BRUNO SEVENNEC

Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 56 (1994)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_56__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 56
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 122, fascicule 1

Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation

Bruno Sévennec (*)

Résumé. On étudie les systèmes hyperboliques de lois de conservation en dimension un d'espace. L'espace des états apparait naturellement muni d'une structure affine. Les systèmes physiques possèdent des lois de conservation excédentaires, ou "entropies", et on montre que les propriétés d'intégrabilité des champs de directions propres sont liées à l'existence de ces entropies. La dégénérescence linéaire et la présence d'une entropie non-dégénérée sont deux caractéristiques des systèmes d'origine physique. On montre qu'elles entraînent une propriété de "rigidité" du feuilletage de contact associé au champ linéairement dégénéré, qui est explicitée sur un certain nombre d'exemples. L'étude asymptotique de la stabilité des oscillations permises par la dégénérescence linéaire conduit à la notion d'hyperbolicité globale, que l'on étudie dans le cadre de la géométrie transverse du feuilletage de contact, et pour laquelle des critères généraux sont dégagés, tel le "non-enlacement" de ce feuilletage.

Abstract. We study hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension. State space appears naturally endowed with an affine structure. Physical systems posess extraneous conservation laws, the so-called "entropies", and we show that the integrability properties of eigendirection fields are strongly related to the existence of these entropies. Linear degeneracy and existence of a non-degenerate (e.g. strictly convex) entropy are characteristic features of physical systems. We show that they entail a "rigidity" property of the contact foliation associated with the linearly degenerated field, which is evidenced on some examples. In studying stability of oscillations permitted by linear degeneracy, one is led to the notion of global hyperbolicity, which is studied in the framework of contact foliation's transverse geometry. It results in several criteria of global hyperbolicity, such as the "unlinking" of contact foliation, for a certain class of systems.

(*) Texte reçu le 10 février 1993
B. Sévennec, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, U.M.R. 128 du CNRS, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, (France).

Table des matières

Introduction

Les systèmes hyperboliques de lois de conservation étudiés dans ce travail font partie de la classe plus générale des systèmes quasilinéaires

$$\partial_t v + \sum_{\alpha=1}^{d} A^\alpha(v)\partial_{x_\alpha} v = 0 \ , \ t \in \mathbf{R} \ , \ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d \ , \ v(x,t) \in V \subset \mathbf{R}^n \tag{0.1}$$

qui sont *hyperboliques*, i.e. les matrices $A(v,\xi) := \sum_{\alpha=1}^{d} \xi_\alpha A^\alpha(v)$ sont diagonalisables à valeurs propres réelles $\lambda_i(v,\xi)$ pour tout ξ dans $\mathbf{R}^d$ et tout v dans V . Il est classique qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy associé au système linéarisé autour de toute solution constante de (0.1) soit bien posé, ou comme on dit, que (0.1) soit "linéairement bien posé". Lorsque de plus $A(v,\xi)$ n'a pas de valeur propre multiple pour $\xi \neq 0$, on dit que (0.1) est *strictement hyperbolique*[1]. On suppose les $A^\alpha(v)$ régulières en v, par exemple C^κ, $\kappa \geq 2$.

L' *espace des états* V est généralement un ouvert de $\mathbf{R}^n$, tandis que "l'espace physique" est celui de la variable x , c'est-à-dire $\mathbf{R}^d$. On se limitera en fait au cas d'une seule dimension d'espace ($d = 1$), qui correspond par exemple à l'étude des ondes planes $v(x,t) = \tilde{v}(\xi \cdot x, t)$ pour un système du type (0.1). Soit donc

$$\partial_t v + A(v)\partial_x v = 0 \ , \ x \in \mathbf{R} \ , \ v(x,t) \in V \subset \mathbf{R}^n \tag{0.2}$$

un tel système. Sa non-linéarité fait qu'en général, les solutions classiques (par exemple C^1, ou lipschitziennes) ont un temps d'existence *fini*, et qu'au "temps critique" $t = t_*$ apparaît dans la solution une *singularité*, plus précisément $\sup_x |\partial_t v| \to \infty$ pour $t \to t_*$ (cf. par exemple [A2, Ba, Jn, Lax4, Lax5, Li5]). On ne peut prolonger la solution pour $t > t_*$ qu'en faisant naître une *discontinuité* de $v(\cdot, t)$.

Mais l'équation (0.2) n'a plus de sens, même dans $\mathcal{D}'$, si v est discontinue : c'est le problème bien connu "$\text{sgn}(x).\delta_0(x)$". Pourtant les systèmes du type (0.2) ont une origine physique qui montre que des solutions discontinues "existent". L'exemple historique est celui de la dynamique des gaz, étudié depuis plus d'un siècle [Sto, Rie, Ran, Str1], mais beaucoup d'autres ont été découverts depuis : élasticité non-linéaire, câbles élastiques, circulation automobile, électromagnétisme non-linéaire, magnétohydrodynamique, chromatographie, électrophorèse, "modulations lentes" des solutions quasi-périodiques d'EDPs non-linéaires dispersives, etc....

---

[1] Pour certaines valeurs de (n,d) cette condition n'est *jamais* réalisée [Lax6, F-R-S], par exemple si $d = 3$ et $n \not\equiv 0, \pm 1 \mod 8$.

Il s'avère que les systèmes correspondants sont toujours l'expression de *lois de conservation*, c'est-à-dire s'écrivent dans le cas d'un système du type (0.1) :

$$\partial_t u + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} f^\alpha(u) = 0 \ , \ u(x_1, \dots, x_d, t) \in U \subset \mathbf{R}^n \tag{0.3}$$

et dans le cas $d = 1$ considéré ici [2]:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ , \ u(x,t) \in U \subset \mathbf{R}^n \ . \tag{0.4}$$

L'équation (0.3) entraîne immédiatement que pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ à bord régulier, de normale sortante ν, on a

$$\partial_t \int_\Omega u(x,t)dx + \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot f(u(x,t))dx = 0 \tag{0.5}$$

avec $\nu \cdot f(u) := \sum_{\alpha=1}^{d} \nu_\alpha f^\alpha(u) \in \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que les "quantités de u_i" ($i = 1, \dots, n$) sont localement *conservées*, (d'où la terminologie) : la variation de la "quantité totale de u_i" dans Ω ne dépend que de ce qui se passe sur le bord. Cela justifie aussi l'appellation de "flux" pour les fonctions f_i^α, que l'on peut considérer comme définissant des $(n-1)$-formes différentielles $\sum_{\alpha=1}^{d}(-1)^\alpha f_i^\alpha(u) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_\alpha} \wedge \dots \wedge dx_d$ sur $\mathbf{R}^d$ dépendant de $u \in U$.

On peut alors considérer des solutions discontinues : il suffit d'observer que le membre de gauche de (0.3) a un sens en tant que distribution dès que $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est mesurable et (localement) bornée, et en particulier pour des u discontinues. On parle alors de *solution faible* de (0.3).

Un peu de réflexion montre cependant que tout ne peut pas aller aussi facilement : ces systèmes décrivent des phénomènes physiques *irréversibles* (la dynamique des gaz par exemple), irréversibilité dont les formulations (0.3),(0.4) ne gardent aucune trace puisque $u(x,-t)$ est solution si et seulement si $u(-x,t)$ l'est.

De fait, même pour l'équation scalaire ("équation de Burgers", $n = d = 1$)

$$\partial_t u + \partial_x (u^2/2) = 0 \tag{0.6}$$

on s'assure facilement de la *non-unicité* des solutions faibles du problème de Cauchy, en considérant par exemple les deux solutions faibles distinctes $u, \tilde{u}$, égales pour $t < 0$ et données par :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 \\ \tilde{u}(x,t) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } |x| < t/2 \\ 0 & \text{si } |x| > t/2. \end{cases} \end{aligned}$$

[2]On peut trouver dans [Gel] une très jolie motivation "naturelle" à l'étude de ces systèmes

On doit donc imposer une *condition d'admissibilité* aux solutions faibles, qui a pour but de rétablir l'unicité, en incorporant d'une manière ou d'une autre l'irréversibilité nécessaire [3].

Une telle condition restaurant l'unicité dans tous les cas reste à découvrir, même pour $d = 1$ et s'agissant du *problème de Riemann* [Rie] : étant donné deux états u^-, u^+ il s'agit de trouver une solution u au problème de Cauchy avec donnée initiale discontinue $u(x,0) = u^\pm$, $\pm x > 0$, de la forme $u(x,t) = \tilde{u}(x/t)$ (c'est obligatoire s'il y a unicité, compte tenu de l'invariance du problème par homothéties).

C'est Lax, dans son article [Lax2], qui a le premier formulé une telle condition d'admissibilité. Elle concerne les discontinuités des solutions "régulières par morceaux" d'un système (0.4) *strictement hyperbolique.* Dans le cas de la dynamique des gaz, cette condition exprime l'accroissement de l'entropie physique des particules traversant l'onde de choc, et on l'appellera "condition d'entropie pour les chocs" ou "condition de Lax".

Cette condition lui permet de démontrer, pour une large classe de systèmes (ceux qui sont "convexes" en un certain sens), l'existence et l'unicité d'une solution continue par morceaux du problème de Riemann lorsque les états u^-, u^+ sont proches.

Depuis lors, un grand nombre de conditions d'admissibilité ont été dégagées, s'appliquant soit au problème de Riemann et aux solutions faibles u de classe VB de (0.3),(0.4) (cf. [Daf1, Daf4, Li2] et aussi [Daf2, Li6] pour une présentation générale), soit aux solutions faibles $u \in L^\infty$ [Fri-L, Lax3].

On peut aussi mentionner l'approche par "viscosité évanescente" [Gel], où l'on considère par exemple (0.4) comme "limite" pour $\varepsilon \to 0$ du système *parabolique*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x (B(u) \partial_x u) \tag{0.7}$$

avec $B(u)$ matrice (définie) positive. Cette approche conduit à la notion de "profil visqueux" ou "structure" pour un choc et à une autre condition d'admissibilité, étudiée par exemple dans [Ger, Go1, Go2, Go3, Vv, Dy] et plus récemment dans [Co-S1, Co-S2, Fre1, Fre2, Mo2, Mo4]. On est alors conduit à étudier les liaisons entre points critiques pour certaines familles de champs de vecteurs, à l'aide d'outils topologiques (théorie de Morse, indice de Conley, ...).

Une des seules conditions gardant un sens pour $u \in L^\infty$ est la "condition d'entropie" introduite par Lax et Friedrichs [Fri-L, Lax3]. Elle fait intervenir la notion d'*entropie* d'un système quasilinéaire (0.1) : c'est par définition la densité d'une quantité conservée localement par les solutions *régulières* de (0.1), c'est-à-dire une fonction $E : V \to \mathbf{R}$ vérifiant

$$dE(v).A^\alpha(v) = dF^\alpha(v) \ , \ \alpha = 1, \ldots, d \tag{0.8}$$

[3] Dans le cas de la dynamique des gaz, la nécessité d'une condition d'admissiblité pour les chocs est connue depuis un siècle (cf. [Str2, Rie, Jou])

pour des "flux d'entropie" $F^\alpha : V \mapsto \mathbf{R}$ convenables, de sorte que pour toute solution régulière de (0.1), on ait

$$\partial_t E(v) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(v) = 0 \tag{0.9}$$

(la terminologie vient du cas de la dynamique de gaz, où –l'opposé de– la densité d'entropie physique joue ce rôle). Par exemple, un système de lois de conservation (0.3) admet pour entropies "triviales" toutes les restrictions à U des fonctions *affines*. De plus, tous les systèmes d'origine physique possèdent apparemment au moins une entropie "supplémentaire" (non-affine...), dotée de certaines propriétés de *convexité* [Daf3]. Dans le cas $d = 1$, c'est-à-dire pour un système (0.4) d'origine physique, il en existe en fait toujours une *convexe*, et même *fortement convexe*, c'est-à-dire que D^2E est partout définie positive. Ceci a des conséquences importantes pour le système (0.4) : cela entraîne par exemple son hyperbolicité, et en fait sa *symétrisabilité* (voir [Go3, Go4, Fri-L, Bo2, Bo3], et aussi chapitre II). On en rencontrera un certain nombre d'autres dans la suite.

La *condition d'entropie* de Lax et Friedrichs pour une solution faible u mesurable bornée est alors obtenue en remplaçant pour E convexe l'égalité (0.9) par l'inégalité dans $\mathcal{D}'$:

$$\partial_t E(u) + \sum_{\alpha=1}^{d} \partial_{x_\alpha} F^\alpha(u) \leq 0 \, . \tag{0.10}$$

Le seul résultat général d'unicité dans L^∞ de la théorie, dû à Kružkov [Kru], utilise cette condition. Il concerne le cas scalaire ($n = 1$), et est accompagné du résultat d'existence globale correspondant, obtenu par une régularisation parabolique analogue à (0.7). Il faut aussi citer le résultat d'unicité dans VB ($n = 1$), dû à Oleinik [Ole3], basé sur des arguments très différents (de "dualité", *cf* aussi [Sm] pour une généralisation à certains systèmes 2×2, dans la classe des solutions continues par morceaux).

Un autre résultat partiel d'unicité dans VB est dû à DiPerna [DiP4], et concerne les systèmes de deux équations à une dimension d'espace ($n = 2, d = 1$). Dans L^∞, le problème de l'unicité quand $n > 1$ est complètement ouvert [4].

Concernant l'existence globale (en temps) de solutions, le résultat central est le célèbre théorème de Glimm [Gl], raffiné par Liu [Li4] et dans une autre direction par [K-T]. Ce théorème fournit lorsque $d = 1$ l'existence globale d'une solution VB pour des données initiales "petites" (dans VB). Le cas de données initiales non "petites" reste limité (via une adaptation de la démonstration de Glimm) à des systèmes particuliers [Ni-Sm, DiP2, Li3, Sm]. Le cas $d > 1, n > 1$ est ouvert.

[4] Voir à ce sujet [Mo4], qui met sérieusement en doute le fait que l'on puisse obtenir l'unicité en toute généralité, même pour des solutions régulières par morceaux du problème de Riemann et des systèmes "non-pathologiques".

On étudie dans ce travail la *géométrie* des systèmes hyperboliques de lois de conservation, en se basant sur les caractéristiques communes des exemples fournis par la physique. Cette étude géométrique paraît être un préalable nécessaire si on veut se passer des hypothèses de "petitesse", par exemple dans le théorème d'existence de Glimm ou le problème de Riemann (voir [Ni-Sm, Sm, Li1, Li3, K-K2] pour des cas particuliers), ou encore le théorème d'apparition nécessaire de singularités de John-Liu [Jn, Li5]. C'est aussi le cas si on veut comprendre la structure des oscillations, i.e. le comportement d'une suite faiblement convergente (u^ε) de solutions (*cf* [Ser3, Ser11, Ser12, Ser13], et aussi le chapitre II.2.7). On pourrait citer de nombreux autres exemples, comme l'étude des points "ombilicaux" et de changement de type (hyperbolique-elliptique), où des valeurs propres viennent en coïncidence [K-K1, K-K3, I-M-P, Fre3], de la géométrie globale de l'ensemble de Rankine-Hugoniot [Fre1], ou encore de la "résonance non-linéaire" [Ma-R, Ma-R-S, Peg, Jo-M-R1, Jo-M-R2]. On peut dire que généralement, la compréhension globale d'un problème (EDP) non-linéaire passe par celle de la géométrie (ou topologie) différentielle sous-jacente.

Dans le chapitre I, on étudie les contraintes locales (différentielles) imposées à la géométrie des champs de directions propres – et plus généralement à l'espace des états lui-même – par le système hyperbolique de lois de conservation qui y est défini. La géométrie affine apparaît immédiatement de façon naturelle. On donne une caractérisation des systèmes quasilinéaires admettant une forme conservative (thm. 4), en termes de l'existence d'une connexion affine plate (i.e., localement, une structure affine) "compatible" avec le système en un certain sens. Cette caractérisation est malheureusement peu pratique, du fait de la complexité des équations (non-linéaires) exprimant l'annulation de la courbure.

On y voit aussi que la présence d'entropies supplémentaires non-triviales a des conséquences directes sur les propriétés d'"intégrabilité" des champs de directions propres. Celles-ci se manifestent par l'existence de coordonnées (non-conservatives) dans lesquelles le système s'écrit sous la forme (0.2) avec A triangulaire par blocs.

Ainsi, par exemple, un système $n \times n$ ayant une entropie non-dégénérée et $n-1$ invariants de Riemann en admet en fait n, i.e. est diagonalisable (cor. 9) (l'existence d'une entropie non-dégénérée est essentielle dans ce résultat). Pour le système 3×3 de la dynamique des gaz, qui admet une telle entropie, on peut vérifier qu'il y a soit un seul invariant de Riemann, soit trois pour certaines lois d'état très particulières (telles que la vitesse du son c soit fonction de la pression p). Un résultat du même type (cor. 10) affirme qu'un système possédant n entropies à hessiennes indépendantes est diagonalisable. Il suffit même de *trois* entropies "en position générale".

Ces propriétés (entropies supplémentaires, intégrabilité) sont "non-génériques" pour un système hyperbolique de lois de conservation, mais présentes dans les exemples d'origine physique, et on a cherché à en tirer les conséquences générales. Ainsi, l'interaction des “ondes élémentaires” de faible amplitude est fortement liée aux propriétés d'intégrabilité précédentes (I.4).

Le cas extrême des systèmes possédant une infinité d'entropies supplémentaires est celui des systèmes “riches”. Introduits par D.Serre [Ser7], ils ont été étudiés indépendamment par Tsarev [Ts2, Ts4] sous le nom de systèmes “semi-hamiltoniens”, et de manière surprenante, par G.Darboux à la fin du 19^e siècle [Dar2, Dar1], avec d'autres motivations bien sûr[5]. On montre (I.2) que ce sont exactement les systèmes conservatifs *diagonalisables*, i.e. pouvant s'écrire (dans des coordonnées non conservatives) sous la forme (0.2) avec A diagonale. Ultérieurement, on montre que ce sont aussi, parmi les systèmes quasilinéaires (0.2), ceux qui commutent avec n systèmes indépendants (prop. 24). Ces systèmes sont “complètement intégrables” en deux sens distincts : celui de l'intégrabilité des champs de directions propres et celui de la construction “algébrique” de leurs solutions [Du-N1, Ts4]. Les “symétries” des systèmes quasilinéaires sont étudiées, comme éventuelles responsables des propriétés non-génériques manifestées par les systèmes d'origine physique.

On constate ici une parenté (“dualité”) entre les entropies (lois de conservation) et les symétries, qui reste à expliquer dans le cas général, puisque le théorème de Noether qui relie ces entités ne vaut que dans un cadre *variationnel*, dont l'existence n'est pas établie en général. A ce sujet, les systèmes possédant une entropie quadratique méritent une attention particulière : ils sont en effet *hamiltoniens* [Du-N1], et donc (au moins en principe) susceptibles d'un traitement variationnel (I.6), qui n'a pas encore été développé dans ce domaine. Signalons une propriété remarquable de ces systèmes : ils possèdent, outre l'entropie quadratique, une autre entropie supplémentaire, à savoir la densité du hamiltonien.

Le chapitre II est consacré à l'étude d'une autre propriété (non-générique) de nombreux exemples fournis par la physique, à savoir la *dégénérescence linéaire* d'une ou plusieurs valeurs propres λ_i, pour lesquelles $d\lambda_i$ s'annule alors sur $\ker(A - \lambda_i)$. Sans entrer dans les détails (*cf* introduction au chapitre II, et I.4), disons que c'est une propriété qui autorise des discontinuités “réversibles” dans les solutions faibles entropiques, et donc des oscillations arbitraires dans les suites faiblement convergentes de solutions. A l'inverse, et bien que cela ne soit pas établi en général, il semble que la véritable non-linéarité (absence de valeur propre linéairement dégénérée) interdise ce comportement, et force l'apparition de discontinuités irréversibles, i.e. de chocs (pour plus de détails, voir l'introduction au chapitre II.2.7).

On montre, et c'est le résultat principal du chapitre II, qu'en présence d'une entropie supplémentaire, la dégénérescence linéaire d'une valeur propre impose des contraintes très fortes au champ de sous-espaces propres correspondant. Par exemple, si cette valeur propre est simple et E est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$, les courbes intégrales sont sur des cercles ou des droites de $\mathbb{R}^n$. Les sous-

[5] Plus précisément, l'étude des “systèmes de coordonnées curvilignes à lignes conjuguées”.

variétés intégrales de ce champ de sous-espaces propres forment le "feuilletage de contact" associé à la valeur propre linéairement dégénérée. La terminologie peut paraître quelque peu antinomique, puisqu'en géométrie différentielle une "structure de contact" est l'extrême opposé d'un feuilletage. Ici, le mot "contact" provient de l'appellation traditionnelle "discontinuités de contact" pour les discontinuités réversibles.

Cette propriété de "rigidité" n'ayant apparemment pas été mise en évidence auparavant, même sur l'exemple "canonique" de la dynamique des gaz, on la vérifie et on étudie son apparence sur un certain nombre d'exemples. Le fait qu'elle soit jusqu'à présent passée inaperçue réside peut-être dans le fait qu'elle n'apparaît naturellement qu'en se plaçant dans "l'espace d'état dual", image de l'espace d'état par la différentielle dE de l'entropie supplémentaire considérée [6]. L'image du feuilletage de contact (de dimension m égale à la multiplicité de la valeur propre choisie) par dE est alors constituée de parties de "E^*-sphères" de dimension m. Par définition, un tel objet est ou bien simplement un sous-espace affine, ou bien, dans un sous-espace affine (de dimension $m + 1$), une hypersurface du type E^* + *(fct affine)* $= 0$, où E^* désigne la transformée de Legendre de E (II.1).

Cette rigidité permet de construire tout système $n \times n$ d'entropie donnée ayant une valeur propre linéairement dégénérée au moyen d'une sous-variété immergée (de codimension ≥ 3) dans un certain espace vectoriel de dimension $n+2$ (prop. 6). Il est alors possible de construire des exemples ne provenant pas de la physique mais en présentant les "caractères apparents" : entropie supplémentaire et dégénérescence linéaire. Si la construction d'exemples de systèmes à feuilletage de contact de codimension 1 prescrit ne pose pas de problème (II.2.7), c'est plus délicat en codimension > 1, le feuilletage devant alors satisfaire des conditions différentielles (*cf* appendice III.3.5 et aussi III.3.5).

Dans le chapitre II.2.7, suite logique du précédent, on étudie "l'hyperbolicité globale" des systèmes présentant une valeur propre linéairement dégénérée. Cette notion, introduite par D.Serre [Ser12, Ser13], vise à étudier la structure des oscillations qu'autorise la dégénérescence linéaire.

Qu'il suffise de dire ici qu'il s'agit de l'hyperbolicité du système "moyennisé" qui décrit l'évolution transverse de certaines solutions asymptotiques oscillantes (*cf* introduction au chapitre II.2.7 pour plus de détails). Tous les systèmes physiques sur lesquels cette notion a été étudiée se sont révélés globalement hyperboliques, ce qui a conduit D.Serre à formuler dans [Ser13] la "conjecture d'hyperbolicité globale" (voir III.1 pour un énoncé).

Le cadre de l'étude est celui de la géométrie transverse du feuilletage de

[6] Cette transformation, notée entre autres par Godunov [Go3, Go4], Lax-Friedrichs [Fri-L, Lax3], Boillat [Bo2], intervient dans de nombreuses situations. Elle est par exemple à la base de l'existence d'une "extension" hyperbolique (si E est convexe) $A(u,v)$ de $A(u)$ telle que $f(u) - f(v) = A(u,v)(u - v)$, utilisée dans certains schémas numériques [Ha-L-vL], et aussi par M. Schatzman dans [Sch].

contact, dont l'hyperbolicité globale fait naturellement intervenir un champ d'automorphismes du fibré normal, qui est en quelque sorte "moyenné" le long du feuilletage. L'hyperbolicité globale est alors simplement l'inversibilité (propriété "d'évolution globale") ainsi que la nature hyperbolique ($\mathbb{R}$-diagonalisable) des moyennes obtenues.

Un pas en direction de la conjecture ci-dessus est effectué en *caractérisant* l'hyperbolicité globale d'une certaine classe de systèmes au moyen d'une propriété géométrique du feuilletage de contact (dans l'espace d'état dual). Cette propriété est interprétée comme une condition de "non-enlacement infinitésimal" de celui-ci (thm. 18). Elle coïncide avec le non-enlacement topologique dans certains cas (e.g. $n = 3$, feuilles "complètes"), mais est essentiellement affine en général.

Parmi les systèmes de la classe concernée figurent tous ceux qui ont une entropie quadratique convexe (non-dégénérée), i.e. les systèmes "gradients" (ce sont des systèmes hamiltoniens).

Au passage, on a montré que dans tous les cas, la propriété d'évolution globale ("moitié" de l'hyperbolicité globale) ne dépend que du couple entropie-feuilletage de contact (III.2.2, cor. 6). Ceci est en fait un corollaire d'un autre résultat de rigidité (thm. 5), montrant que le champ des automorphismes "distingués" du fibré normal au feuilletage est déterminé par ses valeurs sur une transversale à ce dernier, l'extension à tout l'espace des états se faisant par holonomie et "transport parallèle".

Divers critères d'hyperbolicité globale sont ensuite dégagés, basés sur l'existence d'une métrique transverse invariante ayant certaines propriétés (lemme 9, prop. 10,13). Un seul des exemples physiques traités (celui de la MHD) échappe à ces critères généraux, bien qu'il soit globalement hyperbolique. Les systèmes ayant une entropie quadratique ("hamiltoniens") occupent une position privilégiée dans cette approche de l'hyperbolicité globale, et avec eux les systèmes vérifiant une certaine condition sur les dérivées d'ordre 3 de l'entropie. En gros, la raison en est que le passage de l'espace d'état (où siège l'hyperbolicité globale) à son dual (où "tout se passe bien") au moyen de dE respecte alors les propriétés affines du feuilletage de contact.

On montre ensuite que tous les exemples du chapitre II sont globalement hyperboliques, au moyen des techniques développées précédemment (à l'exception de la MHD, où l'on n'a pu éviter l'approche "calculatoire" directe).

Enfin, on construit sur le feuilletage (par cercles et droite) de Hopf dans $\mathbb{R}^3$ des sytèmes qui *ne sont pas* globalement hyperboliques, et dont certains sont définis dans un domaine convexe, comme c'est le cas pour les systèmes d'origine physique. Ils ne contredisent cependant pas la conjecture d'hyperbolicité globale (III.3.5). Ces exemples sont paramétrés par une fonction holomorphe. Bien entendu, c'est la propriété d'enlacement du feuilletage de Hopf qui a servi de guide. Elle entraîne en fait que ces systèmes ne sont pas globalement d'évolution, et les solutions oscillant le long du feuilletage de contact sont donc probablement très fortement instables.

L'appendice A montre comment on peut interpréter un système hyperbolique de n lois de conservation, muni d'une entropie supplémentaire E, comme une "transformation par plans tangents parallèles" au sens de Darboux [Dar2] d'une certaine hypersurface dans l'espace affine de dimension $n+1$. L'hypersurface en question n'est autre que que le graphe de E. Ces transformations, étudiées par G. Darboux à la fin du siècle dernier (avec une motivation essentiellement géométrique), font apparaître la géométrie des sous-variétés d'un espace affine comme un cadre naturel pour l'étude de la géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation (voir [Fel] pour une constatation analogue dans le cas particulier des systèmes hamiltoniens, où E est quadratique).

L'appendice III.3.5 regroupe des résultats concernant les transformations du type "Euler-Lagrange", généralisation aux systèmes quelconques de celle qui permet de passer de la formulation eulérienne de la dynamique des gaz (où la variable x est une position) à sa formulation lagrangienne (où x est une masse). On y voit que ces transformations sont de nature *projective* (ce qui étend le cadre "affine" précédent), et qu'elles respectent "toutes" les propriétés des systèmes hyperboliques de lois de conservation (par exemple l'existence d'une entropie convexe, la dégénérescence linéaire et l'hyperbolicité globale). Leur importance vient du fait qu'elles respectent aussi les solutions faibles entropiques [Wa].

Enfin, l'appendice III.3.5 est consacré à l'étude des feuilletages, dits "admissibles", qui peuvent être feuilletage de contact d'un système d'entropie donnée. On montre qu'en codimension > 1 les candidats naturels (feuilletages par E^*-sphères) ne sont pas en général admissibles : ils doivent satisfaire pour cela des conditions différentielles d'ordre ≤ 3.

On étudie aussi certains exemples de feuilletages (de codimension 2) "portant" plusieurs systèmes distincts, et parmi lesquels figure le feuilletage de Hopf dans $\mathbb{R}^3$.

Enfin l'invariance par le groupe des transformations conformes (similitudes et inversions) de la classe des feuilletages admissibles associés à une entropie quadratique est établie.

I Conservativité et structures affines

I.1 Systèmes conservatifs

Considérons un système quasilinéaire hyperboliquede n équations

$$\partial_t v + A(v)\partial_x v = 0 \tag{1.1}$$

dans un ouvert V de $\mathbf{R}^n$, où $A : V \to M_n(\mathbf{R})$ est de classe C^κ, avec $\kappa \geq 2$.

On suppose que les valeurs propres de $A(v)$, $v \in V$ sont de multiplicité constante , et on les note $\lambda_1(v) \leq \ldots \leq \lambda_n(v)$. Ce sont alors des fonctions de classe C^κ de $v \in V$, de même que les sous-espaces propres correspondants. On peut donc *localement* dans V trouver une base $(r_i(v))_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$A(v)r_i(v) = \lambda_i(v)r_i(v) \ , i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

et telle que $v \mapsto r_i(v)$ soit C^κ pour $i = 1, \ldots, n$. On note enfin $(l^i(v))_i$ la base duale de $(r_i(v))_i$.

Il est important de remarquer que du point de vue "intrinsèque", l'équation (1.1) fait de $A(v)$ un élément de $\mathrm{End}(T_v V)$, et en particulier que ses éléments propres λ_i, r_i, l^i sont respectivement une fonction sur V, un champ de vecteurs dans V, et une 1-forme différentielle dans V.

Définition 1 *Le système quasilinéaire hyperbolique(1.1) est dit* conservatif *dans V s'il existe un changement de variable $u = \phi(v)$, $\phi \in \mathit{Diff}^\kappa(V, U)$, U ouvert de $\mathbf{R}^n$, tel que le système (1.1) devienne :*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{1.3}$$

pour une application $f : U \to \mathbf{R}^n$ convenable, soit aussi

$$D\phi(v)A(v) = Df(\phi(v))D\phi(v) = D(f \circ \phi)(v) \ .$$

Si le système (1.1) est conservatif au voisinage de tout point de V, on dira qu'il est localement conservatif *(dans V).* ■

Ainsi, un sytème est conservatif si on peut l'écrire sous forme d'un système de *lois de conservation* $\partial_t u_i + \partial_x f_i(u) = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (cf. introduction).

On peut encore exprimer la conservativité du système (1.1) au voisinage d'un point $v_0 \in V$ en disant qu'au voisinage de v_0, il admet n entropies $\phi_1, \ldots, \phi_n$ "indépendantes", au sens où leurs différentielles $d\phi_i(v_0), i = 1, \ldots, n$ sont linéairement indépendantes. Rappelons (*loc. cit.*) la

Définition 2 *Une fonction $E : V \to \mathbf{R}$ est appelée* entropie *du système (1.1) s'il existe une fonction $F : V \to \mathbf{R}$, appelée* flux *de E, vérifiant*

$$dE(v).A(v) = dF(v)\ ,\ v \in V \tag{1.4}$$

ce qui revient aussi à dire que pour toute solution (locale) régulière $v(x,t)$ de (1.1), on a l'égalité

$$\partial_t E(v) + \partial_x F(v) = 0\ . \tag{1.5}$$

On voit facilement que E est une entropie d'un système sous forme conservative (1.3) (avec U simplement connexe) si et seulement si la forme bilinéaire

$$(X,Y) \mapsto D^2E(u)(Df(u)X,Y),$$

notée simplement $D^2E(u).Df(u)$, est *symétrique* pour tout $u \in U$, ou encore (puisque $Df(u)$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$) si et seulement si les sous-espaces propres de $Df(u)$ sont $D^2E(u)$–orthogonaux pour tout $u \in U$.

Si $n = 1$, toute fonction E est une entropie; si $n = 2$, l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des entropies est encore de dimension infinie (c'est l'espace des solutions d'une EDP hyperbolique linéaire d'ordre 2) , et en particulier un tel système est toujours localement conservatif (cf. par ex. [Lax5]). Mais si $n \geq 3$, $\mathcal{E}$ est *en général* réduit aux fonctions constantes pour un système quasilinéaire (1.1), et aux fonctions affines pour un système déjà sous forme conservative (1.3).

De même que si l'on s'intéresse à la classe des changements de variables $(q,p) \mapsto (\tilde{q},\tilde{p})$ qui préservent la classe des systèmes (d'équations différentielles) hamiltoniens $\dot{q} = \partial H/\partial p$, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, on obtient les transformations symplectiques (ou "canoniques") et la géométrie symplectique associée, on peut se demander quels sont les changements de variable $\tilde{u} = \phi(u)$ qui préservent la classe de tous les systèmes sous forme conservative (1.3). Le résultat est que ce sont les changements de variable *affines*.

Pour le voir, il suffit de montrer que les entropies communes à tous les systèmes (1.3) sont les fonctions affines. Or, si E est une telle entropie, les exemples linéaires $f(u) = A.u$, $A \in M_n(\mathbf{R})$ diagonalisable sur $\mathbf{R}$, montrent que $D^2E(u).A$ est symétrique $\forall u, A$, d'où $D^2E = 0$.

Ainsi, la géométrie naturellement associée aux systèmes (1.3) est la *géométrie affine*. Cela explique en particulier que l'on puisse considérer $Df(u)$ comme un endomorphisme de $T_uU = \mathbf{R}^n$ (voir aussi l'appendice A).

Il n'est donc pas surprenant de voir apparaître les structures affines sur V dans la caractérisation suivante (théorème 4 ci-dessous), sous la forme de connexions affines plates. Rappelons auparavant (cf. par ex. [Hel, K-N]) la

Définition 3 *Une* connexion affine *sur une variété V (de classe C^2) est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X}^1(V) \times \mathcal{X}^1(V) & \longrightarrow & \mathcal{X}^1(V) \\ (X,Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

($\mathcal{X}^1(V)$ désigne l'espace des champs de vecteurs C^1 sur V) qui est une "dérivation covariante", i.e. vérifie pour toute fonction $f \in C^1(V)$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y, \qquad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \ .$$

Théorème 4 *Le système quasilinéaire (1.1) est localement conservatif dans V si et seulement si il existe une connexion affine ∇ dans V, de coefficients $\Gamma^k_{ij} := \langle l^k, \nabla_{r_i} r_j\rangle$ dans la base $(r_i)_i$, et vérifiant :*

(a) *∇ est plate*

(b) *$(\lambda_j - \lambda_k)\Gamma^k_{ij} = (\lambda_i - \lambda_k)\Gamma^k_{ji}$ pour i, j, k distincts*

(c) *$(\lambda_i - \lambda_j)\Gamma^j_{ji} = r_i\lambda_j$ pour $i \neq j$* [7].

Démonstration. La nécessité s'obtient en remarquant d'abord que les conditions du théorème sont indépendantes des coordonnées choisies, et donc qu'on peut supposer le système écrit sous forme conservative (1.3). On peut alors prendre $\nabla = D$, connexion affine standard (plate!) de $\mathbf{R}^n$, dont on se sert pour dériver la relation $Df\, r_j = \lambda_j r_j$ dans les directions r_i, $i \neq j$. Il vient :

$$D^2 f(r_i, r_j) + (Df - \lambda_j) D_{r_i} r_j = (r_i\lambda_j) r_j \qquad \text{et donc}$$

$$D^2 f(r_i, r_j) = (r_i\lambda_j) r_j + \sum_k (\lambda_j - \lambda_k)\Gamma^k_{ij} r_k \ .$$

Les relations (b),(c) s'en déduisent grâce à la symétrie de $D^2 f$.

Pour montrer que les conditions sont suffisantes, on commence par choisir des coordonnées (locales) où la connexion est standard : $\nabla = D$, ce qui est possible d'après la condition (a). Vu l'indépendance remarquée ci-dessus vis-à-vis du choix des coordonnées, on peut supposer que ce sont les $(v_i)_i$.

Alors en utilisant les égalités

$$(D_{r_i} A) r_j = D_{r_i}(A r_j) - A(D_{r_i} r_j) = D_{r_i}(\lambda_j r_j) - \sum_k \Gamma^k_{ij}\lambda_k r_k$$

on voit facilement que les conditions (b),(c) équivalent à $(D_{r_i}A)r_j = (D_{r_j}A)r_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. On en conclut que $\forall X, Y, (D_X A)Y = (D_Y A)X$, et donc que $A = Df$ pour une application f convenable. ∎

Remarques.

1. On peut rapprocher cette caractérisation de celle donnée par Tsarev, Dubrovin-Novikov [Ts2, Du-N2, Du-N1] des systèmes quasilinéaires (1.1) "hamiltoniens" (qui sont en particulier conservatifs). La caractérisation s'énonce alors en termes d'existence d'une *métrique riemannienne* plate (*cf* I.6).

[7] ici et dans toute la suite, on note $X\psi$ la dérivée de la fonction ψ suivant le champ de vecteurs X

2. La platitude de ∇ équivaut à l'existence au voisinage de tout point de V de coordonnées locales dans lesquelles ∇ est la connexion affine standard (notée D) de $\mathbb{R}^n$. On peut aussi l'exprimer en écrivant que la torsion et la courbure de ∇ sont nulles, i.e. que pour tout triplet (X, Y, Z) de champs de vecteurs, on a

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \tag{1.6}$$

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0 \tag{1.7}$$

$[X, Y]$ désignant le *crochet de Lie* des champs X, Y [Hel, K-N]. Rappelons que ce dernier est donné, pour des champs $X = \sum_i X_i \partial/\partial u_i$, $Y = \sum_i Y_i \partial/\partial u_i$ dans $\mathbb{R}^n$ (ou dans des coordonnées locales), par

$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X = \sum_i \left(X_i \frac{\partial Y}{\partial u_i} - Y_i \frac{\partial X}{\partial u_i} \right) .$$

En introduisant les fonctions ω_{ij}^k définies par

$$[r_i, r_j] = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ij}^k r_k \tag{1.8}$$

on peut réécrire (1.6) et (1.7) :

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = \omega_{ij}^k \tag{1.9}$$

$$r_i \Gamma_j - r_j \Gamma_i - \sum_s \omega_{ij}^s \Gamma_s + [\Gamma_i, \Gamma_j] = 0 \tag{1.10}$$

où $\Gamma_i \in M_n(\mathbb{R})$ désigne la matrice $(\Gamma_{ij}^k)_{k,j}$ et $[\Gamma_i, \Gamma_j] := \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i$.

3. On déduit aussitôt de la remarque précédente que l'on peut remplacer la condition (b) du théorème par :

(b') $\qquad (\lambda_i - \lambda_j)\Gamma_{ij}^k = (\lambda_i - \lambda_k)\omega_{ij}^k \qquad$ pour i, j, k distincts.

Les fonctions Γ_{ij}^k , $\lambda_i \neq \lambda_j$ sont donc déterminées par les λ_i, r_i (et sont donc les mêmes pour toutes les formes conservatives), puisque les Γ_{ij}^i $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ sont donnés par (c) et $\Gamma_{ij}^j = \omega_{ij}^j - \Gamma_{ji}^j$ d'après (1.9). En particulier, dans le cas d'un système *strictement* hyperbolique, i.e. dont les valeurs propres λ_i sont *simples*, les seuls coefficients “inconnus” sont les $\Gamma_{ii}^j, i, j = 1, \ldots, n$.

Notons qu'il suffit de n fonctions (des coordonnées affines) pour donner une structure affine, alors qu'il y a n^2 fonctions Γ_{ii}^j . C'est qu'il y a beaucoup de contraintes sur ces dernières, données par les équations d'annulation de la courbure (1.10), qui sont en général inextricables (voir cependant I.2).

4. L'examen des conditions (b') et (c) montre aussitôt que si λ est une valeur propre *multiple*, de multiplicité $m > 1$, on a $\omega_{ij}^k = 0$ si $\lambda_i = \lambda_j = \lambda \neq \lambda_k$, et que $r_i \lambda = 0$ si $\lambda_i = \lambda$. Autrement dit, d'après le théorème de Frobenius, le champ des sous-espaces propres $K_\lambda = \ker(A - \lambda)$ est *intégrable*, c'est-à-dire définit un feuilletage de dimension m, et la valeur propre λ est *linéairement dégénérée*, i.e. $d\lambda$ s'annule sur K_λ. Ces résultats sont déjà connus (cf. [Bol, Fre1, Fre2, Gue]).

■

I.2 Systèmes hyperboliques "riches"

Une première conséquence du théorème 4 concerne les systèmes *diagonalisables* conservatifs :

Proposition 5 *Si un système* diagonal

$$\partial_t w_i + \lambda_i(w)\partial_x w_i = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.11}$$

admet une forme conservative, alors pour tout triplet d'indices (i, j, k) *tel que* λ_i *et* λ_j *soient distincts de* λ_k *, on a, en notant* $r_i = \partial/\partial w_i$ *:*

$$r_i\left(\frac{r_j\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}\right) = r_j\left(\frac{r_i\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}\right) \tag{1.12}$$

Démonstration. On observe que dans ce cas on a $[r_i, r_j] = 0, \forall i, j$, et donc les ω_{ij}^k sont tous nuls. La condition (b') (cf. remarque 3 ci-dessus) entraîne alors que

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \text{ si } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ et } i, j, k \text{ sont distincts.} \tag{1.13}$$

Par ailleurs il est clair qu'il suffit de démontrer (1.12) pour i, j, k *distincts*, i.e. pour $i \neq j$.

Considérons alors dans l'égalité matricielle (1.10) le coefficient (k, k) :

$$r_i\Gamma_{jk}^k - r_j\Gamma_{ik}^k = -\sum_s(\Gamma_{is}^k\Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^k\Gamma_{ik}^s) \tag{1.14}$$

Comme $\Gamma_{jk}^k = \Gamma_{kj}^k = r_j\lambda_k/(\lambda_j - \lambda_k)$ (de même pour Γ_{ik}^k), il s'agit de montrer que le second membre de (1.14) est nul. Or d'après (1.13) dans cette somme les seules quantités $\Gamma_{is}^k\Gamma_{jk}^s$ éventuellement non nulles correspondent à $\lambda_s = \lambda_i$ ou $s = k$ (puisque $i \neq k$) et $s \in \{j, k\}$ (puisque $\lambda_j \neq \lambda_k$), c'est-à-dire $s = k$ ou ' $\lambda_i = \lambda_j$ et $s = j$ '; de même pour les $\Gamma_{js}^k\Gamma_{ik}^s$ en échangeant i et j.

Le terme d'indice $s = k$ étant $\Gamma_{ik}^k\Gamma_{jk}^k - \Gamma_{jk}^k\Gamma_{ik}^k = 0$, on a le résultat cherché lorsque $\lambda_i \neq \lambda_j$. Dans le cas contraire, le second membre de (1.14) est :

$$-(\Gamma_{ij}^k\Gamma_{jk}^j - \Gamma_{ji}^k\Gamma_{ik}^i) \ .$$

Mais $\Gamma_{ik}^i = r_k\lambda_i/(\lambda_k - \lambda_i) = r_k\lambda_j/(\lambda_k - \lambda_j) = \Gamma_{jk}^j$, puisque $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$, et $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = \omega_{ij}^k = 0$, d'où à nouveau la conclusion souhaitée. ■

Remarques. 1. Les égalités (1.12) équivalent à l'existence de n fonctions M_k, $k = 1, \ldots, n$ (avec $M_k = M_{k'}$ si $\lambda_k = \lambda_{k'}$) vérifiant :

$$\frac{r_i\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = r_iM_j \text{ si } \lambda_i \neq \lambda_j \ . \tag{1.15}$$

Elles sont trivialement satisfaites si $n = 2$.

2. La considération d'autres coefficients dans (1.10) fournit d'autres relations. Par exemple, supposant pour simplifier les λ_i distincts, et en posant $a_{ij} = r_i\lambda_j/(\lambda_i - \lambda_j)$, on a pour i, j, k distincts

$$r_i a_{jk} = a_{ij}a_{jk} + a_{ji}a_{ik} - a_{ik}a_{jk} \ , \tag{1.16}$$

qui sont en fait équivalentes aux relations (1.12). On peut d'ailleurs les obtenir en écrivant les relations de compatibilité du système $r_i(\lambda_j r_j E) = r_j(\lambda_i r_i E)$ $(i \neq j)$ et en exprimant l'existence de n solutions indépendantes. Remarquons que l'on peut simplifier les relations (1.16) en les écrivant (pour i, j, k distincts)

$$r_i b_{jk} = b_{ji} b_{ik}$$

où $b_{ij} = r_i N_j/N_i$, les N_i vérifiant $r_i N_j/N_j = a_{ij}$, $i \neq j$ (i.e. $N_j = \log|M_j|$). Cette remarque est dûe indépendamment à D.Serre, S.P.Tsarev [Ts4] et... G. Darboux [Dar2, Livre III] !

3. Si $i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$, on a vu que λ est linéairement dégénérée dès que le sytème est conservatif. On en déduit aisément une seconde démonstration de l'égalité (1.12) dans le cas $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$.

4. Si le système (1.11) n'a que *deux* valeurs propres distinctes, et si celles qui sont multiples sont linéairement dégénérées, la remarque précédente montre que (1.12) est vérifiée.

5. Même dans cette situation, la partie "condition suffisante" du théorème 4 semble difficilement exploitable, à cause de la complexité de (1.10). Cependant, les conditions (1.12) suffisent d'après [Dar2, Ser7] à assurer la conservativité du système diagonal (1.11) (au moins dans le cas strictement hyperbolique, voir ci-dessous). ∎

Les systèmes strictement hyperboliques diagonaux (1.11) vérifiant (1.12) ont été considérés par D.Serre sous le nom de systèmes "riches" (cf. [Ser7, Ser9, Ser10]). Ce sont, parmi les systèmes diagonaux, ceux qui admettent un nombre "maximal" d'entropies : ils sont en particulier *conservatifs.* La démonstration repose sur le fait que les égalités (1.12) sont aussi les relations de "compatibilité maximale" du système (sur-déterminé quand $n > 2$) dont les solutions sont les entropies de (1.11) (*cf* [Ser7], et aussi [Dar2, p.325] et [Dar1, p.267-] pour des calculs analogues). Ce sont essentiellement les systèmes possédant les mêmes propriétés que les systèmes 2×2, et aussi, du point de vue de l'analyse, les mieux compris actuellement. La proposition ci-dessus permet donc d'énoncer :

> *Les systèmes riches sont exactement les systèmes conservatifs diagonalisables.*

Ces systèmes ont aussi été considérés par Tsarev [Ts2] (*cf* aussi B.A. Dubrovin, S.P. Novikov [Du-N1]) sous le nom de "systèmes diagonalisables semi hamiltoniens". La caractérisation précédente permet d'ailleurs de répondre à une question de [Du-N1, p.77], où les auteurs demandent comment doit être définie la classe des systèmes semi-hamiltoniens "généraux", i.e. non-diagonalisables : ce sont les systèmes conservatifs.

Les exemples de tels systèmes tirés de la physique sont assez nombreux : éléctrophorèse (II.2.6), chromatographie, électromagnétisme non-linéaire (*cf* II.2.4), système "moyennisé" décrivant les oscillations des solutions de l'équation de Korteweg-de Vries [Lax-Lv, Lev] (ou d'autres EDP "complètement intégrables", *cf* [Du-N2, Du-N1]), ainsi bien sûr que tous les systèmes 2×2...

I.3 Entropies et intégrabilité

Comme seconde application du théorème 4, on va maintenant voir que l'existence de plusieurs formes conservatives pour un système quasilinéaire (1.1) entraîne que celui-ci satisfait des conditions "d'intégrabilité", formes affaiblies de la diagonalisabilité précédemment envisagée. On en déduit des énoncés montrant que l'existence d'entropies non-triviales de (1.3) est liée (d'une manière assez complexe) à ses propriétés d'intégrabilité (cf. 1.18).

Sauf mention explicite du contraire, les systèmes envisagés seront supposés *strictement* hyperboliques.

Proposition 6 *On suppose le système quasilinéaire (1.1)* strictement *hyperbolique. Si $\nabla, \tilde{\nabla}$ sont deux connexions affines vérifiant les conditions (a),(b) et (c) du théorème 4, de coefficients respectifs $\Gamma^k_{ij}, \tilde{\Gamma}^k_{ij}$ dans la base $(r_i)_i$, alors les vecteurs*

$$\Delta_i := \nabla_{r_i} r_i - \tilde{\nabla}_{r_i} r_i$$

vérifient les équations linéaires *:*

$$\beta^i_{jk}\Delta_i + \beta^j_{ki}\Delta_j + \beta^k_{ij}\Delta_k = 0 \text{ pour } i,j,k \text{ distincts} \tag{1.17}$$

où $\beta^k_{ij} := \omega^k_{ij}/(\lambda_i - \lambda_j)$.

Démonstration. on a vu (cf. remarque 3 suivant le théorème 4) que les conditions (a), (b), (c) déterminent les coefficients Γ^k_{ij} pour $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc ici pour $i \neq j$.

Dans l'équation matricielle (1.10) exprimant l'annulation de la courbure de ∇ , l'annulation de la colonne k s'écrit pour i, j, k distincts :

$$-\omega^k_{ij}\Gamma_{kk} + \Gamma_{ii}\Gamma^i_{jk} - \Gamma_{jj}\Gamma^j_{ik} = \cdots$$

où on a posé $\Gamma_{ii} = (\Gamma^k_{ii})_{k=1,\dots,n} \in \mathbf{R}^n$, et où le second membre est une expression "connue", i.e. déterminée par les λ_i, r_i . Mais on sait par ailleurs que $(\lambda_j - \lambda_k)\Gamma^i_{jk} = (\lambda_j - \lambda_i)\omega^i_{jk}$ et $(\lambda_i - \lambda_k)\Gamma^j_{ik} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega^j_{ik}$, d'où il résulte que

$$\beta^k_{ij}\Gamma_{kk} + \beta^i_{jk}\Gamma_{ii} + \beta^j_{ki}\Gamma_{jj} = \text{ expr. connue.}$$

Le résultat en découle immédiatement. ∎

Puisque les entropies d'un système sous forme conservative (1.3) fournissent des lois de conservation "supplémentaires", et donc d'autres formes conservatives du même système, elles permettent de construire plusieurs connexions affines vérifiant les hypothèses du théorème 4. Précisément :

Lemme 7 *Si E est une entropie du système (1.3) et $dE(u_0) = 0$, alors au voisinage de u_0 la connexion affine $\tilde{D} = \phi^* D$ transportée de la connexion standard D au but par le difféomorphisme (local) $\phi : u \mapsto u + E(u)\xi$ ($\xi \in \mathbf{R}^n$) est donnée par*

$$\tilde{D}_X Y = D_X Y + (\phi')^{-1}\phi''(X, Y)$$

et au point u_0 par

$$\tilde{D}_X Y(u_0) = D_X Y(u_0) + \xi\, D^2 E(u_0)(X(u_0), Y(u_0)).$$

Cette connexion vérifie les hypothèses du théorème 4.

Démonstration.
Remarquons d'abord que ϕ est bien un difféomorphisme au voisinage de u_0 puisque $\phi'(u_0) = \mathrm{Id}$, et que le changement de variable $v = \phi(u)$ fournit une autre forme conservative du système, d'où le fait que $\tilde{D}$ vérifie les hypothèses du théorème 4.

La démonstration de la première formule consiste maintenant à vérifier que si $\tilde{X} \circ \phi = \phi'.X$ et $\tilde{Y} \circ \phi = \phi'.Y$, alors $(D_{\tilde{X}} \tilde{Y}) \circ \phi = \phi'.D_X Y + \phi''(X, Y)$, ce qui est immédiat (appliquer D_X à $\tilde{Y} \circ \phi = \phi'.Y$) ; la seconde formule en résulte aussitôt. ∎

Remarques. 1. L'hypothèse $dE(u_0) = 0$ peut être satisfaite en un point u_0 quelconque en ajoutant à E une entropie "triviale", c'est-à-dire affine.

2. Il est facile de voir que l'expression de $\tilde{D}$ est

$$\tilde{D}_X Y = D_X Y + \frac{1}{1 + \langle dE, \xi \rangle} \xi\, D^2 E(X, Y),$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité. On retrouve sur cet exemple le fait que $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ si $\lambda_i \neq \lambda_j$ (*cf* I.1, rmq 3), puisqu'alors r_i et r_j sont D^2E–orthogonaux. ∎

Proposition 8 *Si le système* sous forme conservative *(1.3) est strictement hyperbolique et E en est une entropie, les n coefficients $\nu_i := D^2E(r_i, r_i)$, $i = 1, \ldots, n$ vérifient les $C_n^3 = n(n-1)(n-2)/6$ relations :*

$$\beta^i_{jk}\nu_i + \beta^j_{ki}\nu_j + \beta^k_{ij}\nu_k = 0 \text{ pour } i < j < k \tag{1.18}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition 6 et du lemme ci-dessus (noter que l'échange de deux indices dans (1.18) fournit la même relation). ■

Ainsi, dans le cas où tous les ν_i sont non nuls, i.e. où la forme quadratique D^2E est *non-dégénérée* (on dira alors que E est non-dégénérée), l'annulation de deux des coefficients $\omega^i_{jk}, \omega^j_{ki}, \omega^k_{ij}$ entraîne l'annulation du troisième.

On rappelle à cette occasion la notion d'*invariant de Riemann* (strict) d'un système hyperbolique (1.1) : c'est une fonction w dans V dont la différentielle dw est en chaque point un (co-)vecteur propre de A, i.e. $dw.A = \lambda.dw$. L'existence (locale) d'une telle fonction, associée à la valeur propre (simple) λ_i, équivaut à l'intégrabilité du champ d'hyperplans $v \mapsto \ker l^i(v)$ (i.e. par exemple à $l^i \wedge dl^i = 0$).

En remarquant que l'existence d'un invariant de Riemann pour la valeur propre λ_i équivaut à l'annulation des ω^i_{jk} , pour $j, k \neq i$, on peut donc énoncer :

Corollaire 9 *Si le système (1.3) possède p invariants de Riemann w_i , $i \in I$ (où w_i correspond à λ_i), ainsi qu'une entropie E non-dégénérée, alors pour $i, j \in I$ et $k \notin I$, on a $\omega^k_{ij} = 0$, c'est-à-dire que le champ $u \mapsto \sum_{i \in I} \mathbb{R} r_i(u)$ est intégrable, et donc que le système peut s'écrire localement sous la forme "bloc-diagonale" :*

$$\begin{cases} \partial_t w_i + \lambda_i(w)\partial_x w_i &= 0 \quad (i \in I) \\ \partial_t \tilde{w} + B(w)\partial_x \tilde{w} &= 0 \end{cases}$$

où $w = ((w_i)_{i \in I}, \tilde{w}) \in \mathbb{R}^n$ et $B(w) \in M_{n-p}(\mathbb{R})$. ■

En particulier si $p = n - 1$ cela signifie que le champ caractéristique "restant" admet lui aussi un invariant de Riemann, et donc que le système est diagonalisable (c'est-à-dire riche). On peut remarquer que dans le cas de la dynamique des gaz (monodimensionnelle), où $n = 3$, il y a un seul invariant de Riemann, ce qui est le maximum autorisé par ce qui précède pour un système 3×3 non diagonalisable possédant une entropie non-dégénérée (en l'occurence fortement convexe).

Par ailleurs, le résultat est faux en l'absence d'une entropie non-dégénérée, comme le montre l'exemple

$$f(u) = f(u_1, u_2, u_3) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3 + g(u_1, u_2))$$

où les λ_i sont des réels distincts et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\partial_1\partial_2 g \neq 0$. Ce système admet en effet deux invariants de Riemann u_1, u_2, associés aux valeurs propres (constantes) λ_1, λ_2 , mais n'en admet pas de troisième (une forme propre pour λ_3 est $\partial_1 g/(\lambda_3 - \lambda_1)\, du_1 + \partial_2 g/(\lambda_3 - \lambda_2)\, du_2 + du_3$). En particulier les entropies de ce système sont toutes *dégénérées*, de noyau contenant ∂_3 .

On montre maintenant que si un système conservatif admet n entropies supplémentaires "indépendantes", il est nécessairement riche :

Corollaire 10 *Si le système (1.3) possède, au voisinage du point u_0 , n entropies E_α, $\alpha = 1, \ldots, n$ dont les hessiennes $D^2E_\alpha(u_0)$ sont linéairement indépendantes, alors il est diagonalisable au voisinage de u_0 .*

Démonstration. L'indépendance des hessiennes, qui s'écrivent, dans la base (r_i), $D^2E_\alpha = \mathrm{diag}(\nu_{\alpha 1}, \ldots, \nu_{\alpha n})$, $1 \leq \alpha \leq n$, équivaut à celle des n vecteurs $\hat{\nu}_i := (\nu_{1i}, \ldots, \nu_{ni}) \in \mathbf{R}^n$. Or les relations (1.18) fournissent

$$\beta^i_{jk}\hat{\nu}_i + \beta^j_{ki}\hat{\nu}_j + \beta^k_{ij}\hat{\nu}_k = 0 \tag{1.19}$$

d'où nécessairement l'annulation de tous les β^k_{ij} (pour i, j, k distincts), et la conclusion. ∎

Remarque. La démonstration montre qu'il suffit en fait d'avoir *trois* entropies E_1, E_2, E_3 dont les hessiennes $D^2E_\alpha(u_0)$ soient "en position générale" au sens suivant : les n vecteurs $\hat{\nu}_i := (\nu_{1i}, \nu_{2i}, \nu_{3i}) \in \mathbf{R}^3$ (notations de la démonstration) sont trois à trois linéairement indépendants. ∎

L'existence d'entropies "dégénérées" impose aussi des contraintes à la géométrie du système :

Proposition 11 *Si le système (1.3) possède une entropie E telle que D^2E soit de rang* constant *r, posons $I := \{i \mid \nu_i = D^2E(r_i, r_i) = 0\}$. Alors le champ des noyaux* $\ker D^2E = \sum_{i \in I} \mathbf{R}r_i$ *est intégrable, et ses variétés intégrales sont* affines.

Démonstration. L'intégrabilité de $\ker D^2E$ se déduit facilement des relations (1.18), mais c'est aussi une conséquence de ce que $D^2E = D(dE)$, et donc que les fibres de l'application $u \mapsto dE(u)$ en sont des variétés intégrales.

En ce qui concerne la "platitude", il suffit de montrer que si X, Y sont deux champs de vecteurs dans $K := \ker D^2E$, on a aussi $D_XY \in K$. On note que si Z est arbitraire (non nécessairement dans K), on a

$$D^2E.D_ZY + D^3E(Z, Y, .) = D_Z(D^2E.Y) = 0 \quad , \tag{1.20}$$

d'où en évaluant sur X (et en utilisant la symétrie de D^3E) :

$$D^3E(X, Y, Z) = 0 \text{ pour } X, Y \in K \text{ et } Z \text{ quelconque.}$$

Maintenant on applique à nouveau (1.20) avec $Z = X$ pour obtenir

$$D^2E.D_XY = -D^3E(X, Y, .) = 0 \quad ,$$

i.e. le résultat voulu. ∎

Remarques. 1. Ces résultats montrent que les systèmes admettant n entropies à hessiennes indépendantes de rang 1 sont riches, et que leurs hypersurfaces caractéristiques (variétés intégrales des $\ker l^i$) sont des *hyperplans.* Ils ont été introduits par B.Temple [Te2], et peuvent être considérés comme généralisant "naturellement" le cas scalaire ($n = 1$). En particulier on dispose pour ces systèmes de résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles entropiques [Ser4, Hb3]. Des exemples sont les systèmes (très voisins) de l'électrophorèse (II.2.6) et de la chromatographie.

2. On peut aussi déduire la proposition 11 de la théorie des caractéristiques pour les EDP du premier ordre. En effet, sous les hypothèses faites, dE a localement pour image une sous-variété de dimension $r = \operatorname{rg} D^2E$ de $(\mathbf{R}^n)^*$. Donc E satisfait (localement) $n - r$ équations indépendantes du premier ordre $h_j(dE(u)) = 0$, $j = 1, \dots, n - r$, dont les caractéristiques sont des *droites affines* puisque h_j ne dépend pas de u. On en déduit facilement le résultat, en remarquant que dE est constante sur ces caractéristiques. ∎

I.4 Interaction d'ondes élémentaires et intégrabilité

Dans cette section on va donner une interprétation des coefficients "ω_{ij}^k" qui fait directement intervenir les solutions du système hyperbolique (1.3), reliant ainsi les résultats des sections précédentes à l'étude de ces solutions. Auparavant, on rappelle quelques faits concernant le problème de Riemann [Sm].

On fait l'hypothèse que le système considéré est strictement hyperbolique et que chacune de ses valeurs propres λ_i est

- soit *vraiment non-linéaire*, i.e. $r_i\lambda_i$ ne s'annule pas,
- soit *linéairement dégénérée*, i.e. $r_i\lambda_i \equiv 0$.

On notera respectivement $i \in \mathrm{VNL}$, $i \in \mathrm{LD}$ les deux éventualités, et pour $i \in \mathrm{VNL}$ on normalise (et on oriente) r_i par la condition

$$r_i\lambda_i = 1 .$$

Le *problème de Riemann* pour le couple d'états $(u^-, u^+) \in U \times U$ consiste alors à trouver une solution faible "admissible" (cf. théorème 12 ci-dessous) de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) & = & 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+) \\ \lim_{t \to 0} u(x,t) & = & u^\pm \quad \text{si } \pm x > 0 \end{array} \right. \tag{1.21}$$

Pour certains couples (u^-, u^+) , (1.21) admet une solution particulièrement simple. C'est le cas par exemple si u^-, u^+ satisfont pour un $s \in \mathbf{R}$ la *relation de Rankine-Hugoniot* :

$$f(u^+) - f(u^-) = s(u^+ - u^-) \tag{1.22}$$

puisqu'alors une solution est

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} u^- & \text{si } x < st \\ u^+ & \text{si } x > st \, . \end{array} \right. \tag{1.23}$$

On parle dans ce cas de *choc* de vitesse s reliant u^- et u^+.

Un autre "cas élémentaire" est celui où u^- et u^+ sont sur une même courbe intégrale de r_i pour un $i \in$ VNL, avec $s^- < s^+$ pour $s^\pm = \lambda_i(u^\pm)$. Alors une solution est donnée par $u(x,t) = u_*(x/t)$, où u_* est continue et vérifie

$$\begin{aligned} u_*(\xi) &= \begin{cases} u^- & \text{si } \xi < s^- \\ u^+ & \text{si } \xi > s^+ . \end{cases} \\ \frac{d}{d\xi}u_*(\xi) &= r_i(u_*(\xi)) \qquad \text{si } s^- < \xi < s^+ \end{aligned} \tag{1.24}$$

(noter que $r_i\lambda_i = 1$). On parle dans ce cas de *détente* reliant u^- et u^+, par référence à la dynamique des gaz (ou à la circulation automobile ...).

Enfin si pour un $i \in$ LD les états u^- et u^+ sont sur une même courbe intégrale de r_i, on a par définition de LD $\lambda_i(u^-) = \lambda_i(u^+) = s$ et aussi $f(u^+) - f(u^-) = s(u^+ - u^-)$, de sorte que (1.23) définit une solution, mais on parle alors de *discontinuité de contact* plutôt que de choc.

On peut maintenant énoncer :

Théorème 12 (Lax [Lax2, Lax5]) *Pour tout $u_0 \in U$, il existe des voisinages $W \subset \tilde{W}$ de u_0 tels que si $u^-, u^+ \in W$, (1.21) admet une solution unique vérifiant les conditions :*

(i) Régularité *: $u(x,t) = u_*(x/t)$ où $u_* : \mathbf{R} \mapsto \tilde{W}$ est C^1 par morceaux.*

(ii) Condition d'admissibilité *: en tout point de discontinuité s de u_* , on a, en posant $\lambda_i^\pm := \lambda_i(u_*(s \pm 0))$:*

$$s \in]\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^+[\cap]\lambda_{i-1}^-, \lambda_i^-[\text{ pour un } i \in \text{VNL} \text{ , ou bien} \tag{1.25}$$

$$s = \lambda_i^+ = \lambda_i^- \text{ pour un } i \in \text{LD} \tag{1.26}$$

De plus, u_* est constituée d'au plus $n+1$ états constants $u_0 = u^-, u_1, \ldots, u_n = u^+$ reliés par des "ondes élémentaires" (chocs,détentes,discontinuités de contact).
■

Remarques. 1. On vérifie aisément [Lax3] qu'en présence d'un entropie fortement convexe E de flux F , la condition (*ii*) équivaut pour u^-, u^+ proches l'un de l'autre à la "condition d'entropie" (cf. Introduction)

$$\partial_t E(u) + \partial_x F(u) \leq 0 .$$

Celle-ci s'écrit pour une discontinuité (1.23)

$$[F] - s[E] \leq 0 \tag{1.27}$$

où $[E] := E(u^+) - E(u^-)$ et $[F] := F(u^+) - F(u^-)$. En particulier, la condition (1.26) étant symétrique en u^-, u^+, les discontinuités de contact sont "réversibles", i.e. réalisent l'egalité dans (1.27). Au contraire, pour un choc (admissible) $\partial_t E + \partial_x F$ est une mesure < 0 portée par la droite $x = st$ (plus précisément c'est $([F] - s[E]).\delta(x - st)$).

2. Le cas d'un systéme "général" pour lequel $r_i\lambda_i$ change de signe est beaucoup plus complexe, et a été traité par Liu [Li2]. Le cas d'états u^-, u^+ non nécessairement proches n'est compris que pour des classes particulières de systèmes [Ni-Sm, Li1, Li3, Te1, Mo3, Mo5].

3. La question de la régularité des solutions du problème de Riemann lorsqu'on remplace l'hypothèse *(i)* par $u_* \in L^\infty$ a été étudiée dans [Hb2], où il est montré que sous certaines hypothèses génerales de non-linéarité, u_* est nécessairement C^1 par morceaux. Par ailleurs, en l'absence de l'hypothèse de structure $u(x,t) = u_*(x/t)$, la question de l'unicité a été étudiée dans [Sch]. ∎

La résolution du problème de Riemann peut s'effectuer à l'aide des "courbes d'ondes"; celles-ci sont données au voisinage de chaque point $u \in U$ par n applications $\varepsilon \mapsto \Psi_i^\varepsilon(u)$, $i = 1, \ldots, n$, qui vérifient au voisinage de $\varepsilon = 0$ les conditions :

(1). Ψ_i^ε coïncide avec le flot du champ r_i si $i \in$ LD ou $\varepsilon \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Psi_i^0(u) & = & u \\ \frac{d}{d\varepsilon}\Psi_i^\varepsilon(u) & = & r_i(\Psi_i^\varepsilon(u)) \quad \text{si } i \in \text{LD ou } \varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

(2). $f(\Psi_i^\varepsilon(u)) - f(u) = s.(\Psi_i^\varepsilon(u) - u)$ pour un $s < \lambda_i(u)$ si $\varepsilon < 0$ et $i \in$ VNL

(3). $\varepsilon \mapsto \Psi_i^\varepsilon(u)$ est C^2

Alors la solution de (1.21) évoquée dans le théorème est obtenue en résolvant

$$\Psi(u^-, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = u^+ \tag{1.28}$$

par rapport aux ε_i, où $\Psi(u, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := \Psi_n^{\varepsilon_n} \text{o} \ldots \text{o} \Psi_1^{\varepsilon_1}(u)$. Les "états constants" u_i du théorème sont ensuite donnés par $u_i = \Psi_i^{\varepsilon_i}(u_{i-1})$ et u_{i-1}, u_i sont reliés

- par un *choc* (admissible) si $i \in$ VNL et $\varepsilon_i < 0$
- par une *détente* si $i \in$ VNL et $\varepsilon_i > 0$
- par une *discontinuité de contact* si $i \in$ LD .

Le problème de l'interaction des ondes élémentaires peut maintenant être formulé comme suit :

> étant donnés u^-, u^0, u^+ tels que $u^0 = \Psi(u^-, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $u^+ = \Psi(u^0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $u^+ = \Psi(u^-, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, exprimer les ε_i en fonction des α_i, β_i .

Signalons que l'étude de ce problème revêt une grande importance pour l'étude de la stabilité du schéma de Glimm. Une réponse partielle (*cf* [Sm, thm 19.2] pour un résultat plus fin) est fournie par la

Proposition 13 *[Gl, Sm] Pour des $\alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i$ voisins de* 0 *on a*

$$\varepsilon_k = \alpha_k + \beta_k + \sum_{i>j} \omega_{ij}^k \alpha_i \beta_j + O((\mid \alpha \mid + \mid \beta \mid)^3) \tag{1.29}$$

où les $\omega_{ij}^k = \langle l^k, [r_i, r_j] \rangle = (\lambda_i - \lambda_j)/(\lambda_i - \lambda_k)\Gamma_{ij}^k$ sont ceux introduits en (1.8) (évalués en l'un des points u^-, u^0, u^+), et où $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mid \beta \mid = \beta_1 + \ldots + \beta_n$.

Démonstration. Il résulte des propriétés de Ψ_i^ε que l'on a

$$\Psi_i^\varepsilon(u) = u + \varepsilon r_i(u) + \frac{\varepsilon^2}{2} D_{r_i} r_i(u) + O(\varepsilon^3) \tag{1.30}$$

et on en déduit facilement que

$$\begin{aligned} \Psi(u, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) &= u + \sum_i \varepsilon_i r_i(u) + \sum_i \frac{\varepsilon_i^2}{2} D_{r_i} r_i(u) \\ &\quad + \sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j D_{r_i} r_j(u) + O(\mid \varepsilon \mid^3) \, . \end{aligned} \tag{1.31}$$

On a donc en particulier

$$\begin{aligned} u^0 - u^- &= \sum_i \alpha_i r_i(u^-) + \sum_i \frac{\alpha_i^2}{2} D_{r_i} r_i(u^-) + \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j D_{r_i} r_j(u^-) + O(\mid \alpha \mid^3) \\ u^+ - u^0 &= \sum_i \beta_i r_i(u^0) + \sum_i \frac{\beta_i^2}{2} D_{r_i} r_i(u^0) + \sum_{i<j} \beta_i \beta_j D_{r_i} r_j(u^0) + O(\mid \beta \mid^3) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} u^+ - u^- &= \sum_i (\alpha_i + \beta_i) r_i + \sum_i \frac{(\alpha_i + \beta_i)^2}{2} D_{r_i} r_i + \sum_{i<j} (\alpha_i + \beta_i)(\alpha_j + \beta_j) D_{r_i} r_j \\ &\quad + \sum_{i>j} \alpha_i \beta_j (D_{r_i} r_j - D_{r_j} r_i) + O((\mid \alpha \mid + \mid \beta \mid)^3) \end{aligned} \tag{1.32}$$

où les évaluations sont prises *en* u^-, et ont été omises. Le résultat en découle, compte tenu de (1.31) et de $D_{r_i} r_j - D_{r_j} r_i = [r_i, r_j]$. ■

Les coefficients ω_{ij}^k jouent donc le rôle de "coefficients d'interaction non-linéaire" des ondes élémentaires de faible amplitude. En effet pour un système linéaire on aurait simplement le "principe de superposition" $\varepsilon_i = \alpha_i + \beta_i$. En particulier pour les systèmes riches (et en particulier les systèmes 2×2) les ondes élémentaires de faible amplitude interagissent beaucoup moins que dans un système quelconque, et plus généralement l'existence d'un invariant de Riemann pour la valeur propre λ_i entraîne que les i-ondes sont "peu produites" par interaction non-linéaire. Si de plus le i-ème champ est de Temple, i.e. si les variétés intégrales de $\ker l^i$ sont des hyperplans, on peut montrer que les i-ondes ne sont pas *du tout* produites par interaction non-linéaire [Ser4, Ser15]. Cela tient à ce que les courbes d'ondes Ψ_j, $j \neq i$ sont alors contenues dans les hyperplans variétés intégrales de $\ker l^i$.

Enfin, lorsque $n \geq 3$ et que le système possède une entropie fortement convexe E ($D^2E > 0$), les relations (1.18) montrent que les signes des coefficients d'interaction $\omega_{ij}^k = (\lambda_i - \lambda_j)\beta_{ij}^k$ ne sont pas arbitraires, mais sont liés par groupes de trois. Ceci peut ensuite être interprété en notant que pour une valeur propre λ_i, $i \in \mathrm{VNL}$, les "amplitudes" ε_i négatives (resp. positives) correspondent aux i-chocs (resp. i-détentes).

Une autre approche du problème de l'interaction des ondes a été employée par John [Jn], puis Liu [Li5], pour conclure à l'apparition nécessaire de discontinuités lorsque les données initiales sont suffisamment "petites" et le système vraiment non-linéaire (voir aussi [Sch], à un autre sujet).

Leur point de départ est un système semi-linéaire gouvernant les "amplitudes" $\phi_i = \langle l^i(u), \partial_x u\rangle$ des i-ondes, $i = 1, \ldots, n$, pour une solution régulière $u(x,t)$. Il s'écrit

$$\partial_t\phi_i + \lambda_i(u)\partial_x\phi_i = \sum_{j\leq k}\gamma_{ijk}(u)\phi_j\phi_k\,. \tag{1.33}$$

On donne ici une façon naturelle d'obtenir ce système ainsi que l'expression des "coefficients d'interaction" γ_{ijk}.

On commence par noter que $u(x,t)$ est solution de $\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0$ si et seulement si

$$\langle l^i, \partial_t u\rangle + \lambda_i\langle l^i, \partial_x u\rangle = 0$$

i.e. si sur le graphe $G \subset \mathbf{R}^{2+n}$ de u , on a

$$\begin{aligned} l^i_{|G} &= \langle l^i, \partial_x u\, dx + \partial_t u\, dt\rangle \\ &= \phi_i\,(dx - \lambda_i\, dt) \qquad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \tag{1.34}$$

Comme par ailleurs on a classiquement

$$dl^i = -\sum_{j<k}\omega_{jk}^i l^j \wedge l^k$$

avec $\omega_{jk}^i = \langle l^i, [r_j, r_k]\rangle$, on en déduit les relations

$$d(\phi_i(dx - \lambda_i dt)) = -\sum_{j<k}\omega_{jk}^i\phi_j\phi_k(dx - \lambda_j dt) \wedge (dx - \lambda_k dt)$$

que l'on réécrit

$$\partial_t\phi_i + \partial_x(\lambda_i\phi_i) = \sum_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)\omega^i_{jk}\phi_j\phi_k .$$

On retrouve donc le système (1.33), avec

$$\begin{aligned}\gamma_{ijk} &= (\lambda_j - \lambda_k)\omega^i_{jk} \text{ si } i \notin \{j,k\}\\ \gamma_{iik} &= (\lambda_i - \lambda_k)\omega^i_{ik} - r_k\lambda_i \ (i \leq k)\\ \gamma_{iki} &= (\lambda_i - \lambda_k)\omega^i_{ik} - r_k\lambda_i \ (i > k)\end{aligned}$$

En particulier, on vérifie comme dans [Jn] que $\gamma_{ijj} = 0$ si $i \neq j$, et aussi que $\gamma_{iii} = -r_i\lambda_i$. La suite de l'argumentation consiste à prouver que si les données initiales sont assez petites, la solution est presque découplée pour les temps assez grands, et qu'alors le système (1.33) est essentiellement un système de n équations de Riccati indépendantes. L'explosion d'un ϕ_i au bout d'un temps fini en résulte.

Enfin, dans le cas où le système est riche, les ω^k_{ij} sont tous nuls pour i, j, k distincts, et on peut supposer que $dl^i = 0$ pour tout i. D.Serre [Ser7] a montré, généralisant le résultat de Lax ($n = 2$ [Lax5]), que dans ce cas on peut réécrire le système (1.33) sous la forme de n équations de Riccati le long des caractéristiques

$$(\partial_t + \lambda_i\partial_x)\left(\frac{\phi_i}{N_i}\right) + N_i(r_i\lambda_i)\left(\frac{\phi_i}{N_i}\right)^2 = 0$$

avec $r_iN_j = r_i\lambda_j/(\lambda_i - \lambda_j)$ pour $i \neq j$. L'explosion en temps fini en résulte, par exemple pour toute donnée initiale u_0 constante hors d'un compact (mais non constante).

I.5 Symétries des systèmes quasilinéaires

Il est bien connu que les symétries d'un problème facilitent souvent son étude, et ce d'autant plus que le groupe des symétries est plus "gros". Les systèmes d'équations aux dérivées partielles n'échappent pas à cette règle (*cf* [Olv, Ovs]).

On étudie ici les symétries des systèmes quasilinéaires [8]

$$u_t + A(u)u_x = 0, \qquad u \in U \subset \mathbf{R}^n \tag{1.35}$$

en se limitant à deux types particuliers :

[8]Dans la suite, on emploiera souvent la notation "indicielle" pour les dérivées partielles : u_t pour $\partial_t u$, etc...

- l'un est celui des symétries "ponctuelles" (ou "d'ordre 0"), i.e. des difféomorphismes
$$(x,t,u) \mapsto \Phi(x,t,u)$$
qui préservent l'ensemble des graphes des solutions (régulières) de (1.35).

- L'autre est celui des symétries "d'ordre 1" engendrées par les systèmes quasilinéaires
$$u_t + B(u)u_x = 0, \qquad u \in U \subset \mathbf{R}^n \tag{1.36}$$
qui *commutent* avec (1.35), c'est-à-dire dont le flot (local) commute avec celui de (1.35). A proprement parler, ces flots ne peuvent être définis (sur un espace convenable de fonctions $u : \mathbf{R} \to U$) que si les systèmes en question sont hyperboliques (strictement-, ou encore symétriques-).

I.5.1 Symétries ponctuelles.

Pour qu'un difféomorphisme local Φ de $\mathbf{R}^2 \times U \subset \mathbf{R}^{2+n}$ préserve l'ensemble des graphes $\{(x,t,u(x,t)) \mid (x,t) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2\}$ des solutions régulières (C^1) de (1.35), une exigence naturelle est que Φ préserve les verticales $(x_0,t_0) \times \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire préserve déjà l'ensemble de tous les graphes. On a dans ce cas
$$\Phi(x,t,u) = (\phi(x,t), \psi(x,t,u)), \tag{1.37}$$
et on dira que Φ est *fibré* (au-dessus de $\mathbf{R}^2$).

Un champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^2 \times U$ sera aussi appelé symétrie du système (1.35) s'il engendre un groupe à un paramètre de symétries au sens précédent.

Exemples.

1) Dans le cas $n = 1$, les champs de vecteurs $\xi(u)\,\partial/\partial x + \tau(u)\,\partial/\partial t$ dans $\mathbf{R}^3_{x,t,u}$ engendrent des "symétries" de tous les systèmes (1.35), réduits à une équation (cela résulte facilement de la théorie des caractéristiques pour les équations du premier ordre). Ces "symétries" n'en sont pas au sens introduit plus haut, puisque les images de certains graphes de solutions ne sont pas des graphes. Ce sont cependant des symétries "locales", en un sens évident.

2) Tout système quasilinéaire (1.35) possède des symétries provenant de son invariance par translation en x et en t et de sa nature quasilinéaire, à savoir
$$(x,t,u) \mapsto (cx + a, ct + b, u) \;\; (c \neq 0)\,. \tag{1.38}$$
Les générateurs correspondants sont $\partial/\partial x$, $\partial/\partial t$ et $x\,\partial/\partial x + t\,\partial/\partial t$. Notons que c'est l'invariance par les homothéties ($a = b = 0$ dans (1.38)) qui intervient dans la résolution du problème de Riemann (voir I.4).

3) (exemple "canonique") Le système de la dynamique des gaz (formulation eulérienne, voir II.2.1)
$$\begin{array}{rcl} \rho_t + (\rho u)_x & = & 0 \\ u_t + uu_x + p_x/\rho & = & 0 \\ e_t + ue_x + pu_x/\rho & = & 0 \end{array} \tag{1.39}$$

admet les symétries "galiléennes" (fibrées)

$$\Phi^V : (x,t,\rho,u,e) \mapsto (x+Vt,t,\rho,u+V,e),$$

engendrées par le champ de vecteurs $t\,\partial/\partial x + \partial/\partial u$.

On voit en effet facilement que si ρ, u, e vérifient (1.39), c'est encore le cas des fonctions $\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{e}$ définies par

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x,t) &= \rho(x-Vt,t) \\ \tilde{u}(x,t) &= u(x-Vt,t)+V \\ \tilde{e}(x,t) &= e(x-Vt,t)\,. \end{aligned}$$

4) Si ψ est un difféomorphisme de U, $(x,t,u) \mapsto (x,t,\psi(u))$ est une symétrie de (1.35) si et seulement si

$$\forall u \in U,\ \ (D\psi(u))^{-1}A(\psi(u))\,D\psi(u) = A(u)\,.$$

Le cas intéressant des systèmes invariants par les transformations orthogonales $\psi \in \mathbf{O}(k)$ $(k \leq n)$ est étudié dans [Fre3], notamment en ce qui concerne l'existence de solutions "stables" du problème de Riemann. Le système de la magnétohydrodynamique (II.2.5) est un exemple présentant cette symétrie, ainsi que les systèmes $u_t+(\lambda(|u|)u)_x = 0$, ou encore le câble élastique (II.2.3), l'électromagnétisme non-linéaire (II.2.4), etc.... Signalons aussi que le système de l'électrophorèse (II.2.6) admet de nombreuses symétries ponctuelles, qui s'écrivent (en notant w_i les invariants de Riemann de ce sytème)

$$Z = \beta x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i\frac{\partial}{\partial w_i}, \qquad \beta = \frac{n}{n-1}(\sum_{2}^{n}\alpha_i) - \alpha_1\,.$$

■

Généralisant l'exemple de la dynamique des gaz, on peut appeler "galiléen" un système possédant un groupe à un paramètre de symétries du type

$$\Phi^V(x,t,u) = (x+Vt,t,\psi^V(u)),$$

i.e. engendré par un champ de vecteurs

$$t\,\frac{\partial}{\partial x} + X(u) = t\,\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} X_i(u)\,\frac{\partial}{\partial u_i}\,.$$

Voici un critère général pour qu'il en soit ainsi :

Proposition 14 *Le système (1.35) admet un groupe à un paramètre de symétries engendré par*

$$Z = \xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u) \tag{1.40}$$

si et seulement si $A(u)$ vérifie la condition

$$L_X A = \xi_t I + (\xi_x - \tau_t) A - \tau_x A^2, \tag{1.41}$$

où $L_X A$ est la dérivée de Lie de A le long du champ de vecteurs X, donnée par

$$\begin{aligned} (L_X A)(u) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (D\psi^s(u))^{-1} A(\psi^s(u))\, D\psi^s(u) \\ &= D_{X(u)} A(u) - [DX(u), A(u)] \end{aligned} \tag{1.42}$$

(ψ^s) désignant le flot engendré par X, et $D_X A$ la dérivée de $u \mapsto A(u) \in M_n(\mathbf{R})$ dans la direction $X \in \mathbf{R}^n$.

Démonstration. Le champ Z engendre des symétries de (1.35) si et seulement si pour toute solution (locale, régulière) $u(x,t)$,

$$u^\varepsilon(x,t) \stackrel{def}{=} u(x - \varepsilon\xi(x,t), t - \varepsilon\tau(x,t)) + \varepsilon X(u(x,t))$$

vérifie

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon = O(\varepsilon^2) \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ecrivant $u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \varepsilon(-\xi u_x - \tau u_t + X(u))(x,t) + O(\varepsilon^2)$ on obtient la condition cherchée sous la forme

$$(-\xi u_x - \tau u_t + X(u))_t + A(u)\,(-\xi u_x - \tau u_t + X(u))_x + \left(D_{-\xi u_x - \tau u_t + X(u)} A(u)\right)\, u_x = 0,$$

qui doit être vérifée par toute solution u du système (1.35). Or on tire de ce dernier les égalités

$$\begin{aligned} (\xi u_x)_t + A(u)(\xi u_x)_x &= (\xi_t + A(u)\xi_x) u_x - \xi A(u)_x u_x \\ (\tau u_t)_t + A(u)(\tau u_t)_x &= -(\tau_t + A(u)\tau_x) A(u) u_x - \tau A(u)_t u_x \,. \end{aligned}$$

Comme $D_{\xi u_x + \tau u_t} A(u) = \xi A(u)_x + \tau A(u)_t$, on en déduit que pour *toute* $u(x)$, on doit avoir

$$\left(L_X A - \xi_t I - (\xi_x - \tau_t) A + \tau_x A^2\right)\, u_x = 0,$$

ce qui équivaut à (1.41). ∎

Remarques. 1. Dans le cas général, où ξ, τ dépendent aussi de u, et X de x, t, on obtient en plus de (1.41) les deux conditions

$$\frac{\partial X}{\partial t}(x,t,u) + A(u)\frac{\partial X}{\partial x}(x,t,u) = 0$$

et

$$\forall Y, \quad -\langle \partial\xi/\partial u, AY\rangle Y + \langle \partial\xi/\partial u, Y\rangle AY + \langle \partial\tau/\partial u, AY\rangle AY - \langle \partial\tau/\partial u, Y\rangle A^2 Y = 0\,.$$

La première de ces conditions entraîne que $X = \sum X_i(x - \lambda_i(u)t, u)r_i(u)$, où λ_i, r_i sont les valeurs et vecteurs propres de A. Quant à la seconde, elle implique $\partial\xi/\partial u = \partial\tau/\partial u = 0$ dès que A possède trois valeurs propres distinctes. Dans ce cas, les symétries sont donc nécessairement fibrées.

2. On peut comparer l'expression du membre de droite de (1.41) à celle de l'action d'une “homographie infinitésimale” sur $\lambda \in \mathbf{R}P^1 = \mathbf{R} \cup \infty$, qui est

$$\frac{(1+\epsilon a)\lambda + \epsilon b}{\epsilon c\lambda + 1 + \epsilon d} = \lambda + \epsilon\,(b + (a-d)\lambda - c\lambda^2) + O(\epsilon^2)\ .$$

Pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{pmatrix}$, le facteur de ϵ est $\xi_t + (\xi_x - \tau_t)\,\lambda - \tau_x\,\lambda^2$. Cette “coïncidence” n'en est bien sûr pas une...

3. Les symétries (infinitésimales) d'un système formant toujours une algèbre de Lie, les crochets de (1.40) avec $\partial/\partial x$, $\partial/\partial t$, $x\partial/\partial x + t\partial/\partial t$ sont encore des symétries, et elles sont de la forme (1.40) avec $X = 0$ (le résultat qui suit montre qu'elles sont en fait presque toujours “triviales”). ■

De l'observation que le membre de gauche de (1.41) est indépendant de (x,t), alors que le membre de droite en dépend *a priori*, on déduit le

Corollaire 15 *Si $A(u)$ est (uniformément) diagonalisable, et admet ou bien trois valeurs propres distinctes, ou bien une valeur propre non-constante, (1.41) ne peut être satisfaite que si ξ, τ sont des fonctions* affines *de (x,t).*

Démonstration. Notons $\alpha = \xi_t$, $\beta = (\xi_x - \tau_t)$, $\gamma = -\tau_x$, de sorte que (1.41) s'écrive

$$L_X A = \alpha I + \beta A + \gamma A^2\ . \tag{1.43}$$

On voit aisément qu'il suffit de montrer, sous les hypothèses faites, que α, β, γ sont constantes.

Dérivant (1.43) par rapport à x et t, on obtient

$$\alpha_x I + \beta_x A + \gamma_x A^2 = \alpha_t I + \beta_t A + \gamma_t A^2 = 0 \tag{1.44}$$

d'où le résultat si A admet trois valeurs propres distinctes, son polynôme minimal étant alors de degré ≥ 3.

Si A admet une valeur propre non-constante λ, on obtient la même conclusion en dérivant par rapport à u les égalités (déduites de (1.44))

$$\alpha_x + \beta_x\lambda + \gamma_x\lambda^2 = \alpha_t + \beta_t\lambda + \gamma_t\lambda^2 = 0\ .$$

■

Remarque. Si A n'a que deux valeurs propres distinctes et constantes λ_1, λ_2, on peut trouver des symétries $\xi\partial/\partial x + \tau\partial/\partial t$ avec ξ, τ non-affines, dépendant d'une solution arbitraire $\varphi(x,t)$ de l'équation

$$(\partial/\partial t - \lambda_1\partial/\partial x)(\partial/\partial t - \lambda_2\partial/\partial x)\varphi = 0.$$

■

Corollaire 16 *Si* $\xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + X(u)$ *est une symétrie du système (1.35) et si ce dernier est strictement hyperbolique, ses valeurs propres* λ_i *vérifient le long de* X *l'équation ("de Riccati")*

$$X\lambda_i = \xi_t + (\xi_x - \tau_t)\lambda_i - \tau_x\lambda_i^2 \, .$$

De plus, les champs de sous-espaces propres $\ker(A(u) - \lambda_i(u)) = \mathbf{R}\, r_i(u)$ *sont invariants par le flot de* $X(u)$.

Enfin, si $E(u)$ *est une entropie de (1.35) et si* $\tau_x = 0$, $E' = L_X E = XE = \langle dE, X\rangle$ *est aussi une entropie de (1.35).*

Démonstration. En utilisant les propriétés classiques de la dérivée de Lie, on a

$$\begin{aligned} 0 &= L_X((A-\lambda_i)r_i) = (L_X(A-\lambda_i))r_i + (A-\lambda_i)L_X r_i \\ &= (L_X A)r_i - (X\lambda_i)r_i + (A-\lambda_i)[X, r_i] \, . \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A étant distinctes, $\mathbf{R}r_i$ et im $(A - \lambda_i)$ sont supplémentaires et on a nécessairement

$$\begin{aligned} (L_X A)r_i &= (X\lambda_i)r_i \\ [X, r_i] &\in \mathbf{R}r_i = \ker(A - \lambda_i) \, . \end{aligned}$$

Ceci fournit l'équation de Riccati cherchée, et l'invariance des $\mathbf{R}r_i$ par le flot de X.

Enfin, si E est une entropie de (1.35), on a par définition $dE\,A = dF$, et appliquant L_X à cette égalité, il vient

$$dE'.A + dE.L_X A = dF' \qquad (F' = L_X F = XF) \, .$$

Sous l'hypothèse $\tau_x = 0$, on a

$$\begin{aligned} dE.L_X A &= dE\,(\xi_t I + (\xi_x - \tau_t)A) \\ &= \xi_t dE + (\xi_x - \tau_t)dF \, . \end{aligned}$$

La différentiation ne s'appliquant qu'à la variable u, et ξ, τ n'en dépendant pas, on en déduit le résultat, puisque

$$dE'.A = d(F' - \xi_t E - (\xi_x - \tau_t)F) \, .$$

■

Exemple. Les symétries galiléennes du système de la dynamique des gaz (1.39) sont engendrées par $Z = t\partial/\partial x + \partial/\partial u$. La matrice A est ici

$$A = u\,I + \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ p_\rho/\rho & 0 & p_e/\rho \\ 0 & p/\rho & 0 \end{pmatrix}$$

ses valeurs propres sont u, $u \pm c$, avec $c^2 = pp_e/\rho^2 + p_\rho$, et la condition (1.41) est simplement $L_{\partial/\partial u} A = I$, que l'on vérifie aussitôt, ainsi que $X\lambda = \partial\lambda/\partial u = 1$ pour toute valeur propre λ de A. De même, les entropies sont données classiquement (pour une loi d'état $p(\rho, e)$ générale) par

$$E = \rho S(\rho, e) + \text{fct affine de}(\rho, \rho u, \rho(e + u^2/2))$$

S vérifiant $\rho^2 S_\rho + p S_e = 0$. On vérifie bien que $\partial E/\partial u$ est alors une entropie, d'ailleurs fonction affine de $(\rho, \rho u)$. ∎

I.5.2 Symétries d'ordre 1.

On dit que les systèmes hyperboliques

$$\begin{aligned} u_t + A(u)u_x &= 0 && (1.45) \\ u_t + B(u)u_x &= 0 && (1.46) \end{aligned}$$

commutent, ou que (1.46) est une *symétrie* de (1.45), si leurs flots locaux commutent (sur un espace convenable de fonctions régulières de x). Cette notion a déjà été envisagée dans [Ser1, Ser7] et (indépendamment) dans [Ts2, Ts4], où il est notamment montré qu'un système riche commute avec beaucoup d'autres systèmes, eux aussi riches. Dans [Ts4], ce fait est utilisé pour obtenir "algébriquement" les solutions d'un système riche (1.45) à partir de ses symétries (1.46) [9]. Voir aussi [Ser10].

Si (1.45) et (1.46) commutent, il existe pour toute donnée initiale régulière $u(x)$ une solution $\tilde{u}(x, t, s)$ (définie pour t, s assez petits) du système surdéterminé

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{u}_t + A(\tilde{u})\tilde{u}_x &= 0 \\ \tilde{u}_s + B(\tilde{u})\tilde{u}_x &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \tilde{u}(x, 0, 0) = u(x)\ . \tag{1.47}$$

Ecrivant $\tilde{u}_{ts} = \tilde{u}_{st}$, on en déduit que A, B vérifient, pour *toute* $u(x)$, la condition

$$D_{B(u)u_x} A(u)u_x + A(u)(B(u)u_x)_x = D_{A(u)u_x} B(u)u_x + B(u)(A(u)u_x)_x\ . \tag{1.48}$$

Cette condition exprime la commutation des champs de vecteurs définis par (1.45) et (1.46) sur l'espace des fonctions de x. Elle peut être prise pour *définition* (formelle) de la commutation des systèmes considérés. Son avantage est de ne pas faire appel au choix d'un espace "convenable" de fonctions de x, ni à l'existence d'un flot sur cet espace, de sorte qu'elle permet de définir la commutation de systèmes éventuellement non-hyperboliques.

Exemple. Les systèmes (1.45), (1.46) commutent lorsque

$$B(u) = \alpha A(u) + \beta I, \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}). \tag{1.49}$$

[9] D'après [Ts2], ce résultat peut être regardé comme analogue à l'"intégrabilité complète" de certaines équations non-linéaires, comme par exemple KdV.

En effet, on vérifie aisément que (1.48) est satisfaite. On peut procéder autrement, en remarquant que si $u(x,t)$ est solution de (1.45),

$$\tilde{u}(x,t,s) = u(x - \beta s, t + \alpha s)$$

est solution de (1.47) avec $B = \alpha A + \beta I$. Les symétries ainsi obtenues seront dites *triviales*. ∎

L'examen de la condition (1.48) donne aussitôt :

Lemme 17 *Les systèmes (1.45), (1.46) commutent si et seulement si*

$$\forall u \in U, \ \ [A(u), B(u)] = 0 \qquad et \tag{1.50}$$

$$\forall u \in U, \forall X \in \mathbf{R}^n, \tag{1.51}$$
$$D_{B(u)X}A(u)X + A(u)D_X B(u)X \ = \ D_{A(u)X}B(u)X + B(u)D_X A(u)X \ .$$

∎

Notons que la condition (1.51) est *nécessairement* invariante par difféomorphisme.

Lorsque (1.45) est strictement hyperbolique, i.e. $A(u)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes, on voit que $B(u)$ est aussi diagonalisable, dans la même base. En particulier si le *système* (1.45) est diagonalisable, c'est aussi le cas de toutes ses symétries (1.46).

Lemme 18 *Si (1.45) est strictement hyperbolique et si E en est une entropie (densité conservée), c'est aussi une entropie de (1.46) lorsque les deux systèmes commutent.*

Démonstration. Il est clair que $E(u)_s = dE(u).B(u)u_x$ est alors une densité conservée pour le système (1.45) (on a $(\int E_s\, dx)_t = (\int E_t\, dx)_s = 0$). Mais une telle densité conservée pour un système strictement hyperbolique est nécessairement triviale, i.e. de la forme $F(u)_x = dF(u)u_x$, d'où $dE(u).B(u) = dF(u)$. En effet, posant $\alpha(u) = dE(u).B(u)$, on a

$$(\alpha(u).u_x)_t = D_{A(u)u_x}\alpha(u).u_x + \alpha(u).(A(u)u_x)_x = (\psi(u,u_x))_x$$

pour une fonction $\psi(u,v)$ convenable. Egalant les coefficients de u_{xx} dans les deux expressions, on en déduit $\psi(u,u_x) = \psi_0(u) + \alpha(u)A(u)u_x$. On voit facilement que ψ_0 est nécessairement constante, et on peut la supposer nulle. L'égalité ci-dessus s'écrit alors simplement $D_{Au_x}\alpha.u_x = D_{u_x}\alpha.Au_x$, i.e. $d\alpha(u_x, Au_x) = 0$. On en tire $\forall i \neq j$, $(\lambda_i - \lambda_j)d\alpha(r_i, r_j) = 0$, et donc $d\alpha = 0$. q.e.d. ∎

En particulier :

Proposition 19 *[Ser1, Ser7] Un système commutant avec un système strictement hyperbolique conservatif est lui-même conservatif.* ■

On retrouve en particulier le fait que les systèmes commutant avec un système riche (i.e. diagonalisable conservatif, *cf* I.2) sont eux-mêmes riches [Ser7].

On suppose maintenant que (1.45) est strictement hyperbolique, de valeurs propres λ_i et directions propres r_i. On note comme d'habitude (l^i) la base duale de (r_i). On a donc, si (1.45) et (1.46) commutent,

$$A\,r_i = \lambda_i r_i, \quad B\,r_i = \mu_i r_i\;.$$

Lemme 20 *La condition (1.51) est équivalente à la conjonction des deux conditions*

$$\forall i \neq j, \qquad (\lambda_i - \lambda_j) r_i \mu_j = (\mu_i - \mu_j) r_i \lambda_j \tag{1.52}$$

$$\forall i, j, k \neq, \qquad \omega_{ij}^k \left((\lambda_j - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) - (\mu_j - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k)\right) = 0 \tag{1.53}$$

où $\omega_{ij}^k = \langle l^k, [r_i, r_j]\rangle$. *En particulier deux systèmes commutant à un système strictement hyperbolique commutent aussi entre eux.*

Démonstration. Dérivant la relation $A\,r_j = \lambda_j r_j$ dans la direction r_i, on obtient, en notant $\Gamma_{ij}^k = \langle l^k, D_{r_i} r_j\rangle$:

$$(D_{r_i} A) r_j = (r_i \lambda_j) r_j + \sum_k (\lambda_j - \lambda_k) \Gamma_{ij}^k r_k\;.$$

On a une relation analogue pour B, à savoir

$$(D_{r_i} B) r_j = (r_i \mu_j) r_j + \sum_k (\mu_j - \mu_k) \Gamma_{ij}^k r_k\;.$$

Polarisant l'identité (1.51) par rapport à X (elle est quadratique en X), on obtient, tous calculs faits, son équivalence avec l'antisymétrie par rapport aux indices i, j de l'expression

$$\begin{aligned}&\left((\mu_i - \mu_j) r_i \lambda_j - (\lambda_i - \lambda_j) r_i \mu_j\right) r_j + \\ &\quad \sum_{k \neq i,j} \Gamma_{ij}^k \left((\lambda_j - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) - (\mu_j - \mu_k)(\lambda_i - \lambda_k)\right) r_k\;.\end{aligned}$$

Le lemme en résulte, compte tenu de la relation $\omega_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$. ■

On a vu (*cf* I.2) qu'un système diagonalisable est riche s'il est conservatif, i.e. possède n entropies indépendantes. C'est encore vrai si l'on remplace "entropie" par "symétrie" :

Proposition 21 *Si un système strictement hyperbolique diagonalisable (1.45) possède n symétries indépendantes $u_t + B_\alpha(u)u_x = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n$ (i.e. l'ouvert des u tels que les matrices $B_\alpha(u) \in M_n(\mathbf{R})$ soient indépendantes est dense), alors il est riche, c'est-à-dire conservatif.*

Notons que l'on peut toujours prendre $B_1(u) = I$, $B_2(u) = A(u)$.

Démonstration. On peut supposer $A(u) = \operatorname{diag}(\lambda_i(u))$ (où les λ_i sont distinctes par hypothèse), et $r_i = \partial/\partial u_i$. D'après ce qui précède, un système $u_t + B(u)u_x = 0$ commute avec (1.45) si et seulement si $B = \operatorname{diag}(\mu_i)$ et

$$\forall i \neq j, \quad r_i\mu_j = a_{ij}(\mu_i - \mu_j),$$

en posant $a_{ij} = r_i\lambda_j/(\lambda_i - \lambda_j)$. Ecrivant $r_i(r_j\mu_k) = r_j(r_i\mu_k)$ pour i, j, k distincts, on arrive à

$$(r_i a_{jk} - r_j a_{ik})\mu_k + \alpha_{jik}\mu_i - \alpha_{ijk}\mu_j = 0\,, \tag{1.54}$$

en ayant posé pour i, j, k distincts

$$\alpha_{ijk} = r_i a_{jk} - a_{ij}a_{jk} - a_{ji}a_{ik} + a_{ik}a_{jk} \tag{1.55}$$

d'où en particulier $r_i a_{jk} - r_j a_{ik} = \alpha_{ijk} - \alpha_{jik}$ (comparer à (1.16)). Mais l'hypothèse entraîne que pour tout u d'un ouvert dense, ce système linéaire en $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ possède n solutions linéairement indépendantes. Tous ses coefficients sont donc nuls, et en particulier $r_i a_{jk} = r_j a_{ik}$ pour i, j, k distincts, autrement dit le système est riche.

Notons que l'annulation des coefficients α_{ijk} en résulte. En effet $(\mu_i) = (\lambda_i)$ est solution de ce système, et $r_i a_{jk} = r_j a_{ik}$ entraîne alors $\alpha_{ijk} = \alpha_{jik}$, d'où $\alpha_{ijk}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, et la conclusion puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$. ∎

Remarques. 1. Un système riche possède en fait une *infinité* de symétries d'ordre 1, dépendant de n fonctions d'une variable [Du-N1].

2. La "dualité" mise en évidence entre quantités conservées (entropies) et symétries reste quelque peu mystérieuse : on ne connait pas en général de formulation variationnelle pour les sytèmes considérés, alors que le théorème de Noether ne s'applique que dans ce cadre [Olv]. Cela s'applique aussi au résultat qui suit. ∎

Convenons d'appeler "partout non-triviale" une symétrie (1.46) de (1.45) telle que $B(u)$ ne coïncide sur aucun ouvert non vide de U avec $\alpha A(u) + \beta I$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. On a alors un énoncé montrant que l'existence de symétries non-triviales d'un système (1.45) entraîne pour ce dernier des propriétés d'"intégrabilité" des champs de sous-espaces propres, analogues à celles impliquées par l'existence d'entropies "supplémentaires" d'un système conservatif (*cf* I.3).

Théorème 22 *Un système strictement hyperbolique "général" (au sens où pour tous i, j, k distincts $\{u \mid \omega_{ij}^k(u) = 0\}$ est d'intérieur vide) n'admet aucune symétrie non-triviale si $n \geq 3$.*

Plus précisément, si il admet une symétrie (1.46) partout non-triviale (voir ci-dessus), il existe des indices i, j distincts tels que

$$\forall k \notin \{i, j\}, \quad \omega_{ij}^k = \omega_{jk}^i = \omega_{ki}^j = 0 \ . \tag{1.56}$$

Autrement dit, le champ de plans $\mathbf{R}\, r_i + \mathbf{R}\, r_j$ est intégrable et les champs d'hyperplans $\ker l^i$, $\ker l^j$ sont invariants par les flots respectifs de r_j, r_i.

De plus, pour les mêmes indices i, j, on a

$$\forall k \notin \{i, j\}, \quad r_i a_{jk} = r_j a_{ik}$$

(et en fait, avec la notation (1.55), $\alpha_{ijk} = \alpha_{jik} = 0$).

Démonstration. Considérons, dans le plan $\mathbf{R}^2$, les points

$$P_i(u) = (\lambda_i(u), \mu_i(u)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Alors la condition (1.53) du lemme 20 s'interprète sous la forme

$$\forall i, j, k \neq, \quad \omega_{ij}^k(u) \neq 0 \Rightarrow P_i(u), P_j(u), P_k(u) \text{ sont alignés} \ .$$

Pour montrer la première assertion, il suffit donc de vérifier que si pour tout u, les $P_i(u)$ sont alignés, on a $B(u) = \alpha A(u) + \beta I$ pour des *constantes* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Il est clair que cette égalité a lieu pour des *fonctions* $\alpha(u), \beta(u)$ convenables, et il s'agit de voir qu'elles sont constantes.

En dérivant $\mu_j = \alpha\lambda_j + \beta$ dans la direction r_i (avec $i \neq j$), il vient d'après (1.52)

$$\begin{aligned} 0 &= r_i\mu_j - r_i\lambda_j(\mu_i - \mu_j)/(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= (r_i\alpha)\lambda_j + r_i\beta \ . \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$, on a donc $r_i\alpha = r_i\beta = 0$ pour tout i, et les fonctions α, β sont bien constantes.

La preuve de la seconde affirmation est basée sur le

Lemme 23 ("lemme de Sylvester") *Un ensemble fini de points du plan tel que toute droite en contenant deux en contient un troisième est nécessairement constitué de points alignés.* ■

La proposition en résulte. Supposons en effet que pour tout $u \in U'$ (U' ouvert non-vide de U), on ait

$$\forall i \neq j, \exists k \notin \{i, j\}, \quad (\omega_{ij}^k(u), \omega_{jk}^i(u), \omega_{ki}^j(u)) \neq (0, 0, 0) \ .$$

Alors pour tout $u \in U'$ l'ensemble $\{P_i(u)\}$ vérifie l'hypothèse du lemme, et les $P_i(u)$ sont donc alignés. Le même raisonnement que ci-dessus permet alors de conclure que $B(u) = \alpha A(u) + \beta I$ dans U', pour des constantes $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Montrons la dernière affirmation. Les indices i, j sont choisis de sorte que P_i, P_j, P_k ne sont alignés pour aucun $k \neq i, j$. Quitte à normaliser r_i, r_j, on peut supposer qu'ils commutent, et alors la relation $r_i(r_j\mu_k) = r_j(r_i\mu_k)$ est vraie. On utilise ensuite la condition de commutation (1.52) comme dans la proposition 21, pour obtenir

$$\forall k \notin \{i, j\}, \quad \alpha_{ijk}(\mu_j - \mu_k) = \alpha_{jik}(\mu_i - \mu_k) .$$

Mais cette relation est aussi vérifiée par $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$, de sorte que si α_{ijk} ou α_{jik} est non nul, on conclut que P_i, P_j, P_k sont alignés, ce qui est exclu. q.e.d. ■

La démonstration précédente montre aussi :

Proposition 24 *Un système quasilinéaire* 3×3 *admettant une symétrie partout non-triviale est nécessairement riche. Plus généralement, un système* $n \times n$ *possédant* n *symétries indépendantes est riche.*

Démonstration. Il suffit d'observer que tous les ω_{ij}^k (i, j, k distincts) sont alors nuls, ainsi que les α_{ijk}, puisque le système possède alors une symétrie pour laquelle les points P_i sont trois à trois non-alignés. ■

Remarques. 1. Par le même raisonnement, on peut montrer que parmi les $3C_n^3$ coefficients ω_{ij}^k, au moins $3C_{n-1}^2$ doivent s'annuler dans un ouvert non-vide si le système possède une symétrie non-triviale (cette borne est donnée par le cas où $n-1$ des points P_i sont alignés, le n-ième ne l'étant pas).

2. Pour démontrer le "lemme de Sylvester", il suffit de considérer trois points P_i, P_j, P_k tels que la distance de P_i à la droite $(P_j P_k)$ soit minimale et > 0. On obtient alors une contradiction en observant que deux points de l'ensemble considéré ne peuvent être situés sur $(P_j P_k)$ d'un même coté de la projection du point P_i. ■

I.6 Systèmes "hamiltoniens".

Ce sont les systèmes de la forme

$$u_t + (Q^{-1}dH(u))_x = 0 \tag{1.57}$$

où $Q : \mathbf{R}^n \longrightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ est symétrique non-dégénérée et $H : U \to \mathbf{R}$. Suivant par exemple [Ga, Gui-St, Du-N1], ces systèmes peuvent être formellement considérés comme des sytèmes hamiltoniens sur l'espace de dimension infinie des fonctions de x. En effet, on peut les écrire sous la forme

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, \mathcal{H}\} \tag{1.58}$$

pour toute "fonctionnelle" $u(\cdot) \mapsto \Phi(u(\cdot))$, où $\{\cdot,\cdot\}$ est un crochet de Poisson, i.e. est bilinéaire antisymétrique en ses arguments et vérifie l'identité de Jacobi

$$\{\{\Phi_1,\Phi_2\},\Phi_3\} + \{\{\Phi_2,\Phi_3\},\Phi_1\} + \{\{\Phi_3,\Phi_1\},\Phi_2\} = 0 . \tag{1.59}$$

Le crochet correspondant aux systèmes (1.57) est défini par

$$\{\Phi_1,\Phi_2\} = \int \frac{\delta\Phi_1}{\delta u} Q^{-1}\partial_x \left(\frac{\delta\Phi_2}{\delta u}\right) dx , \tag{1.60}$$

dont on vérifie aisément qu'il satisfait (1.59). Notons que ce crochet est dégénéré (non-symplectique), de noyau contenant les $\Phi(u(\cdot)) = \int \varphi(u(x))\,dx$ avec φ affine. Le hamiltonien $\mathcal{H}$ est simplement

$$\mathcal{H}(u(\cdot)) = \int H(u(x))\,dx .$$

Si on désire être moins formel, il faut choisir un espace fonctionnel. Ce peut être par exemple un espace de fonctions rapidement décroissantes à l'infini, ou bien périodiques, presque-périodiques, etc... Dans les deux derniers cas, $\int$ doit être compris comme opérateur de moyenne. Par ailleurs, on peut supposer que $H(0) = 0$ (et même $dH(0) = 0$), puisque le système (1.57) ne dépend en fait que de D^2H. Cela permet de définir $\mathcal{H}(u(\cdot))$ quand u est rapidement décroissante à l'infini.

Ces systèmes peuvent être caractérisés comme ceux qui possèdent une entropie quadratique non-dégénérée. En effet, un système $u_t + f(u)_x = 0$ admettant

$$E(u) = \frac{1}{2}\langle Qu, u\rangle$$

pour entropie peut s'écrire sous forme symétrique

$$(dE(u))_t + (dH(u))_x = 0$$

(*cf* [Fri-L, Lax3, Go4, Bo2], le chapitre suivant ou bien l'appendice A), avec

$$H(u) = \langle dE(u), f(u)\rangle - F(u),$$

en désignant par F le flux de E. L'écriture (1.57) en résulte.

Ils présentent aussi la particularité d'admettre, en plus de E, une autre "entropie supplémentaire", à savoir H : sa conservation est simplement celle du hamiltonien $\mathcal{H} = \int H(u(x))\,dx$ par le flot du système.

Comme tout système hamiltonien, (1.57) est susceptible d'une formulation variationnelle. Pour l'exprimer, on considère le système équivalent d'inconnue $v(x,t)$

$$v_t + Q^{-1}dH(v_x) = 0$$

où $v_x = u$. Noter que, $\int u(x)\,dx$ étant conservée, on peut, par changement d'origine dans l'espace des états, supposer que $\int u(x)\,dx = 0$. Il existe alors une primitive v de u rapidement décroissante, ou (presque-) périodique selon le cas.

On vérifie alors aussitôt que (1.57) équivaut à $\delta\mathcal{A}/\delta v = 0$, pour la "fonctionnelle d'action"

$$\mathcal{A}(v(\cdot,\cdot)) = \iint \left(\frac{1}{2}\langle Qv_x, v_t\rangle + H(v_x)\right)\,dx\,dt\,.$$

Il semble que cette formulation n'ait pas pour l'instant été utilisée en vue de démontrer l'existence de solutions (faibles) de (1.57). Notons qu'un point critique de $\mathcal{A}$ n'est jamais un minimum local, ni même d'indice fini.

Certains systèmes d'origine physique ne sont pas de ce type, par exemple la dynamique des gaz ou la MHD (II.2), bien qu'ils soient en fait hamiltoniens pour un crochet dégénéré du type "Dubrovin-Novikov" [Du-N1], i.e. de la forme (1.60) où $Q^{-1}\partial_x$ est remplacé par $G(u)\partial_x + B(u,u_x)$, avec $G(u), B(u,v)$: $(\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ symétriques et $B(u,v)$ linéaire en v, avec de plus G, B "compatibles" au sens où ils définissent bien un crochet de Poisson. Le cas où $G(u)$ est dégénérée ne se ramène pas au cas "$Q^{-1}\partial_x$". (voir aussi [Du-N1, Mo-F, Fe1, Fe-P] pour d'autres généralisations).

II Dégénérescence linéaire

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une propriété "non-générique" pour un système de lois de conservation, et pourtant présente dans la plupart des exemples d'origine physique[10] : la dégénérescence linéaire d'un ou plusieurs champs caractéristiques. On en rappelle la définition (voir I.4) :

Définition 1 *Une valeur propre λ de multiplicité constante du système quasi-linéaire hyperbolique (1.1) est linéairement dégénérée si $d\lambda$ s'annule sur* $\ker(A-\lambda)$.

C'est (trivialement) le cas pour les valeurs propres constantes, mais aussi pour les valeurs propres multiples d'un système conservatif, auquel cas le champ des noyaux $\ker(A-\lambda)$ est intégrable et définit donc un "feuilletage de contact" $\mathcal{C}$ dans U (*cf* fin de la section I.1, remarque 4). Mentionnons que la notion de dégénérescence linéaire, s'opposant à celle de véritable non-linéarité, est centrale dans l'étude des solutions oscillantes des systèmes hyperboliques de lois de conservation (voir chapitre II.2.7).

Dans la section II.1 , on met en évidence une propriété de "rigidité" du feuilletage de contact, lorsque le système possède une entropie non-dégénérée. Ainsi par exemple, si l'entropie est quadratique (dans les coordonnées conservatives) et strictement convexe, les feuilles sont des *sphères* (pour la structure euclidienne définie par l'entropie), de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre λ.

Dans la section II.2, on explicite sur un certain nombre d'exemples la rigidité du (ou des) feuilletage(s) de contact. Certains de ces exemples seront réexaminés au chapitre II.2.7 du point de vue de l'hyperbolicité globale.

II.1 Rigidité en présence d'une entropie

On considère dans cette section un système hyperbolique sous forme conservative

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{2.1}$$

défini dans un ouvert connexe $U \subset \mathbb{R}^n$ et vérifiant "l'hypothèse standard":

[10] La raison pourrait en être cherchée dans la présence de "symétries" de ces systèmes, ou des systèmes à plusieurs dimensions d'espace dont ils proviennent par réduction aux ondes planes.

(A) le système (2.1) possède une valeur propre $\lambda : U \to \mathbf{R}$, de multiplicité constante m dans le complémentaire U_{reg} d'un fermé de codimension ≥ 2 dans U, et λ est linéairement dégénérée dans U_{reg}.

On notera $\mathcal{C}$ le feuilletage de contact associé, défini dans U_{reg} par le champ de ses plans tangents

$$T_u(\mathcal{C}) = \ker(Df(u) - \lambda(u))$$

(noter que λ n'est en général pas différentiable aux points de $U - U_{reg}$, et que le feuilletage y est singulier).

Si (2.1) est aussi muni d'une entropie fortement convexe $E : U \to \mathbf{R}$, avec de plus U convexe[11], on sait [Fri-L, Lax3, Go3, Go4, Bo2] qu'il peut être "symétrisé". Plus précisément, le changement de variable

$$q = dE(u)$$

le transforme en

$$\partial_t(dL(q)) + \partial_x(dH(q)) = 0 \tag{2.2}$$

avec $q(x,t) \in U^* = dE(U)$. Dans (2.2), on a noté

$$L = E^* : U^* \to \mathbf{R}$$

la transformée de Legendre de la fonction E, et

$$H : U^* \to \mathbf{R}$$

est la fonction (unique à une constante près) vérifiant

$$f(u) = dH(dE(u)) \tag{2.3}$$

Elle est donnée par

$$H(q) = \langle dE(u), f(u)\rangle - F(u)$$

si $q = dE(u)$, où F est le flux de E, i.e. $dE.Df = dF$ (voir l'appendice A pour une interprétation géométrique).

On considère plus généralement le cas où E n'est pas nécessairement fortement convexe, mais seulement *non-dégénérée*, au sens où D^2E l'est partout. Notons que cela n'empêche pas le système de posséder par ailleurs une entropie fortement convexe, comme c'est par exemple le cas pour le système des câbles élastiques ou l'éléctromagnétisme non-linéaire (cf. II.2).

Alors $dE : U \to (\mathbf{R}^n)^*$ est un difféomorphisme local, dont les inverses locaux sont de la forme $q \mapsto dL(q)$, où $L(q) = \langle u, q\rangle - E(u)$ si $q = dE(u)$ (cf. par ex. [A2]). On fera dans la suite du chapitre l'hypothèse que U est assez "petit" au sens suivant :

[11] dE n'est en général pas injective sans cette hypothèse

(B) dE est un difféomorphisme de U sur son image $dE(U) = U^* \subset (\mathbf{R}^n)^*$,

son inverse étant $dL = dE^* : U^* \to \mathbf{R}^n$. C'est par exemple toujours le cas si E est *quadratique.* Le feuilletage image

$$dE(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^*$$

est alors défini dans $U^*_{reg} = dE(U_{reg})$ par

$$T_q(\mathcal{C}^*) = \ker(D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q))$$

en désignant encore par λ (et par commodité) la fonction $\lambda \circ dL : U^* \to \mathbf{R}$. En effet on a pour $q = dE(u)$

$$\begin{aligned} T_q(\mathcal{C}^*) &= D^2E(u).T_u(\mathcal{C}) \\ &= \ker[(Df(u) - \lambda(u)) \circ D^2E(u)^{-1}] \,. \end{aligned}$$

Mais $D^2E(u)^{-1} = D^2L(q)$ et $Df(u) \circ D^2E(u)^{-1} = D^2H(q)$ d'après (2.3), d'où le résultat.
On notera

$$\Phi_q = D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q)$$

de sorte que

$$Df(u) - \lambda(u) = \Phi_q \, D^2E(u) \,. \tag{2.4}$$

L'hyperbolicité du système (2.1) entraîne alors :

Lemme 2 *Le feuilletage $\mathcal{C}^*$ est non-isotrope pour D^2L, i.e. pour tout $q \in U^*_{reg}$, la forme quadratique $D^2L(q)$ restreinte à $T_q(\mathcal{C}^*)$ est non-dégénérée.*

Démonstration. En effet, l'endomorphisme $D^2L(q)$-symétrique

$$D^2L(q)^{-1}D^2H(q) - \lambda(q)I$$

est *diagonalisable* (comme conjugué de $Df(u) - \lambda(u)$). Son image et son noyau sont donc en somme directe, ce qui s'énonce encore

$$T_q(\mathcal{C}^*) \cap (T_q(\mathcal{C}^*))^\perp = 0$$

l'orthogonal étant relatif à $D^2L(q)$. C'est exactement la conclusion du lemme.
∎

L-sphères dans le dual de l'espace des états. Introduisons l'espace vectoriel $\mathcal{E}^*$ de fonctions sur U^* engendré par L et les fonctions affines.

Définition 3 *Une* L-sphère de dimension m *dans* U^* *est une sous-variété* S *de dimension* m *de* U^**, composante connexe de l'ensemble des zéros*

$$Z(\mathcal{V}) = \{ q \mid \forall \varphi \in \mathcal{V}, \varphi(q) = 0 \}$$

d'un sous espace vectoriel $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}^*$ *de dimension* $n - m$*, les équations* $\varphi = 0$ *de* S *étant de plus "régulières", au sens où pour tout* $q \in S$*, l'application*

$$\varphi \in \mathcal{V} \mapsto d\varphi(q) \tag{2.5}$$

est injective.

Une L*-sphère, et plus généralement une sous-variété* S*, sera dite* non-isotrope *si pour tout* $q \in S$*,* T_qS *est non-isotrope pour* $D^2L(q)$*.* ■

Remarques. 1. Si L est quadratique > 0 et $U^* = (\mathbf{R}^n)^*$, on retrouve bien sûr les sphères euclidiennes de dimension m et les m-plans affines.

2. Une L-sphère S est en particulier une composante connexe régulière d'un ensemble qui est

- soit de la forme $\Pi^m \cap U^*$ pour un m-plan affine Π^m dans le cas où $\mathcal{V}$ ne contient que des fonctions affines, et on dira alors que S est "plate"
- soit une hypersurface de niveau de $L+\alpha$ dans $\Pi^{m+1} \cap U^*$ pour une fonction affine α et un $m+1$-plan affine Π^{m+1} convenables, si $\mathcal{V}$ contient une fonction non-affine.

3. Il est encore équivalent de dire que S est – une composante connexe de – l'image par la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ de l'intersection du graphe de L avec un $m+1$-plan affine de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, si toutefois cette intersection est transverse le long de la composante concernée.

4. Si S est une sous-variété de dimension m, on voit facilement que pour avoir

$$S \subset Z(\mathcal{V}_1) \cap Z(\mathcal{V}_2)$$

avec $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$ de dimension $n-m$, il faut et il suffit que S soit plate et $L|_S$ affine, ce qui nécessite $D^2L(q)|_{T_qS} = 0$ pour tout $q \in S$. En particulier s'il existe $q \in S$ avec $D^2L(q)$ non nulle sur T_qS, on a nécessairement $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 =: \mathcal{V}$ (unicité), et les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) S est "plate", i.e. contenue dans un m-plan affine
(ii) tous les éléments de $\mathcal{V}$ sont affines

C'est par exemple le cas si S est non-isotrope. ■

La condition d'injectivité de (2.5) n'est en fait pas très contraignante :

Lemme 4 *Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}^*$ de dimension $n - m$ et $S \subset Z(\mathcal{V})$ une sous-variété de dimension m. Alors s'il existe $q \in S$ et $\varphi \in \mathcal{V} - \{0\}$ tels que $d\varphi(q) = 0$, la forme quadratique $D^2L(q)$ est nulle sur T_qS. En particulier, l'application $\varphi \in \mathcal{V} \mapsto d\varphi(q)$ est injective pour tout $q \in S$ si S est non-isotrope, ou si $m > n/2$.*

Si on suppose de plus que S est une composante connexe de $Z(\mathcal{V})$, on a

$$T_qS \subset \ker\left(D^2L(q)\,|_{T_q\Pi^{m+1}}\right)$$

pour un $m+1$-plan affine Π^{m+1} contenant S, et en particulier on a nécessairement $m \leq (n-1)/2$.

Démonstration. Tout d'abord il est clair que φ ne peut être affine, donc, quitte à remplacer φ par $c.\varphi$ avec $c \neq 0$, on peut supposer que $\varphi - L$ est affine, et en particulier

$$D^2\varphi(q) = D^2L(q)\ .$$

La condition $d\varphi(q) = 0$ entraîne classiquement que la hessienne $D^2\varphi(q)$ a une signification intrinsèque, et en particulier que

$$D^2\varphi(q)|_{T_qS\times T_qS} = D^2(\varphi|_S)(q) = 0\ ,$$

d'où la première assertion.

Démontrons la seconde : l'annulation des éléments affines de $\mathcal{V}$ définit un $m+1$-plan Π^{m+1} dans $(\mathbf{R}^n)^*$, avec par hypothèse

$$S = \varphi^{-1}(0) \cap \Pi^{m+1}$$

au voisinage de q . On choisit des coordonnées $(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ au voisinage de q sur Π^{m+1} telles que S soit définie (localement) par $y = 0$. Alors il résulte de $d\varphi(q) = 0$ que φ est nécessairement de la forme

$$\varphi = (\,a(x,y)\cdot x + b(x,y)y\,)\,y$$

avec $a(x,y) \in \mathbf{R}^m$, $b(x,y) \in \mathbf{R}$.

Supposons $a(0,0) \neq 0$, par exemple $a_1(0,0) \neq 0$. Alors, posant $z = a(x,y)\cdot x$, on peut choisir $(z, x_2, \ldots, x_m, y)$ comme coordonnées locales au voisinage de q, et $Z(\mathcal{V})$ coïncide dans ce voisinage avec l'ensemble (connexe) d'équation

$$y\,(z + b(z, x_2, \ldots, x_m)y) = 0\ .$$

En particulier, $S = \{y = 0\}$ n'est pas une composante connexe de $Z(\mathcal{V})$, ce qui contredit l'hypothèse.

On a donc nécessairement $a(0,0) = 0$. Mézalor, dans les coordonnées (x,y), la hessienne $D^2\varphi(q)$ est simplement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b(0,0) \end{pmatrix}$$

et donc $D^2L(q) = D^2\varphi(q)$ est de rang ≤ 1 sur $T_q\Pi^{m+1}$, son noyau contenant T_qS, ce qui démontre le lemme. ∎

Théorème de rigidité. On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 5 *On considère un système hyperbolique sous forme conservative (2.1), muni d'une entropie non-dégénérée E et satisfaisant aux hypothèses (A) , (B). Alors les feuilles de $\mathcal{C}^* = dE(\mathcal{C})$ sont des L-sphères de dimension m dans U^*, qui sont de plus non-isotropes. La réunion de celles qui sont plates est l'ensemble $\{d\lambda = 0\} \subset U^*_{reg}$.*

Démonstration. Introduisons pour $q \in U^*_{reg}$ l'élément θ_q de $\mathcal{E}^*$ qui "épouse le mieux" la fonction H au point q, au sens suivant :

$$\begin{aligned} \theta_q(q) &= H(q) && (2.6) \\ d\theta_q(q) &= dH(q) && (2.7) \\ \ker(D^2\theta_q(q) - D^2H(q)) &\supset T_q(\mathcal{C}^*) && (2.8) \end{aligned}$$

(Rappelons que $T_q(\mathcal{C}^*) = \ker(D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q))$). Il est immédiat qu'un tel élément est unique et s'écrit

$$\theta_q(.) = \lambda(q)L(.) + \langle a(q), . \rangle + b(q)$$

où $a(q) \in (\mathbf{R}^n)^{**} = \mathbf{R}^n$ et $b(q) \in \mathbf{R}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} a(q) &= dH(q) - \lambda(q)dL(q) && (2.9) \\ b(q) &= H(q) - \lambda(q)L(q) - \langle a(q), q \rangle \, . && (2.10) \end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned} \Theta : U^*_{reg} &\to \mathcal{E}^* \\ q &\mapsto \theta_q \end{aligned} \qquad (2.11)$$

est alors *constante* le long des feuilles de $\mathcal{C}^*$, i.e. a et b sont, comme λ, *constantes* le long des feuilles de $\mathcal{C}^*$. En effet, pour toute "variation" δq du point q les variations correspondantes de a, b sont données par

$$\begin{aligned} \delta a &= Da(q)\delta q &&= \Phi_q \delta q - \delta\lambda \, dL(q) \\ \delta b &= db(q)\delta q &&= \delta\lambda \, (\langle dL(q), q\rangle - L(q)) - \langle \Phi_q \delta q, q \rangle \end{aligned} \qquad (2.12)$$

(rappelons que $\Phi_q = D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q)$), et on a donc bien $\delta a = 0$, $\delta b = 0$ si $\delta q \in T_q(\mathcal{C}^*) = \ker \Phi_q$, puisque $\delta\lambda = d\lambda(q)\delta q$ et $\Phi_q\delta q$ sont alors nuls. Mieux : des formules (2.12) on déduit aussi que l'application Θ est *de rang constant* $n - m$ avec

$$\ker D\Theta(q) = \ker \Phi_q = T_q(\mathcal{C}^*)$$

puisque l'annulation de $\delta\lambda$, δa et δb entraîne $\Phi_q\delta q = 0$.

Classiquement, on en déduit que l'image de Θ est une sous-variété immergée de $\mathcal{E}^*$. Plus précisément, on peut décomposer Θ en

$$\Theta = j \circ \pi : U^*_{reg} \xrightarrow{\pi} \Sigma \xrightarrow{j} \mathcal{E}^* \qquad (2.13)$$

pour une variété Σ de dimension $n-m$, une submersion π et une immersion j.

On a

$$\ker D\pi(q) = \ker D\Theta(q) = T_q(\mathcal{C}^*)$$

donc le feuilletage $\mathcal{C}^*$ est exactement constitué des (composantes connexes des) fibres de π (ou de Θ). Une conséquence importante est que les feuilles de $\mathcal{C}^*$ sont *fermées* dans U^*_{reg}.

Lorsque q, q' sont sur une même feuille de $\mathcal{C}^*$, ce qu'on notera $q \sim q'$, on a $\theta_q = \theta_{q'}$, et en particulier

$$\theta_q(q') = \theta_{q'}(q') = H(q') \,. \tag{2.14}$$

Si maintenant "$q + \delta q \sim q' + \delta q'$", c'est-à-dire si $(\delta q, \delta q')$ est tangent en (q, q') au graphe de la relation $\sim$ dans $U^* \times U^*$, on déduit de (2.14) que

$$\delta\theta_q(q') + d\theta_q(q')\delta q' = dH(q')\delta q' \ ,$$

en posant $\delta\theta_q = D\Theta(q).\delta q = \delta\lambda\, L(.) + \langle \delta a, . \rangle + \delta b$.

Compte tenu de $\theta_q = \theta_{q'}$ et $d\theta_{q'}(q') = dH(q')$ (la seconde égalité faisant partie de la définition des fonctions θ_q), il vient

$$\delta\theta_q(q') = 0 \tag{2.15}$$

et ce pour tout *couple* $(\delta q, \delta q')$ tangent en (q, q') au graphe de la relation $\sim$.

Observons que $\delta q'$ ne figure plus dans (2.15). La feuille de $\mathcal{C}^*$ passant par $q \in U^*_{reg}$ est donc contenue dans l'ensemble $Z(\mathcal{V}_q)$ d'équations $\varphi = 0$, où φ décrit l'espace vectoriel $\mathcal{V}_q \subset \mathcal{E}^*$ des fonctions "$\delta\theta_q$", qui n'est autre que

$$\mathcal{V}_q = \operatorname{im} D\Theta(q) \,.$$

En particulier,

$$\dim \mathcal{V}_q = n - m \,.$$

Le feuilletage $\mathcal{C}^*$ étant non-isotrope d'après le lemme 2, $\mathcal{V}_q$ est exactement l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}^*$ s'annulant sur la feuille C^* contenant q (*cf* remarque 4). En particulier $\mathcal{V}_q$ ne dépend que de C^*, et pas du point $q \in C^*$. On le note

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(C^*) \,.$$

Pour la même raison, $\varphi \in \mathcal{V} \mapsto d\varphi(q)$ est injective, grâce au lemme 4. Dans un voisinage $B \subset U^*_{reg}$ de $q \in C^*$, $Z \cap B = Z(\mathcal{V}) \cap B$ est donc la sous-variété de dimension m définie par les équations régulières $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{n-m} = 0$, où (φ_j) est une base de $\mathcal{V}$. Mais $C^* \cap B \subset Z \cap B$ est aussi une sous-variété de dimension m, donc pour B assez petit

$$C^* \cap B = Z \cap B \,.$$

Or ceci signifie que C^* est *ouverte* dans $Z = Z(\mathcal{V})$, et comme on a vu plus haut qu'elle est aussi *fermée* dans U^*_{reg} (donc dans Z), C^* est une composante connexe de Z.

Donc toute feuille de $\mathcal{C}^*$ est une L-sphère non-isotrope.

Enfin, compte tenu de l'expression de $\Theta(q) = \theta_q$, $\mathcal{V}_q = \mathrm{im}\, D\Theta(q)$ ne contient que des fonctions affines si et seulement si $d\lambda(q) = 0$, ce qui termine la démonstration d'après la remarque 4 ci-dessus.

■

Remarque. Ce théorème permet de retrouver immédiatement dans le cadre présent un des résultats de [Fre2] (thm 2), à savoir que l'ensemble des feuilles compactes de $\mathcal{C}$ est *ouvert*. L'hypothèse supplémentaire faite ici est essentiellement celle de l'existence d'une entropie non-dégénérée. ■

Il ressort de la démonstration précédente que les systèmes (2.2) vérifiant (A),(B) peuvent dans chaque cas être construits à partir d'une immersion

$$j : \Sigma \to \mathcal{E}^* , \tag{2.16}$$

les feuilles de $\mathcal{C}^*$ étant alors des composantes connexes d'ensembles de la forme $Z(\mathrm{im}\, Dj(s))$.

Inversement, supposons que l'on ait une immersion (2.16), donnée par

$$j(s) = \lambda(s)L(\cdot) + \langle a(s), \cdot\rangle + b(s)$$

et définissant un feuilletage $\mathcal{F}$ dans un ouvert $W \subset U^*$. Plus précisement, posant

$$\mathcal{V}_s = \mathrm{im}\, Dj(s) \subset \mathcal{E}^* \qquad (s \in \Sigma)$$

toute feuille de $\mathcal{F}$ est une composante connexe F_s d'un $Z(\mathcal{V}_s)$, avec la condition de "régularité" habituelle (i.e. $\varphi \in \mathcal{V}_s \mapsto d\varphi(q)$ est injective $\forall q \in F_s$).

Sous ces hypothèses, on a

Proposition 6 *En posant*

$$H(q) = j(s)(q) \qquad \textit{pour } q \in F_s \tag{2.17}$$

on définit dans W un système symétrique (2.2) ayant λ pour valeur propre LD et $\mathcal{F}$ pour feuilletage de contact associé.

Si L (ou H) est convexe, le système obtenu est hyperbolique.

Démonstration. Considérons j comme fonction des deux variables s, q. Alors

$$dH(q) = \frac{\partial j}{\partial s}(\pi(q), q)D\pi(q) + \frac{\partial j}{\partial q}(\pi(q), q)$$

avec $\pi(q) = s$ si et seulement si $q \in F_s$. Mais par définition $\partial j/\partial s(s,q) = 0$ si $q \in F_s$, d'où

$$dH(q) = \frac{\partial j}{\partial q}(s,q) = \lambda(s)dL(q) + a(s)$$

si $q \in F_s$. Dérivant cette relation, il vient, avec des notations évidentes

$$(D^2H(q) - \lambda(s)D^2L(q))\delta q = \delta\lambda dL(q) + \delta a = d\varphi(q)$$

pour

$$\varphi = Dj(s)\delta s = \delta\lambda L(\cdot) + \langle \delta a, \cdot \rangle + \delta b\ ,$$

qui appartient à $\mathcal{V}_s$. Donc $\delta q \in \ker(D^2H(q) - \lambda(s)D^2L(q))$ équivaut à $d\varphi(q) = 0$, donc à $\varphi = 0$, i.e. $\delta s = 0$ (j est une immersion), et donc enfin à $\delta q \in T_q(\mathcal{F})$:

$$\ker(D^2H(q) - \lambda(s)D^2L(q)) = T_q(\mathcal{F})\ .$$

Ceci démontre la première affirmation, et la seconde est triviale. ∎

Remarque. Un problème intéressant est de caractériser parmi tous les feuilletages $\mathcal{F}$ par L-sphères ceux qui "portent" un système (2.2).

Ce n'est pas trivial quand $m < n - 1$: il s'agit de déterminer la possibilité "d'intégrer" la famille $s \mapsto \mathcal{V}_s \subset \mathcal{E}^*$ de sous-espaces vectoriels de dimension $n - m$ définissant $\mathcal{C}^*$ en une immersion $j : \Sigma \to \mathcal{E}^*$ dont elle soit "l'application de Gauss", i.e. $\mathcal{V}_s = \operatorname{im} Dj(s)$. (voir appendice III.3.5)

Le cas $m = n - 1$ est au contraire très simple (*cf* II.2.7). ∎

II.2 Exemples

On va donner dans cette section un certain nombre d'exemples de systèmes de lois de conservation auxquels s'applique le théorème 5. La plupart de ces exemples sont d'origine physique. Quand cela ne prêtait pas à confusion, la notation indicielle pour les dérivées partielles a été systématiquement adoptée (u_t pour $\partial_t u$, etc...).

II.2.1 La dynamique des gaz : formulation "eulérienne"

Le système en question s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x &= 0 \\ \epsilon_t + (u(p+\epsilon))_x &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

où ρ, $m = \rho u$, $\epsilon = \rho(e + u^2/2)$ sont respectivement les densités de masse, d'impulsion et d'énergie, e désignant l'énergie interne spécifique (i.e. par unité de masse), et où enfin

$$p = p(\rho, e)$$

est l'*équation d'état* du milieu considéré (p est la pression). L'espace des états est défini par les relations $\rho > 0$, $e > 0$ c'est-à-dire

$$U = \{(\rho, m, \epsilon) \in \mathbf{R}^3 | \rho > 0, \rho\epsilon > \frac{1}{2}m^2\}$$

où l'on reconnait un cône convexe ouvert de sommet 0 dans $\mathbf{R}^3$.

Le système (2.18) s'écrit plus simplement dans les variables (non conservatives) (ρ, u, e) sous la forme

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + p_x/\rho &= 0 \\ e_t + ue_x + pu_x/\rho &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ses valeurs propres sont $u, u \pm c$, avec $c^2 = pp_e/\rho^2 + p_\rho$, et l'hyperbolicité stricte du système équivaut donc à

$$\frac{pp_e}{\rho^2} + p_\rho > 0\ . \tag{2.20}$$

La quantité $c = c(\rho, e) > 0$ n'est autre que la vitesse du son dans le milieu considéré.

On déduit facilement de (2.19) que la valeur propre u (resp. $u \pm c$) admet pour forme propre $de + pd(1/\rho)$ (resp. $dp \pm \rho c du$), et en particulier que la direction propre pour la valeur propre $\lambda_2 = u$ est donnée par $du = dp = 0$. Cette valeur propre est donc linéairement dégénérée (les autres ne le sont pas en général), et le feuilletage de contact $\mathcal{C}$ qui lui est associé est formé des courbes $u =$ const, $p =$ const dans $U \subset \mathbf{R}^3_{\rho,m,\epsilon}$.

Par ailleurs, on peut montrer que si la loi d'état $p(\rho, e)$ est telle que $dp \wedge d(\rho c) \neq 0$, l'espace vectoriel des entropies est engendré par les fonctions affines des variables conservatives (ρ, m, ϵ) et par les fonctions

$$E(\rho, m, \epsilon) = \rho S(\rho, e) = \rho S(\rho, \frac{\epsilon}{\rho} - \frac{m^2}{2\rho^2})$$

avec dS proportionnelle à $de + pd(1/\rho)$, i.e.

$$\rho^2 S_\rho = -pS_e$$

de sorte que S est un invariant de Riemann (si $dp \wedge d(\rho c) = 0$ on montre facilement que le système est riche, et admet donc d'autres entropies, voir chapitre I). Il est classique que E est fortement convexe si et seulement si $(\nu, e) \mapsto S(1/\nu, e)$ l'est et $S_e < 0$, et qu'une telle fonction existe sous la seule hypothèse d'hyperbolicité stricte (2.20).

Afin d'expliciter l'image $\mathcal{C}^*$ de $\mathcal{C}$ par dE on introduit les "variables duales"

$$\begin{array}{rcccl} \rho^* & = & E_\rho & = & (\rho S)_\rho + (-\frac{\epsilon}{\rho} + \frac{m^2}{2\rho^2})S_e \\ m^* & = & E_m & = & -\frac{m}{\rho}S_e = -uS_e \\ \epsilon^* & = & E_\epsilon & = & S_e\,. \end{array}$$

On vérifie déjà que les feuilles de $\mathcal{C}^*$ sont planes, puisque $m^* = -u\epsilon^*$. Ensuite on calcule $L = E^* = \rho\rho^* + mm^* + \epsilon\epsilon^* - E$, et il vient aussitôt

$$E^* = -p\epsilon^*$$

qui montre que les feuilles sont bien des "E^*-sphères" de dimension 1.

II.2.2 La dynamique des gaz : formulation "lagrangienne"

Ce système s'écrit

$$\begin{array}{rcl} v_t - u_\xi & = & 0 \\ u_t + p_\xi & = & 0 \\ \varepsilon_t + (up)_\xi & = & 0 \end{array} \qquad (2.21)$$

où $v = 1/\rho$, u, $\varepsilon = e + u^2/2$ désignent respectivement le volume spécifique, la vitesse et l'énergie spécifique[12], la variable "spatiale" ξ ayant la dimension d'une masse. La loi d'état est ici de la forme

$$p = p(v, e)\,.$$

Les deux formulations (2.18) et (2.21) sont reliées par le changement de variable (dépendant de la solution)

$$d\xi = \rho(dx - udt)\,. \qquad (2.22)$$

Ceci a un sens, puisque la première équation de (2.18) exprime que le second membre de (2.22) est une forme fermée (donc exacte) sur le graphe d'une solution. Ce changement de variable garde un sens pour les solutions faibles (cf. [Ser11, Wa]).

Les valeurs propres de ce système sont $0, \pm c$, avec $c^2 = pp_e - p_v$, l'hyperbolicité stricte étant donc équivalente à $pp_e - p_v > 0$. La valeur propre $\lambda_2 = 0$ est (trivialement) linéairement dégénérée, et la direction propre correspondante est encore donnée par $du = dp = 0$. Des formes propres pour $0, \pm c$ sont $de + pdv$, $dp \pm cdu$.

Ici encore, on peut montrer que si la loi d'état $p(v, e)$ est telle que $dp \wedge dc \neq 0$, l'espace vectoriel des entropies est engendré par les fonctions affines des variables conservatives (v, u, ε) et les fonctions

$$E(v, u, \varepsilon) = S(v, e) = S(v, \varepsilon - \frac{1}{2}u^2)$$

[12] ce n'est pas le ϵ de (2.18) : $\varepsilon = \epsilon/\rho$

avec dS proportionnelle à $de + pdv$, i.e.

$$S_v = pS_e$$

et qu'il existe (au moins) une E fortement convexe (il faut et il suffit que $S(v,e)$ le soit et que $S_e < 0$).

On introduit encore les variables duales $v^* = E_v = S_v = pS_e$, $u^* = E_u = -uS_e$, $\varepsilon^* = E_\varepsilon = S_e$, et il apparaît aussitôt que les feuilles de $\mathcal{C}^*$ sont les *droites* $v^* = p\varepsilon^*$, $u^* = -u\varepsilon^*$ (u,p fixés), ce qui est en accord avec le théorème 5, puisque $d\lambda_2 = 0$.

II.2.3 Le câble élastique

Un câble élastique en mouvement dans le plan ou dans l'espace est décrit par une application

$$(x,t) \mapsto Y(x,t) \in \mathbf{R}^p$$

($p = 2$ ou 3) et son évolution est gouvernée par le système du second ordre

$$Y_{tt} = (T(r)\omega)_x \tag{2.23}$$

où

$$r = |Y_x| \ , \ \omega = \frac{1}{r} Y_x \in S^{p-1} \ . \tag{2.24}$$

La fonction $T : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ est la loi de tension du câble, supposée satisfaire

$$T(1) = 0 \ , \ T' > 0 \ . \tag{2.25}$$

Posant $u = Y_x$, $v = Y_t$, on déduit de (2.23) le système du premier ordre dans $\mathbf{R}^{2p}$

$$\begin{array}{rcl} u_t & = & v_x \\ v_t & = & (T(r)u/r)_x \quad (r = |u|) \end{array} \tag{2.26}$$

dont les valeurs propres sont $\pm\lambda$, $\pm\mu$ avec $\lambda^2 = T'(r)$ et $\mu^2 = T(r)/r$. Des vecteurs propres associés sont respectivement $(\omega, \pm\lambda\omega)$ (modes longitudinaux), $(X, \pm\mu X)$ avec $\omega \cdot X = 0$ (modes transversaux). En particulier il résulte de (2.25) que le système n'est hyperbolique que dans le domaine

$$U = \{r > 1\} \ .$$

De plus, les deux valeurs propres $\pm\mu$ sont linéairement dégénérées, et de multiplicité $p-1$ si $\lambda \neq \mu$, ce que l'on suppose On a donc $\lambda > \mu$, en vertu de (2.25). Il est facile de vérifier que cette hypothèse s'écrit aussi

$$\left(\frac{T(r)}{r}\right)' > 0 \ .$$

Les valeurs propres $\pm\lambda$ sont alors simples, et sont vraiment non-linéaires lorsque $T'' \neq 0$, ce que l'on suppose aussi.

Le feuilletage de contact $\mathcal{C}_{\pm\mu}$ associé à $\pm\mu$ est constitué d'ellipsoïdes de dimension $(p-1)$

$$\{\ (r_0\omega, v_0 \pm r_0\mu(r_0)\omega) \mid \omega \in S^{p-1}\ \} \qquad (r_0 > 1,\ v_0 \in \mathbf{R}^p)\ , \tag{2.27}$$

qui sont aussi déterminés par les conditions

$$r = \text{const},\ v \mp \mu u = \text{const}\ .$$

Quant aux entropies du sytème (2.26), on montre qu'elles sont combinaisons linéaires de fonctions affines de (u, v) et des deux fonctions Q, E

$$\begin{cases} Q(u,v) &= \quad u \cdot v \\ E(u,v) &= V(r) + |v|^2/2 \end{cases}$$

avec $V'(r) = T(r)$. La seconde est fortement convexe *dans* U, mais la première est seulement non-dégénérée (de signature (p,p)).

Les variables "Q-duales" sont $u^* = v$, $v^* = u$, et on a $Q^*(u^*, v^*) = u^* \cdot v^*$. Il en résulte que les images par dQ des feuilles de $\mathcal{C}_{\pm\mu}$ sont bien des Q^*-sphères, sur chacune desquelles Q^* est affine.

Les variables "E-duales" sont $u^* = E_u = V'(r)u/r = T(r)\omega$, $v^* = E_v = v$ et on a

$$E^*(u^*, v^*) = rV'(r) - V(r) + |v|^2/2 = V^*(r^*) + |v^*|^2/2 \tag{2.28}$$

avec $r^* = |u^*| = V'(r) = T(r)$. Il faut noter que l'application dE est injective dans chacun des domaines $\{r > 1\} = U$, $\{r < 1\}$, mais ne l'est pas globalement :

$$[\,\omega_1 = -\omega_2\ ,\ T(r_1) = -T(r_2)\,] \Rightarrow dE(r_1\omega_1, v) = dE(r_2\omega_2, v)\ .$$

L'image du "domaine hyperbolique" U est

$$dE(U) = U^* = \{\ u^* \mid 0 < |u^*| < T(+\infty)\ \} \times \mathbf{R}^p\ .$$

Enfin, on vérifie facilement que dE envoie $\mathcal{C}_{\pm\mu}$ sur un feuilletage par E^*-sphères dans U^*, les feuilles proches du cylindre $r = 1$ s'envoyant sur des E^*-sphères proches du sous-espace $u^* = 0$. Plus précisément, d'après (2.27) une telle image est décrite par

$$u^* = r_0^*\omega\ ,\ v^* = v_0 \pm r_0\mu_0\omega \qquad (\omega \in S^{p-1})$$

où $r_0^* = V'(r_0) = T(r_0)$, et $\mu_0 = \mu(r_0) = \sqrt{T(r_0)/r_0}$. Il s'agit donc d'un ellipsoïde de dimension $p-1$, sur lequel E^* donnée par (2.28) est affine, donc c'est bien une E^*-sphère. Lorsque r_0 tend vers 1, cet ellipsoïde tend vers le point $(0, v_0)$. Enfin, peut encore définir les feuilles de $dE(\mathcal{C}_{\pm\mu})$ par les conditions $r^* = \text{const}$, $v^* \mp u^*/\mu = \text{const}$.

Dans le cas où la loi de tension satisfait $T'' = 0$, c'est-à-dire $T(r) = \lambda^2.(r-1)$, toutes les valeurs propres sont linéairement dégénérées. On peut prendre $V(r) = \lambda^2(r-1)^2/2$, de sorte que

$$E(u,v) = \frac{\lambda^2}{2}(r-1)^2 + \frac{1}{2}|v|^2 .$$

Le feuilletage $\mathcal{C}_{\pm\lambda}$ associé à $\pm\lambda$ est alors constitué des demi-droites

$$\{\ (r\omega_0, v_0 \pm r\mu\omega_0) \mid r > 1\ \}\ (\omega_0 \in S^{p-1},\ v_0 \in \mathbf{R}^p\ ),$$

et, les applications dQ et dE étant affines, les feuilletages images sont aussi par demi-droites. C'est conforme au fait que la valeur propre considérée $(\pm\lambda)$ est constante.

II.2.4 L'électromagnétisme non-linéaire

Ce sytème décrit la propagation des ondes électromagnétiques planes dans un milieu "non-linéaire" (cf. [Co-D, Daf3, Ser6, Ser8]). Ses variables sont les composantes transverses $B, D \in \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ de l'induction magnétique et du déplacement électrique respectivement (les composantes "parallèles" sont constantes) :

$$\begin{array}{rcl} B_t + iE_x & = & 0 \\ D_t - iH_x & = & 0 \end{array} \tag{2.29}$$

avec $E = \partial W/\partial D$, $H = \partial W/\partial B$, $(B,D) \mapsto W(B,D)$ étant une fonction fortement convexe (l'énergie électromagnétique). Il s'écrit aussi sous forme symétrique

$$(dQ(u))_t + (dW(u))_x = 0 \tag{2.30}$$

où $u = (B,D)$ et Q est la forme quadratique de signature $(2,2)$ définie par $Q(u) = D \wedge B$. La convexité de W entraîne l'hyperbolicité de (2.29), puisque d'après (2.30) la matrice du système est $(D^2Q)^{-1}D^2W$, dont les valeurs propres sont réelles. On peut même préciser qu'il y a deux valeurs propres > 0 et deux < 0, puisque la matrice du système est conjuguée à une matrice symétrique de signature $(2,2)$. De plus, (2.30) montre que Q et W sont des entropies de ce système, de flux associés respectifs $\langle dW(u), u\rangle - W(u)$ et $Q^*(dW(u)) = E \wedge H$ (remarquons que la fonction W n'est une entropie que parce que Q est quadratique).

Dans un milieu homogène et isotrope, les invariances suivantes sont plausibles :

$$\begin{array}{rcl} W(e^{i\theta}B, e^{i\theta}D) & = & W(B,D) \\ W(-\overline{B}, \overline{D}) & = & W(B,D) \end{array}$$

et il en résulte que $W(B,D)$ ne dépend que de $|B|$, $|D|$ et $D \wedge B$. On fait l'hypothèse plus forte que $W(B,D)$ ne dépend en fait que de

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (|B|^2 + |D|^2)/2 \\ \varphi &= D \wedge B\,. \end{aligned}$$

Ceci généralise le cas étudié par D.Serre dans [Ser6, Ser8], où W ne dépend que de ε. Si on observe que $|B \pm iD|^2/2 = \varepsilon \pm \varphi$, il est clair que cette hypothèse revient à supposer W fonction des modules $r = |u|$ et $s = |v|$ de $u = (B + iD)/\sqrt{2}$, $v = (B - iD)/\sqrt{2}$ [13]. Un calcul sans difficulté montre que la convexité forte de W comme fonction de (B,D) équivaut à sa convexité forte comme fonction de (r,s) , jointe à

$$W_r/r > 0 \qquad et \qquad W_s/s > 0\,. \tag{2.31}$$

Notons que la régularité de W entraîne $W = F(r^2, s^2)$ pour une fonction régulière F, et donc que (2.31) garde un sens en $r = 0$ et en $s = 0$. Avec ces notations, le système (2.29) s'écrit

$$\begin{aligned} u_t + (\lambda(r,s)u)_x &= 0 \\ v_t + (\mu(r,s)v)_x &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

où $\lambda = W_r/r = W_\varphi + W_\varepsilon$ et $\mu = -W_s/s = W_\varphi - W_\varepsilon$ (remarquer que $\lambda > 0 > \mu$ d'après les conditions (2.31)). Ce système se décompose en deux sous-systèmes

$$a : \left\{ \begin{aligned} \alpha_t + \lambda(r,s)\alpha_x &= 0 \\ \beta_t + \mu(r,s)\beta_x &= 0 \end{aligned} \right. \qquad b : \left\{ \begin{aligned} r_t + (\lambda(r,s)r)_x &= 0 \\ s_t + (\mu(r,s)s)_x &= 0 \end{aligned} \right. \tag{2.33}$$

où $u = re^{i\alpha}$ et $v = se^{i\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$. Le second sous-système étant diagonalisable (car 2×2), on voit que le système complet est riche.

Il est alors clair que λ et μ sont des valeurs propres linéairement dégénérées de (2.32), de directions propres respectives $\mathbf{R}(iu, 0)$ et $\mathbf{R}(0, iv)$ si $u \neq 0$ (resp. $v \neq 0$). Si $u = 0$ (resp. $v = 0$) la valeur propre λ (resp. μ) est double, de sous-espace propre $\mathbf{R}^2 \times 0$ (resp. $0 \times \mathbf{R}^2$). Les autres valeurs propres sont celles du sous-système (2.33.b), i.e. celles de la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda + r\lambda_r & r\lambda_s \\ s\mu_r & \mu + s\mu_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{rr} & W_{rs} \\ -W_{rs} & -W_{ss} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Les vecteurs propres correspondants de (2.32) sont situés dans le plan $\mathbf{R}(u,0) \oplus \mathbf{R}(0,v)$. Remarquons qu'il est possible que (2.34) admette λ ou μ pour valeur propre ailleurs que sur $\{rs = 0\}$, mais la décomposition en sous-systèmes (2.33.a,b) permet de négliger ce fait.

[13] Il serait intéressant de savoir si cette invariance par $S^1 \times S^1$ a une signification physique

Le feuilletage de contact $\mathcal{C}_\lambda$ associé à λ est constitué des cercles $\{|u| = r_0, v = v_0\}$ ($r_0 > 0$). Comme $Q(u,v) = (|u|^2 - |v|^2)/2$, il est évident que $dQ(\mathcal{C}_\lambda)$ est un feuilletage par Q^*-cercles. En ce qui concerne l'entropie W, les variables duales sont $u^* = W_r u/r$, $v^* = W_s v/s$, et on a $W^* = rW_r + sW_s - W$, de sorte que $dW(\mathcal{C}_\lambda)$ est constitué des courbes $\{|u^*| = r_0^*, v^* = v_0^*\}$, qui sont des W^*-cercles sur lesquels W^* est constante. La situation pour le feuilletage $\mathcal{C}_\mu$ est identique.

II.2.5 La magnétohydrodynamique (MHD)

Ce système 7×7 décrit la propagation des ondes magnéto-acoustiques planes dans certains milieux [Ger, DiP3, Fre1, Fre2, B-H]. En coordonnées eulériennes, il s'écrit sous forme conservative

$$\begin{array}{ccccc} \rho_t & + & (\rho u)_x & = & 0 \\ (\rho u)_t & + & (p + \rho u^2 + |B|^2/2)_x & = & 0 \\ \epsilon_t & + & (u(p + \epsilon + |B|^2/2) - V \cdot B)_x & = & 0 \\ (\rho V)_t & + & (\rho u V - B)_x & = & 0 \\ B_t & + & (uB - V)_x & = & 0 \end{array} \tag{2.35}$$

avec $\epsilon = \rho(e + (u^2 + |V|^2)/2) + |B|^2/2$ (densité d'énergie totale) et la loi d'état $p = p(\rho, e)$. Les variables p, ρ, u, e ont la même signification qu'en dynamique des gaz (eulérienne), et $V, B \in \mathbf{R}^2$ sont les composantes respectives de la vitesse et du champ magnétique orthogonales à la direction de propagation. L'espace des états est le cône convexe ouvert

$$U = \{(\rho, m, \epsilon, M, B) \in \mathbf{R}^7 \mid \rho > 0,\ 2\rho\epsilon > m^2 + |M|^2 + \rho|B|^2\}$$

en notant $m = \rho u$, $M = \rho V$. Pour calculer les valeurs et vecteurs propres du système (2.35), il est plus commode de le réécrire en variables non-conservatives (ρ, u, e, V, B), ce qui donne

$$\begin{array}{ccccc} \rho_t & + & (\rho u)_x & = & 0 \\ u_t & + & uu_x + (p_x + B \cdot B_x)/\rho & = & 0 \\ e_t & + & ue_x + pu_x/\rho & = & 0 \\ V_t & + & uV_x - B_x/\rho & = & 0 \\ B_t & + & (uB - V)_x & = & 0 \end{array} \tag{2.36}$$

Les valeurs propres sont

$$\begin{array}{ccc} \lambda_4 & = & u \\ \lambda_{2,6} & = & u \pm c_A \\ \lambda_{1,3,5,7} & = & u \pm c_\pm \end{array} \tag{2.37}$$

où $c_A = 1/\sqrt{\rho}$ est la "vitesse d'Alfvén", et $c_+, c_- > 0$ sont données en fonction de la vitesse "ordinaire" du son $c = (pp_e/\rho^2 + p_\rho)^{1/2}$ par

$$(c_\pm^2 - c^2)(c_\pm^2 - (1 + |B|^2)/\rho) = c^2|B|^2/\rho$$

avec

$$0 < c_- \leq c_A = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \leq c_+ \,.$$

En particulier (2.35) est strictement hyperbolique dans $U_{reg} = \{B \neq 0\}$, et si $B = 0$ on a $c_- = inf(c, c_A)$, $c_+ = sup(c, c_A)$.

Comme pour la dynamique des gaz, la valeur propre u est linéairement dégénérée, de direction propre donnée par $du = dp = 0$, $dV = dB = 0$. Le feuilletage de contact $\mathcal{C}_4$ associé est donc formé des courbes sur lesquelles p, u, V, B sont constants.

Les valeurs propres $\lambda_{2,6} = u \pm c_A$ sont aussi linéairement dégénérées. En effet, les directions propres correspondantes sont données (si $B \neq 0$) par $d\rho = du = de = 0$ et

$$dB \pm \sqrt{\rho} dV = 0, \qquad B \cdot dB = 0 \,.$$

Les feuilletages $\mathcal{C}_{2,6}$ dans U_{reg} sont donc constitués des cercles

$$\{(\rho, m, \epsilon,\ M \pm \sqrt{\rho} B,\ |B|\,) = \text{const}\}. \tag{2.38}$$

L'existence de ces valeurs propres linéairement dégénérées est dûe à l'invariance du système (2.36) par le groupe $O(2)$ agissant sur les variables V, B [Fre1, Fre2, Fre3] .

Les fonctions

$$E(\rho, m, \epsilon, M, B) = \rho S(\rho, e) = \rho S(\rho,\ \frac{\epsilon - |B|^2/2}{\rho} - \frac{m^2 + |M|^2}{2\rho^2}\ ) \tag{2.39}$$

telles que $\rho^2 S_\rho = -p S_e$ sont des entropies de (2.35), et on peut trouver des E fortement convexes (comme pour la dynamique des gaz, S est un invariant de Riemann). Les variables E-duales sont donc, en notant $\hat{M} = (m, M) \in \mathbf{R}^3$ et $\hat{V} = (u, V) \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{array}{rclcl} \rho^* & = & E_\rho & = & S + \rho S_\rho - (\frac{\epsilon - |B|^2/2}{\rho} - \frac{|\hat{M}|^2}{\rho^2}) S_e \\ \hat{M}^* & = & E_{\hat{M}} & = & -\frac{1}{\rho} S_e . \hat{M} = -S_e . \hat{V} \\ \epsilon^* & = & E_\epsilon & = & S_e \\ B^* & = & E_B & = & -S_e . B \,. \end{array} \tag{2.40}$$

On en déduit aussitôt

$$E^* := \rho\rho^* + \hat{M} \cdot \hat{M}^* + \epsilon\epsilon^* + B \cdot B^* - E = -\hat{p}\,\epsilon^* \tag{2.41}$$

où $\hat{p} = p + |B|^2/2$ désigne la “pression totale”. Il n'y a maintenant plus de difficulté à vérifier que $dE(\mathcal{C}_4)$ est un feuilletage par E^*-cercles : on a d'après ce qui précède

$$\begin{array}{rcl} \hat{M}^* & = & -\epsilon^* . \hat{V} \\ B^* & = & -\epsilon^* . B \\ E^* & = & -\epsilon^* . \hat{p} \end{array} \tag{2.42}$$

et les feuilles de $\mathcal{C}_4$ sont données par $(\hat{V}, B, \hat{p}) = \text{const}$.

En ce qui concerne les feuilletages $\mathcal{C}_{2,6}$ correspondant aux "ondes d'Alfvén", leurs feuilles sont données par $(\rho, u, e, \tilde{B}, |B|) = \text{const}$, où $\tilde{B}$ désigne $B \pm \sqrt{\rho}V$.

En particulier, $\epsilon^* = S_\rho(\rho, e)$ et $\hat{p} = p(\rho, e) + |B|^2/2$ sont aussi constants le long de $\mathcal{C}_{2,6}$, ainsi que $m^* = -\epsilon^* u$, $B^* \pm \sqrt{\rho}M^* = -\epsilon^* \tilde{B}$, et $E^* = -\hat{p}\epsilon^*$.

Pour vérifier que le feuilles de $\mathcal{C}_6$ (par exemple) sont des E^*-cercles, il nous manque encore une relation affine en les variables "duales" $(\rho^*, m^*, \epsilon^*, M^*, B^*)$, vérifiée le long des feuilles de $\mathcal{C}_6$.

On tire cette relation de

$$\begin{aligned} \rho^* &= (\rho S)_\rho - (e - (u^2 + |V|^2)/2)S_e \\ &= 1/2\epsilon^*|V|^2 + \text{const} \end{aligned}$$

le long de $\mathcal{C}_6$, et aussi de $V = (\tilde{B} - B)/\sqrt{\rho}$ [14].

Il vient en effet

$$\rho\,\rho^* - \tilde{B} \cdot B^* = \text{const} \tag{2.43}$$

le long de $\mathcal{C}_6$, ce qui constitue la relation cherchée pour les feuilles, puisque ρ et $\tilde{B}$ sont constants le long de celles-ci.

Comme la dynamique des gaz, la MHD admet aussi une formulation lagrangienne, qui se déduit de la précédente par le changement de variable (2.22), et pour laquelle les résultats sont analogues.

On trouve facilement que ce système s'écrit, en posant $v = 1/\rho$

$$\begin{array}{ccccc} v_t & - & u_\xi & = & 0 \\ u_t & + & \hat{p}_\xi & = & 0 \\ (\varepsilon + vB^2/2)_t & + & (\hat{p}u - V \cdot B)_\xi & = & 0 \\ V_t & - & B_\xi & = & 0 \\ (vB)_t & - & V_\xi & = & 0 \end{array} \tag{2.44}$$

avec les variables conservatives $(v, u, \hat{\varepsilon} = \varepsilon + vB^2/2, V, vB)$, et $\varepsilon = e + (u^2 + V^2)/2$, $\hat{p} = p + B^2/2$. Dans les coordonnées non-conservatives (v, u, e, V, B), on trouve

$$\begin{array}{ccccc} v_t & - & u_\xi & = & 0 \\ u_t & + & \hat{p}_\xi & = & 0 \\ e_t & + & pu_\xi & = & 0 \\ V_t & - & B_\xi & = & 0 \\ B_t & + & (u_\xi B - V_\xi)/v & = & 0 \end{array} \tag{2.45}$$

Les valeurs propres linéairement dégénérées sont ici 0 , $\pm 1/\sqrt{v}$. Pour les "vitesses d'Alfvén" $\lambda_\pm = \pm 1/\sqrt{v}$, les directions propres sont données par

$$\begin{gathered} dv = du = de = 0 \\ d\beta = B \cdot dB = 0 \qquad (\beta = B^2/2) \\ dV \pm \sqrt{v}dB = 0 \end{gathered} \tag{2.46}$$

[14] Ce serait l'opposé dans le cas de $\mathcal{C}_2$

soit encore, pour la dernière équation, $dW_\pm = 0$, où on a posé $W_\pm = V \pm \sqrt{v}B$. Ainsi, les feuilletages de contact $\mathcal{C}_\pm$ associés à $\lambda_\pm$ sont définis par $(v, u, e, \beta = B^2/2, W_\pm) = \text{const}$, c'est-à-dire que $(v, u, e, \beta, W_\pm)$ sont des coordonnées transverses pour $\mathcal{C}_\pm$.

II.2.6 L'électrophorèse

Ce système de lois de conservation s'écrit [Ser9, Ser11, Fi-G]

$$\partial_t u_i + \partial_x \left(\frac{a_i u_i}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{2.47}$$

où $u_i > 0$ et les a_i sont des constantes > 0 distinctes avec

$$0 < a_1 < \ldots < a_n .$$

Ce système appartient à la classe de B.Temple,c'est-à-dire est un système riche dont les hypersurfaces caractéristiques sont des hyperplans. Pour le voir, on remarque avec D.Serre [Ser11] que les entropies *affines*

$$u \mapsto \Phi(u; w) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{a_i - w} \qquad (w \in \mathbf{R},\ w \neq a_i)$$

admettent des flux qui leur sont proportionnels , à savoir

$$u \mapsto \Psi(u; w) = \frac{w}{\sum_i u_i} \Phi(u; w) .$$

Ceci entraîne que les hyperplans $H_w = \{u | \Phi(u; w) = 0\}$ sont caractéristiques et que les racines $w_i(u) \in]a_{i-1}, a_i[$, $2 \leq i \leq n$ de l'équation

$$\Phi(u; w) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{a_i - w} = 0 \tag{2.48}$$

sont des invariants de Riemann, de valeurs propres associées

$$\lambda_i(u) = \frac{w_i(u)}{\sum_j u_j} \qquad (2 \leq i \leq n) .$$

Par ailleurs, la fonction linéaire

$$w_1(u) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{a_i}$$

est clairement un invariant de Riemann, associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$, ce qui achève de démontrer l'assertion.

On peut montrer [Ser9, Ser11] que les valeurs propres λ_i, $i > 1$ sont vraiment non-linéaires, alors que $\lambda_1 = 0$ est évidemment linéairement dégénérée. Le feuilletage $\mathcal{C}$ associé à cette dernière est constitué des demi-droites d'origine 0 dans $U = \mathbf{R}^n_+$, puisque $f(c.u) = f(u)$, $\forall c > 0$.

Le système (2.47) étant riche, il admet "beaucoup" d'entropies E, et parmi celles-ci beaucoup d'entropies non-dégénérées. Cependant pour *toutes* celles-ci on sait par avance d'après le théorème 5 que $dE(\mathcal{C})$ sera constitué de droites de $(\mathbf{R}^n)^*$. On peut le vérifier en utilisant la formule de représentation [Ser11]

$$E_{h,\mu}(u) = h(w_1(u)) + \int_0^\infty (\Phi(u;w))^+ \, d\mu(w)$$

qui fournit des entropies pour toute mesure finie μ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant $1/(a_i - w) \in L^1(d\mu)$, $i = 1, \ldots, n$ et toute fonction $h : \mathbf{R}_+ \to R$. En effet, en utilisant la définition (2.48) des w_i, $i > 1$ (et en supposant μ assez régulière), on obtient

$$\frac{\partial E_{h,\mu}(u)}{\partial u_i} = \frac{h'(w_1(u))}{a_i} + \sum_{i>1} \int_{w_i(u)}^{a_i} \frac{d\mu(w)}{a_i - w} \, .$$

Comme les feuilles de $\mathcal{C}$ sont définies par les conditions $w_i = \text{const}$, $i > 1$, ceci montre clairement que $dE(\mathcal{C})$ est contenu dans une droite affine de $(\mathbf{R}^n)^*$ de direction constante $\mathbf{R}dw_1$.

II.2.7 Systèmes à feuilletage de contact prescrit (codim. 1)

a. *Cas général.* Lorsque $m = n-1$, les seules restrictions imposées au feuilletage $\mathcal{C}^*$ par l'existence d'un système symétrique (2.2) "porté" par $\mathcal{C}^*$ (i.e. dont $\mathcal{C}^*$ soit le feuilletage de contact), sont celles données par le théorème 5.

Plus précisément, fixons la fonction $L = E^* : U^* \to \mathbf{R}$, et soit $\mathcal{C}^*$ un feuilletage par L-sphères de codimension un $F_s \subset U^*$, donné pour simplifier par une courbe paramétrée

$$s \mapsto \varphi_s \in \mathcal{E}^* - \{0\}$$

où s varie dans $\mathbf{R}$ ou S^1, la feuille F_s étant une composante connexe de $U^* \cap \varphi_s^{-1}(0)$. On peut toujours localement se ramener à cette situation. Les conditions suivantes doivent alors être satisfaites :

$$d\varphi_s(q) \neq 0 \text{ et } \partial\varphi_s(q)/\partial s \neq 0 \text{ pour } q \in F_s \, . \tag{2.49}$$

Si on explicite $\varphi_s \in \mathcal{E}^*$ sous la forme

$$\varphi_s(q) = \alpha(s)L(q) + \langle\beta(s), q\rangle + \gamma(s) \, . \tag{2.50}$$

Il résulte de la démonstration du théorème 5 que pour toute fonction $q \mapsto H(q)$ définissant un système porté par $\mathcal{C}^*$, les fonctions λ, a, b du paramètre s doivent vérifier

$$(\lambda'(s), a'(s), b'(s)) = k(s).(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)) \qquad k(s) \neq 0 \, . \tag{2.51}$$

Inversement, si $s \mapsto (\lambda(s), a(s), b(s))$ vérifie (2.51), posons, conformément à (2.17)

$$H(q) = \lambda(s)L(q) + \langle a(s), q\rangle + b(s) \text{ si } q \in F_s\,. \tag{2.52}$$

D'après la proposition 6, H définit un système (2.2) dont λ est une valeur propre linéairement dégénérée de multiplicité constante $n-1$ et de feuilletage de contact $\mathcal{C}^*$, en bref un système "porté" par $\mathcal{C}^*$.

Remarquons que si $\{s \mid \alpha(s) = 0\}$ est d'intérieur vide (i.e. si la réunion des feuilles plates est d'intérieur vide), la fonction $s \mapsto \lambda(s)$ détermine H à l'addition près d'une fonction affine, c'est-à-dire détermine complètement le système hyperbolique symétrique (2.2). En effet on déduit de (2.51) que $a'(s)$ et $b'(s)$ sont alors connus, d'où l'assertion.

b. *Systèmes gradients.* Pour décrire des exemples plus explicites, prenons

$$E(u) = \frac{1}{2}|u|^2$$

de sorte que dE permet d'identifier linéairement $\mathbf{R}^n$ et $(\mathbf{R}^n)^*$, donc u et q. On obtient ainsi les "systèmes gradients"

$$u_t + (\nabla H(u))_x = 0\,. \tag{2.53}$$

Les feuilletages $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{C}^*$, c'est la même chose) sont constitués de sphères ou de plans de codimension un, et on peut commencer par le plus simple, défini par des sphères concentriques : $\varphi_s(u) = E(u) - s$ ($U_{reg} = \mathbf{R}^n - \{0\}$). Alors H donnée par (2.52) est telle que $a'(s) = 0$ et $b'(s) = -s\lambda'(s)$. On choisit $a = 0$, et il vient

$$H(u) = h(r^2/2) \qquad h'(s) = \lambda(s) \qquad (r = |u|)$$

d'où $f(u) = \lambda(|u|^2/2)u$ (cf. [Fre1, Fre3]).

D'autres exemples sont fournis par les *faisceaux linéaires de sphères.* Pour $n = 2$ (cas assez représentatif), ce sont les faisceaux "à points limites" comme par exemple

$$\varphi_s(u) = \varphi_s(u_1, u_2) = s(|u|^2 + (c^2-1)) - 2cu_1 \qquad (\,|s| < (1-c^{-2})^{-1/2}\,) \tag{2.54}$$

si $c > 1$, et les faisceaux "à points de base", par exemple

$$\varphi_s(u) = \varphi_s(u_1, u_2) = \sin s(|u|^2 + (c^2-1)) + 2c\,\cos s\,u_1 \qquad (\,s \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}\,) \tag{2.55}$$

si $0 < c < 1$. Les faisceaux de cercles qui leurs sont orthogonaux constituent alors les courbes intégrales de l'autre champ de directions propres.

Dans le cas (2.54), toute fonction $s \mapsto \lambda(s)$ pour laquelle λ' ne s'annule qu'en 0 avec $\lambda''(0) \neq 0$ convient, et dans le cas (2.55), $\lambda : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ doit avoir aux points $0, \pi$ un maximum et un minimum, tous deux non-dégénérés ($\lambda'' \neq 0$). On note une différence qualitative entre ces deux cas : alors que dans le premier, le système peut être prolongé à $\mathbf{R}^2$ tout entier (la valeur propre λ devient double aux points limites), cela est impossible dans le second, puisqu'en chaque point base $(0, \pm\sqrt{1-c^2})$ il y aurait deux valeurs propres distinctes $\lambda(0)$, $\lambda(\pi)$ pour la direction propre $du_1 = 0$.

Enfin, le cas "parabolique" $c = 1$ est intéressant aussi : on a $U = \mathbf{R}^2 - \{0\}$, et l'espace des feuilles est la variété non-séparée "$\mathbf{R}$ avec 0 dédoublé". Cela force en particulier les fonctions λ, a, b naturellement définies sur cette variété à prendre les mêmes valeurs sur les "deux 0". Les systèmes correspondants sont donc encore donnés par les fonctions $s \mapsto \lambda(s)$ telles que λ' ne s'annule qu'en 0, avec $\lambda''(0) \neq 0$.

III Hyperbolicité globale

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une notion, introduite par D.Serre dans [Ser12], qui précise celle habituelle d'hyperbolicité pour les systèmes de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \qquad u(x,t) \in U \subset \mathbf{R}^n \ , \tag{3.1}$$

lorsqu'ils possèdent une valeur propre linéairement dégénérée (voir chapitre précédent).

Pour de tels systèmes, il est facile de construire des solutions qui sont admissibles dans tous les sens possibles (par exemple C^1), tout en étant "très oscillantes". Si λ est la valeur propre linéairement dégénérée et $\mathcal{C}$ le feuilletage de contact associé, il suffit en effet de prendre

$$u^\varepsilon(x,t) = u_*(\frac{x - \lambda(C)t}{\varepsilon}) \ , \ \varepsilon > 0 \ ,$$

où $u_* : \mathbf{R} \to C$ est mesurable bornée, à valeurs dans une feuille C de $\mathcal{C}$, et $\lambda(C)$ est la valeur (constante) de λ sur C. L'admissibilité, entropique par exemple, résulte de ce que si E est une entropie quelconque, de flux F, alors $F - \lambda E$ est constante le long des feuilles de $\mathcal{C}$, et en particulier sur C. On en déduit que toutes les inégalités d'entropie sont satisfaites, sous forme d'égalités $\partial_t E(u) + \partial_x F(u) = 0$.

Un grand nombre de résultats semblent indiquer que la réciproque est vraie, i.e. les oscillations de grande amplitude ne sont possibles qu'en présence de dégénérescence linéaire[15]. Le premier est celui de Lax (voir [Lax4, Lax5]), qui montre dans le cas $n = 1$ que la véritable non-linéarité (ici équivalente à $f'' \neq 0$) entraîne par exemple la décroissance vers 0 de $\mathrm{Var}_a^b u(.,t)$ pour $t \to +\infty$ et tout intervalle borné $[a,b]$, lorsque la donnée initiale u_0 est périodique. Glimm et Lax [Gl-L] démontrent ensuite des résultats analogues dans le cas $n = 2$, pour des solutions construites à l'aide du schéma de Glimm. La généralisation au cas $n > 2$ a été effectuée par DiPerna [DiP3], qui a montré que pour les systèmes strictement hyperboliques dont les valeurs propres sont soit linéairement dégénérées (LD), soit véritablement non-linéaires (VNL), le résultat suivant est vrai. Soit $u_0 \in \mathrm{VB}$ une donné initiale coïncidant avec une constante hors

[15] Grossièrement, l'idée est que pour une donnée initiale rapidement oscillante, la véritable non-linéarité provoque l'apparition de nombreux chocs. La dissipation liée à ces derniers amortit alors rapidement les oscillations. En fait, l'apparition nécessaire de chocs n'est établie que pour $n = 2$ [Lax5] (ou les systèmes riches [Ser9]), ou encore pour n quelconque mais des données initiales C^1-petites [Li5, Jn]

d'un intervalle borné. Soit $\phi : U \to \mathbf{R}$ une fonction constante le long de tous les feuilletages de contact (de dimension 1) associés aux valeurs propres LD (on dit aussi "constante à travers les discontinuités de contact"). Alors si $\operatorname{Var} u_0$ est assez petite, on a, pour toute solution u fournie par le schéma de Glimm,

$$\operatorname{Var} \phi(u(.,t)) \longrightarrow 0 \quad \text{pour } t \longrightarrow +\infty ,$$

i.e. les oscillations "purement non-linéaires" disparaissent.

Cet énoncé est à rapprocher d'une hypothèse, émise par D.Serre dans [Ser11], généralisant des résultats antérieurs de DiPerna [DiP5] et de [Ser3]. Elle peut s'énoncer comme suit : si $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est une suite bornée dans L^∞ de solutions de (3.1), alors $\{\phi(u^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ est compacte dans L^p_{loc}, $\forall p < \infty$, pour toute fonction ϕ constante le long de tous les feuilletages de contact du système.

La section III.1 contient un bref rappel des résultats de D.Serre [Ser12, Ser13] concernant les solutions oscillantes à une phase, qui établissent à nouveau un lien entre les oscillations et la dégénérescence linéaire, et la notion d'hyperbolicité globale qui s'introduit en considérant le système "moyennisé" auquel satisfont les "modes transverses". Cette notion est analysée dans la section III.2, où l'on donne différents critères d'hyperbolicité globale. Pour cela, on s'appuie sur les résultats du chapitre II concernant la structure du feuilletage de contact. On met notamment en évidence une caractérisation géométrique par le "non-enlacement" du feuilletage $\mathcal{C}$, pour une classe de systèmes qui contient par exemple les systèmes "gradients".

Dans la section III.3, on applique la théorie précédente aux exemples non triviaux du chapitre II. On y construit aussi (III.3.5) des sytèmes non globalement hyperboliques définis dans un domaine convexe $U \subset \mathbf{R}^3$, pour lesquels le feuilletage $\mathcal{C}$ est le "feuilletage de Hopf".

III.1 Solutions oscillantes

Considérons une famille de "solutions oscillantes à une phase"

$$u^\varepsilon(x,t) = u_0(x,t,\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x,t,\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}) + R_\varepsilon(x,t) \qquad \varepsilon > 0$$

du système (3.1). On suppose que les valeurs propres de ce dernier sont de multiplicité constante dans $U_{reg} \subset U$ et sont soit LD, soit VNL. On fait comme dans [Ser12] les hypothèses

(i) La phase $\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est C^1 et vérifie $d\theta(x,t) \neq 0$, $\forall x, t$.

(ii) $u_k : (x,t,y) \mapsto u_k(x,t,y)$, $k = 0, 1$ est C^1, périodique de période 1 en la variable y, u_0 est à valeurs dans U_{reg} et $\partial_y u_0$ ne s'annule pas.

(iii) Le reste R_ε vérifie pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^2$ les estimations $\| R_\varepsilon \|_{L^\infty(K)} = O(\varepsilon^2)$ et $\| \partial_{x,t} R_\varepsilon \|_{L^\infty(K)} = O(\varepsilon)$.

L'annulation des termes en $O(1/\varepsilon)$ dans $\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon)$ fournit alors le

Lemme 1 *(D.Serre [Ser12]) Sous les hypothèses précédentes, il existe une valeur propre linéairement dégénérée λ, de feuilletage de contact $\mathcal{C}$, telle que $y \mapsto u(x,t,y)$ soit à valeurs dans une feuille de $\mathcal{C}$ pour tout (x,t), et la phase θ vérifie l'équation eikonale*

$$\partial_t\theta(x,t) + \lambda(u_0(x,t,y))\partial_x\theta(x,t) = 0 \qquad \forall x,t,y\ . \tag{3.2}$$

■

Introduisons alors, toujours suivant [Ser12, Ser13], des coordonnées locales $(v,w) \in \mathbf{R}^{n-m} \times \mathbf{R}^m$ telles que les feuilles de $\mathcal{C}$ soient de la forme $v = \text{const}$ (m est la multiplicité de λ). Il est alors clair que $v^\varepsilon := v(u^\varepsilon)$, $w^\varepsilon := w(u^\varepsilon)$ sont de la forme

$$v^\varepsilon(x,t) = v_0(x,t) + \varepsilon v_1(x,t,\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^2)\ . \tag{3.3}$$

$$w^\varepsilon(x,t) = w_0(x,t,\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}) + \varepsilon w_1(x,t,\frac{\theta(x,t)}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^2)\ . \tag{3.4}$$

Par ailleurs, la matrice du système s'écrit dans ces coordonnées

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} B(v,w) & 0 \\ \eta(v,w) & \lambda(v)\mathrm{Id}_m \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit en utilisant (3.2),(3.3) que v_0, v_1, w_0, w_1 satisfont à

$$\begin{aligned} \partial_t v_0 + B(v_0,w_0)\partial_x v_0 + \partial_x\theta\,(B(v_0,w_0) - \lambda(v_0))\partial_y v_1 &= (305) \\ \partial_t w_0 + \lambda(v_0)\partial_x w_0 + \eta(v_0,w_0)(\partial_x v_0 + \partial_x\theta\,\partial_y v_1) + \partial_x\theta\,\langle d\lambda(v_0), v_1\rangle\partial_y w_0 &= (306) \end{aligned}$$

(noter que v_0 ne dépend pas de y). Multipliant l'équation (3.5) par $(B(v_0,w_0) - \lambda(v_0))^{-1}$ et prenant la moyenne par rapport à y, on obtient la partie du *système moyennisé* qui concerne v_0 :

$$M_{w_0}(v_0)\partial_t v_0 + (\mathrm{Id} + \lambda(v_0)M_{w_0}(v_0))\partial_x v_0 = 0 \tag{3.7}$$

où on a posé pour $v \in \mathbf{R}^{n-m}$ et $y \mapsto w(y) \in \mathbf{R}^m$ fonction 1-périodique

$$M_w(v) = \int_0^1 (B(v,w(y)) - \lambda(v))^{-1}\,dy \ \in M_{n-m}(\mathbf{R})$$

Le système moyennisé complet pour v_0, w_0 s'obtient en tirant v_1 de (3.5) (alors (3.7) assure que v_1 est périodique en y), et en reportant dans la seconde équation (3.6). Une fonction arbitraire de (x,t) s'introduit dans ce processus, qui représente un degré de liberté du développement asymptotique (3.4), et revient à remplacer $w_0(x,t,y)$ par $w_0(x,t,y+\alpha(x,t))$ [Ser12] ("changement de jauge"). En particulier, les opérations de moyenne en y n'en sont pas affectées.

On retrouve parmi les solutions de (3.5),(3.6) celles pour lesquelles

$$\begin{array}{lcll} v^\varepsilon(x,t) & = & v_0 & \text{(constante)} \\ w^\varepsilon(x,t) & = & w_0(\theta(x,t)/\varepsilon) & (w_0(y) \text{ fonction 1-périodique arbitraire de } y) \\ \theta(x,t) & = & x - \lambda(v_0)t \, . & \end{array} \tag{3.8}$$

Définition 2 *[Ser12] Le système (3.1) est dit* globalement d'évolution *(relativement à λ, valeur propre* LD*) si pour toute fonction 1-périodique $y \mapsto w_0(y)$, le système (3.7) est d'évolution par rapport à v_0, i.e. si*[16]

$$\begin{array}{lcl} \forall v \in \mathbf{R}^{n-m}, & & \\ \mathcal{M}(v) & := & Conv\Big\{(B(v,w) - \lambda(v))^{-1} \mid w \in \mathbf{R}^m\Big\} \subset GL(\mathbf{R}^{n-m}) \end{array} \tag{3.9}$$

On dit qu'il est globalement hyperbolique *(relativement à λ) si, de plus, (3.7) est hyperbolique par rapport à v_0 , i.e. si pour tout v, l'ensemble $\mathcal{M}(v)$ défini ci-dessus ne contient que des éléments* diagonalisables sur $\mathbf{R}$.

Ainsi, l'hyperbolicité globale est une condition nécessaire pour que le système moyennisé (3.7) soit linéairement bien posé pour v_0 au voisinage des solutions oscillantes "triviales" (3.8).

Notons aussi que le choix des coordonnées (v, w) est sans importance (*cf* [Ser12, Ser13]), du moins si de telles coordonnées existent dans un voisinage de chaque feuille, au besoin en remplaçant $\mathbf{R}^m$ par la fibre type si $\mathcal{C}$ est une fibration. Comme ce n'est pas toujours le cas (voir chapitre II), on remplacera dans la section suivante cette définition par une autre, intrinsèque.

L'étude des solutions oscillantes à plus d'une phase (i.e. $\theta \in \mathbf{R}^N$, $N > 1$) soulève des questions non résolues à ce jour, pour ne citer que la plus simple (voir [Ser12]) :

> existe-t-il un système (3.1) dont toutes les valeurs propres sont VNL et qui possède une solution $u : \mathbf{R}^2 \to U$ doublement périodique et non constante?

On sait (*loc. cit.*) qu'un tel système ne peut pas être riche (en particulier $n > 2$). Cette question est liée à l'hypothèse de structure des oscillations émise dans [Ser11, VI], dont elle est en fait une conséquence (voir aussi l'introduction à ce chapitre pour l'énoncé de cette hypothèse).

L'hyperbolicité globale est vraie pour les systèmes riches : la matrice $(B - \lambda)^{-1}$ est diagonale pour des coordonnées (v, w) convenables, et le résultat est alors évident (convexité des composantes connexes de $\mathbf{R} - \{0\}\ldots$).

Bien plus, elle est vérifiée par tous les exemples d'origine physique examinés jusqu'à présent (et notamment ceux du chapitre II). Cela conduit D.Serre [Ser13] à formuler la

[16] Conv E désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble E

Conjecture d'hyperbolicité globale : Tout système (3.1) défini dans un ouvert *convexe, invariant* U et possédant une entropie fortement convexe $E : U \to \mathbf{R}$ est globalement hyperbolique.

On suppose implicitement que le système en question vérifie "l'hypothèse standard" (A) (*cf* sec-rigid) et "globalement hyperbolique" se réfère alors à la valeur propre λ. On verra (*cf* III.3.5) que les hypothèses sur U ne peuvent être supprimées. Rappelons à ce sujet que le domaine convexe U est invariant si sa frontière est réunion d'hypersurfaces caractéristiques du système [Ser5].

Pour finir, signalons que, sous l'hypothèse de l'existence d'un "symétriseur" convenable (hypothèse équivalente à celle du lemme 9), A. Heibig a montré récemment [Hb4] que les solutions du système moyennisé correspondent effectivement à des solutions oscillantes du système initial, "validant" ainsi en quelque sorte la notion d'hyperbolicité globale.

III.2 Géométrie transverse du feuilletage de contact

III.2.1 Préliminaires

Les systèmes hyperboliques (3.1) considérés à partir de maintenant seront "standard" au sens de la

Définition 3 *Un système est* standard *s'il vérifie les hypothèses (A) et (B) du chapitre II, que l'on rappelle ici pour la commodité :*

(A) *il possède une valeur propre $\lambda : U \to \mathbf{R}$, de multiplicité constante m dans le complémentaire U_{reg} d'un fermé de codimension ≥ 2 dans U, et λ est linéairement dégénérée dans U_{reg}, de feuilletage de contact $\mathcal{C}$.*

(B) *Il est doté d'une entropie non-dégénérée $E : U \to \mathbf{R}$, et dE est un difféomorphisme de U sur son image $dE(U) = U^* \subset (\mathbf{R}^n)^*$.*

On introduit maintenant un certain nombre d'objets dont il sera fait un usage constant dans toute la suite.

Fibré normal. Introduisons le *fibré normal* $\mathcal{N} = N(\mathcal{C})$ au feuilletage $\mathcal{C}$ [Law] : c'est le fibré vectoriel au-dessus de U_{reg} dont la fibre en u est

$$N_u = N_u(\mathcal{C}) = T_uU/T_u(\mathcal{C}) = \mathbf{R}^n/K_u$$

avec $K_u = \ker(Df(u) - \lambda(u))$. On peut le représenter "concrètement" dans TU, comme champ des sous-espaces

$$\widehat{N_u} = \mathrm{im}\,(Df(u) - \lambda(u))$$

puisque $K_u \oplus \widehat{N_u} = \mathbf{R}^n$.

Automorphismes distingués. Les endomorphismes $Df(u)$, $u \in U_{reg}$ définissent par passage au quotient un champ d'endomorphismes

$$B(u) = B_u \in \mathrm{End}(N_u)$$

et on a $B(u) - \lambda(u) \in \mathrm{GL}(N_u)$, $\forall u \in U_{reg}$. On définit alors les *automorphismes distingués* du fibré normal $N(\mathcal{C})$ par

$$Z_u := (B(u) - \lambda(u))^{-1} \in \mathrm{GL}(N_u)\ .$$

Notons que pour tout $u \in U_{reg}$, Z_u est *symétrique* pour la forme quadratique $D^2E(u)$ sur $\widehat{N}_u \cong N_u$.

Holonomie. Ensuite, il résulte de la démonstration du théorème de rigidité II.5 (voir (2.13)) que les feuilles de $\mathcal{C}$ sont les composantes connexes des fibres d'une submersion

$$\tilde{\pi} : U_{reg} \xrightarrow{dE} U^*_{reg} \xrightarrow{\pi} \Sigma\ ,$$

ou encore les composantes connexes des fibres de $\tilde{\Theta} = \Theta \circ dE$, qui est de rang constant.

On définit alors, entre les espaces normaux $N_1 = N_{u_1}$, $N_2 = N_{u_2}$ en deux points u_1, u_2 d'une même feuille C de $\mathcal{C}$, un *isomorphisme d'holonomie* (linéaire)

$$\sigma_{u_1}^{u_2} : N_1 \xrightarrow{\sim} N_2$$

par la condition $[\delta u_2] = \sigma_{u_1}^{u_2}[\delta u_1]$ si et seulement si $D\tilde{\pi}(u_1)\delta u_1 = D\tilde{\pi}(u_2)\delta u_2$, ou encore $D\tilde{\Theta}(u_1)\delta u_1 = D\tilde{\Theta}(u_2)\delta u_2$ (en notant $[\delta u] \in N_u$ la classe de $\delta u \in T_uU$).

Remarquons que pour un feuilletage quelconque il existe aussi de tels isomorphismes, mais ils dépendent alors *a priori* du choix d'une classe d'homotopie de chemins reliant u_1 à u_2 dans la feuille qui les contient [Law]. On dit que le feuilletage est à holonomie linéaire triviale quand ils n'en dépendent en fait pas, ce qui est le cas ici, comme pour tout feuilletage défini par une submersion (*loc. cit.*).

On a trivialement, pour trois points u_i, $i = 1, 2, 3$ sur une même feuille

$$\sigma_{u_2}^{u_3} \circ \sigma_{u_1}^{u_2} = \sigma_{u_1}^{u_3}\ .$$

On pose alors, pour toute feuille C de $\mathcal{C}$ et tout point u_0 de C

$$\mathcal{M}_{u_0}(C) = \mathrm{Conv}\left\{\sigma_u^{u_0} Z_u \sigma_{u_0}^u \mid u \in C\right\} \subset \mathrm{End}(N_{u_0})\ ,$$

ensemble qui vérifie en particulier

$$\mathcal{M}_{u_1}(C) = \sigma_{u_0}^{u_1}\mathcal{M}_{u_0}(C)\sigma_{u_1}^{u_0} \qquad \forall u_0, u_1 \in C\ . \tag{3.10}$$

La version intrinsèque de la définition 2 est maintenant :

Définition 4 *Le système (3.1) est* globalement d'évolution *si* $\mathcal{M}_u(C) \subset GL(N_u)$ *pour toute feuille* C *et tout* $u \in C$ *(ou pour un seul* u*, d'après (3.10) c'est équivalent). Il est dit* globalement hyperbolique *si de plus* $\mathcal{M}_u(C) \subset Diag_{\mathbf{R}}(N_u)$*, où* $Diag_{\mathbf{R}} \subset End$ *désigne l'ensemble des endomorphismes diagonalisables sur* $\mathbf{R}$.

Des exemples évidents sont fournis par les systèmes dont les champs de directions propres transverses sont invariants par holonomie, comme par exemple les systèmes riches (il suffit en fait d'avoir un "drapeau" transverse invariant par holonomie : le système est alors "triangularisable").

Passage au dual. Toute la situation peut être transportée dans le dual au moyen du difféomorphisme

$$dE : U \xrightarrow{\sim} U^* .$$

On notera $\mathcal{N}^* = N(\mathcal{C}^*)$ le fibré normal à $\mathcal{C}^* = dE(\mathcal{C})$, et $N_q^* = N_q(\mathcal{C}^*)$ sa fibre au point $q \in U^*_{reg}$.

Les isomorphismes d'holonomie (linéaire) de $\mathcal{C}^*$ seront notés (abusivement)

$$\sigma_q^{q'} : N_q^* \xrightarrow{\sim} N_{q'}^* .$$

Ils sont reliés à ceux définis plus haut par les relations[17]

$$\sigma_q^{q'} = D^2E(u')\, \sigma_u^{u'} (D^2E(u))^{-1} \qquad \text{si } q = dE(u),\ q' = dE(u') \tag{3.11}$$

en notant encore $D^2E(u)$ l'isomorphisme de $N_u = \mathbf{R}^n/K_u$ sur $N_q^* = (\mathbf{R}^n)^*/K_q^*$ obtenu par passage au quotient à partir de $D^2E(u) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{\sim} (\mathbf{R}^n)^*$.

Transport parallèle. Le "théorème de rigidité" II.5 permet d'introduire une autre famille d'isomorphismes entre les espaces normaux à une même feuille de $\mathcal{C}$ ou de $\mathcal{C}^*$. En effet, si $\mathcal{E}^*$ désigne, comme au chapitre II, l'espace vectoriel de fonctions sur U^* engendré par $L = E^*$ et les fonctions affines, et si $\mathcal{V} = \mathcal{V}(C^*) \subset \mathcal{E}^*$ est le sous-espace des fonctions s'annulant sur la feuille $C^* = dE(C)$ de $\mathcal{C}^*$, on a pour tout $q \in C^*$ un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\sim} & (N_q^*)^* \\ \varphi & \mapsto & d\varphi(q) . \end{array} \tag{3.12}$$

Or, si $q = dE(u)$, on a

$$(N_q^*)^* = \widehat{N}_u = \mathrm{im}\,(Df(u) - \lambda(u))$$

comme on le vérifie aisément.

[17] Ici et dans toute la suite, on verra une forme quadratique Q sur un espace vectoriel V tantôt comme application $Q : V \to V^*$, tantôt comme $Q : V \times V \to \mathbf{R}$.

Par composition, les isomorphismes (3.12) fournissent donc des isomorphismes de *transport parallèle* entre les fibres de $N(\mathcal{C})$ au-dessus d'une feuille

$$\begin{array}{rcl} \tau_u^{u'} : \widehat{N}_u = (N_q^*)^* & \xrightarrow{\sim} & (N_{q'}^*)^* = \widehat{N}_{u'} \\ d\varphi(q) & \mapsto & d\varphi(q') \end{array} \tag{3.13}$$

et aussi, *par transposition*, des isomorphismes

$$\tau_q^{q'} : N_q^* \xrightarrow{\sim} N_{q'}^*$$

entre fibres de $N(\mathcal{C}^*)$, de telle sorte que si $q = dE(u)$ et $q' = dE(u')$, on ait

$$\tau_u^{u'} = {}^t(\tau_{q'}^q) . \tag{3.14}$$

Enfin, rappelons (2.4) que l'on a, si $q = dE(u)$

$$\begin{array}{rcl} Df(u) - \lambda(u) & = & (D^2H(q) - \lambda(q)D^2E^*(q))\, D^2E(u) \\ & = & \Phi_q\, D^2E(u) . \end{array} \tag{3.15}$$

III.2.2 Un résultat de "commutation"

On peut maintenant énoncer le

Théorème 5 *Pour toute feuille C de $\mathcal{C}$, et $u, u' \in C$, on a*

$$\tau_u^{u'}(B(u) - \lambda(u)) = (B(u') - \lambda(u'))\, \sigma_u^{u'} , \tag{3.16}$$

soit encore

$$Z_{u'}\, \tau_u^{u'} = \sigma_u^{u'} Z_u \tag{3.17}$$

et, si $q, q' \in C^* = dE(C)$,

$$\Phi_{q'} = \Phi_q(\tau_{q'}^q \cdot, \sigma_{q'}^q \cdot) . \tag{3.18}$$

Démonstration. On commence par se ramener à démontrer (3.18). Notons auparavant que dans cette formule, la forme quadratique $\Phi_q = D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q)$, de noyau $T_q(\mathcal{C}^*)$, a été identifiée (sans risque de confusion) à la forme quadratique non-dégénérée qu'elle définit sur le quotient N_q^*. Pour montrer l'équivalence de (3.16) et (3.18), on réécrit cette dernière sous la forme

$${}^t(\tau_{q'}^q)\Phi_q = \Phi_{q'}\sigma_q^{q'} .$$

D'après (3.15) et l'égalité $\tau_u^{u'} = {}^t(\tau_{q'}^q)$ qui définit $\tau_{q'}^q$, cela s'écrit aussi

$$\tau_u^{u'} Z_u^{-1} D^2E(u)^{-1} = Z_{u'}^{-1} D^2E(u')^{-1} \sigma_q^{q'} ;$$

utilisant (3.11), c'est donc équivalent à $\tau_u^{u'} Z_u^{-1} = Z_{u'}^{-1} \sigma_u^{u'}$, soit (3.16).

Démontrons maintenant (3.18); on observe que, par définition de ${}^t(\tau^q_{q'}) = \tau^{u'}_u$, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(C^*),\ {}^t(\tau^q_{q'})\, d\varphi(q) = d\varphi(q') \,.$$

Or un élément de $\mathcal{V}$ s'écrit

$$\varphi = D\Theta(q)\delta q = \delta\lambda\, L(.) + \langle \delta a, . \rangle + \delta b$$

avec $q \in C^*$ et $\delta\lambda = d\lambda(q)\delta q$, $\delta a = Da(q)\delta q$, $\delta b = db(q)\delta q$ (notations (2.9),(2.10)), de sorte que

$$ {}^t(\tau^q_{q'})(\delta a + \delta\lambda\, dL(q)) = (\delta a + \delta\lambda\, dL(q')) \,. \tag{3.19}$$

Par ailleurs (et par définition), $\delta q \in N^*_q$ et $\delta q' \in N^*_{q'}$ sont reliés par $\delta q' = \sigma^{q'}_q \delta q$ si et seulement si ils vérifient $D\Theta(q)\delta q = D\Theta(q')\delta q'$, i.e. les relations $d\lambda(q)\delta q = d\lambda(q')\delta q' = \delta\lambda$, $Da(q)\delta q = Da(q')\delta q' = \delta a$ et $db(q)\delta q = db(q')\delta q' = \delta b$. Par conséquent, en utilisant (2.12) sous la forme $\Phi_{q'}\delta q' = \delta a + \delta\lambda\, dL(q')$:

$$\begin{aligned} {}^t(\tau^q_{q'})\Phi_q\delta q &= {}^t(\tau^q_{q'})(\delta a + \delta\lambda\, dL(q)) \\ &= \delta a + \delta\lambda\, dL(q') \\ &= \Phi_{q'}\delta q' \\ &= \Phi_{q'}\sigma^{q'}_q \delta q \end{aligned} \tag{3.20}$$

ce qui est le résultat voulu. ■

Remarques. 1. Ce résultat peut être vu comme une contrainte de "rigidité" supplémentaire, puisque les automorphismes distingués $Z_u \in \mathrm{GL}(N_u)$ de $\mathcal{N}$, ou les formes quadratiques Φ_q sur $\mathcal{N}^*$, sont déterminés le long d'une feuille par leur valeur en *un seul point* de celle-ci (une fois connus τ, σ, c'est-à-dire $\mathcal{C}$ et E).

2. La formule (3.19) permet de justifier l'appellation "transport parallèle" pour τ . En effet, elle montre que si $u, u' \in C$ ($u = dL(q), u' = dL(q')$), et si

$$u' - u \notin \widehat{N}_u$$

(par exemple si u, u' sont proches), l'image ξ' de $\xi \in \widehat{N}_u$ par $\tau^{u'}_u$ est donnée par

$$\xi' = \tau^{u'}_u \xi = \xi + s.(u' - u)$$

où $s \in \mathbf{R}$ est fixé par la condition $\xi' \in \widehat{N}_{u'}$, et est d'ailleurs indépendant de u' pour ξ fixé. Cela définit entièrement τ, en procédant de proche en proche le long des feuilles.

Or, si C est une feuille de $\mathcal{C}$, le fibré des sous-espaces normaux $\widehat{N}_u$, $u \in C$ est naturellement muni d'une connexion, induite de la connexion canonique de $\mathbf{R}^n$ (affine) par projection sur $\widehat{N}_u$ parallèlement à $T_u(C)$ [18]. On vérifie sans

[18] Cette construction est classique en géométrie différentielle affine (*cf* [Chk, Di-V, No-Pi, Sp], par exemple).

peine grâce aux formules ci-dessus que le transport parallèle associé à cette connexion coïncide avec celui déjà défini, et en particulier que cette connexion est *plate* (le transport parallèle ne dépend pas du chemin suivi sur la base C). En fait, on peut voir que les sous-espaces *affines* (de dimension $n-m$) $u+\widehat{N}_u$, $u \in C$, passent tous par un même "axe" (dépendant de C), qui est un plan de dimension $n-m-1$, éventuellement à l'infini si $d\lambda = 0$ sur C. Le transport parallèle est alors naturellement défini par "rotation" autour de cet axe. ■

Corollaire 6 *Pour toute feuille C de $\mathcal{C}$ et $u_0 \in C$, on a*

$$\mathcal{M}_{u_0}(C) = Z_{u_0}^{-1} \, Conv\left\{\tau_u^{u_0}\sigma_{u_0}^u \mid u \in C\right\} . \tag{3.21}$$

*En particulier, la propriété d'*évolution *globale* $\forall u_0, C$, $\mathcal{M}_{u_0}(C) \subset GL(N_{u_0})$ *est une propriété du "couple feuilletage-entropie" $(\mathcal{C}, E)$.*

Démonstration. On déduit immédiatement de (3.16) que

$$\sigma_u^{u_0} Z_u^{-1} \sigma_{u_0}^u = Z_{u_0}^{-1} \tau_u^{u_0} \sigma_{u_0}^u$$

d'où le résultat. ■

Pour tout espace vectoriel V (sur $\mathbf{R}$, de dimension finie), qualifions de "triangulaire" un sous-ensemble $T \subset \mathrm{GL}(V)$ s'il existe une base de V dans laquelle tous les $t_1^{-1}t_2$ ($t_i \in T$) s'écrivent comme des matrices triangulaires supérieures à diagonale > 0. Il est clair qu'alors $\mathrm{Conv}(T) \subset \mathrm{GL}(V)$. On en déduit aussitôt le

Corollaire 7 *Si pour toute feuille C de $\mathcal{C}$ et $u_0 \in C$, l'un des ensembles*

$$\left\{\sigma_u^{u_0} Z_u \sigma_{u_0}^u \mid u \in C\right\}, \ \left\{\tau_u^{u_0}\sigma_{u_0}^u \mid u \in C\right\} \subset GL(N_{u_0})$$

est triangulaire, le système (3.1) est globalement d'évolution. ■

On rencontrera cette situation en étudiant l'exemple de la MHD et de ses valeurs propres LD λ_2, λ_6 (*cf* III.3.3).

Corollaire 8 *Pour toute feuille C^* de $\mathcal{C}^*$ et $q_0 \in C^*$, les automorphismes $\tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q \in GL(N_{q_0}^*)$, $(q \in C^*)$ sont Φ_{q_0}-symétriques.*

Démonstration. D'après (3.18), on peut écrire $\Phi_{q_0} = \Phi_{q_0}(\tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q \cdot, \sigma_q^{q_0}\tau_{q_0}^q \cdot)$ ce qui est exactement l'énoncé. ■

III.2.3 Métriques transverses

Appelons (pseudo-) métrique g sur $\mathcal{N}$ une famille $u \mapsto g_u$ de formes quadratiques non-dégénérées sur les N_u, $u \in U_{reg}$. On a alors la condition *suffisante* [19] d'hyperbolicité globale (dont dépendront toutes les suivantes) :

Lemme 9 *Pour que le système (3.1) soit globalement hyperbolique, il suffit qu'il existe sur $\mathcal{N}$ une métrique g, invariante par holonomie ("σ-invariante"), ou même seulement* conformément *σ-invariante, pour laquelle les automorphismes distingués Z_u, $u \in U_{reg}$, soient* symétriques définis positifs *(SDP), c'est-à-dire tels que pour tout u, la forme bilinéaire $g_u(Z_u\cdot, \cdot)$ sur N_u soit SDP.*

Démonstration. La métrique g étant σ-invariante "à un facteur positif près", la démonstration consiste à remarquer que les endomorphismes SDP pour une métrique fixe (non-dégénérée) forment un cône convexe, dont tous les éléments sont inversibles et diagonalisables sur $\mathbb{R}$. ■

Remarques.

1. Une condition suffisante équivalente est de demander que les $B(u) - \lambda(u) = Z_u^{-1}$ soient SDP pour g, puisque $g_u(Z_u^{-1}\cdot, \cdot) = g_u(Z_u.Z_u^{-1}\cdot, Z_u^{-1}\cdot)$ (l'ensemble des automorphismes SDP est stable par inversion).

2. Pour les feuilletages considérés ("sans holonomie"), l'existence sur $\mathcal{N}$ d'une métrique conformément σ-invariante entraîne aussitôt l'existence d'une métrique invariante proportionnelle à g.

3. S'il existe une métrique g sur $\mathcal{N}$ *positive* et σ-invariante, telle que les Z_u soient g-symétriques (non-nécessairement positifs), on aura

$$\forall C, \forall u \in C, \mathcal{M}_u(C) \subset \mathrm{Diag}_{\mathbb{R}}(N_u)$$

mais *a priori*, la propriété d'évolution globale $\mathcal{M}_u(C) \subset \mathrm{GL}(N_u)$ n'est pas vérifiée (on en verra plus tard un exemple).

4. Dans les coordonnées locales feuilletées (v, w) de la section III.1, la condition du lemme équivaut à l'existence d'une matrice symétrique $G(v)$ (indépendante de w) telle que les matrices $G(v)(B(v,w) - \lambda(v))^{-1}$ soient SDP. ■

On en déduit déjà un résultat qui s'applique directement à la dynamique des gaz et à l'une des valeurs propres linéairement dégénérées de la MHD :

Proposition 10 *Supposons E (fortement) convexe. Alors, si la métrique $g = D^2E(Df - \lambda)$ sur $\mathcal{N}$ est conformément σ-invariante, ou, de manière équivalente, si Φ est conformément σ-invariante sur $\mathcal{N}^*$, le système (3.1) est globalement hyperbolique.*

[19] On peut vérifier sur l'exemple de la MHD (pour les valeurs propres λ_2, λ_6) que cette condition n'est pas nécessaire en général (en revanche, le corollaire 7 s'applique).

Démonstration.
Notons d'abord que, d'après (3.15), on a $\Phi(D^2E\cdot, D^2E\cdot) = D^2E((Df-\lambda)\cdot,\cdot) = D^2E(Z^{-1}\cdot,\cdot)$, notée encore $D^2E\,Z^{-1}$. Donc Φ est conformément σ-invariante sur $\mathcal{N}^*$ si et seulement si $g = D^2E\,Z^{-1}$ l'est sur $\mathcal{N}$. Or on a évidemment $g(Z\cdot,\cdot) = D^2E$, d'où le résultat. ∎

Si l'on ne se trouve pas dans cette situation agréable, le théorème 5 permet de construire des métriques invariantes par holonomie (σ) lorsqu'on en connaît d'invariantes par transport parallèle (τ) :

Proposition 11 *Soit g une métrique sur $\mathcal{N}$, $h = g(\Lambda\cdot,\Lambda\cdot)$, $\Lambda = (D^2E)^{-1}$, la métrique correspondante sur $\mathcal{N}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) g est σ-invariante sur $\mathcal{N}$

(ii) h est σ-invariante sur $\mathcal{N}^*$

(iii) $\Phi h^{-1}\Phi$ est τ-invariante sur $\mathcal{N}^*$

(iv) $\Phi^{-1}h\Phi^{-1} = {}^tZgZ = g(Z\cdot,Z\cdot)$ est τ-invariante sur $\mathcal{N}$

Démonstration. L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ est triviale. Pour $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, il s'agit de montrer que

$$ {}^t\sigma h\sigma = h \Leftrightarrow {}^t\tau\Phi h^{-1}\Phi\tau = \Phi h^{-1}\Phi\,. $$

Or l'égalité (3.18) du théorème 5 montre que ${}^t\tau\Phi\sigma = \Phi$, d'où ${}^t\tau\Phi h^{-1}\Phi\tau = \Phi\sigma^{-1}h^{-1}\,{}^t\sigma^{-1}\Phi$. L'équivalence voulue en résulte aussitôt.

Démontrons enfin $(i) \Leftrightarrow (iv)$; la conclusion du théorème 5 peut s'écrire $Z\tau = \sigma Z$. Alors $g(Z\tau\cdot, Z\tau\cdot) = g(Z\cdot,Z\cdot)$ équivaut à $g(\sigma Z\cdot,\sigma Z\cdot) = g(Z\cdot,Z\cdot)$, c'est-à-dire à $g(\sigma\cdot,\sigma\cdot) = g$. ∎

Remarque. Il faut prendre garde au fait que, par définition, les transports parallèles dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ ne sont pas reliés par le difféomorphisme $dE : U \to U^*$, c'est-à-dire ne vérifient pas $D^2E(u')\tau_u^{u'} \not= \tau_q^{q'}D^2E(u)$ pour $q = dE(u), q' = dE(u')$, mais plutôt $\tau_u^{u'} = {}^t(\tau_q^{q'})^{-1}$ (voir cependant le lemme 14 ci-dessous). C'est ce qui fait qu'une métrique h est τ-invariante sur $\mathcal{N}^*$ si et seulement si la métrique *duale* h^{-1} (et non la métrique "transportée" $h(D^2E\cdot,D^2E\cdot)$) est τ-invariante sur $\mathcal{N}$ (rappelons qu'on identifie N_u au dual de N_q^* grâce à $(N_q^*)^* = \widehat{N}_u$). ∎

En vertu du lemme 9, les métriques σ-invariantes g sur $\mathcal{N}$ auxquelles on s'intéresse sont celles qui rendent les $Z_u = (B(u) - \lambda(u))^{-1}$ symétriques (et si possible définis positifs...). L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (iv)$ dans la proposition 11 montre qu'il revient au même de chercher des métriques τ-invariantes sur $\mathcal{N}$ vérifiant cette condition.

Une métrique évidente sur $\mathcal{N}$ pour laquelle les Z_u sont symétriques est $D^2E = \Lambda^{-1}$. Cependant, elle n'est pas toujours τ-invariante :

Proposition 12 *La métrique D^2E (sur $\mathcal{N}$) est τ-invariante si et seulement si E vérifie*

$$\forall u, \forall \xi \in K_u, \forall \eta_1, \eta_2 \in \widehat{N}_u, \ D^3E(\xi, \eta_1, \eta_2) = 0 \ . \tag{3.22}$$

C'est en particulier le cas si E est quadratique *($D^3E \equiv 0$).*

Démonstration. Soit C une feuille de $\mathcal{C}$, et $u \mapsto \eta_u \in \widehat{N}_u$ un champ de vecteurs normaux le long de C, invariant par τ (i.e. $\tau_u^{u'}\eta_u = \eta_{u'}$). Il suffit d'établir que

$$u \mapsto \langle D^2E(u)\eta_u, \eta_u \rangle \tag{3.23}$$

est constante sur C pour tout choix de η si et seulement si (3.22) est vérifiée lorsque $u \in C$. Or on sait que $\eta_u = \delta a + \delta\lambda\, u$, $u \in C$ (voir (3.19)), pour $\delta a \in \mathbf{R}^n$ et $\delta\lambda \in \mathbf{R}$ convenables. Donc, par dérivation le long de C, (3.23) est constante sur C si et seulement si

$$\forall u \in C, \forall \xi \in K_u, \ D^3E(\xi, \eta_u, \eta_u) + 2\delta\lambda \langle D^2E(u)\xi, \eta_u \rangle = 0 \ .$$

L'orthogonalité (pour D^2E) de K_u et $\widehat{N}_u$ fait que le second terme est nul, d'où le résultat. ∎

Ceci permet d'énoncer une autre condition suffisante d'hyperbolicité globale :

Proposition 13 *Lorsque E vérifie la condition (3.22) (en particulier si elle est quadratique), on a*

(a) si la métrique $D^2E\,(Df - \lambda)$ est positive sur $\mathcal{N}$, ou de façon équivalente, si Φ est positive sur $\mathcal{N}^*$, alors le système (3.1) est globalement hyperbolique.

(b) si E est convexe, alors $\forall C, \forall u \in C$, $\mathcal{M}_u(C) \subset Diag_{\mathbf{R}}(N_u)$.

Démonstration. D'après les propositions 11 et 12, l'hypothèse signifie que la métrique sur $\mathcal{N}$ définie par

$$g = D^2E(Z^{-1}\cdot, Z^{-1}\cdot)$$

est σ-invariante, et il est clair que Z est g-symétrique.

Dans le cas (a), $g(Z\cdot,\cdot) = D^2E\,(Df - \lambda) = \Phi(D^2E\cdot, D^2E\cdot)$, et le lemme 9 qui permet de conclure.

Dans le cas (b), on a $g > 0$, d'où la conclusion (*cf* remarque 3 suivant le lemme 9). ∎

L'éventualité (a) ci-dessus est réalisée par exemple si E est convexe et $\lambda = \lambda_1$ est la plus petite valeur propre de Df, ou encore, quitte à changer E en $-E$, si $\lambda = \lambda_n$ (plus grande valeur propre).

III.2.4 Evolution globale et enlacement

La condition (3.22), c'est-à-dire l'invariance par τ de la métrique D^2E, admet une autre interprétation, peut-être plus naturelle :

Lemme 14 *La métrique D^2E sur $\mathcal{N}$ est τ-invariante si et seulement si les transports parallèles dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ sont "reliés par dE", i.e. vérifient*

$$D^2E(u')\tau_u^{u'} = \tau_q^{q'} D^2E(u) \qquad (q = dE(u), q' = dE(u')). \tag{3.24}$$

*En particulier, sous cette hypothèse, la propriété d'*évolution *globale équivaut à*

$$Conv\left\{\tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q \mid q \in C^*\right\} \subset GL(N_{q_0}^*)$$

pour toute feuille C^* de $\mathcal{C}^*$ et tout point q_0 de C^* .

Démonstration.
La relation (3.24) équivaut d'après (3.14) à $D^2E(u')\tau_u^{u'} = {}^t(\tau_{u'}^u)D^2E(u)$, soit encore à $D^2E(u)(\tau_{u'}^u\cdot, \tau_{u'}^u\cdot) = D^2E(u')$, ce qui démontre la première partie du lemme. Pour la seconde, il suffit d'observer que l'hypothèse permet d'écrire

$$\tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q = D^2E(u_0)\tau_u^{u_0}\sigma_{u_0}^u(D^2E(u_0))^{-1} .$$

On conclut alors grâce au corollaire 6. ∎

Le résultat suivant, "dans $\mathcal{N}^*$", aura donc automatiquement une contrepartie "dans $\mathcal{N}$" lorsque (3.22) sera vérifiée. Cela permettra de donner pour ces systèmes une caractérisation géométrique de la propriété d'évolution globale

Proposition 15 *Pour toute feuille C^* de $\mathcal{C}^*$ et $q_0 \in C^*$, la forme quadratique (sur $N_{q_0}^*$)*

$$\Phi_q(\sigma_{q_0}^q\cdot, \sigma_{q_0}^q\cdot) \qquad (q \in C^*)$$

dépend affinement *de $(q, L(q))$. De façon équivalente, l'application*

$$q \in C^* \mapsto \tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q \in GL(N_{q_0}^*) \subset End(N_{q_0}^*)$$

est la restriction à C^* d'une application affine de $(q, L(q))$.

Démonstration. Soit $\pi : U_{reg}^* \to \Sigma$ une submersion définissant le feuilletage $\mathcal{C}^*$, et, pour s voisin de $s_0 = \pi(C^*)$, soient $\varphi_j(s,\cdot) \in \mathcal{E}^*$, $(1 \le j \le n-m)$ les éléments d'une base du sous-espace $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}(\pi^{-1}(s))$ des fonctions de $\mathcal{E}^*$ s'annulant sur $\pi^{-1}(s)$. En particulier, on a $\varphi_j(\pi(q), q) = 0$, et en dérivant cette relation il vient

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial s} D\pi(q) = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial q} \qquad (1 \le j \le n-m) . \tag{3.25}$$

Soit maintenant $\xi_0 \in N^*_{q_0}$, et posons $\xi_q = \sigma^q_{q_0}\xi_0$ pour $q \in C^*$, de sorte que $D\pi(q)\xi_q = D\pi(q_0)\xi_{q_0}$. Alors, pour $q \in C^*$, on peut écrire, en utilisant (3.25) et les définitions de τ et σ

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial\varphi_j}{\partial q}(s_0,q_0), \tau^{q_0}_q \sigma^q_{q_0}\xi_0\rangle &= \langle \frac{\partial\varphi_j}{\partial q}(s_0,q), \xi_q\rangle \\ &= -\langle \frac{\partial\varphi_j}{\partial s}(s_0,q), D\pi(q)\xi_q\rangle \\ &= -\langle \frac{\partial\varphi_j}{\partial s}(s_0,q), D\pi(q_0)\xi_0\rangle \,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Comme $(\partial\varphi_j/\partial q(s_0,q_0))_{j=1,\dots,n-m}$ est une base de $(N^*_{q_0})^*$, et que le dernier terme ci-dessus est une fonction de q appartenant à $\mathcal{E}^*$, on conclut que pour tout ξ_0, l'application

$$q \in C \mapsto \tau^{q_0}_q \sigma^q_{q_0}\xi_0 \in N^*_{q_0}$$

est la restriction à C^* d'une application affine de $(q, L(q))$. La seconde assertion en découle immédiatement. Son équivalence avec la première assertion résulte du théorème 5, puisqu'il fournit

$$\Phi_q(\sigma^q_{q_0}\cdot, \sigma^q_{q_0}\cdot) = \Phi_{q_0}(\tau^{q_0}_q\sigma^q_{q_0}\cdot, \cdot)\,.$$

■

Remarques. 1. La démonstration ci-dessus prouve que la seconde assertion (concernant uniquement σ et τ) vaut aussi pour tout feuilletage par L-sphères, et pas seulement pour ceux qui "portent" un système hyperbolique.

2. Comme L coïncide sur chaque feuille non-plate avec une fonction affine, on peut remplacer partout $(q, L(q))$ par q dans l'énoncé ci-dessus si la feuille C^* n'est pas plate. ■

Suivant le schéma annoncé plus haut, on en déduit un résultat analogue dans $\mathcal{N}$ lorsque (3.22) est vérifiée :

Corollaire 16 *Si la métrique D^2E sur $\mathcal{N}$ est τ-invariante, i.e. si la condition (3.22) est vérifiée, alors pour toute feuille C de $\mathcal{C}$ et tout $u_0 \in C$,*

$$u \in C \mapsto \sigma^{u_0}_u Z_u \sigma^u_{u_0} = Z_{u_0}\tau^{u_0}_u\sigma^u_{u_0} \in GL(N_{u_0}) \tag{3.27}$$

est une application affine des variables $(dE(u), \langle dE(u), u\rangle - E(u)) = (q, L(q))$. En particulier, si E est quadratique, (3.27) est une application affine de $(u, E(u))$.

Démonstration. On a en effet dans ce cas

$$\tau^{u_0}_u\sigma^u_{u_0} = (D^2E(u_0))^{-1}\tau^{q_0}_q\sigma^q_{q_0}D^2E(u_0),$$

d'où l'énoncé. ■

On va maintenant utiliser la dépendance affine exprimée par (3.26) pour traduire géométriquement la condition d'évolution globale, sous l'hypothèse (3.22).

En reprenant les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 15, on peut écrire

$$\varphi_j(s,q) = \tilde{\varphi}_j(s,q,L(q)) \qquad (1 \leq j \leq n-m) \ ,$$

où $(q,z) \mapsto \tilde{\varphi}_j(s,q,z)$ est affine.

Soit C^* une feuille de $\mathcal{C}^*$, $s = \pi(C^*)$, et

$$\widetilde{C^*} := \{(q, L(q)) \mid q \in C^*\} = \Gamma^* \cap (C^* \times \mathbf{R})$$

où Γ^* désigne le graphe de L.

On note $\widetilde{\Pi}_s$ le $(m+1)$-plan intersection des hyperplans $\tilde{\varphi}_j(s,\cdot) = 0$, $1 \leq j \leq n-m$ qui est aussi le sous-espace affine de $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}$ engendré par $\widetilde{C^*}$.

D'après (3.26), pour que $\mathrm{Conv}\{\tau_q^{q_0}\sigma_{q_0}^q \mid q \in C^*\}$ contienne un élément non-inversible, il faut et il suffit qu'il existe $(q,z) \in \mathrm{Conv}\,\widetilde{C^*} \subset \widetilde{\Pi}_s$ et $\delta s \in T_s\Sigma - \{0\}$ vérifiant

$$\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial s}(s,q,z), \delta s \rangle = 0 \qquad (1 \leq j \leq n-m).$$

Mais c'est exactement dire que le point (q,z) appartient à l'*enveloppe* de la famille des $(m+1)$-plans $\widetilde{\Pi}_s$, et plus précisément est un "point stationnaire" de $\widetilde{\Pi}_s$. On note $W_s \subset \widetilde{\Pi}_s$ l'ensemble de ces points.

Notons que les traces sur $\Gamma^*_{reg} := \Gamma^* \cap (U^*_{reg} \times \mathbf{R})$ des plans $\widetilde{\Pi}_s$, $s \in \Sigma$, forment un feuilletage sur Γ^*_{reg}, image de $\mathcal{C}^*$ par le difféomorphisme évident $q \mapsto (q, L(q))$. En particulier, l'enveloppe des $\widetilde{\Pi}_s$ ne rencontre pas Γ^*_{reg} . Remarquons aussi que "génériquement", cette enveloppe est une *hypersurface* (singulière) dans $\mathbf{R}^{n+1} = (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}$, puisque c'est l'image du lieu critique de la projection $\Sigma \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ restreinte à la sous-variété de dimension $n+1$ d'équations $\tilde{\varphi}_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-m$.

La discussion précédente motive en partie l'introduction de la

Définition 17 *Le feuilletage $\mathcal{C}^*$ est dit* infinitésimalement non-enlacé *si pour tout $s \in \Sigma$*

$$W_s \cap Conv(\widetilde{C}^*_s) = \emptyset \ .$$

C'est en particulier le cas si l'enveloppe des plans $\widetilde{\Pi}_s$ $(s \in \Sigma)$ ne rencontre pas l'ensemble

$$\bigcup_{C^*} Conv\,\widetilde{C^*} \subset (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}$$

(où C^* parcourt l'ensemble des feuilles de $\mathcal{C}^*$).

L'appellation est motivée par le cas où L (donc E) est convexe, $m = (n-1)/2$ et les feuilles de $\mathcal{C}^*$ sont topologiquement des m-sphères dans U^*_{reg}. Dans ce cas, soient C^*_1 et C^*_2 deux feuilles, $\widetilde{\Pi}_1$, $\widetilde{\Pi}_2$ les $(m+1)$-plans correspondants dans $\mathbf{R}^{n+1}$, et supposons que l'intersection $\widetilde{\Pi}_1 \cap \widetilde{\Pi}_2$ rencontre Conv$\widetilde{C^*_1}$ (ou Conv$\widetilde{C^*_2}$). Alors les m-sphères C^*_1, C^*_2 sont (topologiquement) enlacées dans $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que C^*_2 rencontre transversalement en un seul point un $(m+1)$-disque de bord C^*_1. On peut par exemple le déduire du fait que, dans l'épigraphe $\{(q,z) \,\rfloor\, z \geq L(q)\}$, les ensembles Conv $\widetilde{C^*_i}$ $(i = 1, 2)$ sont deux $(m+1)$-disques, de bords $\widetilde{C^*_i}$, et qui s'intersectent transversalement en un seul point (noter que l'hypothèse sur les dimensions s'écrit aussi $2(m+1) = n+1$). Sous les mêmes hypothèses, on montre facilement par un argument de connexité que l'enlacement infinitésimal équivaut à l'enlacement de toutes les paires de feuilles.

Dans les autres cas (feuilles non "complètes", $m \neq (n-1)/2$), la notion d'enlacement infinitésimal devient essentiellement affine, puisque l'enlacement topologique des paires de feuilles n'a plus de sens.

Le résultat suivant n'est alors qu'un résumé de ce qui précède, combiné au lemme 14 et à la proposition 13

Théorème 18 *Si (3.22) est vérifiée (en particulier si E est quadratique), le système (3.1) est globalement d'évolution si et seulement si le feuilletage $\mathcal{C}^*$ est infinitésimalement non-enlacé. Lorsque de plus E est convexe (fortement), cette propriété équivaut donc à l'hyperbolicité globale.* ∎

Remarques. 1. Lorsque L est convexe, vérifie (3.22), est *propre* dans U^*, et que de plus $m \geq n/2$, le système (3.1) est globalement hyperbolique. En effet, l'intersection de deux sous-espaces affines de dimension $m+1$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ est soit vide, soit de dimension $\geq 2m - n + 1 \geq 1$. En particulier son intersection avec $U^* \times \mathbf{R}$ ne peut pas rencontrer l'épigraphe de L sous les hypothèses faites, puisque ce dernier ne contient aucune droite.

2. En l'absence de toute hypothèse (autre que la non-dégénérescence) sur l'entropie E, on peut quand même énoncer une résultat (négatif) : si $m = 1$, $n = 3$ et les feuilles de $\mathcal{C}$ sont topologiquement des cercles deux à deux enlacés, alors le système n'est pas globalement d'évolution. En effet, pour tout $\xi_0 \in N_{u_0} - \{0\}$ ($u_0 \in C$, C feuille de $\mathcal{C}$), la courbe $u \in C \mapsto \tau^{u_0}_u \sigma^u_{u_0} \xi_0 \in N_{u_0} - \{0\}$ a un degré topologique non nul, et en particulier son enveloppe convexe contient 0.

∎

III.3 Exemples

On applique dans cette section la théorie développée ci-dessus aux exemples du chapitre II, en excluant ceux qui sont "triviaux" du point de vue de l'hyperbolicité globale (c'est-à-dire riches, par exemple). Il apparaît qu'ils sont tous globalement hyperboliques. On construit aussi (III.3.5) une famille d'exemples *non globalement hyperboliques* pour lesquels le feuilletage $\mathcal{C}$ est le "feuilletage de Hopf" dans $\mathbf{R}^3$.

III.3.1 La dynamique des gaz "lagrangienne"

Rappelons que pour ce système, les densités conservées ("variables conservatives") sont (v, u, ε), de flux respectifs $f = (-u, p, pu)$, et qu'on a $\varepsilon = e + u^2/2$, $p = p(v, e)$, avec $pp_e - p_v = c^2 > 0$. La fonction E définie par $E(v, u, \varepsilon) = S(v, e)$ est une entropie si $S_v = pS_e$, et on peut la choisir *convexe* (fortement).

Les variables duales $q = (v^*, u^*, \varepsilon^*)$ vérifient (*cf* II.2.2)

$$v^* = p\varepsilon^* , \qquad u^* = -u\varepsilon^* . \tag{3.28}$$

On a $\lambda = 0$, et les feuilles de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^*$ sont les courbes $u, p =$ const. On peut donc choisir (u, p) pour coordonnées transverses (c'est-à-dire "sur Σ").

On commence par expliciter la fonction H qui apparaît dans la forme symétrisée du système (elle vérifie $f = dH \circ dE$). On a

$$\begin{aligned} dH &= -u\,dv^* + p\,du^* + pu\,d\varepsilon^* \\ &= u^*dv^*/\varepsilon^* + v^*du^*/\varepsilon^* - u^*v^*d\varepsilon^*/(\varepsilon^*)^2 \\ &= d(u^*v^*/\varepsilon^*) \end{aligned}$$

i.e. on peut poser

$$H(v^*, u^*, \varepsilon^*) = \frac{u^*v^*}{\varepsilon^*} = -up\varepsilon^* . \tag{3.29}$$

On calcule maintenant $\Phi = D^2H - \lambda D^2E^*$ pour la valeur propre linéairement dégénérée $\lambda = 0$, i.e. $\Phi = D^2H$: on a, en utilisant (3.28)

$$\begin{aligned} \Phi &= -du\,dv^* + dp\,du^* + d(pu)d\varepsilon^* \\ &= -du\,d(\varepsilon^*p) + dp\,d(-u\varepsilon^*) + d(pu)d\varepsilon^* \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Phi = -2\varepsilon^* du\,dp . \tag{3.30}$$

En particulier, Φ est conformément σ-invariante (sur $\mathcal{N}^*$), puisque seul le facteur $-\varepsilon^* > 0$ varie le long des feuilles. On vérifie d'ailleurs que Φ est affine en $(q, E^*(q)) = (v^*, u^*, \varepsilon^*, E^*)$, conformément à la proposition 15 . La convexité de E permet alors d'appliquer la proposition 10 : le système est globalement hyperbolique.

On peut le retrouver directement ici : on obtient aisément l'expression de Z (dans les coordonnées transverses (u, p)) sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & c^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et il est clair que l'ensemble des matrices de cette forme est un convexe contenu dans $GL \cap \mathrm{Diag}_{\mathbf{R}}$.

III.3.2 La dynamique des gaz "eulérienne"

Les variables conservatives sont $(\rho, m = \rho u, \epsilon = \rho\varepsilon)$, et ont pour flux associés $f = (\rho u, p + \rho u^2, u(p + \epsilon))$, avec $p = p(\rho, e)$, $\epsilon = \rho\varepsilon = \rho(e + u^2/2)$. Une entropie convexe est

$$\begin{aligned} E(\rho, m, \epsilon) &= \rho S(\rho, e) \\ &= \rho S(\rho, \epsilon/\rho - (m/\rho)^2/2) \ , \end{aligned}$$

où S vérifie $\rho^2 S_\rho = -pS_e$. Les variables duales correspondantes sont $q = (\rho^*, m^*, \epsilon^*)$, avec

$$m^* = -u\epsilon^* \ , \ \epsilon^* = S_e \ , \ \text{et} \ \ E^*(\rho^*, m^*, \epsilon^*) = -p\epsilon^* \ . \tag{3.31}$$

On a $\lambda = u$, et les feuilles de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^*$ sont encore les courbes $u, p = \text{const.}$

Pour obtenir H, on écrit ici

$$\begin{aligned} dH &= \rho u\, d\rho^* + (p + \rho u^2) dm^* + u(p + \epsilon) d\epsilon^* \\ &= p(dm^* + u\, d\epsilon^*) + u(\rho\, d\rho^* + m\, dm^* + \epsilon\, d\epsilon^*) \\ &= -p\epsilon^* du + u\, dE^* \\ &= d(uE^*) \ , \end{aligned}$$

en utilisant (3.31), d'où

$$H(\rho^*, m^*, \epsilon^*) = -\frac{m^* E^*}{\epsilon^*} \ . \tag{3.32}$$

Noter que cela s'écrit aussi $H = -up\epsilon^*$ (comparer à (3.29)).

La valeur propre linéairement dégénérée est ici $\lambda = u$, et on calcule donc $\Phi = D^2H - uD^2E^*$. Commençons par réécrire dH sous la forme

$$dH = p\, dm^* + pu\, d\epsilon^* + u\, dE^*$$

(voir ci-dessus). Il vient alors

$$\begin{aligned} \Phi &= dp\, dm^* + d(pu) d\epsilon^* + du\, dE^* \\ &= dp(dm^* + u\, d\epsilon^*) + du(dE^* + p\, d\epsilon^*) \\ &= -2\epsilon^* du\, dp \ , \end{aligned}$$

en se servant de (3.31).

La forme quadratique Φ sur $\mathcal{N}^*$ est, comme dans l'exemple précédent, conformément σ-invariante, et E étant convexe, on conclut de la même façon que le système est globalement hyperbolique. Ici encore, il est facile de le retrouver directement.

On peut aussi le déduire du résultat correspondant pour la formulation "lagrangienne", en utilisant les propriétés générales des transformations du type "Euler-Lagrange" (voir appendice III.3.5).

III.3.3 La MHD

Les variables conservatives sont

$$(\rho, m = \rho u, \epsilon = \rho\varepsilon + \frac{|B|^2}{2}, M = \rho V, B)$$

avec $\varepsilon = e + (u^2 + |V|^2)/2$, et ont pour flux

$$(\rho u, \hat{p} + \rho u^2, u(\hat{p} + \epsilon) - V \cdot B, \rho u V - B, uB - V)\ ,$$

où on a posé $\hat{p} = p + |B|^2/2 = p(\rho, e) + |B|^2/2$ ("pression totale"). On a encore une entropie convexe $E(\rho, m, \epsilon, M, B) = \rho S(\rho, e)$ avec $\rho^2 S_\rho = -pS_e$, et les variables duales vérifient

$$\begin{array}{rclcrcl} m^* & = & -\epsilon^* u\ , & & M^* & = & -\epsilon^* V \\ B^* & = & -\epsilon^* B\ , & & E^* & = & -\epsilon^* \hat{p} \end{array} \tag{3.33}$$

(et aussi $\epsilon^* = S_e(\rho, e)$). Les valeurs propres linéairement dégénérées sont $\lambda_4 = u$ et $\lambda_{2,6} = u \pm \rho^{-1/2}$. Les feuilles de $\mathcal{C}_4$ (défini par $\lambda_4 = u$) sont données par $(u, \hat{p}, V, B) = \text{const}$, et celles de $\mathcal{C}_{2,6}$ le sont par $(\rho, u, e, B \pm \sqrt{\rho}V, |B|) = \text{const}$, avec $U_{reg} = \{B \neq 0\}$.

Procédant aux mêmes regroupements que dans l'exemple précédent, on arrive à

$$\begin{aligned} dH &= -\hat{p}\epsilon^* du + u\,dE^* + \epsilon^* V \cdot dB - B \cdot dM^* \\ &= d(uE^* - B \cdot M^*) \end{aligned}$$

en utilisant (3.33). Ainsi

$$H = -\frac{m^* E^* - B^* \cdot M^*}{\epsilon^*} = -\epsilon^*(u\hat{p} - V \cdot B)\ . \tag{3.34}$$

On peut aussi écrire dH sous la forme

$$dH = \hat{p}\,dm^* + u\hat{p}\,d\epsilon^* + u\,dE^* - B \cdot dM^* - V \cdot B\,d\epsilon^* - V \cdot dB^*$$

et il en résulte que la forme quadratique $\Phi_4 = D^2H - \lambda_4 D^2E^*$ associée à la valeur propre $\lambda_4 = u$ est donnée par

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= D^2H - uD^2E^* \\ &= du(dE^* + \hat{p}\,d\epsilon^*) + d\hat{p}(dm^* + u\,d\epsilon^*) \\ &\qquad - dB \cdot (dM^* + V d\epsilon^*) - dV \cdot (dB^* + B d\epsilon^*) \\ &= -2\epsilon^*(du\,d\hat{p} - dV \cdot dB)\ , \end{aligned}$$

grâce aux relations (3.33). Comme $u, \hat{p}, V, B$ sont exactement les quantités constantes le long des feuilles de $\mathcal{C}_4$, on en conclut que Φ_4 est ici encore conformément σ-invariante. La convexité de E permet alors d'affirmer que le système est globalement hyperbolique (pour λ_4). Il est cette fois moins facile de le retrouver directement.

En ce qui concerne les valeurs propres $\lambda_{2,6}$ ("vitesses d'Alfvén"), l'hyperbolicité globale ne semble pas résulter des mêmes arguments [20].

On va l'obtenir ici pour la formulation lagrangienne du système, ce qui d'après l'appendice III.3.5 l'établit aussi pour la formulation eulérienne.

De plus, on pourra à cette occasion voir *a contrario* l'avantage de l'approche générale développée dans la section précédente, en ce qui concerne la quantité de calculs...

Dans les coordonnées (non-conservatives) (v, u, e, V, B), le système est (2.45)

$$\begin{array}{rcccl} v_t & - & u_\xi & = & 0 \\ u_t & + & p_\xi + B \cdot B_\xi & = & 0 \\ e_t & + & p u_\xi & = & 0 \\ V_t & - & B_\xi & = & 0 \\ B_t & + & (u_\xi B - V_\xi)/v & = & 0\,. \end{array} \tag{3.35}$$

On rappelle aussi que les feuilletages $\mathcal{C}_\pm$ associés à $\lambda_\pm = \pm 1/\sqrt{v}$ sont définis par

$$(v, u, e, \beta, W_\pm) = \text{const}$$

avec $\beta = |B|^2/2, W_\pm = V \pm \sqrt{v}B$. Choisissons $\lambda = 1/\sqrt{v} = c_A$, en notant $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+$, $W = W_+$, et calculons dans la base $(\partial/\partial v, \ldots, \partial/\partial W_2)$ la matrice de l'endomorphisme "$B - \lambda$" du fibré normal au feuilletage. Pour éviter les confusions, on désignera par Ξ cette matrice.

L'inspection des trois premières équations de (3.35) fournit aussitôt les trois premières lignes de Ξ :

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{v} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_v & -1/\sqrt{v} & p_e & 1 & 0 \\ 0 & p & -1/\sqrt{v} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ici et dans la suite, les deux dernières lignes et colonnes sont regroupées en bloc).

Ensuite, $\beta = B^2/2$ vérifie

$$\beta_t + (u_\xi B^2 - B \cdot V_\xi)/v = 0\,;$$

or

$$\begin{aligned} (u_\xi B^2 - B \cdot V_\xi)/v - \lambda \beta_\xi &= u_\xi B^2/v - B/v \cdot (V_\xi + \sqrt{v} B_\xi) \\ &= B^2/v u_\xi - B/v \cdot W_\xi + B^2/(2v^{3/2}) v_\xi \end{aligned}$$

[20] On peut vérifier que pour ces valeurs propres, il n'y a *pas* de métrique transverse (non-dégénérée) σ-invariante qui rende les Z_u symétriques.

puisque $V_\xi + \sqrt{v}B_\xi = W_\xi - (\sqrt{v})_\xi B$.

On en déduit la quatrième ligne de Ξ :

$$\begin{pmatrix} B^2/(2v^{3/2}) & B^2/v & 0 & 0 & -{}^tB/v \end{pmatrix} .$$

Enfin l'équation en W s'obtient de même

$$W_t + Bu_\xi/2\sqrt{v} - W_\xi/\sqrt{v} + v_\xi B/(2v) = 0$$

et la matrice complète est donc

$$\Xi = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{v} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_v & -1/\sqrt{v} & p_e & 1 & 0 \\ 0 & p & -1/\sqrt{v} & 0 & 0 \\ B^2/(2v^{3/2}) & B^2/v & 0 & 0 & -{}^tB/v \\ B/2v & B/(2\sqrt{v}) & 0 & 0 & -2/\sqrt{v}I_2 \end{pmatrix} .$$

Pour ne pas avoir à l'inverser, on va effectuer deux manipulations sur les lignes de Ξ, la transformant en $P_2P_1\Xi = Q$, matrice *constante* le long du feuilletage de contact (et inversible dans $U_{reg} = \{B \neq 0\}$). On aura alors $\overline{\Xi^{-1}} = Q^{-1}\overline{P_2P_1}$, en désignant par $F \mapsto \overline{F}$ un opérateur quelconque de moyenne le long des feuilles de $\mathcal{C}$. L'avantage de ceci est que P_2P_1 est bien plus simple que Ξ^{-1}.

Précisément,

$$P_1 = \begin{pmatrix} & I_3 & & 0 & 0 \\ & 0\ 0\ 0 & & 1 & 0 \\ B/(2\sqrt{v}) & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire on ajoute au dernier bloc de deux lignes $B/(2\sqrt{v})$ fois la première, ce qui le transforme en

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2/\sqrt{v}I_2 \end{pmatrix} .$$

On prend ensuite

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^tB/(2\sqrt{v}) \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

i.e. on ajoute à la quatrième ligne $-{}^tB/(2\sqrt{v})$ fois le dernier bloc de deux lignes dans $P_1\Xi$, ce qui donne

$$P\Xi = P_2P_1\Xi = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{v} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_v & -1/\sqrt{v} & p_e & 1 & 0 \\ 0 & p & -1/\sqrt{v} & 0 & 0 \\ B^2/(2v^{3/2}) & B^2/v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2/\sqrt{v}I_2 \end{pmatrix} .$$

Comme la matrice

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ -B^2/(4v)\ 0\ 0 & 1 & -{}^tB/(2\sqrt{v}) \\ B/(2\sqrt{v})\ 0\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

est, à conjugaison près par une matrice de permutation, triangulaire à diagonale de "1", $\overline{P}$ est inversible pour tout opérateur de moyenne $\overline{(\cdot)}$ le long des feuilles de $\mathcal{C}$.

Donc $\overline{\Xi^{-1}} = Q^{-1}\overline{P}$ est aussi inversible, i.e. le système est globalement d'évolution pour la valeur propre λ : on se trouve en présence d'un système auquel le corollaire 7 s'applique.

Notons au passage que Ξ^{-1} est, le long de chaque feuille, une fonction *affine* de vB (v est constant sur les feuilles), qui est l'une des variables conservatives $(v, u, \hat{\varepsilon}, V, vB)$. Autrement dit, le système vérifie la conclusion du corollaire 16, bien que l'on puisse montrer qu'il n'en vérifie pas l'hypothèse.

Pour démontrer l'hyperbolicité globale, il reste à vérifier que les valeurs propres de $(\overline{\Xi^{-1}})^{-1} = \overline{P}^{-1}Q$ sont réelles. Ce sont les μ tels que

$$\det(\mu\overline{P} - Q) = 0\ .$$

Posant $\mu = X - 1/\sqrt{v} = X - c_A$, on peut calculer

$$\det((X-c_A)\overline{P}-Q) = X(X+c_A)(X^4-(c^2+c_A^2+\gamma c_A^2)X^2-2\delta c_A^3X+c_A^2(c^2+c_A^2\delta)) \tag{3.36}$$

avec

$$\gamma = \frac{3B^2+\overline{B}^2}{4}, \qquad \delta = \frac{B^2-\overline{B}^2}{4}\ .$$

Désignant par $F(X)$ le dernier facteur dans (3.36), on remarque que

$$\begin{array}{rclcl} F(0) & = & c_A^2(c^2+c_A^2\delta) & > & 0 \\ F(\pm c_A) & = & c_A^4(-\gamma+\delta\mp 2\delta) & & \text{,d'où} \\ F(c_A) & = & -c_A^4 B^2 & < & 0 \\ F(-c_A) & = & -c_A^4\overline{B}^2 & \leq & 0\ . \end{array}$$

Le polynôme $F(X)$ a donc toutes ses racines réelles distinctes si $\overline{B} \neq 0$, et si $\overline{B} = 0$, on vérifie aisément que $\ker(\mu\overline{P} - Q)$ est de dimension 2 si $\mu = -2c_A$, ce qui prouve l'hyperbolicité globale pour la valeur propre $\lambda_6 = 1/\sqrt{v}$. Le cas de $\lambda_2 = -1/\sqrt{v}$ est tout-à-fait analogue.

III.3.4 Le câble élastique

Ce système $2p \times 2p$ sécrit (voir II.2.3)

$$\begin{array}{rcl} \partial_t u & = & \partial_x v \\ \partial_t v & = & \partial_x(T(r)\omega) \quad (u, v \in \mathbf{R}^p, r = |u|, \omega = u/r). \end{array} \tag{3.37}$$

Ses valeurs propres linéairement dégénérées sont $\pm\mu = \pm\sqrt{T(r)/r}$, et elles sont de multiplicité $p-1$. Les feuilletages de contact $\mathcal{C}_\pm$ associés sont définis par

$$(|u|, v \pm \mu u) = \text{const} .$$

Enfin, (3.37) admet pour entropies $E(u,v) = V(r) + |v|^2/2$ et $Q(u,v) = u \cdot v$, avec $V'(r) = T(r)$.

Puisque l'entropie Q est quadratique (non-dégénérée), le critère d'hyperbolicité globale de la proposition 13 (b) s'applique. Il suffit donc de vérifier que la forme quadratique $h_\pm = D^2 Q(Df \mp \mu)$, dont le noyau est tangent à $\mathcal{C}_\pm$ en tout point, est *positive* (ou *négative*, en remplaçant Q par $-Q$ ...).

Or on a, en notant $du_{||}, du_\perp$ les composantes parallèle et orthogonale à $\omega = u/|u|$ de du :

$$\begin{aligned} h_+ &= (-dv - \mu du) \cdot dv + du \cdot (-T' du_{||} - T/r\, du_\perp - \mu dv) \\ &= -(dv + \mu du) \cdot dv - du \cdot ((T' - T/r) du_{||} + \mu(dv + \mu du)) \\ &= -(dv + \mu du)^2 - (T' - T/r) dr^2 \end{aligned}$$

de sorte que $h_\pm$ est négative, grâce à $T' - T/r = \lambda^2 - \mu^2 > 0$ (cf II.2.3). De même, $h_- = -(dv - \mu du)^2 - (T' - T/r)dr^2$ est négative, et ce système est globalement hyperbolique.

III.3.5 Systèmes construits sur le feuilletage de Hopf

Les systèmes 3×3 mis en évidence ici sont des exemples de systèmes "gradients", i.e. admettant $E(u) = |u|^2/2$ pour entropie. On ne distinguera donc pas u de la variable "duale" $q = dE(u) = u$, et on conservera la notation "q".

Soit S^3 la sphère d'équation $|z|^2 + |w|^2 = 1$, dans $\mathbb{C}^2 = \mathbf{R}^4$ muni des coordonnées $(z,w) = (x+iy, u+iv)$. Les traces des droites vectorielles complexes définissent sur S^3 le feuilletage (par cercles) de Hopf, noté $\mathcal{H}$. Ses feuilles sont aussi les fibres de la *fibration de Hopf*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\eta} : S^3 \subset \mathbb{C}^2 - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 = S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (z,w) & \mapsto & w/z \,. \end{array} \tag{3.38}$$

On note Δ_s ($s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) la droite complexe d'équation $w/z = s$.

La projection stéréographique π de pôle $P = (0,i) \in S^3$ sur l'hyperplan $\{\Im w = 0\} = \mathbf{R}^3$ envoie ce feuilletage dans $\mathbf{R}^3$, l'unique cercle de Hopf passant par P étant envoyé sur une droite. On note $\mathcal{C}$ le feuilletage image dans $\mathbf{R}^3$, et

$$\eta = \tilde{\eta} \circ \pi^{-1} : \mathbf{R}^3 \to S^2$$

la submersion qui le définit.

Il sera commode d'obtenir $\mathcal{C}$ comme suit. Considérons la transformation *projective*

$$\Pi : (z,w) \mapsto \left(\frac{z}{1-v}, \frac{w}{1-v}\right) \qquad (v = \Im w)\ . \tag{3.39}$$

Elle envoie à l'infini l'hyperplan affine $\{v = 1\}$, tangent à S^3 en P, et on voit sans peine que $S^3 - \{P\}$ est envoyé sur le paraboloïde Γ, graphe de la fonction quadratique

$$q \mapsto L(q) = \frac{|q|^2 - 1}{2} \qquad (q = (z,u) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3)$$

De plus, les droites complexes Δ_s sont visiblement invariantes par Π (dans (3.39), $1 - v$ est réel). Enfin, l'application composée

$$S^3 - \{P\} \xrightarrow{\Pi} \Gamma \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \xrightarrow{pr_1} \mathbf{R}^3 \tag{3.40}$$

n'est autre que la projection stéréographique notée π ci-dessus :

$$(q,v) \in S^3 - \{P\} \mapsto \pi(q,v) = \frac{q}{1-v} \in \mathbf{R}^3\ , \tag{3.41}$$

de sorte que le feuilletage image $\Pi(\mathcal{H})$ sur Γ se projette (par pr_1) sur $\mathcal{C}$. On retrouve en particulier le fait que les feuilles de $\mathcal{C}$ sont des cercles, à l'exception d'une droite, image de l'unique cercle de $\mathcal{H}$ passant par P (à savoir $\Delta_\infty \cap S^3$).

Les résultats du chapitre II (prop. 6) montrent alors qu'un système porté par $\mathcal{C}$ est donné, s'il est défini dans $U = \eta^{-1}(\Sigma)$ (Σ ouvert de S^2), par une immersion

$$\begin{array}{rcl} j : \Sigma \subset S^2 & \to & \mathcal{E}^* \cong \mathbf{R}^5 \\ s & \mapsto & \lambda(s)L(\cdot) + \langle a(s), \cdot\rangle + b(s) \end{array} \tag{3.42}$$

($a(s) \in (\mathbf{R}^3)^* \cong \mathbf{R}^3$, $\lambda(s)$, $b(s) \in \mathbf{R}$) . Celle-ci doit de plus être telle que pour tout $s \in \Sigma$, im $Dj(s) \subset \mathcal{E}^*$ coïncide avec le sous-espace $\mathcal{V}_s$ des fonctions nulles sur $C_s = \eta^{-1}(s)$. Or il est clair qu'on peut identifier $\mathcal{E}^*$ à l'espace des fonctions affines sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, $\mathcal{V}_s$ s'identifiant alors à l'ensemble de celles qui s'annulent sur Δ_s.

Introduisons $\phi, \psi : \Sigma \to \mathbf{C}$ en posant

$$\begin{array}{rcl} \overline{\phi(s)} & = & a_1(s) + i\, a_2(s) \\ \overline{\psi(s)} & = & a_3(s) + i\, \lambda(s)\ . \end{array} \tag{3.43}$$

Alors

Lemme 19 *L'application j définie par (3.42) convient si et seulement si pour tout $s \in \Sigma - \{\infty\}$, on a*

$$db(s) \;=\; 0$$

$$
\begin{aligned}
D\phi(s) + sD\psi(s) &= 0 && (3.44)\\
rg\, D\psi(s) &= 2 && (3.45)\\
\text{et si } \infty \in \Sigma & && \\
D\psi(\infty) &= 0 && (3.46)\\
rg\, D\phi(\infty) &= 2 && (3.47)
\end{aligned}
$$

(Dans cet énoncé, $D\phi(s), D\psi(s) : T_s\Sigma \to \mathbf{C}$ sont des applications $\mathbf{R}$-linéaires).

Démonstration. On l'obtient en écrivant, pour $q = (z,u)$, $w = u + iv = u + iL(q)$

$$
\begin{aligned}
j(s)(q) &= \langle a(s), q\rangle + \lambda(s)v + b(s)\\
&= \Re\left(\overline{(a_1(s) + ia_2(s))}\, z + \overline{(a_3(s) + i\lambda(s))}\, w\right) + b(s)\\
&= \Re(\phi(s)z + \psi(s)w) + b(s)\ .
\end{aligned}
$$

Alors im $Dj(s) \subset \mathcal{V}_s$ si et seulement si $db(s) = 0$ et

$$\Re(zD\phi(s)\delta s + wD\psi(s)\delta s) = 0$$

pour tout $(z,w) \in \Delta_s$ et tout $\delta s \in T_s\Sigma$, d'où les conditions (3.44), (3.46). On voit alors aussitôt que la condition rg $Dj(s) = 2$ est traduite par (3.45), (3.47). Le lemme est démontré. ∎

La résolution de (3.44) sera immédiate une fois démontré le second

Lemme 20 *Sous les hypothèses du lemme précédent, ϕ et ψ sont nécessairement* holomorphes *dans Σ. On peut donc écrire les conditions (3.44) à (3.47) sous la forme*

$$
\begin{aligned}
\phi'(s) + s\psi'(s) &= 0 &&\\
\psi'(s) &\neq 0 && \textit{pour } s \neq \infty\\
\text{et si } \infty \in \Sigma & &&\\
\lim_{s\to\infty} s^2\psi'(s) &= 0 &&\\
\lim_{s\to\infty} s^2\phi'(s) &\neq 0 &&
\end{aligned}
$$

Démonstration. De (3.44) on déduit que, dans $\Sigma - \{\infty\}$, on a $\overline{\partial}(\phi + s\psi) = 0$, où $\overline{\partial} := \partial/\partial\overline{s}$ (et de même $\partial = \partial/\partial s$). Donc $\phi + s\psi$ est holomorphe. Or $\partial(\phi + s\psi) = \partial\phi + s\partial\psi + \psi = \psi$, toujours d'après (3.44). Donc ψ est holomorphe, et $\phi = (\phi + s\psi) - s\psi$ aussi. Lorsque $\infty \in \Sigma$, on choisit $t = 1/s$ pour coordonnée locale holomorphe, et un calcul immédiat permet de conclure. ∎

Ainsi, lorsque $\infty \notin \Sigma$, les systèmes portés par $\mathcal{C}$ dans $U = \eta^{-1}(\Sigma)$ correspondent aux fonctions holomorphes $\psi : \Sigma \to \mathbf{C}$ sans point critique et telles que

$s\psi'(s)$ (donc ψ) ait une primitive dans Σ (contre-exemple : $\psi(s) = 1/s$ dans $\Sigma = S^2 - \{0, \infty\}$).

Si $\infty \in \Sigma$, ils correspondent aux $\psi : \Sigma \to \mathbf{C}$ holomorphes sans point critique dans $\Sigma - \{\infty\}$, de la forme

$$\psi(s) = c_0 + c_1/s^2 + \dots \qquad (c_1 \neq 0)$$

pour $s \to \infty$, et possédant de plus une primitive dans Σ.

D'après le théorème de Liouville, on ne peut avoir $\Sigma = S^2$: il y a toujours au moins une "feuille singulière", à laquelle le système n'est pas prolongeable. En particulier, les domaines "naturels" d'existence $U = \eta^{-1}(\Sigma)$ $(\Sigma \neq S^2)$ ne sont jamais convexes, ni même simplement connexes.

Il est classique que les feuilles de $\mathcal{C}$ sont deux à deux enlacées. On peut s'en assurer ici en remarquant que l'"enveloppe" des plans $\Delta_s \subset \mathbf{R}^4$ est réduite au point 0, qui appartient à tous les disques $\mathrm{Conv}(\Delta_s \cap \Gamma)$. Le feuilletage $\mathcal{C}$ est donc infinitésimalement enlacé, ce qui entraîne l'enlacement topologique dans ce cas (voir la discussion précédant le théorème 18).

Les hypothèses du théorème 18 étant satisfaites (L est quadratique), on peut d'ores et déjà affirmer que les systèmes obtenus *ne sont pas globalement hyperboliques*[21], bien qu'ils possèdent une entropie (fortement) convexe. On va montrer comment en extraire un exemple non globalement hyperbolique dans un domaine *convexe*.

Prenons $\Sigma = S^2 - \{0\}$, de sorte que $\eta^{-1}(\Sigma) = U = \mathbf{R}^3 - C_0$, où

$$C_0 = \left\{(z, u) \in \mathbf{R}^3 \mid |z|^2 = 1, u = 0\right\} .$$

Soit alors U' le cylindre (convexe)

$$U' = \{|z| < 1\} \times \mathbf{R} \subset U$$

et choisissons par exemple $\psi(s) = -1/s^2$, $\phi(s) = 2/s$. Il résulte du théorème 18 que le système obtenu dans U' est globalement hyperbolique si et seulement si

$$0 \notin \mathrm{Conv}\,\{(q, L(q)) \mid q \in C_s \cap U'\}$$

pour toute feuille $C_s = \eta^{-1}(s)$. Mais on voit facilement que $C_\infty = \{0\} \times \mathbf{R}$ ne vérifie pas cette condition (pas plus d'ailleurs que C_s pour tout autre s), de sorte qu'on a bien un exemple de système non globalement hyperbolique dans le domaine convexe U'.

On s'intéresse maintenant aux (deux) directions propres de ces systèmes distinctes de $T_q(\mathcal{C})$, afin de déterminer s'il peut exister des domaines convexes *invariants* (on verra qu'il n'y en a pas).

[21]cela résulte aussi de la remarque 2 qui suit le théorème cité

Notons d'abord qu'en tout point, une base propre est orthogonale pour $D^2L(q)$, i.e. pour la métrique euclidienne $|dq|^2$. Ensuite, on réalise le fibré $\mathcal{N}$ normal à $\mathcal{C}$ comme champ des orthogonaux (euclidiens) $K_q^\perp$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors les directions propres cherchées sont celles de la forme quadratique Φ sur $\mathcal{N}$ par rapport à la forme euclidienne $|dq|^2 = |dz|^2 + du^2$ restreinte à $\mathcal{N}$. Rappelons que l'on a $\Phi_q = D^2H(q) - \lambda(q)D^2L(q)$, avec $dH(q) = a(s) + \lambda(s)dL(q)$ si $s = \eta(q)$, c'est-à-dire aussi (voir (3.43))

$$dH(q) = \Re(\phi(s)dz + \psi(s)dw)$$

en posant $q = (z, u)$, $w = u + iv = u + iL(q)$. On en tire aussitôt

$$\begin{aligned} \Phi &= \Re(\phi'(s)ds\,dz + \psi'(s)ds\,dw) \\ &= \Re\left((\phi'(s) + s\psi'(s))ds\,dz + z\psi'(s)ds^2\right) \end{aligned}$$

(puisque $w = sz$), et d'après (3.44) c'est aussi

$$\Phi = \Re(z\psi'(s)ds^2)\ . \tag{3.48}$$

On aura aussi besoin du

Lemme 21 *La restriction de $|dq|^2$ à $\mathcal{N}$ est de la forme $c(q)|ds|^2$ $(c(q) > 0)$.*

Démonstration. La métrique induite par celle de S^3 sur le fibré normal à $\mathcal{H}$ au point $(z, w) = (z, sz)$ est

$$g = \frac{|dw - s\,dz|^2}{1 + |s|^2}$$

et comme $dw - sdz = zds$, on obtient $g = c_0|ds|^2$, avec $c_0 = (1 + |s|^2)^{-2}$.

Il est par ailleurs classique que la projection stéréographique $\pi : S^3 - \{P\} \to \mathbf{R}^3$ est *conforme* (c'est la restriction à S^3 d'une inversion dans $\mathbf{R}^4$). Le lemme en résulte aussitôt. ∎

(On peut montrer que $c(q) = c(z, u) = |z|^2/(1 + |s|^2)$).

Ainsi, les directions propres cherchées (dans $\mathcal{N}$) sont aussi celles de la forme quadratique $\Phi = \Re(z\psi'(s)ds^2)$ par rapport à $|ds|^2$. On voit aisément qu'elles sont données par $z\psi'(s)ds/\overline{ds} \in \mathbf{R}$, soit

$$\arg(\frac{ds}{\overline{ds}}) \equiv -\arg(z\psi'(s)) \pmod{\pi}$$

i.e.

$$\arg ds \equiv -\frac{1}{2}\arg(z\psi'(s)) \pmod{\frac{\pi}{2}}\ . \tag{3.49}$$

Les valeurs propres correspondantes du système sont $\lambda^\pm = \lambda \pm \mu$, où $\mu := |z\psi'(s)|/c(q)$.

De (3.49) on va déduire plusieurs choses. D'une part, les fibrés $K^{\pm} := \ker(D^2H - \lambda^{\pm}D^2L)$ sont non-triviaux : quand $q = (z,u)$ parcourt un cercle de $\mathcal{C}$, s est constant et z fait une fois le tour de l'origine, donc le sous-espace $K_q^{\pm}$ accomplit un *demi-tour* par rapport au feuilletage (c'est-à-dire que son image par $\eta : U \to \Sigma$ accomplit un demi-tour dans $T_s\Sigma$). En particulier, il n'y a de champ de vecteurs propres continu et globalement défini pour aucune des valeurs propres $\lambda^{\pm}$.

D'autre part, ces dernières n'admettent pas d'invariant de Riemann, même localement. Globalement, cela résulte de ce qui précède : il n'y a même pas de 1-formes $l^{\pm} \neq 0$ telles que $\ker l^{\pm} = (K^{\pm})^{\perp}$. La non-existence locale se déduit de (3.49). En effet, si un tel invariant existait dans un ouvert $V \subset U$, le second membre de cette relation serait constant le long des feuilles de $\mathcal{C}_{|V}$, ce qui n'est pas le cas. En fait, on déduit facilement de (3.49) que les champs de plans $(K^{\pm})^{\perp}$ sont deux *structures de contact* dans U, i.e. sont "complètement non-intégrables" [A1].

Notons à ce sujet que la valeur propre λ n'admet pas non plus d'invariant de Riemann (même localement : classiquement, le champ des plans orthogonaux à la fibration de Hopf $\mathcal{H}$ sur S^3 définit sur celle-ci la structure de contact standard, et $K^{\perp}$ est (par construction) son image par la projection stéréographique.

En particulier, le cylindre $U' = \{|z| < 1\} \times \mathbf{R}$, bien que convexe, n'est pas invariant : sa frontière ne peut être une surface caractéristique, puisque de telles surfaces n'existent pas... La "conjecture d'hyperbolicité globale" n'est donc pas infirmée par ces exemples.

A Transformations par plans parallèles

La lecture de [Dar2, p.348] suggère le cadre géométrique suivant pour l'étude des systèmes de lois de conservation munis d'une entropie non-dégénérée : deux hypersurfaces S, S' sont données dans l'espace affine $\mathbf{R}^{n+1}$, ainsi qu'une application

$$g : S \to S'$$

vérifiant $T_pS = T_{g(p)}S'$ pour tout $p \in S$, i.e. telle que les hyperplans affines tangents à S et S' aux points "correspondants" p, $g(p)$ soient parallèles. Darboux envisage le cas $n = 2$ et fait les hypothèses de généricité et d'analyticité plus ou moins implicites à l'époque, mais la généralisation est immédiate.

Si S est le graphe de $E : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, et si pour $p = (u, E(u)) \in S$ on pose $g(p) = (f(u), F(u)) \in S'$, on vérifie aussitôt que la condition de parallélisme est

$$dE(u).Df(u) = dF(u) \ ,$$

i.e. E est une entropie, de flux F, du système de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \ . \tag{A.1}$$

De plus, il est clair qu'on peut toujours localement se ramener à cette situation, et aussi qu'il n'y a *a priori* pas de raison pour que g soit un difféomorphisme local, ni $g(S) = S'$ régulière. On peut se contenter de la condition

$$\operatorname{im} Dg(p) \subset T_pS \ .$$

Pour Darboux, on sait alors que "en général" il y a n tangentes distinctes à S auxquelles correspondent des tangentes à S' qui leur sont parallèles, c'est-à-dire n directions propres $\Delta_k(p)$, $1 \leq k \leq n$, $p \in S$ de l'*endomorphisme*

$$Dg(p) : T_pS \to T_{g(p)}S' = T_pS$$

(ces directions pouvant être imaginaires...).

Dans la situation envisagée précédemment, les Δ_k sont réelles lorsque le système (A.1) est hyperbolique, les valeurs propres de $Dg(p)$ étant aussi celles de $Df(u)$ si $p = (u, E(u))$. C'est par exemple le cas si E (c'est-à-dire S) est fortement convexe.

En outre, ces directions propres sont "conjuguées", ce qui a la signification suivante : si $\psi = 0$ est une équation régulière de S au voisinage du point p, on définit sur T_pS une forme quadratique par

$$II_p(\delta p, \delta p) = \langle D^2\psi(p)\delta p, \delta p\rangle \ .$$

Alors les directions propres $\Delta_k(p)$ sont deux à deux orthogonales pour II_p (en supposant bien sûr les valeurs propres $\lambda_k(p)$ distinctes), ce qui revient aussi à dire que $Dg(p)$ est *symétrique* pour II_p. Remarquons que cette orthogonalité ne dépend pas du choix de ψ : si on la remplace par $\tilde{\psi} = c\psi$ avec $c(p) \neq 0$, II_p est remplacée par $c(p)II_p$. On montre ainsi que sur toute hypersurface S d'un espace affine, il y a une structure "pseudo-conforme" intrinsèque, qui est une structure conforme si S est fortement convexe[22]. Cette structure est même projectivement invariante. En effet, on définit facilement l'orthogonalité en termes d'intersection de deux hyperplans tangents en des points "infiniment voisins".

La symétrie de $Dg(p)$ pour $II_p = D^2\psi(p)$ se déduit de la relation

$$d\psi(p).Dg(p) = 0$$

, qui donne, une fois dérivée, l'égalité de formes bilinéaires sur T_pS

$$D^2\psi(p).Dg(p) = -d\psi(p).D^2g(p)\ .$$

La seconde étant évidemment symétrique, on a le résultat annoncé.

La "symétrisation" d'un système (A.1) muni d'une entropie non-dégénérée E, c'est-à-dire le passage au dual par le changement de variable $q = dE(u)$, a aussi une interprétation très naturelle dans ce cadre : il s'agit d'appliquer à S la "transformation par polaires réciproques", i.e. de considérer l'hypersurface duale $S^* \subset (\mathbf{R}P^{n+1})^*$, ensemble des hyperplans *affines* tangents à S [A2, p.32]. En effet, S étant le graphe de E, l'hyperplan affine Π tangent à S au point $p_0 = (u_0, E(u_0))$ a pour équation

$$z = \langle q_0, u\rangle - E^*(q_0) \qquad \text{pour } q_0 = dE(u_0)\ .$$

L'hyperplan affine Π' tangent à S' au point $g(p_0)$ est par hypothèse parallèle à Π, donc de la forme

$$z = \langle q_0, u\rangle - H(q_0) \tag{A.2}$$

pour une fonction H convenable sur $(\mathbf{R}^n)^*$ [23]. On voit ainsi que S^* et S'^* sont simplement les *graphes* des fonctions E^* et H, si on donne à l'hyperplan $z = \langle q, u\rangle - s$ les coordonnées "naturelles" $(q, s) \in (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}$. On retrouve alors S' comme enveloppe de ses plans tangents, i.e. en dérivant (A.2) par rapport à q_0, ce qui donne $u = dH(q_0)$, et donc $g(p_0) = g(u_0, E(u_0)) = (dH(q_0), \langle q_0, dH(q_0)\rangle - H(q_0))$. Les formules reliant l'écriture (A.1) du système à son écriture "symétrique"

$$\partial_t(dE^*(q)) + \partial_x(dH(q)) = 0$$

[22]En fait [Bla, Sp, Di-V, No-Pi], on peut définir sur toute hypersurface "non-dégénérée" d'un espace affine une métrique pseudo-riemannienne, unique à un facteur *constant* près, et invariante par les transformations affines unimodulaires (i.e. préservant le volume)

[23]Ces équations sont classiquement appelées "équations tangentielles" de S'

en découlent immédiatement :

$$\begin{aligned} f(u) &= dH(dE(u)) \\ F(u) &= \langle dE(u), f(u)\rangle - H(dE(u)). \end{aligned}$$

Le théorème 5 du chapitre II possède dans ce cadre l'interprétation suivante (dans le cas $m = 1$) : si pour un des champs de directions propres Δ_k la valeur propre correspondante λ_k est constante le long des courbes intégrales C_k dudit champ, alors les images $C_k^* \subset S^*$ sont les intersections de S^* avec des 2-plans de $(\mathbf{R}P^{n+1})^*$. L'énoncé dual (équivalent) est : les hyperplans tangents à S le long d'une courbe C_k passent par un même sous-espace de dimension $n-2$ (éventuellement à l'infini). Bien sûr, le cas d'une valeur propre de multiplicité $m \geq 2$ est identique (en remplaçant 2 par $m+1$), l'intégrabilité du champ des sous-espaces propres faisant alors partie de la conclusion.

On peut aussi envisager la généralisation à des sous-variétés S de codimension $p > 1$ dans l'espace affine $\mathbf{R}^{n+p}$, ce qui correspond aux systèmes (A.1) possédant p entropies non-affines lorsque S est un graphe dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$.

En fait, on peut associer *canoniquement* à un système de n lois de conservation muni de p entropies supplémentaires une sous-variété de dimension n dans un espace affine de dimension $n+p$: si $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel des entropies du système envisagé, on considère l'application (définie sur l'espace des états U)

$$\begin{aligned} \kappa : U &\longrightarrow \mathcal{E}^* \\ u &\mapsto \delta_u = (e \mapsto e(u)) . \end{aligned} \tag{A.3}$$

Il est clair que l'image $\kappa(U)$ est contenue dans le sous-espace affine des $e^* \in \mathcal{E}^*$ prenant la valeur 1 sur l'entropie constante 1 (lui-même canoniquement plongé dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E}^*)$). Si on choisit une base

$$(1, u_1, \ldots, u_n, E_1, \ldots, E_p)$$

de $\mathcal{E}$, et la base duale dans $\mathcal{E}^*$, le point $\kappa(u)$ a (trivialement!) pour coordonnées $(1, u_1, \ldots, u_n, E_1(u), \ldots, E_p(u))$, i.e. on retrouve le cadre décrit plus haut. La dualité mentionnée plus haut fonctionne aussi dans ce cadre lorsque $p = 1$ ($E_1 = E$) : $\kappa(U)$ est alors une hypersurface de $\mathbf{P}(\mathcal{E}^*)$, dont la duale s'identifie, dans $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, au graphe de la tranformée de Legendre $L = E^*$.

B Changements de variables "Euler-Lagrange"

Suivant par exemple [Gel, p.317] (voir aussi [Ser11, Wa]), on peut introduire, pour tout système de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \tag{B.1}$$

dans $U \subset \mathbf{R}^n$, des changement de variables généralisant celui qui fournit la formulation "lagrangienne" du système de la dynamique des gaz à partir de sa formulation "eulérienne" (voir II.2.1 et II.2.2).

Si $\alpha : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ est affine et telle que

$$\forall u \in U, \alpha(u) > 0$$

on a pour toute solution C^1 $u(x,t)$ de (B.1)

$$\partial_t \alpha(u) + \partial_x \beta(u) = 0$$

avec $\beta(u) = \alpha(f(u)) + \text{const}$, c'est-à-dire aussi

$$d(\alpha(u)dx - \beta(u)dt) = 0$$

sur le graphe de u. Il existe donc une fonction $\xi(x,t)$ (dépendant de la solution u) telle que

$$d\xi = \alpha(u)dx - \beta(u)dt \tag{B.2}$$

et il est clair que $(x,t) \mapsto (\xi, t)$ est un difféomorphisme ($\alpha(u) > 0$).

De (B.2) on peut tirer dx en fonction de $d\xi, dt$, et en reportant dans

$$d(udx - f(u)dt) = 0$$

(qui équivaut à (B.1)) et dans $d(dx) = 0$, il vient

$$d\left[\frac{u}{\alpha(u)}d\xi + \left(\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}u - f(u)\right)dt\right] = 0$$

et

$$d\left(\frac{1}{\alpha(u)}d\xi + \frac{\beta(u)}{\alpha(u)}dt\right) = 0\,.$$

Autrement dit, considérant (abusivement) u comme une fonction de (ξ, t), on a

$$\partial_t\left(\frac{u}{\alpha(u)}\right)+\partial_\xi\left(f(u)-\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}u\right)=0$$

et

$$\partial_t\left(\frac{1}{\alpha(u)}\right)-\partial_\xi\left(\frac{\beta(u)}{\alpha(u)}\right)=0\,.$$

Quitte à faire un changement de variables affine, on peut supposer que $\alpha(u) = u_n$, $\beta(u) = f_n(u)$, et le système transformé s'écrit

$$\partial_t v + \partial_\xi g(v) = 0 \tag{B.3}$$

pour

$$v = (\frac{u_1}{u_n}, \ldots, \frac{u_{n-1}}{u_n}, \frac{1}{u_n})$$

et

$$\begin{aligned} g_i(v) &= f_i(u) - f_n(u)u_i/u_n \qquad (i < n) \\ g_n(v) &= -f_n(u)/u_n\,. \end{aligned}$$

On a donc obtenu, par une transformation "non locale", des solutions $v(\xi, t)$ d'un autre système de lois de conservation, pour lequel les variables conservatives sont $v = \Pi(u)$, Π étant une transformation *projective*.

Ainsi, sur les systèmes de lois de conservation agit naturellement non seulement le groupe affine, mais aussi le groupe projectif (on s'assure facilement que ce dernier est engendré par Π et les transformations affines).

Notons aussi qu'à tout couple entropie-flux (E, F) du système initial (dont les $(u_i, f_i(u))$ sont des exemples) correspond un couple entropie-flux $(\tilde{E}, \tilde{F})$ du système tranformé, avec

$$\tilde{E}(v) = \frac{E(u)}{\alpha(u)} = \frac{E(u)}{u_n}$$

et

$$\tilde{F}(v) = F(u) - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)}E(u) = F(u) - \frac{f_n(u)}{u_n}E(u)\,.$$

(Il suffit d'écrire $d(E(u)dx - F(u)dt) = 0$ et $dx = \ldots$) . La convexité des entropies est aussi préservée, puisque l'épigraphe de $\tilde{E}$ est l'image de celui de E par la transformation projective $(u, z) \mapsto (u_1/u_n, \ldots, u_{n-1}/u_n, 1/u_n, z/u_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (rappelons que $u_n > 0$ dans U).

Il est remarquable (*cf* [Wa]) que la correspondance établie entre les solutions *régulières* des deux systèmes reste valable pour les solutions *faibles entropiques*, du moins celles pour lesquelles $\alpha(u) = u_n$ reste isolé de 0. Le changement de variables $(x,t) \mapsto (\xi,t)$ est alors bi-lipschitzien, ce qui suffit pour pouvoir l'effectuer dans les intégrales dont l'annulation (ou la positivité) définit les solutions faibles entropiques [Wa]. Indiquons-en brièvement une démonstration (essentiellement équivalente à celle de D. Wagner) : $u \in L^\infty(\mathbf{R}^2_{x,t})$ est solution faible entropique si et seulement si pour tout couple entropie-flux convexe (E,F), on a $E_t + F_x \leq 0$ dans $\mathcal{D}'$. Cela signifie aussi que les 1-formes à coefficients L^∞

$$\omega = E(u(x,t))\,dx - F(u(x,t))\,dt$$

vérifient $\int -\varphi\, d\omega \leq 0$ pour toute fonction test $\varphi \in W^{1,1}_{comp}(\mathbf{R}^2)$, $\varphi \geq 0$, c'est-à-dire encore

$$\forall \varphi \geq 0, \qquad \int d\varphi \wedge \omega \leq 0.$$

Or le changement de variables

$$(x,t) = \chi(\xi,t)$$

défini par (B.2) est bilipschitzien si $\alpha(u) \geq a > 0$, de sorte que $\varphi \mapsto \varphi \circ \chi$ est alors un automorphisme de l'espace de Banach $W^{1,1}_{comp}$, qui préserve évidemment le cône positif. De plus, $\chi^*\omega = \widetilde{E}(u)\,d\xi - \widetilde{F}(u)\,dt = \tilde{\omega}$, avec $(\widetilde{E},\widetilde{F})$ couple entropie-flux convexe du système transformé (*cf* ci-dessus), ce qui définit une bijection entre les couples entropie-flux convexes des deux systèmes. Il suffit maintenant de remarquer que pour toute fonction test $\psi \geq 0$, et $\varphi = \psi \circ \chi^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\int d\psi \wedge \tilde{\omega} &= \int d(\varphi \circ \chi) \wedge \tilde{\omega} \\ &= \int \chi^*(d\varphi \wedge \omega) \\ &= \int d\varphi \wedge \omega \leq 0\ ,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarquons que l'on aurait pu choisir dès le début un entropie quelconque (positive dans U) pour α, mais on aurait bien sûr alors perdu la propriété précédente de correspondance des solutions faibles.

Le système transformé (B.3) peut encore être écrit dans les coordonnées (non conservatives!) $u = (u_1, \ldots, u_n)$, sous la forme

$$\partial_t u + u_n \partial_\xi f(u) - f_n(u)\partial_\xi u = \partial_t u + \tilde{A}(u)\partial_\xi u = 0$$

avec $\tilde{A}(u) = u_n Df(u) - f_n(u)I$, et plus généralement $\tilde{A}(u) = \alpha(u)Df(u) - \beta(u)I$. Ses valeurs propres s'expriment donc en fonction de celles (λ_i) du système (B.1) au moyen de

$$\tilde{\lambda}_i(u) = \alpha(u)\lambda_i(u) - \beta(u) = u_n\lambda_i(u) - f_n(u)$$

tandis que les vecteurs propres (r_i) sont inchangés.

Pour terminer, on regroupe dans la proposition suivante une série de propriétés invariantes par ces transformations.

Proposition 1 *Les transformations "Euler-Lagrange" préservent, pour chaque valeur propre* λ_i

- *le caractère LD ou VNL,*
- *l'existence d'un invariant de Riemann,*
- *le caractère BT ("de B.Temple", voir démonstration),*
- *l'hyperbolicité globale (si la valeur propre est LD).*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} r_i\tilde{\lambda}_i &= \alpha(r_i\lambda_i) + (r_i\alpha)\lambda_i - r_i\beta \\ &= \alpha(r_i\lambda_i) \end{aligned}$$

(puisque $d\beta = d\alpha.A$). Donc $r_i\tilde{\lambda}_i = 0$ si et seulement si $r_i\lambda_i = 0$, i.e. $\tilde{\lambda}_i$ est LD ou VNL si et seulement si λ_i l'est.

Les directions propres étant les mêmes pour les deux systèmes, il est évident que $\tilde{\lambda}_i$ possède un invariant de Riemann si et seulement si c'est le cas pour λ_i : dans les deux cas, c'est équivalent à l'intégrabilité du champ d'hyperplans $u \mapsto \ker l^i(u)$ $(l^i.A = \lambda_i l^i)$.

En ce qui concerne le caractère BT, rappelons qu'il s'agit pour la valeur propre λ_i d'avoir un invariant de Riemann w_i dont les hypersurfaces de niveau sont des hyperplans (affines). Autrement dit, $\ker l^i$ est intégrable et définit un feuilletage par hyperplans.

L'équivalence du caractère BT pour λ_i et $\tilde{\lambda}_i$ résulte alors du fait qu'une transformation projective (telle que Π) envoie hyperplans sur hyperplans (éventuellement à l'infini).

Venons-en enfin à l'hyperbolicité globale. On a déjà vu que λ_i est LD si et seulement si $\tilde{\lambda}_i$ l'est. Les systèmes (B.1) et (B.3) ayant mêmes directions propres, ils ont aussi même feuilletage de contact $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\lambda_i}$. L'hyperbolicité globale du second (pour $\tilde{\lambda}_i$) équivaut à

$$\widetilde{\mathcal{M}}_u(C) \subset GL(N_u) \qquad (u \in C)$$

pour toute feuille C de $\mathcal{C}$, où (*cf* III.2.1) $\widetilde{\mathcal{M}}_u(C)$ est l'enveloppe convexe des

$$\tilde{Y}_u(u') = \sigma_{u'}^{u}[\tilde{B}(u') - \tilde{\lambda}_i(u')]^{-1}\sigma_u^{u'} \in \mathrm{End}(N_u)$$

pour $u' \in C$, et $\tilde{B}(u)$ désigne la restriction de $\tilde{A}(u)$ à N_u . En particulier,

$$\tilde{B}(u) = \alpha(u)B(u) - \beta(u)I \ ,$$

de sorte que

$$[\tilde{B}(u) - \tilde{\lambda}_i(u)]^{-1} = \frac{1}{\alpha(u)}[B(u) - \lambda_i(u)]^{-1} \; .$$

On en déduit que (B.3) est globalement hyperbolique (pour $\tilde{\lambda}_i$) si et seulement si (B.1) l'est (pour λ_i), grâce aux deux remarques évidentes suivantes :

- $\mathbf{R}_+.(GL \cap \mathrm{Diag}_{\mathbf{R}}) = (GL \cap \mathrm{Diag}_{\mathbf{R}})$.

- Pour toute partie X d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, on a l'égalité

$$\mathrm{Conv}(\mathbf{R}_+.X) = \mathbf{R}_+.\mathrm{Conv}(X).$$

La proposition est démontrée. ∎

Signalons aussi que les transformations considérées préservent la validité d'une conjecture de D.Serre en rapport avec la compacité par compensation, et qui précise la structure des oscillations dans les systèmes riches (voir [Ser3, Ser11]).

Enfin, cette interprétation géométrique des transformations "Euler-Lagrange", jointe à celle des systèmes hyperboliques (munis d'une entropie non-dégénérée) comme "transformations par plans tangents parallèles" (TPP) entre hypersurfaces de l'espace affine (appendice A), permet d'éclairer certains résultats et calculs de [Fel].

En effet, on peut voir une TPP $g : S \to S'$ (notations de l'appendice A) comme l'inverse d'une "application de Gauss généralisée" pour l'hypersurface S'. Cette dernière associe à tout point de S' (la direction de) l'hyperplan tangent à S' en ce point; à ce dernier on associe alors le point de S où l'hyperplan tangent a même direction (en supposant $p \mapsto T_pS$ injective). Le cas classique est celui où S est une sphère de rayon 1 : à tout point de S' est associé le vecteur normal unitaire en ce point (pour se conformer strictement au cadre précédent, il faudrait prendre pour S une *demi*-sphère, ou fixer des orientations... on ne rentrera pas dans ces considérations ici).

Les systèmes considérés dans [Fel] sont hamiltoniens, i.e. possèdent une entropie quadratique Q (non-dégénérée). Le graphe $S = \{z = Q(u)\}$ de celle-ci est une quadrique "parabolique", i.e. tangente à l'hyperplan à l'infini (au point à l'infini sur l'axe z). Par une transformation Euler-Lagrange convenable (par exemple avec $\alpha = \pm Q + c$, $c \neq 0$), et éventuellement en se restreignant à un ouvert où $\alpha > 0$ (si Q est indéfinie), on arrive à un système de lois de conservation, associé à une TPP $\tilde{g} : \widetilde{S} \to \widetilde{S}'$, pour lequel $\widetilde{S}$ est une quadrique *non-parabolique*. Pour fixer les idées, supposons Q définie positive et $\alpha = Q + c$, $c > 0$; alors $\widetilde{S}$ est un ellipsoïde, et pour la métrique euclidienne correspondante sur $\mathbf{R}^{n+1}$ (celle qui fait de $\widetilde{S}$ une sphère de rayon 1), $\tilde{g}$ est bien l'inverse de l'application de Gauss classique de l'hypersurface $\widetilde{S} \subset \mathbf{R}^{n+1}_{\mathrm{eucl}}$ (la généralisation au cas pseudo-euclidien est évidente).

L'apparition dans [Fel] de métriques (riemanniennes) à courbure constante est alors naturelle : la géométrie affine de l'espace ambiant induit sur une quadrique (paraboloïde, ellipsoïde, hyperboloïde,...) une métrique à courbure *constante* (*cf* [Bla, Sp, Di-V, No-Pi]).

C Feuilletages admissibles.

L'objet de cet appendice est l'étude des feuilletages "admissibles", au sens de la

Définition 1 *Un feuilletage $\mathcal{F}$ par L-sphères ($L = E^*$) de dimension $m \leq n-2$ dans $U^* \subset (\mathbf{R}^n)^*$ sera dit* admissible *s'il est feuilletage de contact "dual" $\mathcal{F} = \mathcal{C}^* = dE(\mathcal{C})$ associé à une valeur propre LD d'un système hyperbolique admettant E pour entropie.*

On commence par dégager des conditions *locales* (en fait différentielles) sur $\mathcal{F}$ pour qu'il soit admissible. Comme conséquence, un feuilletage par L-sphères de codimension > 1 est génériquement non-admissible. On donnera aussi des exemples de feuilletages "bi-admissibles" (i.e. portant plusieurs systèmes), ainsi qu'une propriété d'invariance de l'admissibilité par le groupe des transformations conformes associé à l'entropie E lorsque celle-ci est quadratique.

Conditions d'admissibilité

On a vu dans le chapitre II (thm 5, prop 6) que les feuilletages de contact $\mathcal{C}$ des systèmes hyperboliques vérifiant les "hypothèses standard" (A),(B) sont tous ceux qui proviennent d'une immersion $j : \Sigma \longrightarrow \mathcal{E}^*$. Chaque feuille de $\mathcal{C}^* = dE(\mathcal{C})$ est alors une composante connexe de l'ensemble $Z(\mathcal{V}_s)$ des zéros communs aux éléments de $\mathcal{V}_s = \mathrm{im}\, Dj(s) \subset \mathcal{E}^*$.

Rappelons que $\mathcal{E}^*$ est l'espace des fonctions sur $U^* \subset (\mathbf{R}^n)^*$ engendré par $L = E^*$ et par les fonctions affines, E étant une entropie non-dégénérée fixée du système envisagé.

Considérons maintenant un feuilletage $\mathcal{F}$ par L-sphères de dimension m, donné par une application

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{n-m}(\mathcal{E}^*) \\ s & \mapsto & \mathcal{V}_s \end{array} \tag{C.1}$$

où $\dim \Sigma = n-m$ et $\mathrm{Gr}_{n-m}(\mathcal{E}^*)$ désigne la variété des sous-espaces vectoriels de dimension $n-m$ dans $\mathcal{E}^* \cong \mathbf{R}^{n+2}$. Puisqu'on travaille localement (disons, au voisinage d'une feuille), on peut supposer que Σ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^{n-m}$. On identifie $\mathcal{E}^*$ à $\mathbf{R}^{n+2}$ par choix d'une base, et enfin (pour simplifier) on suppose les $Z(\mathcal{V}_s)$, ($s \in \Sigma$) connexes. Ce sont donc les feuilles de Σ.

Ces données sont soumises à la condition de "régularité" habituelle :

$$\left.\begin{array}{ccc} q & \in & Z(\mathcal{V}_s) \\ \varphi & \in & \mathcal{V}_s - \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow d\varphi(q) \neq 0\,. \tag{C.2}$$

Ceci signifie simplement qu'une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m})$ de $\mathcal{V}_s$ est un système d'équations régulières indépendantes pour la feuille

$$F_s = Z(\mathcal{V}_s) = \{q \in U^* \mid \varphi_1(q) = \ldots \varphi_{n-m}(q) = 0\} .$$

Notons que le fait de définir un feuilletage impose à $s \mapsto \mathcal{V}_s$ des conditions (ouvertes) : la projection $(q, s) \mapsto q$ de $\mathcal{G} = \{(q, s) \in U^* \times \Sigma \mid q \in Z(\mathcal{V}_s)\}$ dans U^* doit être un difféomorphisme (tout point $q \in U^*$ appartient à une unique feuille F_s, qui dépend différentiablement de q).

Pour que $\mathcal{F}$ soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe une immersion

$$j : \Sigma \longrightarrow \mathcal{E}^*$$

telle que pour tout s, $\mathcal{V}_s = \operatorname{im} Dj(s)$ (*cf* chap II,prop 6; $s \mapsto \mathcal{V}_s$ est "l'application de Gauss" de j).

Posons $p = n - m$, $q = m + 2$, de sorte que $\mathcal{E}^* \cong \mathbf{R}^{p+q}$. Par choix d'une base convenable de $\mathcal{E}^*$, et quitte à restreindre Σ, on est alors ramené à la situation suivante :

$$\forall s \in \Sigma, \mathcal{V}_s = \operatorname{im} \begin{pmatrix} I_p \\ C(s) \end{pmatrix} \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \tag{C.3}$$

pour une application $s \in \Sigma \mapsto C(s) \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ (avec par exemple $C(0) = 0$).

La recherche de j telle que $\mathcal{V}_s = \operatorname{im} Dj(s)$, sous la forme

$$j(s) = (a(s), b(s)) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$$

, équivaut alors à la résolution du système différentiel linéaire en (a, b)

$$Db(s) = C(s)\, Da(s) \tag{C.4}$$

avec la contrainte supplémentaire

$$Da(s) \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^p), \qquad s \in \Sigma . \tag{C.5}$$

Il suffit par exemple d'imposer $Da(0) = I_p$ (ce qui n'est pas restrictif), pour que (C.5) soit vérifiée au voisinage de $s = 0$.

Il s'agit d'un système de pq équations pour les $p + q$ fonctions inconnues (a, b). Il est donc en général surdéterminé dès que $pq > p + q$, i.e.

$$(p - 1)(q - 1) \geq 2$$

(ce qui n'exclut que les cas $p = 1$, $q = 1$, $p = q = 2$). Dans la situation présente $q = m + 2 \geq 3$, de sorte que le seul cas où (C.4) n'est pas surdéterminé est le cas $p = 1$, i.e. $m = n - 1$, dont on a déjà vu qu'il est "trivial" : $\mathcal{F}$ est toujours admissible (*cf* II.2.7).

Notons $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$, et $a = (a_1, \ldots, a_p)$. Alors (C.4) s'écrit

$$db_i = \sum_{j=1}^{p} c_{ij}\, da_j, \qquad 1 \leq i \leq q$$

et on a immédiatement le

Lemme 2 *Le système (C.4),(C.5) admet une solution si et seulement si il existe un p-uplet de fonctions* $(a_1, \dots, a_p)$ *vérifiant* $da_1 \wedge \dots \wedge da_p \neq 0$ *et*

$$\sum_{j=1}^{p} dc_{ij} \wedge da_j = 0, \qquad 1 \leq i \leq q\,. \tag{C.6}$$

En particulier, pour que $\mathcal{F}$ *soit admissible, il est nécessaire que pour tout* $s \in \Sigma$, *l'application linéaire*

$$\begin{array}{cccc} \Psi_s : & ((\mathbf{R}^p)^*)^p \cong \mathbf{R}^{p^2} & \longrightarrow & (\bigwedge^2(\mathbf{R}^p)^*)^q \cong \mathbf{R}^{qp(p-1)/2} \\ & (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \mapsto & \left(\sum_{j=1}^p dc_{ij} \wedge \alpha_j\right)_{1 \leq i \leq q} \end{array} \tag{C.7}$$

soit non-injective (i.e. de rang $< p^2$*) et admette dans son noyau un p-uplet* $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ *de formes linéaires indépendantes sur* $\mathbf{R}^p$ $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \neq 0)$. ■

Si $p^2 \leq qp(p-1)/2$, c'est-à-dire si

$$(p-1)(q-2) \geq 2,$$

on peut s'attendre à ce que Ψ_s soit *injective* pour des valeurs génériques des $dc_{ij}(s)$. Pour montrer que c'est bien le cas, il suffit d'exhiber *un* exemple de tels $dc_{ij}(s)$, puisque la condition rg $\Psi_s < p^2$ est algébrique en les $dc_{ij}(s)$.

Lemme 3 *Si* $(p-1)(q-2) \geq 2$, *il existe pq formes linéaires* σ_{ij} $(1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p)$ *sur* $\mathbf{R}^p$ *telles que*

$$\Psi : (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij} \wedge \alpha_j\right)_{1 \leq i \leq q}$$

soit injective.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on a $q \geq 3$, $p \geq 2$, et que si $p \leq 3$ il suffit d'envisager le cas $q = 3$ (en prenant sinon $\sigma_{ij} = 0$ pour $i = 3, \dots, q$). Pour $p = 2$ on peut se restreindre à $q = 4$.

On cherchera des σ_{ij} vérifiant en plus les conditions

$$\sigma_{i1} \wedge \dots \wedge \sigma_{ip} \neq 0, 1 \leq i \leq q,$$

de sorte que pour chaque i, les p 1-formes $\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ip}$ constituent une base de $(\mathbf{R}^p)^*$. D'après le "lemme de Cartan"

$$\sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij} \wedge \alpha_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = \sum_{k=1}^{p} s_{ijk}\, \sigma_{ik}$$

pour des s_{ijk} symétriques en j,k, de sorte que le noyau de Ψ s'identifie à un espace de q-uplets $(S_1,\dots,S_q)$ de matrices symétriques, $S_i = (s_{ijk})_{j,k}$.

Plus précisément, définissons des matrices $P_2,\dots,P_q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ par

$$\sigma_{1j} = \sum_k (P_i)_{jk}\,\sigma_{ik}, \qquad j=1,\dots,p,\ i=2,\dots,q.$$

On voit alors que $\ker\Psi$ correspond aux $(S_1,\dots,S_q)$ qui vérifient

$$S_i = S_1 P_i,\ \ i=2,\dots,q\,.$$

Il suffit maintenant pour démontrer le lemme de trouver $P_2,\dots,P_q \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ telles que l'espace vectoriel des matrices $S = S_1$ vérifiant "$S, SP_2,\dots,SP_q$ sont symétriques" soit réduit à zéro. On peut même se contenter de P_i non-inversibles, puisque l'ensemble des $(P_2,\dots,P_q)$ ne vérifiant pas la condition ci-dessus est algébrique dans $(\mathrm{M}_p(\mathbf{R}))^{q-1}$.

On choisit, pour des réels *distincts* $a_1,\dots,a_p$

$$P_2 = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_p)\,.$$

Une matrice S telle que S, SP_2 soient symétriques est alors *diagonale*.

— Dans le cas où $p \geq 3$, il n'existe pas, pour une matrice "générale" $P_3 \in \mathrm{M}_p(\mathbf{R})$, de réels $s_{11},\dots,s_{pp}$ non tous nuls tels que

$$\forall i \neq j,\ \ s_{ii}(P_3)_{ij} = s_{jj}(P_3)_{ji}\,.$$

— Dans le cas $p=2$, l'affirmation précédente tombe en défaut, mais comme dans ce cas $q \geq 4$, le résultat vient de ce qu'on ne peut en général (pour $P_3, P_4 \in \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$) satisfaire

$$s_{11}(P_3)_{12} = s_{22}(P_3)_{21},\ \ s_{11}(P_4)_{12} = s_{22}(P_4)_{21}$$

autrement que par $s_{11} = s_{22} = 0$. ■

Comme $p = n-m$ est supposé ≥ 2 et $q = m+2 \geq 3$, on en déduit :

Théorème 4 *Mis à part le cas $m=1, n=3$, et le cas "trivial" $m=n-1$, l'admissibilité d'un feuilletage défini par $s \mapsto \mathcal{V}_s$ impose au 1-jet de cette application une condition non-triviale. En particulier (sous ces conditions de dimension), un feuilletage générique par L-sphères n'est pas admissible.* ■

Comme on va le voir, la "non-admissibilité générique" vaut encore dans le cas $m=1, n=3$, mais la condition porte cette fois sur le *3-jet* de $s \mapsto \mathcal{V}_s$ (il est d'ailleurs étonnant que le premier cas non-trivial du point de vue des dimensions soit en ce sens "exceptionnel").

Si $m = 1, n = 3$, on a $p = 2$, $q = 3$, et les applications linéaires Ψ_s données par (C.7) vont de $((\mathbf{R}^2)^*)^2 \cong \mathbf{R}^4$ dans $(\bigwedge^2(\mathbf{R}^2)^*)^3 \cong \mathbf{R}^3$. Si $s \mapsto C(s)$ est générique, rg $\Psi_s = 3$ sur un ouvert dense de $s \in \Sigma$, dont on peut supposer qu'il contient 0.

Alors pour s voisin de 0, $\ker \Psi_s$ est engendré par $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ dépendant différentiablement de s. On peut en effet choisir

$$\alpha_i(s) = \sum_{j=1,2} \alpha_{ij}(s)\, ds_j, \quad i = 1, 2,$$

avec pour coefficients α_{ij} les mineurs 3×3 (affectés de signes convenables) de la matrice 3×4

$$\left[\frac{\partial C}{\partial s_1} \middle| \frac{\partial C}{\partial s_2} \right] . \tag{C.8}$$

Il est clair que l'on a génériquement $\alpha_1(s) \wedge \alpha_2(s) \neq 0$ au voisinage de 0. Pour tirer de (C.6) une condition de compatibilité, on remarque que l'on cherche $(da_1(s), da_2(s)) \in \ker \Psi_s$ (avec $da_1 \wedge da_2 \neq 0$). Autrement dit, on cherche un "facteur intégrant" φ *commun* aux deux formes indépendantes α_1, α_2 :

$$d(\varphi\, \alpha_1) = d(\varphi\, \alpha_2) = 0 \qquad (\varphi \neq 0) .$$

Lemme 5 *Pour que deux 1-formes indépendantes α_1, α_2 définies au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$ admettent un facteur intégrant commun $\varphi \neq 0$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$d(\psi_1 \alpha_2 - \psi_2 \alpha_1) = 0,$$

avec $\psi_i = d\alpha_i / (\alpha_1 \wedge \alpha_2)$. C'est une condition sur les jets d'ordre 2 de α_1, α_2.

Démonstration. Posant $\varphi = \exp(\chi)$, le problème devient

$$d\chi \wedge \alpha_i + d\alpha_i = 0 \;\; (i = 1, 2) .$$

Définissant ψ_1, ψ_2 par $d\alpha_i = \psi_i\, \alpha_1 \wedge \alpha_2$, on obtient le système

$$(d\chi - \psi_1 \alpha_2) \wedge \alpha_1 = (d\chi + \psi_2 \alpha_1) \wedge \alpha_2 = 0 ,$$

d'où nécessairement $d\chi = \psi_1 \alpha_2 - \psi_2 \alpha_1$; cette dernière équation admet (localement) une solution si et seulement si $d(\psi_1 \alpha_2 - \psi_2 \alpha_1) = 0$, d'où l'énoncé. ∎

Puisque les 1-formes $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$ s'expriment algébriquement en fonction des $\partial c_{ij} / \partial s_k$, on a obtenu une condition nécessaire d'admissibilité de $\mathcal{F}$ portant sur le 3-jet de $s \mapsto C(s)$, ou encore de $s \mapsto \mathcal{V}_s$. Il reste à s'assurer que cette condition n'est pas $0 = 0$ ...

Lemme 6 *La condition de compatibilité obtenue est non-triviale.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'on peut choisir $C(s) = C(s_1, s_2)$ de telle sorte que

$$\alpha_1 = ds_1, \qquad \alpha_2 = \exp(f(s))\, ds_2$$

f étant une fonction arbitraire. En effet, supposant ce fait acquis, un facteur intégrant commun $\exp(\chi(s))$ de α_1, α_2 est nécessairement tel que $\chi = \chi(s_1)$. Alors $d(\exp(\chi + f)ds_2) = 0$ entraîne $\partial^2 f/\partial s_1 \partial s_2 = 0$, donc il suffit de prendre $f = s_1 s_2$ pour que α_1, α_2 n'aient pas de facteur intégrant commun.

Montrons maintenant qu'il existe une matrice 3×2 $C(s) = (c_{ij}(s))_{i,j}$ correspondant à α_1, α_2. Pour deux fonctions $c_1(s), c_2(s)$, on a

$$dc_1 \wedge \alpha_1 + dc_2 \wedge \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial c_1}{\partial s_2} = \exp(f) \frac{\partial c_2}{\partial s_1} \, .$$

On choisit alors trois solutions (c_{i1}, c_{i2}), $i = 1, 2, 3$, vérifiant par exemple

$$\begin{array}{ll} \partial c_{11}(0)/\partial s_1 = 0 & dc_{12}(0) = ds_1 \\ \partial c_{21}(0)/\partial s_1 = 0 & dc_{22}(0) = ds_2 \\ \partial c_{31}(0)/\partial s_1 = 1 & dc_{32}(0) = 0 \end{array}$$

de sorte que la matrice (C.8), ainsi que Ψ_s, sont de rang 3 pour s voisin de 0. Donc $\dim \ker \Psi_s = 1$, et par construction $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ est dans $\ker \Psi_s$, ce qui termine la démonstration. ∎

En conclusion :

Théorème 7 *Un feuilletage générique par L-"cercles" (L-sphères de dimension 1) dans* $\mathbf{R}^3$ *n'est pas admissible. Plus précisément, dans l'ouvert* $\{s \in \Sigma \mid rg\, \Psi_s = 3\}$, *le 3-jet de* $C(s)$ *doit satisfaire une condition algébrique non-triviale (si cet ouvert est vide, c'est bien sûr le 1-jet qui vérifie une condition non-triviale).* ∎

On tire facilement de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité dans le cas $m = 1, n = 3$. Dans les cas relevant du théorème 4, la condition obtenue sur le 1-jet n'est par contre pas suffisante. Il faut lui adjoindre des conditions sur le 3-jet, exprimant là aussi l'existence d'un facteur intégrant commun aux p 1-formes obtenues "algébriquement".

Feuilletages "bi-admissibles"

Particulièrement intéressants sont les exemples où $\mathcal{F}$ "porte" *plusieurs* systèmes distincts, c'est-à-dire où

$$\mathcal{V}_s = \operatorname{im} Dj_1(s) = \operatorname{im} Dj_2(s)$$

avec $Dj_1(s)$, $Dj_2(s)$ linéairement indépendants pour tout s.

C'est par exemple généralement le cas lorsque $m = n - 2$ et les $\mathcal{V}_s$ sont contenus dans un même sous-espace (vectoriel) de dimension 4 de $\mathcal{E}^*$ (situation hautement "non-générique").

En effet, on peut alors remplacer $\mathcal{E}^*$ par $\mathbb{R}^4$ (ou encore, prendre $c_{ij} = 0$ pour $i > 2$), et on se trouve dans le cas (non encore envisagé) $p = 2$, $q = 2$: le système (C.6) est alors "déterminé". C'est un système de deux équations linéaires du premier ordre

$$\begin{aligned} dc_{11} \wedge da_1 + dc_{12} \wedge da_2 &= 0 \\ dc_{21} \wedge da_1 + dc_{22} \wedge da_2 &= 0 \end{aligned} \tag{C.9}$$

pour les deux fonctions inconnues a_1, a_2.

Si (C.9) est elliptique ou (strictement) hyperbolique au voisinage de $s = 0$, il admet "beaucoup" de solutions locales, et en particulier des solutions avec des (da_1, da_2) indépendants. Le feuilletage obtenu est donc bien "bi-admissible". L'ellipticité (resp. hyperbolicité stricte) signifie ici que la forme quadratique

$$\xi \mapsto \det(dc_{ij}(s) \wedge \xi), \quad \xi \in (\mathbb{R}^2)^*$$

est définie (resp. de signature $(1,1)$). Si on réécrit (C.9) sous la forme

$$\frac{\partial C}{\partial s_1}\frac{\partial a}{\partial s_2} - \frac{\partial C}{\partial s_2}\frac{\partial a}{\partial s_1} = 0$$

on a $\det(dc_{ij}(s) \wedge \xi) = \det(\xi_2 \partial C/\partial s_1 - \xi_1 \partial C/\partial s_2)$ pour $\xi = \xi_1\, ds_1 + \xi_2\, ds_2$, et on retrouve le critère usuel.

Exemples

1. Le feuilletage de Hopf dans $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$) correspond à $L(q) = (|q|^2 - 1)/2$ et à $\mathcal{V}_s \subset \mathbb{R}^4 \times 0 \subset \mathbb{R}^5 \cong \mathcal{E}^*$ donné par (C.3) avec

$$C(s) = \begin{pmatrix} s_1 & -s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}\,.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}_s$ est la droite complexe $\{(z,w) \mid w = sz\} \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$.

Considérant $a = (a_1, a_2)$ comme fonction de $\Sigma \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, le système (C.9) est simplement $ds \wedge da(s) = 0$, qui se réduit à l'équation (elliptique) de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{s}} = 0\,.$$

Les systèmes portés par $\mathcal{F}$ correspondent donc aux fonction holomorphes (voir III.3.5 pour plus de détails).

2. Un exemple analogue au précédent, mais où (C.9) est hyperbolique est donné par

$$C(s) = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}^2,$$

puisque le système en question est simplement

$$\frac{\partial a}{\partial s_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial s_1} .$$

Pour $L(q) = (|q|^2 - 1)/2$, on peut vérifier que le feuilletage $\mathcal{F}$ correspondant est un feuilletage par arcs de cercles du complémentaire dans $\mathbf{R}^3$ de la réunion de deux cercles enlacés Z_1, Z_2. Chaque feuille de $\mathcal{F}$ est une composante connexe de l'intersection $(S_1 - Z_1) \cap (S_2 - Z_2)$, où S_1, S_2 sont deux sphères contenant respectivement Z_1, Z_2.

3. D'autres exemples (toujours pour $m = 1, n = 3$) sont fournis par les cas où $\mathcal{V}_s \subset 0 \times \mathbf{R}^4 \subset \mathcal{E}^*$, $0 \times \mathbf{R}^4$ étant le sous-espace des fonctions affines ($L = E^*$ est quelconque). Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont alors des *droites.* En particulier, les systèmes obtenus ont une valeur propre constante, que l'on peut supposer nulle. Ils sont tous de la forme $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ avec $f(u) = dH(dE(u))$, où $H : (\mathbf{R}^3)^* \to \mathbf{R}$ vérifie rg $D^2 H = 2$. ∎

Invariance par le groupe conforme dans le cas où E est quadratique.

Si l'entropie E est quadratique (non-dégénérée), de signature (n_+, n_-), $\mathcal{E}^*$ est naturellement muni d'une forme quadratique de signature $(n_+ + 1, n_- + 1)$ (voir ci-dessous). On suppose $n_- = 0$ pour simplifier, et on note $E^*(q) = L(q) = |q|^2/2$.

Tout élément de $\mathcal{E}^*$ peut s'écrire

$$\varphi(q) = \lambda \, L(q) + (a, q) + b$$

et la forme quadratique en question est donnée par

$$\mathcal{Q}(\varphi) = |a|^2 - 2\lambda \, b$$

(à un facteur d'homogénéisation près, $\mathcal{Q}(\varphi)$ est le carré du rayon de la sphère $\varphi = 0$).

L'espace projectif $P(\mathcal{E}^*)$ s'identifiant à celui des sphères de $\mathbf{R}^n$ (éventuellement imaginaires), le groupe orthogonal $\mathbf{O}(\mathcal{Q})$ agit sur $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\} = S^n$, qui s'identifie en effet à l'ensemble des sphères de rayon nul, i.e. des droites vectorielles $\mathcal{Q}$-isotropes de $\mathcal{E}^*$. Cette action est bien sûr celle du groupe des transformations conformes $\mathrm{Conf}(n) \cong \mathbf{PO}(n + 1, 1)$.

On peut maintenant énoncer

Proposition 8 *La classe des feuilletages admissibles (avec $E(u) = |u|^2/2$) est invariante par le groupe conforme Conf(n).*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ admissible, défini par une immersion $j : \Sigma \to \mathcal{E}^*$, et soit $g \in \mathbf{O}(\mathcal{Q})$. Il suffit de montrer que $g(\mathcal{F})$ est le feuilletage défini par l'immersion $j' = g \circ j$.

Or si $q_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{E}^*$, un calcul immédiat montre que

$$(\varphi, \varphi_0)_Q = -\varphi(q_0)$$

pour $\varphi_0(q) = |q - q_0|^2/2$. On a donc $q_0 \in \varphi^{-1}(0)$ si et seulement si φ, φ_0 sont orthogonaux pour Q. Par conséquent,

$$\begin{array}{cc} & q_0 \in Z(\mathrm{im}\, Dj(s)) \\ \Leftrightarrow & \forall\varphi \in \mathrm{im}\, Dj(s),\ (\varphi, \varphi_0)_Q = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall\varphi \in \mathrm{im}\, Dj(s),\ (g\,\varphi, g\,\varphi_0)_Q = 0 \\ \Leftrightarrow & g\,q_0 \in Z(g(\mathrm{im}\, Dj(s))) = Z(\mathrm{im}\, Dj'(s)), \end{array} \tag{C.10}$$

c.q.f.d. ■

Bien entendu, tout ceci reste valable lorsque E est une forme quadratique indéfinie (seule l'interprétation géométrique est plus compliquée, notamment en ce qui concerne la "compactification" sur laquelle opère naturellement $\mathrm{Conf}(n_+, n_-)$, qui n'est plus une sphère).

L'intérêt de ce résultat réside dans la possibilité de construire des exemples, en appliquant à un système (hamiltonien) de structure assez simple (e.g. invariant par certaines (pseudo-)rotations) une transformation conforme générale.

Bibliographie

[A1] V.I. Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir 1976.

[A2] V.I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir 1978.

[Ba] C. Bardos, *Apparition éventuelle de singularités dans les problèmes d'évolution non linéaires* , séminaire Bourbaki No 555 (1980).

[Bla] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie; II, Affine Differentialgeometrie*, Berlin, J. Springer, 1923, *cf* aussi *Gesammelte Werke*, Band IV (Burau, Chern *et al* editors), Thales, Essen, 1985.

[Bo1] G. Boillat, *Chocs caractéristiques*, C.R.A.S. 274, sér. A, 1018-1021 (1972).

[Bo2] G. Boillat, *Sur l'existence et la recherche d'équations de conservation supplémentaires pour les systèmes hyperboliques*, C.R.A.S. 278, sér. A, 909-912 (1974).

[Bo3] G. Boillat, *Symétrisation des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec densité d'énergie convexe et contraintes*, C.R.A.S. 295, sér. 1, 551-554 (1982).

[B-H] M. Brio, J.K. Hunter, *Rotationnaly invariant hyperbolic waves*, C.P.A.M. 43 (1990), 1037-1053.

[Chk] A.V. Chakmazyan, *Normal connection in the geometry of normalized submanifolds of affine space*, Soviet Math. (Plenum Publ. Corp.), 2131-2140 (1991).

[Co-D] B.D. Coleman, E.H. Dill, Z.Angew.Math.Phys. 22, 691-702 (1971).

[Co-S1] C.C. Conley, J.A. Smoller, *Shock waves as limits of progressive wave solutions of higher order equations*, C.P.A.M. 24, 459-472 (1971), Part II: C.P.A.M. 25, 133-146 (1972).

[Co-S2] C.C. Conley, J.A. Smoller, *On the structure of magnetohydrodynamic shock waves*, C.P.A.M. 27, 367-375 (1974).

[Daf1] C.M. Dafermos, *The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Diff. Eqs 20, 90-114 (1976).

[Daf2] C.M. Dafermos, *Hyperbolic systems of conservation laws*, "Systems of nonlinear partial differential equations", J.Ball (ed.), NATO ASI series C, No. 111, Reidel Publ. Co., 25-70 (1983).

[Daf3] C.M. Dafermos, *Quasilinear hyperbolic systems with involutions*, Arch. Rat. Mech. Anal., 94, 373-389 (1986).

[Daf4] C.M. Dafermos, *Admissible wave fans in nonlinear hyperbolic systems*, Arch. Rat. Mech. Anal., 106:3, 243-260 (1989).

[Daf5] C.M. Dafermos, *Generalized characteristics in hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal., 107:2, 127-157 (1989).

[Dar1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Partie IV*, Gauthier-Villars 1946.

[Dar2] G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars 1910.

[Di-V] F. Dillen, L. Vrancken, *Affine differential geometry of hypersurfaces*, Geometry and Topology of Submanifolds II, Avignon 1988 (World Scientific 1990), 144-164.

[DiP1] R.J. DiPerna, *Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations*, C.P.A.M. 26, 1-28 (1973).

[DiP2] R.J. DiPerna, *Existence in the large for quasilinear hyperbolic conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 52, 244-257 (1973).

[DiP3] R.J. DiPerna, *Decay of solutions of hyperbolic systems of conservation laws with a convex extension*, Arch. Rat. Mech. Anal. 64, 1-46 (1977).

[DiP4] R.J. DiPerna, *Uniqueness of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Indiana Univ. Math. J. 28, 137-188 (1979).

[DiP5] R.J. DiPerna, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82, 27-70 (1983).

[DiP6] R.J. DiPerna, *Measure-valued solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 88, 223-270 (1985).

[DiP-M] R.J. DiPerna, A. Majda, *The validity of geometrical optics for weak solutions of conservation laws*, Comm. Math. Phys. 98, 313-347 (1985)

[Du-N1] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, *Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory*, Russian Math. Surveys 44:6, 35-124 (1989).

[Du-N2] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, *Hamiltonian formalism of one-dimensional systems of hydrodynamic type and the Bogolyubov-Whitham averaging method*, Soviet Math. Dokl. Vol 27, no3, 665-669 (1983).

[Dy] V.F. D'Yacenko, *Cauchy's problem for quasilinear sytems*, Sov. Math. Dokl. 2, 7-8 (1961).

[Fe1] E.V. Ferapontov, *Hamiltonian systems of hydrodynamic type and their realization on hypersurfaces of a pseudo-euclidean space*, Journal of Sov. Math., p. 1970-1995, Plenum (1991).

[Fe2] E.V. Ferapontov, *Integration of weakly nonlinear hydrodynamic systems in Riemann invariants*, Physics Letters A, p. 112-118, (1991).

[Fe-P] E.V. Ferapontov, M.V. Pavlov, *Quasiclassical limit of coupled KdV equations. Riemann invariants and multihamiltonian structure.* Physica D, 52, (1991) 211-219.

[Fi-G] P.C. Fife, X. Geng, *Mathematical aspects of electrophoresis*, Proc. Heriot-Watt 1988:Reaction-Diffusion Equations, Oxford Univ. Press.

[Fre1] H. Freistühler, *Anomale Schocks, strukturell labile Lösungen und die Geometrie der Rankine-Hugoniot Bedingungen*, Thèse, Ruhr-Universität Bochum (1987).

[Fre2] H. Freistühler, *On compact linear degeneracy*, IMA preprint 551, University of Minnesota, (1989).

[Fre3] H. Freistühler, *Rotationnal degeneracy of hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 113, 1991, 39-64.

[Fri] K.O. Friedrichs, *On the laws of relativistic electro-magneto-fluid dynamics*, C.P.A.M. 27, 749-808 (1974).

[Fri-L] K.O. Friedrichs, P.D.Lax, *Systems of conservation equations with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 68, 1686-1688 (1971).

[F-R-S] S. Friedland, J.W. Robbin, J.H. Sylvester, *On the crossing rule*, C.P.A.M. 37, 19-37 (1984).

[Ga] C.S. Gardner , *Korteweg-de Vries equation and generalizations. IV: the Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system*, J. Math. Phys 12 (1971), 1548-1551.

[Gel] I.M. Gel'fand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, A.M.S. Trans. Ser. 2, No 29, 295-381 (1963).

[Ger] P. Germain, *Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides*, ONERA Publ. No 97, Paris 1959.

[Gl] J. Glimm, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, C.P.A.M. 18, 697-715 (1965).

[Gl-L] J. Glimm, P.D. Lax, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Mem. A.M.S. No 101, Providence 1970.

[Go1] S.K. Godunov, *On the concept of generalized solution*, Sov. Math. Dokl. 1, 1194-1196 (1960).

[Go2] S.K. Godunov, *On non-unique "blurring" of discontinuities in solutions of quasilinear systems*, Sov. Math. Dokl. 2, 43-44 (1961).

[Go3] S.K. Godunov, *An interesting class of quasilinear systems*, Sov. Math. Dokl. 2, 947-949 (1961).

[Go4] S.K. Godunov, *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques*, Proc.1986 Nonlinear Hyperbolic Problems XV, p. 135-149, C.Carasso, P.A.Raviart, D.Serre eds., Lect. Notes Math. 1270, Springer-Verlag 1987.

[Gue] O. Guès, *Problèmes mixtes hyperboliques quasilinéaires caractéristiques*, Thèse, Université de Rennes-1,(1989).

[Gui-St] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, 1984.

[Ha-L-vL] A. Harten, P.D. Lax, B. Van Leer, *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, SIAM Review, 25, 1, 35- (1983).

[Hb1] A. Heibig, *Etude variationnelle du problème de Riemann*, Thèse, Lyon 1989.

[Hb2] A. Heibig, *Régularité des solutions du problème de Riemann*, Comm. in P.D.E., 15, 5, 693-709 (1990).

[Hb3] A. Heibig, *Existence et unicité des solutions pour certains systèmes de lois de conservation*, Prepubl. ENS-Lyon no 32, (1990) (à paraître dans Arch. Rat. Mech. Anal.).

[Hb4] A. Heibig, *Error estimates for oscillating solutions to hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. in P.D.E., 18, 2, 281-304 (1993).

[Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Acad. Press, New York, 1978.

[H-M-R] J.K. Hunter, A. Majda, R. Rosales, *Resonantly interacting weakly nonlinear waves. II. Several space variables*, Stud. Appl. Math. 75, 187-226 (1986).

[Je] A. Jeffrey, *Quasilinear hyperbolic systems and waves*, Pitman,London 1976.

[Jn] F. John, *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, C.P.A.M., Vol 27, 377-405 (1974).

[Jo-M-R1] J.L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, *Rigorous resonant 1-d nonlinear geometric optics*, Journées EDP, St-Jean de Monts, 1990.

[Jo-M-R2] J.L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, *Formal and rigorous nonlinear high frequency waves*, Proc. Nonlin. Hyp. Eq., Como 1990, Pitman. (à paraître)

[Jou] E. Jouguet, *Sur la propagation des discontinuités dans les fluides*, C.R.A.S. 132, 673-676 (1901).

[K-K1] B.L. Keyfitz, H.C. Kranzer, *The Riemann problem for some nonstrictly hyperbolic systems of conservation laws*, Notices AMS, 23 (1976), A-127-128.

[K-K2] B.L. Keyfitz, H.C. Kranzer, *Existence and uniqueness of entropy solutions to the Riemann problem for hyperbolic systems of two nonlinear conservation laws*, J. Diff. Equ., 27 (1978), 444-476.

[K-K3] B.L. Keyfitz, H.C. Kranzer, *A system of non-stictly hyperbolic conservation laws arising in elasticity theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., 72 (1980) 219-241.

[K-N] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry I,II*, Wiley Interscience, New York, 1963,1969.

[Kru] S.N. Kružkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. 10, 217-242 (1970).

[K-T] N.N. Kuznetsov, V.A. Tupshiev, *A certain generalization of a theorem of Glimm*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 221, 287-290 (1975).

[Law] H.B. Lawson Jr, *The quantitative theory of foliations*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. in Math. No 27, AMS, Providence, 1977.

[Lax1] P.D. Lax, *The initial value problem for nonlinear hyperbolic equation in two independent variables*, Ann. of Math. Studies 33, Princeton, 211-229 (1954).

[Lax2] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws:II*, CPAM Vol 10, 537-566 (1957).

[Lax3] P.D. Lax, *Shock waves and entropy*, Contributions to nonlinear functional analysis, Zarantonello ed., p. 603-634, NY Academic Press, 1971.

[Lax4] P.D. Lax, *The formation and decay of shock waves*, Amer. Math. Monthly 79, 227-241 (1972).

[Lax5] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. in Appl. Math. no 11 SIAM (1973).

[Lax6] P.D. Lax, *The multiplicity of eigenvalues*, B.A.M.S. Vol 6 No 2, 213-214 (1982).

[Lax-Lv] P.D. Lax, C.D. Levermore, *The small dispersion limit for the KdV equation I, II & III*, C.P.A.M. 36 (1983), 253-290, 571-593, 809-830

[Lev] C.D. Levermore, *The hyperbolic nature of the zero dispersion KdV limit*, Comm. Part. Diff. Equ., 13 (1988), 495-514.

[Li1] T.-P. Liu, *Existence and uniqueness for Riemann problems*, Trans. A.M.S., 212, 375-382 (1975).

[Li2] T.-P. Liu, *The Riemann problem for general systems of conservation laws*, J. Diff. Eqs.,18, 218-234 (1975).

[Li3] T.-P. Liu, *Solutions in the large for the equations of nonisentropic gas dynamics*, Indiana Univ. Math. J. 26,1, 147-177 (1977).

[Li4] T.-P. Liu, *The deterministic version of the Glimm scheme*, Comm. Math. Phys. 57, 135-148 (1977).

[Li5] T.-P. Liu, *Development of singularities in the nonlinear waves for quasi-linear hyperbolic partial differential equations*, J. Diff. Eqs, 33, 92-111 (1979).

[Li6] T.-P. Liu, *Admissible solutions of hyperbolic conservation laws*, Mem. A.M.S. No 240, Providence 1981.

[Ma-P] A. Majda, R.L. Pego, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, J. Diff. Eqs. 56, 229-262 (1985).

[Ma-R] A. Majda, R. Rosales, *Resonantly interacting weakly nonlinear waves. I. A single space variable*, Stud. Appl. Math. 71, 149-179 (1984).

[Ma-R-S] A. Majda, R. Rosales, M. Schonbek, *A canonical system of integro-differential equations arising in resonant nonlinear acoustics*, Stud. Appl. Math. 79, 205-262 (1988).

[Mo1] M.S. Mock, *Systems of conservation laws of mixed type*, J. Diff. Eqs. 37, 70-88 (1980).

[Mo2] M.S. Mock, *A topological degree for orbits connecting critical points of autonomous systems*, J. Diff. Eqs. 38, 176-191 (1980).

[Mo3] M. Sever, *Existence in the large for Riemann problems for systems of conservation laws*, Trans. A.M.S. 292, 375-381 (1985).

[Mo4] M. Sever, *Uniqueness failure for entropy solutions of hyperbolic systems of conservation laws*, C.P.A.M. 42, 173-183 (1989), erratum C.P.A.M. 43, 295-297 (1990).

[Mo5] M. Sever, *The rate of total entropy generation for Riemann problems*, J. Diff. Eqs. 87, 115-143 (1990).

[Mo-F] O.I. Mokhov, E.V. Ferapontov, *Nonlocal hamiltonian operators of hydrodynamic type and constant curvature metric*, Russ. Math. Surv. 45, 3 (1990) 218-219.

[Ni-Sm] T. Nishida, J.A. Smoller, *Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws*, C.P.A.M. 26, 183-200 (1973).

[No-Pi] K. Nomizu, U. Pinkall, *Cubic form theorem for affine immersions*, Results in Math. (Birkhäuser), 13, 338-362 (1988).

[Ole1] O.A. Oleinik, *Cauchy's problem for nonlinear equations in a class of discontinuous functions*, Dokl. 95 (1954), A.M.S. Transl. (2) 42, 7-12 (1964).

[Ole2] O.A. Oleinik, *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Uspekhi (1957), A.M.S. Transl. (2) 26, 95-172 (1963).

[Ole3] O.A. Oleinik, *Uniqueness and stability of the generalized solutions of the Cauchy problem for a quasilinear equation*, Uspekhi (1959), A.M.S. Transl. (2) 33, 285-290 (1963).

[Olv] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer Verlag, 1986.

[Ovs] L.V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Acad. Press, 1982.

[Peg] R. Pego, *Some explicit resonating waves in weakly nonlinear gas dynamics*, Stud. Appl. Math. 79, 263-270 (1988).

[Ran] W.J.M. Rankine, *On the thermodynamical theory of waves of finite longitudinal disturbance*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 160, 277-288 (1870).

[Rie] B. Riemann, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* , Ges. Werke, Leipzig, 157-175 (1892).

[Sch] M. Schatzman, *Continuous Glimm functionals and uniqueness of solutions of the Riemann problem*, Ind.Univ.Math.J. 34, 533-589 (1985).

[Ser1] D. Serre, *Systèmes hyperboliques non-linéaires commutant entre eux*, Prepubl. Lyon-St Etienne No 26 (1984).

[Ser2] D. Serre, *Compacité par compensation et systèmes hyperboliques de lois de conservation*, C.R.Acad.Sc. Paris, t. 299, ser.I,No 20, p.555-558 (1984).

[Ser3] D. Serre, *La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non-linéaires de deux équations à une dimension d'espace*, J.M.P.A. 65, 423-468 (1986).

[Ser4] D. Serre, *Solutions à variation bornée pour certains systèmes hyperboliques de lois de conservation*, J. of Diff. Equ. 68, 137-169 (1987).

[Ser5] D. Serre, *Domaines invariants pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation*, J. of Diff. Equ. 69, 46-62 (1987).

[Ser6] D. Serre, *Existence globale d'ondes planes en électromagnétisme non-linéaire*, C.R.Acad.Sc. Paris, t. 304, ser.I,No 20 (1987).

[Ser7] D. Serre, *Systèmes hyperboliques riches de lois de conservation*, Prepubl. Lyon-St Etienne no 74 (1988), et Sém. Collège de France, "non-linear PDEs and their applications" , H. Brézis & J.-L. Lions eds., Pitman (à paraître)

[Ser8] D. Serre, *Les ondes planes en éléctromagnétisme non linéaire*, Physica D, No 38, 227-251 (1988).

[Ser9] D. Serre, *Richness and the classification of quasilinear hyperbolic systems*, IMA vol. in Math. and their appl. Vol 29, Springer Verlag, 1991.

[Ser10] D. Serre, *Systèmes d'EDO invariants sous l'action de systèmes hyperboliques d'EDP*, Ann. Inst. Fourier, 39, 4, 953-968 (1989).

[Ser11] D. Serre, *Oscillations non-linéaires des systèmes hyperboliques : méthodes et résultats qualitatifs*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, Vol 8, No 34, p. 351-417, 1991.

[Ser12] D. Serre, *Oscillations non-linéaires de haute fréquence ; dim=1*, Prepubl. Lyon-St Etienne no 97 (1990) et Sém. Collège de France, "non-linear PDEs and their applications" , H. Brézis & J.-L. Lions eds., Pitman (à paraître).

[Ser13] D. Serre, *Quelques méthodes d'étude de la propagation d'oscillations hyperboliques non-linéaires*, Séminaire EDP 1990-1991, Ecole Polytechnique, exposé No XX.

[Ser14] D. Serre, *Un modèle relaxé pour les câbles inextensibles*, MMAN,25,4 (1991) 465-481.

[Ser15] D. Serre, *Intégrabilité d'une classe de systèmes de lois de conservation*, Prépubl. ENS-Lyon No 45 (1991), à paraître dans Forum Math.

[Sm] J.A. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Grund. Math. Wiss. 258, Springer Verlag 1983.

[Sp] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Tome III, Publish or Perish Inc., 1975.

[Sto] G.G. Stokes, *On a difficulty in the theory of sound*, Philosophical Magazine 33, 349-356, (1848).

[Str1] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), *The Theory of Sound*, Vol. II, London :McMillan 1878.

[Str2] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), *Note on tidal bores*, Proc. Roy. Soc. London A 81,448-449 (1908).

[Te1] B. Temple, *Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws of gas dynamics*, J. Diff. Eqs. 41, 96-161 (1981).

[Te2] B. Temple, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 280, 781-795 (1983).

[Ts] S.P. Tsarev, *On the Liouville Poisson brackets and one-dimensional Hamiltonian systems of hydrodynamic type arising in the Bogolyubov-Whitham averaging theory*, Russian Math. Surveys 39:6, 227-228 (1984).

[Ts2] S.P. Tsarev, *On Poisson brackets and one-dimensional Hamiltonian systems of hydrodynamic type*, Soviet Math. Dokl. 31 No3, 488-491 (1985).

[Ts3] S.P. Tsarev, Ph.D. Thesis, Moscow state University, 1986.

[Ts4] S.P. Tsarev, *The geometry of hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method*, Math. USSR Izvsetiya 37 No2 (1991) 397-419.

[Vo] A.I. Vol'pert, *The BV space and quasilinear equations*, Math. USSR Sb. 2, 225-267 (1967).

[Vv] N.D. V'vedenskaya, *An example of non-uniqueness of a generalized solution of a quasilinear system of equations*, Sov. Math. Dokl. 2, 89-90 (1961).

[Wa] D. Wagner, *Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions*, J.Diff.Eqs. 68, 118-136 (1987).

[Wh] G.B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley NY 1974.