

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

EMMANUEL ANDRONIKOF

Microlocalisation tempérée

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 57 (1994)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_57__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MICROLOCALISATION TEMPÉRÉE

Emmanuel ANDRONIKOF

Abstract - Along the lines of Sato and his school, we build the theory of tempered microlocalization of distributions and of holomorphic functions. We obtain new sheaves of microfunctions and microdifferential operators, invariant under complex canonical transformations. We apply these new tools to the study of distribution solutions of linear systems, in the systematic way that had been achieved in hyperfunction theory. Tempered microlocalization is also essential in analyzing the microlocal structure of regular \mathcal{D} -modules.

Résumé - Dans la ligne des idées de Sato et de son école, nous construisons la théorie de la microlocalisation tempérée des distributions et des fonctions holomorphes. On obtient de nouveaux faisceaux de microfonctions et d'opérateurs microdifférentiels invariants par les transformations canoniques complexes. On applique ces nouveaux outils aux solutions distributions des systèmes linéaires, sur le modèle systématique qui avait été réalisé en théorie des hyperfonctions. La microlocalisation tempérée est également essentielle pour analyser la structure microlocale des \mathcal{D} -modules réguliers.

AMS Subject Classification Index : 58 G 07

Texte reçu le 15 avril 1993

Université de Nantes. Département de Mathématiques et d'Informatique, URA CNRS 758, 2, rue de la Houssinière, F-44072 Nantes.

Table

Introduction	5
Chapitre 0 - Formulaire	7
0.1 - Faisceaux coniques	
0.2 - \mathcal{D} -modules : formulaire de Kashiwara	
Chapitre 1 - Rappels et compléments sur les foncteurs TH et RH de Kashiwara	19
1.1 - Le foncteur $TH = T\text{-}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b)$	
1.2 - Le foncteur $RH = T\text{-}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O})$	
1.3 - Le cas \mathbb{C} -constructible	
Chapitre 2 - Microlocalisation tempérée des distributions	37
2.1 - Spécialisation tempérée des distributions	
2.2 - Microlocalisation tempérée des distributions	
2.3 - Le foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{D}b)$	
2.4 - Opérations	
Chapitre 3 - Microlocalisation à croissance des fonctions holomorphes	75
3.1 - Objets	
3.2 - Spécialisation tempérée le long d'une sous-variété complexe	
3.3 - Opérations	
3.4 - Produit tensoriel sur \mathcal{O} par un module holonôme régulier	
Chapitre 4 - Microfonctions holomorphes tempérées et opérateurs micro- locaux holomorphes d'ordre fini	105
4.1 - Le faisceau $\mathcal{O}^{\mathbb{R},f}$	
4.2 - L'anneau $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$	
Chapitre 5 - Transformations canoniques et théorème de division	121
5.1 - Énoncé du théorème et principe de démonstration	
5.2 - L'action sur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$	
5.3 - Division par un opérateur microdifférentiel et fidèle plati- tude de $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$ sur \mathcal{E}	
5.4 - Démonstration du théorème 5.1.1	
5.5 - Le cas d'une transformation de contact complexe	
5.6 - Applications aux modules holonômes réguliers	

Chapitre 6 - Application : microfonctions tempérées	139
6.1 - Microlocalisation tempérée sur des sous-variétés réelles : théorèmes d'annulation	
6.2 - Faisceaux de microfonctions tempérées	
6.3 - Exemples	
Appendice - Opérations microlocales sur les complexes constructibles	157
A.1 - La catégorie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$	
A.2 - Noyaux microlocaux pour $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)$	
A.3 - Le cas d'une variété complexe	
Index des principales notations	169
Bibliographie	171

Introduction

Depuis l'irruption des méthodes géométriques liées à la théorie des hyperfonctions pour les équations aux dérivées partielles ("l'analyse algébrique" de Sato), et leur intense développement, il était regrettable que ces mêmes méthodes ne puissent en général s'appliquer aux solutions distributions des systèmes linéaires - sauf peut-être ce qui concerne la propagation des singularités - faute de disposer d'un appareillage fonctoriel analogue à celui de l'ouvrage connu sous le nom de code SKK, mais en théorie des distributions.

Le présent article, se propose de tenter de combler cette lacune en jetant les bases d'une formulation à la SKK, d'une théorie des microfonctions tempérées, qui précise et prolonge notre travail de [An1].

Le fait qu'une telle théorie fût possible nous était devenu clair depuis l'apparition du foncteur de cohomologie modérée introduit par Kashiwara pour résoudre le problème de Riemann-Hilbert.

Tout l'exercice consiste alors à microlocaliser ce foncteur en le foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$; on se place d'emblée dans le cadre général de la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara et Schapira et on fabrique une version tempérée du foncteur $\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$, à l'aide d'opérations standard de la théorie des \mathcal{D} -modules (chapitres 2 et 3).

On obtient en particulier un nouvel anneau d'opérateurs microdifférentiels $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$ qui opère sur les microfonctions tempérées, ces dernières étant définies fonctoriellement. La possibilité de faire opérer les transformations canoniques quantifiées est certainement le coeur de l'ouvrage (chapitre 5). Les applications sont alors nombreuses, qui permettent de donner des théorèmes d'annulation et des versions pour les distributions de certaines constructions bien connues dans le cadre des hyperfonctions (chapitre 6).

Une autre application essentielle est l'étude microlocale des modules holonomes réguliers : elle est seulement esquissée ici (cf. 5.6 et 6.3.1). Signalons que sur une variété complexe une distribution holonôme régulière a un front d'onde égal à la variété caractéristique du \mathcal{D} -module qu'elle engendre (cf. [An 4]), et que, d'autre part, dans un travail en cours de rédaction on obtient une version microlocale de la correspondance de Riemann-Hilbert (cf. [An 5]).

L'essentiel de ce travail a été réalisé alors que P. Schapira était à l'Université Paris-Nord et qu'il rédigeait avec M. Kashiwara leur impressionnante monographie [K-S 3]. C'est dire tout ce qu'il doit à ces auteurs : qu'ils trouvent ici

l'expression de notre gratitude.

Nos remerciements vont également à Madame Catherine Simon pour la remarquable endurance typographique qu'elle a su montrer au cours de révisions successives.

0. - FORMULAIRE

On a dressé ci-dessous une liste de quelques propriétés générales et conventions d'écriture classiques sur les faisceaux coniques et les \mathcal{D} -Modules qui seront constamment utilisées dans la suite sans qu'il y soit explicitement fait référence à chaque fois.

0.1. - Faisceaux coniques

On renvoie à [K-S 3] pour un exposé didactique.

Soit X un espace topologique localement compact, dénombrable à l'infini. On note $D^+(X)$ (resp. $D^b(X)$) la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de faisceaux bornés à gauche (resp. bornés) de \mathbb{C} -vectoriels sur X .

Soit $E \xrightarrow{\tau} X$ un fibré vectoriel.

On identifie X à la section nulle et on note i l'immersion $X \hookrightarrow E$. On pose $\overset{\circ}{E} = E \setminus X$, $\mathbb{R}_{>0} := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$; on munit $E/\mathbb{R}_{>0}$ de la topologie quotient (elle est non séparée), on désigne par γ l'application canonique $\gamma : E \rightarrow E/\mathbb{R}_{>0}$, et on note $\overset{\circ}{\gamma} = \gamma|_{\overset{\circ}{E}}$.

Soit F un faisceau sur $\overset{\circ}{E}/\mathbb{R}_{>0}$. On a : $F \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{\gamma}_* \overset{\circ}{\gamma}^{-1} F$ et $R^j \overset{\circ}{\gamma}_* \overset{\circ}{\gamma}^{-1} F = 0$, $\forall j > 0$.

Soit maintenant F un faisceau sur E . On dit que F est *conique* s'il est constant sur les fibres de γ (il revient au même de dire $\gamma^{-1} \gamma_* F \xrightarrow{\sim} F$), et on a $R^j \overset{\circ}{\gamma}_* F = 0$, $\forall j > 0$.

On note $\text{Fais.coni}(E)$ la catégorie des faisceaux coniques sur E et $D_{\text{coni}}^+(E)$ la sous-catégorie de $D^+(E)$ des objets à cohomologie dans $\text{Fais.coni}(E)$. On a les

identifications $R\tau_*F = i^{-1}F$, $R\tau_!F = i^{-1}R\Gamma_X F$ et on a un triangle distingué $R\tau_!F \rightarrow R\tau_*F \rightarrow R\tau_*F \xrightarrow{\pm 1}$, où $\overset{\circ}{\tau}$ désigne $\overset{\circ}{\tau} = \tau|_{\overset{\circ}{E}}$.

Rappelons enfin quelques formules relatives à la transformation de Fourier topologique, dite encore de Fourier-Sato ([S-K-K], cf. aussi [K-K 1], [B-M-V], [Br], [K-S 3]).

Soit $E^* \xrightarrow{\pi} X$ le fibré dual.

La transformation de Fourier $F \mapsto F^\wedge$ est une équivalence de catégories

$$D_{\text{coni}}^+(E) \longrightarrow D_{\text{coni}}^+(E^*),$$

et possède les propriétés suivantes.

1) Pour tout $F \in \text{Ob } D_{\text{coni}}^+(E)$ et tout ouvert convexe $U \in E$ (i.e. convexe dans la fibre) on a

$$R\Gamma(U; F^\wedge) \simeq R\Gamma_{U^\circ}(E; F)$$

où $U^\circ \subset E^*$ est par définition le polaire de U .

En particulier $R\Gamma(E^*; F^\wedge) \simeq R\Gamma_X(E; F)$.

2) Pour tout A fermé convexe propre de E^* on a

$$R\Gamma_A(E^*; F^\wedge) \simeq R\Gamma(\text{Int}(A^\circ)^a; F) \otimes_{\mathbb{C}} \sigma_{E/X}[-\ell],$$

où ℓ est la dimension de la fibre de τ et où Int désigne l'intérieur et a l'application antipodale; on a noté $\sigma_{E/X}$ le faisceau d'orientation relative à coefficients complexes.

3) La transformation de Fourier commute au changement de base.

4) Soit $f : E \rightarrow E'$ un morphisme de fibrés au-dessus de X , ${}^t f : E'^* \rightarrow E^*$ le morphisme dual.

On a $(Rf_!F)^\wedge \simeq ({}^t f)^{-1}(F^\wedge)$ pour $F \in \text{Ob } D_{\text{coni}}^+(E)$ et $(f^!G)^\wedge \simeq R({}^t f)_*(G^\wedge)$ pour $G \in \text{Ob } D_{\text{coni}}^+(E')$.

0.2. - \mathcal{D} -Modules : formulaire de Kashiwara

0.2.1. Dans tout ce qui suit on entend par variété complexe une variété analytique complexe lisse; sous-variété voudra dire sous-variété lisse, localement fermée. Soit X une variété complexe. On note \mathcal{O}_X le faisceau structural, Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes sur X .

On note $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des \mathcal{D}_X -Modules à gauche et, pour $(*) = ()$, $+$ ou b , on note $D^*(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée $D^*(\mathcal{D}_X) = D^*(\text{Mod}(\mathcal{D}_X))$. Si $E \xrightarrow{\tau} X$ est un fibré holomorphe on définit de manière analogue $D^*(\tau^{-1}\mathcal{D}_X) = D^*(\text{Mod}(\tau^{-1}(\mathcal{D}_X)))$.

Soit Z une sous-variété de X . Rappelons que

$$\mathcal{B}_{Z|X} \stackrel{\text{def}}{=} R\Gamma_{|Z|} \mathcal{O}_X[\dim_{\mathbb{C}} X - \dim_{\mathbb{C}} Z]$$

est concentré en degré 0, c'est le faisceau des hyperfonctions holomorphes d'ordre fini de [S-K-K] (cf. (1.2.1) pour une définition du terme de droite).

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés complexes, $\Delta \subset Y \times X$ le graphe de f , on pose :

$$\Omega_{Y/X} = \Omega_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X^{\otimes -1} \quad (\text{le faisceau des formes relatives}),$$

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} = \mathcal{B}_{\Delta|Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X = \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X,$$

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} = \mathcal{B}_{\Delta|Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X} = f^{-1}\mathcal{D}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \Omega_{Y/X}.$$

On a $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{X \xrightarrow{\text{Id}} X}$ et $\mathcal{B}_{Z|X} \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Z} \otimes_{\mathcal{D}_Z}^{\text{L}} \mathcal{O}_Z$.

Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow Y$ deux morphismes de variétés complexes alors :

$$(0.2.1) \quad \mathcal{D}_{Z \rightarrow Y} \otimes_{g^{-1}\mathcal{D}_Y}^{\text{L}} g^{-1}\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq \mathcal{D}_{Z \rightarrow X},$$

et

$$(0.2.1)\text{bis} \quad g^{-1}\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{g^{-1}\mathcal{D}_Y}^{\text{L}} \mathcal{D}_{Y \leftarrow Z} \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Z},$$

(s'il n'y a pas risque de confusion on omettra la notation g^{-1} dans ces formules).

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes, Z une variété complexe, on a :

$$(0.2.2) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \times Z} \simeq \mathcal{D}_{X \times Z \leftarrow Y \times Z};$$

si de plus f est une immersion fermée, on a :

$$(0.2.3) \quad \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \times Z} \simeq \mathcal{D}_{Y \times Z \leftarrow X \times Z};$$

et

$$(0.2.4) \quad \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathcal{D}_Y[\dim_{\mathbb{C}} X - \dim_{\mathbb{C}} Y]$$

Si f est lisse, on a :

$$(0.2.5) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq f^{-1} \mathcal{D}_X[\dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X].$$

Soit maintenant un diagramme cartésien de variétés complexes

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \alpha \downarrow & \square & \downarrow \beta \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

On a un morphisme canonique

$$(0.2.6) \quad \alpha^{-1} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\alpha^{-1} f^{-1} \mathcal{D}_X} f'^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} \longrightarrow \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{D}_{Y' \rightarrow X'}.$$

Si de plus les flèches horizontales sont des immersions fermées et si $X' \rightarrow X$ est transverse à Y alors

(0.2.6)bis la flèche (0.2.6) est un isomorphisme

Le corollaire suivant des formules (0.2.5) et (0.2.6) nous sera utile (cf. proposition 1.2.3). Soit un diagramme commutatif de variétés complexes :

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_X X' & \xrightarrow{\quad} & X' \\
 \downarrow & \swarrow & \nearrow f' \\
 & Y' & \\
 \downarrow & \swarrow \alpha & \\
 Y & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \\
 & \searrow & \downarrow \beta
 \end{array}$$

où l'on suppose que $Y \times_X X'$ est une variété complexe et que le morphisme canonique $Y' \rightarrow Y \times_X X'$ est lisse. Alors on a un morphisme canonique

$$(0.2.6)_{\text{ter}} \quad \alpha^{-1} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\alpha^{-1} f^{-1} \mathcal{D}_X}^L f'^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} \longrightarrow \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y'} \otimes_{\mathcal{D}_{Y'}}^L \mathcal{D}_{Y' \rightarrow X'} [\dim_{\mathbb{C}} Y \times_X X' - \dim_{\mathbb{C}} Y'].$$

Soient X, Y des variétés complexes. Si \mathcal{M} (resp. \mathcal{N}) est un \mathcal{D}_X -Module (resp. \mathcal{D}_Y -Module), le produit tensoriel externe de \mathcal{M} et \mathcal{N} est par définition le $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -Module noté $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}$

$$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{X \times Y} \otimes_{\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{D}_Y} (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}),$$

où $F \boxtimes_{\text{def}} G = q_1^{-1} F \otimes q_2^{-1} G$ désigne le produit tensoriel externe des faisceaux F et G .

Dans l'expression précédente, comme dans toute la suite, on adopte comme convention que tout produit tensoriel (resp. tout foncteur $R\mathcal{H}om$) *non indicé* est réputé être pris sur (le faisceau constant) \mathbb{C} .

Le produit tensoriel externe de $\mathcal{M} \in \text{Ob } D^b(\mathcal{D}_X)$ par $\mathcal{N} \in \text{Ob } D^b(\mathcal{D}_Y)$ est l'objet $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}$ de $D^b(\mathcal{D}_{X \times Y})$ défini par la même formule que précédemment, moyennant la convention que si un (bi-) foncteur T est exact (en chacun de ses arguments), on désigne par la même notation T le (bi-) foncteur dérivé.

Soit X une variété complexe, $\delta : X \rightarrow X \times X$ l'immersion diagonale.

Soient $\mathcal{M} \in \text{Ob } D^b(\mathcal{D}_X)$ et $\mathcal{N} \in \text{Ob } D^b(\mathcal{D}_X)$, alors $\mathcal{M} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est aussi un objet de $\text{Ob } D^b(\mathcal{D}_X)$ et on a

$$(0.2.7) \quad \mathcal{M} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \simeq \mathcal{D}_{X \xrightarrow{\delta} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\delta^{-1}\mathcal{D}_{X \times X}} \delta^{-1}(\mathcal{M} \overset{\text{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{D}} \mathcal{N}),$$

et

$$(0.2.8) \quad (\Omega_X \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N} \simeq \Omega_X \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{M} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}).$$

Rappelons enfin que $\Omega_X = R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X)[\dim_{\mathbb{C}} X]$, et que pour tout $\mathcal{M} \in \text{Ob } D^b(\mathcal{D}_X)$ on pose

$$DR_X(\mathcal{M}) = R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \quad (\simeq \Omega_X \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[-\dim_{\mathbb{C}} X]).$$

Toutes les formules ci-dessus se trouvent essentiellement dans [S-K-K], [K 1, 2, 3, 4, 5, 6] (cf. aussi [S1], [Be], [Bj2]), mais les formules de numéros 0.2.4, 0.2.5, 0.2.6, 0.2.6 bis et ter n'y sont pas explicites. Pour la commodité du lecteur on trouvera leur démonstrations en paragraphe 0.2.3 plus bas.

0.2.2. Soit X une variété analytique réelle.

On note \mathcal{A}_X le faisceau des fonctions analytiques réelles sur X , Ω_X le faisceau des formes de degré maximal à coefficients analytiques, or_X le faisceau d'orientation sur X à coefficients dans \mathbb{C} . (Si X est la variété réelle sous-jacente à une variété complexe on considère X comme orientée.) Le faisceau des densités analytiques est noté

$$\mathcal{V}_X \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_X \otimes or_X.$$

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés analytiques réelles on pose, pour rester en conformité avec les notations de [K 5] :

$$or_{Y/X} = or_Y \otimes f^{-1}or_X$$

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} = \mathcal{A}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X,$$

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} = f^{-1}\mathcal{D}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_X} \mathcal{V}_{Y/X},$$

où $\mathcal{V}_{Y/X}$ est le faisceau sur Y des densités relatives

$$\mathcal{V}_{Y/X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_Y \otimes_{f^{-1}A_X} f^{-1}(\mathcal{V}_X^{\otimes -1}).$$

On a encore les formules (0.2.1), (0.2.2), (0.2.3), (0.2.6)bis, mais la formule (0.2.4) est à remplacer par

$$(0.2.9) \quad \begin{cases} f : Y \hookrightarrow X & \text{immersion fermée, alors} \\ \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \simeq \mathcal{D}_Y \otimes \text{or}_{Y/X}[\dim_{\mathbb{R}} X - \dim_{\mathbb{R}} Y], \end{cases}$$

et la formule (0.2.5) est à remplacer par

$$(0.2.10) \quad \begin{cases} f : Y \rightarrow X & \text{lisse alors} \\ \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq f^{-1}\mathcal{D}_X \otimes \text{or}_{Y/X}[\dim_{\mathbb{R}} Y - \dim_{\mathbb{R}} X]. \end{cases}$$

Les catégories $D^*(\mathcal{D}_X)$ et $D^*(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$ ($E \xrightarrow{\tau} X$ un fibré analytique réel) sont définies de manière analogue au cas holomorphe et on désigne par $D_{\text{coni}}^*(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $D^*(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$ des objets à cohomologie dans $\text{Fais.coni}(E)$.

0.2.3 - Démonstration de quelques formules

- d'après des indications de Kashiwara (les erreurs éventuelles sont à attribuer au seul copiste).

Les variétés sont ici supposées complexes. Dans les démonstrations ci-dessous on note x pour $\dim_{\mathbb{C}} X$ etc.

Démonstration de la formule (0.2.4)

Soit $Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée. On a $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} = \mathcal{B}_{Y|Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\otimes}} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} &= \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\otimes}} (\mathcal{B}_{Y|Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y) \\ &\simeq \mathcal{D}_{Y \times Y \leftarrow Y \times X} \underset{\mathcal{D}_{Y \times X}}{\overset{L}{\otimes}} (\mathcal{B}_{Y|Y \times X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y) \\ &\simeq \mathcal{B}_{Y|Y \times Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y[(\dot{y} + x) - (y + y)] \\ &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow Y}[x - y], \end{aligned}$$

dans le premier isomorphisme on a utilisé (0.2.3), et, pour le second, on applique la formule (0.2.11) ci dessous.

♡

$$(0.2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soient} \\ \text{les inclusions de trois variétés complexes fermées. Alors} \\ \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{B}_{Z|X} \simeq \mathcal{B}_{Z|Y}[x-y]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X \end{array}$$

On effet on a (cf. [S-K-K]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{B}_{Z|X} &= \mathcal{O}_Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} R\Gamma_{[Z]} \mathcal{O}_X[x-z] \simeq R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{O}_Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)[x-z] \\ &= R\Gamma_{[Z]} \mathcal{O}_Y[x-z] = \mathcal{B}_{Z|Y}[x-y]. \end{aligned}$$

♡

Démonstration de la formule (0.2.5)

Soit $f : Y \rightarrow X$ lisse et notons $\ell = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$. Pour tout \mathcal{D}_Y -module à gauche \mathcal{M} on a $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}[-\ell]$, en particulier

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{D}_{Y \rightarrow X})[\ell].$$

D'autre part, on a une flèche (de $f^{-1}\mathcal{D}_X$ -modules à droite a priori) $f^{-1}\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{D}_{Y \rightarrow X})$, résultant de l'utilisation de l'élément canonique de $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$, d'où une flèche canonique dans la catégorie dérivée $f^{-1}\mathcal{D}_X \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{D}_{Y \rightarrow X})$. On obtient donc une flèche canonique

$$f^{-1}\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}[-\ell].$$

En prenant un système de coordonnées locales $Y = X \times T$, on vérifie que c'est bien un isomorphisme (utiliser la formule 0.2.2).

♡

On aura également besoin des deux formules auxiliaires suivantes. Soit d'abord un diagramme commutatif de variétés complexes

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Z \end{array} ,$$

avec $X \hookrightarrow Y$ et $X \hookrightarrow Z$ des immersions fermées. Alors

$$(0.2.12) \quad \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{B}_{X|Y} \simeq \mathcal{B}_{X|Z} .$$

En effet, on a $\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{B}_{X|Y} \simeq \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} (\mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{B}_{X|Z}$.

Considérons maintenant un diagramme cartésien dont les flèches horizontales sont des immersions fermées

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xleftrightarrow{\quad} & X' \\ \downarrow & \square & \downarrow \beta \\ Y & \xleftrightarrow{\quad} & X \end{array} .$$

$$(0.2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On a un morphisme canonique} \\ \mathcal{D}_{X' \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\beta^{-1}\mathcal{D}_X} \beta^{-1}\mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \mathcal{B}_{Y'|X'} , \end{array} \right.$$

(0.2.14) si de plus β est transverse à Y , (0.2.13) est un isomorphisme.

On laisse le soin au lecteur de vérifier ces deux dernières formules.

Démonstration de la formule (0.2.6)

En omettant dans ce qui suit les notations d'image inverse de faisceaux, on a d'une part, un morphisme

$$(0.2.15) \quad \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} \longrightarrow \mathcal{B}_{Y'|Y \times X'} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'} ,$$

obtenu de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X'/X}) = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X'/X} \\
&= \Omega_{X'/X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{B}_{Y|Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \Omega_X) \\
&\longrightarrow (\mathcal{O}_{Y \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'/X}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{Y \times X}} \mathcal{B}_{Y|Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \Omega_X \\
&= \mathcal{O}_{Y \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{Y \times X}} \mathcal{B}_{Y|Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'}, \\
&\longrightarrow \mathcal{B}_{Y'|Y \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'},
\end{aligned}$$

où dans l'avant dernière ligne on a remarqué que $\Omega_{X'} = \Omega_{X'/X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} \Omega_X$, et où dans la dernière on a appliqué la formule (0.2.13) dans la situation du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xleftarrow{\quad} & Y \times X' \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \square & \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xleftarrow{\quad} & Y \times X
\end{array}$$

D'autre part on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{Y \leftarrow Y'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{D}_{Y' \rightarrow X'} &= \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{B}_{Y'|Y' \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'} \\
&\simeq (\mathcal{D}_{Y \times X' \leftarrow Y' \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y' \times X'}} \mathcal{B}_{Y'|Y' \times X'}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'} \\
&\simeq \mathcal{B}_{Y'|Y \times X'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'},
\end{aligned}$$

où l'avant dernier isomorphisme résulte de la formule (0.2.2), et le dernier de la formule (0.2.12) appliquée au diagramme

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xleftarrow{\quad} & Y' \times X' \\
& \searrow & \downarrow \\
& & Y \times X'
\end{array}$$

Le morphisme (0.2.6) résulte donc de la comparaison avec (0.2.15).

♡

Démonstration de la formule (0.2.6)bis

On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} &= \mathcal{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{B}_{X'|X' \times X} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'}) \\ &\simeq (\mathcal{D}_{Y \times X' \leftarrow X \times X'} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X'}} \mathcal{B}_{X'|X \times X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'} \\ &\simeq \mathcal{B}_{Y'|Y \times X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \Omega_{X'}, \end{aligned}$$

où l'avant dernier isomorphisme résulte de la formule (0.2.3), et où le dernier résulte de la formule (0.2.14) appliquée dans la situation du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & Y \times X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \hookrightarrow & X \times X' \end{array} \quad \square$$

♡

Démonstration de la formule (0.2.6)ter

Posons $Z = Y \times_X X'$. On suppose donc que Z est une variété et que $Y' \rightarrow Z$ est lisse. On écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y'} \otimes_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{D}_{Y' \rightarrow X'} &\simeq \mathcal{D}_{Y \leftarrow Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Z} (\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y'} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y'}} \mathcal{D}_{Y' \rightarrow Z}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{D}_{Z \rightarrow X'} \\ &\simeq \mathcal{D}_{Y \leftarrow Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{D}_Z \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{D}_{Z \rightarrow X'} [y' - z] \\ &\simeq \mathcal{D}_{Y \leftarrow Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{D}_{Z \rightarrow X'} [y' - z] \\ &\longleftarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow X'} [\dim_{\mathbb{C}} Y' - \dim_{\mathbb{C}} Y \times_X X'], \end{aligned}$$

où on a appliqué successivement les formules (0.2.1)bis, (0.2.5), et (0.2.6).

♡

1. - RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES FONCTEURS TH ET RH DE KASHIWARA

On a rappelé dans les paragraphes 1.1 et 1.2 des notations et résultats de [K 5] qu'on a fait suivre de propositions supplémentaires, utiles également dans la suite, qui sont essentiellement des corollaires du théorème d'image directe de Kashiwara.

1.1. - Le foncteur $TH = T\text{-Hom}(\cdot, Db)$

Soit X une variété analytique réelle (paracompacte). Rappelons qu'un faisceau F de \mathbb{C} -vectoriels sur X est dit \mathbb{R} -constructible si

$$1) \forall x \in X \quad \dim F_x < \infty, \quad \text{et}$$

2) il existe un recouvrement localement fini $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de X par des ensembles sous-analytiques X_j tels que pour tout j , $F|_{X_j}$ est localement constant.

Du théorème de triangulation résulte le critère suivant.

Si F est \mathbb{R} -constructible, il existe une filtration $F = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_j \supset F_{j+1} \supset \dots$ de F par des faisceaux \mathbb{R} -constructibles F_j et une famille $(Z_j)_j$ de sous-ensembles sous-analytiques localement fermés Z_j tels que :

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} 1) \text{ pour tout } j, F_j/F_{j+1} \simeq \mathbb{C}_{Z_j}, \\ 2) \text{ localement sur } X, \text{ on a } F_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.} \end{cases}$$

On note $\mathbb{R}\text{-}c(X)$ la catégorie des faisceaux \mathbb{R} -constructibles sur X , $D_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$ la sous-catégorie de $D^b(X)$ des objets à cohomologie \mathbb{R} -constructible. Alors on sait (cf. [K 5]) que l'application naturelle :

$$(1.1.2) \quad D^b(\mathbb{R}\text{-}c(X)) \rightarrow D_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(X) \text{ est une équivalence de catégories.}$$

On note $\mathcal{D}b_X$ le faisceau des distributions sur X . Soit U un ouvert de X et $u \in \Gamma(U; \mathcal{D}b_X)$; u est par définition une forme linéaire sur $\Gamma_c(U; \mathcal{C}_X^\infty \otimes_{\mathcal{A}_X} \mathcal{V}_X)$ continue pour la topologie de Schwartz.

Soit $x \in \partial U$. Rappelons qu'on dit que u est *tempérée* en x s'il existe un voisinage ouvert V de x et $v \in \Gamma(X; \mathcal{D}b_X)$ tels que $v|_{V \cap U} = u|_{V \cap U}$; et on dit que u est tempérée si elle est tempérée en tout point de ∂U , et il revient au même de dire que u est la restriction à U d'une distribution définie sur X ; on dit encore *prolongeable* au lieu de tempérée; on notera $\mathcal{S}'_X(U)$ le sous espace de $\mathcal{D}b_X(U)$ des distributions prolongeables (cf. [Ma]).

Pour F faisceau \mathbb{R} -constructible, on pose, suivant Kashiwara :

$$(1.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T\text{-}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)(U) = \{\varphi \in \Gamma(U; \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)); \text{ pour tout} \\ \text{ouvert sous-analytique relativement compact } V \subset U \text{ et pour} \\ \text{toute section } s \in \Gamma(V; F), \text{ on a } \varphi(s) \in \mathcal{S}'_X(V)\}. \end{array} \right.$$

Alors $U \mapsto T\text{-}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)(U)$ est un faisceau (cf. [K 5]) que l'on note $TH_X(F)$ ou $TH(F)$ et on a les propriétés essentielles (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6) et (1.1.7) suivantes (cf. [K 5]) :

$$(1.1.4) \quad TH(F) \text{ est un } \mathcal{C}_X^\infty\text{-Module, en particulier c'est un faisceau mou.}$$

Dans le point suivant U est un ouvert quelconque de X .

$$(1.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout ouvert sous-analytique } V \subset X \text{ on a} \\ \Gamma(U; TH(\mathbb{C}_V)) = \mathcal{S}'_U(U \cap V), \\ \text{et pour tout fermé sous-analytique } Z \subset X \text{ on a} \\ TH(F_Z) = \Gamma_Z TH(F). \end{array} \right.$$

(1.1.6) Si f est une fonction analytique sur X et $U = X \setminus f^{-1}(0)$, on a $TH(F_U) = TH(F)_f$ (localisation par f), en particulier l'opération de multiplication par f est bijective sur $TH(F_U)$.

(1.1.7) Le foncteur $F \mapsto TH(F)$ est un foncteur exact de $\mathbb{R}\text{-}c(X)^\circ$ dans la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$ des \mathcal{D}_X -Modules.

On notera donc de la même manière le foncteur dérivé du précédent

$$TH : D_{\mathbb{R}\text{-}c(X)}^b \simeq D^b(\mathbb{R}\text{-}c(X))^\circ \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X).$$

Il nous sera commode d'utiliser la notation suivante.

Soit Ω un ouvert sous-analytique de X et \mathcal{F} un sous-faisceau de $\mathcal{D}b_X$.

Pour tout ouvert U de X on pose :

$$(1.1.8) \quad \mathcal{F}^{t-\Omega}(U) = \Gamma(U \cap \Omega; \mathcal{F}) \cap \mathcal{S}'_U(U \cap \Omega),$$

ce qui définit le sous-faisceau $\mathcal{F}^{t-\Omega}$ des sections de $\Gamma_\Omega \mathcal{F}$ prolongeables en distribution à travers $\partial\Omega$ (i.e. $\mathcal{F}^{t-\Omega} = \Gamma_\Omega \mathcal{F} \cap TH_X(\mathbb{C}_\Omega)$).

Les remarques suivantes nous seront utiles.

Soient F un faisceau \mathbb{R} -constructible sur X , U et V deux ouverts de X , avec V sous-analytique et $V \subset \subset U$.

(1.1.9) (i) Si U est sous-analytique, l'injection canonique

$$\Gamma(X; TH(F_U)) \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{H}om(F_U, \mathcal{D}b_X)) = \Gamma(U; \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$$

est d'image dans $\Gamma(U; TH(F))$.

(1.1.9) (ii) La restriction $\Gamma(U; TH(F)) \rightarrow \Gamma(V; TH(F))$ est d'image dans $\Gamma(X; TH(F_V))$.

(1.1.9) (iii) La flèche $\Gamma(U; TH(F)) \rightarrow \Gamma(X; TH(F_V))$ est surjective.

Les points (i) et (ii) résultent de la définition et (iii) de ce qu'on peut supposer U sous-analytique, de l'exactitude de $TH(\cdot)$ et de ce que $TH(F_V)$ est mou.

Remarquons aussi que pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ et $x \in X$ on a

$$H^j(TH(F))_x = \varinjlim_V H^j(R\Gamma(X; TH(F_V))),$$

où V parcourt une base de voisinages ouverts sous-analytiques de x , comme il résulte de (ii).

Rappelons maintenant les opérations sur TH . Le résultat fondamental est le théorème d'image directe de Kashiwara :

THÉORÈME 1.1.1. [Kashiwara, loc. cit.]. — *Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques réelles et $F \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$ tels que f soit propre sur $\text{supp}(F)$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$Rf_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L TH_Y(F) \right) \xrightarrow{\sim} TH_X(Rf_* F).$$

Mais on n'a pas de théorème d'isomorphisme d'image inverse en général.

Examinons d'abord le cas d'un morphisme lisse $f : Y \rightarrow X$ de variétés analytiques réelles. Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a un morphisme naturel

$$(1.1.10) \quad \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} f^{-1}TH_X(F) \longrightarrow TH_Y(f^{-1}F).$$

On le construit comme suit. On a l'injection

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{D}b_X \rightarrow \mathcal{D}b_Y$$

des distributions sur Y à paramètre analytique dans la fibre. Pour tout $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$ on a donc un morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X) \rightarrow \mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}b_Y)$$

obtenu par la composition :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X) &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{H}om(f^{-1}F, f^{-1}\mathcal{D}b_X) \\ &= \mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{D}b_X) \rightarrow \mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}b_Y). \end{aligned}$$

On remarque que le morphisme

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}TH_X(F) \rightarrow \mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}b_Y),$$

induit par le précédent, est à valeur dans $TH_Y(f^{-1}F)$, par exemple parce que c'est vrai pour $F = \mathbb{C}_A$, A sous-analytique qui est fermé ou bien ouvert, et en remarquant que le foncteur (contravariant) $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}TH_X(\cdot)$ est exact ($\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ est plat sur \mathcal{D}_X). On en tire le morphisme

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}TH_X(F) \rightarrow TH_Y(f^{-1}F),$$

qui définit une transformation de foncteurs exacts sur $\mathbb{R} - c(X)$, d'où le morphisme (1.1.10) pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

Si $X = \{\text{pt}\}$, la variété réduite à un point et $F = \mathbb{C}$, le terme de droite de (1.1.10) est $TH_Y(\mathbb{C}_Y) = \mathcal{D}b_Y$ tandis que le terme de gauche est \mathcal{A}_Y qui n'est pas même de la forme $TH_Y(G)$.

Dans le cas d'une immersion on a néanmoins la

PROPOSITION 1.1.2.. — Soit $j : Y \hookrightarrow X$ l'immersion d'une sous-variété fermée de codimension ℓ dans X et soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F) \xrightarrow{\sim} TH_Y(F|_Y) \otimes \text{or}_{Y/X}[\ell].$$

Démonstration

On a un triangle distingué $F_{X \setminus Y} \rightarrow F \rightarrow F_Y \xrightarrow{+1}$, d'où un triangle distingué (1.1.11)

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F_Y) \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F) \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F_{X \setminus Y}) \xrightarrow{+1}.$$

Vu le théorème d'image directe, on peut écrire $TH_X(F_Y) \simeq j_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(F|_Y))$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F_Y) &\simeq \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(F|_Y) \\ &\simeq TH_Y(F|_Y) \otimes \text{or}_{Y/X}[\ell]. \end{aligned}$$

Alors la flèche de l'énoncé se déduit de la première flèche de (1.1.11). Pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F_{X \setminus Y}) = 0$.

Soit $Y : x_1 = x_2 = \dots = x_\ell = 0$ les équations de Y dans un système de coordonnées locales sur X ; si $\ell = 1$ on sait que $x_1 : TH_X(F_{X \setminus Y}) \rightarrow TH_X(F_{X \setminus Y})$ est un isomorphisme, vu (1.1.6), d'où $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_X(F_{X \setminus Y}) = \mathcal{A}_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} TH_X(F_{X \setminus Y}) = 0$, et on conclut par récurrence sur ℓ , on écrivant $Y = Y_1 \cap Y_2$ où $Y_1 : x_1 = 0$, $Y_2 : x_2 = \dots = x_\ell = 0$, et en appliquant $\mathcal{A}_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} (\cdot) = (\mathcal{A}_{Y_2}/x_1 \mathcal{A}_{Y_2}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}_X} (\cdot)$ au triangle distingué

$$F_{X \setminus (Y_1 \cup Y_2)} \rightarrow F_{X \setminus Y_1} \oplus F_{X \setminus Y_2} \rightarrow F_{X \setminus Y} \xrightarrow{+1}.$$

♡

Par exemple, soit $X = \mathbb{R}^n$ et Y l'hyperplan $Y = \{(x_1, x'); x_1 = 0\}$; pour $F = \mathbb{C}_Y$ (cas Y caractéristique) on trouve l'isomorphisme $Db_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \Gamma_Y Db_X|_Y[-1]$. Pour $F = \mathbb{C}_X$ (cas Y non caractéristique) on trouve l'isomorphisme $Db_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} Db_X|_Y[-1]$. Ce qui est une manière de dire que x_1 est surjectif sur $\Gamma_Y Db_X$ (resp. Db_X) et de noyau isomorphe à Db_Y .

PROPOSITION 1.1.3. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme lisse de variétés analytiques réelles et soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(f^{-1}F) \xleftarrow{\sim} f^! TH_X(F)$$

Démonstration

Soit ℓ la dimension de la fibre de f ; appliquant le foncteur $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} (\cdot)$ à (1.1.10) et utilisant l'isomorphisme $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq f^{-1} \mathcal{D}_X \otimes \text{or}_{Y/X}[\ell]$ du (0.2.10), on en tire le morphisme de l'énoncé

$$f^! TH_X(F) \simeq f^{-1} TH_X(F) \otimes \text{or}_{Y/X}[\ell] \longrightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(f^{-1}F),$$

et il reste à voir que c'est un isomorphisme. Il revient au même de montrer que le morphisme

$$f^{-1} TH_X(F) \longrightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(f^{-1}F) \otimes \text{or}_{Y/X}[-\ell]$$

est un isomorphisme. La question étant locale sur Y , on peut se ramener par le dévissage (1.1.1) à le montrer pour $F = \mathbb{C}_Z$, Z sous-analytique localement fermé, puis, en considérant la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{C}_{\overline{Z} \setminus Z} \rightarrow \mathbb{C}_{\overline{Z}} \rightarrow \mathbb{C}_Z \rightarrow 0$ à le montrer pour $F = \mathbb{C}_Z$, Z sous-analytique fermé. On peut aussi supposer, par récurrence, que $Y = X \times \mathbb{R}$; alors si t est la variable réelle, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{R}}}(\mathcal{A}_{\mathbb{R}}; \Gamma_{f^{-1}(Z)} Db_Y)$ est quasi-isomorphe au complexe

$$0 \rightarrow \Gamma_{f^{-1}(Z)} Db_Y \xrightarrow{D_t} \Gamma_{f^{-1}(Z)} Db_Y \rightarrow 0,$$

lequel est concentré en degré 0 et dont la cohomologie en degré 0 est $f^{-1} \Gamma_Z Db_X$.

♡

Soient X et Y deux variétés analytiques réelles et q_1, q_2 les première et deuxième projections de $X \times Y$.

Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$, $G \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(Y))$; on a :

$$\begin{aligned} & q_1^{-1} \mathcal{H}om(F, Db_X) \otimes q_2^{-1} \mathcal{H}om(G, Db_Y) = \\ & \mathcal{H}om(q_1^{-1} F, q_1^{-1} Db_X) \otimes \mathcal{H}om(q_2^{-1} G, q_2^{-1} Db_Y) \\ & \longrightarrow \mathcal{H}om(q_1^{-1} F \otimes q_2^{-1} G, q_1^{-1} Db_X \otimes q_2^{-1} Db_Y) \\ & \longrightarrow \mathcal{H}om(q_1^{-1} F \otimes q_2^{-1} G, Db_{X \times Y}), \end{aligned}$$

et ces morphismes sont $q_1^{-1}\mathcal{D}_X \otimes q_2^{-1}\mathcal{D}_Y$ - linéaires, d'où un morphisme

$$\mathcal{H}om(F, Db_X) \boxtimes_D \mathcal{H}om(G, Db_Y) \rightarrow \mathcal{H}om(F \boxtimes G, Db_{X \times Y}),$$

où l'on a noté $F \boxtimes G = q_1^{-1}F \otimes_{\text{def}} q_2^{-1}G$. On voit facilement que ce morphisme passe à $T\text{-}\mathcal{H}om(\cdot)$, d'où la :

PROPOSITION 1.1.4. — Soit $F \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, $G \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$. On a un morphisme canonique dans $D^b(\mathcal{D}_{X \times Y})$

$$TH_X(F) \boxtimes_D TH_Y(G) \longrightarrow TH_{X \times Y}(F \boxtimes G).$$

1.2. - Le foncteur $RH = T\text{-}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O})$

1.2.1 - Soit X une variété analytique complexe. On note \bar{X} la variété complexe conjuguée de X et $X_{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente à X . L'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times \bar{X}$ permet de considérer $X \times \bar{X}$ comme un complexifié de $X_{\mathbb{R}}$. Pour $F \in Ob(D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}}))$. On pose (cf. [K 5]) :

$$RH_X(F) = DR_{\bar{X}}(TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)),$$

le foncteur $RH_X : D_{\mathbb{R}-c}^b(X)^\circ \rightarrow D(\mathcal{D}_X)$ étant aussi noté Ψ_X .

Si Z est un sous-ensemble analytique complexe fermé de X de codimension pure d on a

$$H^d RH_X(\mathbb{C}_Z) \simeq H_{[Z]}^d \mathcal{O}_X \quad (\text{cf. Kashiwara loc. cit.}),$$

(où le terme de droite est par définition $H_{[Z]}^d \mathcal{O}_X = \varinjlim_k Ext_{\mathcal{O}_X}^d(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Z^k, \mathcal{O}_X)$, \mathcal{J}_Z étant un idéal de définition de Z).

Plus généralement, pour tout $K \subset X$ localement fermé sous-analytique on posera par définition :

$$(1.2.1) \quad R\Gamma_{[K]} \mathcal{O}_X = RH_X(\mathbb{C}_K).$$

Il résulte donc de la définition qu'on a

$$RH_X(\mathbb{C}_K) \underset{\text{qis}}{\simeq} TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_K)^{(0,\cdot)},$$

le deuxième terme désignant le complexe de Dolbeault à coefficients dans $TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_K)$; comme $TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_K)$ est un faisceau mou, on aura aussi :

$$H_{[K]}^j(X; \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{def}}{=} H^j R\Gamma(X; RH_X(\mathbb{C}_K)) = H^j \left(\Gamma(X; TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_K)^{(0,\cdot)}) \right).$$

On utilisera également les caractérisations suivantes.

Pour tout ouvert sous analytique U de $X = \mathbb{C}^n$ et tout ouvert $\Omega \subset X$ on a

$$H^0 RH_X(\mathbb{C}_U) = \mathcal{O}_X^{t-U} \quad \left(\stackrel{\text{def}}{=} TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U) \cap \Gamma_U \mathcal{O}_X, \text{ cf. (1.1.8)} \right),$$

et

$$(1.2.2) \quad \Gamma(\Omega; H^0 RH_X(\mathbb{C}_U)) = \{f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X)\}; \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \text{ il existe } \nu > 0 \text{ tel que } d(x, \partial U)^\nu f(x) \text{ est borné sur } K \cap U\},$$

où d désigne ici une distance localement équivalente à la distance euclidienne sur \mathbb{C}^n (pour une démonstration voir [An 2, prop. 4.3]). La formule (3.1.3) plus bas montre aussi qu'on peut calculer $RH_X(\mathbb{C}_U)$ à l'aide des fonctions analytiques réelles prolongeables en distributions à travers ∂U .

On a aussi :

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} \text{si } U \subset X \text{ est un ouvert sous-analytique qui est de Stein alors} \\ RH_X(\mathbb{C}_U) \text{ est concentré en degré 0.} \end{cases}$$

En effet on a, pour $x \in \partial U$, $H^j RH_X(\mathbb{C}_U)_x = \varinjlim_{\substack{V \text{ ouvert} \\ V \ni x}} H^j(V; TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U)^{(0,\cdot)})$,

et, dans la limite inductive, on peut se borner aux ouverts V tels que $V \cap U$ soit pseudoconvexe et le résultat découle du théorème de Hörmander sur le $\bar{\partial}$ à croissance ([H1, theorem 2.6.12]).

On a le théorème d'image directe :

THÉOREME 1.2.1. (Kashiwara [K 5]). — *Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^0(Y_{\mathbb{R}})$ tels que f soit propre sur $\text{supp } F$. Alors*

$$Rf_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L RH_Y(F) \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \xrightarrow{\sim} RH_X(Rf_* F) [\dim_{\mathbb{C}} X].$$

On va construire également un morphisme d'image inverse (proposition 1.2.3 ci-dessous).

L'énoncé suivant généralise un lemme de [K 6].

LEMME 1.2.2. — Soit $Y \hookrightarrow X$ l'immersion d'une sous-variété Y de X de codimension complexe ℓ . Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. On a un isomorphisme naturel dans $D^b(\mathcal{D}_{Y \times \bar{Y}})$:

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) \simeq \mathcal{D}_{\bar{X} \leftarrow \bar{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{Y}}} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)[\ell].$$

Démonstration

Remarquons d'abord la formule :

$$(1.2.4) \quad \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow Y_{\mathbb{R}}} = \mathcal{D}_{\bar{X} \leftarrow \bar{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{Y}}} (\mathcal{D}_{Y \times \bar{Y}}[\ell]|_{Y_{\mathbb{R}}}),$$

en effet le premier terme de (1.2.4) est aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow Y \times \bar{Y}}|_{Y_{\mathbb{R}}}) &\simeq (\mathcal{D}_{Y \times \bar{X} \rightarrow X \times \bar{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow Y \times \bar{Y}})|_{Y_{\mathbb{R}}} \\ &\simeq (\mathcal{D}_{Y \times \bar{X} \rightarrow X \times \bar{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow Y \times \bar{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{Y \times \bar{X} \leftarrow Y \times \bar{Y}})|_{Y_{\mathbb{R}}} \\ &\simeq \mathcal{D}_{Y \times \bar{X} \leftarrow Y \times \bar{Y}}[\ell]|_{Y_{\mathbb{R}}} \simeq \mathcal{D}_{\bar{X} \leftarrow \bar{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{Y}}} (\mathcal{D}_{Y \times \bar{Y}}[\ell]|_{Y_{\mathbb{R}}}), \end{aligned}$$

où on a utilisé (0.2.2) et (0.2.4).

En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1.1.2. on montre $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F_{X \setminus Y}) = 0$. Alors en considérant le triangle distingué $F_{X \setminus Y} \rightarrow F \rightarrow F_Y \xrightarrow{+1}$, on en tire $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)|_Y \simeq \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F_Y)|_Y$. D'autre part, par le théorème d'image directe pour TH on peut écrire $TH_{X_{\mathbb{R}}}(F_Y)|_Y \simeq \mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow Y_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)$; alors l'isomorphisme de l'énoncé résulte de (1.2.4). ♡

PROPOSITION 1.2.3. — Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. Alors

(i) on a un morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}RH_X(F) \longrightarrow RH_Y(f^{-1}F).$$

(ii) Si de plus f est une immersion fermée, le morphisme précédent est un isomorphisme.

Démonstration

Soit x (resp. y) la dimension complexe de X (resp. Y). Notons $\alpha : Y \times \overline{Y} \rightarrow Y$ (resp. $\beta : X \times \overline{X} \rightarrow X$) la première projection et $f' \stackrel{\text{def}}{=} (f, f) : Y \times \overline{Y} \rightarrow X \times \overline{X}$.

On a par définition

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}RH_X(F) = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F))[-x]$$

(1.2.5)

$$\simeq \alpha^{-1}\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\alpha^{-1}f^{-1}\mathcal{D}_X} f'^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \overline{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} \beta^{-1}TH_{X_{\mathbb{R}}}(F))[-x]|_{Y_{\mathbb{R}}},$$

modulo l'identification $\mathcal{D}_Y = \alpha^{-1}\mathcal{D}_Y|_{Y_{\mathbb{R}}}$.

1) Supposons d'abord $f : Y \rightarrow X$ lisse. On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}RH_X(F) &\simeq \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_{\overline{X}}}(f^{-1}\mathcal{O}_{\overline{X}}, f^{-1}TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \\ &\longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathbb{Q}_Y}(f^{-1}\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \\ &\longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathbb{Q}_Y}(\mathcal{D}_{\overline{Y} \rightarrow \overline{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{\overline{X}}} f^{-1}\mathcal{O}_{\overline{X}}, \\ &\quad \mathcal{D}_{\overline{Y} \rightarrow \overline{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{\overline{X}}} (\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}TH_{X_{\mathbb{R}}}(F))) \\ &\longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathbb{Q}_Y}(\mathcal{O}_{\overline{Y}}, \mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}} \rightarrow X_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} f^{-1}TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \\ &\longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathbb{Q}_Y}(\mathcal{O}_{\overline{Y}}, TH_{Y_{\mathbb{R}}}(f^{-1}F)) = RH_Y(f^{-1}F), \end{aligned}$$

où la dernière flèche est donnée par (1.1.10).

2) Supposons maintenant que f est l'immersion d'une sous-variété fermée $f : Y \hookrightarrow X$. On a

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} RH_X(F) = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \overline{X}}|_{X_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)[-x] \right)|_Y,$$

et, appliquant la formule (0.2.6)bis dans la situation du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y \times \overline{X} & \longrightarrow & X \times \overline{X} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

la dernière expression s'identifie à

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{Y \hookrightarrow Y \times \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times \overline{X}}} \mathcal{D}_{Y \times \overline{X} \hookrightarrow X \times \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)[-x]|_Y \\ & \simeq \mathcal{D}_{Y \hookrightarrow Y \times \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times \overline{X}}} (\mathcal{D}_{Y \hookrightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \times \overline{X}}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)[-x]|_Y \\ & = \mathcal{D}_{Y \hookrightarrow Y \times \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times \overline{X}}} (\mathcal{D}_{Y \hookrightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F))[-x]|_Y \\ & \simeq \mathcal{D}_{Y \hookrightarrow Y \times \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times \overline{X}}} (\mathcal{D}_{\overline{X} \hookrightarrow \overline{Y}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{Y}}} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y))[-y]|_Y \\ & \simeq \mathcal{D}_{\text{pt} \hookrightarrow \overline{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} \mathcal{D}_{\overline{X} \hookrightarrow \overline{Y}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{Y}}} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)[-y]|_Y \\ & \simeq \mathcal{D}_{\text{pt} \hookrightarrow \overline{Y}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{Y}}} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)[-y] = RH_Y(F|_Y), \end{aligned}$$

où on a fait usage du lemme 1.2.2, d'où l'isomorphisme annoncé : $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} RH_X(F) \simeq RH_Y(F|_Y)$.

3) Dans le cas général on décompose $f = Y \rightarrow X$ en immersion puis submersion par le graphe $Y \hookrightarrow Y \times X \rightarrow X$ et la proposition résulte de 1) et 2).

♡

Soient maintenant X et Y deux variétés analytiques complexes. Le produit tensoriel externe de \mathcal{D} -Modules à droite étant défini, mutatis mutandis, et avec des notations analogues, comme dans le paragraphe 0.2, on a $\Omega_{\overline{X}} \overset{\boxtimes}{\underset{\mathcal{D}}{\Omega}} \Omega_{\overline{Y}} = \Omega_{\overline{X \times Y}}$ et de la Proposition 1.1.4 on tire la

PROPOSITION 1.2.4. — Soient $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$ et $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y_{\mathbb{R}})$. On a un morphisme canonique dans $D^b(\mathcal{D}_{X \times Y})$:

$$RH_X(F) \overset{\boxtimes}{\underset{\mathcal{D}}{\Omega}} RH_Y(G) \longrightarrow RH_{X \times Y}(F \boxtimes G).$$

1.2.2 - Relation entre TH et RH , valeur au bord et réalification tempérées

On a la formule suivante qui calcule TH à partir de RH (le chapitre 3 en donnera une version microlocale).

PROPOSITION 1.2.5. — *Soit M une variété analytique réelle, $X = M^{\mathbb{C}}$ un complexifié de M et notons j l'immersion $j : M \hookrightarrow X$. Pour tout $F \in \text{Ob } \mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M)$ on a un isomorphisme canonique*

$$(1.2.6) \quad TH_M(F) \simeq RH_X(j_*F) \otimes_{or_M} [\dim M]_M.$$

Démonstration

Remarquons que X (resp. \bar{X}) étant un complexifié de M on a un morphisme complexe canonique de conjugaison (défini au voisinage de M dans $X_{\mathbb{R}}$) $c : X \rightarrow \bar{X}$, donc un complexifié de l'injection $j : M \hookrightarrow X_{\mathbb{R}}$ est l'immersion diagonale $\iota : X \hookrightarrow X \times \bar{X}$, définie par $x \mapsto (x, c(x))$, et on a

$$\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow M} = \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow X} \Big|_M \otimes_{or_M}.$$

D'autre part, vu le théorème d'image directe, on a : $Rj_*(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_M} TH_M(F)) \simeq TH_{X_{\mathbb{R}}}(j_*F)$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} RH_X(j_*F) \Big|_M [\dim_{\mathbb{C}} X] &= j^{-1}(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \bar{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(j_*F)) \\ &\simeq j^{-1}(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \bar{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} Rj_*(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow M} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_M} TH_M(F))) \\ &\simeq (\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow X} \Big|_M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_M} TH_M(F)) \otimes_{or_M} \\ &\simeq TH_M(F) \otimes_{or_M}. \end{aligned}$$

♡

Pour $F = \mathbb{C}_M$ la proposition précédente se réduit à la formule "bien connue" (cf. [Ma]) :

$$\mathcal{D}b_M \simeq R\Gamma_{[M]} \mathcal{O}_X \otimes_{or_M} [\dim M]_M.$$

Remarquons que la proposition analogue où l'on remplace les distributions par les hyperfonctions est immédiate, et s'écrit

$$R\mathcal{H}om(F, \mathcal{B}_M) \simeq R\mathcal{H}om(j_*F, \mathcal{O}_X) \otimes \sigma_M[\dim M]|_M.$$

Remarque 1.2.6

Plus généralement, si X est une variété analytique complexe de dimension n et $j : M \hookrightarrow X$ l'immersion d'une sous-variété réelle de codimension quelconque d , on aurait démontré de manière analogue la formule

$$(1.2.7) \quad \begin{cases} \text{pour tout } F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(M) \text{ on a} \\ RH_X(j_*F) = Rj_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow M^{\mathbb{C}}}|_M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_M} TH_M(F) \right) \otimes \sigma_M[-n], \end{cases}$$

où $M^{\mathbb{C}} \rightarrow X$ désigne l'application holomorphe canonique déduite d'une complexification de j en $M^{\mathbb{C}} \rightarrow X \times \overline{X}$.

(On notera qu'ici $\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow M} = \mathcal{D}_{X \times \overline{X} \leftarrow M^{\mathbb{C}}}|_M \otimes \sigma_M$, vu les conventions du paragraphe 0.2.2.)

On n'utilisera pas ici cette formule (cf. cependant § 6.3.2).

Valeur au bord

On définit ci-dessous les analogues tempérés des morphismes de valeur au bord et de réalification de [S-K-K].

On adopte pour les valeurs au bord le cadre général élaboré par Schapira dans [S 2].

Si M est une variété réelle et $F \in \text{Ob } D^b(M)$ on notera $D_M F \stackrel{\text{def}}{=} R\mathcal{H}om(F, \mathbb{C}_M)$ le dual, qu'on désignera également par $F^* = D_M F$ s'il n'y a pas risque de confusion.

Rappelons que si $N \subset M$ est une sous-variété fermée on a

$$\mathbb{C}_N^* = R\Gamma_N \mathbb{C}_M \simeq \sigma_{N/M}[\dim_{\mathbb{R}} N - \dim_{\mathbb{R}} M].$$

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert. On dira ici que Ω est *ouvert à bord* \mathcal{C}^0 si la condition suivante est satisfaite

$$(1.2.8) \quad \Omega \text{ est l'intérieur d'une sous-variété topologique à bord.}$$

Soit maintenant X une variété complexe de dimension n , et soit $\Omega \subset X$ un ouvert à bord C^0 .

Soit M une sous-variété analytique réelle fermée de X de codimension d et telle que

$$M \subset \partial\Omega.$$

La flèche canonique $\mathbb{C}_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathbb{C}_M$ définit par dualité^(†) la flèche

$$(1.2.9) \quad \sigma_M[-d] \simeq \sigma_{M/X}[-d] \longrightarrow (\mathbb{C}_{\bar{\Omega}})^* \simeq \mathbb{C}_{\Omega},$$

d'où un morphisme $RH_X(\mathbb{C}_{\Omega}) \rightarrow RH_X(\mathbb{C}_M) \otimes \sigma_M[d]$ dont la cohomologie en degré 0 est par définition le *morphisme de valeur au bord*

$$(1.2.10) \quad \mathcal{O}_X^{t-\Omega} \xrightarrow{b_{\Omega}} H_{[M]}^d \mathcal{O}_X \otimes \sigma_M.$$

On note de la même manière la flèche de valeur de bord de [S-K-K] et [S 2]

$$(1.2.11) \quad \Gamma_{\Omega} \mathcal{O}_X \xrightarrow{b_{\Omega}} H_M^d \mathcal{O}_X \otimes \sigma_M$$

obtenue en appliquant le foncteur $R\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$ à (1.2.9), et celle-ci est compatible à (1.2.10) via la transformation de foncteurs $RH_X(\cdot) \rightarrow R\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$.

Ces morphismes sont \mathcal{D} -linéaires.

Si M est une sous-variété générique, le terme de droite de (1.2.10) (resp. (1.2.11)) est le faisceau des CR-distributions (resp. CR-hyperfonctions) sur M (pour les CR-distributions cela résulterait déjà de la formule (1.2.7), mais on trouvera plus généralement au paragraphe 6.3.2 un énoncé microlocal).

Réalification

(†) On laisse au lecteur le soin de vérifier les assertions suivantes (qui résultent de l'emploi du complexe dualisant).

Si Ω est un ouvert de $X = \mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est une variété topologique, on a l'équivalence

$$(\Omega \text{ vérifie la condition (1.2.8)}) \iff ((R\Gamma_{\bar{\Omega}}\mathbb{C}_X)|_{\partial\Omega} = 0),$$

et si cette condition est vérifiée on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\partial\Omega/X} \text{ est trivial et } (R\Gamma_{\Omega}\mathbb{C}_X)|_{\partial\Omega} = \mathbb{C}_{\partial\Omega}, \\ \mathbb{C}_{\bar{\Omega}} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\Omega}\mathbb{C}_X (= (\mathbb{C}_{\Omega})^*) \\ \mathbb{C}_{\Omega} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\bar{\Omega}}\mathbb{C}_X (= (\mathbb{C}_{\bar{\Omega}})^*). \end{array} \right.$$

Soient M une variété réelle de dimension n , $N \hookrightarrow M$ une sous-variété réelle de codimension d , et $Y \hookrightarrow X$ une complexification de $N \hookrightarrow M$. Le morphisme canonique $\mathbb{C}_Y \rightarrow \mathbb{C}_N$ produit par la dualité $(\cdot)^* = D_X(\cdot)$ le morphisme

$$(1.2.12) \quad or_N[-n] \longrightarrow \mathbb{C}_Y[-d],$$

d'où le morphisme de "réalisation"

$$(1.2.13) \quad \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \Gamma_N \mathcal{D}b_M \otimes or_{N/M},$$

obtenu en appliquant $RH_X(\cdot)$ à (1.2.12). Plus précisément on obtient

$$RH_X(\mathbb{C}_Y)[d] \simeq R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X[d] \simeq \mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow \\ RH_X(\mathbb{C}_N)[n] \otimes or_N \simeq TH_M(\mathbb{C}_N) \otimes or_{N/M} = \Gamma_N \mathcal{D}b_M \otimes or_{N/M},$$

où on a utilisé la proposition 1.2.5 avec $F = \mathbb{C}_N$.

Le morphisme de réalisation de [S-K-K]

$$\mathcal{B}_{Y|X}^\infty \longrightarrow \Gamma_N \mathcal{B}_M \otimes or_{N/M}$$

obtenu par application de $RHom(\cdot, \mathcal{O}_X)$ à (1.2.12) est injectif (cf. loc. cit.) et induit (1.2.13). Ces morphismes sont \mathcal{D} -linéaires.

1.3. - Le cas \mathbb{C} -constructible

Notons d'abord que dans le cas \mathbb{C} -constructible les propriétés d'image inverse et de produit tensoriel externe peuvent être considérablement renforcées grâce à la "correspondance de Riemann-Hilbert". On note :

$D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ la sous-catégorie de $D^b(X)$ des objets à cohomologie \mathbb{C} -constructible,

$RegHol(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $Mod(\mathcal{D}_X)$ des \mathcal{D}_X -modules holonômes réguliers,

$D_{r-h}^b(X)$ la sous-catégorie de $D^b(\mathcal{D}_X)$ des objets à cohomologie holonôme régulière,

et si \mathcal{M} est un objet de $D^b(\mathcal{D}_X)$ on pose $Sol(\mathcal{M}) = RHom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$.

Rappelons que les foncteurs (contravariants)

$$\mathcal{M} \in Ob D_{r-h}^b(\mathcal{D}_X) \mapsto Sol_X(\mathcal{M}) \in Ob D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$$

et

$$F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X) \mapsto RH_X(F) \in \text{Ob } D_{r-h}^b(\mathcal{D}_X)$$

sont bien définis et sont quasi-inverses l'un de l'autre, [K 1], [K 3], [K 5],

(cf. aussi [Me] pour une autre version de cette correspondance).

On désignera ici par $\text{Perv}(X)$ la sous-catégorie de $D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ équivalente par le foncteur de cohomologie modérée $RH_X(\cdot)$ à $\text{Reghol}(\mathcal{D}_X)$; id est, si $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$, on a $F \in \text{Ob}(\text{Perv}(X))$ si et seulement si $RH_X(F)$ est concentré en degré zéro.

COROLLAIRE 1.3.1. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$, $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(Y)$, alors

$$RH_X(F) \boxtimes_{\mathcal{D}} RH_Y(G) \xrightarrow{\sim} RH_{X \times Y}(F \boxtimes G)$$

Démonstration

Posant $\mathcal{M} = RH_X(F)$, $\mathcal{N} = RH_Y(G)$, il suffit d'appliquer le foncteur $RH_{X \times Y}(\cdot)$ aux membres de l'égalité suivante

$$\text{Sol}_{X \times Y}(\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}) = (\text{Sol}_X \mathcal{M}) \boxtimes (\text{Sol}_Y \mathcal{N}), \quad \text{cf. [K-K 2] (voir aussi [Me]).}$$

♡

COROLLAIRE 1.3.2. — Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$. Alors

$$\mathcal{D}_Y \rightarrow_X \bigotimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^L f^{-1} RH_X(F) \xrightarrow{\sim} RH_Y(f^{-1}F).$$

Démonstration

Il suffit de montrer que le morphisme donné par la proposition 1.2.3 est un isomorphisme quand f est une submersion, puisque si f est une immersion, l'isomorphisme est déjà assuré dès que F est \mathbb{R} -constructible (proposition

1.2.3). Supposons donc f lisse; la propriété étant locale sur Y on peut supposer $Y = Z \times X$, f étant la deuxième projection. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}RH_X(F) &= \mathcal{O}_{Z \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} RH_X(F) \\ &\simeq RH_{Z \times X}(\mathbb{C}_Z \boxtimes F) = RH_Y(f^{-1}F), \end{aligned}$$

vu le corollaire 1.3.1.

♡

Rappelons enfin que si $F \in Ob D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ et $G \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$ on a

$$(1.3.1) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(RH_X(F), RH_X(G)) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(G, F) \text{ (cf. [K 5]).}$$

Plus généralement Björk a montré le

THÉORÈME 1.3.3 ([Bj 2], [Bj 3]). — Soient $F \in Ob D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ et $G \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$, alors

- (i) $RH_X(F) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} TH_{X_{\mathbb{R}}}(G) \xrightarrow{\sim} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F \otimes G),$
- (ii) $RH_X(F) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{O}_X} RH_X(G) \xrightarrow{\sim} RH_X(F \otimes G).$

Remarquons que le morphisme canonique du (ii) s'obtient en utilisant (0.2.7) puis les propositions 1.2.4 et 1.2.3; le morphisme canonique du (i) résulte de (ii) par la proposition 1.2.5.

2. - MICROLOCALISATION TEMPÉRÉE DES DISTRIBUTIONS

On définit les notions de spécialisation et microlocalisation tempérées du foncteur TH le long d'une sous-variété ainsi que la version microlocale du foncteur TH (paragraphe 2.1, 2.2, 2.3). La définition qu'on donne ici de la spécialisation tempérée, plus compliquée a priori que celle indiquée dans la première note de [An.1] (rappelée dans la remarque 2.1.16), a l'avantage de rendre les opérations plus limpides (paragraphe 2.4). On suivra en général les notations et définitions de [K-S 2], [K-S 3].

2.1. - Spécialisation tempérée des distributions

Soient X une variété analytique réelle de dimension n , Y une sous-variété de codimension ℓ dans X , $T_Y X \xrightarrow{\tau}$ le fibré normal.

On considère l'éclatement réel de X le long de Y ("déformation au fibré normal"), i.e. on se donne en particulier une variété analytique $\tilde{T}_Y X$, une application $(p, t) : \tilde{T}_Y X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ et une action du groupe $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur $\tilde{T}_Y X$, $(s, \tilde{x}) \rightarrow s \cdot \tilde{x}$, qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} p^{-1}(X \setminus Y) & \text{est isomorphe à } (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (X \setminus Y) \\ t^{-1}(c) & \text{est isomorphe à } X \text{ pour tout } c \neq 0 \\ t^{-1}(0) & \text{est isomorphe à } T_Y X \end{cases}$$

et, notant s l'injection $T_Y X \hookrightarrow \tilde{T}_Y X$, Ω l'ouvert $\Omega = \{t > 0\} \subset \tilde{T}_Y X$, j l'injection $j : \Omega \hookrightarrow \tilde{T}_Y X$, $\tilde{p} = p \circ j$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T_Y X & \xleftarrow{s} & \tilde{T}_Y X & \xleftarrow{j} & \Omega \\ \tau \downarrow & & p \downarrow & \swarrow \tilde{p} & \\ Y & \xleftarrow{\quad} & X & & \end{array}$$

On écrira le plus souvent dans la suite \tilde{X} au lieu de $\tilde{T}_Y X$. On note θ le générateur infinitésimal de l'action de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur \tilde{X} , i.e. θ est le champ de vecteur défini par $\tilde{x} \in \tilde{X} \mapsto \theta_{\tilde{x}} = \frac{d}{ds}(s \cdot \tilde{x})|_{s=1}$. Sur $T_Y X$, θ induit le champ d'Euler.

Soit $x = (x', x'')$ un système de coordonnées locales sur un ouvert U de X où Y est définie par $x' = 0$ et notons (t, \tilde{x}', x'') le système de coordonnées de $p^{-1}(U) = \mathbb{R} \times U$; alors t est la projection $(t, \tilde{x}', x'') \in \mathbb{R} \times U \mapsto t \in \mathbb{R}$ et p l'application $(t, \tilde{x}', x'') \mapsto (t\tilde{x}', x'')$; l'action de $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est définie par $s \cdot (t, \tilde{x}', x'') = (s^{-1}t, s\tilde{x}', x'')$. Dans ces coordonnées on aura donc

$$\theta = \langle \tilde{x}', D_{\tilde{x}'} \rangle - tD_t.$$

Remarquons que si $f \in \mathcal{A}_{\tilde{X}}$ on a $\theta \cdot f = 0$ si et seulement si f est localement constante sur les fibres de p .

On utilisera aussi les faits suivants :

1) L'orientation relative $or_{\tilde{X}/X}$ est triviale, i.e. $or_{\tilde{X}/X} \simeq \mathbb{C}_{\tilde{X}}$.

2) Le fibré $\Omega_{\tilde{X}/X}$ des formes relatives est trivial, i.e. il y a un isomorphisme canonique (de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}$ -modules) $\Omega_{\tilde{X}/X} \simeq \mathcal{A}_{\tilde{X}}$.

Vérifions ce deuxième point (dont résulte le premier). Sur un ouvert de coordonnées U de X comme ci-dessus, la forme relative $v = dt \wedge d\tilde{x}' \wedge dx'' \otimes (dx' \wedge dx'')^{\otimes -1}$ engendre $\Omega_{\tilde{X}/X} = \Omega_{\tilde{X}} \otimes_{p^{-1}\mathcal{A}_X} p^{-1}\Omega_X^{\otimes -1}$ comme $\mathcal{A}_{\tilde{X}}$ -module, d'où un isomorphisme $\varphi_U : \mathcal{A}_{\tilde{X}}|_U \rightarrow \Omega_{\tilde{X}/X}|_U$. Remarquons que sur $t \neq 0$ on a $v = t^{-\ell} dt \wedge d(t\tilde{x}') \wedge dx'' \otimes (dx' \wedge dx'')^{\otimes -1}$ (ℓ est la codimension de Y dans X et $x' = t\tilde{x}'$). Soit maintenant U' un autre ouvert de coordonnées, et soient v' et $\varphi_{U'}$ les objets construits de manière analogue à v et φ_U ; alors sur l'ouvert $(U \cap U') \setminus \{t = 0\}$ on a, la coordonnée t étant canonique, l'identification $v = t^{-\ell} dt = v'$ (comme sections de $\mathcal{A}_{\tilde{X}}$ -modules), d'où $\varphi_U^{-1} \varphi_{U'} = \text{Id}$ sur $(U \cap U') \setminus \{t = 0\}$, donc sur $U \cap U'$.

LEMME 2.1.1. — On a un morphisme canonique de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -modules à droite :

$$\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}},$$

et c'est un isomorphisme en dehors de $T_Y X$.

Démonstration

Soient $1_{\tilde{X} \rightarrow X}$ la section canonique de $\mathcal{D}_{\tilde{X} \rightarrow X}$ et $v \in \Omega_{\tilde{X}/X}$ la forme relative canonique; alors $1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes v$ est une section globale qui engendre $\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} = \mathcal{D}_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes_{p^{-1}\mathcal{A}_X} \Omega_{\tilde{X}/X}$, d'où le morphisme $\mathcal{D}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}$ défini par $1 \mapsto 1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes v$.

D'autre part, par définition de l'action des \mathcal{D} -modules à droite, on a

$$(1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes v) \cdot_{\text{def}} \theta = (-\theta \cdot 1_{\tilde{X} \rightarrow X}) \otimes v + 1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes (v \cdot \theta) = 0 + 1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes (-L_\theta v),$$

où L_θ est la dérivée de Lie ($[L_\theta, d] = 0$). On a $L_\theta v \simeq L_\theta(t^{-\ell} dt) = (L_\theta t^{-\ell}) dt + t^{-\ell} L_\theta(dt) = (\theta t^{-\ell}) dt + t^{-\ell} d(\theta t) = lt^{-\ell} dt - t^{-\ell} dt = (\ell - 1)t^{-\ell} dt$. On trouve donc $(1_{\tilde{X} \rightarrow X} \otimes v) \cdot (\theta + \ell - 1) = 0$, et le morphisme canonique $\mathcal{D}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}$ induit le morphisme de l'énoncé.

Ecrivons alors $\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} = \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X} \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X} \times X}} \mathcal{D}_{\tilde{X} \times X \leftarrow \tilde{X}}$ où $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times X$ est l'immersion $\tilde{X} \xrightarrow{\sim} \Delta \rightarrow \tilde{X} \times X$, Δ le graphe de p , et $\tilde{X} \times X \rightarrow X$ la projection, et plaçons-nous dans un système de coordonnées locales comme plus haut. On a $\Delta = \{(t, x', x'', y', y'') \in \tilde{X} \times X; y' = tx'; y'' = x''\}$, et

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \simeq (\mathcal{D}_{\tilde{X} \times X} / (D_t, D_{x'}, D_{x''}) \mathcal{D}_{\tilde{X} \times X}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X} \times X}} (\mathcal{D}_{\tilde{X} \times X} / \mathcal{D}_{\tilde{X} \times X} (y' - tx', y'' - x'')).$$

Soit Z la variété $\tilde{X} \times X$ munie des coordonnées (t, x', x'', z', y'') où $z' = y' - tx'$; alors $\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}$ s'identifie à

$$(\mathcal{D}_Z / (tD_{z'} - D_{x'}, \langle x', D_{z'} \rangle - D_t, D_{x''}) \mathcal{D}_Z) \otimes_{\mathcal{D}_Z} (\mathcal{D}_Z / \mathcal{D}_Z (z', y'' - x'')),$$

et on voit sur cette formule que pour $t \neq 0$ ce $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -module à droite est bien isomorphe à $\mathcal{D}_{\tilde{X}} / (\theta + \ell - 1) \mathcal{D}_{\tilde{X}}$ (mais $\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}$ n'est même pas cohérent au voisinage de la section nulle de $T_Y X$ (d'équations $t = 0, x' = 0$)).

♡

LEMME 2.1.2. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(\tilde{X})$. Le morphisme précédent induit les isomorphismes

$$(i) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH_{\tilde{X}}(F_{\Omega}) \xleftarrow{\sim} (\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH_{\tilde{X}}(F_{\Omega}),$$

(ii)

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L R\mathcal{H}om(F_{\Omega}, \mathcal{D}b_{\tilde{X}}) \xleftarrow{\sim} (\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L R\mathcal{H}om(F_{\Omega}, \mathcal{D}b_{\tilde{X}}).$$

Démonstration

(i) Soit \mathcal{L} le complexe borné de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -modules à droite défini par le triangle distingué

$$\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{+1}.$$

Posons $G = F_{\Omega}$. On a un triangle distingué

$$(\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) \longrightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) \xrightarrow{+1},$$

et on doit montrer $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) = 0$.

1) Fixons $j_0 \in \mathbb{Z}$ et montrons d'abord $(H^{j_0}\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) = 0$. Soit d'abord \mathcal{M} un sous $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -Module cohérent de $H^{j_0}\mathcal{L}$: comme \mathcal{M} est à support dans $\partial\Omega$ (lemme 2.1.1), un théorème de Kashiwara affirme que \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{M} = \iota_*(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_{\partial\Omega}}^L \mathcal{D}_{\partial\Omega \rightarrow \tilde{X}})$ où \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_{\partial\Omega}$ -Module cohérent et ι l'immersion fermée $\iota : \partial\Omega \hookrightarrow \tilde{X}$.

On a donc $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) = \iota_*(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L \mathcal{D}_{\partial\Omega \rightarrow \tilde{X}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) = 0$, puisque l'action de t est un isomorphisme de $TH(G) = TH(G_{\Omega})$.

Alors, comme $H^{j_0}\mathcal{L}$ est quasi-cohérent sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$, ce qui précède implique $(H^{j_0}\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^L TH(G) = 0$ (écrivant $H^{j_0}\mathcal{L} = \varinjlim_j \mathcal{M}_j$ avec \mathcal{M}_j , $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -cohérent, et $TH(G) \simeq_{\text{qis}} F$ où F est un complexe d'objets $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -plats, on a

$\mathcal{M}_j \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}} F \simeq_{\text{qis}} \mathcal{M}_j \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G) = 0 \quad \forall j$, donc $H^i((H^{j_0} \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G)) = H^i((H^{j_0} \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}} F) = \varinjlim_j H^i(\mathcal{M}_j \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}} F) = 0, \quad \forall i$.

2) On a alors $(\tau^{\leq j} \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, puisqu'en utilisant le point 1 et le triangle distingué $\tau^{\leq j-1} \mathcal{L} \rightarrow \tau^{\leq j} \mathcal{L} \rightarrow H^j \mathcal{L} \xrightarrow{+1}$, on obtient $(\tau^{\leq j-1} \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G) \simeq (\tau^{\leq j} \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G)$; conclusion par récurrence croissante puisque $\tau^{\leq j} \mathcal{L} = 0$ pour $j \ll 0$.

3) De 2) résulte $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{x}}}^{\text{L}} TH(G) = 0$ puisque $\tau^{\leq j} \mathcal{L} = \mathcal{L}$ pour $j \gg 0$.

La démonstration de (ii) est analogue, t induisant également un isomorphisme sur $R\mathcal{H}om(G, \mathcal{D}b_X)$.

DÉFINITION ET PROPOSITION 2.1.3. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\text{R-c}}^b(X)$. On pose

$$T^{-\nu_Y} TH_X(F) = s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\text{L}} TH_{\tilde{X}}((p^1 F)_\Omega) \right).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} T^{-\nu_Y} TH_X(F) &= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\text{L}} TH_{\tilde{X}}((p^{-1} F)_\Omega) \right) [-1] \\ &= s^{-1} \left((\mathcal{D}_{\tilde{X}} / (\theta + \ell - 1) \mathcal{D}_{\tilde{X}}) \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\text{L}} TH_{\tilde{X}}((p^{-1} F)_\Omega) \right) [-1] \\ &= s^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}(\mathcal{D}_{\tilde{X}} / \mathcal{D}_{\tilde{X}} \theta, TH_{\tilde{X}}((p^{-1} F)_\Omega)). \end{aligned}$$

Dans la suite on écrira souvent, pour simplifier, $p^1 F_\Omega$, $p^{-1} F_\Omega$, au lieu de $(p^1 F)_\Omega$, $(p^{-1} F)_\Omega$, etc. On écrira aussi $T^{-\nu_Y} TH(F)$ au lieu de $T^{-\nu_Y} TH_X(F)$ s'il n'y a pas risque de confusion.

Démonstration

Comme \tilde{p} est lisse et $or_{\tilde{X}/X}$ trivial, on a $(p^1 F)_\Omega = j_! j^{-1} (p^1 F) = j_! \tilde{p}^1 F = j_! (\tilde{p}^{-1} F \otimes or_{\Omega/X}[1]) = j_! (\tilde{p}^{-1} F)[1] = (p^{-1} F)_\Omega[1]$, d'où la première égalité à démontrer.

La seconde égalité résulte du lemme précédent, et la troisième de ce que les complexes

$$(\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}((p^{-1}F)_{\Omega})[-1]$$

et

$$0 \rightarrow TH_{\tilde{X}}((p^{-1}F)_{\Omega}) \xrightarrow{\theta} TH_{\tilde{X}}((p^{-1}F)_{\Omega}) \rightarrow 0$$

sont quasi-isomorphes.

♡

Pour tout sous-ensemble $A \subset X$ on désigne par $C_Y(A)$ le cône normal de A le long de Y ; par définition

$$C_Y(A) = T_Y X \cap \overline{\tilde{p}^{-1}(A)} \quad (\text{cf. [K-S 3]}).$$

PROPOSITION 2.1.4. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

(i) $T-\nu_Y TH(F)$ est un objet de $D_{\text{coni}}^b(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$.

(ii) Soit $v \in T_Y X$. On a :

$$H^j(T-\nu_Y TH(F))_v = \varinjlim \{H^j R\Gamma(X; TH_X(F_U))\};$$

U ouvert sous-analytique de X tel que $v \notin C_Y(X \setminus U)$.

En particulier $\text{supp}(T-\nu_Y TH(F)) \subset C_Y(\text{supp}(F))$.

(iii) Plus généralement, si A est un sous-ensemble conique de $T_Y X$ qui est image réciproque par $\overset{\circ}{\gamma} : \overset{\circ}{T}_Y X \rightarrow \mathbf{S}_Y X := \overset{\circ}{T}_Y X / \mathbb{R}_{>0}$ d'un compact, on a :

$$H^j R\Gamma(A; T-\nu_Y TH(F)) = \varinjlim \{H^j R\Gamma(X; TH_X(F_U))\};$$

U ouvert sous-analytique de X tel que $A \cap C_Y(X \setminus U) = \emptyset$.

Démonstration

(i) Sur la première formule de la définition 2.1.3 on voit que $T-\nu_Y TH(F)$ est un objet de $D^+(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$, et, sur la seconde, que c'est un objet de $D_{\text{coni}}^+(T_Y X)$, puisque θ induit le champ d'Euler sur $T_Y X$. Il résulte par exemple de la formule du germe (ii) que $T-\nu_Y TH(F)$ est quasi-isomorphe à un complexe borné.

(ii) Soit V un voisinage ouvert sous-analytique relativement compact de $v \in T_Y X$ dans \tilde{X} qui vérifie la condition suivante :

(2.1.1) la restriction de p à $\Omega \cap V$ est à fibres connexes.

Posons $U = p(\Omega \cap V)$ et remarquons d'abord que l'on a :

$$(2.1.2) \quad Rp_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}((p^1 F)_{\Omega \cap V}) \right) \simeq TH_X(F_U).$$

En effet $\Omega \cap V$ étant relativement compact, on peut appliquer le théorème d'image directe de TH et le premier membre de (2.1.2) est isomorphe à $TH_X(Rp_!((p^1 F)_{\Omega \cap V}))$. Il reste à voir que $Rp_!((p^1 F)_{\Omega \cap V}) = F_U$. Notons $p_V : \Omega \cap V \rightarrow U$ la restriction de p , j_V l'immersion ouverte $\Omega \cap V \hookrightarrow \tilde{X}$ et j_U l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$. Comme p_V est à fibre homéomorphe à \mathbb{R} on peut écrire $j_U^{-1} F = Rp_{V!} p_V^! j_U^{-1} F$, donc $F_U = Rj_{U!} j_U^{-1} F = R(j_U \circ p_V)_! (j_U \circ p_V)^! F = R(p \circ j_V)_! (p \circ j_V)^! F = Rp_!((p^1 F)_{\Omega \cap V})$. D'où (2.1.2).

Rappelons les deux propriétés suivantes (cf. [K-S 2, 3]).

(2.1.3) $v \in T_Y X$ a une base de voisinages V ouverts sous-analytiques et relativement compacts qui vérifient (2.1.1).

(2.1.4) Soit $v \in T_Y X$. On a les implications :

1) (V est un voisinage ouvert de v dans \tilde{X}) \implies (l'ouvert $U = p(\Omega \cap V)$ est tel que $v \notin C_Y(X \setminus U)$).

2) (U est un ouvert de X tel que $v \notin C_Y(X \setminus U)$) \implies ($\tilde{p}^{-1}(U) = \Omega \cap V$ où V est un voisinage de v).

Soit \mathcal{V} l'ensemble des voisinages ouverts sous-analytiques relativement compacts $V \ni v$ qui vérifient la condition (2.1.1). Comme $\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ est $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -cohérent on peut écrire, vu la formule du germe de $TH_{\tilde{X}}$,

$$\begin{aligned} & H^j(T^{-\nu_Y} TH(F))_v \\ &= \varinjlim_{\mathcal{V}} H^j R\Gamma \left(\tilde{X}; (\mathcal{D}_{\tilde{X}}/(\theta + \ell - 1)\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}(p^1 F_{\Omega \cap V}) \right) \\ &= \varinjlim_{\mathcal{V}} H^j R\Gamma \left(\tilde{X}; \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}(p^1 F_{\Omega \cap V}) \right) \\ &= \varinjlim_{\mathcal{V}} H^j R\Gamma \left(X; Rp_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}(p^1 F_{\Omega \cap V}) \right) \right), \end{aligned}$$

et on conclut par la formule (2.1.2) en utilisant les propriétés (2.1.3) et (2.1.4).

La preuve de (iii) est similaire (cf. aussi la remarque 2.1.16).

♡

COROLLAIRE 2.1.5. — *Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$. Alors $T-\nu_Y TH(F)$ est concentré en degré 0.*

Vu la formule du germe, cela résulte de ce que $TH_X(F_U)$ est un faisceau mou.

On identifiera $T-\nu_Y TH(F)$ à $H^0(T-\nu_Y TH(F))$ quand F est un faisceau \mathbb{R} -constructible, (F étant lui-même identifié à un complexe concentré en degré 0). Le foncteur de catégories triangulées $T-\nu_Y TH(\cdot) : D_{\mathbb{R}-c}^b(X)^\circ \rightarrow D_{\text{coni}}^+(T_Y X)$ transformant les objets concentrés en degré 0 en objets concentrés en degré 0, il induit un foncteur $\mathbb{R} - c(X)^\circ \rightarrow \text{Fais.coni}(T_Y X)$ et on a donc le :

COROLLAIRE 2.1.6. — *Le foncteur*

$$T-\nu_Y TH(\cdot) : \mathbb{R} - c(X)^\circ \longrightarrow \text{Fais.coni}(T_Y X)$$

est exact.

Remarque

Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$. Alors l'opérateur θ est surjectif sur le $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -Module à gauche $TH_{\tilde{X}}(p^{-1}F_\Omega)$. En effet, d'une part c'est clair en dehors de $\partial\Omega \cap p^{-1}(Y)$ et, d'autre part, le complexe

$$s^{-1}R\text{Hom}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}(\mathcal{D}_{\tilde{X}}/\mathcal{D}_{\tilde{X}}\theta, TH_{\tilde{X}}(p^{-1}F_\Omega))$$

n'est autre que $T-\nu_Y TH(F)$, lequel est concentré en degré 0.

Rappelons que pour tout $F \in \text{Ob } D^+(X)$ le spécialisé de F le long de Y , noté $\nu_Y F$, est l'objet de $D_{\text{coni}}^+(T_Y X)$ défini par

$$\nu_Y F \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1}Rj_*j^{-1}p^{-1}F \quad (= s^{-1}R\Gamma_\Omega p^{-1}F),$$

et que, pour $v \in T_Y X$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a $H^j(\nu_Y F)_v = \varinjlim H^j(U; F)$, où la limite inductive est prise sur les ouverts U de X tels que $v \notin C_Y(X \setminus U)$, et on peut aussi imposer à U d'être sous-analytique.

PROPOSITION 2.1.7. — (i) *Pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ on a un morphisme canonique*

$$T-\nu_Y TH(F) \rightarrow \nu_Y TH(F).$$

(ii) *Pour tout $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$ le morphisme précédent induit une injection sur la cohomologie en degré 0.*

Remarquons que si F est un faisceau \mathbb{R} -constructible sur X , $\nu_Y TH(F)$ est concentré en degré 0 puisque c'est le spécialisé d'un faisceau mou (ceci se voit sur la formule du germe de $\nu_Y TH(F)$), et il résultera donc de la proposition que $T-\nu_Y TH(F)$ s'identifie canoniquement à un sous-faisceau de $\nu_Y TH(F) \simeq H^0(\nu_Y TH(F))$, cf. aussi remarque et définition 2.1.15 et remarque 2.1.16.

Démonstration

On passe par le détour du lemme suivant.

LEMME 2.1.8. — (i) *Pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ on a un morphisme canonique*

$$T-\nu_Y TH(F) \rightarrow \nu_Y R\mathcal{H}om(F, Db_X).$$

(ii) *Pour tout $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$ le morphisme précédent induit une injection sur la cohomologie en degré 0.*

Démonstration du lemme

Montrons d'abord la formule :

$$(2.1.5) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} R\mathcal{H}om((p^1 F)_\Omega, Db_{\tilde{X}}) \simeq Rj_* \tilde{p}^{-1} R\mathcal{H}om(F, Db_X).$$

Comme l'action de $\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}}$ sur $R\mathcal{H}om((p^1 F)_\Omega, Db_{\tilde{X}})$ s'identifie à l'action d'un $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ -Module cohérent (lemme 2.1.2 (ii)), le premier terme de (2.1.5) est isomorphe à

$$\begin{aligned} & R\mathcal{H}om\left((p^1 F)_\Omega, \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} Db_{\tilde{X}}\right) \\ & \simeq Rj_* R\mathcal{H}om\left(j^{-1} p^1 F, j^! \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} Db_{\tilde{X}}\right)\right) \\ & = Rj_* R\mathcal{H}om\left(\tilde{p}^1 F, \mathcal{D}_{X \leftarrow \Omega} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_\Omega} Db_\Omega\right) \\ & \simeq Rj_* R\mathcal{H}om\left(\tilde{p}^{-1} F \otimes or_{\Omega/X}[1], \tilde{p}^{-1} Db_X \otimes or_{\Omega/X}[1]\right) \\ & \simeq Rj_* R\mathcal{H}om(\tilde{p}^{-1} F, \tilde{p}^{-1} Db_X) \simeq Rj_* \tilde{p}^{-1} R\mathcal{H}om(F, Db_X). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que \tilde{p} étant lisse à fibre homéomorphe à \mathbb{R} , on a $\mathcal{D}_{X \leftarrow \Omega} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_\Omega} \mathcal{D}b_\Omega = \tilde{p}^{-1} \mathcal{D}b_X \otimes or_{\Omega/X}[1]$. D'où (2.1.5).

Le morphisme canonique $TH(p^!F_\Omega) \rightarrow R\mathcal{H}om(p^!F_\Omega, \mathcal{D}b_{\tilde{X}})$ induit donc le morphisme

$$\begin{aligned} T-\nu_Y TH(F) &= \\ s^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH(p^!F_\Omega)) &\longrightarrow s^{-1}Rj_* \tilde{p}^{-1} R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X) \\ &= \nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X). \end{aligned}$$

Soit maintenant $F \in Ob(\mathbb{R} - c(X))$; le morphisme $H^0(T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow H^0(\nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$ est injectif comme on le voit aussitôt sur les formules des germes de ces deux faisceaux. D'où le lemme 2.1.8. ♡

Fin de la démonstration de la proposition 2.1.7

1) Soit $F \in Ob(\mathbb{R} - c(X))$. On a par construction de $TH(F)$ un morphisme $TH(F) \rightarrow R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)$, d'où le morphisme $\nu_Y TH(F) \rightarrow \nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)$.

Soit $v \in T_Y X$ et notons \mathcal{U} le système inductif des ouverts sous-analytiques $U \subset X$ tels que $v \notin C_Y(X \setminus U)$. On a $H^0(\nu_Y TH(F))_v = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \Gamma(U; TH(F))$ et $H^0(\nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \Gamma(U; \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$ donc le morphisme

$$(2.1.6) \quad H^0(\nu_Y TH(F)) \longrightarrow H^0(\nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$$

est injectif.

Alors $H^0(\nu_Y TH(F))$ et $H^0(T-\nu_Y TH(F))$ s'identifient, par (2.1.6) et lemme 2.1.8 (ii), à deux sous-faisceaux du même faisceau $H^0(\nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$. Vu la formule des germes et la remarque en (1.1.9) (i), on a, pour tout $v \in T_Y X$, $H^0(T-\nu_Y TH(F))_v \hookrightarrow H^0(\nu_Y TH(F))_v$. Par conséquent le morphisme $H^0(T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow H^0(\nu_Y R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$ se factorise par $H^0(\nu_Y TH(F))$.

Cela définit donc une transformation de foncteurs $T-\nu_Y TH(\cdot) \rightarrow \nu_Y TH(\cdot)$ de $\mathbb{R} - c(X)^\circ$ dans $\text{Fais.coni}(T_Y X)$.

2) Le foncteur $\nu_Y TH(\cdot) : \mathbb{R} - c(X)^\circ \rightarrow \text{Fais.coni}(T_Y X)$ est exact pour la même raison que $T-\nu_Y TH(\cdot) : \mathbb{R} - c(X)^\circ \rightarrow \text{Fais.coni}(T_Y X)$. Alors

on définit une transformation de foncteurs $T^{-\nu_Y} TH(\cdot) \rightarrow \nu_Y TH(\cdot)$ de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)^\circ \simeq D^b(\mathbb{R}-c(X))^\circ$ dans $D_{\text{coni}}^+(T_Y X)$ en dérivant la précédente. D'où la proposition 2.1.7.

♡

PROPOSITION 2.1.9. — *Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R}-c(X))$. Le faisceau $T^{-\nu_Y} TH(F)$ est acyclique sur tout ouvert conique de $T_Y X$.*

LEMME 2.1.10. — $\overset{\circ}{\gamma}_* T^{-\nu_Y} TH(F)$ est un faisceau mou sur $\mathbf{S}_Y X$.

Démonstration du lemme 2.1.10

Posons $T(F) = \overset{\circ}{\gamma}_* T^{-\nu_Y} TH(F)$. Soit A, B compacts de $\mathbf{S}_Y X$, $B \subset A$. Pour tout ouvert sous-analytique V de $T_Y X$ tel que $\gamma^{-1}(B) \cap C_Y(X \setminus V) = \emptyset$ on peut en trouver un autre, U , tel que $V \subset U$ et $\gamma^{-1}(A) \cap C_Y(X \setminus V) = \emptyset$: alors de l'injection $F_V \rightarrow F_U$ on déduit la surjection $TH(F_U) \rightarrow TH(F_V)$ et comme $TH(F_V)$ est mou on a la surjection $\Gamma(X; TH(F_U)) \rightarrow \Gamma(X; TH(F_V))$. Vu la proposition 2.1.4 (iii) on en déduit donc que la restriction $\Gamma(A; T(F)) \rightarrow \Gamma(B; T(F))$ est surjective. Comme $\mathbf{S}_Y X$ est dénombrable à l'infini, on en déduit que $T(F)$ est c -mou, donc mou.

♡

LEMME 2.1.11. — *Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R}-c(X))$. Alors*

$$(i) \quad T^{-\nu_Y} TH(F)|_Y \simeq TH(F)|_Y \text{ et}$$

(ii) *le morphisme $\tau_* T^{-\nu_Y} TH(F) \rightarrow \overset{\circ}{\tau}_* T^{-\nu_Y} TH(F)$ induit une suite exacte de faisceaux mous sur Y*

$$(2.1.7) \quad 0 \rightarrow TH(F_Y)|_Y \rightarrow TH(F)|_Y \rightarrow \overset{\circ}{\tau}_* T^{-\nu_Y} TH(F) \rightarrow 0.$$

Ici, comme dans la suite, on identifie Y à la section nulle de $T_Y X$.

Démonstration du lemme 2.1.11

Montrons que le morphisme injectif $T^{-\nu_Y} TH(F)|_Y \rightarrow \nu_Y TH(F)|_Y = TH(F)|_Y$ est en fait bijectif. Soient $x \in Y$, U un voisinage ouvert de x dans

X et $u \in \Gamma(U; TH(F))$; soit alors V un voisinage ouvert sous-analytique de x tel que $V \subset \subset U$: alors $u|_Y \in \Gamma(X; TH(F_V))$ vu (1.1.9)(ii) ce qui définit bien une section de $T-\nu_Y TH(F)_x$ puisque $C_Y(X \setminus V)$ est vide au-dessus d'un voisinage de x . D'où (i).

Le noyau de $\tau_* T-\nu_Y TH(F) \rightarrow \overset{\circ}{\tau}_* T-\nu_Y TH(F)$ est alors $\Gamma_Y(T-\nu_Y TH(F)|_Y) = (\Gamma_Y TH(F))|_Y = TH(F_Y)|_Y$ d'où la suite exacte $0 \rightarrow TH(F_Y)|_Y \xrightarrow{\alpha} \overset{\circ}{\tau}_* T-\nu_Y TH(F)$. Montrons que α est surjective. Soit $x \in Y$. Remarquons que pour tout ouvert U de X on a l'équivalence

$$\left(\overset{\circ}{\tau}^{-1}(x) \cap C_Y(X \setminus U) = \emptyset \right) \iff (U \cup Y \text{ est un voisinage de } x).$$

On a par conséquent :

$$\Gamma(\overset{\circ}{\tau}^{-1}(x); T-\nu_Y TH(F)) = \varinjlim \{ \Gamma(X; TH(F_{U \setminus Y})) ; U \text{ ouvert sous-analytique, } x \in U \},$$

et la surjectivité de α_x résulte de la remarque en (1.1.9) (iii). Enfin, dans la suite exacte (2.1.7), les deux premiers faisceaux sont mous, donc aussi le troisième.

♡

Démonstration de la proposition 2.1.9

Soit U un ouvert conique de $T_Y X$. On doit montrer $H^j(U; T-\nu_Y TH(F)) = 0$, $\forall j > 0$. Posons $U_1 = U \cap \overset{\circ}{T}_Y X$ et $U_2 = \tau^{-1}(U \cap Y)$; alors U_1 et U_2 sont des ouverts coniques et $U = U_1 \cup U_2$. Ecrivons la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée à cette décomposition de U :

$$(2.1.8) \quad \begin{cases} \cdots \rightarrow H^j(U; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow H^j(U_1; T-\nu_Y TH(F)) \oplus H^j(U_2; T-\nu_Y TH(F)) \\ \rightarrow H^j(U_1 \cap U_2; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow H^{j+1}(U; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow \cdots \end{cases}$$

Remarquons que pour tout ouvert conique V de $\overset{\circ}{T}_Y X$ on a $R\Gamma(\overset{\circ}{\gamma}(V); \overset{\circ}{\gamma}_* T-\nu_Y TH(F)) \simeq R\Gamma(V; T-\nu_Y TH(F))$ (cf. chapitre 0) en particulier, $H^j(V; T-\nu_Y TH(F)) = 0$ pour $j > 0$, vu le lemme 2.1.10; c'est donc le cas pour $V = U_1$ et $V = U_1 \cap U_2$. D'autre part, on a :

$$R\Gamma(U_2; T-\nu_Y TH(F)) \simeq R\Gamma(U \cap Y; TH(F)|_Y)$$

en particulier $H^j(U_2; T^{-\nu_Y} TH(F)) = 0$ pour $j > 0$. De (2.1.8) on tire $H^j(U; T^{-\nu_Y} TH(F)) = 0$ pour $j \geq 2$, et (2.1.8) se réduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma(U; T^{-\nu_Y} TH(F)) \rightarrow \Gamma(U_1; T^{-\nu_Y} TH(F)) \oplus \Gamma(U_2; T^{-\nu_Y} TH(F)) \\ \xrightarrow{\beta} \Gamma(U_1 \cap U_2; T^{-\nu_Y} TH(F)) \rightarrow H^1(U; T^{-\nu_Y} TH(F)) \rightarrow 0.$$

Il reste à voir que β est surjectif.

Appliquons le foncteur $\Gamma(U \cap Y, \cdot)$ à la suite exacte de faisceaux mous (2.1.7). Comme $U_2 \setminus Y = U_1 \cap U_2$, on obtient la suite exacte $0 \rightarrow \Gamma(U \cap Y; TH(F_Y)) \rightarrow \Gamma(U_2; T^{-\nu_Y} TH(F)) \rightarrow \Gamma(U_1 \cap U_2; T^{-\nu_Y} TH(F)) \rightarrow 0$; en particulier, β est surjectif.

♡

De l'utilisation de la proposition 2.1.9 et de (2.1.7) résulte alors le

COROLLAIRE 2.1.12. — *Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$. Pour tout entier $j > 0$ on a $H^j(R\Gamma_Y T^{-\nu_Y} TH(F)) = 0$.*

COROLLAIRE 2.1.13. — *Soit $F \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a :*

- (i) $R\tau_* T^{-\nu_Y} TH(F) \simeq T^{-\nu_Y} TH(F)|_{T^*Y} \simeq TH(F)|_Y$
- (ii) $R\Gamma_Y T^{-\nu_Y} TH(F) \simeq TH(F_Y)|_Y$,

et on a un triangle distingué

$$TH(F_Y)|_Y \rightarrow TH(F)|_Y \rightarrow R\tau_*^\circ T^{-\nu_Y} TH(F) \xrightarrow{+1}.$$

Démonstration du corollaire 2.1.13

Le foncteur $T^{-\nu_Y} TH(\cdot)$ est exact sur $\mathbb{R} - c(X)$ et, de la proposition 2.1.9 (resp. du corollaire 2.1.12), résulte que le foncteur $\tau_* \circ T^{-\nu_Y} TH(\cdot)$ (resp. $\Gamma_Y \circ T^{-\nu_Y} TH(\cdot)$) est exact sur $\mathbb{R} - c(X)$. Les isomorphismes (i) et (ii) sur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ en résultent, puisque pour tout $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$, on a $\tau_* T^{-\nu_Y} TH(F) \simeq TH(F)|_Y$ (resp. $\Gamma_Y T^{-\nu_Y} TH(F) \simeq TH(F_Y)|_Y$), vu le lemme 2.1.11.

♡

Notations et définitions 2.1.14

On pose

$$T^{-\nu_Y} \mathcal{D}b_X \stackrel{\text{def}}{=} T^{-\nu_Y} TH(\mathbb{C}_X)$$

(et on l'identifie au faisceau $H^0(T^{-\nu_Y} TH(\mathbb{C}_X))$). Soit maintenant \mathcal{F} un sous-faisceau de $\mathcal{D}b_X$ et supposons \mathcal{F} acyclique sur les ouverts de X ; alors $\nu_Y \mathcal{F}$ est concentré en degré 0 et on a une injection $H^0(\nu_Y \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\nu_Y \mathcal{D}b_X)$. On pose alors $T^{-\nu_Y} \mathcal{F} = H^0(\nu_Y \mathcal{F}) \cap T^{-\nu_Y} \mathcal{D}b_X$. Par exemple $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty, H_{\text{loc}}^s$ (resp. $\mathcal{F} = \mathcal{A}_X$) vérifient la condition parce qu'ils sont mous (resp. en vertu du théorème de Grauert).

Remarque 2.1.15

On a $R\tau_* T^{-\nu_Y} \mathcal{D}b_X \simeq (\Gamma_Y \mathcal{D}b_X)|_Y$ vu le corollaire 2.1.13, alors que la cohomologie de $R\tau_* \nu_Y \mathcal{D}b_X$ n'est pas triviale en général ($R\Gamma_Y \mathcal{D}b_X$ n'est pas concentré en degré 0 en général).

Soit $v \in T_Y X$. Soit \mathcal{V} l'ensemble des ouverts sous-analytiques V de X tels que $v \notin C_Y(X \setminus V)$. On a $(T^{-\nu_Y} \mathcal{D}b_X)_v = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{S}'_X(V)$, $(T^{-\nu_Y} \mathcal{A}_X)_v = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} \Gamma(X; \mathcal{A}_X^{t-V})$ (notation de (1.1.8)), mais $(\nu_Y \mathcal{D}b_X)_v = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} \mathcal{D}b_X(V)$.

Remarque 2.1.16

Indiquons comment on peut construire plus simplement $T^{-\nu_Y} TH(F)$ sans utiliser la théorie des \mathcal{D} -modules (cf. la première note de [An 1]).

Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$. Pour tout compact $A \subset \mathbf{S}_Y(X)$ on pose :

$$T(F)(A) = \varinjlim \{ \Gamma(X; TH(F_U)); U \text{ ouvert sous-analytique de } X \text{ tel que } \overset{\circ}{\gamma}^{-1}(A) \cap C_Y(X \setminus U) = \emptyset \},$$

et pour tout ouvert Ω de $\mathbf{S}_Y X$ on pose :

$$T(F)(\Omega) = \varinjlim \{ T(F)(A); A \subset \Omega, A \text{ compact} \}.$$

On montre alors assez facilement, en utilisant la théorie du foncteur TH , que le préfaisceau ainsi défini est en fait un faisceau mou sur $\mathbf{S}_Y X$ et qu'on a $\Gamma(A; T(F)) = T(F)(A)$ pour tout A compact $\subset \mathbf{S}_Y X$. Alors $T(F)$ s'identifie à un sous-faisceau de $\overset{\circ}{\tau}_* H^0 \nu_Y TH(F)$ et on dit qu'une section u de $H^0 \nu_Y TH(F)$

est tempérée si $u|_{\circ}^{T_Y X}$ est une section de $\overset{\circ}{\tau}^{-1} T(F)$. Alors on pose ici par définition $T-\nu_Y TH(F) =$ le faisceau des sections tempérées de $H^0 \nu_Y TH(F)$.

L'exactitude du foncteur $\mathbb{R} - c(X)^\circ \rightarrow \text{Fais.coni}(T_Y X)$ obtenu résulte ici de la formule du germe et le foncteur dérivé, foncteur de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)^\circ$ dans $D_{\text{coni}}^b(T_Y X)$, coïncide avec celui défini au début du chapitre vu les propositions 2.1.4 et 2.1.7.

2.2. - Microlocalisation tempérée des distributions

Soit X une variété analytique réelle, Y une sous-variété de X et $T_Y^* X \xrightarrow{\pi} Y$ le fibré conormal.

DÉFINITION 2.2.1. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On pose

$$T-\mu_Y TH_X(F) \stackrel{\text{def}}{=} \left(T-\nu_Y TH_X(F) \right)^\wedge,$$

où $(\cdot)^\wedge$ désigne la transformation de Fourier $D_{\text{coni}}^+(T_Y X) \rightarrow D_{\text{coni}}^+(T_Y^* X)$. On pose également

$$T-\mu_Y Db_X \stackrel{\text{def}}{=} (T-\nu_Y Db_X)^\wedge = T-\mu_Y TH_X(\mathbb{C}_X),$$

et, pour tout sous-faisceau \mathcal{F} de Db_X qui est acyclique sur tout ouvert,

$$T-\mu_Y \mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} (T-\nu_Y \mathcal{F})^\wedge.$$

On regardera aussi $T-\mu_Y TH_X(F)$ comme objet de $D_{\text{coni}}^+(T^* X)$ porté par $T_Y^* X$. On écrira aussi $T-\mu_Y TH(F)$ au lieu de $T-\mu_Y TH_X(F)$ s'il n'y a pas risque de confusion.

On a une transformation de foncteurs :

$$(2.2.1) \quad T-\mu_Y TH(\cdot) \rightarrow \mu_Y TH(\cdot),$$

assurée par la proposition 2.1.7, puisque, par définition de la microlocalisation de Sato on a $\mu_Y(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (\nu_Y(\cdot))^\wedge$.

PROPOSITION 2.2.2. — Soit $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$. Alors $T-\mu_Y TH(F)$ est concentré en degré 0 et on a

$$H^0 T-\mu_Y TH(F) \xrightarrow{\sim} H^0 \mu_Y TH(F).$$

Démonstration

Soit U un ouvert de T_Y^*X . Considérons d'abord la suite exacte longue de cohomologie à support dans le polaire U° de U du faisceau $T-\nu_Y TH(F)$: comme $T_Y X$ et $T_Y X \setminus U^\circ$ sont des ouverts coniques de $T_Y X$, il résulte de la proposition 2.1.9 qu'elle se réduit à la suite exacte

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \Gamma_{U^\circ}(T_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow \Gamma(T_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow \\ \Gamma(T_Y X \setminus U^\circ; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow H_{U^\circ}^1(T_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Rappelons d'autre part que si l'on suppose de plus que U est un ouvert convexe de T_Y^*X (i.e. convexe dans la fibre de π), on a $R\Gamma(U; T-\nu_Y TH(F))^\wedge \simeq R\Gamma_{U^\circ}(T_Y X; T-\nu_Y TH(F))$. Soit alors $p \in T_Y^*X$ et passons dans (2.2.2) à la limite inductive sur l'ensemble Σ des voisinages ouverts convexes U de p ; on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(T-\mu_Y TH(F))_p \longrightarrow \Gamma(T_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \xrightarrow{\alpha} \varinjlim_{\Sigma} \Gamma(T_Y X \setminus U^\circ; T-\nu_Y TH(F)) \longrightarrow H^1(T-\mu_Y TH(F))_p \longrightarrow 0,$$

et $H^j(T-\mu_Y TH(F))_p = 0$, $\forall j \geq 2$. Pour voir que $H^1(T-\mu_Y TH(F))_p = 0$ montrons que α est surjective.

1) Supposons d'abord $p \in Y \cong T_Y^*Y$: alors pour tout $U \in \Sigma$ on a l'égalité $T_Y X \setminus U^\circ = T_Y X \setminus Y$ au voisinage de p et la surjectivité de α résulte de (2.1.7).

2) Soit $p \in \overset{\circ}{T}_Y^*X$. Soit $\{p\}^{\circ\alpha}$ l'antipodal du polaire de $\{p\}$ et posons $A = \gamma(\{p\}^{\circ\alpha} \setminus Y)$. A est un compact de $\mathbf{S}_Y X$ et les ensembles $\gamma(T_Y X \setminus U^\circ)$, $U \in \Sigma$, forment une base de voisinages de A ; par conséquent

$$\varinjlim_{\Sigma} \Gamma(T_Y X \setminus U^\circ; T-\nu_Y TH(F)) = \Gamma(A; \overset{\circ}{\gamma}_* T-\nu_Y TH(F))$$

et la flèche α se factorise en $\alpha = \beta\beta'$ avec :

$$\Gamma(T_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \xrightarrow{\beta'} \Gamma(\overset{\circ}{T}_Y X; T-\nu_Y TH(F)) \xrightarrow{\beta} \Gamma(A; \overset{\circ}{\gamma}_* T-\nu_Y TH(F)).$$

Mais β est surjective parce que $\overset{\circ}{\gamma}_* T^{-\nu_Y} TH(F)$ est mou (lemme 2.1.10) et la surjectivité de β' résulte du lemme 2.1.11,(ii). Ce qui achève de montrer que $T^{-\mu_Y} TH(F)$ est concentré en degré 0 .

Montrons que le morphisme canonique $T^{-\mu_Y} TH(F) \rightarrow \mu_Y TH(F)$ induit un isomorphisme sur la cohomologie en degré 0. Soit $p \in T_Y^* X$. Rappelons qu'on a $\tau_* T^{-\nu_Y} TH(F) \xrightarrow{\sim} \tau_* \nu_Y TH(F) \simeq TH(F)|_Y$. Alors $H^0(T^{-\mu_Y} TH(F))_p = \varinjlim_{\Sigma} \Gamma_{U^\circ}(T_Y X; T^{-\nu_Y} TH(F)) \simeq \varinjlim_{\Sigma} \Gamma_{U^\circ}(T_Y X; \nu_Y TH(F)) = H^0(\mu_Y TH(F))_p$.

♡

Si F est un faisceau \mathbb{R} -constructible on identifiera donc $T^{-\mu_Y} TH(F)$ à $H^0 T^{-\mu_Y} TH(F)$.

COROLLAIRE 2.2.3. — *Le foncteur*

$$T^{-\mu_Y} TH(\cdot) : \mathbb{R} - c(X)^\circ \longrightarrow \text{Fais.coni}(T_Y^* X)$$

est exact.

PROPOSITION 2.2.4. — *Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.*

(i) *$T^{-\mu_Y} TH(F)$ est un objet de $D_{\text{coni}}^b(\pi^{-1} \mathcal{D}_X)$.*

(ii) *Soit $p \in T_Y^* X$. On a*

$$H^j(T^{-\mu_Y} TH(F))_p = \varinjlim TH(H^j(F)_Z)_{\pi(p)}$$

où Z parcourt l'ensemble des fermés sous-analytiques de X tels que :

$$C_Y(Z)_{\pi(p)} \subset \{v \in (T_Y X)_{\pi(p)} ; \langle p, v \rangle > 0\} \cup \{0\}.$$

(iii) *Soit $K \subset T_Y^* X$, K convexe compact tel que $K \cap K^a = \emptyset$. On a :*
 $H^j(K; T^{-\mu_Y} TH(F)) = \varinjlim_{V, Z} \{H^j R\Gamma(X; TH(F_{V \cap Z}))\}$; V ouvert sous-analytique
 de X tel que $V \cap Y \supset \pi(K)$, Z fermé sous-analytique de X tel que $K \subset \text{Int}(C_Y(Z)^\circ)$.

(iv) $R\pi_* T^{-\mu_Y} TH(F) = TH_X(F_Y)$.

(v) Soit ℓ la codimension de Y dans X , alors

$$R\Gamma_Y T^{-\mu_Y} TH(F) \simeq TH_X(F) \otimes \sigma_{r_{Y/X}}[-\ell],$$

et on a un triangle distingué

$$TH_X(F) \otimes \sigma_{r_{Y/X}}[-\ell] \longrightarrow TH_X(F_Y) \longrightarrow R\overset{\circ}{\pi}_* T^{-\mu_Y} TH(F) \xrightarrow{+1}.$$

Démonstration

(i) Est évident.

(ii) Pour tout $j \geq 0$ on peut écrire $H^j(\mu_Y TH(F))_p = \varinjlim_Z H_Z^j TH(F)_{\pi(p)}$

où les Z sont comme dans (ii).

Supposons d'abord $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$ alors vu la proposition 2.2.2 on a

$$(2.2.3) \quad (T^{-\mu_Y} TH(F))_p = H^0(\mu_Y TH(F))_p = \varinjlim_Z TH(F_Z)_{\pi(p)}.$$

Soit maintenant F^* un complexe de $D^b(\mathbb{R} - c(X))$, alors $H^j(T^{-\mu_Y} TH(F^*))_p = T^{-\mu_Y} TH(H^j(F^*))_p$ vu le corollaire 2.2.3, et on applique la formule (2.2.3) à $H^j(F^*)$ au lieu de F , d'où (ii).

(iii) En raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 2.2.2, on remarque d'abord que, pour $F \in \text{Ob}(\mathbb{R} - c(X))$, $R\Gamma(K; T^{-\mu_Y} TH(F))$ est concentré en degré 0, puis, que

$$\begin{aligned} \Gamma(K; T^{-\mu_Y} TH(F)) &= H^0(K; \mu_Y TH(F)) \\ &= \varinjlim_{V, Z} \{H^0(V; TH(F_Z)); V, Z \text{ comme dans la proposition 2.2.4 (iii)}\} \\ &= \varinjlim_{V, Z} H^0(X; TH(F_V \cap Z)). \end{aligned}$$

Pour $F \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ on obtient la formule annoncée en raisonnant comme ci-dessus en (ii).

(iv) et (v) résultent des égalités $R\pi_* T^{-\mu_Y} TH(F) = R\Gamma_Y T^{-\nu_Y} TH(F)$ et $R\Gamma_Y T^{-\nu_Y} TH(F) = R\Gamma(T_Y X; T^{-\nu_Y} TH(F)) \otimes \sigma_{r_{T_Y X/Y}}[-\ell]$, et du corollaire 2.1.13.

♡

Remarque 2.2.5

(i) On a $R\Gamma_Y T-\mu_Y TH(F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Y \mu_Y TH(F)$.

(ii) En général, pour $F \in Ob(\mathbb{R} - c(X))$, $T-\mu_Y TH(F)$ n'est pas acyclique sur les ouverts convexes de T_Y^*X (en effet $H^1(U; T-\mu_Y TH(F)) = H_{U^0}^1(T_Y X; T-\nu_Y TH(F))$ pour tout ouvert convexe U).

2.3. - Le foncteur $T-\mu hom(\cdot, Db)$

Soit X une variété analytique réelle, $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ le fibré cotangent q_1 et q_2 les première et deuxième projections de $X \times X$, Δ la diagonale de $X \times X$. On identifie T^*X à $T_\Delta^*(X \times X)$ par la première projection de $T^*(X \times X) = T^*X \times T^*X$.

Rappelons que pour $F \in Ob D^b(X)$ et $G \in Ob D^+(X)$ on pose

$$\mu hom(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_\Delta R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F, q_1^!G) \quad (\text{cf. [K-S 2,3]});$$

c'est un objet de $D_{\text{coni}}^+(T^*X)$.

Prenons maintenant $G = Db_X$. Comme on a

$$\begin{aligned} q_1^!Db_X &= q_1^{-1}Db_X \otimes or_X[\dim X] \\ &= R\mathcal{H}om_{q_2^{-1}\mathcal{D}_X}(q_2^{-1}\mathcal{A}_X, Db_{X \times X}) \otimes or_X[\dim X] \\ &= \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} Db_{X \times X}, \end{aligned}$$

on a aussi

$$\mu hom(F, Db_X) = \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \mu_\Delta R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F, Db_{X \times X}).$$

DÉFINITION 2.3.1. — Soit $F \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On pose :

$$T-\mu hom(F, Db_X) = \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T-\mu_\Delta TH_{X \times X}(q_2^{-1}F).$$

Ainsi $T-\mu hom(F, \mathcal{D}_X)$ est un objet de $D_{\text{coni}}^+(\pi^{-1}\mathcal{D}_X)$ et, en considérant la suite de morphismes

$$T-\mu_\Delta TH(q_2^{-1}F) \longrightarrow \mu_\Delta TH(q_2^{-1}F) \longrightarrow \mu_\Delta R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F, Db_{X \times X}),$$

on voit qu'on a une transformation de foncteurs :

$$(2.3.1) \quad T-\mu hom(\cdot, Db_X) \longrightarrow \mu hom(\cdot, Db_X).$$

PROPOSITION 2.3.2. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a

- (i) $R\pi_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \simeq TH_X(F)$,
- (ii) $R\pi_! T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \simeq F^* \otimes \mathcal{D}b_X$.

On a donc un triangle distingué

$$F^* \otimes \mathcal{D}b_X \longrightarrow TH_X(F) \longrightarrow R\pi_*^\circ T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \xrightarrow{+1}.$$

Démonstration

(i) Comme $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X)$ est conique, on a : $R\pi_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \simeq T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X)|_{T_X^*}$, c'est aussi

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^L T\text{-}\mu_\Delta TH(q_2^{-1}F)|_\Delta = \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^L TH_{X \times X}(q_2^{-1}F_\Delta)|_\Delta,$$

vu la proposition 2.2.4(iv). Comme q_1 est finie sur $\text{supp}((q_2^{-1}F)_\Delta)$ on peut appliquer le théorème d'image directe de Kashiwara et le dernier terme des égalités ci-dessus est canoniquement isomorphe à $TH_X(Rq_{1*}(q_2^{-1}F_\Delta)) = TH_X(F)$, d'où (i).

(ii) On sait qu'un objet de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ est cohomologiquement constructible au sens de Verdier [V], donc on a $R\pi_! \mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \simeq F^* \otimes \mathcal{D}b_X$ d'après [K-S 2] proposition 5.6.3.

Il suffit donc de démontrer que la transformation de foncteurs (2.3.1) induit l'isomorphisme

$$(2.3.2) \quad R\pi_! T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) \simeq R\pi_! \mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X)$$

Vu l'identification $T^*X \simeq T_\Delta^*(X \times X)$ on peut écrire (d'après la proposition 2.2.4(v)) :

$$\begin{aligned} R\pi_! T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_X) &= \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^L R\Gamma_\Delta T\text{-}\mu_\Delta TH_{X \times X}(q_2^{-1}F) = \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^L \left(TH_{X \times X}(q_2^{-1}F) \otimes \text{or}_{\Delta/X \times X}[-\dim X] \right). \end{aligned}$$

Soit $x \in X$ et \mathcal{V} une base de voisinages ouverts sous-analytiques relativement compacts de x . Pour tout entier j on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& H^j \left(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}(q_2^{-1}F) \right)_{(x,x)} \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(U \times V; \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}(q_2^{-1}F)) \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(X \times X; \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}((q_2^{-1}F)_{U \times V})) \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(X; Rq_{1*}(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}((q_2^{-1}F)_{U \times V}))) \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(X; TH_X(Rq_{1!}((q_2^{-1}F)_{U \times V}))) \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(U; TH_X(Rq_{1!}q_2^{-1}(F_V))),
\end{aligned}$$

où on a utilisé la cohérence de $\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X}$ sur $\mathcal{D}_{X \times X}$ et le théorème d'image directe.

D'autre part on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
& R\pi_! \mu hom(F, Db_X) \\
&= \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} (RHom(q_2^{-1}F, Db_{X \times X}) \otimes_{or_{\Delta/X \times X}})[- \dim X].
\end{aligned}$$

et on calcule de manière analogue

$$\begin{aligned}
& H^j \left(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} RHom(q_2^{-1}F, Db_{X \times X}) \right)_{(x,x)} \\
&= \varinjlim_{U, V \in \mathcal{V}} H^j R\Gamma(U; RHom(Rq_{1!}(q_2^{-1}(F_V)), Db_X)).
\end{aligned}$$

Or on a $TH_X(Rq_{1!}(q_2^{-1}(F_V))) = RHom(Rq_{1!}(q_2^{-1}(F_V)), Db_X)$, puisque $Rq_{1!}(q_2^{-1}(F_V))$ est représenté par un complexe de faisceaux constants de rang fini.

♡

Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie et γ un cône convexe de X . On note X_γ l'espace X muni de la topologie d'espace vectoriel dont les ouverts sont les ouverts de X invariants par γ , et φ_γ l'application continue $\varphi_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$ (la "γ-topologie" de [K-S 2,3]).

PROPOSITION 2.3.3. — Soient $X = \mathbb{R}^n$, $F \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, $p = (x; \xi) \in T^*X$. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a :

$$H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \text{Db}_X))_p = \varinjlim_{U, \Lambda} H^j R\Gamma(U; TH_X(\varphi_\Lambda^{-1} R\varphi_{\Lambda^*}(F_U))) ,$$

où la limite inductive est prise sur les (U, Λ) tels que U est un voisinage ouvert sous-analytique de x et Λ est un cône convexe propre fermé sous-analytique de \mathbb{R}^n tel que $\Lambda \subset \text{Int}(\{\xi\}^{\text{oa}}) \cup \{0\}$.

On a désigné par $\text{Int}(\cdot)$ l'intérieur, i.e. $\text{Int}(\{\xi\}^{\text{oa}}) = \{v \in \mathbb{R}^n; \langle v, \xi \rangle < 0\}$.

Remarquons que l'expression précédente a un sens puisque $\varphi_\Lambda^{-1} R\varphi_{\Lambda^*} F_U \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, comme il résulte par exemple d'une formule de [K-S 2,3], rappelée en (2.3.3) ci-dessous, Λ étant sous-analytique.

Démonstration

La démonstration adapte celle de [K-S 3, Proposition 4.4.4]. On peut supposer $\xi \neq 0$ vu la proposition 2.3.2. En vertu de la proposition 2.2.4(ii) on peut écrire, $\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X}$ étant cohérent sur $\mathcal{D}_{X \times X}$,

$$\begin{aligned} & H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \text{Db}_X))_p \\ &= \varinjlim_{U, V, Z} H^j R\Gamma\left(X \times X; \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}((q_2^{-1} F)_{(U \times V) \cap Z})\right), \end{aligned}$$

où la limite inductive est prise sur les (U, V, Z) où U et V sont des voisinages ouverts sous-analytiques de x dans X et Z est un fermé sous-analytique de $X \times X$ tel que $C_\Delta(Z)_{(x,x)} \subset \text{Int}(\{\xi, -\xi\}^{\text{o}}) \cup \{0\}$, et on peut se restreindre à ne considérer que des ensembles Z de la forme $Z = Z_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times X; y - x \in \Lambda\}$ où Λ est un cône convexe propre fermé sous-analytique dans \mathbb{R}^n , tel que $\Lambda \subset \text{Int}(\{\xi\}^{\text{oa}}) \cup \{0\}$ (comme $Z_\Lambda = Z_\Lambda + \Delta$, les Z_Λ vérifient la condition ci-dessus sur Z et d'autre part ils forment une famille cofinale de tels Z).

On peut, de plus, prendre U et V relativement compacts. Alors remarquant que q_1 est propre sur $\text{supp}(q_2^{-1} F_{(X \times V) \cap Z_\Lambda})$, on peut écrire, vu le théorème d'image directe,

$$\begin{aligned} & H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \text{Db}_X))_p \\ &= \varinjlim_{U, V, \Lambda} H^j R\Gamma(X; Rq_{1*}(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} TH_{X \times X}((q_2^{-1} F)_{(U \times V) \cap Z_\Lambda}))) \\ &= \varinjlim_{U, V, \Lambda} H^j R\Gamma(X; TH_X(Rq_{1*}((q_2^{-1} F)_{(U \times V) \cap Z_\Lambda}))). \end{aligned}$$

Remarquons que $Rq_{1!}((q_2^{-1}F)_{(U \times V) \cap Z_\Lambda}) = Rq_{1!}((q_2^{-1}(F_V))_{(U \times X) \cap Z_\Lambda}) = (Rq_{1!}((q_2^{-1}(F_V))_{Z_\Lambda}))_U = (\varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}(F_V))_U$, où l'on a utilisé la formule de [K-S 2, 3] suivante

$$(2.3.3) \quad Rq_{1!}((q_2^{-1}F_V)_{Z_\Lambda}) = \varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}(F_V).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_X))_p &= \varinjlim_{U, V, \Lambda} H^j R\Gamma(X; TH_X((\varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}(F_V))_U)) \\ &= \varinjlim_{U, \Lambda} H^j R\Gamma(U; TH_X(\varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}(F_U))). \end{aligned}$$

♡

COROLLAIRE 2.3.4. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a :

$$\text{supp}(T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_X)) \subset SS(F).$$

On a désigné par $SS(F)$ le micro-support de F (cf. loc. cit.).

Démonstration

On peut supposer $X = \mathbb{R}^n$. Soit $p = (x_0; \xi_0) \in T^*X$, $p \notin SS(F)$. On peut supposer $\xi_0 \neq 0$ vu la proposition 2.3.2. On peut trouver un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage conique convexe V de ξ_0 tels que $SS(F) \cap (U \times V) = \emptyset$. Pour tout cône Λ convexe propre fermé sous-analytique tel que $V^{oa} \subset \Lambda \subset \text{Int}(\{\xi_0\}) \cup \{0\}$ on a $SS(F) \cap (U \times \text{Int}(\Lambda^{oa})) = \emptyset$. Posons, pour $\epsilon > 0$, $\Omega = \Omega_\epsilon = \{x; \langle x - x_0, \xi_0 \rangle > -\epsilon\}$. On peut trouver un voisinage ouvert sous-analytique W de x et $\epsilon > 0$ tels que $X \subset\subset U$ et $W = \Omega \cap (W + \Lambda)$. On a $SS(F_\Omega) \cap (U \times \text{Int}(\Lambda^{oa})) = \emptyset$ comme il résulte de la proposition 4.3.2 de la loc.cit. Appliquant le théorème de propagation ([K-S 3, Proposition 5.2.1]) on obtient $(\varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}F_\Omega)|_{W+\Lambda} = 0$. Soit alors U' un ouvert convexe $U' \subset W + \Lambda$; on peut écrire $R\Gamma(U'; \varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}F_W) = R\Gamma(U' + \Lambda; F_W) = R\Gamma(U' + \Lambda; F_{\Omega \cap (W+\Lambda)}) = R\Gamma(U' + \Lambda; F_\Omega) = R\Gamma(U' + \Lambda; R\varphi_{\Lambda*}F_\Omega) = 0 = R\Gamma(U'; \varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}F_\Omega)$ (on a utilisé [K-S 3, Proposition 3.5.3]). On a donc $(\varphi_\Lambda^{-1}R\varphi_{\Lambda*}F_W)|_{W+\Lambda} = 0$. Il résulte alors de la formule du germe que $T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_X)_p = 0$, d'où le corollaire.

♡

COROLLAIRE 2.3.5. — Soit $X = \mathbb{R}^n$. Soient K un convexe fermé de \mathbb{R}^n et $p = (x_0; \xi_0) \in SS(\mathbb{C}_K)$. Alors on a :

$$H^0(T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_K, Db_X))_p = \varinjlim \Gamma(U; \Gamma_{K+\Lambda} Db_X),$$

où la limite inductive est prise sur les (U, Λ) , U voisinage ouvert de x_0 , Λ cône convexe fermé tel que $\Lambda \subset \{\eta; \langle \eta, \xi_0 \rangle > 0\} \cup \{0\}$.

Les autres groupes de cohomologie sont nuls.

Démonstration

(cf. [K-S 2] corollaire 5.5.9)

On peut supposer $\xi_0 \neq 0$. On a $K \subset \{x; \langle x - x_0, \xi_0 \rangle \geq 0\}$. On peut trouver un cône convexe propre fermé sous-analytique $\Lambda_1 \subset \text{Int}(\{\xi_0\}^{\text{oa}}) \cup \{0\}$ et un voisinage ouvert sous-analytique U de x_0 tels que $K \cap U = K \cap (U + \Lambda_1)$. Alors $(\varphi_{\Lambda_1}^{-1} R\varphi_{\Lambda_1*} \mathbb{C}_{K \cap U})|_U = \varphi_{\Lambda_1}^{-1} R\varphi_{\Lambda_1*} \mathbb{C}_K = \mathbb{C}_{K + \Lambda_1^a}$ d'où la conclusion par la formule du germe et en posant $\Lambda = \Lambda_1^a$.

♡

COROLLAIRE 2.3.6. — Soit Y une sous-variété fermée de X . Alors :

$$T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X) \simeq T\text{-}\mu_Y \mathcal{D}b_X.$$

Démonstration

Remarquons que $T\text{-}\mu_Y \mathcal{D}b_X$ est concentré en degré 0 (proposition 2.2.2) et que $T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X)$ est également concentré en degré 0; pour voir ce dernier point on peut supposer $X = \mathbb{R}^n$ et Y affine et alors cela résulte du corollaire 2.3.5. D'autre part on a un morphisme canonique $T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X) \rightarrow \mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X) \cong \mu_Y \mathcal{D}b_X$ (cf. (2.3.1)). Il induit un isomorphisme en degré 0 :

$$H^0(T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X)) \rightarrow H^0(\mu_Y \mathcal{D}b_X) \cong H^0(T\text{-}\mu_Y \mathcal{D}b_X);$$

en effet, pour le vérifier dans le germe en $p \in T^*X$, on peut supposer Y affine et appliquer le corollaire 2.3.5. De ce qui précède on déduit l'isomorphisme canonique $T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Y, \mathcal{D}b_X) \xrightarrow{\sim} T\text{-}\mu_Y \mathcal{D}b_X$.

♡

2.4. Opérations

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques réelles. On note respectivement $f'_Y, \tau_f, f', \rho_f, \varpi_f$, les applications canoniques $f'_Y : TY \rightarrow Y \times_X TX, \tau_f : Y \times_X TX \rightarrow TX, f' = \tau_f \circ f'_Y, \rho_f = {}^t f'_Y : Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y, \varpi_f : Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y$. On omettra souvent l'indice dans les notations ρ_f et ϖ_f .

Soit M (resp. N) une sous-variété de X (resp. Y). On suppose $f(N) \subset M$. Quand la confusion n'est pas possible on désigne également par $f'_Y, \tau_f, f', \rho_f, \varpi_f$ respectivement, les applications canoniques $f'_Y : T_N Y \rightarrow N \times_M T_M X, \tau_f : N \times_M T_M X \rightarrow T_M X, f' = \tau_f \circ f'_Y, \rho_f = {}^t f'_Y : N \times_M T^*X \rightarrow T^*_N Y, \varpi_f : N \times_M T^*X \rightarrow T^*_M X$. Soit $\tilde{X} = \tilde{T}_M X$ l'éclaté de X le long de M et notons respectivement $p_X, s_X, \tau_M, j_X, \tilde{p}_X$ les applications canoniques $p_X : \tilde{X} \rightarrow X, s_X : T_M X \hookrightarrow \tilde{X}, \tau_M = p_X \circ s_X, j_X : \Omega_X \hookrightarrow \tilde{X}, \tilde{p}_X = p_X \circ j_X$, où Ω_X est l'ouvert $\{t > 0\}$ de \tilde{X} . On utilisera les notations analogues pour l'éclaté $\tilde{Y} = \tilde{T}_N Y$ de Y le long de N . On désigne par \tilde{f}' l'application $\tilde{f}' : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ et par \tilde{f} sa restriction $\tilde{f} : \Omega_Y \rightarrow \Omega_X$. Rappelons qu'on a le diagramme commutatif suivant, où tous les carrés sont cartésiens (cf. [K-S 2, 3])

$$(2.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} T_N Y & \xrightarrow{s_Y} & \tilde{Y} & \xleftarrow{j_Y} & \Omega_Y & \xrightarrow{\tilde{p}_Y} & Y \\ f' \downarrow & & \downarrow \tilde{f}' & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ T_M X & \xrightarrow{s_X} & \tilde{X} & \xleftarrow{j_X} & \Omega_X & \xrightarrow{\tilde{p}_X} & X \end{array} .$$

Remarquons qu'on a en général pour $G \in Ob D(X)$

$$(2.4.2) \quad \tilde{f}'^{-1}((p_X^! g)_{\Omega_X}) \simeq (p_Y^! f^{-1} G)_{\Omega_Y} .$$

En effet, on a $\tilde{f}'^{-1} Rj_{X!} \tilde{p}_X^! G \simeq Rj_{Y!} \tilde{f}'^{-1} \tilde{p}_X^{-1} G[1] \simeq Rj_{Y!} \tilde{p}_Y^{-1} f^{-1} G[1] \simeq (p_Y^! f^{-1} G)_{\Omega_Y}$.

Rappelons également les deux définitions suivantes :

1) f est dite "clean" relativement à M si $f^{-1}(M)$ est une sous-variété et $(f'_Y)^{-1}(f^{-1}(M) \times_M TM) = T(f^{-1}(M))$; alors, si de plus $f^{-1}(M) = N$,

l'application $\tilde{Y} \rightarrow Y \times_X \tilde{X}$ est une injection propre et si, de plus, $Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée, $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ est une immersion fermée.

2) f est dite *transverse* à M si $TM + M \times_X f'(TY) = M \times_X TX$, et alors, si de plus $f^{-1}(M) = N$, on a $\tilde{Y} \simeq Y \times_X \tilde{X}$.

2.4.1. Images directes

PROPOSITION 2.4.1. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$. On fait les hypothèses suivantes; f est "clean" relativement à M , $f^{-1}(M) = N$ et f est propre sur $\text{supp}F$. Alors on a les isomorphismes canoniques :

$$(i) \quad Rf'_!(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L T-\nu_N TH(F)) \xrightarrow{\sim} T-\nu_M TH(Rf_*F),$$

$$(ii) \quad R\omega_{1\rho}^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L T-\mu_N TH(F)) \xrightarrow{\sim} T-\mu_M TH(Rf_*F).$$

On a commis l'abus de notation usuel qui consiste à omettre τ_N (resp. π_N , π_N désignant l'application $\pi_N : T_N Y \rightarrow N$) devant $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ et \mathcal{D}_Y dans l'expression (i) (resp. (ii)).

Démonstration

Remarquons d'abord que les hypothèses impliquent que \tilde{f}' est propre sur $\text{supp}(p_Y^! F_{\Omega_Y})$. On a en effet un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \tilde{X} & \xrightarrow{q_1} & Y \\ & \searrow \Phi & \nearrow p_Y \\ & & \tilde{Y} \\ & \swarrow \tilde{f}' & \searrow f \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p_X} & X \end{array} ,$$

où $\Phi : \tilde{Y} \rightarrow Y \times_X \tilde{X}$ est propre et f est propre sur $S \stackrel{\text{déf}}{=} \text{supp}F$; alors q_2 est propre sur $q_1^{-1}(S)$, $\tilde{f}' = q_2 \circ \Phi$ est propre sur $\Phi^{-1}q_1^{-1}(S) = p_Y^{-1}(S) =$

$\text{supp}(p_Y^{-1}F)$. Donc \tilde{f}' est propre sur $\text{supp}(p_Y^!F_{\Omega_Y}) \subset \text{supp}(p_Y^{-1}F)$. On en tire également :

$$(2.4.3) \quad R\tilde{f}'_*((p_Y^!F)_{\Omega_Y}) \simeq (p_X^!Rf_*F)_{\Omega_X};$$

en effet on a $R\tilde{f}'_*(p_Y^!F_{\Omega_Y}) = R\tilde{f}'_*Rj_{Y!}\tilde{p}_Y^!F = R\tilde{f}'_*Rj_{Y!}\tilde{p}_Y^!F \simeq Rj_{X!}R\tilde{f}'_!\tilde{p}_Y^!F$
 $= Rj_{X!}R\tilde{f}_*\tilde{p}_Y^!F \simeq Rj_{X!}\tilde{p}_X^!Rf_*F = (p_X^!Rf_*F)_{\Omega_X}$, (on a utilisé la propriété de \tilde{f} sur $\text{supp}(\tilde{p}_Y^!F)$).

Montrons (i). On a

$$\begin{aligned} Rf'_i\left(\tau_N^{-1}\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\tau_N^{-1}\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} T-\nu_N TH(F)\right) \\ &= Rf'_i\left(\tau_N^{-1}\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\tau_N^{-1}\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} \left(s_Y^{-1}\mathcal{D}_{Y\leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{Y}}(p_Y^!F_{\Omega_Y})\right)\right) \\ &\simeq s_X^{-1}R\tilde{f}'_i\left(p_Y^{-1}\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{p_Y^{-1}\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{Y\leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{Y}}(p_Y^!F_{\Omega_Y})\right) \\ &\simeq s_X^{-1}R\tilde{f}'_i\left(\tilde{f}'^{-1}\mathcal{D}_{X\leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\tilde{f}'^{-1}\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\tilde{X}\leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{Y}}(p_Y^!F_{\Omega_Y})\right) \\ &= s_X^{-1}\left(\mathcal{D}_{X\leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} R\tilde{f}'_i\mathcal{D}_{\tilde{X}\leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{Y}}(p_Y^!F_{\Omega_Y})\right), \end{aligned}$$

alors \tilde{f}' étant propre sur $\text{supp}(p_Y^!F_{\Omega_Y})$, il résulte du théorème d'image directe de Kashiwara, puis de (2.4.3) que le dernier terme des égalités précédentes est isomorphe à $s_X^{-1}(\mathcal{D}_{X\leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{X}}(R\tilde{f}'_*p_Y^!F_{\Omega_Y})) \simeq s_X^{-1}(\mathcal{D}_{X\leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} TH_{\tilde{X}}((p_X^!Rf_*F)_{\Omega_X})) = T-\nu_M TH(Rf_*F)$.

Montrons (ii). On applique la transformation de Fourier à (i) en remarquant que τ_f est un changement de base et f'_Y un morphisme de fibrés; on a donc

$$\begin{aligned} T-\mu_M TH(Rf_*F) &= \left(T-\nu_M TH(Rf_*F)\right)^\wedge \\ &\xleftarrow{\sim} \left(Rf'_i(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} T-\nu_N TH(F))\right)^\wedge \\ &\simeq R\omega_!\left(Rf'_{Y!}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} T-\nu_N TH(F))\right)^\wedge \\ &\simeq R\omega_!\rho^{-1}\left(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} T-\nu_N TH(F)\right)^\wedge \\ &= R\omega_!\rho^{-1}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^{\mathbb{L}} T-\mu_N TH(F)). \end{aligned}$$

♡

THÉOREME 2.4.2. — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques réelles et soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$ tel que f soit propre sur $\text{supp } F$. Alors :

(i) On a un morphisme canonique :

$$R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y}^L T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_Y) \right) \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* F, \mathcal{D}b_X).$$

(ii) Si de plus $f : Y \rightarrow X$ est lisse, le morphisme précédent est un isomorphisme.

Montrons d'abord le :

LEMME 2.4.3. — Soit $f : Y \rightarrow X$ lisse, Z' (resp. Z) une sous-variété de X (resp. Y) tels que f induise un isomorphisme $Z' \xrightarrow{\sim} Z$. Alors pour tout $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ on a un isomorphisme canonique :

$$\rho^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y}^L T\text{-}\mu_Z TH_Y(f^{-1}G)) \xleftarrow{\sim} T\text{-}\mu_Z TH_X(G).$$

Démonstration du lemme

L'application $\rho : T_Z^* X \rightarrow T_Z^* Y$ étant ici une immersion, il revient au même d'exhiber un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y}^L T\text{-}\mu_Z TH(f^{-1}G) \xleftarrow{\sim} R\rho_* T\text{-}\mu_Z TH(G),$$

lequel résultera du sous-lemme suivant par transformation de Fourier.

SOUS-LEMME 2.4.4. — On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{D_Y}^L T\text{-}\nu_Z TH_Y(f^{-1}G) \xleftarrow{\sim} f^! T\text{-}\nu_Z TH_X(G).$$

Démonstration du sous-lemme

Soit \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) l'éclaté réel de X (resp. Y) le long de Z , et reprenons les notations du diagramme (2.4.1), avec $M = N = Z$; \tilde{f}' étant ici lisse. Notons $\ell = \dim Y - \dim X$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
 f'^{\ell}(T^{-\nu_Z} TH_X(G)) &\simeq f'^{-1} s_X^{-1} (\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}(p_X^! G_{\Omega_X})) \otimes or_{Y/X}[\ell] \\
 &\simeq s_Y^{-1} \tilde{f}'^{-1} (\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} TH_{\tilde{X}}(p_X^! G_{\Omega_X})) \otimes or_{Y/X}[\ell] \\
 (2.4.4) \quad &\simeq s_Y^{-1} \left(\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}} \tilde{f}'^{\ell} TH_{\tilde{X}}(p_X^! G_{\Omega_X}) \right),
 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identification $\tilde{f}'^{\ell}(\cdot) \simeq \tilde{f}'^{-1}(\cdot) \otimes or_{Y/X}[\ell]$.

Alors la proposition 1.1.3 montre que (2.4.4) s'envoie isomorphiquement dans

$$\begin{aligned}
 s_Y^{-1} \left(\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}} \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}} TH_{\tilde{Y}}(\tilde{f}'^{-1}(p_X^! G_{\Omega_X})) \right) \\
 \simeq s_Y^{-1} \left(p_Y^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_Y^{-1} \mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow \tilde{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}} TH_{\tilde{Y}}(p_Y^! f^{-1} G_{\Omega_Y}) \right) \\
 \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\nu_Z} TH_Y(f^{-1} G)
 \end{aligned}$$

où on a utilisé les formules

$$\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\tilde{f}'^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}} \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \simeq p_Y^{-1} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{p_Y^{-1} \mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow \tilde{Y}}$$

et (2.4.2).

♡

Démonstration du théorème 2.4.2

1) Supposons d'abord $f : Y \rightarrow X$ lisse.

Notons $f_1 = (f, Id_Y) : Y \times Y \rightarrow X \times Y$, $f_2 = (Id_X, f) : X \times Y \rightarrow X \times X$, Δ_X (resp. Δ_Y) la diagonale de $X \times X$ (resp. $Y \times Y$), $\Delta_f = \{(f(y), y)\} \subset X \times Y$ le graphe, q_{jX} (resp. q_{jY}, q_j) la j -ième projection de $X \times X$ (resp. $Y \times Y, X \times Y$),

$j = 1, 2$. Remarquons que $\varpi_{f_1} : \Delta_Y \times_{\Delta_f} T_{\Delta_f}^*(X \times Y) \rightarrow T_{\Delta_f}^*(X \times Y)$ est un isomorphisme et que, f_2 étant lisse, l'application $\rho_{f_2} : \Delta_f \times_{\Delta_X} T_{\Delta_X}^*(X \times X) \rightarrow T_{\Delta_f}^*(X \times Y)$ est un isomorphisme; notons $\varpi_2 = \varpi_{f_2}$ et $\rho_1 = \rho_{f_1}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) & \xleftarrow{\rho_1} & T_{\Delta_f}^*(X \times Y) & \xrightarrow{\varpi_2} & T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ \Delta_Y & \xleftarrow{\sim} & \Delta_f & \longrightarrow & \Delta_X \end{array}$$

où le deuxième carré est cartésien. On a également un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) & \xleftarrow{\rho_1} & T_{\Delta_f}^*(X \times Y) & \xrightarrow{\varpi_2} & T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^*Y & \xleftarrow{\rho} & Y \times_{\Delta_f} T^*X & \xrightarrow{\varpi} & T^*X \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales, induites, par définition, respectivement par les premières projections de $T^*(Y \times Y)$, $T^*(X \times Y)$, $T^*(X \times X)$, sont des isomorphismes, et on identifie donc la première ligne à la deuxième.

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} & R\varpi_1 \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_Y) \right) \\ &= R\varpi_2 \rho_1^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_Y \overset{q_{1Y}}{\longleftarrow} Y \times Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1}F) \right) \\ &\simeq R\varpi_2 \rho_1^{-1} \left(f_1^{-1} f_2^{-1} \mathcal{D}_X \overset{q_{1X}}{\longleftarrow} X \times X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_1^{-1} f_2^{-1} \mathcal{D}_{X \times X}} f_1^{-1} \mathcal{D}_{X \times X \leftarrow f_2} X \times Y \right. \\ &\quad \left. \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_1^{-1} \mathcal{D}_{X \times Y}} \mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow f_1} Y \times Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1}F) \right) \\ &= R\varpi_2 \left(\varpi_2^{-1} \mathcal{D}_X \overset{q_{1X}}{\longleftarrow} X \times X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\varpi_2^{-1} \mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{D}_{X \times X \leftarrow f_2} X \times Y \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times Y}} \rho_1^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow f_1} Y \times Y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1}F) \right) \right). \end{aligned}$$

Remarquons que $q_{2Y}^{-1}F = f_1^{-1}q_1^{-1}F$ et appliquons le lemme 2.4.3 à l'application lisse f_1 , avec $Z = \Delta_Y \cong Z' = \Delta_f$, $G = q_2^{-1}F$; l'expression précédente est donc isomorphe à

$$\begin{aligned} & R\varpi_{2!} \left(\varpi_2^{-1} \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{L}{\otimes} \mathcal{D}_{\varpi_2^{-1} \mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{D}_{X \times X \xleftarrow{f_2} X \times Y} \overset{L}{\otimes} T^{-\mu_{\Delta_f}} TH(q_2^{-1}F) \right) \\ &= \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{L}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \varpi_{2!} \left(\mathcal{D}_{X \times X \xleftarrow{f_2} X \times Y} \overset{L}{\otimes} T^{-\mu_{\Delta_f}} TH(q_2^{-1}F) \right). \end{aligned}$$

Comme f est propre sur $\text{supp}F$, $f_2 = (\text{Id}_X, f)$ est propre sur $\text{supp}(q_2^{-1}F)$ et on peut appliquer la proposition 2.4.1 (ii); alors l'expression précédente est isomorphe à

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{L}{\otimes} T^{-\mu_{\Delta_X}} TH(Rf_{2*}q_2^{-1}F) \\ & \simeq \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{L}{\otimes} T^{-\mu_{\Delta_X}} TH(q_{2X}^{-1}Rf_*F) \\ &= T^{-\mu} \text{hom}(Rf_*F, \mathcal{D}b_X). \end{aligned}$$

Ce qui établit le théorème 2.4.2 dans le cas f lisse.

2) Supposons maintenant que $f : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée.

Notons f_2 et f_1 respectivement les applications $f_2 = (\text{Id}_Y, f) : Y \times Y \hookrightarrow Y \times X$, $f_1 = (f, \text{Id}_X) : Y \times X \longrightarrow X \times X$, Δ^f le graphe $\Delta^f = \Delta_X \cap (Y \times X)$.

Posons $\rho_2 = \rho_{f_2}$ et $\varpi_1 = \varpi_{f_1}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) & \xleftarrow{\rho_2} & T_{\Delta^f}^*(Y \times X) & \xrightarrow{\varpi_1} & T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^*Y & \xleftarrow{\rho} & Y \times_X T^*X & \xrightarrow{\varpi} & T^*X \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales, induites par les deuxièmes projections, sont des isomorphismes (les applications ρ_{f_1} , ϖ_{f_2} sont des isomorphismes); on identifie la première ligne à la seconde. Notons q_{jX} , q_{jY} , q_j , respectivement,

les j -ièmes projections de $X \times X, Y \times Y, Y \times X, (j = 1, 2)$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
& R\omega_1 \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_Y) \right) \\
&= R\omega_1 \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \xleftarrow{q_{1Y}} Y \times Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1} F) \right) \\
&= \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} R\omega_1 \rho_2^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times X \leftarrow Y \times Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1} F) \right) \\
&\simeq \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1Y}} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} TH(\mathbb{C}_Y \boxtimes Rf_* F) \\
&\longrightarrow \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1Y}} X \times X} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} TH(\mathbb{C}_X \boxtimes Rf_* F) = T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* F, Db_X),
\end{aligned}$$

où l'isomorphisme de la quatrième ligne est donné par la proposition 2.4.1 ($Y \times Y$ étant "clean" relativement à Δ_X), et où la flèche de la dernière ligne est induite par la flèche $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_Y$.

3) Dans le cas général on obtient le morphisme (i) en décomposant $f : Y \rightarrow X$ en immersion puis submersion par le graphe et en composant les morphismes obtenus en 1) et 2) ci-dessus. Mais ce n'est pas un isomorphisme en général (faire par exemple $F = \mathbb{C}_Y$ dans le cas 2)) - sauf sur la section nulle de T^*X où le morphisme coïncide avec l'isomorphisme d'image directe de Kashiwara.

♡

2.4.2. Produit externe

PROPOSITION 2.4.4. — Soient X (resp. Y) une variété analytique réelle, M (resp. N) une sous-variété de X (resp. Y), $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$, $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(Y)$. On a un morphisme canonique dans $D_{\text{coni}}^+(\pi^{-1}\mathcal{D}_{X \times Y})$:

$$T\text{-}\mu_M TH(F) \overset{\boxtimes}{\underset{\mathcal{D}}{\boxtimes}} T\text{-}\mu_N TH(G) \longrightarrow T\text{-}\mu_{M \times N} TH(F \boxtimes G).$$

Dans le terme de gauche la notation $\overset{\boxtimes}{\underset{\mathcal{D}}{\boxtimes}}$ désigne le produit tensoriel externe d'un objet de $D^+(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$ par un objet de $D^+(\tau^{-1}\mathcal{D}_Y)$ et se définit comme dans le paragraphe 0.2 pour les \mathcal{D} -Modules.

Démonstration

Il revient au même d'exhiber le morphisme dans $D_{\text{coni}}^+(\tau^{-1}\mathcal{D}_{X \times Y})$

$$(2.4.5) \quad T^{-\nu_M} TH(F) \boxtimes_{\mathcal{D}} T^{-\nu_N} TH(G) \longrightarrow T^{-\nu_{M \times N}} TH(F \boxtimes G).$$

Soient $p : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \rightarrow X \times Y$ l'éclatement de $X \times Y$ le long de $M \times N$, $\Omega_{X \times Y}$ l'ouvert $\{t > 0\}$ de $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ et j, p, \tilde{p}, s les applications $j : \Omega_{X \times Y} \rightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, $\tilde{p} = p \circ j$, $s : T_{M \times N}(X \times Y) \rightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$. Les notations associées à l'éclatement $p_X : \widetilde{X} \rightarrow X$ (resp. $p_Y : \widetilde{Y} \rightarrow Y$) le long de M (resp. N) seront celles du début du paragraphe (sauf qu'on ne se donne pas ici de flèche de Y dans X). Soient j' l'immersion ouverte $j' = (j_X, j_Y) : \Omega_X \times \Omega_Y \rightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, $p' = (p_X, p_Y) : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \rightarrow X \times Y$, $\tilde{p}' = p' \circ j'$, ι (resp. $\tilde{\iota}$) l'immersion fermée $\iota : X \times Y \rightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ (resp. $\tilde{\iota} : \Omega_X \times \Omega_Y \rightarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$) et $s' = \iota \circ s$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 T_M X \times T_N Y & \xrightarrow{s'} & \widetilde{X} \times \widetilde{Y} & \xleftarrow{j'} & \Omega_X \times \Omega_Y \\
 \parallel & & \uparrow \iota & \swarrow p' & \searrow \tilde{p}' \\
 & & & X \times Y & \\
 & & & \swarrow p & \nwarrow \tilde{p} \\
 T_{M \times N}(X \times Y) & \xrightarrow{s} & \widetilde{X} \times \widetilde{Y} & \xleftarrow{j} & \Omega_{X \times Y}. \\
 & & & & \uparrow \tilde{\iota}
 \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & T^{-\nu_M} TH(F) \boxtimes_{\mathcal{D}} T^{-\nu_N} TH(G) \\
 &= s_X^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \widetilde{X}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{X}} TH_{\widetilde{X}}(j_X! \tilde{p}_X^! F) \right) \boxtimes_{\mathcal{D}} s_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow \widetilde{Y}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{Y}} TH_{\widetilde{Y}}(j_Y! \tilde{p}_Y^! G) \right) \\
 &\longrightarrow s'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(j_X! \tilde{p}_X^! F \boxtimes j_Y! \tilde{p}_Y^! G) \right) \\
 &= s'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(j'! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right) \\
 &\longrightarrow s'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(j'! \tilde{\iota}_! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right) \\
 (2.4.6) \quad &\longrightarrow s'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\mathcal{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(\iota_! j_! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right).
 \end{aligned}$$

où la première flèche résulte de la proposition 1.1.4 et la deuxième de la transformation de foncteurs $\tilde{u}_! \tilde{p}'^! \rightarrow \tilde{p}'^!$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} T^{-\nu}{}_{M \times N} TH(F \boxtimes G) &\stackrel{\text{def}}{=} s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(j_! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right) \\ &= s^{-1} \left(\iota^{-1} \mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\iota^{-1} \widetilde{\mathcal{D}}_{X \times Y}} \mathcal{D}_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y} \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(j_! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right) \\ &\simeq s'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow \widetilde{X} \times \widetilde{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X \times Y}} TH_{\widetilde{X} \times \widetilde{Y}}(\iota_! j_! \tilde{p}'^!(F \boxtimes G)) \right), \end{aligned}$$

par le théorème d'image directe de Kashiwara, et la dernière ligne des égalités précédentes n'est autre que (2.4.6), d'où le morphisme (2.4.5). ♡

PROPOSITION 2.4.5. — *Soient X et Y deux variétés analytiques réelles, $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$. On a un morphisme canonique dans $D_{\text{coni}}^+(\pi^{-1} \mathcal{D}_{X \times Y})$:*

$$T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_X) \boxtimes_{\mathcal{D}} T\text{-}\mu\text{hom}(G, Db_Y) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(F \boxtimes G, Db_{X \times Y}).$$

Démonstration

Notons q_j la j -ième projection de $(X \times Y) \times (X \times Y)$ sur $X \times Y$, $j = 1, 2$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} &T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_X) \boxtimes_{\mathcal{D}} T\text{-}\mu\text{hom}(G, Db_Y) \\ &= \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow q_{1X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} TH(q_{2X}^{-1} F) \right) \boxtimes_{\mathcal{D}} \\ &\quad \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow q_{1Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1} G) \right) \\ &\rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow q_1} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times Y \times X \times Y}} \left(T\text{-}\mu_{\Delta_X} TH(q_{2X}^{-1} F) \boxtimes_{\mathcal{D}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} TH(q_{2Y}^{-1} G) \right) \\ &\rightarrow \mathcal{D}_{X \times Y \leftarrow q_1} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times Y \times X \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_{X \times Y}} TH(q_{2X}^{-1} F \boxtimes q_{2Y}^{-1} G) \\ &= T\text{-}\mu\text{hom}(F \boxtimes G, Db_{X \times Y}) ; \end{aligned}$$

on a utilisé la proposition 2.4.6 et l'égalité $q_{2X}^{-1} F \boxtimes q_{2Y}^{-1} G = q_2^{-1}(F \boxtimes G)$. ♡

2.4.3. Un lemme technique

On n'envisagera pas dans ce chapitre de morphisme d'image inverse pour la microlocalisation des distributions (cf. cependant [An 1] dans le cas d'une immersion) mais on le fera dans la catégorie holomorphe au chapitre 3 où la construction utilisera le lemme suivant.

LEMME 2.4.6. — *Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques réelles, $Z \subset X$, $Z' \subset Y$ des sous-variétés fermées et $g : X \rightarrow Z$ une rétraction analytique lisse. On suppose que f induit un isomorphisme analytique $Z' \simeq Z$ (et on identifie Z à Z'). Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Alors on a un morphisme canonique*

$$R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_Z} TH_X(F) \right) \longrightarrow \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_Z} TH_Y(f^! F) \otimes \text{or}_{Y/X} [\dim Y - \dim X].$$

Démonstration

On construit le morphisme dans les cas f immersion et f submersion, d'où le morphisme en général en décomposant par le graphe.

1) Supposons d'abord que $f : Y \hookrightarrow X$ est une immersion. Alors $\rho : T_Z^* X \rightarrow T_Z^* Y$ est lisse à fibre contractile, en particulier :

$$\begin{aligned} \rho(\cdot)^! &\simeq \rho(\cdot)^{-1} \otimes \text{or}_{T_Z^* X / T_Z^* Y} [\dim T_Z^* X - \dim T_Z^* Y] \\ &= \rho(\cdot)^{-1} \otimes \text{or}_{Y/X} [-(\dim Y - \dim X)], \\ R\rho_! \rho^! &= \text{Id}, \quad (\text{et on a } f^! F = R\Gamma_Y F|_Y). \end{aligned}$$

On peut alors écrire, en utilisant le morphisme canonique $R\Gamma_Y F \rightarrow F$:

$$\begin{aligned} R\rho_! (\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_Z} TH_X(F)) &\longrightarrow R\rho_! (\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_Z} TH_X(R\Gamma_Y F)) \\ &\simeq R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \rho^{-1} (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_Z} TH_Y(R\Gamma_Y F|_Y)) \right) \\ &\simeq \mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_Z} TH_Y(f^! F) \otimes \text{or}_{Y/X} [\dim Y - \dim X] \\ &= \mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_Z} TH_Y(f^! F) \otimes \text{or}_{Y/X} [\dim Y - \dim X], \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme résulte de la proposition 2.4.1.

2) Supposons maintenant $f : Y \rightarrow X$ lisse. On a $f^!F \simeq f^{-1}F \otimes \text{or}_{Y/X}[\dim Y - \dim X]$ et $\rho : T_Y^*X \hookrightarrow T_Z^*Y$ est une immersion fermée.

Appliquant le lemme 2.4.3 (avec $G = F$), on peut écrire

$$\begin{aligned} & R\rho_* \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T_{-\mu_Z} TH_X(F) \right) \\ & \quad \xrightarrow{\sim} R\rho_* \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \rho^{-1}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F)) \right) \\ & \quad \simeq R\rho_* \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F) \right). \end{aligned}$$

Le sous-lemme ci-dessous implique que cette dernière expression n'est autre que

$$\mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F) \otimes \text{or}_{Y/X}[\dim Y - \dim X].$$

♡

SOUS-LEMME 2.4.7. — *Sous les hypothèses du lemme 2.4.6 où l'on suppose de plus $f : Y \rightarrow X$ lisse, on a*

$$\text{supp} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F) \right) \subset T_Z^*X.$$

Démonstration

L'assertion étant locale, on peut supposer $Y = \mathbb{R}_x^m \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_z^\ell$ avec $X : y = 0$, $Z : x = y = 0$.

Soit $p = (z; \xi, \eta) \in T_Z^*Y$ tel que $p \notin T_Z^*X$, i.e. $\eta \neq 0$; il faut montrer que pour tout j on a $H^j \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F) \right)_p = 0$. On a, en utilisant la formule du germe (proposition 2.2.4), puis le théorème d'image directe de Kashiwara :

$$\begin{aligned} & H^j \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T_{-\mu_Z} TH_Y(f^{-1}F) \right)_p \\ & \quad = \varinjlim_{U, \gamma} H^j R\Gamma \left(Y; \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} TH_Y(f^{-1}(F)_{U \cap \gamma}) \right) \\ & \quad = \varinjlim_{U, \gamma} H^j R\Gamma \left(X; TH_X(Rf_!(f^{-1}(F)_{U \cap \gamma})) \right), \end{aligned}$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des (U, γ) où U parcourt une base d'ouverts sous-analytiques relativement compacts de Y contenant z et γ parcourt l'ensemble des sous-analytiques fermés de $Y = \mathbb{R}^n$ tels que $(\xi, \eta, 0) \in \text{Int}(C_Y(\gamma)^0)$.

Il suffit alors de remarquer qu'on peut choisir γ tel que $\gamma \cap f^{-1}(x, z)$ contienne une demi-droite, et alors $Rf_!(f^{-1}(F)_{U \cap \gamma})_{(x, z)} = 0$.

♡

Remarque 2.4.8

Dans la situation du lemme 2.4.6 on a en fait montré que si l'on impose de plus à $f : Y \rightarrow X$ d'être lisse, le morphisme du lemme est un isomorphisme. Supposons maintenant que $f : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée et soit U un ouvert de T^*X qui est non caractéristique pour F au sens de [K-S 2, 3]; on sait alors que le morphisme $R\Gamma_Y F \rightarrow F$ est, microlocalement sur U , un isomorphisme (i.e. $SS(R\Gamma_Y F \rightarrow F) \cap U = \emptyset$, cf. loc. cit) et on peut montrer sous cette hypothèse que le morphisme du lemme 2.4.6 est un isomorphisme sur U (cf. [An 1], thèse).

3. - MICROLOCALISATION A CROISSANCE DES FONCTIONS HOLOMORPHES

3.1. Objets

Soit X une variété analytique complexe, $T^*X \xrightarrow{\pi} X$ son fibré cotangent. Dans la suite on écrira souvent \mathcal{O}_X , \mathcal{D}_X , etc. au lieu de $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$, $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ quand il n'y aura pas risque de confusion.

DÉFINITION 3.1.1. — Soit M une sous-variété analytique (réelle) de $X_{\mathbb{R}}$ et soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. On pose :

$$\begin{aligned} T^{-\nu_M} RH_X(F) &= DR_{\overline{X}}(T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \\ &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)), \end{aligned}$$

$$T^{-\mu_M} RH_X(F) = (T^{-\nu_M} RH_X(F))^{\wedge} \quad (= DR_{\overline{X}}(T^{-\mu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F))),$$

$$T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X = T^{-\mu_M} RH_X(\mathbb{C}_X) \quad (= DR_{\overline{X}}(T^{-\mu_M} Db_{X_{\mathbb{R}}}),$$

$$T^{-\mu} hom(F, \mathcal{O}_X) = DR_{\overline{X}}(T^{-\mu} hom(F, Db_{X_{\mathbb{R}}}),$$

et pour tout \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{L} on pose :

$$T^{-\mu} hom(F, \mathcal{L}) = T^{-\mu} hom(F, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}.$$

Alors $T^{-\mu_M} RH_X(F)$ et $T^{-\mu} hom(F, \mathcal{O}_X)$ sont des objets de $D_{\text{coni}}^b(T^*X_{\mathbb{R}})$ et de $D^b(\pi^{-1}\mathcal{D}_X)$ et $T^{-\mu_M} RH_X(F)$ est concentré sur T_M^*X . (On omettra éventuellement X dans la notation $T^{-\mu_M} RH_X(F)$.)

On a une transformation de foncteurs sur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, résultant de (2.3.1) :

$$T^{-\mu} hom(\cdot, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mu hom(\cdot, \mathcal{O}_X).$$

PROPOSITION 3.1.2. — (i) Soit $p \in T_Y^* X$, $x = \pi(p)$. Pour tout j on a :

$$H^j(T^{-\mu_M} RH(F))_p = \varinjlim_Z H^j RH_X(F_Z)_x,$$

où Z parcourt la famille des fermés sous-analytiques de $X_{\mathbb{R}}$ tels que $C_M(Z)_x \subset \{v \in (T_M X)_x ; \langle v, p \rangle > 0\} \cup \{0\}$,

$$(ii) R\pi_* T^{-\mu_M} RH(F) \simeq RH_X(F_M)|_M,$$

et, notant $\ell = \dim_{\mathbb{R}} M - \dim_{\mathbb{R}} X$, on a

(iii) $R\Gamma_M T^{-\mu_M} RH(F) \simeq RH_X(F) \otimes or_{M/X}[\ell]|_M$, d'où un triangle distingué :

$$(3.1.1) \quad RH_X(F) \otimes or_{M/X}[\ell]|_M \rightarrow RH_X(F_M)|_M \rightarrow R\overset{\circ}{\pi} T^{-\mu_M} RH(F) \xrightarrow{+1}.$$

Démonstration

(i) Notons $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Soit F^\bullet un complexe de $\mathbb{R} - c(X)$ quasi-isomorphe à F . On peut trouver un complexe $\Omega_{\overline{X}}^\bullet$ localement libre sur $\Omega_{\overline{X}}$ et tel que $\Omega_{\overline{X}}^\bullet \underset{\text{qis}}{\simeq} \Omega_{\overline{X}}^\bullet[-n]$. On peut donc écrire

$$T^{-\mu_M} RH(F) = \Omega_{\overline{X}}^\bullet \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} T^{-\mu_M} TH(F)[-n] \underset{\text{qis}}{\simeq} s(\Omega_{\overline{X}}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} T^{-\mu_M} TH(F^\bullet)),$$

où $s(\)$ désigne le complexe simple associé au complexe double, d'où, notant \mathcal{Z} la famille des fermés sous-analytiques Z vérifiant la condition du (i)

$$\begin{aligned} H^j(T^{-\mu_M} RH(F))_p &= \varinjlim_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \ni p}} \Gamma\left(U; H^j\left(s(\Omega_{\overline{X}}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} T^{-\mu_M} TH(F^\bullet))\right)\right) \\ &= H^j\left(s(\Omega_{\overline{X},x}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{X,x}} T^{-\mu_M} TH(F^\bullet))_p\right) \\ &= H^j\left(s(\Omega_{\overline{X},x}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_{X,x}} \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}} TH(F_Z^\bullet)_x)\right) \\ &= \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}} H^j\left(s(\Omega_{\overline{X}}^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} TH(F_Z^\bullet))\right)_x \\ &= \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}} H^j\left(\Omega_{\overline{X}}^\bullet \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} TH(F_Z)[-n]\right)_x \\ &= \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}} H^j RH(F_Z^\bullet)_x, \end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 2.2.4.

(ii) Résulte de la proposition 2.2.4 (iv), $\Omega_{\overline{X}}$ étant $\mathcal{D}_{\overline{X}}$ -cohérent.

(iii) On a $R\Gamma_M T^{-\mu_M} RH(F) = R\Gamma_M RHom_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, T^{-\mu_M} RH(F)) = RHom_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, R\Gamma_M T^{-\mu_M} TH(F))$, et (iii) résulte de la proposition 2.2.4 (iv). ♡

Dans certaines applications (cf. paragraphe 6.3.2) il peut être utile de disposer de la formule pour les sections de $T^{-\nu_M} RH_X(\cdot)$ que voici. Soit $V \subset T_M X$ un ouvert conique et $K \subset V$, K ensemble conique engendré (comme ensemble conique) par un compact, alors :

$$(3.1.2) \quad \begin{cases} H^j R\Gamma(K; T^{-\nu_M} RH_X(F)) = \varinjlim \{ H^j R\Gamma(X; RH_X(F_U)); \\ U \subset X \text{ ouvert sous-analytique tel que } C_M(X \setminus U) \cap K = \{0\} \}. \end{cases}$$

La démonstration est analogue à celle du (i) précédent.

On peut aussi calculer $T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X$ à partir des fonctions analytiques réelles :

PROPOSITION 3.1.3. — *La flèche naturelle*

$$DR_{\overline{X}}(T^{-\mu_M} \mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}) \longrightarrow DR_{\overline{X}}(T^{-\mu_M} \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}}) = T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X$$

est un isomorphisme.

Démonstration

Il revient au même de montrer que la flèche

$$DR_{\overline{X}}(T^{-\nu_M} \mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}) \longrightarrow DR_{\overline{X}}(T^{-\nu_M} \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}})$$

est un isomorphisme, donc il suffit, en utilisant la formule des germes (cf. remarque 2.1.15), de montrer que pour tout ouvert analytique $U \subset X$ on a :

$$(3.1.3) \quad RH_X(\mathbb{C}_U) = DR_{\overline{X}}(\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}^{t-U}).$$

Or on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Gamma_{\partial U}(\mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}}/\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}) \rightarrow \Gamma_{\overline{U}}(\mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}}/\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}) \rightarrow TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U)/\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}^{t-U} \rightarrow 0,$$

comme il résulte de la propriété de Lojasiewicz (U étant ouvert sous-analytique), et pour montrer $DR_{\overline{X}}(TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U)/\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}^{t-U}) = 0$ il suffit de montrer que pour tout fermé sous-analytique Z de $X_{\mathbb{R}}$ on a $DR_{\overline{X}}(\Gamma_Z(\mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}}/\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}})) = 0$.

La proposition résulte alors plus généralement du

LEMME 3.1.3 bis. — Soient M une variété analytique réelle et \mathcal{M} un \mathcal{D} -module elliptique sur M , $Z \subset M$ un fermé. Alors

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \Gamma_Z(\mathcal{D}_M/\mathcal{A}_M)) = 0.$$

(L'hypothèse signifiant que \mathcal{M} est un \mathcal{D}_X -module tel que $\text{Car } \mathcal{M} \cap T_M^*X \subset \{0\}$, où $X = M^{\mathbb{C}}$ est un complexifié de M et $\text{Car } \mathcal{M}$ est la variété caractéristique de \mathcal{M} .)

Démonstration

En considérant une résolution locale

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \bigoplus \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P_j \leftarrow \mathcal{N} \leftarrow 0$$

avec \mathcal{N} un \mathcal{D} -module elliptique sur M et les P_j des opérateurs elliptiques en nombre fini, on voit, par récurrence, qu'on peut supposer \mathcal{M} de la forme $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ avec P un opérateur elliptique, et alors le lemme résulte trivialement de la résolubilité locale et de la régularité elliptique de P .

♡

PROPOSITION 3.1.4. — Soient $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$ et $\Delta = \Delta_X$ la diagonale de $X \times X$. On a les propriétés suivantes.

$$(i) \quad T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1^{-1} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta} RH(q_2^{-1} F)[\dim_{\mathbb{C}} X].$$

$$(ii) \quad \left\{ \begin{array}{l} R\pi_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq RH_X(F), \quad R\pi_! T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq F^* \otimes \mathcal{O}_X, \\ \text{et on a donc un triangle distingué} \\ F^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow RH_X(F) \rightarrow R\pi_*^{\circ} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{+1}, \end{array} \right.$$

(on rappelle que $F^* \stackrel{\text{def}}{=} R\mathcal{H}om(F, \mathbb{C}_X)$).

$$(iii) \quad \text{supp}(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) \subset SS(F).$$

(iv) Si M est une sous-variété analytique réelle de $X_{\mathbb{R}}$, on a

$$T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X) \simeq T\text{-}\mu_M \mathcal{O}_X.$$

(v) Soient $X = \mathbb{C}^n$ et $p = (x; \xi) \in T^*X$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a :

$$H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X))_p = \varinjlim_{U, \Lambda} H^j(R\Gamma(U; RH_X(\varphi_\Lambda^{-1} R\varphi_{\Lambda^*} F_U))),$$

où la limite inductive est prise sur l'ensemble des (U, Λ) tels que U est un voisinage ouvert sous-analytique de x et Λ est un cône convexe propre fermé sous-analytique de $X_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$\Lambda \subset \{v \in \mathbb{R}^{2n}; \langle v, \xi \rangle < 0\} \cup \{0\}.$$

Soit Y un ensemble produit de la forme $Y = X_1 \times \cdots \times X_\ell$. Pour tout k -uplet (i_1, \dots, i_k) avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \ell$ on désignera par $q_{i_1 i_2 \dots i_k} : Y \rightarrow X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k}$, la projection.

Démonstration

(i) Soit $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. On a

$$\begin{aligned} & T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \\ &= \mathcal{D}_{pt \leftarrow \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}}} T\text{-}\mu_{\Delta} TH(q_2^{-1} F) \right) [-n] \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} \mathcal{D}_{X \times \overline{X} \leftarrow q_{12} X \times \overline{X} \times X \times \overline{X}} \Big|_{X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}}} T\text{-}\mu_{\Delta} TH(q_2^{-1} F) [-n] \\ &\simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{D}_{X \times X \leftarrow q_{13} X \times \overline{X} \times X \times \overline{X}} \Big|_{X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}}} \\ & \hspace{15em} T\text{-}\mu_{\Delta} TH(q_2^{-1} F) [-n] \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \left(\mathcal{D}_{pt \leftarrow \overline{X} \times \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X} \times \overline{X}}} T\text{-}\mu_{\Delta} TH(q_2^{-1} F) \right) [-n] \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta} RH(q_2^{-1} F) [-n]. \end{aligned}$$

Les points (ii), (iii), (iv), (v) résultent des proposition 2.3.2, corollaire 2.3.4, corollaire 2.3.6 et proposition 2.3.3 respectivement.

♡

Remarque 3.1.5

Soit $\Omega \subset T^*X$ un sous-ensemble et soit $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ la catégorie localisée de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ par le système multiplicatif des flèches dont le micro-support ne

rencontre pas Ω (voir l'appendice en fin d'article pour une discussion de cette catégorie).

On peut regarder $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ comme un foncteur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)^\circ \rightarrow D^b(\Omega)$, par restriction du but, et vu le (iii) de la proposition 3.1.4, cela définit, par localisation, un foncteur

$$T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X) : D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)^\circ \longrightarrow D^b(\Omega),$$

(qu'on notera encore de la même manière).

3.2. Spécialisation tempérée le long d'une sous-variété complexe

3.2.1 Soit Y une sous-variété complexe de X . Il est alors naturel, et souvent utile (cf. les paragraphes 3.2.2 et 4.2), de disposer d'une formule qui calcule $T\text{-}\nu_Y RH_X(F)$ à l'aide de la déformation au fibré normal complexe à la MacPherson-Verdier (cf. [F], cf. aussi [V]).

On pose par définition $\tilde{T}_Y^c X = \text{Specan}\left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I_Y^k\right)$, où I_Y est l'idéal de définition de Y dans X et où $I_Y^k = \mathcal{O}_Y$ pour $k \leq 0$.

Notons p l'application canonique $p : \tilde{T}_Y^c X \rightarrow X$ et z la coordonnée canonique $z : \tilde{T}_Y^c X \rightarrow \mathbb{C}$. On a un diagramme commutatif (de variétés réelles) :

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_{\mathbb{R}} & \xleftarrow{p} & (\tilde{T}_Y^c X)_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{z} & \mathbb{C} \\ \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow \\ X_{\mathbb{R}} & \xleftarrow{\quad} & \tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{t} & \mathbb{R} \end{array} ,$$

par lequel on identifie la déformation au fibré normal réel, $\tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}}$, à $z^{-1}(\mathbb{R})$.

Dans la proposition suivante on désigne par \tilde{X} la variété complexe $\tilde{X} = \tilde{T}_Y^c X$, par Ω le sous-ensemble sous-analytique localement fermé de $(\tilde{X})_{\mathbb{R}}$ défini par $\Omega = z^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ (dans $\tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}}$, Ω est l'ouvert $\{t > 0\}$) et par s l'immersion $s : T_Y X \hookrightarrow \tilde{T}_Y^c X$.

PROPOSITION 3.2.1. — Pour $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$ on a

$$(3.2.2) \quad T^{-\nu_Y} RH_X(F) \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}}((p^{-1}F)_{\Omega}) \right).$$

Démonstration

Remarquons d'abord que

$$(3.2.3) \quad T^{-\nu_{Y_{\mathbb{R}}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}((p^{-1}F)_{\Omega}) \right) [-1].$$

En effet, si on note ι l'immersion fermée $\iota : z^{-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned} & T^{-\nu_{Y_{\mathbb{R}}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) \\ &= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow z^{-1}(\mathbb{R})} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{z^{-1}(\mathbb{R})}} TH_{z^{-1}(\mathbb{R})}((p^{-1}F_{\Omega})|_{z^{-1}(\mathbb{R})}) \right) [-1] \\ &= \\ & s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} \mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}} \leftarrow z^{-1}(\mathbb{R})} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{z^{-1}(\mathbb{R})}} TH_{z^{-1}(\mathbb{R})}((p^{-1}F_{\Omega})|_{z^{-1}(\mathbb{R})}) \right) [-1] \\ & \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(R\iota_* \iota^{-1}(p^{-1}F_{\Omega})) \right) [-1] \\ &= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right) [-1], \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème d'image directe de Kashiwara et le fait que

$$(p^{-1}F_{\Omega})|_{\tilde{X} \setminus z^{-1}(\mathbb{R})} = 0.$$

Soit n la dimension complexe de X . Vu (3.2.3) on peut écrire

$$\begin{aligned}
T-\nu_{Y_{\mathbb{R}}} RH_X(F) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}}|_{X_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} T-\nu_{Y_{\mathbb{R}}} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) [-n] \\
&= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}}|_{X_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} \mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow (\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right) [-n-1] \\
&= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}} \mathcal{D}_{X \times \bar{X} \leftarrow \tilde{X} \times \bar{\tilde{X}}}|_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right) [-n-1] \\
&\simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{X} \times \bar{\tilde{X}}}|_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right) [-n-1] \\
&\simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} \left(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \bar{\tilde{X}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{\tilde{X}}}} TH_{(\tilde{X})_{\mathbb{R}}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right) \right) [-n-1] \\
&= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}}(p^{-1}F_{\Omega}) \right),
\end{aligned}$$

puisque la dimension complexe de \tilde{X} est $n+1$.

♡

On aurait démontré d'une manière analogue la formule "sans conditions de croissance" suivante

$$(3.2.2)\text{bis} \quad \nu_Y RHom(F, \mathcal{O}_X) \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} RHom((p^{-1}F)_{\Omega}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \right).$$

3.2.2. On donne maintenant un analogue microlocal de la formule (1.2.6) (qui sera utilisé dans le paragraphe 3.4).

Soit M une variété analytique réelle et $N \subset M$ une sous-variété fermée. Soit $Y \hookrightarrow X$ une complexification de $N \hookrightarrow M$ et notons $i : M \hookrightarrow X$ l'inclusion de M dans son complexifié et $\rho = \rho_i$, $\varpi = \varpi_i$ les applications définies par le diagramme $T_N^*M \xleftarrow{\rho} N \times_X T_Y^*X \xrightarrow{\varpi} T_Y^*X$.

PROPOSITION 3.2.2. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(M)$. On a :

- (i) $T-\nu_N TH_M(F) \simeq T-\nu_Y RH_X(i_*F) \otimes_{\text{or}_M} [\dim M]$.
- (ii) $T-\mu_N TH_M(F) \simeq R\rho_* \varpi^{-1}(T-\mu_Y RH_X(i_*F)) \otimes_{\text{or}_M} [\dim M]$.

Dans (i) on a considéré l'injection $T_N M \subset T_Y X$: le terme de droite de (i) est bien à support dans $C_Y(M) = T_N M$.

Démonstration

(i) Soit $p : \tilde{T}_N M \rightarrow M$ l'éclatement réel de M le long de N , $t \in \mathbb{R}$ la coordonnée canonique, $s : T_N M \hookrightarrow \tilde{T}_N M$, Ω l'ouvert $\{t > 0\}$ de $\tilde{T}_N M$, $j : \Omega \hookrightarrow \tilde{T}_N M$, $\tilde{p} = p|_{\Omega}$. Soit $p' : \tilde{T}_Y^c X \rightarrow X$ l'éclatement complexe de X le long de Y (cf. § 3.2.1), $z \in \mathbb{C}$ la coordonnée canonique, $s' : T_Y X \hookrightarrow \tilde{T}_Y^c X$, $\Omega' = z^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$, $j' : \Omega' \hookrightarrow \tilde{T}_Y^c X$, $\tilde{p}' = p'|_{\Omega'}$.

Alors $\tilde{T}_Y^c X$ est un voisinage complexe de $\tilde{T}_N M$; on note $\tilde{\iota} : \tilde{T}_N M \hookrightarrow \tilde{T}_Y^c X$ l'inclusion et $\iota : \Omega \hookrightarrow \Omega'$ l'injection induite par $\tilde{\iota}$.

Posons $\tilde{M} = \tilde{T}_N M$, $\tilde{X} = \tilde{T}_Y^c X$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 T_N M & \xrightarrow{s} & \tilde{M} & \xleftarrow{j} & \Omega \\
 \downarrow & & \swarrow t & \searrow p & \swarrow \tilde{p} \\
 & & \mathbb{R} & & M \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbb{C} & & X \\
 & & \swarrow z & \searrow p' & \swarrow \tilde{p}' \\
 T_Y X & \xrightarrow{s'} & \tilde{X} & \xleftarrow{j'} & \Omega' \\
 & & \downarrow \tilde{\iota} & & \downarrow \iota
 \end{array}$$

dans lequel les grands carrés sont cartésiens et on a également $\tilde{M} = M \times_X \tilde{X}$, $\Omega = M \times_X \Omega'$.

Soit $n = \dim M$.

En se plaçant dans un ouvert U de coordonnées locales $x = (x', x'')$ de M on peut supposer $M = U \subset \mathbb{R}_x^n$, $N = \{x' = 0\}$, $X \subset \mathbb{C}_\xi^n$ et X voisinage ouvert de M dans \mathbb{C}^n muni de la coordonnée holomorphe $\xi = x + \sqrt{-1}y = (\xi', \xi'')$, $Y = \{\xi' = 0\}$; p' est l'application $(z, \xi', \xi'') \in \tilde{T}_Y^c X \mapsto (z\xi', \xi'') \in X$, et on a $\tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}} = \{\text{Im} z = 0\}$, $\tilde{T}_N M = \{\text{Im} z = 0, y' = 0, y'' = 0\}$.

Remarquons que $p'^{-1}(M) \cap \tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}} \supset \tilde{T}_N M$ et que cette inclusion est une égalité au dessus de $t \neq 0$ (mais $p'^{-1}(M) \cap \tilde{T}_{Y_{\mathbb{R}}} X_{\mathbb{R}} \cap \{t = 0\} = T_N M + \sqrt{-1}T_N M$). En particulier $(p'^{-1}i_* F)_{\Omega' \setminus \tilde{M}} = 0$.

Montrons d'abord

$$(3.2.5) \quad \tilde{i}_* Rj_! \tilde{p}^{-1} F \simeq (p'^{-1} i_* F)_{\Omega'}$$

on a en effet

$$\tilde{i}_* Rj_! \tilde{p}^{-1} F = \tilde{i}_* Rj_! \tilde{p}^{-1} i^{-1} i_* F \simeq \tilde{i}_* Rj_! t^{-1} \tilde{p}'^{-1} i_* F \simeq \tilde{i}_* \tilde{i}^{-1} Rj_! \tilde{p}'^{-1} i_* F \simeq \tilde{i}_* \tilde{i}^{-1} ((\tilde{p}'^{-1} i_* F)_{\Omega'}),$$

et (3.2.5) résulte de ce que $(p'^{-1} i_* F)_{\Omega'}$ est concentré sur \widetilde{M} vu la remarque précédente.

D'autre part, $or_{\widetilde{M}/M}$ étant trivial, on a (en omettant les p^{-1}) $or_{\widetilde{M}} = or_{\widetilde{M}/M} \otimes or_M \simeq or_M$ et $\mathcal{D}_{X \leftarrow \widetilde{X}}|_{\widetilde{M}} = \mathcal{D}_{X \leftarrow \widetilde{X}} \otimes or_{\widetilde{M}/M}^{-1} = \mathcal{D}_{M \leftarrow \widetilde{M}}$, et on peut écrire, en utilisant (1.2.4) :

$$\begin{aligned} T-\nu_N TH_M(F) &\stackrel{\text{def}}{=} s^{-1} \left(\mathcal{D}_{M \leftarrow \widetilde{M}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\widetilde{M}}} TH_{\widetilde{M}}(Rj_! \tilde{p}^{-1} F) \right) [-1] \\ &\simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{M \leftarrow \widetilde{M}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\widetilde{M}}} (RH_{\widetilde{X}}(\tilde{i}_* Rj_! \tilde{p}^{-1} F))|_{\widetilde{M}} \otimes or_M[n+1] \right) [-1] \\ &= s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \widetilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}} RH_{\widetilde{X}}(\tilde{i}_* Rj_! \tilde{p}^{-1} F) \right) \otimes or_M[n] \\ &\simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \widetilde{X}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}} RH_{\widetilde{X}}((p'^{-1} i_* F)_{\Omega'}) \right) \otimes or_M[n] \\ &= T-\nu_Y RH_X(i_* F) \otimes or_M[n], \quad \text{vu (3.2.2)}. \end{aligned}$$

(ii) Posons $E = T_N M$, $E' = N \times T_Y X$, $E'' = T_Y X$ et désignons respectivement par $(\)^{\wedge E}$, $(\)^{\wedge E'}$, $(\)^{\wedge E''}$ les transformations de Fourier-Sato respectives sur ces fibrés.

Soit $i' : E \hookrightarrow E'$, $j : E' \hookrightarrow E''$ les applications canoniques déduites de $i : M \hookrightarrow X$, et posons $\mathcal{F} = T-\nu_Y RH_X(i_* F) \otimes or_M[n]$. Vu (i) on peut écrire $T-\mu_N TH_M(F) = (i'^{-1} j^{-1} \mathcal{F})^{\wedge E} \simeq R({}^t i)_* ((j^{-1} \mathcal{F})^{\wedge E'}) \simeq R\rho_* \varpi^{-1} (\mathcal{F}^{\wedge E''})$ puisque j est un changement de base, i' un morphisme de fibré et \mathcal{F} est à support dans E (puisque $T-\nu_Y RH_X(i_* F)$ est à support dans $C_Y(\text{supp } i_* F) \subset C_Y(M) = T_N M$).

♡

Les formules “sans conditions de croissance” s’obtiennent de manière analogue, par exemple on a

$$(3.2.5)\text{bis} \quad \nu_N RHom(F, \mathcal{B}_M) \simeq \nu_Y RHom(i_* F, \mathcal{O}_X) \otimes or_M[\dim M].$$

Remarque 3.2.3

Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(M)$. On a un morphisme canonique

$$(3.2.6) \quad T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_M) \longrightarrow R\rho_*\varpi^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(i_*F, \mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_M[\dim M]$$

où ρ et ϖ désignent les applications $T^*M \xleftarrow{\rho} M \times T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X$.

En effet, posant $n = \dim M$, on a

$$\begin{aligned} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_M) &= \mathcal{D}_{\text{def}} \mathcal{D}_{M \xleftarrow{q_{1M}} M \times M} \overset{\text{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{M \times M} T\text{-}\mu_{\Delta_M} TH_{M \times M}(\mathbb{C}_M \boxtimes i_*F) \\ &= R\rho_* \left(\mathcal{D}_{M \xleftarrow{q_{1M}} M \times M} \overset{\text{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{M \times M} \varpi^{-1} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(\mathbb{C}_M \boxtimes i_*F) \otimes \text{or}_{M \times M}[2n] \right) \\ &= R\rho_*\varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{X \times X} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(\mathbb{C}_M \boxtimes i_*F) \otimes q_{1M}^{-1} \text{or}_M[2n] \right) \\ &\longrightarrow R\rho_*\varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_{1X}} X \times X} \overset{\text{L}}{\otimes} \mathcal{D}_{X \times X} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(\mathbb{C}_X \boxtimes i_*F) \otimes q_{1M}^{-1} \text{or}_M[2n] \right) \\ &= R\rho_*\varpi^{-1}(T\text{-}\mu\text{hom}(i_*F, \mathcal{O}_X)) \otimes \text{or}_M[n], \end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 3.2.2 et la flèche canonique $\mathbb{C}_X \rightarrow \mathbb{C}_M$.

La restriction du morphisme (3.2.6) à la section nulle est l'isomorphisme (1.2.4). Mais (3.2.6) n'est pas un isomorphisme en général. Autrement dit il ne semble pas que l'on puisse retrouver facilement le foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{D}b)$ à partir de $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$.

3.3. Opérations

Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes. On note ρ et ϖ les applications canoniques associées $T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X$. Soit N (resp. M) une sous-variété analytique réelle de Y (resp. X) telle que $f(N) \subset M$; on notera également ρ et ϖ les applications $T_N^*Y \xleftarrow{\rho} N \times T_M^*X \xrightarrow{\varpi} T_M^*X$ s'il n'y a pas risque de confusion.

3.3.1. Images directes

PROPOSITION 3.3.1. — *On suppose que f est “clean” par rapport à M et que $f^{-1}(M) = N$. Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y_{\mathbb{R}})$ tel que f est propre sur $\text{supp } F$. Alors :*

$$R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_N} RH_Y(F) \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \xrightarrow{\sim} T^{-\mu_M} RH_X(Rf_* F) [\dim_{\mathbb{C}} X].$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} & R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_N} RH_Y(F) \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \\ &= R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \left(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{Y}}} T^{-\mu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F) \right) \right) \\ &= R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times \overline{Y}}|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F) \right) \\ &= \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times \overline{X} \leftarrow Y \times \overline{Y}}|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F) \right) \\ &= \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F) \right) \\ &\simeq \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} T^{-\mu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(Rf_* F) \\ &= T^{-\mu_M} RH_X(Rf_* F) [\dim_{\mathbb{C}} X]; \end{aligned}$$

on a utilisé la proposition 2.4.1 (ii).

♡

THÉORÈME 3.3.2. — *Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}(Y_{\mathbb{R}})$. On suppose $f : Y \rightarrow X$ propre sur $\text{supp } F$. Alors on a un morphisme canonique :*

$$R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu} \text{hom}(F, \mathcal{O}_Y) \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \longrightarrow T^{-\mu} \text{hom}(Rf_* F, \mathcal{O}_X) [\dim_{\mathbb{C}} X].$$

Si de plus f est lisse, ce morphisme est un isomorphisme.

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned}
 & R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y) \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \\
 &= R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \left(\mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{Y}}} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_{Y_{\mathbb{R}}}) \right) \right) \\
 &= R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times \overline{Y}}|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_{Y_{\mathbb{R}}}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}} R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times \overline{X} \leftarrow Y \times \overline{Y}}|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_{Y_{\mathbb{R}}}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} R\omega_! \rho^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow Y_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{D}b_{Y_{\mathbb{R}}}) \right) \\
 &\longrightarrow \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \overline{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}} T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* F, \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}}) \\
 &= T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* F, \mathcal{O}_X) [\dim_{\mathbb{C}} X] ,
 \end{aligned}$$

où le morphisme est assuré par le théorème 2.4.2 ; le même théorème montre que c'est un isomorphisme si f est lisse.

♡

3.3.2. Images inverses

PROPOSITION 3.3.3. — *Soit $S \subset Y$, $Z \subset X$ des sous-variétés complexes de Y et X respectivement. On suppose $f : Y \rightarrow X$ transverse à Z et $S = f^{-1}(Z)$. Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. On a un morphisme canonique*

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \varpi^{-1} T\text{-}\mu_Z RH_X(F) \longrightarrow T\text{-}\mu_S RH_Y(f^{-1}F) .$$

Démonstration

On a $T_S^*Y \xleftarrow{\simeq} S \times_Z T_Z^*X$ et il revient au même de construire un morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} f'^{-1} T^{-\nu_Z} RH_X(F) \longrightarrow T^{-\nu_S} RH_Y(f^{-1}F).$$

Utilisant les notations du paragraphe 3.2, désignons par $\tilde{X} = \tilde{T}_Z^c X \xrightarrow{p_X} X$ la déformation au fibré normal complexe de X le long de Z , Ω_X l'ensemble sous-analytique localement fermé $\Omega_X = z^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$, $s_X : T_Z X \hookrightarrow \tilde{X}$ l'immersion canonique, et les notations analogues en Y . Notons $\tilde{f}' : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ l'application associée à f . Vu la proposition 3.2.2 on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} f'^{-1} T^{-\nu_Z} RH_X(F) &= \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} f'^{-1} s_X^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} RH_{\tilde{X}}((p_X^{-1}F)_{\Omega_X}) \right) \\ &= s_Y^{-1} \left(p_Y^{-1} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{p_Y^{-1}f^{-1}\mathcal{D}_X}^{\mathbb{L}} \tilde{f}'^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} RH_{\tilde{X}}((p_X^{-1}F)_{\Omega_X}) \right) \right) \\ &\rightarrow s_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}_{\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}^{\mathbb{L}} \tilde{f}'^{-1} RH_{\tilde{X}}((p_X^{-1}F)_{\Omega_X}) \right) \\ &\rightarrow s_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} RH_{\tilde{Y}}(\tilde{f}'^{-1}((p_X^{-1}F)_{\Omega_X})) \right) \\ &\simeq s_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow \tilde{Y}} \otimes_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}}^{\mathbb{L}} RH_{\tilde{Y}}((p_Y^{-1}(f^{-1}F))_{\Omega_Y}) \right) \\ &= T^{-\mu_S} RH(f^{-1}F), \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule (0.2.6) dans la situation du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{f}'} & \tilde{X} \\ p_Y \downarrow & \square & \downarrow p_X \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

puis la proposition 1.2.3 et la formule $\tilde{f}'^{-1}((p_X^{-1}F)_{\Omega_X}) \simeq (p_Y^{-1}(f^{-1}F))_{\Omega_Y}$ qui s'établit comme (2.4.2).

♡

Dans le cas d'une immersion on a un énoncé plus précis. Soient M et N des sous-variétés réelles de $X_{\mathbb{R}}$ et $Y_{\mathbb{R}}$ respectivement.

PROPOSITION 3.3.4. — *Soit $f : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée, "clean" respectivement à M et telle que $N = M \cap Y$. Alors pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$ on a :*

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_M} RH_X(F)|_{T_N^* Y} \simeq T^{-\mu_N} RH_Y(F|_Y) ;$$

en particulier $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X|_{T_N^* Y} \simeq T^{-\mu_N} \mathcal{O}_Y.$

Démonstration

Il suffit de recopier la démonstration de la proposition 1.2.3. en utilisant le lemme suivant au lieu de la proposition 1.2.2.

♡

LEMME 3.3.5. — *Les hypothèses étant celles de la proposition 3.3.4, on a*

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)|_{T_N^* Y} \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}_{\bar{X} \leftarrow \bar{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{Y}}} T^{-\mu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)[\ell],$$

où ℓ est la codimension (complexe) de Y dans X .

Démonstration du lemme 3.3.5

Il revient au même de démontrer l'isomorphisme

$$(3.3.1) \quad \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} f'^{-1}(T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \simeq \mathcal{D}_{\bar{X} \leftarrow \bar{Y}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\bar{Y}}} T^{-\nu_N} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(F|_Y)[\ell].$$

Soit $\tilde{X}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_X} X_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{Y}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_Y} Y_{\mathbb{R}}$) l'éclaté réel de $X_{\mathbb{R}}$ (resp. $Y_{\mathbb{R}}$) le long de M (resp. N) et $\tilde{f}' : \tilde{Y}_{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{X}_{\mathbb{R}}$ l'application induite par f (cf. le diagramme (2.4.1) où les occurrences de X (resp. Y) sont remplacées par $X_{\mathbb{R}}$ (resp. $Y_{\mathbb{R}}$)).

Remarquons d'abord que les hypothèses impliquent que $\tilde{f}' : \tilde{Y}_{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{X}_{\mathbb{R}}$ est une immersion fermée. Alors on a

$$(3.3.2) \quad \mathcal{D}_{\tilde{X}_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}}} TH_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}}((p_Y^! (F|_Y)_{\Omega_Y})) \simeq \tilde{f}'^{-1} TH_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}}((p_X^! (F|_Y)_{\Omega_X})) ;$$

en effet par le théorème d'image directe de Kashiwara, on a

$$\begin{aligned}
& R\tilde{f}'_* \left(\mathcal{D}_{\tilde{X}_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}}} TH_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}} (p_Y^! (F|_Y)_{\Omega_Y}) \right) \\
& \simeq TH_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}} \left(R\tilde{f}'_* \left((p_Y^! (F|_Y))_{\Omega_Y} \right) \right) \\
& \simeq TH_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}} \left((p_X^! Rf_* (F|_Y))_{\Omega_X} \right) \\
& = TH_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}} \left((p_X^! F_Y)_{\Omega_X} \right), \text{ (on a utilisé la formule 2.4.3).}
\end{aligned}$$

D'autre part, la formule (1.2.2) implique la suivante :

$$(3.3.3) \quad \mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}} \mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}}} [\ell] \simeq \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{X}_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}}}.$$

Considérons le terme de droite de (3.3.1), égal par définition à

$$\mathcal{D}_{\tilde{X} \leftarrow \tilde{Y}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}}} s_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{Y}_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}}} TH_{\tilde{Y}_{\mathbb{R}}} \left((p_Y^! (F|_Y)_{\Omega_Y}) \right) \right) [\ell]$$

alors par (3.3.3) et (3.3.2) on voit qu'il est canoniquement isomorphe à

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} f'^{-1} s_X^{-1} \left(\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}} \leftarrow \tilde{X}_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_{\mathbb{R}}}} \left((p_X^! F_Y)_{\Omega_X} \right) \right) \\
& = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}} (F_Y) |_{T_{NY}}.
\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de voir que ce dernier terme est canoniquement isomorphe au premier terme de (3.3.1). Vu le triangle distingué $F_{X \setminus Y} \rightarrow F \rightarrow F_Y \xrightarrow{+1}$, le morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}} (F_Y) \longrightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}} (F)$$

est un isomorphisme si $\mathcal{D}_{X \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}} (F_{X \setminus Y}) = 0$; alors en se plaçant dans le germe en $v \in T_M X$ on est ramené à la situation déjà traitée dans la démonstration de la proposition 1.2.2.

♡

THÉOREME 3.3.6. — Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques complexes et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$.

(i) On a un morphisme canonique d'image inverse

$$R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^L \varpi^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \right) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(f^!F, \mathcal{O}_Y) [\dim_{\mathbb{R}} Y_{\mathbb{R}} - \dim_{\mathbb{R}} X_{\mathbb{R}}].$$

(ii) Supposons de plus que $f : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée et soit U un ouvert de T^*X tel que Y est non caractéristique pour F sur U . Alors la restriction à U du morphisme précédent est un isomorphisme.

On utilisera le plus souvent le morphisme

$$(3.3.4) \quad R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}^L \varpi^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \right) \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(f^{-1}F, \mathcal{O}_Y)$$

qui se déduit de (i) par utilisation du morphisme canonique

$$f^{-1}F \otimes_{\sigma_{Y_{\mathbb{R}}/X_{\mathbb{R}}}} [\dim_{\mathbb{R}} Y_{\mathbb{R}} - \dim_{\mathbb{R}} X_{\mathbb{R}}] \rightarrow f^!F.$$

Comme la suite n'utilisera pas (ii), on renvoie le lecteur à [An 1] pour une démonstration de ce point - que l'on a surtout cité pour rassurer le lecteur : le morphisme n'est pas (toujours) nul! (cf. remarque 2.4.9) - et on va se borner ici à établir (i).

Montrons d'abord le :

LEMME 3.3.7. — Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes, $Z \subset X$, $Z' \subset Y$ des sous-variétés complexes, $g : X \rightarrow Z$ un morphisme lisse qui est une rétraction sur Z . On suppose que f induit un isomorphisme analytique $Z' \simeq Z$ (et on identifie Z' à Z). Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. Alors on a un morphisme canonique :

$$R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X}^L T\text{-}\mu_Z RH_X(F) \right) \longrightarrow \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L T\text{-}\mu_Z RH_Y(f^!F) [3(\dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X)].$$

Démonstration du lemme

On a :

$$\begin{aligned}
& R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} T^{-\mu_Z} RH_X(F) \right) \\
&= R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \Big|_{X_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_Z} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) \right) [-\dim_{\mathbb{C}} X] \\
&\simeq \mathcal{D}_{Z \leftarrow Z \times \bar{Z}} \Big|_{Z_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Z_{\mathbb{R}}}} R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Z_{\mathbb{R}} \leftarrow X_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_Z} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F) \right) [-\dim_{\mathbb{C}} X] \\
&\longrightarrow \mathcal{D}_{Z \leftarrow Z \times \bar{Z}} \Big|_{Z_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Z_{\mathbb{R}}}} \mathcal{D}_{Z_{\mathbb{R}} \leftarrow Y_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} \\
&\quad T^{-\mu_Z} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(f^! F) [-\dim_{\mathbb{C}} X] [2 \dim_{\mathbb{C}} Y - 2 \dim_{\mathbb{C}} X] \\
&= \mathcal{D}_{Z \leftarrow Z \times \bar{Z}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Z \times \bar{Z}}} \mathcal{D}_{Z \times \bar{Z} \leftarrow Y \times \bar{Y}} \Big|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} \\
&\quad T^{-\mu_Z} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(f^! F) [2 \dim_{\mathbb{C}} Y - 3 \dim_{\mathbb{C}} X] \\
&\simeq \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times \bar{Y}} \Big|_{Y_{\mathbb{R}}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{R}}}} T^{-\mu_Z} TH_{Y_{\mathbb{R}}}(f^! F) [2 \dim_{\mathbb{C}} Y - 3 \dim_{\mathbb{C}} X] \\
&= \mathcal{D}_{Z \leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_Z} RH_Y(f^! F) [3 \dim_{\mathbb{C}} Y - 3 \dim_{\mathbb{C}} X],
\end{aligned}$$

où le morphisme est donné par le lemme 2.4.6.

♡

Démonstration de (i), théorème 3.3.6

Notons $f_1 = (f, \text{Id}_X) = Y \times X \rightarrow X \times X$, $f_2 = (\text{Id}_Y, f) = Y \times Y \rightarrow Y \times X$, $\Delta^f \subset Y \times X$ le graphe de f , q_j la j -ième projection de $Y \times X$, $d_X = \dim_{\mathbb{C}} X$, $d_Y = \dim_{\mathbb{C}} Y$, et identifions la première ligne à la deuxième dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) & \longleftarrow & T_{\Delta^f}^*(Y \times X) & \longrightarrow & T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T^*Y & \longleftarrow & Y \times_X T^*X & \longrightarrow & T^*X \\
& & \rho & & \varpi
\end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 & R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \varpi^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \right) \\
 &= R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \varpi^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH(q_2^{-1}F) \right) \right) [d_X] \\
 &\longrightarrow R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times X}} \mathcal{D}_{Y \times X \rightarrow X \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f_1^{-1}\mathcal{D}_{X \times X}} \varpi^{-1} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH(q_2^{-1}F) \right) [d_X] \\
 &\longrightarrow R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_f} RH(f_1^{-1}q_2^{-1}F) \right) [d_X] \\
 &= R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y \leftarrow Y \times X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times X}} T\text{-}\mu_{\Delta_f} RH(q_2^{-1}F) \right) [d_X] \\
 &\longrightarrow \mathcal{D}_{Y \xleftarrow{q_1} Y \times Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} RH(f_2^1 q_2^{-1}F) [3d_Y - 2d_X] \\
 &\simeq \mathcal{D}_{Y \xleftarrow{q_1} Y \times Y} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{Y \times Y}} T\text{-}\mu_{\Delta_Y} RH(q_2^{-1}f^1 F) [3d_Y - 2d_X] \\
 &= T\text{-}\mu\text{hom}(f^1 F, \mathcal{O}_Y) [2d_Y - 2d_X]
 \end{aligned}$$

où le premier morphisme est obtenu en considérant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times X & \xrightarrow{f_1} & X \times X \\
 q_1 \downarrow & \square & \downarrow q_{1X} \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

et en appliquant la formule (0.2.6),

où le second morphisme est donné par la proposition 3.3.3 ($f_1 : Y \times X \rightarrow X \times X$ est transverse à Δ_X et $f_1^{-1}\Delta_X = \Delta^f$),

et où le troisième morphisme résulte du lemme 3.3.7 appliqué dans la situation du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y \times Y & \xrightarrow{f_2} & Y \times Y \\
 q_{1Y} \swarrow & & \uparrow & \square & \uparrow & \searrow q_1 \\
 Y & \xleftarrow{\sim} & \Delta_Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta^f & \xrightarrow{\sim} & Y
 \end{array}$$

On a ensuite utilisé l'identification $f_2^1 q_2^{-1} \simeq q_2^{-1} f^1$.

♡

3.3.3. Enfin on a une opération de produit tensoriel externe qui résulte immédiatement des propositions 2.4.10 et 2.4.11 .

PROPOSITION 3.3.8. — Soient X et Y deux variétés complexes, et M et N des sous-variétés analytiques réelles de X et Y respectivement, $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$, $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y_{\mathbb{R}})$. On a les morphismes canoniques dans $D_{\text{coni}}^b(T^*(X_{\mathbb{R}} \times Y_{\mathbb{R}}))$ et dans $D^b(\pi^{-1}\mathcal{D}_{X \times Y})$ suivants :

$$(i) T-\mu_M RH_X(F) \boxtimes_{\mathcal{D}} T-\mu_N RH_Y(G) \rightarrow T-\mu_{M \times N} RH_{X \times Y}(F \boxtimes G),$$

$$(ii) T-\mu_{\text{hom}}(F, \mathcal{O}_X) \boxtimes_{\mathcal{D}} T-\mu_{\text{hom}}(G, \mathcal{O}_Y) \rightarrow T-\mu_{\text{hom}}(F \boxtimes G, \mathcal{O}_{X \times Y}).$$

Remarque 3.3.9

On utilisera le plus souvent les opérations d'image directe, d'image inverse ou de produit externe en "oubliant" qu'il s'agit d'opérations de \mathcal{D} -modules. Plus précisément, si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de variétés complexes, la section canonique $1_{Y \rightarrow X} \in \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ définit un morphisme de $f^{-1}\mathcal{D}_X$ -modules à droite $f^{-1}\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ et un morphisme de \mathcal{D}_Y -modules à droite $\Omega_{Y/X} \rightarrow \mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$. Alors par exemple, sous les hypothèses du théorème 3.3.2, on obtient, par composition, un morphisme dans $D_{\text{coni}}^b(T^*X_{\mathbb{R}})$:

$$(3.3.5) R\varpi_! \rho^{-1} T-\mu_{\text{hom}}(F, \Omega_Y)[\dim_{\mathbb{C}} Y] \longrightarrow T-\mu_{\text{hom}}(Rf_* F, \Omega_X)[\dim_{\mathbb{C}} X],$$

et sous les hypothèses du théorème 3.3.6, des morphismes dans $D_{\text{coni}}^b(T^*Y_{\mathbb{R}})$:

$$(3.3.6) R\rho_! \varpi^{-1} \left(T-\mu_{\text{hom}}(F, \mathcal{O}_X) \right) \longrightarrow T-\mu_{\text{hom}}(f^! F, \mathcal{O}_Y)[\dim_{\mathbb{R}} Y_{\mathbb{R}} - \dim_{\mathbb{R}} X_{\mathbb{R}}] \\ \longrightarrow T-\mu_{\text{hom}}(f^{-1} F, \mathcal{O}_Y).$$

3.3.4. Transformations intégrales

Si X est une variété complexe, on note d_X sa dimension et $a_X : T^*X \rightarrow T^*X$ l'application antipodale. Soit $X_1 \times \cdots \times X_n$ un produit de n variétés complexes. Pour $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq i < j \leq n$, on désigne par $q_{i_1 \dots i_k}$ et par $p_{i_1 \dots i_k}$ les projections $q_{i_1 \dots i_k} : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k}$ et $p_{i_1 \dots i_k} : T^*X_1 \times \cdots \times T^*X_n \rightarrow T^*X_{i_1} \times \cdots \times T^*X_{i_k}$, et on note

$$(3.3.7) \begin{cases} p_{ij}^a = (\text{Id}_{T^*X_i} \times a_{X_j}) \circ p_{ij} \\ \mathcal{O}_{X_1 \times \cdots \times X_n}^{(0, \dots, 0, d_{X_n})} = \Omega_{X_1 \times \cdots \times X_n / X_1 \times \cdots \times X_{n-1}} \\ \mathcal{O}_{X_1 \times \cdots \times X_n}^{(0, \dots, 0, d_{X_i}, 0, \dots, 0, d_{X_j}, 0, \dots, 0)} = \mathcal{O}_{X_1 \times \cdots \times X_n} \otimes_{q_{ij}^{-1} \mathcal{O}_{X_i \times X_j}} q_{ij}^{-1} \Omega_{X_i \times X_j}. \end{cases}$$

Rappelons également que pour $K \in \text{Ob}(D^b(X_1 \times X_2))$ et $F \in \text{Ob}(D^b(X_2))$ on pose :

$$\Phi_K(F) = Rq_{1!}(K \otimes q_2^{-1}F),$$

et pour $K_1 \in \text{Ob}(D^b(X_1 \times X_2))$ et $K_2 \in \text{Ob}(D^b(X_2 \times X_3))$, on pose

$$K_1 \circ K_2 = Rq_{13!}(q_{12}^{-1}K_1 \otimes q_{23}^{-1}K_2).$$

Si $K \in \text{Ob}(D^b(T^*(X_1 \times X_2)))$ on notera aussi $K^a = (Id_{T^*X_1} \times a_{X_2})^{-1}(K)$.

PROPOSITION 3.3.10. — *Soient X et Y deux variétés complexes.*

(i) *Soit $K \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ tel que q_1 soit propre sur $\text{supp} K$. Soit $F \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$. On a un morphisme canonique :*

$$Rp_{11} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})^a \otimes p_2^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y) \right) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_K(F), \mathcal{O}_X)[-d_Y].$$

(ii) *Soit Z une troisième variété complexe et soient $K_1 \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ et $K_2 \in \text{Ob} D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z)$. On suppose q_{13} propre sur $\text{supp}(q_{12}^{-1}K_1 \otimes q_{23}^{-1}K_2)$. On a un morphisme canonique :*

$$Rp_{13}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)}) \otimes p_{23}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)}) \right) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)})[-d_Y].$$

Démonstration

(i) Soit $\{pt\}$ la variété réduite à un point et identifions F à un objet de $D^b(Y \times \{pt\})$. Alors $\Phi_K(F) = K \circ F$ et (i) résulte de (ii) en prenant $Z = \{pt\}$.

(ii) Soit δ l'immersion $X \times Y \times Z \hookrightarrow X \times Y \times Y \times Z$ associée à la diagonale de Y et notons $j : T^*Y \xrightarrow{\sim} T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$ l'isomorphisme induit par la deuxième projection de $T^*(T \times Y)$ sur T^*Y .

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 T^*(X \times Y) \times T^*(Y \times Z) & \xleftarrow{p_{12}^a \times p_{23}^a} & T^*X \times T^*Y \times T^*Z \\
 \varpi_\delta \uparrow & & \simeq \downarrow \text{Id} \times j \times a_Z \\
 T^*(X \times Y) \times_Y T^*(Y \times Z) & \xleftarrow{\quad} & T^*X \times T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) \times T^*Z \\
 \rho_\delta \downarrow & \square & \downarrow \\
 T^*(X \times Y \times Z) & \xleftarrow{\rho_{q_{13}}} & T^*X \times Y \times T^*Z \\
 & & \downarrow \varpi_{q_{13}} \\
 & & T^*X \times T^*Z
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} p_{13}
 \end{array}
 ,$$

où le deuxième carré est cartésien, donc on a une identification (cf. [K-S 3])

$$(3.3.8) \quad R\varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} R\rho_{\delta!} \varpi_\delta^{-1} (\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2) \simeq Rp_{13!}^a (p_{12}^{a-1} \mathcal{F}_1 \otimes p_{23}^{a-1} \mathcal{F}_2),$$

pour $\mathcal{F}_1 \in \text{Ob } D^b(T^*(X \times Y))$, $\mathcal{F}_2 \in \text{Ob } D^b(T^*(Y \times Z))$.

Alors en utilisant successivement (3.3.8), proposition 3.3.8, (3.3.6) et (3.3.5) on peut écrire les flèches

$$\begin{aligned}
 & Rp_{13!}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)}) \otimes p_{23}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)}) \right) \\
 & \simeq R\varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} R\rho_{\delta!} \varpi_\delta^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)}) \boxtimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)}) \right) \\
 & \rightarrow R\varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} R\rho_{\delta!} \varpi_\delta^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \boxtimes K_2, \mathcal{O}_{X \times Y \times Y \times Z}^{(0, d_Y, 0, d_Z)}) \right) \\
 & \rightarrow R\varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(q_{12}^{-1} K_1 \otimes q_{23}^{-1} K_2, \mathcal{O}_{X \times Y \times Z}^{(0, d_Y, d_Z)}) \right) \\
 & \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)}) [-d_Y].
 \end{aligned}$$

♡

On a également la propriété d'associativité des noyaux suivante :

PROPOSITION 3.3.11. — Soit X_i une variété complexe pour $1 \leq i \leq 4$ et soit $K_i \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_i \times X_j)$ pour $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4)$. On suppose les

conditions suivantes satisfaites

$$\begin{cases} q_{13} \text{ est propre sur } \text{supp}(q_{12}^{-1}K_1 \otimes q_{23}^{-1}K_2), \\ q_{24} \text{ est propre sur } \text{supp}(q_{23}^{-1}K_2 \otimes q_{34}^{-1}K_3), \\ q_{14} \text{ est propre sur } \text{supp}(q_{13}^{-1}(K_1 \circ K_2) \otimes q_{34}^{-1}K_3), \\ q_{14} \text{ est propre sur } \text{supp}(q_{12}^{-1}K_1 \otimes q_{24}^{-1}(K_2 \circ K_3)). \end{cases}$$

Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array} ,$$

où

$$\begin{aligned} A &= Rp_{14}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X_1 \times X_2}^{(0, d_{X_2})}) \otimes p_{23}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{X_2 \times X_3}^{(0, d_{X_3})}) \otimes \right. \\ &\quad \left. p_{34}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_3, \mathcal{O}_{X_3 \times X_4}^{(0, d_{X_4})}) \right), \\ B &= Rp_{13}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \mathcal{O}_{X_1 \times X_3}^{(0, d_{X_3})}) [-d_{X_2}] \otimes \right. \\ &\quad \left. p_{23}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_3, \mathcal{O}_{X_3 \times X_4}^{(0, d_{X_4})}) \right), \\ C &= Rp_{13}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X_1 \times X_2}^{(0, d_{X_2})}) \otimes \right. \\ &\quad \left. p_{23}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_2 \circ K_3, \mathcal{O}_{X_2 \times X_4}^{(0, d_{X_4})}) \right) [-d_{X_3}], \\ D &= T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2 \circ K_3, \mathcal{O}_{X_1 \times X_4}^{(0, d_{X_4})}) [-d_{X_2} - d_{X_3}]. \end{aligned}$$

La démonstration est du même type que la précédente et on en laisse le détail au lecteur.

3.3.5. Transformations intégrales microlocales

Dans le cas qui nous intéressera (au chapitre 5) des transformations canoniques, les noyaux qu'on a à considérer ne vérifient pas en général les hypothèses de propreté des propositions 3.3.10 et 3.3.11 (excepté en dimension 1); on va néanmoins définir, sous des hypothèses microlocales, des opérations sur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$ sur le modèle des opérations microlocales sur $\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$ du chapitre 11 de [K-S 3].

Rappelons que si $\Omega \subset T^*X$ est un sous-ensemble, le foncteur

$$T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X) : D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)^o \rightarrow D^b(\Omega)$$

est bien défini (cf. remarque 3.1.5), où la catégorie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ est celle définie dans l'appendice.

Dans l'appendice en fin d'article, on montre comment définir des opérations microlocales sur les complexes constructibles en adaptant la théorie de la loc. cit. Les notations Φ_K^μ et $K_1 \circ_\mu K_2$ ci-dessous sont celles de l'appendice.

Les références à l'appendice sont indiquées A.1, A.2, ...

PROPOSITION 3.3.12. (cf. proposition 3.3.10). — *Soient X et Y deux variétés complexes.*

(i) *Soient $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$, $p_X \in T^*X$ et $p_Y \in T^*Y$ tels que $SS(K) \cap (\{p_X\} \times T^*Y) \subset \{(p_X, p_Y^a)\}$ au voisinage de ce point (cf. condition A.3). Alors pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$ on a un morphisme canonique*

$$T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_K^\mu(F), \mathcal{O}_X)_{p_X}.$$

(ii) *Soit Z une troisième variété complexe, et soient $K_1 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$, $K_2 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z)$ t.q. K_1 et K_2 soient microlocalement composables en un point $(p_X, p_Y, p_Z) \in T^*(X \times Y \times Z)$ au sens de [K-S 3] paragraphe 7.3, c'est à dire qu'on a :*

$$\left(SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2) \right) \cap p_{13}^{a-1}(p_X, p_Z^a) \subset \{((p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a))\}$$

au voisinage de $((p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a))$. Alors on a un morphisme canonique :

$$T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)})_{(p_Y, p_Z^a)} \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ_\mu K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)})_{(p_X, p_Z^a)}[-d_Y].$$

Démonstration

Elle modifie celle de la proposition 3.3.10.

(i) Ce point résulte de (ii) en prenant $Z = \{\text{pt}\}$ vu le corollaire et la définition A.3.

(ii) Remarquons d'abord qu'on peut supposer que K_1 et K_2 vérifient la condition (A.2), en vertu du lemme A.6. Soit V un voisinage ouvert sous-analytique relativement compact de $\pi(p_Y)$. On peut écrire les morphismes

$$\begin{aligned}
 & T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)})_{(p_Y, p_Z^a)} \\
 & \simeq R p_{23}^a \left(p_{12}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)}) \otimes p_{13}^{a-1} T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)}) \right)_{(p_X, p_Z^a)} \\
 & \rightarrow R \varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(q_{12}^{-1} K_1 \otimes q_{23}^{-1} K_2, \mathcal{O}_{X \times Y \times Z}^{(0, d_Y, d_Z)}) \right)_{(p_X, p_Z^a)} \\
 & \rightarrow R \varpi_{q_{13}!} \rho_{q_{13}}^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(q_{12}^{-1} ((K_1)_{X \times V}) \otimes q_{23}^{-1} K_2, \mathcal{O}_{X \times Y \times Z}^{(0, d_Y, d_Z)}) \right)_{(p_X, p_Z^a)} \\
 & \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom} \left((K_1)_{X \times V} \circ K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)} \right)_{(p_X, p_Z^a)} [-d_Y] \\
 & \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom} \left(K_1 \circ_{\mu} K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)} \right)_{(p_X, p_Z^a)} [-d_Y],
 \end{aligned}$$

où la première flèche est fournie par la démonstration du (ii) de la proposition 3.3.10, la deuxième est induite par $(K_1)_{X \times V} \rightarrow K_1$, la troisième résulte de l'application de (3.3.5) avec $f = q_{13}$ (qui est propre sur $X \times V \times Z$) - ces trois flèches étant des morphismes de $D^b(T^*(X \times Z))$ et la quatrième est le morphisme de $D^b(\{(p_X, p_Z^a)\})$ induit par le morphisme $K_1 \circ_{\mu} K_2 \rightarrow (K_1)_{X \times V} \circ K_2$ de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$.

♡

On laisse le soin au lecteur de démontrer la variante microlocale suivante de la propriété d'associativité, dont l'énoncé a un sens par le corollaire A.7.

PROPOSITION 3.3.13. (cf. proposition 3.3.11). — Soient X, Y, Z, W quatre variétés complexes, un point $(p_X, p_Y, p_Z, p_W) \in T^*(X \times Y \times Z \times W)$, et trois complexes

$$K_1 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y), \quad K_2 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z), \quad K_3 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Z \times W),$$

tels que

$$SS(K_1)_{T^*Y} \times_{T^*Z} SS(K_2) \times_{T^*Z} SS(K_3) \subset \{(p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a), (p_Z, p_W^a)\}.$$

Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array},$$

où

$$\begin{aligned} A &= T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_2, \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0, d_Z)})_{(p_Y, p_Z^a)} \otimes \\ &\quad T\text{-}\mu\text{hom}(K_3, \mathcal{O}_{Z \times W}^{(0, d_W)})_{(p_Z, p_W^a)}, \\ B &= T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, d_Z)})_{(p_X, p_Z^a)} [-d_Y] \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_3, \mathcal{O}_{Z \times W}^{(0, d_W)})_{(p_Z, p_W^a)}, \\ C &= T\text{-}\mu\text{hom}(K_1, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, d_Y)})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(K_2 \circ K_3, \mathcal{O}_{Y \times W}^{(0, d_W)})_{(p_Y, p_W^a)} [-d_Z], \\ D &= T\text{-}\mu\text{hom}(K_1 \circ K_2 \circ K_3, \mathcal{O}_{X \times W}^{(0, d_W)})_{(p_X, p_W^a)} [-d_Y - d_Z]. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.14

Tous les morphismes et (ou isomorphismes) des énoncés des paragraphes 3.2 et 3.3 sont valables respectivement dans le cadre non tempéré. Ils sont pour la plupart bien connus (cf. [S-K-K], [K-S 3]) et ils sont compatibles avec ceux-là. Plus précisément, les énoncés sont ceux qu'on obtient en remplaçant $T\text{-}\mu_N TH_M(F)$ par $\mu_N RHom(F, \mathcal{B}_M)$, $T\text{-}\mu\text{hom}(F, Db_M)$ par $\mu\text{hom}(F, \mathcal{B}_M)$, $RH_X(F)$ par $RHom(F, \mathcal{O}_X)$, $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ par $\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ etc., et la même remarque vaut aussi pour les démonstrations, d'où la compatibilité annoncée. Bien entendu, dans le cadre non tempéré on dispose de démonstrations plus directes.

3.4. Produit tensoriel sur \mathcal{O} par un module holonôme régulier

On donne ici une version microlocale du théorème 1.2.8.

THÉORÈME 3.4.1. — *Soient M une sous-variété analytique réelle de $X_{\mathbb{R}}$, $F \in Ob D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$, $G \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. On a un isomorphisme canonique*

$$\pi^{-1} RH_X(F) \overset{L}{\otimes}_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} T\text{-}\mu_M RH_X(G) \simeq T\text{-}\mu_M RH_X(F \otimes G),$$

et en particulier

$$T\text{-}\mu_M RH_X(F) \simeq \pi^{-1} RH_X(F) \overset{L}{\otimes}_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} T\text{-}\mu_M \mathcal{O}_X.$$

Montrons d'abord le

LEMME 3.4.2. — Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes, $\mathcal{N} \in \text{Ob } \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_Y)$ et $\mathcal{M} \in \text{Ob } \mathcal{D}^b(\mathcal{D}_X)$. On a :

$$f^{-1}\mathcal{M} \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{N}) \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \left((\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} f^{-1}\mathcal{M}) \underset{\mathcal{O}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{N} \right).$$

Démonstration

Notons δ_X (resp. δ_Y) l'immersion diagonale $\delta_X : X \hookrightarrow X \times X$ (resp. $\delta_Y : Y \hookrightarrow Y \times Y$), $\Delta = \{(f(y), y)\} \subset X \times Y$ le graphe de f , δ l'immersion $\delta : \Delta \hookrightarrow X \times Y$, q_j la j -ième projection de $X \times Y$. On peut écrire

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \left((\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} f^{-1}\mathcal{M}) \underset{\mathcal{O}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{N} \right) \\ & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow Y \times Y} \underset{\delta_Y^{-1}\mathcal{D}_{Y \times Y}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \delta_Y^{-1} \left((\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} f^{-1}\mathcal{M}) \underset{\mathcal{D}}{\boxtimes} \mathcal{N} \right) \right) \\ & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \left(\mathcal{D}_{Y \rightarrow Y \times Y} \underset{\delta_Y^{-1}\mathcal{D}_{Y \times Y}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \delta_Y^{-1} \left(\mathcal{D}_{Y \times Y \rightarrow X \times Y} \underset{(f \times \text{Id}_Y)^{-1}\mathcal{D}_{X \times Y}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. (f \times \text{Id}_Y)^{-1}(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\boxtimes} \mathcal{N}) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X \times Y} \underset{\delta^{-1}\mathcal{D}_{X \times Y}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \delta^{-1}(\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\boxtimes} \mathcal{N}) \\ & \simeq f^{-1}\mathcal{D}_{X \rightarrow X \times X} \underset{f^{-1}\delta_X^{-1}\mathcal{D}_{X \times X}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \delta^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \times X \leftarrow X \times Y} \underset{\mathcal{D}_{X \times Y}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} (\mathcal{M} \underset{\mathcal{D}}{\boxtimes} \mathcal{N}) \right) \\ & = f^{-1}\mathcal{M} \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{N}); \end{aligned}$$

on a utilisé (0.2.7) et (0.2.6), et la dernière égalité se montre comme (0.2.7).

Démonstration du théorème 3.4.1

Il revient au même de démontrer :

$$(3.4.1) \quad \tau^{-1}RH_X(F) \underset{\tau^{-1}\mathcal{O}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} T^{-\nu_M}RH_X(G) \simeq T^{-\nu_M}RH_X(F \otimes G).$$

où $\tau : T_M X \rightarrow M$.

On traite d'abord le cas où M est une sous-variété complexe de X en se ramenant à utiliser le théorème 1.2.8 à l'aide du lemme précédent et on en tirera le cas général en complexifiant $M \subset X_{\mathbb{R}}$ et en utilisant la proposition 3.2.2.

1) Supposons que M est une sous-variété complexe de X , et notons la $M = Y$. Désignons par $p : \tilde{X} = \tilde{T}_Y^c X \rightarrow X$ l'éclatement complexe de X le long de Y . Avec les notations de la proposition 3.2.1 on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \tau^{-1} RH_X(F) \overset{\text{L}}{\otimes}_{\tau^{-1}\mathcal{O}_X} T^{-\nu_Y} RH_X(G) \\
& \stackrel{\text{def}}{=} s^{-1} \left(p^{-1} RH_X(F) \overset{\text{L}}{\otimes}_{p^{-1}\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}}(p^{-1}G_{\Omega})) \right) \\
& \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} \left((\mathcal{D}_{\tilde{X} \rightarrow X} \overset{\text{L}}{\otimes}_{p^{-1}\mathcal{D}_X} p^{-1} RH_X(F)) \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}}(p^{-1}G_{\Omega}) \right) \right) \\
& \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} \left(RH_{\tilde{X}}(p^{-1}F) \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}}(p^{-1}G_{\Omega}) \right) \right) \\
& \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} \left(RH_{\tilde{X}}(p^{-1}F \otimes (p^{-1}G_{\Omega})) \right) \right) \\
& \simeq s^{-1} \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow \tilde{X}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}} RH_{\tilde{X}} \left((p^{-1}(F \otimes G))_{\Omega} \right) \right) = T^{-\nu_Y} TH_X(F \otimes G),
\end{aligned}$$

où on a utilisé successivement le lemme 3.4.2 (appliqué à $p : \tilde{X} \rightarrow X$), le corollaire 1.2.7 et le théorème 1.2.8. D'où (3.4.1) si M est complexe.

2) Soit maintenant M une sous-variété réelle de $X_{\mathbb{R}}$. Identifions $X_{\mathbb{R}}$ à $\Delta_{X_{\mathbb{R}}} \subset X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}$ et notons $\delta : X_{\mathbb{R}} \rightarrow X \times \overline{X}$ l'immersion de $X_{\mathbb{R}}$ dans son complexifié $X \times \overline{X}$, q_j la j -ième projection de $X \times \overline{X}$, $j = 1, 2$, et $d_X = \dim_{\mathbb{C}} X$. En réduisant au besoin X on peut se donner une sous variété complexe fermée $Y \subset X \times \overline{X}$ telle que Y est un complexifié de M . On peut écrire (en omettant

les notations τ^{-1})

$$\begin{aligned}
 & RH_X(F) \otimes_{\mathcal{O}_X}^L T^{-\nu_M} RH_X(G) \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} RH_X(F) \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}^L T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(G) \right) [-d_X] \\
 & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}^L \left(\left(\mathcal{D}_{X \times \bar{X} \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X}^L q_1^{-1} RH_X(F) \right) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times \bar{X}}}^L \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(G) \right) [-d_X] \\
 & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}^L \left(RH_{X \times \bar{X}}(q_1^{-1} F) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times \bar{X}}}^L \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. T^{-\nu_Y} RH_{X \times \bar{X}}(\delta_* G) \otimes_{or_{X_{\mathbb{R}}}} \right) [-d_X] \\
 & \simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow X \times \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times \bar{X}}}^L \left(T^{-\nu_Y} RH_{X \times \bar{X}}(q_1^{-1} F \otimes \delta_* G) \right) \otimes_{or_{X_{\mathbb{R}}}} [-d_X] \\
 & = \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \bar{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^L T^{-\nu_Y} RH_{X \times \bar{X}}(\delta_*(F \otimes G)) \otimes_{or_{X_{\mathbb{R}}}} [-d_X] \\
 & \simeq \mathcal{D}_{\text{pt} \leftarrow \bar{X}} [-d_X] \otimes_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}^L T^{-\nu_M} TH_{X_{\mathbb{R}}}(F \otimes G) \\
 & = T^{-\nu_M} RH_X(F \otimes G),
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le lemme 3.4.2 (appliqué avec $f = q_1 : X \times \bar{X} \rightarrow X$), le corollaire 1.3.2, la proposition 3.2.2 (deux fois) et la partie 1) de la démonstration. \heartsuit

Remarque 3.4.3

Soient $F, G \in Ob D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$. On a une flèche canonique :

$$(3.4.2) \quad \pi^{-1} RH_X(F) \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X}^L T^{-\mu} hom(G, \mathcal{O}_X) \rightarrow T^{-\mu} hom(F \otimes G, \mathcal{O}_X).$$

On a en effet les flèches canoniques :

$$\pi^{-1} RH_X(F) \xrightarrow{\sim} \pi^{-1} R\pi_* T^{-\mu} hom(F, \mathcal{O}_X) \longrightarrow T^{-\mu} hom(F, \mathcal{O}_X),$$

d'où la flèche (3.4.2) en utilisant successivement la formule diagonale (0.2.7), le produit externe et la restriction à la diagonale (cf. remarque 3.3.9), plus

précisément, en écrivant la chaîne de morphismes

$$\begin{aligned}
& T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \underset{\mathcal{O}_X}{\overset{L}{\otimes}} T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X) \\
&= \mathcal{D}_{X \xrightarrow{\varepsilon} X \times X} \underset{\delta^{-1} \mathcal{D}_{X \times X}}{\overset{L}{\otimes}} \delta^{-1} (T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \boxtimes_{\mathcal{D}} T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)) \\
&\longrightarrow \mathcal{D}_{X \xrightarrow{\varepsilon} X \times X} \underset{\delta^{-1} \mathcal{D}_{X \times X}}{\overset{L}{\otimes}} \delta^{-1} (T\text{-}\mu\text{hom}(F \boxtimes G, \mathcal{O}_{X \times X})) \\
&\longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\delta^{-1}(F \boxtimes G), \mathcal{O}_X) = T\text{-}\mu\text{hom}(F \otimes G, \mathcal{O}_X).
\end{aligned}$$

Mais (3.4.2) n'est pas un isomorphisme en général.

Par exemple, supposons de plus $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}\text{-}c}^b(X)$, et notons q_j la j -ième projection de $X \times X$. Alors le terme de gauche de (3.4.2) est

$$\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \underset{\mathcal{D}_{X \times X}}{\overset{L}{\otimes}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(F \boxtimes G) [\dim_{\mathbb{C}} X],$$

(utiliser successivement le lemme 3.4.2, l'isomorphisme d'image directe de RH dans le cas \mathbb{C} -constructible, puis le théorème 3.4.1),

tandis que le terme de droite de (3.4.2) est, par définition de $T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)$,

$$\mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X \times X} \underset{\mathcal{D}_{X \times X}}{\overset{L}{\otimes}} T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(q_2^{-1}(F \otimes G)) [\dim_{\mathbb{C}} X],$$

et ces termes ne sont pas en général isomorphes sans, par exemple, des hypothèses convenables sur les micro-supports de F et G (cf. [K-S 3]).

4. - MICROFONCTIONS HOLOMORPHES TEMPÉRÉES ET OPÉRATEURS MICROLOCAUX HOLOMORPHES D'ORDRE FINI

4.1. - Le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$

Soient X une variété analytique complexe, et $Y \subset X$ une sous-variété de codimension complexe d .

On sait alors (cf. [S-K-K]) que $\mu_Y \mathcal{O}_X$ est concentré en degré d et que $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_Y \mathcal{O}_X [d]$ (identifié au faisceau $H^d(\mu_Y \mathcal{O}_X)$) vérifie $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}|_{T_X^* X} \simeq \mathcal{B}_{Y|X}^\infty$ ($\stackrel{\text{def}}{=} R\Gamma_Y \mathcal{O}_X [d]$).

PROPOSITION et DÉFINITION 4.1.1. —

(i) $T-\mu_Y \mathcal{O}_X$ est concentré en degré d .

(ii) Le morphisme canonique $H^d(T-\mu_Y \mathcal{O}_X) \rightarrow H^d(\mu_Y \mathcal{O}_X)$ est injectif.

On pose $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = T-\mu_Y \mathcal{O}_X [d]$,

(et on l'identifie au sous-faisceau $H^d(T-\mu_Y \mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$).

(iii) $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}|_{T_X^* X} \simeq \mathcal{B}_{Y|X}$ ($\stackrel{\text{def}}{=} R\Gamma_{[Y]} \mathcal{O}_X [d]$).

Démonstration

(iii) Vu la proposition 3.1.2 on a $T-\mu_Y \mathcal{O}_X|_{T_X^* X} \simeq RH_X(\mathbb{C}_Y) = R\Gamma_{[Y]} \mathcal{O}_X$, d'où (iii).

(i) et (ii). Soit $p \in \overset{\circ}{T}_Y^* X$. Rappelons que

$$H^j(\mu_Y \mathcal{O}_X)_p = \varinjlim R^j \Gamma_{Z \cap U}(U; \mathcal{O}_X) = \varinjlim H^j R\Gamma(X; R\Gamma_{Z \cap U} \mathcal{O}_X) \text{ et}$$

$$H^j(T-\mu_Y \mathcal{O}_X)_p = \varinjlim R^j \Gamma_{[Z \cap U]}(U; \mathcal{O}_X) = \varinjlim H^j R\Gamma(X; R\Gamma_{[Z \cap U]} \mathcal{O}_X),$$

(la deuxième égalité de la dernière ligne résultant de (1.1.9)(ii),) où les limites inductives sont prises sur l'ensemble des (Z, U) , Z fermé sous-analytique dans X tel que $Z \subset \text{Int}(\{p\}^0) \cup \{0\}$, U voisinage ouvert sous-analytique de $\pi(p)$. On peut supposer $X = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^n$ et $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^n$ et, dans les limites inductives précédentes on peut se borner à ne considérer que des Z, U tels que $Z \cap U$ soit de la forme $Z \cap U = (L \setminus K) \times B$ où K et L sont des convexes compacts sous-analytiques de \mathbb{C}^d et où B est un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n .

Alors (i) et (ii) résultent du lemme suivant qui est la version tempérée d'un théorème de Martineau et dont on ne doute pas qu'il fût connu des spécialistes.

♡

LEMME 4.1.2. — Soit K, L compacts convexes sous-analytiques de \mathbb{C}^d , $K \subset L$, B un polydisque ouvert de \mathbb{C}^n . Alors :

- (i) $R\Gamma_{[(L \setminus K) \times B]}(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B})$ est concentré en degré d .
- (ii) $H_{[(L \setminus K) \times B]}^d(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B}) \rightarrow H_{(L \setminus K) \times B}^d(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B})$ est injectif.

SOUS-LEMME 4.1.2 bis. —

$R\Gamma_{[K \times B]}(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B})$ est concentré en degré d , et

$H_{[K \times B]}^d(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B}) \rightarrow H_{K \times B}^d(\mathbb{C}^d \times B; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d \times B})$ est injectif.

Démonstration du sous-lemme

1) Supposons d'abord $n = 0$. Munissons $\mathcal{A}(K)$ de sa topologie naturelle de \mathcal{DFS} et $\mathcal{C}^\infty(K)$, l'espace de Whitney des fonctions \mathcal{C}^∞ sur K de sa topologie naturelle de Fréchet. Soient $\mathcal{A}(K)^{(0,\cdot)}$ et $\mathcal{C}^\infty(K)^{(0,\cdot)}$ les complexes de Dolbeault à coefficients $\mathcal{A}(K)$ et $\mathcal{C}^\infty(K)$ respectivement, chaque $\mathcal{A}(K)^{(0,j)}$, $\mathcal{C}^\infty(K)^{(0,j)}$ étant muni de sa topologie naturelle. On sait que les complexes $\mathcal{A}(K)^{(0,\cdot)}$ et $\mathcal{C}^\infty(K)^{(0,\cdot)}$ sont concentrés en degré 0 - pour le second c'est un résultat de Dufresnoy [D] - et on a une injection continue d'image dense $\mathcal{A}(K)^{(0,j)} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(K)^{(0,j)} \forall j$. Notant $\mathcal{B}_K = \mathcal{A}(K)'$ l'espace des fonctionnelles analytiques portables par K et $\mathcal{E}'_K = \mathcal{C}^\infty(K)'$ l'espace des distributions à support dans K , il résulte de ce qui précède, par dualité, que les complexes de Dolbeault $\mathcal{B}_K^{(0,\cdot)}$ et $\mathcal{E}'_K^{(0,\cdot)}$, qui calculent respectivement $R\Gamma_K(\mathbb{C}^d; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d})$ et $R\Gamma_{[K]}(\mathbb{C}^d; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^d})$, sont concentrés en degré d et qu'on a pour tout j une injection $\mathcal{E}'_K^{(0,j)} \rightarrow \mathcal{B}_K^{(0,j)}$.

2) Le cas $n > 0$ est la version "avec paramètres dans B" de 1) que l'on obtient en appliquant le foncteur $(\cdot) \widehat{\otimes}_{\text{top}} \Gamma(B; \mathcal{O}_B)$ aux complexes de la démonstration précédente, $\widehat{\otimes}_{\text{top}}$ désignant ici le produit tensoriel topologique. ♡

Démonstration du lemme 4.1.2

Posons $X = \mathbb{C}^d \times B$. Appliquons le foncteur $R\Gamma(X; RH_X(\cdot))$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_{(L \setminus K) \times B} \rightarrow \mathbb{C}_{L \times B} \rightarrow \mathbb{C}_{K \times B} \rightarrow 0.$$

Vu le sous-lemme précédent la suite exacte longue de cohomologie se réduit à la première ligne du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & H_{[(L \setminus K) \times B]}^{d-1}(X; \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H_{[K \times B]}^d(X; \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & H_{K \times B}^d(X; \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \\
 & & & & H_{[L \times B]}^d(X; \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H_{[(L \setminus K) \times B]}^d(X; \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow (3) & & \downarrow (4) \\
 & & & & H_{L \times B}^d(X; \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H_{(L \setminus K) \times B}^d(X; \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

dont la deuxième ligne est exacte par le théorème de Martineau. Comme (2) et (3) sont injectives, on a aussi $H_{[(L \setminus K) \times B]}^{d-1}(X; \mathcal{O}_X) = 0$ et (4) est injective.

♡

Décrivons maintenant les opérations sur les faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbb{R},f}$. Elles sont traductions immédiates des opérations du paragraphe 3.3.

Soit X (resp. Y) une variété complexe et $Z \subset X$ (resp. $S \subset Y$) une sous-variété complexe fermée. On désigne par $\dim X$ ou d_X la dimension complexe de X , et par $\text{codim}_Y X$ la codimension complexe de Y dans X .

Dans les deux énoncés suivants on se donne un morphisme de variétés complexes $f : Y \rightarrow X$ tel que $f(S) \subset Z$.

PROPOSITION 4.1.3. — (Image directe). *Supposons f propre sur S et $\dim S = \dim Z$. Alors on a un morphisme canonique*

$$\varpi_! \rho^{-1}(\mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}) \rightarrow \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f}.$$

La condition est évidemment réalisée si f induit un isomorphisme de S sur Z .

Démonstration

Appliquant le théorème 3.3.2 (sous la forme du morphisme 3.3.5) à $F = \mathbb{C}_S[d_S]$ on obtient :

$$\begin{aligned} R\varpi_! \rho^{-1}(\mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}) &\longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* \mathbb{C}_S[d_S], \mathcal{O}_X)[d_X] \longrightarrow \\ &T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Z[d_Z], \mathcal{O}_X)[d_X] = \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f}, \end{aligned}$$

où le deuxième morphisme est déduit de $\mathbb{C}_Z \rightarrow Rf_* \mathbb{C}_{f^{-1}Z} \rightarrow Rf_* \mathbb{C}_S$, et on conclut en prenant la cohomologie en degré 0.

♡

PROPOSITION 4.1.4. — (Image inverse). *Supposons $f^{-1}(Z) = S$ et $\text{codim}_X Z = \text{codim}_Y S$. On a un morphisme canonique :*

$$\rho_! \varpi^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R},f}.$$

La condition est évidemment réalisée si $f^{-1}(Z) = S$ et f est transverse à S (et alors on peut supprimer $\rho_!$ de la formule).

Démonstration

Appliquant le théorème 3.3.6 (sous la forme du morphisme 3.3.6) à $F = \mathbb{C}_Z[d_Z - d_X]$ on obtient

$$R\rho_!\varpi^{-1}(\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f}) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(f^{-1}\mathbb{C}_Z[d_Z - d_X], \mathcal{O}_Y) = \mathcal{C}_{S|X}^{\mathbb{R},f}.$$

♡

De même, utilisant la proposition 3.3.8 on obtient la :

PROPOSITION 4.1.5. — (Produit externe). *On a un morphisme canonique :*

$$\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f} \boxtimes \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{Z \times_S | X \times Y}^{\mathbb{R},f}.$$

Et des proposition 4.1.4 et 4.1.5 on tire le produit :

COROLLAIRE 4.1.6. — *Soient Z_1 et Z_2 deux sous-variétés transverses dans X . On a un morphisme bilinéaire de produit*

$$\mathcal{C}_{Z_1|X}^{\mathbb{R},f} \times \mathcal{C}_{Z_2|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{Z_1 \cap Z_2|X}^{\mathbb{R},f}.$$

(On aurait pu définir un morphisme sous les seules hypothèses que $Z_1 \cap Z_2$ est une variété et que $d_{Z_1} + d_{Z_2} - d_{Z_1 \cap Z_2} = d_X$.)

Remarquons qu'on peut retrouver de manière analogue les énoncés “non tempérés” correspondants pour les faisceaux $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}$: ce sont précisément les opérations de [S-K-K] (sous une forme un peu plus générale) auxquelles les opérations ci-dessus commutent vu la remarque 3.3.11.

Soient maintenant Y une sous-variété complexe de X et γ (resp. $\overset{\circ}{\gamma}$) les applications canoniques

$$\begin{aligned} \gamma : T_Y^*X &\longrightarrow T_Y^*X/\mathbb{C}^\times \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\gamma} : \overset{\circ}{T}_Y^*X \longrightarrow \mathbb{P}_Y^*X, \\ \text{où } \mathbb{C}^\times &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_Y^*X \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{T}_Y^*X/\mathbb{C}^\times. \end{aligned}$$

Rappelons que $R^j\gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} = 0, \forall j > 0$, (cf. [S-K-K]) et que, dans les notations classiques de [K 4], le faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}$ est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{C}_{Y|X}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME 4.1.7. — On a :

$$(i) \quad \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = \mathcal{C}_{Y|X},$$

$$(ii) \quad R^j\gamma_*\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = 0, \forall j > 0.$$

Le point (ii) ci-dessus sera démontré au chapitre 5 par transformation canonique complexe (cor. 5.5.2).

Démonstration de (i)

Soit d la codimension complexe de Y dans X que l'on peut supposer ≥ 1 . Utilisant (3.1.1) on obtient le triangle distingué

$$RH_X(\mathbb{C}_X)|_Y[-2d] \longrightarrow RH_X(\mathbb{C}_Y)|_Y \longrightarrow R\pi_* T_{-\mu_Y} \mathcal{O}_X \xrightarrow{+1},$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{B}_{Y|X} \longrightarrow R\pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_Y[-d+1] \xrightarrow{+1}.$$

En particulier $\mathcal{B}_{Y|X} \rightarrow \pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$ est injective et

$$(4.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si de plus } d = 1 \text{ on a } R^j\pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = 0 \text{ pour tout } j \geq 1, \\ \text{et on a une suite exacte} \\ 0 \rightarrow \mathcal{B}_{Y|X} \rightarrow \pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \rightarrow \mathcal{O}_X|_Y \rightarrow 0; \end{array} \right.$$

(tandis que si $d \geq 2$ on trouve $\mathcal{B}_{Y|X} \simeq \pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$, $H^j R\pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = 0$ pour tout $j \neq d-1$ et $H^{d-1} R\pi_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = \mathcal{O}_X|_Y$).

1) Supposons d'abord $d = 1$. Alors l'isomorphisme $\mathbb{P}_Y^* X \xrightarrow{\sim} Y$ identifie γ à π .

On peut écrire le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes

et les flèches verticales injectives :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{Y|X} & \longrightarrow & \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{Y|X}^\infty & \longrightarrow & \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{Y|X} & \longrightarrow & \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X|Y} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

On sait que $\overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{B}_{Y|X}^\infty \oplus \mathcal{O}_{X|Y}$ comme \mathcal{O} -modules [S-K-K], par conséquent toutes les lignes du diagramme précédent sont scindées (sur \mathcal{O}); alors $\overset{\circ}{\gamma}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} = \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_{Y|X} = \overset{\circ}{\gamma}_* \mathcal{C}_{Y|X}$, d'où (ii) dans le cas $d = 1$.

2) Supposons $d > 1$. La question étant de nature locale, on peut supposer $X = \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $(x, y) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$, Y d'équation $x = 0$. On va utiliser la transformation de Radon de [S-K-K] dont on rappelle ci-dessous la définition.

Notons $\overset{\circ}{\mathbb{C}}^d := \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$.

Soit

$$\tilde{X} := X \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{C} = \mathbb{C}_x^d \times \mathbb{C}_y^{n-d} \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\xi^d \times \mathbb{C}_t,$$

$$W := Y \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{C} = \mathbb{C}_y^{n-d} \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\xi^d \times \mathbb{C}_t,$$

$$Z := \{(y, \xi, t); t = 0\} \subset W,$$

$$g : \tilde{X} \rightarrow X \text{ la projection } (x, y, \xi, t) \mapsto (x, y)$$

$$f : \tilde{X} \rightarrow W \text{ la projection } (x, y, \xi, t) \mapsto (y, \xi, t)$$

$$s : Z \simeq \mathbb{P}_Z^* W \rightarrow \mathbb{P}_Y^* X \text{ l'application induite par } (y, \xi) \mapsto (y; \langle \xi, dy \rangle).$$

Notons également

$$S := Y \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{C} = \mathbb{C}_y^{n-d} \times \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\xi^d \times \mathbb{C}_t,$$

$$H \text{ l'hypersurface de } \tilde{X}, H := \{(x, y, \xi, t); t - \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

$$A = H \cap S = \{(0, y, \xi, t)\}.$$

La situation se résumant dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S \subset \tilde{X} \supset A & & \\
 \swarrow g & & \searrow f \\
 Y \subset X & & W \supset Z
 \end{array}$$

Remarquons que

$$\left\{ \begin{array}{l}
 g^{-1}(Y) = S \quad (\text{et } g \text{ est transverse à } S) \\
 H \text{ est transverse à } S \\
 f \text{ induit un isomorphisme } A \simeq Z.
 \end{array} \right.$$

La transformation de Radon est le morphisme de faisceaux

$$(4.1.2) \quad \text{Rad} : s^{-1} \overset{\circ}{\gamma}_* C_{Y|X}^\infty \longrightarrow \overset{\circ}{\gamma}_* C_{Z|W}^\infty$$

défini dans [S-K-K] de la manière suivante (cf. aussi [Kat]). Soit $u = u(x, y)$ une section de $C_{Y|X}^\infty$ sur un ouvert U de $\overset{\circ}{T}_Y^* X$ tel que $\mathbb{C}^\times U = U$; par image inverse par g on la regarde comme section de $C_{S|\tilde{X}}^\infty$. Alors $\delta(t - \langle x, \xi \rangle) u(x, y) dx \in C_{A|\tilde{X}}^\infty \otimes \Omega_{\tilde{X}/W}$, et on pose $\text{Rad}(u) = v$, où v est la section

$$v(y, \xi, t) := \int \delta(t - \langle x, \xi \rangle) u(x, y) dx$$

de $C_{Z|W}^\infty$ définie sur l'ouvert

$$U' = \{(y, \xi, 0) \in \mathbb{P}_Z^* X; (y, \xi) \in U\}.$$

On a le :

THÉORÈME ([S-K-K]). — *Le morphisme (4.1.2) est un isomorphisme.*

(On tire l'énoncé et la démonstration de ce théorème de la réunion des exemple 1.4.1, proposition 1.4.3, proposition 1.4.4 et théorème 1.4.5 de la loc. cit.)

Il résulte de la définition de $C_{Y|X}$ que (4.1.2) induit aussi un isomorphisme

$$(4.1.3) \quad s^{-1} \overset{\circ}{\gamma}_* C_{Y|X} \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{\gamma}_* C_{Z|W}.$$

LEMME 4.1.8. — *Le morphisme (4.1.2) envoie $s^{-1} \overset{\circ}{\gamma}_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$ dans $\overset{\circ}{\gamma}_* \mathcal{C}_{Z|W}^{\mathbb{R},f}$.*

Démonstration du lemme 4.1.8

Cela résulte aussitôt des opérations d'image inverse et d'image directe (propositions 4.1.4 et 4.1.3) qui sont bien définies dans le cadre ci-dessus.

♡

Fin de la démonstration de (i) théorème 4.1.7

Comme $\gamma_* \mathcal{C}_{Z|W}^{\mathbb{R},f} = \gamma_* \mathcal{C}_{Z|W}$, par 1), l'inclusion $\gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \subset \gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}$ résulte des isomorphismes (4.1.2), (4.1.3) et du lemme 4.1.8.

Pour montrer l'inclusion $\gamma_* \mathcal{C}_{Y|X} \subset \gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$, on va utiliser la représentation de [S-K-K] des sections de $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ et l'adapter au cas tempéré.

Dans les mêmes coordonnées que ci-dessus, on définit pour $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \{(x, y) \in X; |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\} \\ Z_{\lambda, \varepsilon} &= \{(x, y) \in U_\varepsilon; \operatorname{Re}(\lambda x_1) \geq \varepsilon |\operatorname{Im}(\lambda x_1)|, |x_1| \geq \varepsilon |x_j|, j = 1, \dots, d\}, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$(4.1.4) \quad \mathcal{C}_{Y|X, (0; \lambda dx_1)}^{\mathbb{R},f} = \varinjlim_\varepsilon H_{[Z_{\lambda, \varepsilon}]^d}^d(U_\varepsilon, \mathcal{O}_X).$$

On définit un recouvrement de $U_\varepsilon \setminus Z_{\lambda, \varepsilon}$ par les ouverts de Stein $V_{\lambda, \varepsilon}^k$, $1 \leq k \leq d$, suivants :

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \varepsilon}^1 &= \{(x, y) \in U_\varepsilon; \operatorname{Re}(\lambda x_1) < |\operatorname{Im}(\lambda x_1)|\} \\ V_{\lambda, \varepsilon}^k &= V_\varepsilon^k = \{(x, y) \in U_\varepsilon; |x_1| < \varepsilon |x_\nu|\}, \quad 2 \leq k \leq d \end{aligned}$$

et on pose

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \varepsilon} &= \bigcap_{1 \leq k \leq d} V_{\lambda, \varepsilon}^k \\ \widehat{V}_{\lambda, \varepsilon}^k &= \bigcap_{j \neq k} V_{\lambda, \varepsilon}^j, \quad 1 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

Le complexe de Čech \mathcal{C} du recouvrement $(V_{\lambda, \varepsilon}^k)_k$

$$\mathcal{C} = (0 \rightarrow \mathbb{C}_{V_{\lambda, \varepsilon}} \rightarrow \oplus \mathbb{C}_{\widehat{V}_{\lambda, \varepsilon}^k} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{C}_{V_{\lambda, \varepsilon}^k} \rightarrow 0)$$

est quasi-isomorphe à $\mathbb{C}_{U_\varepsilon \setminus Z_{\lambda, \varepsilon}}$ et ses termes sont acycliques pour $RH_X(\cdot)$ vu (1.2.3). On en déduit la suite exacte

$$(4.1.5) \quad \bigoplus_{1 \leq k \leq d} \Gamma(U_\varepsilon; H^0 RH_X(\mathbb{C}_{\widehat{V}_{\lambda, \varepsilon}^k})) \longrightarrow \Gamma(U_\varepsilon; H^0 RH_X(\mathbb{C}_{V_{\lambda, \varepsilon}})) \longrightarrow H_{[Z_{\lambda, \varepsilon}]}^d(U_\varepsilon; \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0.$$

Soit donc u un germe de $\gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}$ au point $(0; dx_1 \infty)$: il faut montrer que $u \in (\gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}, f})_{(0; dx_1 \infty)}$.

On sait (loc. cit.) que u est représenté par une classe de cohomologie de la forme

$$f(x, y) = \sum_{\substack{x=(\alpha_1, \alpha') \in \mathbb{Z}^d \\ \alpha' \geq 0, |\alpha| \leq m}} a_\alpha(y) \Phi_\alpha(x)$$

où la série converge localement uniformément sur un ensemble de la forme $\{(x, y) \in X; |x| + |y| < \varepsilon; 0 < |x_1| < \varepsilon|x'|\}$ ($x = (x_1, x')$), a_α holomorphes, et où l'on a utilisé la notation de la loc. cit., i.e. $\Phi_\alpha(x) = \Phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \Phi_{\alpha_d}(x_d)$,

avec $\Phi_n(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{n!}{(-t)^{n+1}}$ si $n \geq 0$, $t \in \mathbb{C}$, et $\Phi_{-n}(t) = \frac{-1}{2i\pi} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (\log t -$

$\left. \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma \right) \right)$ si $n > 0$, $t \in \mathbb{C}$, (γ est la constante d'Euler).

Une telle f définit une fonction ramifiée de la forme

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) \log x_1 + \frac{\theta(x, y)}{x_1^m},$$

où φ, ψ, θ sont holomorphes au voisinage de 0.

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, f définit un élément de $\Gamma(U_\varepsilon; H^0 RH_X(\mathbb{C}_{V_{\lambda, \varepsilon}}))$, donc vu (4.1.4), (4.1.5) et la caractérisation (1.2.2) de $H^0 RH(\mathbb{C}_U)$, f définit une classe de cohomologie à croissance $u \in (\gamma_* \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}, f})_{(0; dx_1 \infty)}$.

♡

Remarque 4.1.9

Le morphisme $\mathcal{C}_{Y|X} \rightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}, f}$ induit par $\gamma^{-1} \gamma_* \rightarrow \text{Id}$ est injectif (par exemple vu les injections $\mathcal{C}_{Y|X} \hookrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}, f} \hookrightarrow \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}}$), et on identifie $\mathcal{C}_{Y|X}$ à un sous-faisceau de $\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R}, f}$.

4.2. - L'Anneau $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$

Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés analytiques complexes, $\Delta = \Delta_f$ le graphe de f , $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $m = \dim_{\mathbb{C}} Y$, q_j la j -ième projection de $Y \times X$, $j = 1, 2$.

Sur le modèle de [S-K-K] et avec les notations (3.3.7) on écrit les

DÉFINITION ET COROLLAIRE 4.2.1. — *On pose*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f} &= \mathcal{C}_{\Delta|Y \times X}^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times X}} \mathcal{O}_{Y \times X}^{(0,n)} \\ \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R},f} &= \left(\mathcal{C}_{\Delta|Y \times X}^{\mathbb{R},f} \right)^a \otimes_{\mathcal{O}_{Y \times X}} \mathcal{O}_{Y \times X}^{(m,0)} \\ \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} &= \mathcal{E}_{X \xrightarrow{\text{id}}, X}^{\mathbb{R},f}, \end{aligned}$$

et on a $\gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f} = \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}$, $\gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R},f} = \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}$, $\gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} = \mathcal{E}_X$, $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} |_{T_X^* X} = \mathcal{D}_X$.

Ce sont respectivement des sous-faisceaux des faisceaux $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ de [S-K-K] vu la proposition 4.1.1.

Notons également que la section canonique $1_{Y \rightarrow X} = \delta(x - f(y))dx$ de $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ est une section de $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f}$, (en effet, $\delta(x - f(y))$ est une section de $\mathcal{B}_{Y|X}$); en particulier $1 \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$.

Décrivons le germe de $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ en un point $p_0 \in T^* X$. Soit $(x; \xi)$ des coordonnées sur $T^* X$ associées à une coordonnée locale $x \in X$ au voisinage de $x_0 = \pi(p_0)$, et soit $\mathcal{Z}(x, \xi)$ la famille des fermés sous-analytiques $Z \subset X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}$ tels que :

$$C_X(Z)_{(x,x)} \setminus \{0\} \subset \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n ; \text{Re}(\xi_1 - \xi_2, \xi) > 0\},$$

(i.e. $Z \in \mathcal{Z}_{(x,\xi)}$ ssi $\exists \varepsilon = \varepsilon(Z) > 0$ tel que au voisinage de x on ait $\forall (\xi_1, \xi_2) \in Z, \text{Re}(\xi_1 - \xi_2, \xi) \geq \varepsilon|\xi_1 - \xi_2|$).

Alors si $p_0 = (x_0, \xi_0)$ on a :

$$\mathcal{E}_{X,p_0}^{\mathbb{R},f} = \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}(x_0, \xi_0)} \left(H_{[Z]}^n \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)} \right)_x.$$

En utilisant cette formule et une suite exacte du type (4.1.5) on en tirerait une théorie des symboles pour $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ en adaptant les calculs de [Ao] au cas tempéré

(cf. aussi [L]). Voir par exemple [A-MF] pour une application du calcul symbolique sur $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ aux solutions distributions de systèmes différentiels réguliers.

Des opérations du paragraphe précédent on tire la proposition suivante (comme dans la loc. cit.).

PROPOSITION 4.2.2. —

(i) *Supposons $f : Y \rightarrow X$ transverse à la sous-variété $Z \subset X$; soient $S = f^{-1}(Z)$, ϖ, α les applications $\varpi : T_S^*Y \simeq S \times_Z T_Z^*X \rightarrow T_Z^*X$, $\alpha : T_S^*Y \rightarrow Y \times_X T^*X$. On a un morphisme canonique*

$$\alpha^{-1} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f} \otimes \varpi^{-1} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f} \rightarrow \mathcal{C}_{S|Y}^{\mathbb{R},f}$$

(ii) *Soient $f : Y \rightarrow X$ et $g : Z \rightarrow Y$ deux morphismes de variétés complexes, β_1 et β_2 les applications*

$$\beta_1 : Z \times_X T^*X \rightarrow Z \times_Y T^*Y, \quad \beta_2 : Z \times_X T^*X \rightarrow Y \times_X T^*X.$$

On a un morphisme canonique ("composition") :

$$\beta_1^{-1} \mathcal{E}_{Z \rightarrow Y}^{\mathbb{R},f} \otimes \beta_2^{-1} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f} \rightarrow \mathcal{E}_{Z \rightarrow X}^{\mathbb{R},f}.$$

On a un énoncé similaire en renversant les flèches. Ces morphismes sont compatibles aux analogues de [S-K-K], en particulier le morphisme de (ii) envoie $1_{Z \rightarrow Y} \otimes 1_{Y \rightarrow X}$ sur $1_{Z \rightarrow X}$.

COROLLAIRE 4.2.3. —

- (i) *On a les inclusions d'Anneaux : $\mathcal{E}_X \subset \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \subset \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$.*
- (ii) *$\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R},f}$ est un $(\rho^{-1} \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R},f}, \varpi^{-1} \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f})$ -bi-Module.*
- (iii) *$\mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}$ est un $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ -Module à gauche (Y sous-variété de X).*

On a plus généralement :

PROPOSITION 4.2.4. — *Pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}})$, $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ -Module à gauche au sens suivant. On a une flèche naturelle dans $D_{\text{coni}}^b(T^*X_{\mathbb{R}})$*

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \otimes T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X),$$

qui induit une structure de $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ -Module sur $H^j(T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X))$, compatible à la structure de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ -Module, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

En particulier $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ est un \mathcal{E}_X -Module (au sens précédent).

Démonstration

On applique la proposition 3.3.10 (i) en y faisant $Y = X$, $d_X = n$, $K = \mathbb{C}_{\Delta_X}[-n]$. Comme $\Phi_{K[n]}F = F$, on obtient le morphisme de l'énoncé. En raisonnant comme dans [S-K-K] on montre que la section $1 \in \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ opère comme l'identité.

♡

On notera que si X est le complexifié d'une variété réelle M , il n'est pas vrai en général que $T\text{-}\mu\text{hom}(F, D_b M)$ fût un \mathcal{E} -module.

Une application immédiate est la régularité elliptique, qui se formule plus généralement en termes de *paires elliptiques* à la Schapira et Schneiders (cf. [S-S]).

COROLLAIRE 4.2.5. — *Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent, (ou, plus généralement, un complexe borné de \mathcal{D} -modules à cohomologie cohérente) et soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ tel que*

$$\text{Car } \mathcal{M} \cap SS(F) \subset T_X^*X,$$

où $\text{Car } \mathcal{M}$ désigne la variété caractéristique de \mathcal{M} (i.e. (F, \mathcal{M}) est une paire elliptique dans la terminologie de la loc. cit.). Alors

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, F^* \otimes \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, RH_X(F)).$$

On retrouve par exemple que si M est une variété réelle de complexifié X et \mathcal{M} un système elliptique sur M alors

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, D_b M).$$

Démonstration

Appliquons le foncteur $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \cdot)$ au triangle distingué (cf. proposition 3.1.4)

$$F^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow R\mathcal{H}_X(F) \rightarrow R\pi_*^\circ T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{+1}.$$

Il suffit de démontrer que $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\pi_*^\circ T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) = 0$. On a pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} R\pi_*^\circ R\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}, H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) \\ \simeq R\pi_*^\circ R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X \overset{\text{L}}{\otimes}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}, H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) = 0, \end{aligned}$$

puisque

$$\text{supp}(\mathcal{E}_X \overset{\text{L}}{\otimes}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}) = \text{Car } \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \text{supp}(H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) \subset SS(F)$$

n'ont de point commun que dans la section nulle.

D'autre part on a les triangles distingués

$$\tau^{\leq j-1} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \tau^{\leq j} T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{+1},$$

et, en y appliquant le foncteur $R\pi_*^\circ R\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \cdot)$ on déduit de ce qui précède, par récurrence sur j , $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ étant un complexe borné, que

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\pi_*^\circ T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) &\simeq \\ R\pi_*^\circ R\mathcal{H}om_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}, T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)) &= 0. \end{aligned}$$

L'exemple s'obtient en prenant $F = \mathbb{C}_M$, alors $SS(F) = T_M^* X$ et $\text{Car } \mathcal{M} \cap T_M^* X \subset T_X^* X$ est la condition d'ellipticité usuelle, et on a $F^* = \text{or}_M[-\dim M]$. La formule résulte de la précédente en se restreignant à M et en appliquant la proposition 1.2.5.

♡

Bien entendu les formules et arguments analogues, sont vrais en remplaçant $R\mathcal{H}_X(F)$ par $R\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{D}b_M$ par \mathcal{B}_M (cf. [S-S] qui utilisent un autre argument qui n'aurait pas ici d'analogue tempéré).

Rappelons que si $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ on a la formule fondamentale

$$(4.2.1) \quad \mathcal{E}_X^{\text{R}} \overset{\text{L}}{\otimes}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1} R\mathcal{H}_X(F) \simeq \mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \quad (\text{cf. [K-S 2]}),$$

dont on établit maintenant l'analogue tempéré.

THÉORÈME 4.2.6. — Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$. Alors

$$\mathcal{E}_X^{\text{R},f} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}^{\text{L}} \pi^{-1}RH_X(F) \simeq T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X).$$

Démonstration

Notons $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, q_j la j -ième projection de $X \times X$, $j = 1, 2$. On peut écrire (en omettant les notations π_X^{-1} , $\pi_{X \times X}^{-1}$) :

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_X^{\text{R},f} \otimes_{\mathcal{D}_X}^{\text{L}} \pi^{-1}RH_X(F) \\ &= \left(T\text{-}\mu_{\Delta_X} \mathcal{O}_{X \times X}[n] \otimes_{q_2^{-1}\mathcal{O}_X}^{\text{L}} q_2^{-1}\Omega_X \right) \otimes_{q_2^{-1}\mathcal{D}_X}^{\text{L}} q_2^{-1}RH_X(F) \\ &\simeq q_2^{-1}\Omega_X \otimes_{q_2^{-1}\mathcal{D}_X}^{\text{L}} \left(T\text{-}\mu_{\Delta_X} \mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{q_2^{-1}\mathcal{O}_X}^{\text{L}} q_2^{-1}RH_X(F) \right) [n] \\ &\simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^{\text{L}} \left(T\text{-}\mu_{\Delta_X} \mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{\text{L}} RH_{X \times X}(q_2^{-1}F) \right) [n] \\ &\simeq \mathcal{D}_{X \leftarrow q_1 X \times X} \otimes_{\mathcal{D}_{X \times X}}^{\text{L}} \left(T\text{-}\mu_{\Delta_X} RH_{X \times X}(q_2^{-1}F) \right) [n] \\ &= T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule (0.2.8) et le théorème 3.4.1.

♡

En particulier, si Y est une sous-variété complexe de X de codimension d , en posant dans la formule précédente $F = \mathbb{C}_Y[-d]$ et en prenant la cohomologie en degré 0 on obtient le :

COROLLAIRE 4.2.7. — On a :

$$\mathcal{E}_X^{\text{R},f} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{C}_{Y|X} = \mathcal{E}_X^{\text{R},f} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{C}_{Y|X}^{\text{R},f}.$$

5. - TRANSFORMATIONS CANONIQUES ET THÉORÈME DE DIVISION

5.1. - Énoncé du théorème et principe de démonstration

Soient X et Y deux variétés complexes de même dimension n , $p_X \in \overset{\circ}{T}^* X$, $p_Y \in \overset{\circ}{T}^* Y$ et

$$\varphi : (T^* Y)_{p_Y} \longrightarrow (T^* X)_{p_X}$$

un germe de transformation canonique complexe.

Soit $\Lambda \subset T^*(X \times Y)$ le germe de variété lagrangienne associée, définie par l'équivalence $(p, q^a) \in \Lambda \iff p = \varphi(q)$.

On se donne un complexe $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))$ (notation de l'appendice) tel que :

$$(5.1.1) \quad SS(K) = \Lambda \quad \text{et} \quad K \text{ est simple de décalage } 0 \text{ le long de } \Lambda,$$

au sens de [K-S 3], chapitre 7. On sait qu'il existe de tels K , et K est essentiellement unique au sens de [K-S 3], proposition 7.5.4.

Le principal objectif de ce chapitre est d'établir le théorème suivant, version tempérée du théorème 11.4.9 de [K-S 3] (cf. aussi [K-S 2]).

THÉORÈME 5.1.1. — *Avec les notations précédentes, il existe une section $s \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})_{(p_X, p_Y^a)}$ telle que :*

(i) *La correspondance $P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}, f} \longmapsto Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f}$ tel que $Ps = sQ$ est bien définie et c'est un isomorphisme d'anneaux.*

(ii) Pour tout $F \in \text{Ob } \mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y)$ on a un isomorphisme naturel :

$$\varphi_s : T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

et il est compatible à (i) et à la transformation de foncteurs $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}) \rightarrow \mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$.

Rappelons qu'on regarde $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)$ comme un $\mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}, f}$ -module au sens de la proposition 4.2.4. L'énoncé (ii) veut dire qu'en chaque degré j de cohomologie, $H^j(\varphi_s)$ est un isomorphisme compatible au changement d'anneau défini en (i), i.e. pour $u \in H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y}$ et $Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f}$ on a une égalité

$$P \varphi_s(u) = \varphi_s(Qu) \quad \text{si } P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}, f} \quad \text{avec } P s = s Q.$$

Pour clarifier la stratégie utilisée pour les démonstrations, rappelons brièvement les points essentiels de celle du théorème de [K-S 3], laquelle rassemble des résultats de [K-S 1, 2 et 3] et de [S-K-K].

La démonstration du théorème 11.4.9 de [K-S 3] :

1) Sous l'hypothèse (5.1.1) on a :

$$(5.1.2) \quad \Phi_K^\mu : D^b(Y; p_Y) \rightarrow D^b(X; p_X) \quad \text{est une équivalence de catégories}$$

(elle est induite par $\Phi_K : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$).

Pour $F, G \in \text{Ob } D^b(Y)$ on a un isomorphisme naturel

$$(5.1.3) \quad \mu\text{hom}(F, G)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} \mu\text{hom}(\Phi_{K[n]} F, \Phi_{K[n]} G)_{p_X}.$$

À toute section $s \in H^0 \mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, n)})_{(p_X, p_Y^c)}$ est associé canoniquement un morphisme dans $D^b(X; p_X)$

$$(5.1.4) \quad \Phi_{K[n]} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X,$$

par conséquent, de (5.1.3) et (5.1.4) on déduit un morphisme

$$(5.1.5) \quad \varphi_s : \mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \longrightarrow \mu\text{hom}(\Phi_{K[n]} F, \mathcal{O}_X)_{p_X}.$$

Notons que les morphismes (5.1.3) et (5.1.4) se déduisent naturellement des opérations sur le bifoncteur $\mu\text{hom}(\cdot, \cdot)$.

2) On montre alors qu'on peut trouver une section s telle que (5.1.4), et par suite (5.1.5), soient des isomorphismes ; mieux la correspondance

$$P \in \mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}} \longmapsto Q \in \mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbb{R}} \quad \text{tel que} \quad P s = s Q$$

est un isomorphisme d'anneaux et (5.1.5) est un isomorphisme de $\mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}}$ -modules au sens du théorème 5.1.1.

Notons que cette deuxième partie repose essentiellement sur les quatre points suivants.

(i) Si $\Lambda = T_Z^*(X \times Y)$ au voisinage de (p_X, p_Y^a) , où $Z \subset X \times Y$ est une sous-variété, on a

$$\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)}) \simeq \mathcal{C}_{Z|X \times Y}^{\mathbb{R}(0,n)} \supset \mathcal{C}_{Z|X \times Y}^{(0,n)},$$

au voisinage (p_X, p_Y^a) (cf. [K-S 2]).

(ii) Une transformation canonique quantifiée à la [S-K-K] par une section non dégénérée de $\mathcal{C}_{Z|X \times Y, (p_X, p_Y^a)}^{(0,n)}$ "opère" sur les $\mathcal{C}_W^{\mathbb{R}}$, W une sous-variété de Y , en tant qu'opération de \mathcal{E} -modules (cf. [K-S 1]).

(iii) On a le théorème de division dans $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ par un opérateur micro-différentiel , (dont la démonstration utilise le point précédent (cf. [K-S 1])).

(iv) On a la compatibilité de la composition des sections au sens des opérations sur μhom avec la composition de [S-K-K] des sections au sens des \mathcal{E} -modules (c'est l'objet de la proposition 11.1.3 de [K-S 2]).

Le cas tempéré

1) On sait que le foncteur Φ_K^μ induit une équivalence de catégories

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y) \longrightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X)$$

(cf. l'appendice); mais la formule (5.1.3) n'aurait pas de sens dans le cadre tempéré (" $T\text{-}\mu\text{hom}$ n'est pas un bi-foncteur") et on ne peut utiliser (5.1.4). La proposition et définition 5.2.1 ci-dessous va néanmoins associer à toute section

$$s \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})_{(p_X, p_Y^a)}$$

un morphisme

$$\varphi_s = T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

compatible à (5.1.5), moyennant une hypothèse supplémentaire sur K (il résultera de la théorie qu'en fait cette hypothèse est toujours satisfaite, cf. lemme 5.2.3).

2) Dans la situation du point (i) du 1) on a bien $T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)}) \simeq \mathcal{C}_{Z|X \times Y}^{\mathbb{R}, f(0,n)} \supset \mathcal{C}_{Z|X \times Y}^{(0,n)}$ (comme il résulte du chapitre précédent) et pour achever la démonstration du théorème 5.1.1 il restera à établir les analogues tempérés de (ii) et (iii) qui sont respectivement les propositions 5.2.2 et 5.3.3 ci-dessous, et à se ramener à utiliser le point (iv).

5.2. - L'action sur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$

Pour démontrer le théorème 5.1.1 il est commode d'introduire la notation suivante. Si $\Omega \subset T^*X$ est un sous-ensemble et Λ une variété lagrangienne complexe fermée dans un voisinage de Ω , on désigne par $P_\Lambda(\Omega)$ la sous-catégorie pleine des objets $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \Omega)$ tels que :

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} SS(F) \subset \Lambda, \\ F \text{ est simple de décalage } 0 \text{ le long de } \Lambda, \\ T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \text{ est concentré en degré } 0. \end{cases}$$

Si $\Omega = \{p\}$ où $p \in T^*X$, on note $P_\Lambda(p)$ au lieu de $P_\Lambda(\{p\})$. (Le lemme 5.2.3 ci-dessous montrera que la troisième condition dans (5.2.1) résulte des précédentes.)

PROPOSITION ET DÉFINITION 5.2.1. — Avec les notations de 5.1, soit $\varphi : (T^*Y)_{p_Y} \rightarrow (T^*X)_{p_X}$ un germe de transformation canonique complexe, $\Lambda \subset T^*(X \times Y)$ la variété lagrangienne associée, $K \in \text{Ob } P_\Lambda((p_X, p_Y^c))$, et $s \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})_{(p_X, p_Y^c)}$.

(i) Alors pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y)$ on a un morphisme naturel associé à s

$$\varphi_s : T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

et ce morphisme est compatible à (5.1.5) via la transformation de foncteurs

$$T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}) \rightarrow \mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}).$$

(ii) Soient de plus Z une troisième variété complexe de même dimension $n = \dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y$, $p_Z \in \overset{\circ}{T}^* Z$ et $\psi = (T^* Z)_{p_Z} \rightarrow (T^* Y)_{p_Y}$ un germe de transformation canonique complexe de variété lagrangienne associée $\Lambda' \subset T^*(Y \times Z)$. Soient $K' \in \text{Ob } P_{\Lambda'}(p_Y, p_Z^a)$ et $s' \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K', \mathcal{O}_{Y \times Z}^{(0,n)})_{(p_Y, p_Z^a)}$. On fait l'hypothèse suivante :

$$(5.2.2) \quad K \circ K' [n] \in \text{Ob } P_{\Lambda \circ \Lambda'}(p_X, p_Z^a).$$

Alors $\varphi_s \circ \psi_{s'} = (\varphi \circ \psi)_{s \circ s'}$, où $s \circ s'$ est par définition l'image de $s \otimes s'$ par le morphisme :

$$\begin{aligned} H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y})_{(p_X, p_Y^a)} \otimes H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K', \mathcal{O}_{Y \times Z})_{(p_Y, p_Z^a)} \\ \longrightarrow H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K \circ K' [n]_{\mu}, \mathcal{O}_{X \times Z})_{(p_X, p_Z^a)}, \end{aligned}$$

obtenu en prenant la cohomologie en degré 0 du morphisme de la proposition (3.3.12).

(iii) Soient $P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}, f}$ et $Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f}$ tels que $Ps = sQ$. Alors :

$$P \circ \varphi_s = \varphi_s \circ Q.$$

(On verra que la condition 5.2.2 résulte des hypothèses, cf. lemme 5.2.3.)

Démonstration

(i) On peut trouver des ouverts $\Omega \subset \overset{\circ}{T}^*(X \times Y)$, $U_X \subset \overset{\circ}{T}^* X$ voisinage ouvert de p_X , $U_Y \subset \overset{\circ}{T}^* Y$ voisinage ouvert de p_Y et $V \subset Y$ voisinage ouvert relativement compact de $\pi(p_Y)$ tels que,

$$(5.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \text{ est fermée dans } \Omega, \\ p_1|_{\Lambda} : \Lambda \xrightarrow{\sim} U_X \text{ et } p_2^a|_{\Lambda} : \Lambda \xrightarrow{\sim} U_Y, \\ K \in \text{Ob } P_{\Lambda}(\Omega), \\ \Phi_K^{\mu} F = \Phi_{K_{X \times V}} F, \\ s \in \Gamma(\Omega; H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})), \end{array} \right.$$

où p_1, p_2 désignent les projections de $T^*(X \times Y)$ et $p_2^a = p_2 \circ (\text{Id}_{T^*X} \times a_Y)$.
Posons :

$$\mathcal{K} = T\text{-}\mu\text{hom}(K_{X \times V}, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})$$

$$\mathcal{F}_1 = T\text{-}\mu\text{hom}((\Phi_{K_{X \times V}[n]}F, \mathcal{O}_X)$$

$$\mathcal{F}_2 = T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)$$

On a

$$\mathcal{F}_2|_{U_Y} \xrightarrow{\sim} R p_{1!}(\mathbb{C}_\Lambda^a \otimes p_2^{-1} \mathcal{F}_2)|_{U_X},$$

(ici $(\cdot)^a$ désigne l'antipodal par rapport au deuxième facteur de $T^*(X \times Y)$).

D'autre part, la section $s \in \Gamma(\Omega; H^0(\mathcal{K})) = \text{Hom}(\mathbb{C}_\Lambda, H^0(\mathcal{K}))$ induit le morphisme dans $D^b(\Omega)$

$$\mathbb{C}_\Lambda^a \otimes p_2^{-1} \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{K}^a \otimes p_2^{-1} \mathcal{F}_2,$$

ceci parce que \mathcal{K} est concentré en degré 0.

On définit alors φ_s comme le composé des morphismes

$$(5.2.4) \quad \mathcal{F}_2|_{U_Y} \xrightarrow{\sim} R p_{1!}(\mathbb{C}_\Lambda^a \otimes p_2^{-1} \mathcal{F}_2)|_{U_X} \rightarrow R p_{1!}(\mathcal{K}^a \otimes p_2^{-1} \mathcal{F}_2)|_{U_X} \rightarrow \mathcal{F}_1|_{U_X},$$

où la dernière flèche est assurée par la proposition 3.3.10 (en effet q_1 est propre sur $\text{supp } K_{X \times V}$).

(ii) Ce point résulte de l'utilisation répétée de (i) et en prenant la cohomologie en degré 0 dans la propriété d'associativité (3.3.11)

(iii) En appliquant (ii) aux transformations canoniques φ et Id_{T^*Y} (resp. Id_{T^*X} et φ) avec les noyaux respectifs K et $\mathbb{C}_{\Delta_Y}[-n]$ (resp. $\mathbb{C}_{\Delta_X}[-n]$ et K), on obtient $\varphi_s \circ Q = \varphi_{sQ}$ (resp. $P \circ \varphi_s = \varphi_{Ps}$), d'où le résultat. ♥

PROPOSITION 5.2.2. — Soient φ et Λ comme dans l'énoncé précédent. Alors il existe

$$\begin{cases} K \in \text{Ob } P_\Lambda(p_X, p_Y^c) & \text{et une section} \\ s \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})_{(p_X, p_Y^c)} \end{cases}$$

tels que :

(i) la correspondance

$$P \in \mathcal{E}_{X, p_X} \longmapsto Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y} \quad \text{tel que} \quad Ps = sQ$$

est bien définie et c'est un isomorphisme d'anneaux.

(ii) pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y)$ le morphisme

$$\varphi_s : T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

est un isomorphisme et est compatible au changement d'anneaux du (i).

Démonstration

1) Supposons d'abord que $\Lambda = T_W^*(X \times Y)$ au voisinage de (p_X, p_Y^e) , où W est une hypersurface fermée lisse de $X \times Y$.

Soit $K := \mathbb{C}_W[-1]$; alors on sait (cf. chap. 4) que $T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}) = \mathcal{C}_{W|X \times Y}^{\mathbb{R}, f}$ est concentré en degré 0, et donc $K \in P_\Lambda(p_X, p_Y^e)$.

Soit d'autre part $s := \delta_W \otimes dy \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0, n)})$ où δ_W est le générateur canonique de $\mathcal{B}_{W|X \times Y}$.

Alors (i) est un résultat de [S-K-K].

On déduit donc du (iii) de la proposition et définition 5.2.1 que φ_s est un morphisme de \mathcal{E}_{X, p_X} -modules.

Pour voir que φ_s est un isomorphisme, on considère le noyau symétrisé de K

$$K' := r_* \mathbb{C}_{r(W)}[-1]$$

où $r : (x, y) \in X \times Y \mapsto (y, x) \in Y \times X$, et on pose $s' = \delta_{r(W)} \otimes dx$.

On a

$$K' \in P_{\Lambda'}(p_Y, p_X^e) \quad \text{où } \Lambda' := r_* \Lambda \text{ est associée à } \varphi^{-1},$$

$$K \circ_\mu K'[n] = \mathbb{C}_{\Delta_Y}[-n] \in \text{Ob } P_{T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)}(p_Y, p_Y^e), \text{ et}$$

$$s \circ s' \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom} \left(K \circ_\mu K'[n], \mathcal{O}_{Y \times Y}^{(0, n)} \right)_{(p_Y, p_Y^e)} = \mathcal{C}_{\Delta_Y|Y \times Y, (p_Y, p_Y^e)}^{\mathbb{R}, f(0, n)} (\simeq \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f}).$$

Alors utilisant [K-S 2, proposition 11.1.3] on sait que $s \circ s'$ s'identifie à une section de la forme $R \delta_{\Delta_Y} \otimes dy$ où R est un élément inversible de \mathcal{E}_{Y, p_Y} .

Vu la proposition précédente, on a donc $\varphi_s \circ (\varphi^{-1})_{s'} = (\text{Id}_{T^*Y})_{s \circ s'}$, qui s'identifie à l'action à gauche de $R \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}$ sur $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y}$, laquelle est inversible.

On aurait raisonné de même pour $(\varphi^{-1})_{s'} \circ \varphi_s$, ce qui achève de montrer la proposition dans ce cas particulier.

Pour achever la démonstration on utilise le :

LEMME 5.2.3. — Soient Λ un germe de sous-variété lagrangienne complexe en $p \in T^* \overset{\circ}{X}$ et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X; p)$ tels que :

$$(5.2.5) \quad \begin{cases} SS(F) \subset \Lambda \\ F \text{ est simple de décalage } 0 \text{ le long de } \Lambda. \end{cases}$$

Alors

$T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p$ (respectivement $\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p$) est concentré en degré 0 et

$$H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p \rightarrow H^0 \mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p \text{ est injective.}$$

En particulier les conditions (5.2.1) et (5.2.5) sont équivalentes, et la condition (5.2.2) est toujours satisfaite par $K \circ_{\mu} K'[n]$.

Démonstration du lemme 5.2.3

On peut trouver une transformation canonique complexe φ définie au voisinage de p telle que φ est associée au conormal à une hypersurface de $X \times X$ et $\varphi(\Lambda)$ est, au voisinage de $\varphi(p)$, le conormal à une sous-variété Z ; (il suffit de considérer une transformation de Legendre de [S-K-K] bien choisie).

Comme l'hypothèse du lemme est invariante par transformation canonique étendue à la [K-S 3], on peut utiliser la partie 1) de la démonstration de la proposition 5.2.2 et donc supposer que $\Lambda = T_Z^* X$ au voisinage de p .

Alors l'hypothèse implique que $F \simeq \mathbb{C}_Z[-d]$ dans $D^b(X; p)$, où d est la codimension complexe de Z et le résultat découle de ce que $T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_Z[-d], \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}, f} \subset \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R}} \simeq \mu\text{hom}(\mathbb{C}_Z[-d], \mathcal{O}_X)$.

♡

2) (*Fin de la démonstration de la proposition 5.2.2*)

On peut écrire $\varphi = \varphi' \circ \varphi''$ avec φ' et φ'' transformations canoniques comme en 1). Plus précisément, soient Z une variété complexe, $\dim_{\mathbb{C}} Z = n$, et $W' \subset X \times Z$ (resp. $W'' \subset Z \times Y$) une hypersurface telle que φ' (resp. φ'') soit associée à $\Lambda' := T_{W'}^*(X \times Z)$ (resp. $\Lambda'' := T_{W''}^*(Z \times Y)$).

D'après la partie 1) de la démonstration, on peut trouver :

$$\begin{aligned} K' \in P_{\Lambda'}(p_X, p_Z^{\alpha}) \quad \text{et} \quad s' \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K', \mathcal{O}_{X \times Z}^{(0, n)}(p_X, p_Z^{\alpha})) \\ \left(\text{resp. } K'' \in P_{\Lambda''}(p_Z, p_Y^{\alpha}) \quad \text{et} \quad s'' \in H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K'', \mathcal{O}_{Z \times Y}^{(0, n)}(p_Z, p_Y^{\alpha})) \right) \end{aligned}$$

tels que s', s'' et les morphismes $\varphi'_{s'}$ et $\varphi''_{s''}$ correspondants satisfont à la proposition.

Alors vu que $SS(K' \circ_{\mu} K'') \subset \Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda$ et que $K' \circ_{\mu} K''[n]$ est simple de décalage 0 le long de Λ , on trouve par le lemme 5.2.3 que :

$$K' \circ_{\mu} K''[n] \in \text{Ob } P_{\Lambda}((p_X, p_Y^{\alpha})).$$

Alors (i) résulte de l'application répétée du (iii) de la Proposition 5.2.1, et on a aussi

$$\varphi_{s' \circ s''} = \varphi'_{s'} \circ \varphi''_{s''}, \quad \text{d'où (ii).}$$

♥

Remarque 5.2.4

Le paragraphe 5.3 utilisera le cas particulier suivant de la proposition 5.2.2.

Soient φ, Λ, K, s comme dans la Proposition 5.2.2, et soit $Z \subset X$ (resp. $S \subset Y$) une sous-variété complexe et supposons que φ échange $T_S^* Y$ et $T_Z^* X$ au voisinage de p_X . Alors

$$\varphi_s : \mathcal{C}_{S|Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{Z|X, p_X}^{\mathbb{R}, f}$$

est un isomorphisme de \mathcal{E}_{X, p_X} -modules.

Il suffit en effet de prendre $F = \mathbb{C}_S[\dim_{\mathbb{C}} Y - n]$, alors $\Phi_{K[n]}^{\mu} F = \mathbb{C}_Z[\dim_{\mathbb{C}} Z - n]$ (cf. [K-S 3]).

5.3.— Division par un opérateur microdifférentiel et fidèle platitude de $\mathcal{E}^{\mathbb{R}, f}$ sur \mathcal{E}

On note $(\mathcal{E}_X(m))_{m \in \mathbb{Z}}$ la filtration de \mathcal{E}_X par l'ordre des opérateurs et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma_m : \mathcal{E}_X(m) \rightarrow \mathcal{E}_X(m)/\mathcal{E}_X(m-1)$ l'application symbole d'ordre m . On note également $\sigma : \mathcal{E}_X \rightarrow \text{gr } \mathcal{E}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_{T^*X}$ l'application symbole principal, et pour $f \in \mathcal{O}_{T^*X}$, on note $H_f = \{f, \cdot\}$ le champ hamiltonien de f .

PROPOSITION 5.3.1. — Soient Y une sous-variété complexe de X , $p \in T_Y^* X$, $P \in \mathcal{E}_{X,p}$, $A \in \mathcal{E}_X(m)_p$, $a = \sigma_m(A)$. On suppose :

$$(H_a)^j(\sigma(P))(p) = 0, \quad 0 \leq j < m, \quad \text{et} \quad (H_a)^m(\sigma(P))(p) \neq 0.$$

Alors pour tout $u \in \mathcal{C}_{Y|X,p}^{\mathbb{R},f}$ il existe un couple unique (u, v) , $u, v \in \mathcal{C}_{Y|X,p}^{\mathbb{R},f}$, tel que :

$$u = Pv + w \quad \text{avec} \quad A^m w = 0.$$

On notera qu'on ne pourrait pas adapter ici la démonstration du théorème de division de [A-K-K].

On va se ramener à utiliser le lemme suivant, version tempérée d'un lemme de [K-S 1]. Supposons $X = \mathbb{C}_x^n$ où $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x')$ est un système de coordonnées holomorphes pour lesquelles $Y : x' = 0$, et soit $P \in \mathcal{E}_{X,p}$ un opérateur micro-différentiel défini au voisinage du point $p = (0, 0; 0, \dots, 0, 1) \in T^*X$ et tel que

$$\partial_{x_1}^j \sigma(P)(p) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq j < m \quad \text{et} \quad \partial_{x_1}^m \sigma(P)(p) \neq 0.$$

LEMME 5.3.2. — Tout $u \in \mathcal{C}_{Y|X,p}^{\mathbb{R},f}$ s'écrit de manière unique $u = Pv + w$ avec $v, w \in \mathcal{C}_{Y|X,p}^{\mathbb{R},f}$ et $\partial_{x_1}^m w = 0$.

Démonstration du lemme 5.3.2 (cf. [K-S 1])

Remarquons que l'unicité résulte du lemme 6.2.1 de [K-S 1]. La décomposition $u = Pv + w$ se démontre de manière analogue à la loc. cit. : on considère une coordonnée holomorphe $t \in \mathbb{C}$ et on écrit grâce à la proposition 4.1.3 :

$$u(x_1, x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t - x_1} u(t, x') dt,$$

où γ est un lacet $|t - x_1| = r > 0$ dans \mathbb{C}_t et où l'intégrand est regardé comme section de $\mathcal{C}_{\{0\} \times Y | \mathbb{C} \times X}^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}} \Omega_{\mathbb{C} \times X / X}$, puis on effectue la division de $1/2\pi i(t - x_1)$ par $P(x, D_x)$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_t \times X}$ et on en substitue le résultat dans l'intégrale ci-dessus.

♡

Démonstration de la proposition 5.3.1

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées holomorphes d'un voisinage de $\pi(p)$ dans X . Soit α la 1-forme canonique de T^*X .

1) Supposons d'abord que :

$$(5.3.1) \quad m = 1 \quad \text{et} \quad (da \wedge \alpha)(p) \neq 0.$$

Alors, vu la Proposition 5.2.2 (cf. Remarque 5.2.4 ci-dessus), on peut supposer, moyennant une transformation canonique quantifiée bien choisie, que

$$Y = \{x_2 = \dots = x_n = 0\}, \quad a = \xi_1, \quad A = \partial_{x_1},$$

et la proposition se réduit au lemme précédent (avec $m = 1$).

2) Dans le cas général, soit t une coordonnée holomorphe sur \mathbb{C} et $j : x \in X \mapsto (0, x) \in \mathbb{C} \times X$. Alors on a par la Proposition 3.3.4 l'identification

$$\mathcal{C}_{Y|X,p}^{\mathbb{R},f} \simeq \text{Ker} \left(t : \mathcal{C}_{\{0\} \times Y|\mathbb{C} \times X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{\{0\} \times Y|\mathbb{C} \times X}^{\mathbb{R},f} \right)_{(p,(0;dt))}.$$

Posons $A_1 = A \partial_t^{-m+1}$. Comme la condition (5.3.1) est satisfaite où l'on remplace a par $\sigma_1(A_1) = \tau^{-m+1}a$, α par la 1-forme canonique de $T^*(\mathbb{C} \times X)$ et p par $(p, (0; dt))$, on peut appliquer la partie 1) de la démonstration : regardant u comme section $u \in \mathcal{C}_{\{0\} \times Y|\mathbb{C} \times Y, (p,(0;dt))}^{\mathbb{R},f}$ (telle que $tu = 0$), il existe un couple (u, v) unique $u, v \in \mathcal{C}_{\{0\} \times Y|\mathbb{C} \times Y, (p,(0;dt))}^{\mathbb{R},f}$ tel que $u = Pv + w$ avec $A_1 w = 0$.

Il suffit alors de vérifier que $tv = tw = 0$.

Remarquons d'abord que $A_1 tw = 0$; en effet, $A_1 tw = tA_1 w + [A_1, t]w = 0 + A[\partial_t^{-m+1}, t]w = (m-1)A\partial_t^{-m}w = (m-1)\partial_t^{-1}A_1 w = 0$. Alors, comme $tu = 0$ et $[P, t] = 0$ on a :

$$tv + tw = 0 \quad \text{avec} \quad A_1 tw = 0,$$

d'où $tv = tw = 0$ par la propriété d'unicité de la division. ♡

THÉORÈME 5.3.3. — Soit $P \in \mathcal{E}_{X,p}$ un opérateur microdifférentiel défini au voisinage de $p \in T^*X$. Soit $A \in \mathcal{E}_X(m)_p$ et $a = \sigma_m(A)$. On suppose :

$$(H_a)^j(\sigma(P))(p) = 0 \quad 0 \leq j < m \quad \text{et} \quad (H_a)^m \sigma(P)(p) \neq 0.$$

Alors pour tout $Q \in \mathcal{E}_{X,p}^{\mathbb{R},f}$, il existe un couple unique (S, R) , $S, R \in \mathcal{E}_{X,p}^{\mathbb{R},f}$ tel que $Q = PS + R$ avec $(\text{ad } A)^m R = 0$.

Démonstration

Par définition $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} = \mathcal{C}_{\Delta|X \times X}^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times X}} \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}$ où on identifie X à la diagonale Δ de $X \times X$ par la première projection q_1 . Soit $\tilde{A} \in \mathcal{E}_{X \times X}$ l'opérateur microdifférentiel défini par :

$$\tilde{A} = \tilde{A}(x, x', \partial_x, \partial_{x'}) = A(x, \partial_x) - A^*(x', \partial_{x'}),$$

où (x, x') désigne la coordonnée de $X \times X$ et A^* est un adjoint de A . Posons $\tilde{a} = \sigma_m(\tilde{A}) = a(x, \xi) - a(x', -\xi')$. On a

$$(\mathbf{H}_{\tilde{a}})^j \sigma(P) = (\mathbf{H}_a)^j \sigma(P)$$

(P étant identifié à un opérateur de $\mathcal{E}_{X \times X}$ par q_1^{-1} .) Soit $Q \in \mathcal{E}_{X,p}^{\mathbb{R},f}$ défini par la section $u \otimes dx'$ où $u \in \mathcal{C}_{\Delta|X \times X}^{\mathbb{R},f}$. Appliquant la proposition 5.3.1 on trouve un couple unique (v, w) , $v, w \in \mathcal{C}_{\Delta|X \times X}^{\mathbb{R},f}$ tel que $u = P(x, \partial_x)v + w$ avec $\tilde{A}^m w = 0$, et on pose $S = v \otimes dx'$, $R = w \otimes dx'$. On a $(\text{ad } A)R = (\tilde{A}w) \otimes dx'$, d'où $(\text{ad } A)^m R = 0$.

♡

Comme première application notons le :

THÉORÈME 5.3.4. — $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ est fidèlement plat sur \mathcal{E}_X .

Démonstration

On a la propriété suivante :

$$\text{pour tout idéal de type fini } \mathcal{I} \subset \mathcal{E}_X \quad \text{on a } \text{Tor}_1^{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}, \mathcal{I}) = 0.$$

Cela se montre, en utilisant des transformations canoniques (proposition 5.2.2) et le théorème de division précédent, en raisonnant exactement comme dans [S-K-K, theorem 3.4.1] (démonstration de la platitude de \mathcal{E}_X^∞ sur \mathcal{E}_X).

Il en résulte donc que $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ est plat sur \mathcal{E}_X . Comme d'autre part on a les injections de faisceaux $\mathcal{E}_X \subset \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \subset \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ et que $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ est fidèlement plat sur \mathcal{E}_X ([K-S 2, Chapter 10]), $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ est fidèlement plat sur \mathcal{E}_X .

♡

5.4. – Démonstration du théorème 5.1.1

Soient le noyau K et la section s donnés par la proposition 5.2.2.

Vu le (ii) de la proposition 5.2.2 et le (iii) de la proposition 5.2.1, le théorème 5.1.1 résultera du :

LEMME 5.4.1. — *La correspondance*

$$P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}, f} \longmapsto Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f} \quad \text{tel que} \quad Ps = sQ,$$

est bien définie et c'est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration

Rappelons qu'on a construit s comme composée $s = s' \circ s''$, cf. 2) fin de la démonstration de la proposition 5.2.2, et il suffit donc de montrer le lemme pour s' et s'' . Autrement dit, on peut supposer qu'on est dans la situation suivante :

$$\begin{cases} \Lambda = T_Z^*(X \times Y), & Z \text{ hypersurface lisse de } X \times Y, \\ s = u \otimes dy \in \mathcal{C}_{Z|X \times Y, (p_X, p_Y^0)}^{(0, n)}, \end{cases}$$

où u est un générateur simple de $\mathcal{C}_{Z|X \times Y}$, par exemple $u = \delta_Z$, et il suffit donc de montrer que les morphismes

$$\begin{cases} P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}, f} \longmapsto Pu \in \mathcal{C}_{Z|X \times Y, (p_X, p_Y^0)}^{\mathbb{R}, f} & \text{et} \\ Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}, f} \longmapsto Qu \in \mathcal{C}_{Z|X \times Y, (p_X, p_Y^0)}^{\mathbb{R}, f}, \end{cases}$$

sont des isomorphismes.

L'injectivité résulte déjà de [K-S 2] (puisque dans le cas non-tempéré (i.e. sans le "f") ce sont des isomorphismes), et la surjectivité résulte, comme dans [S-K-K], de l'utilisation du théorème de division.

♡

5.5. – Le cas d'une transformation de contact complexe

On remarquera qu'on n'a pas construit l'action sur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ d'une transformation canonique φ globalement sur un ouvert de $\overset{\circ}{T}^*X$ où φ est définie. Cela tient à ce qu'on ne sait faire opérer les transformations canoniques étendues que sur la catégorie localisée $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X)$ (cf. l'appendice).

Si la transformation canonique φ provient par $\gamma : \overset{\circ}{T}^*X \rightarrow \mathbb{P}^*X := \overset{\circ}{T}^*X/\mathbb{C}^\times$ d'une transformation de contact ψ définie sur un ouvert de \mathbb{P}^*X , id est si φ est globalement définie sur les orbites de l'action de \mathbb{C}^\times , on sait que φ opère sur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$ (au sens de l'appendice). On peut alors donner la variante suivante du théorème 5.1.1.

VARIANTE 5.5.1. — Avec les notations de 5.1, soit U_X (resp. U_Y) un voisinage ouvert de $p_X \in \overset{\circ}{T}^*X$ (resp. de $p_Y \in \overset{\circ}{T}^*Y$) tel que $U_X = \mathbb{C}^\times U_X$, $U_Y = \mathbb{C}^\times U_Y$. Soit $\varphi : U_X \xrightarrow{\sim} U_Y$ une transformation canonique complexe, Λ la variété lagrangienne associée ($\Lambda = \mathbb{C}^\times \Lambda$). Alors il existe :

$$\text{un noyau } K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X \times Y; \mathbb{C}^\times(p_X, p_Y^a))$$

tel que la condition (5.1.1) soit satisfaite,

$$\text{et une section } s \in \Gamma\left(\mathbb{C}^\times(p_X, p_Y^a); H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{(0,n)})\right),$$

tels que :

(i) la correspondance $P \in \mathcal{E}_{X, p_X} \mapsto Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}$ tel que $Ps = sQ$ est bien définie et est un isomorphisme de \mathcal{E}_{X, p_X} -modules,

(ii) pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y)$ on a un morphisme naturel défini au voisinage de $\mathbb{C}^\times p_X$:

$$\varphi_* : \varphi_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X),$$

qui est un isomorphisme de \mathcal{E}_{X, p_X} -modules compatible au morphisme noté de la même façon dans le théorème 5.1.1.

Démonstration

Rappelons que si $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X \times Y; \mathbb{C}^\times(p_X, p_Y^a))$ vérifie 5.1.1 (avec $\Lambda = \mathbb{C}^\times \Lambda$) alors Φ_K^μ induit des équivalences de catégories

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$$

$$\text{et } D_{\mathbb{C}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$$

qu'on note encore Φ_K^μ . On sait d'ailleurs qu'il existe de tels noyaux K (cf. l'appendice).

Remarquons alors que, un tel noyau K étant fixé, on peut trouver des ouverts

$$\Omega \subset T^*(X \times Y), \quad U_1 \subset T^*X, \quad U_2 \subset T^*Y,$$

et une section $s \in \Gamma(\Omega : H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(K, \mathcal{O}_{X \times Y}^{0,n}))$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \Omega = \mathbb{C}^\times \Omega & \text{et} \\ \text{la condition (5.2.3) est satisfaite.} \end{cases}$$

Alors en raisonnant comme dans la démonstration du (i) de la proposition 5.2.1 on construit le morphisme au voisinage de $\mathbb{C}^\times p_X$:

$$\varphi_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_Y) \rightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}^\mu F, \mathcal{O}_X)$$

pour $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(Y; p_Y)$. Le morphisme est par construction compatible à φ_s .

Pour choisir une section s qui assure l'isomorphisme et tel que l'on ait (i), il suffit de remarquer qu'on peut recopier la démonstration de la proposition 5.2.2 "en restant globalement \mathbb{C}^\times -invariant".

♡

On en tire une démonstration de la propriété (i) du théorème 4.1.7.

COROLLAIRE 5.5.2. —

(i) Soit Z une sous-variété de X . Alors : $R^j \gamma_* \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f} = 0$ pour $j \neq 0$.

(ii) $R^j \gamma_* \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} = 0$ pour $j \neq 0$.

Démonstration

(i) Soit $p_X \in \overset{\circ}{T}_Z^* X$. On sait qu'on peut trouver une transformation canonique complexe

$$\varphi : U_X \subset \overset{\circ}{T}^* X \xrightarrow{\sim} U_Y \subset \overset{\circ}{T}^* Y,$$

où U_X est un voisinage ouvert de p_X , telle que

$$\mathbb{C}^* U_X = U_X \quad \text{et} \quad \varphi(U_X \cap T_Z^* X) = U_Y \cap T_S^* Y$$

où S est une hypersurface de Y .

Vu la variante 5.5.1 on peut donc supposer dès le départ que Z est une hypersurface de X . Alors l'isomorphisme $\mathbb{P}_Z^* X \xrightarrow{\sim} X$ identifie $\overset{\circ}{\gamma} : \overset{\circ}{T}_Z^* X \rightarrow \mathbb{P}_Z^* X$ à $\overset{\circ}{\pi} : \overset{\circ}{T}_Z^* X \rightarrow X$, et la conclusion résulte de ce que $R^j \overset{\circ}{\pi} \mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbb{R},f} = 0$, $j \neq 0$ (cf. (4.1.1)).

(ii) résulte de (i) par définition de $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$.

♡

5.6. - Applications aux modules holonômes réguliers.

Concluons ce chapitre par quelques applications immédiates aux “faisceaux pervers” et aux modules holonômes réguliers. Rappelons que $\text{Perv}(X)$ désigne la sous-catégorie abélienne des objets pervers de $D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ avec la convention sur le décalage du Chapitre 1.

COROLLAIRE 5.6.1. — Soit $F \in \text{Ob Perv}(X)$. Alors :

$$(i) \quad \begin{cases} H^j T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) = 0 & \text{pour } j \neq 0 \\ H^0 T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1} RH_X(F), \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} R^j \gamma_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) = 0 & \text{pour } j \neq 0 \\ H^0 \gamma^{-1} \gamma_* T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1} RH_X(F). \end{cases}$$

Démonstration

Rappelons la formule (cf. théorème 4.2.6) :

$$T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \overset{L}{\otimes}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1} RH_X(F).$$

Alors (i) résulte de la platitude de $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}$ sur \mathcal{E}_X donc sur $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$, et (ii) résulte du corollaire 5.5.2 et de ce que $\gamma^{-1} \gamma_* \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} = \mathcal{E}_X$.

♡

Les énoncés suivants microlocalisent des théorèmes de comparaison classiques pour les \mathcal{D} -modules holonômes réguliers.

PROPOSITION 5.6.2. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module holonôme régulier (ou plus généralement un complexe borné de \mathcal{D}_X -modules à cohomologie holonôme régulière) et soit $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Alors :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)).$$

Démonstration

Elle résulte du théorème de comparaison de Kashiwara rappelé en (1.3.1) moyennant la formule du germe de $\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)$. (resp. $T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)$). (cf. [An 3].)

♡

PROPOSITION 5.6.3. — Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonôme régulier défini sur un ouvert U de T^*X . Soit $G \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; U)$ vérifiant la condition suivante :

$$(5.6.1) \quad \begin{cases} T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X) & (\text{resp. } \mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)) \\ \text{est concentré en un seul degré, (comme objet de } D^b(U)). \end{cases}$$

Alors :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X))$$

sur U .

La condition (5.6.1), donne un sens aux deux termes de l'isomorphisme (on ne sait pas en effet si $\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)$ (resp. $T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)$) est un objet de la catégorie dérivée des complexes bornés de \mathcal{E}_X -modules).

Démonstration

Il suffit de vérifier l'isomorphisme en le germe en $p \in U$. Si $p \in T_X^*X$ c'est le théorème de comparaison de Kashiwara déjà cité.

Si $p \in \overset{\circ}{T}^*X$, remarquant que la propriété ainsi que l'hypothèse (5.6.1) sont invariants par transformation canonique quantifiée, on peut appliquer le théorème de la position générique de [K-K 2] et on peut donc supposer que \mathcal{M}_p est un $\mathcal{D}_{X, \pi(p)}$ -module holonôme régulier et on conclut par la proposition précédente.

♡

COROLLAIRE 5.6.4. — Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux \mathcal{E}_X -modules holonomes réguliers définis sur un ouvert U de T^*X . Alors

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbb{R},f}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}})$$

sur U .

On a noté $\mathcal{N}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$, $\mathcal{N}^{\mathbb{R},f} = \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$.

Cette formule généralise l'isomorphisme

$$(5.6.2) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{\infty}) \quad \text{cf. [K-K 2]},$$

qu'on retrouve en appliquant le foncteur $\gamma^{-1}R\gamma_*(\cdot)$ à l'isomorphisme du corollaire.

Démonstration

On raisonne comme ci-dessus pour démontrer l'isomorphisme dans les germes en $p \in U$. Si $p \in T_X^*X$, \mathcal{M}_p et \mathcal{N}_p sont des $\mathcal{D}_{X,\pi(p)}$ -modules réguliers, et l'isomorphisme résulte de l'utilisation de (5.6.2) sur la section nulle, puisque

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}|_{T_X^*X} \simeq \mathcal{E}_X^{\infty}|_{T_X^*X} \simeq \mathcal{D}_X^{\infty} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}|_{T_X^*X} \simeq \mathcal{E}_X|_{T_X^*X} \simeq \mathcal{D}_X.$$

Si $p \in \overset{\circ}{T}^*X$, on peut supposer par [K-K 2], moyennant une transformation canonique quantifiée, que \mathcal{N} est de la forme $\mathcal{N} \simeq \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}RH_X(G)$ au voisinage de p , où G est un "faisceau pervers" défini au voisinage de $\pi(p)$ et on conclut en utilisant la proposition 5.6.3 et les formules

$$\mathcal{N}_p^{\mathbb{R}} = \mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)_p, \quad \mathcal{N}_p^{\mathbb{R},f} = T\text{-}\mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_X)_p.$$

♡

6. - APPLICATIONS : MICROFONCTIONS TEMPÉRÉES

6.1. - Microlocalisation tempérée sur des sous-variétés réelles : théorèmes d'annulation

Dans ce paragraphe on désigne par X une variété complexe de dimension $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, et on dira qu'un sous-ensemble localement fermé $M \subset X$ est une *sous-variété réelle* de X si M satisfait les conditions suivantes :

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} M & \text{est un ensemble sous-analytique dans } X \text{ et} \\ M & \text{est une sous-variété réelle de classe } \mathcal{C}^2. \end{cases}$$

La première condition permet de définir la microlocalisation tempérée de \mathcal{O}_X le long de M par la formule

$$(6.1.2) \quad T^{-\mu}_M \mathcal{O}_X \stackrel{\text{def}}{=} T^{-\mu} \text{hom}(\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X),$$

tandis que la seconde est nécessaire pour utiliser les invariants différentiels classiques rappelés ci-dessous.

(Rappelons qu'une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe \mathcal{C}^∞ qui est un ensemble sous-analytique est nécessairement une sous-variété analytique.)

Comme on dispose des transformations canoniques, on peut établir sans peine les analogues tempérés des résultats de Kashiwara et Schapira sur la microlocalisation de \mathcal{O} le long de sous-variétés réelles ; voir [K-S 2, Chapitre 11], dont on va utiliser, en les rappelant, les notations.

Soit $M \subset X$ une sous-variété réelle et $p \in T_M^* X$. On considère $T_p^* T^* X \simeq T_p T^* X$ comme espace symplectique réel et on y définit les sous-espaces lagrangiens

$$\lambda_0(p) = T_p \pi^{-1} \pi(p) \quad \text{et} \quad \lambda_M(p) = T_p T_M^* X$$

et on pose

$$s(M, p) = \frac{1}{2} \tau(\lambda_M(p), i\lambda_M(p), \lambda_0(p)),$$

où $\tau(\cdot, \cdot, \cdot)$ est l'indice d'inertie des 3-plans lagrangiens (indice de Maslov-Hörmander-Leray-Kashiwara..., cf. [K-S 3, Appendix]).

THÉORÈME 6.1.1. — Soient M et N deux sous-variétés réelles de X , U_1 et U_2 deux ouverts de $\overset{\circ}{T}^*X$, $\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ une transformation canonique complexe telle que $\varphi(T_M^*X \cap U_1) = T_N^*X \cap U_2$. Soit $p \in T_M^*X \cap U_1$ et

$$d = \frac{1}{2} [\dim M + s(M, p) - \dim N - s(N, \varphi(p))].$$

Alors on peut trouver un voisinage ouvert $U \subset U_1$ de p tel que :

(i) la fonction $q \mapsto s(M, q) - s(N, \varphi(q))$ est constante sur $U \cap T_M^*X$,

et

(ii) il existe une transformation canonique quantifiée $\tilde{\varphi}$ au dessus de φ qui induit un isomorphisme

$$T^{-\mu_M} \mathcal{O}_{X,p} \xrightarrow{\sim} T^{-\mu_N} \mathcal{O}_{X,\varphi(p)}[d].$$

Ici $\tilde{\varphi}$ est par définition de la forme φ_s pour une section non dégénérée s bien choisie et c'est un isomorphisme de $\mathcal{E}_{X,\varphi(p)}^{\mathbb{R},f}$ -modules (cf. théorème 5.1.1).

Démonstration

C'est l'analogie de [K-S 2, theorem 11.2.8] : on applique le théorème 5.1.1 avec $F = \mathbb{C}_M$, d'où $\Phi_{K_X \times_V [n]} \mathbb{C}_M \simeq \mathbb{C}_N[-d]$ dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \varphi(p))$, où d est calculé par Kashiwara et Schapira (cf. loc. cit.).

♡

On rappelle également les notations suivantes :

$$\nu(p) = T_p \mathbb{C}^X p$$

$$\delta(p) = \dim_{\mathbb{C}}(\lambda_M(p) \cap i\lambda_M(p) \cap \lambda_0(p))$$

$s^{\pm}(M, p)$ est l'indice défini par

$$\begin{cases} s^+ - s^- = s \\ s^+ + s^- = n - \text{codim} M + 2\delta(M, p) - \dim_{\mathbb{C}}(\lambda_M(p) \cap i\lambda_M(p)). \end{cases}$$

On a en particulier les points suivants.

- $s^{\pm} = 0$ si X est un complexifié de M , ou bien si M est une sous-variété complexe de X . (Dans ce paragraphe on dira par abus de langage que X est un *complexifié* de M si $T_x X = T_x M \oplus i T_x M$ en tout point $x \in M$.)

• On a l'équivalence $(\delta = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{T}_M^* X) \iff (M \text{ est non-caractéristique pour le } \bar{\delta}, \text{ i.e. } M \text{ est une sous-variété générique}).$

• Si M est une hypersurface réelle d'équation $\psi = 0$ ($d\psi \neq 0$ sur M) et si l'on note $\partial\psi$ la différentielle complexe de ψ , alors $s^\pm(M, \partial\psi(x))$ est le nombre de valeurs propres ≥ 0 de la restriction de la forme de Levi de M à $T_x^{\mathbb{C}} M \stackrel{\text{def}}{=} T_x M \cap iT_x M$.

Avec ces notations on sait que les décalages prennent une forme plus agréable.

THÉORÈME 6.1.1 (bis). — *Les décalages des complexes*

$$T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X[\text{codim } M + s^- - \delta] \quad \text{et} \quad T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X[n - s^+ + \delta]$$

sont invariants par transformation canonique quantifiée.

On a en effet :

$$-\frac{1}{2}(\dim M + s) = -\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - s^+ + \delta = -\frac{n}{2} - \frac{d}{2} - n + \text{codim } M + s^- - \delta,$$

où on a noté ici $d = d_M(p) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{C}}(\lambda_M(p) \cap i\lambda_M(p))$, qui est un invariant microlocal (cf. [K-S 2]).

THÉORÈME 6.1.2. — *Soit $p \in \overset{\circ}{T}^* X$. On suppose la condition suivante satisfaite :*

$$\dim_{\mathbb{R}}(\lambda_M(p) \cap \nu(p)) = 1.$$

Alors pour tout entier

$$j \notin [\text{codim } M + s^-(M, p) - \delta(M, p), n - s^+(M, p) + \delta(M, p)],$$

on a
$$H^j(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X)_p = 0.$$

La condition du théorème est en particulier satisfaite quand M est générique.

La démonstration va utiliser le

LEMME 6.1.3. —

(i) Soit $Z \subset X$ un sous-analytique localement fermé dans X et $x \in X \setminus \text{Int } Z$. Alors

$$H_{[Z]}^j \mathcal{O}_{X,x} = 0 \quad \text{pour } j \notin [1, n].$$

(ii) Pour toute sous-variété réelle $M \subset X$ et tout $p \in T_M^* X$ on a

$$H^j(T-\mu_M \mathcal{O}_X)_p = 0 \quad \text{pour } j \notin [1, n].$$

Démonstration du lemme

(i) le cas $j \leq 0$ est trivial et d'autre part $H^j RH_X(\mathbb{C}_Z) \simeq H^j \Gamma_Z \mathcal{D}b_X^{(0,\cdot)} = 0$ pour $j > n$, où $\mathcal{D}b_X^{(0,\cdot)}$ est le complexe de Dolbeault sur X .

(ii) résulte de (i) vu la formule du germe de $H^j(T-\mu_M \mathcal{O}_X)$.

♡

Démonstration du théorème 6.1.2

Elle adapte celle de [K-S 2, proposition 11.3.1] : on peut trouver une transformation canonique φ^- (resp. φ^+) définie au voisinage de p telle que φ^\mp échange $T_M^* X$ et $T_N^* X$ avec $\text{codim } N = 1$ et $s^-(N, \varphi^-(p)) = 0$ (resp. $s^+(N, \varphi^+(p)) = 0$). Posons $c = \text{codim } M$.

Alors en utilisant le théorème 6.1.1 bis avec la transformation canonique φ^- (resp. φ^+) et en appliquant le lemme 6.1.3 on trouve :

$$\begin{aligned} H^j(T-\mu_M \mathcal{O}_X[c + s^- - \delta]) &= 0 \quad \text{pour } j < 0, \\ (\text{resp. } H^j(T-\mu_M \mathcal{O}_X[n - s^+ + \delta]) &= 0 \quad \text{pour } j > n). \end{aligned}$$

♡

COROLLAIRE 6.1.4. — *Supposons que X est un complexifié de M . Alors*

$$\begin{aligned} H^j T-\mu_M \mathcal{O}_X &= 0 \quad \text{pour } j \neq n, \quad \text{et} \\ H^n T-\mu_M \mathcal{O}_X &\longrightarrow H^n \mu_M \mathcal{O}_X \quad \text{est injective.} \end{aligned}$$

On tire facilement ce corollaire du théorème précédent et - en ce qui concerne le deuxième point - de sa démonstration, mais on va donner, sur le modèle de [K-S 2], un énoncé plus général :

THÉORÈME 6.1.5. — Soit M une sous-variété réelle de $p \in T_M^*X$. On fait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}}(\lambda_M(p) \cap \nu(p)) = 1, \quad \text{et} \\ s^-(M, q) - \delta(M, q) \text{ est localement constant au voisinage de } p \text{ dans } T_M^*X. \end{array} \right.$$

Posons $j_0 = \text{codim } M + s^-(M, p) - \delta(M, p)$. Alors :

$$\begin{aligned} H^j(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X)_p &= 0 \quad \text{pour } j \neq j_0, \\ H^{j_0}(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X)_p &\text{ est de dimension infinie et} \\ H^{j_0}(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X)_p &\longrightarrow H^{j_0}(\mu_M \mathcal{O}_X)_p \quad \text{est injective.} \end{aligned}$$

Démonstration

Idem [K-S 2, proposition 11.3.5], où par transformation canonique, on se ramène à la situation suivante :

$M = \partial\Omega$, où Ω est un ouvert pseudoconvexe à bord analytique de $X = \mathbb{C}^n$,
 $p = (x; \xi)$ est la normale extérieure,
 $j_0 = 1$.

Alors comme

$$\begin{aligned} H^j(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X)_p &= \varinjlim_Z \left\{ H^j RH_X(\mathbb{C}_Z)_x ; Z \text{ fermé sous-analytique tel que} \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. C_M(Z)_x \subset \text{Int}(\{\xi\}^0) \cup \{0\} \right\} \\ &= H^j_{[X \setminus \Omega]} \mathcal{O}_{X,x}, \end{aligned}$$

il suffit d'appliquer le lemme suivant.

♡

LEMME 6.1.6. — Soient Ω un ouvert pseudo-convexe sous-analytique dans $X = \mathbb{C}^n$ et $x \in \partial\Omega$. Alors :

- (i) $R\Gamma_{[X \setminus \Omega]} \mathcal{O}_{X,x}$ est concentré en degré 1.
- (ii) $H^1_{[X \setminus \Omega]} \mathcal{O}_{X,x}$ est de dimension infinie.
- (iii) $H^1_{[X \setminus \Omega]} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow H^1_{X \setminus \Omega} \mathcal{O}_{X,x}$ est injective.

Démonstration du lemme

Le premier point résulte facilement de (1.2.3), et les deux autres de ce que l'on a :

$$H^1_{[X \setminus \Omega]} \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X^{t-\Omega}(U) / \mathcal{O}_X(U) \quad \text{et}$$

$$H^1_{X \setminus \Omega} \mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U \cap \Omega) / \mathcal{O}_X(U).$$

♡

COROLLAIRE 6.1.7. — *Soit M une hypersurface réelle de X d'équation $\psi = 0$ ($d\psi \neq 0$ sur M) telle que le nombre de valeurs propres < 0 de la forme de Levi de ψ sur $T_x^{\mathbb{C}}M$ est constante égale à r pour tout $x \in M$ dans un voisinage assez petit de $x_0 \in M$. Soit $p = (x_0, \partial\psi(x_0))$ ($\partial\psi$, la différentielle complexe de ψ). Alors :*

$$\begin{cases} H^j T^{-\mu_M} \mathcal{O}_{X,p} = 0 & j \neq r+1, \quad \text{et} \\ H^{r+1} T^{-\mu_M} \mathcal{O}_{X,p} \longrightarrow H^{r+1} \mu_M \mathcal{O}_{X,p} & \text{est injective.} \end{cases}$$

Le théorème suivant sera utile dans les problèmes aux limites. C'est l'analogie d'un énoncé de Schapira (cf. [S, proposition 3.1], cf. aussi [Ud]) et dont la démonstration se laisse recopier dans le cadre tempéré.

THÉORÈME 6.1.8. — *Soit M une variété analytique réelle et $X = M^{\mathbb{C}}$ un complexifié de M . Soit $A \subset M$ un sous-ensemble sous-analytique fermé qui vérifie la condition suivante :*

A est localement analytiquement isomorphe à un convexe de \mathbb{R}^n .

Alors :

(i) $H^j T^{-\mu_{\text{hom}}}(\mathbb{C}_A, \mathcal{O}_X)_p = 0, j \neq n.$

(ii) Pour tout $p \in T_M^* X$ le morphisme

$$H^n T^{-\mu_{\text{hom}}}(\mathbb{C}_A, \mathcal{O}_X)_p \longrightarrow H^n \mu_{\text{hom}}(\mathbb{C}_A, \mathcal{O}_X)_p$$

est injectif.

6.2 – Faisceaux de microfonctions tempérées

6.2.1 – Soient M une variété analytique réelle de dimension n et $X = M^{\mathbb{C}}$ un complexifié de M . Soit N une sous-variété réelle fermée de M .

COROLLAIRE ET DÉFINITION 6.2.1. — $T^{-\mu_N} \mathcal{O}_X$ est concentré en degré n et on pose :

$$\mathcal{C}_{N|X}^f = H^n T^{-\mu_N} \mathcal{O}_X \otimes \sigma_M \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_M^f = H^n T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X \otimes \sigma_M.$$

L’assertion résulte du corollaire 6.1.4, d’où il résulte également que

$$(6.2.1) \quad \text{l’application canonique } \mathcal{C}_M^f \rightarrow \mathcal{C}_M \text{ est injective,}$$

où $\mathcal{C}_M = \mu_M \mathcal{O}_X[n] \otimes \sigma_M$ est le faisceau des microfonctions de Sato.

Du triangle de Sato (3.1.1) résulte

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} R^j \pi_* \mathcal{C}_M^f = R^j \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_M^f = 0 \text{ pour } j \neq 0 \text{ et} \\ \mathcal{C}_M^f|_{T_M^* M} \simeq \mathcal{D}b_M \text{ et } \overset{\circ}{\pi}_* \mathcal{C}_M^f \simeq \mathcal{D}b_M / \mathcal{A}_M. \end{cases}$$

La proposition 4.2.4 implique

$$(6.2.3) \quad \mathcal{C}_M^f \text{ est un } \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}\text{-module.}$$

On a aussi :

$$(6.2.4) \quad \text{Les transformations canoniques réelles opèrent sur } \mathcal{C}_M^f,$$

comme il résulte du théorème 6.1.1 (avec $d = 0$).

Rappelons également que si $\Omega \subset X$ est un ouvert à bord analytique réel qui est strictement pseudo-convexe, on peut échanger localement $\overset{\circ}{T}_M^* X$ et $\overset{\circ}{T}_{\partial\Omega}^* X$ par une transformation canonique complexe (cf. [K-K 3]); alors en appliquant le théorème 5.1.1 bis avec le noyau K de [K-S 3, exemple 7.2.6] on obtient un isomorphisme de $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$ -modules

$$(6.2.5) \quad \mathcal{C}_M^f \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X^{t-\Omega} / \mathcal{O}_X)|_{\partial\Omega} \text{ localement sur } \overset{\circ}{T}_M^* X.$$

(cf. aussi [BdM]).

Ainsi que déjà remarqué par Bengel et Schapira (cf. [B-S]) un isomorphisme tel que (6.2.5) permet de retrouver facilement leur résultat que \mathcal{C}_M^f est un faisceau “coniquement souple” (dans la terminologie de la loc. cit.), id est qu’on a :

$$(6.2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall Z, U \subset T_M^* X, Z \text{ et } U \text{ coniques, } Z \text{ fermé, } U \text{ ouvert, on a} \\ H^j(U; \Gamma_Z \mathcal{C}_M^f) = 0 \quad \forall j > 0. \end{array} \right.$$

Remarquons aussi que l’isomorphisme (6.2.5) admet une réalisation plus explicite : si $X = \mathbb{C}^n$, la transformation intégrale de [H 2, theorem 8.4.11] qui y est définie sur l’espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, induit l’isomorphisme de faisceaux (6.2.5), comme on le montre facilement à l’aide de (6.2.6).

Montrons maintenant comment les opérations du chapitre 3 permettent de définir fonctoriellement les opérations sur les microfonctions tempérées.

Soient N et M deux variétés analytiques réelles.

Produit tensoriel

On a un morphisme canonique

$$(6.2.7) \quad \mathcal{C}_M^f \boxtimes \mathcal{C}_N^f \longrightarrow \mathcal{C}_{M \times N}^f, \quad (u, v) \mapsto u \otimes v,$$

comme il résulte de la proposition 3.3.8 avec $F = \mathbb{C}_M[-\dim M] \otimes \sigma_M$ et $G = \mathbb{C}_N[-\dim N] \otimes \sigma_N$.

Soient $f : N \rightarrow M$ une application analytique, et notons encore $f : Y = N^{\mathbb{C}} \rightarrow X = M^{\mathbb{C}}$ une complexification de $N \rightarrow M$ et ρ, ϖ les applications canoniques $T_N^* Y \xleftarrow{\rho} N \times_N T_M^* X \xrightarrow{\varpi} T_M^* X$.

Image directe

On a un morphisme canonique

$$(6.2.8) \quad \varpi! \rho^{-1}(\mathcal{C}_N^f \otimes \mathcal{V}_{N/M}) \longrightarrow \mathcal{C}_M^f.$$

Démonstration

1) Supposons d'abord f lisse.

Soit $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille exhaustive de fermés sous-analytiques de N telle que f est propre sur N_j pour tout j .

On peut écrire pour tout $j \in \mathbb{N}$ les morphismes

$$\begin{aligned} R\varpi_1 \rho^{-1} (T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_{N_j}, \mathcal{O}_Y)[\dim N] \otimes \mathcal{V}_{N/M} \otimes \text{or}_{N/M}) \\ \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(Rf_* \mathbb{C}_{N_j}, \mathcal{O}_X)[\dim M] \\ \longrightarrow T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X)[\dim M], \end{aligned}$$

où le premier morphisme résulte du théorème 3.3.2 et le second de la flèche $\mathbb{C}_M \rightarrow Rf_* \mathbb{C}_{N_j}$ déduite de $\mathbb{C}_M \rightarrow Rf_* \mathbb{C}_N \rightarrow Rf_* \mathbb{C}_{N_j}$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \varpi_1 \rho^{-1} \left(T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_{N_j}, \mathcal{O}_Y)[\dim N] \otimes \mathcal{V}_{N/M} \otimes \text{or}_N \right) & \longrightarrow & \mathcal{C}_M^f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varpi_1 \rho^{-1} \mathcal{C}_N^f \otimes \mathcal{V}_{N/M} & \longrightarrow & \mathcal{C}_M \end{array} ,$$

où la première flèche horizontale se déduit du morphisme précédent, la première flèche verticale résulte de l'utilisation de la flèche $\mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{C}_{N_j}$, et la deuxième flèche horizontale se déduit de l'utilisation du morphisme d'intégration de [S-K-K] :

$$\varpi_1 \rho^{-1} \mathcal{C}_N \otimes \mathcal{V}_{N/M} \rightarrow \mathcal{C}_M.$$

Comme toute section de $(\varpi_1 \rho^{-1} \mathcal{C}_N^f)_p$ ($\forall p \in T_N^* Y$) provient pour $j \gg 1$ d'une section de

$$\varpi_1 \rho^{-1} T\text{-}\mu\text{hom}(\mathbb{C}_{N_j}, \mathcal{O}_Y)[\dim N]_p,$$

on en déduit, vu (6.2.1), que la flèche horizontale du bas est à valeurs dans \mathcal{C}_M^f .

2) Supposons maintenant que f est une immersion fermée. Appliquant le théorème 3.2.2 avec $F = \mathbb{C}_N$ on trouve l'isomorphisme :

$$(6.2.9) \quad R\varpi_1 \rho^{-1} (\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{C}_N^f) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{N|X}^f \otimes \text{or}_{N/M},$$

que l'on compose avec le morphisme canonique $\mathcal{C}_{N|X}^f \rightarrow \mathcal{C}_M^f$ (cf. (6.2.12) ci-dessous) d'où (6.2.8) dans ce cas.

♡

Image inverse

On a un morphisme canonique :

$$(6.2.10) \quad \rho_! \varpi^{-1} \mathcal{C}_M^f \longrightarrow \mathcal{C}_N^f.$$

Démonstration

Supposons d'abord que f est une immersion fermée : alors la flèche résulte du théorème 3.3.6 appliqué à $F = \mathbb{C}_M$, puisque

$$f^! \mathbb{C}_M = R\Gamma_Y \mathbb{C}_M = R\Gamma_N \mathbb{C}_M = or_{N/M}[\dim_N - \dim M].$$

Si f est lisse, la flèche résulte du même théorème appliqué avec $F = R\Gamma_M \mathbb{C}_X = or_M[-\dim M]$, puisque $f^{-1} R\Gamma_M \mathbb{C}_X = R\Gamma_N \mathbb{C}_Y \simeq or_N[-\dim N]$.

Comme d'habitude, produit tensoriel et image inverse permettent de définir l'opération de

Produit

$$(6.2.11) \quad \rho_{\Delta!} \varpi_{\Delta}^{-1} (\mathcal{C}_M^f \boxtimes \mathcal{C}_M^f) \longrightarrow \mathcal{C}_M^f,$$

où ρ_{Δ} , ϖ_{Δ} désignent les applications canoniques associées à la diagonale $\Delta_M \subset M \times M$:

$$T_{\Delta_M}^* \Delta_X \xleftarrow{\rho_{\Delta}} T_M^* X \times_M T_M^* X \xrightarrow{\varpi_{\Delta}} T_{M \times M}^* (X \times X),$$

et où on a identifié $T_{\Delta_M}^* \Delta_X$ à $T_M^* X$.

Réalification

Soient M une variété analytique réelle de dimension n , $N \hookrightarrow M$ l'immersion d'une sous-variété analytique fermée de codimension d et $Y \hookrightarrow X$ une complexification de $N \hookrightarrow M$.

On a un morphisme canonique :

$$(6.2.12) \quad \mathcal{C}_{N|X}^f \longrightarrow \mathcal{C}_M^f,$$

obtenu en appliquant le foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X) \otimes \text{or}_M[-n]$ à la flèche $\mathbb{C}_M \rightarrow \mathbb{C}_N$.

D'autre part, on a un morphisme canonique $\text{or}_N[-n] \rightarrow \mathbb{C}_Y[-d]$ (cf. (1.2.12)) d'où, en y appliquant le foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$, le morphisme canonique

$$(6.2.13) \quad \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \longrightarrow \mathcal{C}_{N|X}^f \otimes \text{or}_{N/M}.$$

On en déduit le morphisme de réalification

$$(6.2.14) \quad \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f}|_{T_M^*X} \longrightarrow \Gamma_{iT_N^*M} \mathcal{C}_M^f \otimes \text{or}_{N/M},$$

par composition des deux précédents, l'image du composé étant bien à support dans $T_M^*X \cap T_Y^*X = iT_N^*M$.

Le morphisme est compatible à l'analogie non tempérée de [S-K-K] et est donc injectif (cf. loc. cit.), mais non bijectif en général.

Opérateurs microlocaux d'ordre fini

On définit le faisceau \mathcal{L}_M^f des opérateurs microlocaux d'ordre fini en posant :

$$\mathcal{L}_M^f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Gamma_{iT_\Delta^*(M \times M)} \mathcal{C}_{M \times M}^f \otimes_{q_2^{-1}\mathcal{A}_M} q_2^{-1}\mathcal{V}_M, \right) |_{iT_\Delta^*(M \times M)},$$

qui est un sous faisceau du faisceau \mathcal{L}_M de [S-K-K, chap. I, définition 2.5.1]. En utilisant les opérations précédentes on montre facilement que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^f &\subset \mathcal{L}_M \quad \text{est un sous-faisceau d'anneaux,} \\ \mathcal{C}_M^f &\text{ est un } \mathcal{L}_M^f\text{-module à gauche.} \end{aligned}$$

Les transformations canoniques réelles opèrent sur \mathcal{L}_M^f et on a un morphisme injectif de réalification

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} |_{T_M^*X} \hookrightarrow \mathcal{L}_M^f,$$

qui résulte de (6.2.14).

Signalons qu'on peut faire une théorie des symboles pour \mathcal{L}_M^f en adaptant au cas tempéré celle de [Uk] pour le cas de \mathcal{L}_M .

6.3 – Exemples

6.3.1 – Modules holonômes réguliers et microfonctions tempérées

Soit X une variété analytique complexe et $Y \subset X$ une sous-variété complexe. On a :

$$(6.3.1) \quad \mathcal{C}_{Y|X}^{\mathbb{R},f} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{B}_{\overline{Y}|\overline{X}}, \mathcal{C}_{X_{\mathbb{R}}}^f),$$

plus généralement, si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\overline{X}}$ -module holonôme régulier et $F = \text{Sol}_{\overline{X}}(\mathcal{M})$ on a

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{X_{\mathbb{R}}}^f) &\simeq T\text{-}\mu\text{hom}(F^*, \mathcal{O}_X) \\ &(\simeq \mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \pi^{-1}RH_X(F^*)), \end{aligned}$$

où $F^* = R\mathcal{H}om(F, \mathbb{C})$. On obtient (6.3.1) de (6.3.2) en y faisant $F = \mathbb{C}_Y[-d]$, où d est la codimension complexe de Y .

La formule (6.3.2) se démontre à l'aide des opérations du chapitre 3 (cf. [An 4, proposition 6.1] où elle est utilisée pour microlocaliser le foncteur de conjugaison de Kashiwara de [K 6]).

Soit M une variété analytique réelle de dimension n et X un voisinage complexe de M . Soit \mathcal{M} un \mathcal{E}_X -module holonôme régulier défini sur un ouvert U de T^*X . Alors on a un théorème de comparaison

$$(6.3.3) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M^f) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) \quad \text{sur } U,$$

comme il résulte de la proposition 5.6.3 avec $F = \mathbb{C}_M[-n] \otimes \text{or}_M$, (cf. [An 3, theorem 1.2 (ii)]).

6.3.2 – Microfonctions CR tempérées

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et soit $M \subset X$ une sous-variété analytique réelle fermée de codimension d . Dans tout ce paragraphe on fait l'hypothèse que

M est une sous-variété générique.

Soit $Y \hookrightarrow X \times \overline{X}$ un complexifié de l'immersion $j : M \hookrightarrow X_{\mathbb{R}}$ et soit $f : Y \rightarrow X$ le morphisme complexe lisse défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & X \times \overline{X} \\
 \uparrow i & \searrow f & \downarrow \\
 M & \xleftarrow{j} & X
 \end{array}$$

On désigne comme l'habitude par $\overline{\partial}_M = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}|_M$ le système de Cauchy-Riemann sur M . La proposition suivante est la version tempérée d'un énoncé de [K-K 3].

PROPOSITION 6.3.1. — On a :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\overline{\partial}_M, \mathcal{C}_M^f) \simeq T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X \otimes or_M[d].$$

Démonstration

Soient ρ et ϖ les applications canonique définies par le diagramme $T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X$. Comme f est lisse et induit l'identité sur M , ρ est une immersion fermée et il n'y a qu'un point dans la fibre de ϖ au dessus de M . Appliquant le théorème 3.3.2 avec $F = \mathbb{C}_M$ on obtient donc

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu hom}(\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_Y) [\dim_{\mathbb{C}} Y]|_{T_M^*X} \simeq T^{-\mu hom}(\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X) [n],$$

et, puisque $\dim_{\mathbb{C}} Y = \dim_{\mathbb{C}} M = 2n - d$, on a

$$(6.3.4) \quad \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} T^{-\mu_M} \mathcal{O}_Y|_{T_M^*X} [n - d] \simeq T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X.$$

D'autre part, $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ étant \mathcal{D}_Y -cohérent, on a pour tout (complexe borné de) \mathcal{D}_Y -module(s) \mathcal{M} :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{M}) = \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M}[\dim_{\mathbb{C}} X - \dim_{\mathbb{C}} Y].$$

On a ici $\dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} M = 2n - d$, et on obtient l'isomorphisme de la proposition en posant

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}_M^f \otimes or_M = T^{-\mu_M} \mathcal{O}_Y[2n - d] \otimes or_M.$$

♡

Le même argument montrerait plus généralement que pour tout $F \in \text{Ob } \mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(M)$ on a un isomorphisme

$$(6.3.5) \quad \begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\bar{\partial}_M, T^{-\mu} \text{hom}(i_* F, \mathcal{O}_Y))|_{T_M^* X} &\simeq \\ T^{-\mu} \text{hom}(j_* F, \mathcal{O}_X)|_{T_M^* X} &[2d - 2n]. \end{aligned}$$

Par exemple si $Z \subset M$ est un fermé sous-analytique, en prenant $F = \mathbb{C}_Z[d - 2n]$ on obtient sur la section nulle :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\bar{\partial}_M, \Gamma_Z \mathcal{D}b_M) \simeq R\Gamma_{[Z]} \mathcal{O}_X[d] \quad (\text{cf. formule (1.2.7)}).$$

Comme $T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X$ est concentré en degré $\geq d$, la proposition 6.3.1 identifie les CR-microfonctions tempérées à un groupe de cohomologie de microlocalisation à croissance :

$$(6.3.6) \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\bar{\partial}_M, \mathcal{C}_M^f) \simeq H^d(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X) \otimes or_M,$$

en particulier pour les CR-distributions on a

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\bar{\partial}_M, \mathcal{D}b_M) = H_{[M]}^d \mathcal{O}_X \otimes or_M,$$

et le triangle de Sato pour $T^{-\mu} \text{hom}$ produit la suite exacte

$$(6.3.7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X|_M \rightarrow H_{[M]}^d \mathcal{O}_X \otimes or_M \rightarrow \overset{\circ}{\pi}_* H^d(T^{-\mu_M} \mathcal{O}_X) \otimes or_M \rightarrow 0.$$

Si u est une CR-distribution sur M (i.e. une section de $H_{[M]}^d \mathcal{O}_X \otimes or_M$) on définit classiquement le *front d'onde CR* de u (comme CR-distribution) par

$$WF_{\bar{\partial}_M}^{\text{def}}(u) = \text{supp } sp_{\bar{\partial}_M}(u) \subset T_M^* X (\subset T_M^* Y),$$

où

$$(6.3.8) \quad sp_{\bar{\partial}_M} : \pi^{-1}(H^d_{[M]} \mathcal{O}_X \otimes or_M) \rightarrow H^d(T-\mu_M \mathcal{O}_X) \otimes or_M$$

est l'application canonique déduite de (6.3.7); on a $WF_{\bar{\partial}_M}(u) \subset WF_A(u)$ en vertu de (6.3.6), où $WF_A(u)$ est le front d'onde analytique de u . (Le corollaire 6.3.3 ci-dessous - ainsi que le bon sens - semblent indiquer que ce front d'onde CR coïncide bien dans le cas analytique avec celui défini dans [B-C-T] d'une autre manière, comme suggéré dans [S-T].)

Notons que les versions non tempérées de (6.3.6), (6.3.7) et (6.3.8) sont bien connues (cf. [K-K 3]), et on a le morphisme canonique injectif

$$(6.3.9) \quad H^d(T-\mu_M \mathcal{O}_X) \otimes or_M \longrightarrow H^d(\mu_M \mathcal{O}_X) \otimes or_M,$$

l'injectivité résultant par exemple de la comparaison de (6.3.6) avec la formule analogue pour les microfonctions. On désignera donc de la même manière par $WF_{\bar{\partial}_M}(u)$ le front d'onde CR d'une CR-hyperfonction.

On retrouve par exemple des propriétés d'hypoellipticité (cf. [B-C-T]) :

COROLLAIRE 6.3.2. — *Soit $\gamma \subset T^*_M X$ un ensemble conique convexe propre fermé tel que $\gamma \supset M \simeq T^*_M M$. Supposons $\bar{s}(M, p) > 0$ pour tout $p \in \overset{\circ}{T}^*_M X \setminus \gamma$. Alors pour toute CR-distribution u sur M on a :*

$$WF_{\bar{\partial}_M}(u) \subset \gamma.$$

*En particulier si $s^-(M, p) > 0$ pour tout $p \in \overset{\circ}{T}^*_M X$ on a $H^d_{[M]} \mathcal{O}_X \otimes or_M \simeq \mathcal{O}_X|_M$.*

Démonstration

Cela résulte aussitôt de la suite exacte (6.3.7) vu le théorème 6.1.2.

♡

(Notons que, vu (6.3.9), ce corollaire est un cas particulier de sa version non tempérée, laquelle est implicite dans [K-S 2, 3].)

Il résulte également de ce qui précède que si $\Omega \subset X$ est un ouvert sous-analytique qui est un ouvert à bord C^0 au sens de (1.2.8) et tel que $\partial\Omega \supset M$, le morphisme de valeur au bord (1.2.11) (resp. (1.2.10)) définit un morphisme

$$b_\Omega : \Gamma_\Omega \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{B}_M \quad (\text{resp. } b_\Omega : \mathcal{O}_X^{t-\Omega} \rightarrow \mathcal{D}b_M)$$

qui est bien à à valeurs dans les CR-hyperfonctions (resp. CR-distributions), b_Ω étant \mathcal{D} -linéaire. Soit $\gamma \subset T_M^*X$ un ensemble conique convexe propre fermé tel que $\gamma \supset M \simeq T_M^*M$ et soit $\Omega \subset X$ un ouvert tel que $C_M(X \setminus \Omega) \cap \text{Int } \gamma^\circ = \emptyset$ (cette condition implique $M \subset \partial\Omega$).

Dans les énoncés ci-dessous on dira qu'une fonction $f \in \Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X)$ est à *croissance lente (vers M) le long de γ°* si f satisfait à la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout ouvert relativement compact } U \subset X \text{ tel que } C_M(U) \subset \gamma^\circ \\ \text{il existe } \nu > 0 \text{ tel que } d(x, M)^\nu f(x) \text{ est borné sur } U, \end{array} \right.$$

où d désigne une distance localement équivalente à la norme euclidienne de \mathbb{C}^n . Notons qu'en vertu de (1.2.2), cette condition est équivalente à la suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall K \subset \text{Int } \gamma^\circ, K \text{ ensemble conique engendré par un compact,} \\ \exists U \subset X \text{ ouvert sous-analytique tel que } C_M(X \setminus U) \cap K \subset \{0\} \\ \text{et } f \in \Gamma(X; \mathcal{O}_X^{t-U}). \end{array} \right.$$

THÉORÈME 6.3.3 (cf. [B-C-T]). — *Soit $\gamma \subset T_M^*X$ un ensemble conique convexe propre fermé tel que $\gamma \supset M \simeq T_M^*M$. Soit u une CR-distribution sur M . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $WF_{\bar{\partial}_M}(u) \subset \gamma$.

(ii) *On peut écrire $u = b_\Omega(f)$ où $\Omega \subset X$ est un ouvert à bord C^0 tel que $C_M(X \setminus \Omega) \cap \text{Int } \gamma^{0a} = \emptyset$ et où $f \in \Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X)$ avec f à croissance lente le long de γ^{0a} .*

THÉORÈME 6.3.4. — *Soit γ comme dans l'énoncé précédent et soit $\Omega \subset X$ un ouvert à bord C^0 tel que $C_M(X \setminus \Omega) \cap \text{Int } \gamma^{0a} = \emptyset$. Soit $f \in \Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La valeur au bord hyperfonction $b_\Omega(f)$ est une (CR-) distribution.*

(ii) *f est à croissance lente le long de γ^{0a} .*

Ce dernier énoncé généralise aux sous-variétés génériques une propriété due à Martineau dans le cas $M = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Démonstration des théorèmes 6.3.3 et 6.3.4

Supposons, pour alléger les notations (scrupule tardif!), que M est orientée. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(\text{Int}\gamma^{\circ\alpha}; H^0 T\nu_M \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_\gamma(T_M^* X; H^d T\nu_M \mathcal{O}_X) & \hookrightarrow & \Gamma(M; \mathcal{D}b_M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\text{Int}\gamma^{\circ\alpha}; H^0 \nu_M \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_\gamma(T_M^* X; H^d \mu_M \mathcal{O}_X) & \hookrightarrow & \Gamma(M; \mathcal{B}_M) \end{array} ,$$

dans lequel les flèches verticales sont injectives.

D'autre part rappelons que :

$$\Gamma(\text{Int}\gamma^{\circ\alpha}; H^0 T\nu_M \mathcal{O}_X) = \varprojlim_K \varinjlim_U \left\{ \Gamma(X; \mathcal{O}_X^{t-U}); K \subset \text{Int}\gamma^{\circ\alpha}, U \subset X, \right. \\ \left. K \text{ ensemble conique engendré par un compact, } U \text{ ouvert sous-analytique} \right. \\ \left. \text{tel que } C_M(X \setminus U) \cap K = \{0\} \right\}$$

(voir la formule (3.1.2)), et que

$$\Gamma(\text{Int}\gamma^{\circ\alpha}; H^0 \nu_M \mathcal{O}_X) = \varinjlim_U \left\{ \Gamma(U; \mathcal{O}_X); U \subset X \text{ ouvert tel que } C_M(X \setminus U) \cap \text{Int}\gamma^{\circ\alpha} = \emptyset \right\}.$$

Les théorèmes 6.3.3 et 6.3.4 résultent alors aussitôt des remarques suivantes :

- Dans les limites inductives apparaissant ci-dessus on peut supposer que les ouverts U sont des ouverts à bord \mathcal{C}^0 , connexes (et tels que $\partial U \supset M$).

- Si Ω est un ouvert connexe à bord \mathcal{C}^0 tel que $C_M(X \setminus \Omega) \cap \text{Int}(\gamma^{\circ\alpha}) = \emptyset$, la valeur au bord

$$b_\Omega : \Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(M; \mathcal{B}_M) \text{ est injective,}$$

(et $WF_{\bar{\partial}_M}(b_\Omega(f)) \subset \gamma$ pour toute $f \in \Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X)$).

♡

Notons que le théorème 6.3.3 résulterait aussi de sa version non tempérée de [S-T] par utilisation du théorème 6.3.4.

Remarque

L'utilisation du foncteur $T\text{-}\mu\text{hom}(\cdot, \mathcal{O})$ permet de préciser pour les distributions bien d'autres propriétés bien connues pour les hyperfonctions. On a par exemple l'analogie tempérée du théorème d'annulation de [D'A-Z] et ses applications à Bochner local, ou encore la formulation des problèmes aux limites elliptiques pour les systèmes, traités à la [K-K 3] mais dans le cadre des distributions (cf. [An-T]).

A. - APPENDICE - OPÉRATIONS MICROLOCALES SUR LES COMPLEXES CONSTRUCTIBLES

Soit X une variété analytique réelle. Dans la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara et Schapira le rôle central est tenu par la catégorie $D^b(X; \Omega)$, la catégorie localisée de $D^b(X)$ par le système multiplicatif de flèches à micro-support ne rencontrant pas un ensemble donné $\Omega \subset T^*X$. Le bi-foncteur

$$\mu\text{hom}(\cdot, \cdot) : D^b(X; \Omega)^\circ \times D^b(X, \Omega) \rightarrow D^b(\Omega)$$

est alors bien défini.

Si $p \in T^*X$, une propriété essentielle de $D^b(X; p) := D^b(X; \{p\})$ est la possibilité d'y faire opérer des transformations intégrales microlocales, en particulier des transformations canoniques (les "extended contact transformations" de [K-S 3]). Quand X est une variété complexe, on en déduit l'opération de transformations canoniques complexes sur $\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p$.

Pour réaliser ces opérations sur $T\text{-}\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)_p$ il faut donc disposer d'une bonne notion de microlocalisation de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

Dans cet appendice on explique comment adapter [K-S 3] à cet effet, dont on utilisera les notations, sauf mention expresse d'un changement.

A.1. - La catégorie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$

Soit X une variété analytique réelle.

Soit $\Omega \subset T^*X$ un sous-ensemble. On pose

$$\mathcal{N}_\Omega = \{F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X) ; SS(F) \cap \Omega = \emptyset\}.$$

Alors \mathcal{N}_Ω est un "null-system" dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ et on pose la

DÉFINITION A.1.. — $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega) = D_{\mathbb{R}-c}^b(X) / \mathcal{N}_\Omega$.

Si $p \in T^*X$ on écrit \mathcal{N}_p et $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)$ au lieu de $\mathcal{N}_{\{p\}}$ et $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \{p\})$ respectivement.

On a un morphisme canonique

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega) \rightarrow D^b(X; \Omega),$$

qui identifie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ à une sous-catégorie triangulée de $D^b(X; \Omega)$, mais il n'est pas clair que ce fût une sous-catégorie pleine (cf. cependant le lemme A.3 ci-dessous).

Les propriétés suivantes résultent aussitôt de la définition :

- Si $\Omega' \subset \Omega$ est un sous-ensemble, on a un morphisme canonique $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega')$.

- Si $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \xrightarrow{+1}$ est un triangle distingué dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ tel que $SS(F'') \cap \Omega = \emptyset$, alors $F' \simeq F$ dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$; propriété qu'on utilisera souvent sous la forme suivante :

(A.1)
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un morphisme } F \rightarrow F' \text{ de } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega) \text{ qui induit pour tout } p \in \Omega \\ \text{un isomorphisme dans } D^b(X; p), \text{ est un isomorphisme de } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega). \end{array} \right.$

Remarque A.2

Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique et $Z \subset X$ un fermé sous-analytique. On sait que les foncteurs Rj_*j^{-1} , $j_!j^{-1}$, $(\cdot)_Z$, $R\Gamma_Z$ opèrent sur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Si de plus X est un espace vectoriel réel, et γ un cône convexe fermé sous-analytique dans X , alors le foncteur $\varphi_\gamma^{-1}R\varphi_{\gamma*}$ opère sur $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

On peut donc recopier les énoncés et démonstrations des chapitres V et VI de [K-S 3] en y remplaçant $D^b(X)$ et $D^b(X; \Omega)$ par $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ et $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ respectivement. En particulier on dispose des "cut-off lemma" et "microlocal cut-off lemma" dans ce cadre.

LEMME A.3. — Soit $p \in T^*X$. Alors $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)$ est une sous-catégorie pleine (triangulée) de $D^b(X; p)$.

Démonstration

On peut supposer $p \in \overset{\circ}{T}^*X$. Soit $\varphi : D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p) \rightarrow D^b(X; p)$ le morphisme canonique et $F, G \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On doit montrer que

$$\alpha : \text{Hom}_{D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{D^b(X; p)}(\varphi(F), \varphi(G))$$

est bijectif.

On sait que

$$\text{Hom}_{D_{\mathbb{R}-c}^b(X)}(F, G) = \text{Hom}_{D^b(X)}(F, G) \simeq H^\circ R\Gamma(T^*X; \mu\text{hom}(F, G)),$$

d'où, par localisation, des morphismes :

$$\text{Hom}_{D^b(X; p)}(F, G) \rightarrow H^\circ(\mu\text{hom}(F, G))_p$$

et

$$\text{Hom}_{D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)}(F, G) \rightarrow H^\circ(\mu\text{hom}(F, G))_p,$$

et la proposition 6.1.2 de la loc. cit. prouve que le premier est un isomorphisme. Vu la remarque A.2 précédente, la démonstration de cette même proposition se laisse transposer dans le cadre \mathbb{R} -constructible, donc le deuxième morphisme est également un isomorphisme. Le morphisme α est donc un isomorphisme. \heartsuit

Remarque A.4

La catégorie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ n'est pas celle définie dans l'exercice 8.6 de [K-S 2]; rappelons la définition de cette dernière avec une autre notation.

Soit $D^b(X; \Omega)_{\mathbb{R}-c}$ la sous-catégorie pleine de $D^b(X; \Omega)$ des objets $F \in \text{Ob } D^b(X)$ tels que

$$\forall p \in \Omega \quad \exists F' \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X) \quad \text{tel que } F \simeq F' \quad \text{dans } D^b(X; p).$$

On a donc des morphismes canoniques

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega) \longrightarrow D^b(X; \Omega)_{\mathbb{R}-c} \longrightarrow D^b(X; \Omega),$$

où la première flèche identifie $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ à une sous-catégorie triangulée de $D^b(X; \Omega)_{\mathbb{R}-c}$ (mais pas pleine à priori), tandis que la seconde identifie $D^b(X; \Omega)_{\mathbb{R}-c}$ à une sous-catégorie pleine de $D^b(X; \Omega)$ (mais pas triangulée à priori). Cette difficulté disparaît dans le cas où Ω est réduit à un point, vu le lemme A.3 et le fait qu'on peut aussi montrer que

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p) \longrightarrow D^b(X; p)_{\mathbb{R}-c},$$

est une équivalence de catégories. Par conséquent la catégorie $D^b(X; p)_{\mathbb{R}-c}$ est bien triangulée, et il en résulte également que $D^b(X; \Omega)_{\mathbb{R}-c}$ est triangulée. (Mais on n'aura pas besoin ici de ce dernier point.)

A.2. - Noyaux microlocaux pour $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p)$

Soient X, Y, Z trois variétés réelles. On désigne par $q_1 : X \times Y \rightarrow X$, $q_{12} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$, $p_1 : T^*(X \times Y) \rightarrow T^*X$, $p_{12} : T^*(X \times Y \times Z) \rightarrow T^*(X \times Y)$, les projections, avec des définitions analogues de q_i , q_{ij} , p_i , p_{ij} . On désigne par a_X (ou a) l'opération antipodale de T^*X , et si $\Omega \subset T^*X$, Ω^a désigne $a(\Omega)$; mais dans le cas d'un produit de la forme $X \times Y$, la même lettre a désignera l'application antipodale relativement au *deuxième* facteur, e.g. $p_{12}^a = (Id_X \times a_Y) \circ p_{12}$.

Rappelons les définitions suivantes de [K-S 3]. Si $K_1 \in Ob D^b(X \times Y)$ et $K_2 \in Ob D^b(Y \times Z)$ on pose

$$K_1 \circ K_2 = Rq_{13!}(q_{12}^{-1}K_1 \otimes q_{23}^{-1}K_2) \in Ob D^b(X \times Z),$$

et si $K \in Ob D^b(X \times Y)$ et $F \in Ob D^b(Y) \simeq Ob D^b(Y \times \{\text{pt}\})$ on pose

$$\Phi_K(F) = Rq_{1!}(K \otimes q_2^{-1}F) = K \circ F \in Ob D^b(X).$$

Mais, même si K est à cohomologie \mathbb{R} -constructible, le foncteur Φ_K n'opère pas en général sur $D_{\mathbb{R}-c}^b$, (c'est faux quand le support de K n'est pas propre sur X), et il faut avoir recours à la composition microlocale des noyaux de [K-S 3].

Si K_1 et K_2 sont comme ci-dessus et $(p_X, p_Y, p_Z) \in T^*(X \times Y \times Z)$, on définit un pro-objet de $D^b(X \times Z, (p_X, p_Z^a))$ en posant

$$K_1 \circ K_2 = \underset{\mu}{\varprojlim} K'_1 \circ K'_2,$$

où $K'_1 \rightarrow K_1$ (resp. $K'_2 \rightarrow K_2$) parcourt l'ensemble des isomorphismes de $D^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))$ (resp. de $D^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a))$).

On dit que K_1 et K_2 sont *microlocalement composables* en (p_X, p_Y, p_Z) si la condition suivante est vérifiée :

$$(A.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2)) \cap p_{13}^{a-1}(p_X, p_Z^a) \subset \{(p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a)\} \\ \text{au voisinage de } ((p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a)). \end{array} \right.$$

Ici et dans la suite, le produit fibré sur T^*Y est pris relativement aux applications $p_2^a : T^*(X \times Y) \rightarrow T^*Y$ et $p_1 : T^*(Y \times Z) \rightarrow T^*Y$.

PROPOSITION A.5. — Soient $K_1 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ et $K_2 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z)$.

(i) $K_1 \circ_{\mu} K_2$ est un pro-objet de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$.

(ii) Supposons de plus que K_1 et K_2 sont microlocalement composables en (p_X, p_Y, p_Z) . Alors

$$K_1 \circ_{\mu} K_2 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a)).$$

Démonstration

Dans la définition de $K_1 \circ_{\mu} K_2$ on peut remplacer K_1 par $(K_1)_{X \times V}$ où V est un voisinage ouvert sous-analytique relativement compact de $\pi(p_Y)$: alors q_{13} est propre sur le support de $q_{12}^{-1}((K_1)_{X \times V}) \otimes q_{23}^{-1}K_2$ donc $(K_1)_{X \times V} \circ K_2 \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Z)$. Alors (i) résulte du lemme A.3.

Si de plus K_1 et K_2 sont microlocalement composables on sait que

$$K_1 \circ_{\mu} K_2 \in \text{Ob } D^b(X \times Y; (p_X, p_Z^a)),$$

(cf. la proposition 7.3.1 de la loc. cit.) d'où (ii). ♡

Dans le paragraphe suivant on aura besoin des précisions données par le lemme suivant, analogue des proposition 7.3.1 et le lemme 7.3.3 de la loc.cit., et qui s'établissent de manière analogue vu la remarque A.2.

LEMME A.6. — Soient K_1 et K_2 comme dans la proposition A.4.

(i) Supposons de plus que la condition suivante est vérifiée :

$$(A.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2) \right) \cap \left(\{p_X\} \times T_{y_0}^* Y \times \{p_Z^a\} \right) \subset \{((p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a))\}, \\ \left(SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2) \right) \cap \left(\{(x_0; 0)\} \times \overset{\circ}{T}_{y_0}^* Y \times \{(z_0; 0)\} \right) = \emptyset, \end{array} \right.$$

où $x_0 = \pi(p_X)$, $y_0 = \pi(p_Y)$, $z_0 = \pi(p_Z)$.

Soit le (pro-)objet de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Z; (p_Y, p_Z^a))$ défini par

$$K = \text{''}\underline{\text{lim}}\text{''} (K_1)_{X \times V} \circ K_2,$$

où V parcourt une base de voisinages ouverts sous-analytiques relativement compacts de y_0 . Alors on a :

$$K_1 \circ_{\mu} K_2 \xrightarrow{\sim} K.$$

(ii) Dans le cas général, on peut trouver des isomorphismes

$$\begin{aligned} K'_1 &\rightarrow K_1 \quad \text{dans} \quad D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^\alpha)), \\ K'_2 &\rightarrow K_2 \quad \text{dans} \quad D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^\alpha)), \end{aligned}$$

tels que K'_1 et K'_2 vérifient les conditions analogues à (A.3).

COROLLAIRE ET DÉFINITION A.7 (cf. [K-S 2, remark 7.3.7]). — Soient $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ et $(p_X, p_Y, p_Z) \in T^*(X \times Y \times Z)$. Supposons la condition suivante satisfaite :

$$(A.4) \quad SS(K) \cap (\{p_X\} \times T^*Y) \subset \{(p_X, p_Y^\alpha)\} \quad \text{au voisinage de ce point.}$$

Alors :

(i) pour tout $L \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z)$, les noyaux K et L sont microlocalement composables en (p_X, p_Y, p_Z) , et pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$ on pose :

$$\Phi_K^\mu(F) = K \circ_{\mu} F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X).$$

Vu ce qui précède, cela définit un foncteur :

$$\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y) \longrightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X),$$

et on a :

(ii) si $L \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Z)$ vérifie la condition analogue à (A.4) au point (p_Y, p_Z^α) , alors $K \circ_{\mu} L$ vérifie la condition analogue au point (p_X, p_Z^α) ,

(iii) si L est comme dans (ii) ci-dessus, les foncteurs $\Phi_K^\mu \circ \Phi_L^\mu$ et $\Phi_{K \circ_{\mu} L}^\mu$ sont isomorphes.

Remarquons que si $K \in \text{Ob } D^b(X \times Y; (p_X, p_Y^\alpha))$ vérifie la condition (A.4), le foncteur

$$\Phi_K = R_{q_1!}(K \otimes (\cdot)) : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$$

induit un foncteur $D^b(Y; p_Y) \rightarrow D^b(X; p_X)$ qui n'est autre que Φ_K^μ (comme il résulte de la remarque qui suit la définition 7.1.3 de [K-S 3]). Sous les hypothèses de la proposition précédente, il induit aussi un foncteur $D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X)$ (alors que Φ_K n'opère pas lui-même de $D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$ dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ en général).

Soient maintenant $\varphi : (T^*Y)_{p_Y} \rightarrow (T^*X)_{p_X}$ un germe de transformation canonique et Λ la sous-variété lagrangienne associée dans $X \times Y$ (i.e. Λ est l'antipodal relativement au facteur Y du graphe de φ^{-1}).

PROPOSITION A.8. — *Il existe $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ et un voisinage Ω_X (resp. Ω_Y) de p_X (resp. p_Y) tels que l'on ait :*

$$(A.5) \quad ((\Omega_X \times T^*Y) \cup (T^*X \times \Omega_Y)) \cap SS(K) \subset \Lambda,$$

et tel que

$$\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X)$$

est une équivalence de catégories.

Un quasi inverse est $\Phi_{K^*}^\mu$ avec $K^* = r_* R\mathcal{H}om(K, \omega_{X \times Y/Y})$, où $r(x, y) = (y, x)$ et où $\omega_{X \times Y/Y}$ est le complexe dualisant relatif.

Démonstration

1) Supposons d'abord que $\Lambda = T_S^*(X \times Y)$ où S est un germe en $\pi(p_X, p_Y)$ d'hypersurface lisse. La démonstration du corollaire 7.2.2 de [K-S 3] produit un $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times Y)$ qui vérifie la condition (A.5) et aussi la condition suivante :

$$(A.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le morphisme canonique } \mathbb{C}_\Lambda \rightarrow \mu\text{hom}(K, K)|_\Lambda \text{ est un isomorphi-} \\ \text{sme dans } D^b(\Lambda \cap W), \text{ où } W \text{ est un voisinage ouvert de } (p_X, p_Y^a). \end{array} \right.$$

On sait aussi que $\Phi_K^\mu : D^b(Y; p_Y) \rightarrow D^b(X; p_X)$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse $\Phi_{K^*}^\mu$. Du corollaire et définition A.7 on tire que les foncteurs

$$D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; p_Y) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi_K^\mu} \\ \xleftarrow{\Phi_{K^*}^\mu} \end{array} D_{\mathbb{R}-c}^b(X; p_X)$$

sont bien définis et quasi-inverses l'un de l'autre (parce que $K \circ K^* \simeq \mathbb{C}_{\Delta_X}$ dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(X \times X, (p_X, p_X^a))$ et $K^* \circ K \simeq \mathbb{C}_{\Delta_Y}$ dans $D_{\mathbb{R}-c}^b(Y \times Y, (p_Y, p_Y^a))$, puisque c'est vrai sans l'indice $\mathbb{R} - c$).

2) Dans le cas général, on décompose φ en $\varphi_1 \circ \varphi_2$, où chaque φ_j est une transformation canonique associée à une hypersurface, et on conclut en utilisant le corollaire A.7 et la partie 1) de la démonstration.

♡

A.3 - Le cas d'une variété complexe

Soit X une variété complexe, $X_{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente. On identifie $(T^*X)_{\mathbb{R}}$ et $T^*(X_{\mathbb{R}})$ à l'aide de la partie réelle de la 1-forme canonique de T^*X . On note $\gamma = \gamma_X : T^*X \rightarrow T^*X/\mathbb{C}^{\times}$ et $\overset{\circ}{\gamma}_X = \overset{\circ}{T}^*X \rightarrow \overset{\circ}{T}^*X/\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{P}^*X$ les applications canoniques.

Rappelons les faits suivants (cf. [K-S 3]) :

- Si M est une variété réelle et $F \in \text{Ob } D^b(M)$ tel que F_x est un complexe parfait pour tout $x \in M$, on a l'équivalence $(F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(M)) \iff (SS(F) \text{ est un sous-ensemble sous-analytique lagrangien de } T^*M \text{ (au sens de [K-S 3]))}$.

- Soit V un ouvert de T^*X et $\Lambda \subset V$ un ensemble \mathbb{R} -involutif, \mathbb{C}^{\times} -conique et fermé dans V . Alors Λ est un ensemble \mathbb{C} -analytique \mathbb{C} -lagrangien.

- Soit $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. On a l'équivalence $(F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X)) \iff (SS(F) \text{ est } \mathbb{C}^{\times}\text{-conique})$.

Ici, comme dans la suite, \mathbb{C}^{\times} -conique veut dire localement \mathbb{C}^{\times} -invariant.

DÉFINITION A.9. — Soit $\Omega \subset T^*X$ un sous-ensemble. On définit la catégorie $D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \Omega)$ comme la sous-catégorie pleine de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ dont les objets sont les $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ tels qu'il existe un ouvert $W \supset \Omega$ tel que $SS(F) \cap W$ est \mathbb{C}^{\times} -conique. C'est une sous-catégorie pleine triangulée de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$.

On a évidemment $D_{\mathbb{C}-c}^b(X; T^*X) = D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$, et si $x \in X \simeq T_X^*X$ et $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, on a l'équivalence :

$$\left(F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X; x) \right) \Leftrightarrow \left(\text{il existe un voisinage } V \text{ de } x \text{ dans } X \text{ tel que } F|_V \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(V) \right).$$

Du paragraphe précédent on va déduire l'invariance de $D_{\mathbb{C}-c}^b(X; p)$ et de $D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \mathbb{C}^{\times}p)$ par transformation canonique complexe.

PROPOSITION A.10. — Soient Y une deuxième variété complexe de même dimension que X , $p_X \in \overset{\circ}{T}^* X$, $p_Y \in \overset{\circ}{T}^* Y$, $\varphi : (T^*Y)_{p_Y} \rightarrow (T^*X)_{p_X}$ un germe de transformation canonique complexe et Λ le germe de variété lagrangienne complexe associé.

(i) Alors il existe $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^\alpha))$ tel que la condition (A.5) soit satisfaite et tel que le foncteur :

$$\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(Y; p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X; p_X)$$

est bien défini et est une équivalence de catégories (de quasi-inverse $\Phi_{K^*}^\mu$).

(ii) Supposons de plus que φ soit globalement définie sur l'orbite $\mathbb{C}^\times p_Y$ (i.e. : $\overset{\circ}{\gamma}_X \varphi = \psi \overset{\circ}{\gamma}_Y$ où $\psi : (\mathbb{P}^*Y)_{\gamma_Y(p_Y)} \rightarrow (\mathbb{P}^*X)_{\gamma_X(p_X)}$ est un germe de transformation de contact complexe), alors il existe $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X \times Y; \mathbb{C}^\times(p_X, p_Y^\alpha))$ tel que l'on ait (i) et tel que Φ_K^μ induit une équivalence de catégories

$$\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X).$$

Démonstration

(i) On peut supposer $\Lambda = T_S^*(X \times Y)$ où S est un germe d'hypersurface complexe lisse en $\pi(p_X, p_Y)$. On remarque d'abord que sous les hypothèses de la proposition A.10, le noyau K fourni par la démonstration de la proposition A.8 vérifie $K \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^\alpha))$ vu les conditions (A.5) et (A.6).

Soit alors $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}^{-c}}^b(Y)$ tel que $SS(F)$ soit un ensemble \mathbb{C}^\times -conique au voisinage de p_Y . Comme $\Phi_K : D^b(Y; p_Y) \rightarrow D^b(X; p_X)$ est une équivalence de catégories, l'ensemble $SS(\Phi_K(F)) = \varphi(SS(F))$ est \mathbb{C}^\times -conique au voisinage de p_X . D'autre part, soit V un voisinage ouvert (sous-analytique) relativement compact de $\pi(p_Y)$: alors $\Phi_{K_{X \times V}}(F) \rightarrow \Phi_K(F)$ est un isomorphisme dans $D^b(X; \pi^{-1}\pi(p_Y))$, donc $SS(\Phi_{K_{X \times V}}(F))$ est \mathbb{C}^\times -conique. Par suite (cf. lemme A.6) $SS(\Phi_K^\mu(F))$ est \mathbb{C}^\times -conique.

Ce qui précède montre que le foncteur du (i) est bien défini, qu'on note encore Φ_K^μ .

Comme on peut raisonner de manière analogue avec $\Phi_{K^*}^\mu : D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(X; p_X) \rightarrow D_{\mathbb{C}^{-c}}^b(Y; p_Y)$, le (i) résulte de la proposition A.8.

(ii) Ici on peut supposer $\Lambda = T_S^*(X \times Y)$ où S est un germe d'hypersurface complexe lisse en $\pi(p_X, p_Y)$, l'égalité ayant lieu sur tout un voisinage de $\mathbb{C}^\times(p_X, p_Y)$. Vu la condition (A.6) il est clair que $SS(K)$ est localement \mathbb{C}^\times -conique au voisinage de $\mathbb{C}^\times(p_X, p_Y^a)$, d'où la première assertion.

Soit \mathcal{V} une base de voisinages ouverts sous-analytiques relativement compacts de $y := \pi(p_Y)$. Pour tout $V \in \mathcal{V}$ le foncteur $\Phi_{K_{X \times V}} : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ induit un foncteur $\Phi_{K_{X \times V}} : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$ (puisque, d'après la proposition 7.1.2 de [K-S 2], $\Phi_{K_{X \times V}}$ respecte le "null-system" $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^\times p}$).

Pour tout $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$ on peut donc définir un pro-objet $\Psi_K(F)$ de $D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$ en posant

$$\Psi_K(F) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} \Phi_{K_{X \times V}}(F).$$

Il résulte du lemme A.11 ci-dessous, en y faisant $f = q_1 : X \times Y \rightarrow X$ (cf. la démonstration de la proposition 7.3.2 de [K-S 3]), que l'on a en fait :

$$\Psi_K(F) \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X).$$

On obtient donc un foncteur

$$\Psi_K : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$$

dont on vérifie que c'est une équivalence de catégories. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ on a un diagramme commutatif (cf. lemme A.6) :

$$\begin{array}{ccc} D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) & \xrightarrow{\Psi_K} & D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \lambda p_Y) & \xrightarrow{\Phi_K^\mu} & D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \lambda p_X) \end{array}$$

où la deuxième ligne est une équivalence de catégories vu la proposition A.8, d'où également la première vu (A.1). On la notera encore Φ_K^μ au lieu de Ψ_K .

En raisonnant comme dans (i) on en tire que l'équivalence de catégories $\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$ induit un foncteur

$$\Phi_K^\mu : D_{\mathbb{C}-c}^b(Y; \mathbb{C}^\times p_Y) \rightarrow D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X)$$

qui est encore une équivalence de catégories.

♡

LEMME A.11 (cf. [K-S 3] proposition 6.1.10). — Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variétés complexes, et soient $T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X$ les applications coniques associées. Soient $p \in Y \times_X T^*X$, $p_Y = \rho(p)$, $p_X = \varpi(p)$ et $G \in D_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$. On suppose la condition suivante satisfaite :

$$\varpi^{-1}(\lambda p) \cap \rho^{-1}(SS(G)) \subset \{\lambda p\} \text{ au voisinage de } \lambda p, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^\times.$$

Soit \mathcal{V} une base de voisinages ouverts sous analytiques relativement compacts de $y = \pi(p_Y)$. Alors

$${}''\varinjlim_{\mathcal{V}} Rf_! G_V \in \text{Ob } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X),$$

et il existe $V_0 \in \mathcal{V}$ tel que

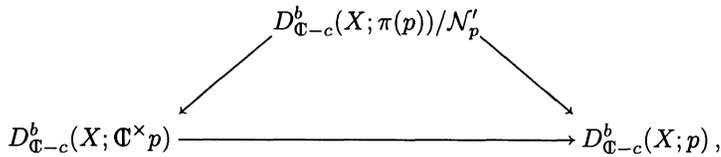
$${}''\varinjlim_{\mathcal{V}} Rf_! G_V \xrightarrow{\sim} Rf_! G_{V_0} \text{ dans } D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \mathbb{C}^\times p_X).$$

Démonstration

C'est l'analogie de la démonstration du (i) de la proposition 6.1.10 de [K-S 3].

Remarque

Soit $p \in T^*X$ et notons \mathcal{N}'_p le "null-system" des $F \in \text{Ob } D_{\mathbb{C}-c}^b(X; \pi(p))$ tels que $p \notin SS(F)$ (ou, de manière équivalente, $SS(F) \cap \mathbb{C}^\times p = \emptyset$). On a un diagramme commutatif



mais pour $p \notin T^*_X X$, aucune des flèches ci-dessus n'est une équivalence de catégories en général.

Index des principales notations

Les numéros renvoient au paragraphe

$D^b(X)$	0.1	$DR_X(\mathcal{M})$	0.2.1
$SS(F)$	2.3	$D_{\text{coni}}^b(\tau^{-1}\mathcal{D}_X)$	0.2.2
$D^b(X; \Omega)$	Appendice	or_X	0.2.2
$(\cdot)^*$	1.2.2	\mathcal{A}_X	0.2.2
$\text{Fais.coni}(E)$	0.1	\mathcal{V}_X	0.2.2
$D_{\text{coni}}^+(E)$	0.1	$\mathcal{V}_{Y/X}$	0.2.2
$(\cdot)^\wedge$	0.1	\mathcal{B}_M	1.2.2
$\mathbb{R} - c(X)$	1.1	$\mathcal{D}b_X$	1.1
$D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$	1.1	S'_X	1.1
$D_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$	Appendice	$(\cdot)^{t-\Omega}$	1.1
Φ_K^μ	Appendice	H_f	5.3
$D_{\mathbb{G}-c}^b(X)$	1.3	$\tilde{T}_Y X$	2.1
$D_{\mathbb{G}-c}^b(X; \Omega)$	Appendice	$\tilde{T}_Y^c X$	3.2.1
\boxtimes	0.2	$\nu_Y(\cdot)$	2.1
$C_Y(X)$	2.1	$\mu_Y(\cdot)$	2.2
\mathcal{O}_X	0.2.1	$T-\nu_Y TH_X(\cdot)$	2.1
Ω_X	0.2.1	$T-\mu_Y TH_X(\cdot)$	2.2
$\Omega_{Y/X}$	0.2.1	$T-\mu_{\text{hom}}(\cdot, \mathcal{D}b)$	2.3
\mathcal{D}_X	0.2.1	$T-\nu_Y RH_X(\cdot)$	3.1
$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$	0.2.1	$T-\mu_Y RH_X(\cdot)$	3.1
$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$	0.2.1	$T-\mu_{\text{hom}}(\cdot, \mathcal{O})$	3.1
$\mathcal{B}_{Y X}$	0.2.1	$C_{Y X}^{\mathbb{R}, f}$	4.1
$R\Gamma_{[K]}\mathcal{O}_X$	1.2.1	$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}, f}$	4.2
$\text{Mod}(\mathcal{D}_X)$	0.2.1	C_M^f	6.2
$\boxtimes_{\mathcal{D}}$	0.2.1	$C_{N X}^f$	6.2
$D^b(\mathcal{D}_X)$	0.2.1	\mathcal{L}_M^f	6.2
$D_{\text{r-h}}^b(\mathcal{D}_X)$	1.3	\square	<i>carré cartésien</i>
$\text{Sol}_X(\mathcal{M})$	1.3	\heartsuit	<i>fin de démonstration</i>

BIBLIOGRAPHIE

- [An 1] **Andronikof, E.** : Microlocalisation tempérée des distributions et des fonctions holomorphes, I et II, C.R. Acad. Sci. t.303, 347-350 (1986) et t.304, n°17, 511-514 (1987). cf. aussi Thèse d'Etat, Paris-Nord, (juin 1987).
- [An 2] **Andronikof, E.** : Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles. Bull. Soc. Math. France, 120, 51-85, (1992).
- [An 3] **Andronikof, E.** : On C^∞ -singularities of regular holonomic distributions. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 695-705 (1992).
- [An 4] **Andronikof, E.** : The Kashiwara conjugation and wave-front sets of regular holonomic distributions on a complex manifold. Invent. math. 111, 35-49 (1993).
- [An 5] **Andronikof, E.** : A microlocal version of the Riemann-Hilbert correspondance. Proc. Kyoto Sym. Microloc. Geom. Aug. 1992. N. Tose ed. (1993).
- [An-MF] **Andronikof, E. - Monteiro Fernandes, T.** : On the tempered solutions of regular systems. in \mathcal{D} -Modules and microlocal geometry, Proc. Lisbon 1990, W. de Gruyter (1993).
- [An-T] **Andronikof, E. - Tose, N.** : Distribution boundary value problems for elliptic systems. (En préparation, cf. aussi Proc. Kyoto Sym. Microloc. Geom. Aug. 1992. N. Tose ed. (1993))
- [Ao] **Aoki, T.** : Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33, 4, 227-250 (1983).

- [A-K-K] **Aoki, T. - Kashiwara, M. - Kawai, T.** : On a class of linear differential operators of infinite order with finite index. *Adv. in math.* 62, 155-168 (1986).
- [B-C-T] **Baouendi, M.S. - Chang, C.H. - Trèves, F.** : Micro-local hypo-analyticity and extensions of C-R functions. *J. of Differential Geom.* 18, 331-391 (1983).
- [Be] **Bernstein, I.N.** : \mathcal{D} -Modules algébriques. Notes miméographiées distribuées à Luminy (1983). (cf. aussi **Borel et al.** : Algebraic \mathcal{D} -Modules. Acad. Press (1987).)
- [Bj 1] **Björk, J.-E.** : Rings of differential operators. North-Holland (1979).
- [Bj 2] **Björk, J.-E.** : Analytic \mathcal{D} -modules. Kluwer (1993).
- [Bj 3] **Björk, J.-E.** : Exposé au Séminaire d'Analyse Microlocale de Paris-Nord (Juin 1986).
- [Br] **Brylinski, J.-L.** : Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques. *Astérisque* 140-141, 3-134 (1986).
- [B-M-V] **Brylinski, J.-L. - Malgrange, B. - Verdier, J.-L.** : Transformation de Fourier géométrique. *C.R. Acad. Sci.*, t. 297, 55-58 (1983).
- [BdM] **Boutet de Monvel, L.** : *C.R. Acad. Sci. Paris*, 287, 855-856 (1978).

- [B-S] **Bengel, G. - Schapira, P.** : Décomposition microlocale analytique des distributions. Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 29, fasc. 3, 101-124 (1979).
- [D'A-Z] **D'Agnolo, A., Zampieri, G.** : Vanishing theorem for sheaves of microfunctions at the boundary of CR manifolds. Comm. Part. Diff. Equations, 17 (56), 989-999 (1992).
- [D] **Dufresnoy, A.** : Sur l'opérateur d'' et les fonctions différentiables au sens de Whitney. Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 29, fasc. 1, 229-238 (1979).
- [F] **Fulton, W.** : Intersection theory. Ergebnisse. Springer (1984).
- [H 1] **Hörmander, L.** : An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand (1966).
- [H 2] **Hörmander, L.** : The analysis of linear partial differential operators I, Grund. der math. Wiss. 256, Springer (1983).
- [K 1] **Kashiwara, M.** : On the maximally overdetermined systems of partial differential equations I. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 10, 563-579 (1975).
- [K 2] **Kashiwara, M.** : On the holonomic systems of linear differential equations II. Inventiones Math. 49, 121-135 (1979).
- [K 3] **Kashiwara, M.** : Faisceaux constructibles et systèmes holonomes à points singuliers réguliers. Sémin. Goulaouic-Schwartz. Ecole Polytechnique (1979-80).

- [K 4] **Kashiwara, M.** : Systems of microdifferential equations. (Cours à l'Université Paris-Nord). T. Monteiro Fernandes (ed.). Progress in Math. Birkhäuser (1983).
- [K 5] **Kashiwara, M.** : The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., t. 20, 319-365 (1984).
- [K 6] **Kashiwara, M.** : Regular holonomic \mathcal{D} -modules and distributions on complex manifolds. Adv. Stud. in Pure Math., 8, 199-206 (1986).
- [K-K 1] **Kashiwara, M. - Kawai, T.** : Second microlocalization and asymptotic expansions - in Lecture Notes in Physics 126, Springer 21-56 (1980).
- [K-K 2] **Kashiwara, M. - Kawai, T.** : On the holonomic systems of microdifferential equations, III. Systems with regular singularities. Publ. R.I.M.S., Kyoto, Univ., t. 17, 813-979 (1981).
- [K-K 3] **Kashiwara, M. - Kawai, T.** : On the boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations. Proc. Japan Acad. 49, 164-168 (1972).
- [K-S 1] **Kashiwara, M. - Schapira, P.** : Micro-hyperbolic systems. Acta Math., 142, 1-55 (1979).
- [K-S 2] **Kashiwara, M. - Schapira, P.** : Microlocal study of sheaves. Astérisque 128 (1985).
- [K-S 3] **Kashiwara, M. - Schapira, P.** : Sheaves on manifolds. Grundlehren der math. Wiss. 292, Springer (1990).

- [Kat] **Kataoka, K.** : On the theory of Radon transformation of hyperfunctions. J. Fac. Sc. Univ. Tokyo IA, 28, n, 331-413 (1981).
- [L] **Laurent, Y.** : Microlocal operators with plurisubharmonic growth. Comp. Math. 86, 23-67 (1993).
- [Ma] **Martineau, A.** : Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Proc. Intern. Summer course on the theory of Distributions, Lisbon, 193-326 (1964). cf. Oeuvre de André Martineau. Publ. C.N.R.S. (1977).
- [Me] **Mebkhout, Z.** : Une équivalence de catégories. Comp. Math. 51, 51-62 (1984), et : Une autre équivalence de catégories. Comp. Math. 51, 63-88 (1984).
- [S-K-K] **Sato, M. - Kawai, T. - Kashiwara, M.** : Hyperfunctions and pseudo-differential equations - in Proceedings Katata 1971, Komatsu H. (ed.), Lecture Notes in Math. 287, Springer-Verlag, 265-529 (1973).
- [S 1] **Schapira, P.** : Microdifferential systems in the complex domain. Grund. der math. Wiss. 269, Springer (1985).
- [S 2] **Schapira, P.** : Front d'onde analytique au bord II. Sem. E.D.P. Ecole Polytechn. Exposé 13 (1986).
- [S-S] **Schapira, P. - Schneiders, J-P.** : Paires elliptiques I. Finitude et dualité. C.R.A.S. Paris 311, 83-86 (1990).
- [S-T] **Schapira, P. - Trépreau, J-M.** : Microlocal pseudoconvexity and "edge of the wedge" theorems. Duke math. J., 61, No. 1, 105-118 (1990).

- [Ud] **Uchida, M.** : Microlocal analysis of diffraction by a corner. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4s., 25, 47-75 (1992).

- [Uk] **Uchikoshi, K.** : Symbol theory of microlocal operators. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 24, 547-584 (1988).

- [V] **Verdier, J.-L.** : Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée. Astérisque 101 et 102, 332-364 (1983).

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

nouvelle série

- 1980**
1. J. BRIANÇON, A. GALLIGO, M. GRANGER - Déformations équivariantes des germes de courbes gauches réduites.
 2. D. BERTRAND, M. WALDSCHMIDT - Fonctions abéliennes et nombres transcendants.
 3. Y. FÉLIX - Dénombrement des types de K -Homotopie. Théorie de la déformation.
 4. L. BÉGUERI - Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos.
- 1981**
5. S. OCHANINE - Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K -théorie réelle.
 6. NGUYEN TIEN DAI, NGUYEN HUU DUC, F. PHAM - Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés. Appendice de Nguyen Tu Cuong.
- 1982**
7. P. ELLIA - Sur les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sur P^n .
- 1983**
8. M. GRANGER - Géométrie des schémas de Hilbert ponctuels.
 - 9/10. S. HALPERIN - Lectures on minimal models.
 - 11/12 G. HENNIART - La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$.
- 1984**
13. D. BERTRAND, M. EMSALEM, F. GRAMAIN, M. HUTTNER, M. LANGEVIN, M. LAURENT, M. MIGNOTTE, J.-C. MOREAU, P. PHILIPPON, E. REYSSAT, M. WALDSCHMIDT - Les nombres transcendants.
 14. G. DLOUSSKY - Structure des surfaces de Kato.
 15. M. DUFLO, P. EYMARD, G. SCHIFFMANN (éditeurs) - Analyse harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques.
 16. F. DELON, D. LASCAR, M. PARIGOT, G. SABBAGH (éditeurs) - Compte rendu de la table ronde de Logique, octobre 1983, Paris.
 17. B. PERRIN-RIOU - Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa.
- 1985**
18. C. BLONDEL - Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur $GL(2)$ et leurs caractères.
 19. J.-P. DEMAILLY - Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines.
 20. F. DIGNE, J. MICHEL - Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani.
 21. M. GROS - Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.
- 1986**
22. H. MAILLOT - Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes.
 23. D. BARSKY, P. ROBBA (éditeurs) - Introductions aux cohomologies p -adiques.
 - 24/25 B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Résonances en limite semi-classique.
- 1987**
26. F. LESCURE - Compactifications équivariantes par des courbes.
 27. M.-M. VIOTTE-DUCHARME - Une construction du groupe de Fischer $Fi(24)$.
 - 28/29 D. PERRIN - Courbes passant par m points généraux de P^3 .
 30. F. LALONDE - Homologie de Shih d'une submersion (homologies non singulières des variétés feuilletées).
- 1988**
31. C. GÉRARD - Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes.
 32. J.-Y. LE DIMET - Cobordisme d'enlacements de disques.
 33. F. DELON - Idéaux et types sur les corps séparablement clos.
 34. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique).
 35. J. DIXMIER - Sur les sous-sommes d'une partition.

- 1989** 36. M. FLEXOR - Images directes en cohomologie cohérente.
 37. B.E. KUNYAVSKII, A.N. SKOROBOGATOV, M.A. TSFASMAN - Del Pezzo surfaces of degree four.
 38. Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, mai 1987).
 39. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Semi-classical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum.
- 1990** 40. B. HELFFER, J. SJÖSTRAND - Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II. Comportement semi-classique près d'un rationnel.
 41/42 P. TORASSO - La formule de Poisson-Plancherel pour une classe de groupes presque algébriques.
 43. B. HELFFER, P. KERDELHUÉ, J. SJÖSTRAND - Le papillon de Hofstadter revisité.
- 1991** 44/45 A. UNTERBERGER - Quantification relativiste.
 46. Analyse globale et physique mathématique - Colloque à la mémoire d'Edmond Combet
 47. P. GABRIEL, M. LEMANCZYK, P. LIARDET - Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzai.
- 1992** 48. M.-C. ARNAUD - Type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $T^n \times R^n$.
 49. A. AMBROSETTI - Critical points and nonlinear variational problems - Cours de la chaire Lagrange.
 50. A. ARRONDO, I. SOLS - On congruences of lines in the projective space - (Chapter 6 written in collaboration with M. Pedreira).
 51. P. KERDELHUÉ - Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre six.
- 1993** 52. L. BLASCO - Paires duales réductives en caractéristique 2
 P.J. SALLY JR., M. TADIC - Induced representations for $GSp(2, F)$ and $Sp(2, F)$
 53. E. LEICHTNAM - Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques.
 54. L. RAMELLA - Sur les schémas définissant les courbes rationnelles lisses de P^3 ayant fibré normal et fibré tangent restreint fixés.
 55. N. BURQ - Contrôle de l'équation des plaques en présence d'obstacles strictement convexes.
- 1994** 56. B. SÉVENNEC - Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation.
 57. E. ANDRONIKOF - Microlocalisation tempérée.