m\, \eta(\mu_x\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_n\,.$$

Choisissons alors une semi-norme, η', continue sur $\mathcal{E}_n$ et satisfaisant à la relation (143), relativement à la semi-norme η et à la maille $2\pi M_n$; il est clair que cette semi-norme η' satisfait à la relation (128).

De cette dernière relation résulte que le second membre de (129) est une série uniformément convergente pour (x,y) parcourant $K \times \mathbb{R}^n$, où K est un compact quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, le fait que tout élément de $\mathcal{E}_n$ satisfait à la formule sommatoire de Poisson est conséquence des formules (144) et du lemme 25, formule (134). Q.E.D.

Nous aurons besoin d'un résultat complémentaire. Si r et q sont des entiers naturels tels que $r \leq q$, on note $C_{r,q}$ le cône de $\mathbb{R}^q$ dont les éléments sont les vecteurs y tels que les coordonnées d'indice j, pour $1 \leq j \leq r$, soient strictement positives, et, si n est un troisième entier naturel on note $\mathcal{E}_{n,r,q}$ l'espace

$$L^1_\infty(\mathbb{R}^n \times C_{r,q}\ ,\ \mathbb{R}^n \times C_{r,q}).$$

Nous considérons les éléments de $\mathcal{E}_{n,r,q}$ comme des fonctions des deux variables, x dans $\mathbb{R}^n$ et y dans $C_{r,q}$. On a alors le

Lemme 26. *Si y appartient à $C_{r,q}$ et φ à $\mathcal{E}_{n,r,q}$, la fonction $\varphi(.,y)$ est un élément de $\mathcal{E}_n$. De plus l'application $\varphi \longrightarrow \varphi(.,y)$ est un morphisme d'espaces de Frèchet de $\mathcal{E}_{n,r,q}$ dans $\mathcal{E}_n$.*

Démonstration. Soit φ un élément de $\mathcal{E}_{n,r,q}$. Alors il existe une partie négligeable, N_φ, de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tout p dans $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_q]$, la fonction $\partial_p\varphi(x,.)$ soit Lebesgue-intégrable sur $C_{r,q}$. Il résulte de là que, pour x appartenant à $\mathbb{R}^n - N_\varphi$, et p à $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n\ , Y_1,\dots,Y_q]$,

$$\partial_p\varphi(x,y) = (-1)^q \int_{C_{q,q}} \partial_{pY_1\dots Y_q}\varphi(x,y+z)dz, \quad \forall y \in C_{r,q}\ .$$

Maintenant, si y appartient à $C_{r,q}$, il est clair que la fonction $\varphi(.,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. D'après ce qui précède, pour tout élément p de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_p\varphi(x,y)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n\times C_{q,q}} |\partial_{pY_1\dots Y_q}\varphi(x,y+z)|dx\, dz,$$

d'où il résulte que

$$\nu_p(\varphi(.,y)) \leq \nu_{pY_1\dots Y_q}(\varphi).$$

Le lemme est démontré. Q.E.D.

Le résultat suivant est, alors, conséquence immédiate du théorème 4 et du lemme 26.

Corollaire. *Si* φ *est une fonction dans* $\mathcal{E}_{n,r,q}$, *elle satisfait à la relation*

$$(145)\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sup_{x\in M_n} \int_{C_{r,q}} |\varphi(x+k,y)|\, dy$$

$$\le 2^n \sum_{s=0}^{n} \sum_{1\le j_1<\ldots<j_s\le n} \int_{\mathbb{R}^n\times C_{r,q}} |\partial_{X_{j_1}\ldots X_{j_s}} \varphi(t,y)|\,dt\, dy.$$

D'autre part il existe une semi-norme η, *continue sur* $\mathcal{E}_n$ *telle que, pour tout réel positif* m, *on ait*

$$(146)\qquad \sup_{x\in 2\pi M_n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n\\ \|k\|\ge m}} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(.,y)(x+2\pi k)| \le u_m\, \eta(\varphi(.,y)),\quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_n\ ,\quad \forall y\in C_{r,q}\ .$$

En particulier, les séries

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{C_{r,q}} |\varphi(x+k,y)|dy, \text{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{C_{r,q}} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(.,y)(x+2\pi k)|\,dy$$

sont uniformément convergentes sur tout compact de $\mathbb{R}^n$, *et leur somme est une fonction continue,* $\mathbb{Z}^n$*-périodique et bornée, de la variable* x *dans* $\mathbb{R}^n$, *tandis que les applications* α *et* β *définies par*

$$(147)\qquad \alpha(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{C_{r,q}} |\varphi(x+k,y)|dy,\quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_{n,r,q}\ ,$$

$$(148)\qquad \beta(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{C_{r,q}} |\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\varphi(.,y)(x+2\pi k)|dy,\quad \forall\varphi\in\mathcal{E}_{n,r,q}\ ,$$

sont des semi-normes continues sur $\mathcal{E}_{n,r,q}$.

§ VIII - A NOUVEAU LES INTÉGRALES ORBITALES SUR $\mathfrak{g}^*$

Reprenons les notations introduites dans le paragraphe VI et choisissons une norme $\| \ \|$ sur $\mathfrak{g}^*$. Nous allons établir le

Théorème 5. *Soient* $\mathfrak{j}$ *appartenant à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathcal{W}$ *un ouvert* $\sim$*-saturé de* $V^{\mathfrak{j}}$. *Alors il existe des réels positifs* C *et* r, *tels que, pour tout* f *dans* $\mathfrak{j}^*$, *on ait*

$$(149) \qquad |\pi_{\mathfrak{j},s}(f)| \int_{G/H_{\mathfrak{j}}} \left\{ \int_{\tilde{\mathcal{W}}} (1 + \|g.(f+u)\|)^{-r} \, \pi_{\mathfrak{j},n}(u)^2 \, du \right\} dg^{\cdot} \leq C,$$

les intégrales étant uniformément convergentes par rapport à f *parcourant* $\mathfrak{j}^*$. *En particulier, les intégrales orbitales* $F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j},\varphi}(f)$ *sont absolument convergentes pour tout* φ *dans* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ *et* f *dans* $\mathfrak{j}^*$.

Si φ *appartient à* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, *la fonction* $F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j},\varphi}$ *est un élément de* $L^1_\infty(\mathfrak{j}^{*\prime}, |\pi_{\mathfrak{j},s}| df)$ *et, pour tout* p *dans* $S(\mathfrak{s}^*)^S$, *on a*

$$(150) \qquad \partial_{p_{\mathfrak{j}}}(F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j},\varphi}) = F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j},\partial_p \varphi}\,.$$

Enfin l'application $F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j}}$ *de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ *dans* $L^1_\infty(\mathfrak{j}^{*\prime}, |\pi_{\mathfrak{j},s}| df)$, *qui à* φ *fait correspondre* $F^{\mathcal{W}}_{\mathfrak{j},\varphi}$, *est un homomorphisme d'espaces de Frèchet.*

Avant de démontrer le théorème 5 rappelons le résultat suivant contenu dans [Va] (Part I § 3, Lemma 8)

Lemme 27. *Soient* E *un espace vectoriel euclidien réel de dimension finie,* $\| \ \|$ *la norme euclidienne sur* E, *et* $\mathcal{M}$ *un ensemble de mesures boréliennes positives sur* E. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) pour tout* m *appartenant à* $\mathcal{M}$*, tout élément de* $\mathcal{D}(E)$ *est* m*-intégrable et, de plus, il existe une semi-norme* ν*, continue sur* $\mathcal{S}(E)$ *telle que, pour tout* m *dans* $\mathcal{M}$ *et tout* φ *dans* $\mathcal{D}(E)$*, on ait*

$$\left|\int_E \varphi \, dm\right| \leq \nu(\varphi),$$

(ii) il existe des réels positifs C *et* r*, tels que, pour tout* m *appartenant à* $\mathcal{M}$*, on ait*

$$\int_E (1 + \|x\|)^{-r} \, dm \leq C.$$

De plus, si ces conditions sont satisfaites, les intégrales apparaissant dans (ii) convergent uniformément par rapport à m *parcourant* $\mathcal{M}$*.*

Démonstration du théorème 5. Pour tout f élément de $j^{*'}$ notons $\sigma_j(f)$ le signe de $\pi_{j,s}(f)$. Alors si f est dans $j^{*'}$, pour tout φ appartenant à $\mathcal{C}_c(\mathfrak{g}^*)$, l'espace des fonctions continues sur $\mathfrak{g}^*$ et à support compact, l'intégrale orbitale $F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(f)$ est absolument convergente, et, de plus, l'application

$$\varphi \longrightarrow \sigma_j(f) \, F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(f)$$

définit une mesure de Radon positive sur $\mathfrak{g}^*$, notée m_f.

Pour voir cela on constate, en premier lieu, que d'après la proposition 4, le corollaire du théorème 2 et le théorème 3, l'intégrale orbitale $F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(f)$ est convergente lorsque φ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$ ne prenant que des valeurs positives. Soient alors K un compact de $\mathfrak{g}^*$, et ψ une fonction de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$ ne prenant que des valeurs positives et constante et égale à 1 sur K. Dans ces conditions il est clair que pour toute fonction φ de $\mathcal{C}_c(\mathfrak{g}^*)$ dont le support est contenu dans K, on a

$$|\pi_{j,s}(f)| \int_{G/H_j}\left\{\int_{\tilde{\mathcal{W}}} |\varphi(g.(f+u))| \, \pi_{j,n}(u)^2 \, du\right\} d\dot{g} \leq \|\varphi\|_\infty \, |F^{\mathcal{W}}_{j,\psi}(f)|.$$

Ceci montre notre assertion.

D'autre part les résultats des deux paragraphes précédents, cités ci-dessus, montrent aussi que l'application,

$$\varphi \longrightarrow F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi},$$

induit un homomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, dans $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$. Il résulte alors du théorème 2 (*i*) qu'il existe une semi-norme continue ν, sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que pour tout f appartenant à $j^{*\prime}$,

$$\left|\int_{\mathfrak{g}^*} \varphi \, dm_f\right| \le \nu(\varphi).$$

La première assertion du théorème est alors conséquence du lemme 27.

Maintenant l'application

$$\varphi \longrightarrow F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi},$$

définie sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, se prolonge par continuité en une application de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$, l'image d'un élément φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ par cette dernière étant notée $\overline{F}^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}$. Comme d'après le théorème 2 (*i*), l'évaluation en un point f de $j^{*\prime}$ est une forme linéaire continue sur $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$, il résulte facilement de ce qui précède et de ce que $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$ est partout dense dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, que

$$\overline{F}^{\mathcal{W}}_{j,\varphi} = F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*).$$

Par suite, l'application $F^{\mathcal{W}}_j$ est bien un morphisme d'espaces de Frèchet de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$.

Enfin, si p appartient à $S(\mathfrak{s}^*)^S$, l'égalité (150) est, d'après les résultats du paragraphe précédent déjà invoqués, vraie pour tout φ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$. Ceci signifie que les deux morphismes continus de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $L^1_\infty(j^{*\prime}, |\pi_{j,s}|df)$, que sont $\partial_{p_j} \circ F^{\mathcal{W}}_j$ et $F^{\mathcal{W}}_j \circ \partial_p$ ont même restriction à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$. Mais ceci entraîne leur égalité. Q.E.D.

§ IX - LES MESURES $m_{G,\chi}$ ET m_G

Commençons par introduire quelques notations. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une structure symplectique définie par une forme symplectique, que nous noterons génériquement κ. Nous désignerons par $Sp(E)$ le groupe symplectique de E si E est non nul, le groupe trivial sinon, et par $Mp(E)$ le groupe métaplectique correspondant, que l'on peut définir comme étant le revêtement connexe à deux feuillets du groupe $Sp(E)$. Soient L un groupe de Lie et h un morphisme de groupes de Lie de L dans $Sp(E)$. Alors nous désignerons par $L^{h,E}$, ou plus simplement par L^E, le sous-groupe de $L \times Mp(E)$, dont les éléments sont les couples (l,x) tels que

$$h(l) = p(x),$$

où p désigne la projection naturelle de $Mp(E)$ sur $Sp(E)$. Le groupe L^E est un revêtement à deux feuillets, pas forcément connexe, du groupe L. La projection de L^E sur L définissant le revêtement, est induite par la première projection de $L \times Mp(E)$ sur L. Le noyau de cette projection est un groupe à deux éléments dont nous noterons ε_L^E l'élément non trivial ; si ε^E désigne l'élément non trivial de $\operatorname{Ker}p$, on a

$$\varepsilon_L^E = (1,\varepsilon^E).$$

Il est clair que l'application,

$$x \longrightarrow (x,1),$$

induit un morphisme de groupes de Lie de $\operatorname{Ker}h$ dans L^E. En fait cette application est une section de $\operatorname{Ker}h$ dans L^E qui est canonique, et que nous noterons $s^{h,E}$ ou, plus simplement, s^E.

Soient L un groupe de Lie, $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie et l un élément de $\mathfrak{l}^*$. Alors la forme bilinéaire alternée κ^l, canoniquement associée à l, et définie par

$$\kappa^l(X,Y) = \langle l, [X,Y]\rangle, \quad \forall X,Y\in\mathfrak{l},$$

induit une structure symplectique sur l'espace quotient $\mathfrak{l}/\mathfrak{l}(l)$. Si H est un sous-groupe de Lie de $L(l)$, la représentation adjointe de L induit un morphisme de H dans $Sp(\mathfrak{l}/\mathfrak{l}(l))$; nous noterons H^l, ε^l et s^l les objets définis ci-dessus et attachés à H et à ce morphisme.

Soit $(B,j,\mathbf{B})$ un groupe presque algébrique, et soit χ un caractère unitaire de $\mathrm{Ker} j$.

Si f appartient à $\mathfrak{b}^*$, on note $X_B(f)$ l'ensemble des représentations unitaires et irréductibles, τ, de $B(f)^f$ telles que

(151) (*i*) $\tau(\varepsilon^f) = -1$

(151) (*ii*) la restriction de τ à la composante neutre de $B(f)^f$ est un multiple d'un caractère de celle-ci dont la différentielle est $if_{|\mathfrak{b}(f)}$,

et on note $X_{B,\chi}(f)$ le sous-ensemble de $X_B(f)$, constitué des éléments τ tels que

(151) (*iii*) $\tau(s^f(\gamma)) = \chi(\gamma)\ \mathrm{Id}, \quad \forall\gamma\in\mathrm{Ker} j$.

Il est clair que $X_B(f)$ est réunion disjointe des $X_{B,\chi}(f)$, pour χ parcourant $\mathrm{Ker} j\hat{}$.

Nous dirons qu'une forme linéaire f dans $\mathfrak{b}^*$ est B-admissible (resp. χ-admissible), si et seulement si $X_B(f)$ (resp. $X_{B,\chi}(f)$) est non vide, et nous noterons $\mathfrak{b}^*_{B,ad}$ (resp. $\mathfrak{b}^*_{B,\chi,ad}$) leur ensemble. Enfin nous poserons

$$(152) \qquad \mathfrak{b}^*_B = \mathfrak{b}^*_{B,ad} \cap \mathfrak{b}^*_r\,, \quad \mathfrak{b}^*_{B,\chi} = \mathfrak{b}^*_{B,\chi,ad} \cap \mathfrak{b}^*_r\,.$$

On remarquera que $\mathfrak{b}^*_B$ ne dépend que de la structure de groupe de Lie de B, et non de sa structure de groupe presque algébrique.

Soit $e_{\mathfrak{b}}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{b}$ constitué des éléments elliptiques. On définit alors une fonction $\zeta_{\mathfrak{b}}$, sur $e_{\mathfrak{b}}$ en posant :

$$(153) \qquad \zeta_{\mathfrak{b}}(T) = \exp\Big(\frac{1}{2} \sum_{\lambda\in\Delta_T^+} \lambda \dim \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^{\lambda}\Big), \quad \forall T\in e_{\mathfrak{b}} .$$

Soit E_B (resp. $\tilde{E}_B$), l'ensemble des éléments T de $\mathfrak{b}$, tels que $\exp_B T$ soit égal à 1 (resp. $\exp_B T$ appartienne à $\mathrm{Ker} j$). Alors il est clair que l'on a les inclusions

$$E_B \subset \tilde{E}_B \subset e_{\mathfrak{b}} .$$

Si j appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{b})$, on note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe compact maximal de $\exp_{B_{\mathbb{R}}} j$, et $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre des éléments $\mathbb{R}$-semi-simples de j, de telle sorte que

$$j = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a} ;$$

dans ces conditions, $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{a}$), est la partie anisotrope (resp. déployée) de j. Alors $\tilde{E}_B \cap \mathfrak{t}$ est un réseau de $\mathfrak{t}$, que l'on note $\tilde{\mathfrak{t}}_B$, et $E_B \cap \mathfrak{t}$ est un sous-groupe discret de $\mathfrak{t}$, noté $\mathfrak{t}_B$; ce dernier groupe est en fait un réseau du sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}(B)$, de $\mathfrak{t}$ qu'il engendre. Le groupe quotient $\tilde{\mathfrak{t}}_B/\mathfrak{t}_B$ est isomorphe, via l'application exponentielle, au groupe discret $\mathrm{Ker} j \cap \exp\mathfrak{t}$.

Choisissons un élément X de $i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, tel que, pour toute racine α de Δ_j, $\alpha(X)$ soit non nul et posons

$$(154) \qquad \begin{aligned} \Delta_j^+ &= \Big\{\alpha\in\Delta_j \ / \ \alpha(X)>0\Big\} \\ \rho_{\mathfrak{b},j} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_j^+} \alpha, \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathfrak{b},j} = \rho_{\mathfrak{b},j|\mathfrak{t}} . \end{aligned}$$

Alors, pour tout T dans $\tilde{\mathfrak{t}}_B$, on a

$$(155) \qquad \zeta_{\mathfrak{b}}(T) = \exp(\rho_{\mathfrak{b},j}(T)),$$

si bien que la restriction de $\zeta_{\mathfrak{b}}$ à $\tilde{\mathfrak{t}}_B$ est un caractère de ce dernier, noté ζ_B.

Si χ appartient à $\mathrm{Ker} j\hat{}$, on lui associe une fonction, $\tilde{\chi}_B$, définie sur $\tilde{E}_B$ par

$$(156) \qquad \tilde{\chi}_B(T) = \zeta_{\mathfrak{b}}(T)\ \chi(\exp T), \quad \forall T\in\tilde{E}_B\ .$$

Comme $\operatorname{Ker} j$ est central, $\tilde{E}_B$ est une partie B-stable de $\mathfrak{b}$, et la fonction $\tilde{\chi}_B$ est B-invariante. De plus la restriction de $\tilde{\chi}_B$ à $\tilde{\mathfrak{t}}_B$ est un caractère de ce dernier, que l'on note encore $\tilde{\chi}_B$. On a alors

$$\tilde{1}_B = \zeta_B\ .$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si R est un réseau de E, nous noterons R^*, le réseau dual de R, *i.e.*

$$R^* = \left\{\lambda\in E^*\ /\ \lambda(R) \subset 2\pi\mathbb{Z}\right\},$$

et $\operatorname{vol}(R)$, le covolume du réseau R dans E ou, si l'on préfère, le volume relativement à la mesure de Lebesgue choisie sur E d'une maille de R.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, et si μ appartient à F^*, on notera $F^{\perp}_{\mu}$ le sous-ensemble de E^* constitué de formes linéaires λ telles que

$$\lambda_{|F} = \mu.$$

Alors $F^{\perp}_{\mu}$ est un sous-espace affine de E^* translaté de $F^{\perp}$. Le choix d'une mesure de Lebesgue sur F détermine une mesure de Lebesgue sur $F^{\perp}$ et sur chacun de ses translatés dans E^*.

Soient j appartenant à $\operatorname{car}(\mathfrak{b})$ et χ à $\operatorname{Ker} j\hat{}$. Nous poserons

$$(157) \qquad \begin{aligned} \tilde{\mathfrak{t}}^*_{B,\chi} &= \left\{\mu\in\mathfrak{t}^*\ /\ \forall T\in\tilde{\mathfrak{t}}_B\ e^{i\langle\mu,\, T\rangle} = \tilde{\chi}_B(T)\right\} \\ \mathfrak{t}^*_{B,1} &= \left\{\mu\in\mathfrak{t}(B)^*\ /\ \forall T\in\mathfrak{t}_B\ e^{i\langle\mu,\, T\rangle} = \tilde{1}_B(T)\right\}, \end{aligned}$$

si bien que $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{B,\chi}$ et $\mathfrak{t}^*_{B,1}$ sont des translatés respectifs des réseaux $\tilde{\mathfrak{t}}^*_B$ et $\mathfrak{t}^*_B$. Plus précisément, si μ_χ est une forme linéaire sur $\mathfrak{t}$, telle que

$$\exp(i\langle\mu_\chi\ , T\rangle) = \chi(\exp T)$$

pour tout T dans $\tilde{\mathfrak{t}}_B$, on a

$$(158) \qquad \tilde{\mathfrak{t}}^*_{B,\chi} = \mu_\chi + \sigma_{\mathfrak{b},j} + \tilde{\mathfrak{t}}^*_B\ ,$$

tandis que

$$(159) \qquad t^*_{B,1} = \sigma_{\mathfrak{b},j}|_{t(B)} + t^*_B .$$

Dans ces conditions on a

$$(160) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}^*_B \cap \mathfrak{h}^*_j &= \bigcup_{\mu\in t^*_{B,1}} (t(B)^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}) \\ \mathfrak{b}^*_{B,\chi} \cap \mathfrak{h}^*_j &= \bigcup_{\mu\in \tilde{t}^*_{B,\chi}} (t^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}). \end{aligned}$$

Considérons maintenant les séries de distributions sur $\mathfrak{h}^*_j$:

$$\sum_{X\in t_B} \tilde{1}_B(X)\, e^{-i\langle f,\, X\rangle}\, df,$$

et

$$\sum_{X\in \tilde{t}_B} \tilde{\chi}_B(X)\, e^{-i\langle f,\, X\rangle}\, df.$$

Il résulte de la formule sommatoire de Poisson, que ces séries convergent dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{h}^*_j)$ vers des mesures de Radon positives, notées respectivement m^j_B et $m^j_{B,\chi}$ lesquelles sont déterminées par les formules

$$(161) \qquad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{h}^*_j} \varphi\, dm^j_B &= \mathrm{vol}(t_B)^{-1} \sum_{\mu\in t^*_{B,1}} \int_{t(B)^{\perp}_{\mu}} \varphi(f)\, df, \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathfrak{h}^*_j) \\ \int_{\mathfrak{h}^*_j} \varphi\, dm^j_{B,\chi} &= \mathrm{vol}(\tilde{t}_B)^{-1} \sum_{\mu\in \tilde{t}^*_{B,\chi}} \int_{t^{\perp}_{\mu}} \varphi(f)\, df, \quad \forall\varphi\in\mathcal{C}_c(\mathfrak{h}^*_j). \end{aligned}$$

Les restrictions à $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ des distributions m^j_B et $m^j_{B,\chi}$ sont clairement H'_j-invariantes et, à ce titre, elles sont, d'après le lemme 3, restriction de distributions B-invariantes définies sur l'ouvert $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ de $\mathfrak{b}^*$, et notées respectivement $m_{B,j}$ et $m_{B,\chi,j}$. Ces dernières sont des mesures de Radon positives sur cet ouvert dont les supports sont les fermés de $\mathfrak{b}^*_{r,j}$, notés respectivement $\mathfrak{b}^*_{B,j}$ et $\mathfrak{b}^*_{B,\chi,j}$, tels que

$$\mathfrak{b}^*_{B,j} = \mathfrak{b}^*_B \cap \mathfrak{b}^*_{r,j}\,, \qquad \mathfrak{b}^*_{B,\chi,j} = \mathfrak{b}^*_{B,\chi} \cap \mathfrak{b}^*_{r,j}\,.$$

Elles se prolongent en des mesures boréliennes positives sur $\mathfrak{b}^*$, encore notées $m_{B,j}$ et $m_{B,\chi,j}$, pour lesquelles le complémentaire de $\mathfrak{b}^*_{r,j}$ est négligeable.

On définit alors les mesures boréliennes positives sur $\mathfrak{b}^*$, m_B et $m_{B,\chi}$, pour χ appartenant à $\mathrm{Kerj}^\wedge$, en posant

$$(162) \qquad m_B = \sum_{j\in \mathrm{Car}(B)} m_{B,j}\,, \quad m_{B,\chi} = \sum_{j\in \mathrm{Car}(B)} m_{B,\chi,j}\,.$$

Pour ce qui précède on pourra consulter [Du-1] Appendice et [Du-3] V.

Remarquons que Kerj est un groupe abélien discret dénombrable si bien que le dual unitaire de chacun de ses sous-groupes est un groupe abélien compact que l'on munit de la mesure de Haar de masse totale 1. De plus, si j est un élément de $\mathrm{Car}(\mathfrak{b})$, il est clair que, pour χ appartenant à $\mathrm{Kerj}^\wedge$, la mesure $m^j_{B,\chi}$ ne dépend que de la restriction de χ à $\mathrm{Kerj}\cap\exp\mathfrak{t}$. Dans ces conditions on a les relations

$$(163) \qquad \begin{aligned} m^j_B &= \int_{\mathrm{Kerj}^\wedge} m^j_{B,\chi}\, d\chi = \int_{(\mathrm{Kerj}\cap\exp\mathfrak{t})^\wedge} m^j_{B,\chi}\, d\chi\,, \quad \forall j\in \mathrm{Car}(\mathfrak{b}) \\ m_B &= \int_{\mathrm{Kerj}^\wedge} m_{B,\chi}\, d\chi\,. \end{aligned}$$

Revenons au groupe G qui, en fait, est le groupe presque algébrique (G,j,G). Si j appartient à $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$, et si K_j est la forme bilinéaire symétrique sur j définie dans le lemme 7, les sous-espaces $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$ de j sont orthogonaux tandis que $\mathfrak{a}$ est contenu dans l'orthogonal, $\mathfrak{a}(G)$, relativement à K_j, de $\mathfrak{t}(G)$; comme $K_{j|\mathfrak{t}}$ est définie négative, $\mathfrak{a}(G)$ est un supplémentaire canonique de $\mathfrak{t}(G)$ dans j.

Maintenant soient j un élément de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ et χ un élément de $\mathrm{Kerj}^\wedge$. Alors, pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*_{r,j})$, on a

(164) (*i*) $$\int_{\mathfrak{g}^*_{r,j}} \varphi \, dm_{G,j} = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} [W_j]^{-1} \operatorname{vol}(\mathfrak{t}_G)^{-1} \sum_{\mu \in \mathfrak{t}^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\, \pi_{j,s}(\mu+\nu)\, d\nu,$$

(164) (*ii*) $$\int_{\mathfrak{g}^*_{r,j}} \varphi \, dm_{G,\chi,j} = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} [W_j]^{-1} \operatorname{vol}(\tilde{\mathfrak{t}}_G)^{-1} \sum_{\mu \in \tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\, \pi_{j,s}(\mu+\nu)\, d\nu.$$

En effet, si μ appartient à $\mathfrak{t}^*_{G,1}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$), $\mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu} \cap \mathcal{V}^j$ (resp. $\mathfrak{t}^{\perp}_{\mu} \cap \mathcal{V}^j$) est de complémentaire m^j_G (resp. $m^j_{G,\chi}$)-négligeable dans $\mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}$ (resp. $\mathfrak{t}^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}$). Ce dernier point résulte de ce que, d'une part, si $\mathfrak{t}(G)^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}$ (resp. $\mathfrak{t}^{\perp}_{\mu} \cap \mathfrak{h}^*_{j,r}$) est non vide, il existe ν appartenant à $\mathfrak{a}(G)^*$ (resp. $\mathfrak{a}^*$) tel que $\pi_{j,s}(\mu+\nu)$ soit non nul, et que, d'autre part, $\mathcal{V}^j$ est l'ouvert de Zariski de $\mathfrak{h}^*_{j,r}$ constitué des éléments n'annulant pas le polynôme π_q, polynôme satisfaisant à la relation (33). Comme $\mathfrak{t}^*_{G,1}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$) est au plus dénombrable notre assertion est claire.

De plus les arguments que nous venons de développer montrent aussi que, d'une part, les formules (164) (*i*) et (*ii*) sont valables pour toute fonction φ borélienne et positive ou respectivement $m_{G,j}$ et $m_{G,\chi,j}$-intégrable sur $\mathfrak{g}^*$, et que, d'autre part, $\mathfrak{g}^*_G \cap \mathcal{V}$ (resp. $\mathfrak{g}^*_{G,\chi} \cap \mathcal{V}$) est de complémentaire m_G (resp. $m_{G,\chi}$)-négligeable dans $\mathfrak{g}^*_G$ (resp. $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$).

Nous désignerons par Φ (resp. Φ_I) le sous-système de $\Delta_{j,s}$ constitué des racines réelles (resp. imaginaires pures) et par $W(\Phi)$ le groupe de Weyl de Φ. Alors $W(\Phi)$ opère dans $\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{j}^*$ et s'identifie naturellement à un sous-groupe de W_j .

On a le

Théorème 6. *Soient* χ *appartenant à* $\mathrm{Ker}\, j^{\wedge}$ *et* j *à* $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$. *Alors toute fonction appartenant à* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ *est à la fois* $m_{G,\chi,j}$ *et* $m_{G,j}$*-intégrable et, de plus,* $m_{G,\chi,j}$ *aussi bien que* $m_{G,j}$ *est une mesure de Radon tempérée sur* $\mathfrak{g}^*$.

Démonstration. Nous allons tout d'abord établir l'assertion concernant la mesure $m_{G,\chi,j}$. En fait d'après le lemme 27 il suffit de montrer que toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$ est $m_{G,\chi,j}$-intégrable et qu'il existe une semi-norme, η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que

$$(165)\qquad \left|\int_{\mathfrak{g}^*_{r,j}} \varphi(f)dm_{G,\chi,j}(f)\right| \leq \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

Mais ce dernier point est conséquence du fait suivant :

(166) il existe une semi-norme, η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que

$$\sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\, d\nu \leq \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

En effet supposons l'assertion (166) établie et soit φ appartenant à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$. Choisissons alors ψ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$ ne prenant que des valeurs positives et constante égale à 1 sur le support de φ. Comme ψ est, en particulier, borélienne et positive, on peut lui appliquer la deuxième des formules (164) et il résulte alors, de l'assertion (166), qu'elle est $m_{G,\chi,j}$-intégrable. La fonction φ étant, en valeur absolue, majorée par $\|\varphi\|_\infty\psi$, elle aussi est $m_{G,\chi,j}$-intégrable, et on est en droit de lui appliquer la deuxième des formules (164), d'où l'on tire la majoration

$$\left|\int_{\mathfrak{g}^*_{r,j}} \varphi\, dm_{G,\chi,j}\right| \leq \sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\, d\nu.$$

L'inégalité (165) est alors claire.

Soient Φ^+ un ensemble de racines positives dans Φ et $C(\Phi^+)$ la chambre de Weyl positive associée :

$$C(\Phi^+) = \left\{\nu\in\mathfrak{a}^* \ / \ \forall\alpha\in\Phi^+,\ \ \langle\nu,\ H_\alpha\rangle > 0\right\}.$$

Soit φ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$. Comme la fonction $\pi_{j,s}F_{j,\varphi}$ est H'_j-invariante on a

$$\sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\,d\nu = [W(\Phi)]\ A(\varphi),$$

avec

$$A(\varphi) = \sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi}} \int_{C(\Phi^+)} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ \pi_{j,s}(\mu+\nu)|\,d\nu.$$

Si Φ_I^+ est un ensemble de racines positives dans Φ_I, on note $C(\Phi_I^+)$ la chambre de Weyl positive associée,

$$C(\Phi_I^+) = \left\{\mu\in t^* \ / \ \forall\alpha\in\Phi_I^+,\ \langle\mu,\ iH_\alpha\rangle > 0\right\},$$

et $\chi_{\Phi_I^+}$ la fonction caractéristique de cette dernière. Soit alors $\psi_\varphi^{\Phi_I^+}$ la fonction définie sur $t^*\times C(\Phi^+)$ par

$$\psi_\varphi^{\Phi_I^+}(\mu,\nu) = \chi_{\Phi_I^+}(\mu)\ F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi'_j(\mu+\nu),\quad \forall\mu\in t^*,\quad \forall\nu\in C(\Phi^+),$$

où π'_j est le polynôme quotient de $\pi_{j,s}$ par le polynôme

$$\pi_{j,\mathbb{R}} = \prod_{\alpha\in\Phi^+} H_\alpha\ .$$

Si on pose

$$A^{\Phi_I^+}(\varphi) = \sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi}} \int_{C(\Phi^+)} |\psi_\varphi^{\Phi_I^+}\ (\mu,\nu)|\,\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)d\nu\ ,$$

il est clair que l'on a

$$A(\varphi) = \sum_{\Phi_I^+} A^{\Phi_I^+}\ (\varphi),$$

la somme étant étendue aux ensembles de racines positives dans Φ_I.

Soit $\check{\Phi}_I$ le système des co-racines de Φ_I. Alors il existe un entier naturel non nul, m, tel que $2i\pi m\check{\Phi}_I$ soit inclus dans $\tilde{t}_G$. Soient n la dimension réelle de $\mathfrak{t}$, q celle de $\mathfrak{a}$, s le rang de Φ_I et r celui de Φ. Soient $H_{s+1}, \dots, H_n$ des éléments de $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ constituant une base d'un supplémentaire dans $\mathfrak{t}$ du sous-espace engendré par $i\check{\Phi}_I$, et soit $\tilde{\mathfrak{t}}'_G$ le sous-réseau de $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ engendré par $2i\pi m\check{\Phi}_I$ et les vecteurs $H_{s+1}, \dots, H_n$. Alors $\tilde{\mathfrak{t}}'^*_G$ est un réseau de $\mathfrak{t}^*$ dont $\tilde{\mathfrak{t}}^*_G$ est un sous-réseau d'indice fini. Pour montrer l'assertion (166) il nous suffira donc d'établir, pour tout ensemble de racines positives Φ_I^+ dans Φ_I, l'existence d'une semi-norme η, continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, telle que

$$(167)\quad \sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}'^*_G} \int_{C(\Phi^+)} |\psi_\varphi^{\Phi_I^+}(\lambda+\mu,\nu)|\,\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)d\nu \le \eta(\varphi), \quad \forall\lambda\in\mathfrak{t}^*, \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

Soit donc Φ_I^+ un ensemble de racines positives dans Φ_I. Soit

$$B_I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \quad (\text{resp. } B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\})$$

la base de racines simples de Φ_I^+ (resp. Φ^+) et, $x_1, \dots, x_n$, (resp. $y_1, \dots, y_q$) le (resp. un) système de coordonnées sur $\mathfrak{t}^*$ (resp $\mathfrak{a}^*$) tel que

$$x_j = imH_{\alpha_j}, \quad 1\le j\le s, \quad \text{et} \quad x_j = (2\pi)^{-1} H_j, \quad s+1\le j\le n$$

$$(\text{resp. } y_j = H_{\beta_j}, \quad 1\le j\le r).$$

Nous identifions, à l'aide de ces systèmes de coordonnées, $\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{a}^*$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$; dans ces conditions $\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)$ s'identifie à $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$ et $\tilde{\mathfrak{t}}'^*_G$ au réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème 5 et le corollaire 2 de la proposition 5, pour tout φ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, la fonction $\psi_\varphi^{\Phi_I^+}\pi_{j,\mathbb{R}}$, considérée comme fonction sur $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$, est un élément de $\mathscr{E}_{n,r,q}$ et, de plus, l'application

$$\varphi \longrightarrow \psi_\varphi^{\Phi_I^+}\pi_{j,\mathbb{R}}$$

est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, dans $\mathscr{E}_{n,r,q}$. Alors l'existence d'une semi-norme η, continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, satisfaisant à la relation (167) est conséquence de ce que, d'après le corollaire du lemme 26, la formule (147) définit une semi-norme continue sur $\mathcal{E}_{n,r,q}$. Le théorème est donc vrai pour la mesure $m_{G,\chi,j}$.

Avant de poursuivre la démonstration du théorème, remarquons que les arguments développés ci-dessus et le corollaire du lemme 26 montrent que, si φ appartient à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, la série

$$\sum_{\mu\in\tilde{t}_G^*} \int_{\mathfrak{a}^*} |F_{j,\varphi}(\lambda+\mu+\nu)\pi_{j,s}(\lambda+\mu+\nu)|d\nu$$

converge uniformément sur tout compact de t^*, que sa somme $\Gamma_\varphi(\lambda)$ est une fonction continue et $\tilde{t}_G^*$-périodique de la variable λ dans t^*, et qu'il existe une semi-norme η continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que

$$\Gamma_\varphi(\lambda) \leq \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*), \quad \forall\lambda\in t^*.$$

De même que l'assertion du théorème concernant la mesure $m_{G,\chi,j}$ a découlé de la propriété (166), l'assertion concernant la mesure $m_{G,j}$ découlera de la propriété :

(166') il existe une semi-norme, η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que

$$\sum_{\mu\in t_{G,1}^*} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|d\nu \leq \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

Si λ appartient à $t_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap t^*$, l'application

$$T \longrightarrow e^{i\langle\lambda,\, T\rangle},$$

définie pour T dans $\tilde{t}_G$, passe au quotient pour définir un caractère χ_λ du groupe abélien discret $\mathrm{Ker}j\cap\mathrm{exp}t = \tilde{t}_G/t_G$. De plus, l'application,

$$\lambda \longrightarrow \chi_\lambda ,$$

induit un isomorphisme naturel du groupe quotient $[t_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap t^*]/\tilde{t}_G^*$ sur le groupe dual $(\mathrm{Ker}j\cap\mathrm{exp}t)\hat{}$. Alors on a, pour tout λ dans $t_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap t^*$,

$$\sum_{\mu\in\tilde{t}_{G,\chi_\lambda}^*} \int_{\mathfrak{a}^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ \pi_{j,s}(\mu+\nu)|d\nu = \Gamma_\varphi(\sigma_{\mathfrak{g},j} + \lambda), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*),$$

et, compte tenu de la première des relations (163), on voit que, si $\dot{d\lambda}$ désigne une mesure de Haar sur le groupe quotient $[\mathfrak{t}_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap \mathfrak{t}^*]/\tilde{\mathfrak{t}}_G^*$, il existe une constante positive, c, telle que, pour tout φ appartenant à $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, on ait

$$(168) \quad \sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} |F_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\,d\nu$$

$$= c\int_{[\mathfrak{t}_G^* + \mathfrak{a}(G)^*\cap\mathfrak{t}^*]/\tilde{\mathfrak{t}}_G^*} \Gamma_\varphi(\sigma_{\mathfrak{g},j} + \lambda)d\dot{\lambda}.$$

La propriété (166') est conséquence de la formule (168) et des propriétés des fonctions Γ_φ, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*)$, énoncées ci-dessus. Le théorème est donc démontré. Q.E.D.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 6.

Corollaire. *Soit* χ *un élément de* $\mathrm{Ker}\,j\hat{}$. *Alors tout élément de* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ *est à la fois* $m_{G,\chi}$ *et* m_G*-intégrable, et, de plus,* $m_{G,\chi}$, *aussi bien que* m_G, *est une mesure de Radon tempérée sur* $\mathfrak{g}^*$.

§ X - RAPPELS CONCERNANT LES INTÉGRALES ORBITALES CORRESPONDANT A UN GROUPE RÉDUCTIF PRESQUE ALGÉBRIQUE

Dans ce paragraphe nous allons donner la description, due à Harish-Chandra, des transformées de Fourier des intégrales orbitales pour un groupe réductif presque algébrique, et rappeler certains résultats de M. Duflo et M. Vergne concernant les constantes de Harish-Chandra liées à la description de ces transformées de Fourier.

Soient (R,j,R) un groupe réductif presque algébrique et $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R. Nous noterons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}$ son algèbre dérivée et D le sous-groupe analytique de R d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$. Alors on a les décompositions en somme directe

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{r}^* = \mathfrak{z}^* \oplus \mathfrak{d}^*.$$

Si X appartient à $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$, nous noterons X_z (resp. X_d) sa projection sur $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$) parallèlement à $\mathfrak{d}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$) ; de même, si λ appartient à $\mathfrak{r}^*$, nous noterons λ_z (resp. λ_d) sa restriction à $\mathfrak{z}$ (resp. $\mathfrak{d}$). Nous choisirons une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{r}$, notée $\mathfrak{j}_r$, dont nous désignerons par $\mathfrak{t}_r$ (resp. $\mathfrak{a}_r$) la partie anisotrope (resp. déployée).

Reprenons les notations introduites au § V, concernant les intégrales orbitales pour un groupe réductif, et, en particulier, soit W_R le groupe de Weyl de $\mathfrak{j}_r$ dans R. Pour tout élément w du groupe quotient $W_R/W_{\overset{\circ}{R}}$, nous choisirons un de ses représentants, $\tilde{w}$, dans W_R ; alors il est clair que pour T dans $\mathfrak{j}_r$, la $\overset{\circ}{R}$-orbite de $\tilde{w}T$ ne dépend que de l'élément w. Dans ces conditions il n'est pas dificile de démontrer le

Lemme 28. *Soit* T *appartenant à* $\mathfrak{t}_r$ *. Alors on a les relations suivantes*

$$(169) \qquad \tilde{M}_{R,T} = \left[W_R/W_{\overset{\circ}{R}}\right]^{-1} \sum_{w\in W_R/W_{\overset{\circ}{R}}} \tilde{M}_{\overset{\circ}{R},\tilde{w}T}$$

$$(170) \qquad \tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},T}(\lambda) = e^{-i\langle T_z,\, \lambda\rangle}\, \tilde{\Theta}_{D,T_d}(\lambda_d), \quad \forall\lambda\in\mathfrak{r}^*.$$

Si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{r})$, on pose

$$\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a},$$

et on note Φ le système des racines réelles, de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{r}$, et $W(\Phi)$ le groupe de Weyl de Φ. Si Φ^+ est un ensemble de racines positives dans Φ, on note $C(\Phi^+)$ la chambre de Weyl dans $\mathfrak{a}^*$ correspondante :

$$C(\Phi^+) = \left\{\nu\in\mathfrak{a}^* \;/\; \nu(H_\alpha) > 0, \quad \forall\alpha\in\Phi^+\right\}.$$

Soit α appartenant à Φ. On choisit des éléments X_α et $X_{-\alpha}$ dans $\mathfrak{s}$, de poids respectif α et $-\alpha$ relativement à $\mathfrak{j}$, et tels que

$$[X_\alpha\,,\, X_{-\alpha}] = H_\alpha\,,$$

où H_α est, comme d'habitude, la coracine de α dans $\mathfrak{j}$. Alors

$$\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \oplus \mathrm{Ker}\alpha$$

est une sous-algèbre de Cartan, notée $\mathfrak{h}'$, de $\mathfrak{r}$ dont

$$\mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \oplus \mathfrak{t} \text{ (resp. } \mathfrak{a} \cap \mathrm{Ker}\alpha)$$

est la partie anisotrope (resp. déployée), notée $\mathfrak{t}'$ (resp. $\mathfrak{a}'$). Soit c_α l'application linéaire de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}$ telle que

$$c_\alpha(X) = X, \quad \forall X\in\mathrm{Ker}\alpha$$

$$c_\alpha(H_\alpha) = i(X_\alpha - X_{-\alpha}).$$

Alors c_α est la restriction à $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ de l'action adjointe d'un élément de R. Si β est une racine de Φ, nulle sur H_α , $\beta' = \beta\circ c_\alpha^{-1}$ est un élément de Φ', le système des racines de $\mathfrak{j}'$ dans $\mathfrak{r}$, et en fait, c'est l'unique élément de Φ' tel que sa coracine dans $\mathfrak{j}'$ soit H_β. L'application $\beta \longrightarrow \beta'$ est une bijection, de l'orthogonal de H_α dans Φ sur Φ'. Si Φ^+ est un ensemble de racines positives dans Φ, l'image, par cette application, de l'orthogonal de H_α dans Φ^+ est un ensemble de racines positives dans Φ', que l'on note Φ'^{+}. Enfin on a

$$c_\alpha(j_{\mathbb{R}}) = j'_{\mathbb{R}} .$$

Nous notons alors $\mathcal{B}_R$ l'espace vectoriel des fonctions, b, des trois variables, j un élément de car(r), Φ^+ un ensemble de racines positives dans Φ, et Y un élément de $ij_{\mathbb{R}}$, qui satisfont aux conditions suivantes :

(171) (*i*) pour tout élément r de R, on a

$$b(rj,\ r\Phi^+,\ rY) = b(j,\ \Phi^+,\ Y),$$

(171) (*ii*) si α est une racine simple dans Φ^+, on a

$$b(j,\Phi^+,Y) + b(j,\Phi^+,s_\alpha Y) = b(j',\Phi'^{+},c_\alpha Y) + b(j',\Phi'^{+},c_\alpha s_\alpha Y),$$

où s_α désigne la symétrie par rapport à la racine α,

(171) (*iii*) si on écrit l'élément Y de $ij_{\mathbb{R}}$ sous la forme

$$Y = Y_0 - i\pi y,$$

avec Y_0 dans $\mathfrak{t}$ et y dans $\mathfrak{a}$, on a

$$b(j,\ \Phi^+,\ Y) = 0 \ \text{ dès que } y \text{ n'appartient pas à } \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{R}^+ H_\alpha ,$$

où $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0,+\infty[$.

Lorsque j est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de r, Φ est vide, et Φ^+ est omis de la notation. La condition (171) (*iii*) s'interprète alors de la manière suivante :

$$b(j,Y) = 0, \ \text{ dès que } y \text{ est non nul.}$$

Le lemme suivant regroupe, parfois en les généralisant de manière évidente, les résultats des lemmes 1, 2, 3 et 6 de la deuxième partie de [Du-Ve].

Lemme 29. *Soit* b *appartenant à* $\mathcal{B}_R$. *Alors*

(i) la fonction $b(j_r\ ,.)$ *est une fonction* W_R*-invariante qui détermine* b,

(ii) si $b(j,\Phi,Y)$ *est non nul, et si on écrit*

$$Y = Y_0 - i\pi y$$

avec Y_0 *dans* $\mathfrak{t}$ *et* y *dans* $\mathfrak{a}$, *il existe* w *dans* $W(\Phi)$ *tel que*

$$wy = -y,$$

(iii) si $b(j,\Phi^+,Y)$ *est non nul, il existe* r *appartenant à* R *tel que*

$$r.j = j_r \quad et \quad b(j_r\,,\, r.Y) \neq 0.$$

De plus il existe un nombre positif d, *tel que pour tout* b *dans* $\mathcal{B}_R$ *on ait*

$$(172) \qquad |b(j,\Phi^+,Y)| \leq d \sup_{R.Y\cap j_r} |b(j_r\,,\,X)|.$$

D'après les résultats de Harish-Chandra, si T appartient à t_r il existe une fonction $b_{R,T}$ dans $\mathcal{B}_R$ telle que

$$(173) \qquad \tilde{\Theta}_{R,T}(\lambda) = \sum_{y\in ij_{\mathbb{R}}} b_{R,T}(j,\Phi^+,Y)\, e^{-i\langle Y,\, \lambda\rangle},$$

pour tout λ appartenant à j^* tel que $\lambda_{|\mathfrak{a}}$ soit dans $C(\Phi^+)$, la fonction $b_{R,T}$ étant uniquement déterminée par la condition initiale :

$$(174) \qquad \begin{aligned} &b_{R,T}(j_r\,,\, Y) = 0, \quad \text{si } Y \text{ n'appartient pas à } W_R.T \\ &b_{R,T}(j_r\,,\, Y) = [W_R.T]^{-1}, \quad \text{si } Y \text{ appartient à } W_R.T. \end{aligned}$$

On remarquera que, d'après la relation (174) et le lemme 29 (*iii*), la sommation intervenant dans (173) ne porte que sur un nombre fini d'indices.

En fait le résultat que nous venons d'énoncer a été établi par Harish-Chandra lorsque R est supposé connexe ; le résultat dans le cas général s'en déduit facilement en utilisant le lemme 28.

Si j appartient à $car(r)$, on note j_Z l'ensemble des éléments X de $ij_{\mathbb{R}}$ tels que

$$\alpha(X) \in 2i\pi\mathbb{Z}, \quad \forall\alpha\in\Delta_{r,j}\,, \quad et \quad \exp X'_Z \in D.$$

où X'_Z désigne la projection de X_Z sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ parallèlement à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$.
On pose alors

$$P_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{N}\, H_\alpha$$

$$(175) \qquad \mathfrak{a}_Z = \left\{X\in P_{\mathfrak{a}} \;/\; (-i\pi X+\mathfrak{t}) \cap j_Z \neq \emptyset\right\}$$

$$\mathfrak{t}_Z = \mathfrak{t} \cap j_Z\,.$$

Soit Z_D le centre de D. Alors $\overline{R} = R/j(Z_D)$ est un groupe algébrique et, si $\overline{j}$ est le morphisme de R dans $\overline{R}_{\mathbb{R}}$ induit par j, $(R, \overline{j}, \overline{R})$ est un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$, que l'on note $\overline{R}$. Si on pose $\tilde{E}_{\overline{R}} = E_{R,Z}$, on voit alors sans peine, qu'avec les notations du § IX, on a

$$\mathfrak{t}_Z = E_{R,Z} \cap \mathfrak{t} = \tilde{\mathfrak{t}}_{\overline{R}} ,$$

si bien que $\mathfrak{t}_Z$ est un réseau de $\mathfrak{t}$. D'autre part on a

$$\mathfrak{t}_Z = (\mathfrak{t}_Z \cap \mathfrak{d}) \oplus (\mathfrak{t}_Z \cap \mathfrak{z}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{j}_Z = (\mathfrak{j}_Z \cap \mathfrak{d}) \oplus (\mathfrak{t}_Z \cap \mathfrak{z}) \ ;$$

d'où il découle, qu'en fait

$$(176) \qquad \mathfrak{a}_Z = \left\{ X \in P_{\mathfrak{a}} \ / \ (-i\pi X + \mathfrak{t} \cap \mathfrak{d}) \cap (\mathfrak{j}_Z \cap \mathfrak{d}) \neq \emptyset \right\}.$$

Le résultat suivant se démontre de la même manière que le lemme 4 de la deuxième partie de [Du-Ve] :

Lemme 30. *Soient* T *appartenant à* $\mathfrak{t}_{\mathfrak{r},Z}$, $\mathfrak{j}$ *un élément de* $\mathrm{car}(\mathfrak{r})$, Φ^+ *un ensemble de racines positives dans* Φ, *et* Y *un élément de* $i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ *tels que* $b_{R,T}(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y)$ *soit non nul. Alors*

(i) $Y \in \mathfrak{j}_Z$

(ii) si on écrit $Y = Y_0 - i\pi y$ *avec* Y_0 *dans* $\mathfrak{t}$ *et* y *dans* $\mathfrak{a}$, y *appartient à* $\mathfrak{a}_Z$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme symplectique κ, et soit $\kappa_{\mathbb{C}}$ la forme symplectique sur $E_{\mathbb{C}}$ complexifiée de la forme κ. On appelle lagrangien positif pour E, un sous-espace lagrangien $\mathfrak{l}$ de $E_{\mathbb{C}}$ tel que, pour tout élément X de $\mathfrak{l}$, le nombre $i\kappa_{\mathbb{C}}(X, \overline{X})$ soit positif ou nul.

Si F est un sous-espace vectoriel de E nous noterons $Sp(E)_F$ le sous-groupe de Sp(E) constitué des éléments laissant F invariant, et $Mp(E)_F$ l'image inverse de $Sp(E)_F$ dans Mp(E).

Alors M. Duflo a défini sur le groupe Mp(E) une fonction δ^E, satisfaisant aux conditions suivantes (cf [Du-3])

(177) (i) $\delta^E(\varepsilon) = -1$,

(177) (*ii*) si x appartient à $Mp(E)$, et si l est un lagrangien positif x-invariant,

$$\delta^E(x)^2 = \det x_l \, |\det x_l|^{-1},$$

(177) (*iii*) si l est un lagrangien positif, la restriction de δ^E à $Mp(E)_l$ est un caractère de ce dernier.

Tout élément x de $Mp(E)$ laisse invariant un lagrangien positif de E. D'autre part si l est un lagrangien positif de E totalement complexe, *i.e.* tel que $l \cap \bar{l} = 0$, les conditions (177) (*i*), (*ii*), et (*iii*) déterminent entièrement la restriction de δ^E à $Mp(E)_l$.

Si L est un groupe de Lie, et h un morphisme de L dans $Sp(E)$, nous noterons $\delta^{h,E}$, ou plus simplement δ^E, la fonction définie sur L^E par

$$(178) \qquad \delta^E(l,x) = \delta^E(x), \quad \forall (l,x) \in L^E .$$

Si $\mathfrak{l}$ est l'algèbre de Lie de L et si l appartient à $\mathfrak{l}^*$, nous noterons δ^l la fonction définie comme ci-dessus pour le groupe $L(l)^l$.

Nous supposerons jusqu'à la fin de ce paragraphe que le groupe presque algébrique réductif (R,j,R) est connexe.

Soit λ appartenant à $\mathfrak{r}^*_R$, de telle sorte que $\mathfrak{r}(\lambda)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{r}$, que nous appellerons $\mathfrak{j}$, et que $R(\lambda)$ est le sous-groupe de Cartan, J, correspondant, dont nous noterons T le sous-groupe maximal compact modulo $\operatorname{Ker} j \cap J$, et A le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$. On a $J = TA$.

Si $\mathfrak{l}$ est un sous-espace $\mathfrak{j}$-invariant de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$, on notera $\Delta_{\mathfrak{l}}$ le sous-ensemble de $\Delta_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$ constitué des racines de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{l}$. Un tel sous-espace est automatiquement J-invariant.

Rappelons qu'une racine imaginaire, α, de $\Delta_{\mathfrak{r},\mathfrak{j}}$ est dite :

– compacte, si l'intersection de $\mathfrak{r}$ avec la sous-algèbre,

$$\mathfrak{r}^{\alpha}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}H_{\alpha} \oplus \mathfrak{r}^{-\alpha}_{\mathbb{C}},$$

de $\mathfrak{r}_{\mathbb{C}}$ est une forme compacte de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$,

– non compacte dans le cas contraire.

Ceci étant précisé, un sous-espace j-invariant, l, de $r_{\mathbb{C}}/j_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien de r/j pour la forme symplectique κ^{λ}, si et seulement si Δ_l satisfait à la condition suivante :

(179) $\Delta_{r,j}$ est la réunion disjointe de Δ_l et $-\Delta_l$

et, dans ce cas, l est positif si et seulement si Δ_l satisfait, de plus, aux conditions :

(180) (*i*) si α est une racine imaginaire non compacte de Δ_l, $i\lambda(H_{\alpha})$ est strictement positif

(180) (*ii*) si α est une racine imaginaire compacte de Δ_l, $i\lambda(H_{\alpha})$ est strictement négatif

(180) (*iii*) si α est une racine complexe de Δ_l, $\bar{\alpha}$ appartient à Δ_l.

Si l est un lagrangien j-invariant de $r_{\mathbb{C}}/j_{\mathbb{C}}$, on a vu qu'il est J-invariant, et, par suite, δ^{λ} est un caractère de J. Si on note ρ_l la demi-somme des éléments de Δ_l, et σ_l la restriction de ρ_l à $\mathfrak{t}$, on voit sans peine que, pour tout lagrangien positif j-invariant de $r_{\mathbb{C}}/j_{\mathbb{C}}$, on a

$$(181) \qquad d\delta^{\lambda} = \sigma_l .$$

D'autre part, l'application,

$$X \longrightarrow \exp \sigma_l(X),$$

définit un caractère de $\tilde{\mathfrak{t}}_R$ qui ne dépend pas du choix du lagrangien, l, j-invariant de $r_{\mathbb{C}}/j_{\mathbb{C}}$. Il résulte de là que l'on a, pour tout T appartenant à $\tilde{\mathfrak{t}}_R$,

$$(182) \qquad \delta^{\lambda}(\exp_{J^{\lambda}} T) = \tilde{I}_R(T).$$

Maintenant définissons $\tilde{X}_R(\lambda)$ comme étant l'ensemble des représentations unitaires irréductibles, τ, de $J = R(\lambda)$ dont la restriction à $\mathring{J}$ est un multiple du caractère de ce dernier ayant pour différentielle

$$i\lambda_{|j} + d\delta^{\lambda}.$$

Alors, si τ appartient à $X_R(\lambda)$, la représentation $\delta^{\lambda}\tau$ de J^{λ} passe au quotient à J, et définit un élément de $\tilde{X}_R(\lambda)$; de plus, l'application $\tau \longrightarrow \delta^\lambda\tau$ est une bijection de $X_R(\lambda)$ sur $\tilde{X}_R(\lambda)$.

Si χ est un élément de $\mathrm{Ker}j\hat{}$ tel que λ appartienne à $r^*_{R,\chi}$, on note $\tilde{X}_{R,\chi}(\lambda)$ le sous-ensemble de $\tilde{X}_R(\lambda)$ constitué des représentations τ satisfaisant à la condition

$$\tau(\gamma) = \chi(\gamma)\ \mathrm{Id}, \quad \forall\gamma\in\mathrm{Ker}j.$$

Alors l'application $\tau \longrightarrow \delta^\lambda\tau$ induit une bijection de $X_{R,\chi}(\lambda)$ sur $\tilde{X}_{R,\chi}(\lambda)$.

Soit α appartenant à Φ, et soit γ_α l'élément de R défini par

$$(183) \qquad \gamma_\alpha = \exp_R \pi(X_\alpha - X_{-\alpha}).$$

Alors γ_α appartient à T et la paire $\{\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\}$ ne dépend pas du choix des vecteurs X_α et $X_{-\alpha}$ de r, de poids respectifs α et $-\alpha$ par rapport à j, et tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

Si σ est une représentation unitaire irréductible de J, l'opérateur $\sigma(\gamma_\alpha)$ a au plus deux valeurs propres qui sont complexes conjuguées : on note alors $y_\sigma(\alpha)$ la partie réelle commune des valeurs propres de $\sigma(\gamma_\alpha)$.

D'autre part on note n_α l'entier défini par

$$(184) \qquad n_\alpha = \frac{1}{2} \sum_\beta \beta(H_\alpha),$$

la somme étant étendue aux racines β dans $\Delta_{r,j}$ telles que $\beta+\bar{\beta}$ appartienne à $\mathbb{R}^*\alpha$, et on pose

$$(185) \qquad \varepsilon_\alpha = (-1)^{n_\alpha}.$$

Soit Φ^+ un ensemble de racines positives dans Φ. Si τ appartient à $\tilde{X}_R(\lambda)$, on pose

$$(186) \qquad \tilde{\zeta}_R(\lambda,\tau) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{|\mathrm{sh}\langle\pi\lambda, H_\alpha\rangle|}{\mathrm{ch}\langle\pi\lambda, H_\alpha\rangle - \varepsilon_\alpha y_\tau(\alpha)}$$

et, si τ appartient à $X_R(\lambda)$, on pose

$$(187) \qquad \zeta_R(\lambda,\tau) = \tilde{\zeta}_R(\lambda,\delta^\lambda\tau).$$

Comme la notation l'indique, les nombres $\tilde{\zeta}_R(\lambda,\tau)$ et $\zeta_R(\lambda,\tau)$ ne dépendent pas du choix de Φ^+. Pour ce qui précède on pourra consulter [Du-3] ou

[Du-Ve].

Soit χ un élément de $\mathrm{Ker}\,j^\wedge$ et supposons que λ appartienne à $\mathfrak{r}^*_{R,\chi}$. Avec les notations ci-dessus on pose

$$(188) \qquad q_{R,\chi}(\lambda) = [J : \mathrm{Ker}\,j.\mathring{J}]^{-1} \sum_{\tau \in X_{R,\chi}(\lambda)} (\dim \tau)^2 \zeta_R(\lambda,\tau),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(188') \qquad q_{R,\chi}(\lambda) = [J : \mathrm{Ker}\,j.\mathring{J}]^{-1} \sum_{\tau \in \tilde{X}_{R,\chi}(\lambda)} (\dim \tau)^2 \tilde{\zeta}_R(\lambda,\tau).$$

Alors la fonction $q_{R,\chi}$ ainsi définie sur $\mathfrak{r}^*_{R,\chi}$, est continue et R-invariante.

Si χ appartient à $\mathrm{Ker}\,\bar{j}^\wedge$, on définit la fonction $b_{R,\chi}$ élément de $\mathcal{B}_R$, en posant

$$(189) \qquad b_{R,\chi}(j,\Phi^+,Y) = \sum_{T \in \mathfrak{t}_{r,Z}} \tilde{\chi}_{\bar{R}}(T)\, b_{R,T}(j,\Phi^+,Y).$$

En fait, il résulte du lemme 29, que la somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls et que, de plus, il existe une constante positive, M, telle que

$$(190) \qquad |b_{R,\chi}(j,\Phi^+,Y)| \leq M, \quad \forall j \in \mathrm{car}(\mathfrak{r}), \quad \forall \Phi^+ \subset \Phi, \quad \forall Y \in i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \forall \chi \in \mathrm{Ker}\,j^\wedge.$$

Le résultat suivant se démontre comme le lemme 5 de la partie II de [Du-Ve].

Lemme 31. *Avec les notations ci-dessus, on a pour* Y *dans* $i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ *et* X *dans* $\mathfrak{t}_Z$

$$(191) \qquad b_{R,\chi}(j,\Phi^+,Y+X) = \tilde{\chi}_{\bar{R}}(X)\, b_{R,\chi}(j,\Phi^+,Y).$$

Soit θ une application de $\mathfrak{a}_Z$ à valeurs dans $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{s}$ telle que, pour tout y appartenant à $\mathfrak{a}_Z$, $\theta(y)-i\pi y$ appartienne à $\mathfrak{j}_Z \cap \mathfrak{s}$; une telle application existe grâce à (176). Si μ appartient à $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{\bar{R},\chi}$, on définit une fonction $c_{R,\chi}(j,\Phi^+,\mu,.)$ sur $\mathfrak{a}_Z$ en posant

$$(192) \quad c_{R,\chi}(j,\Phi^+,\mu,y) = b_{R,\chi}(j,\Phi^+,\theta(y)-i\pi y)\, e^{-i\langle\mu,\ \theta(y)\rangle}, \quad \forall y\in\mathfrak{a}_Z.$$

Il résulte du lemme 31 et de la définition de $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{\overline{R},\chi}$, que la fonction $c_{R,\chi}(j,\Phi^+,\mu,.)$ ne dépend pas du choix de l'application θ ayant les propriétés ci-dessus énoncées.

On a alors le

Lemme 32. *Soit* χ *un élément de* $\mathrm{Ker}\,\bar{j}^\wedge$, *et* j *un élément de* $\mathrm{car}(r)$. *Alors on a*

$$(193) \quad q_{\overline{R},\chi}(\mu+\nu) = \sum_{y\in\mathfrak{a}_Z} c_{R,\chi}(j,\Phi^+,\mu,y)e^{-\pi\langle\nu,\ y\rangle}, \quad \forall\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{\overline{R},\chi}, \quad \forall\nu\in C(\Phi^+),$$

la série à droite du signe égal étant absolument convergente.

Démonstration. La convergence absolue de la série résulte immédiatement de la majoration (190).

Lorsque R est semi-simple la formule (193) est une conséquence de III, théorème 1 et II (81) de [Du-Ve]. Nous allons nous ramener à ce cas.

Soient $\mathbf{D}$ le sous-groupe dérivé de $\mathbf{R}$, $\overline{D} = D/j(Z_D)$ et j_d (resp. $\bar{j}_d$) la restriction de j (resp. $\bar{j}$) à D. Alors $(D,\ j_d\ ,\ \mathbf{D})$ est un groupe presque algébrique tel que $\overline{D} = (D,\ \bar{j}_d\ ,\ \overline{\mathbf{D}})$.

Désignons par χ_d la restriction de χ à $\mathrm{Ker}\,\bar{j}_d$. Alors l'application $\lambda \longrightarrow \lambda_d$ induit une surjection de $r^*_{\overline{R},\chi}$ sur $\delta^*_{\overline{D},\chi_d}$, et les espaces symplectiques

$$(r/j,\ \kappa^\lambda) \quad \text{et} \quad (\delta/j\cap\delta,\ \kappa^{\lambda_d})$$

sont naturellement isomorphes, si bien que l'application qui, à une représentation de J, associe sa restriction à $J\cap D$, induit une bijection de $\tilde{X}_{\overline{R},\chi}(\lambda)$ sur $\tilde{X}_{\overline{D},\chi_d}(\lambda_d)$.

De plus, si α appartient à Φ, la paire d'éléments, $\{\gamma_\alpha\ ,\ \gamma_\alpha^{-1}\}$, de J, est aussi la paire correspondante de $J\cap D$. Enfin les groupes quotients

$$J/\mathrm{Ker}\,\bar{j}.\mathring{J} \quad \text{et} \quad J \cap D/\mathrm{Ker}\,\bar{j}_d.J \mathring{\cap} D$$

sont naturellement isomorphes.

De toutes ces remarques résulte que l'on a, pour λ appartenant à $r^*_{\overline{R},\chi}$,

$$q_{\overline{R},\chi}(\lambda) = q_{\overline{D},\chi_d}(\lambda_d).$$

Dans la suite, si j est un élément de car(r), nous noterons j_d son intersection avec $\mathfrak{d}$.

Comme on a manifestement,

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d})_Z = \mathfrak{a}_Z$$

il nous suffit, pour établir la formule (193), de montrer que, pour μ dans $\tilde{t}^*_{\overline{R},\chi}$ et y dans $\mathfrak{a}_Z$, on a

$$c_{R,\chi}(j,\Phi^+,\mu,y) = c_{D,\chi_d}(j_d,\Phi^+,\mu_d,y).$$

Compte tenu de la définition des fonctions $c_{R,\chi}$ et c_{D,χ_d}, ceci revient à établir que, pour tout Y appartenant à $j_Z \cap \mathfrak{d}$, on a

$$(194) \qquad b_{R,\chi}(j,\Phi^+,Y) = b_{D,\chi_d}(j_d,\Phi^+,Y).$$

Or il résulte de la forme (170) du lemme 28 que l'on a

$$b_{R,T}(j,\Phi^+,Y) = \delta_{Y_Z,T_Z}\, b_{D,T_d}(j_d,\Phi^+,Y_d), \quad \forall T \in t_{r,Z}, \quad \forall Y \in ij_{\mathbb{R}}$$

où $\delta_{a,b}$ désigne le symbole de Krönecker des lettres a et b. Alors la formule (194) est une conséquence facile de ce dernier résultat, de la définition (187) des fonctions $b_{R,\chi}$ et b_{D,χ_d}, et de ce que $t_{r,Z} = t_{\mathfrak{d},Z} \oplus (\mathfrak{z} \cap t_{r,Z})$.

Q.E.D.

Remarque. Si Γ est un groupe abélien discret, et si Δ est un sous-groupe de Γ, nous noterons $\Delta^{\perp}$ le sous-groupe fermé de $\Gamma^{\wedge}$ constitué des caractères triviaux sur Δ ; si χ_0 appartient à $\Delta^{\wedge}$, nous noterons $(\Gamma^{\wedge})_{\chi_0}$ le sous-ensemble de $\Gamma^{\wedge}$ constitué des caractères dont la restriction à Δ est χ_0. Alors $(\Gamma^{\wedge})_{\chi_0}$ est une classe modulo $\Delta^{\perp}$, et on a $(\Gamma^{\wedge})_1 = \Delta^{\perp}$.

Si λ appartient à $\mathfrak{r}_R^*$ nous noterons $(\mathrm{Ker}\, j^\wedge)_\lambda$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ker}\, j^\wedge$, constitué des éléments χ de $\mathrm{Ker}\, j^\wedge$ tels que λ appartienne à $\mathfrak{r}_{R,\chi}^*$; si χ_λ désigne le caractère de $\mathrm{Ker}\, j \cap \exp \mathfrak{t}$ tel que

$$\chi_\lambda(\exp T) = e^{i\langle\lambda,\, T\rangle}\zeta_r(T),$$

on a $(\mathrm{Ker}\, j^\wedge)_\lambda = (\mathrm{Ker}\, j^\wedge)_{\chi_\lambda}$.

Si χ est un élément de $\mathrm{Ker}\, j^\wedge$ et λ de $\mathfrak{r}_{R,\chi}^*$, il est immédiat que $\tilde{X}_{R,\chi}(\lambda)$ est la réunion disjointe des $\tilde{X}_{\overline{R},\chi'}(\lambda)$, pour χ' parcourant $(\mathrm{Ker}\, \bar{j}^\wedge)_\chi \cap (\mathrm{Ker}\, \bar{j}^\wedge)_\lambda$, ensemble que l'on note $(\mathrm{Ker}\, \bar{j}^\wedge)_{\chi,\lambda}$. Un simple calcul montre que, dans ces conditions, on a

$$(195) \qquad q_{R,\chi}(\lambda) = \frac{[\mathrm{Ker}\, \bar{j} \cap \mathring{J} : \mathrm{Ker}\, j \cap \mathring{J}]}{[\mathrm{Ker}\, \bar{j} : \mathrm{Ker}\, j]} \sum_{\chi' \in (\mathrm{Ker}\, \bar{j}^\wedge)_{\chi,\lambda}} q_{\overline{R},\chi'}(\lambda).$$

Maintenant si λ appartient à $\mathfrak{r}_R^*$, il n'est pas difficile de voir, en utilisant le lemme 32, les relations (189), (192) et (195), et le fait que la majoration (190) est uniforme par rapport à χ' parcourant $\mathrm{Ker}\, j^\wedge$, que le nombre $q_{R,\chi}(\lambda)$ est une fonction continue de la variable χ dans $(\mathrm{Ker}\, j^\wedge)_\lambda$, si bien que l'on peut définir un nombre $q_R(\lambda)$, en posant

$$(196) \qquad q_R(\lambda) = \int_{(\mathrm{Ker}\, j \cap \exp \mathfrak{t})^\perp} q_{R,\chi\chi_\lambda}(\lambda)\, d\chi$$

où, maintenant χ_λ désigne un élément de $(\mathrm{Ker}\, j^\wedge)_\lambda$, et où $d\chi$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur $(\mathrm{Ker}\, j \cap \exp \mathfrak{t})^\perp$.

On montre facilement que, si $\mathrm{Ker}\, j$ est fini, on a

$$(196)' \qquad q_R(\lambda) = [J : \mathrm{Ker}\, j.\mathring{J}]^{-1} \sum_{\tau \in X_R(\lambda)} (\dim \tau)^2\, \zeta_R(\lambda,\tau).$$

Enfin il est facile de montrer que la fonction q_R est, dans tous les cas, continue sur $\mathfrak{r}_R^*$.

§ XI - LES FONCTIONS q_G ET $q_{G,\chi}$ ET LA FORMULE DE POISSON-PLANCHEREL POUR G

Soit f un élément de $\mathfrak{g}_G^* \cap \mathcal{V}$. Le groupe $(G(f), j, G(f))$ est presque algébrique. On choisit un facteur réductif J, de G(f) et on note J, le facteur réductif correspondant de G(f), et j son algèbre de Lie, qui est donc un élément de $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. Le groupe $(G(u_f), j, G(u_f))$ étant lui aussi presque algébrique, on choisit un facteur réductif **R** de $G(u_f)$ contenant J, et on note R le facteur réductif de $G(u_f)$ qui lui correspond, de telle sorte que (R,j,R) est un groupe presque algébrique. On appelle r l'algèbre de Lie de R et λ la restriction de f à r. Comme f est un élément de $\mathcal{V}$, il existe un facteur réductif S de G tel que $R = S(u_f)$, et on a alors,

$$J = R(\lambda).$$

Ainsi j est une sous-algèbre de Cartan de r, et le système des racines de $j_{\mathbf{C}}$ dans $r_{\mathbf{C}}$ n'est autre que $\Delta_{j,s}$ (Voir les lemmes 5 et 6 § III).

Soit j_0 la restriction de j à $\mathring{R}$. Alors $(\mathring{R}, j_0, \mathring{R})$ est un groupe presque algébrique, et, si on pose

$$J_0 = \mathring{R}(\lambda) = J \cap \mathring{R},$$

J_0 est le sous-groupe de Cartan de $\mathring{R}$ d'algèbre de Lie j.

Si χ appartient à $\mathrm{Ker} j\hat{}$, on note χ_0 sa restriction à $\mathrm{Ker} j_0$. On a alors le

Lemme 33. *Soient* χ *appartenant à* $\mathrm{Ker} j\hat{}$, *et* f *à* $\mathfrak{g}_G^* \cap \mathcal{V}$. *Alors* f *appartient à* $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ *si et seulement si* λ *appartient à* r_{R,χ_0}^* *et, si ces* *conditions sont satisfaites, le nombre* $q_{\circ\,R,\chi_0}(\lambda)$ *ne dépend pas des choix des facteurs réductifs respectifs,* J *de* G(f)*, et* R *de* $G(u_f)$*, tels que* J *soit contenu dans* R.

Démonstration. Nous avons vu que si f appartient à V, alors λ est un élément de $\mathfrak{r}_r^*$. Mais il est clair que, avec les notations ci-dessus, $\tilde{\mathfrak{t}}_G$ est égal à $\tilde{\mathfrak{t}}_{\circ R}$, si bien que, d'après (158) et (160), on a dans ces conditions,

$$f \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi} \text{ si et seulement si } f_{|\mathfrak{t}} \in \mu_\chi + \sigma_{\mathfrak{g},j} + \tilde{\mathfrak{t}}^*_G, \text{ et}$$

$$\lambda \in \mathfrak{r}^*_{R,\chi} \text{ si et seulement si } \lambda_{|\mathfrak{t}} \in \mu_\chi + \sigma_{\mathfrak{r},j} + \tilde{\mathfrak{t}}_G,$$

où μ_χ est un élément de $\mathfrak{t}^*$ tel que

$$e^{i\langle\mu_\chi,\ T\rangle} = \chi(\exp T),\quad \forall T \in \tilde{\mathfrak{t}}_G.$$

Cependant f et λ ont même restriction à $\mathfrak{t}$, tandis que, on l'a vu au cours de la démonstration du lemme 6, les racines de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(u_f)$, d'une part, et dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$, d'autre part, sont les mêmes et interviennent avec la même multiplicité, si bien que

$$\sigma_{\mathfrak{g},j} - \sigma_{\mathfrak{r},j}$$

est la restriction à $\mathfrak{t}$ d'une somme d'éléments de $\Delta_{\mathfrak{g},j}$ et, à ce titre appartient à $\tilde{\mathfrak{t}}^*_G$. Il est alors clair que les conditions,

$$f \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathfrak{r}^*_{R,\chi},$$

sont équivalentes. Ceci achève la démonstration de la première assertion du lemme.

Remarquons maintenant que $\overset{\circ}{J}$ est le tore connexe de G(f) d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$, et qu'à ce titre, il ne dépend pas du choix du facteur réductif J de G(f). De plus, comme $\overset{\circ}{J}$ est le sous-groupe de Cartan de $\overset{\circ}{R}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$, il est clair que J_0 est contenu dans $j^{-1}(\overset{\circ}{J})$; autrement dit J_0 est contenu dans l'intersection, notée J_1, des facteurs réductifs de G(f). Mais si N_f désigne le radical unipotent de G(f), pour que deux éléments de J_1 soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même image dans $G(f)/N_f$. Cependant il résulte du lemme 5 que N_f est égal à $G(f) \cap N$, si bien que

$G(f)/N_f$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de $S = G/N$, et que, par suite, pour que deux éléments de J_1 soient égaux il faut et il suffit qu'ils aient même image dans S. Comme l'image dans S du groupe R est le groupe $S(u_f)$, et, celle de J_0, est le sous-groupe de Cartan de $\overset{\circ}{S}(u_f)$ d'algèbre de Lie l'image de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, il est clair que J_0 ne dépend pas des choix de J et de R. On voit de même que si α appartient à Φ l'élément γ_α de J_0, défini par la formule (183), ne dépend pas, non plus, de ces choix. Enfin, c'est une conséquence des relations (179), (180) et (181) que, l'ensemble de représentations unitaires irréductibles, $\tilde{X}_{\circ\, R,\chi_0}(\lambda)$, de J_0 ne dépend pas de ces choix. Le lemme est alors démontré. Q.E.D.

Si χ appartient à $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{j}^{\wedge}$, on définit alors une fonction $q_{G,\chi}$ (resp. q_G) sur l'ensemble $\mathfrak{g}^*_{G,\chi} \cap V$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G \cap V$) en posant

$$(197) \qquad q_{G,\chi}(f) = q_{\circ\, R,\chi_0}(\lambda) \ \left(\text{resp. } q_G(f) = q_{\circ\, R}(f)\right).$$

Cette fonction est G-invariante, comme on le voit par transport de structure. Nous allons montrer que, si $\mathfrak{j}$ appartient à $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$, et W à $V^{\mathfrak{j}}/_\sim$, on a pour tout élément f de $\mathfrak{g}^*_{G,\chi} \cap W$ (resp. de $\mathfrak{g}^*_G \cap W$)

$$(197)' \qquad q_{G,\chi}(f) = q_{\circ\, S(W),\chi_0}(\lambda) \ \left(\text{resp. } q_G(f) = q_{\circ\, S(W)}(\lambda)\right),$$

où S est un facteur réductif de G, tel que son algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ contienne $\mathfrak{j}$, et où λ désigne la restriction de f à $\mathfrak{j}$.

Pour voir cela, remarquons, tout d'abord, que si f appartient à $\mathfrak{g}^*_{G,\chi} \cap W$ (resp. $\mathfrak{g}^*_G \cap W$), si S est un facteur réductif de G comme ci-dessus, et si on pose

$$f' = f_{|\mathfrak{s}(u_f)} + u_f \,,$$

élément que l'on considère, grâce à l'identification naturelle de $\mathfrak{s}(u_f)^*$ avec un sous-espace de $\mathfrak{s}^*$ décrite avant l'énoncé du lemme 5, comme un élément de $\mathfrak{g}^*$, alors $S(u_f)$ est un facteur réductif de $G(u_{f'})$ contenant un facteur réductif de $G(f')$ et, de plus $f_{|\mathfrak{s}(u_f)}$ est un élément de

$s(u_f)^{*j} = j^*$ égal à $f_{|j} = f'_{|j}$. En particulier on a

$$q_{G,\chi}(f') = q_{\overset{\circ}{S(u_f)},\chi_0}(\lambda) \;\big(\text{resp. } q_G(f') = q_{\overset{\circ}{S(u_f)}}(\lambda)\big),$$

si bien que, d'après la remarque 2 suivant la démonstration du théorème 1, notre assertion sera établie dès que l'on aura montré l'égalité

$$q_{G,\chi}(f) = q_{G,\chi}(f') \;\big(\text{resp. } q_G(f) = q_G(f')\big).$$

Cependant, comme R et $S(u_f)$ sont deux facteurs réductifs de $G(u_f)$, il existe un élément n de N tel que

$$n.R = S(u_f).$$

Dans ces conditions il vient

$$q_{G,\chi}(f) = q_{G,\chi}(n.f) = q_{\overset{\circ}{S(u_f)},\chi}(n.f_{|s(u_f)})$$

$$\big(\text{resp. } q_G(f) = q_G(n.f) = q_{\overset{\circ}{S(u_f)}}(n.f_{|s(u_f)})\big).$$

Notre assertion résulte alors de ce que

$$n.f_{|s(u_f)} = f_{|s(u_f)} = f'_{|s(u_f)}.$$

De la formule (197)' résulte que la fonction $q_{G,\chi}$ (resp. q_G) est continue sur $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{G,\chi} \cap \mathcal{V}$ (resp. $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G \cap \mathcal{V}$). Comme $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{G,\chi} \cap \mathcal{V}$ (resp. $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G \cap \mathcal{V}$) est de complémentaire $m_{G,\chi}$ (resp. m_G)-négligeable dans $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{G,\chi}$ (resp. $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G$), il s'en suit que la fonction $q_{G,\chi}$ (resp. q_G) est une fonction borélienne $m_{G,\chi}$ (resp. m_G)-presque partout définie sur $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{G,\chi}$ (resp. $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G$).

Si f appartient à $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G$, on note $(\mathrm{Ker} j^\wedge)_f$, le sous-ensemble des éléments χ de $\mathrm{Ker} j^\wedge$ tels que f appartienne à $\overset{*}{\mathfrak{g}}_{G,\chi}$. Grâce au lemme 33, on voit que, si f appartient à $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G \cap \mathcal{V}$, χ est un élément de $(\mathrm{Ker} j^\wedge)_f$ si et seulement si χ_0 est un élément de $(\mathrm{Ker} j_0^\wedge)_\lambda$. D'autre part $(\mathrm{Ker} j^\wedge)_f$ est une classe modulo $(\mathrm{Ker} j \cap \exp \mathfrak{t})^\perp$ dans $\mathrm{Ker} j^\wedge$.

Soit f un élément de $\overset{*}{\mathfrak{g}}_G \cap \mathcal{V}$. En utilisant la formule (197)' et la formule (196) du paragraphe X, on voit que l'on a

$$(198) \qquad q_G(f) = \int_{(\mathrm{Ker} j \cap \exp \mathfrak{t})^\perp} q_{G,\chi_f \chi}(f)\, d\chi\ ,$$

où χ_f est un élément de $(\mathrm{Ker}\,j^{\wedge})_f$, et $d\chi$ désigne la mesure de Haar de masse totale 1 sur $(\mathrm{Ker}\,j \cap \exp \mathfrak{t})^{\perp}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de cet article.

Théorème 7. *Soit* χ *un élément de* $\mathrm{Ker}\,j^{\wedge}$.

(i) Si φ *est une fonction dans* $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, *elle est intégrable pour les mesures* $q_{G,\chi}dm_{G,\chi}$ *et* $q_G dm_G$. *De plus, les applications*

$$\varphi \longrightarrow \int_{\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \varphi\, q_{G,\chi} dm_{G,\chi}\ , \quad \text{et} \quad \varphi \longrightarrow \int_{\mathfrak{g}^*_G} \varphi\, q_G dm_G\ ,$$

définissent des mesures de Radon tempérées sur $\mathfrak{g}^*$.

(ii) Les séries distributions

$$(199) \qquad \sum_{T \in \tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\, M_{G,T}$$

et

$$(200) \qquad \sum_{T \in E_G/G} \tilde{1}_G(T)\, M_{G,T}$$

convergent dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$, *et leurs sommes respectives* $V_{G,\chi}$ *et* V_G *satisfont aux relations*

$$(201) \qquad \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} V_{G,\chi} = q_{G,\chi} dm_{G,\chi}$$

$$(202) \qquad \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} V_G = q_G dm_G.$$

Démonstration. Nous allons, dans un premier temps, démontrer les assertions du théorème concernant la mesure $q_{G,\chi}dm_{G,\chi}$ et la série $V_{G,\chi}$.

Soit S un facteur réductif de G, dont on note $\mathfrak{s}$ l'algèbre de Lie, et choisissons $\mathrm{Car}(G)$ de telle sorte que ses éléments soient contenus dans $\mathfrak{s}$. Alors en utilisant la relation (197)' on voit que l'on a, pour toute fonction φ, borélienne et positive, ou $q_{G,\chi}dm_{G,\chi}$ intégrable,

$$(203)\quad \int_{\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \varphi(f)\, q_{G,\chi}(f)\, dm_{G,\chi}(f)$$

$$= (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}(G)} [W_j]^{-1}\, \mathrm{vol}(\tilde{\mathfrak{t}}_G)^{-1} \sum_{\mathcal{W}\in \mathcal{V}^j/_\sim}$$

$$\sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\, q_{\overset{\circ}{S(\mathcal{W})},\chi_0}(\mu+\nu)\, \pi_{j,s}(\mu+\nu)\, d\nu.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous avons tenu dans la première partie de la démonstration du théorème 6 permet alors de ramener la preuve du point (*i*), relatif à la mesure $q_{G,\chi}dm_{G,\chi}$, à la vérification de l'existence, pour j dans $\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}^j/_\sim$ fixés, d'une semi-norme, η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, telle que

$$(204)\quad \sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} |F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\, \pi_{j,s}(\mu+\nu)|\, q_{\overset{\circ}{S(\mathcal{W})},\chi_0}(\mu+\nu)d\nu \le \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

Si Φ^+ et Φ^+_I sont des ensembles de racines positives dans, respectivement, Φ et Φ_I et si w appartient à $W(\Phi)$, on définit, pour φ élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, une fonction $\psi^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W},\varphi}$ sur $\mathfrak{t}^*\times C(\Phi^+)$, et un nombre $A^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W}}(\varphi)$, en posant successivement

$$\psi^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W},\varphi}(\mu+\nu) = \chi_{\Phi^+_I}(\mu)\, F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+w\nu)\pi'_j(\mu+w\nu), \quad \forall\mu\in\mathfrak{t}^*, \quad \forall\nu\in C(\Phi^+),$$

$$A^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W}}(\varphi) = \sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{C(\Phi^+)} |\psi^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W},\varphi}(\mu,\nu)|\, \pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)\, q_{\overset{\circ}{S(\mathcal{W})},\chi_0}(\mu+\nu)d\nu,$$

les polynômes π'_j et $\pi_{j,\mathbb{R}}$ étant définis comme dans la démonstration du théorème 6. Le premier membre de (204) s'écrit alors

$$\sum_{\Phi^+_I} \sum_{w\in W(\Phi)} A^{\Phi^+_I,w}_{\mathcal{W}}(\varphi),$$

la première sommation portant sur les ensembles de racines positives dans Φ_I.

Cependant, pour μ dans $\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}$, ν dans $\mathfrak{a}^*$, et τ dans $\tilde{X}_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu)$, on a

$$\zeta_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu) \le \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{\operatorname{sh}\langle\pi\nu,\ H_\alpha\rangle}{\operatorname{ch}\langle\pi\nu,\ H_\alpha\rangle-1} \le 2^{[\Phi^+]} \prod_{\alpha\in\Phi^+} \left(1-\exp(-|\langle\pi\nu,H_\alpha\rangle|)\right)^{-1}.$$

D'autre part la relation suivante,

$$[\overset{\circ}{S}(\mathcal{W})(\mu+\nu) : \operatorname{Ker} j_0 \exp_G j]^{-1} \sum_{\tau\in\tilde{X}_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu)} (\dim \tau)^2 = 1,$$

résulte du théorème de Peter-Weyl projectif pour le groupe $\overset{\circ}{S}(\mathcal{W})(\mu+\nu)/(\operatorname{Ker} j_0 \exp_G j)$. Ainsi, grâce à la formule (188') du § X, on a la majoration :

$$q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu) \le 2^{[\Phi_+]} \prod_{\alpha\in\Phi^+} (1-e^{-\langle\pi\nu,\ H_\alpha\rangle})^{-1} \quad \forall\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi},\quad \forall\nu\in C(\Phi^+).$$

Il est alors facile de voir qu'il existe une constante positive, M, telle que l'on ait

$$(205)\qquad q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu)\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu) \le M\left(1+\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)\right) \quad \forall\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi},\quad \forall\nu\in C(\Phi^+).$$

Par suite, l'existence d'une semi-norme η continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ satisfaisant à la relation (204) est conséquence de l'existence, pour Φ_I^+ et w dans $W(\Phi)$ fixés, d'une telle semi-norme satisfaisant à la condition

$$(206)\qquad \sum_{\mu\in\tilde{\mathfrak{t}}^*_{G,\chi}} \int_{C(\Phi^+)} |\psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathcal{W},\varphi}(\mu,\nu)|\ (1+\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu))d\nu \le \eta(\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*).$$

Si nous identifions $\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{a}^*$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 6, les arguments développés dans cette même démonstration, mais relatifs aux intégrales orbitales $F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}$, montrent à la fois que les fonctions

$$\psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathcal{W},\varphi}(1+\pi_{j,\mathbb{R}}),\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*),$$

considérées comme des fonctions sur $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$ sont des éléments de $\mathcal{E}_{n,r,q}$

et que l'application

$$\varphi \longrightarrow \psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w} \; (1+\pi_{j,\mathbb{R}})$$

est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $\mathcal{E}_{n,r,q}$. A partir d'ici la démonstration de l'existence d'une semi-norme η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, satisfaisant à la condition (206), est identique à la démonstration de l'assertion (166) ; ceci achève la preuve du fait que $q_{G,\chi} dm_{G,\chi}$ est une mesure de Radon tempérée sur $\mathfrak{g}^*$.

Pour démontrer la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ de la série (199), il suffit d'établir, pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, la convergence absolue de la série

$$(207) \quad \sum_{T \in \tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T) \; \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi).$$

Supposons que les éléments de $\tilde{E}_G/G$ choisis soient contenus dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$. Alors, en utilisant les formules (44) et (89) du § V, on obtient, pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\sum_{T \in \tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T) \; \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi)$$

$$= (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j \in \mathrm{Car}(G)} [W_j]^{-1} \sum_{W \in \mathcal{V}^j/\sim} \; \sum_{T \in \tilde{E}_G/G} \; \sum_{\sigma \in S(T) \backslash S_{W,T}/S(W)}$$

$$[W_{S(W)} : W_{S(W)(\sigma^{-1}T)}] \tilde{\chi}_G(\sigma^{-1}T) \int_{j^*} F_{j,\varphi}^{W}(f) \; \tilde{\Theta}_{S(W),\sigma^{-1}T}(f) \; \pi_{j,\mathfrak{s}}(f) \, df.$$

Soient j appartenant à Car(G) et W à $\mathcal{V}^j/\sim$. Si T appartient à $\tilde{E}_G$, l'ensemble des $\sigma^{-1}T$, pour σ parcourant $S(T) \backslash S_{W,T}/S(W)$, est un système de représentants des $S(W)$-orbites dans $S.T \cap \mathfrak{s}(W)$. De plus il est clair que

$$\tilde{E}_{S(W)} = \tilde{E}_G \cap \mathfrak{s}(W).$$

Enfin il résulte des formules (155) et (156) et, de ce que, comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 33, si j appartient à $\mathrm{Car}(\mathfrak{s}(W))$,

$$\sigma_{\mathfrak{g},j} - \sigma_{\mathfrak{s}(\mathcal{W}),j}$$

est la restriction à $\mathfrak{t}$ d'une somme d'éléments de $\Delta_{\mathfrak{g},j}$, que pour tout élément T de $\tilde{E}_{S(\mathcal{W})}$ on a

$$\tilde{\chi}_G(T) = \tilde{\chi}_{S(\mathcal{W})}(T).$$

Ainsi nous obtenons, au moins formellement, pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, l'égalité

$$\sum_{T\in\tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\, \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi)$$

$$= (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in Car(G)} [W_j]^{-1} \sum_{\mathcal{W}\in\mathcal{V}^j/\sim}\ \sum_{T\in\tilde{E}_{S(\mathcal{W})}/S(\mathcal{W})} [W_{S(\mathcal{W})} : W_{S(\mathcal{W})(T)}]$$

$$\times\, \tilde{\chi}_{S(\mathcal{W})}(T) \int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\ \tilde{\Theta}_{S(\mathcal{W}),T}(f)\, \pi_{j,s}(f)\, df\ ,$$

que l'on peut réécrire, si on désigne par $j_{\mathcal{W}}$, au lieu de $j_{\mathfrak{s}(\mathcal{W})}$, une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{s}(\mathcal{W})$, et par $t_{\mathcal{W}}$ sa partie anisotrope,

$$\sum_{T\in\tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in Car(G)} [W_j]^{-1} \sum_{\mathcal{W}\in\mathcal{V}^j/\sim}\ \sum_{T\in\tilde{\mathfrak{t}}_{\mathcal{W},S(\mathcal{W})}} \tilde{\chi}_{S(\mathcal{W})}(T)$$

$$\times \int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\ \tilde{\Theta}_{S(\mathcal{W}),T}(f)\pi_{j,s}(f)\, df.$$

Si pour j dans Car(G) et $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}^j/\sim$ fixés, on pose, pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$(208)\quad \langle \hat{V}_{\mathcal{W},\chi},\varphi\rangle = \sum_{T\in\tilde{t}_{\mathcal{W},S(\mathcal{W})}} \tilde{\chi}_{S(\mathcal{W})}(T)\int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\,\tilde{\Theta}_{S(\mathcal{W}),T}(f)\pi_{j,s}(f)\,df\ ,$$

on a l'égalité formelle

$$(209)\quad \sum_{T\in\tilde{\tilde{E}}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}M_{G,T}(\varphi) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in\mathrm{Car}(G)} [W_j]^{-1} \sum_{\mathcal{W}\in\mathcal{V}^j/\sim} \langle \hat{V}_{\mathcal{W},\chi},\varphi\rangle.$$

De plus, la fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ étant fixée, pour démontrer la convergence absolue de la série (207) il suffit d'établir, pour j appartenant à $\mathrm{Car}(G)$ et $\mathcal{W}$ à $\mathcal{V}^j/\sim$, celle des séries (208) .

Soient donc j dans $\mathrm{Car}(G)$ et $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{V}^j/\sim$. Pour simplifier, nous poserons $R = S(\mathcal{W})$ et nous adopterons les notations introduites au début de ce paragraphe et au cours du précédent. Nous noterons n_0 l'ordre du groupe quotient $\mathrm{Ker}\bar{j}_0/\mathrm{Ker}j_0$, groupe qui est aussi isomorphe à $t_{r,Z}/\tilde{t}_{r,R}$. En utilisant la formule (169) du lemme 28, il vient, pour φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$

$$\langle \hat{V}_{\mathcal{W},\chi},\varphi\rangle = [W_R/W_{\overset{\circ}{R}}]^{-1} \sum_{w\in W_R/W_{\overset{\circ}{R}}} \sum_{T\in\tilde{t}_{r,R}} \tilde{\chi}_R(T)\int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\,\tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},\tilde{w}T}(f)\pi_{j,s}(f)df$$

$$= n_0^{-1}[W_R : W_{\overset{\circ}{R}}]^{-1} \sum_{w\in W_R/W_{\overset{\circ}{R}}} \sum_{\chi'\in(\mathrm{Ker}\bar{j}_0\hat{\ })_{\chi_0}} \sum_{T\in t_{r,Z}} \tilde{\chi}'_{\overset{\circ}{R}}(T)\int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)$$

$$\times\ \tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},\tilde{w}T}(f)\,\pi_{j,s}(f)df.$$

Mais le groupe W_R opére dans $t_{r,Z}$ en laissant invariant le sous-groupe $\tilde{t}_{r,R}$ ainsi que le caractère $\tilde{\chi}_R$ de ce dernier, si bien que l'on a, pour φ élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$(210) \quad \langle \hat{V}_{\mathcal{W},\chi}, \varphi\rangle = n_0^{-1}\, [W_R : W_{\overset{\circ}{R}}]^{-1} \sum_{w\in W_R/W_{\overset{\circ}{R}}} \; \sum_{\chi'\in(\mathrm{Ker}\,\bar{j}_0{}^{\wedge})_{\chi_0}} \; \sum_{T\in t_{r,Z}}$$

$$w.\tilde{\chi}'_{\bar{\overset{\circ}{R}}}(T) \int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\; \tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},T}(f)\pi_{j,s}(f)df$$

$$= n_0^{-1} \sum_{\chi'\in(\mathrm{Ker}\,\bar{j}_0{}^{\wedge})_{\chi_0}} \langle \hat{\bar{V}}_{\mathcal{W},\chi'}, \varphi\rangle,$$

où on a posé, pour χ dans $\mathrm{Ker}\,\bar{j}_0{}^{\wedge}$ et φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$(211) \quad \langle \hat{\bar{V}}_{\mathcal{W},\chi}, \varphi\rangle = \sum_{T\in t_{r,Z}} \tilde{\chi}_{\bar{\overset{\circ}{R}}}(T) \int_{j^*} F_{j,\varphi}^{\mathcal{W}}(f)\; \tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},T}(f)\pi_{j,s}(f)df.$$

Soient χ appartenant à $\mathrm{Ker}\,\bar{j}_0{}^{\wedge}$ et Φ^+ un ensemble de racines positives dans Φ. Si Φ_I^+ est un ensemble de racines positives dans Φ_I et si w est un élément de $W(\Phi)$, pour toute fonction φ dans $\mathcal{S}\mathfrak{g}^*)$, on pose :

$$(212) \quad \langle \hat{\bar{V}}^{\Phi_I^+,w}_{\mathcal{W},\chi}, \varphi\rangle = \sum_{T\in t_{r,Z}} \tilde{\chi}_{\bar{\overset{\circ}{R}}}(T) \int_{t^*\times C(\Phi^+)} \psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathcal{W},\varphi}(\mu,\nu)\; \tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},T}(\mu+\nu)\pi_{j,\mathbb{R}}(w\nu)d\mu\, d\nu.$$

On a alors, en tenant compte du fait que la fonction $\tilde{\Theta}_{\overset{\circ}{R},T}$ est $W(\Phi)$-invariante,

$$(213) \quad \langle \hat{\bar{V}}_{\mathcal{W},\chi}, \varphi\rangle = \sum_{\Phi_I^+} \sum_{w\in W(\Phi)} \langle \hat{\bar{V}}^{\Phi_I^+,w}_{\mathcal{W},\chi}, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*),$$

la première sommation étant étendue aux ensembles de racines positives de Φ_I. De plus, il est clair que la convergence absolue des séries (212), pour Φ_I^+ un ensemble de racines positives dans Φ_I, w appartenant à $W(\Phi)$ et χ à $\mathrm{Ker}\,\bar{j}_0{}^{\wedge}$, entraîne celle des séries (208).

Pour T appartenant à $t_{r,Z}$ désignons par $a_{\chi,T}(\varphi)$ le terme d'indice T de la série (212). Utilisant la formule (173) donnant l'expression des fonctions $\tilde{\Theta}_{\circ\, R,T}$ on obtient, pour φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, la relation

$$a_{\chi,T}(\varphi) = \tilde{\chi}_{\bar{\mathring{R}}}(T) \sum_{Y\in i\,j_{\mathbb{R}}} b_{\circ\, R,T}(j,\Phi^+,Y) \int_{\mathfrak{t}^*\times C(\Phi^+)} \psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)$$

$$\times\ e^{-i\langle Y,\ \mu+\nu\rangle}\ \pi_{j,\mathbb{R}}(w\nu)\, d\mu\, d\nu,$$

que l'on peut réécrire, si on note $\eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}$ la transformée de Fourier partielle, par rapport à la variable μ dans $\mathfrak{t}^*$, de la fonction $\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}$, sous la forme suivante

$$a_{\chi,T}(\varphi) = \tilde{\chi}_{\bar{\mathring{R}}}(T) \sum_{Y\in i\,j_{\mathbb{R}}} b_{\circ\, R,T}(j,\Phi^+,Y) \int_{C(\Phi^+)} \eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu) \tag{214}$$

$$\times\ e^{-\pi\langle y,\ \nu\rangle}\ \pi_{j,\mathbb{R}}(w\nu)\, d\nu$$

où, pour Y élément de $ij_{\mathbb{R}}$, on désigne par Y_0 (resp. y) l'élément de $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{a}$) tel que

$$Y = Y_0 - i\pi y.$$

Posons alors, pour T dans $\mathfrak{t}_{r,Z}$ et φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$A_T(\varphi) = \sum_{Y\in i\,j_{\mathbb{R}}} \left| b_{\circ\, R,T}(j,\Phi^+,Y)\right| \int_{C(\Phi^+)} \left|\eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)\right|$$

$$\times\ e^{-\pi\langle y,\ \nu\rangle}\ \pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)\, d\nu\ ,$$

de telle sorte que l'on a la majoration

$$\left|a_{\chi,T}(\varphi)\right| \le A_T(\varphi). \tag{215}$$

Si Y appartient à $ij_{\mathbb{R}}$, on pose

$$c(Y) = \sum_{T\in \mathfrak{t}_{r,Z}} \left| b_{\circ\, R,T}(j,\Phi^+,Y)\right|.$$

Alors il est clair que l'on a, pour φ appartenant à $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\sum_{T\in t_{r,Z}} A_T(\varphi) = \sum_{Y\in i j_{\mathbb{R}}} c(Y) \int_{C(\Phi^+)} |\eta_{\mathcal{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)| e^{-\pi\langle y,\nu\rangle} \pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)d\nu.$$

En utilisant les lemmes 29 et 30 et les formules (174), on établit les assertions suivantes :

(216) (*i*) il existe une constante positive M telle que l'on ait

$$c(Y) \leq M, \quad \forall Y\in ij_{\mathbb{R}}$$

(216) (*ii*) soit Y un élément de $ij_{\mathbb{R}}$ tel que $c(Y)$ soit non nul ; alors Y appartient à j_Z et y à $\mathfrak{a}_Z$.

Soit θ une application de $\mathfrak{a}_Z$ dans t_Z telle que, pour tout y dans $\mathfrak{a}_Z$, $\theta(y)-i\pi y$ appartienne à j_Z. Par suite, si y appartient à $\mathfrak{a}_Z$, on a

$$(t - i\pi y) \cap j_Z = \theta(y)-i\pi y + t_Z .$$

Alors, compte tenu des assertions (216), on a, pour φ appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, la majoration suivante

$$(217) \quad \sum_{T\in t_{r,Z}} A_T(\varphi) \leq M \sum_{y\in\mathfrak{a}_Z} \int_{C(\Phi^+)} \left\{ \sum_{Y\in t_Z} |\eta_{\mathcal{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y+\theta(y),\nu)| \right\} e^{-\pi\langle y,\nu\rangle}\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)d\nu.$$

Remarquons que $2i\pi\check{\Phi}_I$ est contenu dans le réseau t_Z, de telle sorte que l'on peut choisir des éléments $H'_{s+1},\dots,H'_n$ de t_Z constituant une base d'un supplémentaire, dans t, du sous-espace engendré par $2i\pi\check{\Phi}_I$. Soit, alors, t'_Z le sous-réseau de t_Z engendré par $2i\pi\check{\Phi}_I$ et les vecteurs $H'_{s+1},\dots,H'_n$, et désignons par $Y_1, \dots, Y_l$ un système de représentants dans t_Z des éléments de t_Z/t'_Z. Considérons enfin le (resp. un) système de coordonnées $x'_1,\dots, x'_n$ (resp. $y'_1,\dots, y'_q$) sur t^* (resp. $\mathfrak{a}^*$) tel que

$$x'_j = iH_{\alpha_j}, \quad 1\leq j\leq s, \quad x'_j = (2\pi)^{-1}H'_j, \quad s+1\leq j\leq n$$

$$(\text{resp. } y'_j = H_{\beta_j}, \quad 1\leq j\leq r)$$

où $\{\alpha_1,\dots, \alpha_s\}$ (resp. $\{\beta_1,\dots, \beta_r\}$) est la base de racines simples de Φ_I^+ (resp. Φ^+). Nous identifions, à l'aide de ces systèmes de coordonnées, $t^* \times \mathfrak{a}^*$

à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$; dans ces conditions $t^* \times C(\Phi^+)$ s'identifie à $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$ et $t_Z'^*$, le réseau dual de t_Z', au réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Enfin, si φ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, la fonction $\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(1+\pi_{j,\mathbb{R}})$, considérée comme fonction sur $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$, est un élément de $\mathcal{E}_{n,r,q}$. Le corollaire du lemme 26 montre alors, qu'il existe des éléments de $S(t^*)$, en nombre fini, notés $p_1,\ldots,p_k$, tels que, pour φ appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, on ait

$$\text{(218)} \qquad \sup_{X\in t}\left\{\sum_{Y\in t_Z'} \eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X+Y,\nu)\right\} \leq \sum_{j=1}^{k}\int_{t^*} |\partial_{p_j}\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)|d\mu, \quad \forall\nu\in C(\Phi^+).$$

D'autre part on a pour y appartenant à $\mathfrak{a}_Z$, ν à $C(\Phi^+)$, et φ à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\sum_{Y\in t_Z} |\eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y+\theta(y),\nu)| = \sum_{j=1}^{l}\sum_{Y\in t_Z'} |\eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y+Y_j+\theta(y),\nu)|$$

et, par suite, grâce à (218) on obtient, dans les mêmes conditions, la majoration

$$\sum_{Y\in t_Z} |\eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y+\theta(y),\eta)| \leq l\sum_{j=1}^{k}\int_{t^*}|\partial_{p_j}\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)|d\mu.$$

En reportant cette dernière relation dans (217), on obtient, pour φ appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\sum_{T\in t_{r,Z}} A_T(\varphi) \leq lM\sum_{j=1}^{k}\int_{t^*\times C(\Phi^+)} |\partial_{p_j}\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)|\delta(\nu)d\mu\, d\nu$$

avec, pour tout ν dans $C(\Phi^+)$,

$$\delta(\nu) = \left\{\sum_{y\in P_{\mathfrak{a}}} e^{-\pi\langle y,\nu\rangle}\right\}\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu) = \left\{\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-\langle\pi\nu,H_\alpha\rangle})^{-1}\right\}\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu),$$

si bien que l'on peut trouver une constante positive M_1 telle que, pour φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, on ait

$$\text{(219)} \qquad \sum_{T\in t_{r,Z}} A_T(\varphi) \leq M_1\sum_{j=1}^{k}\int_{t^*\times C(\Phi^+)} |\partial_{p_j}\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)|(1+\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu))d\mu\, d\nu,$$

le membre de droite de cette inégalité étant fini puisque, nous l'avons vu, pour toute fonction φ de $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, la fonction $\psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(1+\pi_{j,\mathbb{R}})$ est un élément de $\mathscr{E}_{n,r,q}$. En utilisant l'inégalité (215), on voit alors que les séries (212) sont absolument convergentes. Ceci entraîne, comme nous l'avons observé, la convergence absolue, pour tout φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, de la série (207).

Dans le même temps la convergence absolue des séries (212) justifie les égalités formelles (209), (210), (213) et (212), si bien que pour calculer la somme de la série (206), il nous suffira de calculer celle des séries (212). Mais grâce à l'égalité (214), si χ appartenant à $\mathrm{Ker} j_0\hat{}$, j à $\mathrm{car}(G)$, $\mathscr{W}$ à $\mathscr{V}^j/\sim$, w à $W(\Phi)$ et Φ_I^+ un ensemble de racines positives dans Φ, sont fixés, on a pour tout φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$(220)\quad \langle \hat{\bar{V}}_{\mathscr{W},\chi}^{\Phi_I^+,w}, \varphi\rangle = \sum_{T\in t_{r,Z}} \sum_{Y\in i j_{\mathbb{R}}} \tilde{\chi}_{\mathring{\bar{R}}}(T)\, b_{\mathring{R},T}(j,\Phi^+,Y)$$

$$\times \int_{C(\Phi^+)} \eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)e^{-\pi\langle y,\nu\rangle}\pi_{j,\mathbb{R}}(w\nu)d\nu.$$

Cependant il résulte de l'inégalité (219), que l'on peut permuter, dans le membre de droite de l'égalité (220), les signes sommes pour obtenir, pour φ appartenant à $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, la relation

$$(221)\quad \langle \hat{\bar{V}}_{\mathscr{W},\chi}^{\Phi_I^+,w}, \varphi\rangle$$

$$= \int_{C(\Phi^+)} \left\{ \sum_{Y\in i j_{\mathbb{R}}} b_{\mathring{R},\chi}(j,\Phi^+,Y)\, \eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)\, e^{-\pi\langle y,\,\nu\rangle}\right\}\pi_{j,\mathbb{R}}(w\nu)d\nu,$$

avec, rappelons-le, si Y est un élément de $ij_{\mathbb{R}}$

$$b_{\mathring{R},\chi}(j,\Phi^+,Y) = \sum_{T\in t_{r,Z}} \tilde{\chi}_{\mathring{\bar{R}}}(T)\, b_{\mathring{R},T}(j,\Phi^+,Y).$$

Posons alors, pour φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ et ν dans $C(\Phi^+)$

$$A_{\varphi}(\nu) = \sum_{Y \in ij_{\mathbb{R}}} b_{\overset{\circ}{R},\chi}(j,\Phi^+,Y)\, \eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)\, e^{-\pi\langle y,\ \nu\rangle}.$$

Remarquons tout d'abord que, si Y appartient à $ij_{\mathbb{R}}$, la non nullité de $b_{\overset{\circ}{R},\chi}(j,\Phi^+,Y)$ entraîne celle de $c(Y)$. On voit alors grâce à (216) (*ii*) et au lemme 31 que, pour φ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ et ν dans $C(\Phi^+)$,

$$(222)\quad A_{\varphi}(\nu) = \sum_{y \in \mathfrak{a}_Z} \left\{ \sum_{X \in t_Z} \eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X+\theta(y),\nu)\, \tilde{\chi}_{\overset{\circ}{R}}(X) \right\} b_{\overset{\circ}{R},\chi}(j,\Phi^+,\theta(y)-i\pi y) e^{-\pi\langle y,\nu\rangle}.$$

Comme t'_Z est un sous-réseau d'indice fini de t_Z, on peut appliquer, φ appartenant à $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ et ν à $C(\Phi^+)$ et étant fixés, la formule sommatoire de Poisson relative au réseau t_Z^* à la fonction $\psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}$ pour obtenir

$$\sum_{X \in t_Z} \eta_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X+\theta(y),\eta)\tilde{\chi}_{\overset{\circ}{R}}(X) = \mathrm{vol}(t_Z)^{-1} \sum_{\mu \in \tilde{t}^*_{\overset{\circ}{R},\chi}} \psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\ \nu)\, e^{-i\langle \mu,\ \theta(y)\rangle}.$$

En reportant cette dernière relation dans la formule (222), et compte tenu de la définition (192), on obtient

$$A_{\varphi}(\nu) = \mathrm{vol}(t_Z)^{-1} \sum_{y \in \mathfrak{a}_Z} \left\{ \sum_{\mu \in \tilde{t}^*_{\overset{\circ}{R},\chi}} \psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)\, c_{\overset{\circ}{R},\chi}(j,\Phi^+,\mu,y) \right\} e^{-\pi\langle \nu,y\rangle}\ ;$$

mais en utilisant le fait que, pour Y dans $ij_{\mathbb{R}}$, on a

$$|c_{\overset{\circ}{R},\chi}(j,\Phi^+,\mu,y)| \leq c(Y),$$

ceci quel que soit μ appartenant à $\tilde{t}^*_{\overset{\circ}{R},\chi}$, ainsi que la majoration (216) (*i*), on voit que la série double ci-dessus est absolument convergente. Il résulte alors du lemme 32, que l'on a

$$A_{\varphi}(\nu) = \mathrm{vol}(t_Z)^{-1} \sum_{\mu \in \tilde{t}^*_{\overset{\circ}{R},\chi}} \psi_{W,\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)\, q_{\overset{\circ}{R},\chi}(\mu+\nu).$$

En reportant cette dernière égalité successivement dans (221) et (213), et en tenant compte du fait que la fonction $q_{\bar{\mathring{R}},\chi}$ est $W(\Phi)$-invariante, on obtient pour φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ et χ dans $\mathrm{Ker}j_0\hat{\ }$,

$$\langle\hat{V}_{\mathcal{W},\chi}\ ,\ \varphi\rangle = \mathrm{vol}(t_Z)^{-1}\sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{\bar{\mathring{R}},\chi}}\int_{\mathfrak{a}^*}F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu,\nu)q_{\bar{\mathring{R}},\chi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)d\nu.$$

Utilisant alors la formule (210) et compte tenu du fait que, pour χ appartenant à $\mathrm{Ker}J_0\hat{\ }$, $\tilde{t}^*_{\circ\, R,\chi}$ est réunion des $\tilde{t}^*_{\bar{\mathring{R}},\chi'}$ pour χ' parcourant $(\mathrm{Ker}\bar{j}_0\hat{\ })_\chi$, on obtient pour φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\langle\hat{V}_{\mathcal{W},\chi}\ ,\varphi\rangle = n_0^{-1}\ \mathrm{vol}(t_Z)^{-1}\sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{\bar{\mathring{R}},\chi}}\int_{\mathfrak{a}^*}\Big\{\sum_{\chi'\in(\mathrm{Ker}\bar{j}_0\hat{\ })_{\chi_0,\mu+\nu}} q_{\bar{\mathring{R}},\chi'}(\mu+\nu)\Big\}$$

$$\times\ F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ \pi_{j,s}(\mu+\nu)\ d\nu\ .$$

On obtient alors, grâce à la formule (195) et au fait que

$$\mathrm{vol}(t_Z)^{-1} = \mathrm{vol}(\tilde{t}_G)^{-1}\ [\mathrm{Ker}\bar{j}_0 \cap \mathring{J} : \mathrm{Ker}j_0 \cap J_0],$$

la relation, vraie pour toute fonction φ de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\langle\hat{V}_{\mathcal{W},\chi}\ ,\ \varphi\rangle = \mathrm{vol}(\tilde{t}_G)^{-1}\sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{\bar{\mathring{R}},\chi}}\int_{\mathfrak{a}^*}F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ q_{\circ\, R,\chi_0}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)d\nu.$$

Alors, en utilisant l'égalité (209) ainsi que la formule (197) définissant la fonction $q_{G,\chi}$, on obtient la relation (201) du théorème.

Maintenant, il résulte de ce que les séries (206) sont absolument convergentes que, d'une part, comme E_G/G est contenu dans $\tilde{E}_G/G$, la série (200) converge dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et que, d'autre part, on a pour φ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$,

$$\sum_{T\in E_G/G} \tilde{1}_G(T)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi) = \int_{\mathrm{Ker}\,j^{\wedge}} \left\{ \sum_{T\in \tilde{E}_G/G} \tilde{\chi}_G(T)\ \mathcal{F}_{\mathfrak{g}} M_{G,T}(\varphi) \right\} d\chi$$

$$= \int_{\mathrm{Ker}\,j^{\wedge}} \left\{ \int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(f)\ q_{G,\chi}(f)\ dm_{G,\chi}(f) \right\} d\chi.$$

En utilisant la relation (197)' on voit que pour toute fonction φ boré-lienne et positive ou $q_G dm_G$-intégrable on a

$$\int_{\mathfrak{g}_G^*} \varphi(f)\ q_G(f)\ dm_G(f) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{j\in \mathrm{Car}(G)} [W_j]^{-1}\ \mathrm{vol}(t_G)^{-1} \sum_{\mathcal{W}\in \mathcal{V}^j/\sim}$$

$$\sum_{\mu\in t^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W})}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)\,d\nu.$$

Soit alors un élément j de $\mathrm{Car}(G)$ et $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}^j/\sim$. D'une part, de même que pour ce qui concerne la mesure $q_{G,\chi}dm_{G,\chi}$, l'assertion (i) du théorème, relative à la mesure $q_G dm_G$, sera conséquence de l'existence d'une semi-norme η continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que

$$(223)\qquad \sum_{\mu\in t^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} |F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)|\ q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W})}(\mu+\nu)\ |\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\,d\nu \le \eta(\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathfrak{g}^*),$$

et d'autre part, la relation (202) sera conséquence de l'égalité suivante

$$(224)\qquad \sum_{\mu\in t^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W})}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)\,d\nu$$

$$= \int_{\mathrm{Ker}\,j^{\wedge}} \left\{ \sum_{\mu\in \tilde{t}^*_{G,\chi}} \int_{\mathfrak{a}^*} F^{\mathcal{W}}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\ q_{\overset{\circ}{S}(\mathcal{W}),\chi_0}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)\,d\nu \right\} d\chi,\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*).$$

De même qu'au cours de la démonstration du théorème 6 on a établi la relation (168), on démontre en utilisant les formules (163) et (164) l'existence d'un nombre strictement positif, c, tel que pour toute fonction φ dans

$\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ on ait

$$(225)\qquad \sum_{\mu\in t^*_{G,1}} \int_{\mathfrak{a}(G)^*} |F^{W}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\,\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\; q_{\overset{\circ}{S}(W)}(\mu+\nu)d\nu$$

$$= c\int_{[t^*_G+\mathfrak{a}(G)^*\cap t^*]/\tilde{t}^*_G} \tilde{\Gamma}_{\varphi}(\lambda)d\lambda$$

où on a posé

$$\tilde{\Gamma}_{\varphi}(\lambda) = \sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi_\lambda}} \int_{\mathfrak{a}^*} |F^{W}_{j,\varphi}(\mu+\nu)\pi_{j,s}(\mu+\nu)|\,q_{\overset{\circ}{S}(W)}(\mu+\nu)d\nu,$$

avec, rappelons-le, χ_λ le caractère du groupe discret $\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t}$ défini par

$$\chi_\lambda(\exp_G T) = e^{i\langle\lambda,T\rangle},\quad \forall T\in\tilde{t}_G\,,$$

et $\tilde{t}^*_{G,\chi_\lambda}$ étant égal à $\tilde{t}^*_{G,\chi}$ pour n'importe quel caractère χ de $\mathrm{Ker}j$ dont la restriction à $\mathrm{Ker}j\cap\exp\mathfrak{t}$ est χ_λ. Remarquons maintenant que l'on a

$$\tilde{\Gamma}_{\varphi}(\lambda) = \sum_{\Phi^+_I\subset\Phi_I}\ \sum_{w\in W(\Phi)} \tilde{\Gamma}^{\Phi^+_I,w}_{\varphi}(\lambda),$$

la première sommation portant, comme d'habitude, sur les ensembles de racines positives dans Φ_I , et ce, à condition de poser, pour Φ^+_I un tel ensemble et w appartenant à $W(\Phi)$,

$$\tilde{\Gamma}^{\Phi^+_I,w}_{\varphi}(\lambda) = \sum_{\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi_\lambda}} \int_{C(\Phi^+)} |\psi^{\Phi^+_I,w}_{W,\varphi}(\mu+\nu)|\,q_{\overset{\circ}{S}(W)}(\mu+\nu)\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)d\nu.$$

De plus il résulte de la formule (196) et de la majoration (205) que l'on a, M étant une constante positive, la majoration analogue à cette dernière

$$q_{\overset{\circ}{S}(W)}(\mu+\nu)\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu) \le M\big(1+\pi_{j,\mathbb{R}}(\nu)\big),\quad \forall\lambda\in t^*_G+\mathfrak{a}(G)^*\cap t^*,$$

$$\forall\mu\in\tilde{t}^*_{G,\chi_\lambda}\,,\quad \forall\nu\in C(\phi^+)\,.$$

Alors en utilisant les propriétés des fonctions $\psi^{\Phi^+_I,w}_{W,\varphi}$ et le corollaire du lemme 26 on voit, de même que dans la démonstration du théorème 6, que la fonction $\tilde{\Gamma}_\varphi$ est une fonction continue de la variable λ dans $[\mathfrak{t}_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap \mathfrak{t}^*]/\tilde{\mathfrak{t}}_G^*$, et qu'il existe une semi-norme η, continue sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, telle que

$$\sup_{\lambda \in [\mathfrak{t}_G^* + \mathfrak{a}(G)^* \cap \mathfrak{t}^*]/\tilde{\mathfrak{t}}_G^*} |\tilde{\Gamma}_\varphi(\lambda)| \leq \eta(\varphi).$$

On voit alors, grâce à la relation (225), que cette semi-norme η satisfait à l'assertion (223). Ceci achève de démontrer le fait que la mesure $q_G dm_G$ définit, sur $\mathfrak{g}^*$, une mesure de Radon tempérée.

La relation (224) est alors une conséquence facile de la formule (198). Q.E.D.

Soit Y_G l'ensemble des couples (f,τ), avec f appartenant à $\mathfrak{g}_G^*$ et τ à $X_G(f)$. Alors M. Duflo a défini sur Y_G une fonction ζ_G permettant, pour tout χ appartenant à $\mathrm{Ker}j\hat{}$, de décrire la mesure de Plancherel modulo χ du groupe G : voir [Du-3] V5, Theorem 40. En utilisant les résultats de [Du-3] V5 et V6 , il n'est pas difficile d'établir le lemme suivant qui complète le théorème 7.

Lemme 34. *Soient* χ *dans* $\mathrm{Ker}j\hat{}$ *et* f *dans* $\mathfrak{g}_{G,\chi}^* \cap V$. *Alors on a*

$$(226) \qquad q_{G,\chi}(f) = [G(f) : \mathrm{Ker}j\, \overset{\circ}{G}(f)]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(f)} (\dim \tau)^2\, \zeta_G(f,\tau).$$

Supposons que le groupe presque algébrique $(G,j,\mathbf{G})$ soit tel que le morphisme j soit injectif. Dans ces conditions les groupes $\mathrm{Ker}j$ et $\mathrm{Ker}j\hat{}$ sont triviaux et les fonctions $q_{G,1}$ et q_G sont égales.

Soient $\mathfrak{j}$ un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ et f de $\mathfrak{g}_G^* \cap V^{\mathfrak{j}}$, et utilisons les notations introduites au début du paragraphe. Alors le groupe, $\overset{\circ}{R}$, est le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ du groupe algébrique, défini sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{R}$. Il est bien connu que, dans ces conditions, J_0 , qui est le sous-groupe de Cartan de $\overset{\circ}{R}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$, est engendré par la réunion de $\exp_G \mathfrak{j}$ et de l'ensemble des éléments γ_α , pour α parcourant Φ. De plus, pour tout α appartenant à Φ, on a

$$\gamma_\alpha = \exp i\pi H_\alpha .$$

Il est clair alors que le groupe J_0 ainsi que chacun des éléments γ_α , α appartenant à Φ, ne dépend pas du choix de l'élément f de $\mathfrak{g}_G^* \cap \mathcal{V}^{\mathfrak{j}}$, si bien que l'on peut énoncer le

Lemme 35. *Supposons le groupe* (G,j,G) *tel que* j *soit une injection, et soit* $\mathfrak{j}$ *appartenant à* $\operatorname{car}(\mathfrak{g})$. *Alors, pour tout élément* f *de* $\mathfrak{g}_G^* \cap \mathcal{V}^{\mathfrak{j}}$, *le nombre* $q_G(f)$ *ne dépend que de la restriction de* f *à* $\mathfrak{j}$.

Dans le cas général la situation est bien plus compliquée comme le montre l'exemple suivant.

Si n appartient à $\mathbb{N}$, on note $SO(n,\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ et $so(n,\mathbb{R})$ son algèbre de Lie. Si p et q appartiennent à $\mathbb{N}$, on note $SO_+(p,q)$ la composante neutre du groupe spécial orthogonal de la forme bilinéaire symétrique de signature (p,q) sur $\mathbb{R}^{p+q}$, et dont la matrice dans la base canonique, $e_1,\ldots,e_{p+q}$, de $\mathbb{R}^{p+q}$ est

$$A_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}.$$

Nous noterons $so(p,q)$ l'algèbre de Lie de $SO_+(p,q)$, et $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices réelles, p-lignes et q-colonnes.

Soient $S = SO_+(4,2)$ et $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie. Nous désignerons par Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{6*}$ dont la matrice dans la base duale de la base canonique, que l'on note $e_1^*,\ldots,e_6^*$, est $A_{4,2}$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ {}^tY & Z \end{pmatrix},$$

avec X élément de $so(4,\mathbb{R})$, Z de $so(2,\mathbb{R})$ et Y de $\mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$.

Soit $\mathfrak{k}$ la sous-algèbre de Lie compacte maximale de $\mathfrak{s}$ constituée des matrices

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

avec X élément de $so(4,\mathbb{R})$ et Z de $so(2,\mathbb{R})$.

Soient $\tilde{S}$ le revêtement universel de S, p la projection canonique de $\tilde{S}$ sur S et $\tilde{\Gamma}$ le noyau de p. Notons K (resp $\tilde{K}$) le sous-groupe analytique de S (resp. $\tilde{S}$) d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. On a

$$K = SO(4,\mathbb{R}) \times SO(2,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \tilde{K} = Spin(4) \times \mathbb{R},$$

$Spin(4)$ étant le revêtement universel (à deux feuillets) de $SO(4,\mathbb{R})$, de telle sorte qu'on a l'identification

$$\tilde{\Gamma} = \{1, \varepsilon\} \times \mathbb{Z},$$

où ε est l'élément non trivial du noyau de la projection naturelle de $Spin(4)$ sur $SO(4,\mathbb{R})$.

On note, si n appartient à $\mathbb{N}^*$, $\tilde{\Gamma}_n$ le sous-groupe de $\tilde{\Gamma}$ s'identifiant à $\{1, \varepsilon\} \times n\mathbb{Z}$, et $\tilde{\Gamma}_\infty$ celui s'identifiant à $\{1, \varepsilon\}$. De plus, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, on désigne par S_n le groupe quotient de $\tilde{S}$ par $\tilde{\Gamma}_n$, par p_n la projection naturelle de S_n sur S et par Γ_n le noyau de cette dernière, qui n'est autre que $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}_n$. Alors on a

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Gamma_\infty = \mathbb{Z},$$

de telle sorte que, pour n dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, S_n est un revêtement connexe à n feuillets de S. En particulier on a $S = S_1$.

Soit n appartenant à $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors le groupe S_n agit dans $\mathbb{R}^6$ au travers de la représentation naturelle de S, et on note G_n le produit semi-direct correspondant de S_n par $\mathbb{R}^6$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G_n, laquelle ne dépend pas de n et se trouve être le produit semi-direct de $\mathfrak{s}$ par $\mathbb{R}^6$.

Le groupe S est la composante neutre du sous-groupe des points réels de $\mathbf{S}$, le groupe spécial orthogonal de la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{C}^6$ dont la matrice dans la base canonique est $A_{4,2}$, groupe qui est défini sur $\mathbb{R}$. On note G le groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, produit semi-direct de S par $\mathbb{C}^6$. Le morphisme p_n s'étend naturellement en un morphisme encore noté p_n de G_n dans G et tel que (G_n,p_n,G) soit un groupe presque algébrique. Alors la forme quadratique Q est un polynôme sur $\mathbb{C}^{6*}$ ayant les propriétés relatives au groupe G_n énoncées dans le lemme 2 et la proposition 2. En particulier si on note V l'ouvert affine de $\mathbb{R}^{6*}$ complémentaire de l'ensemble des zéros de Q et si on pose

$$V^+ = \left\{u\in\mathbb{R}^{6*} \;/\; Q(u)>0\right\} \quad \text{et} \quad V^- = \left\{u\in\mathbb{R}^{6*} \;/\; Q(u)<0\right\},$$

V est la réunion disjointe de V^+ et V^- et les sous-groupes d'isotropie $S_n(u)$, u appartenant à V^+ (resp. V^-), sont tous S_n-conjugués à $R_n^+ = S_n(e_1^*)$ (resp. $R_n^- = S_n(e_6^*)$). On note r^+ (resp. r^-) l'algèbre de Lie de R_n^+ (resp. R_n^-) laquelle est isomorphe à $so(3,2)$ (resp. $so(4,1)$).

Il est immédiat de vérifier que

$$\Gamma_n \subset \overset{\circ}{R}{}_n^+ \quad \text{et} \quad \Gamma_n \cap \overset{\circ}{R}{}_n^- = \{1\},$$

de telle sorte que $\overset{\circ}{R}{}_n^+$ est un revêtement connexe à n feuillets de $SO_+(3,2)$ tandis que $\overset{\circ}{R}{}_n^-$ est isomorphe à $SO_+(4,1)$.

Soit j la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{s}$ constituée des matrices

$$H_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda W & \mu E \\ \mu\, {}^tE & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors j est une sous-algèbre de Cartan commune à r^+ et r^-, et, en particulier, est un élément de $car(\mathfrak{g})$; on note J_n^+ (resp. J_n^-) le sous-groupe de Cartan de $\overset{\circ}{R}{}_n^+$ (resp. $\overset{\circ}{R}{}_n^-$) d'algèbre de Lie j. On voit sans peine que

$$J_n^+ = \Gamma_n \exp_{S_n} j,$$

le produit étant direct, tandis que

$$J_n^- = \exp_{S_n} j.$$

D'autre part le système des racines réelles, Φ, de j dans r^+ ou r^-

est constitué des racines α et $-\alpha$, avec

$$\alpha(H_{\lambda,\mu}) = \mu \ , \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Posons, pour $\varepsilon = \pm 1$,

$$X^{+}_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^{+} \\ {}^{t}E^{+} & \varepsilon W^{+} \end{pmatrix}, \text{ avec } E^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{-}_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} W^{-} & -\varepsilon E^{-} \\ -\varepsilon\, {}^{t}E^{-} & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } E^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } W^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $X^{+}_{\varepsilon\alpha}$ (resp. $X^{-}_{\varepsilon\alpha}$) est un vecteur de poids $\varepsilon\alpha$ dans $\mathfrak{r}^{+}$ (resp. $\mathfrak{r}^{-}$) relativement à $\mathfrak{j}$, et on a

$$[X^{+}_{\alpha} \ , \ X^{+}_{-\alpha}] = [X^{-}_{\alpha} \ , \ X^{-}_{-\alpha}] = H_{\alpha} \ ,$$

si bien que l'élément, γ^{+}_{α} (resp. γ^{-}_{α}), de J^{+}_{n} (resp. J^{-}_{n}), correspondant à α, est donné par

$$\gamma^{+}_{\alpha} = \exp \pi(X^{+}_{\alpha} - X^{+}_{-\alpha}) \ \big(\text{resp. } \gamma^{-}_{\alpha} = \exp \pi(X^{-}_{\alpha} - X^{-}_{-\alpha})\big).$$

Un simple calcul montre alors que γ^{+}_{α} est un générateur de Γ_{n} , tandis que γ^{-}_{α} est l'élément trivial de G_{n}.

De plus, si f appartient à $\mathfrak{h}^{*}_{j}$, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) f appartient à $\mathfrak{g}^{*}_{G_n} \cap \mathfrak{h}^{*}_{j}$

(ii) u_{f} appartient à V et il existe un élément, a, de $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ tel que

$$f(H_{\lambda,0}) = a\lambda, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Dans ces conditions il n'est pas difficile de voir que

(i) si l'élément f de $\mathfrak{g}^{*}_{G_n} \cap \mathfrak{h}^{*}_{j}$ est tel que u_{f} appartienne à V^{+}, on a

$$q_{G_n}(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\mathrm{sh}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle|}{\mathrm{ch}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle - \cos(2k\pi/n)}, \quad \text{si } n\in\mathbb{N}^*$$

$$q_{G_\infty}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\mathrm{sh}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle|}{\mathrm{ch}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle - \cos 2\pi\theta}\, d\theta = 1.$$

(*ii*) si l'élément f de $\mathfrak{g}^*_{G_n} \cap \mathfrak{h}^*_j$ est tel que u_f appartienne à V^-, on a

$$q_{G_n}(f) = \frac{|\mathrm{sh}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle|}{\mathrm{ch}\langle \pi f,\ H_\alpha\rangle - 1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}.$$

Maintenant nous allons montrer, en calculant un exemple, que les propriétés établies dans le théorème 5 et concernant les intégrales orbitales sur $\mathfrak{g}^*$ sont bien les meilleures que l'on puisse obtenir, et qu'en particulier, contrairement au cas semi-simple, elles ne sont pas à décroissance rapide à l'infini.

Considérons l'algèbre de Lie, $sl_2(\mathbb{R})$, que l'on identifie à son dual au moyen de la forme bilinéaire symétrique

$$(U,V) \longrightarrow \mathrm{tr}UV.$$

Soient alors les éléments de $sl_2(\mathbb{R})$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose $sl_2(\mathbb{R})$ muni de la structure euclidienne pour laquelle H, $X-Y$, $X+Y$ est une base orthonormée, et on note $\|\ \|$ la norme correspondante.

On fait agir $SL_2(\mathbb{R})$ sur $sl_2(\mathbb{R})$ au moyen de la représentation adjointe et on considère le groupe algébrique G produit semi-direct de $SL_2(\mathbb{R})$ par $sl_2(\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{n}$, l'espace vectoriel sous-jacent de $sl_2(\mathbb{R})$ considéré comme une algèbre de Lie commutative. Si A est une partie ou un élément de $sl_2(\mathbb{R})$, on notera $A_\mathfrak{n}$ la partie ou l'élément correspondant de $\mathfrak{n}$. Dans ces conditions l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est le produit semi-direct de $sl_2(\mathbb{R})$ par $\mathfrak{n}$.

Soit

$$\mathfrak{b} = \mathbb{R}(X-Y) \ ;$$

c'est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $sl_2(\mathbb{R})$, et on note B, le sous-groupe de Cartan correspondant de $SL_2(\mathbb{R})$. Les éléments de B sont les matrices

$$k_\theta = \exp \theta(X-Y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Si t appartient à $\mathbb{R}$, on note a_t l'élément de $SL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$a_t = \exp tH = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathfrak{b}$ est un élément de $car(\mathfrak{g})$, et on a

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}_n \quad \text{et} \quad H_\mathfrak{b} = B \exp \mathfrak{b}_n.$$

De plus, si nous identifions $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}^*$, à l'aide de l'identification de $sl_2(\mathbb{R})$ avec son dual que nous avons décrite ci-dessus, on a, c étant une constante positive,

$$\pi_\mathfrak{b}\big(\lambda(X-Y) + \mu(X-Y)_n\big) = c\mu^2, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Nous identifions d'ailleurs $\mathfrak{h}_\mathfrak{b}^*$ avec $\mathbb{R}^2$ au moyen de l'application

$$\lambda(X-Y) + \mu(X-Y)_n \longrightarrow (\lambda,\mu).$$

Soit alors, φ, la fonction définie sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ par

$$\varphi(U+V_n) = \exp(-\|U\|^2 - \|V_n\|^2).$$

Il est clair que φ est un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. Nous allons étudier le comportement asymptotique à l'infini de l'intégrale orbitale $F_{\mathfrak{b},\varphi}$.

Pour alléger l'écriture nous poserons $S = SL(2,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{s} = sl_2(\mathbb{R})$. Nous allons effectuer les calculs sans nous préoccuper des problèmes liés à la normalisation des mesures utilisées. Autrement dit, les égalités que nous écrirons ne seront vraies qu'à une constante multiplicative positive près.

Rappelons d'abord que, si ψ est une fonction sur l'espace quotient S/B, on a

$$\int_{S/B} \psi(\dot{s})\, d\dot{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \psi(k_\theta\, a_t)\ \mathrm{sh}2t\ dt\ d\theta.$$

En utilisant cette relation on voit facilement que pour λ appartenant à $\mathbb{R}$

on a

$$F_{\mathfrak{b},\varphi}(\lambda) = \int_{S/B}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathfrak{n}/\mathfrak{b}_{\mathfrak{n}}} \varphi((s\exp\xi).(\lambda(X-Y) + \mu(X-Y)_{\mathfrak{n}}))\ \mu^4\ d\xi\ d\mu\ d\dot{s}$$

$$= \int_0^{+\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathfrak{n}/\mathfrak{b}_{\mathfrak{n}}} \varphi((a_t\exp\xi).(\lambda(X-Y) + \mu(X-Y)_{\mathfrak{n}}))\ \mu^4\ d\xi\ d\mu\right\}\mathrm{sh}2t\ dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\left\{\int_{\mathbb{R}} \psi(\lambda,\mu,t)\ \mu^2\ d\mu\right\}\mathrm{sh}2t\ dt\ ,$$

avec

$$\psi(\lambda,\mu,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\ a_t.(\lambda(X-Y) + \gamma H + \delta(X+Y) + \mu(X-Y)_{\mathfrak{n}}))d\gamma\ d\delta$$

$$= e^{-(\lambda^2+\mu^2)\mathrm{ch}4t}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(\gamma^2 + \delta^2\mathrm{ch}4t + 2\lambda\delta\mathrm{sh}4t)}\ d\gamma\ d\delta$$

$$= (\mathrm{ch}4t)^{-1/2}\ e^{-[\lambda^2(1-\mathrm{th}^24t) + \mu^2]\mathrm{ch}4t}\ .$$

Il vient alors

$$F_{\mathfrak{b},\varphi}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2(\mathrm{ch}4t)^{-1}}\ (\mathrm{ch}4t)^{-2}\ \mathrm{sh}2t\ dt = \int_0^1 e^{-\lambda^2u^2}\ \frac{u^2\ du}{(1+u^2)^{1/2}}\ .$$

On a alors l'encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-\lambda^2u^2}\ u^2du \le F_{\mathfrak{b},\varphi}(\lambda) \le \int_0^1 e^{-\lambda^2u^2}\ udu,$$

la première des intégrales étant un $O(\lambda^{-3})$ au voisinage de l'infini, tandis que la seconde est un $O(\lambda^{-2})$, comme on le vérifie aisément.

BIBLIOGRAPHIE

[Be] **P. BERNAT et al.** *"Représentations des groupes de Lie résolubles"*. In "Monographies de la S.M.F." Dunod, Paris (1972).

[Bo] **A. BOREL.** *"Linear algebraic groups"*. Benjamin, New-York (1969).

[Bo-Ha] **A. BOREL et HARISH-CHANDRA.** *"Arithmetic sub-groups of algebraic groups"*. Ann. of Math. 75(3) (1962) 485-535.

[Ch] **J.Y. CHARBONNEL.** *"Sur les caractères des groupes de Lie"*. J.F.A. 72(1) (1987) 94-150.

[Do] **P. DOURMASHKIN.** *"A Poisson-Plancherel formula for groups of type B_n"*. Thèse M.I.T. (1984). Preprint 1985, à paraître.

[Du-1] **M. DUFLO.** *"Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie"*. In "Harmonic Analysis and Group Representations", Liguori Editori, Napoli (1982).

[Du-2] **M. DUFLO.** *"Représentations unitaires des groupes de Lie et méthode des orbites"*. In "G.M.E.L.", Bordas, Paris (1982).

[Du-3] **M. DUFLO.** *"On the Plancherel Formula for almost algebraic real Lie groups"*. In "Lie Groups Representation III", Lecture Notes in Math. N°1077, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo (1984).

[Du-Ve] **M. DUFLO et M. VERGNE.** *"La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels"*. In "Representations of Lie Groups", Kyoto, Hiroshima (1986), Advanced Studies in Pure Mathematics 14 (1988).

[Gi] **V.A GINZBURG.** *"Fast decreasing functions and characters of real algebraic groups"*. Funct. Anal. Appl. 16(1) (1982) 53-54.

[Go] **R. GODEMENT.** *"Introduction à la théorie des groupes de Lie"*. In "Publications Mathématiques de l'Université de Paris VII" (1979).

[Lu-Ri] **D. LUNA et R.W. RICHARDSON.** *"A generalization of the Chevalley restriction theorem"*. Duke Math. J. 46(3) (1979) 487-496.

[Mu] **D. MUMFORD.** *"Introduction to algebraic geometry"*. Harvard Notes.

[Mu-Fo] **D. MUMFORD et J. FOGARTY.** *"Geometric Invariant Theory"*. In "A Series of Modern Surveys in Mathematics", Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York (1982).

[Ri-1] **R.W. RICHARDSON.** *"Principal Orbit Types for Algebraic Transformation Groups in Characteristic Zero"*. Invent. Math. 16(1) (1972) 6-14.

[Ri-2] **R.W. RICHARDSON.** *"Principal Orbit types for real analytic transformation groups"*. Amer. J. Math. 95(1) (1973) 193-203.

[Ri-3] **R.W. RICHARDSON.** *"On orbits of algebraic groups and Lie groups"*. Bull. Austral. Math. Soc 25 (1982) 1-28.

[Ro] M. ROSENLICHT. *"A Remark On Quotient Spaces"*. An. da Acad. Brasileina de Ciéncias. 35(4) (1963) 487-489.

[To] P. TORASSO. *"La formule de Poisson-Plancherel pour un groupe de Takiff associé à un groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini"*. J.F.A. 59(2) (1984) 293-334.

[Va] V.S. VARADARAJAN. *"Harmonic analysis on real reductive groups"*. Lecture Notes in Math. N°576 Springer Verlag, Berlin, New-York (1977).

[Ve-1] M. VERGNE. *"A Plancherel formula without group representations"*. O.A.G.R. Conference INCREST, Bucarest, Roumania (1980).

[Ve-2] M. VERGNE. *"A Poisson-Plancherel formula for semi-simple Lie groups"*. Ann. of Math 115 (1982) 639-666.

[Wa] N.R. WALLACH. *"Harmonic analysis on homogeneous spaces"*. In "Pure and applied mathematics", Marcel Dekker, New-York (1973).

[Wh] H. WHITNEY. *"Elementary structure of real algebraic varieties"*. Ann. of Math. 66(3) (1957) 545-556.