

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LUCIANA RAMELLA

**Sur les schémas définissant les courbes rationnelles lisses de  $\mathbb{P}^3$  ayant fibré normal et fibré tangent restreint fixés**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 54 (1993)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1993\\_2\\_54\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_54__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SCHÉMAS DÉFINISSANT LES COURBES  
RATIONNELLES LISSES DE  $P^3$  AYANT FIBRÉ NORMAL  
ET FIBRÉ TANGENT RESTREINT FIXÉS**

Luciana RAMELLA

**RÉSUMÉ.** On confronte les stratifications du schéma de Hilbert des courbes lisses rationnelles de  $P^3$  de degré  $d$  par le fibré normal et par le fibré tangent restreint, en étudiant l'intersection des strates des deux types de stratifications. Le comportement est bizarre, il n'existe pas de symétries et il est compliqué de trouver des règles générales. Dans ce travail on trouve des paires de strates ayant intersection vide, des paires de strates ayant intersection non vide mais se coupant d'une mauvaise façon et enfin une vaste classe de paires de strates se coupant d'une bonne façon. On note que la strate générale de la stratification par le fibré normal coupe toute strate de l'autre stratification, mais on trouve qu'on n'a pas l'analogie pour la strate générale de la stratification par le fibré tangent restreint et on détermine tous les type de scindage possibles du fibré normal des courbes de cette strate. On note aussi que le fibré normal dépend des droites multisécantes.

**ABSTRACT.** In this paper we consider the stratifications of the Hilbert scheme of smooth rational curves in  $P^3$  of degree  $d$  by the normal bundle and by the restricted tangent bundle and we study the intersection of such two types of stratifications. The behaviour of the stratifications is rather strange: there are no symmetries and the search for general rules is a difficult matter. In this paper we exhibit some pairs of strata having empty intersection, a few other pairs of strata having no good intersection and finally a large class of pairs of strata having a good intersection. We note that the general stratum of the stratification by the normal bundle intersects every stratum of the other stratification, but we find that there is no analogue for the general stratum of the stratification by the restricted tangent bundle and we determine the type of splitting of the normal bundle of curves in this stratum. We also note that the normal bundle depends on the multisection lines.

Classification AMS: 14 H 50 , 14 H 10 , 14 C 05 .

---

Texte reçu le 27 mai 1991 (I) et le 17 septembre 1992 (II), révisé le 5 juin 1992 (I).  
L. RAMELLA, Dipartimento di Matematica Università, via L.B. Alberti 4, I-16132 Genova  
E-mail: ramella@dima.unige.it



## TABLE DES MATIÈRES

	pages
<b>Introduction</b>	5
<b>Première partie: Le comportement des strates assez générales.</b>	
§ 1.1. Stratifications.	15
§ 1.2. Fibrés sur une courbe réductible.	19
§ 1.3. Sur le fibré normal d'une courbe réductible.	23
§ 1.4. De bonnes intersections.	29
§ 1.5. Le fibré normal et les surfaces caractéristiques.	37
§ 1.6. Des intersections vides.	43
<b>Deuxième partie: Utilisation des droites caractéristiques.</b>	
§ 2.1. Le fibré normal de l'association d'une courbe et d'une droite.	47
§ 2.2. La courbe générale de toute strate de la stratification par le fibré normal est docile.	53
§ 2.3. Le fibré normal des courbes dont le fibré tangent restreint est de type général.	61
§ 2.4. Sur l'intersection des strates de petite dimension.	65
§ 2.5. Les courbes de degré 6 et 7.	67
<b>Références</b>	73



## INTRODUCTION

**Objet de ce travail.** Nous nous intéressons à l'étude du fibré normal  $N_C$  et du fibré tangent restreint  $T_{\mathbf{P}^3|_C}$  des courbes lisses rationnelles  $C$  de  $\mathbf{P}^3$ . ( $\mathbf{P}^3$  désigne l'espace projectif de dimension 3 sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique 0).

On considère le schéma de Hilbert  $\text{Hilb}_d \mathbf{P}^3$  des courbes de  $\mathbf{P}^3$  de degré  $d$  et ayant genre arithmétique 0. On désigne par  $\mathring{\text{H}}_d$  l'ouvert de  $\text{Hilb}_d \mathbf{P}^3$  constitué par les courbes lisses. On étudie la stratification du schéma  $\mathring{\text{H}}_d$  par le fibré normal et celle par le fibré tangent restreint.

Maintenant on va rapporter les résultats connus sur les deux stratifications.

Une courbe lisse rationnelle  $C$  de  $\mathbf{P}^3$  est donnée par un plongement  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$ , si  $E$  est un fibré de rang  $r$  sur  $C$ , le fibré  $f^*E$  image réciproque de  $E$  par  $f$  est du type  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_r)$ , on pose  $a_1 \geq \dots \geq a_r$  et on dit que la suite  $(a_1, \dots, a_r)$  est le type de scindage de  $E$ .

Si  $a \in \mathbf{Z}$  on note  $a^+ = \max \{ 0, a \}$ , si  $(a_1, \dots, a_r)$  est une suite d'entiers on note  $\delta(a_1, \dots, a_r) = \sum_{i,j} (a_i - a_j - 1)^+$ .

A l'égard du fibré normal on a

**Théorème 1.** La strate  $N(\alpha, \beta)$  des courbes  $C$  de  $\mathring{\text{H}}_d$  dont le fibré  $N_C(-1)$  a le type de scindage  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha + \beta = 2d - 2$ , est non vide si et seulement si  $\beta \geq 3$ ; dans ce cas elle est irréductible et de la codimension attendue, i.e.  $\text{codim } N(\alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta)$ .

Ce résultat a été démontré par Eisenbud et Van de Ven dans [EV1] et [EV2], ici ils décrivent les strates en donnant une caractérisation géométrique des courbes ayant fibré normal donné.

Ghione et Sacchiero ont étudié eux aussi, dans [fG-gS] et [gS], la stratification des courbes rationnelles (de genre géométrique 0) de  $\mathbf{P}^3$  par le type de scindage du fibré normal ; dans Exemple 2.5 et Exemple 2.6 de [fG-gS] ils exhibent, pour tout  $2 \leq \beta \leq d-1$ , les équations paramétriques des courbes rationnelles  $C$  de degré  $d$ , admettant au plus des nœuds comme singularités, dont le fibré  $N_C(-1)$  a le type de scindage  $(2d-2-\beta, \beta)$ ; dans Observation 4-2 de [gS], Sacchiero énonce, sans le démontrer, que pour  $\beta \geq 3$  l'Exemple 2.6 de [fG-gS] fournit en fait aussi des exemples de courbes lisses.

Quant au fibré tangent restreint on a

**Théorème 2.** La strate  $M(a,b,c)$  des courbes  $C$  de  $\mathring{H}_d$  dont le fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  a le type de scindage  $(a,b,c)$ ,  $a + b + c = d$ , est non vide si et seulement si  $c \geq 1$ ; dans ce cas  $M(a,b,c)$  est irréductible, lisse et de la codimension attendue  $\delta(a,b,c)$ .

Ce résultat a été démontré dans [IR1] en étudiant le fibré tangent restreint des courbes associations d'une courbe lisse de degré  $d-1$  et d'une droite, dans [IR2] en utilisant les déformations de fibrés sur  $\mathbf{P}^1$  et dans [fG-al-gS] en faisant usage des variétés réglées et du schéma de Hilbert des idéaux de  $k[[t_0, t_1]]$ . Verdier a décrit dans [V], sans démonstration, la stratification de la variété des morphismes  $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^n$  de degré  $d$  par le type de scindage du fibré  $f^*(T_{\mathbf{P}^n})$ ; dans [IR2] on a considéré les plongements  $f$  et on a expliqué la structure schématique des strates.

Dans la thèse de doctorat [IR1] on a cherché à voir si les strates des deux types de stratifications se coupent et de quelle façon. Sur cette question il était connu seulement le résultat suivant, qu'on trouve dans [EV1]:

**Proposition 3.** Le fibré normal des courbes gauches lisses rationnelles de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^3$  contenues dans une quadrique lisse est de type général.

On rappelle qu'une courbe gauche rationnelle  $C$  de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^3$  est contenue dans une quadrique lisse si et seulement si le fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est de type de scindage  $(d-2, 1, 1)$ .

Ce travail contient des résultats obtenus dans la thèse de doctorat [IR1] concernant la question décrite ci-dessus.

**Les résultats.** Les deux stratifications se comportent d'une façon bizarre, il n'existe pas de symétries et il est compliqué de trouver des règles générales. Pour les degrés  $d \leq 4$  la situation est très simple, il existe un unique type de scindage aussi bien pour le fibré tangent restreint que pour le fibré normal. Pour le degré 5 on a une (unique) intersection vide (cf. Proposition 3):  $M(3,1,1) \cap N(5,3) = \emptyset$ . À partir du degré 6 la situation commence à se compliquer. Dans la deuxième partie on a cherché à faire une analyse détaillée pour les courbes de degré 6 et 7, mais déjà pour le degré 7 on a laissé un problème ouvert: l'intersection  $M(4,2,1) \cap N(8,4)$  est-elle vide ?

Le fibré tangent restreint et le fibré normal ne se comportent pas l'un l'autre de façon symétrique:

**(Théorème 1.4.2)** Le fibré normal de la courbe générale de toute strate  $M(a,b,c)$  est de type général.

**(Corollaire 1.6.4)** Si  $C$  est une courbe générale de la strate  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  avec  $\beta \leq \frac{d+6}{4}$  alors le degré maximum des sous-fibrés inversibles de  $T_{\mathbb{P}^3}(-1)|_C$  est  $d - 2\beta + 2$ .

L'intersection des strates assez générales des deux stratifications contient une composante irréductible de la bonne dimension:

**(Théorème 1.4.6)** Si  $c+\beta \geq d$ , les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

(c'est-à-dire de dimension  $4d - \delta(a,b,c) - \delta(\alpha,\beta)$ ).

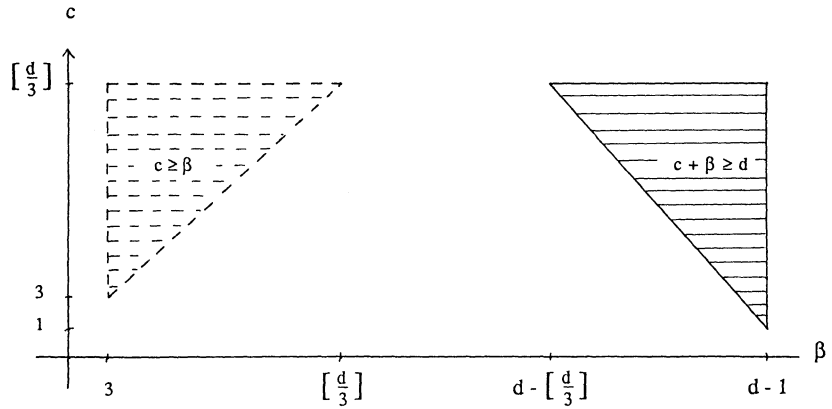


Mais pour  $d \geq 8$ , les strates de dimension "petite" de la stratification de  $\overset{\circ}{H}_d$  par le fibré normal ne coupent pas les strates de dimension "trop haute" de la stratification par le fibré tangent restreint:

(Corollaire 1.6.5) Si  $c \geq \beta$ , les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\overset{\circ}{H}_d$  ne se coupent pas.

Cela montre aussi qu'il existe des strates se coupant mais telles qu'aucune composante de l'intersection n'ait la bonne dimension.

On peut décrire les résultats principaux contenus dans la Première Partie (Théorème 1.4.6 et Corollaire 1.6.5) à l'aide de la figure suivante:



$[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

On rappelle qu'on a  $3 \leq \beta \leq d-1$  et  $1 \leq c \leq [\frac{d}{3}]$ ; pour la strate générale de la stratification de  $\overset{\circ}{H}_d$  par le fibré normal on a  $\beta = d-1$  et pour la strate générale de la stratification de  $\overset{\circ}{H}_d$  par le fibré tangent restreint on a  $c = [\frac{d}{3}]$ .

Dans la Deuxième Partie on donne des informations sur les zones  $A = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c = [\frac{d}{3}]\}$ ,  $B = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c = 1\}$ ,  $C = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / \beta = 3\}$  et

$D = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c + \beta \geq d - 1\}$ . On rappelle que les courbes de la zone B sont exactement les courbes ayant une droite (d-1)-sécante.

Quant à la zone A, on réussit à caractériser les strates  $N(\alpha, \beta)$  coupant la strate générale de la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré tangent restreint:

**(Théorème 2.3.2)** La strate  $N(\alpha, \beta)$  de  $\mathring{H}_d$  coupe la strate générale de la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré tangent restreint si et seulement si on a  $\beta > \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$  ( $\lceil x \rceil$  désigne la partie entière de  $x$ ).

On trouve des strates ayant une intersection vide, dans la zone B:

**(Proposition 2.4.2)** Une courbe rationnelle lisse C de degré  $d \geq 6$  ayant une droite (d-1)-sécante n'appartient pas à la strate  $N(2d-5, 3)$  de  $\mathring{H}_d$ .

En outre on détermine le type de scindage du fibré tangent restreint des courbes de la zone C:

**(Proposition 2.4.3)** Si  $d \geq 6$ , les courbes C de la strate  $N(2d-5, 3)$  de  $\mathring{H}_d$  ont le fibré  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de type de scindage (d-4, 2, 2).

Enfin on trouve d'autres strates se coupant d'une bonne façon, dans la zone D:

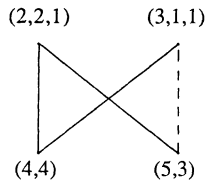
**(Théorème 2.5.6)** Si  $\beta \geq \left\lceil \frac{2d+1}{3} \right\rceil$ ,  $b \geq \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$  et  $c \geq \left\lceil \frac{d-2}{3} \right\rceil$ , alors les strates  $M(a, b, c)$  et  $N(\alpha, \beta)$  de  $\mathring{H}_d$  se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

Quant aux courbes de degré 5, 6 et 7 on va décrire les résultats obtenus au moyen de graphes.

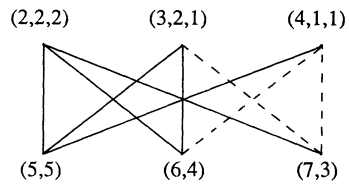
Le terme (a, b, c) indique le type de scindage du fibré  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$ ; le couple  $(\alpha, \beta)$  indique le type de scindage du fibré  $N_C(-1)$ ; la ligne continue — entre les sommets (a, b, c) et  $(\alpha, \beta)$  indique que les strates  $M(a, b, c)$  et  $N(\alpha, \beta)$  se coupent en bonne dimension; la ligne à traits - - -

entre les sommets  $(a,b,c)$  et  $(\alpha,\beta)$  indique que l'intersection entre les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  est vide; l'absence de ligne indique que on ne sait rien sur l'intersection correspondante.

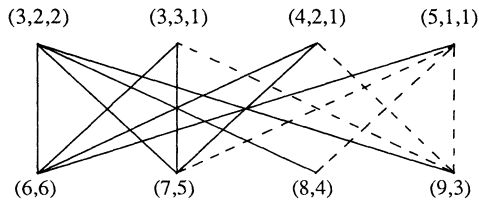
$d = 5$



$d = 6$



$d = 7$



**Méthodes de démonstration.** Une courbe lisse  $C$  de  $\mathbf{P}^3$  et un sous-fibré inversible  $L$  de  $N_C$  donnent canoniquement un morphisme, appelé morphisme de Gauss,  $\lambda : C \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  et une surface réglée développable  $S_L$  contenant  $C$ . Dans [IR3] il est démontré que si  $L$  est un sous-fibré maximal de  $N_C$  le morphisme de Gauss  $\lambda$  associé est birationnel. Ce résultat et l'usage de la construction géométrique faite par Eisenbud et Van de Ven dans [EV1] et [EV2], pour caractériser les courbes lisses rationnelles de  $\mathbf{P}^3$  ayant fibré normal donné, nous permettent de démontrer que l'intersection de certaines strates est vide (§ 1.6 et § 2.4).

Les résultats indiquant des couples de strates ayant une bonne intersection, sont obtenus en faisant usage des courbes nodales réductibles, plus précisément des courbes associations d'une

courbe lisse et d'une cubique rationnelle lisse dans la Première Partie (Théorème 1.4.6) et des courbes associations d'une courbe lisse et d'une droite dans la Deuxième Partie (Théorème 2.3.2 et Théorème 2.5.6), ces sont des courbes qu'on peut lissifier en vertu de [rH-aH]. Les courbes nodales réductibles ont été utilisées par Ellingsrud et Hirschowitz pour étudier des conditions de stabilité et de cohomologie sur le fibré normal  $N_C$  des courbes lisses ([gE-aH] et [aH2]).

On peut étendre les deux stratifications de  $\overset{\circ}{H}_d$  au schéma  $H'_d$  des courbes de  $H_d$  qui sont localement intersection complète, à l'aide des schémas quotients de Grothendieck et des schémas en drapeaux.

On étudie les sous-faisceaux d'un fibré sur une courbe  $X$  association de deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  (voir Définition 1.2.1) et on donne la définition de recollement de deux (sous-)fibrés, un sur  $C_1$  et l'autre sur  $C_2$  au point  $p = C_1 \cap C_2$  (voir Définition 1.2.2 et Définition 1.2.4). Le fibré tangent restreint  $T_{\mathbb{P}^3|X}$  de  $X$  est un recollement des fibrés tangents restreints  $T_{\mathbb{P}^3|C_1}$  et  $T_{\mathbb{P}^3|C_2}$  de  $C_1$  et  $C_2$ . Au contraire le fibré normal  $N_X$  de  $X$  n'est pas un recollement des fibrés normaux  $N_{C_1}$  et  $N_{C_2}$  de  $C_1$  et  $C_2$ , donc dans ce cas l'étude des sous-faisceaux de  $N_X$  est plus laborieuse (cf. §1.3 et [rH-aH]). On donne la définition de recollement d'un sous-fibré  $L_1$  de  $N_{C_1}$  avec un sous-fibré  $L_2$  de  $N_{C_2}$ , pour obtenir un sous-fibré de  $N_X$  (Définition 1.3.3) et on exprime une condition de recollement en utilisant les courbes doubles de Ferrand:

**(Proposition 1.3.5.)** Soit  $X$  l'association de deux courbes lisses  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbb{P}^3$  se coupant en un point  $p$ . Soient  $L_1$  et  $L_2$  des sous-fibrés de rang 1, respectivement, du fibré normal  $N_{C_1}$  de  $C_1$  et du fibré normal  $N_{C_2}$  de  $C_2$ , définissant en  $p$  le plan  $K$  déterminé par les deux droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$ .

Alors les fibrés  $L_1$  et  $L_2$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de  $X$  si et seulement si les deux courbes doubles de Ferrand  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$  se coupent en un 0-schéma de longueur 4 concentré en  $p$  défini par un idéal du type  $(z, x^2, y^2)$ , où  $\{x, y, z\}$  est un ensemble de générateurs de l'idéal maximal du point  $p$  dans l'anneau local  $O_{\mathbb{P}^3, p}$ .

Aussi dans l'étude du fibré normal de l'association  $X$  d'une courbe lisse  $C$  et d'une droite  $D$ , les surfaces caractéristiques associées aux sous-fibré inversibles maximaux du fibré normal de  $C$  interviennent massivement. On trouve le résultat suivant

**(Proposition 2.1.4)** Soit  $X$  l'association d'une courbe lisse  $C$  et d'une droite  $D$  se coupant en un point  $p$ . Supposons que

- a)  $p$  ne soit pas un point d'inflexion de  $C$ ,
- b) le plan  $K$  déterminé par la droite  $D$  et par la droite tangente à  $C$  en  $p$  ne coïncide pas avec le plan osculateur à  $C$  en  $p$ .

Soient  $L$  un sous-fibré inversible du fibré normal  $N_C$  de  $C$  définissant en  $p$  le plan  $K$  et  $M$  le sous-fibré inversible maximal du fibré normal  $N_D$  de la droite  $D$  définissant en  $p$  le plan  $K$ . Alors les fibrés  $L$  et  $M$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de  $X$  si et seulement si  $D$  est la droite caractéristique en  $p$  du fibré  $L$ .

Les conditions a) et b) de la Proposition 2.1.4 sont "méchantes"; en effet, si elles ne sont pas vérifiées, on peut avoir deux situations différentes:

- 1) aucune droite  $D$  ne satisfait la condition de recollement ,
- 2) toute droite du plan  $K$ , défini par le fibré  $L$  en  $p$ , passant par  $p$  et différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$  satisfait la condition de recollement .

D'après les résultats de Eisenbud et Van de Ven contenus dans [EV1] et [EV2] et d'après une analyse détaillée des surfaces réglées développables, on déduit qu'en ce qui concerne les conditions a) et b) de la Proposition 2.1.4 la courbe générale  $C$  de toute strate de la stratification de  $\mathbb{H}_d^0$  par le fibré normal est docile.

**Problèmes.** Déjà pour le degré 7 on a laissé des problèmes ouverts: comment sont les intersections  $M(3,3,1) \cap N(8,4)$  et  $M(4,2,1) \cap N(8,4)$  ?

**Conjecture 1.** On conjecture que l'intersection  $M(3,3,1) \cap N(8,4)$  n'est pas vide et qu'elle a une composante irréductible de la bonne dimension.

On n'a aucune idée sur la seconde intersection.

On fait une conjecture sur l'existence d'autres bonnes intersections :

**Conjecture 2.** Si  $c \geq 2$  ou si  $c = 1$  et  $\delta(a,b) = 0$ , on a que la strate  $M(a,b,c)$  de  $\mathring{H}_d$  coupe la strate  $N(d,d-2)$  le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

et on pose un problème sur les courbes ayant une droite  $(d-1)$ -sécante:

**Problème 3.** Si  $\beta \leq \frac{d}{2}$ , est-ce-que les strates  $M(a,b,1)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  ne se coupent pas?



## PREMIÈRE PARTIE

### Le comportement des strates assez générales

#### § 1.1. Stratifications.

On considère le schéma de Hilbert  $\text{Hilb}_d(\mathbf{P}^3)$  des courbes de  $\mathbf{P}^3$  ayant degré  $d$  et genre arithmétique 0. On note  $\overset{\circ}{\text{H}}_d$  l'ouvert de  $\text{Hilb}_d(\mathbf{P}^3)$  constitué par les courbes lisses et par  $\text{H}_d$  la adhérence de  $\overset{\circ}{\text{H}}_d$  dans  $\text{Hilb}_d(\mathbf{P}^3)$ . Les stratifications par le fibré tangent restreint et par le fibré normal peuvent être décrites au moyen des schémas quotients de Grothendieck.

**Définition 1.1.1.** La stratification de  $\text{H}_d$  par le fibré tangent restreint est donnée par les strates  $\Omega_d(i, \alpha) = \{ C \in \text{H}_d / T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C \text{ a un sous-faisceau de rang } i \text{ et de degré } \alpha \}$ , qui sont des sous-schémas fermés de  $\text{H}_d$ ,  $i = 1, 2$ .

On note  $\overset{\circ}{\Omega}_d(i, \alpha) = \Omega_d(i, \alpha) - \Omega_d(i, \alpha+1)$   $i = 1, 2$ .

Soit  $\text{H}'_d$  l'ouvert de  $\text{H}_d$  constitué par les courbes localement intersection complète.

La stratification de  $\text{H}'_d$  par le fibré normal est donnée par les strates

$I'_d(\alpha) = \{ C \in \text{H}'_d / N_C(-1) \text{ a un sous-faisceau inversible de degré } \alpha \}$ , qui sont des sous-schémas fermés de  $\text{H}'_d$ .

On note  $J'_d(\alpha) = I'_d(\alpha) - I'_d(\alpha+1)$  et  $W'_d(\alpha_1, \alpha_2) = \overset{\circ}{\Omega}_d(1, \alpha_1) \cap \overset{\circ}{\Omega}_d(2, \alpha_2) \cap \text{H}'_d$ .

$J'_d(\alpha) \cap \overset{\circ}{\text{H}}_d$  est le schéma  $N(\alpha, 2d-2-\alpha)$  défini dans l'Introduction; en outre si



$a_1 \geq a_2 \geq a_3$  et  $a_1 + a_2 + a_3 = d$ , le schéma  $M(a_1, a_2, a_3)$  défini dans l'Introduction est égal à  $W_d(a_1, a_1+a_2) \cap \mathring{H}_d$ .

Les stratifications de  $H'_d$  définies ci-dessus sont bien décrites aussi par la stratification de Shatz qui utilise les schémas des drapeaux et les polygones de Harder-Narasimhan des fibrés (cf. [ssS], [aB] et [IR2]).

**Définition 1.1.2.** Soit  $E$  est un fibré de rang  $r$  sur une courbe  $X$ , on désigne par  $\mu_i(E)$  le degré maximum des sous-faisceaux de rang  $i$  de  $E$ . Si on a  $\mu_i(E) = a_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , on définit le polygone de Harder-Narasimhan de  $E$  comme la ligne polygonale de  $\mathbb{R}^2$   $P(E) = P_{a_1, \dots, a_r}$  joignant les points  $(i, a_i)$ ,  $i = 0, \dots, r$ , où  $a_0 = 0$ .

On pose sur la famille des polygones  $P_{a_1, \dots, a_r}$  la relation d'ordre partiel suivante :

$$P_{a_1, \dots, a_r} \leq P_{b_1, \dots, b_r} \Leftrightarrow a_i \leq b_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, r.$$

**Définition 1.1.3.** La stratification de Shatz de  $H_d$  par le fibré tangent restreint est la stratification donnée par les schémas fermés :

$$V_d(\alpha, \beta) = \{ C \in H_d / P(T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C) \geq P_{\alpha, \beta, d} \} = \Omega_d(1, \alpha) \cap \Omega_d(2, \beta).$$

La strate  $\{ C \in \mathring{H}_d / P(T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C) = P_{\alpha, \beta, d} \} = M(\alpha, \beta, \alpha, d, \beta)$  est un sous-schéma localement fermé de  $\mathring{H}_d$  dont la adhérence est le schéma  $\mathring{H}_d \cap V_d(\alpha, \beta)$  (cf. [IR2]).

Pour la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré normal on a que la strate  $N(\alpha, \beta)$  est contenue dans l'adhérence de la strate  $N(\alpha-1, \beta+1)$ ,  $\alpha+\beta = 2d-2$  (cf. [EV1] et [EV2]).

Mais pour la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré tangent restreint, la strate  $M(a_1, a_2, a_3)$  est contenue dans l'adhérence de la strate  $M(b_1, b_2, b_3)$  si et seulement si  $a_1 \geq b_1$  et  $a_1+a_2 \geq b_1+b_2$  (cf. [IR2]).

**Remarque 1.1.4.** En suivant les définitions de [aH2], on dit que la stratification de  $H'_d$  par le fibré normal est indexée par l'ensemble  $\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / \alpha \geq \beta, \alpha + \beta = 2d-2 \}$  ordonné par la relation d'ordre suivante:  $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$  si et seulement si  $\alpha \leq \alpha'$ .

La stratification de  $H_d$  par le fibré tangent restreint est indexée par l'ensemble

$\{ (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 / a \geq b \geq c, a + b + c = d \}$  ordonné par la relation d'ordre partiel suivante:

$(a,b,c) \leq (a',b',c')$  si et seulement si  $a \leq a'$  et  $a + b \leq a' + b'$ .

Les intersections des strates des deux stratifications décrites ci-dessus donnent une stratification de  $H'_d$  indexée par l'ensemble

$\{ (\alpha,\beta,a,b,c) \in \mathbb{N}^5 / \alpha \geq \beta, a \geq b \geq c, \alpha + \beta = 2d-2, a + b + c = d \}$  ordonné par la relation d'ordre partiel suivante:

$(\alpha,\beta,a,b,c) \leq (\alpha',\beta',a',b',c')$  si et seulement si  $\alpha \leq \alpha'$ ,  $a \leq a'$  et  $a + b \leq a' + b'$ .



## § 1.2. Fibrés sur une courbe réductible.

Soient  $X$  une courbe lisse et  $E$  un fibré de rang  $s$  sur  $X$ .  $E$  "est" un faisceau localement libre de rang  $s$  sur  $X$ . Tout sous-faisceau cohérent  $F$  de  $E$  est localement libre de type fini, mais il n'est pas nécessairement un sous-fibré de  $E$ ,  $F$  est un sous-fibré de  $E$  si et seulement si le quotient  $E/F$  est sans torsion. Etant donné un sous-faisceau cohérent  $F$  de  $E$ , il existe un plus petit sous-fibré  $\tilde{F}$  de  $E$  contenant  $F$ ; on dit que  $\tilde{F}$  est le sous-fibré de  $E$  engendré par  $F$ .  $\tilde{F}$  et  $F$  ont le même rang,  $\deg \tilde{F} \geq \deg F$  et  $\deg \tilde{F} = \deg F$  si et seulement si  $\tilde{F} = F$ . Donc tout sous-faisceau cohérent de rang  $s$  de  $E$  de degré maximum est un sous-fibré de  $E$ ; c'est appelé sous-fibré maximal de rang  $s$  de  $E$ .

Si  $X$  est une courbe réductible (réduite), un sous-faisceau cohérent d'un fibré  $E$  sur  $X$  n'est pas nécessairement localement libre. On veut étudier les sous-faisceaux de  $E$  de rang  $r$  donnant le degré maximum  $\mu_r(E)$  des sous-faisceaux de rang  $r$  de  $E$ .

**Définition 1.2.1.** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes (lisses) de  $\mathbf{P}^3$  se coupant en un seul point  $p$  et ayant les droites tangentes en  $p$  distinctes, alors la réunion  $X = C_1 \cup C_2$  est dite association de  $C_1$  et  $C_2$ .

Dans la suite  $X$  désigne l'association de deux courbes lisses  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbf{P}^3$  et  $E$  un fibré de rang  $s$  sur  $X$ .

On a la suite exacte de faisceaux sur  $X$

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\{p\}} \rightarrow 0.$$

Le fibré  $E$  induit la suite exacte de faisceaux sur  $X$

$$(2) \quad 0 \rightarrow E \rightarrow E|_{C_1} \oplus E|_{C_2} \xrightarrow{\beta_E} E|_{\{p\}} \rightarrow 0$$

où  $E|_{C_i} = E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_i}$ ,  $i = 1, 2$  et  $E_x|_{\{p\}} = 0$  si  $x \neq p$ ,  $E_p|_{\{p\}} \cong k^s$ .

Soient  $C$  une courbe lisse de  $\mathbf{P}^3$  de degré  $d$  et  $F$  un fibré de rang  $r$  sur  $C$ . La caractéristique d'Euler-Poincaré de  $F$  est  $\chi(F) = \deg F + r(1 - p_a(C))$ , où  $p_a(C)$  est le genre de  $C$ , et le polynôme de Hilbert de  $F$  est  $P_F(n) := \chi(F(n)) = \deg F + rdn + r(1 - p_a(C))$ .

De la suite (2) on déduit  $\chi(E) = \deg E|_{C_1} + \deg E|_{C_2} + s(1 - p_a(X))$ , où  $p_a(X) = p_a(C_1) + p_a(C_2)$  est le genre arithmétique de  $X$ , alors le degré de  $E$  est le nombre  $\deg E = \deg E|_{C_1} + \deg E|_{C_2}$ .

**Définition 1.2.2.** On dit que le fibré  $E$  est un recollement des fibrés  $E|_{C_1}$  et  $E|_{C_2}$ .

**Définition 1.2.3.** Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-faisceaux (localement libres) de rang  $r$  de  $E|_{C_1}$  et  $E|_{C_2}$  respectivement.  $F := \ker(\beta_E|_{F_1 \oplus F_2})$  est un sous-faisceau cohérent de rang  $r$  de  $E$  appelé association de  $F_1$  et  $F_2$ .

On peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(F)$  et le polynôme de Hilbert  $P_F(n)$  du faisceau  $F$  défini ci-dessus: on a la suite exacte de faisceaux sur  $X$

$$0 \rightarrow F \rightarrow F_1 \oplus F_2 \xrightarrow{\beta_F} \text{Im}(\beta_F) \rightarrow 0,$$

où on a posé  $\beta_F := \beta_E|_{F_1 \oplus F_2}$ , donc

$$\chi(F) = \deg F_1 + \deg F_2 + 2r(1 - p_a(X)) - \dim_k(\text{Im}(\beta_F)) \quad \text{et}$$

$$P_F(n) := \chi(F(n)) = r(\deg X)n + \chi(F).$$

Alors on a

$$\deg F = \chi(F) - r(1 - p_a(X)) = \deg F_1 + \deg F_2 - r p_a(X) + r - \dim_k(\text{Im}(\beta_F)).$$

**Définition 1.2.4.** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-fibrés de rang  $r$  de  $E|_{C_1}$  et  $E|_{C_2}$  respectivement, on dit que  $F_1$  et  $F_2$  se recollent en  $p$ , ou que  $F_1$  se recolle avec  $F_2$  en  $p$ , si  $\text{Im}(\beta_E|_{F_1 \oplus F_2})$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $r$  de  $E_p \cong k^s$ , c'est à dire si les fibres en  $p$  des fibrés  $F_1$  et  $F_2$  "coincident" dans la fibre  $E_p \cong k^s$  du fibré  $E$ .

Dans ce cas l'association de  $F_1$  et  $F_2$  est un sous-fibré de  $E$ .

**Proposition 1.2.5.** Tout sous-faisceau cohérent  $F$  de  $E$  de rang  $r$  est contenu dans l'association d'un sous-fibré  $F_1$  de  $E|_{C_1}$  et d'un sous-fibré  $F_2$  de  $E|_{C_2}$  de rang  $r$ .

Preuve.  $F \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_i}$  est contenu dans un sous-fibré  $F_i$  de rang  $r$  de  $E|_{C_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

Alors  $F$  est contenu dans l'association de  $F_1$  et  $F_2$ .

Alors pour calculer  $\mu_r(E)$  il suffit de considérer les associations des sous-fibrés de rang  $r$  de  $E|_{C_1}$  et  $E|_{C_2}$ .

Le fibré tangent restreint de  $X$ ,  $T_{\mathbb{P}^3|X}$ , est un recollement des fibrés tangents restreints  $T_{\mathbb{P}^3|C_1}$  et  $T_{\mathbb{P}^3|C_2}$ .

Au contraire le fibré normal  $N_X$  n'est pas un recollement des fibrés normaux  $N_{C_1}$  et  $N_{C_2}$ , on étudiera les sous-faisceaux de  $N_X$  dans le paragraphe prochain.



### § 1.3. Sur le fibré normal d'une courbe réductible.

On rappelle que si  $C$  est une courbe gauche lisse de  $\mathbf{P}^3$  et  $L$  un sous-fibré inversible de  $N_C$ , la fibre de  $L$  en  $x \in C$  définit un plan contenant la droite tangente à  $C$  en  $x$  (voir Définition 1.5.1).

Dans ce paragraphe on note  $X$  l'association de deux courbes lisses  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbf{P}^3$  se coupant en un point  $p$ .

On a les suites exactes

$$(3) \quad 0 \rightarrow N_X \rightarrow N_{X|C_1} \oplus N_{X|C_2} \xrightarrow{\beta_{N_X}} N_{X|p} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$(4) \quad 0 \rightarrow N_{C_i} \rightarrow N_{X|C_i} \rightarrow T_p^1 \rightarrow 0 \quad i = 1, 2$$

où  $T_p^1$  est le conoyau du morphisme naturel  $\varphi: T_{\mathbf{P}^3|X} \rightarrow N_X$ , c'est un faisceau de torsion concentré sur  $p$  et en  $p$  il est isomorphe à  $k$  (cf. [rH-aH], [IR1] ch.IV).

**Définitions et rappels 1.3.1.** Soit  $N$  un fibré de rang 2 sur  $C$ ; on note

$\pi: \mathbf{P}(N) \rightarrow C$  la projection du fibré projectif  $\mathbf{P}(N)$  sur  $C$  et  $\mathcal{O}(1)$  le fibré inversible tautologique sur  $\mathbf{P}(N)$ . Soit  $K$  un ensemble fini de points de  $\mathbf{P}(N)$  tel que la restriction de  $\pi$  à  $K$  soit injective.

On note  $\text{elm}_K^- N$  le noyau du morphisme naturel (surjectif)  $N \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_K(1)$ , obtenu en appliquant l'image directe  $\pi_*$  à la composition des morphismes naturels

$\pi^* N \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{O}_K(1)$ , on a noté  $\mathcal{O}_K(1)$  le faisceau  $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}_K$ . Le fibré  $\text{elm}_K^- N$  est appelé la transformation élémentaire négative de  $N$  en  $K$ . Le fibré  $\text{elm}_K^+ N = \text{elm}_K^- N \otimes \mathcal{O}_C(\pi(K))$

est appelé la transformation élémentaire positive de  $N$  en  $K$ . On a une suite exacte naturelle



$$0 \rightarrow N \rightarrow \text{elm}_K^+ N \rightarrow \mathcal{O}_{\pi(K)} \rightarrow 0 \quad (\text{cf. [rH-aH]}).$$

D'après la suite exacte (4) on a que  $N_{X|C_i}$  est isomorphe à  $\text{elm}_K^+ N_{C_i}$ , la transformation élémentaire positive de  $N_{C_i}$  en  $K$ , où  $K$  est le plan défini par les droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$  (cf. [rH-aH] Corollary 3.2).

**Définition 1.3.2.** Soit  $L_i$  un sous-fibré inversible du fibré normal  $N_{C_i}$  de la composante irréductible  $C_i$  de  $X$ , on note  $L_i^+$  le sous-fibré de  $N_{X|C_i}$  engendré par l'image de  $L_i$  dans  $N_{X|C_i}$  via le morphisme naturel  $N_{C_i} \rightarrow N_{X|C_i}$ ,  $L_i^+$  est dit le transformé de  $L_i$  dans  $N_{X|C_i}$ ,  $i = 1, 2$ . L'association des transformés  $L_1^+$  et  $L_2^+$  est un sous-faisceau de rang 1 de  $N_X$  noté  $(L_1 \circ L_2)$ .

$$\text{Des suites exactes (3) et (4) on déduit } \deg N_X = \deg N_{C_1} + \deg N_{C_2} + 2.$$

Si le sous-fibré  $L_1$  du fibré normal  $N_{C_1}$  de  $C_1$  détermine en  $p$  le plan  $K$  contenant les droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$ , alors le transformé  $L_1^+$  de  $L_1$  dans  $N_{X|C_1}$  est isomorphe à  $L_1 \otimes \mathcal{O}_{C_1}(p)$  et on a  $\deg(L_1^+) = \deg L_1 + 1$ . Si  $L_1$  détermine en  $p$  un plan différent du plan  $K$ , alors  $\deg(L_1^+) = \deg L_1$ .

$$\text{Donc on a } \deg L_1 + \deg L_2 - 1 \leq \deg(L_1 \circ L_2) \leq \deg L_1 + \deg L_2 + 2$$

(cf. [rH-aH] Proposition 2.2).

**Définition 1.3.3.** Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux sous-fibrés inversibles de  $N_{C_1}$  et  $N_{C_2}$  respectivement. On dit que les fibrés  $L_1$  et  $L_2$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de  $X$  si et seulement s'ils vérifient les conditions suivantes :

- a)  $L_1$  et  $L_2$  déterminent en  $p$  le plan  $K$  défini par les droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$ .
- b) Les fibrés transformés  $L_1^+$  et  $L_2^+$  dans  $N_{X|C_1}$  et  $N_{X|C_2}$  respectivement se recollent en  $p$ , c'est à dire leurs fibres en  $p$  ont la même image dans  $N_{X,p|p} \cong k^2$  via le morphisme  $\beta_{N_X}$  de la suite (3).

Le degré maximum  $\mu(N_X)$  des sous-faisceaux cohérents de rang 1 du fibré normal  $N_X$  de  $X$  est au plus  $\mu(N_{C_1}) + \mu(N_{C_2}) + 2$ . On note qu'on a l'égalité si et seulement si il existe un sous-fibré maximal de rang 1  $L_1$  de  $N_{C_1}$  et un sous-fibré maximal de rang 1  $L_2$  de  $N_{C_2}$  se recollant en  $p$  dans  $N_X$ .

**Définition 1.3.4.** Si  $C$  est une courbe de  $P^3$  localement intersection complète, alors on sait que le faisceau normal  $N_C$  de  $C$  est un fibré de rang 2.

Soient  $L$  un sous-fibré de rang 1 du fibré normal  $N_C$  et  $Q$  le fibré quotient de  $N_C$  par  $L$ .

La suite exacte  $0 \rightarrow L \rightarrow N_C \rightarrow Q \rightarrow 0$  induit par dualité la suite exacte  $0 \rightarrow Q^\vee \rightarrow I_C/I_C^2 \rightarrow L^\vee \rightarrow 0$ , où  $I_C$  est le faisceau des idéaux définissant  $C$ .

Le fibré  $Q^\vee$  est du type  $J_C/I_C^2$ , où  $J_C$  est un faisceau d'idéaux tel que  $I_C \supset J_C \supset I_C^2$ . Le faisceau d'idéaux  $J_C$  définit une courbe double sur  $C$  notée  $(C,L)$  et appelée courbe double de Ferrand sur  $C$  induite par  $L$  (cf.[F]).

On a la condition de recollement suivante pour les sous-fibrés des fibrés normaux  $N_{C_1}$  et  $N_{C_2}$  :

**Proposition 1.3.5.** Soit  $X$  l'association de deux courbes lisses  $C_1$  et  $C_2$  de  $P^3$  se coupant en un point  $p$ . Soient  $L_1$  et  $L_2$  des sous-fibrés de rang 1, respectivement, du fibré normal  $N_{C_1}$  de  $C_1$  et du fibré normal  $N_{C_2}$  de  $C_2$ , définissant en  $p$  le plan  $K$  déterminé par les deux droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$ .

Alors les fibrés  $L_1$  et  $L_2$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de  $X$  si et seulement si les deux courbes doubles de Ferrand  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$  se coupent en un 0-schéma de longueur 4 concentré en  $p$  défini par un idéal du type  $(z, x^2, y^2)$ , où  $\{x, y, z\}$  est un ensemble de générateurs de l'idéal maximal du point  $p$  dans l'anneau local  $O_{P^3, p}$ .

Preuve. Pour  $i = 1, 2$  on a la suite exacte de fibrés

$$0 \rightarrow Q_i^\vee \rightarrow I_{C_i}/I_{C_i}^2 \rightarrow L_i^\vee \rightarrow 0 .$$

La suite exacte (4) induit par dualité la suite exacte de faisceaux sur  $C_i$

$$(5) \quad 0 \rightarrow I_X/I_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_i} \rightarrow I_{C_i}/I_{C_i}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\{p\}} \rightarrow 0 .$$

Puisque le sous-fibré  $L_i$  de  $N_{C_i}$  définit le plan  $K$  déterminé par les droites tangentes à  $C_1$  et à  $C_2$  en  $p$ , le sous-fibré  $Q_i^\vee$  de  $I_{C_i}/I_{C_i}^2$  est canoniquement, via la suite (5), aussi un sous-fibré de  $I_X/I_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_i}$  (cf. [rH-aH] Proposition 2.2 et Proposition 2.4).

Alors les fibrés  $L_1$  et  $L_2$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  si et seulement si les fibrés  $Q_1^\vee$  et  $Q_2^\vee$ , vus comme sous-fibrés de  $I_X/I_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_1}$  et  $I_X/I_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_2}$  respectivement, se recollent en  $p$ .

Dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3, p}$  les courbes  $C_1, C_2$  et  $X$  sont définies par des idéaux du type  $I_{C_1} = (f, g)$ ,  $I_{C_2} = (f, h)$ ,  $I_X = (f, g, h)$ , où  $\{f, g, h\}$  est un ensemble de générateurs de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_p$  de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3, p}$ ; on note que  $g$  est un paramètre local de  $C_2$  en  $p$ ,  $h$  est un paramètre local de  $C_1$  en  $p$  et le plan  $K$  est défini par l'équation  $f_1 = 0$ , où  $f_1$  est la partie de premier degré de l'élément  $f$ .

Soient  $J_{C_1}$  et  $J_{C_2}$  les idéaux de l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3, p}$  déterminés par les fibrés  $Q_1^\vee$  et  $Q_2^\vee$  définissant les courbes doubles de Ferrand  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$ .

Puisque les fibrés  $L_1$  et  $L_2$  définissent le plan  $K$  en  $p$ , l'espace tangent de Zariski des courbes doubles  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$  au point  $p$  est le plan  $K$ ; alors on peut écrire  $J_{C_1} = (f + \lambda g, g^2)$  et  $J_{C_2} = (f + \mu h, h^2)$ , avec  $\lambda = a(h)h$  et  $\mu = b(g)g$ , où  $a(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$  et  $b(g) = b_0 + b_1 g + b_2 g^2 + \dots$ , avec  $a_i, b_i \in k$ .

Localement en  $p$  on a les isomorphismes:

$$(I_{C_1}/I_{C_1}^2)_p \cong f\mathcal{O}_{C_1, p} + g\mathcal{O}_{C_1, p}, \quad (I_{C_2}/I_{C_2}^2)_p \cong f\mathcal{O}_{C_2, p} + h\mathcal{O}_{C_2, p},$$

$$(I_X/I_X^2)_p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{C_i, p} \cong f\mathcal{O}_{C_i, p} + gh\mathcal{O}_{C_i, p} \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

$$(Q_1^\vee)_p \cong (f + a(h)hg)\mathcal{O}_{C_1, p} \quad \text{et} \quad (Q_2^\vee)_p \cong (f + b(g)g)\mathcal{O}_{C_2, p} .$$

Donc  $Q_1^\vee$  et  $Q_2^\vee$ , vus comme sous-fibrés de  $I_X/I_X^2 \otimes_{O_X} O_{C_1}$  et de  $I_X/I_X^2 \otimes_{O_X} O_{C_2}$  respectivement, se recollent en  $p$  si et seulement si  $(f + a(h)gh) \otimes 1_{O_{C_1,p}}/m_{C_1,p} = (f + b(g)gh) \otimes 1_{O_{C_2,p}}/m_{C_2,p}$  dans  $(I_X/I_X^2)_p \otimes_{O_{X,p}} O_{\{p\}} \cong (fk + (gh)k)$ .

C'est à dire  $Q_1^\vee$  et  $Q_2^\vee$  se recollent en  $p$  si et seulement si  $a_0 = b_0$ .

L'idéal de l'anneau local  $O_{\mathbb{P}^3,p}$  définissant l'intersection des courbes doubles  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$  est  $J_{C_1} + J_{C_2} = (f + a_0gh, f + b_0gh, g^2, h^2)$ .

Si  $L_1$  et  $L_2$  se recollent en  $p$  dans  $N_X$ , on a  $a_0 = b_0$  et alors  $J_{C_1} + J_{C_2} = (f + a_0gh, g^2, h^2)$  est un idéal de colongueur 4.

Si  $L_1$  et  $L_2$  ne se recollent pas, alors  $a_0 \neq b_0$  et  $J_{C_1} + J_{C_2} = (f, gh, g^2, h^2)$  est un idéal de colongueur 3.

On trouve la condition suivante de "non" recollement:

**Proposition 1.3.6.** Soit  $X$  l'association de deux courbes lisses  $C_1$  et  $C_2$  se coupant en un seul point  $p$  et  $K$  le plan contenant les deux droites tangentes à  $C_1$  et  $C_2$  en  $p$ . Si  $L_1$  est un sous-fibré du fibré normal  $N_{C_1}$  de  $C_1$  définissant en  $p$  le plan  $K$  et  $L_2$  est un sous-fibré du fibré normal  $N_{C_2}$  de  $C_2$  définissant en  $p$  un plan différent du plan  $K$ , alors les transformés  $L_1^+$  et  $L_2^+$  ne se recollent pas en  $p$ .

Preuve. On use les notations et les méthodes de la démonstration de la Proposition 1.3.5.

Les idéaux définissant, localement en  $p$ , respectivement  $C_1$ ,  $C_2$  et  $X$  sont du type  $I_{C_1} = (f, g)$ ,  $I_{C_2} = (f, h)$  et  $I_X = (f, gh)$ , où  $(f, g, h) = m_p$  est l'idéal maximal de  $O_{\mathbb{P}^3,p}$ . Les idéaux de  $O_{\mathbb{P}^3,p}$  définissant les courbes doubles de Ferrand  $(C_1, L_1)$  et  $(C_2, L_2)$  sont du type respectivement  $J_{C_1} = (f + \lambda(h)g, g^2)$  et  $J_{C_2} = (h + \mu(g)f, h^2)$ , où  $\lambda(h) = h(a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots) = h(a(h))$  et  $\mu(g) = b_0 + b_1g + b_2g^2 + \dots$ , avec  $a_i, b_i \in k$ .

Soit  $Q_i$  le quotient de  $N_{C_i}$  par  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ . On a  $(Q_1^\vee)_p \cong (f + a(h)hg)O_{C_1,p}$ ,

$$(Q_2^\vee)_p \cong (h + \mu(g)f)O_{C_2,p} \text{ et } (Q_2^\vee(-p))_p \cong (hg + \mu(g)fg)O_{C_2,p}.$$

Les fibrés  $L_1^+$  et  $L_2^+$  se recollent en  $p$  si et seulement si les fibrés  $Q_1^\vee$  et  $Q_2^\vee(-p)$ , vus comme des sous-fibrés de  $I_X/I_X^2 \otimes_{O_X} O_{C_1}$  et de  $I_X/I_X^2 \otimes_{O_X} O_{C_2}$  respectivement, se

recollent en  $p$  (cf. [rH-aH] Proposition 2.2 et Proposition 2.4).

Dans  $(I_X/I_X^2)_p \otimes_{O_{X,p}} O_{\{p\}} \cong (f)k + (gh)k$  l'image de  $(Q_1^\vee)_p$  est  $(f + a_0gh)k$  et l'image de  $(Q_2^\vee(-p))_p$  est  $(gh)k$ ; donc ces fibrés ne se recollent pas.

#### § 1.4. De bonnes intersections.

Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-schémas fermés d'un schéma  $H$  ayant intersection non vide, on a  $\dim(M \cap N) \geq \dim M + \dim N - \dim H$ ; si on a l'égalité on dit que  $M$  et  $N$  se coupent en bonne dimension.

**Lemme 1.4.1.** Soient  $S, S'$  et  $W$  des sous-schémas localement fermés d'un schéma  $H$ , avec  $S \neq H$ ,  $S' \subseteq \overline{S}$  ( $\overline{S}$  désigne l'adhérence de  $S$  dans  $H$ ),  $\text{codim}_H S' = b$  et  $\dim W \geq w$ . S'il existe  $x \in S' \cap W$  tel que  $\dim_x(S' \cap W) = w - b$ , alors  $(H - S) \cap W$  est non vide et il a une composante irréductible de dimension  $w$ .

Preuve. Posons  $\text{codim}_H(S) = a$ . Si par absurde  $(H - S) \cap W$  est vide alors  $W \subset S$ .

Dans  $\overline{S}$  on a, si  $\overline{S'} = \overline{S}$   $w \leq \dim_x W = w - b$ , absurde; si  $\overline{S'} \neq \overline{S}$   
 $w - b = \dim_x(S' \cap W) \geq \dim_x S' + \dim_x W - \dim_x S \geq w - b + a$ , absurde.

Si par absurde toute composante irréductible de  $(H - S) \cap W$  est de dimension supérieure ou égale à  $w + 1$ , on a  $w - b = \dim_x(W \cap S') \geq \dim_x W + \dim_x S' - \dim_x S \geq w + 1 - b$ , contre l'hypothèse.

**Théorème 1.4.2.** Le fibré normal de la courbe générale de toute strate  $M(a,b,c)$  est de type général.

Preuve. D'après la Proposition 3 énoncée dans l'Introduction, on a

$M(d-2,1,1) \subset N(d-1,d-1)$ .  $M(d-2,1,1)$  est contenue dans la adhérence  $\overline{M}(a,b,c)$  de chaque strate  $M(a,b,c)$ ; alors, en appliquant le Lemme 1.4.1 avec  $H = \overline{M}(a,b,c)$ ,  $S = \overline{M}(a,b,c) - M(a,b,c)$ ,  $S' = M(d-2,1,1)$  et  $W = N(d-1,d-1) \cap \overline{M}(a,b,c)$ , on a la thèse.

On va démontrer le Théorème 1.4.6 en utilisant les courbes  $X$  associations d'une courbe lisse  $C$  et d'une cubique rationnelle lisse  $C_3$ .

Compte tenu de l'étude faite sur les sous-faisceaux du fibré normal  $N_X$  de  $X$  dans le paragraphe 1.3 (Définition 1.3.2, Définition 1.3.3 et Proposition 1.3.6) et du fait que le type de scindage de  $N_{C_3}(-1)$  est  $(2,2)$ , on obtient le Lemme suivant.

**Lemme 1.4.3.** Soit  $X$  l'association d'une cubique rationnelle lisse  $C_3$  et d'une courbe rationnelle lisse  $C$  dont le fibré  $N_C(-1)$  a le type de scindage  $(\alpha,\beta)$ . On désigne par  $K$  le plan déterminé par les droites tangentes à  $C_3$  et à  $C$  en  $p = C_3 \cap C$  et par  $\mu(N_X(-1))$  le degré maximum des sous-faisceaux de rang 1 de  $N_X(-1)$ .

1) Si  $\alpha = \beta$ , il existe un (unique) sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  et un (unique) sous-fibré maximal  $M$  de  $N_{C_3}(-1)$  définissant en  $p$  le plan  $K$ ; s'ils ne se recollent pas dans  $N_X(-1)$  on a  $\mu(N_X(-1)) = \alpha + 3$  (Proposition 1.3.6, Définition 1.3.2, Définition 1.2.4), au contraire s'ils se recollent dans  $N_X(-1)$  on a  $\mu(N_X(-1)) = \alpha + 4$ .

2) Supposons  $\alpha > \beta$ , si le sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  ne définit pas en  $p$  le plan  $K$  on a  $\mu(N_X(-1)) = \alpha + 2$  (Proposition 1.3.6); si  $L$  définit en  $p$  le plan  $K$ , soit  $M$  le sous-fibré maximal de  $N_{C_3}(-1)$  définissant en  $p$  le plan  $K$ , si  $L$  et  $M$  ne se recollent pas dans  $N_X(-1)$  on a  $\mu(N_X(-1)) = \alpha + 3$ , s'ils se recollent dans  $N_X(-1)$  on a  $\mu(N_X(-1)) = \alpha + 4$ .

En utilisant la condition de recollement de la Proposition 1.3.5, on obtient le résultat suivant:

**Lemme 1.4.4.** Soient  $C$  une courbe lisse de  $\mathbf{P}^3$ ,  $L$  un sous-fibré de rang 1 du fibré normal  $N_C$  de  $C$ ,  $p$  un point de  $C$ . On désigne par  $K$  le plan défini par  $L$  en  $p$ . Soit  $R$  le sous-schéma

(irréductible) de  $\mathbb{H}_3$  défini par la famille des courbes cubiques rationnelles lisses passant par  $p$  ayant la droite tangente en  $p$  contenue dans le plan  $K$  mais différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$ . Alors

i) pour la courbe générale  $C_3$  de  $R$  le sous-fibré maximal  $M$  de  $N_{C_3}$  définissant le plan  $K$  en  $p$  ne se recolle pas avec le fibré  $L$  en  $p$  dans  $N_X$ ,  $X = C \cup C_3$  ;

ii) il existe une cubique rationnelle lisse  $C_3$  de  $R$ , coupant  $C$  seulement en  $p$  et un sous-fibré maximal  $M$  du fibré normal  $N_{C_3}$  de  $C_3$  tel que  $L$  et  $M$  se recollent en  $p$  dans  $N_X$ ,  $X = C \cup C_3$ .

Preuve. Soit  $D = \text{Spec } k[\varepsilon]_{/(\varepsilon^2)}$ , les plongements  $i: D \times D \rightarrow \mathbb{P}^3$  décrivent les 0-schémas de  $\mathbb{P}^3$  de longueur 4 concentrés en un point intervenant dans la condition de recollement de la Proposition 1.3.5.

Soient  $x, y, z$  des coordonnées locales du point  $p$  de  $\mathbb{P}^3$  et supposons que  $z = 0$  soit l'équation du plan  $K$ . Un plongement  $i$ , dont l'image schématique est un 0-schéma de longueur 4 concentré en  $p$  ayant le plan  $K$  comme espace tangent, est donné par un morphisme surjectif  $k[x, y, z]_{(x, y, z)} \rightarrow k[\varepsilon_1, \varepsilon_2]_{/(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2)}$ , dont le noyau  $I$  est un idéal de  $k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  contenant l'idéal  $(z)m + m^3$ , où  $m = (x, y, z)$ , et ne contenant pas les éléments du type  $c_1 + c_2x + c_3y$  avec  $c_i \in k$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

Soit  $J = I_{/ (z)m + m^3}$ , le plongement  $i$  induit la suite exacte d'espaces vectoriels suivante:  
 $0 \rightarrow J \rightarrow k\{z, x^2, xy, y^2\} \rightarrow k \rightarrow 0$ , on a noté  $k\{z, x^2, xy, y^2\}$  le  $k$ -espace vectoriel de dimension 4 engendré par  $z, x^2, xy, y^2$ .

Le schéma  $Q(p, K)$  des 0-schémas de longueur 4 décrits ci-dessus est un ouvert de l'espace projectif  $(\mathbb{P}^3)^\vee$ .

Une courbe double de Ferrand  $(C, L)$  passant par  $p$  et ayant le plan  $K$  comme espace tangent en  $p$  est définie, localement en  $p$ , par un idéal de  $k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  du type  $(f, g^2)$ , la partie de premier degré de  $f$  est  $z$ , supposons que la partie de premier degré de  $g$  soit  $y$ , ainsi la droite tangente à  $C$  en  $p$  a équations  $z = y = 0$ . Alors l'idéal  $(f, g^2) + m^3$  est du type  $(z + bxy, y^2) + m^3$ ,  $b \in k$ . On note que on a  $b = 0$  si et seulement si  $p$  est un point d'inflexion de  $C$  ou  $K$  est le plan osculateur à  $C$  en  $p$  (cf. [IR1] ch.IV Lemme 3.2).



Les 0-schémas de longueur 4 de  $Q(p,K)$  contenus dans la courbe double  $(C,L)$  sont définis par les idéaux du type  $(z + bxy, y^2, x^2 + txy)$ , avec  $t \in k$ , donc ces sont les points d'une droite  $s$  de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$ .

On considère la famille  $\text{Aut}(\mathbf{P}^3, p, K)$  des automorphismes  $\varphi : \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^3$  tels que  $\varphi(p) = p$  et  $\varphi(K) = K$ . Localement en  $p$ , un tel  $\varphi$  est décrit par la transformation de coordonnées  $\varphi(x,y,z) = (l_1x + l_2y + l_3z, m_1x + m_2y + m_3z, nz)$  avec  $n \neq 0$  et  $l_1m_2 - l_2m_1 \neq 0$ .

Supposons que l'image par  $\varphi$  de la droite  $z = y = 0$  ne soit pas elle-même, i.e.  $m_1 \neq 0$ .

Soient  $C_3$  une courbe cubique rationnelle lisse passant par  $p$  et  $M$  un sous-fibré inversible du fibré normal de  $C_3$  définissant le plan  $K$  en  $p$ .

Si  $(z + axy, y^2) + m^3$ ,  $a \in k$ , est l'idéal somme de  $m^3$  avec l'idéal définissant localement en  $p$  la courbe double  $(C_3, M)$ , les 0-schémas de longueur 4 de  $Q(p,K)$  contenus dans la courbe double  $(C_3, M)$  sont définis par les idéaux  $(z + axy, y^2, x^2 + txy)$  avec  $t \in k$  et ils donnent une droite  $r$  de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$ .

Tout automorphisme  $\varphi$  de  $\text{Aut}(\mathbf{P}^3, p, K)$  induit canoniquement un automorphisme  $\phi : Q(p, K) \rightarrow Q(p, K)$ .

Les courbes doubles de Ferrand  $\varphi(C_3, M)$  et  $(C, L)$  se coupent en un 0-schéma de longueur 4 de  $Q(p, K)$  si et seulement si les droites  $\phi(r)$  et  $s$  de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  se coupent en un point, c'est à dire si et seulement si le sous-espace vectoriel  $k\{\overline{\varphi}(z + axy), \overline{\varphi}(y^2), z + bxy, y^2\}$  de  $k\{z, x^2, xy, y^2\}$  est de dimension 3; on a noté  $\overline{\varphi}$  l'isomorphisme induit par  $\varphi$  en quotientant par l'idéal  $(z)m + m^3$ .

Il s'agit d'étudier la matrice suivante:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} n & al_1m_1 & al_1m_2 + al_2m_1 & al_2m_2 \\ 0 & m_1^2 & 2m_1m_2 & m_2^2 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étudions d'abord le cas  $b \neq 0$ . Considérons le déterminant  $\det A_\varphi$  de  $A_\varphi$  comme un polynôme en  $n, l_1, l_2, m_1, m_2$ . Dans le polynôme  $\det A_\varphi$  on trouve le monôme  $bnm_1^2$ , donc pour une transformation  $\varphi$  de  $\text{Aut}(\mathbb{P}^3, p, K)$  générale on a  $\det A_\varphi \neq 0$ .

Si  $a = 0$ , on a  $\det A_\varphi = bnm_1^2 \neq 0$  pour toute  $\varphi$ .

Mais si  $a \neq 0$ , pour la transformation  $\varphi$  donnée par  $(n, l_1, l_2, m_1, m_2) = (1, 0, \frac{b}{a}, 1, 0)$  la matrice  $A_\varphi$  est de rang 3 et donc les deux courbes doubles se coupent en un 0-schéma de longueur 4 de  $\mathbb{Q}(p, K)$ .

Considérons le cas  $b = 0$ ; on a  $\det A_\varphi = am_1^2(l_1m_2 - l_2m_1)$ . Donc si  $a \neq 0$  on a  $\det A_\varphi \neq 0$  pour toute  $\varphi$  et si  $a = 0$   $A_\varphi$  est de rang 3 pour toute  $\varphi$ .

Ainsi dans tous les deux cas on obtient les parties i) et ii) du Lemme.

**Lemme 1.4.5.** Si l'intersection des strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  contient une composante irréductible de la bonne dimension, alors l'intersection des strates  $M(a+n,b+n,c+n)$  et  $N(\alpha+4n,\beta+2n)$  de  $\mathring{H}_{d+3n}$  satisfait elle aussi la propriété ci-dessus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Preuve. Il suffit de considérer  $n = 1$ .

On note  $W = W_{d+3}(a+1,a+b+2) \cap J_{d+3}(\alpha+4)$ , si  $W \neq \emptyset$  on a

$\dim W \geq 4(d+3) - \delta(a,b,c) - (\alpha - \beta + 1) = 4d - \delta(a,b,c) - \alpha + \beta + 11$ , où  $\delta(a,b,c)$  est la codimension de  $M(a,b,c)$ .

Soit  $R_{d+3}$  la famille des courbes  $X$  qui sont l'association d'une courbe rationnelle lisse  $C$  de degré  $d$  et d'une cubique rationnelle lisse  $C_3$ ;  $R_{d+3}$  est un sous-schéma localement fermé irréductible de  $H_{d+3}$  de codimension 1.

On va démontrer qu'il existe une courbe  $X$  de  $W \cap R_{d+3}$  telle que  $\dim_X(W \cap R_{d+3}) = 4d - \delta(a,b,c) - \alpha + \beta + 10$ , ainsi en appliquant le Lemme 1.4.1 on a la thèse ( $H = H'_{d+3}$ ,  $S' = R_{d+3}$  et  $S = H'_{d+3} - \mathring{H}_{d+3}$ ).

D'abord supposons  $\alpha = \beta$ .

Si  $X = C \cup C_3 \in W \cap R_{d+3}$ , alors  $C$  est une courbe de  $M(a,b,c)$ .

Soit  $R'$  la famille des courbes  $X$  associations d'une cubique rationnelle lisse  $C_3$  et d'une courbe  $C$  de  $M(a,b,c)$  dont le fibré  $N_C(-1)$  a le type de scindage  $(\alpha, \alpha)$ .

Puisque la courbe générale de  $M(a,b,c)$  a la propriété ci-dessus (cf. Théorème 1.4.2), on a  $\dim R' = 4d - \delta(a,b,c) + 11$ .

On considère une courbe  $X = C \cup C_3 \in R'$ .

Soit  $K$  le plan déterminé par les droites tangentes à  $C$  et à  $C_3$  en  $p = C \cap C_3$ ; soient  $L$  et  $M$  les sous-fibrés maximaux de  $N_{C(-1)}$  et  $N_{C_3(-1)}$ , respectivement, définissant le plan  $K$  en  $p$ .

Alors  $X \in W$  si et seulement si les fibrés  $L$  et  $M$  se recollent en  $p$  dans  $N_X(-1)$  (cf. Lemme 1.4.3).

D'après le Lemme 1.4.4, pour la courbe générale de  $R'$  les fibrés  $L$  et  $M$  ne se recollent pas, mais il existe une courbe  $X$  de  $R'$  satisfaisant la condition de recollement; donc on a  $\dim_X(W \cap R_{d+3}) \leq \dim R' - 1 = 4d - \delta(a,b,c) + 10$ .

Il reste à considérer le cas  $\alpha > \beta$ .

Si  $X = C \cup C_3 \in W \cap R_{d+3}$ , alors  $C$  est une courbe de  $M(a,b,c)$  dont le fibré  $N_C(-1)$  a le type de scindage  $(\lambda, \mu)$ , où  $\lambda \geq \alpha$ .

Soit  $R^{(1)}$  la famille des courbes  $X = C \cup C_3$  de  $R_{d+3}$  telles que  $C$  soit un élément d'une composante irréductible de l'intersection  $M(a,b,c) \cap N(\alpha, \beta)$  ayant la bonne dimension.

On a  $\dim R^{(1)} = 4d - \delta(a,b,c) - \alpha + \beta + 12$ .

Si  $X = C \cup C_3 \in R^{(1)}$ , on note  $L$  l'unique sous-fibré maximal de  $N_C(-1)$  et  $K$  le plan défini par  $L$  en  $p = C \cap C_3$ .

Alors  $X \in R^{(1)} \cap W$  si et seulement si

- i) la droite tangente à  $C_3$  en  $p$  est sur le plan  $K$  et
- ii) le sous-fibré maximal  $M$  de  $N_{C_3(-1)}$ , définissant le plan  $K$  en  $p$ , se recolle avec le fibré  $L$

en  $p$  dans  $N_X(-1)$  (cf. Lemme 1.4.3).

Soit  $R^{(2)}$  la famille des courbes  $X$  de  $R^{(1)}$  satisfaisant la condition i) ci-dessus.

$R^{(2)}$  n'est pas vide et, puisque la courbe générale de  $R^{(1)}$  ne satisfait pas la i), on a  $\dim R^{(2)} \leq \dim R^{(1)} - 1$ .

D'après le Lemme 1.4.4 on a que la courbe générale de  $R^{(2)}$  ne satisfait pas la condition ii) ci-dessus, mais il existe une courbe  $X$  de  $R^{(2)}$  satisfaisant la condition de recollement ii).

On a  $\dim_X(W \cap R_{d+3}) \leq \dim R^{(2)} - 1 \leq \dim R^{(1)} - 2 = 4d - \delta(a,b,c) - \alpha + \beta + 10$ .

**Théorème 1.4.6.** Si  $c+\beta \geq d$ , les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

Preuve. Si  $c = 1$ , c'est le Théorème 1.4.2. Soit  $c \geq 2$ , l'intersection, dans  $\mathring{H}_{d-3(c-1)}$ , des strates  $M(d-3c+1,1,1)$  et  $N(d-3c+2,d-3c+2)$  n'est pas vide et elle a la bonne dimension (cf. Proposition 3 de l'Introduction). Alors d'après le Lemme 1.4.5 l'intersection des strates  $M(d-2c,c,c)$  et  $N(d+c-2,d-c)$  de  $\mathring{H}_d$  contient une composante irréductible de la bonne dimension. La strate  $M(a,b,c)$  est plus générale que la strate  $M(d-2c,c,c)$  et, si  $\beta \geq d-c$ , la strate  $N(\alpha,\beta)$  est plus générale que la strate  $N(d+c-2,d-c)$ . Alors, en appliquant le Lemme 1.4.1 (comme dans la démonstration du Théorème 1.4.2), on obtient la thèse.



## § 1.5. Le fibré normal et les surfaces caractéristiques.

On rappelle les définitions et quelques résultats concernant les morphismes de Gauss et les surfaces caractéristiques (qui sont des surfaces réglées développables) associées aux sous-fibrés inversibles du fibré normal d'une courbe de  $\mathbf{P}^3$  (cf.[EV1], [EV2], [IR1] et [IR3]).

Soient  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  et  $f: C \rightarrow \mathbf{P}^3$  un morphisme de  $C$  dans  $\mathbf{P}^3$  de degré  $d$ .

**Définition 1.5.1.** La suite exacte d'Euler induit la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow f^*O_{\mathbf{P}^3}(-1) \rightarrow k^4 \otimes O_C \rightarrow f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1) \rightarrow 0.$$

Alors tout sous-fibré  $F$  de rang  $r$  de  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$  donne canoniquement un morphisme, appelé morphisme de Gauss,  $\varphi: C \rightarrow G(r,3)$  de  $C$  dans la Grassmannienne des droites de  $\mathbf{P}^3$  si  $r = 1$ , ou des plans de  $\mathbf{P}^3$  si  $r = 2$ .

Si  $r = 1$  [ $r = 2$ ], la droite [ le plan ] de  $\mathbf{P}^3$  représentant le point  $\varphi(x)$  passe par le point  $f(x)$  de la courbe  $f(C)$  et c'est appelé la droite définie [le plan défini] par la fibre de  $F$  en  $x$ .

On considère la suite exacte suivante  $0 \rightarrow T_C \rightarrow f^*T_{\mathbf{P}^3} \rightarrow N_f \rightarrow 0$ .

Si  $f$  est un plongement, alors  $N_f$  est un fibré et il est isomorphe au fibré normal  $N_C$  de la courbe  $f(C)$  dans  $\mathbf{P}^3$ . Dans ce cas, si  $L$  est un sous-fibré inversible de  $N_C(-1)$ , l'image réciproque de  $L$  dans  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$  est un sous-fibré  $E_L$  de rang 2 de  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$ . On appelle morphisme (de Gauss) associé à  $L$  le morphisme de Gauss  $\lambda: C \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  associé au fibré  $E_L$ : à tout point  $x$  de  $C$ ,  $\lambda$  associe le plan (contenant la droite tangente à  $C$  en  $x$ ) défini par la fibre de  $E_L$  en  $x$ .

**Remarque 1.5.2.** On note  $\mathcal{Q}(r,3)$  le quotient universel de la grassmannienne  $G(r,3)$ . Si  $F$  est un sous-fibré de rang  $r$  de  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$ , on note  $Q_F$  le fibré quotient, soit  $\varphi$  le morphisme de

Gauss associé à  $F$ , alors on a  $\varphi^*\mathcal{Q}(r,3) = Q_F$  et donc  $\deg \varphi = \deg Q_F = d - \deg F$ .

Si  $f$  est un plongement et  $L$  est un sous-fibré inversible de  $N_C(-1)$ , on note  $Q_L$  le fibré quotient, alors le morphisme de Gauss  $\lambda$  associé à  $L$  est de degré  $\deg \lambda = \deg Q_L = 2d - 2 + 2g - \deg L$ .

**Remarque 1.5.3.** Un sous-fibré inversible  $F$  de  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$  donne un morphisme de Gauss  $\varphi : C \rightarrow G(1,3)$ . On note  $U(1,3)$  le schéma universel de la grassmannienne  $G(1,3)$  et  $K_F$  le fibré (de rang 2) noyau du morphisme surjectif  $k^4 \otimes_{\mathcal{O}_C} \rightarrow Q_F$  induit par  $F$ . Soit  $\tilde{T}$  le fibré projectif  $\mathbf{P}(K_F^\vee)$ , on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \xrightarrow{\pi_2} & U(1,3) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ C & \xrightarrow{\varphi} & G(1,3) \end{array}$$

Soit  $T$  la surface projection de  $\tilde{T}$  dans  $\mathbf{P}^3$ ,  $T$  est une surface réglée contenant  $f(C)$ . Si  $\varphi$  est birationnel,  $\tilde{T}$  est la désingularisation de  $T$ ,  $C$  provient d'une section unisécante de  $\tilde{T}$  et  $T$  est de degré  $d - \deg F$ .

Vice versa, si  $T$  est une surface réglée de  $\mathbf{P}^3$  contenant  $f(C)$  telle que pour le point général de  $C$  passe une seule droite génératrice de  $T$ , alors  $T$  donne un sous-fibré inversible  $F$  de  $f^*T_{\mathbf{P}^3}(-1)$ ; si la droite génératrice générale de  $T$  coupe  $f(C)$  seulement en un point, alors  $F$  est de degré  $d - \deg T$ .

**Rappels 1.5.4.** On note  $\wp^m(f^*O_{\mathbf{P}^3}(-1))$  le fibré des parties principales d'ordre  $m$  ( $m = 1,2$ ). On a un morphisme canonique  $a^m : (k^4)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_C} \rightarrow \wp^m(f^*O_{\mathbf{P}^3}(-1))$ ; ce morphisme est surjectif seulement en les points  $x$  de  $C$  qui ne sont pas points de ramifications et tels que  $f(x)$  ne soit pas un point de rebroussement. On note  $\wp_f^m$  le fibré image de  $a^m$ . Ce fibré donne canoniquement un morphisme  $\tau_f^m : C \rightarrow G(m,3)$ .

$\tau_f^1(x)$  représente la droite tangente à  $f(C)$  en  $f(x)$ ;  $\tau_f^2(x)$  représente le plan osculateur à  $f(C)$  en  $f(x)$ .

On considère le faisceau normal  $N_f$  de  $f$ , ce faisceau est libre seulement en les points  $x$  de  $C$  qui ne sont pas points de ramifications et tels que  $f(x)$  ne soit pas un point de rebroussement.

On note  $N_f'$  le fibré quotient de  $N_f$  par son sous-faisceau de torsion. On a la suite exacte (cf. [IR3])  $0 \rightarrow (\mathcal{O}_f^1)^\vee \rightarrow k^4 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow N_f'(-1) \rightarrow 0$ .

a) Supposons que  $f$  soit un morphisme non dégénéré.

La courbe de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  image de  $\tau_f^2$  est appelée courbe duale de  $f(C)$ .

La projection de  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_f^1)$  dans  $\mathbf{P}^3$  donne la surface  $S$  des droites tangentes à  $f(C)$ .

Si  $f$  est birationnel, la surface  $S$  est de degré  $\text{deg } S = 2d - 2 + 2g - \chi$ , où  $\chi$  est le nombre des cusps de  $f(C)$  (cf. [rP] et [IR3]).

La projection de  $\mathbf{P}(N_f'(-1))$  dans  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  est dite la surface duale de  $f(C)$ . Cette surface coïncide avec la surface des droites tangentes à la courbe duale de  $f(C)$  (cf. [rP]).

b) Supposons que  $f$  soit un morphisme dégénéré et on note  $H$  le plan contenant la courbe  $f(C)$ . L'image du morphisme  $\tau_f^1$  est une courbe plane appelée courbe duale (plane) de  $f(C)$ .

On note  $N_{f,H}$  le faisceau quotient de  $f^*T_H$  par  $T_C$  et  $N_{f,H}'$  le fibré quotient de  $N_{f,H}$  par son sous-faisceau de torsion. Alors on a  $N_f'(-1) \simeq \mathcal{O}_C \oplus N_{f,H}'(-1)$ .

La projection de  $\mathbf{P}(N_f'(-1))$  dans  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  est un cône de sommet le point défini par le plan  $H$  et sa section plane, qui est la projection de  $\mathbf{P}(N_{f,H}'(-1))$ , est la courbe duale (plane) de  $f(C)$ .

**Définition 1.5.5.** Soient  $f$  est un plongement de  $C$  dans  $\mathbf{P}^3$ ,  $L$  un sous-fibré inversible de  $N_C(-1)$  et  $\lambda$  le morphisme de Gauss associé.

On note  $G(1,3)^\vee$  l'espace dual de la grassmannienne  $G(1,3)$ , c'est-à-dire la grassmannienne des droites de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  et on note  $i: G(1,3)^\vee \rightarrow G(1,3)$  l'isomorphisme canonique.

Pour tout  $x \in C$  on appelle droite caractéristique de  $L$  en  $x$  (ou en  $p = f(x)$ ) la droite correspondant au point  $i \circ \tau_\lambda^1(x)$  de la grassmannienne  $G(1,3)$  des droites de  $\mathbf{P}^3$ .

La surface  $S$  projection naturelle du fibré projectif  $\mathbf{P}(N_\lambda'(-1))$  dans  $\mathbf{P}^3$  est appelée surface caractéristique de  $L$ , c'est la réunion des droites caractéristiques de  $L$  (cf. Rappels 1.5.4).



**Proposition 1.5.6.** (cf. [EV2] Proposition 3.1 et Proposition 3.2 et [IR3]) On considère une courbe lisse  $X$  de  $\mathbf{P}^3$  et un sous-fibré linéaire  $L$  du fibré normal  $N_X$  de  $X$ . On a que la droite caractéristique de  $L$  en un point  $p$  de  $X$  passe par le point  $p$ ; donc la surface caractéristique de  $L$  contient la courbe  $X$ .

**Remarque 1.5.7.** Soient  $f$  est un plongement de  $C$  dans  $\mathbf{P}^3$ ,  $L$  un sous-fibré inversible de  $N_C(-1)$  et  $\lambda$  le morphisme de Gauss associé; on note  $\Lambda$  la courbe image du morphisme  $\lambda$ .

a) Supposons que la courbe  $\Lambda$  soit gauche. Alors la surface caractéristique  $S$  de  $L$  est la surface duale de  $\Lambda$  et coïncide avec la surface des droites tangentes de la courbe duale de  $\Lambda$ , qui est appelée courbe de régression de  $S$ . Les plans tangents de  $S$  sont les plans définis par le fibré  $L$ . Plus précisément la droite caractéristique de  $L$  en  $x$  coïncide avec la droite tangente à la courbe duale de  $\lambda(C)$  en le point  $\tau_\lambda^2(x)$  et le plan défini par la fibre de  $L$  en  $x$  coïncide avec le plan osculateur à la courbe duale de  $\lambda(C)$  en le point  $\tau_\lambda^2(x)$ .

b) Supposons maintenant  $\Lambda$  plane. La surface caractéristique  $S$  de  $L$  est un cône de sommet le point correspondant au plan de  $(\mathbf{P}^3)^\vee$  contenant la courbe  $\Lambda$  et ayant comme section plane la courbe duale (plane) de  $\Lambda$ . Aussi dans ce cas les plans tangents de  $S$  sont les plans définis par le fibré  $L$ .

c) (cf. Rappels 1.5.4) La surface caractéristique  $S$  de  $L$  est de degré  $\deg S = 2(\deg \Lambda) - 2 + 2g(\Lambda) - \chi(\Lambda)$ , où  $g(\Lambda)$  désigne le genre géométrique de  $\Lambda$  et  $\chi(\Lambda)$  le nombre des cusps de  $\Lambda$  (cf. [rP] pour la définition de  $\chi(\Lambda)$ ).

Selon la terminologie de la géométrie classique (cfr. [wIE] ch.I et ch.X, [S-R] ch.IV §7 et ch.10 §2), la surface caractéristique  $S$  d'un sous-fibré linéaire  $L$  de  $N_C$  est la surface enveloppe des plans donnés par la fibre de  $E_L$  aux points  $x$  de  $C$ .

Dans [IR3] on prouve le Théorème suivant:

**Théorème 1.5.8.** Soient  $C$  une courbe rationnelle lisse de  $\mathbf{P}^3$  de degré  $d > 3$  et  $L$  un sous-fibré inversible maximal de  $N_C(-1)$ .

Alors le morphisme de Gauss associé  $\lambda : C \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  est birationnel.

Ce Théorème améliore la démonstration d'un résultat de [EV2] et c'est utilisé dans la preuve des résultats des prochains paragraphes.



## § 1.6. Des intersections vides.

La courbe générale de chaque strate de la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré tangent restreint a un fibré normal de type général (Théorème 1.4.2). Pour la stratification par le fibré normal, on n'a pas l'analogue:

**Proposition 1.6.1.** Si  $d \geq 6$ , la strate  $N(2d-5,3)$  est contenue dans la strate  $M(d-4,2,2) \cup M(d-4,3,1)$ , en outre si  $d \geq 8$  les courbes de la strate  $N(2d-5,3)$  n'ont pas le fibré tangent restreint de type général.

Preuve. Il suffit de démontrer que le fibré  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  a un sous-fibré inversible de degré  $d-4$ . On considère le sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  et le morphisme de Gauss associé  $\lambda : C \rightarrow (\mathbb{P}^3)^\vee$ . La courbe  $\Lambda = \lambda(C)$  est rationnelle et de degré 3.

Si  $\Lambda$  est gauche ou si  $\Lambda$  est plane avec un nœud comme singularité, la surface caractéristique  $S_L$  de  $L$  a degré 4 (cf. Remarque 1.5.7). Alors  $S_L$  induit un sous-fibré inversible  $F_L$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de degré  $d-4$  (cf. Remarque 1.5.3).

Si  $\Lambda$  est une courbe plane ayant un point de rebroussement comme singularité, alors la surface caractéristique  $S_L$  de  $L$  est un cône ayant comme section plane une cubique rationnelle avec un point de rebroussement.  $C$  est une courbe lisse contenue dans  $S_L$  et  $\lambda$  est birationnel; si  $\pi$  est un plan général passant par le sommet du cône  $S_L$ , l'intersection  $\pi \cap S_L$  est constituée par trois droites génératrices du cône, donc l'intersection  $\pi \cap C$  peut être constituée au maximum par 4 points. Ce cas ne se présente pas parce que  $d \geq 6$ .

**Remarque 1.6.2.** D'après la Proposition 1.6.1, on a que pour tout  $d \geq 8$  il existe des paires de strates de  $\mathring{H}_d$  se coupant le long d'un sous-schéma n'ayant aucune composante irréductible de la bonne dimension.

On réussit à obtenir quelques relations entre les entiers  $\alpha, \beta$  et  $a, b, c$  qui interviennent dans le type de scindage des fibrés  $N_C(-1)$  et  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  d'une courbe  $C$ .

**Théorème 1.6.3** Soit  $C$  une courbe rationnelle lisse de degré  $d$  de  $\mathbb{P}^3$ . On note  $(\alpha, \beta)$  le type de scindage de  $N_C(-1)$ . Le degré maximum d'un fibré inversible de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  est supérieur ou égal à  $d - 2\beta + 2$ ; c'est-à-dire  $N(\alpha, \beta) \subset \bigcup_{a \geq d - 2\beta + 2} M(a, b, c)$ .

Si  $C$  est la courbe générale de  $N(\alpha, \beta)$  alors  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  a un sous-fibré inversible de degré exactement égal à  $d - 2\beta + 2$ .

Preuve. Soit  $L$  le sous-fibré maximal de  $N_C(-1)$ , il donne un morphisme de Gauss  $\lambda : C \rightarrow (\mathbb{P}^3)^\vee$  de degré  $\beta$  et birationnel (Théorème 1.6.7). Soit  $\Lambda$  la courbe  $\lambda(C)$ , la surface caractéristique  $S_L$  de  $L$  est une surface réglée développable de degré  $2\beta - 2 - \chi$ , où  $\chi$  est le nombre des points de rebroussement de  $\Lambda$  (Remarque 1.5.7).  $S_L$  donne un sous-fibré inversible  $F_L$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de degré  $d - \deg S_L$ .

En outre si  $C$  est la courbe générale de  $N(\alpha, \beta)$ , la courbe  $\Lambda$  n'a pas de points de rebroussement (cf. [EV2]); donc on a la thèse.

Le sous-fibré inversible de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de degré  $d - 2\beta + 2$  du Théorème ci-dessus n'est pas nécessairement maximal, il suffit de considérer le cas  $\beta = d - 1$ , mais pour  $\beta$  assez petit on a le résultat suivant:

**Corollaire 1.6.4.** Si  $C$  est une courbe générale de la strate  $N(\alpha, \beta)$  de  $\mathring{H}_d$  avec  $\beta \leq \frac{d+6}{4}$  alors le degré maximum des sous-fibrés inversibles de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  est  $d - 2\beta + 2$ .

Preuve. D'après le Théorème 1.6.3,  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  a un sous-fibré inversible de degré  $d - 2\beta + 2$ , supposons par absurde que le degré maximum de ses sous-fibrés inversibles soit  $a$ , avec  $a > d - 2\beta + 2$ , alors on a  $b = d - 2\beta + 2$  ou  $c \geq d - 2\beta + 2$ .  
 Si  $b = d - 2\beta + 2$  on a  $d > 2b + 2 = 2d - 4\beta + 6$  et donc  $\beta > \frac{d+6}{4}$  qui est absurde.  
 Si  $c \geq d - 2\beta + 2$  on a  $d \geq 3c + 2 = 3d - 6\beta + 8$  et donc  $\beta \geq \frac{d+4}{3} > \frac{d+6}{4}$  qui est absurde.

D'après le Théorème 1.6.3 on obtient

**Corollaire 1.6.5.** Si  $c \geq \beta$ , les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  ne se coupent pas.



## DEUXIÈME PARTIE

### Utilisation des droites caractéristiques

#### § 2.1. Le fibré normal de l'association d'une courbe et d'une droite.

Soit  $C$  une courbe lisse de  $\mathbf{P}^3$ ; on va chercher les droites  $D$  coupant  $C$  en un unique point  $p$ , telles que le fibré normal  $N_X$  de l'association  $X$  de  $C$  et  $D$  ait un sous-faisceau maximal de degré le plus grand possible.

Étant donné un sous-fibré inversible maximal  $L$  du fibré normal  $N_C$  de  $C$ , on doit chercher les droites  $D$  passant par  $p$ , coupant  $C$  seulement en  $p$ , contenues dans le plan  $K$  défini par le fibré  $L$  en  $p$ , satisfaisant la condition suivante de recollement:

**Condition de recollement 2.1.1.** Le fibré  $L$  et le sous-fibré maximal  $M$  du fibré normal  $N_D$  de la droite  $D$ , définissant en  $p$  le plan  $K$ , se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de l'association  $X$  de  $C$  et  $D$ .

Nous avons besoin des Lemmes suivants:

**Lemme 2.1.2.** Soient  $C$  une courbe lisse gauche de  $\mathbf{P}^3$  et  $L$  un sous-fibré du fibré normal  $N_C$  de  $C$ . Alors la surface caractéristique  $S$  du fibré  $L$  contient la courbe double de Ferrand  $(C,L)$  induite par  $L$ .



Preuve. On note  $I_C$  le faisceau des idéaux définissant la courbe  $C$ . Le faisceau des idéaux  $J_C$  définissant la courbe double  $(C,L)$  est donné par la suite exacte suivante:  
 $0 \rightarrow Q^\vee \rightarrow I_C/I_C^2 \rightarrow L^\vee \rightarrow 0$ , où  $Q^\vee$  est isomorphe à  $J_C/I_C^2$ .

On considère la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow I_C/I_C^2 \xrightarrow{d} \Omega_{\mathbb{P}^3|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0.$$

Supposons que  $L$  soit la projection dans  $N_C$  du fibré osculateur de  $C$ . Dans ce cas la surface caractéristique  $S$  de  $L$  est la surface réunion des droites tangentes à  $C$ . Soit  $F=0$  l'équation de la surface  $S$  sur un ouvert affine  $U$  de  $\mathbb{P}^3$ , on note  $V=U \cap C$ ,  $F \in I_V$  et  $(dF)_p=0$  pour tout  $p \in V$ , alors  $F \in I_V^2 \subset J_V$ . Ceci signifie que la surface  $S$  contient la courbe double  $(C,L)$ .

Supposons maintenant que  $L$  ne coïncide pas avec la projection dans  $N_C$  du fibré osculateur de  $C$ . Alors  $C$  n'est pas la courbe de régression de  $S$ , ni une composante irréductible de la courbe nodale de  $S$  (en tout point  $p$  on a défini une unique droite caractéristique du fibré  $L$ ), donc  $C$  n'est pas contenue dans le lieu singulier de  $S$ .

Soit  $p$  un point de  $C$ , il existe un voisinage  $W$  de  $p$  dans  $\mathbb{P}^3$  et deux éléments  $f$  et  $g$  de l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(W)$  ayant les différentiels  $(df)_q$  et  $(dg)_q$  non nuls pour tout point  $q$  de  $U$  et tels que les idéaux définissant la courbe  $C$  et la courbe double  $(C,L)$  sur l'ouvert  $U=W \cap C$  soient respectivement  $I_U=(f,g)$  et  $J_U=(f,g^2)$ .

$f$  est un générateur de  $Q^\vee$  sur l'ouvert  $U$ , alors  $Q^\vee$  comme sous-fibré de  $\Omega_{\mathbb{P}^3|C}$  est généré sur l'ouvert  $U$  par  $df$ .

Si  $q$  est un point de  $U$ , l'élément  $(df)_q$  de  $\Omega_{\mathbb{P}^3,q}$  représente le plan tangente en  $q$  à la surface d'équation locale  $f=0$ , qui est aussi l'espace tangente de Zariski en  $q$  de la courbe double  $(C,L)$ , c'est à dire c'est le plan déterminé par la fibre en  $q$  du fibré  $L$ .

La surface caractéristique  $S$  est lisse au point général de  $C$  et alors on peut supposer qu'elle soit lisse aux points de  $U$ . Soit  $\varphi=0$  l'équation de  $S$  localement sur les points de  $U$ :  $\varphi \in I_U$  et  $(d\varphi)_q \neq 0$  pour tout  $q \in U$ . Alors  $\varphi \in J_U$  si et seulement si  $(d\varphi)=c(df)$ , où  $c$  est un élément de  $\mathcal{O}_C(U)$  ne s'annulant pas sur  $U$ :  $c_q \in \mathcal{O}_{C,q} - m_{C,q}$  pour tout  $q \in U$ ; ceci est vérifié parce que la

famille des plans tangents à la surface  $S$  aux points  $q$  de  $U$  coïncide avec la famille des plans déterminés par les fibres du fibré  $L$  aux points  $q$  de  $U$ .

Alors  $S$  contient un ouvert de la courbe double  $(C,L)$  et donc elle contient toute la courbe double  $(C,L)$ .

**Lemme 2.1.3.** Si  $p$  est un point lisse d'une courbe  $C$  de  $\mathbb{P}^3$ , l'idéal  $I_C$  de  $O_{\mathbb{P}^3,p}$  définissant la courbe  $C$  localement en  $p$  est généré par deux éléments  $f$  et  $g$ ; soit  $x$  un paramètre local de  $C$  en  $p$ . Alors on a que  $p$  n'est pas un point d'inflexion de  $C$  et que le plan tangent en  $p$  à la surface d'équation locale  $f = 0$  ne coïncide pas avec le plan osculateur à  $C$  en  $p$  si et seulement si on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p \neq 0.$$

Preuve. Soient  $x, y, z$  les coordonnées locales du point  $p$ ; on peut supposer que  $x$  soit un paramètre local de  $C$  en  $p$ ,  $y$  la partie de premier degré de  $g$  et  $z$  la partie de premier degré de  $f$ . Localement en  $p$  on a que  $I_C = (f, g)$ ,  $z = 0$  est l'équation du plan tangent en  $p$  à la surface d'équation locale  $f = 0$ ,  $z = y = 0$  sont les équations de la droite tangente à  $C$  en  $p$ .

Les éléments  $f$  et  $g$  vus dans le complété  $k[[x, y, z]]$  de l'anneau local  $O_{\mathbb{P}^3,p}$  sont du type  $f = z + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots$  et  $g = y + b_{20}x^2 + b_{11}xz + b_{02}z^2 + b_{30}x^3 + \dots$ , avec  $a_{ij}, b_{ij} \in k$ .

$p$  n'est pas un point d'inflexion de  $C$  si et seulement si l'idéal  $(z, y) + (f, g)$  est de colongueur 2, c'est à dire  $a_{20} \neq 0$  ou  $b_{20} \neq 0$ .

En outre  $z = 0$  n'est pas l'équation du plan osculateur à  $C$  en  $p$  si et seulement si l'idéal  $(z, f, g)$  est de colongueur 2, c'est à dire  $a_{20} \neq 0$ .

Puisque  $a_{20} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p$ , on a la thèse.

**Proposition 2.1.4.** Soit  $X$  l'association d'une courbe lisse  $C$  et d'une droite  $D$  se coupant en un point  $p$ . Supposons que

- a)  $p$  ne soit pas un point d'inflexion de  $C$ ,
- b) le plan  $K$  déterminé par la droite  $D$  et par la droite tangente à  $C$  en  $p$  ne coïncide pas avec le plan osculateur à  $C$  en  $p$ .

Soient  $L$  un sous-fibré inversible du fibré normal  $N_C$  de  $C$  définissant en  $p$  le plan  $K$  et  $M$  le sous-fibré inversible maximal du fibré normal  $N_D$  de la droite  $D$  définissant en  $p$  le plan  $K$ . Alors les fibrés  $L$  et  $M$  se recollent en  $p$  dans le fibré normal  $N_X$  de  $X$  (i.e. la droite  $D$  satisfie la Condition de recollement 2.1.1) si et seulement si  $D$  est la droite caractéristique en  $p$  du fibré  $L$ .

Preuve. (On note que sous les hypothèses a) et b) la droite caractéristique de  $L$  en  $p$  n'est pas tangente à  $C$  en  $p$ )

Soient  $x, y, z$  les coordonnées locales du point  $p$  et on note  $m_p$  l'idéal maximal de  $O_{\mathbb{P}^3, p}$ . Désignons par  $I_C = (f, g)$  et  $J_C = (f, g^2)$  les idéaux de  $O_{\mathbb{P}^3, p}$  définissant localement en  $p$

respectivement la courbe  $C$  et la courbe double de Ferrand  $(C, L)$ . On peut supposer que  $x$  soit un paramètre local de  $C$  en  $p$ ,  $y$  la partie de premier degré de  $g$  et  $z$  la partie de premier degré de  $f$ .

En considérant l'injection canonique de l'anneau local  $O_{\mathbb{P}^3, p}$  dans son complété  $k[[x, y, z]]$ , les éléments  $f$  et  $g$  sont du type  $f = z + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots$  et  $g = y + b_{20}x^2 + b_{11}xz + b_{02}z^2 + b_{30}x^3 + \dots$ , avec  $a_{ij}, b_{ij} \in k$ . L'équation du plan  $K$  est  $z = 0$  et pour le lemme ci-dessus on a  $a_{20} \neq 0$ .

Une droite  $D$  du plan  $K$  passant par  $p$  et différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$  est définie par un idéal du type  $I_D = (z, x+my)$ ; le sous-fibré maximal de  $N_D$  définissant en  $p$  le plan  $K$  donne à  $D$  une structure double du type  $J_D = (z, (x+my)^2)$ .

$$\text{On a } J_C + J_D = J_C + J_D + (m_p)^2 = (z, x^2 + 2mxy, a_{20}x^2 + a_{11}xy, y^2).$$

D'après le Lemme 2.1.2 on a  $a_{20} \neq 0$  et alors  $J_C + J_D$  est de colongueur 4 si et seulement

$$\text{si } m = a_{11}/2a_{20} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_p \Bigg/ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_p.$$

Soit  $U$  l'ouvert de  $C$  constitué par les points  $q$  de  $C$  tels que  $q$  ne soit pas un point d'inflexion et le plan  $K_q$  défini par la fibre  $L_q$  de  $L$  ne soit pas le plan osculateur à  $C$  en  $q$ . On a prouvé ci-dessus

que pour tout point  $q$  de  $U$  il existe une unique droite  $D_q$  du plan  $K_q$  passant par  $q$ , différente de la droite tangente à  $C$  en  $q$ , satisfaisant la Condition de recollement 2.1.1. En outre les droites  $D_q$  forment une famille algébrique plate sur  $U$ .

Supposons maintenant que le point  $p$  soit un point lisse de la surface caractéristique  $S$  du fibré  $L$ . Alors, puisque  $S$  contient la courbe double de Ferrand  $(C,L)$  définie par  $L$ , on peut supposer que l'équation  $f = 0$  considérée ci-dessus soit l'équation locale de la surface  $S$  en  $p$ . Alors  $f$  est du type  $f = z + (ax + by)^2 A$ , où  $a, b \in k$  et  $A \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, p} - m_p$ ; la droite définie par les équations  $z = ax + by = 0$  est la droite génératrice de  $S$  en  $p$ , c'est-à-dire la droite caractéristique de  $L$  en  $p$ , c'est aussi la droite satisfaisant la Condition de recollement 2.1.1.

Puisque  $p$  n'est pas un point d'inflexion de  $C$  et  $C$  n'est pas une composante irréductible du lieu singulier de la surface caractéristique  $S$ , si  $p$  est un point singulier de  $S$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans la courbe  $C$  constitué par des points  $q$  de  $C$  tels que

- i)  $q$  ne soit pas un point d'inflexion de  $C$ ,
- ii) le plan défini par la fibre  $L_q$  ne soit pas le plan osculateur à  $C$  en  $q$ ,
- iii) si  $q \neq p$ ,  $q$  est un point lisse de la surface  $S$ .

Soit  $\{D_q\}_{q \in V}$  la famille algébrique (plate) des droites vérifiant la condition de recollement décrite ci-dessus et soit  $\{R_q\}_{q \in V}$  la famille algébrique (plate) des droites caractéristiques du fibré  $L$  en les points de  $V$ . On a prouvé ci-dessus que  $R_q = D_q$  pour tout  $q \in V - \{p\}$ , alors on a aussi  $R_p = D_p$ .

**Remarque 2.1.5.** Les conditions a) et b) de la Proposition 2.1.4 sont "méchantes"; en effet, si une courbe  $C$ , un point  $p$  de  $C$  et un fibré  $L$  ne vérifient pas ces conditions, on peut avoir deux situations différentes:

- 1) aucune droite  $D$  ne satisfait la Condition de recollement 2.1.1,
- 2) toute droite du plan  $K$ , défini par le fibré  $L$  en  $p$ , passant par  $p$  et différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$  satisfait la Condition de recollement 2.1.1.

Pour prouver l'assertion, on fait usage des mêmes notations de la preuve de la Proposition 2.1.4. Si les conditions a) et b) de la Proposition 2.1.4 ne sont pas vérifiées on a  $a_{20} = 0$ .

Si  $a_{11} \neq 0$ , l'idéal  $J_C + J_D = (z, x^2, a_{11}xy, y^2)$  a colongueur 3 et alors on a le cas 1).

Si  $a_{11} = 0$ , l'idéal  $J_C + J_D = (z, (x + my)^2, y^2)$  a colongueur 4 pour tout  $m$  et alors on a le cas 2).

On note que on a le cas 2) si, pour exemple,  $p$  est un point planar (lisse) d'une surface contenant  $C$  ( un point lisse  $p$  d'une surface  $S$  de  $\mathbf{P}^3$  est appelé planar si l'équation de  $S$  localement en  $p$  est du type  $z + f(x,y) = 0$  où  $f(x,y)$  contient seulement termes en degré  $\geq 3$ ).

**Remarque 2.1.6.** Soit  $S$  la surface réunion des droites tangentes à une courbe gauche  $R$  de  $\mathbf{P}^3$ . Les points surosculateurs et les points d'inflexion de  $R$  induisent sur toute courbe gauche lisse  $C$  de  $S$  les conditions méchantes a) et b), au contraire les points de rebroussement de  $R$  se comportent bien.

i) Soit  $q$  un point lisse de  $R$  tel qu'il ne soit pas un point d'inflexion et soit  $p$  un point de la droite tangente à  $R$  en  $q$ . Alors  $p$  est un point planar de  $S$  si et seulement si  $q$  est un point surosculateur de  $R$ . Dans ce cas, si  $C$  est une courbe gauche de la surface  $S$  passant par  $p$  et lisse en  $p$ , on a que  $p$  est un point d'inflexion de  $C$  ou que le plan osculateur à  $C$  en  $p$  coïncide avec le plan tangent à  $S$  en  $p$  ( cas 2) de la Remarque 2.1.5 ).

ii) Si  $q$  est un point d'inflexion de  $R$ , tout point  $p$  de la droite tangente  $r$  à  $R$  en  $q$  est un point singulier de  $S$ . Dans ce cas, si  $C$  est une courbe gauche de  $S$  passant par  $p$  et lisse en  $p$ , on a que  $p$  est un point d'inflexion de  $C$  et la droite tangente à  $C$  en  $p$  est la droite  $r$ .

iii) Si  $q$  est un point de rebroussement de  $R$ , le point général de la droite tangente à  $R$  en  $q$  est un point lisse de la surface  $S$ .

Dans le paragraphe prochain on va démontrer que les surfaces caractéristiques  $S$  ayant la courbe de régression  $R$  avec des points d'inflexion ou des points surosculateurs peuvent être négligés.

## § 2.2. La courbe générale de toute strate de la stratification par le fibré normal est docile.

**Définition 2.2.1.** Soit  $C$  une courbe gauche rationnelle lisse de  $\mathbf{P}^3$  et soit  $L$  le sous-fibré maximal général du fibré normal  $N_C$  si  $N_C$  est semistable, ou l'unique sous-fibré maximal de  $N_C$  si  $N_C$  n'est pas semistable.

On note  $S$  la surface caractéristique de  $L$  et  $\tilde{S}$  la normalisation de la surface  $S$ .

La courbe  $C$  est appelée courbe docile si elle vérifie les conditions suivantes:

- (1) La surface caractéristique  $S$  n'est pas un cône.
- (2) La courbe de régression  $R$  de la surface caractéristique  $S$  n'a pas de points d'inflexion, ni de points surosculateurs, ni de droites bitangentes.
- (3) La courbe  $\tilde{C}$  coupe la courbe  $\tilde{R}$  en des points distincts. On a noté  $\tilde{C}$  et  $\tilde{R}$  les courbes de  $\tilde{S}$  se projetant aux courbes  $C$  et  $R$  respectivement.
- (4) Si  $p \in C$  et  $p \notin R$  alors le germe de  $C$  en  $p$  est contenu dans une nappe lisse de  $S$ .

D'après les résultats de Eisenbud et Van de Ven contenus dans [EV1] et [EV2], on déduit la Proposition suivante

**Proposition 2.2.2.** La courbe générale de toute strate de la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré normal est docile.

Preuve. Si  $\lambda : \mathbf{P}^1 \rightarrow (\mathbf{P}^3)^\vee$  est un morphisme de degré  $\beta \geq 3$  général, la courbe image  $\Lambda$  est une courbe rationnelle de degré  $\beta$ , gauche, lisse, sans points d'inflexion, sans droites bitangentes

et de fibré normal semistable. Alors la courbe duale  $R$  de  $\Lambda$  n'a pas de points d'inflexion, ni de points surosculateurs, ni de droites bitangentes. Soit  $S$  la surface des droites tangentes de  $R$ . Le lieu singulier de  $S$  est constitué par la courbe de régression  $R$  et par la courbe nodale  $\Gamma$  donnée par les points intersection de deux droites tangentes à  $R$ . La désingularisation  $\tilde{S}$  de  $S$  est  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ; on note  $\tilde{R}$  la courbe de  $\tilde{S}$  se projetant à  $R$ , la courbe générale  $\tilde{C}$  du système linéaire de diviseurs  $|(d-\beta+1, 1)|$ , qui est très ample, coupe la courbe  $\tilde{R}$  en des points disincts. Cette courbe  $\tilde{C}$  donne la courbe générale de la strate  $N(2d-2-\beta, \beta)$ , qui est donc docile.

On peut étudier des nouvelles intersections en utilisant nos méthodes si la conjecture suivante est vraie: si les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha, \beta)$  de  $\mathring{H}_d$  se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension, alors la courbe générale de cette composante est docile.

Dans le Lemme prochain on va caractériser les points  $p$  d'une courbe docile satisfaisant les conditions méchantes a) et b) de la Proposition 2.1.4.

**Lemme 2.2.3.** Soient  $C$  une courbe docile de  $\mathbf{P}^3$ ,  $L$  un sous-fibré maximal de  $N_C$  satisfaisant les conditions de la Définition 2.2.1 et  $R$  la courbe de régression de la surface caractéristique  $S$  de  $L$ . Alors un point  $p$  de  $C$  est un point d'inflexion ou un point en le quel le plan osculateur à  $C$  est le plan défini par le fibré  $L$  en  $p$  si et seulement si  $p \in C \cap R$ .

Preuve. Soient  $x, y, z$  les coordonnées locales de  $p$ . Si  $p$  appartient à une nappe lisse de  $S$ , puisque  $R$  n'a pas de points surosculateurs, on a que  $p$  n'est pas un point planar de  $S$  et l'équation locale de  $S$  en  $p$  est du type  $z + (ax + by)^2 A = 0$ , où  $a, b \in k$ ,  $z = 0$  est l'équation du plan tangent à  $S$  en  $p$ ,  $z = ax + by = 0$  sont les équations de la droite génératrice de  $S$  en  $p$  et  $A$  est un élément inversible de l'anneau local  $k[[x, y, z]]$ .

L'idéal définissant la courbe  $C$  localement en  $p$  est  $I_C = (z + (ax + by)^2 A, y + G_2(x, z))$ , où  $G_2(x, z)$  contient terms de degré  $\geq 2$  en  $x$  et  $z$ .

Supposons d'abord que  $p$  soit un point d'inflexion de  $C$ . Ceci signifie que l'idéal

$(y, z, a^2 x^2, G_2(x,0))$  est de colongueur  $\geq 3$ ; donc on a  $a = 0$ , c'est-à-dire la droite tangente à  $C$  en  $p$  coïncide avec la droite génératrice de  $S$  en  $p$ , c'est absurde parce que  $L$  est un sous-fibré maximal de  $N_C$  et alors l'image réciproque  $\tilde{C}$  de  $C$  dans la désingularisation  $\tilde{S}$  de  $S$  est une section unisécante (cf. Théorème 1.5.8). Alors  $p \in C \cap R$ .

Supposons maintenant que  $p$  ne soit pas un point d'inflexion de  $C$  mais que le plan osculateur à  $C$  en  $p$  soit le plan défini par le fibré  $L$  en  $p$ , qui est le plan d'équation  $z = 0$ .

Le plan osculateur à  $C$  en  $p$  est le plan  $z = 0$  si et seulement si  $I_C + (z)$  est un idéal de colongueur  $\geq 3$ . On a  $I_C + (z) = (z, (ax + by)^2, y + G_2(x,0))$ .

Si  $a \neq 0$ ,  $I_C + (z)$  a colongueur 2.

Si  $a = 0$ ,  $I_C + (z)$  a colongueur  $\geq 3$ ; dans ce cas la droite génératrice de  $S$  en  $p$  coïncide avec la droite tangente à  $C$  en  $p$ , ceci est absurde parce que l'image réciproque de  $C$  dans la désingularisation  $\tilde{S}$  de  $S$  est une section unisécante, car  $L$  est un sous-fibré maximal de  $N_C$ . (cf. Théorème 1.5.8)

On conclut que  $p$  est un point de la courbe de régression  $R$  de  $S$ .

Soit maintenant  $p$  un point appartenant à l'intersection  $C \cap R$ .

On note  $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$  la désingularisation de  $S$ ,  $\tilde{S}$  est un fibré projectif sur  $R$  isomorphe à  $P(N_R)$ ,  $\Lambda$  est la courbe image du morphisme de Gauss associé au fibré  $L$ .

Considérons l'injection canonique de l'anneau local  $O_{P^3,p}$  dans son complété  $k[[x,y,z]]$ ; si  $p$  est un point lisse de  $R$ , les équations paramétriques de  $R$  et de  $S$ , localement en  $p$ , sont du type (on rappelle que  $R$  n'a ni de points d'inflexion ni de points surosculateurs):

$$R: \begin{cases} x = a_1(t)t \\ y = a_2(t)t^2 \\ z = a_3(t)t^3 \end{cases} \quad \text{et} \quad S: \begin{cases} x = a_1(t)t + b_1(t)u \\ y = a_2(t)t^2 + b_2(t)tu \\ z = a_3(t)t^3 + b_3(t)t^2u \end{cases}$$

où, pour  $i = 1,2,3$ ,  $a_i(t)$  est un élément inversible de l'anneau local  $k[[t]]$  et  $b_i(t) = a_i'(t)t + ia_i(t)$ ,  $a_i'$  note la dérivée de  $a_i(t)$  en  $t$ .

Soit  $\tilde{C}$  la courbe de  $\tilde{S}$  se projetant via le morphisme  $\pi$  à la courbe  $C$  de  $S$ . On peut supposer que  $\tilde{C}$  soit définie dans  $\tilde{S}$  localement en  $\tilde{p}$  par l'équation  $u = A(t)t$ , où



$$A(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots, \quad c_i \in k.$$

Alors les équations paramétriques de C, localement en p, sont

$$C: \begin{cases} x = a_1(t)t + b_1(t)A(t)t \\ y = a_2(t)t^2 + b_2(t)A(t)t^2 \\ z = a_3(t)t^3 + b_3(t)A(t)t^3 \end{cases}$$

Si  $a_2(0) + b_2(0)A(0) = 0$ , alors p est un point d'inflexion de C; autrement p n'est pas un point d'inflexion de C et alors le plan osculateur à C en p est le plan  $z = 0$ , qui est le plan défini par le fibré L en p.

Si p est un point de rebroussement de R, les équations paramétriques de R sont, localement en p, du type:

$$R: \begin{cases} x = a_1(t)t^r \\ y = a_2(t)t^{r+1} \\ z = a_3(t)t^{r+2} \end{cases} \quad (r \geq 2)$$

où, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $a_i(t)$  est un élément inversible de l'anneau local  $k[[t]]$ , les équations paramétriques de la surface S et de la courbe C, localement en p, sont du type:

$$S: \begin{cases} x = a_1(t)t^r + b_1(t)u \\ y = a_2(t)t^{r+1} + b_2(t)tu \\ z = a_3(t)t^{r+2} + b_3(t)t^2u \end{cases} \quad \text{et} \quad C: \begin{cases} x = a_1(t)t^r + b_1(t)A(t)t \\ y = a_2(t)t^{r+1} + b_2(t)A(t)t^2 \\ z = a_3(t)t^{r+2} + b_3(t)A(t)t^3 \end{cases}$$

où  $b_1(t) = a_1'(t)t + (r+1)a_1(t)$  et  $A(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ ,  $c_i \in k$ ,  $c_0$  est non nul parce que p est un point lisse de C.

Puisque  $a_2(0)$  est non nul, p n'est pas un point d'inflexion de C et alors le plan osculateur à C en p est le plan  $z = 0$ , qui est le plan défini par le fibré L en p.

Toute courbe  $C$ , de degré  $d \geq 4$ , coupe la courbe de régression  $R$  de la surface caractéristique  $S$  d'un sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C$ . Ces points d'intersections ne satisfont pas les hypothèses a) et b) de la Proposition 2.1.4 et on peut avoir deux situations différentes sur l'existence de droites satisfaisant la Condition de recollement 2.1.1, comme on a noté dans la Remarque 2.1.5.

Maintenant on va prouver que pour les courbes dociles  $C$  et pour les sous-fibrés maximaux  $L$  de  $N_C$  satisfaisant les conditions de la Définition 2.2.1, si  $p$  est un point de  $C$  tel que  $p$  est un point d'inflexion ou le plan osculateur à  $C$  en  $p$  coïncide avec le plan défini par le fibré  $L$  en  $p$  alors aucune droite  $D$  ne satisfait la Condition de recollement 2.1.1 (c'est la situation 1) de la Remarque 2.1.5).

**Lemme 2.2.4.** Soient  $C$  une courbe lisse de  $\mathbf{P}^3$ ,  $L$  un sous-fibré inversible de  $N_C$  et  $p$  un point de  $C$ . Supposons que  $p$  soit un point d'inflexion de  $C$  ou que le plan osculateur à  $C$  en  $p$  coïncide avec le plan  $K$  défini par le fibré  $L$  en  $p$ .

Alors toute droite du plan  $K$  passant par  $p$ , différentes de la droite tangente à  $C$  en  $p$ , satisfait la Condition de recollement 2.1.1 si et seulement si le plan  $K$ , la courbe double de Ferrand  $(C,L)$  et le deuxième voisinage infinitesimal de  $p$  se coupent en un point de longueur 5 sur  $p$ .

Preuve. On utilise les mêmes notations de la preuve de la Proposition 2.1.4.

Désignons par  $I_C = (f,g)$  et  $J_C = (f,g^2)$  les idéaux de  $O_{\mathbf{P}^3,p}$  définissant localement en  $p$  respectivement la courbe  $C$  et la courbe double de Ferrand  $(C,L)$ ; les éléments  $f$  et  $g$  sont du type  $f = z + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \dots$ ,  $g = y + b_{20}x^2 + b_{11}xz + b_{02}z^2 + b_{30}x^3 + \dots$ , avec  $a_{ij}, b_{ij} \in k$ .

L'équation du plan  $K$  est  $z = 0$  et d'après le Lemme 2.1.3 on a  $a_{20} = 0$ .

Alors l'idéal  $(z) + J_C + m_p^3 = (z, a_{11}xy, y^2)$  a colongueur 5 si et seulement si  $a_{11} = 0$  et d'après la Remarque 2.1.5 on conclut.

**Proposition 2.2.5.** Si  $C$  est une courbe docile,  $L$  un sous-fibré maximal de  $N_C$  satisfaisant les conditions de la Définition 2.2.1 et  $p$  est un point d'inflexion de  $C$  ou un point en le

quel le plan osculateur à C coïncide avec le plan défini par le fibré L en p, alors aucune droite D ne satisfait la Condition de recollement 2.1.1 (c'est la situation 1) de la Remarque 2.1.5).

Preuve. On considère la surface caractéristique S de L et la courbe de régression R de S.

D'après le Lemme 2.2.3, on a  $p \in C \cap R$ .

On va utiliser les mêmes notations de la preuve de le Lemme 2.2.3. Supposons que p soit un point lisse de R.

On note  $C_2$  la courbe double de Ferrand sur C induite par le fibré L et  $\tilde{C}_2$  la courbe double de  $\tilde{S}$  se projetant à  $C_2$ . L'anneau des coordonnées locaux de  $\tilde{C}_2$  en  $\tilde{p}$  est  $O_{\tilde{C}_2, \tilde{p}}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$  et, dans  $\tilde{S}$  localement en  $\tilde{p}$ , si  $\tilde{C}$  est définie par l'équation  $u = A(t)t$  alors  $\tilde{C}_2$  est définie par l'équation  $u = A(t)t + \varepsilon$  avec  $\varepsilon^2 = 0$ . On note que  $A(0) \neq 0$  parce que  $\tilde{C}$  coupe  $\tilde{R}$  transversalement en  $\tilde{p}$ .

Donc la courbe double  $C_2$  peut être définie, localement en p, par les équations paramétriques suivantes:

$$C_2 : \begin{cases} x = A_1(t)t + b_1(t)\varepsilon \\ y = A_2(t)t^2 + b_2(t)t\varepsilon \\ z = A_3(t)t^3 + b_3(t)t^2\varepsilon \end{cases}, \text{ avec } \varepsilon^2 = 0.$$

D'après le Lemme 2.2.4, on doit prouver que l'idéal  $I = (z) + J_C + m_p^3$  de  $O_{\mathbf{P}^3, p}$  a colongueur 4.

Si  $j: \tilde{C}_2 \rightarrow \mathbf{P}^3$  est un plongement de  $\tilde{C}_2$  dans  $C_2$ , alors les idéaux  $I$  et  $j^*(I)$  ont la même colongueur.

Les équations de  $C_2$  décrites ci-dessus ne définissent pas un plongement de  $\tilde{C}_2$  dans  $\mathbf{P}^3$ , parce que pour  $t = 0$  on obtient un vecteur tangent à C en p.

Considérons une transformation rationnelle  $\phi(t, \varepsilon) = (t + \lambda(t)\varepsilon, \mu(t)\varepsilon)$ , où  $\lambda(t) = \sum_{i=r}^m \lambda_1 t^i$  et  $\mu(t) = \sum_{i=s}^q \mu_1 t^i$ ,  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  sont élément de k, r, s, m et q sont des entiers positifs ou nuls.

On note que pour tout élément f de  $k[[t]]$  on a  $f(t + \lambda(t)\varepsilon) = f(t) + f'(t)\lambda(t)\varepsilon$  si  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $f'(t)$  note la dérivée de f en t.

On pose  $B_i(t) = iA_i(t) + A_i'(t)t$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

On choisit la transformation rationnelle  $\bar{\phi}$  donnée par  $\lambda(t) = \frac{1}{t}$  et  $\mu(t) = -\frac{B_1(t)}{b_1(t)t}$ .

Après telle transformation  $\bar{\phi}$ , les équations paramétriques de la courbe double  $C_2$

deviennent:

$$C_2 : \begin{cases} x = A_1(t)t \\ y = A_2(t)t^2 + \bar{B}_2(t)\varepsilon \\ z = A_3(t)t^3 + \bar{B}_3(t)t\varepsilon \end{cases}, \text{ avec } \varepsilon^2 = 0;$$

où  $\bar{B}_i(t) = B_i(t) - \frac{b_i(t)}{b_1(t)}B_1(t)$  pour  $i = 2, 3$ .

On a  $\bar{B}_i(0) = i(i-1)a_i(0)A(0) \neq 0$ . Alors les dernières équations paramétriques de  $C_2$  décrivent localement en  $\tilde{p}$ , un plongement  $j: \tilde{C}_2 \rightarrow \mathbf{P}^3$  de  $\tilde{C}_2$  dans  $C_2$  et la colongueur de l'idéal  $I$  est

égale à la colongueur de l'idéal suivant de  $k[[t, \varepsilon]]$ :

$$(\varepsilon^2, A_3(t)t^3 + \bar{B}_3(t)t\varepsilon, A_1^3(t)t^3, A_1^2(t)t^2(A_2(t)t^2 + \bar{B}_2(t)\varepsilon),$$

$$A_1(t)t^3(A_2^2(t)t^2 + 2A_2(t)\bar{B}_2(t)\varepsilon), (A_3(t)t^3 + \bar{B}_3(t)t\varepsilon)^3)$$

qui est égal à l'idéal  $(\varepsilon^2, t^3, t\varepsilon)$  parce que  $A_1(0) \neq 0$  ( $p$  n'est pas un point de rebroussement de  $C$ ) et  $\bar{B}_3(0) \neq 0$ . Cet idéal a colongueur 4.

Si  $p$  est un point de rebroussement de  $\Gamma$ , on procède d'une façon analogue.



**§ 2.3. Le fibré normal des courbes dont le fibré tangent restreint est de type général.**

**Rappels 2.3.1.** Soit  $D$  une droite de  $\mathbf{P}^3$ . Le fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_D$  est de type de scindage  $(1,0,0)$  et le morphisme de Gauss associé au sous-fibré inversible maximal de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_D$  est le morphisme constant qui associe à tout point de  $D$  le point de  $G(1,3)$  correspondant à la droite  $D$ .

Le fibré  $N_D(-1)$  est de type de scindage  $(0,0)$  et le morphisme de Gauss associé à tout sous-fibré inversible maximal de  $N_D(-1)$  est constant, il a pour image un plan contenant la droite  $D$ .

**Théorème 2.3.2.** La strate  $N(\alpha, \beta)$  de  $\mathring{H}_d$  coupe la strate générale de la stratification de  $\mathring{H}_d$  par le fibré tangent restreint si et seulement si on a  $\beta > \left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor$  ( $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ ).

Preuve. La partie nécessaire du théorème découle du Théorème 1.6.3: posons  $d = 3a + r$ ,  $r \in \{-1, 0, 1\}$ , on a  $\left\lfloor \frac{d+1}{3} \right\rfloor = a$ ; si  $r = -1, 0$  on a  $a \geq 3a + r - 2\beta + 2$  et si  $r = 1$  on a  $a + 1 \geq 3a + 1 - 2\beta + 2$ , donc on obtient  $\beta > a$ .

Pour la partie suffisante on procède par induction sur  $d$ .

Pour les courbes de degré 3 et 4 le Théorème est vrai: il existe un unique type de scindage aussi bien pour le fibré tangent restreint que pour le fibré normal.

Allons prouver que si le Théorème est vrai pour les degrés mineurs ou égaux à  $d-1$ , alors le Lemme est vrai pour le degré  $d$ .

On note  $S_d$  le sous-schéma localement fermé, irréductible et de codimension 1 de  $\mathring{H}_d$  constitué par les courbes association d'une droite et d'une courbe lisse rationnelle de degré  $d-1$ .

Posons  $a = \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$  et distinguons les trois cas A)  $d = 3a - 1$ , B)  $d = 3a$ , C)  $d = 3a + 1$ ;

avec  $a \geq 2$ .

A) Soit  $C$  une courbe générale de la strate  $N(5a-7, a+1)$  de  $\mathring{H}_{3a-2}$ ; le type de scindage du fibré  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  est  $(a, a-1, a-1)$ , pour l'hypothèse inductive, et  $C$  est une courbe docile. Soit  $p$  un point général de  $C$  et  $D$  la droite caractéristique en  $p$  du sous-fibré maximal  $L$  du fibré  $N_C(-1)$ .

Puisque  $L$  est maximal, d'après le Théorème 1.5.8, la droite  $D$  coupe  $C$  seulement en le point  $p$ ; alors on peut considérer l'association  $X$  de  $C$  et  $D$ . Puisque  $C$  est docile, la surface caractéristique du fibré  $L$  a degré  $2(a+1)-2 = 2a$  et donc elle donne un sous-fibré inversible  $\Sigma_L$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de degré  $3a-2 - 2a = a-2$ ; on conclut que  $\Sigma_L$  ne coïncide pas avec le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  et aussi que  $D$  ne coïncide pas avec la droite définie par le fibré  $F$  en  $p$ .

Alors  $X$  est un élément de  $S_{3a-1} \cap W_{3a-1}(a, 2a) \cap J_{3a-1}(5a-5)$  et on a  $\dim_X (S_{3a-1} \cap W_{3a-1}(a, 2a) \cap J_{3a-1}(5a-5)) = 8a + 2$ .

Puisque on a  $\dim (W_{3a-1}(a, 2a) \cap J_{3a-1}(5a-5)) \geq 8a + 3$ , d'après le Lemme 1.4.1 on a que l'intersection  $M(a, a, a-1) \cap N(5a-5, a+1)$  est non vide et de dimension  $8a + 3$ ; en appliquant encore le Lemme 1.4.1, on a la thèse pour  $d = 3a - 1$ .

B) On rappelle que si l'intersection  $W_{3a}(a, 2a) \cap J_{3a}(5a-3)$  n'est pas vide, elle est de dimension  $\geq 8a + 5$ .

On considère le schéma  $S'_{3a}$  des courbes réductibles qui sont la réunion d'une courbe lisse rationnelle  $C$  de degré  $d-2$ , d'une droite  $D_1$  coupant  $C$  en un unique point  $p_1$  et d'une autre droite  $D_2$  coupant la droite  $D_1$  en un point  $p_2$  et ne coupant pas la courbe  $C$ .

$S'_{3a}$  est un sous-schéma localement fermé, irréductible de codimension 2 de  $\mathring{H}_d$  et il est contenu dans l'adhérence  $\overline{S}_{3a}$  de  $S_{3a}$ .

On prouve les faits suivantes:

B<sub>1</sub>) Il existe une courbe  $Y$  appartenant à  $S'_{3a} \cap W_{3a}(a, 2a) \cap J_{3a}(5a-3)$ .

B<sub>2</sub>) On a  $\dim_Y (\overline{S}_{3a} \cap W_{3a}(a, 2a) \cap J_{3a}(5a-3)) = 8a + 4$ .

Ainsi, d'après le Lemme 1.4.1, on a que l'intersection  $M(a, a, a) \cap N(5a-3, a+1)$  est non vide et de dimension  $8a + 5$ ; en appliquant encore le Lemme 1.4.1, on a la thèse pour  $d = 3a$ .

Preuve de B<sub>1</sub>). Soit C une courbe générale de la strate N(5a-7,a+1) de  $\overset{\circ}{H}_{3a-2}$  ; le type de scindage du fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est (a,a-1,a-1), pour l'hypothèse inductive, et C est une courbe docile.

Soit p<sub>1</sub> un point général de C et D<sub>1</sub> la droite caractéristique en p<sub>1</sub> du sous-fibré maximal L du fibré N<sub>C</sub>(-1) (On a déjà vu au point A) que D<sub>1</sub> coupe C seulement en p<sub>1</sub>).

On note K<sub>p<sub>1</sub></sub> le plan défini par le fibré L en p<sub>1</sub>.

Soit p<sub>2</sub> un point de la droite D<sub>1</sub> différent du point p<sub>1</sub> et D<sub>2</sub> la droite générale du plan K<sub>p<sub>1</sub></sub> passant par le point p<sub>2</sub>. D<sub>2</sub> ne coupe pas C.

On a déjà prouvé dans A) que D<sub>1</sub> est différente de la droite F<sub>p<sub>1</sub></sub> définie en p<sub>1</sub> par le sous-fibré maximal inversible F de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$ .

D<sub>2</sub> n'est pas contenue dans le plan déterminé par les droites D<sub>1</sub> et F<sub>p<sub>1</sub></sub> parce que le fibré de rang 2 M<sub>L</sub> image réciproque du fibré L dans  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est de degré 2a-3 et donc il n'est pas un sous-fibré de rang 2 maximal de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$ .

Alors la réunion Y des courbes C, D<sub>1</sub> et D<sub>2</sub> est un élément de S'<sub>3a</sub> ∩ W<sub>3a</sub>(a,2a) ∩ J<sub>3a</sub>(5a-3).

Preuve de B<sub>2</sub>). On a dim<sub>Y</sub> ( S'<sub>3a</sub> ∩ W<sub>3a</sub>(a,2a) ∩ J<sub>3a</sub>(5a-3) ) = 8a + 4.

On note que C ∪ D<sub>1</sub> est un élément de W<sub>3a-1</sub>(a,2a) ∩ J<sub>3a-1</sub>(5a-5).

Soit X une courbe générale de la strate N(5a-5,a+1) de  $\overset{\circ}{H}_{3a-1}$ , pour l'hypothèse inductive, le type de scindage de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_X$  est (a,a,a-1).

Soient p un point général d'une telle courbe X et D la droite caractéristique du sous-fibré maximal L de N<sub>X</sub>(-1) en p; d'après le Théorème 1.5.8, D coupe X seulement en p. L'association Z de C et D est un élément de S<sub>3a</sub> ∩ J<sub>3a</sub>(5a-3) et on a dim<sub>Z</sub> ( S<sub>3a</sub> ∩ J<sub>3a</sub>(5a-3) ) = 8a + 4.

Un tel Z est un élément de S<sub>3a</sub> ∩ W<sub>3a</sub>(a,2a) ∩ J<sub>3a</sub>(5a-3) si et seulement si la droite D n'est pas contenue dans le plan défini en p par le sous-fibré de rang 2 maximal M de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_X$ .

On peut conclure que la famille des courbes Z décrites ci-dessus est vide ou de dimension ≤ 8a + 4 et alors pour la courbe Y de la partie B<sub>1</sub>) on a dim<sub>Y</sub> (  $\overline{S}_{3a} \cap W_{3a}(a,2a) \cap J_{3a}(5a-3)$  ) = 8a + 4.

C) Soit C une courbe générale de la strate N(5a-3,a+1) de  $\overset{\circ}{H}_{3a}$  ; le type de scindage du fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est (a,a,a), pour l'hypothèse inductive, et C est une courbe docile. Soit p un point général

de C et on considère l'association X de C et de la droite D égale à la droite caractéristique en p du sous-fibré maximal L du fibré N<sub>C</sub>(-1) (D'après le Théorème 1.5.8, D coupe C seulement en p).



$X$  est un élément de  $S_{3a+1} \cap W_{3a+1}(a+1, 2a+1) \cap J_{3a+1}(5a-1)$ . En procédant comme dans le cas A), on obtient la thèse aussi pour  $d = 3a+1$ .

## § 2.4. Sur l'intersection des strates de petite dimension.

Pour  $d \geq 6$ , on va prouver que les courbes  $C$  de degré  $d$  ayant une droite  $(d-1)$ -sécante n'ont pas le fibré normal de type "spécial" et que la strate "spéciale"  $N(2d-5,3)$  est contenue dans la strate  $M(d-4,2,2)$ .

**Rappels 2.4.1.** Une courbe rationnelle lisse  $C$  de degré  $d$  de  $\mathbf{P}^3$  a une droite  $(d-1)$ -sécante si et seulement si le type de scindage du fibré  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est  $(a,b,1)$ .

Dans ce cas, si  $C$  n'est pas contenue dans une quadrique lisse, c'est-à-dire  $b \geq 2$ , pour tout point  $p$  de  $C$  le plan défini en  $p$  par la fibre du sous-fibré de rang 2 maximal  $M$  de  $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$  est le plan déterminé par le point  $p$  et par la droite  $(d-1)$ -sécante  $s$  de  $C$ .

**Proposition 2.4.2.** Une courbe rationnelle lisse  $C$  de degré  $d \geq 6$  ayant une droite  $(d-1)$ -sécante n'appartient pas à la strate  $N(2d-5,3)$  de  $\mathring{H}_d$ .

Preuve. Si par absurde  $C$  a le fibré  $N_C(-1)$  de type de scindage  $(2d-5,3)$ , le morphisme de Gauss  $\lambda$  associé au sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  est birationnel et de degré 3. Si la courbe image  $\Gamma$  de  $\lambda$  est une courbe plane, alors la surface caractéristique  $S$  de  $L$  est un cône de degré 3 ou 4; mais pour  $d \geq 6$  on n'a pas ce cas. Alors la surface caractéristique  $S$  de  $L$  est la surface des droites tangentes à une cubique gauche et elle est de degré 4. Donc la droite  $(d-1)$ -sécante  $s$  de  $C$  est contenue dans  $S$  et elle est une droite génératrice de  $S$ . La courbe  $C$  provient d'une section unisécante  $\tilde{C}$  de la désingularisation  $\tilde{S}$  de  $S$ . Alors l'unique possibilité est que  $S$  soit la surface des tangentes d'une courbe cubique gauche  $\Gamma$  et  $s$  la droite tangente à  $C$  en un point d'inflexion  $p$  d'ordre  $d-2$ , avec  $p \in \Gamma$  (cf. Lemme 2.2.3).

Pour décrire les équations locales en  $p$  de la courbe  $\Gamma$ , de la surface  $S$ , d'une courbe  $C$  de  $S$  ayant un point d'inflexion en  $p$  d'ordre  $d-2$  et de la courbe  $\tilde{C}$  dans  $\tilde{S}$ , on se ramène à les notations utilisées dans la preuve du Lemme 2.2.3.

Pour la cubique  $\Gamma$  on a que les éléments  $a_1(0)$ ,  $a_2(0)$  et  $a_3(0)$  sont non nuls.

$p$  est un point d'inflexion de  $C$  d'ordre  $d-2$  si et seulement si l'idéal  $(a_2(t)t^2 + b_2(t)A(t)t^2, a_3(t)t^3 + b_3(t)A(t)t^3)$  de  $k[[t]]$  a colongueur  $\geq d-1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $a_2(t) + b_2(t)A(t) \in (t^{d-4})$  et  $a_3(t) + b_3(t)A(t) \in (t^{d-5})$ . Ceci signifie que la courbe  $\tilde{C}$  passe par les points d'idéaux  $(4u + 2t - t^2, t^{d-3})$  et  $(3u + t, t^{d-4})$ , absurde parce que  $\tilde{C}$  est lisse.

**Proposition 2.4.3.** Si  $d \geq 6$ , les courbes  $C$  de la strate  $N(2d-5,3)$  de  $\mathring{H}_d$  ont le fibré  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de type de scindage  $(d-4,2,2)$ .

*Preuve.* On a vu dans la démonstration de la Proposition 2.4.2 que la surface caractéristique du sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  est de degré 4. Cette surface réglée donne un sous-fibré inversible de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  de degré  $d-4$ , donc le type de scindage peut être  $(d-4,2,2)$  ou  $(d-4,3,1)$ .

Dans le dernier cas  $C$  aurait une droite  $(d-1)$ -sécante, c'est absurde, d'après la Proposition 2.4.2.

## § 2.5. Les courbes de degré 6 et 7.

Pour les courbes de degré 6, on a que la courbe générale de toute strate de la stratification de  $\mathring{H}_6$  par le fibré tangent restreint à le fibré normal de type général, c'est-à-dire appartient à la strate  $N(5,5)$ . En outre, d'après le Théorème 2.3.4, on a que la courbe générale de toute strate de la stratification de  $\mathring{H}_6$  par le fibré normal à le fibré tangent restreint de type général, c'est-à-dire appartient à la strate  $M(2,2,2)$ .

Maintenant on va prouver que les strates de codimension 1  $M(3,2,1)$  et  $N(6,4)$  se coupent en bonne dimension.

**Lemme 2.5.1.** Soit  $C$  une courbe rationnelle lisse de degré 5 générale de  $\mathbb{P}^3$ ; les types de scindage des fibrés  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  et  $N_C(-1)$  sont respectivement  $(2,2,1)$  et  $(4,4)$ .

Soient  $L$  un sous-fibré inversible maximal général de  $N_C(-1)$  et  $M$  le sous-fibré de rang 2 maximal de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$ . Alors on a:

1) Pour le point général  $p$  de  $C$ , la droite caractéristique de  $L$  en  $p$  n'est pas contenue dans le plan défini par le fibré  $M$  en  $p$ .

2) Il existe un point  $p$  de  $C$  tel que la droite caractéristique du fibré  $L$  en  $p$  est contenue dans le plan défini par le fibré  $M$  en  $p$ , en outre telle droite est différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$  et coupe  $C$  seulement en  $p$ .

Preuve. Pour la partie 1), il suffit de prouver que le sous-fibré inversible  $\Sigma_L$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  donné par la surface caractéristique de  $L$  n'est pas un sous-fibré de  $M$ .

Le morphisme de Gauss  $\lambda$  associé à  $L$  est birationnel (cf. Théorème 1.5.8), la courbe  $C$  est docile, donc la courbe  $\Lambda$  image du morphisme  $\lambda$  est rationnelle, gauche, lisse et de degré 4. La courbe  $C$  a une (unique) droite 4-sécante  $s$ ; donc  $\Sigma_L$  est un sous-fibré de  $M$  si et seulement si toute droite caractéristique de  $L$  coupe la droite  $s$ , c'est-à-dire toute droite tangente à la courbe  $\Lambda$  coupe une droite; c'est absurde parce que  $\Lambda$  est gauche.

Allons prouver la partie 2).

La surface caractéristique  $S$  de  $L$  est de degré 6, la courbe  $\Lambda$  est gauche de degré 4 et elle n'a pas de bitangentes, toute droite génératrice de  $S$  coupe autres deux droites génératrices de  $S$ , la courbe nodale  $\Gamma$  de  $S$  est irréductible et tout point de  $\Gamma$  est l'intersection de deux droites génératrices de  $S$  (cf. [IR3]).

Puisque la courbe  $C$  est générale, la droite  $s$  coupe  $C$  en 4 points distincts (cf. [aH2]). On va prouver qu' alors la droite 4-sécante  $s$  n'est pas contenue dans la surface  $S$ . Si  $s$  est contenue dans  $S$ , alors  $s$  est une droite génératrice de  $S$ , mais une fibre de la normalisation  $\tilde{S}$  ne se projetant pas à une droite tangente de  $C$  se projette à une droite coupant  $C$  au plus en 3 points, donc  $s$  n'est pas une 4-sécante, absurde.

L'intersection de la droite  $s$  avec la surface  $S$  donne 6 points, seulement 4 de ces points sont sur la courbe  $C$ ; donc il existe un point  $q \in s \cap S$  et  $q \notin C$ .

Soit  $r$  une droite génératrice de  $S$  passant par  $q$ ; on va prouver que l'intersection de  $r$  et  $C$  donne un seul point  $p$ . La normalisation  $\tilde{S}$  de  $S$  est isomorphe à  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  et la courbe  $C$  provient d'une courbe  $\tilde{C}$  du système linéaire  $| (2,1) |$  passant par les 4 points donnés par l'intersection  $C \cap s$ . La droite  $r$  coupe  $C$  en un autre point  $p' \neq p$  si et seulement si  $\tilde{C}$  passe par un des deux points de  $\tilde{S}$  n'appartenant pas à la fibre  $\tilde{r}$ , donnant la droite génératrice  $r$ , mais ayant image aussi dans la droite  $r$ . Puisque la self-intersection de  $\tilde{C}$  est 4 et la courbe  $C$  est générale, la situation ci-dessus ne se présente pas.

La droite  $r$  est la droite caractéristique de  $L$  en  $p$ ,  $r$  coupe la droite 4-sécante  $s$ , alors  $r$  est contenue dans le plan défini par le fibré  $M$  en  $p$ . La droite  $r$  est différente de la droite tangente à  $C$  en  $p$  parce que  $p \notin C \cap s$ .

En effet pour un point de  $C \cap s$ , le plan défini en ce point par le fibré  $M$  coïncide avec le plan déterminé par la droite  $s$  et la droite tangente à  $C$  en le point. D'autre part  $M$  est un sous-fibré de rang

2 et de degré 4 de  $T_{\mathbf{P}^3}(-1)|_C$  et il est aussi un sous-faisceau de rang 2 et degré 4 de  $N_C(-1)$ ; donc le quotient de  $N_C(-1)$  par  $M$  est un faisceau de torsion de degré 4, il signifie que il existe quatre points de  $C$  tels que les droites tangentes à  $C$  en ces points sont contenues dans les plans déterminés par les fibres de  $M$  correspondantes, donc ces sont les points de  $C \cap s$ .

**Proposition 2.5.2.** Les strates  $M(3,2,1)$  et  $N(6,4)$  se coupent le long d' un sous-schéma de dimension 22 (la bonne dimension).

Preuve. On va étudier l'intersection des strates  $W_6(3,5)$  et  $J_6(6)$  dans le schéma  $S_6$  des courbes associations d'une courbe rationnelle lisse de degré 5 et d'une droite.

Soient  $C$  une courbe générale de  $\mathring{H}_5$ ,  $L$  un sous-fibré inversible maximal général de  $N_C(-1)$  et  $r$  une droite caractéristique de  $L$  satisfaisant les conditions du point 2) du Lemme 2.5.1. Alors l'association  $X$  de  $C$  et  $r$  est un élément de  $S_6 \cap W_6(3,5) \cap J_6(6)$  et d'après la partie 1) du Lemme 2.5.1 on a  $\dim_X (S_6 \cap W_6(3,5) \cap J_6(6)) = 21$ .

Puisque  $\dim (W_6(3,5) \cap J_6(6)) \geq 22$ , en appliquant le Lemme 1.4.1 on a la thèse.

Aussi pour les courbes rationnelles lisses de  $\mathbf{P}^3$  de degré 7 on a que la courbe générale de toute strate de la stratification de  $\mathring{H}_7$  par le fibré tangent restreint a le fibré normal de type général, c'est-à-dire appartient à la strate  $N(6,6)$  et la courbe générale de toute strate de la stratification de  $\mathring{H}_7$  par le fibré normal a le fibré tangent restreint de type général, c'est-à-dire appartient à la strate  $M(3,2,2)$  (cf. Théorème 2.3.4).

Maintenant on va prouver que les strates  $M(4,2,1)$  et  $M(3,3,1)$  coupent la strate  $N(7,5)$  en bonne dimension.

**Lemme 2.5.3.** Soit  $C$  une courbe générale de la strate  $M(3,2,1)$  de  $\mathring{H}_6$ . Alors le type de scindage du fibré  $N_C(-1)$  est  $(5,5)$  et pour le point général  $p$  de  $C$ , la droite  $f_p$  définie en  $p$  par la fibre du fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbf{P}^3}(-1)|_C$  ne satisfait pas la Condition de recollement 2.1.1 avec aucun sous-fibré inversible maximal de  $N_C(-1)$ .

Preuve. On va étudier l'intersection des strates  $W_7(4,6)$  et  $J_7(6)$  dans le schéma  $S_7$  des courbes associations d'une courbe rationnelle lisse de degré 6 et d'une droite. Si telle intersection n'est pas vide, elle est de dimension  $\geq 24$  et elle est la réunion de trois schémas localement fermés  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , qu'on va décrire.

$A_1$  est le schéma des courbes associations d'une courbe  $C$  de  $M(3,2,1) \cap N(5,5)$  et d'une droite  $D$  coïncidant avec la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et ne satisfaisant pas la Condition de recollement 2.1.1 avec aucun sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$ .

$A_2$  est le schéma des courbes associations d'une courbe  $C$  de  $M(3,2,1) \cap N(6,4)$  et d'une droite  $D$  coïncidant avec la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et non contenue dans le plan déterminé par le sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  en  $p$ .

$A_3$  est le schéma des courbes associations d'une courbe  $C$  de  $M(4,1,1) \cap N(5,5)$  et d'une droite  $D$  telle qu'elle soit différente de la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et telle qu'elle ne satisfait pas la Condition de recollement 2.1.1 avec aucun sous-fibré maximal de  $N_C(-1)$ .

On va prouver les faits suivants:

- i) Le schéma  $A_1$  est vide ou de dimension  $\leq 24$ .
- ii) Le schéma  $A_2$  n'est pas vide et il est de dimension 23.
- iii) Le schéma  $A_3$  est vide ou de dimension  $\leq 23$ .

Ainsi on conclut que  $A_1$  n'est pas vide et il est de dimension 24. Cette assertion équivaut à celle énoncé dans la thèse du Lemme.

Preuve de i): Si  $A_1$  n'est pas vide, on a  $\dim A_1 \leq \dim (M(3,2,1) \cap N(5,5)) + 1 = 24$ .

Preuve de ii): L'image réciproque dans  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  du sous fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  est un fibré de rang 2 et de degré 2, donc il ne peut pas avoir un sous-fibré inversible de degré 3. Ceci signifie que pour le point général  $p$  de  $C$  la droite définie par la fibre en  $p$  du sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  n'est pas contenue dans le plan défini par la fibre de  $L$  en  $p$ . En outre le morphisme de Gauss associé à  $F$  est de degré 3, donc il est birationnel et la génératrice générale de la surface réglée définie par  $F$  coupe  $C$  seulement en un point. Alors  $A_2$  n'est pas vide et on a

$\dim A_2 = \dim (M(3,2,1) \cap N(6,4)) + 1 = 23$ .

Preuve de iii) : Si  $A_3$  n'est pas vide on a  $\dim A_3 \leq \dim (M(4,1,1) \cap N(5,5)) + 3 = 23$ .

**Proposition 2.5.4.** Les strates  $M(4,2,1)$  et  $N(7,5)$  de  $\overset{\circ}{H}_7$  se coupent le long un sous-schéma de dimension 24 (la bonne dimension).

Preuve. On va étudier l'intersection des strates  $W_7(4,6)$  et  $J_7(7)$  dans le schéma  $S_7$  des courbes associations d'une courbe rationnelle lisse de degré 6 et d'une droite. Si telle intersection n'est pas vide, elle est de dimension  $\geq 1.5$  et elle est la réunion de trois schémas localement fermés  $B_1, B_2$  et  $B_3$ , qu'on va décrire.

$B_1$  est le schéma des courbes association d'une courbe  $C$  de  $M(3,2,1) \cap N(5,5)$  et d'une droite  $D$  coïncidant avec la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et satisfaisant la Condition de recollement 2.1.1 avec un sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$ .

$B_2$  est le schéma des courbes associations d'une courbe  $C$  de  $M(3,2,1) \cap N(6,4)$  et d'une droite  $D$  coïncidant avec la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et contenue dans le plan déterminé par le sous-fibré maximal  $L$  de  $N_C(-1)$  en  $p$ , mais ne satisfaisant pas la Condition de recollement 2.1.1 avec le fibré  $L$ .

$B_3$  est le schéma des courbes associations d'une courbe  $C$  de  $M(4,1,1) \cap N(5,5)$  et d'une droite  $D$  telle qu'elle soit différente de la droite définie par le sous-fibré inversible maximal  $F$  de  $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$  en  $p = C \cap D$  et telle qu'elle satisfait la Condition de recollement 2.1.1 avec un sous-fibré maximal de  $N_C(-1)$ .

On a

1) Le schéma  $B_1$  est vide ou de dimension  $\leq 23$  (Lemme 2.5.3).

2) Le schéma  $B_2$  est vide ou de dimension  $\leq 23$ .

3) Le schéma  $B_3$  n'est pas vide et il est de dimension 22.

Ainsi on conclut que  $S_7 \cap W_7(4,6) \cap J_7(7)$  n'est pas vide et il est de dimension 23; alors en appliquant le Lemme 1.4.1 on a la thèse.



**Corollaire 2.5.5.** Les strates  $M(3,3,1)$  et  $N(7,5)$  de  $\mathring{H}_7$  se coupent le long un sous-schéma de dimension 25 (la bonne dimension).

Preuve. Le Corollaire suit de la Proposition 2.5.4 et du Lemme 1.4.1.

Les résultats obtenus sur les courbes de degré 6 et 7 et le Lemme 1.4.5 donnent des autres strates de  $\mathring{H}_d$  se coupant d'une bonne façon:

**Théorème 2.5.6.** Si  $\beta \geq \left\lceil \frac{2d+1}{3} \right\rceil$ ,  $b \geq \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$  et  $c \geq \left\lceil \frac{d-2}{3} \right\rceil$ , alors les strates  $M(a,b,c)$  et  $N(\alpha,\beta)$  de  $\mathring{H}_d$  se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

Preuve. On pose  $d = 3m + r$ , avec  $r \in \{-1,0,1\}$ . On a  $c \geq m - 1$  et  $b \geq m$ .

Le cas  $r = -1$  est contenu dans le Théorème 2.3.4.

Considérons  $r = 0$ ; pour  $d = 6$  les strates  $M(3,2,1)$  et  $N(6,4)$  se coupent en bonne dimension (cf. Proposition 2.5.2) et alors en appliquant le Lemme 1.4.1 et le Lemme 2.5.6 on a la thèse.

Pour  $r = 1$ ; on considère le degré  $d = 7$ , les strates  $M(4,2,1)$  et  $N(7,5)$  se coupent en bonne dimension (cf. Proposition 2.5.4) et alors en appliquant le Lemme 1.4.1 et le Lemme 2.5.6 on a la thèse.

Je remercie André Hirschowitz pour l'efficacité et le dévouement avec lesquels il a dirigé ma thèse de doctorat.

## RÉFÉRENCES

- [aB] **A.Bruguères**, Filtration de Harder-Narasimhan et stratification de Shatz, in "Modules des fibrés stables sur les courbes algébriques", exp.4, Progress in Math.54, Birkhäuser,1985.
- [C] **F.Conforto**, Le superficie razionali, Zanichelli, Bologna (1939).
- [wlE] **W.L.Edge**, The theory of ruled surfaces, Cambridge Univ.Press, 1931.
- [EV1] **D.Eisenbud - A.Van de Ven**, On the normal bundles of smooth rational space curves, Math. Ann. **256** (1881) 453-463.
- [EV2] **D.Eisenbud - A.Van de Ven**, On the variety of smooth rational space curves with given degree and normal bundle, Invent. Math. **67** (1982) 89-100.
- [gE-aH] **G.Ellingsrud - A.Hirschowitz**, Sur le fibré normal des courbes gauches, C.R. Acad. Sc. Paris **299** (1984) 245-248.
- [F] **D.Ferrand**, Courbes gauches et fibrés de rang 2, C.R.Acad.Sc. Paris **281** (1975) série A, 345-347.
- [fG-aI-gS] **F.Ghione - A.Iarrobino - G.Sacchiero**, Restricted tangent bundles of rational curves in  $\mathbf{P}^r$ , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., à paraître.
- [fG-gS] **F.Ghione - G.Sacchiero**, Normal bundle of rational curves in  $\mathbf{P}^3$ , Manuscripta Math. **33** (1980) 111-128.
- [pG-jH] **P.Griffiths - J.Harris**, Principles of algebraic geometry, Wiley - Interscience Publication, 1978.
- [aG] **A.Grothendieck**, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique: Les schémas de Hilbert, Sém. Bourbaki, exp.221,**1.1** (1960/61).
- [rH] **R.Hartshorne**, Algebraic geometry, Graduate texts in mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.
- [rH-aH] **R.Hartshorne-A.Hirschowitz**, Smoothing algebraic space curves, in "Algebraic geometry-Sitges 1983", L.N. in Math. n. **1124**, Springer-Verlag, 1984, 98-131.
- [aH1] **A.Hirschowitz**, Rank techniques and jump stratifications, in "Vector bundles and algebraic varieties", Proc. Bombay 1984", Oxford Univ.Press, 1987, 159-205.
- [aH2] **A.Hirschowitz**, Sections planes et multisechantes pour les courbes gauches

- génériques principales, en "Space curves, Rocca di Papa 1985", L.N. in Math. n. **1266**, Springer-Verlag, 1987, 124-155.
- [hK] **H.Kaji**, On the normal bundles of rational space curves, Math. Ann. **273** (1985) 163-176.
- [dP] **D.Perrin**, Courbes gauches, fibré normal et liaison, C.R.Acad.Sc. Paris **300** série I (1985) 39-42.
- [rP] **R.Piene**, Numerical characters of a curve in projective n-space, in "Real and complex singularities, Oslo 1976", Sijthoff en Noordhoff, 1978, 475-495.
- [IR1] **L.Ramella**, Sur le schéma de Hilbert des courbes rationnelles de  $\mathbf{P}^3$ , Thèse de doctorat, Univ.de Nice, 1988.
- [IR2] **L.Ramella**, La stratification du schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de  $\mathbf{P}^n$  par le fibré tangent restreint, C.R.Acad.Sc. Paris **311** série I (1990) 181-184.
- [IR3] **L.Ramella**, Sur la birationalité de certains morphismes de Gauss, en préparation.
- [gS] **G.Sacchiero**, On the varieties parametrising rational space curves with fixed normal bundle, Manuscripta Math. **37** (1982) 217-228.
- [SR] **J.G.Simple - L.Roth**, Introduction to algebraic geometry, Clarendon Press, Oxford, 1949.
- [cS] **C.S.Seshadri**, Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques, rédigé par M.Drezet, Asterisque **96**, Soc. Math. de France, 1982.
- [IS] **L.Spiro**, Lectures on equations defining space curves, Tate Inst. Bombay, 1979.
- [V] **J.L.Verdier**, Two dimensional  $\sigma$ -models and harmonic maps from  $S^2$  to  $S^{2n}$ , en "Group theoretical methods in Physics", L.N. in Physics n.**180**, Springer-Verlag, 1983.