

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GILLES LEBEAU

## **Propagation des ondes dans les dièdres**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 60 (1995)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1995\\_2\\_60\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1995_2_60__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# PROPAGATION DES ONDES DANS LES DIÈDRES

Gilles LEBEAU

**Abstract.** — We study the propagation of analytic singularities for a solution of the wave equation of finite energy in a domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^n$ , with Dirichlet boundary conditions, near a (codimension 2) corner of the boundary.

**Résumé.** — On étudie la propagation des singularités analytiques pour les solutions d'énergie finie de l'équation des ondes dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec conditions de Dirichlet, près des points de type dièdre du bord.

**AMS Subject Classification Index :** 35 L 05, 35 S 15.

Texte reçu le 4 Février 1994  
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex.  
URA 760 du CNRS



# TABLE DES MATIÈRES

<b>0. INTRODUCTION</b>	5
<b>I. GEOMETRIE</b>	13
I.1. Fibres cotangents	
I.2. Variété caractéristique	
I.3. Rayons	
<b>II. FRONT D'ONDE</b>	27
II.1. Estimations a priori	
II.2. Front d'onde	
II.3. Continuité des opérateurs de Poisson	
<b>III. MICROLOCALISATION</b>	39
III.1. Transformation F.B.I.	
III.2. Polynômes elliptiques	
III.3. Espaces de Sjöstrand et calcul pseudo-différentiel	
III.4. Le projecteur de Hilbert	
III.5. Réduction microlocale et système de Calderón	
<b>IV. ESTIMATIONS ELLIPTIQUES</b>	59
IV.1. Calcul dans les chaînes d'espaces de Banach	
IV.2. Problèmes elliptiques dans le plan	
IV.3. Preuve du théorème 2	
IV.4. Preuve du théorème 1	
<b>V. REFLECTION HYPERBOLIQUE</b>	89
V.1. Estimation 2-microlocale des traces	
V.2. Déformation du système de Calderón	
<b>VI. MICROHYPERBOLICITE</b>	103
VI.1. Théorème microhyperbolique	
VI.2. Estimation près de $S_g^2$	
<b>VII. PROPAGATION DES SINGULARITES</b>	115
<b>APPENDICE. Rappels de deuxième microlocalisation tempérée</b>	119
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	123



## 0. INTRODUCTION

Soient  $h_1(x), h_2(x)$  deux fonctions analytiques réelles définies près de  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  vérifiant  $h_1(x_0) = h_2(x_0) = 0$ ,  $dh_1(x_0)$  et  $dh_2(x_0)$  linéairement indépendants. Soient  $\Delta_1, \Delta_2$  les demi-hypersurfaces ouvertes

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \{x, h_2(x) = 0, \quad h_1(x) > 0\} \\ \Delta_2 = \{x, h_1(x) = 0, \quad h_2(x) > 0\} \end{cases}$$

et  $L$  l'arête

$$(2) \quad L = \{x; h_1(x) = h_2(x) = 0\}.$$

Soit  $\Omega^i$  (resp.  $\Omega^e$ ) l'ouvert intérieur (resp. extérieur)

$$(3) \quad \begin{cases} \Omega^i = \{x; h_1(x) > 0 \quad \text{et} \quad h_2(x) > 0\} \\ \Omega^e = \{x; h_1(x) < 0 \quad \text{ou} \quad h_2(x) < 0\}. \end{cases}$$

On a  $\partial\Omega^i = \partial\Omega^e = \Delta$ , où  $\Delta$  est le dièdre

$$(4) \quad \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup L.$$

On s'intéresse à décrire les singularités analytiques et leur propagation, pour les solutions de l'équation des ondes dans  $M = \mathbb{R}_t \times \Omega$ ,  $\Omega = \Omega^i$  ou  $\Omega^e$ , d'énergie finie, et vérifiant la condition de Dirichlet

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Sigma_j \partial_{x_j}^2 u = 0 \quad \text{dans } M \\ u|_{\partial M} = 0 \quad \text{et} \quad u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{M}). \end{cases}$$

Lorsque les équations  $h_i$  des faces du dièdre sont linéaires, le calcul de la fonction de Green du problème (5) a été effectué par GARNIR [G]. Le cas plus général d'ouverts  $\Omega$  à singularités coniques a été traité dans la catégorie  $C^\infty$  par CHEEGER-TAYLOR [C-T], et dans la catégorie analytique par ROULEUX [R]. Dans le cas des dièdres à faces linéaires, le problème (5) avec des conditions aux limites plus générales a été étudié par ESKIN [E]. Dans le cas des dièdres à faces "courbes", et pour le problème extérieur  $\Omega = \Omega^e$ , UCHIDA [U] a obtenu des estimations a priori sur les singularités analytiques et GÉRARD-LEBEAU [G-L], dans le cas  $d = 2$ , ont traité le problème de l'asymptotique sur le cône diffracté de la solution de (5) associée à une onde conormale entrante. Les résultats obtenus ici généralisent ceux de [G-L] : nous définissons un front d'onde analytique jusqu'au bord pour les solutions de (5); nous travaillons en dimension d'espace  $d$  quelconque, ce qui force à considérer la propagation le long de rayons tangents à l'arête  $L$  (absents en dimension  $d = 2$ ), enfin nous traitons conjointement

les cas intérieurs et extérieurs, et l'étude n'est pas restreinte au cas de singularités conormales entrantes.

Décrivons plus précisément les résultats obtenus. On choisit d'abord un système de coordonnées  $x = (x', x'')$ ,  $x' = (x_1, x_2)$ ,  $x'' = (x_3, \dots, x_n)$  ( $n = d + 1$ , de sorte que  $x''$  contient la variable temporelle) qui redresse le dièdre, de sorte que  $h_1 = x_1$ ,  $h_2 = x_2$ . On appelle  $x'$  les variables normales et  $x''$  les variables tangentielles. On travaille avec un opérateur  $P$  différentiel d'ordre 2 à coefficients analytiques de la forme

$$(6) \quad P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'')$$

de symbole principal  $p = p_1 + \ell + q$  à coefficients analytiques, et vérifiant

$$(7) \quad \begin{cases} p \text{ réel; } p(x, \xi) = 0 \text{ et } \xi \neq 0 \implies \partial_\xi p \neq 0 \\ p_1(x, \xi') \geq c_0 |\xi'|^2 \quad c_0 > 0 \end{cases}$$

et on a donc  $\text{Car } p \cap T_\Delta^* \subset \{\xi = 0\}$ , avec  $T_\Delta^* = T_{\Delta_1}^* \cup T_{\Delta_2}^* \cup T_L^*$ . On note  $M^i = \{x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$  l'ouvert intérieur,  $M^e = \{x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0\}$  l'ouvert extérieur.

On note  $\pi$  la projection canonique de  $\dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^*$  sur  $\dot{T}_b^* M = \dot{T}^* M \cup \dot{T}^* \Delta_1 \cup \dot{T}^* \Delta_2 \cup \dot{T}^* L$ , qu'on munit de la topologie quotient,  ${}^b \dot{T}^* \mathbb{R}^n$  le fibré cotangent de Melrose (dual du fibré des champs de vecteurs tangents à  $x_1 x_2 = 0$ ) et  $\tilde{\pi}$  l'application canonique de  $\dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^*$  dans  ${}^b \dot{T}^* \overline{M}$  définie en coordonnées par

$$(8) \quad (x', x'', \xi', \xi'') \mapsto (x', x'', \xi''; v_1 = x_1 \xi_1, v_2 = x_2 \xi_2).$$

On a donc le diagramme

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^* & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \text{Im}(\tilde{\pi}) \subset {}^b \dot{T}^* \overline{M} \\ \pi \downarrow & \nearrow i & \\ \dot{T}_b^* M & & \end{array}$$

la flèche d'identification  $i$  étant bijective continue (ce n'est pas un homéomorphisme;  $\pi$  n'est ni ouverte, ni fermée et  $\dot{T}_b^* M$  n'est pas métrisable, alors que  ${}^b \dot{T}^* \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$  est une variété différentiable). On note aussi

$$(10) \quad \Sigma_b = \pi(\text{Car } p), \quad Z = \tilde{\pi}(\text{Car } p).$$

Alors  $i : \Sigma_b \rightarrow Z$  est un homéomorphisme, ce qui nous permettra d'identifier  $\Sigma_b$  et  $Z$ ;  $\Sigma_b$  est la variété caractéristique du problème aux limites dans le dièdre.

**Définition 1.** La région elliptique  $\mathcal{E}$  de  $\dot{T}_b^*M$  est

$$(11) \quad \mathcal{E} = \dot{T}_b^*M \setminus \Sigma_b = \{\rho; \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } p = \emptyset\}.$$

On notera  $Z_L$  (resp.  $Z_\Delta$ ) les points de  $Z$  au dessus de l'arête  $L$  (resp. au dessus du dièdre  $\Delta$ ), et on stratifie  $Z$  par

$$(12) \quad Z = S^0 \cup S^1 \cup S^2; \quad S^0 = Z \setminus Z_\Delta, \quad S^1 = Z_\Delta \setminus Z_L, \quad S^2 = Z_L.$$

**Définition 2.** On définit la région glissante  $\mathcal{G}$  de  $Z$  par

$$(13) \quad \mathcal{G} = \{\rho; \#\{\pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(p)\} = 1\}$$

et la région transverse  $\mathcal{T}$  de  $Z$  par

$$(14) \quad \mathcal{T} = Z \setminus \mathcal{G}.$$

On notera que  $\mathcal{G} \cap S^0 = S^0$ ,  $\mathcal{G} \cap S^1$  est la région glancing usuelle sur les faces du dièdre, et  $\mathcal{G} \cap S^2$  correspond aux bicaractéristiques de  $p$  tangentes à l'arête  $L$ ;  $\mathcal{G}$  n'est pas fermé.

Dans le système de coordonnées choisi on a

$$(15) \quad p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu) A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'')$$

où  $A_x$  est une matrice  $2 \times 2$  symétrique définie positive,  $\nu = \nu(x, \xi'')$  est linéaire en  $\xi''$ . Avec  $R_0 = R|_{x'=0}$  on a

$$(16) \quad S^2 = \{R_0 \geq 0\}, \quad S^2 \cap \mathcal{G} = \{R_0 = 0\}, \quad S^2 \cap \mathcal{T} = \{R_0 > 0\}.$$

On posera  $S_g^i = S^i \cap \mathcal{G}$ ,  $S_t^i = S^i \cap \mathcal{T}$ . Soit  $T_\rho Z$  le cône tangent en  $\rho$  à  $Z$ .

**Définition 3.** Soit  $\rho \in \Sigma_b$ ; on définit les vecteurs entrants (resp. sortants)  $\mathcal{V}_\rho^-$  (resp.  $\mathcal{V}_\rho^+$ ), comme le sous-ensemble de  $\mp T_\rho Z$

$$(17) \quad \mathcal{V}_\rho^\mp = \left\{ d\tilde{\pi}(H_p(q)); \pi(q) = \rho, q \in \text{Car}(p), \text{pr}(\mp H_p(q)) \in T\overline{M} \right\}.$$

Pour  $\rho \in \mathcal{G}$ , on a  $\mathcal{V}_\rho^- = \mathcal{V}_\rho^+ = \{d\tilde{\pi}(H_p(q))\}$  où  $q = \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(p)$ , et on notera  $H_g(\rho) = d\tilde{\pi}(H_p(q))$ . Pour  $\rho \in S_g^i$ , on a  $H_g(\rho) \in T_\rho S_g^i$ , et donc les strates  $S_g^i$  de  $\mathcal{G}$  sont feuilletées par les courbes intégrales du champ (hamiltonien)  $H_g$ .

Pour  $\rho \in S_t^i$ , on a  $\mathcal{V}_\rho^\mp \cap T_\rho S_t^i = \emptyset$ .



**Définition 4.** Un rayon est une application continue  $\gamma$  de  $I$  (intervalle de  $\mathbb{R}$ ) dans  $\Sigma_b \simeq Z \subset \mathbb{R}^{2n}$  vérifiant

- (18) si  $\gamma(t_0) \in \mathcal{G}$ ,  $\gamma$  est dérivable en  $t_0$  et  $\dot{\gamma}(t_0) = H_g(\gamma(t_0))$   
(19) si  $\gamma(t_0) \in S_t^i$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\gamma(t) \notin S^i$  pour  $0 < |t - t_0| < \varepsilon$ .

Les rayons sont (localement uniformément sur  $\overline{M}$ ) Lipschitz, dérivables à gauche et à droite en tout point et  $\dot{\gamma}_{g,d}(t) \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}^{\mp}$ . L'ensemble des rayons est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, et par chaque point, il passe au moins un rayon maximal (voir le paragraphe I).

On va définir  $SS_b(u)$  comme sous-ensemble de  $\dot{T}_b^*M$ . En coordonnées polaires  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  soit  $E = \{f(x_1, x_2); f, \partial_r f, \frac{1}{r} \partial_\theta f \in C^0(\overline{I}; L_r^2)\}$  où  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$  (cas intérieur) ou  $I = ]-\frac{3\pi}{2}, 0[$  (cas extérieur), et  $E_0 = \{u \in E, u|_{\theta \in \partial I} = 0 \text{ et } u|_{r=0} = 0\}$ . Soit aussi  $F$  le sous-espace de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  formé des  $u(x', x'')$  qui vérifient

$$(20) \quad \begin{cases} \forall \theta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^{n-2} \quad \exists C, m \\ \forall \theta_1 \in C_0^\infty(K) \left\| \theta_0(x') \int u(x', x'') \theta_1(x'') dx'' \right\|_{E_0} \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \theta_1|_\infty \end{cases}$$

c'est-à-dire  $F = \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n; E_{0,\text{loc}})$ .

En suivant l'étude faite par KONDRAT'EV [K] sur les problèmes elliptiques dans les coins, on obtient (voir le paragraphe II, proposition 1)

$$(21) \quad Pu = 0, \quad u \in H_0^1 \implies u \in F.$$

On définit alors  $SS_b(u)$  par régularité tangentielle comme suit : Soit  $T_0$  la transformation de FBI tangentielle

$$(22) \quad T_0 u(w, x', \lambda) = \int e^{\lambda w x'' - \lambda \frac{x''^2}{2}} u(x', x'') dx''$$

et  $\varphi_0$  la fonction poids  $\varphi_0(w) = \frac{1}{2}(\text{Re } w)^2$ . D'après (21), si  $Pu = 0$ ,  $u \in H_0^1$ ,  $\theta_1(x'') \in C_0^\infty$  on a  $T_0(\theta_1 u) \in \mathcal{H}_{\varphi_0}(E_{0,\text{loc}})$ , espace de Sjöstrand à valeurs dans  $E_{0,\text{loc}}$ .

**Définition 5.** Soit  $u \in H_0^1$ ,  $Pu = 0$ ,  $\rho \in \dot{T}_b^*M$ . On définit  $SS_b(u)$  en posant que  $\rho$  n'appartient pas à  $SS_b(u)$  ssi

- 1) si  $\rho \notin \dot{T}^*L$ , définition usuelle
- 2) si  $\rho = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^*L$ ,  $w_0 = x_0'' - i\xi_0''$ , il existe  $\theta_1(x'') \in C_0^\infty$ ,  $\theta_1 \equiv 1$  près de  $x_0''$ ,  $\theta_0(x') \in C_0^\infty$ ,  $\theta_0 \equiv 1$  près de 0,  $W$  voisinage de  $w_0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour  $w \in W$ ,  $\lambda \geq 1$

$$(23) \quad \|\theta_0 T_0 \theta_1 u\|_E \leq \frac{1}{\varepsilon_0} e^{\lambda(\varphi_0(w) - \varepsilon_0)}.$$

On a alors la proposition suivante (voir le paragraphe II, proposition 2).

**Proposition.**  $SS_b(u)$  est fermé, localement compact dans  $\dot{T}_b^*M$  (on prendra garde au fait que ce résultat est faux sans la condition aux limites  $u|_{\partial} = 0$ ).

Il n'est pas évident que la définition précédente de  $SS_b(u)$  soit indépendante du système de coordonnées choisi, ou de l'espace  $E_0$  de régularité normale choisie; toutefois, cela est vrai, en effet on a (voir le paragraphe IV.4).

**Théorème 1.**

$$SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus \dot{T}_{\Delta}^*)$$

où  $\underline{u}$  est le prolongement canonique de  $u$  par zéro à  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ .

Dans la suite  $u$  désigne toujours une solution du problème aux limites :  $u \in H_0^1$ ,  $Pu = 0$ .

On prouve dans le paragraphe IV.3 le :

**Théorème 2.** (Régularité elliptique)

$$(24) \quad SS_b(u) \subset \Sigma_b.$$

Pour  $\rho_0 \in S_t^2$  et  $a > 0$  soit  $\Gamma_{\rho_0, a}^-$  l'ensemble des rayons entrants en  $\rho_0$

$$(25) \quad \Gamma_{\rho_0, a}^- = \left\{ \text{rayons} : [-a, 0] \xrightarrow{\gamma} (\dot{T}^* \dot{M} \cup \dot{T}^* \dot{\Delta}_1 \cup \dot{T}^* \dot{\Delta}_2) \cap \Sigma_b; \gamma(s) \rightarrow \rho_0(s \rightarrow 0^-) \right\}.$$

On prouve dans le paragraphe V le :

**Théorème 3.** (Réflexion hyperbolique sur l'arête)

Soit  $\rho_0 \in S_t^2$ . On suppose qu'il existe un voisinage  $W$  de  $\rho_0$  dans  $\Sigma_b$  et  $a_0 > 0$  tel que pour tout  $\rho \in W$  tel qu'il existe  $\gamma \in \Gamma_{\rho, a}^-$  avec  $a \leq a_0$  et  $\gamma(-a) = \rho$ , on a  $\rho \notin SS_b(u)$ . Alors

$$(26) \quad \rho_0 \notin SS_b(u).$$

Les théorèmes 2 et 3 s'obtiennent en écrivant les projecteurs de Calderón déduits de l'équation  $P\underline{u} = g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2$  ( $\delta_1 = \delta_{x_2=0}$ ,  $\delta_2 = \delta_{x_1=0}$ ), qui fournissent un système  $2 \times 2$  d'équations sur les traces  $g_i$  des dérivées normales (pour  $P$ ) de  $u$  sur les faces du dièdre. le point clé est d'obtenir des estimations 2-microlocales a priori pour  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\underline{u}$  sur les involutives  $\{x_1 = 0\}$ ,  $\{x_2 = 0\}$ ,  $\{x_1 = x_2 = 0\}$ , qui permettent d'écrire le

système de Calderón comme une équation pseudo-différentielle tangentielle à valeurs opérateurs sur les fibres des involutives  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ , l'inversion du symbole principal correspondant comme dans [G-L] à l'étude d'un problème de transmission à coefficients constants dans un dièdre linéaire en dimension 2.

Pour traiter la propagation sur les rayons tangents à l'arête, on utilise la stratégie microhyperbolique développée par SJÖSTRAND pour les problèmes aux limites dans [S3].

Soit  $\rho_0 = \dot{T}^*L$  tel que  $R_0(\rho_0) = 0$ , donc  $\rho_0 \in S_g^2$  et  $\Theta(x'', \xi'')$  une fonction analytique réelle définie près de  $\rho_0$  vérifiant  $\Theta(\rho_0) = 0$ ,  $\{R_0, \Theta\}(\rho_0) \neq 0$ . Soit  $\tilde{\rho}_0$  l'unique point de  $\dot{T}^*\overline{M} \cap p^{-1}(0)$  tel que  $\pi(\tilde{\rho}_0) = \rho_0$ .

On prouve dans le paragraphe VI le :

**Théorème 4.** (Estimation près de  $S_g^2$ )

Soit  $K$  un compact de  $S_g^2$ ; il existe  $A_0$  (grand)  $\varepsilon_0, \delta_0$  (petits) tels que pour tout  $\rho_0 \in K, \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$

$$(27) \quad \text{Boule}(\rho_0, A_0 \varepsilon^2) \cap SS_b(u) = \emptyset \implies \exp s H_g(\rho_0) \notin SS_b(u) \text{ pour } |s| \leq \delta_0 \varepsilon.$$

Des résultats précédents on déduit dans le paragraphe VII le théorème de propagation des singularités analytiques suivants :

**Théorème 5.** Pour  $u$  solution  $H_0^1$  de  $Pu = 0$ ,  $SS_b(u)$  est un fermé de  $\Sigma_b$  et si  $\rho_0 \in SS_b(u)$  il existe un rayon maximal issu de  $\rho_0$  dans  $SS_b(u)$ .

Le papier est organisé comme suit :

Dans le paragraphe I (Géométrie), on introduit les différents espaces cotangents qui interviennent dans le problème, la variété caractéristique, et on étudie les propriétés des rayons, en particulier les réflexions successives sur les faces du dièdre dans le cas intérieur.

Dans le paragraphe II (Front d'onde), on prouve l'estimée (21), et on introduit le front d'onde analytique jusqu'au bord.

Dans le paragraphe III (Microlocalisation), on étudie l'effet de la transformation de FBI sur l'équation  $Pu = 0, u|_{\partial M} = 0$ , ainsi que l'action des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces obtenus après cette transformation. Le résultat principal du paragraphe III est la proposition 3 qui relie les traces des microlocalisés aux microlocalisés des traces (système de Calderón).

Dans le paragraphe IV (Estimations elliptiques), on commence par prouver un résultat d'ellipticité (proposition 1) pour une équation pseudo-différentielle à valeurs dans une chaîne d'espaces de Banach, que nous utiliserons dans la preuve du théorème 1. On étudie ensuite les problèmes elliptiques dans les secteurs angulaires

du plan  $\mathbb{R}^2$ ; en particulier les propositions 2 et 3 permettront d'obtenir l'inversion des symboles principaux des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs opérateurs qui interviennent dans les théorèmes 1, 2, 3, 4. On prouve alors les théorèmes 1 et 2.

Le paragraphe V est consacré à la preuve du théorème 3. Comme dans [G-L], la stratégie consiste à effectuer une déformation complexe dans les variables normales  $(x', \xi')$  pour se ramener à un problème elliptique. Pour prouver que cette déformation est licite, nous utilisons les théorèmes A.1 et A.2 de l'appendice qui permettent de contrôler la structure 2-microlocale des traces sur les faces du dièdre.

Le paragraphe VI est consacré à la preuve du théorème 4. Nous adaptons ici la stratégie microhyperbolique standard en effectuant une déformation complexe dans les variables tangentielles  $(x'', \xi'')$ .

Dans le paragraphe VII, nous prouvons le théorème 5 essentiellement en suivant la méthode de R. Melrose et J. Sjöstrand.

Enfin dans l'appendice, nous rappelons les notions de base de 2ème microlocalisation tempérée, le théorème A.2 prouvé dans [G-L], et nous prouvons le théorème A.1. (Si  $V$  est une sous-variété involutive, nous définissons ici  $SS_V^{2,1}$  comme fermé du fibré normal à  $V$ ,  $T_V$  avec la convention de signe qui assure l'absence de front d'onde analytique lorsqu'on décolle de  $V$  dans une direction absente de  $SS_V^{2,1}$ .)



# I. GEOMETRIE

## I.1. Fibrés cotangents

On se place dans  $\mathbb{R}^n$  munit du système de coordonnées

$$(1) \quad x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x''), \quad x' = (x_1, x_2), \quad x'' = (x_3, \dots, x_n).$$

On appelle  $x'$  les variables normales et  $x''$  les variables tangentielles. On pose

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \{x; x_2 = 0, x_1 > 0\} & \tilde{\Delta}_1 = \{x; x_2 = 0\} \\ \Delta_2 = \{x; x_1 = 0, x_2 > 0\} & \tilde{\Delta}_2 = \{x; x_1 = 0\} \\ L = \{x; x_1 = x_2 = 0\} \end{cases} .$$

Le dièdre  $\Delta$  est

$$(3) \quad \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup L .$$

On appelle  $\Delta_1, \Delta_2$  les faces du dièdre et  $L$  l'arête du dièdre. On a  $\mathbb{R}^n \setminus \Delta = M^i \cup M^e$  avec

$$(4) \quad M^i = \{x; x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}, \quad M^e = \{x; x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0\} .$$

L'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans lequel on travaillera sera soit  $M = M^i$  (cas intérieur), soit  $M = M^e$  (cas extérieur).

On note  $T_{\Delta_i}^*, T_L^*$  les fibrés conormaux aux faces et à l'arête,  $T^*M, T^*\Delta_i, T^*L$  les fibrés cotangents à l'ouvert  $M$ , aux faces, et à l'arête et  $T^*\overline{M} = T^*\mathbb{R}^n|_{\overline{M}}$ . On définit le conormal au dièdre par

$$(5) \quad T_{\Delta}^* = T_{\Delta_1}^* \cup T_{\Delta_2}^* \cup T_L^* .$$

et on pose

$$T_b^*M = T^*M \cup T^*\Delta_1 \cup T^*\Delta_2 \cup T^*L .$$

On notera  $\pi$  la projection canonique

$$(6) \quad T^*\overline{M} \xrightarrow{\pi} T_b^*M$$

et on munit  $T_b^*M$  de la topologie image définie par  $\pi$ . On prendra garde aux faits suivants : La projection  $\pi$  n'est ni ouverte, ni fermée, et la topologie de  $T_b^*M$  n'est pas métrisable, les points de  $T_b^*M \setminus T^*M$  ne possédant pas de système

fondamental dénombrable de voisinages; Les parties fermées de  $T_b^*M$  sont les parties séquentiellement fermées, mais l'adhérence d'une partie diffère en général de son adhérence séquentielle.

Toutefois, la topologie induite par  $T_b^*M$  sur chacune de ses composantes (définies en (5)) est la topologie usuelle et pour tout  $C_0 > 0$ , le sous-espace

$$(8) \quad \pi\left(\{(x, \xi) \in T^*\overline{M} ; |\xi'| \leq C_0|\xi''|\}\right)$$

de  $T_b^*M$  est métrisable et localement compact.

Introduisons à présent le fibré cotangent comprimé de R. Melrose. Soit  ${}^bTR^n$  le fibré de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}^n$  dont les sections sont les champs de vecteurs tangents à  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$ ,  ${}^bT^*\mathbb{R}^n$  son fibré dual et posons

$$(9) \quad {}^bT^*M = {}^bT^*\mathbb{R}^n|_{\overline{M}} .$$

On note  $\tilde{\pi}$  l'application de  $T^*\overline{M}$  dans  ${}^bT^*M$  déduite par transposition de l'application  ${}^bTR^n \rightarrow TR^n$ . Si on note  $(v'', v_1, v_2)$  la base de  ${}^bT^*\mathbb{R}^n$ , duale de la base  $(\partial_x'', x_1\partial_{x_1}, x_2\partial_{x_2})$  de  ${}^bTR^n$ , on a

$$(10) \quad \tilde{\pi} : (x', x''; \xi', \xi'') \longmapsto (x', x''; \xi'', x_1\xi_{x_1}, x_2\xi_{x_2}) .$$

On notera  $i$  l'application bijective continue canonique de  $T_b^*M$  sur l'image de  $\tilde{\pi}$

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} T^*\overline{M} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \text{Im}(\tilde{\pi}) \subset {}^bT^*M \\ \pi \downarrow & \nearrow i & \\ T_b^*M & & \end{array}$$

Tous les espaces précédents sont munis de l'action de  $\mathbb{R}_+^*$  déduite de  $(x, \xi) \rightarrow (x, t\xi)$ , et si  $F$  est un de ces espaces, on notera  $\dot{F} = F \setminus \{\text{section nulle}\}$ , la section nulle étant l'ensemble des points fixes de l'action de  $\mathbb{R}_+^*$ .

## I.2. Variété caractéristique

Soit  $P(x, D)$  un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients analytiques, défini au voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  de symbole principal  $p(x, \xi)$  réel

$$(12) \quad \begin{cases} P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'') \\ p(x, \xi) = p_1(x, \xi') + \ell(x, \xi', \xi'') + q(x, \xi'') \end{cases}$$

vérifiant, pour un  $c > 0$

$$(13) \quad \begin{cases} p(x, \xi) = 0 \text{ et } \xi \neq 0 \implies \partial_\xi p \neq 0 \\ p_1(x, \xi') \geq c|\xi'|^2 \end{cases}$$

On notera  $\text{Car}(P) = \{(x, \xi); p(x, \xi) = 0, \xi \neq 0\}$  la variété caractéristique de  $P$ ; d'après (13), on a  $\text{Car}(P) \cap T_\Delta^* = \emptyset$ . On pose

$$(14) \quad \Sigma_b = \pi(\text{Car } P) \quad Z = \tilde{\pi}(\text{Car } P) .$$

Alors  $\Sigma_b$  est un fermé localement compact de  $\dot{T}_b^*M$ , et l'application  $i : T_b^*M \rightarrow \text{Im}(\tilde{\pi})$  induit un homéomorphisme de  $\Sigma_b$  sur  $Z$ ; on identifiera par  $i$   $\Sigma_b$  et  $Z$ . La région elliptique  $\mathcal{E}$  de  $\dot{T}_b^*M$  est définie par

$$(15) \quad \mathcal{E} = \dot{T}_b^*M \setminus \Sigma_b = \left\{ \rho \in \dot{T}_b^*M; \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(P) = \emptyset \right\} .$$

On note par la projection de  $Z$  (ou  $\Sigma_b$ ) sur  $\overline{M}$ , et  $Z_\Delta = \text{pr}^{-1}(\Delta)$ ,  $Z_L = \text{pr}^{-1}(L)$ . On stratifie  $Z$  par la réunion disjointe

$$(16) \quad \begin{cases} Z = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \\ S^0 = Z \setminus Z_\Delta, S^1 = Z_\Delta \setminus Z_L, S^2 = Z_L . \end{cases}$$

On définit la région glissante  $\mathcal{G}$  de  $Z$  par

$$(17) \quad \mathcal{G} = \left\{ \rho \in Z; \#\{\tilde{\pi}^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(P)\} = 1 \right\}$$

et la région transverse par

$$(18) \quad \mathcal{T} = Z \setminus \mathcal{G}$$

et on pose pour  $i = 0, 1, 2$

$$(19) \quad S^i = S_g^i \cup S_t^i, \quad S_g^i = S^i \cap \mathcal{G}, \quad S_t^i = S^i \cap \mathcal{T} .$$

On a alors  $S_t^0 = \emptyset$ ,  $S_g^0 = S^0$ ,  $S_g^1 \subset \dot{T}^*\Delta_1 \cup \dot{T}^*\Delta_2$  est la région glancing usuelle sur les faces du dièdre, et  $S_g^2 \subset \dot{T}^*L$  correspond aux bicaractéristiques de  $P$  tangentes à



l'arête  $L$ . (On prendra garde au fait que  $\mathcal{G}$  n'est pas fermé en général.) D'après (12), on a

$$(20) \quad p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu)A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'')$$

où  $\nu = \nu(x, \xi'')$  est linéaire en  $\xi''$ ,  $R(x, \xi'')$  quadratique en  $\xi''$ , la matrice  $2 \times 2$  symétrique  $A_x$  étant définie positive.

On pose  $\nu_0 = \nu|_{x \in L}$ ,  $R_0 = R|_{x \in L}$ . On a alors

$$(21) \quad S^2 = \{(x'', \xi'') \in \dot{T}^*L; R_0 \geq 0\}, \quad S_g^2 = \{R_0 = 0\}, \quad S_t^2 = \{R_0 > 0\}.$$

D'après (13), on a  $R_0(x'', \xi'') = 0$  et  $\xi'' \neq 0 \Rightarrow \partial_{\xi''} R_0(x'', \xi'') \neq 0$  et par suite  $S_g^2$  est une sous-variété lisse de codimension un de  $\dot{T}^*L$  (ou bien  $S_g^2 = \emptyset$  si  $R_0$  ne s'annule pas). Plus généralement, toutes les strates  $S_g^i$ ,  $S_t^i$  sont lisses. Comme  $Z$  est contenu dans la variété  ${}^bT^*\mathbb{R}^n$ , si  $\rho \in Z$  on peut définir le cône tangent en  $\rho$  à  $Z$ ,  $T_\rho Z$  comme sous-ensemble de  $T_\rho({}^bT^*\mathbb{R}^n)$  par  $u \in T_\rho Z$  ssi il existe des suites  $\rho_n \in Z$ ,  $\lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ , avec  $\rho_n \rightarrow \rho$  et  $\lambda_n(\rho_n - \rho) \rightarrow u$ .

**Définition 1.** Pour  $\rho \in \Sigma_b \simeq Z$  on définit les vecteurs entrants ( $-$ ) et sortants ( $+$ ),  $\mathcal{V}_\rho^\pm \subset \pm T_\rho Z$  par

$$(22) \quad \mathcal{V}_\rho^\pm = \left\{ d\tilde{\pi}(H_p(q)), \pi(q) = \rho, q \in \text{Car } P, \text{pr}(\pm H_p(q)) \in T\overline{M} \right\}$$

où  $H_p$  désigne le champ hamiltonien de  $p$  sur  $T^*\mathbb{R}^n$ .

Pour  $u \in \mathcal{V}_\rho^+$  (resp.  $\mathcal{V}_\rho^-$ ) on a bien  $u \in T_\rho Z$  (resp.  $-T_\rho Z$ ) car si  $u = (d\tilde{\pi}(H_p(q)))$ ,  $q \in \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } P$ ,  $\text{pr}(H_p(q)) \in T\overline{M}$ , (resp.  $-T\overline{M}$ ) il existe une courbe  $s \mapsto \gamma(s)$ ,  $\gamma(0) = q$ ,  $\dot{\gamma}(0) = H_p(q)$ ,  $s \in [0, s_0[$  (resp.  $]s_0, 0]$ ) tracée dans  $\text{Car}(P) \cap \text{pr}^{-1}(\overline{M})$ , puisque  $\text{Car } P$  et  $\text{pr}^{-1}(\overline{M})$  sont transverses d'après (13), et  $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\pi} \circ \gamma(s)$  est tracée dans  $Z$  et vérifie  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = u$ .

Si  $p \in \mathcal{G}$ , on a  $\pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } P = \{q\}$  et  $\text{pr}(\pm H_p(q)) \in T\overline{M}$  et donc  $\mathcal{V}_\rho^- = \mathcal{V}_\rho^+$  est réduit à un unique vecteur, qu'on notera,  $H_g(\rho) = d\tilde{\pi}(H_p(q))$ . On a

$$(23) \quad \rho \in S_g^i \Rightarrow H_g(\rho) \in T_\rho S_g^i.$$

On a aussi

$$(24) \quad \rho \in S_t^i \Rightarrow \mathcal{V}_\rho^\pm \cap T_\rho S_t^i = \emptyset.$$

En effet, pour  $\rho \in S_t^1$ ,  $\mathcal{V}_\rho^+$  (resp.  $\mathcal{V}_\rho^-$ ) est réduit au singleton  $d\tilde{\pi}(H_p(q_+))$  (resp.  $q_-$ ), où  $q_\pm$  sont les deux points de  $\text{Car } P$  au dessus de  $\rho$  avec  $\text{pr}(H_p(q_+)) \in T\overline{M}$ , et pour  $\rho \in S_t^i$ ,  $\rho = (x''_0, \xi''_0)$  si  $q = (x' = 0, \xi', x''_0, \xi''_0) \in \pi^{-1}(\rho \cap \text{Car } P)$ , on a d'après (20),  $\xi' - \nu_0(x''_0, \xi''_0) \neq 0$ , donc  $\frac{\partial p}{\partial \xi'}(q) \neq 0$  et la bicaractéristique de  $p$  issue de  $q$  quitte l'arête.

On remarquera que pour  $\rho \in S_g^0$ ,  $H_g(\rho) = H_p(\rho)$  ( $H_p$  étant le champ hamiltonien de  $p$ ), pour  $\rho \in S_g^2$ , (voir (20))  $\tilde{H}_g(\rho) = -H_{R_0}(\rho)$  en identifiant  $H_g(\rho) \in T_\rho S_g^2$  à un vecteur tangent à  $T^*L$ , et que pour  $\rho \in S_g^1 \cap T^*\Delta_1$ ,  $H_g(\rho)$  s'identifie au champ glancing défini par  $p$  sur  $S_g^1 \cap T^*\Delta_1$ .

La fibration  $\pi^{-1}(T^*L) \rightarrow T^*L$  admet la section canonique  $\rho \mapsto (\rho, \nu_0(\rho))$ , où  $(\rho, \nu_0(\rho))$  est le point de la fibre  $\pi^{-1}(\rho)$  où  $p(x, \xi)$  atteint son minimum, d'où un isomorphisme  $j$  de fibrations

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} T_L^* \mathbb{R}^n \times_L T^*L & \xrightarrow{j} & \pi^{-1}(T^*L) \\ & \searrow & \swarrow \\ & T^*L & \end{array}$$

$$j((x'', \eta'), (x'', \xi'')) = (x'', \eta' + \nu_0(x'', \xi''), \xi'')$$

Les fibres du fibré vectoriel  $T_L^* \mathbb{R}^n \rightarrow L$  sont munies de la métrique définie par  $p(x, \xi) |_{T_L^* \mathbb{R}^n}$ . On munira le fibré normal  $T_L \mathbb{R}^n$  de la métrique duale; on notera  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\|\cdot\|$ , les produits scalaires et normes sur ces espaces et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $T_L^*$  et  $T_L$ . Dans le système de coordonnées précédents, la matrice du produit scalaire sur la fibre de  $T_L^* \mathbb{R}^n$  (resp.  $T_L \mathbb{R}^n$ ) au dessus de  $x'' \in L$  est  $A_{(0, x'')}$  (resp.  $A_{(0, x'')}^{-1}$ ).

On note  $(e_1, e_2)$  la base des fibres de  $T_L \mathbb{R}^n$  telle que  $e_i$  soit l'image de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  par la projection  $T \mathbb{R}^n |_L \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On remarquera que les demi-droites  $\mathbb{R}_+ e_i$  sont intrinsèques, i.e. indépendantes du système de coordonnées choisi. On notera  $(e_1^*, e_2^*)$  la base duale des fibres de  $T_L^* \mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire  $e_i^* = dx_i$ .

Pour  $x'' \in L$ , on définit l'angle des faces  $\Delta_1, \Delta_2$  du dièdre en  $x''$ ,  $\theta(x'')$  par

$$(26) \quad \theta(x'') = \text{angle} (\mathbb{R}_+ e_1, \mathbb{R}_+ e_2) \in ]0, \pi[$$

c'est-à-dire  $(e_1 | e_2) = \cos \theta(x'') \|e_1\| \|e_2\|$ .

Notons  $\hat{\pi}_i$  les projections  $T^* \tilde{\Delta}_i |_L \rightarrow T^*L$ ,  $\pi_i$  les projections  $T^* \mathbb{R}^n |_{\tilde{\Delta}_i} \rightarrow T^* \tilde{\Delta}_i$  et posons pour  $\rho \in T^*L$

$$(27) \quad F_{i, \rho} = \pi_i(\pi^{-1}(\rho)) = \hat{\pi}_i^{-1}(\rho) \quad i = 1, 2 .$$

Pour  $\rho \in \Sigma_b \cap T^*L = S^2$ , on posera

$$(28) \quad Z_\rho^i = \pi_i(\pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(P)) \quad i = 1, 2 .$$

Alors pour  $\rho \in S_g^2$ ,  $Z_\rho^i$  est réduit à un point, et pour  $\rho \in S_t^2$  est un intervalle qui s'écrit dans le système de coordonnées précédent

$$(29) \quad \begin{cases} Z_\rho^1 = \left\{ (0, x''; \xi_1, \xi''), \quad \rho = (x'', \xi''), \quad \xi_1 \in [a_1^-(\rho), a_1^+(\rho)] \right\} \\ Z_\rho^2 = \left\{ (0, x''; \xi_2, \xi''), \quad \rho = (x'', \xi''), \quad \xi_2 \in [a_2^-(\rho), a_2^+(\rho)] \right\} \end{cases}$$

avec  $\xi_1 \in [a_1^-(\rho), a_1^+(\rho)]$  ssi l'équation du second degré en  $\zeta_2$ ,  $p(0, x''; \xi_1, \zeta_2, \xi'') = 0$  possède une racine réelle. On a  $\xi_1 = a_1^-(\rho)$  (resp.  $a_1^+(\rho)$ ) lorsque cette équation possède une racine double  $\zeta_2^-(\rho)$  (resp.  $\zeta_2^+(\rho)$ ).

La bicaractéristique de  $p$  issue de  $q_- = (0, x''; a_1^-(\rho), \zeta_2^-(\rho), \xi'')$  (resp.  $q_+ = (0, x''; a_1^+(\rho), \zeta_2^+(\rho), \xi'')$ ) est alors tangente à  $\tilde{\Delta}_1$  et rentre dans  $x_1 < 0$  (resp.  $x_1 > 0$ ); en effet soit  $A = A_{(0, x'')}$  et  $\varepsilon_1(\rho) \in (T_L^* \mathbb{R}^n)_{x''}$  tel que

$$(30) \quad a_1^+(\rho) dx_1 + \zeta_2^+(\rho) dx_2 = \varepsilon_1(\rho) + \nu_0(\rho) .$$

Puisque  $p(q_\pm) = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \xi_2}(q_\pm) = 0$ , on a

$$(31) \quad \|\varepsilon_1(\rho)\|^2 = R_0(\rho) \quad \langle e_2^*, A(\varepsilon_1) \rangle = 0$$

où  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  est considéré comme application de  $T_L^*$  dans  $T_L$ , d'où il résulte

$$(32) \quad a_1^-(\rho) dx_1 + \zeta_2^-(\rho) dx_2 = -\varepsilon_1(\rho) + \nu_0(\rho) .$$

Si  $\varepsilon_1 = u e_1^* + v e_2^*$ , on a  $bu + dv = 0$  et  $A(\varepsilon_1) = \alpha_1 e_1$  avec  $\alpha_1 = \langle e_1^*, A(\varepsilon_1) \rangle = au + bv$ . Comme  $2\varepsilon_1 = (a_1^+ - a_1^-) dx_1 + (\zeta_2^+ - \zeta_2^-) dx_2$ , on a  $u = \frac{a_1^+ - a_1^-}{2} > 0$  donc aussi  $\alpha_1 = \frac{ad - b^2}{d} u > 0$  et par suite

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(q_+) = 2 \langle e_1^*, A(\varepsilon_1) \rangle = 2\alpha_1 > 0 .$$

On définit de même relativement à  $Z_\rho^2$ ,  $\zeta_1^\pm(\rho)$ , et  $\varepsilon_2(\rho) = \zeta_1^+(\rho) dx_1 + a_2^+(\rho) dx_2 - \nu_0(\rho)$ . On a

$$(33) \quad \|\varepsilon_2(\rho)\|^2 = R_0(\rho), \quad \langle e_1^*, A(\varepsilon_2) \rangle = 0, \quad A(\varepsilon_2) = \alpha_2 e_2, \quad \alpha_2 > 0 .$$

On en déduit

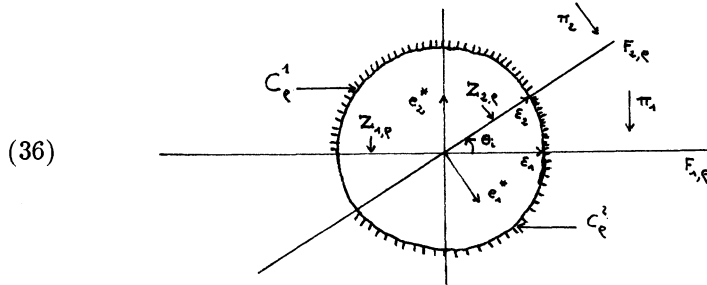
$$(34) \quad \text{angle}(\varepsilon_1(\rho), \varepsilon_2(\rho)) = \theta(x'')$$

puisque  $(\varepsilon_1 | \varepsilon_2) = {}^t \varepsilon^1 A \varepsilon^2 = \alpha_1 \alpha_2 {}^t e_1 A^{-1} e_2 = \alpha_1 \alpha_2 \cos \theta \|e_1\| \|e_2\|$  et  $\alpha_i \|e_i\| = \|\varepsilon_i\|$ . On remarquera que la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  ainsi construite de  $(T_L^*)_{x''}$  est indépendante du système de coordonnées choisi (voir (30)).

Alors pour  $\rho = (x'', \xi'') \in S_i^2$ , par (25),  $\pi^{-1}(\rho)$  est identifié à  $(T_L^*)_{x''}$ , et  $\pi^{-1}(\rho) \cap \text{car}(P)$  au cercle  $C_\rho = \{\eta' \in (T_L^*)_{x''}; \|\eta'\|^2 = R_0(\rho)\}$ ; par la construction précédente on peut aussi identifier  $Z_\rho^1$  au segment  $[-1, +1]\varepsilon_1(\rho)$  par  $(0, x'', \xi_1 = ta_1^- + (1-t)a_1^+, \xi'') \rightarrow (1-2t)\varepsilon_1$  et  $F_\rho^1$  à  $\mathbb{R}\varepsilon_1(\rho)$ . Rappelons que  $\pi_1$  est la projection  $\pi^{-1}(\rho) \rightarrow F_{1,\rho}$ ; avec les identifications précédentes, par (29) et (30) on a  $\pi_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ ; par (31)  $e_2^*$  est perpendiculaire à  $\varepsilon_1$  et  $\pi_1(e_2^*) = dx_2|_{T\Delta_1} = 0$  donc  $\pi_1$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}\varepsilon_1$ . De même en identifiant  $Z_\rho^2$  à  $[-1, +1]\varepsilon_2(\rho)$ ,  $\pi_2$  est la projection orthogonale sur  $\mathbb{R}\varepsilon_2$ . On posera

$$(35) \quad \begin{cases} C_\rho^1 = \{ \eta' \in C_\rho \quad (\eta' | e_2^*) \geq 0 \} \\ C_\rho^2 = \{ \eta' \in C_\rho \quad (\eta' | e_1^*) \geq 0 \} \end{cases}$$

Comme on a  $(\varepsilon_i | e_i^*) = \alpha_i > 0$ , on a  $\pm\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C_\rho^1, \pm\varepsilon_2, \varepsilon_1 \in C_\rho^2$  et la figure suivante dans le plan euclidien orienté  $(T_L^*)_{x''}$ .



On remarquera que les bicaractéristiques de  $p$  issues d'un point intérieur de  $C_\rho^1$  (resp.  $C_\rho^2$ ) rentre dans  $x_2 > 0$  (resp.  $x_1 > 0$ ).

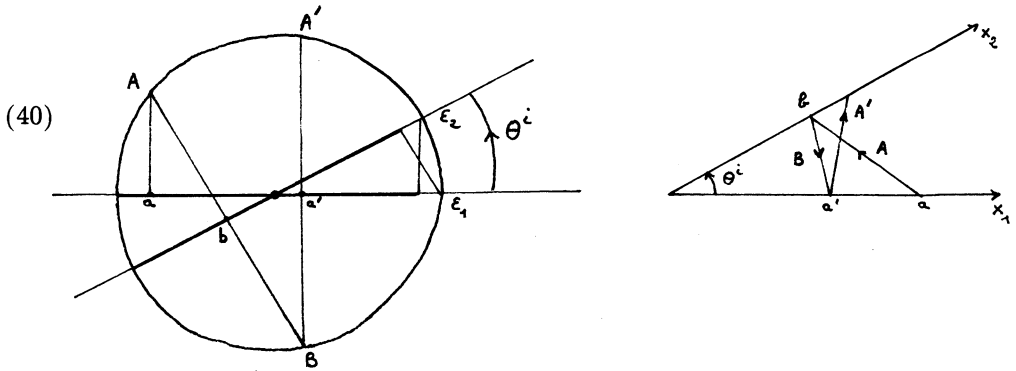
On définit les arcs et segments

$$(37) \quad C_\rho^{1,+} = (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset C_\rho^1; C_\rho^{2,+} = (-\varepsilon_2, \varepsilon_1) \subset C_\rho^2$$

$$(38) \quad Z_\rho^{1,+} = \pi_1(C_\rho^{1,+}); Z_\rho^{2,+} = \pi_2(C_\rho^{2,+})$$

dont la signification est la suivante : Soit  $P_\rho(D') = P((0, x''); D', \xi'')$  l'opérateur à coefficients constant sur  $\mathbb{R}^2$  obtenu en gelant les coefficients de  $P$ . Alors une bicaractéristique de  $P_\rho$  issue d'un point  $(x_1 > 0, x_2 = 0, \eta')$  rentrante dans  $x_2 > 0$  rencontre dans l'avenir  $x_1 = 0$  ssi  $\eta' \in C_\rho^{1,+} \setminus \{\varepsilon_2\}$ . Enfin on définit les applications  $T_\rho^{2,1} : Z_\rho^{1,+} \rightarrow Z_\rho^2, T_\rho^{1,2} : Z_\rho^{2,+} \rightarrow Z_\rho^1$  par

$$(39) \quad \begin{cases} T^{2,1}(a) = b \iff \exists A \in C_\rho^{1,+} & \pi_1(A) = a \quad \pi_2(A) = b \\ T^{1,2}(b) = a' \iff \exists B \in C_\rho^{2,+} & \pi_2(B) = b \quad \pi_1(B) = a' \end{cases}$$



Les applications  $\mathcal{T}^{2,1}$ ,  $\mathcal{T}^{1,2}$  représentent avec les identifications faites, le billard pour l'opérateur à coefficients gelés  $P_\rho$  dans le cas intérieur  $M = M^i$ . En particulier  $\mathcal{T}^{1,2} \circ \mathcal{T}^{2,1}$  s'interprète comme la rotation d'angle  $-2\theta$  sur  $C_\rho^{1,+}$  (voir fig. 40) et on a

$$(41) \quad \sup \left\{ j; (\mathcal{T}^{1,2} \circ \mathcal{T}^{2,1})^j(a) \text{ existe} \right\} \leq \frac{\pi}{2\theta}$$

et donc le nombre total de réflexion pour une bicaractéristique de  $P_\rho$  intérieure au dièdre est borné.

On posera :

$$(42) \quad (\mathcal{T}^{1,2} \circ \mathcal{T}^{2,1})^j(-\varepsilon_1) = \gamma_j^1 \varepsilon_1; (\mathcal{T}^{2,1} \circ \mathcal{T}^{1,2})^j(-\varepsilon_2) = \gamma_j^2 \varepsilon_2 .$$

Les suites finies  $\gamma_j$  sont strictement croissantes et on a

$$(43) \quad (\mathcal{T}^{1,2} \circ \mathcal{T}^{2,1})^j(Z_\rho^{1,+}) = [\gamma_j^1, 1] \varepsilon_1 \quad \text{pour } j \geq 1 .$$

### I.3. Rayons

Rappelons que  $\Sigma_b = \pi(\text{car } P)$  et  $Z = \tilde{\pi}(\text{car } P)$  sont identifiés et que  $Z$  est fermé dans  ${}^b\dot{T}^*M$  qui est une variété différentielle.

**Définition 2.** Un rayon est une application  $\gamma$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\Sigma_b \simeq Z$  continue telle que pour tout  $t \in I$  on ait

$$(44) \quad \begin{cases} - \text{Si } \gamma(t) \in \mathcal{G}, \quad \gamma \text{ est dérivable en } t \text{ et } \dot{\gamma}(t) = H_g(\gamma(t)) \\ - \text{Si } \gamma(t) \in \mathcal{T}, \gamma(t) \in S_t^i, \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que} \\ \quad \text{pour } 0 < |t-s| < \varepsilon, \quad s \in I, \text{ on ait } \gamma(s) \notin S^i . \end{cases}$$

On dira que  $\gamma(t)$  est de type 1 (resp. type 2) si  $\gamma(t) \in \dot{T}^*M \cup \dot{T}^*\Delta_1$  (resp.  $\dot{T}^*M \cup \dot{T}^*\Delta_2$ ) et que  $\gamma$  est de type 1 (ou 2) si  $\gamma(t)$  est de type 1 (ou 2) pour tout  $t \in I$ .

◇

Rappelons que nous avons choisi un système de coordonnées  $\{x\} = (x_1, x_2, x'')$  qui redresse le dièdre et dans lequel  $P$  a pour symbole

$$(45) \quad p = {}^t(\xi' - \nu) A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'') .$$

Nous choisissons également un système de coordonnées  $\{y\} = (y, y_2, y'')$

$$(46) \quad y_2 = x_2 G_2(x), \quad y_1 = x_1 + x_2 G_1(x), \quad y'' = x'' + x_2 G''(x)$$

dans lequel  $\tilde{\Delta}_1$  a pour équation  $y_2 = 0$ , conservant l'orientation  $y_2 > 0 \leftrightarrow x_2 > 0$ , avec  $\Delta_1 = \{y_2 = 0, y_1 > 0\}$  et tel que le symbole de  $P$  s'écrive

$$(47) \quad p = \eta_2^2 - r(y, \eta_1, \eta'') .$$

On posera  $r_0 = r|_{y_2=0}$  de sorte qu'on a

$$(48) \quad S_t^1 \cap \Delta_1 = \{y_1 > 0, r_0 > 0\}; \quad S_g^1 \cap \Delta_1 = \{y_1 > 0, r_0 = 0\} .$$

Remarquons d'abord que si  $\gamma$  est un rayon et  $\gamma(t) \notin L$ , par exemple  $\gamma(t)$  de type 1, alors  $\gamma$  est près de  $t$  un rayon (analytique) au sens de  $[Sj]$ . En effet, seul le cas  $\gamma(t) \in S_g^1$  est à considérer; on a dans le système de coordonnées  $\{y\}$ , près de  $\text{pr}(\gamma(t))$

$$(49) \quad T^* \mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{\pi}} {}^b T^* M : (y, \eta) \longmapsto (y; \eta_1, \eta'', w = y_2 \eta_2)$$

et donc la définition 2 d'un rayon, qui est intrinsèque signifie exactement en  $\gamma(t) = (y_1 > 0; y_2 = 0, y'', \eta_1, \eta'', w = 0)$  avec  $r_0(y_1, y''; \eta_1, \eta'') = 0$

$$(50) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{-\partial r}{\partial \eta_1}, & \dot{y}_2 = 0, & \dot{y}'' = \frac{-\partial r}{\partial \eta''} \\ \dot{\eta}_1 = \frac{\partial r}{\partial y_1}, & \dot{\eta}'' = \frac{\partial r}{\partial y''}, & \dot{w} = 0 \end{cases}$$

ce qui est bien la définition de  $[Sj]$ , la relation  $\dot{w} = 0$  étant entraînée par  $y_2 = \dot{y}_2 = 0$  puisque  $|\eta_2| = r^{1/2}$  est borné.

Si  $\gamma(t)$  est un rayon de type 1 dans  $x_1 > 0$ , les coordonnées  $y_1, y'', \eta_1, \eta''$  sont dérivables,  $y_2$  est continu, dérivable à gauche et à droite et on a

$$(51) \quad \dot{y}_1 = -\frac{\partial r}{\partial \eta_1}, \quad \dot{y}'' = \frac{-\partial r}{\partial \eta''}, \quad \dot{\eta}_1 = \frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad \dot{\eta}'' = \frac{\partial r}{\partial y''}, \quad |\dot{y}_{2,g,d}| = 2r^{1/2} .$$

De plus  $y, \eta_1, \eta'', y_2 \eta_2$  vérifient une condition Lipschitz (uniforme sur les compacts (voir MS II). Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, dérivable à droite, avec  $|f'_d(t)| \leq M$  pour tout  $t \in I$ , on a  $|f(t) - f(s)| \leq M|t - s|$  pour tout  $t, s \in I$ . Nous utiliserons également le lemme suivant.

**Lemme 1.** Soit  $f [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue, dérivable à droite,  $\sigma, C_0, C_1 \geq 0$  tels que  $f(0) \leq \sigma^2$ ,  $\dot{f}_d(t) \leq C_0 f^{1/2}(t) + C_1 t$  pour  $t \in [0, t_0]$ . Alors on a

$$(52) \quad f(t) \leq (\sigma + A_0 t)^2 \quad \text{pour } t \in [0, t_0] \quad \text{dès que } 2A_0^2 > C_0 A_0 + C_1, \quad A_0 > 0 .$$

PREUVE. On peut supposer  $\sigma > 0$ . Soit  $A = \{t \in [0, t_0], \forall s \in [0, t], f(s) \leq (\sigma + A_0 s)^2\}$ . Alors  $A$  est de la forme  $[0, t_*]$ ; si  $t_* < t_0$ , il existe une suite  $t_n > t_*$ ,  $t_n \rightarrow t_*$ ,  $f(t_n) > (\sigma + A_0 t_n)^2$ , et  $f(t_*) = (\sigma + A_0 t_*)^2$  d'où  $\frac{f(t_n) - f(t_*)}{t_n - t_*} > 2\sigma A_0 + A_0^2(t_n + t_*)$  donc  $f'_d(t_*) \geq 2A_0(\sigma + A_0 t_*)$ . Or on a aussi  $f'_d(t_*) \leq C_0(\sigma + A_0 t_*) + C_1 t_*$ , ce qui contredit  $\sigma(2A_0 - C_0) > 0$  puisque  $t_*(2A_0^2 - C_1 - C_0 A_0) \geq 0$ .  $\diamond$

**Lemme 2.** Soit  $\gamma : ]0, \varepsilon[ \rightarrow Z$  un rayon,  $\rho = \gamma(0) = (x_0'', \xi_0'') \in S_t^2$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que sur  $]0, \varepsilon[$   $\gamma$  est soit de type 1, soit de type 2.

PREUVE. On supposera qu'on est dans le cas intérieur  $M = M^i$ , le cas extérieur  $M = M^e$  étant similaire et plus simple. Soit  $J = \{t \in ]0, t_0[, \gamma(t) \in \Delta_1\}$ ; quitte à permuter les faces  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on peut supposer que  $t = 0$  est adhérent à  $J$ , car sinon on a  $\gamma(t) \in \dot{T}^*M$  pour  $t > 0$  petit. Pour  $t \in J$ , les coordonnées  $x(t), \xi''(t)$  et  $\xi_1(t)$  sont bien définies, car  $x_1(t) > 0$ .

Soit  $\mathcal{A} = \left\{ \alpha \in [0, 1], \text{ il existe une suite } t_n \in J, t_n \rightarrow 0, \text{ et } \{(x(t_n), \xi_1(t_n), \xi''(t_n)) \rightarrow (0, x_0'', \alpha a_1^-(\rho) + (1 - \alpha)a_1^+(\rho), \xi_0'')\} \right\}$  (où  $a_1^\pm(\rho)$  sont définis en (29)). Le point  $(0, x_0'', a_1^\pm, \xi_0'')$  est dans la région glancing de  $T^*\tilde{\Delta}_1$ , et la bicaractéristique de  $p$  issue de ce point rentre strictement dans  $\pm x_1 > 0$ ). Alors  $\mathcal{A}$  est fermé et  $1 \notin \mathcal{A}$  car pour  $\beta > 0$  petit, un rayon  $g$  défini sur  $[0, t_n]$  vérifiant  $g(t_n) = (x_1 > 0, x_2 = 0, x'', \xi_1, \xi'')$ ,  $|\xi'' - \xi_0''| + |\xi_1 - a_1^-(\rho)| + |x_1| + |x'' - x_0''| < \beta^2$  est un rayon (analytique) associé à la variété de bord  $\Delta_1$  sur  $[t, t_n]$ , si on a  $x_1 > 0$  sur  $[t, t_n]$ . Or sur un tel rayon, on a dans les coordonnées  $\{y\}$ ,  $|\dot{y}_1(s) - \dot{y}_1(t_n)| \leq C_0 |s - t_n|$ ,  $|\dot{y}_{2,g,d}| = 2r^{1/2}$ ,  $|\dot{r}_{g,d}| \leq C_0 r^{1/2}$ ,  $r|_{s=t_n} \leq C_0 \beta^2$ , donc par le lemme 1,  $r(s) \leq \text{Cte}(\beta + |s - t_n|)^2$ , d'où  $|y_2(s)| \leq \text{Cte}|s - t_n|(\beta + |s - t_n|)$  et puisque  $\frac{\partial r_0}{\partial n}(0, x_0'', a_1^-(\rho), \xi_0'') = \nu > 0$ ,  $\dot{y}_1(s) \leq \frac{-\nu}{2}$  (si  $n$  grand,  $\beta$  petit) et  $x_1(s) = y_1(s) + O(|y_2(s)|)$  ne peut s'annuler dans  $[0, t_n]$ . Soit donc  $\alpha_0 = \max(\alpha \in \mathcal{A})$  et supposons  $\alpha_0 > 0$ . Soit  $t_n \rightarrow t_0$  une suite associée à  $\alpha_0$ ; les points  $\gamma(t_n)$  sont dans  $S_t^1$  et restent à une distance strictement positive de  $S_g^1$ ; les bicaractéristiques de  $p$  issues de  $\gamma(t_n)$  sont donc uniformément transverses à  $\Delta_1$  et ne rencontrent pas  $\Delta_1$  pour  $0 < |s - t_n| < \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  indépendant de  $n$ . Elles doivent donc rencontrer  $\Delta_2$  en  $t'_n$ ,  $0 < t'_n < t_n$ , sinon  $O$  ne serait pas adhérent à  $J$ . Soit  $\beta_n \alpha_2^-(\rho) + (1 - \beta_n) a_2^+(\rho)$  la coordonnée  $\xi_2$  en ces points. Les valeurs d'adhérence  $\mathcal{B}$  de la suite  $\beta_n$  sont dans  $[0, 1]$ ; or le même raisonnement que précédemment montre  $1 \notin \mathcal{B}$  (et  $0 \notin \mathcal{B}$ ) car un rayon issu de  $\gamma(t'_n)$  avec  $\beta_n \simeq 1$  ( $\simeq 0$ ) ne rencontre pas  $\Delta_1$  dans le passé (dans l'avenir) et donc  $\beta_n$  reste dans un compact de  $]0, 1[$  pour  $n$  grand. La bicaractéristique de  $p$  réfléchie sur  $\Delta_2$  en  $\gamma(t'_n)$

doit alors rencontrer à nouveau  $\Delta_1$  en  $t''_n$ ,  $0 < t''_n < t'_n$ . Si  $\alpha_n a_1^-(\rho) + (1 - \alpha_n) a_1^+(\rho)$  est la coordonnée  $\xi_1$  en  $\gamma(t''_n)$ , l'argument précédent prouve que  $\alpha_n$  reste dans un compact de  $]0, 1[$ . Si  $\alpha_\infty$  est une valeur d'adhérence de la suite  $\alpha_n$ , les bicaractéristiques construites entre  $t''_n, t'_n, t_n$  étant strictement transverses à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on doit avoir  $(1 - 2\alpha_0)\varepsilon_1(\rho) = \mathcal{T}^{1,2} \circ \mathcal{T}^{2,1}((1 - 2\alpha_\infty)\varepsilon_1(\rho))$  donc  $1 - 2\alpha_\infty < 1 - 2\alpha_0$  ce qui contredit la maximalité de  $\alpha_0$  car  $\alpha_\infty \in \mathcal{A}$ . Donc  $\mathcal{A}$  est réduit à  $\{0\}$ , et si  $t_n \in J$ ,  $t_n \rightarrow t_0$ , un rayon issu de  $\gamma(t_n)$  ne rencontre pas  $\Delta_2$  dans l'avenir, ce qui prouve le lemme.  $\diamond$

**Lemme 3.** Soit  $\gamma : I \rightarrow Z$  un rayon; alors  $\gamma$  est dérivable à gauche et à droite en tout point  $t$  de  $I$  et

$$(53) \quad \dot{\gamma}_g(t) \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}^- \quad \dot{\gamma}_d(t) \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}^+ .$$

Réciproquement, une courbe  $\gamma : I \rightarrow Z$  continue, dérivable à gauche et à droite vérifiant (53) est un rayon.

PREUVE. La réciproque résulte de (23) et (24). Vérifions l'assertion relative aux dérivées à droite. On peut supposer  $\gamma(t_0) \in \mathcal{T}$ . Si  $\gamma(t_0) \in S_i^+$  et  $\pi^{-1}(\gamma(t_0)) \cap \text{car } P = \{q_+, q_-\}$ ,  $\text{pr}(H_p(q_+)) \in \overline{T^*M}$ , on a  $\gamma(t) = \tilde{\pi}(g(t))$  pour  $t > t_0$ ,  $t \sim t_0$  où  $g$  est la bicaractéristique de  $p$  issue en  $t_0$  de  $q_+$ , donc  $\dot{\gamma}_d(t_0) = d\tilde{\pi}(H_p(q_+)) = \mathcal{V}_{\gamma(t_0)}^+$ . Si  $\gamma(t_0) \in S_i^2$ , par le lemme 2,  $\gamma$  est par exemple de type 1 sur  $]t_0, t_0 + \varepsilon[$  donc soit  $\gamma(t) \in T^*M$  pour  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$  et on conclut comme précédemment, soit il existe un rayon  $g$  (analytique) de la variété de bord  $\tilde{\Delta}_1$ , contenu dans  $x_1 > 0$  qui coïncide avec  $\gamma$  sur  $]t_0, t_0 + \varepsilon[$ , et  $g$  est prolongeable en  $t_0$ , et avec les notations du lemme 2, la coordonnée  $\xi_1$  de  $g$  en  $t_0$  est  $a_1^+(\rho)$ . Donc les coordonnées  $y, \eta_1, \eta''$  de  $g$  sont dérivables en  $t_0$  et vérifient (50), et le lemme résulte de  $\xi_1 = \eta_1 + y_2 o(1)$ ,  $\xi'' = \eta'' + y_2 o(1)$ ,  $x_2 \xi_2 = y_2 o(1)$ ,  $y_2 = \dot{y}_2 = 0$ .  $\diamond$

Comme les ensembles  $\mathcal{V}_\rho^+$  sont bornés dans  $T({}^bT^*M)$  sur les compacts de  $Z$  on a donc :

**Lemme 4.** Pour tout compact  $K$  de  $Z$ , il existe  $C_0$ , tel que pour tout rayon  $\gamma : I \rightarrow K$  on ait  $\text{dist}(\gamma(t), \gamma(s)) \leq C_0 |t - s|$  (où  $\text{dist}$  désigne une distance sur  ${}^bT^*M$ ).

Il résulte aussi du lemme 3 et de  $p = {}^t(\xi' - \nu)A(\xi' - \nu) - R$ , que sur un rayon les coordonnées  $x$  et  $\xi''$  vérifient

$$(54) \quad \begin{cases} |\dot{x}'_{g,d}| \in O(R^{1/2}) \\ \left| \dot{x}''_{g,d} + \frac{\partial R}{\partial \xi''}(x, \xi'') \right| \in O(R^{1/2}) \\ \left| \dot{\xi}''_{g,d} - \frac{\partial R}{\partial x''}(x'', \xi'') \right| \in O(R^{1/2} |\xi''| + R) \end{cases}$$



où le  $O$  est uniforme pour  $x$  restant dans un compact. Pour  $\rho \in Z$  on note  $B(\rho, r) = \{\rho' \in Z; \text{dist}(\rho', \rho) \leq r\}$  avec  $\text{dist}(\rho', \rho) = \|\rho - \rho'\|$ , où on a posé pour  $\rho = (x, \xi'', v_1, v_2) \in {}^bT^*M$ ,  $\|\rho\| = \max(|x'|, |x''|, |\xi''|, |v_1|, |v_2|)$ .

**Lemme 5.** Soit  $K$  un compact de  $Z$ . Il existe  $\sigma_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$  et  $A_0 > 0$  tels que pour tout rayon  $\gamma : I \rightarrow K$ , et tout  $\sigma \in [0, \sigma_0]$ , si pour un  $s \in I$  et un  $\rho$  dans  $S_g^2$ ,  $\gamma(s) \in B(\rho, \sigma^2)$  alors pour  $s + t \in I$ ,  $|t| \leq t_0$ , on a

$$(55) \quad \gamma(s + t) \in B\left(\exp tH_g(\rho), (\sigma + A_0|t|)^2\right)$$

où  $\exp tH_g(\rho)$  est la courbe intégrale de  $H_g$  issue de  $\rho$ .

PREUVE. On peut supposer  $s = 0$  et on a  $\rho = (x_0'', \xi_0'') \in T^*L$  avec  $R_0(x_0'', \xi_0'') = 0$ . Soit  $x(t)$ ,  $\xi''(t)$ ,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  les coordonnées sur  $\gamma(t)$  et  $R(t) = R(x(t), \xi''(t)) \geq 0$ . D'après (54) on a  $\dot{R}_{g,d} = \dot{x}' \frac{\partial R}{\partial x'} + \dot{x}'' \frac{\partial R}{\partial x''} + \dot{\xi}'' \frac{\partial R}{\partial \xi''} \in O(R^{1/2})$  et  $R(0) = R(x'(0), x''(0), \xi''(0)) \in O(\sigma^2)$  donc par le lemme 1,  $R(t) \leq (\sigma + A_0|t|)^2$ . Comme  $p = {}^t(\xi' - \nu)A(\xi' - \nu) - R$  et  $\dot{\gamma}_{g,d} \in \mathcal{V}^\mp$ , on a  $|\dot{x}'_{g,d}(t)| \in O(\sigma + |t|)$  et  $|x'(0)| \leq \sigma^2$  implique  $|x'(t)| \leq \sigma^2 + O(\sigma|t| + t^2)$ . Soit  $(y''(r), \eta''(r)) = \exp -tH_{R_0}(\rho)$ ; on a  $|\dot{x}''_{g,d} - \dot{y}''| + |\dot{\xi}''_{g,d} - \dot{\eta}''| \in O(|x'(t)| + R^{1/2} + |x'' - y''| + |\xi'' - \eta''|)$  et  $|x''(0) - y''(0)|, |\xi''(0) - \eta''(0)| \leq \sigma^2$ , d'où  $\max(|x''(t) - y''(t)|, |\xi''(t) - \eta''(t)|) \leq \sigma^2 + O(\sigma|t| + t^2)$ . Enfin, par (53), il existe  $(x, \xi) \in \pi^{-1}(\dot{\gamma}(t)) \cap \text{car } P$  tel que  $\dot{v}_{1,g,d} = x_1(\frac{-\partial p}{\partial x_1}) + \frac{\partial p}{\partial \xi_1} \xi_1$ , donc  $|\dot{v}_{1,g,d}| \in O(\sigma + |t|)$  et  $|v_1(0)| \leq \sigma^2$  entraîne  $|v_1(t)| \leq \sigma^2 + O(\sigma|t| + t^2)$  d'où le lemme.  $\diamond$

On a également le lemme analogue pour  $S_g^1$ , à savoir :

**Lemme 6.** Soit  $K$  un compact de  $Z \cap (x_1 > 0)$ . Il existe  $\sigma_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$ ,  $A_0 > 0$  tels que pour tout rayon  $\gamma : I \rightarrow K$  (donc de type 1) et tout  $\sigma \in [0, \sigma_0]$ , si pour un  $s \in I$  et un  $\rho \in S_g^1$ ,  $\sigma(s) \in B(\rho, \sigma^2)$  alors pour  $s + t \in I$ ,  $|t| \leq t_0$  on a

$$(56) \quad \gamma(s + t) \in B(\exp tH_g(\rho), (\sigma + A_0|t|)^2) .$$

Ce lemme est démontré dans (MSII) et reste valable pour un rayon de la variété de bord  $\tilde{\Delta}_1$  (sans l'hypothèse  $x_1 > 0$ ) en remplaçant  $Z$  et  $H_g$  par les notions correspondantes.

**Lemme 7.** Soit  $K$  un compact de  $Z$  et  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow K$  un rayon. Alors  $\gamma$  se prolonge à  $[a, b]$ .

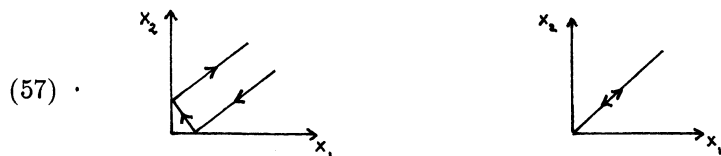
PREUVE. D'après le lemme 4  $\lim_{t \rightarrow a} \gamma(t) = \rho \in K$  existe. Si  $\rho \notin S^2$ , le lemme résulte de (MSII). Si  $\rho \in S_g^2$ , puisque  $\dot{\gamma}_d(t) \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}^+$  pour  $t > a$ , on a pour  $t \rightarrow a$ ,  $R(\gamma(t)) \rightarrow 0$

donc  $\dot{x}'_d(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{x}''_d(t) \rightarrow \frac{-\partial R_0}{\partial \xi''}(\rho)$ ,  $\dot{\xi}''_d(t) \rightarrow \frac{\partial R_0}{\partial x''}(\rho)$ , donc  $x'$ ,  $x''$ ,  $\xi''$  sont dérivables à droite en  $a$  avec les bonnes dérivées. Comme  $v_1(t) = (x_1 \xi_1)(t)$ , et  $\xi_1|_{x_1 \neq 0}$  reste borné on a  $v_1 \rightarrow 0$  et  $\dot{v}_{1,d}(a) = 0$ . Enfin si  $\rho \in S^2_t$ , la preuve du lemme 2 entraîne qu'on peut supposer soit  $\gamma(t) \in T^*M$  pour  $t \in ]a, a + \varepsilon[$ , soit  $\gamma|_{]a, a + \varepsilon[}$  est de type 1, contenu dans  $x_1 > 0$  et  $\lim \xi_1(t) = a_1^+(\rho)$  donc un rayon de la variété de bord  $\hat{\Delta}_1$  qui est prolongeable d'après MSII, et le lemme en résulte.

**Lemme 8.** Soit  $K$  un compact de  $Z$  et  $\gamma_n : [a, b] \rightarrow K$  une suite de rayons qui converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une courbe  $\gamma$ . Alors  $\gamma$  est un rayon.

PREUVE. Soit  $t_0 \in [a, b]$ ,  $\rho = \gamma(t_0)$ . Si  $\rho \in T^*M$  ou  $S^1_t$ , le résultat est clair. Si  $\rho \in S^2_g$  (ou  $S^1_g$ ) cela résulte du lemme 5 (ou du lemme 6) car  $\gamma(t) - \exp(t - t_0)H_g(\rho) = \gamma(t) - \gamma_n(t) + O\left[|t - t_0|^2 + \text{dist}(\gamma(t_0), \gamma_n(t_0))\right]$  pour  $n$  grand, le  $O$  étant uniforme en  $n$ ,  $t \sim t_0$ . Il reste donc à étudier le cas  $\rho \in S^2_t$  et comme dans la preuve du lemme 2, on se placera dans le cas intérieur  $M = M^i$ , le cas extérieur étant plus simple. Pour  $\varepsilon_0 > 0$  petit et  $n$  grand  $\{t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0], \rho_n(t) \in S^2\} = \mathcal{S}_n$  contient au plus un point, car d'après la preuve du lemme 2, puisque  $\text{dist}(\rho_n(t), S^2_g) \geq \nu > 0$ , il existe  $c_0 > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $\rho_n(t) \in S^2_t$ ,  $\text{dist}(\rho_n(t'), S^2) \geq c_0|t' - t|$  pour  $|t' - t| \leq \alpha$ . Quitte à diminuer  $\varepsilon_0$  et à remplacer éventuellement  $\rho_n$  par  $\tilde{\rho}_n(t) = \rho_n(t - t_n)$  pour une suite  $t_n \rightarrow t_0$  convenable, et à prendre une suite extraite de  $\rho_n$ , on peut supposer  $\mathcal{S}_n = \emptyset$ . Posons pour  $i = 1, 2$ ,  $J_n^i = \{t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0], \rho_n(t) \in T^*\Delta_i\}$ . Si  $J_n^1 = J_n^2 = \emptyset$  pour un choix de  $\varepsilon_0 > 0$  et  $n$  assez grand, quitte à extraire une sous-suite de  $\rho_n$ , on a  $\rho_n(t_0) \rightarrow \tilde{\rho} \in \pi^{-1}(\rho) \cap \text{car } P$ ,  $H_p(\tilde{\rho}) \in T\overline{M}$ , et pour  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ ,  $\rho_n(t) = \exp(t - t_0)H_p(\rho_n(t_0))$  donc  $|x'_n(t) - x'_n(t_0)| \geq c_0|t - t_0|$  avec  $c_0$  indépendant de  $n$  puisque  $\dot{x}'_n(t)$  reste proche du vecteur fixe  $\frac{\partial p}{\partial \xi'}(\tilde{\rho}) \neq 0$ . Il en résulte sur  $\gamma(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ ,  $|x'(t)| \geq c_0|t - t_0|$  donc  $\gamma(t) \notin S^2$  pour  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon_0[$ . On peut donc supposer  $J_n^1 \neq \emptyset$  pour  $n$  grand, et qu'il existe une suite  $t_n \in J_n^1$  de limite  $t_0$ . Pour  $t \in J_n^i$ , on écrit à nouveau la coordonnée  $\xi_{i,n}(t) = \alpha_n(t)a_i^-(\rho) + (1 - \alpha_n(t))a_i^+(\rho)$ , et on pose  $\mathcal{A}^i = \{\alpha, \exists \text{ suite extraite } \eta_k \text{ et } t_{n_k} \in J_{n_k}^i, t_{n_k} \rightarrow t_0, \alpha_{n_k}(t_{n_k}) \rightarrow \alpha\}$ . Alors  $\mathcal{A}^i$  est fermé, contenu dans  $[0, 1]$  et  $1 \notin \mathcal{A}^i$  car les rayons issus d'un  $\tilde{\rho} \in T^*\Delta_1$ , proche de  $\rho$ , et de coordonnées  $\xi_1$  proche de  $a_1^-(\rho)$  ne rencontrent pas  $S^2$  dans le passé. Si  $0 \in \mathcal{A}^i$ , le même argument entraîne si  $t_{n_k} \rightarrow t_0$ ,  $\alpha_{n_k}(t_{n_k}) \rightarrow 0$ ,  $x_{1,n_k}(t) - x_{1,n_k}(t_{n_k}) \geq c_0(t - t_{n_k})$  pour  $t \geq t_{n_k}$  (voir la preuve du lemme 2), et le lemme en résulte. Il n'y a donc plus que deux cas à considérer :  $\mathcal{A}^1$  compact dans  $]0, 1[$  et  $\mathcal{A}^2 = \emptyset$ , ou bien  $\mathcal{A}^1$  et  $\mathcal{A}^2$  compacts dans  $]0, 1[$ . Dans le premier cas on choisit  $\alpha \in \mathcal{A}^1$ ; pour  $t \geq t_{n_k}$  les rayons  $\rho_{n_k}(t)$  sont uniformément transverses à  $\Delta_1$  et ne rencontrent pas  $\Delta_2$  donc  $x_{2,n_k}(t) \geq c_0(t - t_{n_k})$ , d'où le lemme. Dans le deuxième cas, le nombre de réflexion des rayons  $\rho_n$  entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  est uniformément borné, et ces rayons restent strictement transverses à  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et en particulier le temps entre deux réflexions successives tend vers zéro. Donc pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $N$  tel que pour  $n \geq N$  et  $t \in [t_0 + \eta, t_0 + \varepsilon_0]$ , on a  $\rho_n(t) \in T^*M$  et on conclut comme précédemment.  $\diamond$

**Remarque :** On notera que l'ensemble des valeurs d'adhérence des dérivées  $\dot{\rho}_{n,g,d}(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow t_0$ , peut être plus gros que  $\{\dot{\rho}_g(t_0), \dot{\rho}_d(t_0)\}$ , (ce qui ne se produit pas aux points de  $S_t^1$ ), comme on le voit sur la figure suivante



On a donc obtenu la :

**Proposition 1.** Soit  $K$  un compact de  $Z$  et  $\mathcal{R} = \mathcal{R}([a, b], K) = \{\text{rayons } \gamma : [a, b] \rightarrow K\}$ . Si  $\mathcal{R}$  est non vide, il est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

**PREUVE.** Les parties bornées de  $\mathcal{R}$  sont équicontinues d'après le lemme 4, et la proposition résulte du théorème d'Ascoli et du lemme 8.

◇

## II. FRONT D'ONDE

### II.1. Estimation a priori

Si  $B$  est un espace de Banach, on notera  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p, B)$  l'espace des applications linéaires continues de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$  dans  $B$ ; pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p, B)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$  on notera  $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ .

Si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p, B)$ , est à support dans un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^p$  (i.e.  $\langle u, \varphi \rangle = 0$  pour  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p \setminus K)$ ), la transformée de Fourier  $\hat{u}$  de  $u$  est définie par

$$(1) \quad \hat{u}(\eta) = \langle u, e^{-iy \cdot \eta} \rangle \quad (\eta \in \mathbb{C}^p) .$$

C'est une fonction entière de  $\eta \in \mathbb{C}^p$  à valeur dans  $B$ .

Pour  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $K$  compact de  $\mathbb{R}^p$ , on définit l'espace de Sobolev  $H_K^\sigma[B]$  par

$$(2) \quad H_K^\sigma[B] = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p, B), \text{support}(u) \subset K, \int_{\mathbb{R}^p} (1 + |\eta|^2)^\sigma \|\hat{u}(\eta)\|_B^2 d\eta \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_\sigma^2 < \infty \right\} .$$

On pose

$$(3) \quad \begin{cases} Q^i = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad x_1 > 0, x_2 > 0\} \\ Q^e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q^i} . \end{cases}$$

En coordonnées polaires  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ , on a

$$(4) \quad Q^i = \left\{ r > 0, \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \right. \left. [= I^i \right\}; \quad Q^e = \left\{ r > 0, \theta \in ]\frac{-3\pi}{2}, 0[ \right. \left. [= I^e \right\} .$$

Pour  $Q = Q^i$  ou  $Q^e$ , on définit les espaces de Banach  $E$ ,  $E_0$  par

$$(5) \quad E = \left\{ u(x_1, x_2) \in L^2(Q); u, \partial_r u, \frac{1}{r} \partial_\theta u \in C^0(\theta \in \bar{I}; L_r^2) \right\}$$

$$(6) \quad E_0 = \left\{ u \in E, \quad u|_{\theta \in \partial I} = 0 \quad \text{et} \quad u|_{r=0} = 0 \right\} .$$

Rappelons que  $P(x, D)$  est écrit sous la forme

$$(7) \quad P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'')$$

et on supposera ici que  $P_1$  est homogène de degré 2 en  $D'$ .

Rappelons qu'on a  $p_1(x, \xi') \geq c|\xi'|^2$  avec  $c > 0$ , que  $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n$ ,  $x' \in \mathbb{R}^2$ ,  $x'' \in \mathbb{R}^p$ ,  $p = n - 2$ , et qu'on a  $M^i = Q^i \times \mathbb{R}^p$ ,  $M^e = Q^e \times \mathbb{R}^p$ .

**Proposition 1.** Soit  $M = M^i$  ou  $M^e$  et  $u(x) \in H_0^1(M)$  tel que  $Pu \in L^2(M)$ . Alors pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  on a  $\varphi u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^p, E_0)$ .

PREUVE. Pour  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on a  $P\psi u = \psi Pu + [P, \psi]u \in L^2(M)$  et on peut donc supposer  $u(x)$  à support dans le compact  $|x'| \leq A$ ,  $|x''| \leq A$ . Rappelons que l'angle intérieur  $\theta^i(x'')$  des faces du dièdre en  $(x' = 0, x'')$  est défini en I.2 (26); pour  $M = M^i$  on pose  $\theta(x'') = \theta^i(x'')$  et pour  $M = M^e$ ,  $\theta(x'') = 2\pi - \theta^i(x'')$ . Dans le cas  $M = M^i$  (resp.  $M^e$ ) on choisit  $\theta_0 \in ]0, \pi[$  (resp.  $]\pi, 2\pi[$ ) tel que

$$(8) \quad \theta_0 > \sup\{\theta(x''); |x''| \leq A\} .$$

On pose  $K = \{|x''| \leq A\}$ . On a

$$(9) \quad P_1(x, D')u = Pu - L(x, D', D'')u - Q(x, D'')u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^p, L^2(Q))$$

et par partition de l'unité en  $x'$ ,  $E_0$  étant un  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  module, il suffit de prouver l'assertion suivante, pour  $\sigma \in \mathbb{R}$  fixé.

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \delta > 0 \text{ tel que pour tout } x'_0 \in \bar{Q} \cap \{|x'| \leq A\} \text{ on ait} \\ u \in H_K^\sigma(H_0^1(Q)), P_1 u \in H_K^\sigma(L^2(Q)) \text{ et } \text{support}(u) \subset \left\{ |x' - x'_0| \leq \frac{\delta}{2} \right\} \\ \text{entraînent } u \in H_K^\sigma(E_0) . \end{array} \right.$$

On fixe  $x'_0 \in \bar{Q} \cap \{|x'| \leq A\}$ . Soit  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\psi(x') = 1$  pour  $|x'| \leq \frac{2}{3}$ ,  $\psi(x') = 0$ , pour  $|x'| \geq 1$  et  $\psi_\delta(x') = \psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right)$ . Posons

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0(x'', D') = P_1(x'_0, x'', D') \\ L(x, D') = \psi_\delta P_1(x, D') + (1 - \psi_\delta)L_0(x'', D') \\ L_1(x, D') = L(x, D') - L_0(x, D') = \psi_\delta[P_1(x, D') - L_0(x'', D')] . \end{array} \right.$$

On a

$$(12) \quad \text{support}(u) \subset \left\{ |x' - x'_0| \leq \frac{\delta}{2} \right\} \implies P_1 u = L u$$

et il suffit de prouver (10) avec  $P_1$  remplacé par  $L$  pour un  $\delta > 0$  uniforme en  $x'_0$ . Pour cela, nous allons suivre la construction de Kondrat'ev [K], en tenant compte des paramètres tangentiels  $x'' \in \mathbb{R}^p$ .

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , soit  $W_\alpha^k$  l'espace de Hilbert

$$(13) \quad \begin{cases} W_\alpha^k = \left\{ u(x') \in \mathcal{D}'(Q); |x'|^{\frac{\alpha}{2}-k+|\beta|} \partial^\beta u \in L^2(Q), \text{ pour } 0 \leq |\beta| \leq k \right\} \\ \|u\|_{\alpha, k}^2 = \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} \int_Q |x'|^{\alpha-2k+2|\beta|} |\partial^\beta u|^2 . \end{cases}$$

Plus généralement, pour  $J = [a, b]$ ,  $k = 0, 1, 2$  on pose

$$(14) \quad W_J^k = \bigcap_{\alpha \in J} W_\alpha^k, \quad \|u\|_{J, k} = \sup_{\alpha} \|u\|_{\alpha, k} .$$

Soit  $T$  l'application continue de  $[W_J^0]^3$  dans  $\mathcal{D}'(Q)$

$$(15) \quad T(u_1, u_2, u_3) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \frac{u_3}{|x'|} .$$

On pose

$$(16) \quad W_J^{-1} = T\left([W_J^0]^3\right)$$

qu'on munit de la topologie d'espace de Banach image, i.e.  $W_J^{-1} = [W_J^0]^3 / \text{Ker } T$ .

**Lemme 1.** Soit  $K = \{|x''| \leq A\}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}$  fixé. Il existe  $C_0 > 0$  indépendant de  $x'_0$ ,  $|x'_0| \leq A$  et de  $\delta > 0$  petit tel que pour  $k = 0, -1$ , et tout  $J_k \subset \{\alpha; |1 + k - \frac{\alpha}{2}| \leq \frac{\pi}{\theta_0}\}$  on ait :

1) l'équation  $L_0(u) = v \in H_K^\sigma(W_{J_k}^k)$ ,  $u|_{\partial Q} = 0$  possède dans  $H_K^\sigma(W_{J_k}^{k+2})$  une unique solution et  $\|u\| \leq C_0 \|v\|$ .

2) Pour  $u \in H_K^\sigma(W_{J_k}^{k+2})$ , on a  $L_1(u) \in H_K^\sigma(W_{J_k}^k)$  et  $\|L_1(u)\| \leq C_0 \sqrt{\delta} \|u\|$ .

Ici, la condition aux limites  $u|_{\partial Q} = 0$  signifie  $\hat{u}(x', \xi'')|_{\partial Q \setminus \{x'=0\}} = 0$  pour tout  $\xi''$  ce qui a un sens puisque  $u \in H_K^\sigma(W_{J_k}^{k+2})$  entraîne  $\hat{u}(x', \xi'') \in H_x^1$ , près de tout point  $x' \in \partial Q \setminus \{x' = 0\}$ .

Vérifions d'abord que le lemme 1 entraîne la proposition 1. On choisit  $\delta > 0$  assez petit pour que les équations, (où  $x'_0$ ,  $|x'_0| \leq A$  est un paramètre)

$$(17) \quad Lu = (L_0 + L_1)u = v \in H_K^\sigma(W_{J_k}^k) \quad u|_{\partial Q} = 0, \quad k = 0, -1$$

possèdent une unique solution  $u \in H_K^\sigma(W_{J_k}^{k+2})$ .

Soit  $u \in H_K^\sigma(H_0^1(Q))$  tel que  $Lu \in H_K^\sigma(L^2(Q))$  et  $\text{support}(u) \subset \{|x' - x'_0| \leq \frac{\delta}{2}\}$ . Si  $w(x') \in H_0^1(Q)$  est à support dans  $|x'| \leq \text{Cte}$ , on a  $w \in W_{[0, \frac{2\pi}{\theta_0}]}^1$  car en coordonnées polaires

$$r^{-1}w(r, \theta) = \int_0^\theta \frac{1}{r} \partial_\theta w(r, \sigma) d\sigma \in L^2(r dr d\theta)$$

puisque  $\frac{1}{r} \partial_\theta w \in L^2(r dr d\theta)$ . On a donc  $u \in H_K^\sigma \left( H_0^1 \cap W_{[0, \frac{2\pi}{\theta_0}]}^1 \right)$  et aussi  $Lu \in H_K^\sigma(W_{[0, \alpha]}^0)$  pour tout  $\alpha > 0$ . Soit  $f \in H_K^\sigma(W_J^2)$ ,  $J = \left[ \sup(0, 2 - \frac{2\pi}{\theta_0}), 2 + \frac{2\pi}{\theta_0} \right]$  l'unique solution de  $Lf = Lu$ ,  $f|_{\partial Q} = 0$ . On a  $f \in H_K^\sigma \left( W_{[0, \frac{2\pi}{\theta_0}]}^1 \right)$ ,  $L(f - u) = 0$ ,  $f - u|_{\partial Q} = 0$  donc  $u = f$ . Comme on a  $\frac{2\pi}{\theta_0} > 1$ , il en résulte  $u \in H_K^\sigma(W_{[1, 3]}^2)$ , donc en coordonnées polaires,  $u$ ,  $\frac{u}{r}$ ,  $\partial_r u$ ,  $\partial_\theta u$ ,  $\frac{1}{r} \partial_\theta u$ ,  $\partial_r^2 u$ ,  $\frac{1}{r} \partial_\theta^2 u$  appartiennent à  $H_K^\sigma(L^2(dr d\theta))$ , donc  $u \in H_K^\sigma(E)$  et puisque  $u \in H_K^\sigma(H_0^1)$ ,  $u|_{\theta \in \partial I} = 0$ .

On a enfin  $\hat{u}(\xi'') \in C^0(\theta; H_r^1)$  pour tout  $\xi''$ , doù

$$(18) \quad \frac{\hat{u}(\xi'')}{r}(\theta, r) = \frac{\hat{u}(\xi'')(\theta, 0)}{r} + \frac{1}{r} \int_0^r \partial_r \hat{u}(\xi'')(\theta, \rho) d\rho.$$

L'inégalité de Hardy entraîne  $\frac{1}{r} \int_0^r \partial_r \hat{u}(\xi'') \in L^2(dr d\theta)$  et puisque  $\frac{\hat{u}(\xi'')}{r} \in L^2(dr d\theta)$ , (18) entraîne  $\hat{u}|_{r=0} = 0$  d'où  $u \in H_K^\sigma(E_0)$ .

PREUVE DU LEMME 1. Vérifions d'abord le point 2;  $L_1$  est combinaison linéaire d'opérateurs de la forme, avec  $|\beta| = 2$ ,  $a(x) \in C^\infty$

$$(19) \quad Au(x', x'') = \psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) [a(x', x'') - a(x'_0, x'')] \partial_{x'}^\beta.$$

Soit  $\varphi(x'') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ ,  $\varphi \equiv 1$  près de  $K$ ; pour  $u \in H_K^\sigma(B)$  ( $B = W_\alpha^{k+2}$ ,  $\alpha \in J_k$ ) on a

$$(20) \quad \widehat{Au}(\cdot, \xi'') = (2\pi)^{-p} \int \widehat{\varphi A}(\theta'') \hat{u}(\cdot, \xi'' - \theta'') d\theta''$$

et il suffit donc d'estimer dans  $L_{\theta''}^1$ ,  $(1 + |\theta''|)^{|\sigma|} \|\widehat{\varphi A}(\theta'')\|$ . Comme  $\|\theta''^\alpha \widehat{\varphi A}(\theta'')\| \leq \int \|\partial_{x''}^\alpha \varphi A\| dx''$ , et que  $\partial_{x''}^\alpha \varphi A$  est de la forme (19), il suffit d'estimer la norme d'un opérateur de la forme  $\psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) [a(x') - a(x'_0)] \partial_{x'}^\beta$ , de  $W_J^{k+2}$  dans  $W_J^k$ . Pour  $k = 0$ ,  $\partial_{x'}^\beta$  est de norme au plus 1 de  $W_\alpha^2$  dans  $W_\alpha^0$  et  $\psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) [a(x') - a(x'_0)]$  est de norme  $O(\delta)$  sur  $W_\alpha^0$ , d'où le résultat. Pour  $k = -1$ , on écrit  $\beta = \beta_1 + \beta_2$ ,  $|\beta_i| = 1$  et

$$(21) \quad \psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) [a(x') - a(x'_0)] \partial_{x'}^\beta = \partial_{x'}^{\beta_1} \left[ \psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) (a(x') - a(x'_0)) \partial_{x'}^{\beta_2} \right] - g \partial_{x'}^{\beta_2}$$

avec  $g = \psi\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) \partial_{x'}^{\beta_1} a(x') + (\partial^{\beta_1} \psi)\left(\frac{x' - x'_0}{\delta}\right) \left(\frac{a(x') - a(x'_0)}{\delta}\right)$  comme  $\partial_{x'}^{\beta_1}$  est  $O(1)$  de  $W_J^0$  dans  $W_J^{-1}$ , il suffit de vérifier que si  $g(x') \in L^\infty$ ,  $\text{support}(g) \subset \{|x' - x'_0| \leq \delta\}$  l'opérateur de multiplication par  $g$  est de norme majoré par  $C_0 \sqrt{\delta} \|g\|_{L^\infty}$  de  $W_J^0$  dans  $W_J^{-1}$ , avec  $C_0$  indépendant de  $x'_0$ ,  $|x'_0| \leq A$ , et de  $\delta > 0$  petit.

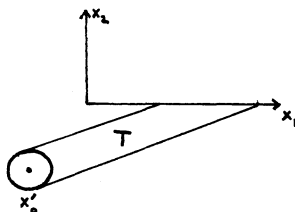
Soit  $M$  une grande constante positive. Pour  $|x'_0| \leq M\delta$  il suffit d'écrire pour  $u \in W_J^0$ ,  $gu = \frac{1}{|x'|} |x'| gu$  puisqu'alors  $\| |x'| g \|_\infty \leq (M + 1)\delta \|g\|_\infty$ . Pour  $|x'_0| \geq M\delta$ , il existe  $\gamma > 0$  indépendant de  $\delta$  et un champ de vecteur  $\vec{X} = \cos \omega \partial_1 + \sin \omega \partial_2$ , tel que si  $T = \{x' \in Q; x' = y' + t\vec{X}, t \geq 0, y' \in B(x'_0, \delta)\}$  on ait pour tout  $x' \in T$ ,

$\gamma|x'_0| \leq |x'| \leq \frac{1}{\gamma}|x'_0|$ , et  $\text{diam}(T) \leq \frac{1}{\gamma}$ . Soit  $w$  la solution à support dans  $T$  de  $Xw = gu$ . On a, avec  $c = (\text{diam}T)^{1/2}\gamma^{-\frac{|\alpha|}{2}}$

$$(22) \quad \| |x'|^{\frac{\alpha}{2}} w \|_{L^2(Q)} \leq \gamma^{-\frac{|\alpha|}{2}} |x'_0|^{\frac{\alpha}{2}} \|w\|_{L^2(T)} \leq c\sqrt{2\delta} |x'_0|^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_{L^2(B(x'_0, \delta))} \|g\|_{\infty}$$

d'où le résultat puisque pour  $x' \in B(x'_0, \delta)$  on a  $\left| \frac{x'}{x'_0} \right| \in \left[ 1 - \frac{1}{M}, 1 + \frac{1}{M} \right]$ .

(23)



Pour prouver le point 1 du lemme 1, on introduit la transformation de Mellin, définie pour  $u \in C_0^\infty(\overset{\circ}{Q})$  par

$$(24) \quad (Mu)(z, \theta) = \int_0^\infty u(r \cos \theta, r \sin \theta) r^{-z} \frac{dr}{r}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \theta \in I^e \text{ ou } I^i.$$

Pour  $J = [a, b]$ ,  $k = 0, 1, 2$ , la transformation  $M$  définit un isomorphisme de  $W_J^k$  sur  $\hat{W}_J^k$  avec

$$(25) \quad \hat{W}_J^k = \left\{ U(z, \theta), \quad \theta \in I, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } z + 1 - k \in \left[ \frac{-b}{2}, \frac{-a}{2} \right], \right. \\ \left. \sup_{\alpha \in J} \left( \sum_{i_1 + i_2 \leq k} \int_I d\theta \int_{\text{Re } z = -1 - \frac{\alpha}{2} + k} |z^{i_1} \partial_\theta^{i_2} U|^2 \right)^{1/2} < \infty, \right. \\ \left. \bar{\partial}_z U = 0 \text{ pour } \text{Re } z + 1 - k \in \left] \frac{-b}{2}, \frac{-a}{2} \right[ \right\}$$

avec  $I = I^i$  ou  $I^e$ , ce qui résulte de (13), puisque  $M$  est une transformation de Fourier partielle en la variable  $y = \log(r)$ . Pour  $v(x_1, x_2) \in W_\alpha^0$ , on pose  $\tilde{v}(y, \theta) = v(e^y \cos \theta, e^y \sin \theta)$  de sorte qu'on a  $e^{y[1 + \frac{\alpha}{2}]} \tilde{v}(y, \theta) \in L^2(\mathbb{R}_y \times I_\theta)$ ,  $\bar{\partial}_r v = e^{-y} \partial_y \tilde{v}$ ,  $\frac{1}{r} v = e^{-y} \tilde{v}$ , et avec  $w = T(v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_j \in W_\alpha^0$ ,

$$\tilde{w} = e^{-y} \left[ \partial_y (\cos \theta \tilde{v}_1 + \sin \theta \tilde{v}_2) + \partial_\theta (-\sin \theta \tilde{v}_1 + \cos \theta \tilde{v}_2) + \tilde{v}_3 + \cos \theta \tilde{v}_1 + \sin \theta \tilde{v}_2 \right].$$

Il en résulte  $w \in W_J^{-1} \Leftrightarrow \tilde{w} \in \tilde{W}_J^{-1}$ , où  $\tilde{W}_J^{-1}$  est l'espace de Banach image défini par l'application  $\tilde{T}$

$$(26) \quad \tilde{T}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = \partial_y \tilde{w}_1 + \partial_\theta \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3, \quad e^{y[2 + \frac{\alpha}{2}]} \tilde{w}_j \in L^2(\mathbb{R}_y \times I_\theta), \quad \alpha \in J.$$



Comme  $C_0^\infty(\dot{Q})$  est dense dans  $W_J^0$ ,  $C_0^\infty(\dot{Q})$  est dense dans  $W_J^{-1}$ ; et la transformation de Mellin (24) s'étend en un isomorphisme de  $W_J^{-1}$  sur  $\hat{W}_J^{-1}$ , espace de Banach image par  $\hat{T}$  de  $[\hat{W}_J^0[1]]^3$

$$(27) \quad \begin{cases} \hat{T}(U_1, U_2, U_3) = zU_1 + \partial_\theta U_2 + U_3, & U_j \in \hat{W}_J^0[1] \\ U(z, \theta) \in \hat{W}_J^0[1] \iff U(z-1, \theta) \in \hat{W}_J^0. \end{cases}$$

On a

$$(28) \quad -L_0(x'', D') = a(x'_0, x'')\partial_1^2 + 2b(x'_0, x'')\partial_1\partial_2 + d(x'_0, x'')\partial_2^2.$$

En notant  $(\cdot | \cdot)$  et  $\|\cdot\|$  le produit scalaire et la norme sur  $\mathbb{R}^2$  définis par la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ , on obtient

$$(29) \quad \begin{cases} -M(L_0u)(z, \theta) = \mathcal{L}(Mu)(z+2, \theta) \\ \mathcal{L}(x'_0, x'') = \|\vec{n}\|^2 \partial_\theta^2 + 2(\vec{t} | \vec{n})(z-1)\partial_\theta + (z^2\|t\|^2 + (\|\vec{n}\|^2 - \|t\|^2)z) \end{cases}$$

et par suite, le point 1 du lemme 1 est équivalent à la résolution de l'équation, avec  $k = 0, -1$

$$(30) \quad \mathcal{L}(U) = V, \quad U \in H_K^\sigma(\hat{W}_{J_k}^{k+2}), \quad U|_{\theta \in \partial I} = 0, \quad V \in H_K^\sigma(\hat{W}_{J_k}^k[-2])$$

où  $\hat{W}_{J_k}^k[-2] = \{V(z, \theta), V(z+2, \theta) \in \hat{W}_{J_k}^k\}$ .

Si  $J = [\alpha, \beta]$  est un intervalle contenu dans  $[\frac{-\pi}{\theta_0}, \frac{\pi}{\theta_0}]$ , et si on pose pour  $k = 0, 1, 2$ ,  $B_J^k = \hat{W}_{J_k}^k$ ,  $J' = [2k-2-2\beta, 2k-2-2\alpha]$  et en définissant  $B_{J'}^{-1}$  comme l'image de  $[B_J^0]^3$  par  $\hat{T}$ , (30) équivaut à la résolution de

$$(31) \quad \mathcal{L}(x'_0, x'')(U) = V; \quad U \in H_K^\sigma(B_{J'}^{k+2}), \quad U|_{\theta \in \partial I} = 0, \quad V \in H_K^\sigma(B_J^k).$$

Si on fixe  $x'' = x''_0$ , l'équation  $\mathcal{L}(x'_0, x''_0)u = v$ ,  $u \in B_J^{k+2}$ ,  $u|_{\theta \in \partial I} = 0$ , avec  $v \in B_J^k$  possède une unique solution  $u = \mathcal{L}^{-1}(x'_0, x''_0)v$  avec  $\|\mathcal{L}^{-1}(x'_0, x''_0)\| \leq \text{Cte}$ , où cette constante est indépendante de  $x'_0, x''_0$  variant dans un compact. En effet, les espaces  $W_J^k$ , définis par (13) et (14) sont invariants par changement de coordonnées linéaires en  $(x_1, x_2)$ . Il existe un tel changement de variable  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  qui transforme  $\mathcal{L}(x'_0, x''_0)$  en  $-\Delta_y$  et  $Q$  en le secteur angulaire  $\{(y_1, y_2) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi); \varphi \in ]0, \theta(x''_0)[, \rho > 0\}$ . Notant (par abus)  $z$  la variable de Mellin associée aux variables  $(y_1, y_2)$ , on est ramené à résoudre

$$(32) \quad (\partial_\varphi^2 + z^2)u(z, \varphi) = v(z, \varphi); \quad u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\theta(x''_0)} = 0$$

avec toujours  $|\text{Re } z| \leq \frac{\pi}{\theta_0}$ . Or la solution de (32) est

$$(33) \quad u(z, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 - \lambda_k^2)} \sin \lambda_k \varphi \cdot \frac{2}{\theta(x''_0)} \int_0^{\theta(x''_0)} \sin(\lambda_k s) v(z, s) ds$$

avec  $\lambda_k = \frac{\pi k}{\theta(x_0'')}$ , d'où le résultat puisque (8) entraîne  $|z^2 - \lambda_k^2| \geq \text{Cte}(k^2 + |z|^2)$  pour  $|\text{Re } z| \leq \frac{\pi}{\theta_0}$ .

Soit alors  $v(z, \theta, x'') \in H_K^\sigma(B_J^k)$  et posons, avec  $y'' \in \mathbb{R}^p$ ,  $\hat{U}(z, \theta, y'', \xi'') = \mathcal{L}^{-1}(x_0', y'') \hat{V}(z, \theta, \xi'')$ . On a  $\mathcal{L}(x_0', y'')[\partial_{y''} \hat{U}] = -(\partial_{y''} \mathcal{L}) \hat{U}$  d'où

$$\|\partial_{y''} \hat{U}(\cdot, \cdot, y'', \xi'')\|_{B_J^{k+2}} \leq \text{Cte} \|(\partial_{y''} \mathcal{L}) \hat{U}\|_{B_J^k} \leq \text{Cte} \|\hat{U}\|_{B_J^{k+2}} \leq \text{Cte} \|\hat{V}\|_{B_J^k},$$

d'où par récurrence

$$\|\partial_{y''}^\alpha \hat{U}(\cdot, \cdot, y'', \xi'')\|_{B_J^{k+2}} \leq C_\alpha \|\hat{V}(\cdot, \cdot, \xi'')\|_{B_J^k},$$

avec  $C_\alpha$  indépendant de  $y''$  variant dans un compact. Si on pose  $F(z, \theta, x'', y'') = \psi(x'')(2\pi)^{-p} \int e^{ix'' \xi''} \hat{U}(z, \theta, y'', \xi'') d\xi''$ ,  $\psi \in C_0^\infty$ ,  $\psi \equiv 1$  près de  $K$ ,  $K' = \text{support}(\psi)$ , on a alors  $\mathcal{L}(x_0', y'') F = V$ , et la trace  $F|_{y''=x''} = U(z, \theta, x'')$  existe et appartient à  $H_{K'}^\sigma(B_J^{k+2})$ , donc  $\mathcal{L}U = V$  et  $U|_{\theta \in \partial I} = 0$ . On a donc prouvé l'existence d'une solution. (Le fait qu'on ait  $U \in H_{K'}^\sigma(B_J^{k+2})$  résultera de l'unicité.)

Vérifions donc l'unicité. Soit  $U \in H_K^\sigma(B_J^1)$  tel que  $\mathcal{L}(U) = 0$ ; Comme on a  ${}^t \mathcal{L}(x_0', x'', z, \theta) = \mathcal{L}(x_0', x'', -z, \theta)$  pour  $a(z, \theta) \in B_J^{-1}$ ,  $g(x'') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^p)$  il existe d'après ce qui précède  $b(z, \theta, x'') \in H_{\text{comp}}^s(B_J^1)$  pour tout  $s$  tel que  ${}^t \mathcal{L}(b(z, \theta, x'')) = g(x'') a(z, \theta)$ ,  $b|_{\theta \in \partial I} = 0$ , d'où

$$(34) \quad \int d\theta dx'' U(z, \theta, x'') g(x'') a(z, \theta) = \int d\theta dx'' \mathcal{L}(U) b(z, \theta, x'') = 0$$

donc pour tout  $\xi''$ ,  $\int d\theta \hat{U}(z, \theta, \xi'') a(z, \theta) = 0$  pour tout  $a \in B_J^{-1}$ . En choisissant  $a(z, \theta)$  de la forme  $(M-z)^{-\sigma} b(\theta)$ ,  $M, \sigma$  grands, et  $b$  arbitraire dans  $H^{-1}(I)$ , on obtient  $\hat{U} \equiv 0$ .  $\diamond$

## II.2. Front d'onde

Dans ce paragraphe, nous définissons le front d'onde analytique  $SS_b(u)$  d'une solution dans  $H_{\text{loc}}^1$  du problème de Dirichlet  $Pu = 0$ ,  $u|_{\partial} = 0$ , comme sous ensemble de  $\dot{T}_b^*M$ . Pour cela, on introduit la transformation de FBI tangentielle

$$(35) \quad T_0 u(w, x', \lambda) = \int e^{\lambda w x'' - \lambda \frac{x''^2}{2}} u(x', x'') dx'', \quad w \in \mathbb{C}^p, \lambda \geq 1.$$

Si  $B$  est un espace de Banach,  $K$  un compact de  $\mathbb{R}_{x''}^p$ , et  $u(\cdot, x'') \in H_K^\sigma(B)$ , on a  $T_0 u \in H_{\varphi_0}(\mathbb{C}^p, B)$ ,  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(\text{Re } w)^2$ , où l'espace de Sjöstrand  $H_\varphi(U, B)$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}^p$  est défini par

$$(36) \quad \begin{cases} f(\cdot, w, \lambda) \in H_\varphi(U, B) \iff f \text{ est holomorphe en } w \in U \text{ à valeurs dans } B \\ \text{et } \exists C_1, C_2 > 0, \forall \lambda \geq 1 \quad \|f(\cdot, w, \lambda)\|_B \leq C_1 \lambda^{C_2} e^{\lambda \varphi(w)}, \forall w \in U. \end{cases}$$

D'après la proposition 1, si  $u(x', x'') \in H_{0,\text{loc}}^1$ ,  $Pu = 0$ , on a pour tout  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_0(\psi u) \in H_{\varphi_0}(\mathbb{C}^p, E_0)$ .

**Définition 1.** Soit  $u \in H_{0,\text{loc}}^1$  solution de  $Pu = 0$ . On définit  $SS_b(u) \subset \dot{T}_b^*M$  par  $\rho \notin SS_b(u)$  ssi

i) Si  $\rho \notin T^*L$ ;  $\rho \notin SS_b(u)$  avec la définition usuelle de  $SS_b(u)$  pour les problèmes aux limites non caractéristiques à bord analytique (voir [Sj]).

ii) Si  $\rho \in T^*L$ ;  $\rho = (x_0'', \xi_0'')$ ; Il existe  $\psi(x', x'') \in C_0^\infty$ , égal à 1 près de  $x' = 0$ ,  $x'' = x_0''$ ,  $U$  voisinage de  $w_0 = x_0'' - i\xi_0''$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que  $T_0(\psi u) \in H_{\varphi_0 - \varepsilon_0}(U, E_0)$ .

On remarquera que la définition précédente est locale en  $x \in \bar{M}$ .

**Proposition 2.**  $SS_b(u)$  est fermé et localement compact dans  $\dot{T}_b^*M$ .

PREUVE. Vérifions d'abord que  $SS_b(u)$  est fermé. Il suffit de prouver que si  $\rho_0 = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^*L$ ,  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que avec  $\Omega_\varepsilon = \{(x', x'', \xi', \xi'') \in T^*\bar{M}, |x'| < \varepsilon, |x'' - x_0''| < \varepsilon, |\xi'' - \xi_0''| < \varepsilon\}$ , on a  $\pi(\Omega) \cap SS_b(u) = \emptyset$ , puisque  $\Omega$  est un ouvert saturé pour  $\pi$ . Soit donc  $\rho = (x', x'', \xi', \xi'') \in \Omega_\varepsilon$ . Si  $x' = 0$ , on a  $\pi(\rho) \notin SS_b(u)$  pour  $\varepsilon$  assez petit car la condition ii) de la définition 1 est ouverte. En désignant par  $\underline{u}$  le prolongement canonique de  $u \in H_{0,\text{loc}}^1$  par 0 à  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{M}$ , ii) entraîne  $(x', x'', \xi', \xi'') \notin SS(\underline{u})$  pour  $|x'| < \varepsilon, |x'' - x_0''| < \varepsilon, |\xi'' - \xi_0''| < \varepsilon, \xi' \in \mathbb{R}^2$  puisque

$$(37) \quad \int e^{-\frac{\lambda}{2}(w-x'')^2 - \frac{\lambda}{2}(w'-x')^2} \psi \underline{u} dx' dx'' = \int_Q e^{-\frac{\lambda}{2}(w'-x')^2} T_0(\psi u) dx' e^{-\frac{\lambda}{2}w^2}.$$

D'où le résultat, puisque pour les solutions des problèmes aux limites non caractéristiques à bord analytique, on a  $SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus \dot{T}_{\partial M}^*)$ .

Pour vérifier que  $SS_b(u)$  est localement compact, il suffit de prouver qu'il est contenu dans  $\pi(G)$ ,  $G = \{(x, \xi) \in T^*M; |\xi'| \leq C_0|\xi''|\}$  avec  $C_0$  assez grand. Soit  $C_0$  tel que  $\text{Car } P \subset \{|\xi'| \leq C_0|\xi''|\}$  et  $\rho \in SS_b(u)$ . Si  $\rho \in T^*M$ , on a  $Pu = 0$ , donc  $\rho \in \text{Car } P$ , donc  $\pi(\rho) \in \pi(G)$ . Si  $\rho \in T^*\Delta_1$ , on a  $Pu = 0$  et  $u|_{\Delta_1} = 0$  donc  $\rho \in \pi(\text{Car } P)$  (par la condition aux limites) donc  $\rho \in \pi(G)$ . Enfin si  $\rho \in T^*L$ , on a trivialement  $\rho \in \pi(G)$  d'où le résultat.  $\diamond$

On remarquera qu'il n'est pas évident que la définition de  $SS_b(u)$  donnée est indépendante du choix des coordonnées locales dans lesquelles  $M$  s'écrit  $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$  ou  $\{x_1 < 0$  ou  $x_2 < 0\}$ . On prouvera dans le paragraphe IV que  $SS_b(u)$  est intrinsèque; plus précisément, on montrera le :

**Théorème 1.** Soit  $u \in H_{0,\text{loc}}^1$ ,  $Pu = 0$ ; on a

$$(38) \quad SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_\Delta^*)$$

où  $\underline{u}$  est le prolongement de  $u$  par 0 à  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{M}$ .

A ce stade, on notera que l'inclusion

$$(39) \quad \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_{\Delta}^*) \subset SS_b(u)$$

résulte de la preuve de la proposition 2.

### II.3. Continuité des opérateurs de Poisson

On se place dans  $\mathbb{R}^2$  munit du système de coordonnées  $x = (x_1, x_2)$ . Soient  $q(x, \xi)$ ,  $p(x, \xi)$  des polynômes de  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ , à coefficients  $C^\infty$  en  $x$  dans le disque  $D = \{x; |x| \leq \rho_0\}$ . On suppose

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \deg_{\xi} q \leq 2N - 2 \quad \deg_{\xi} p = 2N. \\ \text{Il existe } c_0 > 0 \text{ tel que } p = \prod_{j=1}^N (\xi_2 - \xi_2^{+,j}(x, \xi_1)) (\xi_2 - \xi_2^{-,j}(x, \xi_1)) \\ \text{les racines } \xi_2^{\pm,j}(x, \xi_1) \text{ de } p(x, \xi_1, \xi_2) = 0 \text{ vérifient} \\ |\xi_2^{\pm}| \leq c_0^{-1}(1 + |\xi_1|) ; \quad \pm \text{Im } \xi_2^{\pm} \geq c_0(1 + |\xi_1|) \end{array} \right.$$

et on pose

$$(41) \quad r(x, \xi) = \frac{q(x, \xi)}{p(x, \xi)}.$$

Soit  $L_+^2 = \{f(x_1) \in L^2; \text{support}(f) \subset x_1 \geq 0\}$  et pour  $I$  intervalle contenu dans  $[0, 2\pi]$ ,  $E^I$  l'espace des fonctions  $f(x_1, x_2)$ , définies pour  $x_1 = \rho \cos \theta$ ,  $x_2 = \rho \sin \theta$ ,  $\rho > 0$ ,  $\theta \in I$  telles que  $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in C^0(\theta \in \bar{I}; L_\rho^2)$ , muni de la norme  $\sup_{\theta \in I} (\|f\|_{L_\rho^2} + \|\frac{\partial f}{\partial x_1}\|_{L_\rho^2} + \|\frac{\partial f}{\partial x_2}\|_{L_\rho^2}) = \|f\|_I$ .

Soit  $\psi(x) \in C_0^\infty(\overset{\circ}{D})$  et  $A$  l'opérateur de  $L_+^2$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  défini par l'opérateur pseudodifférentiel

$$(42) \quad A(f) = \psi(x) \int e^{i\lambda x \xi} r(x, \xi) \hat{f}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2$$

où  $\lambda \in [1, +\infty[$ .

**Proposition 3.** *A est borné de  $L_+^2$  dans  $E^{[0, 2\pi]}$ . De plus, la norme de  $A$  est majorée par un polynôme de  $\lambda$  ne dépendant que de  $c_0$ , et des normes  $L^\infty$  des dérivées d'ordre au plus 4 de  $\psi$  et des coefficients des polynômes  $q, p$ .*

PREUVE. On remarque d'abord que si  $y \mapsto F(y, \cdot)$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$  est de classe  $C^4$  à valeurs dans  $E^I$  et à support dans  $D$  alors  $f(x) = F(x, x)$  existe, et vérifie  $\|f\|_I \leq Cte \|F\|$ ,

$\|F\| = \sup\{\|\partial_y^\alpha F(y, \cdot)\|_I, y \in D, |\alpha| \leq 4\}$ . En effet, avec  $\hat{F}(\eta, \cdot) = \int e^{-iy\eta} F(y, \cdot) dy$ , on a  $\hat{F}(\eta, \cdot) \in E^I$  pour tout  $\eta$  et  $\sup_\eta (1 + |\eta|)^4 \|\hat{F}(\eta, \cdot)\|_I \leq \text{Cte} \|F\|$ . Or on a

$$f(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{ix\eta} \hat{F}(\eta, x) d\eta \quad \text{donc} \quad f \in E^I$$

et

$$\|f\|_I \leq \text{Cte} \int (1 + |\eta|) \|\hat{F}(\eta, \cdot)\|_I d\eta \leq \text{Cte} \|F\|.$$

Comme on a  $A(f)(x) = F(y, x) |_{y=x}$  avec  $F(y, x) = \varphi(y)\psi(x) \int e^{i\lambda x\xi} r(y, \xi) \hat{f}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2$  pour  $\varphi \in C_0^\infty$  égale à 1 sur le support de  $\psi$ , et que  $\partial_y^\alpha r(y, \xi)$  est de même forme que  $r$  avec même constante  $c_0$  dans (40), on peut supposer  $q$  et  $p$  indépendants de  $x$ .

Soient  $K_\pm^{\xi_1} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 2c_0^{-1}(1 + |\xi_1|), \pm \text{Im} z \geq \frac{\varepsilon_0}{2}(1 + |\xi_1|)\}$   $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) le bord de  $K_+^{\xi_1}$  (resp.  $K_-^{\xi_1}$ ) orienté dans le sens direct (resp. indirect) et

$$(43) \quad \sigma_\pm(\lambda x_2, \xi_1) = \int_{\gamma_\pm} e^{i\lambda x_2 \xi_2} r(\xi) d\xi_2.$$

On a

$$|\sigma_\pm(\lambda x_2, \xi_1)| \leq \text{Cte} e^{-\frac{\varepsilon_0 \lambda}{2} |x_2|(1+|\xi_1|)} (1 + |\xi_1|)^{-1}$$

et

$$(44) \quad A(f) |_{\pm x_2 > 0} = \psi(x) \int e^{i\lambda x_1 \xi_1} \hat{f}(\xi_1) \sigma_\pm(\lambda x_2, \xi_1) d\xi_1 |_{\pm x_2 > 0}.$$

Il suffit donc de vérifier que  $\hat{f} \mapsto A(f)$  est estimé de  $L^2$  dans  $E^I$  avec  $I = ]0, \pi[$  ou  $]\pi, 2\pi[$ , et que pour  $f \in L_+^2$ ,  $A(f)$ ,  $\partial_{x_1} A(f)$ ,  $\partial_{x_2} A(f)$  se recollent sur  $\theta = \pi$ . La deuxième assertion résulte de

$$(45) \quad \sigma_+(0, \xi_1) - \sigma_-(0, \xi_1) \equiv 0; \quad \partial_{\xi_1} [\partial_{x_2} \sigma_+(0, \xi_1) - \partial_{x_2} \sigma_-(0, \xi_1)] \equiv 0.$$

Vérifions que  $\hat{f} \mapsto A(f)$  est borné de  $L^2$  dans  $E^{]0, \pi[}$ . Comme pour  $\hat{f}$  à décroissance rapide,  $A(f) |_{x_2 > 0}$  est  $C^\infty$  jusqu'au bord, il suffit de vérifier qu'on a

$$(46) \quad \sup_{0 < \theta < \pi} \|A(f), \partial_{x_1} A(f), \partial_{x_2} A(f)\|_{L_p^2} \leq \text{pol}(\lambda) \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Pour  $0 < \alpha \leq \theta \leq \beta < \pi$ , (46) résulte du fait que l'opérateur  $g \mapsto \int_0^\infty e^{-xy} g(y) dy$  est borné sur  $L_+^2$  (Inégalité de Hardy). Il suffit donc de vérifier (46) pour  $\theta \in ]0, \varepsilon_0]$ , le cas  $\theta \in [\pi - \varepsilon_0, \pi[$  étant identique; on peut maintenant supposer  $\hat{f}(\xi_1)$  à support dans  $\xi_1 \geq 1$ . On a dans  $\xi_1 \geq 1$

$$(47) \quad \sigma_+(\lambda x_2, \xi_1) = \int_{\gamma_0} e^{i\lambda x_2 z \xi_1} r(\xi_1, z \xi_1) \xi_1 dz$$

où  $\gamma_0$  est le contour fixe dans  $\text{Im } z > 0$ , bord de  $\text{Im } z \geq \frac{\varepsilon_0}{4}$ ,  $|z| \leq \frac{4}{\varepsilon_0}$ .

Comme la fonction  $\xi_1^2 r(\xi_1, z \xi_1)$  est bornée en  $\xi_1 \geq 1$  uniformément en  $z$  dans  $\gamma_0$ , il suffit de vérifier que l'opérateur

$$(48) \quad g \mapsto \int_0^\infty e^{i\rho \cos \theta \xi_1 + i\rho \sin \theta z \xi_1} g(\xi_1) d\xi_1$$

est borné de  $L^2(\xi_1 \geq 0)$  dans  $L^2(\rho \geq 0)$  uniformément en  $\theta \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $z \in \gamma_0$ . En effectuant le changement de variable  $\eta_1 = (\cos \theta + \text{Re } z \sin \theta) \xi_1$ , on se ramène à l'opérateur ( $u = \sin \theta \text{Im } z$ )

$$(49) \quad g \mapsto \int_0^\infty e^{i\rho \xi_1 - \xi_1 \rho u} g(\xi_1) d\xi_1 = T_u g(\rho)$$

avec  $u \in ]0, 1]$ . Avec  $\hat{g}(z) = \int_0^\infty e^{i\xi_1 z} g(\xi_1) d\xi_1$ , on a  $T_u g(\rho) = \hat{g}(\rho + iu\rho)$ ,  $\hat{g}$  holomorphe dans  $\text{Im } z > 0$  et le résultat est conséquence de

$$(50) \quad \sup_{0 < \varphi < \pi} \|\hat{g}(r e^{i\varphi})\|_{L^2_r} \leq \text{Cte} \|g\|_{L^2}.$$

◇

Soit à présent  $N = \partial_{x_1} \circ A$  ou  $N = \partial_{x_2} \circ A$ .

**Lemme 2.** Pour  $f(x_1) \in L^2$ , on a

$$(51) \quad N(f)|_{\pm x_2 > 0} \in C^0(\pm x_2 \geq 0; L^2(\mathbb{R}_{x_1}))$$

$$(52) \quad N(f) \in C^0(x_1, L^2(\mathbb{R}_{x_2})).$$

PREUVE. (51) résulte des arguments standards précédents de théorie elliptique. Pour (52) comme précédemment on se ramène à  $r$  indépendant de  $x$ , et avec  $n(\xi) = \xi_1 r(\xi)$  ou  $\xi_2 r(\xi)$  il suffit de vérifier que l'opérateur

$$\hat{f} \mapsto \int e^{i\lambda x \xi} n(\xi) \hat{f}(\xi_1) d\xi = J(\hat{f})(x_1, x_2)$$

envoie  $L^2$  dans  $C^0(x_1, L^2(\mathbb{R}_{x_2}))$  ce qui résulte de  $n(\xi) \in \mathcal{O}(\frac{1}{1+|\xi|})$ ,

$J(\hat{f}) \in C^0(x_1, L^2(\mathbb{R}_{x_2}))$  si  $\hat{f}$  est à décroissance rapide et de

$$\|J(\hat{f})(x_1, \cdot)\|_{L^2} \leq \text{Cte } \lambda^{-1/2} \left\| \int \frac{|\hat{f}(\xi_1)|}{1 + |\xi_1| + |\xi_2|} d\xi_1 \right\|_{L^2(\xi_2)} \leq \text{Cte } \lambda^{-1/2} \|\hat{f}\|_{L^2}$$

la dernière inégalité étant l'inégalité de Hardy.



### III. MICROLOCALISATION

#### III.1. Transformation F.B.I.

Pour  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , distribution à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $Tf(z, \lambda)$ , ( $z \in \mathbb{C}^n, \lambda \geq 1$ ) par

$$(1) \quad Tf(z, \lambda) = \int e^{\lambda x z - \lambda \frac{x^2}{2}} f(x) dx .$$

C'est une fonction holomorphe de  $z$  qui vérifie des estimations

$$(2) \quad \exists M, \forall \alpha, \exists C_\alpha, \forall z, \lambda, \quad \left| \left( \frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^\alpha Tf(z, \lambda) \right| \leq C_\alpha \lambda^M (1 + |z|)^M e^{\lambda \varphi(z)}$$

où la fonction poids  $\varphi$  est

$$(3) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z)^2 .$$

Si on pose  $f_{\lambda, a}(x) = e^{-\frac{\lambda}{2}(a-x)^2} f(x)$  on a

$$(4) \quad Tf(a + ib, \lambda) = e^{\lambda \frac{a^2}{2}} \hat{f}_{\lambda, a}(-\lambda b) .$$

Il en résulte la formule d'inversion

$$(5) \quad f(x) = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x b - \lambda \frac{b^2}{2}} Tf(x - ib, \lambda) db$$

où le membre de droite est une distribution définie par une intégrale oscillante d'après (2).

La transformation F.B.I  $T$  est associée à la transformation canonique complexe de  $T^*\mathbb{C}^n$

$$(6) \quad (x, \xi) \longmapsto (z, \zeta), \quad z = x - i\xi, \quad \zeta = -ix$$

et on a les identités

$$(7) \quad \left( \frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^\alpha Tf = T(x^\alpha f)$$

$$(8) \quad (\partial_z - \lambda z)^\alpha Tf = T(\partial_x^\alpha f) .$$

Pour  $w \in \mathbb{C}^n$ , on note  $\|w\| = \sup |w_j|$ .



Soit  $P(x, D_x)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients holomorphes et bornés près de  $\|x\| \leq D_0$ . On écrit  $P$  sous la forme

$$(9) \quad P(x, D_x) = \sum_{|\nu| \leq m} \left( \frac{1}{i} \partial_x + i\lambda x \right)^\nu \circ p_\nu(x, \lambda) \quad (\lambda \geq 1)$$

où les  $p_\nu(x, \lambda)$  sont des polynômes en  $\lambda$  de degré au plus  $m - |\nu|$ , à coefficients holomorphes et bornés près de  $\|x\| \leq D_0$ . On a

$$(10) \quad p_\nu = \sum_{\alpha} p_{\nu, \alpha} x^\alpha, \quad |p_{\nu, \alpha}| \leq \text{Cte } D_0^{-|\alpha|} \lambda^{m-|\nu|}.$$

Le symbole principal de  $p$  de  $P$  est

$$(11) \quad p(x, \xi) = \sum_{|\nu|=m} p_\nu(x) \xi^\nu.$$

On pose, pour  $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^{2n}$ ,  $\|\zeta\| < D_0$

$$(12) \quad p^\sharp(z, \zeta, \lambda) = \sum_{|\nu| \leq m} (iz)^\nu \lambda^{|\nu|-m} p_\nu^\sharp(\zeta, \lambda); \quad p_\nu^\sharp(\zeta, \lambda) = p_\nu(i\zeta, \lambda).$$

On a alors

$$(13) \quad p^\sharp(z, \zeta, \lambda) = p(i\zeta, iz + \zeta) + O(\lambda^{-1}).$$

Pour  $C > 0$ , on pose

$$(14) \quad \begin{cases} p_\nu^c(x, \lambda) = \sum_{|\alpha| > \frac{\lambda}{C}} p_{\nu, \alpha} x^\alpha \\ P = P_c + P^c, \quad P^c = \sum_{|\nu| \leq m} \left( \frac{1}{i} \partial_x + i\lambda x \right)^\nu \circ p_\nu^c(x, \lambda) \\ P_c^\sharp = \sum_{\substack{|\nu| \leq m \\ |\alpha| \leq \frac{\lambda}{C}}} (iz)^\nu \lambda^{|\nu|-m} P_{\nu, \alpha} \left( \frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^\alpha. \end{cases}$$

On a alors

$$(15) \quad |p_\nu^c(x, \lambda)| \leq \text{Cte } \lambda^{m-|\nu|} \sum_{j > \frac{\lambda}{C}} \left( \frac{\|x\|}{D_0} \right)^j \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!}, \quad (x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq D_0)$$

et pour  $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , à support dans  $\|x\| \leq r$  avec  $r < D_0$ , d'après (7), (8), (14)

$$(16) \quad \lambda^m P_c^\sharp T(f) = T(Pf) - T(P^c f).$$

Dans la suite, on notera  $T_{\parallel}$  (resp.  $T_{\perp}$ ,  $T^1$ ,  $T^2$ ) la transformation analogue à  $T$  n'agissant que sur les variables  $x'' = (x_3, \dots, x_n)$  (resp.  $x' = (x_1, x_2), x_1, x_2$ ) de sorte qu'on a

$$(17) \quad T = T_{\perp} \otimes T_{\parallel}, \quad T_{\perp} = T_1 \otimes T_2 .$$

On notera de même  $\varphi_{\parallel} = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z'')^2$ ,  $\varphi_{\perp} = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z')^2$ ,  $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_1)^2$ ,  $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_2)^2$ .

### III.2. Polynômes elliptiques

Soit  $A$  un espace compact de paramètres. On note  $\mathcal{P}_{A,d}^m$  l'espace des fonctions continues  $p(a, z)$ ,  $a \in A$ ,  $z \in \mathbb{C}^d$ , polynomiales en  $z$  de degré  $m$  donc vérifiant

$$(18) \quad \exists C, \forall a \in A, \quad |p(a, z)| \leq C(1 + |z|)^m .$$

On dira que  $p \in \mathcal{P}_{A,d}^m$  est elliptique si on a

$$(19) \quad \exists C', \forall a \in A, \forall z \in \mathbb{R}^d, \quad |p(a, z)| \geq C'(1 + |z|)^m .$$

Soit  $p \in \mathcal{P}_{A,d}^m$  elliptique,  $z = (z', z_d)$ ,  $z' \in \mathbb{C}^{d-1}$  et

$$(20) \quad Z(a, z') = \left\{ z_d \in \mathbb{C}; p(a, z', z_d) = 0 \right\} .$$

Il existe alors  $c_0, c_1, c_2 > 0$  tels que, avec

$$U = \left\{ z' \in \mathbb{C}^{d-1}, |\operatorname{Im} z'| \leq c_2(1 + |\operatorname{Re} z'|) \right\}$$

on ait

$$(21) \quad \forall a \in A, \forall z' \in U, \quad Z(a, z') \subset \left\{ |z_d| \leq c_1(1 + |z'|) \text{ et } |\operatorname{Im} z_d| \geq c_0(1 + |z'|) \right\} .$$

En effet, on a  $p = \sum_{|\alpha| \leq m} p_{\alpha}(a) z^{\alpha}$ , où les fonctions  $p_{\alpha}(a)$  sont bornées et

$|p_{(0, \dots, 0, m)}(a)| \geq C'$  d'après (19). Il existe donc  $c_1 > 0$  tel que pour tout  $a, z'$ ,  $p(a, z', z_d) = 0$  implique  $|z_d| \leq c_1(1 + |z'|)$ . De plus avec  $p_m = \sum_{|\alpha|=m} p_{\alpha}(a) z^{\alpha}$  on

a  $|p_m(a, z)| \geq C'|z|^m$  pour  $z \in \mathbb{R}^d$ ,  $a \in A$ . Si (21) était faux, il existerait une suite  $a^k, z^k = (z'^k, z_d^k)$  avec  $a^k \rightarrow a$ ,  $p(a^k, z^k) = 0$ ,  $\frac{|\operatorname{Im} z'^k|}{1 + |\operatorname{Re} z'^k|} \rightarrow 0$ ,  $\frac{|\operatorname{Im} z_d^k|}{1 + |z'^k|} \rightarrow 0$ .

Si  $|z'^k|$  est borné, on peut supposer  $z^k \rightarrow z \in \mathbb{R}^d$  et  $p(a, z) = 0$  contredit (19). Sinon, on peut supposer  $z^k = \omega^k \lambda^k$ ,  $|\omega^k| = 1$ ,  $\lambda^k > 0$ ,  $\lambda^k \rightarrow \infty$ ,  $\omega^k \rightarrow \omega \in \mathbb{R}^d \setminus 0$  d'où  $p_m(a, \omega) = 0$  contradiction.

Si on note

$$\gamma_{z'}^{\pm} = \left\{ z_d; |z_d| = 2c_1(1 + |z'|) \text{ et } \operatorname{Im} z_d \geq \frac{c_0}{2}(1 + |z'|) \right\} \\ \cup \left\{ z_d; |z_d| \leq 2c_1(1 + |z'|) \text{ et } \operatorname{Im} z_d = \frac{c_0}{2}(1 + |z'|) \right\}$$

il existe alors  $c_3 > 0$  tel qu'on ait

$$(22) \quad \forall a \in A, \forall z' \in U, \forall z_d \in \gamma_{z'}^{\pm}, \quad |p(a, z', z_d)| \geq c_3(1 + |z'|)^m .$$

En effet, on a  $p = p_{(0, \dots, 0, m)}(a) \prod_{j=1}^m (z_d - z_d^j(a, z'))$  avec  $Z(a, z') = \{z_d^j(a, z')\}$  et pour  $a \in A, z' \in U, z_d \in \gamma_{z'}^{\pm}, |z_d - z_d^j(a, z')| \geq c(1 + |z'|)$  où  $c > 0$  est indépendant de  $(a, z)$ .

**Définition 1.** Pour  $\ell \in \mathbf{Z}$ , on notera  $\mathcal{R}_{A,d}^{\ell}$  l'espace des fractions rationnelles  $r = \frac{q(a,z)}{p(a,z)}$ ,  $q \in \mathcal{P}_{A,d}^{m'}$ ,  $p \in \mathcal{P}_{A,d}^m$  avec  $p$  elliptique et  $m' - m \leq \ell$ . On remarquera que si  $r \in \mathcal{R}_{A,d}^{\ell}$ ,  $\partial_z^{\alpha} r \in \mathcal{R}_{A,d}^{\ell - |\alpha|}$ .

### III.3. Espaces de Sjöstrand et calcul pseudo-différentiel

Si  $s \rightarrow \gamma(s)$  est une fonction lipschitzienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , affine pour  $|s|$  grand, on notera  $\mathcal{C}^{\gamma}$  le contour complexe

$$(23) \quad \mathcal{C}^{\gamma} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = \gamma(\operatorname{Im} z)\}$$

et pour  $r > 0$ , on définit le voisinage  $\mathcal{C}_r^{\gamma}$  de  $\mathcal{C}^{\gamma}$

$$(24) \quad \mathcal{C}_r^{\gamma} = \{z = u + v \in \mathbb{C}; u \in \mathcal{C}^{\gamma}, |v| < r\} .$$

Pour  $z = (z', z'') \in \mathbb{C}^{d+k}$ ,  $z' = (z_1, \dots, z_d)$ , soient  $\varphi''(z'')$ ,  $\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_d(z_d)$  des fonctions poids  $C^1$ , à valeurs réelles, les  $\varphi_j$  étant positives; on note  $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_d, \varphi'')$ . Soient  $\mathcal{C}^{\gamma_1}, \dots, \mathcal{C}^{\gamma_d}$  des contours de type (23),  $r_1 > 0, \dots, r_d > 0$ ; on pose  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_d)$ ,  $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ , et

$$(25) \quad \mathcal{C}_{\underline{r}}^{\underline{\gamma}} = \left\{ z' = (z_1, \dots, z_d); z_j \in \mathcal{C}_{r_j}^{\gamma_j} \right\} .$$

Soient enfin  $W$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}^k$ , et  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

**Définition 2.** On note  $H_{\underline{\varphi}}^{\sigma}(W; \mathcal{C}_{\underline{r}}^{\underline{\gamma}})$  l'espace vectoriel des fonctions  $f(z', z'', \lambda)$  holomorphes en  $(z', z'') \in \mathcal{C}_{\underline{r}}^{\underline{\gamma}} \times W$ , définies pour  $\lambda \geq \lambda_0$ , telles que, avec

$$g(z, \lambda) = f(z, \lambda)(1 + |z'|)^{\sigma} e^{-\lambda[\varphi''(z'') + \varphi_1(z_1) + \dots + \varphi_d(z_d)]},$$

et pour  $I = \{i_1, \dots, i_\ell\}$  partie de  $\{1, \dots, d\}$

$$(26) \quad N_I(f)(\lambda) = \sup_{z'' \in W, |v_j| < r_j} \sup_{u_k, k \notin I} \left[ \int |g(\dots, \gamma_j(u_j) + iu_j + iv_j, \dots, z'', \lambda)|^2 du_{i_1}, \dots, du_{i_\ell} \right]^{1/2}$$

on ait

$$(27) \quad \exists B, B', \quad \|f\|(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_I N_I(f)(\lambda) \leq B\lambda^{B'}.$$

Pour  $\delta > 0$ , on pose

$$(28) \quad \Omega(\mathcal{C}_r^\gamma, \delta) = \left\{ z' = u' + v' \in \mathbb{C}^d; u' \in \mathcal{C}_r^\gamma, |v'| \leq \delta[1 + |u'|] \right\}.$$

Soit  $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{R}^d$ .

**Définition 3.** On note  $\mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \mathcal{C}_r^\gamma, \delta)$  l'espace vectoriel des fonctions  $f(z', z'', \lambda)$ , holomorphes en  $(z', z'') \in \mathcal{C}_r^\gamma \times W$ , définies pour  $\lambda \geq \lambda_0$  telles qu'on ait

$$(29) \quad f = \sum_{j=1}^d f_j, \quad f_j(z', z'', \lambda) = \int_{A_j} r_j(a_j, iz') h_j(\hat{z}'_j, z'', \lambda, a_j) d\mu_j(a_j)$$

où  $A_j$  est un espace compact de paramètres,  $d\mu_j$  une mesure bornée sur  $A_j$ ,  $r_j \in \mathcal{R}_{A_j, d}^{\ell_j}$  (voir § III.2, définition 1) et

$$(30) \quad \exists C, \quad \forall j, \quad \forall a_j \in A_j, \quad \forall z' \in \Omega(\mathcal{C}_r^\gamma, \delta) \quad |r_j(a_j, iz')| \leq C(1 + |z'|)^{\ell_j},$$

$$\hat{z}'_j = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_d), \quad h_j(\cdot, a_j) \in H_{\underline{\varphi}_j}^{\sigma_j}(W; \prod_{\ell \neq j} \mathcal{C}_r^{\gamma_\ell}),$$

$$\underline{\varphi}_j = (\dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots; \varphi''), \quad a_j \mapsto h_j(\hat{z}'_j, z'', \lambda, a_j) \text{ continu en } a_j \text{ et}$$

$$(31) \quad \exists B, B', \quad \forall j, \quad \forall a_j \in A_j, \quad \|h_j\|(\lambda, a_j) \leq B\lambda^{B'}.$$

◇

**Lemme 1.** Avec les notations précédentes, on a  $\mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}} \subset H_{\underline{\varphi}}^\sigma$  pour  $\sup_j (\sigma + \ell_j + \frac{1}{2}) < 0$ ,  $\sup_j (\sigma + \ell_j + \frac{1}{2} - \sigma_j) \leq 0$ .

**PREUVE.** Comme les fonctions poids  $\varphi_j$  sont positives, le lemme résulte de  $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x| + |y|)^{-a} dy = \text{Cte}(a)(1 + |x|)^{1-a}$  pour  $a > 1$ .

Dans la suite de ce paragraphe, consacré à l'action des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces précédents, on fixe les contours  $\gamma_1, \dots, \gamma_d$  ainsi que les fonctions poids  $\varphi'', \varphi_1, \dots, \varphi_d$ . On pose  $H^\sigma(W; \underline{r}) = H_{\underline{r}}^\sigma(W; \mathcal{C}_{\underline{r}}^\gamma)$ ,  $\mathcal{R}H^{\sigma, \ell}(W; \underline{r}, \delta) = \mathcal{R}H_{\underline{r}}^{\sigma, \ell}(W; \mathcal{C}_{\underline{r}}^\gamma, \delta)$ ,  $\Omega(\underline{r}, \delta) = \Omega(\mathcal{C}_{\underline{r}}^\gamma, \delta)$ . Soit  $D > 0$ .

**Définition 4.** On note  $\mathcal{E}^\sigma(W; \underline{r}, \delta, D)$  l'espace des séries formelles

$$(32) \quad q = \sum_{\ell \geq 0} (i\lambda)^{-\ell} q_\ell(z, \zeta, \lambda)$$

où les fonctions  $q_\ell$  sont holomorphes en  $z = (z', z'') \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}^{d+k}$ ,  $\|\zeta\| = \sup |\zeta_j| < D$ , définies pour  $\lambda \geq \lambda_0$  et vérifient

$$(33) \quad \exists A, B, \quad \forall \ell, \quad \forall z, \zeta, \lambda, \quad |q_\ell(z, \zeta, \lambda)| \leq AB^\ell \ell^\ell (1 + |z|)^{\sigma - \ell}.$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on désigne par  $p^\sharp(z, \zeta, \lambda)$  une fonction polynomiale en  $z \in \mathbb{C}^{d+k}$  de degré 2, holomorphe en  $\zeta \in \mathbb{C}^{d+k}$ ,  $\|\zeta\| < D_0$ , définie pour  $\lambda \geq \lambda_0$  telle que

$$(34) \quad \text{Pour tout } \alpha \text{ avec } |\alpha| = 2, \quad \partial_z^\alpha p^\sharp \text{ est indépendant de } \lambda$$

$$(35) \quad \exists C; \quad \forall z, \zeta, \lambda, \quad |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \leq C(1 + |z|)^2.$$

Pour  $q \in \mathcal{E}^\sigma(W; \underline{r}, \delta, D)$  on définit le composé  $q \circ p^\sharp = q'$  par

$$(36) \quad q' = \sum_{\ell \geq 0} (i\lambda)^{-\ell} q'_\ell, \quad q'_\ell = \sum_{i+|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha q_i \partial_z^\alpha p^\sharp.$$

Les inégalités de Cauchy entraînent  $q' \in \mathcal{E}^{\sigma+2}(W; \underline{r}, \delta, D')$  pour  $D' < \inf(D, D_0)$ , puisque  $|\partial_z^\alpha p^\sharp| \leq C(1 + |z|)^{2-|\alpha|}$ .

On considèrera  $p^\sharp$  comme élément de  $\mathcal{E}^2(W; \underline{r}, \delta, D_0)$  en posant  $p_\ell^\sharp = 0$  pour  $\ell \neq 0$ .

**Définition 5.** Pour  $q \in \mathcal{E}^\sigma(W; \underline{r}, \delta, D)$  et  $p^\sharp$  comme précédemment on définit les opérateurs différentiels en  $z \in W \times \Omega(\underline{r}, \delta)$

$$(37) \quad \mathcal{D}(\ell, \alpha; q) = (i\lambda)^{-\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha q_\ell(z, 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha$$

$$(38) \quad \text{Op}(q, C_1, C_2) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{C_1}{C_2} \\ \ell \leq \frac{C_1}{C_2}}} \mathcal{D}(\ell, \alpha; q)$$

$$(39) \quad \mathcal{D}^0(\ell, \alpha_1, \alpha_2, \beta; q, p^\sharp) = (i\lambda)^{-(\ell+|\alpha_1|)} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \beta!} \partial_\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2} q_\ell(z, 0, \lambda) \partial_z^{\alpha_1} \partial_\zeta^\beta p^\sharp(z, 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_2 + \beta}.$$

◇

**Lemme 2.** On a

$$(40) \quad \begin{cases} \text{Op}(q, C_1, C_2) \circ \text{Op}(p^\sharp, C_1, C_2) - \text{Op}(q \circ p^\sharp, C_1, C_2) = \\ \sum_{t \in T_+} \mathcal{D}^0(t; q, p^\sharp) - \sum_{t \in T_-} \mathcal{D}^0(t; q, p^\sharp) , \end{cases}$$

avec  $T_+ = S_+ \setminus S_-$ ,  $T_- = S_- \setminus S_+$

$$(41) \quad \begin{cases} S_+ = \left\{ \ell \leq \frac{\lambda}{C_2}, |\alpha_1 + \alpha_2| \leq \frac{\lambda}{C_1}, |\beta| \leq \frac{\lambda}{C_1} \right\} \\ S_- = \left\{ \ell + |\alpha_1| \leq \frac{\lambda}{C_2}, |\alpha_2 + \beta| \leq \frac{\lambda}{C_1} \right\} . \end{cases}$$

PREUVE. En effet, on a

$$(42) \quad \begin{cases} \text{Op}(q, C_1, C_2) \circ \text{Op}(p^\sharp, C_1, C_2) = \sum_{t \in S_+} \mathcal{D}^0(t; q, p^\sharp) \\ \text{Op}(q \circ p^\sharp, C_1, C_2) = \sum_{t \in S_-} \mathcal{D}^0(t; q, p^\sharp) . \end{cases}$$

◇

**Lemme 3.** Soient  $0 < D' < D \leq D_0$ . On suppose

$$(43) \quad \exists c_0 > 0, \quad |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c_0(1 + |z|)^2 \text{ pour } \|\zeta\| \leq D, \quad z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W .$$

Il existe alors  $q \in \mathcal{E}^{-2}(W; \underline{r}, \delta, D')$  tel que  $q \circ p^\sharp = 1$ .

PREUVE. On définit  $q = \sum_{\ell \geq 0} (i\lambda)^{-\ell} q_\ell(z, \zeta, \lambda)$  comme d'habitude par

$$(44) \quad q_0 = \frac{1}{p^\sharp}, \quad q_\ell = - \sum_{\substack{|\alpha| + i = \ell \\ i \neq \ell}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha q_i(\partial_z^\alpha p^\sharp) / p^\sharp .$$

En suivant la preuve de l'inversibilité des opérateurs elliptiques de Sjöstrand [S2] on pose pour  $u \in [0, 1]$ ,

$$|f|_u(z) = \sup \left\{ |f(z, \zeta)|; \|\zeta\| \leq D'u + (1 - u)D \right\} .$$

Il existe  $C_0 > 0$  tel que pour tout  $\alpha$ , et tout  $u' < u$  on ait  $|\frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha f|_u \leq C_0^{|\alpha|} \frac{1}{(u - u')^{|\alpha|}} |f|_{u'}$ , ainsi que  $C_1$  tel que pour tout  $\alpha$   $\left| \frac{\partial_z^\alpha p^\sharp}{p^\sharp} \right|_0 \leq C_1(1 + |z|)^{-|\alpha|}$ . Il suffit de vérifier qu'il existe  $\theta$  (assez grand) tel que

$$(45) \quad \forall \ell, \forall u > 0, \forall z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W, \quad |q_\ell|_u \leq \theta^{\ell+1} \ell^\ell \left( \frac{1}{u} \right)^\ell (1 + |z|)^{-2-\ell} .$$

Pour  $\ell = 0$ , cela résulte de (43). Par récurrence en utilisant (44) on a, avec  $u' = \frac{i}{i+|\alpha|} u < u$

$$\left| \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} q_i \partial_z^{\alpha} p^{\#} / p^{\#} \right|_u \leq C_1 (1 + |z|)^{-2-\ell} C_0^{|\alpha|} \frac{1}{u^{\ell}} \ell^{\ell} \theta^{i+1} \left( \frac{1}{|\alpha|} \right)^{|\alpha|}$$

et il suffit donc de choisir  $\theta$  tel que  $C_1 \sum_{0 < |\alpha|} \left( \frac{C_0}{\theta^{|\alpha|}} \right)^{|\alpha|} < 1$ .

◇

On suppose à présent qu'il existe  $D_1 > 0$  tel que

$$(46) \quad \sup_W \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''}{\partial z''} \right\| \leq D_1 \text{ et } \forall j, \forall z_j \in \mathcal{C}_{r_j}^{\gamma_j} \quad \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_j} \right| \leq D_1$$

On posera  $\varphi = \varphi'' + \varphi_1 + \dots + \varphi_d$  et on se donne  $W' \subset\subset W$  et  $\underline{r}' = (r'_1, \dots, r'_d)$ ,  $0 < r'_j < r_j$ . On se donne également un  $D_2 > 0$  et on suppose

$$(47) \quad 0 < D_1 < D_2 < D_0 .$$

Pour  $D \in [D_1, D_2[$  on désigne par  $C_D$  une constante positive telle que  $z \in \mathcal{C}_{\underline{r}'}^{\gamma} \times W'$  et  $\|w\| \leq (DC_D)^{-1}$  impliquent  $z + w \in \mathcal{C}_{\underline{r}'}^{\gamma} \times W$ .

Notons  $\| \cdot \|_s$  (resp.  $\| \cdot \|'_s$ ) la norme dans  $H^s(W; \underline{r})$  (resp.  $H^s(W'; \underline{r}')$ ) (voir (26)). Donnons nous  $f \in H^s(W; \underline{r})$  et  $g \in \mathcal{E}^{\sigma}(W; \underline{r}, \delta, D_2)$ . Pour  $z \in \mathcal{C}_{\underline{r}'}^{\gamma} \times W'$ , soit  $\gamma_z$  le polydisque de centre  $z$ , de polyrayon  $r_{\alpha_j} = \alpha_j (\lambda D)^{-1}$ ; pour  $|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_D}$  on a  $\sup_j r_{\alpha_j} \leq (DC_D)^{-1}$ , donc  $\gamma_z \subset \mathcal{C}_{\underline{r}'}^{\gamma} \times W$ . Avec  $g = f(1 + |z|)^s e^{-\lambda \varphi}$ , les inégalités de Cauchy impliquent

$$(48) \quad \left| \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha} f \right| (1 + |z|)^s e^{-\lambda \varphi} \leq \frac{\alpha!}{\lambda^{|\alpha|}} \prod_j r_{\alpha_j}^{-\alpha_j} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{d+k} \int_{\gamma_z} \frac{|g(w, \lambda)|}{\prod (|w_j - z_j|)} \cdot M_z$$

avec  $M_z = \sup \left\{ \left( \frac{1+|z|}{1+|w|} \right)^s e^{\lambda[\varphi(w) - \varphi(z)]}; w \in \gamma_z \right\}$ . Comme

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(\varphi(w) - \varphi(z))| &= \left| \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} (z + \theta(w - z)) d\theta \cdot (w - z) \right| \\ &\leq D_1 \sum r_{\alpha_j} = \frac{|\alpha| D_1}{\lambda D} \leq \frac{|\alpha|}{\lambda} , \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Stirling, et la notation  $\langle \alpha \rangle = \Pi(1 + \alpha_j)^{1/2}$ , on déduit de (48)

$$(49) \quad \left\| \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha} f \right\|'_s \leq \text{Cte } D^{|\alpha|} \langle \alpha \rangle \|f\|_s \text{ pour } |\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_D}$$

où Cte ne dépend que de  $s$  (pour  $\underline{r}$  (resp.  $W$ ) restant dans un compact fixe de  $\mathbb{R}^d$  (resp.  $\mathbb{C}^k$ )). Il en résulte,  $q$  vérifiant (33)

$$(50) \quad \|\mathcal{D}(\ell, \alpha, q) f\|'_{s+\ell-\sigma} \leq \text{Cte} AB^\ell \ell^\ell \lambda^{-\ell} \left(\frac{D}{D_2}\right)^{|\alpha|} \langle \alpha \rangle \|f\|_s \quad \left(|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_D}\right)$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{D}^0(\ell, \alpha_1, \alpha_2, \beta; q, p^\sharp) f\|'_{s+\ell-\sigma+|\alpha_1|-2} \\ \leq \text{Cte} AB^\ell \ell^\ell |\lambda|^{-(\ell+|\alpha_1|)} \left(\frac{1}{D_2}\right)^{|\alpha_1|} \left(\frac{D}{D_2}\right)^{|\alpha_2|} \left(\frac{D}{D_0}\right)^{|\beta|} \langle \alpha_2 + \beta \rangle \|f\|_s \\ \text{pour } |\alpha_2 + \beta| \leq \frac{\lambda}{C_D} . \end{array} \right.$$

**Définition 6.** On note  $\mathcal{B}^m(W; \underline{r}, \delta)$  l'espace somme  $H^m(W; \underline{r}) + \mathcal{R}H^{\underline{z}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta)$  avec  $\sigma_j = 0$ ,  $\ell_j = -m$  pour tout  $j$ .

◇

Alors, avec les notations précédentes, on a :

**Proposition 1.** Soit  $p^\sharp$  vérifiant (34) et  $p_2^\sharp(z, \zeta) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{z^\alpha}{\alpha!} \partial_z^\alpha p^\sharp|_{z=0}$ .

Soit  $D_3 \in ]D_2, D_0[$ . On suppose

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c_0 > 0 \text{ tel que } |p_2^\sharp(z', 0, \zeta)| \geq c_0(1 + |z'|^2) \\ \text{pour tout } z' \in i\mathbb{R}^d \cup \Omega(\underline{r}, \delta) \text{ et tout } \zeta, \|\zeta\| \leq D_3 . \end{array} \right.$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c_1 > 0 \text{ tel que } |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c_1(1 + |z|^2) \\ \text{pour tout } z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W, \text{ et tout } \zeta, \|\zeta\| \leq D_3 . \end{array} \right.$$

Soit  $q \in \mathcal{E}^{-2}(W; \underline{r}, \delta, D_2)$  tel que  $q \circ p^\sharp = 1$  (obtenu d'après (53) par le lemme 3) et  $B$  la constante définissant la croissance des  $q_\ell$  (voir (33)).

Alors pour  $C_1 \geq 2C_D$ ,  $C_2 \geq 2B$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour  $F \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta)$  on ait

$$(54) \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Op}(p^\sharp, C_1, C_2) F \in \mathcal{B}^0(W; \underline{r}', \delta)$$

et

$$(55) \quad e^{\varepsilon\lambda} [F - \text{Op}(q, C_1, C_2) G] \in \mathcal{B}^2(W'; \underline{r}', \delta) .$$



PREUVE. On écrit  $F = F_1 + F_2$ ,  $F_1 \in H^2(W, \underline{r})$ ,  $F_2 \in \mathcal{R}H^{0, \ell}(W; \underline{r}, \delta)$ ,  $\ell_j = -2$  pour tout  $j$ ,  $F_2 = \sum_j F_{2,j}$ ,  $F_{2,j} = \int_{A_j} r_j(a_j, iz') h_j(\hat{z}'_j, z'', \lambda, a_j) d\mu_j(a_j)$  (voir définition 3);

Avec  $E_j = H^0_{\varphi_j} \left( W, \prod_{\ell \neq j} C_{r'_\ell}^{\gamma_\ell} \right)$ ,  $E'_j = H^0_{\varphi'_j} \left( W', \prod_{\ell \neq j} C_{r'_\ell}^{\gamma'_\ell} \right)$ , on a donc  $\sup_{a_j} \|h_j(\cdot, a_j)\|_{E_j} \leq c\lambda^{c'}$ . On a

$$(56) \quad \text{Op}(p^\#, C_1, C_2)F = \sum_{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_1}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p^\#(z, 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha F = G$$

et on écrira  $G = G_1 + G_2$  en remplaçant  $F$  par  $F_1 + F_2$  dans (56).

Puisque  $|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_1} \leq \frac{\lambda}{C_D}$  on a par (49)

$$\left\| \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha F_1 \right\|'_2 \leq \text{Cte } D^{|\alpha|} \langle \alpha \rangle \|F_1\|_2$$

et par (35),

$$\left| \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p^\#(z, 0, \lambda) \right| \leq \text{Cte } D_0^{-|\alpha|} (1 + |z|)^2$$

donc puisque  $D < D_0$ , on a  $G_1 \in H^0(W', \underline{r}')$ . On a aussi  $G_2 = \sum G_{2,j}$  avec

$$(57) \quad G_{2,j} = \sum_{|\alpha_1 + \alpha_2| \leq \frac{\lambda}{C_1}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \partial_\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2} p^\#(z, 0, \lambda) \int_{A_j} \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_1} r_j \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_2} h_j d\mu(a_j) .$$

D'après (30), on a  $|r_j(\cdot, iz')| \leq \text{Cte}(1 + |z'|)^{-2}$  pour  $z' \in \Omega(\underline{r}, \delta)$ ; pour  $|\alpha_1| \geq 1$ , écrivons  $\alpha_1 = \beta + \beta'$  avec  $|\beta'| = 1$ ; on a alors  $|\partial_z^{\beta'} r_j(\cdot, iz')| \leq \frac{\text{Cte}}{\delta} (1 + |z'|)^{-3}$  pour  $z' \in \mathcal{C}_{\underline{r}}^\gamma$  d'après (28), donc en utilisant la formule de Cauchy sur le polydisque de polyrayon  $\rho_j = (DC_D)^{-1}$ , on obtient

$$\left| \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_1} r_j(\cdot, iz') \right| \leq \frac{\text{Cte}}{\delta} (1 + |z'|)^{-3} \lambda^{-|\alpha_1|} \alpha_1! (DC_D)^{|\alpha_1| - 1}$$

pour  $z \in \mathcal{C}_{\underline{r}'}^\gamma$ . On a aussi

$$(58) \quad \left\| \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_2} h_j \right\|_{E'_j} \leq \text{Cte } D^{|\alpha_2|} \langle \alpha_2 \rangle \|h_j\|_{E_j} .$$

Comme la multiplication par  $\mathcal{O}[(1 + |z'|)^{-1}]$  envoie  $E'_j$  dans  $H^0(W', \underline{r}')$ , en notant  $G_{2,j} = G_{2,j}^0 + G_{2,j}^1$ , où  $G_{2,j}^1$  est défini par la somme pour  $|\alpha_1| \geq 1$  dans (57), on a

$$(59) \quad \begin{cases} \|G_{2,j}^1\|'_0 \leq \frac{\text{Cte}}{\delta DC_D} \Theta_0(\lambda) \|h_j\|_{E_j} \\ \Theta_0(\lambda) = \sum_{|\alpha_1 + \alpha_2| \leq \frac{\lambda}{C_1}} \left( \frac{DC_D}{\lambda D_0} \right)^{|\alpha_1|} \left( \frac{D}{D_0} \right)^{|\alpha_2|} \langle \alpha_2 \rangle \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_2!} . \end{cases}$$

Pour vérifier que  $G_{2,j}^1 \in H^0(W', r')$ , il suffit de prouver que  $\Theta(\lambda)$  est borné; pour cela, nous utilisons une stratégie de fonctions majorantes. On désigne par *pol* des fonctions polynomiales, et par  $m = d + k$  le nombre total de variables. Pour  $X \in [0, 1[$  on a

$$(60) \quad \sum_{\alpha_2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} X^{|\alpha_2|} = \left( \frac{1}{1-X} \right)^{m+|\alpha_1|}$$

donc  $\sum_{|\alpha_1|=j, |\alpha_2|=k} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_2!} \leq \frac{(j+k)!}{k!} \text{pol}(j, k)$ . Si on fixe  $\gamma \in ]\frac{D}{D_0}, 1[$  on a donc  $\Theta_0(\lambda) \leq \text{Cte} \Theta_1(\lambda)$

$$(61) \quad \Theta_1(\lambda) = \sum_{j+k \leq \frac{1}{C_1}} \left( \frac{\gamma C_D}{\lambda} \right)^j \gamma^k \frac{(j+k)!}{k!}.$$

Or avec  $\Gamma(x, \lambda) = \frac{1}{(1-x)} e^{\gamma \lambda x}$ , on a

$$(62) \quad \Theta_1(\lambda) = \sum_{n \leq \frac{1}{C_1}} \left[ \left( \frac{1}{\lambda} \partial_x \right)^n \Gamma \right] \Gamma^{-1} \left( x = 1 - \frac{1}{\gamma C_D} \right)$$

et pour  $x < 1 - \frac{n}{\lambda}$ , en utilisant la formule de Cauchy sur le cercle de centre  $x$ , de rayon  $\frac{n}{\lambda}$ , on obtient

$$\left| \left( \frac{1}{\lambda} \partial_x \right)^n \Gamma(x) \right| \leq n! n^{-n} e^{\gamma n} e^{\gamma \lambda x} \left( 1 - x - \frac{n}{\lambda} \right)^{-1}$$

donc

$$(63) \quad \Theta_1(\lambda) \leq \sum_{n \leq \frac{1}{C_1}} n! n^{-n} e^{\gamma n} \left( 1 - \frac{n \gamma C_D}{\lambda} \right)^{-1}$$

et  $\Theta_1(\lambda)$  borné résulte de  $\gamma < 1$  et  $C_1 \geq C_D$ .

On a aussi

$$(64) \quad \begin{cases} G_{2,j}^0 = (2i\pi)^{-n} \int_{K_\zeta} \frac{d\zeta}{\prod \zeta_j} \int_{A_j} d\mu(a_j) p^\sharp(z, \zeta, \lambda) r_j \hat{h}_j \\ \hat{h}_j = \sum_{|\alpha| \leq \frac{1}{C}} \frac{1}{\zeta^\alpha} \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha h_j \end{cases}$$

où  $K_\zeta$  est le polydisque  $|\zeta| = D_3$ . Comme  $D < D_3$ , on a d'après (58)  $\hat{h}_j \in E_j'$  uniformément en  $(\zeta, a_j) \in K_\zeta \times A_j$ . En prenant comme espace de paramètres  $K_\zeta \times A_j$ ,  $G_{2,j}^0 \in \mathcal{B}^0(W'; r', \delta)$  résulte donc de

$$(65) \quad \begin{cases} p^\sharp(z, \zeta, \lambda) r_j = p_2^\sharp(z', 0, \zeta) r_j + [p^\sharp(z, \zeta, \lambda) - p_2^\sharp(z', 0, \zeta)] r_j \\ |p^\sharp(z, \zeta, \lambda) - p_2^\sharp(z', 0, \zeta)| \leq \text{Cte}(1 + |z'|) \text{ pour } (z, \zeta) \in \mathcal{C}_{r'}^\gamma \times W' \times K_\zeta. \end{cases}$$

On a donc prouvé l'assertion (54). Vérifions à présent (55). D'après le lemme 2, dont nous conservons les notations, et puisque  $q \circ p^\sharp = 1$  et que pour tout  $C_1, C_2$ ,  $\text{Op}(1, C_1, C_2) = \text{Id}$ , on a

$$(66) \quad F - \text{Op}(q, C_1, C_2)G = \sum_{t \in T_-} \mathcal{D}^0(t, q, p^\sharp)[F] - \sum_{t \in T_+} \mathcal{D}^0(t, q, p^\sharp)[F] .$$

Pour  $t \in T_+ \cup T_-$ , avec  $\mathcal{D}^0(t, \cdot) \neq 0$ ,  $t = (\ell, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ , on a toujours  $|\alpha_2 + \beta| \leq \frac{2\lambda}{C_1} \leq \frac{\lambda}{C_D}$ ,  $\ell \leq \frac{\lambda}{C_2}$ ,  $|\alpha_1| \leq 2$  (car  $p^\sharp$  est de degré 2 en  $z$ ) et  $C_1, C_2$  étant donnés il existe  $\nu > 0$  tel que, pour  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $\ell + |\alpha_2| + |\beta| \geq \nu\lambda$ . De plus, comme  $\text{Card}(T_+ \cup T_-)$  est polynomial en  $\lambda$ , il suffit d'obtenir une estimation exponentielle sur chaque terme du membre de droite de (66). D'après (51) on a pour  $t \in T_+ \cup T_-$

$$(67) \quad \|\mathcal{D}^0(t, q, p^\sharp)F_1\|'_2 \leq \text{Cte} \left(\frac{1}{D_2\lambda}\right)^{|\alpha_1|} \left(\frac{B\ell}{\lambda}\right)^\ell \left(\frac{D}{D_2}\right)^{|\alpha_2+\beta|} \langle \alpha_2 + \beta \rangle \|F_1\|_2$$

et (55) résulte de  $D < D_2$ ,  $\frac{B\ell}{\lambda} \leq \frac{B}{C_2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $\ell + |\alpha_2 + \beta| \geq \nu\lambda$ .

Il reste à traiter les termes de la forme

$$(68) \quad \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \beta} (i\lambda)^{-(\ell + |\alpha_1|)} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \beta!} \partial_\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2} q_\ell \partial_z^{\alpha_1} \partial_\zeta^\beta p^\sharp \int_{A_j} \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\gamma_1} r_j \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\gamma_2} h_j d\mu(a_j)$$

qui sont majorés par

$$(69) \quad \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_2 + \beta} \text{Cte} \lambda^{-(\ell + |\alpha_1|)} AB^\ell \ell^\ell \left(\frac{1}{D_2}\right)^{|\alpha_1 + \alpha_2|} \left(\frac{1}{D_0}\right)^{|\beta|} (1 + |z|)^{-(\ell + |\alpha_1|)} \int_{A_j} \left|\left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\gamma_1} r_j\right| \left|\left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\gamma_2} h_j\right| d\mu(a_j)$$

et par suite les termes pour lesquels  $\ell + |\alpha_1| \neq 0$  ou  $\gamma_1 \neq 0$  se traitent comme précédemment. Comme  $q_0 = (p^\sharp)^{-1}$  il reste à estimer, avec  $|\alpha_2 + \beta| \geq \nu\lambda$

$$(70) \quad \begin{cases} \int_{K_\zeta} \frac{d\zeta}{\Pi\zeta_j} \int_{K_\eta} \frac{d\eta}{\Pi\eta_j} \int_{A_j} d\mu(a_j) \frac{p^\sharp(z, \zeta, \lambda)}{p^\sharp(z, \eta, \lambda)} r_j \cdot \tilde{h}_{j, \alpha_2, \beta} \\ \tilde{h}_{j, \alpha_2, \beta} = \frac{1}{\zeta^\beta} \frac{1}{\eta^{\alpha_2}} \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\alpha_2 + \beta} h_j \end{cases}$$

où  $K_\zeta, K_\eta$  sont les polydisques de polyrayon  $D_3$  donc

$$|\tilde{h}_{j, \alpha_2, \beta}|_{E'_j} \leq \text{Cte} \left(\frac{D}{D_3}\right)^{|\alpha_2 + \beta|} \langle \alpha_2 + \beta \rangle |h_j|_{E_j}$$

et il suffit alors de remarquer qu'on a

$$(71) \quad \frac{p^\sharp(z, \zeta, \lambda)}{p^\sharp(z, \eta, \lambda)} = \frac{p^\sharp(z, \zeta, \lambda)}{p_2^\sharp(z', 0, \eta)} + p^\sharp(z, \zeta, \lambda) \left[ \frac{p_2^\sharp(z', 0, \eta) - p^\sharp(z, \eta, \lambda)}{p^\sharp(z, \eta, \lambda) p_2^\sharp(z', 0, \eta)} \right]$$

le deuxième terme du membre de droite de (71) étant  $O((1+|z'|)^{-1})$  pour  $z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W$ ,  $\zeta \in K_\zeta$ ,  $\eta \in K_\eta$  d'après (52) et (53), puis de réutiliser (65) pour le premier terme, ce qui achève la preuve de la proposition.  $\diamond$

**Remarque :** Il résulte de la preuve de (54) que pour  $C'_1, C'_2$  vérifiant également  $C'_1 \geq 2C_D, C'_2 \geq 2B$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour  $F \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta)$  on a

$$(72) \quad e^{\varepsilon\lambda} \left[ \text{Op}(p^\sharp, C'_1, C'_2)F - \text{Op}(p^\sharp, C_1, C_2)F \right] \in \mathcal{B}^0(W; \underline{r}', \delta) .$$

$\diamond$

On a également :

**Proposition 2.** Soit  $\mathcal{N}^\sharp(z, \zeta, \lambda)$  est une fonction polynomiale en  $z \in \mathbb{C}^{d+k}$  de degré 1, holomorphe en  $\zeta \in \mathbb{C}^{d+k}$ ,  $\|\zeta\| \leq D_0$ , définie pour  $\lambda \geq \lambda_0$ , telle que

$$(73) \quad \text{Pour tout } \alpha, |\alpha| = 1, \partial_z^\alpha \mathcal{N}^\sharp \text{ est indépendant de } \lambda$$

$$(74) \quad \exists C, \quad \forall z, \zeta, \lambda, \quad |\mathcal{N}^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \leq C(1 + |z|).$$

Soit  $\mathcal{N}_C^\sharp = \sum_{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha \mathcal{N}^\sharp(z, 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha$ . Alors pour  $C \geq 2C_D$  et  $F \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta)$  on a  $\mathcal{N}_C^\sharp F \in \mathcal{B}^1(W'; \underline{r}', \delta)$ .

La preuve de cette proposition est analogue à la preuve de la proposition 1.

### III.4. Le Projecteur de Hilbert

Soit  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  et pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \geq 1$ ,

$$T_1 f(z, \lambda) = \int e^{\lambda x z - \lambda \frac{x^2}{2}} f(x) dx .$$

On se propose d'exprimer  $T_1(1_{x \geq 0} f(x))$  en fonction de  $T_1(f(x))$ .

Soit  $f^+(x) = 1_{x \geq 0} f$ ,  $z = a + ib$ ,  $f_{\lambda, a} = e^{-\frac{\lambda}{2}(a-x)^2} f$ ,  $f_{\lambda, a}^+ = e^{-\frac{\lambda}{2}(a-x)^2} f_+$ . On a pour  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\hat{f}_{\lambda, a}(\zeta)$  étant holomorphe en  $\zeta \in \mathbb{C}$

$$(75) \quad \begin{cases} (T_1 f)(a + ib, \lambda) = e^{\lambda \frac{a^2}{2}} \hat{f}_{\lambda, a}(-\lambda b) \\ (T_1 f^+)(a + ib, \lambda) = e^{\lambda \frac{a^2}{2}} \hat{f}_{\lambda, a}^+(-\lambda b) \end{cases}$$

$$(76) \quad \hat{f}_{\lambda,a}^+(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi - \eta} \widehat{f_{\lambda,a}}(\eta) d\eta \text{ dans } \text{Im } \xi < 0 .$$

Il en résulte, pour  $\text{Im } b > 0$

$$(77) \quad (T_1 f^+)(a + ib, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c - b} (T_1 f)(a + ic, \lambda) dc$$

c'est-à-dire

$$(78) \quad (T_1 f^+)(z, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} \frac{1}{x - z} (T_1 f)(x, \lambda) dx$$

où  $\gamma_z$  est un contour de la forme  $\gamma_z = \{x = \text{Re } z + \varepsilon + it, t \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ . En particulier on a dans  $\text{Re } z < 0$ ,  $T_1 f^+ = \Pi(T_1 f)$  avec

$$(79) \quad \Pi(f)(z, \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + i\zeta} f(-i\zeta, \lambda) d\zeta .$$

### III.5. Réduction microlocale et système de Calderón

On conserve les notations du § II.1. Soit  $u(x) \in H^1(M)$  une solution définie près de  $x = 0$  du problème

$$(80) \quad Pu = 0, \quad u|_{\partial M} = 0 .$$

Rappelons que  $P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'')$  a pour symbole principal  $p(x, \xi)$ . On note  $\mathcal{N}_1$  (resp.  $\mathcal{N}_2$ ) le champ de vecteurs de dérivation normale pour  $P$  sur  $x_2 = 0$  (resp.  $x_1 = 0$ )

$$(81) \quad \mathcal{N}_1 = \frac{i}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2}(x, D); \quad \mathcal{N}_2 = \frac{i}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x, D) .$$

D'après la proposition 1, § II, les traces

$$(82) \quad \begin{cases} \tilde{g}_1(x_1, x'') = \mathcal{N}_1 u|_{x_2=\pm 0, x_1>0} \\ \tilde{g}_2(x_2, x'') = \mathcal{N}_2 u|_{x_1=\pm 0, x_2>0} \end{cases}$$

où le signe + correspond au cas intérieur  $M = M^i$ , le signe - au cas extérieur  $M = M^e$  sont bien définis et appartiennent près de l'origine à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, L_+^2)$ . Soit  $\underline{u} \in H^1$  le prolongement de  $u$  par zéro à  $\mathbb{R}^n \setminus M$  près de  $x = 0$ . Comme  $P\underline{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, H^{-1})$  près de  $x = 0$  et qu'aucune distribution non nulle de la forme  $T(x'')\delta_{x_1=x_2=0}$  n'appartient à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, H^{-1})$ , en notant  $g_1$  (resp.  $g_2$ ) le prolongement de  $\tilde{g}_1$  (resp.  $\tilde{g}_2$ ) à  $x_1 < 0$  (resp.  $x_2 < 0$ ) par zéro, on a l'identité près de  $x = 0$

$$(83) \quad P\underline{u} = \varepsilon(g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2); \quad \delta_1 = \delta_{x_2=0}, \delta_2 = \delta_{x_1=0} ,$$

avec  $\varepsilon = -1$  si  $M = M^i$ ,  $\varepsilon = +1$  si  $M = M^e$ .

On posera  $g\delta = \varepsilon(g_1\delta_1 + g_2\delta_2)$ .

On fixe  $D_0 > 0$  tel que les coefficients de  $P$  soient holomorphes et bornés au voisinage de  $\|x\| \leq D_0$ , et tel que

$$(84) \quad \exists c > 0, \quad |p_1(x, \xi')| \geq c|\xi'|^2, \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq D_0.$$

Soit  $r_0$  tel que  $0 < r_0 \ll D_0$  et  $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  égal à 1 pour  $|x| \leq \frac{r_0}{2}$ , nul pour  $|x| \geq r_0$ . On a l'égalité dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$(85) \quad P\psi\underline{u} = \psi g\delta + [P, \psi]\underline{u}.$$

Soit  $A$  l'opérateur pseudo-différentiel en  $x'$ , dépendant de  $\lambda \geq 1$

$$(86) \quad Af(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{i\lambda(x'-y')\xi'} \frac{f(y', x'')}{1 + p_1(x, \xi')} dy' d\xi'.$$

**Lemme 4.** Soit  $\theta(x) \in C_0^\infty(|x| \leq 2r_0)$ , égal à 1 pour  $|x| \leq \frac{3r_0}{2}$ . On a

$$(87) \quad \psi\underline{u} \equiv \theta A(\psi g\delta) \text{ modulo } \mathcal{D}'_\lambda(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, H^2)$$

où  $\mathcal{D}'_\lambda(\mathbb{R}^{n-2}, H^s) = \left\{ u(x, \lambda), \forall \lambda \geq \lambda_0 u(\cdot, \lambda) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, H^s(\mathbb{R}^2)) \text{ et } \forall \varphi(x'') \in C_0^\infty, \right.$   
 $\left. \exists C, C' \|\widehat{\varphi}u(\cdot, \xi'', \lambda)\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq C(|\xi''| + \lambda)^{C'} \right\}.$

**PREUVE.** On a  $A \circ (P_1(x, D') + \lambda^2) = \text{Id} + R$ , les opérateurs  $\theta \circ R \circ \theta$  (resp.  $\theta \circ A \circ \theta$ ) envoyant  $\mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^s)$  dans  $\mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^{s+1})$  (resp.  $\mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^{s+2})$ ) et avec  $w = [P, \psi]\underline{u} + \lambda^2\psi\underline{u} + (P_1 - P)\psi\underline{u}$ ,  $(P_1 + \lambda^2)\psi\underline{u} = \psi g\delta + w$ ; or  $w = \theta w \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, L^2)$ , d'où  $\theta\psi\underline{u} = \theta A(\psi g\delta) + w'$ ,  $w' = \theta A\theta w - \theta R\theta\psi\underline{u} \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^2)$ .

**Définition 7.** On note  $H_0^m(W; \underline{r})$ ,  $\mathcal{R}H_0^{2-\ell}(W; \underline{r})$ ,  $\mathcal{B}_0^m(W; \underline{r}, \delta)$  les espaces introduits au § III.3, avec  $\varphi'' = \frac{1}{2}(\text{Re } z'')^2$ ,  $\varphi_j = \frac{1}{2}(\text{Re } z_j)^2$ , et le choix trivial des contours  $\gamma_j \equiv 0$ .

**Lemme 5.** Soit  $w(x, \lambda) \in \mathcal{D}'_\lambda(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, H_x^s)$ , à support compact en  $x''$ . Alors  $Tw \in H_0^s(W; \underline{r})$  pour tout ouvert borné  $W \subset \mathbb{C}^{n-2}$ , et tout  $\underline{r} = (r_1, r_2)$ .

**PREUVE.** Soit  $w_{\lambda,a}(x) = e^{-\frac{1}{2}(a-x)^2} w(x, \lambda)$  et  $g_{\lambda,a}(\xi) = (\frac{1}{2\pi\lambda})^{n/2} e^{-ia\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda}}$ . On a  $\widehat{w_{\lambda,a}}(\xi) = g_{\lambda,a} * \widehat{w}(\xi, \lambda)$ , d'où il résulte pour  $I \subset \{1, 2\}$ ,

$$\sup \left\{ \xi_i, i \notin I, \left\| \widehat{w_{\lambda,a}}(\xi', \xi'')(1 + |\xi'|)^s \right\|_{L^2(\xi_{j,j \in I})} \right\} \leq c(\lambda + |\xi''|)^{c'}.$$

D'après (4), on a  $T_w(a + ib, \lambda) = e^{\lambda \frac{a^2}{2}} \hat{w}_{\lambda, a}(-\lambda b)$  et le lemme résulte de la définition de l'espace  $H_0^s$ .

**Lemme 6.** Soit  $z_0'' \in \mathbb{C}^{n-2}$  tel que  $\text{Re}(z_0'') = 0$ . Il existe  $W$  voisinage de  $z_0''$ ,  $\underline{r} = (r_1, r_2)$  et  $\delta > 0$  tels que

$$(88) \quad T(\psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta) .$$

PREUVE. D'après les lemmes 4 et 5 il suffit de prouver  $T(\theta A(\psi g \delta)) \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta)$ . Il suffit d'étudier le terme  $T(\theta A(\psi g_1 \delta_1))$  par symétrie.

Soit  $\tilde{A}f = (2\pi)^{-2} \int e^{i\lambda(x'-y')\xi'} \frac{f(y', x'')}{1+p_1(y', x'', \xi')} dy' d\xi'$ . On a  $\psi g_1 \delta_1 \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon})$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , et le support de  $\psi g_1 \delta_1$  est contenu dans  $|x| \leq r_0$ . Il en résulte  $\theta A(\psi g_1 \delta_1) - \theta \tilde{A}(\psi g_1 \delta_1) \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^2)$ . Aussi, puisque  $1 - \theta(x) \equiv 0$  pour  $|x| \geq \frac{3r_0}{2}$ , on a  $(1 - \theta)\tilde{A}(\psi g_1 \delta_1) \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^s)$  pour tout  $s$ . Il suffit donc d'étudier  $T\tilde{A}(\psi g_1 \delta_1)$ . Posons  $k(x, \xi') = [1 + p_1(x, \xi')]^{-1}$ . D'après (84), on a pour  $\|x\| < D_0$

$$(89) \quad k(x, \xi') = \sum_{\alpha} \frac{x^\alpha}{(2i\pi)^n} \int_K \frac{k(u, \xi')}{u^\alpha \Pi u_j} du$$

où  $K$  est le polydisque centré en  $x = 0$  de polyrayon  $D_0$ . Pour  $u \in K$ , soit  $G(x_1, x'', u) = \sum_{\alpha} \frac{1}{(2i\pi)^n} \frac{x^\alpha}{u^\alpha} \psi(x_1, 0, x'') g_1$ . Comme  $\psi$  est à support dans  $|x| < r_0 \ll D_0$ , il existe  $c > 0$  tel que  $\sup_{u \in K} |G(\cdot, u)|_{L^2} \leq C$ , et  $G$  est à support dans  $|(x_1, x'')| < r_0$ .

Posons

$$(90) \quad F(x, u, \lambda) = (2\pi)^{-2} \int e^{i\lambda(x'-y')\xi'} k(u, \xi') G(y_1, x'', u) \delta_{y_2=0} \cdot dy' d\xi' .$$

On a  $\lambda^2(1 + p_1(u, iz'))TF = T((\lambda^2 + p_1(u, i\lambda x' + D'))F)$  d'après (7) et (8), et  $(\lambda^2 + p_1(u, i\lambda x' + D'))F = G\delta_1 + R(x, u, \lambda)$  avec  $R \in \mathcal{D}'_\lambda(\cdot, H^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$  uniformément en  $u \in K$ . On a

$$(91) \quad T\tilde{A}(\psi g_1 \delta_1) = \int_K \frac{du}{\Pi u_j} TF = \lambda^{-2} \int_K k(u, iz') T(G\delta_1) \frac{du}{\Pi u_j} + R'$$

avec  $R' = \lambda^{-2} \int_K k(u, iz') T(R) \frac{du}{\Pi u_j} \in H_0^2(W, \underline{r})$  pour  $\underline{r}$  assez petit d'après (84) puisque  $T(R) \in H_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(W, \underline{r})$  d'après le lemme 5, et le lemme 6 résulte alors de  $T(G\delta_1) = (T_1 \otimes T_{\parallel})(G)(z_1, z'', u, \lambda)$ , de (84) et de (29).  $\diamond$

Donnons nous à présent une constante  $C > 0$ . D'après (85), et (16), on a

$$(92) \quad \lambda^2 P_c^\sharp T(\psi \underline{u}) = T(\psi g \delta) + T([P, \psi] \underline{u}) - T(P^c \psi \underline{u}) .$$

D'après (14) et (15), on a  $T(P^c \psi \underline{u}) = \sum_{|\nu| \leq 2} (i\lambda z)^\nu T(p_\nu^c \psi \underline{u})$  et il existe  $\varepsilon > 0$  (dépendant de  $C$ ) tel que pour  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\| \leq 2r_0$  on ait  $|p_c^\nu(x, \lambda)| \leq \text{Cte } e^{-\varepsilon\lambda}$ ; en suivant la preuve du lemme 6, il en résulte

$$(93) \quad e^{\varepsilon\lambda} T(P^c \psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^0(W; \underline{r}, \delta) .$$

Aussi,  $[P, \psi] \underline{u} \in L^2$  et  $O \notin \text{support}([P, \psi] \underline{u})$ . Donc d'après (4), pour  $W$  et  $\underline{r}$  assez petits, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(94) \quad e^{\varepsilon\lambda} T([P, \psi] \underline{u}) \in H_0^0(W; \underline{r}) .$$

Soit  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1$  ou  $\mathcal{N}_2$  (voir (81)); en utilisant à nouveau le lemme 4, on obtient comme précédemment

$$(95) \quad \begin{cases} T(\mathcal{N} \psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta) \\ \lambda \mathcal{N}_c^\sharp T(\psi \underline{u}) = T(\mathcal{N} \psi \underline{u}) - T(\mathcal{N}^c \psi \underline{u}) \\ \exists \varepsilon > 0, \quad e^{\varepsilon\lambda} T(\mathcal{N}^c \psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta) . \end{cases}$$

Pour  $f(z_1, z_2, z'', \lambda) \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta)$ , posons

$$(96) \quad (T_2^{-1} f)(z_1, x_2, z'', \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} f(z_1, x_2 - ib_2, z'', \lambda) db_2 .$$

Alors  $(T_2^{-1} f)$  est holomorphe en  $(z_1, z'') \mid |\text{Im } z_1| < r_1, z'' \in W$ , et distribution en  $x_2 \in ]-r_2, r_2[$  définie par l'intégrale oscillante (96) (voir (49) et le lemme 1). Il résulte de la formule d'inversion (5) qu'on a si  $f = T(v)$  avec  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_2^{-1} f = T_1 \otimes T_{\parallel}(v)$ .

**Lemme 7.** Pour  $f \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta)$ , les traces

$$(97) \quad \text{Tr}_1^\pm f(z_1, z'', \lambda) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} T_2^{-1} f$$

existent, et appartiennent à  $H_0^0(W; r_1)$ .

**PREUVE.** On écrit  $f = f_1 + f_2 + g$  avec  $g \in H_0^1(W; \underline{r})$ ,  $f_j = \int_{A_j} r_j h_j d\mu_j$ ,  $r_j \in \mathcal{R}_{A_j, 2}^{-1}$ ,  $h_1 \in H_0^0(W; r_2)$ ,  $h_2 \in H_0^0(W; r_1)$  (uniformément en  $a_j$ ). Tout d'abord, il existe  $B$  tel que  $\lambda^{-B}(1 + |z'|)g(z', z'', \lambda) e^{-\frac{\lambda}{2}(\text{Re } z)^2} \mid_{z'=a'+ib'} \in L^2(b')$  (resp.  $L^2(b_2)$ ) uniformément en  $z'' \in W$ ,  $|a_j| < r_j$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ , (resp. idem et  $b_1 \in \mathbb{R}$ ) et on a la même estimation pour les dérivées  $(\frac{1}{\lambda} \partial_{z_2})^j g$  (voir (49)) quitte à diminuer  $r_2$ . Par (96) on a donc pour  $j = 0, 1$

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\substack{|a_1| < r_1 \\ z'' \in W}} \int_{-\infty}^{+\infty} db_1 \int_{-\frac{r_2}{2}}^{+\frac{r_2}{2}} dx_2 \left| \partial_{x_2}^j (T_2^{-1} g)(a_1 + ib_1, x_2, z'', \lambda) \right|^2 e^{-\lambda[(\text{Re } z'')^2 + a_1^2]} \\ \leq \text{Cte } \lambda^{2B} \\ \\ \sup_{\substack{|\text{Re } z_1| < r_1 \\ z'' \in W}} \int_{-\frac{r_2}{2}}^{+\frac{r_2}{2}} dx_2 \left| \partial_{x_2}^j (T_2^{-1} g)(z_1, x_2, z'', \lambda) \right|^2 e^{-\lambda[(\text{Re } z'')^2 + (\text{Re } z_1)^2]} \\ \leq \text{Cte } \lambda^{2B} \end{array} \right.$$



d'où il résulte que  $T_2^{-1}g$  est continu en  $x_2$  a valeurs dans  $H_0^0(W; r_1)$ . On a aussi

$$T_2^{-1}(f_1) = \frac{\lambda}{2\pi} \int e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} \int r_1(\alpha_1, iz_1, ix_2 + b_2) h_1(x_2 - ib_2, z'', \alpha_1, \lambda) d\mu(\alpha_1) db_2$$

qui est continu en  $x_2$  à  $z_1, z''$  fixés et

$$T_2^{-1}(f_1) |_{x_2=0} = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{A_1} \int db_2 r_1(\alpha_1, iz_1, b_2) h_1(-ib_2, z'', \alpha_1, \lambda).$$

Il suffit alors d'utiliser  $|r_1| \leq \text{Cte}(1 + |z_1| + |b_2|)^{-1}$  et le fait que l'opérateur de noyau  $(1 + |x| + |y|)^{-1}$  est borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  par l'inégalité de Hardy.

Enfin on a  $T_2^{-1}f_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{A_2} d\mu(\alpha_2) h_2(z_1, z'', \alpha_2, \lambda) R(x_2, \alpha_2, z_1, \lambda)$  avec

$$(99) \quad R(x_2, \alpha_2, z_1, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} r_2(\alpha_2, iz_1, ix_2 + b_2) db_2 .$$

Comme  $r_2 \in \mathcal{R}_{A_2, 2}^{-1}$ , on a  $r_2(\alpha, iz') = \frac{q(\alpha, iz')}{p(\alpha, iz')}$   $\deg q = m'$ ,  $\deg p = m$ ,  $m - m' \geq 1$  avec  $p$  polynôme elliptique. En particulier, on a  $|p| \geq \text{Cte}(1 + |z'|)^m$  pour  $|z_2| \geq C_0[1 + |z_1|] + r_2$  avec  $C_0$  assez grand, donc par (30)

$$(100) \quad |\partial_{x_2}^\ell r_2(\alpha_2, iz_1, ix_2 + b_2)| \leq \text{Cte}(1 + |z_1| + |b_2|)^{-1}$$

uniformément en  $\alpha_2$ ,  $|x_2| < r_2$  et  $|\text{Re } z_1| < r_1$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}$ , ou  $b_2 \in \mathbb{C}$  et  $|b_2| \geq C_0(1 + |z_1|)$ . Si  $\Gamma_{z_1}^+$  désigne le contour réunion de  $\{b_2 \in \mathbb{R}, |b_2| \leq C_0(1 + |z_1|)\}$  et du demi-cercle  $\{b_2 \in \mathbb{C}, \text{Im } b_2 \geq 0, |b_2| = C_0(1 + |z_1|)\}$  on a pour  $x_2 \in ]0, r_2[$

$$(101) \quad R(x_2, \alpha_2, z_1, \lambda) = \int_{\Gamma_{z_1}^+} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} r_2(\alpha_2, iz_1, ix_2 - b_2) db_2$$

d'où

$$(102) \quad \forall \ell, \exists C_\ell, \forall x_2 \in ]0, r_2[, \forall z_1, |\text{Re } z_1| < r_1, \forall \alpha_2 \\ |\partial_{x_2}^\ell R(x_2, \alpha_2, z_1, \lambda)| \leq C_\ell \lambda^\ell (1 + |z_1|)^\ell .$$

Donc  $\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} T_2^{-1}f_2$  existe et vaut  $\frac{\lambda}{2\pi} \int_{A_2} d\mu(\alpha_2) h_2(z_1, z'', \alpha_2, \lambda) \int_{\Gamma_{z_1}^+} r_2(\alpha_2, iz_1, +b_2) db_2$  d'où le lemme, puisque  $h_2 \in H_0^0(W; r_1)$  et  $\int_{\Gamma_{z_1}^+} r_2(\alpha_2, iz_1, +b_2) db_2$  est holomorphe et borné dans  $|\text{Re } z_1| < r_1$ . ◇

On définit de même les opérateurs de trace

$$(103) \quad \text{Tr}_2^\pm f(z_2, z'', \lambda) = \lim_{z_1 \rightarrow \pm 0} T_1^{-1} f$$

qui envoient  $\mathcal{B}_0^1(W; r, \delta)$  dans  $H_0^0(W, r_2)$ .

D'après (82), le lemme 4, et le § II.3 lemme 2, on a (avec le signe + dans le cas  $M = M^i$ , le signe - dans le cas  $M = M^e$ )

$$(104) \quad \begin{cases} \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \psi \mathcal{N}_1 \underline{u} = \psi |_{x_2=0} \check{g}_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, L_{x_1}^2) \text{ et } g_1 = 1_{x_1 \geq 0} \check{g}_1 \\ \lim_{x_1 \rightarrow \pm 0} \psi \mathcal{N}_2 \underline{u} = \psi |_{x_1=0} \check{g}_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, L_{x_2}^2) \text{ et } g_2 = 1_{x_2 \geq 0} \check{g}_2. \end{cases}$$

où les limites sont prises dans  $\mathcal{D}'(\cdot, L^2)$ .

D'où finalement la proposition suivante, qui est l'expression du système de Calderón microlocalisé.

**Proposition 3.** Soit  $u \in H^1(M)$  solution près de  $x = 0$  de  $Pu = 0$ ,  $u|_{\partial M} = 0$ , et  $z_0'' \in i\mathbb{R}^{n-2}$ . Alors, avec les notations précédentes il existe  $\underline{r} = (r_1, r_2)$ ,  $\delta > 0$ ,  $W$  voisinage de  $z_0''$ , et pour tout  $C > 0$  un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(105) \quad F = T(\psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta)$$

$$(106) \quad \lambda^2 P_C^\# F = T(\psi g \delta) + m$$

$$(107) \quad \begin{cases} \lambda \Pi(\text{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1,C}^\# F) = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi |_{x_2=0} g_1) + m_1 \\ \lambda \Pi(\text{Tr}_2^\pm \mathcal{N}_{2,C}^\# F) = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi |_{x_1=0} g_2) + m_2 \end{cases}$$

où les restes vérifient  $e^{\varepsilon \lambda} m \in \mathcal{B}_0^0(W; \underline{r}, \delta)$ ,  $e^{\varepsilon \lambda} m_1 \in H_0^0(W; r_1)$ ,  $e^{\varepsilon \lambda} m_2 \in H_0^0(W; r_2)$ .

PREUVE. On a (105) par le lemme 6; (106) résulte de (92), (93), (94). Vérifions la première ligne de (107). Puisque  $\lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \psi \mathcal{N}_1 \underline{u} = \psi |_{x_2=0} \check{g}_1$  on a  $\text{Tr}_1^\pm(T(\psi \mathcal{N}_1 \underline{u})) = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi |_{x_2=0} \check{g}_1)$  d'après  $T_2^{-1} \circ T = T_1 \otimes T_\parallel$ , et puisque  $\psi |_{x_2=0} \check{g}_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^{n-2}, L_{x_1}^2)$  et  $1_{x_1 \geq 0} \check{g}_1 = g_1$ , d'après (79) on obtient  $\Pi(\text{Tr}_1^\pm(T(\psi \mathcal{N}_1 \underline{u}))) = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi |_{x_2=0} g_1)$ . On a aussi d'après (16)

$$T(\psi \mathcal{N}_1 \underline{u}) = \lambda \mathcal{N}_{1,c}^\# T(\psi \underline{u}) + T(\mathcal{N}_1^c \psi \underline{u}) + T([\psi, \mathcal{N}_1] \underline{u})$$

et  $e^{\varepsilon \lambda} [T(\mathcal{N}_1^c \psi \underline{u}) + T([\psi, \mathcal{N}_1] \underline{u})] \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta)$  d'après (95),  $[\psi, \mathcal{N}_1] \underline{u} \in \mathcal{D}'(\cdot, H^1)$  et  $O \notin \text{support}[\psi, \mathcal{N}_1] \underline{u}$ . Donc d'après le lemme 7,  $\text{Tr}_1^\pm(T(\psi \mathcal{N}_1 \underline{u})) = \lambda \text{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1,c}^\# T(\psi \underline{u}) + a$ , avec  $e^{\varepsilon \lambda} a \in H_0^0(W; r_1)$ , et il suffit de constater que d'après (78),  $\Pi$  envoie  $H_0^0(W; r_1)$  dans  $H_0^0(W; r_1')$  pour  $r_1' < r_1$  car le projecteur de Hilbert est borné sur  $L^2$  et pour l'estimation  $L^\infty$  il suffit d'écrire

$$\Pi h(a + ib, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + i(t-b)} h\left(a + \frac{1}{\lambda} + it\right) idt$$

d'où  $|\Pi h(a + ib, \lambda)| e^{-\frac{1}{2} a^2} \leq \text{Cte} \sqrt{\lambda} \sup_u \|h(u + iv)\|_{L^2(v)} e^{-\lambda \frac{u^2}{2}}$ .

◇

**Remarque :** On utilisera par la suite que (107) et  $\Pi \circ \Pi = \Pi$  entraînent des estimations meilleures dans  $\text{Re } z_1 \leq 0$  ou  $\text{Re } z_2 \leq 0$ .



## IV. ESTIMATIONS ELLIPTIQUES

### IV.1. Calcul dans les chaînes d'espaces de Banach

Si  $E$  est un espace de Banach, on notera  $\|x; E\|$  la norme de  $x \in E$ ; Si  $P$  est un opérateur borné de  $E$  dans  $F$ , on notera  $\|P; E, F\|$  la norme d'opérateur de  $P$  c'est-à-dire  $\sup\{\|Px; F\|; \|x, E\| \leq 1\}$ .

#### IV.1.1. Rappels de calcul pseudo-différentiel à valeur dans les Banachs

Pour tout  $\lambda \in [\lambda_0, +\infty[$  soit  $E(\lambda)$  un espace de Banach et  $A(\lambda)$  une sous-algèbre unifère de l'espace des opérateurs bornés sur  $E(\lambda)$ , muni d'une norme  $\| \cdot, A(\lambda) \|$  qui vérifie

- (1)  $A(\lambda)$  muni de  $\| \cdot, A(\lambda) \|$  est complète
- (2)  $\|\text{Id}; A(\lambda)\| = 1$
- (3)  $\|P \circ Q; A(\lambda)\| \leq \|P; A(\lambda)\| \|Q; A(\lambda)\| \quad (P, Q \in A(\lambda))$
- (4)  $\|Px, E(\lambda)\| \leq \|P; A(\lambda)\| \|x; E(\lambda)\| \quad (P \in A(\lambda)); x \in E(\lambda)$  .

Pour  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{C}^d$  et  $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  on note  $H_\varphi(\Omega; E(\lambda))$  l'espace de Sjöstrand des fonctions  $f(z, \lambda)$  définies pour  $z \in \Omega$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$  telles que

- (5)  $f(\cdot, \lambda)$  est holomorphe en  $z \in \Omega$  à valeurs dans  $E(\lambda)$
- (6)  $\exists A, B, \forall z \in \Omega, \forall \lambda \geq \lambda_0, \|f(z, \lambda); E(\lambda)\| \leq A \lambda^B e^{\lambda \varphi(z)}$  .

Si  $\varphi$  est de classe  $C^1$  à valeurs réelles, définie près de  $z_0$ , on note  $H_{\varphi, z_0}(E(\lambda))$  l'espace des germes

$$(7) \quad H_{\varphi, z_0}(E(\lambda)) = \lim_{\overrightarrow{\Omega}} H_\varphi(\Omega; E(\lambda))$$

où la limite inductive est prise sur les voisinages de  $z_0$ , et  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda))$  le microlocalisé

$$(8) \quad \mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda)) = H_{\varphi, z_0}(E(\lambda)) / \left\{ f; \exists \varepsilon > 0, f \in H_{\varphi - \varepsilon, z_0}(E(\lambda)) \right\} .$$

Pour  $W$  ouvert de  $T^*\mathbb{C}^d$ , on note  $\mathcal{E}(W; A(\lambda))$  l'espace des séries formelles

$p = \sum_{n=0}^{\infty} (i\lambda)^{-n} p_n(z, \zeta, \lambda)$  qui vérifient

(9)  $p_n(z, \zeta, \lambda)$  est holomorphe en  $(z, \zeta) \in W$  à valeur dans  $A(\lambda)$ , pour  $\lambda \geq \lambda_0$

(10)  $\exists A, B, \forall (z, \zeta) \in W, \forall \lambda \geq \lambda_0, \|p_n(z, \zeta, \lambda); A(\lambda)\| \leq AB^n n^n$ .

Pour  $p, q \in \mathcal{E}(W; A(\lambda))$  on définit  $p \circ q$  par

$$(11) \quad p \circ q = \sum (i\lambda)^{-n} (p \circ q)_n; \quad (p \circ q)_n = \sum_{j+k+|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} p_j \circ \partial_z^{\alpha} q_k.$$

Les inégalités de Cauchy et (3) impliquent  $p \circ q \in \mathcal{E}(W'; A(\lambda))$  pour  $W' \subset\subset W$ . Pour  $m_0 \in T^*C^d$ , on notera  $\mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda))$  l'espace des germes

$$(12) \quad \mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda)) = \lim_{\vec{W}} \mathcal{E}(W; A(\lambda))$$

où la limite est prise sur les voisinages de  $m_0$ . Alors  $\mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda))$  est une algèbre unitaire, dont l'élément unité est  $1 = \sum (i\lambda)^{-n} p_n, p_0 = \text{Id}, p_n = 0 (n \geq 1)$ .

Un élément  $p = \sum (i\lambda)^{-n} p_n$  de  $\mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda))$  est dit elliptique lorsqu'il existe  $W$  voisinage de  $m_0$  et  $p^W = \sum (i\lambda)^{-n} p_n^W$  représentant de  $p$  dans  $\mathcal{E}(W; A(\lambda))$  tel qu'il existe  $q_0^W(z, \zeta, \lambda)$  holomorphe en  $(z, \zeta) \in W$  à valeurs dans  $A(\lambda)$  pour  $\lambda \geq \lambda_0$  vérifiant  $p_0^W q_0^W = q_0^W p_0^W = \text{Id}$ . On vérifie comme dans [Sj] que les éléments inversibles de  $\mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda))$  sont les éléments elliptiques.

Soit  $\varphi$  comme précédemment,  $m_0 = (z_0, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0) = \zeta_0)$ . Pour  $\Omega$  voisinage de  $z_0$  et  $f \in H_{\varphi}(\Omega; E(\lambda))$ , on pose

$$(13) \quad f_{\alpha}^{\zeta_0}(z, \lambda) = \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^{\alpha} f(z, \lambda) = e^{i\lambda z \cdot \zeta_0} \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha} e^{-i\lambda z \cdot \zeta_0} f(z, \lambda)$$

et pour  $p \in \mathcal{E}(W; A(\lambda))$ ,  $W$  voisinage de  $\{(z, \zeta_0); z \in \bar{\Omega}\}$

$$(14) \quad \text{Op}(p; C_1, C_2)(f) = \sum_{\substack{n \leq \frac{\lambda}{C_2} \\ |\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_1}}} (i\lambda)^{-n} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} p_n(z, \zeta_0, \lambda) [f_{\alpha}^{\zeta_0}(z, \lambda)].$$

Alors avec  $D_{\Omega} = \sup_{z \in \Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta_0 \right\|$  ( $\|\zeta\| = \sup |\zeta_j|$ ) les inégalités de Cauchy appliquées au polydisque de polyrayon  $\rho_j = \alpha_j (\lambda D)^{-1}$  avec  $D > D_{\Omega}$ , la formule de Stirling et  $\text{Re}[\varphi(w) - \varphi(z) - i(w - z)\zeta_0] = -\text{Im} \left( \int_0^1 \left( \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z + \theta(w - z)) - \zeta_0 \right) d\theta \cdot (w - z) \right)$  impliquent

$$(15) \quad \sup_{z \in \Omega'} \left\{ \|f_{\alpha}^{\zeta_0}(z, \lambda); E(\lambda)\| e^{-\lambda \varphi(z)} \right\} \leq M D^{|\alpha|} \langle \alpha \rangle \sup_{z \in \Omega} \left\{ \|f(z, \lambda); E(\lambda)\| e^{-\lambda \varphi(z)} \right\}$$

où  $M$  est une constante universelle,  $\langle \alpha \rangle = \Pi(1 + \alpha_j)^{1/2}$  dès que  $\Omega' \subset\subset \Omega$  et  $|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_0}$  avec  $C_0$  tel que  $\|w - z\| \leq (C_0 D)^{-1}$  et  $z \in \Omega'$  implique  $w \in \Omega$ . Comme on a  $\|\frac{1}{\alpha} \partial_\zeta^\alpha p_n(z, \zeta_0, \lambda); A(\lambda)\| \leq B_0 B_1^n B_2^{|\alpha|} n^n$  pour  $z \in \bar{\Omega}$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ , pour des constantes  $B_0, B_1, B_2$  convenables il résulte de (4) que (14) définit un élément de  $H_\varphi(\Omega'; E(\lambda))$  pour  $\Omega' \subset\subset \Omega$  dès que  $C_1, C_2$  sont assez grands, pourvu que l'on ait  $B_2 D_\Omega < 1$  dont la classe dans  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda))$  ne dépend pas de  $C_1, C_2$ . Comme  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , on a  $\lim_{\Omega \rightarrow z_0} D_\Omega = 0$ . Par suite (14) définit une application bilinéaire

$$(16) \quad \mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda)) \times \mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda)) \ni (p, f) \longmapsto \text{Op}(p)f \in \mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda))$$

dont on vérifie comme dans [G.L] qu'elle munit  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E(\lambda))$  d'une structure de  $\mathcal{E}_{m_0}(A(\lambda))$  module à gauche.

#### IV.1.2. Espaces associés à une chaîne d'espace de Banach

Soit  $E_\sigma$ ,  $\sigma \in [0, 1]$ , une chaîne d'espaces de Banach, c'est-à-dire la donnée pour tout  $\sigma \in [0, 1]$  d'un Banach  $E_\sigma$  et pour tout  $0 \leq \sigma \leq \sigma' \leq 1$  d'une injection  $i_{\sigma', \sigma}$  de  $E_\sigma$  dans  $E_{\sigma'}$  tel que  $i_{\sigma, \sigma} = \text{Id}$ ,  $\|i_{\sigma', \sigma}; E_\sigma, E_{\sigma'}\| \leq 1$ ,  $i_{\sigma'', \sigma'} \circ i_{\sigma', \sigma} = i_{\sigma'', \sigma}$  pour  $0 \leq \sigma \leq \sigma' \leq \sigma'' \leq 1$ .

Pour tout  $n = 1, 2, \dots$  on note  $E[n]$  l'espace de Banach

$$(17) \quad E[n] = \bigoplus_{k=0}^n E_{k/n}$$

munit de la norme  $\ell^\infty$

$$(18) \quad x = (x_0, \dots, x_n), \quad \|x; E[n]\| = \sup_{0 \leq k \leq n} \|x_k; E_{k/n}\|.$$

On notera  $A[n]$  l'algèbre unifère des opérateurs  $M$  sur  $E[n]$  qui s'écrivent sous forme matricielle

$$(19) \quad My = x, \quad x_i = \sum_j M_{i,j} y_j$$

où  $M_{i,j}$  est un opérateur borné de  $E_{j/n}$  dans  $E_{i/n}$  et  $M_{i,j} \equiv 0$  si  $j > i$  (matrice triangulaire inférieure). Pour  $\rho > 0$  et  $M \in A[n]$  on pose

$$(20) \quad \|M; \rho, n\| = \sup_i \sum_{\ell=0}^i \|M_{i, i-\ell}; E_{i-\ell/n}, E_{i/n}\| \rho^\ell.$$

On a alors

$$(21) \quad \|\text{Id}; \rho, n\| = 1$$

$$(22) \quad \|Mx; E(n)\| \leq \|M; 1, n\| \|x; E(n)\|$$

$$(23) \quad \|M; \rho, n\| \leq \|M; \rho', n\| \leq \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n \|M; \rho, n\| \quad \text{pour } 0 < \rho \leq \rho'$$

$$(24) \quad \|M \circ M'; \rho, n\| \leq \|M; \rho, n\| \|M'; \rho, n\|$$

(24) résultant de

$$\sum_{\ell=0}^i \sum_{i \geq k \geq i-\ell} \|M_{i,k}\| \|M'_{k,i-\ell}\| \rho^\ell = \sum_{\ell'=0}^i \rho^{\ell'} \|M_{i,i-\ell'}\| \sum_{j=0}^{i-\ell'} \|M'_{i-\ell',i-\ell'-j}\| \rho^j .$$

En particulier si  $M$  vérifie  $\|M; \rho, n\| < 1$  pour un  $\rho > 0$ ,  $\text{Id} - M$  est inversible dans  $A[n]$ , et puisque par (22), (23), (24) on a

$$\|M^k; E[n]\| \leq \|M^k; 1, n\| \leq \sup(\rho^{-n}, 1) \|M^k; \rho, n\| \leq \sup(\rho^{-n}, 1) \|M; \rho, n\|^k ,$$

l'inverse  $(I - M)^{-1} = \sum_k M_k$  vérifie

$$(25) \quad \|(\text{Id} - M)^{-1}; \rho, n\| \leq \frac{1}{1 - \|M; \rho, n\|}$$

$$(26) \quad \|(\text{Id} - M)^{-1}; E[n]\| \leq \frac{\sup(1, \rho^{-n})}{1 - \|M; \rho, n\|} .$$

On se donne à présent une fonction  $\lambda \mapsto n(\lambda)$  de  $[\lambda_0, +\infty[$  dans  $\mathbf{N}^*$ , et un réel  $\tau \geq 0$ .

On définit l'espace de Banach  $E_\tau(\lambda)$  par

$$(27) \quad \begin{cases} E_\tau(\lambda) = E[n(\lambda)] \\ x = (x_0, \dots, x_{n(\lambda)}) \quad \|x; E_\tau(\lambda)\| = \sup_{0 \leq k \leq n(\lambda)} \|x_k; E_{\frac{k}{n(\lambda)}}\| e^{\tau \lambda - \frac{k}{n(\lambda)}} \end{cases}$$

et l'algèbre unifère  $A_\rho(\lambda)$  par

$$(28) \quad \begin{cases} A_\rho(\lambda) = A[n(\lambda)] \\ \|M; A_\rho(\lambda)\| = \|M; \rho, n\| . \end{cases}$$

On a alors

$$(29) \quad \rho \geq e^{\frac{\tau \lambda}{n(\lambda)}} \implies \|Mx; E_\tau(\lambda)\| \leq \|M; A_\rho(\lambda)\| \|x; E_\tau(\lambda)\| .$$

Pour  $\tau > 0$  on a une application canonique  $j_\tau$  de  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_\tau(\lambda))$  dans  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_0(\lambda))$ . Si  $\rho, \tau$  et la fonction  $n(\lambda)$  sont tels que  $\rho \geq e^{\frac{\tau \lambda}{n(\lambda)}}$  pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ , alors  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_\tau(\lambda))$  et  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_0(\lambda))$  sont des modules à gauche sur  $\mathcal{E}_{m_0}(A_\rho(\lambda))$  et pour  $p \in \mathcal{E}_{m_0}(A_\rho(\lambda))$ ,  $f \in \mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_\tau(\lambda))$  on a

$$(30) \quad \text{Op}(p) \circ j_\tau f = j_\tau \circ \text{Op}(p) f .$$

## IV.1.3. Injectivité pour un système elliptique dans une chaîne

On se donne  $E_\sigma$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  une chaîne d'espaces de Banach,  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $\Omega$  voisinage de  $z_0$  dans  $\mathbb{C}^d$ ,  $W$  voisinage de  $(z_0, \zeta_0 = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0))$  contenant  $\bar{\Omega} \times \zeta_0$  et  $p_{\sigma', \sigma}^k(z, \zeta, \lambda)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  des fonctions holomorphes en  $(z, \zeta) \in W$ , définies pour  $\lambda \geq \lambda_0$  à valeurs dans les opérateurs bornés de  $E_\sigma$  dans  $E_{\sigma'}$  pour  $\sigma < \sigma'$  si  $k > 0$ ,  $\sigma \leq \sigma'$  si  $k = 0$ , vérifiant

$$(31) \quad \exists B_0, B_1, B_2, \forall z, \zeta, \lambda, k, \sigma, \sigma', \alpha, \\ \left\| \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p_{\sigma', \sigma}^k(z, \zeta, \lambda); E_{\sigma'}, E_{\sigma'} \right\| \leq B_0 B_1^{|\alpha|} \left( \frac{B_2 k}{\sigma' - \sigma} \right)^k$$

avec la convention  $\left( \frac{B_2 k}{\sigma' - \sigma} \right)^k = 1$  si  $\sigma' = \sigma$  et  $k = 0$ .

On se donne également  $f(z, \lambda) \in H_\varphi(\Omega; E_0)$ . Pour tout  $\alpha, k, \sigma, \sigma'$  on pose

$$(32) \quad g_{\alpha, k, \sigma', \sigma}(z, \lambda) = (i\lambda)^{-k} \left( \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p_{\sigma', \sigma}^k \right)(z, \zeta_0, \lambda) i_{\sigma, 0} f_\alpha^{\zeta_0}(z, \lambda)$$

avec  $f_\alpha^{\zeta_0} = \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^\alpha$ . Comme dans le § IV.1.1, (25) on a

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{z \in \Omega'} \left\{ \|g_{\alpha, k, \sigma', \sigma}(z, \lambda); E_{\sigma'}\| e^{-\lambda \varphi(z)} \right\} \leq I_{\alpha, k, \sigma, \sigma'} \\ I_{\alpha, k, \sigma, \sigma'} = M B_0 (B_1 D)^{|\alpha|} \langle \alpha \rangle \left[ \frac{B_2 k}{\lambda(\sigma' - \sigma)} \right]^k \sup_{z \in \bar{\Omega}} \left\{ \|f(z, \lambda); E_0\| e^{-\lambda \varphi(z)} \right\} \end{array} \right.$$

pour  $\Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $D > D_\Omega = \sup_{z \in \bar{\Omega}} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta_0 \right\|$ ,  $|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_0}$  avec  $C_0$  tel que  $\|w - z\| \leq (C_0 D)^{-1}$  et  $z \in \Omega'$  implique  $w \in \Omega$ .

Il en résulte que  $\Omega' \subset\subset \Omega$  étant fixé, si on pose

$$(34) \quad g_{\sigma', \sigma}(z, \lambda; C_1, C_2) = \sum_{k \leq \frac{\lambda}{C_2}(\sigma' - \sigma)} \sum_{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{C_1}} g_{\alpha, k, \sigma', \sigma}(z, \lambda)$$

pour  $0 \leq \sigma \leq \sigma' \leq 1$  il existe  $C_1^0, C_2^0 > 0$  tels que pour  $C_1 \geq C_1^0, C_2 \geq C_2^0$ , on ait  $g_{\sigma', \sigma}(z, \lambda; C_1, C_2) \in H_\varphi(\Omega'; E_{\sigma'})$  et de plus il existe  $\varepsilon_0 > 0, c, c' > 0$  tels que pour tout  $C_1' \geq C_1 \geq C_1^0, C_2' \geq C_2 \geq C_2^0$  on ait

$$(35) \quad \sup_{z \in \Omega'} \left\| g_{\sigma', \sigma}(\cdot, C_1, C_2) - g_{\sigma', \sigma}(\cdot, C_1', C_2'); E_{\sigma'} \right\| e^{-\lambda \varphi(z)} \leq c \lambda^{c'} e^{-\varepsilon_0 \frac{\lambda}{C_1}}$$

$$(36) \quad \sup_{z \in \Omega'} \left\| g_{\sigma', \sigma}(\cdot, C_1, C_2) - g_{\sigma', \sigma}(\cdot, C_1, C_2'); E_{\sigma'} \right\| e^{-\lambda \varphi(z)} \leq c \lambda^{c'} e^{-\varepsilon_0 \frac{\lambda}{C_2}(\sigma' - \sigma)}.$$

**Proposition 1.** Avec les notations précédentes, on suppose

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } C_1 \geq C_1^0, C_2 \geq C_2^0, \varepsilon > 0, c, c' > 0 \\ \text{tels que pour tout } 0 \leq \sigma \leq 1, \lambda \geq \lambda_0 \text{ on ait} \\ \sup_{z \in \Omega'} \|g_{\sigma, 0}(\cdot, C_1, C_2); E_\sigma\| e^{-\lambda \varphi(z)} \leq c \lambda^{c'} e^{-\varepsilon \lambda \sigma}. \end{array} \right.$$



$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'opérateur } p_{\sigma,\sigma}^0(z,\zeta,\lambda) \text{ de } E_\sigma \text{ dans } E_\sigma \text{ est inversible pour tout} \\ \sigma \in [0,1], \lambda \geq \lambda_0, (z,\zeta) \in W \text{ et il existe } K > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{z,\zeta,\lambda,\sigma} \|(p_{\sigma,\sigma}^0)^{-1}; E_\sigma, E_\sigma\| \leq K . \end{array} \right.$$

$$(39) \quad p_{\sigma',\sigma}^k \circ i_{\sigma,0} = p_{\sigma',0}^k \text{ pour tout } \sigma < \sigma' \text{ si } k \neq 0, \sigma \leq \sigma' \text{ si } k = 0 .$$

Alors la classe de  $i_{1,0}f$  dans le microlocalisé  $\mathcal{H}_{\varphi,z_0}(E_1)$  est nulle.

(40) **Remarques :**

- i) D'après (35) et (36), on peut remplacer dans (37)  $C_1$  et  $C_2$  par  $C'_1 \geq C_1$ ,  $C'_2 \geq C_2$ .
- ii) Lorsque les  $p^k$  forment une chaîne d'opérateurs c'est-à-dire commutent à gauche et à droite avec les injections  $i$ , alors la proposition résulte de l'inversibilité des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques à valeurs dans les chaînes d'espace de Banach (voir [G.L]). Mais ici (39) est une hypothèse plus faible.

PREUVE. On conserve les notations des paragraphes IV.1.1, IV.1.2. On fixe  $\rho > 1$  et on choisit un  $\mu > 0$  tel que

$$(41) \quad K B_0 \frac{B_2 \rho \mu}{1 - B_2 \rho \mu} < 1 .$$

Quitte à augmenter  $C_2$  (Remarque (40), i)) on peut supposer  $C_2 \mu > 1$ . On peut alors augmenter  $\lambda_0$ , ce qui ne modifie pas la conclusion de la proposition, pour avoir  $\lambda_0(\mu - \frac{1}{C_2}) > 1$  et choisir une fonction  $\lambda \mapsto n(\lambda)$  de  $[\lambda_0, +\infty[$  dans  $\mathbf{N}^*$  vérifiant

$$(42) \quad \forall \lambda, \quad \frac{\lambda}{C_2} \leq n(\lambda) \leq \mu \lambda .$$

On pose  $\sigma_{k,\lambda} = \frac{k}{n(\lambda)}$ ,  $0 \leq k \leq n(\lambda)$  et

$$(43) \quad [g] = \left( g_{\sigma_{k,\lambda},0} \right)_{0 \leq k \leq n(\lambda)} \in H_\varphi(\Omega'; E_0(\lambda)) .$$

$$(44) \quad [f] = \left( i_{\sigma_{k,\lambda},0} \cdot f \right)_{0 \leq k \leq n(\lambda)} \in H_\varphi(\Omega; E_0(\lambda)) .$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(z,\zeta,\lambda) = \left( M_{\ell,j}(z,\zeta,\lambda) \right)_{\ell,j} \\ M_{\ell,j} = (i\lambda)^{-k} p_{\sigma_{\ell,\lambda},\sigma_{j,\lambda}}^k \text{ avec } k = \ell - j \text{ si } k \leq \frac{\lambda}{C_2} \frac{\ell}{n(\lambda)} \\ M_{\ell,j} = 0 \text{ si } j > \ell \text{ ou } \ell - j > \frac{\lambda}{C_2} \frac{\ell}{n(\lambda)} . \end{array} \right.$$

Alors puisque  $k \leq \frac{\lambda}{c_2} \sigma_{\ell, \lambda} \Rightarrow k \leq \ell$  d'après (42), il résulte de (39) qu'on a

$$(46) \quad [g] = \sum_{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1}} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} M(z, \zeta_0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^{\alpha} [f] .$$

De plus, en écrivant  $M = \mathcal{D} + \mathcal{N}$  où  $\mathcal{D}$  est diagonale et  $\mathcal{N}$  triangulaire inférieure stricte, on a

$$(47) \quad \|\mathcal{N}(z, \zeta, \lambda); A_{\rho}(\lambda)\| \leq \sum_{1 \leq k \leq n(\lambda)} \left( \frac{\rho}{\lambda} \right)^k B_0 [B_2 n(\lambda)]^k \leq \frac{B_0 B_2 \rho \mu}{1 - B_2 \rho \mu}$$

$$(48) \quad \|\mathcal{D}(z, \zeta, \lambda); A_{\rho}(\lambda)\| \leq B_0 .$$

En identifiant  $M$  à  $\sum (i\lambda)^{-n} M_n$ ,  $M_0 = M$ ,  $M_n = 0$ ,  $n \geq 1$  on a donc  $M \in \mathcal{E}(W; A_{\rho}(\lambda))$  et en notant  $\{g\}$ ,  $\{f\}$  les classes de  $[g]$ ,  $[f]$  dans le microlocalisé  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_0(\lambda))$  on a d'après (46)

$$(49) \quad \{g\} = \text{Op}(M)\{f\} .$$

D'après (38),  $\mathcal{D}$  est inversible et

$$(50) \quad \|\mathcal{D}^{-1}(z, \zeta, \lambda); A_{\rho}(\lambda)\| \leq K .$$

D'après le choix de  $\mu$ , (41) et (47),  $M$  est elliptique dans  $\mathcal{E}_{m_0}(A_{\rho}(\lambda))$ , et  $M^{-1} \in \mathcal{E}_{m_0}(A_{\rho}(\lambda))$  désignant son inverse on a d'après (49)

$$(51) \quad \{f\} = \text{Op}(M^{-1})\{g\} .$$

D'après (37) pour  $\tau > 0$  assez petit,  $\{g\}$  est dans l'image de l'application canonique  $j_{\tau}$  de  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_{\tau}(\lambda)) \rightarrow \mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_0(\lambda))$ . Si  $\tau$  est assez petit, on aura  $\rho \geq e^{\tau \frac{\lambda}{n(\lambda)}}$  pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$  d'après (42). D'après (30) et (51)  $\{f\}$  est alors dans l'image de  $j_{\tau}$ . Il en résulte que la classe de  $i_{1,0}(f)$  dans  $\mathcal{H}_{\varphi, z_0}(E_1)$  est nulle d'après (27). ◇

## IV.2. Problèmes elliptiques dans le plan

Le but de ce paragraphe est de prouver l'ellipticité des systèmes pseudo-différentiels associés au problème de diffraction par le dièdre.

Pour  $b$  réel, on désigne par  $L_b^+$  l'espace des fonctions  $f$  holomorphes en  $\xi \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \xi < -b$ , vérifiant

$$(52) \quad \sup_{v < -b} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u + iv)|^2 du < +\infty$$

et par  $L_b$  l'espace des fonctions  $f$  holomorphes en  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z < -b$ , vérifiant  $\xi \mapsto f(-i\xi) \in L_b^+$ .

D'après le théorème de Paley-Wiener,  $L_b$  est l'espace des fonctions

$$(53) \quad f(z) = \int_0^\infty e^{xz} g(x) dx, \quad g \in L^2(\mathbb{R}_+; e^{-2xb} dx).$$

On se donne  $p_0(\xi_1, \xi_2)$  un polynôme elliptique de degré deux, c'est-à-dire une fonction  $p_0 = a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + d\xi_2^2 + e\xi_1 + f\xi_2 + g$ ,  $a, b, d, e, f, g$  constantes complexes, vérifiant

$$(54) \quad \exists c > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad |p_0(\xi)| \geq c(1 + |\xi|)^2.$$

On suppose en outre que pour  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  (resp.  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ ) les deux racines de l'équation  $p_0(z, \xi_2) = 0$  (resp.  $p_0(\xi_1, z) = 0$ ) sont situées de part et d'autre de l'axe réel, et on les note  $\xi_1^\pm(\xi_2)$  (resp.  $\xi_2^\pm(\xi_1)$ ) avec  $\pm \operatorname{Im} \xi_i^\pm > 0$ . Cette hypothèse est bien sûr satisfaite si les coefficients de  $p_0$  sont réels.

On notera  $\Theta(p_0)$  une constante strictement positive telle qu'il existe  $c > 0$  vérifiant

$$(55) \quad \xi \in \mathbb{C}^2, \quad |\operatorname{Im} \xi| \leq \Theta(p_0) \implies |p_0(\xi)| \geq c(1 + |\xi|)^2.$$

Alors la fonction  $\xi_2 \mapsto \xi_1^+(\xi_2)$  qui est analytique réelle de  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  dans  $\{\xi_1 \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \xi_1 > 0\}$  se prolonge en fonction holomorphe dans  $|\operatorname{Im} \xi_2| \leq \frac{\Theta(p_0)}{\sqrt{2}}$  et vérifie

$$(56) \quad |\operatorname{Im} \xi_2| \leq \frac{\Theta(p_0)}{\sqrt{2}} \implies \operatorname{Im} \xi_1^+(\xi_2) \geq \frac{\Theta(p_0)}{\sqrt{2}}.$$

En effet, l'identité  $p_0(\xi_1^+(\xi_2), \xi_2) \equiv 0$  et (55) impliquent  $|\operatorname{Im} \xi_1^+(\xi_2)|^2 + |\operatorname{Im} \xi_2|^2 \geq \Theta^2(p_0)$ . On a le même résultat pour la fonction  $\xi_2^+(\xi_1)$ .

On note  $P_0$  l'opérateur de symbole  $p_0$ ,  $N_1, N_2$  les opérateurs du premier ordre de symbole  $\frac{i}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_2}$ ,  $\frac{i}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}$ . On se donne également un signe  $\sigma = \pm 1$ ,  $\sigma = +1$  (resp.  $-1$ ) correspondant à l'étude du cas intérieur (resp. extérieur).

Pour  $g_1(x_1), g_2(x_2)$  éléments de  $L^2(\mathbb{R}_+; dx)$ , on note  $G$  la distribution sur  $\mathbb{R}^2$

$$(57) \quad G = (-\sigma) \left[ g_1(x_1) \otimes \delta_{x_2=0} + g_2(x_2) \otimes \delta_{x_1=0} \right]$$

et on pose

$$(58) \quad U(x_1, x_2) = P_0^{-1}(G) = \frac{-\sigma}{4\pi^2} \int e^{i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} \frac{\hat{g}_1(\xi_1) + \hat{g}_2(\xi_2)}{p_0(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.$$

On a alors

$$(59) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_1(U)(x_1, \sigma\varepsilon) = \frac{1}{2} g_1(x_1) - \frac{i\sigma}{8\pi^2} \int e^{ix_1\xi_1} \frac{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2}}{p_0}(\xi_1, \xi_2) \hat{g}_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$(60) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_2(U)(\sigma\varepsilon, x_2) = \frac{1}{2} g_2(x_2) - \frac{i\sigma}{8\pi^2} \int e^{ix_2\xi_2} \frac{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}}{p_0}(\xi_1, \xi_2) \hat{g}_1(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2.$$

Pour  $\xi \in \mathbb{C}^2$ ,  $|\operatorname{Im} \xi| \leq \Theta(p_0)$ , on a  $|\frac{p'}{p}(\xi)| \in O((1 + |\xi|)^{-1})$  et par suite (59) et (60) définissent deux éléments de  $L^2(\mathbb{R}; dx)$  (voir § II.3, lemme 2) et on a

$$(61) \quad \int_0^\infty e^{-ix_1 \cdot \xi_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_1(U)(x_1, \sigma\varepsilon) dx_1 = \frac{1}{2} \hat{g}_1 - \frac{\sigma}{2} S_{1,2}(\hat{g}_2)$$

$$(62) \quad \int_0^\infty e^{-ix_2 \cdot \xi_2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N_2(U)(\sigma\varepsilon, x_2) dx_2 = \frac{1}{2} \hat{g}_2 - \frac{\sigma}{2} S_{2,1}(\hat{g}_1) .$$

$$(63) \quad S_{1,2}(\hat{g}_2)(\xi_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi_1 - \xi_1^+(\xi_2)} \frac{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}}(\xi_1^+(\xi_2), \xi_2) \hat{g}_2(\xi_2) d\xi_2$$

$$(64) \quad S_{2,1}(\hat{g}_1)(\xi_2) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi_2 - \xi_2^+(\xi_1)} \frac{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}}{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2}}(\xi_1, \xi_2^+(\xi_1)) \hat{g}_1(\xi_1) d\xi_1 .$$

Il existe également un  $\delta(p_0)$  tel que l'on ait

$$(65) \quad |\operatorname{Im} \xi_2| \leq \frac{\Theta(p_0)}{\sqrt{2}} \implies \operatorname{Im} \xi_1^+(\xi_2) \geq \delta(p_0)(1 + |\xi_2|) .$$

(En effet, pour  $|\xi_2|$  borné, cela résulte de (56), et pour  $|\xi_2|$  grand du § III.2. (23).)

Il existe donc  $c > 0$  tel qu'on ait

$$(66) \quad \left\{ \operatorname{Im} \xi_1 \leq \frac{\Theta(p_0)}{2} \text{ et } |\operatorname{Im} \xi_2| \leq \frac{\Theta(p_0)}{2} \right\} \implies \left| \frac{1}{\xi_1 - \xi_1^+(\xi_2)} \cdot \frac{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial p_0}{\partial \xi_1}}(\xi_1^+(\xi_2), \xi_2) \right| \leq \frac{c}{1 + |\xi_1| + |\xi_2|} .$$

Donc si on pose  $\beta = \frac{\Theta(p_0)}{2}$  les opérateurs  $S_{1,2}$ ,  $S_{2,1}$  qui, par construction, sont bornés sur  $L_0^+$ , se prolongent en opérateurs bornés de  $L_\beta^+$  dans  $L_{-\beta}^+$ .

**Définition 1.** On note  $S$  l'opérateur matriciel

$$(67) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} \\ S_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose  $C^\sigma = \operatorname{Id} + \sigma S$ .

On remarquera que si on pose  $U_+ = U|_{x_1 > 0}$  et  $x_2 > 0$  et  $U_- = U|_{x_1 < 0}$  ou  $x_2 < 0$  on a

$$(68) \quad P_0 U = - \left[ N_1(U_+) |_{x_2=+0} - N_1(U_-) |_{x_2=-0} \right] 1_{x_1 \geq 0} \delta_{x_2=0} \\ - \left[ N_2(U_+) |_{x_1=+0} - N_2(U_-) |_{x_1=-0} \right] 1_{x_2 \geq 0} \delta_{x_1=0} .$$

(En effet on obtient (68) en appliquant la formule des sauts sur les faces lisses du dièdre, l'absence de contribution supplémentaire en  $x_1 = x_2 = 0$  provenant de  $U \in H_{\text{loc}}^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .)

En notant  $N(U_+) = \left(1_{x_1 \geq 0} N_1(U_+)|_{x_2=+0}, 1_{x_2 \geq 0} N_2(U_+)|_{x_1=+0}\right)$ ,

$N(U_-) = \left(1_{x_1 \geq 0} N_1(U_-)|_{x_2=-0}, 1_{x_2 \geq 0} N_2(U_-)|_{x_1=-0}\right)$ , et  $g = (g_1, g_2)$ , on a donc par construction

$$(69) \quad N(U_+) - N(U_-) = \sigma g \quad \text{et} \quad \left(\frac{\text{Id}}{2} - \frac{\sigma S}{2}\right) \hat{g} = N(\widehat{U}_\sigma)$$

donc aussi

$$(70) \quad C^\sigma \hat{g} = -2N(\widehat{U}_{-\sigma})$$

d'où il résulte qu'inverser  $C^\sigma$  sur  $L_0^+$  est équivalent à la résolution d'un problème elliptique couplé intérieur-extérieur où l'inconnue est le saut des "dérivées normales"  $N$  et la donnée les dérivées normales d'un seul côté, sous l'hypothèse de raccord des premières traces.

Pour  $\nu$  vecteur de  $\mathbb{C}^2$ , on pose  $p_0[\nu](\xi) = p_0(\xi - \nu)$ ; alors  $p_0[\nu]$  est elliptique pour  $|\text{Im } \nu| < \Theta(p_0)$  et  $\Theta(p_0[\nu]) = \Theta(p_0) - |\text{Im } \nu|$  vérifie (55) pour  $p_0[\nu]$ . Le polynôme  $p_0$  étant fixé, notons  $C^\sigma[\nu] = \text{Id} + \sigma S[\nu]$  où  $S[\nu]$  est défini par (67), (63), (64) avec  $p_0[\nu]$  en place de  $p_0$  pour  $|\text{Im } \nu| < \Theta(p_0)$ .

**Lemme 1.** *On suppose  $C^\sigma$  inversible sur  $L_0^+ \otimes L_0^+$ . Alors  $C^\sigma[\nu]$  est inversible sur  $L_{b_1}^+ \oplus L_{b_2}^+$  pour  $\max(|b_1| + |\text{Im } \nu_1|; |b_2| + |\text{Im } \nu_2|) \leq \frac{\Theta(p_0)}{2}$ .*

**PREUVE.** Soit  $T_\nu$  l'opérateur de translation défini par  $T_\nu(g_1(\xi_1), g_2(\xi_2)) = (g_1(\xi_1 - \nu_1), g_2(\xi_2 - \nu_2))$ . C'est un isomorphisme de  $L_{b_1}^+ \oplus L_{b_2}^+$  sur  $L_{b_1 - \text{Im}(\nu_1)}^+ \oplus L_{b_2 - \text{Im}(\nu_2)}^+$  et on a  $T_{-\nu} \circ C^\sigma[\nu] = C^\sigma \circ T_{-\nu}$ . On peut donc supposer  $\nu = 0$ . Maintenant, si  $C^\sigma$  est inversible sur  $L_0^+ \oplus L_0^+$ , on a  $(C^\sigma)^{-1} = 1 - \sigma S + S C_\sigma^{-1} S$  et le lemme résulte du fait que  $S$  envoie  $(L_\beta^+)^2$  dans  $(L_{-\beta}^+)^2$  pour  $\beta = \frac{\Theta(p_0)}{2}$ .

◇

Pour  $A$  matrice complexe  $2 \times 2$  symétrique,  $A = A_1 + iA_2$ ,  $A_1, A_2$  matrices réelles, et  $z \in \mathbb{C}$ , on pose

$$(71) \quad p^{A,z}(\xi) = {}^t \xi A \xi + z.$$

On remarquera que si  $p^{A,z}$  est elliptique, et  $A_1 \gg 0$ , alors l'hypothèse de séparation par l'axe réel des racines  $\xi_1^\pm(\xi_2)$  et  $\xi_2^\pm(\xi_1)$  est automatique.

( En effet, comme pour  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  on a,  $p^{A,z}$  étant elliptique  $\xi_1^\pm(\xi_2) \notin \mathbb{R}$ , il suffit de le vérifier pour  $\xi_2$  voisin de  $+\infty$ ;  $\xi_1^\pm(\xi_2)$  est alors voisin de  $z^\pm \xi_2$ , avec  $z^\pm$  racines de

$az^2 + 2bz + d = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ . Or  $\operatorname{Re} A \gg 0$  entraîne que  $az^2 + 2bz + d = 0$  n'a pas de racines réelles ; à nouveau par un argument de continuité, on peut se déformer sur  $\operatorname{Im} A = 0$  et le résultat devient évident.

**Proposition 2.** Soit  $A_0$  matrice  $2 \times 2$  symétrique réelle,  $A_0 \gg 0$  et  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $A = A_1 + iA_2$ ,  $\|A - A_0\| \leq \varepsilon_0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z - z_0| \leq \varepsilon_0$  on ait

$$(72) \quad p^{A,z} \text{ est elliptique et } \Theta(p^{A,z}) \geq \varepsilon_0 .$$

$$(73) \quad \begin{cases} \text{Le système } C^\sigma \text{ associé à } p^{A,z} \text{ est inversible sur } L_{b_1}^+ \oplus L_{b_2}^+ \\ \text{et } \|(C^\sigma)^{-1}\| \leq \varepsilon_0^{-1}, \text{ pour } \max(|b_1|, |b_2|) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} . \end{cases}$$

PREUVE. D'après (59) et (60) l'opérateur  $C^\sigma$  dépend continûment en norme de  $A$  et  $z$ ; comme  $p_0 = p^{A_0, z_0}$  est clairement elliptique, il suffit de vérifier que le  $C^\sigma$  associé à  $p_0$  est inversible sur  $L_0^+ \oplus L_0^+$ , ce qui est démontré dans [G.L, Appendice D]; on peut aussi utiliser la preuve de la proposition 3 suivante.

**Proposition 3.** Soit  $A_0$  matrice  $2 \times 2$  symétrique réelle,  $A_0 \gg 0$  et  $C_0 > 0$ ,  $C_1 > 0$  deux constantes données. Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  et  $t_0 > 0$  et pour  $t \in ]0, t_0]$ ,  $C(t) > 0$  tels que pour  $A = A_1 + iA_2$ ,  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant

$$(74) \quad \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \leq \varepsilon_0, & \operatorname{Im} z = t \in ]0, t_0] \\ \|A_1 - A_0\| \leq \varepsilon_0, & \|A_2\| \leq C_0 t \end{cases}$$

on ait

$$(75) \quad p^{A,z} \text{ est elliptique et } \Theta(p^{A,z}) \geq C_1 t .$$

$$(76) \quad \begin{cases} \text{Le système } C^\sigma \text{ associé à } p^{A,z} \text{ est inversible sur } L_{b_1}^+ \oplus L_{b_2}^+ \\ \text{et } \|(C^\sigma)^{-1}\| \leq C(t) \text{ pour } \max(|b_1|, |b_2|) \leq \frac{C_1 t}{2} . \end{cases}$$

PREUVE. D'abord, si  $\varepsilon_0$  est assez petit,  $\|A_1 - A_0\| \leq \varepsilon_0$  entraîne  $A_1 \gg 0$ . Avec  $\zeta = \xi + i\eta$  on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p^{A,z}(\zeta) &= {}^t \xi A_1 \xi - 2 {}^t \xi A_2 \eta - {}^t \eta A_1 \eta + \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} p^{A,z}(\zeta) &= {}^t \xi A_2 \xi + 2 {}^t \xi A_1 \eta - {}^t \eta A_2 \eta + t . \end{aligned}$$

Donc pour  $\|A_2\| \leq C_0 t$ ,  $\|\eta\| \leq C_1 t$ , on a

$$\operatorname{Im} p^{A,z}(\zeta) \geq t[1 - 2\|\xi\|\|A_1\|C_0 - C_0\|\xi\|^2] - C_1^2 t^3 C_0 ,$$

et si  $t_0, \varepsilon_0$  sont assez petits pour  $\|\xi\| \leq D$ , où  $D > 0$  ne dépend que de  $C_0$ , on aura  $\operatorname{Im} p^{A,z}(\zeta) \geq \frac{t}{2}$ . Aussi, pour  $\|\xi\| \geq D$  on a  $\operatorname{Re} p^{A,z}(\zeta) \geq {}^t\xi A_1 \xi - 2\|\xi\|C_0 C_1 t^2 - \|A_1\|C_1^2 t^2 - \varepsilon_0 > 0$  si  $t_0$  et  $\varepsilon_0$  sont assez petits. Il en résulte (75) et plus précisément

$$(77) \quad |\operatorname{Im} \xi| \leq C_1 t \implies |p^{A,z}(\xi)| \geq c|\xi|^2 + \frac{t}{2}$$

où  $c > 0$  est indépendant de  $t \in ]0, t_0]$ . Alors d'après (77), (63), (64),  $S$  envoie  $(L_\beta^+)^2$  dans  $(L_{-\beta}^+)^2$ ,  $\beta = \frac{C_1 t}{2}$ , et sa norme entre ces espaces est estimée par une fonction  $C(t) > 0$ . Par la preuve du lemme 1, il suffit donc de prouver (76) avec  $b_1 = b_2 = 0$ .

Soit  $\Gamma$  un secteur angulaire du plan défini en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par  $r > 0$ ,  $\theta \in ]\theta_-, \theta_+[$ . Pour  $u, v \in H^1(\Gamma)$ , posons

$$(78) \quad a(u, v) = \int_\Gamma {}^t\nabla u A \nabla \bar{v} + z u \bar{v}$$

qui est une forme hermitienne continue. Alors  $a$  est coercitive, quitte à diminuer  $\varepsilon_0$  puisqu'on a

$$(79) \quad \begin{cases} \operatorname{Im} a(u, u) = \int_\Gamma {}^t\nabla u A_2 \overline{\nabla u} + t|u|^2 \\ \operatorname{Re} a(u, u) = \int_\Gamma {}^t\nabla u A_1 \overline{\nabla u} + \operatorname{Re} z |u|^2 \end{cases}$$

qui implique ( $\|A_2\| \leq C_0 t$ ,  $|\operatorname{Re} z| \leq \varepsilon_0$ )

$$(80) \quad |a(u, u)| \geq ct \|u\|_{H^1}^2$$

pour un  $c > 0$  indépendant de  $t \in ]0, t_0]$ .

Par le lemme de Lax-Milgram, pour  $g \in L^2(\Gamma)$  donné il existe un unique  $f_D \in H_0^1(\Gamma)$ , qu'on notera  $(P^{A,z})_D^{-1} g$ , qui vérifie pour tout  $v \in H_0^1(\Gamma)$ ,  $a(f_D, v) = \int_\Gamma g \bar{v}$ . On a  $P^{A,z} f_D = g$  dans  $\Gamma$  et  $\|f_D\|_{H_0^1} \leq (ct)^{-1} \|g\|_{L^2}$ . De même, il existe un unique  $f_N \in H^1(\Gamma)$ , qu'on notera  $(P^{A,z})_N^{-1}(g)$  qui vérifie pour tout  $v \in H^1(\Gamma)$   $a(f_N, v) = \int_\Gamma g \bar{v}$ ; on a  $P^{A,z} f_N = g$  dans  $\Gamma$ ,  $\|f_N\|_{H^1} \leq (ct)^{-1} \|g\|_{L^2}$  et la formule d'intégration par parties valable pour  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$

$$(81) \quad \int_\Gamma P^{A,z} f \bar{\varphi} = a(f, \varphi) - \int_{\partial\Gamma} (\vec{\nu} \cdot A \nabla f) \bar{\varphi}$$

implique que les traces sur la partie lisse de  $\partial\Gamma$  des dérivées normales  $N(f) = \vec{\nu} \cdot A \nabla f|_{\partial\Gamma}$  sont nulles.

Vérifions déjà que  $C^\sigma$  est injectif sur  $(L_0^+)^2$ . On suppose  $\sigma = +$ , le cas  $\sigma = -$  étant analogue. Soit donc  $\hat{g} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2) \in (L_0^+)^2$  tel que  $C^+ \hat{g} = 0$ . Posons  $U = (P^{A,z})^{-1} G$ ,  $G = -[g_1 \otimes \delta_{x_2=0} + g_2 \otimes \delta_{x_1=0}]$ ,  $U_+ = U|_{Q^i}$ ,  $U_- = U|_{Q^e}$ . On a  $U \in H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$  pour  $\varepsilon > 0$ , donc  $U_- \in H^1(Q^e)$  et par (70),  $N(U_-) = 0$ . Comme  $P^{A,z} U_- = 0$ , (81) implique  $a(U_-, \varphi) = 0$  pour tout  $\varphi \in F$ , où  $F$  est l'espace des restrictions à  $Q^e$  des éléments de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$ . Comme  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$  est dense dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , on a  $a(U_-, v) = 0$  pour tout  $v \in H^1(Q^e)$ , donc  $U_- = 0$  donc  $U_+|_{\partial Q^i} \equiv 0$ , d'où  $U_+ \in H_0^1(Q^i)$  et comme  $P^{A,z} U_+ = 0$ , on en déduit  $U_+ = 0$  donc  $G = 0$ , d'où l'injectivité de  $C^+$ .

Pour achever la preuve de (76), on introduit  $E(\Gamma)$ , espace des distributions sur le secteur angulaire  $\Gamma$ , qui vérifient en coordonnées polaires

$$(82) \quad \begin{cases} u \in C^0([\theta_-, \theta_+]; H_r^1(\mathbb{R}_+)) & \frac{1}{r} \partial_\theta u \in C^0([\theta_-, \theta_+]; L^2(\mathbb{R}_+)) \\ u(r=0; \theta = \theta_-) = u(r=0, \theta = \theta_+) \end{cases}$$

où  $H^1$  et  $L^2$  sont munis de la topologie faible.

On remarquera que pour  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $u \rightarrow \chi u$  envoie  $E(\Gamma)$  dans  $H^1(\Gamma)$ . Pour  $u \in E(\Gamma)$ ,  $u|_{\partial\Gamma}$  existe, et appartient à  $H^1(\partial\Gamma)$ . De même,  $N(u) = (\vec{\nu} \cdot A \nabla u)|_{\partial\Gamma}$ ,  $\vec{\nu}$  désignant la normale unitaire extérieure, existe et appartient à  $L^2(\partial\Gamma)$ , ces morphismes traces étant continus. Alors (76) va être conséquence de

### Lemme 2.

- (83) i) Pour tout  $g \in L^2(\Gamma)$ ,  $h \in H^1(\partial\Gamma)$ , il existe un unique  $u \in E(\Gamma) \cap H^1(\Gamma)$  tel que  $P^{A,z} u = g$ ,  $u|_{\partial\Gamma} = h$ .
- (84) ii) Pour tout  $g \in L^2(\Gamma)$ ,  $h \in L^2(\partial\Gamma)$ , il existe un unique  $u \in E(\Gamma) \cap H^1(\Gamma)$  tel que  $P^{A,z} u = g$ ,  $N(u) = h$ .

De plus il existe une fonction  $C(t) > 0$ ,  $t \in ]0, t_0]$  telle que

$$(85) \quad \|u\| \leq C(t) (\|g\| + \|h\|) .$$

Vérifions que le lemme 2 implique (76). Si  $\hat{f} \in (L_0^+)^2$  est donné, il existe par (84)  $U_- \in E(Q^e) \cap H^1$  vérifiant  $P^{A,z}(U_-) = 0$ ,  $N(U_-) = \frac{-\hat{f}}{2}$  et  $\|U_-\| \leq C(t)\|\hat{f}\|$ . Donc il existe d'après (83)  $U_+ \in E(Q^i) \cap H^1$ , vérifiant  $P^{A,z}(U_+) = 0$ ,  $U_+|_{\partial Q^i} = U_-|_{\partial Q^e}$  et  $\|U_+\| \leq (C(t))^2 \|\hat{f}\|$ . Alors  $U \in L^2(\mathbb{R}^2)$  défini par  $U|_{Q^i} = U_+$ ,  $U|_{Q^e} = U_-$  vérifie  $P^{A,z} U = G = -g_1 \otimes \delta_{x_2=0} - g_2 \otimes \delta_{x_1=0}$ , avec  $g_1 = N(U_+) - N(U_-)|_{x_2=0}$ ,  $g_2 = N(U_+) - N(U_-)|_{x_1=0}$  donc  $\hat{g} \in (L_0^+)^2$  vérifie  $C^+ \hat{g} = \hat{f}$  et  $\|\hat{g}\| \leq C(t)\|\hat{f}\|$  avec une autre fonction  $C(t)$ , d'où (76).

**PREUVE DU LEMME 2.** L'espace  $E(\Gamma)$  se transportant par changement linéaire de coordonnées, et puisque  $A = A_1 + i A_2$  avec  $A_1 \gg 0$ , on peut supposer  $A_1 = \text{Id}$ . Comme nous avons déjà vérifié l'unicité de  $u$ , il suffit de vérifier l'existence de  $u$  satisfaisant à (85). Pour cela, nous réintroduisons la transformation de Mellin  $M$



définie au § 2.1 (24), et les vecteurs  $\vec{t} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n} = -\begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ . On note  $L_A$  l'opérateur de symbole  ${}^t\xi A\xi$ ,  $-\mathcal{L}_A$  son image par transformation de Mellin,  $\mathcal{N}_A$  l'image de l'opérateur de dérivation normale  $(\vec{\nu} \cdot A\nabla f)|_{\partial\Gamma}$ . On a (voir le § 2.1 (29)), où  $(|)$  est le produit scalaire (complexe ici) défini par  $A$ , et avec  $\|a\|^2 = (a|a)$

$$(86) \quad \mathcal{L}_A = \|\vec{n}\|^2 \partial_\theta^2 + 2(\vec{t}|\vec{n})(z-1)\partial_\theta + z^2\|\vec{t}\|^2 + z(\|\vec{n}\|^2 - \|\vec{t}\|^2)$$

$$(87) \quad \mathcal{N}_A = \pm[(\vec{n}|\vec{t})z + \|\vec{n}\|^2\partial_\theta] \quad (+ \text{ en } \theta = \theta_+, - \text{ en } \theta = \theta_-)$$

de sorte que pour  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$

$$(88) \quad -M[LAu](z, \theta) = \mathcal{L}_A(Mu)(z+2, \theta)$$

$$(89) \quad M[\vec{\nu}A\nabla u](z, \theta_\pm) = \mathcal{N}_A(Mu)(z+1, \theta_\pm)$$

et la formule d'intégration par parties

$$(90) \quad \int_{\theta_-}^{\theta_+} \mathcal{L}_A(f)\bar{g} d\theta = \tilde{a}_z(f, g) + [\mathcal{N}_A(f)\bar{g}]_{\theta_-}^{\theta_+}$$

$$(91) \quad \tilde{a}_z(f, g) = \int_{\theta_-}^{\theta_+} -\|\vec{n}\|^2 \partial_\theta f \partial_\theta \bar{g} + z(\vec{t}|\vec{n})[\partial_\theta f \bar{g} - f \partial_\theta \bar{g}] + z^2\|\vec{t}\|^2 f \bar{g} .$$

Soit  $\alpha > 0$  petit. Pour  $z \in U = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \in \left[ \frac{-1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha \right] \right\}$  on note  $H_z^2$  l'espace  $H^2((\theta_-, \theta_+))$  muni de la norme  $|f|_z^2 = |\partial_\theta^2 f|_{L^2}^2 + (1+|z|)^2 |\partial_\theta f|_{L^2}^2 + (1+|z|)^4 |f|_{L^2}^2$ , et  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$  les opérateurs de trace  $\gamma_0(f) = (f|_{\theta_+}, f|_{\theta_-})$ ,  $\gamma_1(f) = (\mathcal{N}_A(f)|_{\theta_+}, \mathcal{N}_A(f)|_{\theta_-})$ . Soit  $T_{A,z}^i$  les opérateurs de  $H_z^2$  dans  $L^2 \oplus \mathbb{C}_{z,i}^2$ ,  $\|a; \mathbb{C}_{z,i}^2\|^2 = (1+|z|)^{1+2(1-i)}(|a_1|^2 + |a_2|^2)$

$$(92) \quad T_{A,z}^i(f) = (\mathcal{L}_A(f), \gamma_i(f))$$

qui sont bornés (uniformément en  $z \in U$ ) d'après (86), (87). Lorsque  $A = \operatorname{Id}$ , i.e.  $A_2 = 0$  un calcul explicite prouve que  $T_{A,z}^0$  (resp.  $T_{A,z}^1$ ) est bijectif pour  $z \in U$  (resp.  $z \in U \setminus \{|z| < \alpha\}$ ), et que leurs inverses vérifient  $\|(T_{A,z}^i)^{-1}\| \leq C$ , avec  $C$  indépendant de  $z$ . Comme  $A = \operatorname{Id} + iA_2$ ,  $\|A_2\| \leq C_0 t$ , ce résultat subsiste pour  $T_{A,z}^i$  si  $t_0$  est assez petit.

Pour prouver le lemme 2, on se ramène d'abord à  $h = 0$  comme suit. Dans le cas Dirichlet, pour  $h$  à support dans  $r \leq 2$  notons  $h = (h_-, h_+)$ ; Alors  $M(h)(z)$  est méromorphe dans  $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ , son seul pôle est en  $z = 0$ , simple de résidu  $-(h(0), h(0))$  et pour tout  $a \leq \frac{1}{2}$  on a  $\int_{\operatorname{Re} z = a} |z|^2 |M(h)(z)|^2 \leq \operatorname{Cte} \|h\|_{H^1(\partial\Gamma)}^2$ , puisque  $Mh(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty h'(r) r^{-z} dr$ . Posons

$$(93) \quad w(r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}} r^z W(z, \theta) dz + h(0); \quad W(z, \theta) = (T_{A,z}^0)^{-1}[0, M(h)(z)] .$$

Par construction on a  $L_A w(r, \theta) \equiv 0$ .

Rappelons que la transformation de Mellin est une isométrie (à  $2\pi$  près) de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  sur  $L^2(\text{Re } z = \frac{1}{2})$  d'inverse  $M^{-1}F(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } z = \frac{1}{2}} F(z) r^z dz$ . D'après ce qui précède on a

$$\int d\theta \int_{\text{Re } z = \frac{1}{2}} \left( \frac{|\partial_\theta^2 W|^2}{|z|} + |z| |\partial_\theta W|^2 + |z|^3 |W|^2 \right) |dz| \leq \text{Cte} \|h\|_{H^1}^2$$

donc  $W, zW, \partial_\theta W$  appartiennent à  $C^0([\theta_-, \theta_+]; L^2(\text{Re } z = \frac{1}{2}))$  par les injections de Sobolev, donc  $\partial_r w, \frac{1}{r} \partial_\theta w$  sont  $C^0([\theta_-, \theta_+]; L_r^2)$  et on a aussi  $w = r\tilde{w} + h(0)$  avec  $\tilde{w} \in C^0([\theta_-, \theta_+]; L_r^2)$ . On a  $w|_{\partial\Gamma} = h$  par construction. Si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi = 1$  pour  $r \leq 3$  on aura donc  $\chi w|_{\partial\Gamma} = h$ ;  $P^{A,z} \chi w = \chi zw + [P^{A,z}, \chi] w = \psi \in L^2$ ,  $\|\psi\| \leq \text{Cte} \|h\|$  et  $\|\chi w\|_{E(\Gamma) \cap H^1(\Gamma)} \leq \text{Cte} \|h\|_{H^1}$  et en remplaçant  $g$  par  $g - \psi$ , on se ramènera à  $h = 0$ . On procède de même dans le cas Neumann, en utilisant cette fois

$$(94) \quad w(r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } z = \frac{1}{2}} r^z W(z, \theta) dz; \quad W(z, \theta) = (T_{A,z}^1)^{-1}[0, M(h)(z-1)]$$

en remarquant que  $w(0, \theta) \equiv 0$ . On aura alors  $N[\chi w] = h + [N, \chi]w|_{\partial\Gamma} = h$  près de  $r = 0$ . Maintenant, lorsque  $h$  est à support dans  $r \geq 1$ , on peut supposer par exemple que  $\Gamma = \{0 < \theta < \theta_0\}$  et que  $h = h(x_1)$  est à support dans  $x_1 \geq 1$ . On relève alors les problèmes de Dirichlet ( $D$ ) et Neumann ( $N$ ) en posant

$$(95) \quad w_D(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{ix_1 \xi_1 + ix_2 \xi_2^+(\xi_1)} \hat{h}(\xi_1) d\xi_1$$

$$(96) \quad w_N(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)} \int e^{ix_1 \xi_1 + ix_2 \xi_2^+(\xi_1)} \left( \frac{i}{2} \frac{\partial p_0}{\partial \xi_2} \right)^{-1}(\xi_1, \xi_2^+(\xi_1)) \hat{h}(\xi_1) d\xi_1.$$

On a  $P^{A,z} w_{D,N} \equiv 0$  dans  $x_2 > 0$ ,  $w_D|_{\theta=0} = h$ ,  $N(w_N)|_{\theta=0} = h$ ,  $w_{D,N} \in E(\Gamma) \cap H^1(\Gamma)$  et sa norme dans cet espace est estimé par  $C(t)\|h\|$  (voir la preuve de la proposition 3 du § 2.3). En choisissant  $\chi(x_1, x_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  à dérivées bornées, à support près de  $\{(x_1 \geq 1, x_2 = 0)\}$ ,  $\chi(x_1, 0) \equiv 1$  près de  $x_1 \geq 1$ , on aura  $\chi w \in E(\Gamma) \cap H^1(\Gamma)$ ,  $\|\chi w\| \leq C(t)\|h\|$ ,  $P^{A,z} \chi w = [P^{A,z}, \chi] w = \psi$ ,  $\psi \in L^2$ ,  $\|\psi\| \leq C(t)\|h\|$  et  $(\chi w_D)|_\Gamma = (h \text{ sur } \theta = 0, 0 \text{ sur } \theta = \theta_0)$ , ainsi que  $N(\chi w_N) = h \text{ sur } \theta = 0, 0 \text{ sur } \theta = \theta_0$ , en choisissant, ce qui est toujours possible  $\chi$  tel que  $N(\chi)|_{x_2=0} \equiv 0$ .

Remplaçant  $u$  par  $u - \chi w$ , on est ainsi ramené à  $h \equiv 0$ . L'existence de  $u$  dans  $H^1(\Gamma)$  vérifiant l'estimée (85) est alors conséquence de Lax-Milgram, et on est ramené à prouver des estimations sur  $u$  dans  $E(\Gamma)$ . Pour cela, on écrit  $1 = \chi_0(x) + \chi_1(x) + \chi_2(x)$  où  $\chi_0$  localise près de  $r \leq 2$ ,  $\chi_1$  près de  $(\partial\Gamma \cap r \geq 1)$ , les  $\chi_j$  étant  $C^\infty$  à dérivées bornées et telles que  $N(\chi_j)|_{\partial\Gamma} \equiv 0$ . Si on pose  $u_j = \chi_j u$ , on a  $P^{A,z} u_j = [P^{A,z}, \chi_j] u + \chi_j g$  qui est estimé dans  $L^2(\Gamma)$  et  $u|_{\partial\Gamma}$  ou  $N(u)|_{\partial\Gamma} = 0$ . On en déduit des estimations dans  $H^2(\Gamma)$  pour  $u_2$  et aussi pour  $u_1$  par la théorie elliptique des opérateurs dans un demi-espace, et on conclut dans ces cas par l'injection de  $H^2(\Gamma)$  dans  $E(\Gamma)$ . On peut donc supposer  $u$  à support dans  $r \leq 2$ . On travaillera à présent dans le cas Neumann, le cas Dirichlet étant analogue et plus simple. On a donc  $L_A u = v \in L^2(\Gamma)$ ,

$N(u)|_{\Gamma \setminus (0)} = 0$ , support  $(u) \subset \{r \leq 2\}$ ,  $u \in H^1(\Gamma)$ . Soit  $f(z, \theta) = (Mu)(z, \theta)$ ,  $g(z, \theta) = -M(v)(z - 2, \theta)$ . Alors  $g$  est estimée dans  $L^2(\text{Re } z = b; \theta \in (\theta_-, \theta_+))$  pour  $b < 1$ , et  $zf, \partial_\theta f$  sont estimés dans  $L^2(\text{Re } z = b; \theta \in (\theta_-, \theta_+))$  pour  $b < 0$ . On a  $\mathcal{L}_A(f) = g$  et aussi  $\mathcal{N}_A(f) = 0$

( en effet d'après (81)  $\int_\Gamma v \bar{\varphi} = \int_\Gamma \overline{v} \varphi A \nabla v$  pour tout  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$  d'où en effectuant la transformation de Mellin, pour  $b \ll 0$ ,  $\int_{\theta_-}^{\theta_+} \int_{\text{Re } z = b} g M \bar{\varphi} - \tilde{a}_z(f, M \bar{\varphi}) = 0$  donc par (90) et  $\mathcal{L}_A(f) = g$ ,  $[\int_{\text{Re } z = b} \mathcal{N}_A(f) M \bar{\varphi}]_{\theta_-}^{\theta_+} = 0$  donc  $\mathcal{N}_A(f) = 0$ ). On a donc pour  $\alpha > 0$  petit  $f(z, \theta) = (T_{A,z}^1)^{-1}[g(z, \theta), 0]$  pour tout  $z \in \{\text{Re } z \in [-\frac{1}{2} - \alpha, -\alpha]\}$ , ce qui entraîne que  $f(z, \theta)$  se prolonge à  $z \in \{\text{Re } z \in [-\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha]; |z| \geq \alpha\}$  et vérifie  $z^i \partial_\theta^j f \in L^2(\text{Re } z = \rho \cap |z| \geq \alpha, \theta \in (\theta_-, \theta_+))$  pour  $\rho \in [-\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha]$ . Par la formule d'inversion de Mellin et la formule de Cauchy, on a puisque  $u \in H^1(\Gamma)$  implique  $u \in C^0(\theta; L_r^2)$

$$(97) \quad \begin{cases} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re } z = \frac{1}{2}} (T_{A,z}^1)^{-1} [g(z, \theta), 0] r^z dz \\ + \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| = \alpha} (T_{A,z}^1)^{-1} [g(z, \theta), 0] r^z dz . \end{cases}$$

Dans (97), le premier terme est estimé dans  $E(\Gamma)$  pour  $r$  borné, et il suffit donc d'estimer le résidu. Pour cela nous utilisons une méthode de Grushin. Pour  $z$  près de 0,  $A = A_1 + iA_2$  près de Id, notons  $Q(z, A)$  l'opérateur de  $H_\theta^2 \oplus \mathbb{C}$  dans  $(L_\theta^2 \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}$  défini par  $Q(z, A)(f, x) = ((\mathcal{L}_A(f) + x1, \gamma_1(f)), \int_{\theta_-}^{\theta_+} f(\sigma) d\sigma)$ . Il est inversible car  $Q(0, \text{Id})$  l'est. Si on désigne par  $E = (E_{i,j})$  son inverse  $E_{1,1}(z, A) : L_\theta^2 \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow H_\theta^2$ ,  $E_{1,2}(z, A) : \mathbb{C} \rightarrow H_\theta^2$ ,  $E_{2,1}(z, A) : L_\theta^2 \oplus \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $E_{2,2}(z, A) \in \mathbb{C}$ , alors  $T_{A,z}^1$  est inversible ssi  $E_{2,2}(z, A) \neq 0$  et on a alors  $(T_{A,z}^1)^{-1} = E_{11} - E_{12} E_{22}^{-1} E_{2,1}$ .

Un calcul élémentaire prouve que  $E_{22}(z, \text{Id}) = cz^2$  avec  $c \neq 0$ ; on a aussi  $E_{22}(0, A) = 0$  pour tout  $A$  car  $T_{A,0}^1(1) = 0$ . Comme  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{22}(0, \text{Id}) \neq 0$ , on en déduit  $E_{22}(z, A) = e(z, A)(z^2 + q(A)z)$ , avec  $e \neq 0$ . Pour  $A$  réelle, on a  $q(A) = 0$  car  $T_{A,z}^1$  est inversible pour  $z \neq 0, z \sim 0$  (puisque'il n'existe pas de solution au problème  $\Delta(r^z \varphi(\theta)) = 0, \partial_n(r^z \varphi(\theta))|_{\partial\Gamma} = 0$  dans un secteur angulaire  $\Gamma$  du plan pour  $z \neq 0, z$  près de 0), donc  $q(A) = 0$  pour tout  $A$ . Il en résulte que dans (97), le terme de résidu est de la forme

$$(98) \quad \begin{aligned} \text{Log } r \cdot \psi_0(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_0(\varphi) g(0, \varphi) d\varphi + \psi_1(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_1(\varphi) g(0, \varphi) d\varphi \\ + \psi_2(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_2(\varphi) g'_z(0, \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

avec  $\psi_j \in H_\theta^2, a_j \in L_\theta^2$ . Or ce terme doit appartenir à  $H^1(\Gamma)$  près de l'origine. On a donc nécessairement  $\psi_0(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_0(\varphi) g(0, \varphi) d\varphi \equiv 0, \psi_1(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_1(\varphi) g(0, \varphi) d\varphi + \psi_2(\theta) \int_{\theta_-}^{\theta_+} a_2(\varphi) g'_z(0, \varphi) d\varphi = C$  où  $C$  est une constante, qui est donc estimée par  $\|v\|_{L^2(\Gamma)}$  ce qui achève la preuve du lemme 2.  $\diamond$

## IV.3. Preuve du théorème 2

L'objet de ce paragraphe est de prouver le :

**Théorème 2.** Soit  $M = M^i$  ou  $M^e$  et  $u \in H_0^1(M)$  solution de  $Pu = 0$ . Alors  $SS_b(u) \subset \Sigma_b$ .

Compte tenu des résultats classiques sur les problèmes aux limites sur les variétés à bord analytique, il s'agit de vérifier que si  $\rho_0 = (x_0'' = 0, \xi_0'') \in \tilde{T}^*L \cap \mathcal{E}$ , on a pour  $u \in H_0^1(M)$ ,  $Pu = 0$ ,  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ . Pour cela, nous allons utiliser la proposition 3 du § 3.5, dont nous conservons les notations. On pose  $z_0'' = -i\xi_0''$  et

$$(99) \quad F(z, \lambda) = T(\psi u)$$

$$(100) \quad G_1(z_1, z'', \lambda) = (T_1 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_2=0} g_1)$$

$$(101) \quad G_2(z_2, z'', \lambda) = (T_2 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_1=0} g_2)$$

$$(102) \quad G = \mp(G_1 + G_2) \quad (- \text{ si } M = M^i, + \text{ si } M = M^e).$$

Rappelons qu'on a  $p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu)A_x(\xi' - \nu) - R$ , où  $\nu(x, \xi'')$  est linéaire en  $\xi''$ ,  $R(x, \xi'')$  quadratique en  $\xi''$ . On posera

$$(103) \quad \begin{cases} \nu(i\zeta, iz'' + \zeta'') - \zeta' = \mu(z'', \zeta) \\ R(i\zeta, iz'' + \zeta'') = r(z'', \zeta) \end{cases}$$

D'après le § III.1, on a

$$(104) \quad p^\sharp(z, \zeta, \lambda) = {}^t(iz' - \mu)A_{i\zeta}(iz' - \mu) - r + \frac{1}{\lambda}p_1^\sharp(z, \zeta) + \frac{1}{\lambda^2}p_0^\sharp(z, \zeta)$$

où  $p_1^\sharp$  (resp.  $p_0^\sharp$ ) est un polynôme de degré 1 (resp. 0) en  $z$ . Comme  $\rho_0 \in \mathcal{E}$ , il existe  $W$  voisinage de  $z_0''$ ,  $D > 0$ ,  $\underline{r} = (r_1, r_2)$ ,  $\delta > 0$  tel que pour  $\lambda \geq \lambda_0$

$$(105) \quad \exists c_0 > 0, \quad |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c_0(1 + |z|)^2, \quad \|\zeta\| \leq D_0, \quad z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W$$

où  $\Omega(\underline{r}, \delta)$  est défini au § 3 (30) avec les contours triviaux  $\gamma_j \equiv 0$ . Quitte à diminuer  $W, \underline{r}, \delta, D$  il existe d'après le § 3., Lemme 3,  $q \in \mathcal{E}^{-2}(W; \underline{r}, \delta, D)$  tel que  $q \circ p^\sharp = 1$ . En choisissant le support de  $\psi$  assez petit, on a alors :

$$F \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta), \quad e^{\varepsilon\lambda}[\lambda^2 P_C^\sharp F - G] \in \mathcal{B}_0^0(W; \underline{r}, \delta)$$

(§ 3., proposition 3);

$$e^{\varepsilon\lambda}[F - \text{Op}(q, C_1, C_2)\lambda^{-2}G] \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta)$$

(§ 3., proposition 1, car § 3 (52), (53) sont satisfaits).

D'où en utilisant le § 3, proposition 2 et 3 et le § 3, lemme 7

$$(106) \quad \begin{cases} \lambda^{-1}\Pi(\text{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1,C}^\sharp \circ \text{Op}(q, C_1, C_2)G) = G_1 + m_1 \\ \lambda^{-1}\Pi(\text{Tr}_2^\pm \mathcal{N}_{2,C}^\sharp \circ \text{Op}(q, C_1, C_2)G) = G_2 + m_2 \end{cases}$$

avec  $e^{\varepsilon\lambda}m_j \in H_0^0(W; r_j)$ , (106) étant valable pour tout  $C, C_1, C_2$  assez grands,  $\varepsilon > 0$  dépendant de  $C, C_1, C_2$ .

Nous allons à présent détailler la structure du système (106).

**Lemme 3.** On a  $q = \sum_{\ell=0}^{\infty} q_{\ell}(i\lambda)^{-\ell}$ ,  $q_{\ell} = (p^{\sharp})^{-(2\ell+1)} \hat{q}_{\ell}$ ,  $\hat{q}_0 \equiv 1$ ,  $\hat{q}_{\ell}(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq 3\ell} (iz)^{\alpha} \hat{q}_{\ell, \alpha}(\zeta, \lambda)$ , et il existe  $A, B$  tels que pour tout  $\ell, \alpha$ ,  $\|\zeta\| \leq D$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $|\hat{q}_{\ell, \alpha}(\zeta, \lambda)| \leq AB^{\ell} \ell!$ .

PREUVE. Les  $\hat{q}_{\ell}$  sont déterminés par récurrence par  $\hat{q}_0 = 1$ ,

$$(p^{\sharp})^{-(2\ell+1)} \hat{q}_{\ell} = - \sum_{\substack{|\alpha|+i=\ell \\ i \neq \ell}} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} [(p^{\sharp})^{-(2i+1)} \hat{q}_i] \frac{\partial_z^{\alpha} p^{\sharp}}{p^{\sharp}}$$

donc

$$\hat{q}_{\ell} = -p^{\sharp(2\ell+1)} \sum_{\substack{|\alpha_1+\alpha_2|+i=\ell \\ i \neq \ell}} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \partial_{\zeta}^{\alpha_1} ((p^{\sharp})^{-(2i+1)}) \partial_{\zeta}^{\alpha_2} \hat{q}_i \frac{\partial_z^{\alpha_1+\alpha_2} p^{\sharp}}{p^{\sharp}}.$$

Comme  $\hat{p}_{\ell}$  est un polynôme en  $z$  de degré 2,  $\hat{q}_{\ell}$  est un polynôme en  $z$  de degré au plus  $3\ell$ , et pour  $z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W$ ,  $|q_{\ell}(z, \zeta, \lambda)| \leq AB^{\ell} \ell! (1 + |z|)^{-2-\ell}$  par le § 3. (33) donc  $|\hat{q}_{\ell}(z, \zeta, \lambda)| \leq AB^{\ell} \ell! (1 + |z|)^{3\ell}$  d'où le lemme 3.  $\diamond$

Soit à présent  $S_j$  le composé formel  $\mathcal{N}_j^{\sharp} \circ q$ . On a  $S_j = \sum_{\ell=0}^{\infty} (i\lambda)^{-\ell} S_{j, \ell}$ ,  $S_{j, \ell} = \sum_{|\alpha|+i=\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} \mathcal{N}_j^{\sharp} \cdot \partial_z^{\alpha}(q_i)$ . Comme  $\mathcal{N}_j^{\sharp}(z, \zeta, \lambda) = \frac{i}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi_k}(i\zeta, iz + \zeta) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{N}_{j,0}^{\sharp}(\zeta)$ ,  $k = 1$  (resp. 2) si  $j = 2$  (resp. 1) on obtient comme dans le lemme 3

$$(107) \quad S_{j, \ell} = (p^{\sharp})^{-(2\ell+1)} \hat{S}_{j, \ell}; \quad \hat{S}_{j, \ell} = \sum_{|\alpha| \leq 3\ell+1} (iz)^{\alpha} \hat{S}_{j, \ell, \alpha}(\zeta, \lambda); \quad |\hat{S}_{j, \ell, \alpha}| \leq AB^{\ell} \ell!$$

$$(108) \quad \hat{S}_{j,0} = \mathcal{N}_j^{\sharp}$$

de sorte que  $S_j \in \mathcal{E}^{-1}(W; \underline{r}, \delta, D)$  et en utilisant le lemme 2 du § 3 et la preuve de la proposition 1 du § 3, on obtient  $e^{\varepsilon\lambda} [\mathcal{N}_{j,C}^{\sharp} \circ \text{Op}(q, C_1, C_2)G - \text{Op}(S_j, C_1, C_2)G] \in \mathcal{B}_0^1(W; \underline{r}, \delta)$ , et donc par le lemme 7 du § 3, on peut remplacer (106) par

$$(109) \quad \lambda^{-1} \Pi(\text{Tr}_j^{\pm} \text{Op}(S_j, C_1, C_2)G) = G_j + m_j, \quad j = 1, 2.$$

qu'on écrit sous forme matriciel

$$(110) \quad \begin{pmatrix} M^{1,1} & M^{1,2} \\ M^{2,1} & M^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons expliciter les termes  $M^{1,1}$ ,  $M^{1,2}$ , les deux autres termes s'obtenant par symétrie. On a, dans  $\text{Re } z_1 < 0$  avec  $\sigma = -$  si  $M = M^i$ ,  $\sigma = +$  si  $M = M^e$

$$(111) \quad M^{1,1} G = \frac{+1}{2i\pi} \int \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{2}}} \sigma \lim_{x_2 \rightarrow -\sigma \cdot 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} (i\lambda)^{-\ell}$$

$$\frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} S_{1, \ell}(w_1, x_2 - ib_2, z''; 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha} G_1(w_1, z'', \lambda) db_2$$

où le contour d'intégration en  $w_1$  est l'axe imaginaire orienté du haut vers le bas. En notant  $\gamma_\sigma$  le contour orienté dans le sens direct qui entourent la racine en  $w_2$  de  $p^\#(w_1, w_2, z''; 0, \lambda) = 0$  dans  $-\sigma \operatorname{Re} w_2 > 0$  et en posant

$$(112) \quad M_{\ell, \alpha}^{1,1} = \frac{-i}{2\pi} \int_{\gamma_\sigma} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1, \ell}(w_1, w_2, z''; 0, \lambda) dw_2$$

qui vérifie

$$(113) \quad |M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda)| \leq A B_1^\ell B_2^{|\alpha|} \ell! (1 + |w_1|)^{-\ell}$$

pour  $z''$  près de  $z_0''$  et  $w_1$  dans un voisinage conique de  $i\mathbf{R}$ , on obtient

$$(114) \quad M^{1,1} G_1 = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}} (i\lambda)^{-\ell} \frac{+1}{2i\pi} \int \frac{dw_1}{z_1 - w_1} M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^\alpha G_1(w_1, z'', \lambda) .$$

On remarquera qu'on a

$$(115) \quad M_{0,0}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\sigma} \left(\frac{\mathcal{N}_1^\#}{p^\#}\right)(w_1, w_2, z''; 0, \lambda) dw_2$$

d'où puisque  $\mathcal{N}_1^\# = \frac{i}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi_2}(i\zeta, iz + \zeta) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{N}_{1,0}^\#(\zeta)$  d'après (104)

$$(116) \quad M_{0,0}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda(1 + |w_1|)}\right) .$$

De même, on trouve

$$(117) \quad M^{1,2} G_2 = \frac{+1}{2i\pi} \int \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \sigma \lim_{x_2 \rightarrow -\sigma \cdot 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}} (i\lambda)^{-\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1, \ell}(w_1, x_2 - ib_2, z''; 0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^\alpha G_2(x_2 - ib_2, z'', \lambda) db_2$$

donc

$$(118) \quad M^{1,2} G_2 = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}} (i\lambda)^{-\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z_1, -ib_2, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^\alpha G_2(-ib_2, z'', \lambda) db_2$$

avec

$$(119) \quad M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z, \lambda) = \frac{+\sigma}{4i\pi^2} \int \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1, \ell}(w_1, z_2, z'', 0, \lambda) .$$

En calculant cette intégrale sur un contour de taille  $O(1 + |z_2|)$  qui entoure la racine de  $p^\sharp(w_1, z_2, z'', 0, \lambda) = 0$  vérifiant  $\operatorname{Re}(w_1) > 0$ , il résulte de (107) qu'il existe des constantes  $c_i > 0$ ,  $A, B_1, B_2$  telles que pour  $\operatorname{Re} z_1 \leq c_0 + c_1 |\operatorname{Im} z_1|$ ,  $|\operatorname{Re} z_2| \leq c_2$ , et  $z''$  près de  $z''_0$  on ait

$$(120) \quad |M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z, \lambda)| \leq \frac{A B_1^\ell B_2^{|\alpha|} \ell!}{(1 + |z_1| + |z_2|)} (1 + |z_2|)^{-\ell}.$$

On a aussi

$$(121) \quad M_{0,0}^{1,2}(z, \lambda) = \frac{+\sigma}{4i\pi^2} \int \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \frac{\mathcal{N}_1^\sharp}{p^\sharp}(w_1, z_2, z'', 0, \lambda).$$

Si  $z_1^+(z_2, z'', \lambda)$  est la racine dans  $\operatorname{Re} z_1 > 0$  de l'équation  $p^\sharp(z_1, z_2, z''; 0, \lambda) = 0$  on a donc  $M_{0,0}^{1,2} = \frac{-\sigma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z_1 - z_1^+} \cdot \left( \frac{\mathcal{N}_1^\sharp}{\frac{\partial p^\sharp}{\partial z_1}} \Big|_{z_1=z_1^+, \zeta=0} \right)$ . Si  $\xi_1^+(\xi_2, \xi'')$  est la racine dans  $\operatorname{Im} \xi_1 > 0$  de l'équation  $p(0; \xi_1, \xi_2, \xi'') = 0$ , on a  $z_1^+(z_2, z'', \lambda) = -i \xi_1^+(i z_2, i z'') + O(\frac{1}{\lambda})$  d'où il résulte

$$(122) \quad \begin{cases} M_{0,0}^{1,2}(z, \lambda) = \frac{-\sigma}{4\pi} \frac{1}{z_1 + i \xi_1^+(i z_2, i z'')} \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial p}{\partial \xi_1}}(x=0; \xi_1^+, \xi_2, \xi'') \Big|_{\xi_2=i z_2, \xi''=i z''} \\ + O\left( \frac{1}{\lambda(1 + |z_1| + |z_2|)(1 + |z_2|)} \right). \end{cases}$$

Rappelons que  $L_\beta$  est l'espace introduit au § IV.2 (52), (53), et que  $\varphi_{\parallel}(z'') = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z'')^2$ . On choisit  $0 < \beta_1 < \beta_2$  petits ainsi que  $W$ , petit voisinage de  $z''_0$ , et on introduit la chaîne d'espaces de Banach  $E_\sigma = L_\sigma \beta_2 + (1-\sigma) \beta_1$ . Alors puisque  $\Pi G_j = G_j$  on a  $G_j \in H_{\varphi''}(W, L_0)$  et de même, puisque (106) entraîne  $\Pi m_j = m_j$  et que le projecteur de Hilbert est contenu sur  $L^2$ ,  $e^{\varepsilon \lambda} m_j \in H_{\varphi''}(W, L_0)$ . Soit  $\mathbb{E}_\sigma = E_\sigma \oplus E_\sigma$ , où  $z_1$  sera la variable dans le premier facteur,  $z_2$  la variable dans le second facteur. On définit des opérateurs  $\mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^k(z'', \zeta'', \lambda)$  de  $\mathbb{E}_\sigma$  dans  $\mathbb{E}_\sigma$

$$(123) \quad \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^k = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,1,1} & \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,1,2} \\ \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,2,1} & \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,2,2} \end{pmatrix}$$

en posant

$$(124) \quad \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,1,1}(h)(z_1) = \frac{+1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \sum_{\substack{\ell + \alpha_1'' = k \\ \alpha_1''}} M_{\ell, \alpha_1, \alpha_1''}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) (\zeta'')^{\alpha_1''} (\partial_{w_1})^{\alpha_1} h(w_1)$$

où  $\gamma$  est le contour  $\operatorname{Re} w_1 = -[\sigma \beta_1 + (1-\sigma) \beta_0]$  orienté de haut en bas, ainsi que

$$(125) \quad \mathcal{M}_{\sigma', \sigma}^{k,1,2}(h)(z_1) = \sum_{\substack{\ell + \alpha_2'' = k \\ \alpha_2''}} \int_{\operatorname{Im}(b_2) = -[\sigma \beta_1 + (1-\sigma) \beta_0]} M_{\ell, \alpha_2, \alpha_2''}^{1,2}(z_1, -i b_2, z'', \lambda) (\zeta'')^{\alpha_2''} (\partial_{z_2})^{\alpha_2} h(-i b_2, z'', \lambda) db_2$$

et la définition analogue pour les deux autres termes. Alors il résulte de (113) et (120) que les  $\mathcal{M}_{\sigma',\sigma}^k$  vérifient les estimations (31) (on a  $\zeta'' = -ix_0'' = 0$ ), et commutent à gauche et à droite aux injections de la chaîne, les termes  $\mathcal{M}^{k,1,2}$ ,  $\mathcal{M}^{k,2,1}$  envoyant par ailleurs  $E_1$  dans  $E_0$  si  $\beta_1, \beta_2$  sont assez petits. On peut alors appliquer la proposition 1 à la matrice  $\text{Id} - \mathcal{M}_{\sigma',\sigma}^k$  (l'identité étant identifiée à l'opérateur  $p_{\sigma',\sigma}^k = \text{Id}$  si  $k = 0$ , 0 sinon). En effet (37) résulte de la définition (34) de  $g_{\sigma,0}$ , puisque  $e^{\varepsilon\lambda} m_j \in H_{\varphi''}(W; L_0)$  implique que la somme (34) étendue à  $k \leq \frac{\lambda}{C_2}$  est exponentiellement décroissante dans  $H_{\varphi''}(W; L_{\beta_1})$ ; (38) est conséquence de (116), (122) et de la proposition 2; (39) résulte ici de la commutation des opérateurs aux injections de chaîne. Il en résulte

$$(126) \quad \forall \beta_2 > 0, \exists \varepsilon > 0, e^{\varepsilon\lambda} G_j \in H_{\varphi''}(W; L_{\beta_2}) .$$

Or on a

**Lemme 4.** Soit  $f(z'', x_1, \lambda) \in H_{\varphi''}(W; L^2(\mathbb{R}_+))$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que  $e^{\varepsilon\lambda} T_1 f(z_1, z'', \lambda) \in H_{\varphi''}(W; L_{\beta})$ . Il existe alors  $\varepsilon' > 0$  et  $\delta > 0$  ne dépendant que de  $\varepsilon$  et  $\beta$  tels que

$$(127) \quad e^{\varepsilon'\lambda} f(z'', x_1, \lambda) 1_{x_1 \in [0, \delta]} \in H_{\varphi''}(W; L_{x_1}^2) .$$

PREUVE. On a  $T_1 f(z_1, z'', \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x_1} z_1^{-\lambda} \frac{x_1^2}{2} f(z'', x_1, \lambda) dx_1$ , de sorte que (voir le § 3.1 (4))

$$T_1 f(a + ib, z'', \lambda) = e^{\lambda \frac{a^2}{2}} \hat{f}_{\lambda, a}(-\lambda b, z'', \lambda)$$

avec

$$f_{\lambda, a}(x_1, z'', \lambda) = e^{-\frac{\lambda}{2}(a-x_1)^2} f(z'', x_1, \lambda) .$$

Par hypothèse  $\|T_1 f(-\beta + ib, z'', \lambda)\|_{L_b^2} \leq C e^{-\varepsilon\lambda + \lambda\varphi\|}(z'')$  donc

$$\|f_{\lambda, -\beta}(x_1, z'', \lambda)\|_{L^2(x_1)} \leq C \lambda^{1/2} e^{-\lambda \frac{\beta^2}{2} - \varepsilon\lambda + \lambda\varphi\|}(z'') ,$$

donc

$$\|1_{x_1 \in [0, \delta]} f(z'', x_1, \lambda)\|_{L^2(x_1)} \leq C \lambda^{1/2} e^{\lambda\varphi\|}(z'') e^{\lambda[\beta\delta + \frac{\delta^2}{2} - \varepsilon]} ,$$

d'où le résultat.  $\diamond$

D'après (126) et le lemme 4, quitte à diminuer le support de  $\psi$ , on a  $e^{\varepsilon\lambda} G \in \mathcal{B}_0^0(W; \underline{r}, \delta)$  pour un  $\varepsilon > 0$ , si  $W, \underline{r}, \delta$  sont assez petits. Il résulte alors du § III. (105) et du § III., proposition 1, qu'on a  $e^{\varepsilon\lambda} F \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta)$ . Rappelons que  $F = T(\psi \underline{u}) = (T_\perp \otimes T_\parallel) \psi \underline{u}$ , et que les espaces  $E^I$ ,  $I$  intervalle contenu dans  $[0, 2\pi]$ , sont définis au § II.3., et que  $E, E_0$  sont définis au § II.1 (5) et (6). On a  $E = E^{]0, \frac{\pi}{2}[}$  (cas intérieur),  $E = E^{] \frac{\pi}{2}, 2\pi[}$  (cas extérieur). Comme  $E_0$  est un sous-espace fermé de  $E$ , on a

$$(128) \quad e^{\varepsilon\lambda} T_\parallel(\psi \underline{u}) \in H_{\varphi''}(W; E) \implies \rho_0 \notin SS_b(u)$$

par définition de  $SS_b(u)$ . De plus, d'après le § II., proposition 3, on a  $T_\parallel(\psi \underline{u}) \in H_{\varphi''}(W; E)$ . Pour prouver le théorème 2, il suffit donc de vérifier qu'on a dans le



cas intérieur (resp. extérieur)  $e^{\varepsilon\lambda} T_{\parallel}(\psi_{\underline{u}}) \in H_{\varphi''}(W, E^I)$  pour  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$  (resp. dans les trois cas  $I = ]\frac{\pi}{2}, \pi[, I = ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ ,  $I = ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ ). Rappelons que  $F = T(\psi_{\underline{u}}) = (T_{\perp} \otimes T_{\parallel}) \psi_{\underline{u}}$ . Si on pose

$$(129) \quad (T_{\perp})^{-1}(f)(x', z'', \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda x' b' - \lambda \frac{z''^2}{2}} f(x' - i b', z'', \lambda) db' ,$$

le théorème 2 va donc être conséquence du :

**Lemme 5.** Soient  $W, \underline{r}, \delta$  fixés. Si  $\chi(x') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  est à support dans  $|x'| \leq \rho$ ,  $\rho$  assez petit, l'opérateur  $f \mapsto \chi(x')(T_{\perp})^{-1}(f)$  envoie  $\mathcal{B}_0^2(W, \underline{r}, \delta)$  dans  $H_{\varphi''}(W, E^I)$  dans chacun des cas  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $I = ]\frac{\pi}{2}, \pi[, I = ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ ,  $I = ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ .

**PREUVE.** Rappelons que  $\mathcal{B}_0^2(W, \underline{r}, \delta) = H^2(W; \underline{r}) + \mathcal{R} H^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta)$  avec  $\underline{\sigma} = (0, 0)$ ,  $\underline{\ell} = (-2, -2)$ . Pour  $f \in \mathcal{B}_0^2$ , on a donc  $f = f_0 + f_1 + f_2$ ,  $f_0 \in H^2$ ,

$$f_1(z', z'', \lambda) = \int_{A_1} r_1(a_1, i z') h_1(z_2, z'', \lambda, a_1) d\mu_1(a_1) ,$$

$$f_2(z', z'', \lambda) = \int_{A_2} r_2(a_2, i z') h_2(z_1, z'', \lambda, a_2) d\mu_2(a_2) ,$$

$r_j, h_j$  vérifiant les estimations du § III. (29), (30), (31). Les variables  $z''$  étant ici des paramètres, nous ne les considérerons plus. Puisque  $f_0 \in H^2$ , pour tout  $\alpha$  et tout  $u \in \mathbb{R}^2$  voisin de 0, il existe  $A_\alpha, B_\alpha$  tels que  $\|(\frac{1}{i\lambda} \partial_z)^\alpha (f_0)(1 + |z'|)^2\|_{L^2(\mathbb{R}e z' = u)} \leq A_\alpha \lambda^{B_\alpha} e^{\lambda \frac{u^2}{2}}$ . Il en résulte que  $g(x', y', \lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi})^2 \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda x' b' - \lambda \frac{y'^2}{2}} f_0(y' - i b', \lambda) db'$  vérifie pour  $|y'|$  petit et tout  $\alpha$ ,  $\partial_{y'}^\alpha g \in C^0(y'; H_{x'}^2)$  avec  $\|\partial_{y'}^\alpha g\| \leq \rho \ell_\alpha(\lambda)$  donc  $(T_{\perp})^{-1}(f_0) = g|_{x'=y'}$  vérifie  $\|\chi(x')(T_{\perp})^{-1}(f_0); H^2(\mathbb{R}^2)\| \leq \rho \ell(\lambda)$ , d'où le résultat pour  $f_0$ . Il suffit donc d'étudier  $f_2$ ; alors  $a_2$  joue à nouveau le rôle d'un paramètre et nous ne le notons plus. On a

$$(130) \quad (T_{\perp})^{-1}(f_2)(x', \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \int e^{i\lambda x' b' - \lambda \frac{z''^2}{2}} r_2(b' + i x') h_1(x_1 - i b_1, \lambda) db' .$$

En écrivant à nouveau

$$g(x', y', \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \int e^{i\lambda x' b'} r_2(b' + i y') e^{-\lambda \frac{y_2^2}{2}} e^{-\lambda \frac{y_1^2}{2}} h_1(y_1 - i b_1, \lambda) db' ,$$

et  $(T_{\perp})^{-1}(f_2) = g|_{y'=x'}$ , il suffit d'estimer pour tout  $\alpha$  et uniformément en  $y'$  près de 0 les dérivées  $(\partial_{y'})^\alpha g$  dans  $E^I$  près de  $x' = 0$ . Or  $r_2 \in \mathcal{R}^{-2}$  qui est stable par dérivation,  $\sup_{\mathbb{R}} (\partial_{y_2})^\alpha (e^{-\lambda \frac{y_2^2}{2}})$  est à croissance polynomiale en  $\lambda$  et  $\partial_{y_1}^\alpha [e^{-\lambda \frac{y_1^2}{2}} h_1(y_1 - i b_1, \lambda)]$  est estimé dans  $L_{b_1}^2$  pour  $|y_1|$  petit. Le lemme est donc conséquence de la proposition 3 du § II.3.

◇

## IV.4. Preuve du théorème 1

**Théorème 1.** Soit  $M = M^i$  ou  $M^e$  et  $u \in H_0^1(M)$  solution de  $Pu = 0$ , on a

$$(131) \quad SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_\Delta^*) .$$

D'après le § II. (39), il s'agit de prouver l'inclusion  $SS_b(u) \subset \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_\Delta^*)$ . A nouveau compte tenu des résultats classiques sur les problèmes aux limites sur les variétés à bord analytique, il s'agit de vérifier que si  $\rho_0 = (x_0'' = 0, \xi_0'') \in T^*L$  satisfaisant

$$(132) \quad \rho_0 \notin \pi(SS(\underline{u}) \setminus T_\Delta^*)$$

alors on a  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ . On pose toujours  $z_0'' = -i\xi_0''$ , et on conserve les notations (99)-(102). En particulier (132) entraîne

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } z_0' \in i\mathbb{R}^2, \text{ il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ et } U \text{ voisinage de} \\ (z_0', z_0'') \text{ tel que } F = T(\psi \underline{u}) \in H_{\varphi - \varepsilon_0}(U) \text{ avec } \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(z)^2 . \end{array} \right.$$

De l'équation  $P\underline{u} = g\delta$ , et de (132), on déduit aussi  $\rho_0 \notin \pi(SS(g\delta) \setminus T_\Delta^*)$  ce qui entraîne puisque  $x_1 \delta_2 \equiv x_2 \delta_1 \equiv 0$ , qu'on a

$$(134) \quad \rho_0 \notin \pi(SS(x_j g_j \delta_j) \setminus T_\Delta^*) \quad j = 1, 2$$

donc

$$(135) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } j = 1, 2 \text{ et tout } z_j \in i\mathbb{R}, \text{ il existe } \varepsilon_0 > 0 \text{ et } U \text{ voisinage} \\ \text{de } (z_j, z_0'') \text{ tel que } G_j = T_j \otimes T_{\parallel}(\psi g_j \delta_j) \text{ vérifie} \\ \partial_{z_j} G_j \in H_{\varphi - \varepsilon_0}(U) \text{ avec } \varphi = \varphi''(z'') + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z_j)^2 . \end{array} \right.$$

Le lecteur remarquera que tout le problème consiste à obtenir des estimées uniformes pour  $|z'|$  grand, et que (135) n'estime pas les  $G_j$ , mais seulement les  $\partial_{z_j} G_j$ .

D'après le § IV.3, il suffit de vérifier qu'il existe une fonction de localisation  $\psi$ , un  $\varepsilon > 0$  et  $W$  (voisinage de  $z_0''$ ),  $\underline{r}, \delta$  tels que l'on ait

$$(136) \quad e^{\varepsilon\lambda} F \in \mathcal{B}_0^2(W, \underline{r}, \delta)$$

et d'après le § III. (105) on a

$$(137) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in \mathcal{B}_0^2(W, \underline{r}, \delta) \\ \lambda^2 P_C^\sharp F = G + m, \quad e^{\varepsilon\lambda} m \in \mathcal{B}_0^2(W, \underline{r}, \delta) . \end{array} \right.$$

Or on a, si  $\tau$  est assez grand

$$(138) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } c_1 > 0 \text{ tel que } |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c_1(1 + |z|^2) \text{ pour tout} \\ z = (z', z'') \in (\Omega(\underline{r}, \delta) \cap |z'| \geq \tau) \times W \text{ et tout } \zeta, \|\zeta\| \leq D \\ \text{pourvu que } W, \underline{r}, \delta, D \text{ soient assez petits.} \end{array} \right.$$

On notera  $\tilde{H}_0^\sigma(W; \underline{r})$  l'analogue de l'espace  $H_0^\sigma(W; \underline{r})$  où les fonctions  $f(z', z'', \lambda)$  ne sont définies que pour  $|z'| > 2\tau$ , avec toujours les estimations du § III.3 (26), (27). On pose alors

$$(139) \quad \tilde{\mathcal{B}}_0^m(W; \underline{r}, \delta) = \tilde{H}_0^m(W; \underline{r}) + \mathcal{R} H_0^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta)|_{|z'| > 2\tau}$$

avec  $\underline{\sigma} = (0, 0)$ ,  $\underline{\ell} = (-m, -m)$ . On remarquera que dans  $\tilde{\mathcal{B}}_0^m$ , seule la partie "régulière"  $\tilde{H}_0^m$  est constituée de fonctions n'existant a priori que dans  $|z'| > 2\tau$ . De même,  $\tilde{\mathcal{E}}^\sigma(W; \underline{r}, \delta, D)$  désignera l'analogue du  $\mathcal{E}^\sigma$  défini au § III.3, définition 4, avec les  $q_\ell(z, \zeta, \lambda)$  définis pour  $|z'| \geq 2\tau$ . Dans la suite, on augmentera  $\tau$  un nombre fini de fois, en particulier lorsqu'on aura à utiliser le composé de deux opérateurs, et on ne notera plus les dépendances en  $W, \underline{r}, \delta$ .

En particulier, (138) entraîne l'existence d'un  $q \in \tilde{\mathcal{E}}^{-2}$  tel que  $q \circ p^\sharp = 1$  (voir la preuve du lemme 3, § III.3). Comme on a (voir le § III., proposition 1)  $p_2^\sharp(z, \zeta) = p(i\zeta, iz) + 1$ , on a  $p_2^\sharp(z', 0, \zeta) = p(i\zeta; \xi' = iz', \xi'' = 0) + 1$  donc l'estimée du § III. (52) est satisfaite. Comme  $G \in \mathcal{B}_0^0$ , en reprenant ligne à ligne la preuve de la proposition 1 du § III., en particulier en utilisant le § III. (71), on obtient à partir de (137) que pour tout  $C_1, C_2$  assez grands, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(140) \quad e^{\varepsilon\lambda} [F - \lambda^{-2} \text{Op}(q, C_1, C_2) G] \in \tilde{\mathcal{B}}_0^2 .$$

Alors, d'après (133) et (140), (136) (donc le théorème 1) sera conséquence de

$$(141) \quad e^{\varepsilon\lambda} G \in \mathcal{B}_0^0 .$$

En effet, (140) et (141) impliquent  $e^{\varepsilon\lambda} F \in \tilde{\mathcal{B}}_0^2$  ce qui signifie  $F|_{|z'| > 2\tau} = F_1 + F_2|_{|z'| > 2\tau}$ , avec  $e^{\varepsilon\lambda} F_1 \in \tilde{H}_0^2$  et  $e^{\varepsilon\lambda} F_2 \in \mathcal{R} H_0^{(0,0), (-2, -2)}$ ; il en résulte que  $F_1$  est défini pour  $z'$  au voisinage de  $i\mathbb{R}^2$  et que  $F_2$  vérifie (133). Comme  $F$  vérifie (133), on a (133) pour  $F_1$ , donc  $e^{\varepsilon\lambda} F_1 \in H_0^2$ , d'où finalement  $e^{\varepsilon\lambda} F \in \mathcal{B}_0^2$ . D'après le lemme 4, il s'agit donc de prouver qu'il existe  $\beta > 0$ ,  $W$  voisinage de  $z''$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$(142) \quad e^{\varepsilon\lambda} G_j \in H_{\varphi_\parallel}(W; L_\beta) \quad j = 1, 2 .$$

Dans la suite on notera  $\mathcal{H}(B)$  pour  $B$  espace de Banach, l'espace des germes en  $z''$ ,  $\lim_W H_{\varphi''}(W, B)$ . On se donne  $\theta(b_1, b_2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  nulle pour  $|b| \leq 1$ , égale à 1 pour  $|b| \geq 2$  et on pose  $\theta_\kappa(b) = \theta(\frac{b}{\kappa})$  pour  $\kappa$  réel positif grand. Pour  $f(z, \lambda) \in \tilde{\mathcal{B}}_0^1$ , on pose, pour  $b_1 \in \mathbb{R}$

$$(143) \quad \begin{aligned} & \text{Tr}_1^\pm[\kappa](f)(-i b_1, z'', \lambda) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} f(-i b_1, x_2 - i b_2, z'', \lambda) \theta_\kappa(b_1, b_2) d b_2 . \end{aligned}$$

Alors  $\text{Tr}_1^\pm[\kappa]$  est bien défini pour  $\kappa$  assez grand, et envoie  $\tilde{\mathcal{B}}_0^1$  dans  $\mathcal{H}(L^2(b_1 \in \mathbb{R}))$ ; de plus, les opérateurs  $\text{Tr}_1^\pm$  et  $\text{Tr}_1^\pm[\kappa]$  coïncident dans  $|b_1| \geq 2\kappa$ . On a d'après (133)

$$(144) \quad e^{\varepsilon\lambda} \left[ \text{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1,C}^\# F - \text{Tr}_1^\pm[\kappa] \mathcal{N}_{1,C}^\# F \right] \in \mathcal{H}(L^2(b_1 \in \mathbb{R}))$$

où  $\varepsilon > 0$  dépend de  $\kappa$ . Si on note  $S_j = \mathcal{N}_j^\# \circ q \in \tilde{\mathcal{E}}^{-1}$  de (140), (144) et le § III, proposition 3, le projecteur  $\Pi$  envoyant  $L^2(b_1 \in \mathbb{R})$  dans  $L_0^2$ , on a pour  $C_1, C_2, \kappa$  assez grands

$$(145) \quad \begin{cases} \Pi(\lambda^{-1} \text{Tr}_j^\pm[\kappa] \text{Op}(S_j, C_1, C_2) G) = G_j + m_j & j = 1, 2 \\ e^{\varepsilon\lambda} m_j \in \mathcal{H}(L_0) \end{cases}$$

où  $\varepsilon > 0$  dépend de  $C_1, C_2, \kappa$ .

Comme dans le § IV.3 on écrit (145) sous forme d'un système matriciel  $2 \times 2$   $M[\kappa] G = G + m$ ,  $M[\kappa] = (M^{i,j}[\kappa])_{i,j}$ ; on a toujours  $S_j = \sum_{\ell=0}^{\infty} (i\lambda)^{-\ell} S_{j,\ell}$  avec (voir le § IV.3)

$$(146) \quad \begin{cases} S_{j,\ell} = (p^\#)^{-(2\ell+1)} \hat{S}_{j,\ell}; & \hat{S}_{j,\ell} = \sum_{|\alpha| \leq 3\ell+1} (iz)^\alpha \hat{S}_{j,\ell,\alpha}(\zeta, \lambda) \\ |\hat{S}_{j,\ell,\alpha}| \leq AB^\ell \ell!; & \hat{S}_{j,0} = \mathcal{N}_j^\# \end{cases}$$

ce qui permet d'expliciter la structure de la matrice  $M[\kappa]$ . En particulier, on a dans  $\text{Re}(z_1) < 0$ , avec toujours  $\sigma = -$  si  $M = M^i$ ,  $\sigma = +$  si  $M = M^e$ .

$$(147) \quad M^{1,1}[\kappa](G_1)(z_1, z'', \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_1}{z_1 + ib_1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{\sigma_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{\sigma_2}}} \sigma \lim_{x_2 \rightarrow -\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} \\ (i\lambda)^{-\ell} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1,\ell}(-ib_1, x_2 - ib_2, z'', 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha G_1(-ib_1, z'', \lambda) \theta_\kappa(b_1, b_2) db_2$$

$$(148) \quad M^{1,2}[\kappa](G_2)(z_1, z'', \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{db_1}{z_1 + ib_1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{\sigma_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{\sigma_2}}} \frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \\ \frac{(i\lambda)^{-\ell}}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1,\ell}(-ib_1 - ib_2, z'', 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha G_2(-ib_2, z'', \lambda) \theta_\kappa(b_1, b_2) db_2.$$

Pour  $\rho \gg 1$ ,  $h \in L_0^2$ , on pose

$$(149) \quad \nu_\rho(h) = h(-\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(-it)}{\rho - it} dt.$$

Alors  $\nu_\rho$  est une forme linéaire sur  $L_0^2$ , et  $\|\nu_\rho\| = O(\rho^{-1/2})$ ; pour tout  $h \in L_0^2$  on a

$$(150) \quad h(z) = \nu_\rho(h) + \int_{-\rho}^z h'(u) du .$$

D'après (138), il existe un  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\kappa \geq \tau$  on ait  $|p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c_1(1 + |z|)^2$  pour  $z'' \in W$ ,  $\|\zeta\| \leq D$ ,  $|\operatorname{Re} z'| \leq 2\beta_0$ ,  $|\operatorname{Im} z'| \geq \kappa$ .

On décompose alors  $M^{1,1}[\kappa](G_1)$  sous la forme

$$(151) \quad M^{1,1}[\kappa](G_1) = M_0^{1,1}[\kappa, \beta](G_1) + M_1^{1,1}[\kappa, \beta, \rho](G_1) + r_1$$

dans  $\operatorname{Re} z_1 < -\beta$ , avec  $\beta > 0$  petit devant  $\beta_0$  où  $M_0^{1,1}[\kappa](G_1)$  est défini par (147), l'intégrale en  $b_1$  étant calculé sur  $\Gamma_0(\kappa, \beta) = \{b_1 = -i\beta + u; u \in \mathbb{R}, |u| \geq 2\kappa\}$

$$(152) \quad M_0^{1,1}[\kappa, \beta](G_1) \\ = \frac{-1}{2\pi} \int_{\Gamma_0(\kappa, \beta)} \frac{db_1}{z_1 + i b_1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}}} (i\lambda)^{-\ell} M_{\ell, \alpha}^{1,1}(-i b_1, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^\alpha G_1(-i b_1, z'', \lambda)$$

où  $M_{\ell, \alpha}^{1,1}$  est défini en (112), l'équation  $p^\sharp(-i b_1, -i b_2, z'', 0, \lambda) = 0$  n'ayant pas de racines réelles en  $b_2$  pour  $b_1 \in \Gamma_0(\kappa, \beta)$ . De même on pose

$$\Gamma_1(\kappa, \beta) = \{b_1 = -2\kappa + it, t \in [-\beta, 0]\} \cup \{b_1 = u, |u| \leq 2\kappa\} \cup \{b_1 = 2\kappa - it, t \in [0, \beta]\}$$

et avec la convention  $\theta_\kappa(b_1, b_2) = 1$  pour  $b_1 \in \mathbb{C}$ ,  $|b_1| \geq 2\kappa$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}$

$$(153) \quad M_1^{1,1}[\kappa, \beta, \rho](G_1) \\ = \frac{-1}{2\pi} \int_{\Gamma_1(\kappa, \beta)} \frac{db_1}{z_1 + i b_1} \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}}} (i\lambda)^{-\ell} M_{\ell, \alpha}^{1,1}[\kappa](-i b_1, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^\alpha \nu_\rho(G_1)(z'', \lambda)$$

avec

$$(154) \quad M_{\ell, \alpha}^{1,1}[\kappa] \\ = \sigma \lim_{x_2 \rightarrow -\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha S_{1, \ell}(-i b_1, x_2 - i b_2, z'', 0, \lambda) \theta_\kappa(b_1, b_2) db_2 .$$

On remarquera que  $M_{\ell, \alpha}^{1,1}[\kappa](-i b_1, z'', \lambda)$  est défini pour  $z'' \in W$ ,  $b_1 \in \Gamma_0(\kappa, \beta) \cup \Gamma_1(\kappa, \beta)$ , égal à  $M_{\ell, \alpha}^{1,1}$  sur  $\Gamma_0(\kappa, \beta)$  et vérifie des estimations  $|M_{\ell, \alpha}^{1,1}[\kappa]| \leq A B_1^\ell B_2^{|\alpha|} \ell!(1 + |b_1|)^{-\ell}$ . Le reste  $r_1$  dans (151) est défini par la formule analogue à (153) avec  $\int_{-\rho}^{-i b_1} \frac{\partial G_1}{\partial z_1}(u, z'', \lambda) du$  en place de  $\nu_\rho(G_1)(z'', \lambda)$ . Il résulte alors de (135) qu'on a

$$(155) \quad e^{\varepsilon\lambda} r_1 \in \mathcal{H}(L_\beta)$$

où  $\varepsilon > 0$  dépend de  $\rho, \kappa, C_1, C_2$ , mais pas de  $\beta$ .

De même, on pose dans  $\text{Re}(z_1) < 0$

$$(156) \quad \begin{aligned} M_{\ell, \alpha}^{1,2}[\kappa](z_1, -i b_2, z'', \lambda) \\ = \frac{-\sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z_1 + i b_1} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} S_{1, \ell}(-i b_1, -i b_2, z'', 0, \lambda) \theta_{\kappa}(b_1, b_2) d b_1. \end{aligned}$$

qui se prolonge holomorphiquement à  $\text{Re } z_1 < 0, b_2 = u + i v, |v| \leq \beta_0, |u| \geq 2\kappa$  et  $y$  vérifie des estimations

$$|M_{\ell, \alpha}^{1,1}[\kappa](z_1, -i b_2, z'', \lambda)| \leq \frac{A B_1^{\ell} B_2^{|\alpha|} \ell!}{1 + |z_1| + |b_2|} (1 + |b_2|)^{-\ell}$$

(en effet, dans ce domaine, on a  $\theta_{\kappa}(b_1, b_2) \equiv 0$  pour  $b_1$  réel et  $p^{\sharp}(-i b_1 - i b_2, z'', 0, \lambda) = 0$  n'a pas de racines  $b_1$  réelle, de sorte que  $M_{\ell, \alpha}^{1,2}[\kappa]$  est alors indépendant de  $\kappa$  et défini par (119)). On a également

$$(157) \quad \sup_{z'' \in W} \|M_{\ell, \alpha}^{1,2}[\kappa](z_1, -i b_2, z'', \lambda)\|_{L_0} \leq A B_1^{\ell} B_2^{|\alpha|} \ell! (1 + |b_2|)^{-\frac{1}{2} - \ell}$$

où les constantes  $A, B_1, B_2$  sont indépendantes de  $\kappa$  puisque

$$\left| \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} S_{1, \ell}(-i b_1, -i b_2, z'', 0, \lambda) \theta_{\kappa}(b_1, b_2) \right| \leq A B_1^{\ell} B_2^{|\alpha|} \ell! (1 + |b_1| + |b_2|)^{-\ell - 1},$$

et le projecteur de Hilbert étant continu de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L_0^+$ . On décompose alors  $M^{1,2}[\kappa](G_2)$  sous la forme

$$(158) \quad M^{1,2}[\kappa](G_2) = M_0^{1,2}[\kappa](G_2) + M_1^{1,2}[\kappa, \rho](G_2) + r_2$$

avec

$$(159) \quad \begin{aligned} M_0^{1,2}[\kappa](G_2) \\ = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}}} (i\lambda)^{-\ell} \int_{\Gamma_0(\kappa, \beta_0)} M_{\ell, \alpha}^{1,2}[\kappa](z_1, -i b_2, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\alpha} G_2(-i b_2, z'', \lambda) d b_2 \end{aligned}$$

$$(160) \quad \begin{aligned} M_1^{1,2}[\kappa, \rho](G_2) \\ = \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}}} (i\lambda)^{-\ell} \int_{\Gamma_1(\kappa, \beta_0)} M_{\ell, \alpha}^{1,2}[\kappa](z_1, -i b_2, z'', \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z\right)^{\alpha} \nu_{\rho}(G_2)(z'', \lambda) d b_2 \end{aligned}$$

et  $r_2$  est défini par (160) avec  $\int_{-\rho}^{i b_2} \frac{\partial G_2}{\partial z_2}(u, z'', \lambda) du$  en place de  $\nu_{\rho}(G_2)(z'', \lambda)$ . Il résulte à nouveau de (135) qu'on a

$$(161) \quad e^{\varepsilon \lambda} r_2 \in \mathcal{H}(L_0)$$

où  $\varepsilon > 0$  dépend de  $\rho, \kappa, C_1, C_2$ .

Posons  $p_{2,0}^\sharp(z', \zeta) = p_2^\sharp(z', 0, \zeta) = 1 + {}^t i z' A_{i\zeta} i z'$  qui est un polynôme elliptique de  $z' \in i\mathbb{R}^2$ . On note  $\overset{\circ}{q}$  l'inverse elliptique de  $p_{2,0}^\sharp$  dans  $\mathcal{E}^{-2}$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{N}}_j^\sharp$  les opérateurs de trace associés à  $p_{2,0}^\sharp$  et  $\overset{\circ}{S}_j = \overset{\circ}{\mathcal{N}}_j^\sharp \circ \overset{\circ}{q}$ . On note  $\overset{\circ}{M}$  la matrice d'opérateurs (110) associée à  $p_{2,0}^\sharp$ . Pour démontrer le théorème 1, nous allons comparer le système (145)  $M[\kappa]G = G + m$  à  $\overset{\circ}{M} - \text{Id}$ . On pose

$$(162) \quad M_0[\kappa, \beta] = \begin{pmatrix} M_0^{1,1}[\kappa, \beta] & M_0^{1,2}[\kappa] \\ M_0^{2,1}[\kappa] & M_0^{2,2}[\kappa, \beta] \end{pmatrix}$$

$$(163) \quad M_1[\kappa, \beta, \rho] = \begin{pmatrix} M_1^{1,1}[\kappa, \beta, \rho] & M_1^{1,2}[\kappa, \rho] \\ M_1^{2,1}[\kappa, \rho] & M_1^{2,2}[\kappa, \beta, \rho] \end{pmatrix}.$$

On notera également  $\overset{\circ}{M}_0[\kappa, \beta]$ ,  $\overset{\circ}{M}_1[\kappa, \beta, \rho]$  les mêmes objets où on remplace  $S_j$  par  $\overset{\circ}{S}_j$ . D'après ce qui précède, on a

$$(164) \quad M_0[\kappa, \beta](G) + M_1[\kappa, \beta, \rho](G) = G + m$$

avec  $e^{\varepsilon\lambda} m \in \mathcal{H}(L_\beta)$  pour tout  $\beta > 0$ , petit, et pour un  $\varepsilon$  dépendant de  $\kappa, \rho, C_1, C_2$ , mais pas de  $\beta$ .

De plus (135) implique, avec un  $\varepsilon > 0$  indépendant de  $\beta$

$$(165) \quad e^{\varepsilon\lambda}(\overset{\circ}{M}[\kappa] - \overset{\circ}{M}_0[\kappa, \beta] - \overset{\circ}{M}_1[\kappa, \beta, \rho])G \in \mathcal{H}(L_\beta)$$

ainsi que

$$(166) \quad e^{\varepsilon\lambda}(\overset{\circ}{M} - \overset{\circ}{M}[\kappa])(G - \nu_\rho(G)) \in \mathcal{H}(L_0).$$

D'où finalement d'après (164), (165), (166)

$$(167) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{M} - (\overset{\circ}{M} - \overset{\circ}{M}[\kappa]) \circ \nu_\rho + (M_0[\kappa, \beta] - \overset{\circ}{M}_0[\kappa, \beta]) \\ \quad + (M_1[\kappa, \beta, \rho] - \overset{\circ}{M}_1[\kappa, \beta, \rho]) \end{array} \right\} G = G + m$$

$$e^{\varepsilon\lambda} m \in \mathcal{H}(L_\beta).$$

Comme dans le § IV.3, nous allons utiliser la proposition 1 pour étudier le système (167), en le faisant opérer sur la chaîne d'espaces  $\mathbb{E}_\sigma = E_\sigma \oplus E_\sigma$ ,  $E_\sigma = L_{\sigma\beta_2 + (1-\sigma)\beta_1}$  avec  $0 < \beta_1 < \beta_2 \ll \beta_0$ , les regroupements de termes étant effectués comme dans (124), (125). On remarquera que l'opérateur entre parenthèse dans (167) envoie  $\mathbb{E}_\beta$ ,

dans  $\mathbb{E}_\beta$  pour  $\beta_1 \leq \beta' < \beta \leq \beta_2$ . En effet, pour les termes du type  $M_0^{1,1}[\kappa, \beta]$  cela résulte du choix du contour  $\Gamma_0(\kappa, \beta)$ , pour les termes du type  $M_1^{1,1}[\kappa, \beta, \rho]$  du fait que la forme linéaire  $\nu_\rho$  est définie sur  $L_b$  pour  $b < \rho$ , et  $\rho \gg 1$  et pour les termes du type  $M_0^{1,2}[\kappa]$  ou  $M_1^{1,2}[\kappa, \rho]$  du fait qu'ils sont tous deux définis sur  $L_\beta$  pour  $\beta < \beta_0$ . Donc l'hypothèse (39) de la proposition 1 est satisfaite, et (37) résulte de l'estimation sur le reste  $m$  dans (167).

Il reste donc à vérifier (38), c'est-à-dire l'inversion du terme principal. Comme le terme principal de  $\overset{\circ}{M} - \text{Id}$  est inversible d'après le § IV.3, il suffit de vérifier, en désignant par  $I[\kappa, \beta]$  le terme principal de  $M_0[\kappa, \beta] - \overset{\circ}{M}_0[\kappa, \beta]$  et par  $J[\kappa, \beta, \rho]$  celui de  $(\overset{\circ}{M} - \overset{\circ}{M}[\kappa]) \circ \nu_\rho + M_1[\kappa, \beta, \rho] - \overset{\circ}{M}_1[\kappa, \beta, \rho]$ , calculés en  $z'' = z_0'', \zeta'' = 0$ , que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $\kappa, \rho$  tels que

$$(168) \quad \sup_{\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2} \left( \|I[\kappa, \beta]; \mathbb{E}_\beta\| + \|J[\kappa, \beta, \rho]; \mathbb{E}_\beta\| \right) < \alpha .$$

Or si  $\kappa$  est fixé, on a  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sup_{\beta} \|J[\kappa, \beta, \rho]; \mathbb{E}_\beta\| = 0$  car  $\|\nu_\rho; L_{\beta_0}; \mathbb{C}\| \in O(\rho^{-1/2})$ , ainsi que  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sup_{\beta} \|I[\kappa, \beta]; \mathbb{E}_\beta\| = 0$ , qui résulte de (152), (115), (116) pour les termes diagonaux de la matrice  $I[\kappa, \beta]$ , et de (159), (121) pour les autres termes, puisque  $|p^\#(z, \zeta, \lambda) - p_2^\#(z', 0, \zeta)| \leq c(1 + |z'|)$ , d'où (168), ce qui achève la preuve du théorème 1.





## V. REFLECTION HYPERBOLIQUE

Pour  $\rho_0 \in S_t^2$  et  $a > 0$ , soit  $\Gamma_{\rho_0, a}^-$  l'ensemble des rayons entrants en  $\rho_0$

$$(1) \Gamma_{\rho_0, a}^- = \left\{ \text{rayons } [-a, 0[ \xrightarrow{\gamma} (\dot{T}^* M \cup \dot{T}^* \Delta_1 \cup \dot{T}^* \Delta_2) \cap \Sigma_b; \gamma(s) \rightarrow \rho_0 (s \rightarrow 0^-) \right\} .$$

L'objet de ce chapitre est de prouver le :

**Théorème 3.** Soit  $u$  solution de  $Pu = 0$ ,  $u \in H_0^1(M)$  et  $\rho_0 \in S_t^2$ . On suppose qu'il existe un voisinage  $W$  de  $\rho_0$  dans  $\Sigma_b$  et  $a_0 > 0$  tel que pour tout  $\rho \in W$  tel qu'il existe  $\gamma \in \Gamma_{\rho, a}^-$ ,  $a \leq a_0$ , avec  $\gamma(-a) = \rho$  on a  $\rho \notin SS_b(u)$ . Alors  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ .

D'après le théorème 1, il s'agit de vérifier qu'on a

$$(2) \quad \rho_0 \notin \pi(SS(\underline{u}) \setminus \dot{T}_\Delta^*) .$$

On posera  $\rho_0 = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^* L$ . Nous conserverons les notations du § I.2; en particulier  $\pi_i, \hat{\pi}_i, F_{i, \rho_0}, Z_{\rho_0}^i, C_{\rho_0}^{i,+}, Z_{\rho_0}^{i,+}, C_{\rho_0}^{i,+}$  sont définies au § I.2, (25) à (38).

Commençons par vérifier le :

**Lemme 1.** Sous les hypothèses du théorème 3, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\rho \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(P)$  et  $s \in ]-\varepsilon, 0[$  on ait  $\exp(s H_p(\rho)) \notin SS(\underline{u})$ .

**PREUVE.** On raisonne par l'absurde. Soit donc  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  et  $\rho_n \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(P)$  tels que  $\alpha_n = \exp(-\varepsilon_n H_p(\rho_n)) \in SS(\underline{u})$ . On peut supposer  $\rho_n \rightarrow \rho \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(P)$  et que la bicaractéristique de  $p$  issue de  $\rho$  est tangente aux faces du dièdre par exemple à  $\Delta_1$ . On a  $\alpha_n \in \dot{T}^* \overline{M}$ ,  $\beta_n = \pi(\alpha_n) \in \Sigma_b \cap (S^0 \cup S^1)$  donc  $\beta_n \in SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus \dot{T}_\Delta^*)$ . D'après la preuve du lemme 2 du § I.3, les rayons issus de  $\beta_n$  ne rencontrent pas l'arête  $L$  dans le passé, sur un intervalle de temps indépendant de  $n$ ; en utilisant le théorème de propagation de Sjöstrand pour les variétés à bord analytique, on en déduit qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et des rayons  $\gamma_n : [-\varepsilon_0, -\varepsilon_n] \rightarrow \Sigma_b$  (de type 1) avec  $\text{Image}(\gamma_n) \subset SS_b(u)$ . D'après § I.3, proposition 1, on peut supposer  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  uniformément sur les compacts de  $[-\varepsilon_0, 0[$ . Alors le rayon  $\gamma$  se prolonge en  $s = 0$  (§ I.3, lemme 7) et on a  $\gamma(0) = \pi(\rho) = \rho_0$ . On a donc  $\gamma \in \Gamma_{\rho_0}^-$ , et puisque  $SS_b(u)$  est fermé  $\gamma(s) \in SS_b(u)$  pour  $s < 0$  : contradiction.  $\diamond$

Comme dans le § IV, on pose  $\sigma = -1$  dans le cas intérieur  $M = M^i$ ,  $\sigma = +1$  dans le cas extérieur  $M = M^e$ . Comme on a  $P\underline{u} = g\delta = \sigma(g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2)$  près de  $x = (x' = 0, x'' = x_0'')$ , où les  $g_i$  sont définis au § III.5. (83) et que  $P$  est à

caractéristiques simples de symbole principal réel, d'après le lemme 1, l'estimation (2) sera conséquence de

$$(3) \quad F_{i,\rho_0} \cap SS(g_i) = \phi, \quad i = 1, 2 .$$

Comme de plus  $g_i$  est à support dans  $x_i \geq 0$ , le théorème d'Holmgren-Kashiwara entraîne qu'il suffit de vérifier

$$(4) \quad \text{Pour } i = 1, 2, \text{ il existe un } m_i \in F_{i,\rho_0} \text{ avec } m_i \notin SS(g_i) .$$

### V.1. Estimation 2-microlocale des traces

On note  $V_1, V_2, V$  les involutives d'équations respectives  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = x_2 = 0$ . Rappelons que  $F_{i,\rho_0} \subset T^* \tilde{\Delta}_i$  est la feuille de  $x_i = 0$  qui se projette sur  $\rho_0 \in T^*L$  et que  $Z_{\rho_0}^i = \pi_i(\pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{car}(P)) \subset F_{i,\rho_0}$  est identifié au segment  $[-1, +1] \varepsilon_i(\rho_0)$  (voir le § I.2). L'objet de ce paragraphe est de prouver la :

**Proposition 1.** *Soit  $u$  vérifiant les hypothèses du théorème 3,  $g_1, g_2$  les traces des dérivées normales satisfaisant à  $P \underline{u} = \sigma(g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2)$ . Alors pour  $i = 1, 2$ , et tout point  $m_i \in F_{i,\rho_0}$  avec  $m_i \neq \varepsilon_i(\rho_0)$ , on a*

$$(5) \quad (m_i, \nu) \in SS_{V_i}^{2,1}(g_i) \implies \nu = 0$$

(l'orientation du fibré normal à  $V_i$  est choisie telle que  $\nu = +1$  corresponde à  $x_i > 0$ ).

PREUVE. Comme  $g_i$  est à support dans  $x_i \geq 0$ , on a  $(m_i, -1) \notin SS_{V_i}^{2,1}(g_i)$  pour tout  $m_i \in F_{i,\rho_0}$ , et il s'agit donc de vérifier que pour  $m_i \neq \varepsilon_i(\rho_0)$ , on a  $(m_i, +1) \notin SS_{V_i}^{2,1}(g_i)$ . Dans le cas extérieur,  $M = M^e, f = u|_{x_2 < 0}$  est solution de  $Pf = 0$  dans  $x_2 < 0$ . Posons  $a_0 = f|_{x_2=0^-}, a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}|_{x_2=0^-}$ . Alors  $a_0$  est à support dans  $x_1 \leq 0$  donc si  $m_1 \in F_{1,\rho_0}, (m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(a_0)$ . Nous pouvons appliquer le théorème A.2 de l'appendice si  $m_1 \neq \pm \varepsilon_1(\rho_0)$  car soit  $m_1$  est un point elliptique, soit  $m_1$  est hyperbolique et alors la demi-bicaractéristique de  $p$  issue de  $m_1$ , rentrante dans  $x_2 < 0$ , tournée vers le passé n'est pas dans  $SS(f)$ . Nous pouvons appliquer le même théorème si  $m_1 = -\varepsilon_1(\rho_0)$  en prenant pour équation locale pour  $V_1$   $s = -x_1$ , car la demi-bicaractéristique de  $p$  issue de  $-\varepsilon_1(\rho_0)$  tournée vers le passé est contenue dans  $x_1 > 0$ , donc  $ds(H_p(m_1)) > 0$ ; de plus si  $f$  n'était pas  $V_1$ -sortante en  $m_1$  il existerait un rayon  $\gamma : [-\varepsilon_0, 0] \rightarrow T_b^*(x_2 < 0)$  de la variété à bord  $x_2 < 0$  contenue dans  $SS_b(f)$  tel que  $\gamma(0) = m_1$  (en effet,  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(f|_{x_2=0})$  entraîne que, pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $m \in T^*(\tilde{\Delta}_1), |m - m_1| < \varepsilon$  et  $s(m) < 0$  on a  $m \notin SS(f|_{x_2=0})$ ). On peut donc appliquer le théorème de propagation des singularités analytiques pour le problème de Dirichlet de Sjöstrand sur les rayons contenus dans  $x_1 > 0$ , ainsi que l'argument de compacité sur l'ensemble des rayons pour construire  $\gamma$ ). Or la restriction de  $\gamma$  à  $] -\varepsilon_0, 0]$  définit un élément de  $\Gamma_{\rho_0}^-$  dont l'image est contenue dans  $SS_b(u)$  : contradiction.

D'après le théorème A.2, on a donc  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(a_1)$  si  $m_1 \neq \varepsilon_1(\rho_0)$ , et comme  $g_1|_{x_1>0}$  est de la forme  $Q_0 a_0 + Q_1 a_1$ , où les  $Q_j$  sont des opérateurs différentiels, il en résulte  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(g_1)$ , d'où la proposition dans le cas extérieur.

On se place à présent dans le cas intérieur.

Soit  $x_0 = (x'_0 = 0, x'' = x''_0)$ ,  $\rho_0 = (x''_0, \xi''_0)$ . On a  $P\underline{u} = -(g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2)$  près de  $x_0$ , et d'après le lemme 1 pour  $s \in ]-\varepsilon, 0[$ ,  $\exp(s H_p(\rho)) \notin SS(g_2 \delta_2)$  pour tout  $\rho \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car}(P)$ , car les supports de  $g_1 \delta_1$  et  $g_2 \delta_2$  sont disjoints en dehors de  $L$ . Comme  $P$  est à caractéristiques simples réelles, est à coefficients analytiques et que  $\partial_{\xi} p \neq 0$  sur  $p = 0$ ,  $\xi \neq 0$ , il existe une distribution  $w$  définie près de  $x_0$  vérifiant, quitte à diminuer  $\varepsilon$

$$(6) \quad \begin{cases} Pw + g_2 \delta_2 \equiv 0 \text{ près de } x_0 \\ \exp s H_p(\rho) \notin SS(w) \text{ pour } \rho \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car } P, \quad s \in ]-\varepsilon, 0[. \end{cases}$$

(En effet, soit  $K = \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car } P$ . Il existe une distribution  $w_1$  définie près de  $x_0$  vérifiant  $SS(Pw_1 + g_2 \delta_2) \cap K = \phi$  et  $\exp s H_p(\rho) \notin SS(w_1)$  pour  $s \in ]-\varepsilon, 0[$  et  $\rho \in K$ , car  $H_p$  est transverse à  $K$ . Si  $h = Pw_1 + g_2 \delta_2$ , il existe alors une distribution  $w_2$  définie près de  $x_0$  telle que  $SS(w_2) \cap K = \phi$  et  $Pw_2 - h$  analytique près de  $x_0$  car  $\partial_{\xi} p \neq 0$  sur  $p = 0$ ,  $\xi \neq 0$ . On conclut en utilisant le théorème de Cauchy-Kowalewski.)

On pose  $f = (\underline{u} - w)|_{x_2>0}$ . On a  $Pf = 0$  près de  $x_0$  dans  $x_2 > 0$ . On notera  $y = (x_1, x'') \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $\mathcal{D}'(\cdot, H^s(x_2))$  les distributions en  $y$  à valeurs dans l'espace de Sobolev  $H^s$  en  $x_2$ . Si  $u(y, x_2) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  vérifie  $WF(u) \cap \{\eta = 0\} = \phi$  alors  $u \in \mathcal{D}'(\cdot, H^s)$  pour tout  $s$ . Si  $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on a  $\psi g_2 \delta_2 \in \mathcal{D}'(\cdot, L^2)$ , et comme  $P$  est elliptique d'ordre 2 près de  $\eta = 0$ , il en résulte  $\psi w \in \mathcal{D}'(\cdot, H^2)$  et en particulier les traces  $w|_{x_2=0}$  et  $\frac{\partial w}{\partial x_2}|_{x_2=0}$  sont bien définies. On notera également  $\tilde{z} = (z_1, z'') \in \mathbb{C}^{n-1}$  et si  $\varphi(\tilde{z}, z_2)$  est une fonction poids à valeurs réelles définie pour  $\tilde{z} \in U$  ouvert borné de  $\mathbb{C}^{n-1}$ ,  $z_2 \in I - iJ$ ,  $I$  ouvert borné de  $\mathbb{R}$ ,  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$  voisinage de l'infini, et  $\sigma$  réel on notera ici  $H_\varphi^\sigma(U, I, J)$  l'espace de Sjöstrand des fonctions  $h(\tilde{z}, z_2, \lambda)$  holomorphes en  $\tilde{z} \in U$ ,  $z_2 \in I - iJ$  vérifiant, avec  $g(\tilde{z}, z_2, \lambda) = h(\tilde{z}, z_2, \lambda) e^{-\lambda \varphi(\tilde{z}, z_2)} (1 + |z_2|)^\sigma$

$$(7) \quad \forall A, B, \quad \sup \left\{ \|g(\tilde{z}, a - ib, \lambda)\|_{L^2(b \in J)}; \tilde{z} \in U, a \in J \right\} \leq A \lambda^B.$$

Soit  $\varphi_1 = \frac{1}{2} (\text{Re } \tilde{z})^2 + \frac{1}{2} \text{Re}(z_2)^2$ ,  $m_1 \in F_{1, \rho_0}$ ,  $m_1(x_1 = 0, x''_0, \xi''_0)$ ,  $\tilde{z}_1 = (-i \xi''_0; x''_0 - i \xi''_0)$ . Alors pour  $U$  voisinage de  $\tilde{z}_1$ ,  $I$  voisinage de 0,  $J = \mathbb{R}$  et  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support près de  $x_0$ , égale à 1 près de  $x_0$  on a puisque  $\psi w \in \mathcal{D}'(\cdot, H^2)$

$$(8) \quad T(\psi w) \in H_{\varphi_1}^2(U, I, \mathbb{R}).$$

Comme on a (voir § III.1. (16))

$$(9) \quad \lambda^2 P_C^\# T(\psi w) = -T(\psi g_2 \delta_2) + T([P, \psi] w) - T(P^C \psi w)$$

on obtient

$$(10) \quad \lambda^2 P_C^\# T(\psi w) = -T(\psi g_2 \delta_2) + m$$

avec  $e^{\varepsilon\lambda}m \in H_{\varphi_1}^0(U, I, \mathbb{R})$  pour un  $\varepsilon > 0$  dépendant de  $C$ , quitte à diminuer  $U$  et  $I$ .

Pour prouver la proposition 1, nous allons distinguer trois cas :  $m_1$  est elliptique,  $m_1 = -\varepsilon_1(\rho_0)$ ,  $m_1 = t\varepsilon_1(\rho_0)$  avec  $t \in ]-1, +1[$ .

**1er cas :**  $m_1 = t\varepsilon_1(\rho_0)$  avec  $|t| > 1$ . Alors  $m_1 \in \dot{T}^* \tilde{\Delta}_1$  est elliptique. Dans ce cas il existe un  $c > 0$  tel que  $|p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c(1 + |z_2|)$  pour  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $z = (\tilde{z}, z_2)$ ,  $\tilde{z}$  près de  $\tilde{z}_1$ ,  $\text{Re } z_2$  près de 0 et  $\zeta$  près de 0. Soit  $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\text{Re } z'')^2 + \frac{1}{2}[(\text{Re } z_2)_+]^2$ . Comme  $g_2 \delta_2 = g_2(x_2, x'') \delta_{x_1=0}$  et que  $g_2 \in L^2$  est à support dans  $x_2 \geq 0$ , on a  $T(\psi g_2 \delta_2) \in H_{\varphi_2}^0(U, I, \mathbb{R})$  et (10) entraîne alors par ellipticité  $T(\psi w) \in H_{\varphi_2}^2(U, I, \mathbb{R})$ . En utilisant comme dans le § III.5 la formule de trace (96) qui permet de calculer  $T_1 \otimes T_{\parallel}(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2}|_{x_2=0})$  en fonction de  $T(w, \frac{\partial w}{\partial x_2})$  on obtient directement

$$(11) \quad (m_1, \pm 1) \notin SS_{V_1}^{2,1}\left(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2}|_{x_2=0}\right) .$$

Il en résulte

$$(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(f|_{x_2=0}) ,$$

donc par le théorème A.2

$$(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}|_{x_2=0}\right) ,$$

donc en réutilisant (11),  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(g_1)$ .

**2ème cas :**  $m_1 = -\varepsilon_1(\rho_0)$ .

Alors  $m_1 \in \dot{T}^* \tilde{\Delta}_1$  est glancing et la bicaractéristique de  $P$  issue de  $m_1$  rentre dans  $x_1 < 0$  dans l'avenir. Avec les notations du § I.2 on a  $m_1 = (x_1 = 0, x_0'', \xi_1 = a_1^-(\rho_0), \xi_0'')$  et l'équation  $p(0, x_0'', a_1^-(\rho_0), \xi_2, \xi_0'') = 0$  possède une seule racine double  $\xi_2 = \zeta_2^-(\rho_0)$ . Si  $J$  est le complémentaire d'un petit voisinage de  $\zeta_2^-(\rho_0)$ ,  $U$  et  $I$  assez petits, on a comme précédemment

$$(12) \quad T(\psi w) \in H_{\varphi_2}^2(U, I, J) .$$

Soit  $q_0 = (x_0; \xi_1 = a_1^-(\rho_0), \xi_2 = \zeta_2^-(\rho_0), \xi_0'')$ . On a  $q_0 \in \text{Car } P \cap V$ ,  $V$  étant l'involutive  $x_1 = x_2 = 0$ . On note  $(e_1, e_2)$  la base des fibres du fibré normal  $T_V$  tel que  $e_i$  soit l'image de  $\partial_{x_i}$ . La classe de  $H_p(q_0)$  dans le fibré normal  $(T_V)_{q_0}$  est  $\nu_0 = (-s_0, 0)$  avec  $s_0 > 0$ . Si  $\gamma_- = \{\exp s H_p(q_0), s < 0\}$  on a alors  $\gamma_- \cap SS(w) = \emptyset$  (d'après (6)) et  $-\nu_0 \notin SS_{V_1}^{2,1}(Pw)_{q_0}$  (car  $T(\psi g_2 \delta_2) \in H_{\varphi_2}^0$  implique  $SS_{V_1}^{2,1}(g_2 \delta_2)_{q_0} \subset \{(0, t), t \geq 0\}$ ). D'après le théorème A.1 il en résulte

$$(13) \quad SS_{V_1}^{2,1}(w)_{q_0} \subset \{(-s, t); s \geq 0, t \geq 0\} .$$

D'après la formule de décomposition de l'appendice A. (13) si  $\Gamma$  est un sous-cône strict de  $\{\text{Re } z_1 \geq 0 \text{ et } \text{Re } z_2 \leq 0\}$ , on a pour  $z'' \simeq x_0'' - i \xi_0''$ ,  $\text{Re } z'$  proche de 0 dans  $\Gamma$  et  $\text{Im } z' \simeq (-a_1^-(\rho_0), -\zeta_2^-(\rho_0))$

$$(14) \quad |T(\psi w)(z, \zeta)| \leq A \lambda^B e^{\frac{\lambda}{2}(\text{Re } z'')^2} .$$

En utilisant (12), (14) et en déformant la formule de trace du § III. 5. (96) restreinte à  $x_2 = 0$  lorsque  $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$  sur un contour  $z_2 = -ib_2$  du type  $\operatorname{Re} z_2 = -\delta(\operatorname{Im} z_2) \operatorname{Re} z_1$ ,  $\delta \in C_0^\infty$ ,  $\delta \geq 0$ , avec  $\{(u, -\delta(\operatorname{Im} z_2)u), u \geq 0\}$  contenu dans  $\Gamma$  pour  $\operatorname{Im} z_2$  près de  $-\zeta_2^-(\rho_0)$ , on obtient

$$(15) \quad (m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1} \left( w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \right).$$

Pour conclure comme dans le 1er cas en utilisant le théorème A.2, il suffit de vérifier que  $f = (\underline{u} - w)|_{x_2 > 0}$  est  $V_1$  sortante en  $m_1$ . Tout d'abord (15) entraîne  $SS(w|_{x_2=0}) \cap \{x_1 > 0\} = \phi$  près de  $m_1 \in T^* \tilde{\Delta}_1$ , et on peut donc appliquer le théorème de propagation des singularités analytiques pour le problème de Dirichlet de Sjöstrand pour la variété à bord  $x_2 > 0$ , dans  $x_1 > 0$ . Si  $f$  n'était pas  $V_1$  sortante en  $m_1$ , il existerait alors un rayon  $\gamma : [-\varepsilon_0, 0[ \rightarrow SS_b(f|_{x_1 > 0})$  avec  $\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(s) = m_1$ , donc  $\gamma$  définit un élément de  $\Gamma_{\rho_0}^-$ . Si  $\gamma(s)$  ne rencontre pas  $x_2 = 0$  dans  $s < 0$ , c'est alors une bicaractéristique de  $p$ , et d'après (6) on aurait l'image de  $\gamma$  contenu dans  $SS_b(u)$ , ce qui contredit l'hypothèse du théorème 3. Sinon, on a  $Pw|_{x_1 > 0} = 0$  et pour  $s$  négatif petit tel que  $\gamma(s) \in (x_2 = 0)$ ,  $\gamma(s) \notin SS(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2})$  d'après (15) d'où puisque dans la catégorie analytique le spectre au bord est réunion du spectre des traces,  $\gamma(s) \notin SS_b(w|_{x_1 > 0})$ . On devrait donc avoir  $\gamma(s) \in SS_b(u|_{x_1 > 0})$ , ce qui contredit l'hypothèse du théorème 3.

**3ème cas :**  $m_1 = t \varepsilon_1(\rho_0)$ ,  $t \in ]-1, +1[$ .

Dans ce cas, on utilisera la figure du § I.2 (35) qui permet d'identifier  $\pi^{-1}(\rho_0) \cap \operatorname{Car} P$  au cercle  $C_{\rho_0}$  et les projections  $\pi_i : T^* \tilde{M} \rightarrow T^* \tilde{\Delta}_i$  restreintes à  $\pi^{-1}(\rho_0)$  aux projections orthogonales sur les droites  $\mathbb{R} \varepsilon_i(\rho_0)$ . De plus, nous serons amenés à faire la démonstration conjointement pour les deux traces  $g_1$  et  $g_2$ . On remarquera que si  $q \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \operatorname{Car} P$  est représenté par  $t_1 \varepsilon_1 + t_2 \varepsilon_2$ , alors la classe de  $H_p(q)$  dans le fibré normal a pour direction  $A_{(0, x_0'')}(t_1 \varepsilon_1 + t_2 \varepsilon_2) = \alpha_1 t_1 e_1 + \alpha_2 t_2 e_2$  et on a  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$ .

Pour vérifier qu'on a  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(g_1)$  il suffit de prouver qu'on a  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0})$ . En effet, on pourra appliquer le théorème A.2 à  $f = (\underline{u} - w)|_{x_2=0}$ , puisque  $m_1$  est alors dans la région hyperbolique de  $T^* \tilde{\Delta}_1$  et que si  $\gamma_-$  est la demi-bicaractéristique définie par  $m_1$  qui dans le passé rentre dans  $x_2 > 0$ , on a  $\gamma_- \cap SS(\underline{u}) = \phi$  (par le lemme 1) et  $\gamma_- \cap SS(w) = \phi$  (par (6)).

Soit  $m_1 = (x_1 = 0, x'' = x_0'', \xi_1 + \nu_{0,1}(\rho_0), \xi_0'')$  et  $L(m_1) = \pi_1^{-1}(m_1)$  i.e.

$$(16) \quad L(m_1) = \left\{ (x' = 0, x'' = x_0'', \xi_1 + \nu_{0,1}(\rho_0), \xi_2 + \nu_{0,2}(\rho_0), \xi_0'') \mid \xi_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Avec l'identification du § I.2. (25) on a si  $m_1 = t \varepsilon_1(\rho_0)$ ,  $L(m_1) = \{t \varepsilon_1(\rho_0) + s e_2^*(\rho_0); s \in \mathbb{R}\}$  et on notera  $b^\pm(m_1)$  les deux points distincts de  $L(m_1) \cap \operatorname{Car} P$ , avec  $b^\pm(m_1) = t_1^\pm \varepsilon_1 + t_2^\pm \varepsilon_2$ ,  $\pm t_2^\pm > 0$  qu'on notera aussi  $b^\pm(m_1) = (x' = 0, x'' = x_0'', \xi_1 + \nu_{0,1}(\rho_0), \xi_2^\pm + \nu_{0,2}(\rho_0), \xi_0'')$ . En utilisant (10) on obtient si  $J$  est le

complémentaire d'un petit voisinage de  $\{\xi_2^- + \nu_{0,2}(\rho_0), \xi_2^+ + \nu_{0,2}(\rho_0)\}$  et  $U$  et  $I$  assez petits

$$(17) \quad T(\psi w) \in H_{\varphi_2}^2(U, I, J)$$

et comme dans le deuxième cas, on est ramené à prouver des estimations sur  $SS_V^{2,1}(w)$  près des deux points  $b^+(m_1)$ ,  $b^-(m_1)$  qui permettront d'obtenir  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2}|_{x_2=0})$  en déformant le contour d'intégration dans la formule de trace du § III.5. (96) restreinte à  $x_2 = 0$ . Posons

$$(18) \quad \begin{aligned} & \left\{ t_1; \forall t \leq t_1 \quad (t \varepsilon_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(g_1) \right\} = ] - \infty, a_1[ \\ & \left\{ t_2; \forall t \leq t_2 \quad (t \varepsilon_2, +1) \notin SS_{V_2}^{2,1}(g_2) \right\} = ] - \infty, a_2[ . \end{aligned}$$

D'après l'étude des premiers et deuxièmes cas on a  $a_1 > -1$  et  $a_2 > -1$ . Montrons qu'on a

$$(19) \quad \pi_1(-\varepsilon_2) \in ] - \varepsilon_1, a_1 \varepsilon_1[ \text{ et } \pi_2(-\varepsilon_1) \in ] - \varepsilon_2, a_2 \varepsilon_2[ .$$

En effet, soit d'abord  $m_1 = t \varepsilon_1 \in ] - \varepsilon_1, \pi_1(-\varepsilon_2)[$  et appliquons le théorème A.1 en  $b^+(m_1)$  et  $b^-(m_1)$  à l'équation  $Pw = -g_2 \delta_2$ . D'après la deuxième ligne de (6), la condition A. (14)  $\gamma_- \cap SS(w) = \emptyset$  est satisfaite dans tous les cas, et en tout point  $\rho$  de  $L(m_1)$  on a  $SS_V^{2,1}(g_2 \delta_2)_\rho \subset \{(0, t); t \geq 0\}$ . Comme  $b^+(m_1) = t_1^+ \varepsilon_1 + t_2^+ \varepsilon_2$ ,  $t_2^+ > 0$ , on a par le théorème A.1

$$(20) \quad SS_V^{2,1}(w)_{b^+(m_1)} \subset \left\{ (s \alpha_1 t_1^+, s \alpha_2 t_2^+ + s'); s \geq 0, s' \geq 0 \right\} .$$

Comme  $t_2^+ > 0$ , le membre de droite de (20) est toujours contenu dans un sous-cône strict  $\Gamma$  du demi-plan supérieur, de sorte que  $-\Gamma^0$  contient toujours un voisinage conique de la direction  $(0, -1)$ , ce qui permet de déformer le contour dans la formule de trace près de  $b^+(m_1)$ , comme dans le deuxième cas. On a  $b^-(m_1) = t_1^- \varepsilon_1 + t_2^- \varepsilon_2$  donc la classe de  $H_p$  dans  $T_V$  en ce point est  $\alpha_1 t_1^- e_1 + \alpha_2 t_2^- e_2$  qui ne peut être de direction  $(0, -1)$  car on a  $t_1^- < 0$  puisque  $m_1 \in ] - \varepsilon_1, \pi_1(-\varepsilon_2)[$ . On a donc l'estimation (20) avec  $t_1^-, t_2^-$ , ce qui entraîne à nouveau que  $SS_V^{2,1}(w)|_{b^-(m_1)}$  est contenu dans un cône strict  $\Gamma$  tel que  $-\Gamma^0$  contienne un voisinage d'une direction  $(1, -\delta)$ ,  $\delta > 0$  et on conclut comme dans le deuxième cas.

Si  $t \varepsilon_1 = \pi_1(-\varepsilon_2)$ , alors  $b^-(m_1) = -\varepsilon_2$  et d'après le deuxième cas  $(-\varepsilon_2, \pm 1) \notin SS_{V_2}^{2,1}(g_2)$  donc  $SS_V^{2,1}(g_2 \delta_2)_{b^-(m_1)} \subset \{(0, 0)\}$ . En particulier  $T(\psi g_2 \delta_2)$  est majoré par le poids  $\varphi_V = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z'')^2$  près du point  $z^-(m_1)$  correspondant à  $b^-(m_1)$  et en appliquant le théorème A.1, et l'ellipticité de  $P$  sur  $L(m_1) \setminus \{b^+(m_1), b^-(m_1)\}$  on obtient

$$(21) \quad \begin{cases} SS_V^{2,1}(w)_\rho \subset \{(0, 0)\}, \quad \rho \in L(m_1) \setminus b^-(m_1), \quad \rho \text{ proche de } b^-(m_1) \\ SS_V^{2,1}(w)_{b^-(m_1)} \subset \{s \nu_0; s \geq 0\} \text{ avec } \nu_0 = \text{classe de } H_p(b^-(m_1)) \text{ dans } T_V . \end{cases}$$

Il en résulte que près de  $z^-(m_1)$ ,  $T(\psi w)$  est majoré par le poids  $\varphi_V$  dans  $\text{Re } z \in -\Gamma^0$ , où  $\Gamma$  est un petit voisinage de  $(0, -1)$ , et aussi majoré par le poids  $\varphi_V$  près des points  $z = x - i\xi$ ,  $(x, \xi) \in L(m_1) \setminus b^-(m_1)$  proche de  $b^-(m_1)$ , d'où l'existence d'une déformation de contour adéquate dans la formule de trace. On a donc vérifié (19). De plus, l'argument qui précède entraîne que pour avoir, avec  $m_1 = t\varepsilon_1$ ,  $(m_1, +1) \notin SS_{V_1}^{2,1}(w|_{x_2=0}, \frac{\partial w}{\partial x_2}|_{x_2=0})$ , il suffit de vérifier

$$(22) \quad \pi_2(b^-(m_1)) = t\varepsilon_2 \text{ avec } t < a_2$$

car (20) reste toujours valable, (22) entraîne (21), et la classe  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  de  $H_p(b^-(m_1))$  dans  $T_V$  varie en direction de  $(-1, 0)$  à  $(+1, 0)$  en restant dans le demi-plan inférieur lorsque  $m_1$  varie de  $-\varepsilon_1$  à  $+\varepsilon_1$ , de sorte qu'il existe  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  tel que  $\theta \cdot \nu < 0$  et  $\theta_1 > 0$ , ce qui permet la déformation dans la formule de trace.

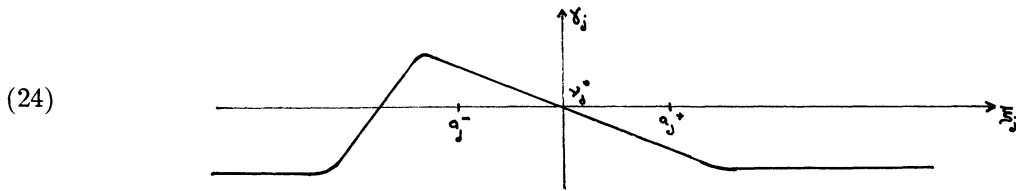
Or on vient de vérifier  $\pi_2(-\varepsilon_1) \in ]-\varepsilon_2, a_2\varepsilon_2[$  (en permutant les indices 1 et 2). Il en résulte donc  $\pi_1(b^-(\pi_2(-\varepsilon_1))) \in ]-\varepsilon_1, a_1\varepsilon_1[$ . En itérant cet argument on obtient  $a_1 \geq 1$  et  $a_2 \geq 1$  d'où la proposition 1. On remarquera que pour traiter le 3ème cas on a utilisé les rebonds successifs sur les faces du dièdre.

◇

### V.2. Déformation du système de Calderòn

On commence par choisir les contours sur lesquels nous allons déformer le système de Calderòn. Avec  $\rho_0 = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^*L$ , on a  $\nu_0(\rho_0) = (\nu_{0,1}, \nu_{0,2})$ , et  $\nu_{0,j} = \frac{1}{2}[a_j^-(\rho_0) + a_j^+(\rho_0)]$  (voir le § I.2, (30) et (32)); pour  $j = 1, 2$ , soit  $\gamma_j \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant avec des constantes  $c_0, c_1 > 0$

$$(23) \quad \begin{cases} \gamma_j(\xi_j) = -c_0(\xi_j - \nu_{0,j}) & \text{pour } \xi_j \in [a_j^-(\rho_0) - 1, a_j^+(\rho_0) + 1] \\ \gamma_j(\xi_j) = -c_1 & \text{pour } \xi_j \notin [a_j^-(\rho_0) - 2, a_j^+(\rho_0) + 2] \end{cases}$$



Pour  $\varepsilon > 0$  petit, on définit alors les contours  $\mathcal{C}^{\varepsilon,j}$  par

$$(25) \quad \mathcal{C}^{\varepsilon,j} = \{z_j \in \mathbb{C}; \text{Re } z_j = \varepsilon \gamma_j(-\text{Im } z_j)\} .$$

Comme dans le § III.3, (24), on pose, avec  $r_j > 0$

$$(26) \quad \mathcal{C}_{r_j}^{\varepsilon,j} = \{z_j \in \mathbb{C}, z_j = u + v, u \in \mathcal{C}^{\varepsilon,j}, |v| < r\}$$



ainsi que, avec  $\underline{r} = (r_1, r_2)$

$$(27) \quad \mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; z_j \in \mathcal{C}_{r_j}^{\varepsilon, j}\} .$$

Désignons par  $\mathcal{F}_{\rho_0} = \{(x' = 0, x'' = x_0''; \xi' \in \mathbb{R}^2; \xi'' = \xi_0'')\}$  la feuille de l'involutive  $V = \{x' = 0\}$  définie par  $\rho_0$ .

On notera  $\Theta$  la section du fibré conormal à  $V$  restreint à la feuille  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  définie par

$$(28) \quad \Theta(\xi_1, \xi_2) = \gamma_1(\xi_1) dx_1 + \gamma_2(\xi_2) dx_2 .$$

On choisit les fonctions poids  $\varphi''(z'') = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z'')^2$ ,  $\varphi_1(z_1) \equiv 0$ ,  $\varphi_2(z_2) \equiv 0$ , on pose  $\underline{\varphi} = (\varphi'', 0, 0)$  et pour  $W$  voisinage de  $z_0'' = (x_0'' - i \xi_0'')$ ,  $\underline{r} = (r_1, r_2)$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , on introduit les espaces définis au § III.3

$$(29) \quad H^\sigma(W; \underline{r}, \varepsilon) = H_{\underline{\varphi}}^\sigma(W; \mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon)$$

$$(30) \quad \mathcal{R} H^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) = \mathcal{R} H_{\underline{\varphi}}^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon, \delta)$$

$$(31) \quad \mathcal{B}^m(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) = H^m(W; \underline{r}, \varepsilon) + \mathcal{R} H^{\underline{\sigma}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$$

où  $\sigma, m \in \mathbb{R}$  et dans (31)  $\underline{\sigma} = (0, 0)$ ,  $\underline{\ell} = (-m, -m)$ .

On notera également  $H^\sigma(W, r_j, \varepsilon)$  l'espace analogue à  $H^\sigma(W; \underline{r}, \varepsilon)$  constitués de fonctions de  $(z'', z_j) \in W \times \mathcal{C}_{r_j}^{\varepsilon, j}$ .

Dans la suite de ce paragraphe, la fonction  $u \in H^1(M)$  solution locale près de  $x_0 = (x_0' = 0, x_0'')$  de  $Pu = 0$ ,  $u|_{\partial M} = 0$  vérifie les hypothèses du théorème 3 et nous utilisons la proposition 3 du § III.5 dont nous conservons les notations.

**Lemme 2.** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $W, \underline{r}, \delta$  tels que*

$$(32) \quad T(\psi g \delta) \in \mathcal{B}^0(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) .$$

PREUVE. On a  $T(\psi g_1 \delta_1)(z, \lambda) = (T_1 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_2=0} g_1)(z_1, z'', \lambda)$  et il s'agit de vérifier  $(T_1 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_2=0} g_1) \in H^0(W; r_1, \varepsilon)$ . Pour  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$  avec  $\operatorname{Im} z_1 \leq -a_1^+(\rho_0) + \alpha$  ( $\alpha > 0$  petit) ou  $\operatorname{Im} z_1$  grand cela résulte du choix du contour (24) et de support  $(g_1) \subset x_1 \geq 0$  pourvu que  $r_1 > 0$  soit petit en fonction de  $\varepsilon > 0$ . Pour  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$ ,  $\operatorname{Im} z_1 \in [-a_1^+(\rho_0) + \alpha, -a_1^-(\rho_0) + 2]$ , cette estimation résulte de la proposition 1, dès que  $\varepsilon$  et  $r_1$  sont petits.

**Lemme 3.** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $W, \underline{r}, \delta$  tels que*

$$(33) \quad F = T(\psi \underline{u}) \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) .$$

PREUVE. Comme dans le § IV.4, on note  $\tilde{H}^\sigma(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$  l'analogue de l'espace  $H^\sigma(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$  où les fonctions  $f(z', z'', \lambda)$  ne sont définies que pour  $|z'| > A$ , où  $A$  est une grande constante positive, et on pose  $\tilde{\mathcal{B}}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) = \tilde{H}^m(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon) + \mathcal{R}H^{\underline{\alpha}, \underline{\ell}}(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)|_{|z'| > A}$ , avec  $\underline{\alpha} = (0, 0)$ ,  $\underline{\ell} = (-m, -m)$ . D'après le § III, (105), on a  $\lambda^2 P_c^\sharp F = G = T(\psi g \delta) + m$  avec  $e^{\alpha\lambda} m \in \mathcal{B}_0^0(W'; \underline{r}', \delta')$  pour un choix convenable de  $W', \underline{r}', \delta'$ , où  $\alpha > 0$  dépend de  $C$ . Quitte à diminuer  $\alpha$ , pour  $W', \underline{r}', \delta', \varepsilon$  petits, on a donc  $e^{\alpha\lambda} m \in \mathcal{B}^0(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ . D'après le § IV.4, (140), on a (pour un  $\alpha > 0$ )  $e^{\alpha\lambda} [F - \lambda^{-2} \text{Op}(q, C_1, C_2)G] \in \tilde{\mathcal{B}}_0^2$ , où  $q \in \tilde{\mathcal{E}}^{-2}$  vérifie  $q \circ p^\sharp = 1$ , donc quitte à diminuer  $\alpha$  et à augmenter  $C_1, C_2$ , dès que  $W, \underline{r}, \delta, \varepsilon$  sont assez petits, on a  $e^{\alpha\lambda} [F - \lambda^{-2} \text{Op}(q, C_1, C_2)G] \in \tilde{\mathcal{B}}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ .

D'après le lemme 2, on a  $G \in \mathcal{B}^0(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ . Les résultats d'opérance de  $\text{Op}(q, C_1, C_2)$  du § III.3 entraînent donc  $F \in \tilde{\mathcal{B}}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ . Pour vérifier l'estimation  $F \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ , on est donc ramener à vérifier

$$(34) \quad |F(z', z'', \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\frac{\lambda}{2} (\text{Re } z'')}^2$$

près de chaque point  $(z_1, z_2, z_0'')$  avec  $z_j \in \mathcal{C}^{\varepsilon, j}$ . D'après les rappels de deuxième microlocalisation de l'appendice, (34) sera conséquence, pour  $\varepsilon$  petit de

$$(35) \quad n \in \mathcal{F}_{\rho_0} \quad (n, \nu) \in SS_V^{2,1}(F)_n \text{ et } \nu \neq 0 \implies \langle \Theta(n), \nu \rangle < 0 .$$

On a

$$(36) \quad \lambda^2 P_c^\sharp F = G$$

et pour  $n = (x' = 0, x'' = x_0'', \xi', \xi'' = \xi_0'') \in \mathcal{F}_{\rho_0}$ , et  $\nu \neq 0$   $(n, \nu) \in SS_V^{2,1}(G)_n$  implique, d'après la proposition 1, un des trois cas

$$(37) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_1^+(\rho_0), \xi_2 \neq a_2^+(\rho_0) & \text{et } \nu = (t, 0) \quad t > 0 \\ \xi_1 \neq a_1^+(\rho_0), \xi_2 = a_2^+(\rho_0) & \text{et } \nu = (0, t) \quad t > 0 \\ \xi_1 = a_1^+(\rho_0), \xi_2 = a_2^+(\rho_0) & \text{et } \nu = (t, 0) \text{ ou } \nu = (0, t) \quad t > 0 . \end{cases}$$

Alors, lorsque  $P$  est elliptique en  $n$ , (35) est conséquence de (37), (36) et de  $\gamma_j(a_j^+(\rho_0)) < 0$ . Si  $n \in \pi^{-1}(\rho_0) \cap \text{Car } P$  on écrira comme dans le § V.1  $n = t_1 \varepsilon_1 + t_2 \varepsilon_2$ , et on notera  $\gamma_- = \{\exp s H_p(n), s < 0\}$ . La classe de  $H_p(n)$  dans le fibré normal à  $V$  est  $\nu(n) = 2A_{(0, x_0'')}(\xi' - \nu_0(\rho_0))$  (voir le § I.2, (20)). On peut alors appliquer le théorème A.1 à l'équation (36) puisque  $\gamma_- \cap SS(F) = \emptyset$  par le lemme 1 et  $-\nu(n) \notin SS_V^{2,1}(G)_n$  d'après (37). Pour  $n \neq \varepsilon_1$  et  $n \neq \varepsilon_2$ , on en déduit  $SS_V^{2,1}(F)_n \subset \{\nu = s\nu(n), s \geq 0\}$  et (35) est conséquence de (23) et

$$\langle \Theta(n), \nu(n) \rangle = -2c_0^t (\xi' - \nu_0(\rho_0)) A_{(0, x_0'')}(\xi' - \nu_0(\rho_0)) < 0 .$$

Lorsque  $n = \varepsilon_1$ , c'est-à-dire (voir le § I.2, (30))  $\xi_1 = a_1^+(\rho_0)$ ,  $\xi_2 = \zeta_2^+(\rho_0)$ , on a  $\nu(n) = \alpha_1 \varepsilon_1$ ,  $\alpha_1 > 0$ , donc par (37) et le théorème A.1, à nouveau  $SS_V^{2,1}(F)_n \subset \{\nu = s\nu(n), s \geq 0\}$ , d'où (35), ce qui achève la preuve du lemme 3.  $\diamond$

**Lemme 4.** Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $W, \underline{r}, \delta$  et  $c > 0$ ,  $D > 0$  tels que pour  $z'' \in W$ ,  $z' \in \Omega(\mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon, \delta)$  (voir le § III.3., (28))  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|\zeta\| < D$  on ait pour  $\lambda$  grand

$$(38) \quad |p^\sharp(z, \zeta, \lambda)| \geq c(1 + |z|^2) .$$

PREUVE. On peut supposer  $-\operatorname{Im} z_j \in [a_j^-(\rho_0) - 1, a_j^+(\rho_0) + 1]$ ,  $j = 1, 2$  puisqu'en dehors de ce rectangle  $p^\sharp$  est elliptique et (voir le § IV.3., (102)) il s'agit donc de vérifier

$$p(x'_0 = 0, x''_0, \xi_1 - i c_0 \varepsilon (\xi_1 - \nu_{0,1}), \xi_2 - i c_0 \varepsilon (\xi_2 - \nu_{0,2}), \xi''_0) \neq 0 ,$$

ce qui résulte d'après le § I.2., (20) de  $(1 - i c_0 \varepsilon)^2 ({}^t \eta' A_{(0, x''_0)} \eta') - R_0(\rho_0) \neq 0$  pour tout  $\eta' \in \mathbb{R}^2$ , car  $R_0(\rho_0) \neq 0$ .

◇

Fixons  $W', \underline{r}', \delta'$  tels que  $F \in \mathcal{B}_0^2(W'; \underline{r}', \delta')$  ainsi que  $\varepsilon, W, \underline{r}, \delta$  tel que  $F \in \mathcal{B}^2(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ . (On peut supposer  $W \subset\subset W'$  et  $\mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon \subset\subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |\operatorname{Re} z_j| < r'_j\}$  en diminuant  $\varepsilon$  et  $\underline{r}$ ). On a alors pour  $C$  assez grand  $\mathcal{N}_{j,C}^\sharp F \in \mathcal{B}_0^1(W'; \underline{r}', \delta') \cap \mathcal{B}^1(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ .

**Lemme 5.** Pour  $f \in \mathcal{B}_0^1(W'; \underline{r}', \delta') \cap \mathcal{B}^1(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon)$ , on a

$$(39) \quad \operatorname{Tr}_1^\pm(f)(z_1, z'', \lambda) \in H_0^0(W'; r'_1) \cap H^0(W; r_1, \varepsilon) .$$

PREUVE. On reprend la preuve du lemme 7 du § III.5. Pour  $z'' \in W'$ ,  $|\operatorname{Re} z_1| < r'_1$ , on a  $\operatorname{Tr}_1^\pm f(z_1, z'', \lambda) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} T_2^{-1} f$

$$(40) \quad T_2^{-1}(f)(z_1, x_2, z'', \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} f(z_1, x_2 - i b_2, z'', \lambda) db_2 .$$

Comme  $f \in \mathcal{B}_0^1(W'; \underline{r}', \delta')$ , on peut déformer l'intégrale du membre de droite de (40) sur le contour  $b_2 = \xi_2 + i\varepsilon \gamma_2(\xi_2)$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}$ , puisque  $\gamma_2(\xi_2)$  est borné. On écrit alors  $f = f_1 + f_2 + g$  avec  $g \in H^1(W, \underline{r}, \varepsilon)$ ,  $f_j = \int_{A_j} r_j h_j d\mu_j$ ,  $r_j \in \mathcal{R}_{A_j, 2}^{-1}$ ,  $h_j \in H^0(W; r_j, \varepsilon)$ ,  $|r_j(a_j, iz')| \leq C(1 + |z'|)^{-1}$  pour  $z' \in \Omega(\mathcal{C}_{\underline{r}}^\varepsilon, \delta)$ . Les termes provenant de  $f_1$  ou  $g$  se traitent comme dans le lemme 7 loc. cit. Pour le terme  $f_2$ , on a encore  $T_2^{-1}(f_2) = \int_{A_2} d\mu_2(a_2) h_2(z_1, z'', a_2, \lambda) R$  avec  $R(x_2, a_2, z_1, \lambda) = \int_{\Gamma} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} r_2(a_2, i z_1, i x_2 - b_2) db_2$  où  $\Gamma = \{b_2 = \xi_2 + i\varepsilon \gamma_2(\xi_2)\}$ ,  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$  et  $|x_2| < \frac{r_2}{2}$  et  $|\partial_{x_2}^\ell r_2(a_2, i z_1, i x_2 - b_2)| \leq C \operatorname{ct}_\ell (1 + |z_1| + |b_2|)^{-1}$  pour  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$ ,  $|x_2| < \frac{r_2}{2}$ ,  $b_2 \in \Gamma$  ou  $b_2 \in \mathbb{C}$  et  $|b_2| \geq C_0(1 + |z_1|)$  avec  $C_0$  assez grand. Si  $\Gamma_{z_1}^\pm$ ,  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$  est le contour réunion de  $\{b_2 \in \Gamma | b_2| \leq C_0(1 + |z_1|)\}$  et de la portion de cercle  $\{\pm \operatorname{Im} b_2 \geq -\varepsilon C_1 \text{ et } |b_2| = C_0(1 + |z_1|)\}$  on a dans  $\pm x_2 > 0$   $R = \int_{\Gamma_{z_1}^\pm} e^{i\lambda x_2 b_2 - \lambda \frac{x_2^2}{2}} r_2 db_2$

donc  $\lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} R(x_2, a_2, z_1, \lambda) = \int_{\Gamma_{\pm}^1} r_2(a_2, i z_1, -b_2) db_2$  qui est borné en  $\lambda$  d'où le lemme. ◇

Si  $\mathcal{E}^{-2}(W; \underline{r}, \delta, \varepsilon, D) = \mathcal{E}^{-2}$  désigne l'espace introduit au § III.3. définition 4 relatif à  $\Omega(\mathcal{C}_{\underline{r}}^{\varepsilon}, \delta) \times W$ , d'après le lemme 4, il existe  $q \in \mathcal{E}^{-2}$  tel que  $q \circ p^{\sharp} = 1$ . En suivant la stratégie du § IV.3. on obtient à nouveau

$$(41) \quad \lambda^{-1} \Pi_j (\text{Tr}_j^{\pm} \mathcal{N}_{j,C}^{\pm} \circ \text{Op}(q, C_1, C_2) G) = G_j + m_j \quad j = 1, 2$$

avec  $e^{\alpha \lambda} m_j \in H^0(W; \tilde{r}_j, \varepsilon)$ ,  $0 < \tilde{r}_j \ll r_j$  où ici le projecteur de Hilbert  $\Pi_j$  est calculé par

$$(42) \quad (\Pi_j f)(z, \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \int \frac{1}{z + i\zeta} f(-i\zeta, \lambda) d\zeta$$

sur le contour bord supérieur de  $i\mathcal{C}_{r_j}^{\varepsilon, j}$ . De plus, la structure de l'inverse  $q$  de  $p^{\sharp}$  est toujours décrite par le lemme 3 du § IV.3. En notant toujours  $S_j$  le composé formel  $\mathcal{N}_j^{\sharp} \circ q$ , on a les estimations (107) et (108) du § IV.3 et on peut à nouveau écrire (41) sous forme matricielle

$$(43) \quad \begin{pmatrix} M^{1,1} & M^{1,2} \\ M^{2,1} & M^{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$(44) \quad \begin{aligned} M^{1,1} G_1 &= \\ &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{\mathcal{C}_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{\mathcal{C}_2}} (i\lambda)^{-\ell} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{dw_1}{z_1 - w_1} M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial z \right)^{\alpha} G_1(w_1, z'', \lambda) dw_1 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_1 = \{w_1 = -i b_1, b_1 = \xi_1 + i \gamma_1(\xi_1) + i r_1, \xi_1 \in \mathbb{R}\}$ ,  $z_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$  et  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) désignant le contour orienté dans le sens direct qui entoure la racine en  $w_2$  de  $p^{\sharp}(w_1, w_2, z'', 0, \lambda) = 0$  située à droite (resp. à gauche) de  $\{w_2 = -i b_2, b_2 = \xi_2 + i \gamma_2(\xi_2) \xi_2 \in \mathbb{R}\}$  et avec  $\gamma = \gamma_+$  dans le cas extérieur (resp.  $\gamma = \gamma_-$  dans le cas intérieur) (voir le § IV., (112))

$$(45) \quad M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} S_{1, \ell}(w_1, w_2, z'', 0, \lambda) dw_2$$

qui vérifie, quitte à diminuer  $W$  et  $\underline{r}$ , pour  $z'' \in W$  et  $w_1 \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$

$$(46) \quad |M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda)| \leq A B_1^{\ell} B_2^{|\alpha|} \ell! (1 + |w_1|)^{-\ell}$$

et aussi

$$(47) \quad \begin{aligned} M^{1,2} G_2 &= \\ &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{\mathcal{C}_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{\mathcal{C}_2}} (i\lambda)^{-\ell} \int_{b_2 = \xi_2 + i \gamma_2(\xi_2) + i r_2} M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z_1, -i b_2, z'', \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial z \right)^{\alpha} G_2(-i b_2, z'', \lambda) db_2 \end{aligned}$$

avec à nouveau (voir le § IV., (119))

$$(48) \quad M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z, \lambda) = \frac{\sigma}{4i\pi^2} \int_{\Gamma_1} \frac{dw_1}{z_1 - w_1} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} S_{1, \ell}(w_1, z_2, z'', 0, \lambda) dw_1 .$$

Pour  $z_2 \in \mathcal{C}_{r_2}^{\varepsilon, 2}$ , la racine en  $w_1$  de  $p^{\#}(w_1, z_2, z'', 0, \lambda) = 0$  située à droite de  $\mathcal{C}^{\varepsilon, 1}$  vérifie pour  $z_1 \in \{u + v; u \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}, v \in \mathbb{R}_-\}$ ,  $|z_1 - w_1| \geq \text{Cte}(1 + |z_1| + |z_2|)$ , d'où en utilisant le § IV, (107), (108) et la formule de Cauchy sur (48), des estimations, pour  $z_2 \in \mathcal{C}_{r_2}^{\varepsilon, 2}$ ,  $z_1 = u + v$ ,  $u \in \mathcal{C}_{r_1}^{\varepsilon, 1}$ ,  $v \in \mathbb{R}_-$

$$(49) \quad |M_{\ell, \alpha}^{1,2}(z, \lambda)| \leq \frac{A B_1^{\ell} B_2^{|\alpha|} \ell!}{(1 + |z_1| + |z_2|)} (1 + |z_2|)^{-\ell} .$$

Introduisons alors la chaîne d'espaces de Banach  $\mathbb{E}_{\sigma} = L_{\sigma}^1 \oplus L_{\sigma}^2$ ,  $\sigma \in [0, 1]$ , où  $L_{\sigma}^j$  est l'espace des fonctions  $h$  holomorphes en  $z \in U_{\sigma} = \{u + v; u \in \mathcal{C}^{\varepsilon, j}, v \in ]-\infty, -\sigma\rho[ \}$ ,  $\rho > 0$  petit et vérifiant

$$(50) \quad \sup_v \|h(u + v)\|_{L^2(\mathcal{C}^{\varepsilon, j})} < +\infty$$

ce qui définit la norme de  $L_{\sigma}^j$ . Alors le projecteur de Hilbert  $\Pi_j$  (42) est borné de  $L^2(\partial U_{\sigma})$  dans  $L_{\sigma}^j$ . Compte tenu de (44), (46), (47), (49), on peut donc considérer le système (43) comme une équation pseudo-différentielle en les variables tangentielles  $z''$  à valeurs dans les opérateurs sur la chaîne  $\mathbb{E}_{\sigma}$ , comme dans le § IV.3; on a  $e^{\alpha\lambda} m_j \in H^0(W; \tilde{r}_j, \varepsilon)$  et  $\Pi_j m_j = m_j$  d'après (43), donc, si  $\rho$  est assez petit, la classe de  $m_j$  dans  $\mathcal{H}_{\varphi'', z''_0}(L_0^j)$  est nulle. D'après (4), le théorème 3 sera conséquence de

$$(51) \quad \text{la classe de } G_j \text{ dans } \mathcal{H}_{\varphi'', z''_0}(L_0^j) \text{ est nulle .}$$

En utilisant comme dans le § IV.3 la proposition 1 du § IV.1, il suffit de vérifier l'invertibilité du symbole principal (43). Comme les termes non diagonaux  $M^{1,2}$  (ou  $M^{2,1}$ ) envoient  $\mathcal{H}_{\varphi'', z''_0}(L_1^2)$  dans  $\mathcal{H}_{\varphi'', z''_0}(L_0^1)$  d'après (47), (48), donc régularisent dans la chaîne, il suffit d'après le § IV, (116) et (122) de vérifier l'invertibilité sur  $L_0^1 \oplus L_0^2$  de l'opérateur

$$(52) \quad \begin{pmatrix} \text{Id} & \sigma S_{1,2} \\ \sigma S_{2,1} & \text{Id} \end{pmatrix} \quad (\sigma = -, \text{ si } M = M^i, \sigma = +, \text{ si } M = M^e)$$

où  $S_{1,2}$  est l'opérateur de  $L_0^2$  dans  $L_0^1$

$$(53) \quad \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{z_1 + i\xi_1^+(b_2, \xi_0'')} \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial p}{\partial \xi_1}}(x = 0; \xi_1^+, b_2, \xi_0'') f(-i b_2) db_2$$

calculé sur le contour  $\{b_2 = \xi_2 + i\varepsilon\gamma_2(\xi_2), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ ,  $\xi_1^+(\xi_2, \xi_0'')$  étant la racine de  $p(x_0' = 0, x_0'', \xi_1, \xi_2, \xi_0'') = 0$  située au dessus de  $\{\xi_1 + i\varepsilon\gamma_1(\xi_1); \xi_1 \in \mathbb{R}\}$ .

Notons  $L^{j,+} = \{f(z_j); f(e^{i\alpha}(z_j + i\nu_{0,j})) \in L_0\}$  où  $L_0$  est introduit au § IV.2 (53), et  $\text{Arg}(1 - i c_0 \varepsilon) = \alpha$ .

**Lemme 6.** *Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  l'opérateur  $S_{1,2}$  envoie  $L_0^2$  dans  $L^{1,+}$ .*

PREUVE. Il s'agit de vérifier  $\text{Im} \xi_1^+(\zeta_2, \xi_0'') > -c_0 \varepsilon \text{Re}(\xi_1^+(\zeta_2, \xi_0''))$  pour tout  $\zeta_2 = \xi_2 + i\varepsilon\gamma_2(\xi_2)$ ; Pour  $\xi_2 \notin [a_2^-(\rho_0) - 1, a_2^+(\rho_0) + 1]$  il suffit que  $\varepsilon$  soit assez petit, car dans ce cas il existe  $c_0, c_1 > 0$  tels que  $\text{Im} \xi_1^+ \geq c_0 + c_1 |\xi_2 - \nu_{0,2}|$ ; Pour  $\xi_2 \in [a_2^-(\rho_0) - 1, a_2^+(\rho_0) + 1]$ , cela résulte du fait que  $\eta' \mapsto (1 - i c_0 \varepsilon)^2 {}^t \eta' A_{(0, x_0'')} \eta' - R_0(\rho_0)$  est un polynôme elliptique.

◇

On notera  $\text{Id} - S$  l'opérateur (52) agissant sur  $L_0^1 \oplus L_0^2$  et  $\text{Id} - S^+$  le même opérateur agissant sur  $L^{1,+} \oplus L^{2,+}$ . Si  $f \in (L_0^1 \oplus L_0^2) \cap (L^{1,+} \oplus L^{2,+})$ , on a  $S(f) = S^+(f)$ . D'après le § IV.2,  $\text{Id} - S^+$  est inversible, car c'est exactement l'opérateur  $C^\sigma$  associé au polynôme elliptique  $(1 - i c_0 \varepsilon)^2 {}^t \eta' A_{(0, x_0'')} \eta' - R_0(\rho_0)$ . Si  $f \in L_0^1 \oplus L_0^2$  vérifie  $f - S f = 0$ , on a par le lemme 6  $f = S f \in L^{1,+} \oplus L^{2,+}$  d'où  $f - S^+(f) = 0$  donc  $f = 0$ . Si  $g \in L_0^1 \oplus L_0^2$  et si on pose  $f = g + S g + S^+(1 - S^+)^{-1} S^+ g$  alors comme  $S^+$  envoie  $L^{1,+} \oplus L^{2,+}$  dans  $L_0^1 \oplus L_0^2$  pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  pour  $\varepsilon_0$  assez petit (preuve analogue à celle du lemme 6), on a  $f \in L_0^1 \oplus L_0^2$  et  $(\text{Id} - S) f = g$ . Donc  $(\text{Id} - S)$  est inversible sur  $L_0^1 \oplus L_0^2$ , d'où (51), ce qui achève la preuve du théorème 3.



# VI. MICROHYPERBOLICITE

## VI.1. Théorème microhyperbolique

On se place ici dans le système de coordonnées  $(x', x'', \xi', \xi'')$ , dans lequel le symbole principal de l'opérateur  $P$  s'écrit (voir § I-1, (20))

$$(1) \quad p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu)A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'')$$

et on travaille près d'un point  $\rho_0 = (x'_0 = 0, x''_0 = 0, \xi''_0 \neq 0) \in \dot{T}^*L$  tel que  $R(x'_0 = 0, x''_0 = 0, \xi''_0) = 0$ ; on a donc  $\rho_0 \in S_g^2$ . Soit  $\Theta(x'', \xi'')$  une fonction analytique réelle définie près de  $\rho_0$ , vérifiant

$$(2) \quad \Theta(\rho_0) = 0 \quad \{R_0, \Theta\}(\rho_0) \neq 0$$

avec  $R_0(x'', \xi'') = R(x'_0 = 0, x'', \xi'')$ . Soit  $\tilde{\rho}_0 = (x_0 = 0, \xi'_0 = \nu(x_0, \xi''_0), \xi''_0)$  l'unique point de  $\dot{T}^*\bar{M} \cap p^{-1}(0)$  tel que  $\pi(\tilde{\rho}_0) = \rho_0$ .

L'objet de ce paragraphe est de prouver le :

**Théorème 4.** Soit  $u \in H_0^1(M)$  solution locale près de  $x_0 = 0$  de  $Pu = 0$ . On suppose qu'il existe un voisinage  $V$  de  $\tilde{\rho}_0$  tel que

$$(3) \quad \tilde{\rho} = (x', x'', \xi', \xi'') \in V \quad \text{et} \quad \Theta(x'', \xi'') < 0 \implies \pi(\tilde{\rho}) \notin SS_b(u).$$

Alors  $\rho_0 \notin SS_b(u)$ .

Pour prouver ce résultat, nous allons suivre la stratégie de déformation microhyperbolique pour les problèmes aux limites de Sjöstrand [S3].

**Lemme 1.** Il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $\tilde{\rho} = (x', x''_0, \xi', \xi''_0)$  avec  $0 < |x'| < r$ , on ait  $\tilde{\rho} \notin SS(\underline{u})$ .

**PREUVE.** On peut supposer  $(x', x''_0) \in \bar{M}$ . D'après le théorème 1, il suffit alors de vérifier  $\pi(\tilde{\rho}) \notin SS_b(u)$ . Comme  $SS_b(u) \subset \Sigma_b = \pi(p^{-1}(0))$  par le théorème 2, on peut supposer  $\pi(\tilde{\rho}) \in \Sigma_b$ . Il existe donc  $\tilde{\rho}' = (x', x''_0, \eta', \xi''_0)$ ,  $p(\tilde{\rho}') = 0$ ,  $\pi(\tilde{\rho}) = \pi(\tilde{\rho}')$ .

D'après (1), on a alors  $|\eta' - \nu(x', x''_0, \xi''_0)|^2 \leq \text{Cte} R(x', x''_0, \xi''_0)$ , donc si  $r$  est assez petit, on aura  $\tilde{\rho}' \in V$ . Sur tout rayon passant par  $\pi(\tilde{\rho}') = \pi(\tilde{\rho})$ , on a d'après I.3 (53)

$$(4) \quad (\Theta(x'', \xi''))'_{g,d}(\pi(\tilde{\rho})) = \{\Theta, R\}(x', x''_0, \xi''_0) + O(|x'|^{1/2})$$



donc d'après (2), tout rayon passant par  $\pi(\tilde{\rho})$  rentre dans  $\Theta < 0$ . Comme on a  $\pi(\tilde{\rho}) \in S^0 \cup S^1$ , puisque  $0 < |x'|$ , on peut appliquer le théorème de propagation des singularités pour le problème de Dirichlet sur les variétés à bords lisses de Sjöstrand, d'où  $\pi(\tilde{\rho}) \notin SS_b(u)$ . ◇

Rappelons que d'après la proposition 3 du § III.5, il existe  $\underline{r} = (r_1, r_2)$ ,  $\delta > 0$ ,  $W$  voisinage de  $-i\xi_0''$ , et pour tout  $C_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  tel que

$$(5) \quad F = T(\psi \underline{u}) \in \mathcal{B}_0^2(W; \underline{r}, \delta)$$

$$(6) \quad \lambda^2 P_{C_0}^\# F = T(\psi g \delta) + m, \quad e^{\varepsilon_0 \lambda} m \in \mathcal{B}_0^0(W; \underline{r}, \delta)$$

$$(7) \quad \lambda \Pi(\text{Tr}_j^\pm \mathcal{N}_{j, C_0}^\# F) = (T_j \otimes T_{\parallel})(\psi g_j|_{x.=0}) + m_j, \quad e^{\varepsilon_0 \lambda} m_j \in H_0^0(W; r_j)$$

où  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \equiv 1$  pour  $|x| \leq \frac{r_0}{2}$ ,  $(r_1, r_2) \ll r_0$ .

On posera à nouveau  $G_1(z_1, z'', \lambda) = (T_1 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_2=0} g_1)$ ,  $G_2(z_2, z'', \lambda) = (T_2 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_1=0} g_2)$ ,  $G = \mp(G_1 + G_2)$  ( $-$  si  $M = M^i$ ,  $+$  si  $M = M^e$ ).

Comme d'habitude, on commence par convexifier la fonction  $\Theta$  en posant

$$(8) \quad \Theta_0(x'', \xi'') = \Theta(x'', \xi'') + |x'' - x_0''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2.$$

Alors  $\Theta_0$  vérifie toujours (2). La transformation F.B.I.  $T_{\parallel}$  est associée à la transformation canonique complexe  $(x'', \xi'') \mapsto (z'' = x'' - i\xi'', \zeta'' = -ix'')$  qui envoie  $T^*\mathbb{R}^{n-2}$  sur  $\Lambda_{\varphi''} = (z'', \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''}{\partial z''})$ ,  $\varphi'' = \frac{1}{2}(\text{Re } z'')^2$ . Posons

$$(9) \quad \Theta_1(z'', \zeta'') = \Theta_0(i\zeta'', \zeta'' + iz'')$$

$$(10) \quad \Lambda_t = \exp it H_{\Theta_1}(\Lambda_{\varphi''}).$$

Alors pour  $|t|$  petit  $\Lambda_t$ , qui est l'image par la transformation canonique complexe  $\exp it H_{\Theta_1}$  de  $\Lambda_{\varphi''}$ , est  $I$ -Lagrangienne,  $\mathbb{R}$ -symplectique et la projection  $\Lambda_t \ni (z'', \zeta'') \rightarrow z''$  reste de rang maximal. Il existe donc une fonction  $g(t, z'')$  définie près de  $z_0'' = -i\xi_0''$ , strictement pluri-sous-harmonique en  $z''$  telle que

$$(11) \quad \Lambda_t = \left\{ \left( z'', \frac{2}{i} \frac{\partial g}{\partial z''} \right) \right\}.$$

On peut prendre pour  $g$  la solution des équations d'Hamilton-Jacobi

$$(12) \quad \frac{2}{i} \frac{\partial g}{\partial t} + i \Theta_1 \left( z'', \frac{2}{i} \frac{\partial g}{\partial z''} \right) = 0, \quad g(0, z'') = \varphi''(z''),$$

de sorte qu'on a

$$(13) \quad g(t, z'') = \varphi''(z'') + t \Theta_0(x'', \xi'') + O(t^2), \quad z'' = x'' - i\xi''.$$

On posera

$$(14) \quad \varphi''(t, z'') = g(t, z'') - g(t, z_0'').$$

On a alors

$$(15) \quad \begin{cases} \Lambda_t = \left( z'', \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''(t)}{\partial z''} \right) \\ \varphi''(t, z_0'') \equiv 0; \quad \varphi''(0, z'') \equiv \varphi''(z'') = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} z'')^2 \\ |d\varphi''(t) - d\varphi''| \in O(|t|). \end{cases}$$

Dans la suite, on supposera  $t \in [0, t_0]$ ,  $t_0 > 0$  petit.

**Lemme 2.** Soit  $\kappa_0 > 0$  petit. Il existe  $t_0 > 0$ ,  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  et pour tout  $t \in ]0, t_0]$   $\lambda(t) > 0$  tels que

$$(16) \quad |p^\#(x' - i\xi', z''; ix', \zeta'', \lambda)| \geq \kappa_1 |\xi'|^2 + \kappa_2 t$$

pour  $(x', \xi') \in T^*\mathbb{R}^2$ ,  $|x'| \leq \kappa_0$ ,  $(z'', \zeta'') \in \Lambda_t$ ,  $|z'' + i\xi_0''| \leq \kappa_0$  et  $\lambda \geq \lambda(t)$ .

PREUVE. Reprenons les notations du § IV.3 (103), (104) et évaluons  ${}^t(iz' - \mu)A_{i\zeta}(iz' - \mu) - r$  aux points  $(z, \zeta) = (z', z'', \zeta', \zeta'')$ ,  $z' = x' - i\xi'$ ,  $\zeta' = -ix'$ ,  $(x', \xi') \in T^*\mathbb{R}^2$ ,  $|x'| \leq \kappa_0$ ,  $(z'', \zeta'') \in \Lambda_t$ ,  $|z'' + i\xi_0''| \leq \kappa_0$ . On a  $z'' = x'' - i\xi''$ ,  $\zeta'' = -ix''$  avec  $(x'', \xi'') = (y'', \eta'') + it\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \xi''}(y'', \eta''), -\frac{\partial \Theta_0}{\partial y''}(y'', \eta'')\right) + O(|t|^2)$  avec  $(y'', \eta'')$  réel et  $|y''|^2 + |\eta'' - \xi_0''|^2 \leq \text{Cte} \kappa_0^2$ . On a alors avec  $A_{i\zeta} = A_1 + iA_2$ ,  $\nu = \mu + \zeta'$ ,  $|\operatorname{Re} r| + \|A_1 - A_0\| \leq \frac{1}{a}(\kappa_0 + t)$ ,  $\|A_2\| + |\operatorname{Im} \nu| \leq \frac{t}{a}$ , et d'après (2)  $|\operatorname{Im} r| \geq ta$ , où  $a > 0$  ne dépend que de la géométrie et de la fonction  $\Theta$ . On peut alors appliquer la proposition 3 du § IV.2, en particulier (75) et (77) pourvu que  $\kappa_0$  soit assez petit. (On remarquera que cette proposition, écrite pour  $\operatorname{Im} z = t \in ]0, t_0]$  s'applique également à  $\operatorname{Im} z = -t$ ,  $t \in ]0, t_0]$  par conjugaison complexe, de sorte que le signe du crochet de Poisson  $\{R_0, \Theta\}(\rho_0)$  est indifférent.)

◇

**Définition 1.** Soit  $x' = (x_1, x_2)$  voisin de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x'', \xi'')$  voisin de  $(x_0'', \xi_0'')$  dans  $T^*\mathbb{R}^{n-2}$ ,  $t \in [0, t_0]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

On écrira  $u \in \mathcal{J}^{t,c}(x', x'', \xi'')$  ssi

- i) Il existe  $V$  voisinage de  $z'' = x'' - i\xi''$  dans  $\mathbb{C}^{n-2}$ ,  $U$  voisinage de  $x'$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et pour tout  $\xi' \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega$  voisinage de  $\xi'$  tels que  $F(z', z'', \lambda) = T(\psi \underline{u})$  appartienne à l'espace de Sjöstrand  $H_\varphi((U - i\omega) \times V)$  où  $\varphi$  est la fonction poids  $\varphi(z) = \varphi''(t, z'') + \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z')^2 + c$ .
- ii) Si de plus  $x = (x', x'') \in \Delta \setminus L$ , par exemple  $x \in \Delta_1$ , i.e.  $x' = (x_1, 0)$ ,  $x_1 > 0$ , il existe  $V$  voisinage de  $z'' = x'' - i\xi''$  dans  $\mathbb{C}^{n-2}$  et  $r > 0$  tels que  $G_1(z_1, z'', \lambda) = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi|_{x_2=0} g_1)$  appartient à l'espace  $H_{\underline{\varphi}}^0(V, \mathcal{C}_r^\gamma)$  (voir § III.3, Définition 2) où  $\underline{\varphi} = (\frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_1)^2, \varphi''(t, z'') + c)$  et  $\gamma$  est le contour  $\operatorname{Re} z_1 = \gamma(\operatorname{Im} z_1) = x_1$ .
- iii) Si de plus  $x \in L$ , i.e.  $x' = (0, 0)$ , il existe  $V$  voisinage de  $z'' = x'' - i\xi''$  dans  $\mathbb{C}^{n-2}$  et  $r > 0$  tels que  $G_1 = (T_1 \otimes T_\parallel)(\psi|_{x_2=0} g_1) \in H_{\underline{\varphi}_1}^0(V, \mathcal{C}_r^{\gamma_1})$  et

$G_2 = (T_2 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_1=0} g_2) \in H_{\varphi_2}^0(V, \mathcal{C}\gamma^2)$ , où  $\varphi_j = (\frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_j)^2, \varphi''(t, z'') + c)$  et  $\gamma_j$  les contours  $\operatorname{Re} z_j = \gamma_j(\operatorname{Im} z_j) \equiv 0$ , pour  $j = 1, 2$ .

◇

On remarquera que  $u \in \mathcal{J}^{t,c}(x', x'', \xi'')$  implique  $u \in \mathcal{J}^{t,c}(y', y'', \eta'')$  pour  $(y', y'', \eta'')$  proche de  $(x', x'', \xi'')$ .

On a toujours  $u \in \mathcal{J}^{0,0}(x', x'', \xi'')$ , et d'après le théorème 1, le théorème 4 sera conséquence de

$$(17) \quad \exists t > 0, \quad c < 0 \quad \text{tels que} \quad u \in \mathcal{J}^{t,c}(0, x_0'', \xi_0'')$$

puisque  $\varphi''(t, z_0'') = \varphi''(z_0'') = 0$ .

**Lemme 3.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- i)  $\forall \xi' \in \mathbb{R}^2 \quad (x', x'', \xi', \xi'') \notin SS(\psi_{\underline{u}})$
- ii)  $\exists c < 0$  tel que  $u \in \mathcal{J}^{0,c}(x', x'', \xi'')$ .

**PREUVE.** Comme on peut supposer  $\psi \equiv 1$  près de  $(x', x'')$  et que  $\varphi''(0, z'') = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z'')^2$ , on a ii)  $\Rightarrow$  i). Réciproquement lorsque  $x \in L$ , i.e.  $x' = 0$ , i)  $\Rightarrow$  ii) est prouvé au § IV.4 (voir en particulier (141)). Supposons à présent  $x \in \Delta \setminus L$ ; on peut se restreindre au cas  $x' = (x_1, 0)$ ,  $x_1 > 0$  petit. Il s'agit de vérifier que pour  $B$  assez grand, on a avec un  $c > 0$

$$(18) \quad \|G_1(a - ib, w'', \lambda)\|_{L^2 \cap L^\infty(|b| \geq B)} \leq e^{\frac{\lambda}{2}[a^2 + (\operatorname{Re} w'')^2 - c]}$$

pour  $(a, w'')$  proche de  $(x_1, x'' - i\xi'')$  car (18),  $G_2 \in H_0^0(W, r_2)$ , et l'ellipticité de l'équation (6) pour  $|\xi'|$  grand entraînera le point i) de la définition; pour cela nous réutilisons la stratégie du § IV.4, en particulier l'ellipticité de  $p^\sharp(z, \zeta, \lambda)$  pour  $|z'|$  grand (voir (138) loc.cit). On a d'après (140) loc.cit  $e^{\varepsilon\lambda}[F - \lambda^{-2}\operatorname{Op}(q, C_1, C_2)G] \in \tilde{\mathcal{B}}_0^2$  ainsi que  $\lambda\Pi(\operatorname{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1, C_0}^\sharp F) = G_1 + m_1$ ,  $e^{\varepsilon_0\lambda} m_1 \in H_0^0(W; r_1)$  et on peut supposer  $x_1 \ll r_1$ ,  $z'' \in W' \subset W$ .

Soit alors  $V$  un petit voisinage de  $z''$ ,  $\gamma$  le contour  $\operatorname{Re} z_1 = x_1$  et  $r > 0$  petit devant  $x_1$ , et notons ici  $\tilde{H}$  l'espace analogue à  $H_{\varphi}^0(V, \mathcal{C}\gamma)$  formé des fonctions définies pour  $|\operatorname{Im} z_1|$  assez grand. Comme on a  $\operatorname{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1, C_0}^\sharp F \in H_0^0$  (voir § III.5) en utilisant la formule de Cauchy sur l'intégrale définissant le projecteur de Hilbert (voir § III.4) on a  $e^{\varepsilon\lambda}(\Pi(\operatorname{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1, C_0}^\sharp F) - \operatorname{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1, C_0}^\sharp F) \in \tilde{H}$  donc

$$(19) \quad \lambda^{-1} \operatorname{Tr}_1^\pm \mathcal{N}_{1, C_0}^\sharp \operatorname{Op}(q, C_1, C_2)G = G_1 + m, \quad e^{\varepsilon\lambda} m \in \tilde{H}.$$

Dans (19) la contribution de  $G_2 \in H_0^0(W; r_2)$  est négligeable dans  $\tilde{H}$  car  $x_1 > 0$ , et en utilisant le calcul du § IV.3, on obtient que (19) entraîne

$$(20) \quad \sum_{\substack{|\alpha| \leq \frac{\lambda}{c_1} \\ \ell \leq \frac{\lambda}{c_2}}} (i\lambda)^{-\ell} M_{\ell, \alpha}^{1,1}(w_1, z'', \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha G_1(w_1, z'', \lambda) = m, \quad e^{\varepsilon\lambda} m \in \tilde{H}$$

où les  $M_{\ell, \alpha}^{1,1}$  sont introduits au § IV.3 (112),  $|\operatorname{Im} w_1|$  étant assez grand pour que ceux-ci soient bien définis et vérifient les estimations du § IV.3 (113) pour  $|\operatorname{Im} w_1|$  grand. Comme  $M_{0,0}^{1,1} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda(1+|w_1|)}\right)$ , (20) est une équation elliptique, de sorte que (18) s'obtient comme la proposition 1 du § III.3. On remarquera que cet argument ne fait que préciser le fait que  $SS_b(u)$  ne rencontre pas la région elliptique, par l'estimation de décroissance  $L^2$  (18) ce qui utilise l'estimation a priori  $u \in H_0^1$ . Enfin si  $x \notin \Delta$  i)  $\Rightarrow$  ii) est conséquence de (6) comme précédemment en inversant  $p^\#$  pour  $|z'|$  grand, le second membre de (6) étant ici négligeable.

◇

Soient  $0 < \beta_1 < \beta_2$  petits; d'après les lemmes 1 et 3, il existe  $\alpha_2 > 0$  et  $c_1 < 0$  tels que, avec  $\|x'\| = \sup(|x_1|, |x_2|)$ , on ait

$$(21) \quad u \in \mathcal{J}^{0, c_1}(x', x'', \xi'') \quad \text{pour} \quad 0 < \beta_1 \leq \|x'\| \leq \beta_2, \quad |x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \leq \alpha_2^2.$$

On se donne aussi un  $\alpha_1 \in ]0, \alpha_2[$  et on note

$$(22) \quad K_0 = \left\{ (x', x'', \xi'') ; \|x'\| \leq \beta_2, \quad |x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \leq \alpha_2^2 \right\}$$

$$(23) \quad K_1 = \left\{ (x', x'', \xi'') \in K_0, \|x'\| \geq \beta_1 \quad \text{ou} \quad |x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \geq \alpha_1^2 \right\}.$$

On écrira  $u \in \mathcal{J}^{t, c}(K_j)$  ssi  $u \in \mathcal{J}^{t, c}(x', x'', \xi'')$  en tout point de  $K_j$ . On remarquera qu'on a

$$(24) \quad u \in \mathcal{J}^{0, 0}(K_0).$$

**Lemme 4.** *Il existe  $t_0 > 0$  et pour tout  $t \in ]0, t_0]$  un  $c < 0$  tel que*

$$(25) \quad u \in \mathcal{J}^{t, c}(K_1).$$

PREUVE. On a  $\varphi''(t, x'' - i\xi'') = \frac{1}{2}(x'')^2 + \frac{t}{2}[\Theta(x'', \xi'') + x''^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2] + O(|t|^2)$  donc pour  $\|x'\| \geq \beta_1$  cela résulte de (21). Pour  $|x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \geq \alpha_1^2$  on a  $\varphi''(t, x'' - i\xi'') - \frac{1}{2}(x'')^2 \geq \frac{t}{2}[\Theta(x'', \xi'') + \alpha_1^2 - O(|t|)]$  d'où le résultat par (24) si  $\Theta(x'', \xi'') \geq \frac{-\alpha_1^2}{2}$ . Enfin par l'hypothèse du théorème 4, il existe  $c_2 < 0$  tel que  $(x', x'', \xi'') \in K_0$  et  $\Theta(x'', \xi'') \leq \frac{-\alpha_1^2}{2}$  entraîne  $u \in \mathcal{J}^{0, c_2}(x', x'', \xi'')$  : en effet, par un argument de compacité, il suffit de vérifier pour un tel  $(x', x'', \xi'')$  l'existence d'un  $c < 0$  tel que  $u \in \mathcal{J}^{0, c}(x', x'', \xi'')$ ; par le lemme 3 on peut alors supposer  $x = (x', x'', \xi'') \in \overline{M}$  et l'hypothèse i) du lemme 3 est satisfaite puisque  $SS_b(u) = \pi(SS(\overline{u}) \setminus T_\Delta^*)$  et  $SS_b(u) \subset \Sigma_b$ .

◇

Le lemme de globalisation des estimations suivant permettra la déformation du système de Calderón. On se donne  $\beta \in ]\beta_1, \beta_2[$  et  $\alpha \in ]\alpha_1, \alpha_2[$  et on pose

$$(26) \quad W_\alpha = \left\{ z'' = x'' - i\xi'', \quad |x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \leq \alpha^2 \right\}.$$

**Lemme 5.** *Il existe  $\delta > 0$ ,  $c_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$  tels que pour tout  $t \in [0, t_0]$  et tout  $c \in [-c_0, c_0]$ , si  $u \in \mathcal{J}^{t,c}(K_0)$  on a*

$$(27) \quad G_j \in H_{\underline{\varphi}_j}^0(W_\alpha, \mathcal{C}_j)$$

$$(28) \quad F \in H_{\underline{\varphi}}^2(W_\alpha, \mathcal{C}) + \mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{(0,0),(-2,-2)}(W_\alpha, \mathcal{C}, \delta)$$

avec  $\underline{\varphi} = (\frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_1)^2, \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_2)^2, \varphi''(t, z'') + c)$ ,  $\underline{\varphi}_j = (\frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_j)^2, \varphi''(t, z'') + c)$ ,  $\gamma_j(\operatorname{Im} z_j) \equiv 0$ ,  $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_{\beta_j}^{\gamma_j}$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\beta}^{\gamma_1, \gamma_2}$ .

(Voir § III.3 pour la définition de ces espaces).

PREUVE. Supposons d'abord que (27) est prouvé avec un  $\alpha' > \alpha$  et un  $\beta' > \beta$ ; d'après le point i) de la définition 1,  $F(z', z'', \lambda) \in H_{\underline{\varphi}}(\Omega)$  avec  $\varphi(z) = \varphi''(t, z'') + \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z')^2 + c$  et  $\Omega = \{z' = x' - i\xi', z'' = x'' - i\xi'', \|x'\| \leq \beta_2, |\xi'| \leq B, |x''|^2 + |\xi'' - \xi_0''|^2 \leq \alpha_2^2\}$  pour tout  $B > 0$  fixé. Reprenant les notations du § IV.4, il suffit donc de vérifier  $F \in \tilde{H}_{\underline{\varphi}}^2(W_\alpha, \mathcal{C}) + \mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{(0,0),(-2,-2)}(W_\alpha, \mathcal{C}, \delta)$ . Or d'après le § IV.4 (140)  $e^{\varepsilon\lambda}[F - \lambda^{-2} \operatorname{Op}(q, C_1, C_2)G] \in \tilde{\mathcal{B}}_0^2$ , où  $\varepsilon > 0$  dépend de  $C_1, C_2$  assez grands. Or si  $G_j \in H_{\underline{\varphi}_j}^0(W_{\alpha'}, \mathcal{C}_{\beta_j}^{\gamma_j})$ , on a pour  $C_1, C_2$  assez grands  $\operatorname{Op}(q, C_1, C_2)G \in \tilde{H}_{\underline{\varphi}}^2(W_\alpha, \mathcal{C}) + \mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{(0,0),(-2,-2)}(W_\alpha, \mathcal{C}, \delta)$  d'après les résultats du § III.3 car  $\alpha' > \alpha$  et  $\beta' > \beta$ , et il suffit de choisir  $t_0$  et  $c_0$  assez petits pour avoir (28).

Vérifions à présent (27). D'après les points ii) et iii) de la définition 1, il existe  $r > 0$ ,  $A, B, \lambda_0$  tels que avec

$$h(x_1, z'', \lambda) = \|G_1(x_1 - i\xi_1, z'', \lambda)\|_{L^2(\xi_1) \cap L^\infty(\xi_1)} e^{-\lambda[\frac{x_1^2}{2} + \varphi''(t, z'') + c]},$$

on ait

$$(29) \quad \sup \left\{ h(x_1, z'', \lambda); z'' \in W_{\alpha_2}, x_1 \in [-r, \beta_2] \right\} \leq A\lambda^B.$$

Or  $G_1 = (T_1 \otimes T_{\parallel})(\psi|_{x_2=0}g_1)$  et  $g_1$  est à support dans  $x_1 \geq 0$ , donc d'après le § III.4, on a  $\Pi(G_1) = G_1$ , donc (29) reste valable pour tout  $r > 0$ , d'où (27).  $\diamond$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on posera

$$(30) \quad H_{t,c}^0(\alpha, \beta) = H_{\underline{\varphi}_j}^0(W_\alpha, \mathcal{C}_j)$$

$$(31) \quad \mathcal{B}_{t,c}^j(\alpha, \beta) = H_{\underline{\varphi}}^j(W_\alpha, \mathcal{C}) + \mathcal{R}H_{\underline{\varphi}}^{(0,0),(-j,-j)}(W_\alpha, \mathcal{C}, \delta) \quad j = 0, 1, 2$$

pour  $\alpha \in ]\alpha_1, \alpha_2[$ ,  $\beta \in ]\beta_1, \beta_2[$ , les notations étant celles du lemme 5.

Si  $E$  est un quelconque des espaces précédents, on notera aussi  ${}^a E$  l'espace analytique correspondant, c'est-à-dire

$$(32) \quad {}^a E = \{v; \forall \varepsilon > 0, e^{-\varepsilon\lambda} v \in E\}.$$

On remarquera que d'après le preuve du lemme 5, pour  $t \in [0, t_0]$ ,  $c \in [-c_0, c_0]$ , si  $u \in {}^a\mathcal{J}^{t,c}(K_0)$ , on a  $G_j \in {}^aH_{t,c}^0(\alpha, \beta)$  et  $F \in {}^a\mathcal{B}_{t,c}^2(\alpha, \beta)$ .

Rappelons (voir le § III.1.16) que  $p_C^\#$  est l'opérateur différentiel

$$(33) \quad p_C^\# = \sum_{|\alpha| \leq \frac{1}{\delta}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p^\#(z, 0, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha.$$

Pour  $\zeta_0'' \in \mathbf{C}^{n-2}$ , près de 0, on posera

$$(34) \quad p_{C, \zeta_0''}^\# = \sum_{|\alpha| \leq \frac{1}{\delta}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha p^\#(z; \zeta' = 0, \zeta_0'' = \zeta_0'', \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_{z'} \right)^{\alpha'} \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_{z''} - \zeta_0'' \right)^{\alpha''},$$

$$\alpha = (\alpha', \alpha'').$$

On définit de même les opérateurs  $\mathcal{N}_{j, C, \zeta_0''}^\#$ .

Les fonctions  $p^\#(z, \zeta, \lambda)$  et  $\mathcal{N}_j^\#(z, \zeta, \lambda)$  vérifient des estimations

$$(35) \quad |p^\#(z, \zeta, \lambda)| \leq \text{Cte}(1 + |z'|)^2 \quad |\mathcal{N}_j^\#(z, \zeta, \lambda)| \leq \text{Cte}(1 + |z'|)$$

pour  $z \in \Omega(\underline{r}, \delta) \times W$ ,  $\|\zeta\| \leq D_0$  (voir le § III) et on peut supposer les constantes de localisation  $\beta_2$  et  $\alpha_2$  petites devant  $\underline{r}$  et  $W$ . En particulier on aura

$$(36) \quad \sup \left\{ \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''(z'')}{\partial z''} - \zeta_0'' \right\|, z'' = x'' - i\xi'', |x''|^2 + |\xi'' - \zeta_0''|^2 \leq \alpha_2^2 \right\} \leq \frac{D_0}{4}$$

pour  $\|\zeta_0''\| \leq \frac{D_0}{8}$ . Soient  $\alpha \in ]\alpha_1, \alpha_2[$ ,  $\beta \in ]\beta_1, \beta_2[$ .

**Lemme 6.** *Il existe  $c_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$  tels que pour  $t \in [0, t_0]$ ,  $c \in [-c_0, c_0]$ ,  $\|\zeta_0''\| \leq \frac{D_0}{8}$ , si  $u \in {}^a\mathcal{J}^{t,c}(K_0)$  pour tout  $C \geq C_0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$(37) \quad p_{C, \zeta_0''}^\# F \in {}^a\mathcal{B}_{t,c}^0(\alpha, \beta), \quad \mathcal{N}_{j, C, \zeta_0''}^\# \in {}^a\mathcal{B}_{t,c}^1(\alpha, \beta)$$

$$(38) \quad e^{\varepsilon\lambda} (p_{C, \zeta_0''}^\# - p_C^\#) F \in \mathcal{B}_{t,c}^0(\alpha, \beta), \quad e^{\varepsilon\lambda} (\mathcal{N}_{j, C, \zeta_0''}^\# - \mathcal{N}_{j, C}^\#) F \in \mathcal{B}_{t,c}^1(\alpha, \beta).$$

**PREUVE.** Soient  $\alpha' \in ]\alpha, \alpha_2[$ ,  $\beta' \in ]\beta, \beta_2[$ . D'après le lemme 5, on a  $F \in {}^a\mathcal{B}_{t,c}^2(\alpha', \beta')$ . On a aussi

$$(39) \quad \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_{z''} - \zeta_0'' \right)^{\alpha''} = e^{i\lambda z'' \cdot \zeta_0''} \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_{z''} \right)^{\alpha''} e^{-i\lambda z'' \cdot \zeta_0''}$$

de sorte que (37) peut être interprété comme un résultat d'opérance de  $p^\#(z, \zeta', \zeta_0'' + \zeta'', \lambda)$

sur l'espace analogue de  ${}^a\mathcal{B}_{t,c}^2(\alpha, \beta)$  où le poids  $\varphi''(t, z'') + c$  est remplacé par  $\varphi''(t, z'') + c + \text{Im}(z'' \cdot \zeta_0'')$ , ce qui est prouvé au § III.3 (puisque pour  $t_0, c_0$  petit, d'après (36), les inégalités du § III.3 (46), (47) seront satisfaites).

Avec  $\zeta_0 = (0, \zeta_0'')$ , soit

$$(40) \quad k(z, \alpha_1, C, \lambda) = \sum_{|\alpha_1 + \alpha_2''| > \frac{\delta}{2}} \frac{1}{\alpha_1!} \frac{1}{\alpha_2''!} \partial_{\zeta}^{\alpha_1 + \alpha_2''} p^{\#}(z, \zeta_0, \lambda) (-\zeta_0'')^{\alpha_2''}.$$

On a

$$(41) \quad p_C^{\#} - p_{C, \zeta_0''}^{\#} = \sum_{|\alpha_1| \leq \frac{\delta}{2}} k(z, \alpha_1, C, \lambda) \left( \frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^{\alpha_1}$$

et pour un  $\varepsilon_0 > 0$

$$(42) \quad |k(z, \alpha_1, C, \lambda)| \leq \text{Cte} \left( \frac{1}{D_0} \right)^{|\alpha_1|} e^{-\varepsilon_0 \left[ \frac{\delta}{2} - |\alpha_1| \right]}$$

et (38) résulte donc du fait que la constante  $D$  qui intervient dans le § III.3 (49) sera inférieure à  $\frac{D_0}{3}$  pour  $t_0$  petit d'après (36). ◇

Soit alors  $C_0$  la constante fournie par le lemme 6, et  $\varepsilon_0$  la constante  $\varepsilon$  pour  $C = C_0$ , on peut supposer que le même  $\varepsilon_0$  décrit les restes dans (6) et (7); soient  $c_0 > 0$ ,  $t_0 > 0$  compatibles avec les lemmes 2, 4, 5, 6, avec de plus

$$(43) \quad t_0, \quad c_0 \ll \varepsilon_0.$$

Choisissons  $t \in ]0, t_0]$  petit tel que

$$(44) \quad u \in \mathcal{J}^{t, c_0}(K_0)$$

ce qui est possible d'après (24). Soit

$$(45) \quad I = \left\{ c \in [-c_0, c_0]; u \in {}^a\mathcal{J}^{t, c}(K_0) \right\}.$$

D'après le lemme 4, pour un  $c_1 < 0$ , on a  $u \in \mathcal{J}^{t, c_1}(K_1)$  il en résulte que si on a  $]c, c_0] \subset I$  pour un  $c \geq c_1$  alors  $c \in I$  (en effet si  $u \in {}^a\mathcal{J}^{t, c+\varepsilon}(K_0)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $G_j \in {}^aH_{t,c}^0(\alpha, \beta)$  et  $F \in {}^a\mathcal{B}_{t,c}^2(\alpha, \beta)$  d'après la preuve du lemme 5, donc  $u \in {}^a\mathcal{J}^{t, c}$  en tout point de  $K_0 \setminus K_1$ ). Donc

$$(46) \quad I \cap [c_1, \infty[ = [c_2, c_0]$$

et (17), donc le théorème 4 sera conséquence de

$$(47) \quad \text{soit } c \in I, \quad c \geq 0, \text{ alors } c - \varepsilon \in I \text{ pour un } \varepsilon > 0.$$

Comme on a  $c \geq 0$ , il suffit de vérifier  $u \in \mathcal{J}^{t,c-\varepsilon}(K_2)$ ,  $K_2 = \overline{K_0 - K_1}$ . On a  $G_j \in {}^a H_{t,c}^0(\alpha, \beta)$ ,  $F \in {}^a \mathcal{B}_{t,c}^2(\alpha, \beta)$  et

$$(48) \quad \begin{cases} \lambda^2 P_{C_0}^\# F = G + m \\ \lambda \Pi(\text{Tr}_j^\pm \mathcal{N}_{j,C_0}^\# F) = G_j + m_j \end{cases}$$

avec

$$(49) \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } e^{\varepsilon \lambda} m \in \mathcal{B}_{t,c}^0(\alpha, \beta), \quad e^{\varepsilon \lambda} m_j \in H_{t,c}^0(\alpha, \beta)$$

car  $t \ll \varepsilon_0$  et  $c_0 \ll \varepsilon_0$ . Donnons nous  $(x', x'', \xi'') \in K_2$  et soit  $z'' = x'' - i\xi''$ ,  $\zeta_0'' = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''(t, z'')}{\partial z''}$ . D'après le lemme 6, (48) implique

$$(50) \quad \lambda^2 P_{C_0, \zeta_0''}^\# F = G + m$$

$$(51) \quad \lambda \Pi(\text{Tr}_j^\pm \mathcal{N}_{j, C_0, \zeta_0''}^\# F) = G_j + m_j$$

où les restes vérifient (49).

Supposons d'abord que  $x = (x', x'') \notin \Delta$ , et pour  $\xi' \in \mathbb{R}^2$ , soit  $\Omega$  un petit voisinage de  $(z' = x' - i\xi', z'' = x'' - i\xi'')$  dans  $\mathbb{C}^n$ ,  $\varphi(z) = \varphi''(t, z'') + \frac{1}{2}(\text{Re } z')^2 + c$ . Alors on a  $G + m \in H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega)$  pour un  $\varepsilon > 0$  (c'est clair si  $x_1 x_2 \neq 0$ , et aussi dans le cas extérieur  $M = M^e$  si  $x' = (x_1, 0)$ ,  $x_1 < 0$  car  $\Pi(G_1) = G_1$ ). D'après le lemme 2, l'équation (50) est elliptique dans l'espace de Sjöstrand  $H_\varphi(\Omega)$  donc

$$(52) \quad F \in H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega).$$

Si  $x' = 0$ , alors  $u \in \mathcal{J}^{t,c-\varepsilon}(0, x'', \xi'')$  est conséquence du lemme 2, la preuve du théorème 2, § IV.3 s'appliquant, en utilisant la proposition 3 du § IV.2 pour l'inversion du symbole principal.

Enfin dans le cas  $x' = (x_1, 0)$ ,  $x_1 > 0$ , toujours d'après le lemme 2, le problème au limite (50), (51) (avec bord  $x_2 = 0$ ) est elliptique près de  $x' = (x_1, 0)$ ,  $z'' = x'' - i\xi''$ ,  $\zeta_0'' = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi''}{\partial z''}(t, z'')$ , globalement en  $\xi_1 \in \mathbb{R}$ , de sorte qu'en recopiant la preuve du lemme 3, on obtient aussi  $u \in \mathcal{J}^{t,c-\varepsilon}(x', x'', \xi'')$  dans ce cas.

On a donc  $G_j \in H_{t,c-\varepsilon}^0(\alpha, \beta)$  d'après l'étude des cas  $x' \in L$  ou  $x' \in \Delta \setminus L$  et le lemme 4, d'où en utilisant (52) (pour contrôler les  $|\xi'|$  bornés) et la preuve du lemme 5 (pour contrôler les  $|\xi'|$  grands),  $u \in \mathcal{J}^{t,c-\varepsilon}(K_2)$  pour un  $\varepsilon > 0$ , ce qui achève la preuve du théorème 4.

## VI.2. Estimation près de $S_g^2$

On se place toujours ici dans le système de coordonnées  $(x', x'')$  qui redresse le dièdre  $\Delta$ . Rappelons que dans le paragraphe I.3 pour  $\rho \in \Sigma_b \simeq Z$ ,  $r \geq 0$ , on a défini la boule  $B(\rho, r)$  par

$$(53) \quad B(\rho, r) = \left\{ \rho' \in \Sigma_b, \text{dist}(\rho', \rho) \leq r \right\}$$



avec  $\text{dist}(\rho', \rho) = \|\rho - \rho'\|$  où pour  $\rho = (x, \xi'', v_1, v_2) \in {}^bT^*M$  on a posé  $\|\rho\| = \max(|x'|, |x''|, |\xi''|, |v_1|, |v_2|)$ .

L'objet de ce paragraphe est de prouver la :

**Proposition 1.** *Soit  $K$  un compact de  $S_g^2$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\rho_0 \in K$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  et  $|s| \leq \delta_0 \varepsilon$  on ait, pour  $u \in H_0^1(M)$  vérifiant  $Pu = 0$*

$$(54) \quad B(\rho_0, \varepsilon^2) \cap SS_b(u) = \phi \implies \exp s H_g(\rho_0) \notin SS_b(u).$$

PREUVE. On supposera  $K = \{\rho_0\}$ , l'uniformité des constantes  $\varepsilon_0, \delta_0$  résultant de la preuve. On remarquera que modifier la métrique sur  ${}^bT^*M$  qui définit les boules  $B(\rho_0, r)$  n'a pour effet que de modifier les constantes  $\delta_0, \varepsilon_0$ . Soit  $(y, \eta)$  un système de coordonnées symplectiques sur  $T^*L$  près de  $\rho_0$  tel que  $R_0 = -\eta_1$  et  $\rho_0 = (y = 0, \eta = 0)$ . Pour  $t \geq 0$ ,  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  petit,  $a > 0$  petit posons

$$(55) \quad \Theta_{\varepsilon, t}(x'', \xi'') = y_1 + \frac{t}{a^2 \varepsilon^4} (y'^2 + \eta^2) - t, \quad y = (y_1, y')$$

$$(56) \quad K_{t, \varepsilon} = \left\{ \rho = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in \Sigma_b \simeq Z \subset {}^bT^*M, |x'| \leq a\varepsilon^2, \right. \\ \left. \Theta_{\varepsilon, t}(x'', \xi'') \leq 0, y_1(x'', \xi'') \geq -a\varepsilon^2, (y'^2 + \eta^2)(x'', \xi'') \leq a^2 \varepsilon^4 \right\}.$$

Les ensembles  $K_{t, \varepsilon}$  sont croissants en  $t$ .

Soit

$$(57) \quad I = \{t \geq 0, K_{t, \varepsilon} \cap SS_b(u) = \phi\}.$$

Si  $a$  est assez petit, on a  $K_{a\varepsilon^2, \varepsilon} \subset B(\rho_0, \varepsilon^2)$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  car si  $\rho = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in \Sigma_b \simeq Z$ ,  $\rho = \tilde{\pi}(x, \xi)$  et  ${}^t(\xi' - \nu)A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'') = 0$ , donc  $\xi'$  est borné et  $|x'| \leq a\varepsilon^2$  implique  $|v_j| = |x_j \xi_j| \leq \text{Cte} a\varepsilon^2$ . Désignons par  $M$  une constante géométrique telle que pour  $\rho = \tilde{\pi}(x, \xi) = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in \Sigma_b \simeq Z$ ,  $p(x, \xi) = 0$  avec  $|x'|$  petit,  $(x'', \xi'') = (y_1, y', \eta)$  proche de  $\rho_0$  on ait

$$(58) \quad \rho \in B(\exp y_1 H_g(\rho_0), M \max(|x'|, (y'^2 + \eta^2)^{1/2})).$$

Soit alors  $\rho = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in K_{t, \varepsilon}$ ,  $(x'', \xi'') = (y_1, y', \eta)$  avec  $|x'| = a\varepsilon^2$ . On a  $y_1 \in [-a\varepsilon^2, t]$  et d'après (58)  $\rho \in B(\exp y_1 H_g(\rho_0), M a\varepsilon^2)$ . Si  $s \mapsto \gamma(s)$  est un rayon passant par  $\rho$  avec  $\gamma(0) = \rho$ , on a d'après le § I.3, Lemme 5

$$(59) \quad \gamma(s) \in B\left(\exp(s + y_1) H_g(\rho_0), (\sqrt{M} a \varepsilon + A_0 |s|)^2\right)$$

pour tout  $s$  tel que  $|s| \leq t_0$ . Choisissons alors  $a, \delta_0, \varepsilon_0$  tels que  $\sqrt{M} a + A_0 \delta_0 \leq \frac{1}{2}$ ,  $\delta_0 \varepsilon_0 \leq t_0$ ,  $a \varepsilon_0 \leq \delta_0$ . Pour  $t \leq \delta_0 \varepsilon$ , on aura  $y_1 \in [-a\varepsilon^2, \delta_0 \varepsilon]$ , donc  $|y_1| \leq \delta_0 \varepsilon \leq t_0$  donc

$\gamma(-y_1) \in B(\rho_0, \frac{\varepsilon^2}{4})$ , d'où  $\gamma(-y_1) \notin SS_b(u)$ . Aussi, d'après (59) pour  $s$  entre  $O$  et  $-y_1$  on a  $R(\gamma(s)) \in O((\sqrt{Ma}\varepsilon + A_0|s|)^2)$  donc puisque (voir § I.3, (53))  $|\dot{x}'_{g,d}| \in O(R^{1/2})$ , on a  $|x'(\gamma(s))| \geq a\varepsilon^2 - C_0(\sqrt{Ma} + A_0\delta_0)\varepsilon \cdot \delta_0\varepsilon$  où  $C_0$  ne dépend que de la géométrie, donc quitte à diminuer  $\delta_0$  et  $\varepsilon_0$  on aura  $|x'(\gamma(s))| \geq \frac{a}{2}\varepsilon^2$  pour tout  $s$  entre  $O$  et  $-y_1$ . Le rayon  $\gamma(s)$  ne rencontre donc pas l'arête  $L$  entre  $O$  et  $-y_1$ , et en appliquant le théorème de propagation des singularités de Sjöstrand pour le problème de Dirichlet sur les variétés à bord lisse on en déduit

$$(60) \quad \rho \in K_{t,\varepsilon} \quad t \leq \delta_0\varepsilon \quad \text{et} \quad |x'(\rho)| = a\varepsilon^2 \implies \rho \notin SS_b(u).$$

La proposition étant conséquence de  $\delta_0\varepsilon \in I$ , supposons par l'absurde  $\delta_0\varepsilon \notin I$ . On a alors  $I = [0, t[$  avec  $0 < t \leq \delta_0\varepsilon$  (car  $SS_b(u)$  est fermé dans  $\Sigma_b$  et la projection  $\Sigma_b \rightarrow (x', x'', \xi'')$  est propre), et il suffit de vérifier

$$(61) \quad \rho = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in K_{t,\varepsilon}, \quad \Theta_{\varepsilon,t}(x'', \xi'') = 0 \implies \rho \notin SS_b(u)$$

puisque on a d'après  $I = [0, t[$

$$(62) \quad \rho = (x', x'', \xi'', v_1, v_2) \in K_{t,\varepsilon}, \quad \Theta_{\varepsilon,t}(x'', \xi'') < 0 \implies \rho \notin SS_b(u).$$

Montrons (61). Si  $(x'', \xi'') = (y_1, y', \eta)$ , comme on a  $K_{a\varepsilon^2,\varepsilon} \subset B(\rho_0, \varepsilon^2)$ , on a  $t \geq a\varepsilon^2$  et on peut donc supposer  $y_1 > 0$  donc  $y'^2 + \eta^2 < a^2\varepsilon^4$ , ainsi que  $|x'| < a\varepsilon^2$  d'après (60). Comme de plus  $\{R_0, \Theta_{\varepsilon,t}\} \equiv -1$  si  $\gamma(s)$  est un rayon passant par  $\rho = \gamma(0)$ , on a d'après le § I.3, (53)

$$(63) \quad \left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d} \theta_{\varepsilon,t}(x''(s), \xi''(s))|_{s=0} = +1 + O(|\nabla\theta_{\varepsilon,t}|(R^{1/2} + |x'|)).$$

Or on a  $R^{1/2} + |x'| \in O(\sqrt{a\varepsilon})$  et  $|\nabla\theta_{\varepsilon,t}| \in O(1 + \frac{t}{a\varepsilon^2}) \in O(1 + \frac{\delta_0}{a\varepsilon})$ . Quitte à diminuer à nouveau  $\delta_0$  et  $\varepsilon_0$ , on a donc

$$(64) \quad \left(\frac{d}{ds}\right)_{g,d} \theta_{\varepsilon,t}(x''(s), \xi''(s))_{s=0} \geq \frac{1}{2}$$

et par suite, tout rayon passant par  $\rho$  rentre dans le passé dans  $\Theta_{\varepsilon,t} < 0$  donc dans  $K_{t',\varepsilon}$  pour un  $t' < t$  puisque  $|x'| < a\varepsilon^2$ ,  $y_1 > 0$ ,  $y'^2 + \eta^2 < a^2\varepsilon^4$ .

Par suite (61) est conséquence du théorème de propagation de Sjöstrand si  $x' \neq 0$ , du théorème 3 si  $x' = 0$  et  $\rho \in S_t^2$ , et du théorème 4 si  $x' = 0$  et  $\rho \in S_g^2$ , car (62) et  $SS_b(u) \subset \Sigma_b$  entraîne l'hypothèse du théorème 4.



## VII. PROPAGATION DES SINGULARITES

Dans ce chapitre, nous déduisons des résultats précédents un énoncé de propagation des singularités.

**Théorème 5.** Soit  $u \in H_0^1(M)$  solution de  $Pu = 0$ ,  $K$  un compact de  $\Sigma_b$ ,  $\overset{\circ}{K}$  son intérieur,  $s_+, s_-$  deux réels strictement positifs. Soit  $\rho_0 \in \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u)$ . Il existe un rayon  $\gamma : [a, b] \rightarrow K \cap SS_b(u)$  tel que  $0 \in ]a, b[$ ,  $\gamma(0) = \rho_0$  et soit  $b = s_+$  (resp.  $a = -s_-$ ) soit  $\gamma(b) \in \partial K$  (resp.  $\gamma(a) \in \partial K$ ).

PREUVE. Si  $J$  désigne l'application antipodale  $J(x, \xi) = (x, -\xi)$ ,  $J$  laisse stable  $p^{-1}(0)$  et induit une involution, qu'on notera également  $J$  sur  $\Sigma_b$ . Si  $\overline{P}$  est l'opérateur dont les coefficients sont les conjugués complexes des coefficients de  $P$ , on a  $\sigma(\overline{P}) = \sigma(P)$  et  $\overline{P}\overline{u} = 0$ ,  $\overline{u} \in H_0^1(M)$ ,  $SS_b(\overline{u}) = J(SS_b(u))$ . De plus si  $\gamma(s)$  est un rayon,  $s \mapsto J(\gamma(-s))$  est un rayon, et on peut donc se restreindre à travailler sur les rayons  $\gamma : [0, b] \rightarrow K \cap SS_b(u)$ . Cette remarque montre aussi que l'orientation des rayons est indifférente pour les résultats précédents. Posons

$$(1) \quad \mathcal{T}_{\rho_0, s_+} = \left\{ \text{rayons } \gamma : [0, \delta[ \rightarrow K \cap SS_b(u), \gamma(0) = \rho_0, 0 < \delta \leq s_+ \right\}$$

et supposons  $\mathcal{T}_{\rho_0, s_+} \neq \emptyset$ . L'ensemble  $\mathcal{T}_{\rho_0, s_+}$  est muni de la relation de bon ordre évidente : pour  $\gamma_j : [0, \delta_j[ \rightarrow K \cap SS_b(u)$ ,  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  ssi  $\delta_1 \leq \delta_2$  et  $\gamma_2|_{[0, \delta_1[} = \gamma_1$ . Soit alors  $\gamma : [0, \delta[ \rightarrow K \cap SS_b(u)$  un élément maximal. D'après le § I.3, lemme 7,  $\gamma$  se prolonge à  $[0, \delta]$ , et  $SS_b(u)$  étant fermé,  $\gamma(\delta) \in SS_b(u)$ . Si  $\gamma(\delta) \in \partial K$  ou  $\delta = s_+$ , on a gagné. Sinon  $\gamma(\delta) \in \overset{\circ}{K} \cap SS_b(u)$  et puisque  $\gamma$  est maximal,  $\mathcal{T}_{\gamma(\delta), s_+ - \delta} = \emptyset$  de théorème 5 sera donc conséquence de  $\mathcal{T}_{\rho_0, s_+} \neq \emptyset$ .

**Lemme 1.** Soit  $\rho_0 \in SS_b(u) \setminus S_g^2$ . Il existe  $\delta > 0$  et un rayon  $\gamma : ]-\delta, \delta[ \rightarrow SS_b(u)$  avec  $\gamma(0) = \rho_0$ .

PREUVE. D'après le théorème de propagation de Sjöstrand, on peut supposer  $\rho_0 \in S_g^2$ , et on peut se restreindre à prouver l'existence d'un rayon  $\gamma : ]-\delta, 0] \rightarrow SS_b(u)$  avec  $\gamma(0) = \rho_0$ . D'après le théorème 3, pour tout voisinage  $W$  de  $\rho_0$ , et tout  $a > 0$ , il existe  $\rho \in W$  et  $\gamma \in \Gamma_{\rho_0, a}^-$  tels que  $\gamma(-a) = \rho$  et  $\rho \in SS_b(u)$ . Soit  $\gamma_n : [-a_n, 0[ \rightarrow (\hat{T}^*M \cup \hat{T}^*\Delta_1 \cup \hat{T}^*\Delta_2) \cap \Sigma_b$ ,  $\gamma_n(-a_n) = \rho_n \rightarrow \rho_0$  une suite de tels  $\rho, \gamma, a$ ; on a  $a_n \rightarrow 0$ . Si pour un  $n$ , le rayon  $\gamma_n$  n'est jamais tangent aux faces du dièdre, d'après les théorèmes de propagation à l'intérieur et de réflexion transverse, on a  $\text{Im}(\gamma_n) \subset SS_b(u)$ , d'où le résultat. Sinon on peut supposer  $\rho_n \in \hat{T}^*\Delta_1 \cap S_g^1$ . D'après la preuve du lemme 2 du § I.3, les rayons issues de  $\rho_n$  ne rencontrent pas

l'arête  $L$  dans le passé, sur un intervalle de temps indépendant de  $n$ . En utilisant le théorème de propagation de Sjöstrand pour les variétés à bord analytique, on en déduit qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et des rayons  $\tilde{\gamma}_n : [-\varepsilon_0, -a_n] \rightarrow SS_b(u)$ . D'après le § I.3, proposition 1, on peut supposer  $\tilde{\gamma}_n \rightarrow \gamma$  uniformément sur les compacts de  $[-\varepsilon_0, 0[$ . Le rayon  $\gamma$  se prolonge en 0,  $\gamma(0) = \rho_0$  et  $\text{Im}(\gamma) \subset SS_b(u)$ , ce qui prouve le lemme.  $\diamond$

Pour vérifier  $T_{\rho_0, s_+} \neq \phi$ , on peut donc supposer  $\rho_0 \in S_g^2$ .

Pour  $\rho \in K$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon_0$  petit, posons

$$(2) \quad \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^1 = \left\{ \text{rayons } \gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow SS_b(u), \gamma(0) = \rho, \gamma(s) \notin S_g^2 \text{ pour } s < \varepsilon \right\}$$

$$(3) \quad \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^2 = \left\{ \text{rayons } \gamma : [0, \delta] \rightarrow SS_b(u), \delta \in ]0, \varepsilon[, \gamma(0) = \rho, \gamma(s) \notin S_g^2 \right. \\ \left. \text{pour } s \in [0, \delta[, \gamma(\delta) \in S_g^2 \right\}$$

et,  $A$  désignant une grande constante positive, pour  $\rho \in K \cap SS_b(u)$ , désignons par  $D_\varepsilon(\rho)$  le sous-ensemble de  $SS_b(u)$  défini par

$$(4) \quad \text{Si } \rho \in S_g^2 : D_\varepsilon(\rho) = B(\exp \varepsilon H_g(\rho), A\varepsilon^2) \cap SS_b(u)$$

$$(5) \quad \text{Si } \rho \notin S_g^2 :$$

$$D_\varepsilon(\rho) = \left\{ \gamma(\varepsilon); \gamma \in \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^1 \right\} \cup \left\{ B(\exp(\varepsilon - \delta) H_g(\gamma(\delta)), A(\varepsilon - \delta)^2) \cap SS_b(u); \right. \\ \left. \gamma : [0, \delta] \rightarrow SS_b(u), \gamma \in \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^2 \right\}.$$

Si  $A$  est choisi assez grand, pour  $\rho \in S_g^2 \cap SS_b(u)$ ,  $D_\varepsilon(\rho)$  est non vide d'après le § VI.2, proposition 1.

Si  $\rho \notin S_g^2$ ,  $\mathcal{R} = \{ \text{rayons } \gamma : [0, \delta[ \rightarrow SS_b(u), \delta \in ]0, \varepsilon[, \gamma(0) = \rho, \gamma(s) \notin S_g^2 \forall s \}$  est non vide d'après le lemme 1, bien ordonné pour la relation d'ordre évidente, donc possède un élément maximal, ce qui prouve  $\mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^1 \cup \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^2 \neq \phi$ , donc à nouveau par le § VI.2, proposition 1,  $D_\varepsilon(\rho) \neq \phi$ . De plus, les rayons vérifiant une condition lipschitzienne uniforme sur les compacts de  $\Sigma_b$ , il existe  $C_0$  indépendant de  $\rho \in K \cap SS_b(u)$  et de  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  tel que

$$(6) \quad \rho' \in D_\varepsilon(\rho) \implies \text{dist}(\rho', \rho) \leq C_0 \varepsilon$$

où  $\text{dist}$  est une distance sur  $\Sigma_b \simeq Z \subset {}^b \dot{T}^* M$ .

Soit  $\rho_0 \in S_g^2$ . Pour tout entier  $N$  soit  $\rho_{j, N}$ ,  $0 \leq j \leq 2^N$  des points de  $SS_b(u)$  vérifiant

$$(7) \quad \rho_{0, N} = \rho_0, \quad \rho_{j+1, N} \in D_\varepsilon(\rho_{j, N}) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 2^{-N}.$$

Si  $I_N = \{ j \varepsilon_0 2^{-N}, 0 \leq j \leq 2^N \} \subset [0, \varepsilon_0]$ , on définit  $\gamma_N(t)$  pour  $t = j \varepsilon_0 2^{-N} \in I_N$  par  $\gamma_N(t) = \rho_{j, N}$ . En tout point  $t$  de  $I = \cup I_N$ , la suite  $\gamma_N(t)$ , définie pour  $N$  grand, reste dans un compact fixe de  $SS_b(u)$  et pour  $t, t'$  dans  $I$   $\text{dist}(\gamma_N(t), \gamma_N(t')) \leq C_0 |t - t'|$

d'après (6). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer  $\gamma_N(t) \rightarrow \gamma(t) \in SS_b(u)$  pour tout  $t \in I$ , et  $\gamma$  se prolonge en application lipschitzienne de  $[0, \varepsilon_0]$  dans  $\Sigma_b$ , avec  $\gamma(0) = \rho_0$ . Reste à vérifier que  $\gamma$  est un rayon. Si  $\gamma(t_0) \notin S_g^2$ , on a  $\text{dist}(\gamma_N(t), S_g^2) \geq \nu > 0$  pour tout  $t \in I$  proche de  $t_0$  et  $N$  grand. Si  $t = j\varepsilon_0 2^{-N}$  est proche de  $t_0$ , on a donc  $\mathcal{R}_{\gamma_N(t), \varepsilon}^2 = \emptyset$  pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1]$ , où  $\varepsilon_1$  est indépendant de  $N$ . Donc on a  $\rho_{j+1, N} = \tilde{\gamma}(\varepsilon_0 2^{-N})$  où  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{R}_{\gamma_N(t), \varepsilon_0 2^{-N}}^1$ . Par recollement des rayons, il existe donc des rayons  $\tilde{\gamma}_N$  définis sur un voisinage fixe  $J$  de  $t_0$  tels que  $\gamma_N(t) = \tilde{\gamma}_N(t)$  pour  $t \in J \cap I$  et  $\text{Im}(\tilde{\gamma}_N) \subset SS_b(u)$ . Alors d'après le § I.3, proposition 1,  $\gamma$  est un rayon près de  $t_0$ .

Si  $\gamma(t_0) \in S_g^2$ , il existe  $\sigma_0 > 0$ ,  $A' > 0$  tels que

$$(8) \quad \rho \in B(\gamma(t_0), \sigma^2) \text{ et } \rho' \in D_\varepsilon(\rho) \implies \rho' \in B(\exp \varepsilon H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A'\varepsilon)^2)$$

pour  $\sigma \in ]0, \sigma_0]$  et  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_1]$ ,  $\varepsilon_1$  petit. En effet si  $\rho \in S_g^2$ , on a par (4)  $\text{dist}(\rho', \exp \varepsilon H_g(\rho)) \leq A\varepsilon^2$  et il suffit d'utiliser  $\text{dist}(\exp \varepsilon H_g(\rho), \exp \varepsilon H_g(\gamma(t_0))) \leq (\sigma + A_0\varepsilon)^2$  (voir § I.3, lemme 5) et choisir  $A'$  assez grand; et si  $\rho \notin S_g^2$ , on a soit  $\rho' = \gamma(\varepsilon)$ ,  $\gamma \in \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^1$ , donc (loc. cit)  $(\rho' \in B(\exp \varepsilon H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A_0\varepsilon)^2))$ , soit  $\rho' \in B(\exp(\varepsilon - \delta) H_g(\tau(\delta)), A(\varepsilon - \delta)^2)$ ,  $\tau \in \mathcal{R}_{\rho, \varepsilon}^1$ ,  $\tau(\delta) \in S_g^2$ , donc (loc. cit)  $\tau(\delta) \in B(\exp \delta H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A_0\delta)^2)$ , donc aussi  $\exp(\varepsilon - \delta) H_g(\tau(\delta)) \in B(\exp \varepsilon H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A_0\varepsilon)^2)$  d'où  $\rho' \in B(\exp \varepsilon H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A_0\varepsilon)^2 + A(\varepsilon - \delta)^2)$ , d'où le résultat si  $A'$  est assez grand. De (8) on déduit qu'on a, pour  $\sigma + A'|t' - t| \leq \sigma_0$

$$(9) \quad t, t' \in I_N \text{ et } \gamma_N(t) \in B(\gamma(t_0), \sigma^2) \\ \implies \gamma_N(t') \in B(\exp(t' - t) H_g(\gamma(t_0)), (\sigma + A'|t' - t|)^2).$$

Passant à la limite sur  $N$ , faisant tendre  $t$  vers  $t_0$  puis  $\sigma$  vers 0 on en déduit pour  $|t' - t_0|$  petit,  $\gamma(t') \in B(\exp(t' - t_0) H_g(\gamma(t_0)), A'|t' - t_0|^2)$  donc  $\dot{\gamma}(t_0) = H_g(\gamma(t_0))$ , ce qui achève la preuve du théorème 5.



# APPENDICE

## Rappels de deuxième microlocalisation tempérée

On rappelle dans ce paragraphe les résultats de deuxième microlocalisation tempérée qui interviennent dans la preuve du théorème 2. Nous utiliserons ici les constructions de [L1] (voir aussi [L2]).

Soit  $X = \mathbb{C}^n$ , variété analytique complexe de dimension  $n$ ,  $X^{\mathbb{R}}$  la variété réelle sous-jacente,  $TX \simeq TX^{\mathbb{R}}$  le fibré tangent à  $X$ ,  $T^*X^{\mathbb{R}}$  le fibré cotangent à  $X^{\mathbb{R}}$ ,  $T^*X$  le fibré cotangent à  $X$  identifié à  $T^*X^{\mathbb{R}}$  par  $\zeta \in T_x^*X \rightarrow \{u \mapsto -\text{Im}(\zeta(u))\} \in T_x^*X^{\mathbb{R}}$ . Si  $\sigma$  est la 2-forme canonique sur  $T^*X$ ,  $\text{Re } \sigma$  et  $\text{Im } \sigma$  sont des 2-formes symplectiques sur  $T^*X^{\mathbb{R}}$ , et  $-\text{Im } \sigma$  est la 2-forme canonique de  $T^*X^{\mathbb{R}}$ .

Soit  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\text{Im } x)^2$  qui est strictement pluri-sous-harmonique; alors  $\Lambda_\varphi = \{(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)), x \in X\}$  est  $\text{Im } \sigma$ -Lagrangienne et  $\text{Re } \sigma$ -symplectique. Si  $\pi$  désigne la projection de  $T^*X$  sur  $X$ , alors  $\pi$  identifie à  $\Lambda_\varphi$  à  $X$  et munit  $X$  de la structure symplectique définie par la 2-forme  $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$ .

On décompose  $x$  en  $x = (x', x'')$ ,  $x' \in \mathbb{C}^d$ ,  $x'' \in \mathbb{C}^{n-d}$ . Soit  $V^{\mathbb{C}}$  la sous-variété involutive de  $T^*X$  définie par  $V^{\mathbb{C}} = \{(x', x'', \zeta', \zeta''); \zeta' = 0\}$  alors  $V = V^{\mathbb{C}} \cap \Lambda_\varphi$  est une involutive de  $(\Lambda_\varphi, \text{Re } \sigma)$ , identifiée par  $\pi$  au sous-espace  $\text{Im } x' = 0$  de  $X$ . On note  $\varphi_V(x) = \frac{1}{2}(\text{Im } x'')^2$  la fonction pluri-sous-harmonique associée à  $V$  (voir [L2]).

On note  $T_V$  le fibré normal à  $V$  dans  $\Lambda_\varphi$ , et  $H_\varphi$  l'espace de Sjöstrand des fonctions  $f(x, \lambda)$ , holomorphes en  $x$ , définies pour  $\lambda$  assez grand, vérifiant des estimations tempérées  $|f(x, \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\lambda \varphi(x)}$ .

Soit  $x_0 = (x'_0, x''_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$  un point de  $V$ ,  $\omega$  un voisinage de  $x'_0$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $f(x, \lambda) \in H_\varphi$  définie près de  $\bar{\omega} \times \{x''_0\}$ . Pour  $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^n$ ,  $w''$  près de  $x''_0$ ,  $\text{Re } w'$  près de  $x'_0$ ,  $\mu \in ]0, 1[$ , on définit  $\tilde{f}(w, \mu, \lambda)$  par

$$(1) \quad \tilde{f}(w, \mu, \lambda) = \int_{x' \in \omega} e^{-\frac{\lambda}{2} \rho (w' - x')^2} f(x', w'', \lambda) dx' \quad \left( \rho = \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \right).$$

Alors  $\tilde{f}$  vérifie l'estimation

$$(2) \quad |\tilde{f}(w, \mu, \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\lambda \frac{\mu^2}{2} (\text{Im } w')^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{Im } w'')^2}$$

valable pour  $\text{Re } w'$  près de  $x'_0$ ,  $w''$  près de  $x''_0$ ,  $\text{Im } w'$  borné et  $\mu \in ]0, \mu_0[$  avec  $\mu_0 > 0$  petit, comme on le voit en déformant le contour d'intégration dans (1) sur  $\text{Im } x' = \mu^2 \text{Im } w'$  pour  $\text{Re } x'$  près de  $x'_0$ , ainsi que l'estimation (globale en  $\rho$ )

$$(3) \quad |\tilde{f}(w, \mu, \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\frac{\lambda}{2} (\text{Im } w')^2 [\rho(1-\delta)^2 + \delta^2] + \frac{\lambda}{2} (\text{Im } w'')^2}$$



valable pour  $\operatorname{Re} w' \sim x'_0$ ,  $w'' \sim x''_0$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+$ ,  $\operatorname{Im} w'$  borné,  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $\delta_0 > 0$  petit obtenue par déformation sur  $\operatorname{Im} x' = \delta \operatorname{Im} w'$  pour  $\operatorname{Re} x'$  près de  $x'_0$ .

Au voisinage de  $(x'_0, x''_0)$ , on a la formule d'inversion standard obtenue en considérant (1) comme une transformation FBI avec grand paramètre  $\lambda\rho$  (voir [L2])

$$(4) \quad f(x', x'', \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\lambda\rho R^2}{2}} \left[ \frac{1}{2} \tilde{f} - \frac{i}{2R^2\lambda\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w'} \cdot \alpha_{\xi'} \right] (x' - i\alpha_{\xi'}, x'', \mu, \lambda) d\xi'$$

avec  $\xi' = \rho\alpha_{\xi'}$  avec  $|\alpha_{\xi'}| = R$ . Il résulte de (3) que l'intégrale dans (4) restreinte à  $\rho \geq \rho_0 > 0$  définit près de  $x_0$  un élément de  $H_{\varphi-\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$ ; De même, d'après (2) la même intégrale restreinte à  $\rho \leq \frac{c}{\lambda}$  avec  $c > 0$  définit près de  $x_0$  un élément de  $H_{\varphi\nu}$ .

**Définition 1.** Soit  $m_0 = (x_0, \nu'_0) \in (T_V)_{x_0}$ , et  $f \in H_\varphi$  définie près de  $x_0$ . On dit que  $m_0 \notin SS_V^{2,1}(f)$  ssi avec  $w_0 = (w'_0, w''_0)$ ,  $w'_0 = x'_0 + i\nu'_0$ ,  $w''_0 = x''_0$ , il existe  $W$  voisinage de  $w_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\lambda'_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$ ,  $A, B > 0$  tels que

$$(5) \quad \forall w \in W, \quad \forall \mu \in ]0, \mu_0], \quad \forall \lambda \geq \frac{\lambda'_0}{\mu^2} \quad |\tilde{f}(w, \mu, \lambda)| \leq A\lambda^B e^{\lambda \frac{\mu^2}{2} [(\operatorname{Im} w')^2 - \varepsilon_0] + \frac{1}{2} (\operatorname{Im} w'')^2}.$$

◇

On appelle  $SS_V^{2,1}(f)$  le deuxième micro-support tempéré de  $f$  le long de  $V$ . On remarquera que à  $\rho > 0$  fixé, (1) est une transformation canonique quantifiée qui envoie l'espace de Sjöstrand  $H_\varphi$  près de  $x_0$  dans l'espace  $H_\psi$  près de  $w_0 = (w'_0, w''_0)$  avec  $\psi = \frac{\mu^2}{2} (\operatorname{Im} w')^2 + \frac{1}{2} (\operatorname{Im} w'')^2$ , la transformation canonique associée étant

$$(6) \quad (x', \xi', x'', \xi'') \longrightarrow (w' = x' - i\frac{\xi'}{\rho}, \zeta' = \xi'; w'' = x'', \zeta'' = \xi'').$$

En particulier, si on note  $SS_\varphi(f)$  le spectre de  $f \in H_\varphi$  (complémentaire des points au voisinage desquels on a  $f \in H_{\varphi-\varepsilon}$ , pour un  $\varepsilon > 0$ ), on a si  $m_0 = (x_0, \nu'_0) \notin SS_V^{2,1}(f)$ , pour tout  $\mu \in ]0, \mu_0]$ ,  $w \in W$ ,  $w \notin SS_\psi(\tilde{f})$  ce qui entraîne

$$(7) \quad \forall w \in W, \quad \forall \mu \in ]0, \mu_0] \quad (\operatorname{Re} w' + i\mu^2 \operatorname{Im} w', w'') \notin SS_\varphi(f).$$

Comme  $\operatorname{Im} w'$  est proche de  $+\nu'_0$ , la convention d'orientation choisie est telle que si on identifie  $SS_\varphi(f)$  à un sous-ensemble de  $\Lambda_\varphi$ , il existe dans  $\Lambda_\varphi$  un petit cône  $C$  s'appuyant sur  $V$  et de direction  $\nu'_0$  tel que  $C \cap SS_\varphi(f) = \emptyset$ .

Rappelons que  $(x_0, 0) \notin SS_V^{2,1}(f)$  équivaut à  $x_0 \notin SS_\varphi(f)$ , et que  $f \in H_{\varphi\nu}$  près de  $x_0$  équivaut à  $SS_V^{2,1}(f)_{x_0} \subset \{\nu'_0 = 0\}$ . Il résulte également de la formule d'inversion (4) que  $SS_V^{2,1}(f)$  est un fermé homogène du fibré normal  $T_V$ , et qu'il est intrinsèquement défini (i.e. invariant par transformation canonique).

On notera  $\hat{S}S_V^{2,1}(f) = SS_V^{2,1}(f) \setminus \{\nu' = 0\}$  le deuxième micro-support tempéré hors de la section nulle. Pour  $\nu' \in \mathbb{S}^{d-1}$  ( $|\nu'| = 1$ ),  $y' \in \mathbb{R}^d$  posons

$$(8) \quad \Theta(y', \nu') = \frac{1}{2} \left\{ (|y' - \nu'| - 1)_+ \right\}^2 = \sup_{\rho \geq 0} \left\{ -\frac{\rho}{2} + \frac{\mu^2}{2} (y' - \nu')^2 \right\}$$

où  $t_+ = t$  si  $t \geq 0$ ,  $t_+ = 0$  si  $t \leq 0$ . On a bien sûr  $\sup \{\Theta(y', \nu'); \nu' \in \mathbb{S}^{d-1}\} = \frac{1}{2} y'^2$ .

Soit  $\Gamma$  un cône saillant d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^d \setminus 0$ ; on notera  $\Gamma^0$  son polaire,  $\Gamma^0 = \{y'; \forall \nu' \in \Gamma, y' \cdot \nu' \geq 0\}$ , qui est un cône convexe fermé saillant et on posera

$$(9) \quad \Theta_\Gamma(y') = \sup \{\Theta(y, \nu'); \nu' \in \mathbb{S}^{d-1} \cap \Gamma\}$$

$$(10) \quad \varphi_\Gamma(x) = \Theta_\Gamma(\text{Im } x') + \frac{1}{2} (\text{Im } x'')^2$$

$$(11) \quad U_\Gamma = \bigcap_{\nu' \in \mathbb{S}^{d-1} \cap \Gamma} \{|y' - \nu'| < 1\}.$$

On a donc  $\varphi_\Gamma = \varphi_V$  pour  $\text{Im } x' \in U_\Gamma$ , et le profil de  $U_\Gamma$  est  $\Gamma^0$ . Pour  $f \in H_\varphi$ ,  $f_\Gamma(x, \lambda)$  désignera la fonction définie par l'intégrale (4) avec  $R = 1$ , restreinte à  $\alpha_{\xi'} \in \Gamma$ ,  $\rho \in [\frac{\xi}{\lambda}, \rho_0]$ , qui vérifie donc l'estimation près de  $x_0$

$$(12) \quad |f_\Gamma(x, \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\lambda \varphi_\Gamma(x)}.$$

Si  $\mathbb{R}^d \setminus 0 = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$  (réunion finie disjointe) et si on pose  $A' = \left\{ \alpha; \bar{\Gamma}_\alpha \cap \{\nu'; (x_0, -\nu') \in \dot{S}S_V^{2,1}(f)\} = \phi \right\}$ , on aura donc

$$(13) \quad f - \sum_{\alpha \notin A'} f_{\Gamma_\alpha} = g, \quad g \in H_{\varphi_V} \text{ près de } x_0.$$

De plus, si on a  $|f(x, \lambda)| \leq A \lambda^B e^{\lambda \varphi_V(x)}$  pour tout  $x = (x', x'')$  avec  $\text{Re } x' \sim x'_0$ ,  $x'' \sim x''_0$  et  $\text{Im } x' \in \Gamma$ ,  $|\text{Im } x'|$  petit, alors on a  $\dot{S}S_V^{2,1}(f)_{x_0} \subset -\Gamma^0$  comme on le voit en déformant l'intégrale (1) dans  $\text{Im } x' \in \Gamma$  près de  $\text{Re } x' = x'_0$ . En particulier on a  $\dot{S}S_V^{2,1}(f_\Gamma) \subset -(\Gamma^0)^0$ .

**Théorème A.1.** Soit  $V$  une sous-variété involutive de  $\Lambda_\varphi$  définie près de  $\rho_0 = (x_0, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0)) \in V$  et  $P(x, \xi, \lambda) = \sum_{n \geq 0} (i\lambda)^{-n} p_n(x, \xi, \lambda)$  un opérateur pseudo-

différentiel analytique défini près de  $\rho_0$ , de symbole principal  $p_0 = p(x, \xi)$ . On suppose  $p(\rho_0) = 0$ ,  $p|_{\Lambda_\varphi}$  réel et le champ hamiltonien  $H_p(\rho_0)$  transverse à  $V$ . On note  $\nu_0 (\neq 0)$  la classe de  $H_p(\rho_0)$  dans le fibré normal  $(T_V)_{\rho_0}$  et  $\gamma_- = \{\exp s H_p(\rho_0), s < 0\}$  la demi-bicaractéristique de  $p$  issue de  $\rho_0$ , ouverte, tournée vers le passé.

Soit  $f(x, \lambda) \in H_\varphi$  définie près de  $x_0$  telle que

$$(14) \quad \gamma_- \cap SS_\varphi(f) = \phi \quad \text{et} \quad -\nu_0 \notin SS_V^{2,1}(Pf)_{\rho_0}.$$

Alors on a

$$(15) \quad SS_V^{2,1}(f)_{\rho_0} \subset \{t\nu + s\nu_0; t \geq 0, s \geq 0, \nu \in SS_V^{2,1}(Pf)_{\rho_0}\}.$$

PREUVE. Vérifions d'abord qu'il existe un seul modèle symplectique local pour le couple  $(p, V)$  en  $\rho_0$ . On peut supposer  $V = \bigcap_{j=1}^d g_j^{-1}(0)$ , avec les  $dg_j(\rho_0)$  linéairement indépendants et  $\{g_i, g_j\} \equiv 0$ . Comme  $H_p(\rho_0) \notin T_{\rho_0} V$ , on peut supposer  $\{g_1, p\}_{\rho_0} \neq 0$ . Soit  $V_1 = g_1^{-1}(0)$ ; alors  $H_p$  est transverse à  $V_1$ , et il existe  $f_1, f_2, \dots, f_d$  vérifiant  $\{f_1, p\} \equiv 1, f_1|_{V_1} \equiv 0; \{f_j, p\} \equiv 0, f_j - g_j|_{V_1} \equiv 0 \ j = 2, \dots, d$ . On a alors  $f_1 = \theta_1 g_1, \theta_1(\rho_0) \neq 0, f_j = g_j + \theta_j g_1 \ j \geq 2$  donc  $\{f_j, f_k\}|_{V_1} \equiv 0$  pour tout  $j, k$ , et  $\{p, \{f_j, f_k\}\} \equiv 0$  d'où  $\{f_j, f_k\} \equiv 0$ . On a également  $V = \cap f_j^{-1}(0)$  et les  $df_j(\rho_0)$  linéairement indépendants. Il existe donc un système de coordonnées symplectiques réelles sur  $\Lambda_\varphi$  tel que  $p = x_1$  et  $V = \{\xi_1 = \dots = \xi_d = 0\}$  d'où le résultat. Par transformation canonique, et en conjuguant  $P$  par un opérateur elliptique, on peut supposer  $\varphi = \frac{1}{2}(\text{Im } x)^2, x = (x', x''), V = \{\xi' = 0\}$  et  $P = \frac{-1}{\lambda} \partial x_1 - x_1$ , de symbole  $-i\xi_1 - x_1$  réel sur  $\Lambda_\varphi = \{\xi = -\text{Im } x\}$ , et on travaille près de  $\rho_0 = (x_0 = 0, \xi_0 = 0)$ . On a alors  $\gamma_- = \{x = (it, 0, \dots, 0); \xi = (-t, 0, \dots, 0), t > 0\}$  et  $\nu_0 = (-1, 0, \dots, 0)$ . On pose  $g = Pf$ , et  $Z = SS_V^{2,1}(g)_{\rho_0}$ . Puisque  $-\nu_0 \notin Z$ , on peut décomposer  $g$  près de  $x_0$  en une somme finie  $g = \Sigma g_\alpha$  avec  $g_\alpha \in H_{\varphi_{\Gamma_\alpha}}$ , où les  $\Gamma_\alpha$  sont des petits cônes saillants fermés, convexes qui recouvrent  $-Z$  et tels que  $\nu_0 \notin \Gamma_\alpha$ . En particulier près de  $x_0$  on a  $\gamma_- \cap SS_\varphi(g_\alpha) = \phi$ . Soit alors  $h_\alpha \in H_\varphi$  solution de  $Ph_\alpha = g_\alpha, \gamma_- \cap SS_\varphi(h_\alpha) = \phi$ ; on a  $P(f - \Sigma h_\alpha) = 0, \gamma_- \cap SS_\varphi(f - \Sigma h_\alpha) = \phi$  donc  $x_0 \notin SS_\varphi(f - \Sigma h_\alpha)$  puisque  $p$  est à caractéristiques simples réelles, et il suffit de vérifier qu'on a

$$(16) \quad SS_V^{2,1}(h_\alpha)_{\rho_0} \subset \{t\nu + s\nu_0; t \geq 0, s \geq 0, \nu \in -\Gamma_\alpha\}.$$

Soit  $a > 0$  petit; on peut choisir pour  $h_\alpha$

$$(17) \quad h_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = -\lambda \int_{ia}^{x_1} e^{-\frac{\lambda}{2}(x_1^2 - u^2)} g_\alpha(u, x_2, \dots, x_n, \lambda) du$$

et on ne note plus la dépendance en  $\alpha$ .

Pour  $x_1$  voisin de 0, on choisit comme chemin joignant  $ia$  à  $x_1$  dans (17) la réunion du segment joignant  $ia$  à  $i \text{Im } x_1$  et du segment joignant  $i \text{Im } x_1$  à  $x_1$ . Comme  $\varphi_\Gamma(x)$  ne dépend que de  $\text{Im } x$  et qu'on a  $|\text{Re}(u)| \leq |\text{Re } x_1|$  sur ce chemin, on obtient

$$(18) \quad |h(x)| \leq A \lambda^B e^{\lambda \psi(x)};$$

$$\psi(x) = \sup_{\text{Im } x_1 \leq \beta \leq a} \left\{ \Theta_\Gamma(\beta, \text{Im } x_2, \dots) + \frac{1}{2}(\text{Im } x_1)^2 - \frac{\beta^2}{2} \right\} + \frac{1}{2}(\text{Im } x'')^2.$$

Posons  $\text{Im } x' = (b, \text{Im } x_2, \dots) = (b, \nu) \in \mathbb{R}^d, y_\beta = (\beta, \nu)$  et supposons  $\text{Im } x' \in \overline{U}_\Gamma \cap (\text{Im } x_1 \geq 0)$  (voir (11)). Avec  $L_\nu(\beta) = \frac{1}{2}(b^2 - \beta^2) + \Theta(y_\beta, \nu)$  on a  $\psi(x) = \frac{1}{2}(\text{Im } x'')^2 + \sup_{\nu \in \Gamma \cap \mathbb{S}^{d-1}} \sup_{\beta \in [b, a]} \{L_\nu(\beta)\}$ . Or avec  $\delta = |y_\beta - \nu|, \nu = (\nu_1, \nu') \in \Gamma$  on a  $L'_\nu(\beta) = -\beta + (\delta - 1)_+ \frac{\beta - \nu_1}{\delta}$  qui est non nul dans  $\beta > 0$  (car  $L'_\nu(\beta) = 0$  et  $\beta > 0 \Rightarrow \delta > 1$  et  $\beta = \nu_1(1 - \delta)$  donc on a  $\nu_1 < 0$  et  $(\nu_1 - \beta)^2 = \nu_1^2[(\nu_1 - \beta)^2 + (\nu' - \nu)^2]$  d'où puisque  $|\nu| = 1, (\nu_1 - \beta)^2 \nu'^2 = \nu_1^2(\nu' - \nu)^2$  d'où  $(\delta^2 - 1)\nu'^2 = -2\nu' \cdot \nu + \nu^2$ . Or

$|y_b - \nu| \leq 1$  implique  $2\nu' \cdot \nu - \nu^2 \geq b^2 - 2b\nu_1 \geq 0$  : contradiction car  $\nu \neq \nu_0$ ). Comme  $L_\nu(a) < 0$  pour  $\text{Im } x'$  petit car  $\nu \neq \nu_0$  il en résulte  $\sup\{L_\nu(\beta); \beta \in [b, a]\} = L_\nu(b) = \Theta(\text{Im } x', \nu) = 0$  puisque  $|y_b - \nu| \leq 1$ . On a donc  $\psi(x) = \varphi_V(x)$  pour tout  $x = (x', x'')$  voisin de  $x_0$  et appartenant à  $\bar{U}_\Gamma \cap \{\text{Im } x_1 \geq 0\}$  ce qui prouve le théorème.

◇

Soit à présent  $P = D_t^2 + R(t, x, D_x)$  un opérateur différentiel d'ordre deux à coefficients analytiques de symbole principal réel  $p = \tau^2 + r(t, x, \xi)$ , tel que  $r_0(x, \xi) = r(0, x, \xi)$  vérifie  $\frac{\partial r_0}{\partial \xi}(x, \xi) \neq 0$  pour  $\xi \neq 0$ . Si  $M$  est le demi-espace  $M = \{(x, t); t \geq 0\}$ , les régions elliptiques  $\mathcal{E}$ , glancing  $\mathcal{G}$  et hyperboliques  $\mathcal{H}$  de  $\dot{T}^* \partial M$  sont définies respectivement par  $r_0 > 0$ ,  $r_0 = 0$ ,  $r_0 < 0$ . Soit  $V \subset \dot{T}^* \partial M$  une sous-variété involutive de codimension 1 définie près de  $\rho_0 \in V$ . Rappelons que si  $f$  est une distribution prolongeable sur  $\dot{M}$  solution de  $Pf = 0$ , on dit que  $f$  est  $V$ -sortante en  $\rho_0$  ssi (voir [G-L] définition 3.4) :

- si  $\rho_0 \in \mathcal{E}$  pas de condition.
- Si  $\rho_0 \in \mathcal{H}$  et si  $\gamma_\pm$  sont les deux demi-bicaractéristiques ouvertes associées à  $\rho_0$ , contenues dans  $\dot{T}^* \dot{M}$ , on a  $\gamma_+ \cap SS(f) = \emptyset$  ou  $\gamma_- \cap SS(f) = \emptyset$ .
- Si  $\rho_0 \in \mathcal{G}$  alors  $H_{r_0}(\rho_0)$  est transverse à  $V$ , et si  $s = 0$  est une équation locale de  $V$  près de  $\rho_0$  telle qu'on ait  $ds(H_{r_0}) > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $0 \leq t \leq \varepsilon$ ,  $|\rho - \rho_0| \leq \varepsilon$  et  $s(\rho) < 0$  entraînent pour tout  $\tau$  ( $\rho, t, \tau \notin SS_b(f)$ ).

On a alors le résultat suivant (voir [G-L], théorème 3.1).

**Théorème A.2.** Soit  $f$  une distribution prolongeable sur  $M$  vérifiant  $Pf = 0$  dans  $\dot{M}$ ,  $V$ -sortante en  $\rho_0$ . On suppose  $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(f|_{t=0})$ , alors  $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(\frac{\partial f}{\partial t}|_{t=0})$ .

Rappelons que dans ce résultat, le choix de l'orientation du fibré normal  $T_V$  n'a d'importance que si  $\rho_0 \in \mathcal{G}$ , et qu'alors  $(\rho_0, +1)$  est la classe de  $H_{r_0}$  dans le fibré normal.

## BIBLIOGRAPHIE

[C-T] CHEEGER, TAYLOR M. : *Diffraction by conical singularities I, II*, Comm. Pure Applied Math. **35** (1982), 275-331, 487-529.

[E] ESKIN G. : *The wave equation in a wedge with general boundary conditions*, C.P.D.E. **17** (1992), 99-160.

- [Ga] GARNIR H.G. : *Fonction de Green pour l'opérateur métaharmonique dans un angle ou un dièdre*, Bull. Soc. Roy. Sciences Liège, 1952, 119-140, 207-231, 328-344.
- [G-L] GÉRARD P., LEBEAU G. : *Diffusion d'une onde par un coin*, J. A.M.S., vol. 6, (1993), 341-423.
- [K] KONDRAT'EV : *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc. **16** (1967), 227-313.
- [L1] LEBEAU G. : *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-83, exposé n° 15, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [L2] LEBEAU G. : *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **35** (1985), 145-216.
- [R] ROULEUX M. : *Diffraction analytique sur une variété à singularités coniques*, C.P.D.E. **11** (1986), 947-988.
- [S1] SJÖSTRAND J. : *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems I*, Comm. Part. Diff. Eq. **5** (1980), 41-94.
- [S2] SJÖSTRAND J. : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° 95, (1982), Société Mathématique de France.
- [S3] SJÖSTRAND J. : *Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems*, Math. Ann. **254** (1980), 211-256.
- [U] UCHIDA M. : *Microlocal analysis of diffraction at the corner of an obstacle*, à paraître aux Ann. Sc. Ecole Normale Supérieure, et Séminaire Equations aux Dérivées Partielles 1989-90, exposé n° 3, Ecole Polytechnique.