P. GABRIEL
M. LEMANCZYK
P. LIARDET

Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzai

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 47 (1991)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_47__1_0>

INTRODUCTION

L'objet principal de ce travail est l'étude des produits croisés introduits par Anzai [An], c'est-à-dire les transformations $T_\varphi : (x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$ définies sur $\mathbf{X}^2$ où $\mathbf{X}$ est le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de dimension 1 muni de sa mesure de Haar μ, où $x \mapsto x + \alpha$ est une rotation irrationnelle sur $\mathbf{X}$ et φ une application mesurable, appelée *cocycle,* de $\mathbf{X}$ dans lui-même. Le problème de coalescence de ces produits est étudié dans [Le–Li] et plus récemment dans [Kw–Le–Ru]. Il s'agit de déterminer si toute transformation de $\mathbf{X}^2$ (mesurable, conservant la mesure de Haar) qui commute avec T_φ est inversible (cas coalescent). Bien que des exemples de produits de Anzai non coalescents soient construits dans [Le–Li], il apparaît que la propriété de coalescence soit la règle. C'est le cas des cocycles uniformément lipschitziens de degré d'enlacement non nul, étudiés dans [Fü 1], [Le–Li]. C'est aussi le cas de certains cocycles en escalier [Le–Li]. Nous présentons ici une classe plus large de cocycles donnant des extensions coalescentes et nous étudions le problème de coalescence pour les auto-couplages infinis. L'article est divisé en deux parties.

Dans la première partie, la section 1 fait l'analyse d'un ensemble d'invariants pour les classes d'isomorphie. Le premier d'entre eux est un semi-groupe mesurable de $\mathbf{X}$, représentatif de l'ensemble de tous les endomorphismes des produits directs $T_\varphi \times \tau$ où τ parcourt les rotations du cercle. Les invariants suivants traduisent des propriétés spectrales de l'isométrie associée à T_φ dans l'espace $L^2(\mathbf{X}^2)$. Le plus important est le nombre $S_\varphi(T) := \limsup_{q\alpha \to 0} |\widehat{\nu}(q)|$ où $\widehat{\nu}$ est la transformée de Fourier de la mesure spectrale ν associée au caractère $(x, y) \mapsto \exp(2\pi i y)$. Les deuxième, troisième et quatrième sections sont consacrées aux cocycles φ absolument continus.

Lorsque φ est de degré topologique nul, il peut se définir comme la réduction modulo 1 d'une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, périodique de période 1. Les propriétés fines de régularité de distribution de la suite $n \mapsto n\alpha$ jouent ici un rôle de premier plan. Elles permettent de montrer que si f est absolument continue et $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors la suite des applications $f^{(q)} := f + f \circ T + \cdots + f \circ T^{q-1}$ converge uniformément vers 0 quand q parcourt la suite des dénominateurs des convergents de α. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{1+\delta}$, $0 < \delta < 1$, nous déduisons de cette étude que f est un cobord additif pour un ensemble de nombres irrationnels α de mesure 1, généralisant un résultat de [He–La]. Toujours pour φ de degré topologique 0, quelle que soit la rotation ergodique $T : x \mapsto x + \alpha$, la transformation T_φ est rigide, de type spectral maximal singulier et plus précisément de Dirichlet.

Lorsque le cocycle φ (absolument continu) est de degré topologique non nul, il est ergodique pour toutes les rotations irrationnelles T. Ceci généralise un résultat de H. Fürstenberg [Fü 1] sur les cocycles uniformément lipschitziens de degré non nul pour lesquels nous obtenons $S_\varphi(T) < 1$. Notre méthode consiste à montrer que, pour cette classe de cocycles, il existe un *temps mélangeant* dans l'orthocomplément du sous-espace engendré par la rotation. De plus, aucune de ces extensions ne peut être spectralement isomorphe à une quelconque extension donnée par un cocycle (absolument continu) de degré nul. Nous calculons les invariants introduits dans la première section. Nous sommes aussi en mesure d'affirmer que la construction d'extensions non coalescentes dans [Le–Li] ne peut pas être réalisée, à un isomorphisme près, par des cocycles absolument continus, quel que soit le degré. De manière plus précise, on ne peut pas modifier le cocycle non coalescent construit dans [Le–Li] par un cobord mesurable f (*i.e.*, de la forme $f : x \mapsto g(x+\alpha) - g(x)$, g mesurable), pour obtenir un cocycle $\varphi + f$ absolument continu. Nous rappelons à cet effet que suivant un résultat de [Ko] (voir aussi [Ru 2]), la classe de cohomologie de tout cocycle contient un cocycle continu.

La dernière section porte sur les cocycles en escalier. Les invariants introduits permettent de montrer que les cocycles absolument continus et les cocycles en escalier appartiennent à des classes distinctes de cohomologie. Les propriétés spectrales dépendent des propriétés d'approximations diophantiennes de la rotation. On donne une condition simple entre α et un cocycle en escalier φ pour que celui-ci ne soit pas un cobord. Lorsque α est à quotients partiels bornés, un renforcement de la condition précédente entraîne que T_φ n'est pas rigide et les rotations qui se relèvent dans le commutant de T_φ ont un ordre, modulo $\mathbf{Z}\alpha$, borné. Lorsque α admet un développement en fraction continue à quotients partiels non bornés alors le type spectral maximal de T_φ est une mesure de Dirichlet (ce qui généralise un résultat de Anzai [An]).

Dans la seconde partie, nous examinons l'ensemble des auto-couplages infinis pour les produits de Anzai. Notre but est de démontrer que la méthode de construction de produits de Anzai non coalescents présentée dans [Le–Li] est essentiellement différente des autres méthodes connues. Le problème que nous avons à l'esprit (posé par Ya. G. Sinai [Si] en 1963) est de déterminer des transformations faiblement isomorphes qui ne soient pas isomorphes. Les constructions de "machines à exemples", données dans [Ru], [Th], [Ju-Ru], [Le 1], [Ga-Le-Me], [Le 2], consistent à déterminer un automorphisme ergodique τ ayant la propriété suivante :

(FI) *Il existe deux auto-couplages infinis ergodiques de τ qui déterminent des systèmes dynamiques faiblement isomorphes mais non isomorphes.*

Récemment, A. del Junco et Lemańczyk [Ju–Le] ont montré que la propriété (FI) est générique.

Une première question naturelle se pose :

Question 1 : Un automorphisme ergodique à spectre partiellement continu possède-t-il la propriété (FI) ?

La section 1 de cette deuxième partie apporte une réponse négative sous la forme suivante : tout auto-couplage d'un automorphisme quasi-discret est coalescent. Cependant, on peut construire des extensions de Anzai admettant un auto-couplage infini non coalescent mais dont un facteur naturel est quasi-discret.

Les sections suivantes ont pour point de départ une autre question naturelle lié à (FI) :

Question 2 : Un automorphisme ergodique non coalescent peut-il se représenter comme un auto-couplage $\infty-$essentiel (voir définition à la section 0.2) ?

Ici encore, la réponse est négative. Elle fournit l'occasion d'introduire deux invariants nouveaux $\mathbf{jd}(\tau)$ et $\mathbf{chl}(\tau)$ liés à la possibilité de représenter l'automorphisme ergodique τ comme un auto-couplage d'un de ses facteurs stricts. Nous examinons ici le cas des produits croisés ergodiques $\tau_\varphi : \Gamma \times G \to \Gamma \times G$, extensions d'une rotation $\tau : \Gamma \to \Gamma$ (Γ, G groupes abéliens, métrisables, compacts). Cette étude fait appel à la correspondance univoque entre les facteurs $\mathcal{E}$ de τ_φ et les couples de groupes compacts $(H(\mathcal{E}), \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}))$ où $H(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de G et $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$ un sous-groupe dans le commutant du facteur naturel $\tau_{\varphi_{H(\mathcal{E})}}$ déterminé par le passage au quotient $\Gamma\times G \to \Gamma\times(G/H(\mathcal{E}))$. Cette correspondance a été étudiée notamment dans [Ve], [Ju–Ru] et [Le-Me]. Elle est reprise dans la section 2 et améliorée. Une première application (section 3) est donnée dans le cas d'extensions τ_φ dont les facteurs naturels sont deux-à-deux non isomorphes. Lorsque les groupes Γ et G sont de la forme $\mathbf{X}^d\times F$, où F est un groupe abélien fini, on obtient comme autre application (section 4) que toute chaîne croissante de facteurs de τ_φ est stationnaire. La dernière section est consacrée au calcul de ces invariants pour les extensions de Anzai déterminées par des cocycles absolument continus ou en escalier. Le sous-groupe des points de torsion dans le commutant joue un rôle essentiel.

Ce mémoire a été préparé au cours de la visite du troisième auteur à l'Université Copernicus de Toruń en Mai 1989 et s'est poursuivi pendant le séjour du second auteur à l'Université de Bourgogne à Dijon, en septembre 1989 puis à l'Université de Provence en janvier - février 1990. Les auteurs sont reconnaissants à F. Parreau pour leur avoir signalé une erreur de démonstration et remercient le Referee pour ses corrections et suggestions qui ont permis d'améliorer l'ensemble de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE

0.1. NOTATIONS ET RAPPELS

Commutant et automorphismes coalescents

Soit $\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ un automorphisme d'un espace de Lebesgue $\mathcal{Y} := (Y, \mathcal{C}, \nu)$. Le *commutant* de τ est, par définition, le semi-groupe des endomorphismes de τ, *i.e.,* des transformations $\mathcal{C}-$mesurables $S : Y \to Y$, qui commutent avec τ et préservent la mesure ν. Le commutant de τ, noté $C(\tau)$, sera muni de la ***topologie faible*** des transformations qui en fait un semi-groupe métrisable séparable complet. La convergence d'une suite $(S_n)_n$ vers S pour cette topologie étant définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{C}\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \nu(S_n^{-1}A \Delta S^{-1}A) = 0.$$

L'ensemble des éléments inversibles de $C(\tau)$ forme un groupe noté $C_1(\tau)$. En suivant [Ha–Pa] et [Ne 1], τ est dit ***coalescent*** si $C_1(\tau) = C(\tau)$. Un automorphisme τ_1 d'un espace de Lebesgue $\mathcal{Y}_1 = (Y_1, \mathcal{C}_1, \nu_1)$ est appelé un *facteur* de τ suivant une application mesurable $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$ si $\tau_1 \circ f = f \circ \tau$ et $\nu_1 = \nu \circ f^{-1}$. Le facteur τ_1 s'identifie avec la sous-$\sigma-$algèbre $\tau-$invariante $\mathcal{E} := f^{-1}(\mathcal{C}_1)$ et se note encore $\tau_{\mathcal{E}}$. Les automorphismes τ et τ_1 sont dits *isomorphes* si, dans la définition précédente de facteur, on peut trouver f inversible (d'inverse mesurable).

Remarque 0.1. Les égalités ou relations entre ensembles, fonctions, transformations et $\sigma-$algèbres sont supposées vérifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle (la mesure en question étant déterminée par le contexte).

Remarque 0.2. Notons que τ est coalescent si et seulement si aucun facteur $\tau_{\mathcal{E}}$ n'est isomorphe à τ dès que $\mathcal{E}$ est une sous-σ–algèbre invariante distincte de $\mathcal{C}$. Il en résulte donc :

(0.1) *Si τ est coalescent, alors tout facteur faiblement isomorphe à τ est en fait isomorphe à τ.*

Type spectral, temps rigide et temps mélangeant

Un automorphisme τ de $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ induit un opérateur unitaire $\mathcal{U}_\tau : f \mapsto f \circ \tau$ sur $L^2(Y, \nu)$ (de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$). Soit $L_0^2(Y, \nu)$ le sous-espace orthogonal à l'espace des constantes. A toute application $f : Y \to \mathbf{C}$ dans $L_0^2(Y, \nu)$ nous associerons sa *mesure spectrale* σ_f définie sur le tore multiplicatif $\mathcal{S}^1$ (ou cercle) par

$$\widehat{\sigma}_f(n) := \int_{\mathcal{S}^1} z^n d\sigma_f = (\mathcal{U}_\tau^n f | f).$$

Il est bien connu qu'il existe une application $f_0 \in L_0^2(Y, \nu)$ telle que pour toute $f \in L_0^2(Y, \nu)$ on a $\sigma_{f_0} \gg \sigma_f$. Le type spectral de σ_{f_0} (*i.e.*, sa classe d'équivalence) ne dépend pas du choix de f_0, il est appelé *type spectral maximal* de τ. Le groupe des valeurs propres de $\mathcal{U}_\tau$ est noté $Sp(\tau)$.

Une suite strictement croissante d'entiers naturels $(r_k)_k$ sera dite *temps rigide* pour τ si la suite $(\tau^{r_k})_k$ converge vers l'identité pour la topologie faible. Soit E un sous-espace $\mathcal{U}_\tau$–invariant dans $L_0^2(Y, \nu)$. Nous dirons qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels $(m_k)_k$ est un *temps mélangeant* pour τ sur E si :

$$\forall f \in E\,,\ \lim_{k \to +\infty} (\mathcal{U}_\tau^{m_k} f | f) = 0.$$

Rappelons qu'une mesure σ de probabilité sur le cercle de transformée de Fourier $\widehat{\sigma}$ est dite de *Dirichlet* si $\limsup_{n \to +\infty} |\widehat{\sigma}(n)| = 1$. Notons que si τ admet un temps rigide, alors son type spectral maximal est donné par une mesure de Dirichlet.

Cocycles et produits croisés

Pour tout groupe compact Γ, on note $\mathcal{B}_\Gamma$ la σ–algèbre des parties boréliennes de Γ et μ_Γ la mesure de Haar normalisée. Pour simplifier, on notera simplement $\mathcal{B}$ et μ si le contexte le permet sans ambiguïté. Soit τ :

$(\Gamma, \mathcal{B}, \mu) \to (\Gamma, \mathcal{B}, \mu)$ une rotation ergodique sur un groupe monothétique compact Γ ($\mu = \mu_\Gamma$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Gamma$). La loi sur Γ sera notée additivement. Alors $C(\tau) = \{\gamma \mapsto \gamma + a \; ; \; a \in \Gamma\}$ [Ne 2]. Soit G un groupe abélien compact métrisable, de loi notée additivement. Une application mesurable $\varphi : \Gamma \to G$ sera dite un *$G-$cocycle.* On associe à φ le produit croisé $\tau_\varphi : (\Gamma \times G, \widetilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}) \to (\Gamma \times G, \widetilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$ défini par

$$\tau_\varphi(\gamma, g) := (\tau\gamma, \varphi(\gamma) + g) \tag{0.2}$$

où $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la $\sigma-$algèbre produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_G$ et $\tilde{\mu} := \mu \otimes \mu_G$. Dans le cas particulier où $\Gamma := \mathbf{X}$ (le tore) et $G = \mathbf{X}$, on retrouve le *produit croisé de Anzai* [An].

Un $G-$cocycle φ est dit un *$\tau-$cobord* s'il existe une application mesurable $f : X \to G$ telle que $\varphi = f \circ \tau - f$. Deux $G-$cocycles φ, ψ sont dits *$\tau-$cohomologues* si leur différence est un $\tau-$cobord. Notons que si φ et ψ sont $\tau-$cohomologues, alors les produits croisés donnés par (0.2) sont isomorphes. Un $G-$cocycle φ est appelé *$\tau-$quasi-cobord* s'il existe une constante $c \in G$ et un $G-$cocycle f tels que

$$\varphi = c + f \circ T - f.$$

Toute extension en groupe de la forme (0.2) admet une famille particulière de facteurs $\widetilde{\mathcal{B}}^H$ appelés *facteurs naturels* définis pour tous les sous-groupes fermés H de G de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathcal{B}}^H := \{\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{B}} \; ; \; \forall\, h \in H \; , \; \theta_h^{-1}(\widetilde{A}) = \widetilde{A}\}$$

où l'on a noté θ_h l'automorphisme $(\gamma, g) \mapsto (\gamma, g + h)$.

Un automorphisme (0.2) n'est pas nécessairement ergodique. Classiquement, on a ([An], [Pa 2]) :

(0.3) *τ_φ est ergodique si et seulement si pour tout caractère non trivial χ le $X-$cocycle $\chi \circ \varphi$ n'est pas un $\tau-$cobord.*

Le commutant de τ_φ

Deux $G-$cocycles φ et ψ définis sur Γ sont dits *équivalents* s'il existe S dans $C(\tau)$ et un automorphisme continu v du groupe G tels que le cocycle $\varphi \circ S - v \circ \psi$ soit un $\tau-$cobord, *i.e.,* s'il existe une application mesurable $f : \Gamma \to G$ telle que

$$\varphi \circ S - v \circ \psi = f \circ \tau - f \, .$$

Notons que dans ce cas, la transformation définie sur $\Gamma \times G$ par

$$S_{f,v}(\gamma, g) := (S\gamma, f(\gamma) + v(g)), \tag{0.4}$$

détermine un isomorphisme de τ_φ sur τ_ψ. En fait (voir [Ne 2]), si φ et ψ sont deux G−cocycles *ergodiques* (*i.e.*, si τ_φ et τ_ψ sont ergodiques) alors tout isomorphisme $\widetilde{S}$ de τ_φ sur τ_ψ est de la forme (0.4). En particulier, dans le cas ergodique, φ et ψ sont équivalents si et seulement si τ_φ et τ_ψ sont isomorphes. Lorsque $\varphi = \psi$ et φ ergodique, les éléments $\widetilde{S}$ du commutant de τ_φ ont été décrits dans [Ne 2]. Il sont aussi de la forme (0.4), mais cette fois-ci, $v : G \to G$ est un épimorphisme continu de groupe. Ainsi, $S_{f,v} \in C(\tau_\varphi)$ si et seulement si l'équation fonctionnelle

$$\varphi \circ S - v \circ \varphi = f \circ \tau - f \tag{0.5}$$

est satisfaite. Nous dirons que S dans $C(\tau)$ se *relève* dans le commutant $C(\tau_\varphi)$ s'il existe $f : \Gamma \to G$ mesurable et un épimorphisme continu de groupe $v : G \to G$ solutions de (0.5). Notons au passage que $S_{f,v}$ est inversible si et seulement si v est inversible.

Cocycles sur le cercle

Supposons maintenant que l'on ait une rotation irrationnelle $T : x \mapsto x + \alpha$ sur le tore $\mathbf{X}$. Dans la suite, $\mathbf{X}$ sera identifié à l'intervalle [0,1[par l'application $t \mapsto t + \mathbf{Z}$, la topologie compacte sur [0,1[étant donnée par la distance d définie par $d(u,v) := ||u - v||$ avec $||t|| := \min\{|t - m| \,;\, m \in \mathbf{Z}\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. La mesure de Haar μ correspond sur [0,1[à la mesure de Lebesgue. L'identification de $\mathbf{X}$ avec [0,1[définit un ordre total sur $\mathbf{X}$. Si $v < u$ dans $\mathbf{X}$, on posera $[u, v[:= [0, v[\cup [u, 1[$ (et $[u, 1[= \mathbf{X} \setminus [0, u[$). Choisissons également $G = \mathbf{X}$. Un $\mathbf{X}$−cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ sera alors simplement appelé *cocycle*. De même un T−cobord (resp. un T−quasi-cobord) sera dit un α−cobord ou simplement *cobord* (resp. un α−quasi-cobord, ou *quasi-cobord*). Les facteurs naturels de T_φ sont ici tous de la forme $T_{k\cdot\varphi}$, avec $k \in \mathbf{Z}$.

Pour tout cocycle φ et tout entier $n \geq 1$ posons

$$\varphi^{(n)} = \varphi + \varphi \circ T + \cdots + \varphi \circ T^{n-1},$$

$\varphi^{(0)} = 0$ et $\varphi^{(-n)} := -\varphi^{(n)} \circ T^{-n}$. L'application $\Phi : \mathbf{Z}\alpha \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ définie par $\Phi(n{\cdot}\alpha, x) := \varphi^{(n)}(x)$ est un cocycle sur $\mathbf{Z}\alpha \times \mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbf{X}$ au sens usuel, auquel est associée la représentation unitaire $n \to \mathcal{V}_n$ de $\mathbf{Z}$ donnée par

$$\mathcal{V}_n f(\cdot) := \exp(2\pi i \Phi(n{\cdot}\alpha, \cdot)) f \circ T, \quad (f \in L^2(\mathbf{X}, \mu)).$$

De nombreux auteurs ont développé et généralisé cette notion (voir notamment ([Hel], [Pa 1, 2], [Sc]). Notons simplement que le relèvement mesurable d'un sous-groupe Γ de $\mathbf{X}$ dans $C(T_\varphi)$ correspond à l'extension du cocycle Φ, étudiée par Helson [Hel]. Plus précisément, si un sous-groupe mesurable Γ de $\mathbf{X}$ se relève dans $C(T_\varphi)$ suivant un homomorphisme $F : \Gamma \to C(T_\varphi)$ tel que $F(\gamma)$ soit représenté sous la forme $(x, y) \mapsto (x + \gamma, y + f_\gamma(x))$ avec $F(\alpha) = T_\varphi$ et l'application $\Psi : (\gamma, x) \mapsto f_\gamma(x)$ mesurable, alors Ψ est un cocycle sur $\Gamma \times \mathbf{X}$, extension de Φ. Réciproquement, tout cocycle $\Psi : \Gamma \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ extension du cocycle Φ s'obtient de cette manière. En effet, par définition, Ψ est mesurable et vérifie la relation des cocycles

$$\Psi(\alpha + \gamma, x) = \Psi(\alpha, x) + \Psi(\gamma, x + \alpha),$$

de sorte que $F_\gamma : (x, y) \mapsto (x + \gamma, y + \Psi(\gamma, x))$ est dans $C(T_\varphi)$. L'égalité (0.5) se traduisant ici par la relation $\Phi(\alpha, x + \gamma) - \Phi(\alpha, x) = \Psi(\gamma, x + \alpha) - \Psi(\gamma, x)$ et le relèvement de Γ se faisant par $\gamma \mapsto F_\gamma$.

Les résultats suivants sont bien connus et faciles à établir :

(0.6) *Si un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est un cobord, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\lim_{\substack{n\alpha \to 0 \\ \text{mod } 1}} \mu(\{x \in X \; ; \; |\exp(2\pi i \varphi^{(n)}(x) - 1| > \varepsilon\}) = 0.$$

(0.7) *Si un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est un quasi-cobord, alors il existe une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes de module 1, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait*

$$\lim_{\substack{n\alpha \to 0 \\ \text{mod } 1}} \mu(\{x \in X \; ; \; |\exp(2\pi i \varphi^{(n)}(x) - a_n| > \varepsilon\}) = 0.$$

Nous dirons que le cocycle φ est *faiblement mélangeant* s'il est ergodique et si $Sp(T_\varphi) = Sp(T)$. D'après [An] (voir aussi (0.3)) on a la caractérisation suivante :

$$\exp(2\pi i c) \in Sp(T_\varphi) \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z}\,, n{\cdot}\varphi - c \textit{ est un cobord.} \tag{0.8}$$

D'après [Ko], [Ru 2], tout cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est cohomologue à un cocycle continu. Supposons donc φ continu, il existe alors un relèvement continu $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de φ dont la restriction à [0,1] est encore notée $\tilde{\varphi}$. On fixe $\tilde{\varphi}$ en choisissant $\tilde{\varphi}(0) \in [0,1[$. Par construction

$$\begin{cases} (i)\ \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) \in \mathbf{Z}\,, \\ (ii)\ \varphi(\bar{t}) = \overline{\tilde{\varphi}(t)}\,, \end{cases} \tag{0.9}$$

où l'on a posé $\bar{t} = t + \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{R}$ (rappelons que [0,1[est identifié au cercle tandis que [0,1] est l'intervalle fermé). Nous utiliserons aussi les notations $\lfloor t \rfloor$ (resp. $\langle t \rangle$) pour la partie entière (resp. fractionnaire) de t. L'entier $d(\varphi) := \tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0)$ est appelé le *degré* de φ. En général, $d(\varphi)$ n'est pas invariant par isomorphisme puisque d'après [Ko, Thm 8] on peut trouver pour chaque cocycle un cocycle cohomologue continu de degré donné. Cependant, une condition de régularité plus forte que la continuité sur φ peut changer complètement la situation de sorte que le degré joue un rôle important (voir [Fü 1]) et peut servir à caractériser complètement le commutant [Le–Li] de certains produits croisés de Anzai.

Il est intéressant de regarder T_φ comme la réduction modulo 1, suivant l'homomorphisme $(x,t) \mapsto (x,\bar{t})$, du *flot cylindrique* $T_{\tilde{\varphi}} : (x,t) \mapsto (Tx, t + \tilde{\varphi}(x))$ défini sur $(\mathbf{X}{\times}\mathbf{R}, h)$ où $h = \mu{\otimes}\lambda$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que si $T_{\tilde{\varphi}}$ est ergodique, il en est de même de T_φ. D'autre part, si $\tilde{\varphi}(t) = f(\langle t + \alpha \rangle) - f(\langle t \rangle)$ pour une application mesurable $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, alors φ est un cobord. Notons que le classique théorème de Kolmogorov–Siegel [Co-Si-Fo] ne concerne que les $\mathbf{R}$–extensions T_γ de rotations irrationnelles T par des cocycles $\gamma : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ différentiables et non pas des applications différentiables de [0,1] dans $\mathbf{R}$. Pour α à quotients partiels bornés, γ est un T–quasi-cobord dès que γ est suffisamment régulier (cf. [Co–Si–Fo], partie IV).

Nous dirons qu'un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est *uniformément lipschitzien* (resp. *absolument continu*) si $\tilde{\varphi}$ l'est. Nous dirons que φ est en *escalier* s'il existe une suite finie de points $0 \leq x_1 < \cdots < x_k < 1$ et des constantes $A_1, \ldots, A_k$ dans $\mathbf{X}$, telles que

$$\varphi|_{[x_1,x_2[} = A_1, \quad \ldots \quad , \varphi|_{[x_{k-1},x_k[} = A_{k-1} \ , \ \varphi|_{[x_k,x_1[} = A_k.$$

Un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est dit *affine* s'il est de la forme $\varphi(x) := nx + c$, $n \in \mathbf{Z}$ et $c \in \mathbf{X}$.

Les notations et définitions propres à la deuxième partie sont renvoyées à la section (0.2).

1.1. PREMIER ENSEMBLE D'INVARIANTS

Le semi-groupe $\mathcal{MT}_\varphi(T)$

Soit T une rotation irrationnelle $x \mapsto x + \alpha$ du tore $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ et soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle. Soient $\Sigma_i : (x,y) \mapsto (x + \beta_i, n_i{\cdot}y + f_i(x))$ $i = 1,2$, deux éléments du commutant de T_φ. Il existe alors ([Le–Li], Lemma 2) une constante $c := c(\beta_1, \beta_2)$ telle que $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \theta_c \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1$, avec $\theta_c : (x,y) \mapsto (x, y + c)$. Cette relation se traduit par l'équation fonctionnelle

$$f_1(x + \beta_2) - n_2{\cdot}f_1(x) = f_2(x + \beta_1) - n_1{\cdot}f_2(x) + c(\beta_1, \beta_2).$$

Il est donc naturel de considérer les endomorphismes Σ de $(\mathbf{X}, \mu)^2$ qui vérifient une relation de *quasi-commutation* de la forme $T_\varphi \circ \Sigma = \theta_c \circ \Sigma \circ T_\varphi$. Remarquons qu'alors T est un facteur de T_φ suivant $\pi_1 \circ \Sigma$ (où π_1 désigne la première projection $\mathbf{X}^2 \to \mathbf{X}$). L'action de Σ sur la première coordonnée correspond donc, si T_φ est ergodique, à une rotation $x \mapsto x + \beta$. Introduisons le sous-groupe fermé Γ de $\mathbf{X}$ engendré par c et soit ρ_c la rotation ergodique $z \mapsto z + c$ sur Γ. La transformation Σ^* définie sur $\mathbf{X} \times \Gamma$ par $\Sigma^*((x,y),z) := (\theta_z \circ \Sigma(x,y), z)$ est dans le commutant de $T_\varphi \times \rho_c$. En effet,

$$\begin{aligned}
\big(T_\varphi \times \rho_c\big) \circ \Sigma^*((x,y),z) &= \big((T_\varphi \circ \theta_z \circ \Sigma)(x,y), z + c\big) \\
&= \big((\theta_{z+c} \circ (\Sigma \circ T_\varphi))(x,y), z + c\big) \\
&= \Sigma^*(T_\varphi(x,y), z + c) = \Sigma^* \circ (T_\varphi \times \rho_c)((x,y),z).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\beta \in \mathbf{X}$, un entier non nul n et un cocycle $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, tels que $\Sigma^*((x,y),z) = ((x + \beta, n{\cdot}y + f(x) + z), z)$. De plus, la relation de commutation se traduit par l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x + \beta) - n{\cdot}\varphi(x) = c + f(x + \alpha) - f(x). \tag{1.1}$$

Nous désignerons par $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ l'ensemble des $\beta \in \mathbf{X}$ pour lesquels il existe $n \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{X}$ et un cocycle $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tels que l'équation (1.1) soit satisfaite. Lorsque φ est ergodique, les éléments β de $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ sont ceux pour lesquelles il existe un endomorphisme Σ_β de $\mathbf{X}^2$ qui quasi-commute avec T_φ et tel que

$\pi_1 \circ \Sigma_\beta \circ \pi_1^{-1}$ soit égal à la rotations $x \mapsto x + \beta$. L'ensemble $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ ne dépend donc ici que du système dynamique T_φ et pas du cocycle φ. Notons que $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est encore bien défini lorsque φ n'est pas ergodique et dans tous les cas on a $\mathbf{Z}\alpha \subset \mathcal{MT}_\varphi(T)$.

Remarque 1.1. On savait déjà [Le–Li] que si l'on considère une autre rotation T' du cercle et si le quadruplet (n, β, c, f) vérifie (1.1) avec $c \in Sp(T')$, alors la rotation $S : x \mapsto x + \beta$ peut être relevée dans le commutant de $T_\varphi \times T'$.

Proposition 1.1. *$\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est un semi-groupe mesurable de* $\mathbf{X}$ *tel que $\mu(\mathcal{MT}_\varphi(T)) = 0$ ou $\mathcal{MT}_\varphi(T) = \mathbf{X}$.*

Preuve. L'ensemble $\mathcal{F}$ des cocycles $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ muni de la topologie donnée par la distance

$$d(f, g) := \int_X ||f(x) - g(x)||\mu(dx)$$

est un espace polonais. Soit alors E l'espace produit $\mathbf{Z} \times \mathbf{X}^2 \times \mathcal{F}$ muni de la loi

$$(n_1, \beta_1, c_1, f_1) \circ (n_2, \beta_2, c_2, f_2) := (n_1 n_2, \beta_1 + \beta_2, c_1 + n_1 c_2, f_1 \circ S_2 + n_1 f_2)$$

où S_2 est la rotation $x \mapsto x + \beta_2$. On vérifie facilement que $(E, \circ)$ est un semi-groupe topologique d'élément neutre $(1, 0, 0, 0)$ et dont les éléments inversibles sont de la forme $(\pm 1, \beta, c, f)$. Le sous-ensemble des quadruplets (n, β, c, f) qui vérifient (1.1) forme un sous-semi-groupe fermé (et donc un espace polonais) de $(E, \circ)$ et son image par la projection $pr_2 : (n, \beta, c, f) \mapsto \beta$ est exactement $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ d'où à la fois la structure de semi-groupe et la mesurabilité (mais on ne sait pas si c'est un borélien). Notons que $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est aussi T-invariant, il est donc de mesure 0 ou 1. S'il est de mesure 1, il en est de même de l'intersection $\mathcal{MT}_\varphi(T) \cap (-\mathcal{MT}_\varphi(T))$ qui est un sous-groupe mesurable de $\mathbf{X}$. Il coïncide donc avec $\mathbf{X}$. ■

Proposition 1.2. *Soient φ et ψ deux cocycles équivalents. Alors*

$$\mathcal{MT}_\varphi(T) = \mathcal{MT}_\psi(T).$$

Preuve. Par équivalence de φ et ψ il existe une rotation $S_\gamma : x \mapsto x + \gamma$ du cercle et $\varepsilon = \pm 1$ tels que $\varphi \circ S_\gamma + \varepsilon \psi$ soit un T-cobord. Il en résulte que pour tout triplet $(n,\beta,c)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{X}^2$ le cocycle $(\varphi\circ S_\beta - n\varphi - c)\circ S_\gamma + \varepsilon(\psi\circ S_\beta - n\psi + \varepsilon c)$ est aussi un T–cobord de sorte que si $\varphi\circ S_\beta - n\varphi - c$ est un T–cobord, il en est de même de $\psi\circ S_\beta - n\psi + \varepsilon c$. ■

Remarque 1.2. Si φ est cohomologue à un cocycle affine, l'équation (1.1) admet toujours une solution quel que soit $\beta\in X$. On a donc ici $\mathcal{MT}_\varphi(T)=X$.

Les invariants $\mathcal{S}_\varphi(T)$ et $\mathcal{D}_\varphi(T)$

Introduisons un deuxième invariant noté $\mathcal{S}_\varphi(T)$. Par définition

$$\mathcal{S}_\varphi(T) := \limsup_{\substack{\|q\alpha\|\to 0\\ q\in\mathbf{N}}} \left|\int_0^1 \exp(2\pi i\varphi^{(q)}(x))\mu(dx)\right|.$$

De manière évidente, on a $0\le \mathcal{S}_\varphi(T)\le 1$. Définissons maintenant l'ensemble $\mathcal{D}_\varphi(T)$ formé des nombres complexes ζ de module 1 pour lesquels il existe un temps rigide $\Lambda\subset\mathrm{N}$ de T (dit *associé* à ζ) vérifiant

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \int_0^1 \exp(2\pi i\varphi^{(q)}(x))\mu(dx) = \zeta.$$

Remarque 1.3.

(i) $\int_0^1 \exp(2\pi i\varphi^{(q)})d\mu = (\mathcal{U}^q_{T_\varphi}(1\otimes\chi_1)|1\otimes\chi_1) = \widehat{\sigma}_{1\otimes\chi_1}(q)$, où χ_ℓ désigne le caractère $y\mapsto \exp(2\pi i\ell y)$, $\ell\in\mathbf{Z}$.

(ii) Soit $\zeta\in\mathcal{D}_\varphi(T)$ et soit Λ un temps rigide de T associé à ζ. Alors, par convexité, la suite $(\exp(2\pi i\varphi^{(q)}))_{q\in\Lambda}$ converge dans $L^2(\mathbf{X},\mu)$ vers ζ et par suite, on a aussi dans $L^2(\mathbf{X},\mu)$

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \exp(2\pi i\ell\varphi^{(q)}) = \zeta^\ell$$

pour tout $\ell\in\mathbf{Z}$ ou, de manière équivalente, $\widehat{\sigma}_{1\otimes\chi_\ell}(q)\to\zeta^\ell$, $(q\to+\infty, q\in\Lambda)$.

(iii) Si $\mathcal{D}_\varphi(T)$ n'est pas vide, alors c'est un sous-groupe fermé du tore multiplicatif. En fait, soient ζ et ζ' dans $\mathcal{D}_\varphi(T)$ et soient $(r_k)_k$ et $(r'_k)_k$ des temps rigides associés à ces valeurs. On a

$$\varphi^{(r+r')} = \varphi^{(r)} + \varphi^{(r')}\circ T^r$$

d'où par *(ii)* $(r_k + r'_k)_k$ est un temps rigide associé à $\zeta\zeta'$. Par ailleurs, soit $(\zeta_j)_j$ une suite dans $\mathcal{D}_\varphi(T)$ convergent vers ζ et soit $(r_k^{(j)})_k$ un temps rigide associé à ζ_j. Quitte à prendre des sous-suites extraites, on peut supposer que l'on a

$$||\exp(2\pi i\varphi^{r_k^{(j)}}) - \zeta_j||_2 \leq 1/k\ , \qquad ||r_k^{(j)}\alpha|| \leq 1/k\,.$$

Alors la suite diagonale $(r_k^{(k)})_k$ est un temps rigide associé à ζ. Il en résulte que $\mathcal{D}_\varphi(T)$ est un sous-groupe fermé du tore multiplicatif. En particulier, si φ est constant égal à c, irrationnel, on a $\mathcal{D}_c(T) = \mathbf{X}$.

(iv) Pour tout cocycle φ on a équivalence entre

(a) φ *est rigide,*

(b) $\mathcal{S}_\varphi(T) = 1$,

(c) $\mathcal{D}_\varphi(T) \neq \emptyset$.

Le lemme suivant sera souvent utilisé :

Lemme 1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ *un espace de probabilité et soient deux suites d'applications* $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ *à valeurs complexes, respectivement dans les espaces conjugués* $L^r(\nu)$ *et* $L^s(\nu)$ $(1 \leq r \leq \infty$ *et* $r + s = rs)$. *Si la suite* $(|f_n|^r)_n$ *est équi-intégrable dans le cas* $r \neq \infty$ *ou si* $\sup_n ||f_n||_\infty < +\infty$ *dans le cas* $r = \infty$ *et si de plus* $\sup_n ||g_n||_s < +\infty$, *alors la convergence de* $(g_n)_n$ *vers 0 dans* $L^1(\nu)$ *entraîne celle de* $(f_n g_n)_n$ *vers 0 dans* $L^1(\nu)$.

Preuve. Pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n g_n| d\nu &\leq \int_{\{|f_n|>A\}} |g_n f_n| d\nu + A \int_{\{|f_n|\leq A\}} |g_n| d\nu \\ &\leq ||g_n||_s \Big(\int_{\{|f_n|>A\}} |f_n|^r d\nu \Big)^{1/r} + A||g_n||_1.\end{aligned}$$

On a donc $\limsup_n \int |f_n g_n| d\nu \leq \sup_n ||g_n||_s \sup_n \left(\int_{\{|f_n|>A\}} |f_n|^r d\nu \right)^{1/r}$, ceci pour tout $A > 0$, d'où le résultat. ∎

Proposition 1.3. *Si* φ *et* ψ *sont deux cocycles équivalents, alors* $\mathcal{S}_\varphi(T) = \mathcal{S}_\psi(T)$ *et* $\mathcal{D}_\varphi(T) = \mathcal{D}_\psi(T)$.

Preuve. Supposons $\varphi \circ S - \varepsilon\psi = f \circ T - f$, $\varepsilon = \pm 1$. Alors, pour tout entier q on a $\varphi^{(q)} \circ S - \varepsilon\psi^{(q)} = f \circ T^q - f$, donc

$$\int_0^1 \exp(2\pi i \varphi^{(q)}) d\mu = \int_0^1 \exp(2\varepsilon\pi i \psi^{(q)}) d\mu - \int_0^1 \exp(2\varepsilon\pi i \psi^{(q)})(1 - \exp(2\pi i (f \circ T^q - f)) d\mu.$$

Mais classiquement

$$\lim_{||q\alpha|| \to 0} \int_0^1 ||f(x + q\alpha) - f(x))|| \mu(dx) = 0.$$

Il en résulte (Lemme 1.1)

$$\lim_{||q\alpha|| \to 0} \left(\left| \int_0^1 \exp(2\pi i \varphi^{(q)}) d\mu - \int_0^1 \exp(-2\varepsilon\pi i \psi^{(q)}) d\mu \right| \right) = 0.$$

■

Proposition 1.4. *Soit $\zeta \in \mathcal{D}_\varphi(T)$ de temps rigide associé Λ. Alors, pour toute application $f \in L^2(\mathbf{X}, \mu)$ et tout $\ell \in \mathbf{Z}$, on a*

$$\lim_{\substack{q \to +\infty \\ q \in \Lambda}} \widehat{\sigma}_{f \otimes \chi_\ell}(q) = \zeta^\ell ||f||_2^2.$$

En particulier, si $||f||_2 = 1$ alors $\sigma_{f \otimes \chi_\ell}$ est une mesure de Dirichlet.

Preuve. Posons $f_q := f \circ T^q$, et $g_q := \bar{f} \cdot (\chi_\ell(\varphi^{(q)}) - \zeta^\ell)$, $q \in \Lambda$. Suivant la Remarque 1.3*(ii)*, $(g_q)_{q \in \Lambda}$ converge vers 0 dans $L^1(\mu)$ et par suite, en appliquant le Lemme 1.1 avec $r = s = 2$, on obtient

$$\lim_{\substack{q \to +\infty \\ q \in \Lambda}} \int |f \circ T^q \cdot \bar{f} \cdot (\chi_\ell(\varphi^{(q)}) - \zeta^\ell)| d\mu = 0.$$

Donc $\lim_{q \in \Lambda} \widehat{\sigma}_{f \otimes \chi_\ell}(q) = \zeta^\ell \cdot \lim_{q \in \Lambda} \int f \circ T^q \cdot \bar{f} d\mu = \zeta^\ell \cdot ||f||_2^2$.

■

Introduisons les sous-espaces $H_\ell := L^2(\mathbf{X},\mu) \otimes \chi_\ell$. Ils sont deux à deux orthogonaux, $\mathcal{U}_{T_\varphi}$–invariants et classiquement $L^2(\mathbf{X}^2,\tilde{\mu}) = \bigoplus_{\ell=-\infty}^{+\infty} H_\ell$.

Corollaire 1.1. *Si $\mathcal{S}_\varphi(T) = 1$, (ou $\mathcal{D}_\varphi(T) \neq \emptyset$) alors le type spectral maximal de T_φ est une mesure de Dirichlet. En particulier, il est singulier par rapport à toute mesure ν sur le cercle telle que $\lim_{|n|\to+\infty} \widehat{\nu}(n) = 0$ et de plus T_φ est rigide.*

Preuve. Le type spectral maximal de $\mathcal{U}_{T_\varphi}$ est de la forme $\sigma = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} c_\ell \sigma_{f_\ell\otimes\chi_\ell}$, avec $c_\ell > 0$, $\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} c_\ell = 1$, et $f_\ell \in L^2(\mathbf{X},\mu)$, $||f_\ell||_2 = 1$. D'après la Remarque 1.3*(iii)*, $1 \in \mathcal{D}_\varphi(T)$. Soit Λ un temps rigide associé à 1. D'après la Proposition 1.4 , la suite $(\widehat{\sigma}(q))_{q\in\Lambda}$ converge vers $\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} c_\ell (= 1)$. Il en résulte que σ est une mesure de Dirichlet et puisque $(\widehat{\sigma}(q))_{q\in\Lambda}$ converge vers 1, T_φ est rigide. ■

Nous terminons cette section par la proposition suivante :

Proposition 1.5. *Soient $T : (\mathbf{X},\mathcal{B},\mu) \to (\mathbf{X},\mathcal{B},\mu)$ une rotation irrationnelle et γ, ψ deux cocycles.*
(i) Si $\mathcal{S}_\gamma(T) < 1$, alors γ n'est pas $T-$cohomologue à une constante.
(ii) Si $\mathcal{S}_\gamma(T) < 1$, alors pour tout cocycle ψ tel que $\mathcal{S}_\psi(T) = 1$, le cocycle $\gamma+\psi$ n'est pas $T-$cohomologue à une constante.
(iii) Soit φ un cocycle de la forme

$$\varphi(x) = mx + c + \psi(x)$$

avec $m \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbf{X}$, et $\mathcal{S}_\psi(T) = 1$. Soit $\zeta \in \mathcal{D}_\psi(T)$ de temps rigide associé Λ. Alors $\lim_{q\to+\infty, q\in\Lambda} \widehat{\sigma}_F(q) = 0$ pour toute $F \in L^2(\mathbf{X}\times\mathbf{X},\tilde{\mu}) \ominus (L^2(\mathbf{X},\mu)\otimes\chi_0)$. En d'autres termes, T_φ est mélangeant suivant Λ sur l'espace $L^2(\mathbf{X}\times\mathbf{X},\tilde{\mu})\ominus(L^2(\mathbf{X},\mu)\otimes\chi_0)$.

Preuve. (i) Si γ est $T-$cohomoloque à une constante c, alors (Proposition 1.3 et Remarque 1.3*(iii)*) $\mathcal{S}_\gamma(T) = \mathcal{S}_c(T) = 1$.

(ii) Si $\gamma+\psi$ est $T-$cohomologue à une constante c, alors pour tout temps rigide Λ de T, la suite $(\exp(2\pi i(\gamma^{(q)} + \psi^{(q)} - qc)))_{q\in\Lambda}$ converge vers 1 dans $L^2(\mu)$.

Choisissons Λ associé à $\zeta \in \mathcal{D}_\psi$ alors d'après la Remarque 1.3*(ii)* et le Lemme 1.1 on a

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \int_\Omega (\exp(2\pi i(\gamma^{(q)} + \psi^{(q)} - qc)))(\exp(-2\pi i\psi^{(q)}) - \bar{\zeta})d\mu = 0.$$

Il en résulte que $\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \int_\Omega \exp(2\pi i(\gamma^{(q)} - qc)) = \bar{\zeta}$, ce qui contredit $\mathcal{S}_\gamma(T) < 1$.
(iii) Soit Λ un temps rigide de T associé à $\zeta \in \mathcal{D}_\psi$. Il suffit de démontrer que Λ est un temps mélangeant pour les fonctions de la forme $F = f \otimes \chi_\ell$, $f \in L^2(\mathbf{X}, \mu)$, $\ell \neq 0$. Remarquons tout d'abord que

$$(*) \qquad \lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \int_0^1 g{\cdot}\chi_\ell(\varphi^{(q)})d\mu = 0$$

pour tout $\ell \neq 0$ et tout $g \in L^1(\mathbf{X}, \mu)$. En fait,

$$\varphi^{(q)}(x) = mqx + qc + \frac{q(q-1)}{2}m\alpha + \psi^{(q)}(x),$$

d'où

$$\int_0^1 g{\cdot}\chi_\ell(\varphi^{(q)})d\mu = \exp\big(2\pi i\ell q(c + \frac{q-1}{2}m\alpha)\big)\int_0^1 g(x)\chi_\ell(qmx)\chi_\ell(\psi^{(q)}(x))\mu(dx).$$

D'après le Lemme de Lebesgue-Riemann, la suite $(\int_0^1 g(x)\chi_\ell(qmx)\mu(dx))_q$ converge vers 0. Appliquons le Lemme 1.1 avec $s = 1$ aux suites $(g{\cdot}\chi_{\ell qm})_q$ et $(\chi_\ell(\psi^{(q)}) - \zeta^\ell)_q$. On obtient

$$\lim_{\substack{q\to+\infty\\ q\in\Lambda}} \int_0^1 [g(x)\exp(2\pi i\ell qmx)]\big(\exp(2\pi i\ell\psi^{(q)}(x) - \zeta^\ell\big)\mu(dx) = 0,$$

ce qui démontre $(*)$. Finalement, notons que

$$|\widehat{\sigma}_{f\otimes\chi_\ell}(q)| = \Big|\int f\circ T^q \bar{f}\chi_\ell(\varphi^{(q)})d\mu\Big| \leq$$
$$\leq \int |f\circ T^q - f|\cdot|\bar{f}|d\mu + \Big|\int |f|^2\chi_\ell(\varphi^{(q)})d\mu\Big|.$$

Cette majoration tend vers 0 lorsque q tend vers $+\infty$ dans Λ. En effet, la première intégrale tend vers 0 suivant Λ puisque Λ est un temps rigide pour T et pour la seconde intégrale, il suffit d'appliquer $(*)$. ∎

1.2. RÉGULARITÉS DE DISTRIBUTION

Suite $n\alpha$ et discrépance

L'objectif de cette section est de donner des estimations précises sur les sommes de la forme

$$f^{(q)}(x) := \sum_{0\le k<q} f(\langle x+k\alpha\rangle)$$

lorsque q est dénominateur d'un convergent dans le développement en fraction continue de α et $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une application absolument continue, c'est-à-dire de la forme $f(x) := c + \int_0^x F(t)dt$ où F est intégrable (au sens de Lebesgue). On sait alors que f est dérivable pour presque tout x et de dérivée $f'(x) = F(x)$. Nous commençons par rappeler des propriétés classiques sur les fractions continues et la discrépance avant d'aborder les lemmes fondamentaux relatifs aux cocycles absolument continus. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Pe] pour les fractions continues et à [Ku-Ni] pour la discrépance.

Dans toute cette section et les suivantes, α est un nombre irrationnel donné dans [0,1[de développement en fraction continue (régulière) $[0\,;a_1,a_2,\ldots]$. Les convergents de α sont les nombres rationnels

$$p_n/q_n := [0\,;a_1,\ldots,a_n] = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}\ .$$

où p_n et q_n sont les entiers naturels déterminés par les relations de récurrences

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \qquad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

pour $n \ge 1$ et $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$. Rappelons que

$$(1.2) \qquad ||q_n\alpha|| = |q_n\alpha - p_n| = \min_{1\le|k|<q_{n+1}} ||k\alpha||,$$

et

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_nq_{n+1}}. \tag{1.3}$$

Nous poserons $\theta_n := q_n(q_n\alpha - p_n)$. Ce nombre est du signe de $(-1)^n$, il mesure la qualité de l'approximation du n–ième convergent et

$$0 < |\theta_n| < q_n/q_{n+1}. \tag{1.4}$$

Remarque 1.4. Si on suppose α rationnel, écrit sous la forme $\alpha := [0\,; a_1, \ldots, a_m]$, alors toutes les égalités et inégalités précédentes (1.2), (1.3), (1.4) sont encore vérifiées pour $n = 0, \ldots, m-1$ et $\alpha = p_m/q_m, \theta_m = 0$. Notons que α admet une double représentation puisque si $a_m > 1$ on a aussi $\alpha = [0\,; a_1, \ldots, a_m - 1, 1]$.

Tout entier $N > 0$ peut s'écrire sous la forme

$$N = n_0q_0 + n_1q_1 + \cdots + n_rq_r, \qquad (n_r \neq 0), \tag{1.5a}$$

où les n_i sont des entiers tels que $0 \leq n_i \leq a_{i+1}$ et

$$n_0q_0 + \cdots + n_iq_i < q_{i+1}, \qquad (0 \leq i \leq r). \tag{1.5b}$$

Ces inégalités assurent l'unicité de ce développement, introduit par Ostrowski [Os].

Dans la suite, p_n, q_n et θ_n se rapporteront toujours à α et nous écrirons simplement p, q et θ lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Lemme 1.2. *Soit $(u_n)_n$ la suite de Fibonacci ($u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$). Alors pour tout $\alpha = [0\,; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, on a :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{q_n} \leq \frac{n}{u_n}, \qquad n \geq 1.$$

Preuve. Posons $L_n(a_1, \ldots, a_n) := (a_1 + \ldots + a_n)/q_n$ et montrons la majoration $L_n(a_1, \ldots, a_n) \leq L_n(1, \ldots, 1)$. Elle est évidente pour $n = 1, 2$. Supposons $n \geq 3$. Les formules de récurrence qui définissent les suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ se traduisent de manière équivalente par les égalités

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

D'où les formules de définition :

$$\begin{pmatrix} p_{m-1} & p_m \\ q_{m-1} & q_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(m,n-1) & p(m,n) \\ q(m,n-1) & q(m,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}.$$

pour tout m=1,2,...,n. Fixons m et introduisons l'homographie $H_{m,n}$ définie par

$$H_{m,n}(t) := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a_m + t}{q_{m-1}p(m,n) + (tq_{m-1} + q_{m-2})q(m,n)}.$$

Cette homographie vérifie $H_{m,n}(a_m) = L_n(a_1, \ldots, a_n)$, s'annule en $a_m - (a_1 + \ldots + a_n)$ (≤ -2) et a pour pôle $-\frac{p(m,n)}{q(m,n)} - \frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}$ (> -2). De plus $H_{m,n}(\infty) = 1/q_{m-1}q(m,n)$ (> 0). Alors $H_{m,n}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ et par suite

$$L_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq H_{m,n}(1).$$

En d'autres termes, pour majorer $L_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ il suffit de remplacer un quelconque des entiers a_i par 1, d'où finalement la majoration par $L_n(1, \ldots, 1)$ qui correspond au nombre $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0\,;1,1,1,\ldots]$ dont la suite des dénominateurs des convergents est précisément donnée par la suite de Fibonacci. ■

Soit $(x_1, \ldots, x_N)$ une suite de N points dans [0,1[et notons $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de $A(\subset [0,1[)$. Introduisons la discrépance

$$D(x_1, \ldots, x_N) := \max_{0 \leq u < v \leq 1} \left|(v-u) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{[u,v[}(x_k)\right|$$

et la discrépance à l'origine·

$$D^*(x_1, \ldots, x_N) := \max_{0 \leq t \leq 1} \left|t - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,t[}(x_k)\right|.$$

La discrépance $D(\cdot)$ est invariante par translation (mod 1) et

$$\frac{1}{N} \leq D \leq 1 \quad , \quad D^* \leq D \leq 2D^*.$$

Lorsque $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N < 1$, la discrépance à l'origine est donnée par ([Ku-Ni],Thm 1.4) :

$$D^*(x_1, \ldots, x_N) = \max_{k=1,\ldots,N} \left(\max\{|x_k - \frac{k}{N}|; |x_k - \frac{k-1}{N}|\}\right). \tag{1.6}$$

Enfin, nous utiliserons aussi la discrépance à l'origine en dimension $s \geq 1$ (et en fait, seulement pour $s = 2$). Si $(X_1, \ldots, X_N)$ est une suite de points dans $[0,1[^s$. Par définition,

$$D^*(X_1, \ldots, X_N) := \max_{\substack{0 \leq t_i \leq 1 \\ i=1,2,\ldots,s}} \left| t_1 \cdots t_s - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,t_1[\times \cdots \times [0,t_s[}(X_k) \right|.$$

Parmi les résultats classiques d'intégration numérique, nous utiliserons les suivants :

Lemme 1.3. (Denjoy–Koksma) (cf. [Ku–Ni], p.143). *Soit* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *une application à variation bornée, de variation totale* $V(f)$, *et soit* $x_1, \ldots, x_N$ *des points dans* $[0,1[$. *Alors*

$$\left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \right| \leq V(f) D^*(x_1, \ldots, x_N). \tag{1.7}$$

■

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application absolument continue. Rappelons qu'alors $V(f) = \int_0^1 |f'(t)|dt$. Introduisons le *module d'absolue continuité* ω_f de f défini pour $\eta > 0$ par :

$$\omega_f(\eta) := \frac{1}{\eta^2} \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ y - x \leq \eta}} \int_x^y \int_x^y |f'(s) - f'(t)| ds dt.$$

Nous utiliserons également le *module de continuité* Ω_f de $f : [0,1]^s \to \mathbf{R}$, donné par $\Omega_f(\eta) := \sup\{|f(u) - f(v)|;\, ||u - v||_\infty \leq \eta\}$ où l'on a posé $||t||_\infty := \max\{|t_1|, \ldots, |t_s|\}$ pour tout $t = (t_1, \ldots, t_s)$ dans $\mathbf{R}^s$.

Lemme 1.4. *Supposons* $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ *absolument continue, alors*

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) - \frac{f(1) - f(0)}{2N} = \frac{1}{2} \iint_A (f'(s) - f'(t)) ds dt \tag{1.8a}$$

où A *est l'union des triangles* $A_k := \{(s,t);\, \frac{k}{N} \leq s \leq t \leq \frac{k+1}{N}\}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. *Si de plus* $f(0) = f(1)$ *et* $\int_0^1 f(t)dt = 0$, *alors pour tout* $x \in [0,1[$, *on a*

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\langle x + \frac{k}{N} \right\rangle\right) \right| \leq \omega_f\left(\frac{1}{N}\right) + \Omega_f\left(\frac{1}{N}\right). \tag{1.8b}$$

Preuve. Après une première intégration, on a

$$\begin{aligned}\iint_{A_k}(f'(s)-f'(t))dsdt &= \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}(f(t)-f(\frac{k}{N}))dt - \int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}(f(\frac{k+1}{N})-f(s))ds\\ &= 2\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}f(x)dx - \frac{1}{N}(f(\frac{k}{N})+f(\frac{k+1}{N})),\end{aligned}$$

d'où (1.8a) par sommation. Prolongeons f sur $\mathbf{R}$ en une application périodique de période 1 et pour tout $x\in\mathbf{R}$ remplaçons f dans (1.8a) par $f_x : t\mapsto f(x+t)$. L'application $x\mapsto f(x)+f(x+\frac{1}{N})+\ldots+f(x+\frac{N-1}{N})$ est périodique de période $1/N$. On peut donc, pour établir (1.8b), supposer $x\in[0,\frac{1}{N}[$. Maintenant, pour $0\leq k\leq N-2$, on a

$$\iint_{A_k}\left|f_x'(s)-f_x'(t)\right|dsdt\leq\frac{1}{N^2}\omega_f(\frac{1}{N}).$$

L'intégrale $\iint_{A_{N-1}}\big(f_x'(s)-f_x'(t)\big)dsdt$ se présente comme une somme de trois intégrales de $(u,v)\mapsto f'(u)-f'(v)$ sur les domaines $B_1=\{1+x-1/N\leq u\leq v\leq 1\}$, $B_2=\{0\leq u\leq v\leq x\}$ et $B_3=\{1+x-1/N\leq u\leq 1 \text{ et } 0\leq v\leq x\}$. Pour $i=1,2$, on a $\left|\int_{B_i}\big(f'(u)-f'(v)\big)dudv\right|\leq N^{-2}\omega_f(1/N)$ et sur B_3 on a explicitement

$$\int_{B_3}(f'(u)-f'(v))dudv = x(f(1)-f(1+x-1/N))+(x-1/N)(f(x)-f(0)).$$

Il en résulte

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(x+\frac{k}{N})\right|\leq\frac{N+1}{2N^2}\omega_f(\frac{1}{N})+\frac{1}{N}\Omega_f(\frac{1}{N}),$$

d'où la majoration (1.8b). ∎

Lemme 1.5. ([Hl]). *Soit s un entier ≥ 1 et soit $f:[0,1]^s\to\mathbf{R}$ une application continue de module de continuité Ω_f. Alors pour toute suite de points $X_1,\ldots,X_N$ de $[0,1[^s$ on a*

$$(1.9)\quad \left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(t_1,\ldots,t_s)dt_1\cdots dt_s-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(X_k)\right|\leq c_s\Omega_f\Big(\left\lfloor\frac{1}{D_N^*}\right\rfloor^{-1/s}\Big),$$

où D_N^* désigne la discrépance à l'origine de la suite $(X_1, \ldots, X_N)$ et c_s une constante qui ne dépend que de s. ∎

Ces majorations seront utilisées pour des suites de la forme

$$(\langle x + k\alpha\rangle)_{k=0,\ldots,q-1} \quad \text{et} \quad \big((\langle k/q\rangle, \langle x + kp/q\rangle)\big)_{k=0,\ldots,q-1},$$

dont nous allons étudier les discrépances. Leurs majorations étant plus ou moins explicites dans la littérature (cf. [Ku–Ni], [He–La]), nous avons choisi, pour la convenance du lecteur, de démontrer celles qui nous intéressent.

Lemme 1.6. *Soit α un nombre irrationnel. Pour tout $x \in [0,1[$ on a*

$$D^*(\langle x\rangle, \langle x+\alpha\rangle, \ldots, \langle x + (q_n - 1)\alpha\rangle) \leq \frac{1}{q_n}(1 + |\theta_n|).$$

Preuve. Soit $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_q$ les points $\langle k\alpha\rangle$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$ ordonnés croissants. On a, pour $p = p_n$, $q = q_n$ et $\theta = \theta_n$,

$$m\alpha = \frac{mp}{q} + \frac{m\theta}{q^2}$$

de sorte que

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{k}{q} < \alpha_{k+1} < \dfrac{k}{q} + \dfrac{\theta}{q} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{k}{q} + \dfrac{\theta}{q} < \alpha_{k+1} < \dfrac{k}{q} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{array}\right. \tag{1.10}$$

pour $0 \leq k \leq q-1$. Soit maintenant $0 \leq x_1 < \cdots < x_q$ la suite des points $\langle x + k\alpha\rangle$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$. Elle se déduit de la précédente par une translation (mod 1) et les inégalités (1.10) montrent qu'il existe $\xi := \xi(n,x)$ $(\in [0, 1/q[)$ tel que chacun des intervalles $I_k := [\xi + \frac{k}{q}, \xi + \frac{k}{q} + \frac{|\theta|}{q}]$ (mod 1) contient un des points x_i et un seul. Si $I_0 \subset [0, 1/q[$ alors $x_{k+1} \in I_k$ et $I_k \subset [k/q, (k+1)/q]$. Si I_0 contient $1/q$ alors I_k contient $(k+1)/q$ et selon que $x_1 \in I_0$ ou $x_1 \in I_{q-1}$ on a $x_{k+1} \in I_k$ ou $x_{k+1} \in I_{k-1}$ pour $k = 1, \ldots, q-1$. Dans tous les cas,

$$\max\{|x_{k+1} - \frac{k+1}{q}|, |x_{k+1} - \frac{k}{q}|\} < \frac{1}{q} + \frac{|\theta|}{q}$$

d'où le lemme d'après (1.6).

∎

D'après la Remarque 1.4 on a aussi :

Lemme 1.7. *Soit p/q un nombre rationnel > 0 (sous forme irréductible) de développement en fraction continue $p/q := [0\,; a_1, \ldots, a_m]$. Alors le Lemme 1.6 est vérifié pour $n = 0, \ldots, m$.* ■

(le cas particulier où $n = m$ ($q_m = q$) étant immédiat).

Lemme 1.8. *Soient p et q des entiers premiers entre eux tels que $0 < p < q$, $p/q = [0, a_1 \ldots, a_m]$. Soit $x \in [0, 1[$ et $D^*(x; p/q)$ la discrépance à l'origine de la suite finie $X_k = (k/q, \langle x + kp/q \rangle)$, $k = 0, \ldots, q-1$. Alors*

$$qD^*((\langle x + kp/q \rangle)_{k=0,\ldots,q-1}) \leq 1 + m + a_1 + \ldots + a_m,$$

et

$$qD^*(x; p/q) \leq 2 + m + a_1 + \ldots + a_m.$$

Preuve. Remarquons que chaque X_k est déterminé par sa première coordonnée. La définition de D^* donne alors directement

$$qD^*(x; p/q) \leq 1 + \max_{1 \leq N \leq q} ND_1^*(x; N)$$

où $D_1^*(x; N)$ désigne la discrépance à l'origine de la suite

$$(\langle x + kp/q \rangle)_{k=0,\ldots,N-1}.$$

Soit $q_0{=}1, q_1, \ldots, q_m (= q)$ la suite des dénominateurs des convergents de p/q (associés à son développement $[0\,; a_1, \ldots, a_m]$). Pour tout entier $N \leq q$, considérons le développement d'Ostrowski

$$N = \sum_{i=0}^{r} n_i q_i \qquad n_r \neq 0, \qquad r \leq m.$$

On choisit le développement trivial $N = q_m$ pour $N = q$. D'autre part, pour toute partition d'une suite finie $(x_1, \ldots, x_N)$ de points dans $[0, 1[$ en deux sous-suites disjointes $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_K})$ et $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_L})$, $(K + L = N)$, une simple énumération des points de chacune de ces sous-suites dans l'intervalle $[0, t[$ donne :

$$ND^*(x_1, \ldots, x_N) \leq KD^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_K}) + LD^*(x_{j_1}, \ldots, x_{j_L}).$$

Posons $m_0 = 0$ et $m_i = n_0q_0 + \ldots + n_{i-1}q_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq r$. Alors, en subdivisant la suite des $x_k := \langle x + kp/q \rangle$ en sous-suites telles que

$$m_i + \ell q_i \leq k < m_i + (\ell + 1)q_i\,, \qquad 0 \leq \ell < n_i\,,$$

(pour les $n_i = 0$, les sous-suites correspondantes sont vides), on obtient

$$ND_1^*(x; N) \leq \sum_{0 \leq i \leq r} \sum_{0 \leq \ell < n_i} q_i D^*\big((\langle x + (m_i + \ell q_i + k)p/q \rangle)_{k=0,\ldots,q_i-1}\big).$$

D'après le Lemme 1.7,

$$q_i D^*\big((\langle x + (m_i + \ell q_i + k)p/q \rangle)_{k=0,\ldots,q_i-1}\big) \leq 1 + |\theta_i|\,,$$

d'où

$$ND_1^*(x; N) \leq \sum_{0 \leq i \leq r} n_i(1 + |\theta_i|).$$

D'après (1.4) on a $n_i|\theta_i| \leq n_i q_i/q_{i+1} \leq a_{i+1}q_i/q_{i+1} \leq 1$ si $0 \leq i \leq r < m$ et pour $r = m$ rappelons que $\theta_m = 0$, ce qui donne dans tous les cas

$$ND_1^*(x; N) \leq 1 + r + \sum_{0 \leq i \leq r} n_i.$$

D'où la majoration cherchée. ■

Lemme 1.9. *Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continûment différentiable telle que $g(0) = g(1)$. Alors pour tout $x \in [0,1[$, $q = q_n$, $\theta = \theta_n$, $n \geq 7$ et $x_k = \langle x + k\alpha \rangle$, $0 \leq k < q$, on a :*

$$\Big|\sum_{k=0}^{q-1}\Big(g(x_k) - g(\langle x + k/q \rangle)\Big)\Big| \leq |\theta|(c_2 + 2)\Big(\Omega_{g'}\big(2\sqrt{\frac{n+1}{u_n}}\,\big) + 2\|g'\|_\infty\sqrt{\frac{n+1}{u_n}}\Big)$$

où c_2 est la constante du Lemme 1.5 et $(u_n)_n$ la suite de Fibonacci.

Preuve. Soit g_x l'application $t \mapsto g(\langle t + x \rangle)$ définie sur $\mathbf{R}$, de période 1. Elle est absolument continue et vérifie $\|g'_x\|_\infty = \|g'\|_\infty$, $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 g_x(t)dt$. Soit $p = p_n$, on a

$$\sum_{k=0}^{q-1}\big(g(x_k) - g_x(k/q)\big) = \sum_{k=0}^{q-1}\big(g_x(k\alpha) - g_x(kp/q)\big).$$

Posons $\alpha = p/q + \theta/q^2$ et $r_k := g_x(k\alpha) - g_x(kp/q) - \frac{k\theta}{q^2}g'_x(kp/q)$. Soit J_k l'intervalle $[k\alpha, kp/q]$ si $\theta < 0$ et $[kp/q, k\alpha]$ si $\theta > 0$. Si aucun point de la forme $\ell - x$, $\ell \in \mathbf{Z}$, n'est intérieur à J_k, alors g_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J_k de sorte que par le théorème de la moyenne, on a

$$|r_k| \leq \frac{k|\theta|}{q^2}\Omega_{g'}\Big(\frac{k|\theta|}{q^2}\Big) \leq \frac{k|\theta|}{q^2}\Omega_{g'}\Big(\frac{1}{q}\Big). \tag{1.12}$$

Dans le cas contraire,

$$\begin{aligned} |r_k| &\leq \Big|\int_{k\alpha}^{kp/q} g'_x(t)dt\Big| + \frac{k|\theta|}{q^2}||g'||_\infty \\ &\leq \frac{2|\theta|}{q}||g'||_\infty. \qquad (1.13) \end{aligned}$$

Notons que les intervalles J_k, pour $k = 0, 1, \cdots, q-1$ sont deux à deux disjoints modulo 1. En sommant les r_k et en tenant compte des majorations (1.12) (et de (1.13) pour au plus une valeur de k), on obtient

$$\Big|\sum_{k=0}^{q-1}\big(g(x_k) - g_x(k/q)\big)\Big| \leq \frac{|\theta|}{q}\sum_{k=0}^{q-1} g'_x(kp/q)\Big(\frac{k}{q}\Big) + R_q$$

avec

$$\begin{aligned} |R_q| &\leq |\theta|\sum_{k=0}^{q-1}\frac{k}{q^2}\Omega_{g'}\Big(\frac{1}{q}\Big) + \frac{2|\theta|}{q}||g'||_\infty \\ &\leq \frac{1}{2}|\theta|\Omega_{g'}\Big(\frac{1}{q}\Big) + \frac{2|\theta|}{q}||g'||_\infty. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5,

$$\Big|\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} g'_x(kp/q)\Big(\frac{k}{q}\Big) - \int_0^1\int_0^1 g'(u)v\,du\,dv\Big| \leq c_2\Omega_f\Big(\big\lfloor D^*(x, p/q)^{-1}\big\rfloor^{-1/2}\Big),$$

où l'application $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ est donnée par $f(u,v) = g'(u)v$. D'autre part $\int_0^1\int_0^1 f(u,v)dudv = 0$ et pour tout $\eta > 0$, on a $\Omega_f(\eta) \leq \Omega_{g'}(\eta) + \eta||g'||_\infty$. Posons $\rho_n := (2 + n + a_1 + \cdots + a_n)q_n^{-1}$. On a classiquement $u_n \leq q_n$ et la majoration du Lemme 1.2 donne $\rho_n \leq 2(n+1)/u_n$, ce qui permet d'obtenir facilement par récurrence $\rho_n \leq 1$ pour $n \geq 7$ et ainsi $\lfloor \rho_n^{-1} \rfloor \geq (2\rho_n)^{-1}$. La majoration du Lemme 1.8 donne alors

$$\big\lfloor D^*(x, p/q)^{-1}\big\rfloor^{-1/2} \leq \sqrt{2\rho_n},$$

de sorte que

$$\Big|\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} g_x'(kp/q)(\frac{k}{q})\Big| \le c_2\Big(\Omega_{g'}(\sqrt{2\rho_n}) + \|g'\|_\infty\sqrt{2\rho_n}\Big).$$

Mais $q^{-1} \le \sqrt{2\rho_n}$, par suite

$$\Big|\sum_{k=0}^{q-1}(g(x_k) - g_x(k/q))\Big| \le |\theta|(\frac{1}{2} + c_2)\Omega_{g'}(\sqrt{2\rho_n}) + (2+c_2)|\theta|\cdot\|g'\|_\infty\sqrt{2\rho_n}$$

$$\le |\theta|(2+c_2)\Big(\Omega_{g'}(2\sqrt{\frac{n+1}{u_n}}) + 2\|g'\|_\infty\sqrt{\frac{n+1}{u_n}}\Big)$$

■

Cocycles absolument continus : étude asymptotique

Dans la suite pour $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ et $x_i \in [0,1[$, $1 \le i \le N$, nous poserons

$$\Delta_{(x_1,\dots,x_N)}(f) := \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) \; (= \Delta(f))$$

et

$$\Delta_0^{(N)}(f) := \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\frac{k-1}{N}) \; (= \Delta_0(f)).$$

D'après la linéarité de Δ et (1.7), on a

$$|\Delta(f-g)| \le V(f-g)D^*(x_1,\dots,x_N) \tag{1.11}$$

où f et g sont à variations bornées sur [0,1]. Nous aurons besoin du lemme d'approximation suivant dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 1.10. *Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ absolument continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ continûment différentiable, telle que*

(i) $g'(0) = g'(1)$,

(ii) $g(0) = f(0)$ *et* $g(1) = f(1)$,

(iii) $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt$,

(iv) $\int_0^1 |f'(t) - g'(t)|dt \le \varepsilon$.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les cocycles absolument continus.

Théorème 1.1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application absolument continue telle que $f(0) = f(1)$ et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Alors pour tout nombre irrationnel α dont les dénominateurs des convergents sont notés q_n, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f^{(q_n)}(x)| = 0.$$

Preuve. Désignons par $(x_k)_{0\leq k\leq q-1}$ la suite ordonnée croissante des points $\langle x + k\alpha \rangle$. Nous devons majorer $|q\Delta_{(x_0,x_1,\ldots,x_{q-1})}(f)|$. Choisissons $\varepsilon > 0$ et soit g l'application déterminée par le Lemme 1.10 , alors

$$|\Delta(f)| \leq |\Delta(f-g)| + |\Delta(g) - \Delta_0(g_x)| + |\Delta_0(g_x)|.$$

La condition *(iv)* du Lemme 1.10, le Lemme 1.6 et (1.11), donnent $q|\Delta(f-g)| \leq 2\varepsilon$. Le Lemme 1.9 montre (pour $q = q_n$ et $n \geq 7$) que

$$q|\Delta(g) - \Delta_0(g_x)| \leq (c_2 + 2)\Big(\Omega_{g'}(2\sqrt{\frac{n+1}{u_n}}\,) + 2||g'||_\infty \sqrt{\frac{n+1}{u_n}}\Big).$$

Enfin, le Lemme 1.4 appliqué à g donne :

$$q|\Delta_0(g_x)| \leq \omega_g(1/q) + \Omega_g(1/q).$$

Par ailleurs, d'après les définitions, $\omega_g \leq \Omega_{g'}$ et $\Omega_g(\eta) \leq \eta||g'||_\infty$. Il existe donc deux constantes numériques $A(g)$ et $B(g)$ ne dépendant que de g, telles que

$$q|\Delta_{(x_0,x_1,\ldots,x_{q-1})}(f)| \leq 2\varepsilon + A(g)\Omega_{g'}(\varepsilon_n) + B(g)\varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n = 2\sqrt{(n+1)/u_n}$. Cette majoration termine la démonstration puisque la suite u_n tend vers $+\infty$ de manière exponentielle. ∎

Nous allons maintenant examiner les cocycles de classe $\mathcal{C}^{1+\delta}$ pour tout $\delta \in]0,1[$. Rappelons que $\mathcal{C}^{1+\delta}$ désigne l'espace des applications $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continûment différentiables, de dérivée f' uniformément Hölder d'exposant δ (*i.e.*, il existe $C > 0$ tel que pour $0 \leq s,t \leq 1$, on a $|f'(s) - f'(t)| \leq C|s-t|^\delta$). Par ailleurs, nous désignerons par $E(\delta)$ l'ensemble des nombres irrationnels $\alpha := [0\,; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ tels que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}/q_k^\delta$ converge.

Théorème 1.2. *Soient $\alpha \in E(\delta)$ et $\delta \in]0,1[$. Alors, pour toute application $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ dans $\mathcal{C}^{1+\delta}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, le cocycle $f - \int_0^1 f(t)dt$ est un cobord additif suivant la rotation $x \mapsto x + \alpha$.*

Preuve. Avec les notations et hypothèses du théorème, posons $\varphi := f - \int_0^1 f(t)dt$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^{1+\delta}$ et nous la prolongeons à $\mathbf{R}$ par périodicité en une application de période 1 , encore notée φ. Montrons que la suite $N \mapsto \varphi^{(N)}(0)$ est bornée. Soit $N = n_0q_0 + \cdots + n_rq_r$ le développement d'Ostrowski de N(c.f (1.5a)) et posons $m_0 = 0$, $m_i = \sum_{k<i} n_kq_k$, $1 \leq i \leq r$. Décomposons $\varphi^{(N)}(0)$ sous la forme

$$\varphi^{(N)}(0) = \sum_{0\leq i\leq r} \sum_{0\leq \ell<n_i} \sum_{0\leq k<q_i} \varphi\big((m_i + \ell q_i)\cdot\alpha + k\cdot\alpha\big).$$

Posons $\varepsilon_n = \sqrt{(n+1)/u_n}$. Par hypothèse on a $\Omega_{\varphi'} \leq C\eta^\delta$. Le Lemme 1.9 assure donc l'existence d'une constante C_1 ne dépendant que de φ telle que pour $i \geq 7$ on ait, pour $x_{i,\ell} := (m_i + \ell q_i)\cdot\alpha$:

$$\big|\varphi^{(q_i)}(x_{i,\ell}) - \sum_{k=0}^{q_i-1} \varphi\big(x_{i,\ell} + k/q_i\big)\big| \leq |\theta_i|\; C_1\varepsilon_i^{\delta/2}.$$

Notons maintenant que $\omega_\varphi(\eta) \leq C\eta^{-2}\int_0^\eta\int_0^\eta |s-t|^\delta \leq C\eta^\delta$. On a donc par le Lemme 1.4

$$\big|\sum_{k=0}^{q_i-1} \varphi\big(x_{i,\ell} + k/q_i\big)\big| \leq Cq_i^{-\delta} + \|\varphi'\|_\infty q_i^{-1}.$$

On obient donc pour $i \geq 7$:

$$|\varphi^{(q_i)}(x_{i,\ell})| \leq |\theta_i| C_1\varepsilon_i^{\delta/2} + C_2q_i^{-\delta}$$

où C_2 est une constante ne dépendant que de φ. Par suite

$$\sum_{0\leq \ell<n_i} |\varphi^{(q_i)}(x_{i,\ell})| \leq n_i\big(|\theta_i|C_1\varepsilon_i^{\delta/2} + C_2q_i^{-\delta}\big)$$

avec $n_i|\theta_i| \leq 1$. D'autre part, la série $\sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n^\delta$ converge pour tout $\delta > 0$. D'où finalement

$$\varphi^{(N)}(0) \in \mathcal{O}\Big(\sum_{i=0}^r \frac{n_i}{q_i^\delta}\Big).$$

Ainsi $\varphi^{(N)}(0)$ est bornée si $\alpha \in E(\delta)$ et par suite $\varphi^{(N)}$ est uniformément bornée. La rotation étant minimale, d'après un théorème classique de Gottschalk et Hedlund [Go–He], il existe une application continue $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de période 1 telle que $\varphi(x) = h(x + \alpha) - h(x)$, $x \in \mathbf{R}$. ■

Remarque 1.5.
(i) Presque tous les irrationnels α appartiennent à $E(\delta)$, $\delta > 0$. En effet on a $a_{n+1}/q_n^\delta \leq q_{n+1}/q_n^{\delta+1}$. Il suffit donc, par exemple, d'appliquer le résultat de P. Levy (cf. [Co–Si–Fo, p. 175]) suivant lequel $\lim_n n^{-1} \log q_n = \pi^2/12 \log 2$ pour presque tout α.

(ii) Si $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est continu, de degré 0, il est naturel de considérer l'ensemble $\mathrm{A}(\varphi)$ des rotations irrationnelles $T : x \to x + \alpha$ telles que la transformation T_φ soit ergodique à spectre non discret. Lorsque φ est égal à la réduction modulo 1 d'un polynôme trigonométrique réel de période 1, alors φ est α–cohomologue à une constante et ceci pour tout nombre irrationnel α. Il en résulte que $A(\varphi)$ est vide dans ce cas. Cependant, dans [Kw-Le-Ru], les auteurs répondent positivementà la question de J.P. Thouvenot en établissant l'existence de cocycles φ indéfiniment différentiables et de rotations ergodiques T tels que les extensions T_φ soient non coalescentes. En particulier, φ est de degré 0 et $A(\varphi)$ n'est pas vide. Il est raisonnable de conjecturer que $\mathrm{A}(\varphi)$ est un ensemble résiduel. Dans cette direction, notons que l'ensemble $E(\delta)$ est de première catégorie de Baire pour tout $\delta > 0$ et, vu la remarque (*i*), on retrouve un résultat de Baggett ([Ba 1], Thm 3) sous une forme très générale.

1.3. PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES COCYCLES ABSOLUMENT CONTINUS

Cocycles de degré non nul

Dans cette section, nous allons montrer l'ergodicité des produits de Anzai déterminés par les cocyles absoluments continus de degré *non nul.* Nous donnerons également quelques estimations de $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ et $\mathcal{S}_\varphi(T)$. Ici et dans toute la suite, α est un nombre irrationnel dans [0,1[et $T : (\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu) \to (\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ désigne la rotation irrationnelle $x \mapsto x + \alpha \pmod 1$.

Théorème 1.3. *Soit $\Lambda := (q_n)_n$ la suite des dénominateurs des convergents de α. Si $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est un cocycle absolument continu, de degré non nul, alors l'extension de Anzai correspondante T_φ est mélangeante sur $L^2(\mathbf{X}\times\mathbf{X}, \tilde{\mu}) \ominus (L^2(\mathbf{X}, \mu)\otimes\chi_0)$ le long de Λ. En particulier, φ est faiblement mélangeant (et donc T_φ est ergodique).*

Preuve. Soit $d(\varphi) = m$ le degré de φ et soit $\tilde{\varphi} : [0,1] \to \mathbf{R}$ l'application absolument continue donnée par (0.9). Définissons $\tilde{\psi} : x \mapsto mx + \tilde{c}$ sur [0,1] de telle sorte que pour $\tilde{\varphi}_1 := \tilde{\varphi} - \tilde{\psi}$ on ait $\tilde{\varphi}_1(0) = \tilde{\varphi}_1(1)$ et $\int_0^1 \tilde{\varphi}_1(t)dt = 0$. Soit $\varphi_1 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ le cocycle correspondant à $\tilde{\varphi}_1$ par réduction modulo 1. On a

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + m{\cdot}x + c, \qquad x \in \mathbf{X}$$

où c est la classe de $\tilde{c}$. D'après le Théorème 1.1, $\mathcal{D}_{\varphi_1}(T) \neq \emptyset$ et par suite T_φ est mélangeant sur l'ortho-complément H_0 de $L^2(\mathbf{X}, \mu)\otimes\chi_0$ le long de Λ (Prop. 1.5). La deuxième partie résulte du fait que $\mathcal{U}_{T_\varphi}$ restreint à H_0 est un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert séparable, mélangeant le long de Λ. Il est donc à spectre continu. ■

Corollaire 1.2. *Dans la classe des cocycles absolument continus,*
(i) le degré topologique est un invariant de cohomologie,
(ii) la valeur absolue du degré topologique est un invariant d'équivalence.

Corollaire 1.3. *Soit φ un cocycle absolument continu de degré topologique $d(\varphi)$ non nul. Alors deux facteurs naturels distincts de T_φ ne sont pas isomorphes. En particulier T_φ est coalescent. De plus, si $S : x \mapsto x + \beta$ admet un* *relèvement dans $C(T_\varphi)$, il est de la forme $S_{f,id}$ (cf. (0.4)) où f est un cocycle tel que $\varphi{\circ}S - \varphi = f{\circ}T - f$.*

Preuve. Pour $S \in C(T)$ et m, k entiers , le cocycle $\psi := m{\cdot}\varphi{\circ}S - k{\cdot}\varphi$ est absolument continu de degré $(m-k)d(\varphi)$. Donc ψ n'est pas un cobord si $m-k \neq 0$. Alors S ne peut se relever dans $C_\varphi(T)$ que sous la forme $S_{\varphi,id}$ et deux facteurs naturels $T_{k\cdot\varphi}$, $T_{m\cdot\varphi}$ distincts (i.e., $|k| \neq |m|$) ne sont pas isomorphes. ■

Cocycles de degré zéro

Nous allons maintenant montrer comment distinguer du point de vue spectral les cocycles absolument continus de degré zéro de ceux de degré non nul.

Proposition 1.6. *Soit φ un cocycle absolument continu de degré zéro, alors $\mathcal{S}_\varphi(T) = 1$. En particulier, le type spectral maximal de T_φ est une mesure de Dirichlet.*

Preuve. Soit $\tilde{\varphi} : [0,1] \to \mathbf{R}$ donné par (0.9). Soit $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ tel que pour $\tilde{\varphi_1} := \tilde{\varphi} - \tilde{c}$ on ait $\int_0^1 \tilde{\varphi_1}(t)dt = 0$. Par définition, $\tilde{\varphi}_1^{(q)} = \tilde{\varphi}^{(q)} - q\tilde{c}$ d'où, d'après le Théorème 1.1, la suite $(\exp 2\pi i \tilde{\varphi_1}^{(q_n)})_n$ converge uniformément vers 1 sur $\mathbf{X}$. En choisissant une sous-suite $(q_{n_k})_k$ telle que $(\exp 2\pi i(q_{n_k}\tilde{c}))_k$ converge, disons vers ζ, $|\zeta| = 1$, on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty} \exp 2\pi i \varphi^{(q_{n_k})} = \bar{\zeta}.$$

La convergence étant uniforme. Ainsi, $\mathcal{S}_\varphi(T) = 1$ et la fin de la démonstration résulte du Corollaire 1.1. ■

Corollaire 1.4. *Soient φ et ψ deux cocycles absolument continus de degrés topologiques respectifs $d(\varphi) \neq 0$ et $d(\psi) = 0$. Alors T_φ et T_ψ ne sont pas spectralement isomorphes.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{W}$ soit un isomorphisme spectral entre $\mathcal{U}_{T_\varphi}$ et $\mathcal{U}_{T_\psi}$. Puisque φ est faiblement mélangeant, l'espace engendré par les fonctions propres est $L^2(\mathbf{X},\mu)\otimes\chi_0$. Donc $\mathcal{W}$ laisse invariant l'espace $L^2(\mathbf{X},\mu)\otimes\chi_0$ et son orthocomplément. D'après la démonstration précédente, il existe une suite extraite $(q_{n_k})_k$ telle que la mesure spectrale σ de $1\otimes\chi_1 : (x,y) \mapsto \exp(2\pi i y)$ suivant $\mathcal{U}_{T_\psi}$

vérifie $\lim_k \widehat{\sigma}(q_{n_k}) = \zeta$, $|\zeta| = 1$. Cependant, la mesure spectrale τ de $\mathcal{W}^{-1}(1 \otimes \chi_1)$ est encore σ. Mais le Théorème 1.3 montre que la suite $(\widehat{\tau}(q_n))_n$ tend vers 0, ce qui contredit $\sigma = \tau$. ■

Remarque 1.6. L'exemple des cocycles affines montre que le degré topologique *n'est pas* un invariant d'isomorphisme spectral (cf. [An]).

Remarque 1.7. Nous pouvons montrer que le cocycle φ construit dans [Le–Li] donnant un exemple de transformation T_φ non coalescente n'est pas cohomologue à un cocycle absolument continu. En effet s'il existe un cocycle $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tel que le cocycle $\psi := \varphi + f \circ T - f$ soit absolument continu, alors $d(\psi) = 0$ sinon T_ψ serait coalescent (Corollaire 1.3). D'après la démonstration de la Proposition 1.6 de toute sous-suite de $(q_n)_n$ on peut extraire une sous-suite $(q_{n_k})_k$ telle que la suite $(\exp(2\pi i \psi^{(q_{n_k})}))_k$ converge uniformément, donc dans $L^2(\mathbf{X}, \mu)$, vers une constante ζ, $|\zeta| = 1$. Mais cette propriété est un invariant de cohomologie (le temps rigide étant relatif à T), elle est donc aussi satisfaite pour φ. Cependant, par construction de φ et de α, cette propriété est exclue (voir [Le–Li], étape 5 , preuve du Théorème 1).

Étude de l'invariant $\mathcal{MT}_\varphi(T)$

Lemme 1.11. *Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application absolument continue telle que $f(0) = f(1)$ et $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Il existe alors un ensemble non dénombrable de β, $\beta \in [0,1[$, tels que l'équation fonctionnelle*

$$f(\langle x + \beta \rangle) - f(x) = h_\beta(\langle x + \alpha \rangle) - h_\beta(x)\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

ait une solution $h_\beta : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue.

Preuve. Prolongeons f sur $\mathbf{R}$ en une application continue périodique de période 1, encore notée f. Choisissons une suite $(\varepsilon_m)_{m \ge 0}$ de nombres réels $\varepsilon_m > 0$ telle que $\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty$. D'après le théorème 1.1 il existe une sous-suite $(q'_m)_m$ de la suite des dénominateurs q_m telle que

$$||f^{(q'_m)}||_\infty \le \varepsilon_m. \tag{1.14}$$

Soit maintenant $(b_m)_{m \ge 0}$ une suite d'entiers ≥ 0 telle que l'on ait simultanément

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \varepsilon_m < +\infty \tag{1.15}$$

et la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m q'_m \alpha \pmod 1 \tag{1.16}$$

convergente. Notons β sa somme. Posons en outre

$$\lambda_0 := 1 \quad \text{et} \quad \lambda_m := \Big(\sum_{k=0}^{m-1} b_k q'_k\Big)\alpha, \quad m \geq 1.$$

Par construction $(\lambda_m)_m$ converge vers β modulo 1. Les applications $f^{(q)}$ sont continues, $f^{(q)}(0) = f^{(q)}(1)$ et

$$|f^{(b_m q'_m)}(y)| = \Big|\sum_{s=0}^{b_m-1} f^{(q'_m)}(y + sq'_m\alpha)\Big| \leq \sum_{s=0}^{b_m-1} |f^{(q'_m)}(y + sq'_m\alpha)| \leq b_m\varepsilon_m \,.$$

On peut donc définir $h_\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$h_\beta(x) := \sum_{m=0}^{\infty} f^{(b_m q'_m)}(x + \lambda_m),$$

la série étant normalement convergente d'après (1.15). Ainsi h_β est continue, périodique de période 1. C'est en fait la restriction de h_β à [0,1] qui nous intéresse. A partir de la définition, on a

$$f^{(b_m q'_m)}(x + \lambda_m + \alpha) - f^{(b_m q'_m)}(x + \lambda_m) = f(x + \lambda_{m+1}) - f(x + \lambda_m).$$

Posons maintenant

$$r_N(x) := \sum_{m>N} f^{(b_m q'_m)}(x + \lambda_m),$$

alors

$$\begin{aligned} h_\beta(x+\alpha) - h_\beta(x) &= \sum_{m=0}^{N} \big(f(x+\lambda_{m+1}) - f(x+\lambda_m)\big) + r_N(x+\alpha) - r_N(x) \\ &= f(x+\lambda_{N+1}) - f(x) + r_N(x+\alpha) - r_N(x). \end{aligned}$$

Mais $(\lambda_N)_N$ converge vers β (mod 1) et $(r_N)_N$ converge uniformément vers 0, d'où par passage à la limite

$$h_\beta(x+\alpha) - h_\beta(x) = f(x+\beta) - f(x)\,.$$

Il reste à montrer la possibilité de choisir un ensemble non dénombrable de β donnés par (1.16). Si la suite des entiers b_n est bornée, la série (1.16) converge puisque $||b_m q'_m \alpha|| \leq b_m/q'_m$. Il suffira donc de choisir les q'_m tels que $2q'_m \leq q'_{m+1}$ et les b_m dans $\{0,1\}$ pour que les β obtenus par (1.5b) soient tous distincts. ∎

Proposition 1.7. *Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle absolument continu. Alors pour toute rotation irrationnelle $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, l'ensemble $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ n'est pas dénombrable.*

Preuve. Soit n le degré de φ et soit $\tilde{\varphi} : [0,1] \to \mathbf{R}$ le relèvement de φ donné par (0.9). Il est absolument continu et $\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) = n$. Choisissons $\tilde{c} \in \mathbf{R}$ tel que l'application $\tilde{\varphi}_1 : x \mapsto \tilde{\varphi}(x) - (nx + \tilde{c})$, $x \in [0,1]$, vérifie $\int_0^1 \tilde{\varphi}_1(t)dt = 0$. D'après le lemme précédent, il existe une infinité non dénombrable de $\beta \in [0,1[$ tels que

$$\tilde{\varphi}_1(\langle x+\beta \rangle) - \tilde{\varphi}_1(x) = h_\beta(\langle x+\alpha \rangle) - h_\beta(x)$$

c'est-à-dire, en passant aux classes modulo 1 :

$$\varphi(x+\beta) - \varphi(x) = n{\cdot}\beta + f_\beta(x+\alpha) - f_\beta(x)$$

où f_β est le cocycle défini par $f_\beta(\bar{t}) := \overline{h_\beta(t)}$. ∎

1.4. COCYCLES UNIFORMÉMENT LIPSCHITZIENS

Dans cette courte section nous étudions l'ensemble $\mathcal{S}_\varphi(T)$ lorsque φ est un cocycle uniformément lipschitzien de degré non nul. Nous noterons $L(\varphi)$ la constante de Lipschitz d'un relèvement continu $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de φ. Cette constante ne dépend pas du relèvement choisi. Le lemme suivant est une conséquence de [Fü 1].

Lemme 1.12. *Soit φ un cocycle uniformément lipschitzien de degré non nul et soit $\rho(\varphi) = |d(\varphi)|/4L(\varphi)$. Alors pour tout entier $n > 0$ et tout $c \in \mathbf{X}$, on a*

$$\mu(\{x \in \mathbf{X}\,;\ ||\varphi^{(n)}(x) - c|| \geq \rho(\varphi)\}) \geq 2\rho(\varphi).$$

Preuve. Le cocycle $\varphi^{(n)}$ est de degré $nd(\varphi)$. Il est aussi uniformément lipschitzien et $L(\varphi^{(n)}) \leq nL(\varphi)$. Étudions simplement le cas $n = 1$ et posons $d := |d(\varphi)|$. Puisque $d \neq 0$, le relèvement continu $\tilde{\varphi}$ est surjectif et pour tout intervalle J de longueur d il existe $u \in \mathbf{R}$ tel que $J \subset \tilde{\varphi}[u, u+1])$. Soit alors $c \in \mathbf{X}$, $t \in [0,1[$ tels que $\bar{t} = c$ et $u \in \mathbf{R}$ tel que $[t, t+d] \subset \tilde{\varphi}([u, u+1])$. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, il existe au moins une solution $u_i \in [u, u+1]$ telle que $\tilde{\varphi}(u_i) = t + i - 1/2$ et de plus, pour $i \neq j$, on a

$$|u_i - u_j| \geq L^{-1}|i - j| \geq L^{-1}.$$

Il en résulte que les intervalles $I_i :=]u_i - 1/4L, u_i + 1/4L[$, $1 \leq i \leq d$, sont disjoints deux à deux modulo 1 et de plus

$$\tilde{\varphi}(I_i) \subset [t + i - 3/4, t + i - 1/4],$$

de sorte que $||\varphi(x) - c|| \geq 1/4$ sur la réunion des intervalles I_i modulo 1. Notons par ailleurs que $d \leq L$ d'où, en définitive,

$$\mu\{x \in \mathbf{X}\,;\ ||\varphi(x) - c|| \geq d/4L\} \geq d/2L.$$

Dans le cas général, notons que $|d(\varphi^{(n)})|/L(\varphi^{(n)}) \geq d/L$, d'où l'inégalité du lemme d'après ce qui précède. ∎

Proposition 1.8. *Si φ est un cocycle uniformément lipschitzien de degré non nul, alors $\mathcal{S}_\varphi(T) < 1$.*

Preuve. Supposons, $\mathcal{S}_\varphi(T) = 1$. D'après la Remarque 1.3 il existe une sous-suite d'entiers $(n_k)_k$ telle que la suite $(\exp(2\pi i\varphi^{(n_k)}(x)))_k$ converge en probabilité vers 1, ce qui contredit le lemme précédent. ∎

D'après la Remarque 1.3*(iv)* on a :

Corollaire 1.5. *Si φ est un cocycle uniformément Lipschitzien de degré non nul, alors il n'est pas rigide.* ■

1.5. COCYCLES EN ESCALIER

Cocycles α–discontinus

Soientt $c \in \mathbf{R}$ et $A \subset \mathbf{X}$. Notons $\bar{c}\mathbf{1}_A$ le cocycle égal à $\bar{c}$ sur A et à 0 sur le complémentaire. Remarquons que pour t et t' dans $\mathbf{R}$ on a $\overline{ct} \pm \overline{ct'} = \overline{c(t \pm t')}$. Définissons maintenant le cocycle $L_c : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ par

$$L_c(\bar{t}) := \overline{c\langle t\rangle}\ , \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Un calcul direct montre que pour tout u, v dans $[0,1[$, on a (en indentifiant $\mathbf{X}$ à $[0,1[$) :

$$\bar{c}\mathbf{1}_{[u,v[}(x) - \overline{c\mu([u,v[)} = L_c(x-v) - L_c(x-u). \tag{1.17}$$

Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle en escalier. Rappelons que nous supposons toujours φ continu à droite. Pour tout $\sigma \in \mathbf{X}$ nous noterons $\varphi(\sigma_-)$ la limite à gauche en $\sigma = \bar{s}$, *i.e.*,

$$\varphi(\sigma_-) := \lim_{\substack{t \to s \\ t < s}} \varphi(\bar{t}) \ \text{ si } \ \sigma > 0 \ \text{ et } \ \varphi(0_-) := \lim_{t \to 1} \varphi(\bar{t}).$$

Notons que φ est alors déterminé, à une constante additive près, par l'ensemble de ses points de sauts

$$\Sigma(\varphi) := \{\sigma \in \mathbf{X}\,;\, s_\varphi(\sigma) := \varphi(\sigma) - \varphi(\sigma_-) \neq 0\} (= \Sigma)$$

et l'ensemble des valeurs de ses sauts. Si φ n'est pas constant, Σ contient au moins 2 points et dans tous les cas

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} s_\varphi(\sigma) = 0.$$

Introduisons sur $\Sigma(\varphi)$ la relation d'équivalence $\sigma \sim_\alpha \sigma'$ définie par $\sigma - \sigma' \in \mathbf{Z}\alpha$. Nous dirons que φ est *α–discontinu* si les classes d'équivalence modulo $\sim_\alpha$ se réduisent toutes à un seul élément (φ étant supposé non constant).

Lemme 1.13. *Si $\Sigma(\varphi) - \Sigma(\varphi) \subset \mathbf{Z}\alpha$ (i.e., tous les éléments de Σ sont équivalents entre eux modulo $\sim_\alpha$), alors φ est α–cohomologue à une constante.*

Preuve. D'après (1.17), si $v - u = \pm\alpha$ alors les cocycles $\bar{c}\cdot\mathbf{1}_{[u,v[}$ sont α–cohomologues à une constante. Par simple addition, il en est de même si $v - u \in \mathbf{Z}\alpha$ et le cas général en résulte par combinaison linéaire. ∎

Lemme 1.14. *Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle en escalier.*

(i) Si pour tout $\sigma \in \Sigma(\varphi)$, on a (dans $\mathbf{X}$)

$$\sum_{\tau \sim_\alpha \sigma} s_\varphi(\tau) = 0,$$

alors φ est $\alpha-$cohomologue à une constante.

(ii) Si (i) n'est pas vérifié, alors φ est $\alpha-$cohomologue à un cocycle en escalier $\alpha-$discontinu.

Preuve. Le cocycle φ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = \varphi(\sigma_-) - \sum_{\substack{\tau \in \Sigma \\ \tau \neq \sigma}} s_\varphi(\tau) \mathbf{1}_{[\sigma,\tau[}, \quad (\sigma \in \Sigma).$$

En effet, le membre de droite dans cette égalité représente un cocycle continu à droite, prend la valeur $\varphi(\sigma)$ en σ (car $\sum_{\tau \in \Sigma} s_\varphi(t) = 0$) et possède les mêmes points de discontinuité que φ, avec les mêmes sauts correspondants. Soit $\sigma \in \Sigma$; la somme partielle

$$\psi_\sigma = \varphi(\sigma_-) - \sum_{\substack{\tau \sim_\alpha \sigma \\ \tau \neq \sigma}} s_\varphi(\tau) \mathbf{1}_{[\sigma,\tau[} \tag{1.18}$$

définit un cocycle $\alpha-$cohomologue à une constante (Lemme 1.13). De plus ψ_σ a les mêmes sauts que φ en τ si $\tau \sim_\alpha \sigma$ et $\tau \neq \sigma$. Le saut en σ est égal à

$$s_{\psi_\sigma}(\sigma) = - \sum_{\substack{\tau \sim_\alpha \sigma \\ \tau \neq \sigma}} s_\varphi(\tau)..$$

Choisissons dans Σ un ensemble complet $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ de représentants des classes d'équivalence modulo $\sim_\alpha$. Alors le cocycle

$$\varphi_0 := \sum_{j=1}^{k} \psi_{\sigma_j}$$

est $\alpha-$cohomologue à une constante et $\varphi - \varphi_0$ fait un saut en σ_j de $\sum_{\tau \sim_\alpha \sigma_j} s_\varphi(\tau)$.

Cela démontre simultanément *(i)* et *(ii)*. ∎

Remarque 1.8. Si la condition *(i)* est satisfaite, d'après (1.17) et (1.18) φ est $\alpha-$cohomologue à la constante

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \overline{\varphi(\sigma) \cdot \mu(I_\sigma)}$$

en considérant φ comme une application à valeurs dans $[0, 1[(\subset \mathbf{R})$ et où $I_\sigma := \varphi^{-1}(\varphi(\sigma))$. Cette constante est en fait l'intégrale $\int_0^1 \varphi(t)dt$.

Cocycles $\alpha-$séparés

Classiquement, l'étude de l'ergodicité de T_φ dans le cas des cocycles en escalier φ met en jeu les propriétés diophantiennes de la rotation $T : x \longrightarrow x+\alpha$, distinguant les α à quotients partiels bornés de ceux qui ne le sont pas (voir, par exemple, [Me], [Ve]). Nous n'échapperons pas à cette dualité.

Notons pour simplifier x^* la classe de $x \in \mathbf{X}$ modulo le sous-groupe $\mathbf{Z}\alpha$. Soit F une partie finie de $\mathbf{X}$ ayant au moins deux éléments dans des classes distinctes modulo $\mathbf{Z}\alpha$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $c > 0$ posons

$$m_n(F) := q_n \min_{\substack{u,v \in F \\ u^* \neq v^*}} \left\{ \min_{0 \leq k < q_n} ||u - v + k\cdot\alpha|| \right\} ,$$

$$M(F,c) := \{n \geq 1 \,;\, m_n(F) \geq c\} \qquad \text{et} \qquad \bar{\kappa}(F) := \limsup_{\nu \longrightarrow +\infty} m_n(F) .$$

La partie F sera dite *$\alpha-$séparée* si $\bar{\kappa}(F) > 0$. Elle sera dite *bien $\alpha-$séparée*, s'il existe $c > 0$ tel que l'ensemble $M(F,c)$ soit à lacunes bornées (*i.e.*, il existe un intervalle I de $\mathbf{N}$ tel que pour tout entier n, on ait $M(F,c) \cap (I+n) \neq \emptyset$).

Proposition 1.9. *Supposons α à quotients partiels bornés.*

(i) Pour toute partie bien $\alpha-$séparée F, il existe $c_0 > 0$ tel que $m_n(F) \geq c_0$ pour tout entier $n > 0$.

(ii) Si F est une partie formée de points rationnels dans $\mathbf{X}$, alors F est bien $\alpha-$séparée.

(iii) Soient u, v deux éléments distincts dans $\mathbf{X}$ tels que $u - v \notin \mathbf{Z}\alpha$. Alors la paire $\{u, v\}$ est $\alpha-$séparée.

Preuve. (i) Choisissons $c > 0$ tel que $M(F,c)$ soit à lacunes bornées. Il existe un entier $L > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $]n, n+L] \bigcap M(F,c) \neq \emptyset$. Fixons u et v dans F tels que $u^* \neq v^*$. Pour $m \in M(F,c)$, notons k_m l'entier tel que $0 \leq k_m < q_m$ et

$$\varepsilon_m := \min\{||u - v + k\cdot\alpha|| \,;\, 0 \leq k < q_m\} = ||u - v + k_m\cdot\alpha||.$$

Par définition, $q_m\varepsilon_m \geq c$ et pour $m' \in]m, m+L] \bigcap M(F,c)$, $m \leq n \leq m'$, on a

$$c \leq q_{m'}\varepsilon_{m'} \leq q_{m'}\varepsilon_n \leq \frac{q_{m+L}}{q_m} q_n\varepsilon_n .$$

Si les quotients partiels de α sont bornés par B, alors $q_{m+L} \le (B+1)^L q_m$ ce qui démontre *(i)* avec $c_0 = c/(B+1)^L$.

(ii) Soit d le dénominateur commun de F (*i.e.,* d est le plus petit entier > 0 tel que $d{\cdot}v = 0$ pour tout $v \in F$), soit u et v distincts dans F et soit k un entier positif. On a

$$||u - v + k{\cdot}\alpha|| \ge ||u - v + \frac{kp_n}{q_n}|| - ||\frac{kp_n}{q_n} - k{\cdot}\alpha||$$

et pour n tel que $\mathrm{pgcd}\{d, q_n\} = d_n \ne d$, on obtient

$$||u - v + k{\cdot}\alpha|| \ge \frac{d_n}{dq_n} - \frac{k}{q_n q_{n+1}}.$$

Soit maintenant u_n, v_n dans F et $0 \le k_n < q_n$ tels que $m_n(F) = q_n||u_n - v_n + k_n{\cdot}\alpha||$. D'après ce qui précède, si d ne divise pas q_n, on a

$$(*) \qquad m_n(F) \ge \frac{1}{d} - \frac{k_n}{q_{n+1}}.$$

Par hypothèse sur α, il existe $A > 1$ et $0 < a < 1$ tels que $q_{n+1} \le Aq_n$ et $a < q_n||q_n{\cdot}\alpha||$ pour tout entier $n > 0$. Choisissons des entiers t, δ et un nombre réel $c > 0$ tels que

$$t - 1 \ge 2\delta, \quad 2^\delta \ge 2d, \quad c \le \frac{a}{2d(1 + A^{td})}$$

et posons $w_n := u_n - v_n$, $\varepsilon_n := ||u_n - v_n + k_n{\cdot}\alpha||$. Puisque w_n ne prend qu'au plus d valeurs, pour tout entier L il existe deux entiers r et s tels que l'on ait simultanément :

$$L < r < s \le L + td, \quad s - r \ge t, \quad w_r = w_s.$$

Supposons $m_n(F) < c$ pour tous les entiers $n = L+1, \ldots, L+td$. Si $k_r \ne k_s$, alors

$$||q_s{\cdot}\alpha|| < ||(k_s - k_r){\cdot}\alpha|| \le \varepsilon_r + \varepsilon_s$$

d'où

$$a < q_s\varepsilon_s + (q_r\varepsilon_r)q_s/q_r \le c(1 + A^{td})$$

ce qui contredit le choix de c. Nous avons donc $k_r = k_s$ et aussi $\varepsilon_r = \varepsilon_{r+1} = \cdots = \varepsilon_s$ ce qui donne finalement $w_j = w_r$ et $k_j = k_r$ pour $j = r, r+1, \ldots, s$. Puisque q_s et q_{s-1} sont premiers entre eux, l'un de ces entiers n'est pas divisible par d et la minoration $(*)$ pour $n = s$ ou $n = s-1$ donne

$$m_n(F) \geq \frac{1}{d} - \frac{q_r}{q_s}.$$

Mais les relations de récurrence entre les q_n fournissent $2q_n < q_{n+2}$ d'où $q_r/q_s \leq 2^{-\delta} < 1/2d$, par suite $m_n(F) \geq 1/2d$, en contradiction avec le choix de c. L'ensemble $M(F, c)$ est donc à lacunes bornées.

(iii) Dans le cas contraire, il existe une suite d'entiers $(k_n)_n$ telle que $|k_n| < q_n$ et $\lim_n q_n||u - v - k_n{\cdot}\alpha|| = 0$. Posons $\mu_n = q_n||u - v - k_n{\cdot}\alpha||$. La suite $(k_n)_n$ ne peut pas être stationnaire pour n grand, sinon $(u - v) \in \mathbf{Z}\alpha$. On a donc $k_j \neq k_{j+1}$ pour une infinité d'entiers j et dans ce cas

$$q_{j+1}||(k_{j+1} - k_j){\cdot}\alpha|| \leq \mu_{j+1} + \frac{q_{j+1}}{q_j}\mu_j$$

avec $0 < |k_{j+1} - k_j| < q_{j+1} + q_j \leq q_{j+2}$. De (1.2) on déduit

$$q_{j+1}||(k_{j+1} - k_j){\cdot}\alpha|| \geq q_{j+1}||q_{j+1}\alpha||$$

d'où une contradiction en prenant j suffisamment grand. ■

Un cocycle en escalier $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ sera dit *$\alpha-$séparé* (resp. *bien $\alpha-$séparé*) si l'ensemble $\Sigma(\varphi)$ de ses points de discontinuité forme une partie $\alpha-$séparée (resp. bien $\alpha-$séparée). Remarquons que d'après le Lemme 1.14, φ peut être $\alpha-$séparé et cohomologue à une constante.

Théorème 1.4. *Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle en escalier $\alpha-$séparé et $\alpha-$discontinu. Alors l'équation fonctionnelle*

(1.19a) $$\varphi(x) = f(x + \alpha) - f(x)$$

n'a pas de solution mesurable $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$. De manière plus précise, il existe deux constantes réelles $\varepsilon_0 > 0$ et $\eta_0 > 0$ ne dépendant que de α et de φ telles qu'il existe une infinité d'entiers n vérifiant

(1.19b) $$\mu(\{x \in \mathbf{X}\,,\, ||\varphi^{(q_n)}(x) - c|| \geq \varepsilon_0\}) \geq \eta_0$$

pour tout $c \in \mathbf{X}$.
De plus, si α est à quotients partiels bornés et φ bien α−séparé, alors

$$\mu(\{x \in \mathbf{X}\,,\, \|\varphi^{(m)}(x) - c\| \geq \varepsilon_0\}) \geq \eta_0 \tag{1.19c}$$

pour tout entier $m > 0$.

Preuve. Par hypothèse sur φ, on a $\Sigma \cup (\Sigma + m\cdot\alpha) = \emptyset$ pour tout entier m non nul (avec $\Sigma = \Sigma(\varphi)$). Posons $\Delta := \Sigma - \Sigma$. L'ensemble des points de discontinuité de $\varphi^{(m)}$, $m \in \mathbf{N}$, est égal à $\bigcup_{0\leq k<m}(\Sigma - k\cdot\alpha)$. Soit $\delta(m)$ la plus petite distance entre les différents points de discontinuité de $\varphi^{(m)}$ et posons pour simplifier $\delta_n := \delta(q_n)$. Alors $\delta_n = \|d_n + r_n\cdot\alpha\|$ avec $d_n \in \Delta$, $r_n \in \mathbf{Z}$, $|r_n| < q_n$. Puisque Σ contient au moins deux points, on a $\delta_n \leq 1/2q_n$ de sorte que $d_n \neq 0$. En effet, dans le cas où $d_n = 0$, on a $\|r_n\cdot\alpha\| < 1/2q_n$ avec $|r_n| < q_n$, donc $\|r_n\cdot\alpha\| \geq \|q_{n-1}\cdot\alpha\|$ par (1.2). Mais $q_n\|q_{n-1}\cdot\alpha\| > 1/2$ d'après (1.3) ce qui contredit $q_n\delta_n < 1/2$. Maintenant de $d_n \neq 0$ on en déduit $m_n(\Sigma) \leq q_n\delta_n$, d'où l'existence d'une constante c telle que

$$0 < c \leq q_n\delta_n \tag{1.20}$$

pour une infinité d'entiers n.

Soit $c \in \mathbf{X}$, $\varepsilon > 0$ et posons $A_\varepsilon^{(m)}(c) := \{x \in \mathbf{X}\,;\, \|\varphi^{(m)}(x) - c\| \geq \varepsilon\}$. Les cocycles φ et $\varphi^{(m)}$ admettant les même sauts, choisissons ε_0 égal à la moitié de la plus petite des valeurs $\|s\|$ correspondant aux différents sauts s de φ. En tout point de discontinuité σ de $\varphi^{(m)}$, envisageons les deux arcs qui ont σ comme extrémité commune et sur lesquels $\varphi^{(m)}$ est constante. L'un d'eux est alors contenu dans l'ensemble $A_{\varepsilon_0}^{(m)}(c)$, d'où

$$\mu(A_{\varepsilon_0}^{(m)}(c)) \geq \frac{1}{2}m\delta(m). \tag{1.21}$$

Les inégalités (1.20) et (1.21) assurent (1.19b) en prenant $\eta_0 = c/2$. Il est maintenant clair que d'après (0.6), l'équation (1.19a) n'a pas de solution mesurable.

Supposons α à quotients partiels bornés et φ bien α−séparé. Alors d'après la proposition 1.9*(i)*, (1.20) est vérifié pour tout n. Soit B un entier tel que $Bq_n \geq q_{n+1}$ pour tout n. A chaque entier $m \geq 1$, associons l'entier n tel que $q_n \leq m < q_{n+1}$, alors $m\delta(m) \geq q_n\delta_{n+1} \geq B^{-1}q_{n+1}\delta_{n+1} \geq c/B$. D'où (1.19c) avec maintenant $\eta_0 = c/2B$. ∎

Corollaire 1.6. *Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}(= [0,1[)$ un cocycle en escalier α−séparé. Alors φ est un α−quasi-cobord, cohomologue à la constante c, si et seulement si*

(i) $\forall \sigma \in \Sigma(\varphi)\,;\ \sum_{\tau \sim_\alpha \sigma} s_\varphi(\tau) = 0$,

(ii) $c - \int_0^1 \varphi(t)dt \in \mathbf{Z}\alpha$. ■

Corollaire 1.7. *Soient α un nombre irrationnel à quotients partiels bornés, T la rotation sur le tore correspondante et φ un cocycle en escalier α−discontinu et bien α−séparé. Alors $\mathcal{S}_\varphi(T) < 1$. En particulier, T_φ n'est pas rigide.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la deuxième partie du Théorème 1.4 et la Remarque 1.3*(iv)*. ■

Proposition 1.10. *Soient α un nombre irrationnel à quotients partiels bornés, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ la rotation $x \mapsto x + \alpha$ et $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle en escalier α−discontinu, bien α−séparé. Alors l'invariant $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est un groupe contenant $\alpha\mathbf{Z}$ et il existe un entier r_0, $1 \leq r_0 \leq$ card$(\Sigma(\varphi))$, tel que $r_0\mathcal{MT}_\varphi(T) \subset \mathbf{Z}\alpha$. En fait, si un cocycle*

$$\psi := m\varphi{\circ}S - k{\cdot}\varphi + d,$$

tel que $\Sigma(k{\cdot}\varphi) = \Sigma(\varphi)$ (avec $d \in \mathbf{X}$, m et k entiers non nuls et $S : x \mapsto x+\beta$ une rotation du tore) est un α−cobord, alors $k^r = m^r$ où r est l'ordre de β modulo $\mathbf{Z}\alpha$ avec $r \leq$ card$(\Sigma(\varphi))$.

Preuve. Notons A un majorant des quotients partiels de α et $\Sigma := \Sigma(\varphi)$. D'après la proposition (1.9)*(i)*, il existe $c > 0$ tel que $m_n(\Sigma(\varphi)) > c$ et il est loisible de choisir c tel que $c < q_n||q_n{\cdot}\alpha||$ pour tout n. Supposons que ψ soit un T−cobord (le cas où $\beta \in \mathcal{MT}_\varphi(T)$ correspond à $m = 1$). Posons $\mu_n := \int_0^1 ||\psi^{(q_n)}(x)||dx$; par hypothèse $\lim_n \mu_n = 0$. Notons $t_n := c/4(A+1)^2 q_n$ et soit D_n l'ensemble des points de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$ qui sont extrémités communes de deux intervalles de longueur $\geq t_n$ sur lesquels $\psi^{(q_n)}$ est constante (les autres extrémités de ces intervalles étant aussi des points de saut de $\psi^{(q_n)}$). Si $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\min\{||\psi(x) - \psi(y)||\,;\, \psi(x) \neq \psi(y)\,,\ (x,y) \in \mathbf{X}^2\}$, on a

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 t_n \mathrm{card}(D_n) \leq \mu_n.$$

En d'autres termes, $\mathrm{card}(D_n) \in o(q_n)$. Soient u et v dans Σ tels que $u = v - \beta + b{\cdot}\alpha$, $b \in \mathbf{Z}$ (si $\beta \in \mathbf{Z}\alpha$, alors $u = v$). Si $ks_\varphi(u) \neq ms_\varphi(v)$, alors les points $u_j := u - j{\cdot}\alpha = v - \beta - (j-b){\cdot}\alpha$, pour les j tels que $0 \leq j, j-b < q_n$, sont des points de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$. Si w_j est le point de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$ le plus proche d'un tel u_j, alors $||u_j - w_j||$ s'écrit sous la forme $||\sigma - \sigma' + h{\cdot}\alpha||$ avec σ, σ' dans Σ et $|h| < q_n + |b|$. Pour n assez grand tel que $|b| \leq q_{n-2}$, on obtient $c \leq q_{n+1}||u_j - w_j||$, ce qui donne

$$\mu_n \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{c(q_n - |b|)}{q_{n+1}} \geq c\varepsilon_0\frac{q_{n-1}}{2q_{n+1}} \geq c\varepsilon_0/2(A+1)^2,$$

en contradiction avec $\lim_n \mu_n = 0$. Nous avons donc pour u et v dans Σ :

$$u \sim_\alpha v - \beta \Rightarrow ks_\varphi(u) = ms_\varphi(v)$$

et dans ces conditions le nombre de points de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$ provenant de u ou $v - \beta$ reste borné.

Notons par ailleurs que la relation $u \sim_\alpha v-\beta$ est biunivoque de son ensemble de définition ($\subset \Sigma$) vers $\Sigma - \beta$. Soit $\gamma(u)$ le point $v \in \Sigma$ (s'il existe) tel que $u \sim_\alpha v - \beta$. Notre objectif est de montrer que γ est en fait une permutation de Σ. Soit Σ_0 l'ensemble de définition de γ. Faisons l'hypothèse $\Sigma_0 \neq \Sigma$. Le nombre M_n de points de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$ vérifie, d'après ce qui précède

$$M_n = 2\mathrm{card}(\Sigma \setminus \Sigma_0)q_n + o(q_n).$$

Considérons maintenant la famille $\mathcal{F}_n$ des intervalles sur lesquels $\psi^{(q_n)}$ est constante et dont les extémités sont des point de discontinuité de $\psi^{(q_n)}$. Soit $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{G}_n$) la famille des intervalles dans $\mathcal{F}_n$ de longueur $< t_n$ (resp. $\geq t_n$) Par choix de c, les longueurs des intervalles dans $\mathcal{P}_n$ sont de la forme $||u-v+\beta+k_n\alpha||$, avec u et v dans Σ et $0 \leq k_n < q_n$. Notons I un tel intervalle et J un intervalle de la famille $\mathcal{F}_n$, contigu à I. Si J est aussi de longueur $< t_n$, alors les extémités de l'intervalle union $K := I \cup J$ sont, soit toutes les deux dans $\Sigma + \mathbf{Z}\alpha$, soit toutes les deux dans $\Sigma - \beta + \mathbf{Z}\alpha$. Il en résulte que la longueur ℓ de K est de la forme $||a - b + \ell_n{\cdot}\alpha||$ avec a et b dans Σ et $0 \leq \ell_n < q_n$. Alors $\ell \geq c/q_n$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur J qui se trouve donc de longueur $\geq t_n (= c/4(A+1)^2 q_n)$. Ainsi tout intervalle I de la famille $\mathcal{P}_n$ est contigu à chacune de ses extrémités avec des intervalles de la famille $\mathcal{G}_n$. Soit

$\mathcal{P}'_n$ l'ensemble des intervalles I de $\mathcal{P}_n$ d'extrémités $u - i{\cdot}\alpha$ et $v - \beta - j{\cdot}\alpha$ tels que $ks_\varphi(u) \neq ms_\varphi(v)$. Alors $||\psi^{(q_n)}(x)|| \geq \varepsilon_0/2$ sur l'un des deux intervalles de $\mathcal{G}_n$ contigus à I, d'où

$$\int_0^1 ||\psi^{(q_n)}(x)||dx \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 t_n \mathrm{card}(\mathcal{P}'_n),$$

ce qui montre que $\mathrm{card}(\mathcal{P}'_n) = o(q_n)$.

Désignons par N_n le nombre d'intervalles I de $\mathcal{G}_n$ dont les deux intervalles (de la famille $\mathcal{F}_n$) contigus à I appartiennent à $\mathcal{P}_n$. Rappelons que $\mathrm{card}(D_n) \in o(q_n)$ d'où

$$N_n = \mathrm{card}(\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}'_n) + o(q_n).$$

Soit $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. D'après ce qui précède, pour n assez grand, il existe un entier j, $0 \leq j < q_n$ (et en fait il en existe $\mathcal{O}(q_n)$), tel que $\sigma - j{\cdot}\alpha$ soit une extémité d'un intervalle de la famille $\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}'_n$. Cela signifie qu'il existe $\sigma' \in (\Sigma \setminus \gamma(\Sigma_0))$ et un entier $k_n(\sigma, \sigma') \in \mathbf{Z}$, tels que

$$ks_\varphi(\sigma) = ms_\varphi(\sigma'),\ 0 \leq |k_n(\sigma,\sigma')| < q_n, \text{ et } ||\sigma - \sigma' + \beta + k_n(\sigma,\sigma'){\cdot}\alpha|| < t_n.$$

Fixons σ, alors σ' est déterminé de manière univoque car si $||\sigma - \sigma'' + \beta + k_n(\sigma,\sigma''){\cdot}\alpha|| < t_n$, avec $\sigma' \neq \sigma''$, comme $|k_n(\sigma,\sigma') - k_n(\sigma,\sigma'')| < q_{n+1}$ et $\sigma' - \sigma'' \notin \mathbf{Z}{\cdot}\alpha$, on obtient

$$c < q_{n+1}||\sigma' - \sigma'' + (k_n(\sigma,\sigma') - k_n(\sigma,\sigma'')){\cdot}\alpha|| \leq 2t_n q_{n+1} \leq c/2,$$

contradiction. L'entier $k_n := k_n(\sigma,\sigma')$ est lui aussi déterminé de manière unique, car s'il en existe un autre, noté k'_n, (et toujours $0 \leq |k'_n| < q_n$) alors

$$c < q_{n+1}||q_{n+1}{\cdot}\alpha|| \leq q_{n+1}||(k_n - k'_n){\cdot}\alpha|| < 2q_{n+1}t_n \leq c/2,$$

nouvelle contradiction. Passons maintenant à $n+1$ et supposons, avec des notations évidentes, que $||\sigma - \sigma^* + \beta + k_{n+1}{\cdot}\alpha|| \leq t_{n+1}$. Alors si $\sigma' \neq \sigma^*$, on obtient la contradiction

$$c < q_{n+2}||\sigma' - \sigma^* + (k_n - k_{n+1}){\cdot}\alpha|| \leq q_{n+2}(t_n + t_{n+1}) \leq c/2.$$

On a donc $\sigma' = \sigma^*$ et cette fois-ci les majorations précédentes deviennent, si $k_n \neq k_{n+1}$:

$$c < q_{n+1}||q_{n+1}\cdot\alpha|| < q_{n+1}||(k_n - k_{n+1})\cdot\alpha|| \leq q_{n+1}(t_n + t_{n+1}) \leq c/2.$$

Ainsi pour $\sigma \in (\Sigma \setminus \Sigma_0)$ il existe un unique $\sigma' \in (\Sigma \setminus \gamma(\Sigma_0))$ et un unique entier $k(\sigma)$ tel que pour n assez grand, $||\sigma - \sigma' + \beta + k(\sigma)\cdot\alpha|| \leq t_n$. Cela implique $\sigma = \sigma' - \beta + k(\sigma)\cdot\alpha$ et contredit $\sigma \notin \Sigma_0$. En d'autres termes, $\Sigma = \Sigma_0$.

Il en résulte que $\Sigma(m\cdot\varphi) = \Sigma(\varphi)$ et la correspondance $\gamma : \sigma \mapsto \sigma'$ définie par $\sigma \sim_\alpha \sigma' - \beta$ réalise une permutation de Σ. De plus $s_\psi(\sigma) + s_\psi(\sigma' - \beta) = 0$, c'est-à-dire, $ks_\varphi(\sigma) = ms_\varphi(\gamma(\sigma))$. Pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe donc un plus petit entier $e_\sigma = e$, $1 \leq e \leq \mathrm{card}(\Sigma)$ tel que $\sigma \sim_\alpha \sigma - e\cdot\beta$, donc $e\cdot\beta \in \mathbf{Z}\alpha$ et $\gamma^e(\sigma) = \sigma$. Mais alors e_σ est exactement égal à l'ordre r de β modulo $\mathbf{Z}\alpha$.

De même que $ks_\varphi(\sigma) = ms_\varphi(\gamma(\sigma))$, on a $k^2 s_\varphi(\sigma) = mks_\varphi(\gamma(\sigma)) = m^2 s_\varphi(\gamma^2(\sigma))$ et plus généralement $k^\ell s_\varphi(\sigma) = m^\ell s_\varphi(\gamma^\ell(\sigma))$ pour tout $\ell > 0$. En particulier, pour $\ell = r$ on obtient $m^r = k^r$.

Montrons que $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est un groupe. D'après ce qui précède, pour tout β dans $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ il existe $d \in \mathbf{X}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que le cocycle $x \mapsto \varphi(x + \beta) + \varepsilon\varphi(x) - d$ soit un T−cobord. Il en résulte que $-\beta$ est aussi dans $\mathcal{MT}_\varphi(T)$. Pour terminer notons que le groupe quotient $\Gamma := \mathcal{MT}_\varphi(T)/\mathbf{Z}\alpha$ est abélien et fini. Il existe donc un élément dont l'ordre r_0 est le plus grand commun multiple de tous les ordres des éléments de Γ. C'est l'entier cherché. ■

Remarque 1.10. La démonstration précédente montre que $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ est un sous-groupe du groupe des β tels que $\Sigma(\varphi) + \beta \subset \Sigma(\varphi) + \mathbf{Z}\alpha$, les éléments β de $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ étant caractérisés par les conditions

$$s_\varphi(\sigma) \pm s_\varphi(\sigma') = 0$$

qui doivent être satisfaites pour tous les éléments σ et σ' dans $\Sigma(\varphi)$ tels que $\sigma \sim_\alpha \sigma' - \beta$. La structure générale de $\mathcal{MT}_\varphi(T)$ peut être précisée. Il est cyclique ou de rang 2 (en tant que $\mathbf{Z}$−module). En d'autres termes il existe $\alpha^* = (\alpha + k_0)/r_0$ tel que

$$\mathcal{MT}_\varphi(T) = \mathbf{Z}\alpha^*$$

$$\text{ou } \mathcal{MT}_\varphi(T) = \mathbf{Z}d\alpha^* \oplus \mathbf{Z}\tfrac{1}{r_0} \text{ ou } \mathcal{MT}_\varphi(T) = \mathbf{Z}\alpha^* \oplus \mathbf{Z}\tfrac{d}{r_0} \quad (d \text{ divise } r_0).$$

De tels exemples avec $r_0 = 2$ sont donnés dans [Le–Li].

Corollaire 1.8. *Soit α un nombre irrationnel à quotients partiels bornés définissant la rotation T sur $\mathbf{X}$ et soit φ un cocycle en escalier $\alpha-$discontinu bien $\alpha-$séparé. Si φ admet un saut irrationnel, alors φ est faiblement mélangeant et deux facteurs naturels distincts $T_{m\cdot\varphi}$ et $T_{k\cdot\varphi}$, (m, k entiers tels que $|m| \neq |k|$) ne sont pas isomorphes. En particulier, T_φ est coalescent.*

Preuve. De l'hypothèse sur les sauts de φ, on déduit qu'aucun des cocycles $k\cdot\varphi$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, n'est un quasi-cobord pour T. Donc φ est faiblement mélangeant d'après (0.8). Supposons maintenant que pour une rotation $S : x \mapsto x + \beta$ du tore et les entiers m, k, le cocycle $m\cdot\varphi\circ S - k\cdot\varphi$ soit un $T-$cobord. Alors, d'après la Proposition 1.10 on a $|m| = |k|$ et les cocycles $m\cdot\varphi$, $k\cdot\varphi$ sont équivalents. ∎

Rotations d'angle α à quotients partiels non bornés

Théorème 1.5. *Soit $T : x \mapsto x + \alpha$ une rotation sur $\mathbf{X}$ telle que α soit à quotients partiels non bornés et soit φ un cocycle en escalier. Il existe une suite croissante d'entiers $(b_n)_n$ et une sous-suite $(q_{k_n})_n$ de dénominateurs des convergents de α telles que*

(i) $\lim_{n\to\infty} ||b_n q_{k_n}\alpha|| = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |\int_{\mathbf{X}} \exp(2\pi i\varphi^{(b_n q_{k_n})})d\mu| = 1.$

En particulier $S_\varphi(T) = 1$ et le type spectral maximal de T_φ est une mesure de Dirichlet.

Preuve. Soit $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relèvement périodique de φ. D'après le Lemme 1.3 et le Lemme 1.6, pour tout x, $y \in [0,1]$ on a

$$|\tilde{\varphi}^{(q_n)}(x) - \tilde{\varphi}^{(q_n)}(y)| \leq 4V$$

où V est la variation de $\tilde{\varphi}$ sur $[0,1]$. Montrons qu'il existe une partie finie F de $\mathbf{X}$ (formée de combinaisons linéaires finies sur $\mathbf{Z}$ de sauts de φ) telle que

$$\forall x,y \in \mathbf{X},\ \ \varphi^{(q_n)}(x) - \varphi^{(q_n)}(y) \in F \tag{1.22}$$

En effet, il suffit de vérifier notre assertion lorsque $\varphi := \bar{c}\mathbf{1}_I$ pour un arc I et $c \in \mathbf{R}$. Le résultat général s'en déduisant par combinaison linéaire. Choisissons $\tilde{\varphi}$ de sauts $\pm c$. Dans ce cas, on a simplement $\tilde{\varphi}^{(q_n)}(x) - \tilde{\varphi}^{(q_n)}(y) \in [-4V, +4V] \cap \mathbf{Z}c$

($x \in [0,1]$) d'où (1.22) avec pour F les classes modulo 1 des éléments de $[-4V, +4V] \cap \mathbf{Z}c$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la théorème de Kronecker [Kr] il existe un entier b non nul tel que

$$\max_{v \in F} ||bv|| \leq \varepsilon/4\pi.$$

Joint à (1.22), ceci entraîne

$$\Big|\int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i b\varphi^{(q_n)} d\mu\Big| \geq 1 - \varepsilon/2.$$

Notons maintenant que

$$\begin{aligned}\varphi^{(bq_n)}(x) &= \sum_{0 \leq k < b} \varphi^{(q_n)}(x + kq_n\alpha)\\ &= \sum_{0 \leq k < b} \left(\varphi^{(q_n)}(x + kq_n\alpha) - \varphi^{(q_n)}(x)\right) + b\varphi^{(q_n)}(x).\end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\mathbf{X}} ||\varphi(x + kq_n\alpha) - \varphi(x)||\mu(dx) \leq 2C||kq_n\alpha||$$

où C est le nombre des points de discontinuité de φ. On en déduit donc, dans le cas de $\varphi^{(q_n)}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} ||\varphi^{(bq_n)} - b\varphi^{(q_n)}||d\mu &\leq 2C \sum_{0 \leq k < b} q_n||kq_n\alpha|| \leq 2C|\theta_n| \sum_{0 \leq k < b} k\\ &\leq Cb^2|\theta_n|.\end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse sur α. Il existe une infinité d'entiers n tels que $Cb^2|\theta_n| \leq \varepsilon/4\pi$. Pour ces entiers, on a

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i\varphi^{(bq_n)} d\mu\Big| = \Big|\int_{\mathbf{X}} \left(\exp 2\pi i b\varphi^{(q_n)}\right)\left(\exp 2\pi i(\varphi^{(bq_n)} - b\varphi^{(q_n)})\right) d\mu\Big|\\ &\geq \Big|\int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i b\varphi^{(q_n)} d\mu\Big| - \Big|\int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i b\varphi^{(q_n)} \left(1 - \exp 2\pi i(\varphi^{(bq_n)} - b\varphi^{(q_n)})\right) d\mu\Big|\\ &\geq 1 - \varepsilon/2 - \int_{\mathbf{X}} |1 - \exp 2\pi i(\varphi^{(bq_n)} - b\varphi^{(q_n)})| d\mu\\ &\geq 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

La construction de suites $(b_n)_n$ et $(q_{k_n})_n$ vérifiant *(i)* et *(ii)* est donc possible. ■

Corollaire 1.9. *Soient α à quotients partiels non bornés et φ un cocycle en escalier. Alors pour tout cocycle ψ uniformément lipschitzien de degré non nul, le cocycle $\varphi + \psi$ est faiblement mélangeant et n'est ni cohomologue à un cocycle en escalier ni cohomologue à un cocycle absolument continu de degré 0.*

Preuve. D'après la Proposition 1.5 et le Théorème 1.5, les cocycles $k\cdot(\varphi + \psi)$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, ne sont jamais cohomologues à un cocycle en escalier (notamment à une constante). En particulier $\varphi + \psi$ est faiblement mélangeant. Supposons maintenant $\varphi + \psi$ cohomologue à un cocycle γ absolument continu de degré 0. Il existe donc un cocycle h tel que $\varphi - \gamma = h \circ T - h - \psi$. La démonstration du théorème précédent montre de manière plus précise que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $b := b(\varepsilon)$ non nul tel que

$$\left| \int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i \varphi^{(bq_n)} d\mu \right| \geq 1 - \varepsilon$$

pour une infinité d'entiers n. Enfin, d'après les Propositions 1.3 et 1.8, on a $\mathcal{S}_{h\circ T - h - \psi}(T) = \mathcal{S}_\psi(T) < 1$. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{S}_\psi(T))$, alors

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i(\varphi^{(bq_n)} - \gamma^{(bq_n)}) d\mu \right| \\ &\qquad \geq \left| \int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i \varphi^{(bq_n)} d\mu \right| - \int_{\mathbf{X}} \left| 1 - \exp 2\pi i \gamma^{(bq_n)} \right| d\mu \\ &\qquad \geq 1 - \varepsilon - 2\pi \|\gamma^{(bq_n)}\|_\infty. \end{aligned} \tag{1.23}$$

La suite $(\gamma^{(q_n)})_n$ converge uniformément vers 0 (Théorème 1.1). Il en est de même de la suite $(\gamma^{(bq_n)})_n$ puisque $\gamma^{(bq_n)} = \sum_{0 \leq k < b} \gamma^{(q_n)} \circ T^{kq_n}$. On peut donc choisir n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait

$$\|\gamma^{(bq_n)}\|_\infty < \varepsilon / 2\pi.$$

L'inégalité (1.23) et le choix arbitraire de ε donnent donc

$$\left| \int_{\mathbf{X}} \exp 2\pi i (h \circ T^{(bq_n)} - h - \psi^{(bq_n)}) d\mu \right| > \mathcal{S}_\psi(T),$$

ce qui est contraire à la définition de $\mathcal{S}_\psi(T)$. ∎

DEUXIÈME PARTIE

0.2. AUTO-COUPLAGES ET NOUVEAUX INVARIANTS

Nous présentons ici des invariants liés à la structure des auto-couplages finis et infinis des produits de Anzai. Dans toute la suite, $\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ désigne un automorphisme ergodique sur un espace de Lebesgue $\mathcal{Y} := (Y, \mathcal{C}, \nu)$. Soit n un entier ≥ 1 ou $n = \infty$. Nous noterons $\mathcal{Y}^n = (Y^n, \mathcal{C}^{(n)})$ l'espace produit $\bigotimes_{0 \leq k < n}(Y, \mathcal{C})$. La $k^{\text{ième}}$ *projcction* $(y_i)_{0 \leq i < n} \mapsto y_k$ de $\mathcal{Y}^n$ sur $\mathcal{Y}$ sera notée pr_k et l'on posera $\mathcal{C}_k := pr_k^{-1}(\mathcal{C})$. Une mesure de probabilité λ sur $\mathcal{Y}^n$ est appelée un *auto-couplage d'ordre* n (ou encore un $n-$*auto-couplage*) de τ si λ est invariante par la transformation produit $\tau^{(n)} : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{Y}^n$, définie par $pr_k(\tau^{(n)}y) = \tau(pr_k y)$, $0 \leq k < n$, et si toutes les marginales $\lambda \circ pr_k^{-1}$ sont égales à ν. Nous noterons $\mathcal{J}_n(\tau)$ l'ensemble des $n-$auto-couplages de τ. Par le plongement diagonal de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}^n$ donné par $\Delta_n : y \mapsto (y_i)_{0 \leq i < n}$, $y_i = y$ pour tout $0 \leq i < n$, on peut identifier ν au $n-$auto-couplage $\nu \circ \Delta_n^{-1}$. De même tout $n-$auto-couplage, par plongement diagonal de $\mathcal{Y}^n$ dans $\mathcal{Y}^{kn}$, peut se voir comme un $kn-$auto-couplage, $k = 1, 2, \ldots, \infty$.

L'ordre n d'un $n-$auto-couplage de τ sera dit *essentiel* si :

(0.10) *L'inclusion* $\mathcal{C}_k \subset \bigvee_{0 \leq i < n, i \neq k} \mathcal{C}_i \bmod \mathcal{O}_\lambda$ *(où* $\mathcal{O}_\lambda := \lambda^{-1}(0)$*) n'est vérifiée pour aucun entier* k, $0 \leq k < n$.

L'ensemble des $n-$auto-couplages λ de τ pour lesquels $(Y^n, \tau^{(n)}, \lambda)$ est ergodique sera noté $\mathcal{J}_n^e(\tau)$. L'espace $\mathcal{Y}$ sera habituellement un espace de Borel standard compact (*i.e.*, Y est métrisable compact et ν une mesure de probabilité sur la $\sigma-$algèbre des parties boréliennes). Dans ce cas $\mathcal{J}_n(\tau)$, dans le dual faible de $C(Y^n)$, est *faiblement compact*, enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux qui sont exactement les $n-$autocouplages ergodiques. Il en résulte (cf. [Ju–Ru]) que pour tout $\lambda \in \mathcal{J}_n$, il existe une unique mesure de probabilité Λ sur $\mathcal{J}_n^e(\tau)$ telle que pour tout borélien B de Y^n,

$$(0.11) \qquad \lambda(B) = \int_{\mathcal{J}_n^e(\tau)} \ell(B)\Lambda(d\ell).$$

Nous identifierons à l'occasion λ avec le système dynamique associé $(Y^n, \tau^{(n)}, \lambda)$. Toute suite $\Sigma = (S_k)_{0\leq k<n}$ d'éléments S_k dans le commutant $C(\tau)$ de τ détermine une mesure ν_Σ sur $\mathcal{Y}^n$ par :

$$(0.12) \qquad \nu_\Sigma\Big(\prod_{0\leq k<n} A_k\Big) = \nu\Big(\bigcap_{0\leq k<n} S_k^{-1}A_k\Big).$$

On vérifie facilement que $\nu_\Sigma \in \mathcal{J}_n^e(\tau)$. Dans le cas où τ est une rotation ergodique sur un groupe compact Γ, le commutant $C(\tau)$ correspond au groupe des translations de Γ [Ne 2] et d'après [Ju-Ru] (voir aussi [Le-Me]), tous les $n-$auto-couplages ergodiques de τ sont de la forme ν_Σ, où ν est ici la mesure de Haar sur Γ. Il en résulte que dans ce cas, les auto-couplages ergodiques sont tous isomorphes à τ.

Revenons au cas général. Un facteur $\mathcal{E}$ de τ (*i.e.*, une sous-$\sigma-$algèbre de $\mathcal{C}$ invariante par τ) définit un système dynamique quotient $\tau_\mathcal{E} : \mathcal{Y}_\mathcal{E} \to \mathcal{Y}_\mathcal{E}$, $\mathcal{Y}_\mathcal{E} := (Y_\mathcal{E}, \mathcal{E}, \nu)$. Pour tout entier $n \geq 1$ ou $n = \infty$, le facteur $\mathcal{E}$ détermine un produit fibré $\mathcal{Y}_\mathcal{E}^n := (\mathcal{Y}^n, \nu_\mathcal{E}^{(n)})$ où la mesure $\nu_\mathcal{E}^{(n)}$ est définie sur les cylindres

$$C(A_0, \ldots, A_k) := pr_0^{-1}(A_0) \cap \cdots \cap pr_k^{-1}(A_k),\ A_i \in \mathcal{C},\ 0 \leq i \leq k < n,$$

par

$$(0.13) \qquad \nu_\mathcal{E}^{(n)}(C(A_0, \ldots, A_k)) := \int_Y E(A_0 \| \mathcal{E}) \cdots E(A_k \| \mathcal{E}) d\nu,$$

$E(A\|\mathcal{E})$ désignant l'espérance conditionnelle suivant $\mathcal{E}$ de l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ de A. En général, $\nu_\mathcal{E}^{(n)}$ n'est pas ergodique ; elle l'est lorsque l'extension $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_\mathcal{E}$ est faiblement mélangeante relativement à τ (cf. [Fü 2], p. 119 et suivantes).

A l'automorphisme ergodique τ de $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{C}, \nu)$ associons l'ensemble $\mathcal{A}(\tau)$ des sous-algèbres $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$, invariantes par τ et telles que pour le facteur $\tau_\mathcal{E}$ défini par $\mathcal{E}$, on ait :

(0.14) *Il existe un auto-couplage λ de $\tau_{\mathcal{E}}$, isomorphe à τ.*

En d'autres termes, $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau)$ si et seulement si, il existe un entier $n \geq 1$ ou $n = \infty$ et des facteurs $\mathcal{E}_i$, $0 \leq i < n$, tous isomorphes à $\mathcal{E}$, tels que $\mathcal{C} = \bigvee_{0 \leq i < n} \mathcal{E}_i$ (mod $\mathcal{O}_\nu$). Remarquons que $\mathcal{C}$ est toujours dans $\mathcal{A}(\tau)$.

Pour tout facteur $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}(\tau)$, définissons :

(0.15) $\mathbf{chl}(\mathcal{E}) := \sup\{n \geq 1\,;$ *il existe une suite strictement croissante de n facteurs de τ : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \mathcal{C}\}$.*

et

(0.16) $\mathbf{jd}(\mathcal{E}) := \sup\{n \geq 1\,;$ *il existe un auto-couplage de $\tau_{\mathcal{E}}$, $n-$essentiel, isomorphe à $\tau\}$.*

Notons que :

$$\mathbf{jd}(\mathcal{E}) \leq \sup\{\mathbf{chl}(\mathcal{E}')\,;\ \tau_{\mathcal{E}'} \text{ facteur isomorphe à } \tau_{\mathcal{E}}\}.$$

Dans le cas où $\mathbf{chl}(\mathcal{E}')$ est fini pour tout facteur $\tau_{\mathcal{E}'}$ isomorphe à $\tau_{\mathcal{E}}$, il ne peut pas exister d'auto-couplage $\infty-$essentiel de $\tau_{\mathcal{E}}$ isomorphe à τ.

Définissons maintenant :

$$\mathbf{chl}(\tau) := \sup\{\mathbf{chl}(\mathcal{E})\,;\ \mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau)\}$$

et

$$\mathbf{jd}(\tau) := \sup\{\mathbf{jd}(\mathcal{E})\,;\ \mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau)\}.$$

Ce sont des invariants d'isomorphie et l'on a $\mathbf{jd}(\tau) \leq \mathbf{chl}(\tau)$. Lorsque τ est à spectre simple, chaque facteur étant canonique (cf. [Ne 2]), l'ensemble $\mathcal{A}(\tau)$ se réduit à $\{\mathcal{C}\}$ de sorte que $\mathbf{jd}(\tau) = \mathbf{chl}(\tau) = 1$. C'est le cas des rotations ergodiques. Lorsque τ est non coalescent, alors $\mathbf{chl}(\tau) = +\infty$, mais nous ne savons pas quelles valeurs peut prendre $\mathbf{jd}(\tau)$.

2.1. AUTOMORPHISMES TOTALEMENT COALESCENTS

Définition et exemples

Un automorphisme ergodique τ sera dit *totalement coalescent* si tout auto-couplage λ de $\mathcal{J}^e_\infty(\tau)$ définit un système dynamique coalescent. C'est le cas des rotations ergodiques. Notons que si τ est totalement coalescent, alors tout $n-$auto-couplage ergodique de τ est coalescent. Nous verrons que la réciproque est fausse.

Théorème 2.1. *Soit $\tau : (\Gamma, \mathcal{B}, \mu) \to (\Gamma, \mathcal{B}, \mu)$ une rotation ergodique sur un groupe monothétique compact Γ et soit G un groupe abélien métrisable compact. Soit $\varphi : \Gamma \to G$ un $G-$cocycle faiblement mélangeant pour lequel*

(2.1) *Pour tout $S \in C(\tau)$, le $G-$cocycle $\varphi \circ S - \varphi$ est un $\tau-$quasi-cobord.*

Alors τ_φ est totalement coalescent.

Preuve. Remarquons tout d'abord que pour $S \in C(\tau)$ et c_S, c'_S dans G tels que les $G-$cocycles

$$\varphi \circ S_\beta - \varphi - c_S \quad \text{et} \quad \varphi \circ S_\beta - \varphi - c'_S$$

soient des $\tau-$cobords, alors pour tout caractère η de G, on a $\eta(c'_S)/\eta(c_S) \in Sp(\tau)$ puisque φ est faiblement mélangeant. Choisissons λ dans $\mathcal{J}^e_\infty(\tau_\varphi)$; nous devons montrer que λ est coalescent. La marginale de λ dans $\mathcal{J}^e_\infty(\tau)$ est de la forme (0.12), soit ici μ_Σ avec $\Sigma := (S_i)_{i \geq 0}$, $S_i \in C(\tau)$. Considérons le $G^\infty-$cocycle $\psi := (\varphi \circ S_i)_{i \geq 0}$ et le groupe H_1 des caractères χ de G^∞ tels que $\chi \circ \psi$ soit un $\tau-$cobord. Notons G_1 l'annihilateur de H_1; c'est un sous-groupe compact de G^∞, de mesure de Haar notée μ_1.

D'après [Le-Me], il existe un $G^\infty-$cocycle $f : \Gamma \to G^\infty$ tel que le cocycle

$$\psi_1 := \psi + f \circ \tau - f \tag{2.2}$$

soit à valeurs dans G_1, et le produit croisé τ_{ψ_1} sur $(\Gamma \times G_1, \mu \otimes \mu_1)$ soit isomorphe à

$$(\tau_\varphi)^{(\infty)} : ((\Gamma \times G)^\infty, \lambda) \to ((\Gamma \times G)^\infty, \lambda).$$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier la coalescence de τ_{ψ_1}. Soit D la diagonale de G^∞. Montrons que pour tout caractère χ de G^∞ on a :

(2.3) *Si $\chi\circ\psi$ est un $\tau-$quasi-cobord, alors $D \subset Ker\,\chi$.*

En effet, χ s'écrit sous la forme d'un produit fini

$$\chi = \prod_{\ell\in L} \eta_\ell\circ\Pi_\ell\,,$$

où $\eta_\ell \in \widehat{G}$ et $\Pi_\ell : G^\infty \to G$ désigne la $\ell^{i\grave{e}me}$ projection. Si $\chi\circ\psi$ est $\tau-$cohomologue à une constante ζ, c'est-à-dire si $\prod_{\ell\in L}\eta_\ell(\varphi\circ S_\ell)$ est $\tau-$cohomologue à ζ, alors d'après (2.1) le cocycle $\left(\prod_{\ell\in L}\eta_\ell\right)\circ\varphi$ est $\tau-$cohomologue à la constante $\zeta\cdot\prod_{\ell\in L}\eta_\ell(-c_{S_\ell})$. Le cocycle φ étant faiblement mélangeant, nécessairement $\prod_{\ell\in L}\eta_\ell = 1$ et par suite $D \subset Ker\,\chi$, ce qui démontre (2.3).

Soit maintenant $U_{g,v} : (x,y) \mapsto (U(x), g(x) + v(y))$ un élément de $C(T_{\psi_1})$, avec $U \in C(\tau)$, v un épimorphisme continu de G_1 et g un G_1-cocycle défini sur G, tels que :

$$\psi_1\circ U - v\circ\psi_1 = g\circ\tau - g. \tag{2.4}$$

En projetant sur G par Π_k les égalités (2.2) et (2.4), on obtient que les deux $G-$cocycles $\varphi\circ S_k\circ U$ et $\Pi_k\circ v\circ\psi$ sont $\tau-$cohomologues. Par l'hypothèse (2.1) on déduit que le cocycle $\varphi\circ S_k\circ U - \varphi\circ S_k$ est $\tau-$cohomologue à c_U. Mais $\varphi\circ S_k = \Pi_k\circ\psi$ donc $(\Pi_k - \Pi_k\circ v)\circ\psi$ est $T-$cohomologue à c_U pour tout entier k. Soit η un caractère de G. Le sous-groupe G_1 étant fermé, chaque caractère $\eta\circ\Pi_k\circ v$ de G_1 se prolonge en au moins un caractère $P_{\eta,k}$ de G^∞. Soit le caractère $\chi_k = \eta\circ\Pi_k/P_{\eta,k}$; d'après (2.3)

$$D \subset \ker\chi_k\,,\quad k \text{ entier} \geq 0, \tag{2.5}$$

et comme $\chi_k\circ\psi$ est $\tau-$cohomologue à $\eta(c_U)$, on a

$$\chi_k/\chi_\ell \in H_1\,,\qquad k,\ell \text{ entiers} \geq 0. \tag{2.6}$$

Montrons $\ker v \subset D$, puis $\ker v = \{0\}$. En effet, si $x \in \ker v\,(\subset G_1)$, par (2.6) on obtient $\chi_k(x) = \chi_\ell(x)$ d'où

$$\frac{\eta\circ\Pi_k(x)}{\eta\circ\Pi_\ell(x)} = \frac{P_{\eta,k}(x)}{P_{\eta,\ell}(x)} = \frac{\eta\circ\Pi_k\circ v(x)}{\eta\circ\Pi_\ell\circ v(x)} = 1,$$

ceci pour tout $\eta \in \widehat{G}$. On a donc $\Pi_k(x) = \Pi_\ell(x)$ pour tous les indices k, ℓ, donc $x \in D$. Il résulte maintenant de (2.5) que $\eta \circ \Pi_k(x) = \eta \circ \Pi_k \circ v(x) = 1$, ce qui entraîne $\chi(x) = 1$ pour tous les caractères de G^∞, d'où $x = 0$. Nous avons ainsi prouvé que v est injective, par suite $U_{g,v}$ est inversible. Ceci montre que T_{ψ_1}, donc aussi λ, est coalescent. ■

Remarque 2.1. Dans le cas où $\Gamma = G = \mathbf{X}$, *i.e.*, dans le cas des produits de Anzai, les hypothèses du Théorème 2.1 sont vérifiées pour les cocycles affines. E. Lesigne, nous a fait remarqué que ce sont là les seuls exemples (à un cobord près). En fait, soit $\mathcal{F}$ le groupe des cocycles $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ muni de la distance suivante :

$$d(f,g) := \int_X ||f(x) - g(x)||\mu(dx).$$

Alors $(\mathcal{F}, d)$ est un espace polonais. Soit $H : \mathcal{F}\times\mathbf{X} \to \mathcal{F}$ l'application continue définie par

$$H(f,c) := f\circ\tau - f + c.$$

Il résulte de [Ba 2] que l'image $H(\mathcal{F}\times\mathbf{X})$ est une partie borélienne de $\mathcal{F}$ et qu'en outre, il existe un relèvement borélien $\Lambda : H(\mathcal{F}\times\mathbf{X}) \to \mathcal{F}\times\mathbf{X}$ de H. D'après l'hypothèse (2.1), l'application continue $h : \mathbf{X} \to \mathcal{F}$ définie par $h(\beta)(x) := \varphi(x+\beta) - \varphi(x)$ vérifie

$$h(\mathbf{X}) \subset H(\mathcal{F}\times\mathbf{X}).$$

Finalement, introduisons la projection $p_2 : \mathcal{F}\times\mathbf{X} \to \mathbf{X}$. L'application $\kappa := p_2\circ\Lambda\circ h : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est borélienne et le cocyle $h(\beta) - \kappa(\beta)$ est un $\tau-$ *cobord* pour tout $\beta \in \mathbf{X}$. Il en résulte maintenant d'après [Les] que φ est $\tau-$cohomologue à un cocycle affine.

Automorphismes quasi-discrets

Soit τ un automorphisme ergodique de $\mathcal{Y} = (Y, \mathcal{C}, \nu)$ et $\Gamma(Y,\nu)$ le sous-groupe multiplicatif des fonctions $f \in L^2(Y,\nu)$ telles que $|f| = 1$, muni de la topologie induite par la norme de $L^2(Y,\nu)$. L'endomorphisme de groupe V défini sur $\Gamma(Y,\nu)$ par $V(f) = f\circ\tau/f$ est continu. Considérons la suite croissante des sous-groupes fermés $G_n(\tau) := \ker V^n$, $n \geq 0$. Le groupe

$$G_\infty(\tau) := \bigcup_{n\geq 0} G_n(\tau)$$

est appelé groupe des *fonctions propres généralisées.* L'automorphisme τ est dit à *spectre quasi-discret* si l'espace engendré par $G_\infty(\tau)$ est dense dans $L^2(Y,\nu)$. Cette définition diffère de celle donnée dans [Ab] et [Ha-Pa], ces auteurs supposant τ totalement ergodique (*i.e.,* toutes les puissances non nulles de τ sont ergodiques). Cette dernière hypothèse n'est en fait pas utilisée dans la démonstration de coalescence de τ donnée par H. Hahn et W. Parry. Leur résultat repose sur les propriétés suivantes qui sont vraies pour tout automorphisme ergodique τ et tout $S \in C(\tau)$:

(P$_1$) $$g \in G_{n+1}(\tau) \Longrightarrow g\circ S/g \in G_n(\tau),$$

(P$_2$) *Pour tout entier n, l'application $g \mapsto g\circ S$ est un automorphisme du groupe $G_n(\tau)$.*

Il en résulte, avec notre définition :

Proposition 2.1. *Tout automorphisme ergodique quasi-discret est coalescent.*

Notons que les produits de Anzai déterminés par les cocycles affines φ, sont de spectre quasi-discret.

La *Question 1* de l'introduction admet maintenant une réponse négative sous la forme suivante :

Théorème 2.2. *Tout automorphisme ergodique τ quasi-discret est totalement coalescent. De plus, tout auto-couplage $\lambda \in \mathcal{J}^e_\infty(\tau)$ détermine un système dynamique à spectre quasi-discret.*

Preuve. Nous commençons par établir la propriété d'approximation suivante :

Lemme 2.1. *Soient $\mathcal{Z} := (Z,\mathcal{E},\lambda)$ un espace de probabilité et H_k, F_k, $k \in \mathbb{N}$, des sous-algèbres unitaires de $L^\infty(\lambda)$ telles que H_k soit une sous-algèbre dense de F_k pour la norme de $L^2(\lambda)$. Alors la sous-algèbre H engendrée par tous les H_k est dense (pour la norme de $L^2(\lambda)$) dans la sous-algèbre F engendrée par tous les F_k.*

Pour démontrer ce lemme, Il suffit d'établir que pour tout $m \geq 0$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $f_k \in F_k$, $0 \leq k \leq m$, il existe des éléments $h_k \in H_k$, $0 \leq k \leq m$, tels que :

$$\Big|\Big| \prod_{k=0}^{m} f_k - \prod_{k=0}^{m} h_k \Big|\Big|_2 \leq \varepsilon. \tag{2.7}$$

Mais on a toujours, par exemple,

$$\|\prod_{k=0}^{m} f_k - \prod_{k=0}^{m} h_k\|_2 \leq \sum_{k=0}^{m} \Big(\|(f_k - h_k\|_2 \cdot \prod_{0\leq j<k} \|h_j\|_\infty \cdot \prod_{k<j\leq m} \|f_j\|_\infty \Big).$$

Il suffit alors pour réaliser (2.7) de choisir les $h_k \in H_k$ pas à pas, tels que :

$$\|f_k - h_k\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{m \cdot (1 + \prod_{0\leq j<k} \|h_j\|_\infty \cdot \prod_{k<j\leq m} \|f_j\|_\infty)}.$$

■

Démonstration du Théorème 2.2. Soit un automorphisme ergodique $\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ à spectre quasi-discret et soit $\lambda \in \mathcal{J}_\infty^e(\tau)$. Pour tout $k \in \mathrm{N}$ posons :

$$G_n^k := \{g{\circ}pr_k \,;\; g \in G_n(\tau)\},$$
$$G_\infty^k := \{g{\circ}pr_k \,;\; g \in G_\infty(\tau)\} \quad (= \bigcup_{n\geq 0} G_n^k).$$

Pour $n = 0$, les groupes G_0^k sont tous égaux au groupe trivial $\{1\}$. Montrons par récurrence sur n que $G_n^k \subset G_n(\tau^{(\infty)})$ pour tout $n \geq 0$. Supposons cette inclusion satisfaite pour un entier $n \geq 0$ (pour tout k) et soit $f = g{\circ}pr_k$ dans G_{n+1}^k, avec $g \in G_{n+1}(\tau)$. On a donc $g{\circ}\tau = h{\cdot}g$ dans $L^2(\nu)$ avec $h \in G_n(\tau)$ et comme $\nu = \lambda{\circ}pr_k^{-1}$, cette égalité se transcrit dans $L^2(\lambda)$ sous la forme :

$$(g{\circ}pr_k){\circ}\tau^{(\infty)} = (h{\circ}pr_k){\cdot}(g{\circ}pr_k).$$

En d'autres termes, $f{\circ}\tau^{(\infty)} = (h{\circ}pr_k){\cdot}f$, mais $h{\circ}pr_k \in G_n^k \subset G_n(\tau^{(\infty)})$ par hypothèse, donc $f \in G_{n+1}(\tau^{(\infty)})$, ce qui établit les inclusions avec $n+1$. Pour obtenir que $G_\infty(\tau^{(\infty)})$ engendre un sous-espace dense dans $L^2(\lambda)$, il suffit d'appliquer le Lemme 2.1 en prenant pour H_k l'algèbre engendrée par G_∞^k et pour F_k la sous-algèbre de $L^\infty(\lambda)$ des éléments de la forme $g{\circ}pr_k$, $g \in L^\infty(\nu)$.
■

Remarque 2.2. Une question naturelle se pose à savoir si les transformations de spectre quasi-discret sont les seules qui soient totalement coalescentes. E. Lesigne nous a signalé que la réponse à cette question est négative car il existe des translations sur des variétés nilpotentes qui peuvent être représentées comme des extensions suivant le cercle de translations sur le tore de dimension deux et où les cocyles satisfont aux hypothèses du Théorème 2.1 (voir [Con–Les]).

Produits de Anzai non totalement coalescents

Soit $T : x \to x + \alpha$ une rotation irrationnelle sur le tore $\mathbf{X}$. Pour tout produit de Anzai T_φ ergodique, les groupes $G_n(T_\varphi)$ sont faciles à déterminer. Deux cas se présentent :

Cas 1 : Pour tout entier k non nul, le cocycle $k{\cdot}\varphi$ n'est pas cohomologue à un cocycle affine. Alors $G_2(T_\varphi)$ est formé des fonctions propres de la rotation T, *i.e.*, $G_2(T_\varphi) = G_2(T){\otimes}1$ et d'autre part $G_3(T_\varphi) = G_2(T_\varphi)$, de sorte que $G_\infty(T_\varphi) = G_2(T){\otimes}1$.

Cas 2 : Il existe des entiers k non nuls tels que $k{\cdot}\varphi$ soit cohomologue à un cocycle affine. Tous ces entiers sont alors multiples d'un entier $e > 0$ et il existe $a \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{X}$ et $F \in \Gamma(\mathbf{X}, \mu)$ tels que

$$F{\circ}T(x)/F(x) = \exp\big(2\pi i(e\varphi(x) - ax - c)\big).$$

Avec ces notations, si $a \neq 0$ alors $G_2(T_\varphi) = G_2(T){\otimes}1$ et $G_\infty(T_\varphi) = G_3(T_\varphi) \neq G_2(T_\varphi)$. Si $a = 0$, cette fois-ci $G_2(T_\varphi)$ contient strictement $G_2(T){\otimes}1$ (car $\exp(2\pi ic)$ est une valeur propre de T_φ et $c \notin \mathbf{Z}\alpha$), tandis que $G_3(T_\varphi) = G_2(T_\varphi)$. On a donc encore $G_\infty(T_\varphi) = G_3(T_\varphi)$. Les fonctions propres généralisées sont toutes de la forme

$$(x, y) \mapsto z(F(x))^m \exp\big(2\pi i(nx - mey)\big)$$

avec $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ et $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$. Il résulte immédiatement de (P_2) que T_φ est alors coalescent. Cela peut aussi s'obtenir du fait que le facteur naturel $T_{e\cdot\varphi}$ est quasi-discret, donc coalescent. En effet, d'une manière générale, nous montrons :

Proposition 2.2. *Soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle ergodique tel que pour un entier non nul k, le cocycle $k{\cdot}\varphi$ soit un cocycle affine. Alors tout auto-couplage $\lambda \in \mathcal{J}_n^e(T_\varphi)$, $n < \infty$, est coalescent. D'autre part, pour α à quotients partiels bornés, il existe de tels cocycles qui ne sont pas totalement coalescents.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathcal{J}_n^e(T_\varphi)$, $n < +\infty$. La marginale de λ dans $\mathcal{J}_n^e(T)$ est de la forme μ_Σ avec $\Sigma := (S_1, \cdots, S_n)$, $S_i \in C(T)$. D'après [Le-Me], il existe un sous-groupe compact G_1 de $\mathbf{X}^n$ (cf. démonstration du Théorème 2.1) de mesure de Haar μ_1 et un G_1−cocycle ψ_1, T−cohomologue à $\psi := (\varphi{\circ}S_1, \cdots, \varphi{\circ}S_n)$, tels que $(T_\varphi^{(n)}, \lambda)$ soit isomorphe à l'extension croisée T_{ψ_1} définie sur $(\mathbf{X} \times G_1, \mu{\otimes}\mu_1)$.

Pour tout entier k fixé ($k \neq 0$) notons k^* l'endomorphisme de $(\mathbf{X} \times \mathbf{X})^n$ défini par :

$$k^*((x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)) := ((x_1, k\cdot y_1), \cdots, (x_n, k\cdot y_n))$$

et posons $\lambda^* = \lambda \circ k^{*-1}$. Notons enfin μ_1' la mesure de Haar de $G_1' := k\cdot G_1$. Il est clair que $\lambda^* \in \mathcal{J}_n^e(T_{k\cdot\varphi})$ de sorte que $(T_{k\cdot\varphi}^{(n)}, \lambda^*)$ est isomorphe à $(T_{k\cdot\psi_1}, \mu \otimes \mu_1')$ (On sait classiquement que $\mu \otimes \mu_1'$ est la seule mesure de probabilité sur $\mathbf{X} \times G_1'$ qui rende ergodique le produit croisé $T_{k}\cdot\psi_1$). Si $k\cdot\varphi$ est cohomologue à un cocycle affine, il est aussi ergodique car φ l'est, par suite $(T_{k\cdot\psi_1}, \mu \otimes \mu_1')$ est coalescent (Théorème 2.2). Pour montrer que λ est coalescent, il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Soit Γ un sous-groupe compact de $\mathbf{X}^n$ (n entier ≥ 1), de mesure de Haar ρ ; soit k un entier > 0, $\Gamma' := k\cdot\Gamma$ de mesure de Haar ρ' et soit $\chi : \mathbf{X} \to \Gamma$ un $\Gamma-$cocycle tel que $(T_\chi, \mu \otimes \rho)$ soit ergodique et $(T_{k\cdot\chi}, \mu \otimes \rho')$ coalescent. Alors $(T_\chi, \mu \otimes \rho)$ est coalescent.*

Preuve : Soit $(x, \gamma) \mapsto (S(x), v(\gamma) + f(x))$ un élément du commutant de $(T_\chi, \mu \otimes \rho)$ où $S \in C(T)$, v est un épimorphisme continu de Γ et f un $\Gamma-$cocycle tels que :

$$\chi \circ S - v \circ \chi = f \circ T - f.$$

En sommant k fois cette relation, on voit que l'application

$$(x, \gamma') \mapsto (S(x), v'(\gamma') + k\cdot f(x)),$$

où v' désigne la restriction de v à Γ', est un élément du commutant de $(T_{k\cdot\chi}, \mu \otimes \rho')$. Par hypothèse v' est un isomorphisme de Γ'. Si v n'est pas un isomorphisme de Γ alors la suite des sous-groupes $\Gamma_n = v^{-n}(\{0\})$ de Γ n'est pas stationnaire. Il en résulte que $\Gamma_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$ est infini, mais $k\cdot\Gamma_n \subset \ker v'^n = \{0\}$, donc $k\cdot\Gamma_\infty = \{0\}$. Cela contredit le fait classique que le sous-groupe $\{\gamma \in \Gamma\,;\, k\cdot\gamma = 0\} (\subset \mathbf{X}^n)$ n'a qu'un nombre fini d'éléments (au plus k^n). ■

Fin de la démonstration. Il reste à donner un exemple de cocycle φ tel que T_φ soit ergodique, non totalement coalescent et pour lequel $k\cdot\varphi$ est affine pour un entier k non nul. Choisissons α à quotients partiels bornés. Soit β dans $\mathbf{X}$, irrationnel et tel que $\mathbf{Z}\beta \cap \mathbf{Z}\alpha = \{0\}$. Le cocycle

$$\varphi : x \mapsto \beta + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x)$$

possède les propriétés requises (ces choix ont été faits pour fournir un exemple simple). En effet, T_φ est clairement ergodique (vu le choix de β et le Théorème 1.4) et $2{\cdot}\varphi$ est constant. Montrons que T_φ n'est pas totalement coalescent. Pour cela choisissons γ, irrationnel dans $\mathbf{X}$ tel que

$$(\mathbf{Z}\gamma + \mathbf{Z}\frac{1}{2}) \cap \mathbf{Z}\alpha = \{0\}.$$

Soit D_2 le sous-groupe compact de $\mathbf{X}^\infty$ formé des éléments y tels que $2{\cdot}y$ appartienne à la diagonale. Notons μ_2 la mesure de Haar de D_2 et soit H_2 le groupe des caractères $\chi := n_0\Pi_0 + n_1\Pi_1 + \cdots + n_k\Pi_k$ de $\mathbf{X}^\infty$ (à valeurs dans $\mathbf{X}$) tels que le cocycle

$$\psi_\chi : x \mapsto (n_0 + \cdots + n_k){\cdot}\beta + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} n_j \mathbf{1}_{[0,1/2[}(x + j\gamma)$$

soit T−cohomologue à 0. Avec les choix faits pour γ, l'ensemble $\{-j\gamma, -j\gamma + 1/2\,;\, 0 \le j \le k\}$ est α−séparé. Cela résulte du fait que pour α à quotients partiels bornés, on a $\limsup_n \min_{0 \le m < Lq_n} q_n \|\ell{\cdot}\gamma - m{\cdot}\alpha\| > 0$ pour tous entiers non nuls L et ℓ. Le Théorème 1.4 montre alors que D_2 est exactement l'annihilateur de H_2. On vérifie en effet que $\chi \in H_2$ si et seulement si

$$n_i \equiv 0 \pmod 2 \ \ \mathit{pour}\ \ i = 0, \cdots, k \ \ \mathit{et}\ \ \sum_{i=0}^{k} n_i = 0.$$

Il en résulte que l'extension croisée T_ψ définie sur $(\mathbf{X} \times D_2, \mu \otimes \mu_2)$ par le D_2−cocycle

$$\psi : x \mapsto (\varphi(x), \varphi(x + \gamma), \cdots, \varphi(x + k{\cdot}\gamma), \cdots)$$

est ergodique. Soit δ l'application continue, injective, de $\mathbf{X} \times D_2$ dans $(\mathbf{X}^2)^\infty$ définie par

$$\delta(x, y_0, y_1, y_2, \cdots) := ((x, y_0), (x + \gamma, y_1), (x + 2{\cdot}\gamma, y_2), \cdots)$$

et posons $\lambda := (\mu \otimes \mu_2)\delta^{-1}$. Un calcul simple donne $\delta \circ T_\psi = (T_\varphi)^{(\infty)} \circ \delta$, d'où l'invariance et l'ergodicité de λ pour $(T_\varphi)^{(\infty)}$. D'autre part les marginales de λ sur les facteurs $\mathbf{X}^2$ sont toutes égales à $\mu \otimes \mu$. En effet, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $(n,m) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\int_{(\mathbf{X}^2)^\infty} \exp 2\pi i(n\cdot x_k + m\cdot y_k) d\lambda$$
$$= \int_{\mathbf{X} \times D_2} \exp 2\pi i(n\cdot x + m\cdot y_k + nk\cdot\gamma)\mu(dx)\mu_2(dy) = 0.$$

Ainsi $\lambda \in \mathcal{J}_\infty^e(T_\varphi)$. Soient maintenant σ le shift de $(\mathbf{X}^2)^\infty$ et S la transformation (surjective, continue) de $\mathbf{X} \times D_2$ définie par :

$$S(x, y_0, y_1, y_2, \cdots) := (x + \gamma, y_1, y_2, \cdots).$$

Alors $\sigma \circ \delta = \delta \circ S$. D'autre part S préserve la mesure de Haar $\mu \otimes \mu_2$ et un simple calcul donne $S \circ T_\psi = T_\psi \circ S$, donc $S \in C(T_\psi)$. Par suite $\sigma \in C(\lambda)$. Mais S n'est pas inversible donc σ ne l'est pas et λ n'est donc pas coalescent. ■

2.2. FACTEURS ET SOUS-GROUPES COMPACTS

Soit τ une rotation ergodique sur un groupe abélien métrisable compact Γ (qui est donc monothétique) et soit φ un cocycle défini sur Γ, à valeurs dans un groupe abélien métrisable compact G (de loi notée additivement) tel que le produit croisé $\tau_\varphi : (\gamma, g) \mapsto (\tau(\gamma), g + \varphi(\gamma))$ sur $\Gamma \times G$ soit ergodique (pour la mesure de Haar). Notons $\mathcal{C}$ (au lieu de $\mathcal{B}_\Gamma \otimes \mathcal{B}_G$) la $\sigma-$algèbre des boréliens de $\Gamma \times G$ et $\Pi : C(\tau_\varphi) \to C(\tau)$ l'homomorphisme continu obtenu par restriction au premier facteur Γ de $\Gamma \times G$. Remarquons que Π, en tant qu'application à valeurs dans son image $C_\varphi(\tau) := \Pi(C(\tau_\varphi))$, est ouverte. A tout sous-groupe L de $C(\tau_\varphi)$ nous lui associons la $\sigma-$algèbre

$$\mathcal{C}^L = \{B \in \mathcal{C}\,;\, \forall\, S \in L, S^{-1}(B) = B\}.$$

Le groupe G s'identifie à un sous-groupe compact de $C(\tau_\varphi)$ par le monomorphisme continu

$$\theta : h \mapsto \theta_h$$

où θ_h désigne la translation $(\gamma, g) \mapsto (\gamma, g + h)$ et l'on a

$$\ker \Pi = \theta(G).$$

Pour tout sous-groupe compact H de G, on posera $\mathcal{C}^H$ au lieu de $\mathcal{C}^{\theta(H)}$ et on notera $\varphi_{_H}$ le cocycle

$$\gamma \mapsto \varphi(\gamma) + H,$$

à valeurs dans le groupe quotient G/H (qui est lui aussi abélien métrisable compact). Par réduction modulo $\{0\} \times H$ toute $\sigma-$algèbre $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^H$ devient une sous-$\sigma-$algèbre de $\mathcal{C}_H := \mathcal{B}_\Gamma \otimes \mathcal{B}_{G/H}$ notée $\mathcal{E}_H$. Il est habituel d'identifier par l'application canonique $\Gamma \times G \to \Gamma \times (G/H)$ les $\sigma-$algèbres $\mathcal{C}^H$ et $\mathcal{C}_H$ ainsi que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_H$ si $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}^H$. Lorsque $A \in \mathcal{C}^H$ on notera, au besoin, A_H l'élément de $\mathcal{C}_H$ correspondant à cette identification.

Au cours des démonstrations suivantes, nous serons amenés à utiliser des résultats généraux établis dans [Le-Me] sur la correspondance entre les facteurs $\mathcal{E}$ de τ_φ et les sous-groupes suivants :

(2.9) $\qquad H(\mathcal{E}) := \{h \in G\,;\, \forall A \in \mathcal{E},\, \theta_h^{-1}(A) = A\},$

(2.10) $\qquad \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}) := \{S \in C_1(\tau_{\varphi_{H(\mathcal{E})}})\,;\, \forall A \in \mathcal{E},\, S^{-1}(A_H) = A_H\},$

où $C_1(\tau_{\varphi_H})$ est le groupe des éléments inversibles du commutant de τ_{φ_H} muni de la topologie faible. Le groupe $H(\mathcal{E})$ est compact car, de manière évidente, fermé dans G et de plus :

(2.11) *La $\sigma-$algèbre $\mathcal{C}^H$ correspond au plus petit facteur naturel contenant $\mathcal{E}$.*

Les éléments de $C(\tau_{\varphi_H})$ opèrent donc de manière naturelle sur $\mathcal{E}$ qu'ils laissent globalement invariant et l'on a [Le–Me] :

(2.12) *$\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe compact de $C_1(\tau_{\varphi_H})$, tel que :*
$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{C}^H\,;\, \forall S \in \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}),\ S^{-1}(A_H) = A_H\}.$$

La correspondance $\mathcal{E} \mapsto (H(\mathcal{E}), \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}))$ est univoque.

Nous aurons besoin de résultats supplémentaires sur $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$. Soit

$$\Pi_H : C(\tau_{\varphi_H}) \to C(\tau)$$

l'homomorphisme déterminé par la restriction au premier facteur Γ. Il est continu pour les topologies faibles sur les commutants et l'image

$$K(\mathcal{E}) := \Pi_H(\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}))$$

est donc un sous-groupe compact de $C(\tau)$.

Soit $\mathcal{E}'$ un autre facteur de τ_φ tel que

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}.$$

Il est alors évident que $H(\mathcal{E}) \subset H(\mathcal{E}')$. Notons H et H' ces groupes, respectivement associés à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Remarquons que $\mathcal{E}'_H \subset \mathcal{C}_H$, $H(\mathcal{E}'_H) = H'/H$ et, en identifiant G/H' à $(G/H)/(H'/H)$:

$$\mathcal{H}_{\varphi,H'}(\mathcal{E}') = \mathcal{H}_{\varphi_H, H'/H}(\mathcal{E}'_H).$$

Choisissons $S \in K(\mathcal{E})$ et soit $\Sigma := S_{f,v}$ un relèvement de S dans $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$. Les éléments de $\mathcal{E}'_H$ sont laissés fixes par Σ et la relation $\theta_{v(h)}\circ\Sigma = \Sigma\circ\theta_h$ vérifiée pour tout $h \in G/H$ montre que pour tout $A \in \mathcal{E}'_H(\subset \mathcal{E}_H)$ et tout $h' \in H'/H$, on a

$$\theta^{-1}_{v(h')}(A) = A.$$

Il en résulte que $v(H'/H) \subset H'/H$, de même pour v^{-1} ce qui permet de définir un isomorphisme continu de groupe

$$v' : G/H' \to G/H',$$

par passage au quotient $G/H \to G/H'$. La transformation

$$\Sigma' : (x, y') \mapsto (S(x), v'(y') + f_{H'}(x)),$$

déduite de Σ par réduction modulo $\{0\}\times(H'/H)$ sur $\Gamma\times(G/H')$ est donc dans $C(\tau_{\varphi_{H'}})$ et laisse fixes les éléments de $\mathcal{E}'_{H'}$. Cela signifie que $\Sigma' \in \mathcal{H}_{\varphi,H'}(\mathcal{E}')$, d'où en projetant dans $C(\tau)$ par $\Pi_{H'}$:

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{E} \Longrightarrow K(\mathcal{E}) \subset K(\mathcal{E}'). \tag{2.13}$$

Nous allons examiner maintenant le cas important où $H = H'$. Dans la suite, lorsque $H = \{0\}$, nous écrirons pour simplifier $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E})$ et Π respectivement au lieu de $\mathcal{H}_{\varphi,\{0\}}(\mathcal{E})$ et $\Pi_{\{0\}}$.

Lemme 2.3. *Soit H un sous-groupe compact de G et soit L un sous-groupe compact de $C_1(\tau_{\varphi_H})$. Il y a équivalence entre :*

(i) Il existe un facteur $\mathcal{E}$ de τ_φ tel que $H(\mathcal{E}) = H$ et $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}) = L$,

(ii) La restriction de Π_H à L est injective.

Dans ce cas, le facteur $\mathcal{E}$ est unique, il est donné par (2.12).

Preuve.

(i)⇒(ii) : Il faut montrer que

$$\ker(\Pi_H) \cap \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}) = \{id_{\Gamma\times(G/H)}\}.$$

Si Σ est dans cette intersection, il correspond à un relèvement de l'identité de $C(\tau)$, donc Σ est de la forme $\theta_h : (\gamma, g) \mapsto (\gamma, g + h)$, $h \in G/H$. Alors θ_h laisse fixe les éléments de $\mathcal{E}_H$ ($\subset \mathcal{B}_\Gamma\otimes\mathcal{B}_{G/H}$), ce qui signifie que h est égal à la classe H, *i.e.*, θ_h est l'identité.

(ii)⇒(i) : Le sous-groupe compact L étant donné, considérons la $\sigma-$algèbre

$$\mathcal{E}_0 := \{A \in \mathcal{B}_\Gamma\otimes\mathcal{B}_{G/H} \ ; \ \forall S \in L, S^{-1}(A) = A\}$$

et le sous-groupe

$$L_0 := \{\Sigma \in C(\tau_{\varphi_H})\ ;\ \forall\, A \in \mathcal{E}_0\,,\ \Sigma^{-1}(A) = A\}.$$

Il est clair que $L \subset L_0$ et toute la démonstration revient essentiellement à montrer l'égalité $L_0 = L$, le facteur cherché $\mathcal{E}$ étant alors l'image réciproque de $\mathcal{E}_0$ par l'application canonique $\Gamma \times G \to \Gamma \times (G/H)$. Notons tout d'abord que $\Pi_H(L_0) = \Pi_H(L)$. En effet, soit κ_1 la première projection $\Gamma \times (G/H) \to \Gamma$ et identifions Γ avec $C(\tau)$ (*i.e.*, $\gamma \in \Gamma$ identifié avec la translation $x \mapsto x + \gamma$). La $\sigma-$algèbre $\mathcal{E}_0 \cap \kappa_1^{-1}(\mathcal{B}_\Gamma)$ est par construction identique à $\kappa_1^{-1}\big((\mathcal{B}_\Gamma)^K\big)$ pour $K := \Pi_H(L)$. Il en résulte que

$$\Pi_H(L_0) = \{\gamma \in \Gamma\ ;\ \forall\, A \in (\mathcal{B}_\Gamma)^K, A - \gamma = A\}.$$

Alors pour tout $\gamma \in \Pi_H(L_0)$, la translation de γ laisse fixe tout caractère χ de Γ trivial sur K. En d'autres termes $\chi(\gamma) = 1$ et par suite, $\gamma \in K$. Ainsi $\Pi_H(L_0) \subset K$, d'où l'égalité puisque $L \subset L_0$.

Dans la suite de la démonstration, il est loisible de supposer $H = \{0\}$ (et donc $\tau_{\varphi_H} = \tau_\varphi$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ et $\Pi_H = \Pi$). Soit $M := H(\mathcal{E})$, alors $\ker(\Pi_H) \cap L_0 = \theta(M)$ et $L_0 = \theta(M)L$. Par suite, le sous-groupe L_0 de $C(\tau_\varphi)$ est compact et la démonstration se ramène à établir $M = \{0\}$. Par choix de la topologie faible sur le commutant, l'application $\Sigma \mapsto f \circ \Sigma$, de $C(\tau_\varphi)$ dans $L^1(\tilde{\mu})$ est continue pour toute application $f \in L^\infty(\tilde{\mu})$. Pour $f_i \in L^2(\tilde{\mu})$, $g_i \in L^\infty(\tilde{\mu})$, $\Sigma_i \in C(\tau)$, $i = 1, 2$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} ||f_1 \circ \Sigma_1 - f_2 \circ \Sigma_2||_2 \le 2(||f_1 - g_1||_2 + ||f_2 - g_2||_2) \\ + ||f_1 - f_2||_2 + 2||g_2||_\infty ||g_2 \circ \Sigma_1 - g_2 \circ \Sigma_2||_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Alors, de la densité de $L^\infty(\tilde{\mu})$ dans $L^2(\tilde{\mu})$ on déduit que l'application $(\Sigma, f) \mapsto f \circ \Sigma$ de $C(\tau_\varphi) \times L^2(\tilde{\mu})$ dans $L^2(\tilde{\mu})$ est continue. Il en résulte que $\mathcal{U} : \Sigma \mapsto \mathcal{U}_\Sigma$ détermine une représentation unitaire (fortement continue) de $C_1(\tau_\varphi)$, d'espace de représentation $L^2(\tilde{\mu})$. Désignons par $\mathcal{W}$ la représentation unitaire obtenue par restriction de $\mathcal{U}$ à L_0. Notons que $\mathcal{W}$ est injective. Cette représentation se décompose en une somme directe $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{W}_n$ de représentations irréductibles $\mathcal{W}_n$ (cf. par exemple, [Hew–Ro]). Soit E_n l'espace de représentation de $\mathcal{W}_n$ de telle sorte que $L^2(\tilde{\mu}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} E_n$. Si toutes les représentations $\mathcal{W}_n$ sont triviales sur

$\theta(M)$, il en est de même pour $\mathcal{W}$ et par suite $M = \{0\}$. Plaçons nous dans le cas contraire et soit $\mathcal{W}_n$ non triviale sur $\theta(M)$. La restriction W de $\mathcal{W}_n$ à L admet E_n comme espace de représentation. Comme L est abélien, W se décompose en une somme de représentations de dimension 0 ou 1. En particulier, il existe n, $u \in E_n$, $u \neq 0$ et un caractère ψ de K tels que $W(\Sigma)(u) = \psi\circ\Pi(\Sigma)u$ pour tout $\Sigma \in L$. Soit Ψ un caractère de Γ dont la restriction à K coïncide avec ψ. Introduisons l'isométrie V_Ψ de $L^2(\tilde{\mu})$ définie par $V_\Psi(f)(x,y) := \Psi(x)f(x,y)$. La représentation conjuguée $V_\Psi W V_\Psi^{-1}$ laisse donc u fixe. D'autre part, pour tout $g \in G$ on a $V_\Psi \mathcal{U}_{\theta_g} V_\Psi^{-1} = \mathcal{U}_{\theta_g}$, ce qui montre en particulier que la représentation irréductible $V_\Psi \mathcal{W}_n V_\Psi^{-1}$ n'est pas triviale sur $\theta(M)$. Il existe alors $m \in M$ tel que $u\circ\theta_m \neq u$. En d'autres termes $V_\Psi^{-1}(u)\circ\Sigma = V_\Psi^{-1}(u)$ pour tout $\Sigma \in L$ et $V_\Psi^{-1}(u)\circ\theta_m = V_\Psi^{-1}(u\circ\theta_m) \neq V_\Psi(u)$. Par suite, il existe $A \in \mathcal{E}$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}^{L_0}$, en contradiction avec la définition de L_0. Ainsi $M = \{0\}$, $H(\mathcal{E}) = \{0\}$ et $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}) = L$, ce qui démontre *(i)*. ∎

Le Lemme 2.3 admet les conséquences immédiates suivantes :

Corollaire 2.1. *Soit $\mathcal{E}$ un facteur de τ_φ. Posons $H := H(\mathcal{E})$ et notons $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ l'ensemble des facteurs $\mathcal{L}$ de τ_φ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{C}^H$. Alors l'application $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{L})$ est une bijection décroissante (pour l'inclusion) entre $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ et l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$. De plus, pour toute famille $\mathcal{L}_i$ de facteurs dans $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ on a*

$$\mathcal{H}_{\varphi,H}\big(\bigvee\nolimits_i \mathcal{L}_i\big) = \bigcap\nolimits_i \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{L}_i).$$

En particulier, soit L un sous-groupe compact de $C(\tau_\varphi)$ et soit $\mathcal{L}$ le facteur de τ_φ formé des boréliens invariants par L. Si $H(\mathcal{L}) = \{0\}$, alors $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{L}) = L$.

Choisissons maintenant deux facteurs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de τ_φ, isomorphes par $F : \mathcal{E}_2' \to \mathcal{E}_1'$, où $\mathcal{E}_i'$ désigne la $\sigma-$algèbre complétée de $\mathcal{E}_i$ par rapport à $\tilde{\mu}$. Soit $L^2(\mathcal{E}_i,\tilde{\mu})$ le sous-espace des applications $\mathcal{E}_i'-$mesurables dans $L^2(\tilde{\mu})$. Notons Φ l'isométrie de $L^2(\mathcal{E}_2,\tilde{\mu})$ sur $L^2(\mathcal{E}_1,\tilde{\mu})$ définie par F. Posons $H_i := H(\mathcal{E}_i)$, $i = 1,2$ et définissons le 2-autocouplage λ de τ_φ par

$$\lambda(A_1\times A_2) := \int_{\Gamma\times G} E(A_1\,||\,\mathcal{E}_1)\Phi(E(A_2\,||\,\mathcal{E}_2))d\tilde{\mu}.$$

Soit Λ la mesure de décomposition ergodique de λ sur $\mathcal{J}_2^e(\tau_\varphi)$ donnée par (0.12). Puisque pour tous boréliens A, B, on a $\lambda((A\times B^c)\cup(A^c\times B)) = 0$ si et seulement si $A \in \mathcal{E}_1$, $B \in \mathcal{E}_2$ et $F(B) = A$, on en déduit la même caractérisation pour Λ−presque tout $\ell \in \mathcal{J}_2^e(\tau_\varphi)$. Il en résulte que

$$H_1 = \{h \in G\,;\ \ell\circ(\theta_h\otimes\theta_0)^{-1} = \ell\}$$

et

$$H_2 = \{h \in G\,;\ \ell\circ(\theta_0\otimes\theta_h)^{-1} = \ell\}.$$

Λ−presque partout. D'après [Le–Me], pour un tel auto-couplage ℓ, il existe un automorphisme U_ℓ de $\tau_{\varphi_{H_1}}$ sur $\tau_{\varphi_{H_2}}$ tel que

$$\ell(A_1\times A_2) = \int_{\Gamma\times(G/H_1)} E(A_1||\mathcal{C}^{H_1})(E(A_2||\mathcal{C}^{H_2}))\circ U_\ell\, d(\mu_\Gamma\otimes\mu_{G/H_1}).$$

En tenant compte du lemme précédent on obtient :

Corollaire 2.2. *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux facteurs de τ_φ. Posons $H_i := H(\mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2$. Alors :*
(a) $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme U de $\tau_{\varphi_{H_1}}$ sur $\tau_{\varphi_{H_2}}$ tel que

$$U\,\mathcal{H}_{\varphi,H_1}(\mathcal{E}_1)\,U^{-1} = \mathcal{H}_{\varphi,H_2}(\mathcal{E}_2).$$

(b) En particulier, si $H_1 = H_2 = H$, les facteurs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes $\mathcal{H}_{\varphi,H_1}(\mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{H}_{\varphi,H_2}(\mathcal{E}_2)$ sont conjugués dans $C(\tau_{\varphi_H})$.

Comme conséquence, nous en déduisons le critère de non coalescence suivant :

Corollaire 2.3. *L'extension (ergodique) τ_φ est non coalescente si et seulement si il existe un facteur naturel strict τ_{φ_H} isomorphe à τ_φ.*

Ce résultat est banal si $G = \mathbf{X}$. Dans le cas général, considérons un élément non inversible $\Sigma : (x, y) \mapsto (x + \beta, v(y) + f(x))$ dans $C(\tau_\varphi)$. Alors le sous-groupe $H := \ker(v)$ n'est pas trivial et $H = H(\Sigma^{-1}(\mathcal{C}))$, d'où l'existence d'un isomorphisme U de τ_{φ_H} sur τ_φ par le corollaire précédent. Réciproquement, un tel isomorphisme fournit un élément non inversible de $C(\tau_\varphi)$, à savoir $(x, y) \mapsto U(x, y + H)$.

Examinons maintenant le cas particulier d'un facteur $\mathcal{E}$ de τ_φ, tel que

$$K(\mathcal{E}) = C(\tau).$$

Posons $H := H(\mathcal{E})$. Le facteur naturel τ_{φ_H} est alors à spectre discret ; cela résulte du fait que si Π_H^* désigne la restriction de Π_H à $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$ alors ${\Pi_H^*}^{-1}$ réalise un relèvement continu de $C(\tau)$ dans $C(\tau_{\varphi_H})$ et du lemme général suivant :

Lemme 2.4. *S'il existe un relèvement de $C(\tau)$ dans $C(\tau_\varphi)$ par un monomorphisme continu de groupe, alors τ_φ est à spectre discret.*

Preuve : Soit p le relèvement continu de $C(\tau)$ dans $C(\tau_\varphi)$. Alors $p(\alpha)$ est de la forme $\tau_\varphi \circ \theta_k$ pour un certain $k \in G$. Ainsi $p(\alpha)$ et θ_h commutent-ils pour tout $h \in G$. La continuité de p et la densité de la suite $(n\alpha)_n$ dans Γ montrent alors que $p(u)$ commute avec θ_h pour tout $u \in \Gamma$ et tout $h \in G$. Il en résulte que $\Gamma \times G$ est isomorphe à $C(\tau_\varphi)$ par l'application $(u, h) \mapsto p(u) \circ \theta_h$. En particulier $C(\tau_\varphi)$ est compact, contient τ_φ, donc τ_φ est à spectre discret. ∎

2.3. PRODUITS CROISÉS RÉGULIERS

Soit $\tau_\varphi : \Gamma\times G \to \Gamma\times G$ le produit croisé envisagé dans la section précédente. Remarquons que par ergodicité du cocycle φ, le seul automorphisme continu v de G tel que $v\circ\varphi$ soit τ cohomologue à φ est l'automorphisme identité. Nous dirons que l'extension τ_φ est ***régulière*** si quels que soient les sous-groupes compacts distincts H_1, H_2 de G, les facteurs naturels correspondants $\tau_{\varphi_{H_1}}$ et $\tau_{\varphi_{H_2}}$ ne sont pas isomorphes. D'après le Corollaire 2.3 toute extension régulière ergodique est coalescente.

Exemples. Pour une extension de Anzai ergodique T_φ, on sait que deux facteurs naturels distincts $T_{k\cdot\varphi}$, $T_{l\cdot\varphi}$ ($|k| \neq |l|$, k, $l \in \mathbf{Z}^*$) sont isomorphes si et seulement si, il existe une rotation S sur le tore et $\varepsilon = \pm 1$, tels que le cocycle $k\cdot\varphi\circ S + \varepsilon l\cdot\varphi$ soit un $T-$cobord. Il en résulte que T_φ est régulière si et seulement si l'un ses facteurs naturels est régulier. Il en est alors ainsi de tous les facteurs naturels. En particulier, s'il existe un entier non nul k tel que $k\cdot\varphi$ soit cohomologue à un cocycle affine, alors T_φ est régulier.

D'autres exemples de produits croisés de Anzai T_φ ergodiques réguliers ont été obtenus dans la première partie avec :

– les cocycles φ absolument continus, de degré topologique non nul (Corollaire 1.3),

– les cocycles φ en escalier, $\alpha-$discontinus, bien $\alpha-$séparés et ergodiques, dans le cas où T est une rotation $x \mapsto x + \alpha$ avec α à quotients partiels bornés (Corollaire 1.8).

Un sous-groupe L de $C(\tau_\varphi)$ sera dit ***réduit*** si le sous-groupe trivial est le seul sous-groupe de L qui soit sous-groupe invariant de $C(\tau_\varphi)$. Cette notion se justifie par la caractérisation suivante :

Proposition 2.3. *Supposons l'extension τ_φ régulière et soit $\Pi : C(\tau_\varphi) \to C(\tau)$ l'homomorphisme obtenu par restriction au premier facteur Γ. Pour tout facteur strict $\mathcal{E}$ de τ_φ, on a :*

$$\mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau_\varphi) \quad\Longleftrightarrow\quad H(\mathcal{E}) = \{0\} \quad \& \quad \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}) \quad \textit{est réduit.}$$

Dans ce cas, le groupe compact

$$K(\mathcal{E}) := \Pi(\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}))$$

est un sous-groupe strict de $C(\tau)$. En particulier, l'application $\mathcal{E} \mapsto K(\mathcal{E})$ établit une correspondance biunivoque entre $\mathcal{A}(\tau_\varphi)$ et les sous-groupes compacts stricts K de $C(\tau)$ qui se relèvent (par Π^{-1}) en sous-groupes compacts réduits L de $C(\tau_\varphi)$ (sur chacun desquels Π est injective).

Preuve : Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau_\varphi)$ $\mathcal{E} \neq \mathcal{C}$. Il existe un auto-couplage λ du facteur $(\tau_\varphi)_{\mathcal{E}}$, isomorphe à τ_φ. Alors λ détermine une famille $(\mathcal{E}_i)_i$ au plus dénombrable de facteurs de τ_φ, tous isomorphes à $\mathcal{E}$ et qui engendre la $\sigma-$algèbre $\mathcal{C}$. Les facteurs naturels $\mathcal{C}^{H_i}$ associés aux $\mathcal{E}_i$ ($H_i = H(\mathcal{E}_i)$) sont isomorphes entre eux (Corollaire 2.2). Par hypothèse sur τ_φ, ils sont tous identiques à $\mathcal{C}^H$ avec $H = H(\mathcal{E})$; par suite $H = \{0\}$. Par ailleurs, $K(\mathcal{E})$ est distinct de $C(\tau)$ sinon, d'après le Lemme 2.4, τ_φ est à spectre discret et alors $\mathcal{A}(\tau_\varphi) = \{\mathcal{C}\}$. Mais $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ est exclu. $K(\mathcal{E}) = \{id\}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ un facteur strict de τ_φ tel que $H(\mathcal{E}) = \{0\}$ et supposons $L := \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E})$ réduit. D'après le Lemme 2.3, Π est injectif sur L. Considérons maintenant une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ dense dans $C(\tau_\varphi)$. Le sous-groupe

$$(\bigcap_{n\geq 0} S_n L S_n^{-1}) \cap L$$

est alors invariant dans $C(\tau_\varphi)$, donc trivial. De manière évidente, Π est injectif sur $L_n := S_n L S_n^{-1}$ et par le Corollaire 2.2, les facteurs $\mathcal{E}_n$ correspondants aux groupes L_n sont isomorphes à $\mathcal{E}$. D'après le Corollaire 2.1, $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(\tau_\varphi)$. Le reste de la proposition est immédiat. ■

Il est naturel de chercher à quelle condition le produit croisé τ_φ peut se représenter comme un auto-couplage $n-$essentiel ($1 < n \leq \infty$) d'un produit analogue *plus simple*. Lorsque $\mathcal{A}(\tau_\varphi) = \{\mathcal{C}\}$ le problème n'a pas de solution. Etudions le cas d'un cocycle affine de degré $d \neq 0$. Le commutant est connu, sa structure de groupe ne dépend que du degré et pas de la rotation T; elle va nous servir pour établir le résultat suivant :

Proposition 2.4. *Soit φ un cocycle $T-$cohomologue à un cocycle affine $x \mapsto d{\cdot}x + c$, $d \in \mathbf{Z}$, $|d| > 1$, et soit ψ le cocycle $x \mapsto x + c$. Alors T_φ est isomorphe à un auto-couplage $2-$essentiel de $(T^d)_\psi$.*

En d'autres termes, les cocycles affines de degré 1 génèrent par $2-$auto-couplages tous les cocycles affines de degré quelconque non nul.

Preuve. Supposons le cocycle φ égal au cocycle affine $x \mapsto d{\cdot}x + c$, $|d| \geq 2$. La transformation

$$U: \ (x, y) \mapsto (x + \frac{\alpha}{d}, y + x)$$

de $\mathbf{X}^2$ appartient au commutant de T_φ. Introduisons la transformation F_d : $\mathbf{X}^2 \to \mathbf{X}^2$ définie par $F_d(x, y) := (d{\cdot}x, y)$ de $\mathbf{X}^2$. Un calcul direct montre que l'application

$$\Phi_d : (x, y) \mapsto (F_d(x, y), F_d{\circ}U(x, y))$$

vérifie

$$\Phi_d{\circ}T_\varphi = \big((T^d)_\psi{\times}(T^d)_\psi\big){\circ}\Phi_d,$$

où ψ est le cocycle $x \mapsto x+c$. Soient $\tilde{\mu}$ la mesure de Haar sur $\mathbf{X}^2$ et $\lambda = \tilde{\mu}{\circ}\Phi_d^{-1}$ sa mesure image par Φ_d sur $\mathbf{X}^2 \times \mathbf{X}^2$. On vérifie facilement que λ a pour support $\mathbf{Y} = \Phi_d(\mathbf{X}^2)$, Φ_d est inversible sur $\mathbf{Y}$ et $(T^d)_\psi{\times}(T^d)_\psi(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$. De plus les projections de λ sur le premier et le second facteur de $\mathbf{X}^2{\times}\mathbf{X}^2$ sont égales à $\tilde{\mu}$. Il en résulte finalement que λ est un auto-couplage de $(T^d)_\psi$, isomorphe à $(T_\varphi, \tilde{\mu})$. Il est $2-$essentiel puisque la $\sigma-$algèbre $F_d^{-1}(\widetilde{\mathcal{B}})$ est distincte modulo les parties $\tilde{\mu}-$négigeables de $\widetilde{\mathcal{B}}$. ∎

Remarque 2.4. Nous avons donné une démonstration constructive de la proposition précédente. Il est possible de la déduire à partir de la Proposition 2.3. En effet, le sous-groupe cyclique d'ordre d dans $\mathbf{X}$ se relève dans $C(\tau_\varphi)$ en le sous-groupe L de même ordre, engendré par la translation $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/d, y)$. Ce sous-groupe est réduit. En effet, en reprenant la transformation $U \in C(\tau_\varphi)$, définie au cours de la démonstration précédente, on trouve $U\sigma^k U^{-1} = \sigma^k \theta_{k/d}$ d'où $L \cap (ULU^{-1}) = \{id\}$. Le Lemme 2.3 et la Proposition 2.3, montrent alors que la $\sigma-$algèbre

$$\mathcal{E}_0 := \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\ \forall S \in L, S^{-1}(A) = A\}$$

appartient à $\mathcal{A}(\tau_\varphi)$. Notons que $\mathcal{E}_0$ correspond exactement au facteur $(x, y) \mapsto (d{\cdot}x, y)$ introduit précédemment.

2.4. CHAÎNES STATIONNAIRES DE FACTEURS ET AUTO-COUPLAGES ESSENTIELS

Nous allons donner une réponse négative à la *Question 2*. Dans ce but, nous considérons les groupes abéliens métrisables compacts Γ ayant la propriété de *chaîne décroissante stationnaire* suivante :

(CD) *Pour toute suite décroissante de sous-groupes compacts $\Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \cdots$ de Γ, il existe un rang k tel que $\Gamma_i = \Gamma_k$ pour tout rang $i \geq k$.*

Notons que ces groupes appartiennent, à un isomorphisme topologique près, à la famille des groupes de la forme $\mathbf{X}^d \times F$, où $\mathbf{X}^d$ est le tore de dimension d et F un groupe abélien fini. Nous avons le résultat général suivant :

Proposition 2.5. *Soient Γ et G deux groupes abéliens métrisables compacts satisfaisant à l'hypothèse (CD). Soient τ une rotation ergodique sur Γ et $\varphi : \Gamma \to G$ un G-cocycle tel que le produit croisé τ_φ soit ergodique. Alors toute chaîne croissante de facteurs de τ_φ est stationnaire à partir d'un certain rang.*

Preuve. Soit $(\mathcal{E}_i)_i$ une suite croissante de facteurs du produit croisé τ_φ. Posons $H_i = H(\mathcal{E}_i)$ et $\mathcal{C}_i$ le plus petit facteur naturel contenant $\mathcal{E}_i$. La croissance de $(\mathcal{E}_i)_i$ entraîne la croissance de $(\mathcal{C}_i)_i$ et la décroissance de la suite $(K_i)_i$ des sous-groupes compacts $K_i = K(\mathcal{E}_i)$ de $C(\tau)$ (identifié à Γ, cf.(2.13)). Il existe donc i_0 tel que $H_i = H_{i_0}$ et $K_i = K_{i_0}$ pour tout $i \geq i_0$. Comme $\mathcal{E}_{i_0} \subset \mathcal{E}_i$ pour $i \geq i_0$ on en déduit en fait l'égalité $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i_0}$ d'après le Lemme 2.3. ■

Dans le cas particulier des produits de Anzai, la proposition précédente peut être renforcée. Dans ce but introduisons la *fonction arithmétique* classique Ω définie par $\Omega(1) := 0$, et $\Omega(n) := \nu_1 + \cdots + \nu_k$, si $p_1{}^{\nu_1} \cdots p_k{}^{\nu_k}$ est la décomposition de n en facteurs premiers. Tout groupe cyclique H d'ordre h ayant un sous-groupe (et un seul) d'ordre d diviseur de h, il en résulte que le nombre maximum de sous-groupes distincts de H formant une chaîne croissante pour l'inclusion est égal à $\Omega(h) + 1$. Nous utiliserons également par la suite la fonction arithmétique ω définie par $\omega(n) = k$ (et $\omega(1) := 0$). Notons que $\omega(n) = 1$ signifie que n est *primaire*. On posera aussi $\Omega(\infty) = \omega(\infty) := \infty$ par convention.

Proposition 2.6. *Soit T_φ un produit de Anzai ergodique. Alors, pour tout $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(T_\varphi)$, de sous-groupes compacts associés $H(\mathcal{E})$ et $K(\mathcal{E})$, d'ordres respectifs h et k, on a*

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}) = \Omega(h) + \Omega(k) + 1. \tag{2.14}$$

En outre, il n'existe qu'un nombre fini de facteurs $\mathcal{E}'$ de T_φ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \widetilde{\mathcal{B}}$.

Preuve. Si le produit de Anzai T_φ est à spectre discret, on sait déjà que $\mathcal{A}(T_\varphi)$ se réduit à la $\sigma-$algèbre $\widetilde{\mathcal{B}}$ des boréliens de $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$, et que $\mathbf{chl}(\widetilde{\mathcal{B}}) = \mathbf{jd}(\widetilde{\mathcal{B}}) = 1$. Supposons donc T_φ à spectre non discret. Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(T_\varphi)$ et posons $H := H(\mathcal{E})$, $K := K(\mathcal{E})$. Si $H = \mathbf{X}$, alors $\widetilde{\mathcal{B}}^H$ est le facteur $\mathcal{B} \otimes \mathbf{X}$ déterminé par T de sorte que T_φ est isomorphe à un auto-couplage infini d'un facteur de T, donc est à spectre discret, ce qui est exclu. Si $K = C(T)$, comme on l'a vu précédemment (Lemme 2.4), T_{φ_H} est à spectre discret ; de nouveau T_φ est à spectre discret, car isomorphe à un auto-couplage infini d'un facteur de T_{φ_H}, ce qui est exclu. Les sous-groupes H et K associés à $\mathcal{E}$ sont donc des sous-groupes compacts stricts de $\mathbf{X}$ et $C(T)$ (identifié à $\mathbf{X}$). Ils sont donc cycliques finis. Pour tout facteur intermédiaire $\mathcal{E}'$ de T_φ, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \widetilde{\mathcal{B}}$, le sous-groupe $H' := H(\mathcal{E}')$ est un sous-groupe de H et le sous-groupe $K' := K(\mathcal{E}')$ est un sous-groupe de K d'après (2.13). L'injectivité de $\mathcal{E}' \mapsto K'$ sur l'ensemble des facteurs $\mathcal{E}'$, contenant $\mathcal{E}$ tels que $H' = H$ montre que ces $\sigma-$algèbres $\mathcal{E}'$ sont en nombre fini et fournit la majoration :

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}) \leq \Omega(h) + \Omega(k) + 1,$$

où h est l'ordre de H et k celui de K.

Montrons l'égalité. Soit une chaîne strictement croissante

$$\{0\} = H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n = H$$

de sous-groupes de H (d'ordre h), de longueur maximale $n = \Omega(h) + 1$. Faisons de même avec K :

$$\{0\} = K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m = K$$

et $m = \Omega(k)+1$. Notons Π_H^* la restriction de Π_H à H et considérons maintenant la suite des couples de groupes :

$$(H_1, \{id\}), \cdots, (H_n, \{id\}),\ (H, {\Pi_H^*}^{-1}(K_2)), \cdots, (H, {\Pi_H^*}^{-1}(K_m))).$$

Au couple $(H_i, \{id\})$ correspond le facteur naturel $\widetilde{\mathcal{B}}^{H_i}$ de T_φ et au couple $(H, \Pi_H^{*\,-1}(K_j))$ correspond le facteur

$$\mathcal{E}_j = \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}^H\,;\, \forall S \in \Pi_H^{*\,-1}(K_j),\, S^{-1}(A_H) = A_H\}.$$

On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_j \subset \widetilde{\mathcal{B}}^H$. Donc $\widetilde{\mathcal{B}}^H$ est aussi le plus petit facteur contenant $\mathcal{E}_j$ et par le Lemme 2.3 on a

$$\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}_j) = \Pi_H^{*\,-1}(K_j).$$

Ainsi la chaîne de facteurs (avec $\widetilde{\mathcal{B}}^{H_1} = \widetilde{\mathcal{B}}$, $\widetilde{\mathcal{B}}^H = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}$))

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{m-1} \subset \cdots \subset \mathcal{E}_2 \subset \widetilde{\mathcal{B}}^H \subset \widetilde{\mathcal{B}}^{H_{n-1}} \subset \cdots \subset \widetilde{\mathcal{B}}^{H_2} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$$

est stricte, de longueur maximale $\Omega(h) + \Omega(k) + 1$. D'où le résultat. ∎

Corollaire 2.4. *Aucun produit de Anzai ergodique n'est isomorphe à un auto-couplage $\infty-$essentiel.*

Remarque 2.5. On sait qu'il existe des produits de Anzai non coalescents [Le–Li]. La réponse à la *Question 2* est donc négative dans ce cas.

Affaiblissons maintenant la notion d'auto-couplage $\infty-$essentiel. Soit τ un automorphisme ergodique de $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ et soit $\lambda \in \mathcal{J}_\infty^e(\tau)$. On dira que λ est *faiblement $\infty-$essentiel* si les sous-$\sigma-$algèbres $pr_i^{-1}(\mathcal{C})$ sont, modulo les parties $\lambda-$négligeables, distinctes deux à deux. Pour qu'un produit croisé de Anzai soit isomorphe à un auto-couplage faiblement $\infty-$essentiel, on dispose du résultat suivant :

Proposition 2.7. *Soit T_φ un produit croisé de Anzai ergodique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'automorphisme $y \mapsto -y$ se relève en un élément σ de $C(T_\varphi)$ d'ordre 2 (de la forme $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y + f(x))$.

(ii) Il existe un sous-groupe compact L de $C(T_\varphi)$ et une suite $L_0 = L, L_1, L_2, \ldots$ de conjugués de L tous distincts, telle que $\bigcap_{n\geq 0} L_n = \{e\}$ $(e = id_{\mathbf{X}^2})$.

De plus, chacune de ces conditions implique :

(iii) T_φ est isomorphe à un auto-couplage faiblement $\infty-$essentiel (et aussi isomorphe à un auto-couplage $2-$essentiel).

Enfin, dans le cas où T_φ est régulier, les trois conditions (i), (ii), (iii), sont équivalentes.

Preuve. Supposons *(i)*, alors σ donné par *(i)* vérifie : $\sigma^2 = e := id_{\mathbf{X}^2}$ et $\sigma\theta_c = \theta_{-c}\sigma$ pour toute translation $\theta_c : (x,y) \mapsto (x, y+c)$, $c \in \mathbf{X}$. Le sous-groupe $L := \{e, \sigma\}$ a tous ses conjugués de la forme $L_a := \{e, \theta_a\sigma\}$ d'où *(ii)*.

Supposons *(ii)* et soit $\Pi : C(T_\varphi) \to C(T)$ l'homomorphisme de restriction au premier facteur de $\mathbf{X}^2$. Pour tout $\Sigma \in C_1(T_\varphi)$ et $c \in \mathbf{X}$, on a $\Sigma\theta_c = \theta_c\Sigma$ ou $\Sigma\theta_c = \theta_{-c}\Sigma$, selon que Σ est un relèvement de l'automorphisme $id_{\mathbf{X}}$ ou $-id_{\mathbf{X}}$. Il en résulte que pour tout sous-groupe L de $C(T_\varphi)$, le sous-groupe $L \cap \Pi^{-1}(id_{\mathbf{X}})$ est invariant. Si L vérifie *(ii)*, cela implique $L' \cap \Pi^{-1}(id_{\mathbf{X}}) = \{e\}$ pour tous les conjugués L' de L. En particulier $\Pi_{|L} : L \to \Pi(L)$ est un isomorphisme (continu) de groupes. Par ailleurs $C_0 := \Pi(L) = \Pi(L')$ pour tout conjugué L' de L. Supposons $C_0 = C(T)$, alors ${\Pi_{|L}}^{-1}$ détermine un relèvement continu de $C(T)$ dans $C(T_\varphi)$ dont l'image L est un groupe. D'après le Lemme 2.4, T_φ est alors à spectre discret ; $C(T_\varphi)$ est commutatif, ce qui exclut la propriété *(ii)*. Ainsi, C_0 est un sous-groupe cyclique fini de $C(T)$. Notons q son ordre et σ un générateur de L. Pour tout $U \in C_1(T_\varphi)$ il existe $u \in \mathbf{X}$ tel que :

$$U\sigma U^{-1} = \sigma\theta_u.$$

Supposons que σ commute avec les translations θ_c. Alors on a $e = U\sigma^q U^{-1} = \sigma^q\theta_{q\cdot u} = \theta_{q\cdot u}$, donc $q\cdot u = 0$, de sorte que L n'a qu'un nombre fini de conjugués distincts. Ce cas est exclu. C'est donc que σ anti-commute avec les translations et correspond ainsi à un relèvement de l'automorphisme $y \mapsto -y$. Alors, pour tout $U \in C_1(T_\varphi)$, on a : $U\sigma U^{-1} = \sigma\theta_u$ et $U\sigma^2 U^{-1} = \sigma^2$. Il en résulte que q est pair et que le sous-groupe des carrés $L^{(2)} = \{\sigma^{2k}\,;\, k = 0, \cdots, q/2\}$ est commun à tous les conjugués de L. La propriété *(ii)* implique donc $L^{(2)} = \{e\}$ et par suite $\sigma^2 = e$, σ étant de la forme requise par *(i)*.

Montrons l'implication *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Soit $L = \{e, \sigma\}$ et pour tout $a \in \mathbf{X}$ notons $L_a = \{e, \theta_a\sigma\}$, $\mathcal{E}_a = \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\, (\theta_a\sigma)^{-1}(A) = A\}$. Rappelons que $\theta_a\sigma = \sigma\theta_{-a}$. Les sous-groupes L_a sont conjugués de L et vérifient (cf. Lemme 2.3)

$$H(\mathcal{E}_a) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}_a) = L_a,$$

ce qui montre que $\mathcal{E}_a \neq \mathcal{E}_b$ et $\mathcal{E}_a \vee \mathcal{E}_b = \widetilde{\mathcal{B}}$ pour $a \neq b$. Maintenant les constructions d'un auto-couplage $2-$essentiel et d'un auto-couplage faiblement $\infty-$essentiel du facteur $\mathcal{E}_0$ qui soient isomorphes à T_φ sont banales.

Démontrons pour finir *(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)* lorsque l'extension T_φ est régulière. De *(iii)* il résulte qu'il existe une infinité de facteurs $\mathcal{E}_i$ de T_φ isomorphes entre eux, de groupes compacts associés $H(\mathcal{E}_i)$ tous égaux à $\{0\}$ d'après la Proposition 2.3 et les sous-groupes compacts $L_i := \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}_i)$ sont conjugués entre eux dans $C(T_\varphi)$; leur intersection se réduit au groupe trivial $\{e\}$ (Corollaire 2.1). ■

Des exemples de cocycles ayant la propriété *(i)* de la proposition précédente sont donnés dans [Le-Li] (Théorème 2). Les cas les plus simples correspondent à des cocycles de la forme

$$\gamma(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ \rho & \text{si } 1/2 \leq x < 1, \end{cases}$$

avec les rotations $T : x \mapsto x + \alpha$, où α est à quotients partiels bornés. Cette dernière restriction peut être levée, ici. Pour ce qui nous intéresse, avec $\rho = 2\alpha$, on obtient $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y + 2x)$ dans $C(T_\varphi)$, $\sigma^2 = id_{\mathbf{X}^2}$. Ainsi T_γ vérifie *(i)*.

2.5. CALCUL DES INVARIANTS $\mathbf{jd}(T_\varphi)$ ET $\mathbf{chl}(T_\varphi)$

Nous terminerons cette étude en examinant les invariants $\mathbf{chl}(T_\varphi)$ et $\mathbf{jd}(T_\varphi)$ pour certains cocycles φ. Supposons l'extension de Anzai T_φ ergodique et coalescente. On sait que tout élément Σ du commutant s'écrit sous la forme

$$\Sigma : (x,y) \mapsto (Sx, \varepsilon(\Sigma)y + f_S(x))$$

où f_S est un cocycle et $\varepsilon(\Sigma) = \pm 1$. La projection $\Pi : \Sigma \mapsto S$ et l'application $\Sigma \mapsto \varepsilon(\Sigma)$ sont des homomorphismes continus de groupes. De plus, $\varepsilon(\Sigma)$ ne dépend que de S ([Le-Li], Lemme 2). On posera donc aussi $\varepsilon(S) = \varepsilon(\Sigma)$ ce qui définit un homomorphisme (continu) de groupe $S \mapsto \varepsilon(S)$ de $C_\varphi(T) := \Pi(C(T_\varphi))$ dans $\{\pm 1\}$. On dit que S et $y \mapsto \varepsilon_0 y$ (ou simplement ε_0, $\varepsilon_0 \in \{\pm 1\}$) se relèvent dans $C(T_\varphi)$ par Σ lorsque $\Pi(\Sigma) = S$ et $\varepsilon(\Sigma) = \varepsilon_0$. Considérons maintenant le sous-groupe

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0(T_\varphi) := \{a \in \mathbf{X};\, \exists\, q \in \mathbf{N}, \exists\, A \in C(T_\varphi),\ \varepsilon(A) = +1,\\ q{\cdot}a = 0\ \ \&\ \ \Pi(A) \textit{ est la rotation }\ x \mapsto x + a\}.\end{aligned}$$

Il sera habituel d'identifier $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ avec le sous-groupe des translations correspondantes dans $C(T)$. Si q est l'ordre de a dans $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$, alors $\varepsilon(A) = +1$ pour tout relèvement A de a dans $C(T_\varphi)$ et A^q est un relèvement de la translation identité, donc de la forme $\theta_g : (x,y) \mapsto (x, y+g)$. Soit $h \in \mathbf{X}$ tel que $q{\cdot}h = -g$, alors $A{\circ}\theta_h$ est un relèvement de a d'ordre *exactement* q.

Théorème 2.4. *Soit T_φ un produit croisé de Anzai ergodique et régulier. Alors pour tout facteur $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(T_\varphi)$, $\mathcal{E} \neq \widetilde{\mathcal{B}}$, on a :*

(i) Ou bien T_φ n'a qu'un nombre fini de facteurs isomorphes à $\mathcal{E}$ et, dans ce cas, le groupe

$$\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}) := \{\Sigma \in C(T_\varphi)\ :\ \forall\, A \in \mathcal{E},\ \Sigma^{-1}(A) = A\}$$

est isomorphe (par la restriction de Π) à un sous-groupe compact (ici, cyclique fini) de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$, d'ordre $q \geq 2$, et

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}) = 1 + \Omega(q),\ \mathbf{jd}(\mathcal{E}) \leq \max\{2, \omega(q)\}.$$

(ii) Ou alors T_φ admet une infinité de facteurs distincts isomorphes à $\mathcal{E}$ et -1 se relève dans $C(T_\varphi)$ en un élément σ d'ordre 2 et il existe $g \in \mathbf{X}$ tel que :

$$\mathcal{E} = \theta_g \mathcal{E}_0$$

avec

$$\mathcal{E}_0 := \{A \in \widetilde{\mathcal{B}};\ \sigma(A) = A\}, \quad \theta_g : (x,y) \mapsto (x, y+g)$$

et l'on a

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}) = \mathbf{jd}(\mathcal{E}) = 2.$$

(iii) Dans le cas où -1 se relève dans $C(T_\varphi)$ en un élément d'ordre 2 et si l'on note r l'ordre (fini ou non) de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$, on a :

$$\mathbf{chl}(T_\varphi) = \max\{2, 1+\Omega(r)\}, \quad \mathbf{jd}(T_\varphi) = 2$$

et si r est fini, il est impair.

Preuve. Rappelons que T_φ est coalescent car régulier. Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{A}(T_\varphi)$ avec $\mathcal{E} \neq \widetilde{\mathcal{B}}$. D'après la Proposition 2.3 on a $H(\mathcal{E}) = \{0\}$ et $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E})$ forme un sous-groupe cyclique fini de $C(T_\varphi)$ isomorphe (par Π et identification de $C(T)$ avec $\mathbf{X}$) à un sous-groupe de $\mathbf{X}$ (strict et compact). Notons pour la suite $L := \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E})$ et q l'ordre de L ($q \geq 2$ car $\mathcal{E} \neq \widetilde{\mathcal{B}}$). Soit Σ un générateur de L. Pour tout $U \in C(T_\varphi)$ il existe une translation de $\mathbf{X}^2$, $\theta_u : (x,y) \mapsto (x, y+u)$, $u \in \mathbf{X}$, telle que

$$U\Sigma U^{-1} = \Sigma\theta_u. \tag{2.15}$$

Etudions les facteurs $\mathcal{E}'$ de T_φ isomorphes à $\mathcal{E}$. Vu les hypothèses faites sur les facteurs naturels de T_φ, ils vérifient $H(\mathcal{E}') = \{0\}$ et les sous-groupes $\mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}')$ sont conjugués entre eux (Corollaire 2.2). Ce sont exactement les conjugués de L dans $C(T_\varphi)$ et la correspondance $\mathcal{E}' \mapsto \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}')$ est biunivoque.

Démonstration de (i) et (ii).
Nous allons montrer que le cas *(i)* (resp. *(ii)*) correspond à $\varepsilon(\Sigma) = +1$ (resp. $\varepsilon(\Sigma) = -1$). Nous étudions ces deux possibilités.

1ercas : $\varepsilon(\Sigma) = +1$. Cette condition assure $\Pi(L) \subset \mathbf{X}_0(T_\varphi)$ et la restriction $\Pi_{|L}$ réalise un isomorphisme entre L et un sous-groupe fini de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$. La plus grande chaîne strictement décroissante de sous-groupes de L (ou de $\Pi(L)$) est de longueur $1+\Omega(q)$, d'où, vu la Proposition 2.3,

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}) = 1 + \Omega(q).$$

Par ailleurs, Σ commute avec les translations θ_u, $u \in \mathbf{X}$ et pour tout $U \in C(T_\varphi)$ et $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$U\Sigma^k U^{-1} = \Sigma^k \theta_{k\cdot u}.$$

En particulier $q{\cdot}u = 0$. Le groupe $L = \{e, \Sigma, \Sigma^2, \cdots, \Sigma^{q-1}\}$ a donc au plus q conjugués distincts qui sont parmi les groupes :

$$L_i := \{e, \Sigma\theta^i, \Sigma^2\theta^{2i}, \cdots, \Sigma^{q-1}\theta^{(q-1)i}\},\ i = 0, \cdots, q-1,$$

où θ désigne ici la translation $(x,y) \mapsto (x, y+1/q)$. Il s'en suit que T_φ n'a qu'un nombre fini de facteurs isomorphes à $\mathcal{E}$.

Reste à majorer $\mathbf{jd}(\mathcal{E})$. Par choix de $\mathcal{E}$ ($\neq \widetilde{\mathcal{B}}$), on a $\mathbf{jd}(\mathcal{E}) \geq 2$ et par définition, il existe une partie I de $\{0, 1, \cdots, q-1\}$ formée de $\mathbf{jd}(\mathcal{E})$ éléments, telle que les groupes L_i, $i \in I$, soient conjugués de $L(= L_0)$ et

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \{e\} \tag{2.16}$$

$$\forall j \in L,\ L^{(j)} := \bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} L_i \neq \{e\}. \tag{2.17}$$

Observons que $\Sigma^l\theta^a = \Sigma^{l'}\theta^{a'}$ si et seulement si $l \equiv l' \pmod q$ (ceci en projetant l'égalité par Π dans $C(T)$) et $a \equiv a' \pmod q$, de sorte que

$$L^{(j)} = \{\Sigma^l\theta^a\,;\ \forall i \in I\setminus\{j\},\ l{\cdot}i \equiv a \pmod q\}.$$

D'autre part q et les entiers de I n'ont pas de diviseurs communs autres que 1. En effet, si q' divise q et divise les entiers i de I, alors les éléments $\Sigma^{kq/q'}$, $0 \leq k < q'$ sont communs à tous les L_i et (2.16) implique $q' = 1$.

Introduisons les sous-groupes de $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ suivants :

$$G_j := \{u \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}\,;\ \exists\, v \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z},\ \forall i \in I\setminus\{j\},\ i{\cdot}u = v\}.$$

Par construction, l'ordre r_j de G_j est égal à l'ordre de $L^{(j)}$. D'après (2.17), $r_j > 1$. Soient j et j' deux éléments distincts de I et soit $u \in G_j \cap G_{j'}$. Si I contient au moins trois éléments, alors il existe $v \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ tel que

$$\forall i \in I,\ i{\cdot}u = v.$$

D'après (2.16) cela implique $v = 0$ et montre que les éléments de I sont multiples de l'ordre de u dans $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$. Or cet ordre divise q ; il est donc, d'après ce qui précède, égal à 1. En d'autres termes $G_j \cap G_{j'} = \{0\}$ et les r_j sont premiers entre eux.

Ainsi, lorsque I a au moins trois éléments, les conditions obtenues sur les r_j montrent que leur nombre (et donc, le cardinal de I) est au plus égal au nombre de facteurs premiers de q (qui ne peut pas être puissance d'un nombre premier), donc au plus égal à $\omega(q)$.

Si I n'a que deux éléments, nécessairement $I = \{0, i_0\}$ avec i_0 et q premiers entre eux ; ce cas intervient notamment lorsque q est une puissance d'un nombre premier. Alors, l'existence de $\mathcal{E}$ est équivalente à ce que le groupe L admette un conjugué de la forme L_i avec $(i, q) = 1$ et dans ce cas $\mathbf{jd}(\mathcal{E}) = 2$.

2ème cas : $\varepsilon(\Sigma) = -1$. Alors Σ est d'ordre pair et pour tout $U \in C(T_\varphi)$,

$$U\Sigma^2U^{-1} = \Sigma^2.$$

Le sous-groupe d'indice 2 de L (formé des carrés) est donc invariant dans $C(T_\varphi)$ et par suite (Proposition 2.3), se réduit au sous-groupe trivial $\{e\}$; Σ est donc un relèvement d'ordre 2 de -1 et $L = \{e, \Sigma\}$. Alors *(ii)* résulte de la Proposition 2.7.

Preuve de (iii).
Nous allons en fait établir le résultat suivant plus précis.

Lemme 2.8. *Soit T_φ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.4. Si l'automorphisme $y \mapsto -y$ se relève dans $C(T_\varphi)$ en un élément σ d'ordre 2, alors tout sous-groupe fini K non trivial de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ est d'ordre impair n et se relève dans $C(T_\varphi)$ en n sous-groupes d'ordre n dont*

(a) Un seul, noté

$$L_0 := \{e, \Sigma, \Sigma^2, \cdots, \Sigma^{n-1}\},$$

est invariant (en fait laissé fixe par les automorphismes intérieurs).

(b) Les $n-1$ autres sont de la forme

$$L_i := \{e, \Sigma\theta^i, \cdots, \Sigma^{n-1}\theta^{(n-1)i}\}, \quad i = 1, \cdots, n-1$$

(avec $\theta : (x,y) \mapsto (x, y+1/n)$), conjugués 2 par 2, le conjugué de L_i, autre que lui-même, étant L_{n-i}. De plus, pour

$$\mathcal{E}_i = \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\, \forall S \in L_i,\, S^{-1}(A) = A\} \quad i \neq 0,$$

on a $\mathcal{E}_i \in \mathcal{A}(T_\varphi)$ si et seulement si i et n sont premiers entre eux (par exemple $i = 2$), avec dans ce cas

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}_i) = 1 + \Omega(n), \quad \text{et} \quad \mathbf{jd}(\mathcal{E}_i) = 2.$$

Preuve : Soit K un sous-groupe d'ordre n de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$. Il est cyclique, engendré par $1/n \pmod 1$. Soit Σ_1 un relèvement de $x \mapsto x + 1/n$ dans $C(T_\varphi)$ d'ordre n. Si n était pair, $\Sigma_1^{n/2}$ serait un relèvement de $x \mapsto x + 1/2$ dans $C(T_\varphi)$ tel que $\varepsilon(\Sigma_1^{n/2}) = 1$, ce qui contredirait l'existence de σ. Donc n est impair. Soit maintenant $g \in \mathbf{X}$ tel que

$$\sigma\Sigma_1\sigma^{-1} = \Sigma_1\theta_g,$$

avec $\theta_g : (x,y) \mapsto (x, y+g)$. On a $n{\cdot}g = 0$ et il existe (un seul) $h \in \mathbf{X}$ tel que l'on ait simultanément $n{\cdot}h = 0$ et $2{\cdot}h = g$. En posant $\Sigma := \Sigma_1\theta_h$ on obtient un relèvement de $x \mapsto x + 1/n$ dans $C(T_\varphi)$ d'ordre n, qui commute avec tout $U \in C(T_\varphi)$. En effet, notons que $\sigma\Sigma\sigma^{-1} = \Sigma$ puis remarquons que $\Sigma = \Sigma'^2$ avec $\Sigma' = \Sigma^{(n+1)/2}\sigma$ et $\varepsilon(\Sigma') = -1$. Cela entraîne (comme vu précédemment), $U\Sigma U^{-1} = \Sigma$. Par suite le groupe L_0 engendré par Σ est laissé fixe par les automorphismes intérieurs de $C(T_\varphi)$.

Tout autre relèvement de K en un sous-groupe de $C(T_\varphi)$ d'ordre n a pour générateur un élément de la forme $\Sigma\theta_u$ avec $n{\cdot}u = 0$ d'où les formes L_i données à ces relèvements dans le Lemme. Par ailleurs, les éléments U de $C(T_\varphi)$ tels que $\varepsilon(U) = +1$ commutent avec $\Sigma\theta_u$ tandis que pour les autres, vérifiant $\varepsilon(U) = -1$, on a $U(\Sigma\theta_u)U^{-1} = \Sigma\theta_{-u}$. Il suffit en effet de le vérifier seulement pour σ, ce qui est banal. Ainsi L_{n-i} est le seul conjugué de L_i distinct de L_i ($i \neq 0$). De plus,

$L_i \cap L_{n-i} = \{e\}$ si et seulement si i est premier avec n et dans ce cas, d'après la Proposition 2.3, la σ–algèbre

$$\mathcal{E}_i = \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\, \forall S \in L_i,\ S^{-1}(A) = A\} \quad (i \neq 0)$$

est dans $\mathcal{A}(T_\varphi)$; de plus $\mathbf{jd}(\mathcal{E}_i) = 2$ et $\mathbf{chl}(\mathcal{E}_i) = 1 + \Omega(n)$. ∎

Notons pour compléter le théorème 2.4 que si $\mathbf{X}_0(T_\varphi) = \{0\}$ alors l'ensemble des facteurs de T_φ dans $\mathcal{A}(T_\varphi)$ qui n'admettent qu'un nombre fini de facteurs isomorphes se réduit à $\{\widetilde{\mathcal{B}}\}$. Dans ce cas $\mathbf{jd}(T_\varphi) = \mathbf{chl}(T_\varphi) = 2$ ou 1 suivant que l'automorphisme $y \mapsto -y$ se relève ou non dans $C(T_\varphi)$ en un élément d'ordre 2.

Les valeurs exactes de $\mathbf{chl}(\cdot)$ et $\mathbf{jd}(\cdot)$ peuvent être obtenues lorsqu'on connaît la structure des points de torsion de $C(T_\varphi)$ (qui forment un sous-groupe) avec assez de précision. C'est le cas lorsque φ est absolument continu, ou lorsque φ est en escalier avec une rotation $T : x \mapsto x + \alpha$, où α est à quotients partiels bornés.

Théorème 2.5. *Soit $T :\ x \mapsto x + \alpha$ une rotation ergodique du tore $\mathbf{X}$ et soit $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un cocycle T–ergodique. Alors*

(i) Si φ est absolument continu de degré topologique d non nul alors $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ est d'ordre fini r, diviseur de d, et l'on a :

$$\mathbf{chl}(T_\varphi) \leq 1 + \Omega(r)$$
$$\mathbf{jd}(T_\varphi) \leq \max\{2, \omega(r)\} \quad (\textit{avec en fait } \mathbf{jd}(T_\varphi) = 1 \ \textit{si} \ r = 1).$$

(ii) Si φ est un cocycle affine de la forme $x \mapsto d{\cdot}x + c$ (d entier non nul) alors les inégalités précédentes sont des égalités avec $r = |d|$.

(iii) Supposons α à quotients partiels bornés et φ en escalier, α–discontinu, bien α–séparé ayant m points de discontinuité et au moins un saut irrationnel. Alors $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ est d'ordre fini r, diviseur strict de m et de plus :

(a) Ou bien -1 se relève dans $C(T_\varphi)$ en un élément d'ordre 2. Alors r est impair, $2r$ divise m, et l'on a

$$\mathbf{chl}(T_\varphi) = \max\{2, 1 + \Omega(r)\}, \quad \mathbf{jd}(T_\varphi) = 2.$$

(b) Ou alors

$$\mathbf{chl}(T_\varphi) \leq 1 + \Omega(r), \quad \mathbf{jd}(T_\varphi) \leq \max\{2, \omega(r)\}.$$

Si de plus $r = 1$ (c'est notamment le cas pour m premier impair), on a

$$\mathbf{chl}(T_\varphi) = \mathbf{jd}(T_\varphi) = 1.$$

Preuve.

Cas (i) : Soit $\tilde{\varphi} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un relèvement absolument continu de φ et soit $C \in \mathbf{R}$ tel que l'application :

$$f : \xi \mapsto \tilde{\varphi}(\xi) - d{\cdot}\xi - C,$$

vérifie $f(0) = f(1)$, $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Notons φ_1 le cocycle déduit de f par réduction modulo 1 et soit c la classe de C modulo 1. On a

$$\varphi^{(q)}(x) = \varphi_1^{(q)}(x) + dq{\cdot}x + q{\cdot}c + \frac{q(q-1)}{2}{\cdot}\alpha \tag{2.18}$$

pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $q \in \mathbf{N}$. Si la rotation $S : x \mapsto x + \beta$ se relève dans $C(T_\varphi)$, d'après le Corollaire 1.3 on a $\varepsilon(S) = +1$ et il existe un cocycle $g : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ tel que

$$\varphi{\circ}S - \varphi = g{\circ}T - g.$$

Avec (2.18) on obtient :

$$dq{\cdot}\beta = g{\circ}T^q - g - (\varphi_1^{(q)}{\circ}S - \varphi_1^{(q)}). \tag{2.19}$$

Soit $(q_n)_n$ la suite des dénominateurs des convergents de α, alors $(\varphi_1^{(q_n)})_n$ converge uniformément vers 0 d'après le Théorème 1.1 et $(g{\circ}T_n^q - g)_n$ converge classiquement vers 0 dans $L^2(\mathbf{X}, \mu)$. L'égalité (2.19) montre donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} dq_n{\cdot}\beta = 0 \quad (\text{dans } \mathbf{X}). \tag{2.20}$$

Si β est rationnel d'ordre r, alors $\beta \in \mathbf{X}_0(T_\varphi)$ et comme deux dénominateurs consécutifs q_n, q_{n+1} sont premiers entre eux, (2.20) entraîne que r divise d. Il en résulte que $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ est fini, d'ordre un diviseur de d, d'où *(i)* en utilisant le Théorème 2.4, compte tenu du Corollaire 1.3.

Cas (ii) : Lorsque φ est constant, T_φ est alors une rotation ergodique sur $\mathbf{X}^2$, $\mathcal{A}(T_\varphi) = \{\widetilde{\mathcal{B}}\}$, d'où *(ii)*. Si φ est affine de degré ± 1, alors *(ii)* résulte de *(i)* (dans ce cas $\mathbf{X}_0(T_\varphi) = \{0\}$) ou encore de la commutativité de $C(T_\varphi)$.

Pour $\varphi : x \mapsto d{\cdot}x + c$, $|d| \geq 2$, la structure de $C(T_\varphi)$ se détermine explicitement (cf. aussi [Le-Li]) et $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ forme un groupe cyclique d'ordre d. En fait, pour tout $\beta \in \mathbf{X}$ on a $\varphi(x+\beta)-\varphi(x) = d{\cdot}\beta$, ce qui montre que $x \mapsto x+\beta$ se relève dans $C(T_\varphi)$ si et seulement si $d{\cdot}\beta \in \mathbf{Z}\alpha$. Les transformations

$$\Sigma : (x,y) \mapsto (x+1/d, y),$$
$$U : (x,y) \mapsto (x+\alpha/d, y+x),$$

sont des relèvements dans $C(T_\varphi)$ des générateurs $x \mapsto x+1/d$, $x \mapsto x+\alpha/d$ de $C_\varphi(T) = \Pi(C(\tau_\varphi))$. Tout S dans $C(T_\varphi)$ s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$S = \Sigma^n U^m \theta_g\,,$$

avec $0 \le n < d$, $m \in \mathbf{Z}$, et $g \in \mathbf{X}$. La relation de commutation

$$U\Sigma U^{-1} = \Sigma\theta_{1/d},$$

qui détermine complètement la structure de groupe du commutant, montre que le groupe

$$L = \{e, \Sigma, \cdots, \Sigma^{d-1}\},$$

relèvement de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$, possède exactement d conjugués distincts, à savoir

$$L_i := U^i \Sigma U^{-i} = \{e, \Sigma\theta_{i/d}, \cdots, \Sigma^{(d-1)}\theta_{i(d-1)/d}\},$$

$i = 0, 1, \cdots, d-1$ de générateur $\Sigma_i := \Sigma\theta_{i/d}$. Ces conjugués déterminent les facteurs

$$\mathcal{E}_i := \{A \in \widetilde{\mathcal{B}}\,;\ \Sigma_i^{-1}(A) = A\} = U^i\mathcal{E}_0,$$

isomorphes entre eux et dont nous savons qu'ils vérifient (Lemme 2.3)

$$H(\mathcal{E}_i) = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_\varphi(\mathcal{E}_i) = L_i.$$

Maintenant, $\mathcal{E}_i \in \mathcal{A}(T_\varphi)$ se déduit du résultat évident

$$\bigcap_{0 \le k < d} L_k = \{0\},$$

qui traduit

$$\bigvee_{0 \le k < d} \mathcal{E}_k = \widetilde{\mathcal{B}}.$$

D'après le Théorème 2.4*(i)* on a maintenant :

$$\mathbf{chl}(\mathcal{E}_0) = 1 + \Omega(d) = \mathbf{chl}(T_\varphi).$$

Si d est primaire, on a $\mathbf{jd}(T_r) = 2$ d'après le cas *(i)* et la Proposition 2.4. Le cas $d = 1$ est banal. Reste à calculer $\mathbf{jd}(\mathcal{E}_0)$. lorsque d n'est pas primaire. Dans ce but, pour p premier, diviseur de d, notons $\nu(p)$ l'exposant de la plus grande puissance de p qui divise d et désignons par M_p le groupe conjugué de L de générateur $\Sigma\theta_{p^{-\nu(p)}}$. Soient $p_1, \cdots, p_n$ des nombres premiers distincts et $\nu_1, \cdots, \nu_n$ des entiers strictement positifs. Alors tout entier m, solution du système de congruence

$$\frac{m}{{p_1}^{\nu_1}} = \cdots = \frac{m}{{p_n}^{\nu_n}} \pmod 1, \quad n \geq 2,$$

est nécessairement un multiple de ${p_1}^{\nu_1} \cdots {p_n}^{\nu_n}$. Il en résulte donc que si les p_i sont diviseurs de d et $\nu_i = \nu(p_i)$, alors en posant $q = {p_1}^{\nu_1} \cdots {p_n}^{\nu_n}$, on a simplement

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} M_{p_i} = \{\Sigma^{sq}\,;\, 0 \leq s < d/q\}.$$

En particulier,

$$\bigcap_{\substack{p \mid d \\ p \text{ premier}}} M_p = \{e\}$$

et pour tout premier ℓ diviseur de d,

$$\bigcap_{\substack{p \mid d,\, p \neq \ell \\ p \text{ premier}}} M_p \neq \{e\}.$$

Cela donne $\mathbf{jd}(\mathcal{E}_0) \geq \omega(d)$ et en tenant compte du Théorème 2.4 ,

$$\mathbf{jd}(\mathcal{E}_0) = \omega(d) = \mathbf{jd}(T_\varphi).$$

Cas (iii) : Soit $T : x \mapsto x + \alpha \pmod 1$, α à quotients partiels bornées et soit φ un cocycle vérifiant les hypothèses de *(iii)*. D'après le Corollaire 1.8, T_φ est une extension régulière. Notons Σ l'ensemble des points de discontinuité de φ. Soit $\beta \in \mathbf{X}$ tel que la rotation $S : x \mapsto x + \beta$ se relève dans le commutant $C(T_\varphi)$. Il existe alors $\varepsilon = \pm 1$ tel que le cocycle

$$\psi = \varphi \circ S - \varepsilon\varphi$$

soit un α−cobord. Dans la démonstration de la Proposition 1.10, on a montré l'existence d'une bijection γ de Σ caractérisée par

$$\text{(2.21)} \qquad \forall t \in \Sigma\,,\ t \sim_\alpha \gamma(t) - \beta\,, \quad \text{et} \quad s_\varphi(\gamma(t)) - \varepsilon s_\varphi(t) = 0.$$

Si ρ est l'ordre de β modulo α, alors γ décompose Σ en orbites toutes formées de ρ points ; d'où ρ divise m. En particulier $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$ est fini et par (2.21) les sauts de φ le long de chaque orbite sont tous égaux. Si S est générateur de $\mathbf{X}_0(T_\varphi)$, $\varepsilon(S) = +1$, $\rho = r$. Supposons $r = m$ alors γ est cyclique, il n'y a qu'une orbite et tous les sauts de φ sont égaux, mais leur somme est nulle ce qui contredit l'existence d'un saut irrationnel. Donc r est un diviseur strict de m.

Démontrons (a). D'après le Théorème 2.4 il reste seulement à montrer que $2r$ divise m. Or $x \mapsto x + 1/2 + 1/r$ se relève dans le commutant et comme r est impair, $x \mapsto x + 1/2r$ se relève également, d'où $2r$ divise m.

Démontrons (b). Puisque -1 ne se relève pas en un élément d'ordre 2 du commutant, les majorations données sont celles du Théorème 2.4*(i)* avec ici $q = r$. Lorsque $r = 1$, $\mathcal{A}(T_\varphi)$ se réduit à $\{\widetilde{\mathcal{B}}\}$, d'où $\mathbf{chl}(T_\varphi) = \mathbf{jd}(T_\varphi) = 1$. ∎

La démonstration de *(i)* dans le Théorème 2.5 donne en outre la propriété suivante (où $(q_n)_n$ désigne la suite des dénominateurs des convergents de α) :

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses de (i), si la rotation $x \mapsto x + \beta$ de $\mathbf{X}$ se relève dans $C(T_\varphi)$ alors β appartient au groupe*

$$H_d(\alpha) := \{\gamma \in \mathbf{X};\ \lim_{n \to +\infty} d q_n \gamma = 0\},$$

$(q_n)_n$ étant la suite des dénominateurs des convergents de α.

Les groupes $H_d(\alpha)$ ont été étudiés dans [La] et [Kra-Li]. En particulier, lorsque α est à quotients partiels bornés, on a simplement :

$$H_d(\alpha) = \mathbf{Z}\frac{\alpha}{d} + \mathbf{Z}\frac{1}{d}.$$

Pour $d = 1$, on en déduit le

Corollaire 2.6. *Si α est à quotients partiels bornés et φ absolument continu de degré 1, alors $C(T_\varphi)$ est isomorphe (via l'application $(n, g) \mapsto T_\varphi^n \circ \theta_g$) au produit direct $\mathbf{Z} \times \mathbf{X}$.*

RÉFÉRENCES.

[Ab] ABRAMOV (L.M.). – Metric automorphisms with quasi discrete spectrum, *Ivs. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math.* **26,** (1962), p. 513-530 [*Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **39**, (1964), p. 37-56].

[An] ANZAI (H.). – Ergodic skew product transformations on the torus, *Osaka J. Math.*, **3**, 1951, p. 83–99.

[Ba 1] BAGGETT (L.). – On functions that are trivial cocycles for a set of irrationals, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **104**, No 4, 1988, p. 1212–1215.

[Ba 2] BAGGETT (L.). – On circle-valued cocycles of an ergodic measure-preserving transformation, *Israel J. Math.*, **61**, No 1, 1988, p. 29–38.

[Con-Les] CONZE (J-P.), LESIGNE (E.). – Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales, *C. R. Ac. Sc., Paris*, **306**, Série 1, 1988, p. 491–493.

[Co–Si–Fo] CORNFELD (I.P.), SINAI (Ya. G.), FOMIN (S.V.). – *Ergodic Theory.* – Springer-Verlag, Berlin - Gottingen - Heidelberg, 1982 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* **245**).

[Fü] FURSTENBERG (H.). – Strict ergodicity and transformations on the torus, *Amer. J. Math.* **89**, 1961, p. 573–601.

[Fü] FURSTENBERG (H.). – *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* – Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.

[Ga-Le-Me] GABRIEL (P.), LEMAŃCZYK (M.), MENTZEN (M.K.). – Two-point cocycles with strong ergodicity property, *Bull. Pol. Ac. Sc.,* à paraître.

[Go–He] GOTTSCHALK (W.H.), HEDLUND (G.A.). – *Topological Dynamics.* – Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. Vol **36**, 1955.

[Ha–Pa] HAHN (H.), PARRY (W.). – Some characteristic properties of dynamical systems with quasi-discrete spectrum, *Math. Syst. Th.* **2**, 1968, p. 179–198.

[He–La] HELLEKALEK (P.), LARCHER (G.). – On Weyl sums and skew products over irrational rotations, *Theor. Comp. Sc., Fundamental Studies,* **65-2**, 1989, p. 189–196.

[Hel] HELSON (H.). – Cocycles on the circle, *J. Operator Theory,* **16**, 1986, p. 189–199.

[Hew–Ro] HEWITT (E.), ROSS (K.). – *Astract Harmonic Analysis II,* Springer-Verlag, Berlin - Gottingen - Heidelberg, 1970. (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* **152**).

[Hl] HLAWKA (E.). – Discrepancy and Riemann integration, *in* L. Mirsky (Ed.), *Studies in Pure Mathematics (Papers presented to Richard Rado),* Acad. Press, New York, 1971, p. 121–129.

[Ju-Ru] Del JUNCO (A.), RUDOLPH (D.). – On the ergodic actions whose self-joinings are graphs, *Erg. Th. & Dyn. Syst.,* **7**, No 4, 1987, p. 531-558.

[Ju–Le] Del JUNCO (A.), LEMAŃCZYK (M.). – Generic spectral properties of measure-preserving maps and applications, *preprint.*

[Ko] KOČERGIN (A.V.). – On the homology of function over dynamical system, *Dokl. AN SSSR,* **231**, 1976, *Soviet Math. Dokl.* **17**, 1976, No 6, p. 1637–1641.

[Kra-Li] KRAAIKAMP (C.), LIARDET (P.). – Good approximations and continued fractions, *Proceedings Amer. Math. Soc.,* à paraître.

[Kr] KRONECKER (K.). – Berliner Sitzungsberichte, 11 Dec. 1884, Werke 3, 1884, p. 49.

[Ku–Ni] KUIPERS (L.), NIEDERREITER (H.). – *Uniform Distribution of Sequences,* John Wiley & Sons, 1974.

[Kw–Le–Ru] KWIATKOWSKI (J.), LEMAŃCZYK (M.), RUDOLPH (D.). – Weak isomorphism of measure-preserving diffeomorphisms, *preprint.*

[La] LARCHER (G.). – A convergence problem connected with continued fractions, *Proceedings Amer. Math. Soc.,* **103**, 1988, p. 718–722.

[Le 1] LEMAŃCZYK (M.). – Weakly isomorphic transformations that are not isomorphic, *Probab. Th. Rel. Fields,* **78**, 1988, p. 491-507.

[Le 2] LEMAŃCZYK (M.). – On the weak isomorphism of strictly ergodic homeomorphisms, *Monatsh. Math.,* **108**, No 1, 1989, p. 39–46.

[Le–Li] LEMAŃCZYK (M.), LIARDET (P.). – Coalescence of Anzai skew products, *preprint.*

[Le-Me] LEMAŃCZYK (M.), MENTZEN (M.K.). – Compact subgroups in the centralizers of the natural factors of an ergodic group extension of a rotation determine all factors, *Erg. Th. & Dyn. Syst.*, **10**, 1990, p 763–776.

[Les] LESIGNE (E.). – Résolution d'une équation fonctionnelle, *Bull. Soc. Math. France*, **112**, 1984, p. 177–196.

[Me] MERILL (K.). – Cohomology of step functions over irrational rotations, *Israel J. Math.*, **52**(4), 1985, p. 320–340.

[Ne 1] NEWTON (D.). – Coalescence and spectrum of automorphisms of a Lebesgue space, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **19**, 1971, p. 117–122.

[Ne 2] NEWTON (D.). – On canonical factors of ergodic dynamical systems, *J. London Math. Soc.*, **19**, 1979, p. 129–136.

[Os] OSTROWSI (A.). – Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 1*, (1922), p. 77–98.

[Pa 1] PARRY (W.). – A note on cocycles in ergodic theory, *Compositio Math.*, **28**, 1966, p. 303–330.

[Pa 2] PARRY (W.). – Compact abelian group extensions of discrete dynamical systems, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **19**, 1969, p. 95–113.

[Pe] PERRON (O.). – *Die Lehre von den Kettenbrüchen*.– 3. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart, 1954.

[Ru 1] RUDOLPH (D.). – An example of a measure-preserving map with minimal self-joinings and applications, *J. Analyse. Math.*, **35**, 1979, p. 97-122.

[Ru 2] RUDOLPH (D.). – $\mathbf{Z}^n$ and $\mathbf{R}^n$ cocycle extensions and complementary algebras, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **6**, 1986, p. 583–599.

[Sc] SCHMIDT (K.). – *Cocycles of Ergodic Transformation Groups*. – Macmillan Lectures Math., vol 1, Macmillan Compagny of India, 1977.

[Si] SINAI (Ya. G.). – On weak isomorphism of transformations with invariant measure (in Russian), *Math. Sb.*, **63**, 1963, p. 23–42 [*Amer. Math. Sco. Transl. (2)* **52**, 1966, p. 123–143].

[Th] THOUVENOT (J.P.). – The metrical structure of some Gaussian processes, *Proc. Erg. Th. Rel. Topics*, **II**, *Georgenthal* 1986, p. 195-198.

[Ve] VEECH (W. A.).–Finite group extensions of irrational rotations, *Israel J. Math.*, **21**, 1975, p. 240–259.