MÉMOIRES DE LA S. M. F.

SINNOU DAVID

# Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques

*Mémoires de la S. M. F. 2^e série*, tome 62 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1995_2_62__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 62
Supplément au Bulletin de la S. M. F.
Tome 123, 1995, fascicule 3

# Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques

Sinnou DAVID

**Résumé** : nous obtenons une minoration de formes linéaires de logarithmes elliptiques de points algébriques d'un produit de courbes elliptiques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Cette minoration est totalement explicite. On donne également une version quantitative explicite du cas dégénéré.

**Abstract** : we get a totally explicit lower bounds for linear forms in elliptic logarithms of a product of elliptic curves defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. An explicit quantitative version of the degenerate case is also proven.

Classification AMS : 11G, 11J, 14K.

Texte reçu le 21 juin 1993.
Université Pierre et Marie Curie,
Département de Mathématiques, «Problèmes Diophantiens»
4, Place Jussieu,
75005 Paris

# Table des Matières

# 1 Introduction

La théorie des formes linéaires de logarithmes a connu de nombreux développements depuis les premiers travaux d'A. Baker ([Ba1]). En sus des applications plus théoriques, le fait que les preuves soient effectives a conduit les mathématiciens à s'intéresser à des minorations explicites afin d'appliquer la théorie à la résolution de nombreuses classes d'équations diophantiennes. Ainsi, dès les premiers travaux, on trouve des minorations de formes linéaires explicites dans le cas usuel. Ces bornes ont d'ailleurs été constamment raffinées au fur et à mesure que la théorie progressait (on pourra comparer par exemple [Ba1, IV], [B-G-M-M-S] et [Ba–Wü]). Parallèlement, on s'est aperçu que rien en théorie ne singularisait le cas dit «usuel» et que la technique employée pouvait s'appliquer à n'importe quel groupe algébrique commutatif (on peut vraisemblablement attribuer cette idée à D. Masser (*voir* [Ma]) qui a étudié le cas des courbes elliptiques à multiplication complexes; J. Coates et S. Lang (*voir* [Co–La]) ont poursuivi avec le cas des variétés abéliennes (toujours à multiplication complexes)). Bien entendu, les difficultés (essentiellement le manque de lemme de zéros performant) ont ralenti l'apparition de ces généralisations. S'il ne nous appartient pas ici de retracer l'historique de cette théorie, signalons simplement que les travaux de P. Philippon et M. Waldschmidt (*voir* [P–W]) raffinés par les textes de N. Hirata (*voir* [Hi2] et [Hi1]) ont conduit à des énoncés tout à fait généraux, dont la forme est presque satisfaisante en comparaison de ce qui est connu dans le cas usuel (pour les spécialistes, rappelons que N. Hirata est la première a donner dans ce cadre la «bonne» dépendance en «$\log(B)$», à $\varepsilon$-près). Toutefois, il n'existe à ce jour aucun énoncé dans la littérature fournissant une minoration de formes linéaires de logarithmes *totalement explicite* en dehors du cas usuel. Sans doute les auteurs qui se sont interessés successivement à ce problème avaient en tête des applications de nature théorique. Il semble cependant qu'au moins dans le cas de la recherche des points entiers de certaines classes d'équations de Mordell (et, plus généralement de genre 1) la connaissance d'une minoration explicite de formes linéaires de logarithmes elliptiques soit utile (*voir* en particulier les travaux de R. STOELKER et N. TZANAKIS [St–Tz], de J. GEBEL, A. PETHÖ et H. ZIMMER ([G–P–Z]) ou le travail de N. HIRATA [Hi3]). C'est en tout cas pour répondre à cette demande précise que nous avons entrepris ce travail. Nous nous sommes également volontairement limités au cas elliptique, où des applications précises sont en vue et où les difficultés techniques sont moindres.

Le résultat que nous obtenons est ainsi une version totalement explicite du travail de N. HIRATA (cas elliptique, *voir* [Hi1]). Nous précisons en sus ce qui se passe lorsque la forme linéaire est nulle. Ceci nous permet d'obtenir en corollaire une version affaiblie mais explicite du théorème d'isogénie de D. MASSER et G. WÜSTHOLZ (*voir* [Ma–Wu1]) pour les courbes elliptiques. Il s'agit donc avant tout d'un travail de mise au point et, en ce sens, on ne trouvera rien dans ce texte de véritablement original, la majeure partie des lemmes présentés se trouvant déjà dans la littérature (bien entendu, la source principale est le texte de N. HIRATA). Toutefois, il est très rare de les trouver sous une forme explicite, comme nous en avons besoin ici. Nous avons donc été contraints de les prouver à nouveau, et en ce sens le travail que nous présentons est raisonnablement «self contained», à quelques exceptions toutefois, notamment dans la preuve du corollaire (paragraphe 10) où nous avons coupé au plus court et, ce qui est plus regrettable, dans la preuve du lemme 6.1 : le lecteur se retrouvera là face à une cascade de renvois bibliographiques, des textes de N. HIRATA ([Hi2] et [Hi1]) vers le travail de P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT ([P–W]) qui renvoient aux notations et arguments de [Ph1]...

Par commodité pour le lecteur habitué aux textes de P. PHILIPPON–M. WALDSCHMIDT et de N. HIRATA, nous suivons de très près leur plan : on trouvera au paragraphe suivant l'énoncé du résultat principal, au paragraphe 3 les lemmes de croissance analytique des fonctions de WEIERSTRASS, au paragraphe 4 les réductions propres à la technique de N. HIRATA, au paragraphe 5 le choix d'un sous–groupe privilégié, au paragraphe 6, les préparatifs à la construction de la fonction auxiliaire, au paragraphe 7 la preuve de transcendance proprement dite, au paragraphe 8 les lemmes donnant un contrôle effectif des formules de translation et de dérivation, au paragraphe 9 la conclusion de la preuve du théorème 2.1, et enfin, au paragraphe 10 la preuve du corollaire.

Nous nous sommes efforcés de donner des énoncés relativement précis, même là où ce n'était pas vraiment nécessaire pour notre résultat, pour les lemmes qui nous semblaient pouvoir être utiles à d'autres auteurs (en particulier ceux des paragraphes 3 et 8). Cela donne une explication partielle à la présence en de nombreux points de calculs intermédiaires présentant une précision «irrelevante». Une autre explication est également que je mesurais parfois mal l'importance finale de mes calculs intermédiaires avant d'avoir achevé le travail et que je n'ai pas forcément pensé à les simplifier partout... Je prie le lecteur de m'excuser pour ces lourdeurs. Un avertissement enfin. Un certain nombre d'inégalités ne sont démontrées que pour les grandes valeurs d'un paramètre entier. Les vérifications restantes, en nombre *fini* ont été effectuées à l'aide de «Mathematica» de WOLFRAM Research.

# 2 Notations et résultats

Soit $K$ un corps de nombres de degré $D$ sur $\mathbb{Q}$, plongé dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. On notera $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $K$ dans $\mathbb{C}$. Soient également $k$ un entier $\geq 0$, et $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$, $k$ courbes elliptiques définies sur $K$, que l'on supposera munies d'un modèle de WEIERSTRASS :

$$y^2 = 4x^3 - g_{2,i}x - g_{3,i}, \quad g_{2,i}, g_{3,i} \in K, \quad 1 \leq i \leq k.$$

On notera, $\wp_i, 1 \leq i \leq k$ (resp. $\sigma_i$), les fonctions de WEIERSTRASS associées, et $\Lambda_i = \omega_{1,i}\mathbb{Z} + \omega_{2,i}\mathbb{Z}$ le réseau des périodes de $\wp_i$. On désigne par $h$ la hauteur de WEIL logarithmique et absolue sur $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ . Rappelons brièvement sa définition : soit $P$ un point de $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$. Soit $L$ un corps de nombres contenant toutes les coordonnées $X_0, \ldots, X_N$ de $P$ , de degré $d$ sur $\mathbb{Q}$. On pose alors :

$$h(P) = \frac{1}{d} \sum_v n_v \log(\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_N|_v\}),$$

où $v$ décrit l'ensemble des places de $L$ et où les valeurs absolues prolongent les valeurs absolues usuelles sur $\mathbb{Q}$, et sont normalisées de telle sorte que la formule du produit soit satisfaite :

$$\forall x, x \in L, x \neq 0, \quad \sum_v n_v \log |x|_v = 0; \quad \sum_{v|\infty} n_v = d.$$

On notera $j_{\mathcal{E}_i}$ l'invariant modulaire de la courbe $\mathcal{E}_i$, l'on posera $h = \max\{1, h(1, g_{2,i}, g_{3,i}), h(j_{\mathcal{E}_i}), 1 \leq i \leq k\}$ et on notera $\tau_i = \frac{\omega_{2,i}}{\omega_{1,i}}$. Il n'y a pas de restriction à supposer que $\tau_i$ est un élément du demi-plan de POINCARÉ $\mathfrak{H}$ (*ie.* que $\Im m\ \tau_i > 0$). Nous supposerons plus précisément que $\tau_i \in \mathfrak{F}$, où $\mathfrak{F}$ désigne le domaine fondamental usuel de $\mathfrak{H}$ pour l'action de $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Cela suppose simplement que l'on choisisse une base adéquate de $\Lambda_i$, mais ne change pas les invariants $g_{2,i}$, $g_{3,i}$ ou à fortiori $j_{\mathcal{E}_i}$. Si $u_i$ est un nombre complexe tel que $\gamma_i = (\sigma_i^3(u_i), \sigma_i^3(u_i)\wp_i(u_i), \sigma_i^3(u_i)\wp_i'(u_i)) \in \mathcal{E}_i(\overline{\mathbb{Q}})$, nous noterons $\hat{h}(\gamma_i)$ la hauteur de NÉRON–Tate de $\gamma_i$ (rappelons que $\hat{h}(\gamma_i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}h(n\gamma_i)$). Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat :

**Théorème 2.1** *En utilisant les notations introduites ci–dessus, soient* $\mathcal{L}(\boldsymbol{z}) = \beta_0 z_0 + \cdots + \beta_k z_k$ *une forme linéaire non nulle de* $\mathbb{C}^{k+1}$ *à coefficients dans* $K$, $u_1, \ldots, u_k$ *des nombres complexes tels que* $\gamma_i = (1, \wp_i(u_i), \wp_i'(u_i)) \in \mathcal{E}_i(K) \subset \mathbb{P}^2(K)$ *(ou tels que* $u_i$ *soit un pôle de* $\wp_i$*, auquel cas,* $\gamma_i = (0,0,1)$*), et notons* $\boldsymbol{v} = (1, u_1, \ldots, u_k)$*. Soient également* $B$*,* $E$*,* $V_1, \ldots, V_k$*, des nombres réels vérifiant :*

$$D\log(B) \geq \log(V_1), \qquad V_1 \geq \cdots \geq V_k, \tag{1}$$

$$\log(B) \geq \max\{eh, h(\beta_i), 0 \leq i \leq k\}, \tag{2}$$

$$\log(V_i) \geq \max\left\{\hat{h}(\gamma_i), h, \frac{3\pi|u_i|^2}{|\omega_{1,i}|^2 \Im m\, \tau_i D}\right\}, \tag{3}$$

$$e \leq E \leq \min\left\{\frac{e\,(D\log(V_i))^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{3\pi}|u_i|}{|\omega_{1,i}|\sqrt{\Im m\, \tau_i}}}, 1 \leq i \leq k\right\}. \tag{4}$$

*Si :*

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{L}(\boldsymbol{v})| \quad &\leq \quad -C.D^{2k+2}(\log(B) + \log(DE))\,(\log(E))^{-2k-1} \\ &\times \quad (\log\log(B) + h + \log(DE))^{k+1}\prod_{i=1}^{k}\log(V_i),\end{aligned}$$

*avec :*

$$C = c_1 = 2{,}9.10^6.10^{6k}.4^{2k^2}.(k+1)^{2k^2+9k+12{,}3},$$

*alors* $\mathcal{L}(\boldsymbol{v})$ *est nul, et il existe un sous-groupe connexe* $H$ *(de dimension* $\tilde{d}$ *et de codimension* $\tilde{r}$*) de* $\mathbb{G} = \mathbb{G}_a \times \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$ *dont l'espace tangent à l'origine contient* $\boldsymbol{v}$*, et qui est contenu dans le noyau de la forme linéaire* $\mathcal{L}$*, dont le degré vérifie :*

$$\deg(H) \leq c_2 \frac{c_3^{\tilde{d}}}{\tilde{d}!} D^{2\tilde{d}+1}(\log(\log(B)) + h + \log(DE))^{\tilde{d}+1}\prod_{i=1}^{\tilde{d}}\log(V_i)(\log(E))^{-2\tilde{d}-1},$$

*où l'on peut prendre :*

$$c_2 = 2800.4^k(k+1)^{k+5},$$

*et*

$$c_3 = 3{,}9.10^6.4^{2k}(k+1)^{2k+10}.$$

Pour finir, énonçons la version explicite du théorème de D. MASSER et G. WÜSTHOLZ (*voir* [Ma–Wu1]) qui se déduit de notre résultat :

**Corollaire 2.2** *Soit $d$ un entier $\geq 1$, et $K$ un corps de nombres de degré au plus $d$ sur $\mathbb{Q}$. Supposons que $\mathcal{E}$ soit une courbe elliptique, définie sur $K$, munie d'un modèle de Weierstraß, $y^2 = 4x^3 - g_{2,\mathcal{E}}x - g_{3,\mathcal{E}}$, et notons $h(\mathcal{E}) = \max\{1, h(j_{\mathcal{E}}), h(1, g_{2,\mathcal{E}}, g_{3,\mathcal{E}})\}$. Dans ces conditions, si $\mathcal{E}^\star$ est une autre courbe elliptique, également définie sur $K$, et isogène à $\mathcal{E}$, il existe une isogénie liant $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}^\star$ de degré au plus :*

$$10^{160} d^{20} h(\mathcal{E})^{10}.$$

## Remarques :

- La condition (1) n'est pas véritablement essentielle. Elle sert essentiellement à simplifier l'énoncé du théorème. Elle intervient uniquement au paragraphe 6.5 (dans la preuve de la proposition 6.9) et au sous-paragraphe 7.3, et l'on peut s'en passer à condition de remplacer le terme « $(\log(\log(B)) + h + \log(DE))$ » par « $(\log(\log(B)) + h + \log(DE) + \max\{0, \log(\log(V_i)), 1 \leq i \leq k\})$ », et le terme « $(\log(B) + \log(DE))$ » par « $(\log(B) + \log(DE) + \max\{0, \log(\log(V_i)), 1 \leq i \leq k\})$ ».

- Le seul nouveau paramètre qui intervient ici, par rapport aux minorations de formes linéaires de logarithmes antérieures, est la quantité $h$. Joint à l'entier $k$, il sert à mesurer la complexité arithmétique du groupe algébrique sur lequel on travaille. Il est donc naturel de ne pas le voir apparaître dans le cas rationnel où le groupe algébrique est simplement une puissance du groupe multiplicatif (multipliée parfois une copie du groupe additif).

- Il ne semble pas très facile de conjecturer une dépendance optimale en $h$ de la minoration. D'une part nous avons normalisé les différents paramètres afin de les rendre marginalement dépendants de $h$, (mais ces conditions ne semblent pas très contraignantes au vu d'une conjecture de LANG (*voir* [L2], page 92), qui prédit que la hauteur de NÉRON–TATE d'un point d'ordre infini d'une courbe elliptique est au moins de l'ordre de grandeur de la hauteur de son invariant modulaire ; de plus, il est possible de supprimer la dépendance en $h$ des paramètres $V_i$, à condition de supprimer le paramètre $E$, et obtenir ainsi une dépendance en $h$ de la forme $h^{k+2}$). D'autre part, la dépendance en $h$ que nous avons mise en exergue (*ie.* $h^{k+1}$) provient de la hauteur des équations différentielles, et intervient exactement au même niveau que le terme $\log\log(B)^{k+1}$, et l'on peut raisonnablement conjecturer qu'une minoration en $\log(B)$ est vraie...

- On peut enfin se demander quelles améliorations on peut espérer au niveau de la constante finale $C$. Nous n'avons pas réellement essayé d'optimiser $C$, bien que nous ayons cherché à obtenir une constante «raisonnable». Ainsi, on peut penser que sans idées nouvelles, le terme en $k^{k^2}$ ne pourra être supprimé. Le fait que les fonctions abéliennes aient un ordre de croissance 2 contre 1 pour l'exponentielle usuelle, laisse peu d'espoir du côté de la technique des «petits pas d'extrapolation». On peut toutefois penser que cette technique permet de passer de $k^{2k^2}$ à $k^{k^2}$. Mais nous n'avons pas effectué les calculs avec cette dernière... Les termes d'ordre inférieur peuvent vraisemblablement être raffinés avec des choix de paramètres plus astucieux, bien que je n'ai pas d'idée précise sur les limites de cette méthode de preuve. Je n'ai pas non plus cherché à mettre en œuvre la méthode des déterminants d'interpolation, introduite récemment par M. LAURENT (*voir* [Lau]). Il serait également interessant de voir ce que pourrait donner les méthodes issues de la théorie d'ARAKELOV développées très récemment par J. B. BOST ([Bo]).

- On notera que l'exposant en $h$ est moins bon dans le corollaire ci-dessus que dans le théorème de D. MASSER et G. WÜSTHOLZ : en effet, nous utilisons une forme linéaire alors que ces derniers travaillent avec deux formes simultanées. Il ne fait aucun doute qu'une version «simultanée» du théorème 2.1 donnerait l'exposant au pire 6 (il n'est pas exclu que pour obtenir l'esposant 4, il soit nécéssaire de faire un meilleurs choix de paramètres) au lieu de 10 et, vraisemblablement une meilleure constante. En revanche, il ne semble exclu en revanche qu'une simple application d'un résultat de ce type permette d'obtenir l'estimation en $h^2$ qu'a obtenu dans ce cadre F. PELLARIN ([Pe]).

# 3 Quelques lemmes auxiliaires

## 3.1 Choix du groupe algébrique

Soit $\mathbb{G}_a$ le groupe additif que nous supposons muni d'une $\mathbb{Q}$–structure. Identifions $\mathbb{G}_a(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$. Nous obtenons alors le plongement projectif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & (1, z). \end{array}$$

Soit $\tau$ un élément du demi–plan de Poincaré $\mathfrak{H}$. On notera $\sigma_\tau, \wp_\tau$ les fonctions de Weierstrass correspondant au réseau «normalisé» , *ie.* $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. On utilisera également pour les estimations de nature analytique la fonction $\varphi_\tau$, définie par (on pourra se reporter à [L1], page 246, pour une définition de $\eta$ et plus de détails sur la fonction $\varphi$) :

$$\varphi_\tau = e^{-\frac{1}{2}\eta z^2} . e^{i\pi z} . \sigma_\tau(z).$$

Si $\mathcal{E}$ est une courbe elliptique, donnée par une équation de Weierstrass (de la forme $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$), de réseau de périodes $\Omega = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, nous noterons $\varphi_{\mathcal{E}}$, la fonction de réseau :

$$\varphi_{\mathcal{E}}(z; \omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_2}{\omega_1}\left(\frac{z}{\omega_1}\right)^2} e^{i\pi\frac{z}{\omega_1}} \sigma(z, \Omega).$$

Les relations suivantes permettent de passer des fonctions $\varphi_{\mathcal{E}}, \wp_{\mathcal{E}}$ aux fonctions normalisées $\varphi_\tau$, $\wp_\tau$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi_{\mathcal{E}}(z) & = & \omega_1 \varphi_\tau\left(\dfrac{z}{\omega_1}\right) \\ \wp_{\mathcal{E}}(z) & = & \dfrac{1}{\omega_1^2}\wp_\tau\left(\dfrac{z}{\omega_1}\right). \end{array} \right.$$

Lorsqu'aucune confusion ne nous semblera possible, nous omettrons l'indice $\mathcal{E}$ ou $\tau$ attaché à ces diverses fonctions. Il est clair que $\varphi$ est, au même titre que $\sigma$ un «dénominateur» de $\wp$.

En identifiant l'espace tangent à l'origine $T_{\mathcal{E}_i}(\mathbb{C})$ de la courbe elliptique $\mathcal{E}_i$ introduite au paragraphe précédent à $\mathbb{C}$, nous obtenons un plongement projectif de $\mathcal{E}_i(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ via l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_i : & \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & z & \longmapsto & (\varphi_i^3(z), \varphi_i^3(z)\wp_i(z), \varphi_i^3(z)\wp_i'(z)), \end{array}$$

avec $\varphi_i = \varphi_{\mathcal{E}_i}$. Notons maintenant $\mathbb{G}$, le groupe : $\mathbb{G} = \mathbb{G}_a \times \mathcal{E}_i \times \cdots \times \mathcal{E}_k$ qui est encore muni d'une $\overline{\mathbb{Q}}$–structure. Modulo identification de $T_{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ avec $T_{\mathbb{G}_a}(\mathbb{C}) \oplus T_{\mathcal{E}_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus T_{\mathcal{E}_k}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{k+1}$, nous obtenons une immersion analytique $\boldsymbol{\Phi}$ :

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\Phi} : & \mathbb{C}^{k+1} = T_{\mathbb{G}(\mathbb{C})} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \times \left(\mathbb{P}^2\right)^k = \overline{\mathbb{P}} \\ & (z_0, z_1, \ldots, z_k) & \longmapsto & ((1, z_0), \Phi_1(z_1), \ldots, \Phi_k(z_k)), \end{array}$$

dans un espace multiprojectif $\overline{\mathbb{P}}$. Lorsque le besoin s'en fait sentir, on en déduit aisément un plongement projectif de $\mathbb{G}$, via un SEGRE.

## 3.2 Croissance des fonctions de Weierstraß

Les énoncés qui suivent sont pour la plupart des versions explicites de lemmes auxiliaires que l'on trouve dans [F–P]. Les preuves suivent de très près celles de ces auteurs. Par exemple, les estimations (5) et (7) sont des versions explicites de leur «$\sigma$»–lemme (lemme 7). En fait, nous utiliserons pour des raisons de commodité la relation (7) de préférence à la relation (6). Nous ne donnons donc une version explicite de cette dernière que par souci d'exhaustivité. On trouvera dans [Dav1], théorème 3–1, un analogue (non explicite) de ces estimations pour les variétés abéliennes principalement polarisées, équipées d'un modèle de JACOBI.

**Proposition 3.1** *Pour tout $\tau \in \mathfrak{F}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \max\left\{\left|\varphi_\tau^3(z)\right|, \left|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)\right|, \left|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau'(z)\right|\right\} & \\ \leq 3,33 e^{3\pi\left(\frac{\Im m\,\tau}{4} + |\Im m\,z| + \frac{1}{\Im m\,\tau}|\Im m\,z|^2\right)}; & \end{aligned} \tag{5}$$

$$\max\left\{\left|\varphi_\tau^3(z)\right|, \left|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)\right|, \left|\varphi_\tau^3(z)\wp'_\tau(z)\right|\right\} \\ \geq 7\times 10^{-4} e^{\pi\left(-2{,}51\Im m\,\tau - 3|\Im m\, z| + \frac{3}{\Im m\,\tau}|\Im m\, z|^2\right)}; \tag{6}$$

$$\forall z \notin \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}, \left|\varphi_\tau^2(z)\right| \geq \frac{10^{-2}}{1+|\wp_\tau(z)|} e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\,\tau} e^{-4\pi|\Im m\, z|}. \tag{7}$$

*Démonstration* : rappelons que la fonction $\varphi_\tau(z)$ est égale à la fonction $e^{-\frac{1}{2}\eta_1(\tau)z^2} e^{i\pi z}\sigma_\tau(z)$ et que donc $\varphi_\tau(z)$ possède (*voir* [L1], page 247) le développement en produits infinis qui suit :

$$\varphi_\tau(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(e^{2i\pi z}-1\right)\prod_1^\infty\left(\frac{1}{1-q^n}\right)^2 \times \prod_1^\infty\left(1-e^{2i\pi z}q^n\right)\prod_1^\infty\left(1-e^{-2i\pi z}q^n\right),$$

(on pose comme cela est classiquement fait, $q = e^{2i\pi\tau}$). Soit $z\in\mathbb{C}$, il existe alors $m$, $n$ entiers et $z_0\in\mathbb{C}$ tels que $z = z_0+m+n\tau$ et $z_0 = s+t\tau$, avec $s,t\in\mathbb{R}$, et $|s|$, $|t|\leq\frac{1}{2}$. On vérifie que $\varphi_\tau(z)$ et $\varphi_\tau(z_0)$ sont liés par la relation :

$$\varphi_\tau(z) = (-1)^n e^{-2i\pi n z_0} e^{-i\pi n(n-1)\tau}\varphi_\tau(z_0).$$

- Nous allons tout d'abord majorer $\varphi_\tau(z_0)$ :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\tau(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|e^{2i\pi z_0}-1\right|\prod_1^\infty\left|\frac{1}{1-q^n}\right|^2\prod_1^\infty\left|1-e^{-2\pi t\Im m\,\tau+2i\pi(s+t\Re(\tau))}q^n\right| \\
&\times \prod_1^\infty\left|1-e^{2\pi t\Im m\,\tau-2i\pi(s+t\Re(\tau))}q^n\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left|e^{-2\pi\Im m\, z_0}+1\right|\prod_1^\infty\frac{1}{\left(1-e^{-2\pi n\Im m\,\tau}\right)^2} \\
&\times \left(1+e^{-4\pi n\Im m\,\tau}+\left(e^{-2\pi t\Im m\,\tau}+e^{2\pi t\Im m\,\tau}\right)e^{-2\pi n\Im m\,\tau}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\tau\in\mathfrak{F}$, $\Im m\,\tau\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit :

$$\prod_1^\infty\frac{1}{\left(1-e^{-2\pi n\Im m\,\tau}\right)^2}\leq\prod_1^\infty\frac{1}{\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}n}\right)^2}.$$

Par ailleurs,

$$\log\left(\frac{1}{1-e^{-\pi n\sqrt{3}}}\right)\leq e^{-\pi n\sqrt{3}}+e^{-2\pi n\sqrt{3}},$$

et donc :

$$\prod_1^\infty \frac{1}{\left|1-e^{-\pi\sqrt{3}n}\right|^2} \leq e^{2\left(\sum_1^\infty e^{-\pi n\sqrt{3}}+e^{-2\pi n\sqrt{3}}\right)}$$
$$= e^{\frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}+\frac{2e^{-2\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}}} \leq 1,0088.$$

Nous majorons encore comme précédemment :

$$\prod_1^\infty \left(1+e^{-4\pi n\Im m\,\tau}+\left(e^{-2\pi t\Im m\,\tau}+e^{2\pi t\Im m\,\tau}\right)e^{-2\pi n\Im m\,\tau}\right)$$
$$\leq \prod_1^\infty \left(1+e^{-2\sqrt{3}\pi n}+1,0044e^{-\pi\sqrt{3}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)$$
$$\leq e^{\frac{e^{-2\sqrt{3}\pi}}{1-e^{-2\sqrt{3}\pi}}+1,0044\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}{1-e^{-\sqrt{3}\pi}}} \leq 1,069.$$

En combinant ces inégalités, on obtient la majoration :

$$|\varphi_\tau(z_0)| \leq 0,172\left(1+e^{-2\pi\Im m\,z_0}\right).$$

En remplaçant le facteur d'automorphie par sa valeur, on en déduit donc l'inégalité :

$$\begin{aligned}|\varphi_\tau(z)| &\leq 0,172(1+e^{-2\pi\Im m\,z_0})e^{\pi\left(2n\Im m\,z_0+n^2\Im m\,\tau-n\Im m\,\tau\right)}\\ &= 0,172e^{\pi\left(\frac{(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau}+|\Im m\,z|\right)}e^{-\pi\left(n\Im m\,\tau+t^2\Im m\,\tau+|n+t|\Im m\,\tau\right)}\\ &\times \left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \leq 0,26e^{\pi\left(\frac{(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau}+|\Im m\,z|+\frac{\Im m\,\tau}{4}\right)}.\end{aligned}$$

En effet, si $n>0$,

$$\begin{aligned}&e^{-\pi\left(n\Im m\,\tau+t^2\Im m\,\tau+|n+t|\Im m\,\tau\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right)\\ &\qquad= e^{-\pi\Im m\,\tau\left(2n+t^2+t\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right)\\ &\qquad\leq e^{-\frac{3\pi\Im m\,\tau}{4}}+e^{-\frac{7}{4}\pi\Im m\,\tau}\\ &\qquad\leq 2e^{-\frac{3\pi\Im m\,\tau}{4}} \leq 0,2e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}.\end{aligned}$$

Si $n = 0$ et $t \geq 0$,

$$e^{-\pi\left(n\Im m\,\tau+t^2\Im m\,\tau+|n+t|\Im m\,\tau\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right)$$
$$= e^{-\pi\Im m\,\tau\left(t^2+t\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \leq 2 \leq 1,1e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}.$$

Si $n = 0$ et $t \leq 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\pi\left(n\Im m\,\tau+t^2\Im m\,\tau+|n+t|\Im m\,\tau\right)}&\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \\ &= e^{-\pi\Im m\,\tau\left(t^2-t\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \\ &\leq e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}e^{-\pi\Im m\,\tau\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)} \\ &+e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}e^{-\pi\Im m\,\tau\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)} \\ &\leq e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}\left(1+e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}\right) \leq 1,507e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}. \end{aligned}$$

Reste enfin le cas où $n < 0$ :

$$\begin{aligned} e^{-\pi\left(n\Im m\,\tau+t^2\Im m\,\tau+|n+t|\Im m\,\tau\right)}&\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \\ &= e^{-\pi\Im m\,\tau\left(t^2-t\right)}\left(1+e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\right) \\ &\leq 1,507e^{\frac{\pi\Im m\,\tau}{4}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$|\varphi_\tau(z)|^3 \leq 0,0176\left(e^{\frac{3\pi(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau}+3\pi|\Im m\,z|+\frac{3\pi\Im m\,\tau}{4}}\right).$$

Majorons maintenant $|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)|$. Comme :

$$\varphi_\tau^2(z)\wp_\tau(z) = \wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau^2(z) - \frac{\varphi_\tau\left(z+\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\varphi_\tau^2\left(\frac{1}{2}\right)},$$

(cette relation est évidente à partir de [L1], page 243), la majoration de $\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)$ découle immédiatement de celle obtenue précédemment pour $\varphi_\tau(z)$ sitôt que l'on dispose d'une majoration de $\wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right)$ et d'une minoration de $\varphi_\tau\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour minorer $\varphi_\tau\left(\frac{1}{2}\right)$, il suffit de reprendre la formule donnant le développement en produits infinis de $\varphi_\tau(z)$ :

$$\begin{aligned}\left|\varphi_\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \frac{1}{\pi}\prod_1^\infty |1+q^n|^2 \prod_1^\infty \frac{1}{|1-q^n|^2} \\ &\geq \frac{1}{\pi}\prod_1^\infty \frac{1}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{3}n}\right)^2} \prod_1^\infty \left(1-e^{-\pi\sqrt{3}n}\right)^2.\end{aligned}$$

Comme :

$$\log\left(\frac{1-e^{-\pi\sqrt{3}n}}{1+e^{-\pi\sqrt{3}n}}\right) \geq -2e^{-\pi\sqrt{3}n} - e^{-3\pi\sqrt{3}n},$$

on en déduit :

$$\left|\varphi_\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{\pi} e^{-4\frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}} e^{-2\frac{e^{-3\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-3\pi\sqrt{3}}}} \geq 0,312.$$

Pour majorer $\wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right)$, il suffit d'utiliser le $q$–développement (*voir* [L1], page 46) :

$$\begin{aligned}\wp_\tau(z) &= -4\pi^2\left[\frac{1}{12} + \frac{e^{2i\pi z}}{(1-e^{2i\pi z})^2}\right. \\ &+ \left.\sum_{m\geq 1} \frac{e^{2i\pi z}q^m}{(1-e^{2i\pi z}q^m)^2} + \frac{e^{-2i\pi z}q^m}{(1-e^{-2i\pi z}q^m)^2} - 2\sum_{n\geq 1}\frac{nq^n}{1-q^n}\right].\end{aligned}$$

En remplaçant $z$ par $\frac{1}{2}$, on obtient alors la majoration :

$$\begin{aligned}\left|\wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right)\right| &\leq 4\pi^2\left[\frac{1}{6} + 2\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-\pi m\sqrt{3}}}{\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}m}\right)^2} + 2\sum_{n\geq 1}\frac{ne^{-\pi\sqrt{3}n}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}n}}\right] \\ &\leq 4\pi^2\left[\frac{1}{6} + 4\frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}}\right)^3}\right] \leq 7,274.\end{aligned}$$

On obtient donc en combinant les inégalités précédentes :

$$\left|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau(z)\right| \leq 0,309 e^{\frac{3}{4}\pi\Im m\,\tau+3\pi|\Im m\,z|+3\frac{\pi}{\Im m\,\tau}|\Im m\,z|^2}.$$

Passons enfin à la majoration de $|\varphi_\tau^3(z)\wp'_\tau(z)|$. Pour cela, nous allons tout d'abord établir une majoration pour $|\varphi'_\tau(z)|$ (bien entendu, la formule de CAUCHY donne une telle majoration, à partir de la majoration déjà établie pour $|\varphi_\tau(z)|$, mais au prix d'une perte). Il suffit, là encore, de majorer $|\varphi'_\tau(z_0)|$ et nous partons toujours de la formule de développement en produits infinis :

$$\begin{aligned}
\varphi'_\tau(z_0) &= e^{2i\pi z_0}\prod_1^\infty \frac{1}{(1-q^n)^2}\prod_1^\infty\left(1-e^{2i\pi z_0}q^n\right)\prod_1^\infty\left(1-e^{-2i\pi z_0}q^n\right)\\
&+ \left(e^{2i\pi z_0}-1\right)\prod_{n=1}^\infty\frac{1}{(1-q^n)^2}\sum_{m=1}^\infty\prod_{n=1,n\neq m}^\infty\left(1-e^{2i\pi z_0}q^n\right)\\
&\qquad\times\prod_{n=1,n\neq m}^\infty\left(1-e^{-2i\pi z_0}q^n\right)\left(-q^m\left(e^{2i\pi z_0}-e^{-2i\pi z_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
|\varphi'_\tau(z_0)| &\leq \left|e^{2i\pi z_0}\right|\prod_1^\infty\frac{1}{|1-q^n|^2}\prod_1^\infty\left|1-e^{2i\pi z_0}q^n\right|\prod_1^\infty\left|1-e^{-2i\pi z_0}q^n\right|\\
&+ \prod_1^\infty\frac{1}{|1-q^n|^2}\prod_1^\infty\left|1-e^{2i\pi z_0}q^n\right|\prod_1^\infty\left|1-e^{-2i\pi z_0}q^n\right|\\
&\times \left|e^{2i\pi z_0}-1\right|\sum_{m\geq 1}\frac{\left|q^m\left(e^{2i\pi z_0}-e^{-2i\pi z_0}\right)\right|}{\left|\left(1-e^{2i\pi z_0}q^m\right)\left(1-e^{-2i\pi z_0}q^m\right)\right|}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
|\varphi'_\tau(z_0)| &\leq e^{\frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}+\frac{3e^{-2\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+1{,}0044\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}{1-e^{-\sqrt{3}\pi}}}e^{-2\pi\Im m\,z_0}\\
&+ e^{\frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}+\frac{3e^{-2\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}}+1{,}0044\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}{1-e^{-\sqrt{3}\pi}}}\\
&\times \sum_{m\geq 1}\frac{1,0044e^{-\pi\sqrt{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)}\left(e^{-2\pi\Im m\,z_0}+1\right)}{\left(1-e^{-2\pi\sqrt{3}m}-1,0044e^{-\pi\sqrt{3}\left(m-\frac{1}{2}\right)}\right)}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$|\varphi'_\tau(z_0)| \leq 1,079 \left[0,072 \left(e^{-2\pi\Im m\ z_0} + 1\right) + e^{-2\pi\Im m\ z_0}\right].$$

En tenant compte du facteur d'automorphie, on en déduit la majoration suivante pour $|\varphi'_\tau(z)|$ :

$$\begin{aligned}|\varphi'_\tau(z)| &\leq 1,079 e^{2\pi n\Im m\ z_0} e^{\pi n^2\Im m\ \tau - \pi n\Im m\ \tau} \\ &\times \left[0,072 \left(e^{-2\pi\Im m\ z_0} + 1\right) + e^{-2\pi\Im m\ z_0}\right].\end{aligned}$$

Ce qui nous donne, en remplaçant $z$ par sa valeur et en effectuant une simplification :

$$\begin{aligned}|\varphi'_\tau(z)| &\leq 1,079 e^{\pi\left(\frac{|\Im m\ z|^2}{\Im m\ \tau} + |\Im m\ z|\right)} e^{-\pi\left(n\Im m\ \tau + t^2\Im m\ \tau + |n+t|\Im m\ \tau\right)} \\ &\times \left[0,072 \left(e^{-2\pi\Im m\ z_0} + 1\right) + e^{-2\pi\Im m\ z_0}\right] \\ &\leq 1,197 e^{\pi\left(\frac{|\Im m\ z|^2}{\Im m\ \tau} + |\Im m\ z| + \frac{\pi\Im m\ \tau}{4}\right)}.\end{aligned}$$

On peut donc conclure et majorer la dernière fonction qui manque, à savoir $|\varphi^3_\tau(z)\wp'_\tau(z)|$ :

$$\begin{aligned}|\varphi^3_\tau(z)\wp'_\tau(z)| &= \left| \frac{\varphi_\tau(z)\varphi'_\tau\left(z+\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\varphi^2_\tau\left(\frac{1}{2}\right)} \right. \\ &+ \frac{\varphi_\tau(z)\varphi'_\tau\left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\varphi^2_\tau\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &- \left. \frac{2\varphi'_\tau(z)\varphi_\tau\left(z+\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\varphi^2_\tau\left(\frac{1}{2}\right)} \right|.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\tau^3(z)\wp_\tau'(z)| &\leq 4\times 1,197\left(\frac{1}{0,312}\right)^2 0,26^2 \\
&\times\ e^{\pi\left(\frac{3|\Im m\ z|^2}{\Im m\ \tau}+3|\Im m\ z|+\frac{3\pi\Im m\ \tau}{4}\right)} \\
&\leq 3,33e^{\pi\left(\frac{3|\Im m\ z|^2}{\Im m\ \tau}+3|\Im m\ z|+\frac{3\pi\Im m\ \tau}{4}\right)}
\end{aligned}$$

(on vérifie cette identité en dérivant la relation page 243 (avec $a=\frac{1}{2}$) de [L1]). La première inégalité de la proposition 3.1 est donc entièrement démontrée.

- Passons maintenant à la preuve de la relation (6). Comme précédemment, écrivons $z=z_0+n\tau+m$, $n$, $m$ éléments de $\mathbb{Z}$, et $z_0\in\mathbb{C}$ tels que $z_0=s+t\tau$, avec $|s|$, $|t|\leq\frac{1}{2}$. L'idée de la preuve est très simple : il suffit de remarquer que $\varphi_\tau$ a pour lieu de zéros le réseau de périodes associé à $\tau$, et donc en imposant à $z$ d'être «loin» de ce dernier, on va pouvoir vérifier que $\varphi_\tau^3(z)$ vérifie la minoration recherchée. Dans le cas où $z$ est «proche» du réseau des périodes, on prendra $\varphi_\tau^3\wp_\tau'(z)$, qui n'a pas de zéros sur le réseau de périodes.

Calculons $|\varphi_\tau(z_0)|$ :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\tau(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|e^{2i\pi z_0}-1\right|\prod_1^\infty\left|\frac{1}{1-q^n}\right|^2 \\
&\times\ \prod_1^\infty\left|1-e^{-2\pi t\Im m\ \tau+2i\pi(s+t\Re(\tau))}q^n\right| \\
&\times\ \prod_1^\infty\left|1-e^{2\pi t\Im m\ \tau-2i\pi(s+t\Re(\tau))}q^n\right| \\
&\geq \frac{1}{2\pi}\left|e^{2i\pi z_0}-1\right|\prod_1^\infty\frac{1}{(1+e^{-2\pi n\Im m\ \tau})^2} \\
&\times\ \left(1-e^{-4\pi n\Im m\ \tau}-\left(e^{-2\pi t\Im m\ \tau}+e^{2\pi t\Im m\ \tau}\right)e^{-2\pi n\Im m\ \tau}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\tau\in\mathfrak{F}$, on en déduit :

$$\prod_1^\infty\frac{1}{(1+e^{-2\pi n\Im m\ \tau})^2}\geq\prod_1^\infty\frac{1}{\left(1+e^{-\pi n\sqrt{3}}\right)^2}\geq e^{-\frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}}\geq 0,99.$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\prod_1^\infty (1-e^{-4\pi n\Im m\,\tau} - \left(e^{-2\pi t\Im m\,\tau} + e^{2\pi t\Im m\,\tau}\right) e^{-2\pi n\Im m\,\tau}\Big) \\
&\qquad \geq \prod_1^\infty \left(1 - e^{-2\pi n\sqrt{3}} - 1,0044 e^{-\pi\sqrt{3}\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&\qquad \geq e^{-\frac{e^{-2\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}} - 1{,}0044\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}} - \frac{e^{-4\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-4\pi\sqrt{3}}}} \\
&\qquad \times\ e^{-1{,}0044^2\frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}} - 2\times 1{,}0044\frac{e^{-\frac{5}{2}\pi\sqrt{3}}}{1-e^{-3\pi\sqrt{3}}}} \geq 0,93.
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient :

$$|\varphi_\tau(z_0)| \geq 0,146|1 - e^{2i\pi z_0}|.$$

Supposons maintenant que $|1 - e^{2i\pi z_0}| \geq \frac{1}{2}$. En tenant compte de cette hypothèse, on a :

$$|\varphi_\tau(z_0)| \geq 0,073.$$

Dans le cas général, on déduit du facteur d'automorphie,

$$|\varphi_\tau(z)| \geq 0,073 e^{2\pi n\Im m\,(z_0) + \pi n(n-1)\Im m\,\tau}.$$

Ce qui donne :

$$|\varphi_\tau(z)| \geq 0,073 e^{\pi\left(\frac{(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau} - |\Im m\,z| - \frac{3}{4}\Im m\,\tau\right)}.$$

En élevant au cube, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\tau(z)^3| &\geq 3,8 \times 10^{-4} e^{3\pi\left(\frac{(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau} - |\Im m\,z| - \frac{3}{4}\Im m\,\tau\right)} \\
&\geq 7 \times 10^{-4} e^{\pi\left(3\frac{(\Im m\,z)^2}{\Im m\,\tau} - 3|\Im m\,z| - 2{,}51\Im m\,\tau\right)},
\end{aligned}$$

en effet, pour avoir cette dernière inégalité, il suffit de se convaincre que :

$$3,8 \times 10^{-4} \geq 7 \times 10^{-4} e^{-0{,}26\pi\Im m\,\tau},$$

ce que l'on vérifie aisément, en minorant $\Im m\,\tau$ par $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il reste donc à traiter le cas où $|1 - e^{2i\pi z_0}| \leq \frac{1}{2}$. Calculons dans ce cas

$|\varphi_\tau^3(z_0)\wp'_\tau(z_0)|$. Nous disposons déjà de la minoration :

$$|\varphi_\tau(z_0)^3| \geq (0,146)^3|1-e^{2i\pi z_0}|^3.$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
|\wp'_\tau(z_0)| &\geq 4\pi^2\left|\frac{2i\pi e^{2i\pi z_0}}{(1-e^{2i\pi z_0})^2}+\frac{4i\pi e^{4i\pi z_0}}{(1-e^{2i\pi z_0})^3}\right.\\
&+ \sum_{m\geq 1}\left[\frac{2i\pi q^m e^{2i\pi z_0}}{(1-e^{2i\pi z_0}q^m)^2}-\frac{2i\pi q^m e^{-2i\pi z_0}}{(1-e^{-2i\pi z_0}q^m)^2}\right]\\
&+ \left.\sum_{m\geq 1}\left[\frac{4i\pi q^{2m} e^{4i\pi z_0}}{(1-q^m e^{2i\pi z_0})^3}-\frac{4i\pi q^{2m} e^{-4i\pi z_0}}{(1-q^m e^{-2i\pi z_0})^3}\right]\right|.
\end{aligned}$$

Commençons par majorer :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m\geq 1}\frac{2i\pi q^m e^{2i\pi z_0}}{(1-e^{2i\pi z_0}q^m)^2}\right| &+ \left|\sum_{m\geq 1}\frac{2i\pi q^m e^{-2i\pi z_0}}{(1-e^{-2i\pi z_0}q^m)^2}\right|\\
&\leq 2\pi\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-2\pi(m+t)\Im m\,\tau}}{|1-q^m e^{2i\pi z_0}|^2}\\
&+ 2\pi\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-2\pi(m-t)\Im m\,\tau}}{|1-q^m e^{-2i\pi z_0}|^2}\\
&\leq \frac{2\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^2}\sum_{m\geq 1}e^{-2\pi\Im m\,\tau\left(m-\frac{1}{2}\right)}\\
&\leq \frac{2\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^2}\frac{e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}}{1-e^{-2\pi\Im m\,\tau}}\\
&\leq e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}\left(\frac{2\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^2}\frac{1}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}\right)\\
&\leq 7,27e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m\geq 1}\frac{4i\pi q^{2m}e^{4i\pi z_0}}{(1-q^me^{2i\pi z_0})^3}\right| &+ \left|\sum_{m\geq 1}\frac{4i\pi q^{2m}e^{-4i\pi z_0}}{(1-q^me^{-2i\pi z_0})^3}\right| \\
&\leq 4\pi\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-4\pi(m+t)\Im m\,\tau}}{|1-q^me^{2i\pi z_0}|^3} \\
&+ 4\pi\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-4\pi(m-t)\Im m\,\tau}}{|1-q^me^{-2i\pi z_0}|^3} \\
&\leq \frac{4\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^3}\sum_{m\geq 1}e^{-4\pi\Im m\,\tau\left(m-\frac{1}{2}\right)} \\
&\leq \frac{4\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^3}\frac{e^{-2\pi\Im m\,\tau}}{1-e^{-4\pi\Im m\,\tau}} \\
&\leq e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}\left(\frac{4\times 1,0044\pi}{\left(1-e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)^3}\frac{e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}}\right) \\
&\leq 4,5\times 10^{-3}e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\tau^3(z_0)\wp'(z_0)| &\geq 0,146^3\times 4\pi^2\left|2i\pi e^{2i\pi z_0}(1-e^{2i\pi z_0})+4i\pi e^{4i\pi z_0}\right| \\
&- 0,146^3\times 4\pi^2\times 7,28e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}}\left|1-e^{2i\pi z_0}\right|^3 \\
&\geq 0,122\times 2\pi e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\left|1+e^{2i\pi z_0}\right| \\
&- 0,122\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 7,28e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}} \\
&\geq 0,122e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\left[3\pi-0,91e^{-\frac{\pi\Im m\,\tau}{2}+2\pi t\Im m\,\tau}\right] \\
&\geq 0,122e^{-2\pi t\Im m\,\tau}\left[3\pi-0,91e^{-\pi\Im m\,\tau\left(\frac{1}{2}-2t\right)}\right].
\end{aligned}$$

En effet, comme $|1-e^{2i\pi z_0}|\leq\frac{1}{2}$, on a $|1+e^{2i\pi z_0}|\geq\frac{3}{2}$. De plus, on déduit encore de l'inégalité $|1-e^{2i\pi z_0}|\leq\frac{1}{2}$, que $|e^{2i\pi z_0}|\geq\frac{1}{2}$, et donc,

$-2\pi t \Im m\ \tau \geq -\log 2$, ce qui donne :

$$t \leq \frac{\log(2)}{2\pi \Im m\ \tau} \leq \frac{\log(2)}{\pi\sqrt{3}}.$$

On en déduit aisément :

$$|\varphi_\tau^3(z_0)\wp'(z_0)| \geq 0,122 \times 8,95 e^{-0,26\pi \Im m\ \tau} \geq 1,09 e^{-0,26\pi \Im m\ \tau}.$$

En appliquant le facteur d'automorphie, on en déduit le résultat cherché :

$$|\varphi_\tau^3(z)\wp'(z)| \geq 1,09 e^{\left(3\pi \frac{(\Im m\ z)^2}{\Im m\ \tau} - 3\pi|\Im m\ z| - 2,51 \Im m\ \tau\right)},$$

ce qui établit la relation (6).

- Il reste à vérifier la minoration (7) : comme

$$|\varphi_\tau^2(z)| = e^{4\pi n \Im m\ z_0} e^{2\pi n(n-1)\Im m\ \tau} |\varphi_\tau^2(z_0)| \geq e^{-4\pi|\Im m\ z|}|\varphi_\tau^2(z_0)|,$$

et que $\wp$ est périodique de période $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, il suffit d'établir que

$$|\varphi_\tau^2(z_0)| \geq \frac{10^{-2}}{1 + |\wp(z_0)|} e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\ \tau}$$

pour avoir la relation (7).

Supposons tout d'abord que $z_0 = s + t\tau$, avec $|s| \leq \frac{1}{2}$ et $|t| \leq \frac{1}{4}$ et calculons :

$$\psi_2(z) = e^{i\pi\tau} \frac{\varphi_\tau\left(z + \frac{\tau}{2}\right)\varphi_\tau\left(z - \frac{\tau}{2}\right)}{\varphi_\tau^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}.$$

La fonction $\psi_2$ admet le développement en produits infinis suivant :

$$\psi_2(z) \quad = \quad -e^{2i\pi z} \prod_1^\infty \frac{\left(1 - e^{2i\pi z} q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - e^{-2i\pi z} q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(1 - q^{n-\frac{1}{2}}\right)^4}.$$

Pour établir ce $q$–développement, on procède comme suit. On commence par déduire de [L1], page 243 que :

$$\varphi_\tau^2(z)\wp_\tau(z) = \wp_\tau\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi_\tau^2(z) - \psi_2(z).$$

Le $q$–développement de $\psi_2$ se déduit alors aisément de celui de $\varphi_\tau$. Comme $|t| \leq \frac{1}{4}$,

$$|e^{2i\pi z_0}| = e^{-2\pi t \Im m\, \tau} \geq e^{-2\pi |t| \Im m\, \tau} \geq e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau}.$$

On obtient alors facilement :

$$\begin{aligned}
|\psi_2(z_0)| &\geq e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau} \prod_1^\infty \frac{1}{\left(1+e^{-\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}\right)^4} \prod_1^\infty \left(1-e^{-\pi\left(n-\frac{3}{4}\right)\sqrt{3}}\right)^4 \\
&\geq e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau} e^{-\frac{4e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}}} e^{-4\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}}{1-e^{-\pi\sqrt{3}}} - \frac{4e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{3}}}} \\
&\geq 0,21.e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau}.
\end{aligned}$$

Si maintenant $z_0 = s + t\tau$ avec cette fois–ci $\frac{1}{4} < |t| \leq \frac{1}{2}$, nous allons considérer la fonction $\psi_1$ dont la définition est :

$$\psi_1(z) = -\frac{\varphi_\tau\left(z+\frac{1}{2}\right)\varphi_\tau\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\varphi_\tau^2\left(\frac{1}{2}\right)},$$

et le développement en produits est (pour établir ce développement, on procède comme pour la fonction $\psi_2$) :

$$-\frac{1}{4}\left(e^{2i\pi z}+1\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1}{(1+q^n)^4} \prod_1^\infty \left(1+e^{2i\pi z}q^n\right)^2 \left(1+e^{-2i\pi z}q^n\right)^2.$$

Nous minorons encore $\psi_1$ comme précédemment :

$$\left|e^{2i\pi z_0}+1\right| \geq 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau}.$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
|\psi_1(z_0)| &\geq \frac{1}{4}\left(1-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1}{\left(1+e^{-\pi n\sqrt{3}}\right)^4} \\
&\times \prod_1^\infty \left(1-e^{-\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}\right)^4 \geq 0,1e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\, \tau}.
\end{aligned}$$

Pour minorer $\varphi_\tau(z_0)^2$, il suffit maintenant d'utiliser la formule classique :

$$\varphi_\tau^2(z_0)\wp(z_0) = e_i\varphi_\tau^2(z_0) - \psi_i(z_0). \quad i = 1,2$$

(ici, $e_i$ désigne $\wp\left(\frac{1}{2}\right)$ si $i=1$ et $\wp\left(\frac{\tau}{2}\right)$ si $i=2$).

Nous disposons déjà d'une majoration pour $|e_1|$. Il nous reste à majorer $|e_2|$ :

$$\begin{aligned}
|e_2| &\leq 4\pi^2\left[\tfrac{1}{12}+\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right)^2}+\textstyle\sum_{m\geq 1}\dfrac{e^{-\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}}{\left(1-e^{-\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}\right)^2}\right]\\
&+ 4\pi^2\left[\sum_{m\geq 1}\frac{e^{-\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}}{\left(1-e^{-\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}}\right)^2}+2\sum_{n\geq 1}\frac{ne^{-\pi n\sqrt{3}}}{1-e^{-\pi n\sqrt{3}}}\right]\\
&\leq 4\pi^2\left[\tfrac{1}{12}+\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right)^2}+\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}\right)^2\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}}\right)}\right]\\
&+ 4\pi^2\left[\frac{e^{-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}}}{\left(1-e^{\frac{-3\pi\sqrt{3}}{2}}\right)^2\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}}\right)}+2\frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{\left(1-e^{-\pi\sqrt{3}}\right)^3}\right]\leq 9,62.
\end{aligned}$$

D'où,

$$|\psi_i(z_0)|\leq|\varphi_\tau^2(z_0)|\left(9,62+|\wp(z_0)|\right).$$

On en déduit donc :

$$\left|\varphi_\tau^2(z_0)\right|\geq\frac{0,1}{\left(10+|\wp_\tau(z_0)|\right)}e^{-\frac{\pi}{2}\Im m\,\tau}.$$

La proposition 3.1 est donc entièrement établie.

Nous aurons également besoin de quelques autres lemmes de nature analytique.

**Lemme 3.2** *Soit $\tau\in\mathfrak{F}$ tel que $j(\tau)\neq 0$ et $\omega_1\in\mathbb{C}$. On dispose alors des estimations suivantes :*

$$|\omega_1|\leq\frac{1}{\left(12|g_2(\omega_1,\tau\omega_1)|\right)^{\frac{1}{4}}}e^{1,85-\frac{1}{6}\pi\Im m\,\tau}|j(\tau)|^{\frac{1}{12}};\tag{8}$$

$$|\omega_1| \geq \frac{1}{(12|g_2(\omega_1, \tau\omega_1)|)^{\frac{1}{4}}} e^{1,825 - \frac{1}{6}\pi \Im m\, \tau} |j(\tau)|^{\frac{1}{12}}. \tag{9}$$

*Si* $j(\tau) = 0$, *ie* $\tau = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, *alors :*

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3} \left(g_3(\omega_1 e^{\frac{2i\pi}{3}})\right)^{\frac{1}{6}}.$$

*Démonstration* : ce lemme est immédiat à partir du $\Delta$–lemme (lemme 4) de [F–P], et des relations : $\omega_1^4 = \frac{g_2(\tau)}{g_2(\omega_1, \omega_1\tau)}$, et $g_2(\tau)^3 = \frac{\Delta(\tau) j(\tau)}{12^3}$.

**Lemme 3.3** *Soit* $\tau \in \mathfrak{F}$, *et* $z \in \mathbb{C}$, *tel que* $|z| \leq \frac{1}{10}$. *On a alors :*

$$|\wp_\tau(z)| \geq \frac{0,2}{|z|^2}.$$

*Démonstration* : le $q$–développement de $\wp_\tau(z)$ nous donne la minoration :

$$\begin{aligned} |\wp_\tau(z)| &\geq \left| \frac{4\pi^2 e^{2i\pi z}}{(1 - e^{2i\pi z})^2} \right| \\ &- 4\pi^2 \left[ \frac{1}{12} + 2e^{\frac{\pi}{5}} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{-\pi\sqrt{3}m}}{\left(1 - e^{\frac{\pi}{5} - \sqrt{3}\pi m}\right)^2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n e^{-\pi n \sqrt{3}}}{1 - e^{-\pi\sqrt{3}n}} \right]. \end{aligned}$$

Les calculs précédents nous permettent de majorer aisément le terme entre crochets :

$$\begin{aligned} & 4\pi^2 \left[ \frac{1}{12} + 2e^{\frac{\pi}{5}} \sum_{m \geq 1} \frac{e^{-\pi\sqrt{3}m}}{\left(1 - e^{\frac{\pi}{5} - \sqrt{3}\pi m}\right)^2} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n e^{-\pi n \sqrt{3}}}{1 - e^{-\pi\sqrt{3}n}} \right] \\ \leq\ & 4\pi^2 \left[ \frac{1}{12} + \frac{2e^{\frac{\pi}{5}}}{\left(1 - e^{-\pi(\sqrt{3} - \frac{1}{5})}\right)^2} \frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{(1 - e^{-\pi\sqrt{3}})} + 2 \frac{e^{-\pi\sqrt{3}}}{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{3}}\right)^3} \right] \leq 4,3. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$|\wp_\tau(z)| \geq 4\pi^2 \frac{e^{\frac{-\pi}{5}}}{|1 - e^{2i\pi z}|^2} - 4,3.$$

Par ailleurs, on a $|1-e^{2i\pi z}| = |2i\pi z|\left|1+\sum_{n\geq 2}\frac{(2i\pi z)^{n-1}}{n!}\right|$. On en déduit $|1-e^{2i\pi z}| \leq |2\pi z|\left|\frac{5}{10-2\pi}\right|$, en tenant compte de l'inégalité $|z| \leq \frac{1}{10}$. En mettant ces inégalités ensemble, on en déduit :

$$|\wp_\tau(z)| \geq \frac{e^{-\frac{\pi}{5}}\left(\frac{10-2\pi}{5}\right)^2}{|z|^2} - 4,3;$$

ce qui entraine :

$$|\wp_\tau(z)| \geq \frac{0,2}{|z|^2}.$$

Le lemme 3.3 est donc établi.

**Lemme 3.4** *Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, définie sur un corps de nombres $K$, de degré $D$ sur $\mathbb{Q}$ donnée avec un modèle de Weierstraß sur $K$ :*

$$\mathcal{E}: \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

*Notons $h = \max\{1, h(1, g_2, g_3)\}$. Alors, pour tout point $P \in \mathcal{E}(K)$, on a :*

$$-\frac{3}{4}h - 5\log(2) \leq h(P) - \hat{h}(P) \leq \frac{3}{2}h + 8\log(2).$$

*Démonstration* : c'est essentiellement le théorème de H. ZIMMER (*voir* [Z]). La seule différence est qu'il prend pour modèle une équation de WEIERSTRASS de la forme : $y^2 = x^3 + ax + b$, et qu'il prend pour $h$ la hauteur du point $(1, \sqrt{a}, \sqrt[3]{b})$. On obtient donc ce lemme immédiatement, une fois les normalisations nécessaires effectuées.

## 3.3 Dérivations

Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, et $f$ une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^n$ ; on note alors :

$$D_{\boldsymbol{x}} f = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial z_i}.$$

Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$. On dit qu'une fonction $f$, analytique au voisinage d'un point $\boldsymbol{z}$ de $\mathbb{C}^n$ a un zéro (ou s'annule) en $\boldsymbol{z}$ à un ordre $\geq T$ le long de $V$ s'il exite une base $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_h)$ de $V$ telle que :

$$D_{\boldsymbol{x}_1}^{t_1} \circ \cdots \circ D_{\boldsymbol{x}_h}^{t_h} f(\boldsymbol{z}) = 0,$$

pour tout $h$–uplet $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_h)$ de $\mathbb{Z}^h$ vérifiant :

$$\forall i, 1 \leq i \leq h, t_i \geq 0; \quad |\boldsymbol{t}| = t_1 + \cdots + t_h < T.$$

On dit également qu'une telle fonction $f$ a un zéro d'ordre exactement $T$ en $\boldsymbol{z}$ le long de $V$ si de plus il existe une dérivée d'ordre $T$ de $f$ (de la forme précédente) ne s'annulant pas en $\boldsymbol{z}$ (on dit également que « $f$ est d'ordre exact $T$ en $\boldsymbol{z}$ le long de $V$ »). Ces définitions ne dépendent clairement pas du choix de la base $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_h)$ de l'espace $V$. On utilise ici les notations $\overline{\mathbb{P}}$, $\boldsymbol{\Phi}$, introduites au paragraphe 3.1. Le lemme qui suit est une version explicite du lemme 2.2 de [Hi1], qui est un des points clef de la méthode de N. Hirata.

**Lemme 3.5** *Soient $H$ un nombre réel $\geq e$, $L_0, \ldots, L_k$ des nombres réels positifs, et $l$ un entier $\geq 1$. Soient encore $\boldsymbol{x}_i$, $(1 \leq i \leq l)$, $l$ points de $\mathbb{C}^{k+1}$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{Z}^l$, $t_1, \ldots, t_l \geq 0$. Soient $P$ un polynôme, élément de $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]$ de multidegré $\leq (L_0, \ldots, L_k)$ dont les coefficients sont de modules $\leq H$ et $\boldsymbol{v} = (v_0, \ldots, v_k)$ un élément de $\mathbb{C}^{k+1}$. Fixons les notations suivantes :*

$$\xi_0 = \max\{1, |x_{1,0}|, \ldots, |x_{l,0}|\}, \quad \xi_1 = \max\{1, |x_{i,j}|, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k\},$$

$$D^{\boldsymbol{t}}_{\underline{\boldsymbol{x}}} = D^{t_1}_{\boldsymbol{x}_1} \circ \cdots \circ D^{t_l}_{\boldsymbol{x}_l}, \quad T = \sum_{1 \leq i \leq l} t_i,$$

*$M_0 = \min\{L_0, T\}$ et enfin, $F = P \circ \boldsymbol{\Phi}$. On a alors :*

$$\begin{aligned}
\log |D^{\boldsymbol{t}}_{\underline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{v})| \quad &\leq \quad M_0 \log(\xi_0) + T \log((k+1)\xi_1 T) + L_0 \log\left(|v_0| + 1\right) \\
&+ \quad \sum_1^k 3\pi L_i \left( \frac{\left(\left|\frac{v_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right)^2}{\Im m\, \tau} + \left(\left|\frac{v_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right) + \frac{1}{4}\Im m\, \tau \right) \\
&+ \quad (3,6 + Dh) \sum_1^k L_i + \log H + \sum_0^k \log(L_i + 1).
\end{aligned}$$

*Démonstration* : grâce au lemme 3–1 de [P–W], on a :

$$\begin{aligned}
\left| D^{\boldsymbol{t}}_{\underline{\boldsymbol{x}}} \left( F(\boldsymbol{v}) \right) \right| \leq \; & (k+1)^T \xi_0^{M_0} \xi_1^T \\
& \times \max \left\{ \left| \left( \frac{\partial}{\partial z_0} \right)^{\tau_0} \circ \cdots \circ \left( \frac{\partial}{\partial z_k} \right)^{\tau_k} (F(\boldsymbol{v})) \right|, |\boldsymbol{\tau}| = T, 0 \leq \tau_0 \leq M_0 \right\},
\end{aligned}$$

(comme cela est classiquement fait, nous notons $|\boldsymbol{\tau}|$ la somme $|\boldsymbol{\tau}| = \sum_{i=0}^{k} \tau_i$). Les inégalités de Cauchy permettent de majorer le membre de droite ; posons $g(\boldsymbol{z}) = F(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z})$, on obtient alors :

$$\log \max \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\tau_0} \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^{\tau_k} (g(0)) \right|,\ |\boldsymbol{\tau}| = T, 0 \le \tau_0 \le M_0 \right\}$$
$$\le \log \left( T! \sup \{ |g(\boldsymbol{z})|, |z_i| \le 1, 0 \le i \le k \} \right).$$

Le lemme 3.1 et les relations liant $\varphi_{\mathcal{T}_i}(z)$ (*resp.* $\wp_{\mathcal{T}_i}(z)$, $\wp'_{\mathcal{T}_i}(z)$) à $\varphi_{\Omega_i}(z)$ (*resp.* $\wp_{\Omega_i}(z)$, $\wp'_{\Omega_i}(z)$), et les hypothèses faites sur $F$, permettent de majorer l'expression ci–dessus par :

$$\begin{aligned} & T \log T + \log H + L_0 \log(|v_0| + 1) \\ + & \sum_1^k 3\pi L_i \left( \frac{\left(\left|\frac{v_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right)^2}{\Im m\ \tau} + \left( \left| \frac{v_i}{\omega_{1,i}} \right| + 1 \right) + \frac{1}{4} \Im m\ \tau \right) \\ + & \Big( \log(3,33) + 3 \log\left(\max\{1, |\omega_{1,i}|, 1 \le i \le k\}\right) \Big) \sum_1^k L_i \\ + & \sum_0^k \log(L_i + 1). \end{aligned}$$

Le lemme 3.2, inégalité (8), donne :

$$\log(3,33) + 3 \log\left(\max\{|\omega_{1,i}|, 1 \le i \le k\}\right) \le 3,6 + Dh.$$

On obtient donc le lemme 3.5 en combinant les inégalités précédentes.

# 4 La réduction de N. Hirata

**Lemme 4.1** *Pour démontrer le théorème 2.1, on peut supposer $k \geq 1$. De plus, il n'y a pas de restriction à se ramener à une forme $\mathcal{L}'$ vérifiant :*

- *La forme $\mathcal{L}'$ s'écrit :*

$$\mathcal{L}'(\boldsymbol{z}) = -z_0 + \beta_1' z_1 + \cdots + \beta_k' z_k.$$

- *Tous les coefficients de $\mathcal{L}'$ sont dans le corps de nombres $K$, et de hauteur logarithmique absolue $\leq 2 \log B$ ; de plus les $\beta_i'$, $1 \leq i \leq k$ sont tous de module $\leq 1$ si le coefficient $\beta_0$ de la forme linéaire d'origine $\mathcal{L}$ est nul.*

- *Tous les coefficients de $\mathcal{L}'$ sont non nuls.*

*Par abus de language, on notera par la même lettre $\mathcal{L}$ la nouvelle forme linéaire ainsi construite.*

*Démonstration* : il s'agit essentiellement du lemme 4–1 de [Hi2]. Cependant, dans le cas particulier que nous traitons ici, cette réduction est très facile (on pourra comparer avec [Hi1]). On part de la forme linéaire :

$$\mathcal{L} : \quad \mathcal{L}(\boldsymbol{z}) = \beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_k z_k,$$

et soit $k'$ le nombre de coefficients $\beta_i$ $(i \geq 1)$ non nuls. Si $k' = 0$, le théorème 2.1 est banal (puisqu'il est alors un corollaire immédiat de l'inégalité de LIOUVILLE pour $\beta_0$). On peut donc supposer $k' \geq 1$ et, puisque minorer :

$$\left| \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i \right|$$

revient à minorer :

$$\left|\beta_0 + \sum_{1\le i\le k, \beta_i\neq 0} \beta_i u_i\right|,$$

on peut supposer que $k' = k$ (quitte à remplaçer le groupe $\prod_{i=1}^k \mathcal{E}_i$ par $\prod_{1\le i\le k,\beta_i\neq 0}\mathcal{E}_i$). Toutefois, contrairement à N. HIRATA, nous précisons ce qui se passe lorsque la forme linéaire est nulle en $\boldsymbol{u}$. Nous ne pouvons donc arrêter l'argument ici : dans le cas particulier où la forme linéaire d'origine est nulle en $\boldsymbol{u}$, supposons que nous ayons démontré le théorème pour la forme linéaire déduite de $\mathcal{L}$ par suppression des coefficients nuls. Nous sommes donc assurés de l'existence d'un sous-groupe $H'$ de $\mathbb{G}_a \times \prod_{1\le i\le k,\beta_i\neq 0}\mathcal{E}_i$, dont l'espace tangent à l'origine contient le point $\boldsymbol{v}'$ déduit de $\boldsymbol{v}$ par oubli des facteurs correspondant aux $\beta_j$ nuls. Le sous-groupe $H$ de $\mathbb{G}_a \times \prod_{1\le i\le k}\mathcal{E}_i$ défini par $H = H' \times \prod_{1\le i\le k,\beta_i=0}\mathcal{E}_i$ convient. En effet, son espace tangent à l'origine contient le point $\boldsymbol{v}$, est contenu dans le noyau de la forme linéaire. Enfin, il est immédiat de constater que l'inégalité requise pour le degré de $H$ est assurée sitôt que l'on dispose de celle pour le degré de $H'$. La réduction de N. HIRATA permet donc bien d'étudier également le cas où la forme linéaire est nulle. Soit maintenant $m$, $0\le m\le k$ tel que $\beta_m$ réalise le maximum en module des $\beta_i$ et posons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}' : & \mathcal{L}'(\boldsymbol{z}) = \displaystyle\sum_{i=0}^k \frac{\beta_i}{-\beta_0} z_i & \text{si } \beta_0 \neq 0, \\ \mathcal{L}' : & \mathcal{L}'(\boldsymbol{z}) = -z_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\beta_m} z_i & \text{si } \beta_0 = 0. \end{cases}$$

(par abus de language, nous notons encore $\mathcal{L}$ la forme linéaire ainsi modifiée; cela n'aura pas d'incidence, car dans toute la suite du texte, nous travaillerons exclusivement avec cette nouvelle forme). On définit également un point $\boldsymbol{u}$ de $T_{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = (0, u_1, \ldots, u_k) & \text{si } \beta_0 = 0, \\ \boldsymbol{u} = (1, u_1, \ldots, u_k) & \text{si } \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Dans ces conditions, il est clair que minorer la quantité $\left|\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i u_i\right|$

définie dans l'énoncé du théorème 2.1 revient à minorer :

$$|\mathcal{L}'(\boldsymbol{u})|,$$

pour la forme linéaire $\mathcal{L}'$ comme elle est définie ci–dessus (à un facteur $\frac{1}{|\beta_m|}$ près). Nous épargnons cette fois au lecteur la vérification (facile une fois encore) du fait que cette réduction est licite dans le cas où la forme linéaire est nulle.

Les coefficients de la forme linéaire $\mathcal{L}'$ sont donc tous plus petits que 1 en module si $\beta_0 = 0$, et tous non nuls. De plus, ils sont clairement dans le corps $K$, puisqu'ils s'écrivent comme quotients d'éléments de $K$, et leur hauteur logarithmique est manifestement $\leq 2\log(B)$. Le lemme 4.1 est donc établi.

Rappelons maintenant l'intérêt de cette construction : dans les preuves classiques, on exploitait l'hypothèse (à contredire) que $\mathcal{L}(\boldsymbol{u})$ est petite de la façon suivante. On commençait par écrire :

$$z_k = -\frac{\beta_0}{\beta_k} - \frac{\beta_1}{\beta_k}u_1 - \cdots - \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k}u_{k-1},$$

pour remplacer $u_k$ par 0 dans la fonction auxiliaire et utiliser une formule d'interpolation. Dans [Hi2], N. HIRATA écrit plutôt (en «rajoutant» un facteur $\mathbb{G}_a$ supplémentaire) :

$$z_{-1} = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k.$$

Si en apparence on n'a absolument rien changé à la situation, cette écriture lui permet d'exploiter le fait que les dérivées d'un polynôme sont nulles sitôt que l'ordre de dérivation dépassent son degré, ce qui n'est pas le cas pour une puissance d'une fonction abélienne. On a de plus besoin de travailler avec des coefficients de module plus petits que 1 (*ie.* $\leq 1$) pour une raison raison d'apparence technique, mais cruciale. Plus précisément, dans le cas où le point $\boldsymbol{u}$ est une période de $\mathbb{G}$ modulo un sous-groupe algébrique, on ne peut se contenter de faire une extrapolation classique ; on extrapole donc «sur les dérivations» et non «sur les points» (c'est le cas dit «périodique», *voir* § 6.1, et § 7.2). Pour ce faire, il est nécessaire de travailler le long d'une direction transcendante et il faut donc contrôler la taille d'une matrice de passage ramenant à une base algébrique de l'espace tangent. C'est pour parvenir à ce contrôle que l'on est obligé de supposer que les coefficients de la forme linéaire sont bornés par une constante absolue. On se reportera à [Hi2] pour plus de détails. Enfin, si la situation que nous étudions ici permet de simplifier la réduction par rapport au texte de [Hi2], c'est pour la raison suivante : toute la difficulté se situe dans le cas où un multiple de $\boldsymbol{u}$ est une période de $\mathbb{G}$. Dans notre cas, ceci ne peut arriver que si $u_0$ est nul (en effet, si $u_0 = 1$, $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ ne peut être un point de torsion de $\mathbb{G}$ puisqu'il se projette sur un point non nul de $\mathbb{G}_a$). Dans le cas général par contre, il se peut que $\mathbb{G}$ contienne d'autres sous–groupes $\mathbb{G}_a$ que le facteur trivial (dans le cas d'une extension d'une variété abélienne par $\mathbb{G}_a^r$). C'est pour contourner cette difficulté que N. HIRATA introduit un deuxième facteur $\mathbb{G}_a$. Comme nous ne rencontrons pas cette contrainte dans notre étude, nous pouvons travailler avec le groupe $\mathbb{G}$, sans le modifier.

# 5 Choix des paramètres, d'un sous–groupe privilégié

On pose, en notant [.] la partie entière d'un nombre réel,

$$\varepsilon = \frac{1}{200k^2}, \qquad \lambda = \frac{1}{100k^2} = 2\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} c_4 &= 4^k(k+1)^{k+1}(1+\lambda)8(k+1)(k\log(4(k+1)) + 5\log(k+1) + 15) \\ &\times \left(\frac{12\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right), \end{aligned}$$

$$c_5 = \frac{c_6.{c_4}^{2k+1}}{(k+1)!6^k {c_7}^k},$$

$$c_6 = (k+1)2^k,$$

$$c_7 = \frac{4}{13+4e^2}\log(4(k+1)) + \frac{60+20\log(k+1)}{(13+4e^2)k},$$

$$S = \left[c_4 D\left(\frac{\log\log(B) + h + \log(DE)}{\log(E)}\right)\right],$$

$$S_0 = \left[\frac{4^{-k}(k+1)^{-k-1}(1+\lambda)^{-1}S}{\left(\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)}\right],$$

$$\begin{aligned} U_0 &= c_5 D^{2k+2}\left(\log(B) + \log(DE)\right)\left(\log\log(B) + h + \log(DE)\right)^{k+1} \\ &\times \left(\prod_{i=1}^{k}\log(V_i)\right)\left(\log(E)\right)^{-2k-1}. \end{aligned}$$

Soit $U > 0$, on pose encore :

$$L_0^{\#} = \frac{U}{c_6 D\left(\log(B) + \log(DE)\right)}, \qquad L_0 = \left[L_0^{\#}\right],$$

$$L_i^{\#} = \frac{c_7 U_0}{(DS^2 \log(V_i))}, \qquad L_i = \left[L_i^{\#}\right], \qquad 1 \leq i \leq k,$$

$$T^{\#} = \frac{U_0}{(D\left(\log\log(B) + h + \log(DE)\right))}, \qquad T = \left[T^{\#}\right],$$

et enfin :

$$T_0 = \left[\frac{4^{-k}(k+1)^{-k-1}(1+\lambda)^{-1}T}{\left(\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)}\right].$$

On note :

$$\Gamma(S) = \{\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})\,;\, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s < S\}\,;$$

pour tout toute sous-variété algébrique $V$ de $\overline{\mathbb{P}}$ de dimension $l$, on note enfin $H(V; D_0, \ldots, D_k)$ la valeur en $(D_0, \ldots, D_k)$ de la partie homogène de plus haut degré du polynôme de HILBERT-SAMUEL multi-homogène de $V$ multipliée par $l!$.

On remarquera que ce choix de paramètres, outre le fait qu'il est légèrement différent du choix fait par N. HIRATA ([Hi2]) pour ce qui est des constantes (ce qui est compréhensible puisque nous devons être relativement précis à ce niveau), présente une simplification pour ce qui est de la dépendance en le paramètre $U$, ce qui clarifie l'argument résumé dans la proposition qui suit, qui trouve son origine dans le texte de P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT (*voir* [P–W]).

**Proposition 5.1** *Il existe un nombre réel $U$, $0 < U \leq U_0$ tel que pour tout sous-groupe algébrique connexe $\mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}$, (on notera $r'$ sa codimension) vérifiant $T_{\mathbb{G}'}(\mathbb{C}) \subset W$, on ait :*

$$(r'-1)!\binom{T^{\#}+r'-1}{r'-1}\operatorname{card}\left(\left(\Gamma(S)+\mathbb{G}'\right)/\mathbb{G}'\right)H\left(\mathbb{G}'; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right) \geq (1+\varepsilon)\,2^k H\left(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right); \tag{10}$$

*il existe de plus un sous–groupe algébrique connexe* $\tilde{\mathbb{G}}$ *de* $\mathbb{G}$ *(on note* $\tilde{r}$ *sa codimension) vérifiant* $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C}) \subset W$*, tel que :*

$$\begin{aligned}(\tilde{r}-1)! \binom{T^{\#}+\tilde{r}-1}{\tilde{r}-1} \operatorname{card}\left(\left(\Gamma(S)+\tilde{\mathbb{G}}\right)/\tilde{\mathbb{G}}\right) H\left(\tilde{\mathbb{G}}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right) & \\ = (1+\varepsilon)\, 2^k H\left(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right). & \end{aligned} \tag{11}$$

*Démonstration* : soit $\mathbb{G}'$ un sous–groupe algébrique de $\mathbb{G}$ tel que $T_{\mathbb{G}'} \subset W$. Si $\mathbb{G}'$ contient $\mathbb{G}_a$, le groupe $\mathbb{G}$ est de la forme $\mathbb{G}_a \times H$, où $H \subset \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$. L'espace tangent à l'origine $T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})}$ de $\mathbb{G}'(\mathbb{C})$ contient donc la droite engendrée par $(1, 0, \ldots, 0)$, qui n'est pas contenue dans l'hyperplan $W$ puisque $\beta_0 \neq 0$, une contradiction. Donc, $\mathbb{G}'$ ne contient pas $\mathbb{G}_a$ ; en particulier, $H(\mathbb{G}'; L_0^{\#}, L_1^{\#}, \ldots, L_k^{\#})$ est indépendant de la variable $L_0$, donc du paramètre $U$. Notons alors $A(\mathbb{G}')$ le nombre :

$$\begin{aligned} A(\mathbb{G}') &= \frac{(r'-1)!}{(1+\varepsilon)\, 2^k} \binom{T^{\#}+r'-1}{r'-1} \operatorname{card}\left(\left(\Gamma(S)+\mathbb{G}'\right)/\mathbb{G}'\right) \\ &\times \frac{H\left(\mathbb{G}'; \frac{L_0^{\#}}{U}, L_1^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right)}{H\left(\mathbb{G}; \frac{L_0^{\#}}{U}, L_1^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right)}. \end{aligned}$$

Parmi tous les sous–groupes algébriques connexes de $\mathbb{G}$ vérifiant $T_{\mathbb{G}'}(\mathbb{C}) \subset W$, on en choisit un (que l'on note $\tilde{\mathbb{G}}$) tel que la quantité $A(\tilde{\mathbb{G}})$ soit minimale.

On pose alors $U = A(\tilde{\mathbb{G}})$. On en déduit aisément toutes les propriétés requises dans la proposition 5.1, à l'exception (peut-être) de $U \leq U_0$. Pour vérifier cette dernière propriété, calculons $A(0)$ (on a noté ici 0 le sous–groupe trivial de $\mathbb{G}$). On en déduit (en remplaçant les paramètres par leur valeur; on vérifie aisément que $H(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}) = (k+1)!3^k \prod_{i=0}^{k} L_i^{\#})$, ce calcul est d'ailleurs détaillé un peu plus bas, page 53) :

$$U = A(\tilde{\mathbb{G}}) \leq A(0),$$

et, calculons :

$$
\begin{aligned}
\frac{A(0)}{U_0} &= \frac{k!\begin{pmatrix} T^{\#}+k \\ k \end{pmatrix} S}{U_0\,(1+\varepsilon)2^k H\left(\mathbb{G}; \frac{L_0^{\#}}{U}, L_1^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right)} \\
&= \frac{c_6 k!\begin{pmatrix} T^{\#}+k \\ k \end{pmatrix} D^{k+1} S^{2k+1}(\log(B)+\log(DE))\prod_{i=1}^{k}\log(V_i)}{(1+\varepsilon)2^k(k+1)!3^k {c_7}^k U_0^{k+1}} \\
&\leq \frac{k!\,(D\,(\log(\log(B))+h+\log(DE)))^k \begin{pmatrix} T^{\#}+k \\ k \end{pmatrix}}{U_0^k(1+\varepsilon)} \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon}\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{iD(\log(\log(B))+h+\log(DE))}{U_0}\right) \\
&\leq \frac{1}{1+\varepsilon} e^{\frac{k(k+1)D(\log(\log(B))+h+\log(DE))}{2U_0}} \leq 1.
\end{aligned}
$$

La proposition 5.1 est donc entièrement démontrée.

Nous allons maintenant établir que les nombres $L_i$ sont «grands», et, qu'en particulier ils sont non nuls (ceci permettra d'assurer que la fonction auxiliaire qui sera construite au paragraphe 6 «dépend vraiment» de toutes les variables) :

**Proposition 5.2** *Pour tout $i$, $0 \leq i \leq k$, on a :*

$$L_i \geq 400k^3.$$

*Démonstration* : pour établir la proposition 5.2, il suffit de donner une borne inférieure pour $L_0$, les autres quantités $L_i, 1 \leq i \leq k$ étant clairement plus grandes que $400k^3+1$. Pour minorer $L_0$, il faut donner une borne inférieure pour $U$ dont ce nombre dépend.

Reprenons le sous–groupe $\tilde{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{G}$ choisi dans la proposition 5.1, et renumérotons pour les besoins de cette preuve, les indices $i$, $1 \leq i \leq k$, de telle sorte que :

$$\log(V_i) \geq \log(V_{i+1}), \qquad \forall i, 1 \leq i \leq k-1.$$

On déduit de la relation (11), l'inégalité :

$$\begin{aligned}\left(\frac{U_0}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\right)^{\tilde{r}-1} &\leq U(k+1)!6^k(1+\varepsilon)\\ &\times \frac{U_0^{\tilde{r}-1}{c_7}^{\tilde{r}-1}}{c_6 D(\log(B)+\log(DE))}\prod_{\tilde{d}+1\leq i\leq k}\frac{1}{DS^2\log(V_i)}\end{aligned}$$

(en effet, puisque $T_{\tilde{\mathbb{G}}} \subset W$, $T_{\mathbb{G}_a} \not\subset W$, et donc $H(\tilde{\mathbb{G}}; L_0^\#, L_1^\#, \ldots, L_k^\#)$ est un polynôme homogène de degré total $\tilde{d}$, de degré au plus 1 en chacune des variables $L_i^\#, 0 \leq i \leq k$, de degré 0 en $L_0^\#$ et à coefficients entiers ; on en déduit aisément :

$$H(\tilde{\mathbb{G}}; L_0^\#, L_1^\#, \ldots, L_k^\#) \geq U_0^{\tilde{d}}{c_7}^{\tilde{d}}\prod_{i=1}^{\tilde{d}}\left(\frac{1}{DS^2\log(V_i)}\right),$$

et la relation cherchée en découle, en remplaçant $H(\mathbb{G}; L_0^\#, \ldots, L_k^\#)$ par sa valeur). On en déduit donc :

$$U \geq \frac{\prod_{\tilde{d}+1\leq i\leq k} DS^2\log(V_i)}{(D(\log\log(B)+h+\log(DE)))^{\tilde{r}-1}}\frac{c_6 D(\log(B)+\log(DE))}{(k+1)!6^k{c_7}^{\tilde{r}-1}(1+\varepsilon)}.$$

L'inégalité :

$$\log(E) \leq 2,8D\log(V_k),$$

(*voir* le lemme 5.4 ci–dessous), et :

$$S \geq \frac{1}{2}c_4 D\frac{(\log\log(B)+h+\log(DE))}{\log(E)},$$

donnent :

$$\begin{aligned}U &\geq \frac{c_6}{(k+1)!6^k{c_7}^{\tilde{r}-1}(1+\varepsilon)}D(\log(B)+\log(DE))\\ &\times \left(\frac{1}{5,6}\right)^{\tilde{r}-1}{c_4}^{2(\tilde{r}-1)}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$L_0^\# \geq \frac{1}{(k+1)!6^k{c_7}^{\tilde{r}-1}}\left(\frac{1}{5,6}\right)^{\tilde{r}-1}{c_4}^{2(\tilde{r}-1)}.$$

Comme $T_{\tilde{\mathbb{G}}}$ ne peut être égal à $W$ (rappelons que $\beta_0 \neq 0$), on a $\tilde{r} \geq 2$, et donc :

$$\begin{aligned} L_0^{\#} &\geq \frac{4^{2k}(k+1)^{2(k+1)}8^2(k+1)^2}{(k+1)!6^k} \\ &\times \left(\frac{(k\log(4(k+1)) + 5\log(k+1)+15)^2}{\log(4(k+1)) + \frac{5\log(k+1)}{k} + \frac{15}{k}}\right) \\ &\geq 400(k+1)^{k+2} \geq 400k^3+1. \end{aligned}$$

La proposition 5.2 est donc établie, modulo la preuve du lemme 5.4.

Nous ferons par la suite l'hypothèse suivante, qu'il s'agira de contredire :

**Hypothèse 5.3** *Le point $\boldsymbol{u}$ n'appartient pas à $T_{\tilde{\mathbb{G}}(\mathbb{C})}$ et :*

$$|\mathcal{L}(\boldsymbol{u})| < \exp\left(-c_8 U_0\right),$$

*avec*

$$c_8 = \left(6\frac{13+4e^2}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 27\right)c_{12}$$

*(la constante $c_{12}$ est définie page 84) ; rappelons ici sa valeur :*

$$\begin{aligned} c_{12} &= (k+1)\left[\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right] \\ &+ (k+1)\left[\left(\frac{8}{3} + \frac{32}{13+4e^2}\right)k^2\log(2) + 7,8k\log(k+1)\right] \\ &+ (k+1)\left[16,4k + 16,4\log(k+1) + 20,7\right]. \end{aligned}$$

Nous avons eu et aurons besoin du lemme suivant, qui permet de majorer le paramètre $E$. Notons $V_0$, le minimum des $V_i$.

**Lemme 5.4** *On a,*

$$\log(E) \leq 2,8D\log(V_0).$$

*Démonstration* : il s'agit, en revenant à la définition de $E$ (*voir* la relation (4), page 10), de majorer :

$$1 + \frac{1}{2}\log(D) + \frac{1}{2}\log\log(V_i) - \log(|u_i|) - \log(\sqrt{3\pi}) + \log(|\omega_{1,i}|) + \frac{1}{2}\log\Im m\ \tau_i;$$

ce qui revient essentiellement à minorer $|u_i|$ (il n'y a pas de restriction à supposer que les $u_i$ sont non tous nuls, car si tous les $u_i$ étaient nuls, la minoration de $|\mathcal{L}(\boldsymbol{u})|$ se ramène à celle de $\beta_0$ et notre théorème est dans ce cas plus faible que l'inégalité de LIOUVILLE). On va pour cela, utiliser le $q$–développement de $\wp$ et l'inégalité de LIOUVILLE. Comme $\wp(u) = x(\gamma)$ (par définition, si $P$ est un point non nul de $\mathcal{E}(K)$, on note $x(P)$ (*resp.* $y(P)$), la première coordonnée (*resp.* la deuxième coordonnée) de $P \in \mathbb{P}^2(K)$, lorsque la dernière est normalisée à 1, *ie.* $P = (x(P), y(P), 1)$ ; de plus, on omet ici les indices $i$ afin d'alléger). L'inégalité de LIOUVILLE nous assure que :

$$|\wp(u_i)| \leq e^{D\log(V_i)}.$$

Par ailleurs, le $q$–développement de $\wp_\tau$ nous donne :

$$|\wp_\tau(z)| \geq \frac{0,2}{|z|^2},$$

pour $|z| \leq \frac{1}{10}$ (*voir* le lemme 3.3). Rappelons que :

$$\wp(u_i) = \frac{1}{\omega_1^2}\wp_\tau\left(\frac{u_i}{\omega_1}\right),$$

et supposons tout d'abord que $|u_i| \geq \frac{|\omega_1|}{10}$. On en déduit, en tenant compte de l'inégalité :

$$\Im m\ \tau \leq \frac{1}{2\pi}\log(|j(\tau)| + 1193),$$

(*voir* [F–P], lemme 1) et de la définition de $\log(V_i)$ :

$$\begin{aligned}
\log(E) &\leq 1 + \frac{1}{2}\log(D) + \frac{1}{2}\log\log(V_i) \\
&+ \log(10) - \log(\sqrt{3\pi}) + \frac{1}{2}\log \Im m\ \tau \\
&\leq \frac{1}{4\pi}\log\left(\exp(D\log(V_i)) + 1193\right) + \frac{1}{2}\log(D\log(V_i)) \\
&+ 1 + \log(10) - \frac{1}{2}\log(3\pi) \leq 2,8D\log(V_i)
\end{aligned}$$

(il suffit de séparer les cas $D\log(V_i) \leq 1,1$ et $D\log(V_i) \geq 1,1$). Nous pouvons donc supposer que $|u_i| \leq \frac{|\omega_1|}{10}$. L'inégalité de LIOUVILLE et le lemme 3.3 nous donnent donc :

$$|u_i| \geq \sqrt{\frac{0,2}{e^{D\log(V_i)}}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\log(E) &\leq \frac{1}{2}\log(D) + \frac{1}{2}\log\log(V_i) - \frac{1}{2}\log(0,2) + \frac{1}{2}\log\left(e^{D\log(V_i)}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\log \Im m\,\tau + \log(|\omega_1|) - \log(\sqrt{3\pi}) + 1 \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) D\log(V_i) + \log(|\omega_1|) + 1 - \frac{1}{2}\log(0,2) \\
&+ \frac{1}{2}\log(\Im m\,\tau) - \log(\sqrt{3\pi}) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) D\log(V_i) + 1 - \frac{1}{2}\log(0,2) - \log(\sqrt{3\pi}) \\
&+ 1,85 - \frac{1}{4}\log(12) + \frac{1}{2}\log(\Im m\,\tau) - \frac{\pi}{6}\Im m\,\tau + \frac{1}{3}Dh \\
&\leq 2,5D\log(V_i),
\end{aligned}$$

en tenant compte du lemme 3.2, relation (8). Le lemme 5.4 est donc démontré.

# 6 Préconstruction de la fonction auxiliaire

Nous construisons dans ce paragraphe la fonction auxiliaire dont nous aurons besoin pour la preuve du théorème 2.1.

## 6.1 Les deux cas

Notons $\Omega$, le noyau $\ker \boldsymbol{\Phi}$ de $\boldsymbol{\Phi}$, «exponentielle» de $\mathbb{G}$. S'il existe un entier $s_0$, $0 \leq s_0 < 2(k+1)S$ tel que $s_0\boldsymbol{u} \in \Omega + T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$, nous dirons que nous sommes dans le cas «périodique»; sinon, nous dirons que nous sommes dans le cas «non périodique». Nous noterons $\Sigma$, l'ensemble :

$$\Sigma = \left\{(\boldsymbol{t}, s) \in \mathbb{Z}^{k+1}, 0 \leq t_i, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 2(k+1)T, 0 \leq s < S_0\right\},$$

dans le cas non périodique et :

$$\begin{aligned} \Sigma \quad = \quad & \left\{(\boldsymbol{t}, s) \in \mathbb{Z}^{k+1}, 0 \leq t_i, 1 \leq i \leq k-1, \right. \\ & \left. \qquad 0 \leq t_k < T_0, \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 2(k+1)T, 0 \leq s < 2(k+1)S\right\}, \end{aligned}$$

dans le cas périodique. Pour éviter d'avoir à faire une discussion séparée là où ce n'est pas véritablement nécessaire, nous utiliserons la notation :

$$\begin{aligned} \Sigma \quad = \quad & \left\{(\boldsymbol{t}, s) \in \mathbb{Z}^{k+1}, 0 \leq t_i, 1 \leq i \leq k-1, 0 \leq t_k < T_1, \right. \\ & \left. \qquad \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 2(k+1)T, 0 \leq s < S_1\right\}. \end{aligned}$$

Bien entendu, $T_1 = 2(k+1)T$ et $S_1 = S_0$ dans le cas non périodique, et $T_1 = T_0$ et $S_1 = 2(k+1)S$ dans le cas périodique.

## 6.2 Choix de bases pour l'hyperplan $W$

Rappelons que la forme linéaire $\mathcal{L}$ s'écrit (*voir* le lemme 4.1) :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{z}) = -z_0 + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_k z_k.$$

Nous munirons $W = \ker \mathcal{L}$ de la base :

$$\boldsymbol{e}_i = (\beta_i, 0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad (1 \leq i \leq k),$$

(ici, le 1 est placé à la $i+1$–ième place). On note $\boldsymbol{w}$ le vecteur $\boldsymbol{w} = (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k, u_1, \ldots, u_k)$. Il est clair que $\boldsymbol{w}$ est dans $W$, et que de plus $||\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}|| = |\mathcal{L}(\boldsymbol{u})|$. On a également les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{rcl} |\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k| & \leq & 1 + |\mathcal{L}(\boldsymbol{u})| \\ & \text{et} & \\ |u_i| & \leq & \dfrac{|\omega_{1,i}|\sqrt{\Im m\,\tau_i}}{\sqrt{3\pi}}\sqrt{D\log(V_i)}, \quad 1 \leq i \leq k. \end{array}\right. \tag{12}$$

La deuxième inégalité provient de la définition des $V_i$ (relation (3)) et la première de la définition de $\mathcal{L}$ : $\mathcal{L}(\boldsymbol{u}) = -u_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k$.

On notera $\iota$ l'isomorphisme entre $W$ et $\mathbb{C}^k$ défini par la base $\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$) :

$$\begin{array}{rlcl} \iota : & W & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \\ & a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{k+1}\boldsymbol{e}_k & \longmapsto & (a_1, \ldots, a_k). \end{array}$$

Cet isomorphisme, permet, par identification à $\mathbb{C}^k$ de munir $W$ d'une structure d'espace hermitien. Nous noterons $|.|$ la norme ainsi obtenue sur $W$. Choisissons de plus une base $(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{\tilde{d}})$ de $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$, orthonormée pour $|.|$, et complétons là en une base orthonormée $\boldsymbol{e}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_k)$ de $W$. Comme les matrices de passages entre les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ sont unitaires, leurs coordonnées sont toutes de module $\leq 1$.

## 6.3 Rang du système linéaire

Soit $\boldsymbol{f}$ une base quelconque de $W$, telle que $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{\tilde{d}})$ soit une base de $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$. Nous allons tout d'abord étudier le rang des systèmes linéaires à résoudre. Nous sommes dans la situation suivante : soit $P$ un élément de

$K[\overline{\mathbb{P}}]$, de multidegré $\leq (L_0, L_1, \ldots, L_k)$. Si l'on pose $F = P(\boldsymbol{\Phi})$, nous voulons majorer le rang du système linéaire défini par les conditions :

$$\Delta_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} F(s\boldsymbol{u}) = 0, \qquad (\boldsymbol{t}, s) \in \Sigma. \tag{13}$$

De plus, nous voulons nous restreindre à des fonctions non identiquement nulles sur $\mathbb{G}$. Pour cela, il convient de ne pas prendre n'importe quel polynôme $P$. Notons $I(\mathbb{G})$, l'idéal de définition du groupe $\mathbb{G}$, et fixons un ensemble $\mathcal{B}$ de relevés dans $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]$ de $(\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\mathbb{G}))_{\boldsymbol{L}}$ (cette notation également utilisée dans [P–W] signifie que l'on se restreint aux polynômes de multidegré $\leq \boldsymbol{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_k)$), formé de monômes. Fixons également une base $(\xi_i)_{1 \leq i \leq D}$ de $K$ sur $\mathbb{Q}$, et écrivons :

$$P = \sum_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}, i} a_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}, i} \xi_i \underline{\boldsymbol{X}}^{\underline{\boldsymbol{\lambda}}},$$

où $i$ varie de 1 à $D$, $a_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}, i} \in \mathbb{Q}$ et $\underline{\boldsymbol{X}}^{\underline{\boldsymbol{\lambda}}}$ décrit l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$. On a ainsi écrit un polynôme «générique», ne s'annulant pas identiquement sur $\mathbb{G}$, à coefficients dans $K$, et de multidegré $\leq \boldsymbol{L}$. On résoudra alors le système de contraintes (13), comme un système linéaire, d'inconnues $a_{\underline{\boldsymbol{\lambda}}, i}$. Le calcul du rang de ce système est fait (aux constantes près) dans [P–W] :

**Lemme 6.1** *Soit $\rho$ le rang du système (13) et $\nu$ le nombre d'inconnues. On a les estimations :*

$$\begin{aligned} \rho \quad &\leq \quad \frac{(\tilde{d}+2) H(\mathbb{G}, L_0, \ldots, L_k)}{\left(\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)} \\ &\times \quad \frac{1}{(\tilde{r}-1)!(k+1)(2(k+1))^{\tilde{d}}}, \end{aligned}$$

*si $\tilde{d} \geq 1$, et :*

$$\rho \leq \frac{H(\mathbb{G}, L_0, \ldots, L_k)}{\left(\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)(k+1)!},$$

*si $\tilde{d} = 0$, ie. $\tilde{\mathbb{G}} = 0$. Pour le nombre d'inconnues, on dispose d'une valeur exacte :*

$$\nu = \frac{1}{(k+1)!} DH(\mathbb{G}; L_0, \ldots, L_k).$$

*Démonstration* : il s'agit, à peu de choses près du lemme 6–7 de [P–W]. Toutefois, comme nous devons préciser la valeur de la constante, et que les estimations faites dans ce lemme ont des répercussions importantes sur le résultat final, nous apportons ici quelques modifications :

*i)* La condition $0 \leq t_i \leq 2(k+1)T$ est remplacée par : $\sum_{i=1}^{k} t_i \leq 2(k+1)T$ dans la définition de $\Sigma$. Cela permet de gagner un terme $(k!)^{k+1}$ dans le résultat final.

*ii)* Le théorème 1 de Y. NESTÉRENKO (*voir* [Ne]) est remplacé par une estimation de M. CHARDIN (*voir* [Ch]), qui est plus précise. Cela permet de gagner un terme de la forme $4^{k^2}$ dans la minoration finale.

Le reste de l'argument étant en tous points identique à celui de [P–W], paragraphe 6 (c), nous nous permettrons ici de reprendre leurs notations et le début de leur argument. Soit $\tilde{\mathbb{G}}$ le sous–groupe de $\mathbb{G}$ donné par la proposition 5.1. Notons $\mathbb{S}$ un système de représentants dans $\{\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u}), 0 \leq s < S_1\}$ des classes de $\{\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u}), 0 \leq s < S_1\} + \tilde{\mathbb{G}}$ modulo $\tilde{\mathbb{G}}$. En raisonnant comme dans [P–W], on vérifie que le rang du système (13) est majoré par le rang du système linéaire défini par les conditions :

$$\begin{cases} \partial_{\boldsymbol{\sigma}'}^{\boldsymbol{t}'} P \in I(\tilde{\mathbb{G}}); \forall \boldsymbol{\sigma}' \in \mathbb{S}, \\ \forall \boldsymbol{t}' = (0, \ldots, 0, t'_{\tilde{d}+1}, \ldots, t'_k); 0 \leq t'_i; t'_k \leq T_1, \sum_{i=\tilde{d}+1}^{k} t'_i \leq 2(k+1)T. \end{cases}$$

En remarquant que les formules de translations et de dérivations peuvent être représentées sur des cartes par des polynômes de degré au plus 2 (par exemple on pourra se reporter à la remarque précédant la remarque 4.1 de [Ph1] ; on pourra également se reporter pour une étude générale des formules de translations à [La] ; il est de plus bien connu que le modèle de WEIERSTRASS définit un plongement projectivement normal de la courbe elliptique concernée ; pour les formules de dérivations, on pourra consulter [Dav2], théorème 4.2, pour une étude sur le modèle de JACOBI, [Dav1] pour certaines classes de plongements d'un groupe algébrique commutatif général ainsi que la construction de [Ma–Wu2]), et en posant :

$$\mathfrak{L} = (L_0, 2L_1, \ldots, 2L_k),$$

on vérifie comme dans [P–W] que le nombre de conditions à écrire pour que l'un des polynômes $\partial_{\boldsymbol{\sigma}'}^{\boldsymbol{t}'} P$ appartienne à $I(\tilde{\mathbb{G}})$ est majoré par :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}}))_{\mathfrak{L}}.$$

On en déduit donc que le rang du système (13) est majoré par :

$$X.\mathrm{card}(\mathbb{S}).\, \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}}))_{\mathfrak{L}},$$

où nous avons noté $X$ le nombre de dérivations partielles, c'est-à-dire le cardinal de :

$$\{\boldsymbol{t}' = (0,\ldots,0,t'_{\tilde{d}+1},\ldots,t'_k),\ 0 \leq t'_i;\ t'_k \leq T_1,\ \sum_{i=\tilde{d}+1}^{k} t'_i \leq 2(k+1)T\}.$$

Pour établir la première partie du lemme, il suffit donc de majorer les nombres $X$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}}))_{\mathfrak{L}}$. Commençons par majorer $X$ : rappelons que le nombre de $n$–uplets d'entiers positifs dont la somme vaut un entier positif donné $a$, est $\begin{pmatrix} a+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$. Dans le cas non périodique, on en déduit par sommation sur $a$, $0 \leq a \leq 2(k+1)T$ que :

$$X = \begin{pmatrix} 2(k+1)T + \tilde{r} - 1 \\ \tilde{r} - 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas périodique, enfin, par sommation également, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 2(k+1)T + \tilde{r} - 1 \\ \tilde{r} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(k+1)T - T_0 + \tilde{r} - 1 \\ \tilde{r} - 1 \end{pmatrix}.$$

Majorons maintenant $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}}))_{\mathfrak{L}}$ : considérons comme dans [P–W] le plongement de $\overline{\mathbb{P}}$ dans $\mathbb{P}^N$ :

$$\begin{array}{lcl} \overline{\mathbb{P}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ (X_{i,\nu_i})_{0\leq\nu_i\leq N_i;0\leq i\leq k} & \longrightarrow & \left(\prod_{i,j} X_{i,j}^{\alpha_{i,j}}\right)_{\sum_j \alpha_{i,j}=L_i, 0\leq i\leq k}. \end{array}$$

En notant $\mathbb{C}[\mathbb{P}^N]$ (*resp.* $I_N$) l'anneau des coordonnées de $\mathbb{P}^N$ (*resp.* l'idéal premier de définition de $\tilde{\mathbb{G}}$ dans $\mathbb{C}[\mathbb{P}^N]$), on a pour tout entier $l$ :

$$\left\{\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}})\right\}_{l(L_0,\ldots,L_k)} = \left\{\mathbb{C}[\mathbb{P}^N]/I_N\right\}_l.$$

On en déduit donc que le degré de $I_N$ est $H(\tilde{\mathbb{G}}; L_0,\ldots,L_k)$ et l'on applique le théorème de M. CHARDIN (*voir* [Ch], théorème, chapitre 1, page 5 ; en fait nous appliquons ici la version légèrement plus précise que l'on trouve dans la thèse de M. CHARDIN), ainsi que la proposition 5.2 pour obtenir les inégalités :

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\left\{\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}})\right\}_{\mathfrak{L}} &\leq \dim_{\mathbb{C}}\left\{\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]/I(\tilde{\mathbb{G}})\right\}_{2(L_0,\ldots,L_k)} \leq \dim_{\mathbb{C}}\left\{\mathbb{C}[\mathbb{P}^N]/I_N\right\}_2\\ &\leq \begin{pmatrix} 2+\tilde{d}\\ \tilde{d}\end{pmatrix} + (\deg(I_N)-1)\begin{pmatrix}\tilde{d}+1\\ \tilde{d}\end{pmatrix}\\ &\leq \frac{\tilde{d}(\tilde{d}+1)}{2} + (\tilde{d}+1)H(\tilde{\mathbb{G}};L_0,\ldots,L_k).\\ &\leq \left(\frac{\left(\frac{1}{400k^3}\right)^{\tilde{d}}\tilde{d}(\tilde{d}+1)}{2} + \tilde{d}+1\right)H(\tilde{\mathbb{G}};L_0,\ldots,L_k).\end{aligned}$$

On obtient donc (dans le cas non périodique) :

$$\rho \leq \begin{pmatrix} 2(k+1)T+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}\left(\left(\frac{1}{400k^3}\right)^{\tilde{d}}\frac{\tilde{d}(\tilde{d}+1)}{2} + \tilde{d}+1\right)S_0 H(\tilde{\mathbb{G}};L_0,\ldots,L_k).$$

La proposition 5.1 assure que :

$$H(\tilde{\mathbb{G}};L_0^{\#},\ldots,L_k^{\#}) = \frac{(1+\varepsilon)2^k H(\mathbb{G};L_0^{\#},\ldots,L_k^{\#})}{(\tilde{r}-1)!\begin{pmatrix}T^{\#}+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}\operatorname{card}\left(\Gamma(S)+\tilde{\mathbb{G}}/\tilde{\mathbb{G}}\right)}.$$

De plus, comme la fonction $H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)$ est homogène, de degré 1 par rapport à chacune des variables $L_i$ $(0\leq i\leq k)$, de degré total $k+1$, et, puisque $L_i \geq \left(1-\frac{1}{400k^3+1}\right)L_i^{\#}$ pour tout $i$, $0\leq i\leq k$, (*voir* la proposition 5.2), on a :

$$\frac{H(\mathbb{G};L_0^{\#},\ldots,L_k^{\#})}{H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)} \leq \left(1+\frac{1}{400k^3}\right)^{k+1}.$$

De plus, on a l'inégalité :

$$H(\tilde{\mathbb{G}};L_0,\ldots,L_k) \leq H(\tilde{\mathbb{G}};L_0^{\#},\ldots,L_k^{\#}),$$

ainsi que :

$$\frac{S_0}{S} \leq \frac{4^{-k}(k+1)^{-k-1}(1+\lambda)^{-1}}{\left(\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1)+54\right)}.$$

En combinant ces inégalités, on en déduit :

$$\rho \ \leq \ \frac{(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{k+1}\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{\tilde{d}}\tilde{d}(\tilde{d}+1)}{2}+\tilde{d}+1\right)}{2^k(1+\lambda)\left(\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)}$$

$$\times \ \frac{\begin{pmatrix} 2(k+1)T+\tilde{r}-1 \\ \tilde{r}-1 \end{pmatrix} H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)}{(k+1)^{k+1}(\tilde{r}-1)!\begin{pmatrix} T+\tilde{r}-1 \\ \tilde{r}-1 \end{pmatrix}},$$

ce qui donne bien :

$$\rho \ \leq \ \frac{(\tilde{d}+2)H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)}{\left(\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)}$$

$$\times \ \frac{1}{(k+1)(\tilde{r}-1)!(2(k+1))^{\tilde{d}}},$$

si $\tilde{d}\geq 1$ ; (ce qui entraîne $k\geq 2$), en tenant compte de :

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{k+1} &\leq \left(1+\frac{1}{200k^2}\right)e^{\frac{k+1}{400k^3}} \\
&\leq \left(1+\frac{1}{200k^2}\right)\left(1+\frac{1,01(k+1)}{400k^3}\right) \\
&\leq 1+\frac{3,01}{400k^2}+\frac{1,01}{400k^3}+\frac{1,01(k+1)}{80000k^5} \\
&\leq 1+\frac{1}{100k^2}=1+\lambda.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\tilde{d}=0$, l'inégalité ci–dessus reste vraie si $k\geq 2$, on en déduit aisément :

$$\rho \leq \frac{H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)}{\left(\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)(k+1)!},$$

enfin, pour, $k = 1$, on vérifie directement les inégalités $L_1 \geq 600$ et :

$$(1+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{400}\right)\left(1+\frac{1}{600}\right) \leq 1+\lambda,$$

qui suffisent pour établir la majoration cherchée de $\rho$.

Dans le cas périodique, le calcul est essentiellement le même, en utilisant la valeur de $X$ correspondante. Plus précisément, on a cette fois $\operatorname{card}\left(\Gamma(S)+\tilde{\mathbb{G}}/\tilde{\mathbb{G}}\right) = \operatorname{card}(\mathcal{S})$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\rho \;\leq\; & (1+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{k+1}\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{\tilde{d}}\tilde{d}(\tilde{d}+1)}{2}+\tilde{d}+1\right)2^k H(\mathbb{G};L_0,\ldots,L_k)\\ & \times \frac{\begin{pmatrix}2(k+1)T+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2(k+1)T-T_0+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}}{(\tilde{r}-1)!\begin{pmatrix}T+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}},\end{aligned}$$

et l'on majore :

$$\begin{aligned}&\frac{\begin{pmatrix}2(k+1)T+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2(k+1)T-T_0+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}T+\tilde{r}-1\\ \tilde{r}-1\end{pmatrix}}\\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(2(k+1)T+i)-\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(2(k+1)T+i-T_0)}{\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(T+i)}\\
&\leq \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(2(k+1)T+i)}{\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}(T+i)}\left(1-\prod_{i=1}^{\tilde{r}-1}\left(1-\frac{T_0}{2(k+1)T+i}\right)\right)\\
&\leq (2(k+1))^{\tilde{r}-1}\left(\sum_{i=1}^{\tilde{r}-1}\frac{T_0}{2(k+1)T+i}\right) \leq (2(k+1))^{\tilde{r}-2}(\tilde{r}-1)\frac{T_0}{T}\\
&\leq \frac{(1+\lambda)^{-1}(k+1)^{-1}(2(k+1))^{-\tilde{d}}}{\left(\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)}.\end{aligned}$$

La première partie du lemme 6.1 est donc démontrée.

Il reste à calculer le nombre d'inconnues. Notons $\boldsymbol{L} = (L_0, \ldots, L_k)$ ; par définition de $\nu$, on a :

$$\nu = D \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C}\left[\overline{\mathbb{P}}\right]/I(\mathbb{G})\right)_{\boldsymbol{L}}.$$

Comme nous sommes dans une situation produit,

$$\nu = D \prod_{0}^{k} \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C}\left[\mathbb{P}^{N_i}\right]/I(\mathbb{G}_i)\right)_{L_i}.$$

Rappelons que $N_i = 1$ si $i = 0$ et 2 sinon. Les groupes $\mathbb{G}_i$, $i \geq 1$ étant des hypersurfaces de $\mathbb{P}^2$, on a (*voir* [H], proposition 7.6 (d), page 52) :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C}\left[\mathbb{P}^{N_i}\right]/I(\mathbb{G}_i)\right)_{L_i} &= \binom{L_i + 2}{2} - \binom{L_i - 1}{2} \\ &= 3L_i = H(\mathbb{G}_i; L_i), \qquad i \geq 1. \end{aligned}$$

On en déduit, en remplaçant $H(\mathbb{G}; L_0, \ldots, L_k)$ par sa valeur :

$$\nu = \frac{1}{(k+1)!} D H(\mathbb{G}; L_0, \ldots, L_k).$$

Le lemme 6.1 est donc entièrement démontré.

## 6.4 Le cas périodique, quelques précisions supplémentaires

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui est un corollaire immédiat d'un travail de D. BERTRAND et P. PHILIPPON (*voir* [Be–Ph]) :

**Lemme 6.2** *Le sous-groupe $\tilde{\mathbb{G}}$ vérifie :*

*(i) Son degré est majoré par :*

$$\begin{aligned} \deg(\tilde{\mathbb{G}}) \quad &\leq \quad c_2 \frac{c_3^{\tilde{d}}}{\tilde{d}!} D^{2\tilde{d}+1} (\log(\log(B)) + h + \log(DE))^{\tilde{d}+1} \\ &\times \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i) (\log(E))^{-2\tilde{d}-1}, \end{aligned}$$

*où les* $\log(V_i)$ *sont rangés par ordre décroissants ; rappelons les valeurs des constantes* $c_2$ *et* $c_3$*, définies dans l'énoncé du théorème 2.1 :*

$$c_2 = 2800.4^k(k+1)^{k+5},$$

*et :*

$$c_3 = 3,9.10^6 \times 4^{2k}(k+1)^{2k+10}.$$

*Cette majoration ne sera utilisée que dans la conclusion de la preuve. Dans tous les calculs intermédiaires, nous nous contenterons de l'inégalité moins précise :*

$$\deg(\tilde{\mathbb{G}}) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{U_0}{2(k+1)^{(k+2)}S}.$$

*( ii)* *Notons* $d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}(\mathbb{C})}) = \inf\{||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}||; \boldsymbol{x} \in T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})\}$. *Supposons que nous sommes dans le cas périodique. On a alors :*

$$d\left(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}(\mathbb{C})}\right) \geq 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times (k+1)^{k+1}\frac{1}{U_0}\exp\left(-\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right).$$

*(iii)* *Notons* $|\omega| = \inf\{|\omega_{1,i}|, 1 \leq i \leq k\}$. *Dans le cas particulier où* $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, *on obtient, toujours dans le cas périodique :*

$$||\boldsymbol{u}|| \geq \frac{|\omega|}{2(k+1)S}.$$

*Démonstration* :

- Le point *(iii)* est immédiat : en effet, s'il existe un entier $s_0$, $1 \leq s_0 < 2(k+1)S$ tel que $s_0\boldsymbol{u}$ soit dans le réseau des périodes de $\mathbb{G}$, on en déduit que $||s_0\boldsymbol{u}||$ est supérieur à la norme de la plus petite période de $\mathbb{G}$. Le résultat en découle.

- Démontrons maintenant la relation $(i)$. Rappelons que la fonction $H\left(\tilde{\mathbb{G}}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right)$ est homogène, de degré au plus 1 par rapport à chacune des variables $L_i^{\#}$ (pour $i \geq 1$), de degré 0 par rapport à $L_0$, et de degré total $\tilde{d}$, nous avons :

$$H\left(\tilde{\mathbb{G}}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right) \geq \deg(\tilde{\mathbb{G}})\tilde{d}!\frac{U_0^{\tilde{d}}{c_7}^{\tilde{d}}}{D^{\tilde{d}}S^{2\tilde{d}}\prod_{i=1}^{\tilde{d}}\log(V_i)},$$

(en ordonnant les $\log(V_i)$ par ordre décroissant). Appliquons maintenant la proposition 5.1. On en déduit une majoration de $\deg(\tilde{\mathbb{G}})$ :

$$
\begin{aligned}
\deg(\tilde{\mathbb{G}}) &\leq \frac{(1+\varepsilon)2^k H\left(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right) D^{\tilde{d}} S^{2\tilde{d}} \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i)}{\tilde{d}! {c_7}^{\tilde{d}} U_0^{\tilde{d}} (\tilde{r}-1)! \begin{pmatrix} T^{\#}+\tilde{r}-1 \\ \tilde{r}-1 \end{pmatrix} \operatorname{card}\left(\left(\Gamma(S)+\tilde{\mathbb{G}}\right)/\tilde{\mathbb{G}}\right)} \\
&\leq \frac{(1+\varepsilon)6^k (k+1)! {c_7}^k U_0^{k+1}}{c_6 D^{k+1} S^{2k} (\log(B)+\log(DE)) \prod_{i=1}^{k} \log(V_i)} \\
&\times \frac{D^{\tilde{d}} S^{2\tilde{d}}}{\tilde{d}! {c_7}^{\tilde{d}} U_0^{\tilde{d}} U_0^{\tilde{r}-1}} \left(D(\log\log(B)+h+\log(DE))\right)^{\tilde{r}-1} \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i) \\
&\leq \frac{(1+\varepsilon)6^k (k+1)! U_0 {c_7}^{\tilde{r}-1} (\log\log(B)+h+\log(DE))^{\tilde{r}-1}}{\tilde{d}! c_6 D (\log(B)+\log(DE)) S^{2(\tilde{r}-1)} \prod_{i=\tilde{d}+1}^{k} \log(V_i)}.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire, en remplaçant $U_0$ et $S$ par leurs valeurs,

$$
\begin{aligned}
\deg(\tilde{\mathbb{G}}) &\leq (1+\varepsilon)^2 \frac{{c_4}^{2k+1} D^{2k+1}}{\tilde{d}! {c_7}^k} (\log\log(B)+h+\log(DE))^{k+1} \\
&\times \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i) \log(E)^{-2k-1} \frac{\left(c_7(\log\log(B)+h+\log(DE))\right)^{\tilde{r}-1}}{S^{2(\tilde{r}-1)}} \\
&\leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\alpha)^{2(\tilde{r}-1)}} \frac{{c_4}^{2k+1} D^{2k+1}}{\tilde{d}! {c_7}^k} (\log\log(B)+h+\log(DE))^{k+1} \\
&\times \frac{\log(E)^{-2k-1} \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i) \left(c_7 \log(E)^2\right)^{\tilde{r}-1}}{\left({c_4}^2 D^2 (\log\log(B)+h+\log(DE))\right)^{\tilde{r}-1}} \\
&\leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\alpha)^{2(\tilde{r}-1)}} \frac{{c_4}^{2\tilde{d}+1} D^{2\tilde{d}+1}}{\tilde{d}! {c_7}^{\tilde{d}}} (\log\log(B)+h+\log(DE))^{\tilde{d}+1} \\
&\times \prod_{i=1}^{\tilde{d}} \log(V_i) \log(E)^{-2\tilde{d}-1},
\end{aligned}
$$

où dans les inégalités ci–dessus, on a choisi $\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$ tel que :

$$S = (1-\alpha)c_4 \frac{D(\log(\log(B)) + \log(DE) + h)}{\log(E)}$$

(il ne faut pas oublier de tenir compte des parties entières). Pour établir la première inégalité du point $(i)$, il suffit donc de vérifier :

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\alpha)^{2(\tilde{r}-1)}} c_4 \leq c_2,$$

et :

$$\frac{{c_4}^2}{c_7} \leq c_3.$$

On vérifie directement ces inégalités pour $k \leq 9999$. Supposons donc, $k \geq 10000$. Dans ces conditions, en remplaçant $c_4$ et $c_7$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned}
2\log(c_4) - c_7 &\leq 4k\log(2) + (2k+4)\log(k+1) + 2\log(1+\lambda) \\
&+ \log\left(\log(4(k+1)) + \frac{5\log(k+1)+15}{k}\right) \\
&+ 2\log(8k) + \log\left(\frac{13+4e^2}{4}\right) \\
&+ 2\log\left(12\frac{13+4e^2}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))\right) \\
&+ 2\log\left(1 + \frac{(56\log(k+1)+54)(25+4e^2)}{12(13+4e^2)(k+1)\log(4(k+1))}\right),
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
2\log(c_4) - c_7 &\leq (2k+8)\log(k+1) + 4k\log(2) \\
&+ 3\log(\log(k+1)) + 12 \\
&\leq (2k+10)\log(k+1) + 4k\log(2) + 12 \ \leq \ \log(c_3).
\end{aligned}$$

Clairement, $c_4 \geq 1000k$ (et donc $\alpha < \frac{1}{1000k}$), nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{(1+\varepsilon)^2 c_4}{(1-\alpha)^{2(\tilde{r}-1)}}\right) &\leq 0,1 + 2k\log(2) + (k+2)\log(k+1) + \log(8k) \\
&+ \log\left(\log(4(k+1)) + \frac{5\log(k+1)+15}{k}\right) \\
&+ \log\left(12\frac{13+4e^2}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))\right) \\
&+ \log\left(1 + \frac{(56\log(k+1)+54)(25+4e^2)}{12(13+4e^2)(k+1)\log(4(k+1))}\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{(1+\varepsilon)^2 c_4}{(1-\alpha)^{2(\tilde{r}-1)}}\right) &\leq (k+4)\log(k+1) + 2k\log(2) \\
&+ 2\log(\log(k+1)) + 6 \leq \log(c_2)
\end{aligned}$$

La première inégalité du point $(i)$ est donc établie, et donc également la deuxième inégalité qui est clairement une conséquence de la première.

- Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du point $(ii)$. Il s'agit d'appliquer le corollaire 2 de [Be–Ph]. Comme la preuve de ce dernier est (marginalement) incorrecte, nous donnons ici une preuve complète. Il est clair que l'on a :

$$d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) \geq \frac{d(s_0\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C}))}{2(k+1)S}.$$

Rappelons que pour une courbe elliptique $\mathcal{E}$, plongée dans $\mathbb{P}^2$ à l'aide d'un modèle de WEIERSTRASS, on dispose, sur l'espace tangent à l'origine de $\mathcal{E}$, identifié au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, d'une forme $\mathbb{R}$-linéaire alternée $E$, prenant des valeurs entières sur le réseau des périodes de $\mathcal{E}$. Plus précisément, puisque le plongement de WEIERSTRASS est associé au diviseur très ample $3(0)$, on a $|E(\omega_1, \omega_2)| = 3$. Soit $\varepsilon$, la métrique euclidienne sur $T_{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ qui induit sur chaque facteur $T_{\mathcal{E}_i}(\mathbb{C})$ la forme $(x, y) \longmapsto E_i(ix, y)$ (ici, le deuxième $i$ est «la» racine carrée de

$-1$ «privilégiée», choisie lors de l'identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ implicite dans cette construction), rendant orthogonaux tous les facteurs et induisant la métrique «usuelle» sur le premier facteur, correspondant à $\mathbb{G}_a$. Cette métrique induit une structure euclidienne que nous noterons encore $\varepsilon$ sur $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$. On peut ainsi définir le volume du domaine fondamental du réseau de périodes $\Omega_{\tilde{\mathbb{G}}}$ de $\tilde{\mathbb{G}}$. Nous noterons $\mathrm{Vol}_\varepsilon\left(\Omega_{\tilde{\mathbb{G}}}\right)$ ce volume. Rappelons maintenant l'énoncé de la proposition 3 de [Be–Ph] :

**Lemme 6.3** *On a la relation :*

$$\mathrm{Vol}_\varepsilon\left(\Omega_{\tilde{\mathbb{G}}}\right) = \frac{1}{\tilde{d}!}\deg\left(\tilde{\mathbb{G}}\right).$$

Passons maintenant au :

**Lemme 6.4** *Soit $V$ un espace vectoriel réel muni d'une structure euclidienne $\|.\|$ et $L$ un sous-groupe discret de rang $l$ de $V$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ est une base de $L$ dont le produit des normes est minimal, on a :*

$$\|\lambda_1\| \ldots \|\lambda_l\| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{l(l-1)}{2}} \mathrm{Vol}(L),$$

*enfin, pour toute base $e_1, \ldots, e_l$ de $L$, on a :*

$$\mathrm{Vol}(L) \leq \|e_1\| \ldots \|e_l\|.$$

*Démonstration* : la deuxième inégalité n'est rien d'autre que la très classique inégalité de HADAMARD. Pour la deuxième, on pourra se reporter à [L3], théorème 7.7 et corollaire 7.8 (pages 129 à 131). Nous pouvons maintenant énoncer la partie du corollaire 2 de [Be–Ph] dont nous avons besoin :

**Corollaire 6.5** *Soit $\mathbb{G}'$ un sous–groupe algébrique de $\mathbb{G}$. Un élément de $\Omega_{\mathbb{G}}$ ne peut être situé à une distance (pour la métrique $\varepsilon$) inférieure à :*

$$\frac{d'!3^k}{\deg(\mathbb{G}')}\left(\frac{(\Im m\ \tau)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}|\tau|}\right)^{2k-1}$$

*de $T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})}$, sans appartenir à $\Omega_{\mathbb{G}'}$.*

*Pour alléger les notations, nous avons noté* $|\omega_1| = \sup\{|\omega_{1,i}|, 1 \le i \le k\}$, $\Im m\ \tau = \sup\{\Im m\ \tau_i, 1 \le i \le k\}$, $|\tau| = \max\{|\tau_i|, 1 \le i \le k\}$, $|\omega_{1,0}| = \inf\{|\omega_{1,i}|, 1 \le i \le k\}$ *et* $\Im m\ \tau_0 = \min\{\Im m\ \tau_i, 1 \le i \le k\}$.

*Démonstration* : on considère l'espace vectoriel euclidien $V = T_{\mathcal{E}_1\times\cdots\times\mathcal{E}_k(\mathbb{C})}$, muni de la métrique induite par $\varepsilon$, et notons $p_{\mathbb{G}'}$ la projection orthogonale de $V$ sur l'orthogonal de $T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})} \cap V$ dans $V$. On vérifie comme dans [Be–Ph], que $p_{\mathbb{G}'}(\Omega_{\mathbb{G}})$ est un sous-groupe discret de $V$, de volume $\mathrm{Vol}(\Omega_{\mathbb{G}})/\mathrm{Vol}(\Omega_{\mathbb{G}'})$. Le lemme 6.4 nous assure que le produit des normes des éléments de toute base de $p_{\mathbb{G}'}(\Omega_{\mathbb{G}})$ est minoré par $\mathrm{Vol}(\Omega_{\mathbb{G}})/\mathrm{Vol}(\Omega_{\mathbb{G}'})$. En majorant le maximum de la fonction $d_\varepsilon(.u, T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})})$ sur une base arbitrairement choisie de $\Omega_{\mathbb{G}}$, par celui de la fonction $\|.\|_\varepsilon$, on obtient donc une minoration de la distance d'un élément de $\Omega_{\mathbb{G}}/\Omega_{\mathbb{G}'}$ à $T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})}$. Le corollaire 6.5 s'obtient en choisissant pour base la base fixée au départ par l'identification $\Omega_{\mathbb{G}} = \sum_{i=1}^{k} \omega_{1,i}\mathbb{Z} \oplus \omega_{2,i}\mathbb{Z}$ : on a donc montré que pour tout $u \in \Omega_{\mathbb{G}}$ (par abus de notation, on utilise la lettre $\mathbb{G}$ pour désigner $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$),

$$d_\varepsilon\left(u, T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})}\right) \ge \frac{d'!\,\deg(\mathbb{G})}{k!\,\deg(\mathbb{G}')\sup\{\|\omega_{i,j}\|_\varepsilon, 1 \le i \le k, j = 1,2\}^{2(k-d')}}.$$

Or,

$$\|\omega_{i,1}\|_\varepsilon^2 = \frac{3}{\Im m\ \tau_i}, \qquad \|\omega_{i,2}\|_\varepsilon^2 = \frac{3|\tau_i|^2}{\Im m\ \tau_i}, \qquad 1 \le i \le k.$$

En remplaçant $\deg(\mathbb{G})$ par sa valeur, on a donc :

$$\forall u \in \Omega_{\mathbb{G}}, \qquad d_\varepsilon\left(u, T_{\mathbb{G}'(\mathbb{C})}\right) \ge \frac{d'!3^k}{\deg(\mathbb{G}')} \times \left(\frac{\sqrt{\Im m\ \tau}}{\sqrt{3}|\tau|}\right)^{2(k-d')}.$$

D'où le corollaire 6.5.

Comme $s_0\boldsymbol{u}$ est une période de $T_{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$, on peut appliquer le corollaire 6.5, et l'on obtient :

$$d_\varepsilon(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) \ge \frac{\tilde{d}!3^k}{2(k+1)S\deg(\tilde{\mathbb{G}})}\left(\frac{(\Im m\ \tau)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}|\tau|}\right)^{2k-1}.$$

Comme la norme «usuelle» $\|.\|$ se compare à la norme définie par $\varepsilon$, ou moyen de l'inégalité :

$$\|.\| \geq |\omega_{1,0}|\sqrt{\frac{\Im m\ \tau_0}{3}}\|.\|_\varepsilon,$$

(il faudrait, si l'on était précis, puisque $\|.\|$ est définie sur $\mathbb{C}^{k+1}$, tenir compte dans le calcul de la constante de comparaison des normes du facteur $\mathbb{G}_a$ ; mais, comme nous sommes dans le cas périodique, tous les points que nous regarderons dans le calcul qui suit seront contenus dans $\{0\} \times \mathbb{C}^k$, et l'estimation ci-dessus sera valable), on en déduit :

$$d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) \geq \frac{\tilde{d}!3^k}{2(k+1)S\deg(\tilde{\mathbb{G}})}\left(\frac{\sqrt{\Im m\ \tau}}{\sqrt{3}|\tau|}\right)^{2k-1}\sqrt{\frac{\Im m\ \tau_0|\omega_{1,0}|^2}{3}}.$$

Il suffit donc, pour obtenir le point $(ii)$ de vérifier l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{3^k\tilde{d}!}{2(k+1)S\deg(\tilde{\mathbb{G}})} \times \left(\frac{\sqrt{\Im m\ \tau}}{\sqrt{3}|\tau|}\right)^{2k-1} \times \sqrt{\frac{\Im m\ \tau_0|\omega_{1,0}|^2}{3}}&\\ \geq\ 4\times 3^{-k}.(k+1)^{k+1}U_0^{-1}\exp\left(-\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)&.\end{aligned}$$

Commençons par minorer :

$$\left(\frac{(\Im m\ \tau)^{\frac{1}{2}}}{|\tau|}\right)^{2k-1}|\omega_{1,0}|\sqrt{\Im m\ \tau_0} \geq \frac{3^k}{4^k}\frac{|\omega_{1,0}|}{(\Im m\ \tau)^{k-\frac{1}{2}}}.$$

Le lemme 3.2, relation (9) et la définition de $h$ nous permet d'évaluer $|\omega_{1,0}|$ :

$$\begin{aligned}\frac{|\omega_{1,0}|}{(\Im m\ \tau)^{k-\frac{1}{2}}} &\geq \frac{e^{1,825}}{12^{\frac{1}{4}}}\exp\left(-\left(k-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{3}{2}\right)\right)\\ &\times \exp\left(-Dh\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\pi+\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\log(Dh)}{Dh}\right)\right)\\ &\geq \frac{2^{k-\frac{1}{2}}e^{1,825}}{12^{\frac{1}{4}}3^{k-\frac{1}{2}}}\exp\left(-\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right),\end{aligned}$$

(nous avons aussi majoré $\Im m\ \tau$ par $1,5Dh$, *voir* [F–P], lemme 1). En utilisant le point $(i)$ du lemme pour controler $\deg(\tilde{\mathbb{G}})$, on voit que pour établir le point $(ii)$ du lemme, il suffit de vérifier :

$$\frac{2.3^k 2^k (k+1)^{k+2}}{2(k+1)3^k 3^k} \times \frac{3^k 2^{k-\frac{1}{2}} e^{1,825}}{4^k 3^{k-\frac{1}{2}} 12^{\frac{1}{4}}} \geq 4(k+1)^{k+1}\,(3)^{-k},$$

ce qui est immédiat.

Le lemme 6.2 est donc entièrement démontré.

**Lemme 6.6** *Dans le cas périodique, on a :*

$$\boldsymbol{w} \notin T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C}).$$

*Démonstration* : l'hypothèse 5.3 nous assure que $||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|| = |\mathcal{L}(\boldsymbol{u})| < \exp(-c_8 U_0)$. Par ailleurs, si nous sommes dans le cas périodique, le lemme 6.2, $(ii)$ nous assure que :

$$d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) \geq \frac{4(k+1)^{k+1}}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right) Dh\right)}.$$

Comme :

$$\frac{4(k+1)^{k+1}}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right) Dh\right)} > \exp(-c_8 U_0),$$

on a :

$$d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) > ||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}||$$

et donc $d(\boldsymbol{u}, T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})) \neq ||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}||$. Puisque $\boldsymbol{w}$ est la projection orthogonale de $\boldsymbol{u}$ sur $W$, on voit donc que $\boldsymbol{w}$ n'est pas dans $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$. Le lemme 6.6 est donc établi.

Renumérotons les vecteurs ${\boldsymbol{e}'}_{\tilde{d}+1}, \ldots, {\boldsymbol{e}'}_k$, de telle sorte que la dernière coordonnée de $\boldsymbol{w}$ vérifie :

$$|w_k| = \max\left\{|w_i|, \tilde{d}+1 \leq i \leq k\right\}.$$

Le lemme 6.6 nous assure en particulier que $w_k \neq 0$. On obtient ainsi une nouvelle (!) base $\boldsymbol{f}$ de $W$ en remplaçant ${\boldsymbol{e}'}_k$ par $\boldsymbol{w}$ dans $\boldsymbol{e}'$, *ie.* $\boldsymbol{f} =$

$(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k) = (\boldsymbol{e'}_1, \ldots, \boldsymbol{e'}_{k-1}, \boldsymbol{w})$ (bien entendu, ceci n'est valable que dans le cas périodique). On dispose des estimations suivantes pour les constantes de comparaison des normes $|.|$ (déduite de l'identification de $W$ avec $\mathbb{C}^k$ via $\iota$) et $||.||$ (norme fixée au départ, provenant de l'identification de $T_{\mathbb{G}}(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{k+1}$) :

**Lemme 6.7** *Supposons que nous sommes dans le cas périodique. Pour tout $\boldsymbol{x} \in W$, on a :*

$$|\boldsymbol{x}| \leq ||\boldsymbol{x}|| \leq \sqrt{k+1}|\boldsymbol{x}|.$$

*Démonstration* : le fait que tous les $\beta_i$ sont $\leq 1$ (*voir* le lemme 4.1), que $u_0 = 0$ (puisque nous sommes dans le cas périodique) permet d'obtenir le lemme en reprenant l'argument du lemme 4.16 de [Hi2].

**Proposition 6.8** *Dans le cas périodique, on a :*

$$|w_k| \geq \frac{2(k+1)^k}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)}.$$

*Si, de plus le sous–groupe $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, on dispose de l'inégalité plus précise :*

$$|w_k| \geq \frac{|\omega|}{4k(k+1)S}.$$

*Démonstration* : c'est un calcul de distance. Soit $\boldsymbol{x} \in T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$, on a alors par inégalité triangulaire,

$$||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}|| \geq ||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}|| - ||\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}|| \geq \frac{2(k+1)^{k+1}}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)}.$$

(la deuxième inégalité provient du lemme 6.2 et de l'hypothèse que la forme linéaire est petite en $\boldsymbol{u}$ (hypothèse 5.3)) et de l'inégalité (facile à vérifier) :

$$\frac{2(k+1)^{k+1}}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)} \geq \exp(-c_8).$$

Le lemme 6.7 nous assure alors que pour tout $\boldsymbol{x} \in T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$,

$$|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{x}| \geq \frac{2(k+1)^{k+1}}{3^k\sqrt{k+1}U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)}.$$

Or, la distance de $\boldsymbol{w}$ à $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$ s'écrit dans la norme $|.|$ : $\left(\sum_{\tilde{d}+1}^{k}|w_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Comme, par construction, $w_k$ est le plus grand en module des $w_i, i \geq \tilde{d}+1$, on a,

$$|w_k| \geq \frac{2(k+1)^k}{3^k U_0 \exp\left(\left(1+\frac{k}{e}\right) Dh\right)}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 6.8 dans le cas général. Dans le cas particulier où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, le résultat s'obtient en utilisant la minoration plus précise de $\|\boldsymbol{u}\|$ qui nous est fournie par le lemme 6.2, *(iii)*.

## 6.5 Matrices de passage

Toujours pour alléger la discussion, nous poserons dans le cas non périodique (et dans toute la suite du texte), $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k) = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_k)$.

**Proposition 6.9** *Soient $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{k+1}$ et $f$ une fonction analytique au voisinage de $\boldsymbol{z}$. On a alors la majoration :*

$$\begin{aligned} &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{t}| \leq 2(k+1)T\right\} \\ \leq\ &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(k+1)T\right\} + c_9 U_0. \end{aligned}$$

*et,*

$$\begin{aligned} &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{t}| \leq 2(k+1)T\right\} \\ \leq\ &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(k+1)T\right\} + c_9 U_0. \end{aligned}$$

*Avec :*

$$c_9 \leq (k+1)\left(\frac{2}{3}\log(c_5) - \frac{2}{3}k\log(k+1) + 4{,}4k + 2{,}4\log(k+1) + 5{,}6\right).$$

*Si, de plus le groupe $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, on obtient la majoration plus précise suivante :*

$$c_9 \leq (k+1)\left(\frac{2}{3}k\log(k+1) + \frac{4}{3}k\log(2) + 6{,}8\log(k+1) + 6{,}4\right).$$

*Démonstration* : dans le cas non périodique, la proposition est presque vide puisque les bases $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{e}'$ sont égales. Comme la matrice de passage entre $\boldsymbol{e}'$ et $\boldsymbol{e}$ est unitaire, le théorème 3–1 de [P–W] nous donne :

$$\begin{aligned} &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{t}| \leq 2(k+1)T\right\} \\ \leq\quad &\log\max\left\{\left|D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(k+1)T\right\} + 2(k+1)T\log(k). \end{aligned}$$

De plus, en remplaçant les paramètres par leur valeur, on vérifie aisément, que :

$$2(k+1)T\log(k) \leq (k+1)\log(k)U_0,$$

et la proposition 6.9 est donc clairement vraie dans ce cas. Nous pouvons donc supposer que nous sommes dans le cas périodique ; les matrices de passages entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{e}'$ sont alors (en notant $I_{k-1}$ la matrice identité de rang $k-1$) :

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ I_{k-1} & \vdots \\ & 0 \\ w_1 \dots & w_k \end{pmatrix}.$$

et,

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & I_{k-1} & \vdots \\ & & 0 \\ \dfrac{-w_1}{w_k} & \dots \dfrac{-w_{k-1}}{w_k} & \dfrac{1}{w_k} \end{pmatrix}.$$

Nous allons majorer les modules des coefficients de ces deux matrices. Rappelons que nous notons $|\omega_1| = \max\{|\omega_{1,i}|, 1 \leq i \leq k\}$ et $\Im m\ \tau = \max\{\Im m\ \tau_i, 1 \leq i \leq k\}$. Pour tout $i$, $1 \leq i \leq k$,

$$|w_i| \leq ||\boldsymbol{w}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}||.$$

De plus,

$$||\boldsymbol{u}|| \leq \left(1 + k\left(|\omega_1|\sqrt{\frac{\Im m\ \tau}{3\pi}D\log(V)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(*voir* la relation (12)). En utilisant l'hypothèse 5.3, on en déduit donc que :

$$|w_i| \leq 1,01\left(1 + k\left(|\omega_1|\sqrt{\frac{\Im m\ \tau}{3\pi}D\log(V)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rappelons maintenant que la proposition 3–1 de [P–W] nous assure que :

$$\log\max\left\{\left|D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{f}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{t}|\leq 2(k+1)T\right\} \leq 2(k+1)T\left(\log(k^2)+\log(A)\right)$$
$$+\ \log\max\left\{\left|D^{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{z})\right|, |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(k+1)T\right\},$$

où l'on a noté $A$ le maximum en module des coefficients des matrices de passage entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{e}'$ (la matrice de passage entre $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ étant unitaire, le «coût» du passage de $\boldsymbol{e}'$ à $\boldsymbol{e}$ est de $2(k+1)T\log(k)$, d'où le $k^2$). La même inégalité vaut évidemment lorsque l'on échange les rôles de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{e}$.

Il reste donc à majorer $2(k+1)T\log(k^2A)$. Nous commençons par traiter le cas général, le cas particulier où le sous-groupe $\tilde{\mathbb{G}}$ est nul ne différant que marginalement ; la proposition 6.8 donne :

$$\begin{aligned}
& 2(k+1)T\log\left(k^2\times\max\left\{|w_i|, \tfrac{|w_i|}{|w_k|}, \tfrac{1}{|w_k|}, 1\leq i\leq k\right\}\right)\\
\leq\ & 2(k+1)T(2\log(k)+\log(1,01)+\log(U_0))\\
+\ & (k+1)T\log\left(1+k\left(|\omega_1|^2 D\log(V)\frac{\Im m\ \tau}{3\pi}\right)\right)\\
-\ & 2(k+1)T\log\left(2\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\times(k+1)^k\exp\left(-\left(1+\frac{k}{e}\right)Dh\right)\right).
\end{aligned}$$

Or (en tenant compte du lemme 3.2, relation (8)), on obtient la majoration suivante :

$$\log\left(1+k\left(|\omega_1|^2\tfrac{\Im m\,\tau}{3\pi}D\log(V)\right)\right) \leq \log(k)+2\times 1,85+\tfrac{2}{3}Dh$$
$$-\ \frac{\pi\Im m\,\tau}{3}-\frac{1}{2}\log(12)+\log(D\log(V))+\log\left(\frac{\Im m\,\tau}{3\pi}\right)$$
$$+\ \log\left(1+\frac{1}{k\left(D\log(V)\frac{\Im m\,\tau}{3\pi}e^{3,7}\exp(\frac{2}{3}Dh)\exp(-\frac{\pi}{3}\Im m\,\tau)\right)}\right).$$

Après avoir effectué toutes les simplifications évidentes, nous en déduisons donc :

$$\begin{aligned}\log\left(1+k\left(|\omega_1|^2\frac{\Im m\,\tau}{3\pi}D\log(V)\right)\right) &\leq \log(k)+\frac{2}{3}Dh\\ &+\ \log(D\log(V))-0,53.\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant les paramètres par leurs valeurs. On en déduit donc les inégalités suivantes :

$$\frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{k}{e}\right)Dh}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\leq\frac{4}{3}+\frac{k}{e},$$

ainsi que :

$$\frac{k\log(3)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\leq 0,37k,$$

et :

$$\frac{1}{2}\frac{\log\log(V)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\leq\frac{\log(D)+\log\log(B)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\leq\frac{1}{2},$$

(rappelons que nous disposons de l'inégalité $D\log(B)\geq\log(V)$ ; c'est la relation (1)).

Enfin,

$$\frac{\frac{1}{2}\log(D)+\log\left(\frac{U_0}{c_5}\right)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \leq \frac{\log(D)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$+ \frac{\log(\log(B)+\log(DE))+(k+1)\log((\log\log(B)+h+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$+ \frac{(2k+2)\log(D)+\sum_{i=1}^{k}\log\log(V_i)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$\leq k+\frac{\log(D)+\log(\log(B)+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$+ (k+1)\frac{\log(D^2(\log\log(B)+h+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$\leq k+\frac{\log\log(B)+\log(DE)+\log(D)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}$$
$$+ (k+1)\frac{\log(D^2(\log\log(B)+h+\log(DE)))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \leq k+1+0,45(k+1)$$

(l'inégalité $\frac{\log(D^2(\log\log(B)+h+\log(DE)))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \leq 0,45$ est obtenue en vérifiant tout d'abord cette dernière pour $D \geq 3$, par une majoration brutale, et en étudiant séparément les cas $D = 1$ et $D = 2$.

En mettant ces inégalités ensemble, on en déduit :

$$\begin{aligned} c_9 &\leq 2(k+1)\left(\frac{k}{e}+0,37k-\frac{1}{3}k\log(k+1)+1,2\log(k+1))\right) \\ &+ 2(k+1)\left(\frac{1}{3}\log(c_5)+1,45k+2,8\right) \\ &\leq (k+1)\left(\frac{2}{3}\log(c_5)-\frac{2}{3}k\log(k+1)+4,4k+2,4\log(k+1)+5,6\right). \end{aligned}$$

Ceci établit la validité de la proposition 6.9 dans le cas général. Dans le cas particulier où $\tilde{\mathbb{G}}$ est nul, on peut remplacer la minoration de $|w_k|$ fournie dans la proposition 6.8 par le résultat plus précis dont nous disposons dans ce cas. Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
& 2(k+1)T\log\left(k^2\times\max\left\{|w_i|, \tfrac{|w_i|}{|w_k|}, \tfrac{1}{|w_k|}, 1\le i\le k\right\}\right) \\
\le\ & 2(k+1)T\log\left(4,04\times k^3(k+1)|\omega_{1,0}|^{-1}S\right) \\
& 2(k+1)T\log\left(1+k\left(|\omega_1|^2\frac{\Im m\ \tau}{3\pi}D\log(V)\right)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant :

$$
\begin{aligned}
\frac{\log(S)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} &\le \frac{\log(c_4D(\log\log(B)+h+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&\le \frac{\log(D(\log\log(B)+h+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \frac{1}{3}\log(c_4).
\end{aligned}
$$

Majorons maintenant :

$$\log\left(|\omega_{1,0}|^{-1}\right).$$

Pour ceci, utilisons le lemme 3.2, relation (9). On obtient donc :

$$|\omega_{1,i}|^{-1}\le\frac{12^{\frac{1}{4}}e^{-1,825+\frac{1}{6}\pi\Im m\ \tau}|g_{2,i}|^{\frac{1}{4}}}{|j_i|^{\frac{1}{12}}}.$$

Rappelons que l'inégalité suivante (*voir* [F–P], lemme 1) permet de majorer $\Im m\ \tau$ en fonction du module de l'invariant modulaire :

$$\Im m\ \tau\le\frac{1}{2\pi}\log(|j(\tau)|+1193).$$

On en déduit (en séparant les cas $|j|\le 1$ ou $|j|\ge 1$) :

$$|\omega_{1,0}|^{-1}\le 12^{\frac{1}{4}}e^{-1,825+\frac{1}{12}\log(1194)+\frac{1}{3}Dh}.$$

Le calcul fait précédemment dans le cas général donne donc :

$$
\begin{aligned}
& 2(k+1)T\log\left(k^2\times\max\left\{|w_i|,\tfrac{|w_i|}{|w_k|},\tfrac{1}{|w_k|},1\le i\le k\right\}\right)\\
\le\ & 2(k+1)T\left(\frac{1}{4}\log(12)-1,825+\frac{1}{12}\log(1194)+\frac{2}{3}Dh+\frac{1}{2}\log(k)\right)\\
+\ & (k+1)T\left(\log(D\log(V))-0,53\right)\\
+\ & 2(k+1)T\left(3\log(k)+\log(4,04)+\log(k+1)\right)\\
+\ & 2(k+1)U_0\left(\frac{\log(D(\log\log(B)+h+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}+\frac{1}{3}\log(c_4)\right).
\end{aligned}
$$

Enfin (en utilisant la relation (1)),

$$
\frac{\log(D\log(V))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\le\frac{\log(D^2\log(B))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}.
$$

Majorons maintenant (pour $D=1$) :

$$
\begin{aligned}
& \frac{2\log(D(\log\log(B)+h+\log(DE))+2\log(D)+\log(\log(B))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\\
\le\ & \frac{2\log((\log\log(B)+2)+\log(\log(B))}{(\log\log(B)+2)},
\end{aligned}
$$

(on vérifie aisément que cette quantité est une fonction décroissante de $h$ et de $\log(E)$). Le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus atteint pour sa part son maximum pour $\log(\log(B))=e^2-2$ ; enfin lorsque $D\ge 2$, on vérifie que le membre de droite est décroissante en $D$, $h$ et $E$ et l'on vérifie aisément que son maximum est inférieur à la valeur précédemment trouvée pour $D=1$. On en tire :

$$
\frac{\log(D\log(V))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\le 1+2\exp(-2).
$$

En mettant ces inégalités ensemble, on obtient donc :

$$
c_9\le\frac{2}{3}(k+1)\log(c_4)+\frac{2}{3}(k+1)\log(k+1)+\frac{7}{3}(k+1)\log(k)+2,95(k+1).
$$

Il reste à vérifier que ce nombre est bien :

$$\leq (k+1)\left(\frac{2}{3}k\log(k+1)+\frac{4}{3}k\log(2)+6,8\log(k+1)+6,4\right).$$

Il est plus facile de supposer que $k \geq 15000$. Pour ce faire, on vérifie séparément (par un calcul direct) que cette inégalité est vraie pour $k \leq 14999$. Nous ne reproduisons pas ici cette vérification et nous nous contenterons d'écrire la preuve de cette inégalité pour $k \geq 15000$. Nous allons tout d'abord majorer $\log(c_4)$.

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}\,(k+1)\log(4(k+1))\ +56\log(k+1)+54\right)& \\
+&\ \log(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15) \\
+&\ \log(8(k+1))+\log(1+\lambda) \\
+&\ k\log(4)+(k+1)\log(k+1) \\
\leq&\ \log(4^k(k+1)^{(k+1)})+\log\left(\frac{13+4e^2}{25+4e^2}\right) \\
&+2\log\log(k+1)+3\log(k+1) \\
+&\ \log(192)+\log\left(1+\frac{54+56\log(k+1)}{18(k+1)}\right) \\
&+\log\left(1+\frac{5\log(k+1)+15}{(k+1)}\right)+\varepsilon \\
\leq&\ \log(4^k(k+1)^{(k+1)})+3,48\log(k+1)+5,03.
\end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\log(c_4) \leq k\log(k+1)+2k\log(2)+4,48\log(k+1)+5,03.$$

En mettant toutes ces inégalités ensemble, on en déduit :

$$c_9 \leq (k+1)\left(\frac{2}{3}k\log(k+1)+\frac{4}{3}k\log(2)+6\log(k+1)+5,03\right);$$

L'inégalité requise pour démontrer la proposition 6.9 est donc triviale.

## 6.6 Choix d'une base du corps $K$

Par hypothèse, les courbes elliptiques $\mathcal{E}_i$, les points $P_i$ (*ie.* les nombres $\wp_i(u_i)$, $\wp_i'(u_i)$) et les nombres $\beta_i$ sont tous définis sur le corps $K$. Il n'y a pas de restriction à travailler sur le plus petit corps sur lequel toutes ces quantités sont définies, *ie.* à remplacer le cas échéant $K$ par :

$$\mathbb{Q}(g_{2,1},\ldots,g_{2,k},g_{3,1},\ldots,g_{3,k},\beta_0,\ldots,\beta_k,\wp_1(u_1),\wp_1'(u_1),\ldots,\wp_k(u_k),\wp_k'(u_k)).$$

C'est ce que nous ferons dans toute la suite du texte. On peut donc choisir une base $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_D)$ de $K$ sur $\mathbb{Q}$, formée de monômes de degré total $\leq D$ en les nombres :

$$(g_{2,1},\ldots,g_{2,k},g_{3,1},\ldots,g_{3,k},\beta_0,\ldots,\beta_k,\wp_1(u_1),\wp_1'(u_1),\ldots,\wp_k(u_k),\wp_k'(u_k)).$$

On en déduit que :

$$h(\xi_i)\leq D\left(\log(B)+h+\log(V)\right),\qquad \forall i, 1\leq i\leq D; \tag{14}$$

et donc :

$$\log\max\left\{|\xi_i|, 1\leq i\leq D\right\}\leq D^2\left(\log(V)+\log(B)+h\right), \tag{15}$$

en utilisant l'inégalité de LIOUVILLE.

# 7 La transcendance

## 7.1 Le « lemme de Siegel »

Soit $P$ un polynôme, élément de $K[\overline{\mathbb{P}}]$ de coefficients $(p_1, \ldots, p_h)$. On notera $h(P)$ la hauteur du point projectif $(1, p_1, \ldots, p_h)$.

**Proposition 7.1** *Il existe un polynôme $P$, de $K[\overline{\mathbb{P}}]$, ne s'annulant pas identiquement sur $\mathbb{G}$ de multidegré $\leq (L_0, \ldots, L_k)$, tel que :*

$$h(P) \leq c_{10} \frac{U_0}{D}, \tag{16}$$

*avec,*

$$c_{10} = \frac{c_{12} + 0,1}{D},$$

*si $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, et :*

$$c_{10} = \frac{c_{12} + 0,1}{2D},$$

*dans le cas général. De plus, si l'on pose $F = P \circ \boldsymbol{\Phi}$, on a :*

$$\log \left| D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} \left( F(s\boldsymbol{u}) \right) \right| \leq -c_{11} U_0 \quad \forall (\boldsymbol{t}, s) \in \Sigma. \tag{17}$$

*avec,*

$$c_{11} = \left( \frac{6\,(13 + 4e^2)}{(25 + 4e^2)} (k+1) \log(4(k+1)) + 28 \log(k+1) + 24,9 \right) c_{12},$$

*si $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, et :*

$$c_{11} = \left( \frac{6\,(13 + 4e^2)}{(25 + 4e^2)} (k+1) \log(4(k+1)) + 28 \log(k+1) + 24,69 \right) c_{12},$$

*dans le cas général (rappelons que la valeur de la constante $c_{12}$ a été donnée dans l'énoncé de l'hypothèse 5.3).*

*Démonstration* : décomposons les coefficients de $P$ dans la base $\xi$ de $K$ que nous avons fixée précédemment. Nous allons résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système d'inéquations (17). Soit $\rho$ le rang de ce système (qui est égal au rang $\rho$ du système (13) ce qui fait que les notations ne se contredisent pas) et $\nu$ le nombre d'inconnues (qui est égal au nombre d'inconnues $\nu$ du système (13)).

Nous allons maintenant majorer la valeur absolue des coefficients de (17). Pour ceci, appliquons le lemme 3.5, pour $\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{u}$, $P = \xi_j \times(\text{un monôme})$ (pour $1 \leq j \leq D$) et $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$ $(1 \leq i \leq k)$, puis, appliquons la proposition 6.9 pour passer de $\boldsymbol{e}$ à $\boldsymbol{f}$. On obtient donc que le logarithme du maximum du modules des coefficients du système (17) est majoré par :

$$\begin{aligned} & 2(k+1)T\log(2(k+1)^2T) + D^2\left(\log(B) + \log(V) + h\right) \\ + \quad & \sum_1^k 3\pi L_i \left( \frac{\left(2(k+1)S\left|\frac{u_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right)^2}{\Im m\ \tau_i} \right) \\ + \quad & \sum_1^k 3\pi L_i \left( \left(2(k+1)S\left|\frac{u_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right) + \frac{\Im m\ \tau_i}{4} \right) \\ + \quad & (3,6 + Dh)\sum_1^k L_i + \sum_0^k \log(L_i + 1) \\ + \quad & 2L_0 D\log(B) + L_0\log(2(k+1)S + 1) + c_9 U_0. \end{aligned}$$

Remarquons que dans le lemme 3.5, une quantité $M_0 = \min\{L_0, T\}$ intervient. Nous l'avons remplacée ici par $L_0$. Il faut donc encore vérifier que $L_0 \leq T$. C'est-à-dire, en remplaçant les paramètres par leur valeur, en tenant compte des parties entières :

$$\log\log(B) + h + \log(DE) \leq \log(B) + \log(DE),$$

qui est clairement vérifiée, en tenant compte de l'hypothèse $\log(B) \geq eh$.

Le choix des paramètres nous donne les inégalités :

$$2DL_0 \log(B) \leq \frac{2}{c_6} U_0;$$

$$D^2 \left(\log(B) + \log(V) + h\right) \leq 10^{-3} U_0;$$

majorons maintenant :

$$\begin{aligned}
2(k+1)T\log(2(k+1)^2T) \leq 2(k+1)T\log((k+1)^2U_0) \\
&\leq 2(k+1)U_0\left(\frac{2}{3}\log(k+1)\right) \\
&+ \frac{2(k+1)U_0\log(U_0)}{D\left(\log\log(B) + h + \log(DE)\right)} \\
&\leq (k+1)U_0\left(\frac{2}{3}\log(c_5) + \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{e^3}\right)(k+1)\right) \\
&+ (k+1)U_0\left(0,046 + \frac{4}{3}\log(k+1)\right),
\end{aligned}$$

en effet, pour obtenir la dernière inégalité, il suffit de vérifier (en tenant compte de la relation (2)) :

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\log(B)+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} &+ \frac{(k+1)\log(D^2)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \frac{(k+1)\log(\log\log(B)+h+\log(DE))}{(\log\log(B)+h+\log(DE)))} \\
&+ \frac{k\log(D\log(B))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&\leq \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{e^3}\right)(k+1) + 0,023.
\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que $D \geq 3$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\log(B)+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} &+ \frac{(k+1)\log(D^2)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \frac{(k+1)\log(\log\log(B)+h+\log(DE)))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \frac{k\log(D\log(B))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&\leq (k+1)\frac{2\log(D)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \left(\frac{1}{3e}+\frac{1}{3}\right)(k+1) \\
&\leq \frac{(k+1)}{3e}+\frac{1}{3}+\frac{k}{3}+(k+1)\frac{2\log(3)}{3(3+\log(3))} \\
&\leq \frac{2}{3}(k+1)\left(1+\frac{1}{e^3}\right)+0,023.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc supposer que $D = 1$, ou 2, nous détaillons ici le cas $D = 1$ uniquement. Or, pour $D = 1$, l'expression à majorer est décroissante en $h$ et en $\log(E)$. D'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(\log(B)+\log(DE))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} + \frac{(k+1)\log(D^2(\log\log(B)+h+\log(DE)))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&+ \frac{k\log(D\log(B))}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))} \leq \frac{\log(\log(B)+1)}{(\log\log(B)+2)} + \frac{k\log(\log(B))}{(\log\log(B)+2)} \\
&\qquad + \frac{(k+1)\log(\log\log(B)+2)}{(\log\log(B)+2)} \\
&\qquad \leq (k+1)\frac{\log\log(B)+\log(\log\log(B)+2)}{\log\log(B)+2} \\
&\qquad + \frac{\log(\log(B)+1)-\log\log(B)}{\log\log(B)+2}.
\end{aligned}$$

L'étude des variations de la fonction de $B$ :

$$\frac{\log\log(B)+\log(\log\log(B)+2)}{\log\log(B)+2}$$

permet de vérifier que cette dernière atteint son maximum ($= 1 + \frac{1}{e^3}$) pour $\log\log(B) = e^3 - 2$. On vérifie aisément que pour $\log(B) \geq 18$,

$$\frac{\log(\log(B)+1) - \log\log(B)}{\log\log(B)+2} \leq 0,023.$$

Pour les petites valeurs de $\log(B)$, (*ie.* $e \leq \log(B) \leq 18$), on majore $\frac{\log\log(B)+\log(\log\log(B)+1)}{\log\log(B)+1}$ par son maximum sur cet intervalle, qui est $\leq 0,94$, et on a $\frac{\log(\log(B)+1)-\log(\log(B))}{\log(\log(B))+2} \leq \frac{1}{3e} \leq 0,123$. Il suffit donc de vérifier $0,1(k+1) + 0,023 \geq 0,123$, ce qui est toujours vrai.

Enfin,

$$\begin{aligned}
L_0 \log(2(k+1)S+1) &\leq \frac{U_0 \log\left(\frac{2(k+1)c_4 D(\log\log(B)+h+\log(DE))}{\log(E)} + 1\right)}{c_6 D(\log(B)+\log(DE))} \\
&\leq U_0 \frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)} \\
&+ U_0 \frac{\log(D(\log\log(B)+h+\log(DE))}{c_6 D(\log(B)+\log(DE))} \\
&+ U_0 \left[\frac{\log\left(1 + \frac{\log(E)}{c_4 D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\right)}{c_6 D(\log(B)+\log(DE))}\right] \\
&\leq U_0 \left(\frac{0,44}{c_6} + \frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)} + \frac{1}{(e+1)c_6 c_4}\right);
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\log\left(1 + \frac{\log(E)}{c_4 D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\right)}{c_6 D(\log(B)+\log(DE))}\right] &\leq \frac{\log(E)}{(\log\log(B)+h+\log(DE))} \\
&\times \frac{1}{c_4 c_6 D^2(\log(B)+\log(DE))} \\
&\leq \frac{1}{c_4 c_6(\log(B)+\log(DE))} \\
&\leq \frac{1}{c_4 c_6 (e+1)},
\end{aligned}$$

et (rappelons que $\log(B) \geq h$ (relation 2)) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\log(D(\log\log(B) + h + \log(DE)))}{D(\log(B) + \log(DE))} \\
\leq\ &\frac{\log(\log\log(B) + \log(B) + \log(DE)) + \log(D)}{D(\log(B) + \log(DE))}.
\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord $D \geq 2$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\log(D(\log\log(B) + \log(B) + \log(DE)))}{D(\log(B) + \log(DE))} &\leq \frac{\log(D)}{D(1 + e + \log(D))} + \frac{1}{2e} \\
&+ \frac{\log\left(1 + \frac{\log\log(B)}{\log(B)+\log(DE)}\right)}{2(\log(B) + 1 + \log(2))} \\
&\leq 0,44.
\end{aligned}$$

On peut donc supposer $D = 1$. Il faut vérifier :

$$\frac{\log(\log\log(B) + \log(B) + \log(E))}{(\log(B) + \log(E))} \leq 0,44.$$

Or, on a :

$$\frac{\log(\log\log(B) + \log(B) + \log(E))}{(\log(B) + \log(E))} \leq \frac{1}{e} + \frac{\log\left(1 + \frac{\log\log(B)}{\log(B)+\log(E)}\right)}{(\log(B) + 1)} \leq 0,44.$$

Passons maintenant à :

$$\begin{aligned}
\sum_1^k \frac{3\pi}{\Im m\ \tau_i} L_i \left(\frac{2(k+1)S|u_i|}{|\omega_{1,i}|} + 1\right)^2 &\leq c_7 \sum_1^k \frac{3\pi 4(k+1)^2 S^2 |u_i|^2 U_0}{DS^2 \Im m\ \tau_i |\omega_{1,i}|^2 \log(V_i)} \\
&+ \frac{U_0}{DS^2 \log(V_i)} \frac{3\pi 4(k+1)S|u_i|}{\Im m\ \tau_i |\omega_{1,i}|} \\
&+ \frac{U_0}{DS^2 \log(V_i)} \frac{3\pi}{\Im m\ \tau_i}.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de $\log(V_i)$ (*voir* la relation (3)), on en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{4(k+1)^2 \times 3\pi S^2 |u_i|^2}{DS^2 \log(V_i) \Im m\ \tau_i |\omega_{1,i}|^2} & \leq\ 4(k+1)^2, \\ \dfrac{4(k+1) \times 3\pi S |u_i|}{DS^2 \log(V_i) \Im m\ \tau_i |\omega_{1,i}|} & \leq\ \sqrt{2\sqrt{3}\pi} \dfrac{4(k+1)}{c_4}, \\ \dfrac{3\pi}{DS^2 \log(V_i) \Im m\ \tau_i} & \leq\ \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{{c_4}^2}, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_1^k \frac{3\pi}{\Im m\ \tau_i} L_i \left( \frac{2(k+1)S|u_i|}{|\omega_{1,i}|} + 1 \right)^2 &\leq U_0 \left( \frac{4\sqrt{2\sqrt{3}\pi}k(k+1)}{c_4} c_7 \right) \\ &+ U_0 \left( c_7 4k(k+1)^2 + \frac{2\sqrt{3}\pi c_7 k}{{c_4}^2} \right). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\sum_1^k 3\pi L_i \left( 2(k+1)S \frac{|u_i|}{|\omega_1|} + 1 \right) \leq \left( \frac{3\sqrt{2\pi}k(k+1)c_7}{c_4} + \frac{3\pi k c_7}{{c_4}^2} \right) U_0.$$

De même :

$$\frac{3\pi}{4} \sum_1^k L_i \Im m\ \tau_i \leq \frac{9}{8} k\pi c_7 U_0 \frac{Dh}{S^2} \leq \frac{9k\pi c_7}{8{c_4}^2} U_0.$$

Enfin,

$$(3,6 + Dh) \sum_1^k L_i + \sum_0^k \log(L_i + 1) \leq 5,6 \frac{kc_7}{{c_4}^2} U_0,$$

En conclusion, en mettant ensemble ces inégalités, on obtient que les coefficients du système (17) sont majorés en valeur absolue, par :

$$\begin{aligned} &\exp \Bigg( U_0 \Bigg( c_9 + \frac{2,44}{c_6} + \frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)} + \frac{1}{(e+1)c_6 c_4} + 0,046(k+1) \\ &+ \frac{4}{3}(k+1)^2 \left(1 + \frac{1}{e^3}\right) + \frac{3\sqrt{2\pi}k(k+1)c_7}{c_4} + \frac{5,6kc_7}{{c_4}^2} \\ &+ 4k(k+1)^2 c_7 + \frac{4}{3}(k+1)\log(k+1) + \frac{2}{3}(k+1)\log(c_5) + 10^{-3} \\ &+ \frac{3\pi k c_7}{{c_4}^2} + \frac{9k\pi c_7}{8{c_4}^2} + \frac{2\sqrt{3}\pi k c_7}{{c_4}^2} + \frac{4\sqrt{2\sqrt{3}\pi}k(k+1)c_7}{c_4} \Bigg) \Bigg). \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant les paramètres restant par leur valeur, afin de majorer l'expression ci–dessus, à l'aide de valeurs numériques : nous savons déjà que dans le cas où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$,

$$c_9 \leq (k+1)\left(\frac{2}{3}k\log(k+1) + \frac{4}{3}k\log(2) + 6,8\log(k+1) + 6,4\right).$$

(*voir* la proposition 6.9). Comme $c_6 = (k+1)2^k$ (*voir* page 37), et pour $k \geq 15000$,

$$c_4 \leq k\log(k+1) + 2k\log(2) + 4,48\log(k+1) + 5,03,$$

on a, en vérifiant directement cette inégalité pour les petites valeurs de $k$ :

$$\frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)} \leq 1.$$

De même,

$$\begin{aligned} 4k(k+1)^2c_7 &\leq \frac{16}{13+4e^2}k(k+1)^2\log(4(k+1)) \\ &+ \frac{240(k+1)^2 + 80\log(k+1)}{13+4e^2}, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} &\frac{4\sqrt{2\sqrt{3}\pi k(k+1)c_7}}{c_4} + \frac{2\sqrt{3}\pi k c_7}{{c_4}^2} + 3\pi k\frac{c_7}{{c_4}^2} + 3\sqrt{2\pi k(k+1)\tfrac{c_7}{c_4}} \\ &+\frac{9k\pi c_7}{8{c_4}^2} + \frac{1}{c_6c_4(e+1)} + 5,6\frac{kc_7}{{c_4}^2} + 10^{-3} \leq 10^{-2}. \end{aligned}$$

Vérifions l'inégalité ci–dessus. Tout d'abord, en remplaçant la constante $c_7$ par sa valeur numérique, on a :

$$\begin{aligned} c_7\left(2\sqrt{3}\pi k + 3\pi k + 5,6k + \frac{9\pi k}{8}\right) &\leq 30kc_7 \\ &\leq 3k\log(4(k+1)) + 15\log(k+1) + 50. \end{aligned}$$

On en déduit donc, en remplaçant maintenant $c_4$ par sa valeur :

$$\frac{3k\log(4(k+1)) + 15\log(k+1) + 50}{{c_4}^2} \leq 10^{-3}$$

(on a simplement minoré $\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54$ par $8(k+1)\log(k+1)$, $8(k+1)(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)$ par $8(k+1)^2$ et $4^k(k+1)^{k+1}$ par 16). On a de même,

$$\begin{aligned}\frac{4\sqrt{2\sqrt{3}\pi}k(k+1)c_7}{c_4} &+ 3\sqrt{2\pi}k(k+1)\frac{c_7}{c_4} \leq 21k(k+1)\frac{c_7}{c_4} \\ &\leq \frac{6k(k+1)\log(k+1)+60(k+1)}{c_4} \leq 3.10^{-3},\end{aligned}$$

(cette fois, on pris une valeur exacte de $c_4$ pour $k=1$ et une minoration brutale pour $k \geq 2$). Enfin, en remplaçant ${c_6}^{-1}$ par sa valeur, on a,

$$10^{-3}+\frac{1}{c_6c_4(e+1)} \leq \frac{0,8}{c_4}+10^{-3} \leq 2.10^{-3}.$$

En mettant ces trois inégalités ensemble, on vérifie bien l'inégalité annoncée.

De Plus,

$$\frac{2,44}{c_6} \leq 0,61.$$

Il reste à majorer $(k+1)\log(c_5)$. Par définition de $c_5$,

$$\log(c_5) = (2k+1)\log(c_4)+\log(c_6)-k\log(c_7)-k\log(6)-\log((k+1)!).$$

Nous allons établir :

$$\begin{aligned}\log(c_5) &\leq 2k(k+1)\log(k+1)+4k^2\log(2)+7,8k\log(k+1) \\ &+ 11,5k+11,8\log(k+1)+8.\end{aligned}$$

Nous allons établir cette inégalité pour $k \geq 10^6$, la vérification étant faite directement pour les petites valeurs de $k$.

- Commençons par majorer :

$$\begin{aligned}(2k+1)\log(c_4)-\log((k+1)!) &\leq 2k(k+1)\log(k+1) \\ &+ 4k^2\log(2) \\ &+ 6,8k\log(k+1)+12,6k \\ &+ 2,7\log(k+1)+5,2;\end{aligned}$$

en effet, en remplaçant $c_4$ par sa valeur, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(2k+1)\log(c_4) - \log((k+1)!) = &-\log((k+1)! \\
&+ (2k+1)\left(\log\left(4^k(k+1)^{(k+1)}(1+\lambda)\right)\right) \\
&+ (2k+1)\log(8(k+1)) \\
&+ 2(k+1)\left(\log(k\log(4(k+1)) + 5\log(k+1) + 15)\right) \\
+ (2k+1)\log&\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui donne (rappelons que $k \geq 10^6$),

$$
\begin{aligned}
&(2k+1)\log(c_4) - \log((k+1)!) \leq (2k+1)(k+1)\log(k+1) \\
&+ k+1 - \frac{1}{2}\log(2\pi(k+1)) + (2k+1)\log(8(k+1)) \\
&+ \frac{2k+1}{100k^2} + k(2k+1)\log(4) - (k+1)\log(k+1) \\
&+ (2k+1)\log\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right) \\
&+ (2k+1)\left(\log(k\log(4(k+1)) + 5\log(k+1) + 15)\right).
\end{aligned}
$$

Comme :

$$
\begin{aligned}
\log\left(12\frac{13+4e^2}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)& \\
&+ \log(k\log(4(k+1)) + 5\log(k+1) + 15) \\
&+ \log(8(k+1)) \\
&\leq \log\left(\frac{13+4e^2}{25+4e^2}\right) + \log(96) \\
&+ 2\log\log(4(k+1)) + \log(k(k+1)^2) \\
&+ \log\left(1 + \frac{110}{18(k+1)}\right) + \log\left(1 + \frac{20}{k}\right) \\
&\leq 5{,}1 + 2\log(\log(4(k+1))) \\
&+ \log(k) + 2\log(k+1).
\end{aligned}
$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
(2k+1)\log(c_4) \ - \ & \log((k+1)!) \leq 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) \\
+ \ & k(\log(4)+1) + 4k\log(k+1) + 4k\log\log(4(k+1)) \\
+ \ & 10{,}2k + 2k\log(k) + 2\log(k+1) + \log(k) \\
+ \ & 2\log\log(k+1) - \frac{1}{2}\log(k+1) \\
+ \ & 5{,}1 + 1 + 2.10^{-7} - \frac{1}{2}\log(2\pi) \\
\leq \ & 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) + 6{,}8k\log(k+1) \\
+ \ & 12{,}6k + 2{,}7\log(k+1) + 5{,}2.
\end{aligned}$$

- Il reste à minorer $k\log(c_7)$. Nous allons établir :

$$k\log(c_7) \geq 0{,}25k$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
k\log(c_7) &\geq k\left(\log\left(\log(k+1)\right) + \log\left(\frac{4}{13+4e^2}\right)\right) \\
&\geq k(\log\log(k+1) - 2{,}37) \geq 0{,}25k.
\end{aligned}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned}
\log(c_5) \ \leq \ & 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) + 6{,}8k\log(k+1) \\
+ \ & 12{,}6k + 2{,}7\log(k+1) + 5{,}2 - 0{,}25k \\
- \ & k\log(6) + k\log(2) + \log(k+1) \\
\leq \ & 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) + 6{,}8k\log(k+1) \\
+ \ & 11{,}3k + 3{,}7\log(k+1) + 5{,}2.
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que :

$$\begin{aligned}
2k(k+1)\log(k+1) \ + \ & 4k^2\log(2) + 6{,}8k\log(k+1) + 11{,}3k \\
+ \ & 3{,}7\log(k+1) + 5{,}2 \\
\leq \ & 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) + 8 \\
+ \ & 7{,}8k\log(k+1) + 11{,}5k + 11{,}8\log(k+1),
\end{aligned}$$

ce qui est trivial. Nous pouvons donc conclure que le logarithme du maximum des modules des coefficients du système (17), dans le cas particulier où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, est majoré par :

$$\begin{aligned} & (k+1)U_0\left[\left(\frac{4}{3}+\frac{16}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right] \\ + \quad & (k+1)U_0\left[\left(\frac{8}{3}+\frac{32}{13+4e^2}\right)k^2\log(2)+7{,}8k\log(k+1)\right] \\ + \quad & (k+1)U_0\left[16{,}4k+16{,}4\log(k+1)+20{,}7\right]. \end{aligned}$$

Pour alléger, nous noterons par la suite ce nombre : $c_{12}U_0$. Dans le cas général, on a, en utilisant la majoration correspondante de $c_9$, que le logarithme du maximum des modules des coefficients du système (17) est majoré par :

$$\begin{aligned} & (k+1)U_0\left[\left(\frac{8}{3}+\frac{16}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right] \\ + \quad & (k+1)U_0\left[\left(\frac{16}{3}+\frac{32}{13+4e^2}\right)k^2\log(2)+11{,}7k\log(k+1)\right] \\ + \quad & (k+1)U_0\left[28k+19{,}5\log(k+1)+24{,}7\right]. \end{aligned}$$

Par la suite, nous noterons ce nombre : $c_{13}U_0$.

Rappelons l'énoncé du lemme 6–1 de [P–W] :

**Lemme 7.2** *Soit $(u_{i,j})_{1\le i\le\nu,1\le j\le\mu}$ , une matrice de nombres complexes, de rang $\le \rho$. Soient de plus $\delta$, $m$, $p$ des nombres positifs, tels que :*

$$\left[2\mu e^{\delta+m+p}+1\right]^{2\rho} \le e^{\nu\delta}. \tag{18}$$

*et :*

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{\nu}|u_{i,j}|, 1\le j\le\mu\right\} \le e^{m} \tag{19}$$

*Il existe alors $(a_1,\ldots,a_\nu)\in\mathbb{Z}^\nu$ tel que :*

$$0<\max\{|a_i|\}\le e^{\delta}. \tag{20}$$

*et,*

$$\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{\nu}u_{i,j}a_i\right|, 1\le j\le\mu\right\} \le e^{-p}. \tag{21}$$

Dans le cas particulier où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, nous allons appliquer ce lemme, avec : $m = (c_{12}+1)U_0$, $\delta = \frac{c_{12}U_0}{D}$, et :

$$p = \left(\frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 24,9\right) c_{12}U_0.$$

Le nombre d'équations $\mu$ de notre système linéaire est majoré par :

$$\mu \leq \frac{4^{-k}(k+1)^{-k-1}(1+\lambda)^{-1}\,(2(k+1)T)^k\,S}{\left(\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54\right)}.$$

Enfin, le nombre d'inconnues $\nu$ est majoré par $\frac{1}{(k+1)!}DH(\mathbb{G}; L_0, \ldots, L_k)$ et le rang $\rho$ est majoré par $\frac{1}{\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54}\frac{\nu}{D}$ (*voir* le lemme 6.1). Vérifions tout d'abord que les hypothèses du lemme 7.2 sont vérifiées : la condition (18) se traduit, par l'inégalité :

$$\log(2\mu) + \delta + m + p + \frac{1}{2\mu}e^{-\delta-m-p} \leq \nu\delta.$$

En remplaçant les nombres $\delta$, $m$, $p$, $\rho$ et $\nu$ par leur valeur, Il s'agit donc de vérifier :

$$\begin{aligned}
& \log(2\mu) + c_{12}U_0\left(1 + \frac{1}{D} + \frac{1}{c_{12}}\right) \\
+ \quad & \left(\frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 24,9\right) c_{12}U_0 \\
- \quad & \frac{\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54}{2} c_{12}U_0 \\
+ \quad & \frac{1}{2\mu}e^{-\left(c_{12}U_0\left(1+\frac{1}{D}+\frac{6\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+28\log(k+1)+24,9+\frac{1}{c_{12}}\right)\right)} \\
\leq \quad & 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2\mu} e^{-\left(c_{12}U_0\left(2+\frac{6\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+28\log(k+1)+24{,}9+\frac{1}{c_{12}}\right)\right)}$$
$$+ \quad \log(2\mu) \leq (0,1c_{12}-1)U_0.$$

Comme $2\mu > 1$, et $c_{12} \geq 90$, Il suffit donc de vérifier :

$$k\log(2(k+1)) + k\log(T) + \log(S) + e^{-100U_0} \leq U_0 \leq (0,1c_{12}-1)U_0.$$

Or, cette dernière inégalité est clairement vraie.

Vérifions maintenant la condition (19). Comme chacun des coefficients du système (17), est majoré par $\exp(c_{12}U_0)$, elle se traduit par :

$$\log\left(\frac{D}{(k+1)!}H(\mathbb{G}; L_0, L_1 \ldots, L_k)\right) \leq U_0,$$

qui est clairement vraie. Dans le cas général, on pose : $m = (c_{13}+1)U_0$, $\delta = \frac{c_{12}U_0}{2D}$,

$$p = \left(\frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 24,69\right)c_{12}U_0,$$

et nous utilisons la majoration correspondante de $\rho$ fournie par le lemme 6.1. La condition (18) se traduit dans ces conditions par l'inégalité :

$$c_{12}U_0\left(\frac{1}{2D} + \frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 24,69\right)$$
$$- \quad c_{12}U_0\left(\frac{\frac{12\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1)) + 56\log(k+1) + 54}{2}\right)$$
$$+ \quad (c_{13}+1)U_0 + \log(2\mu)$$
$$+ \quad \frac{1}{2\mu}e^{-c_{12}U_0\left(\frac{6\left(13+4e^2\right)}{\left(25+4e^2\right)}(k+1)\log(4(k+1))+28\log(k+1)+24{,}69+\frac{1}{2D}+\frac{c_{13}+1}{c_{12}}\right)}$$
$$\leq \quad 0.$$

Cette inégalité se déduit comme précédemment de :

$$c_{12}U_0\left(\frac{1}{2D}+\frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1))+28\log(k+1)+24,69\right)$$

$$-\quad c_{12}U_0\left(\frac{\frac{12(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54}{2}\right)$$

$$+\quad (c_{13}+1)U_0 \;\leq\; (-1,81c_{12}+c_{13}+1)U_0 \;\leq\; -U_0.$$

Il suffit donc d'établir :

$$-1,80c_{12}+c_{13}+2\leq 0.$$

En remplaçant $c_{12}$ et $c_{13}$ par leurs valeurs, on vérifie qu'il suffit d'établir :

$$\begin{aligned}\left(0,8\times\frac{16}{13+4e^2}-\frac{0,8}{3}\right)k(k{+}1)\log(k+1)+2,34k\log(k+1)+1,52k&\\ +\;\left(\tfrac{25,6}{13+4e^2}-\tfrac{1,6}{3}\right)k^2\log(2)&\\ +\;10,02\log(k+1)+11,56\;\geq\;0,&\end{aligned}$$

ce qui est trivial.

Enfin, la condition (19) se traduit cette fois par l'inégalité :

$$\log\left(\frac{D}{(k+1)!}H(\mathbb{G},L_0,\ldots,L_k)\right)\leq U_0,$$

et cette dernière est identique à celle que nous venons de vérifier dans le cas où $\tilde{\mathbb{G}}=0$.

Nous en déduisons donc l'existence d'un polynôme $P$ dont les coefficients $p_\lambda$ vérifient :

$$p_\lambda=\sum_1^D a_{i,\lambda}\xi_i,\qquad a_{i,\lambda}\in\mathbb{Z},$$

avec,

$$0<\max\{|a_{i,\lambda}|,1\leq i\leq D,1\leq\lambda\leq\nu\}\leq\exp\left(\frac{c_{12}}{D}U_0\right),$$

(si $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, et $\leq \exp\left(\frac{c_{12}}{2D}U_0\right)$ dans le cas général) tel que la relation (17) soit vraie, puisque $P$ a été construit en résolvant précisément ces conditions. De plus,

$$\begin{aligned} h(P) &\leq h(1, \xi_1, \ldots, \xi_D) + \log\left(\max\left\{|a_{\lambda,i}|, \lambda, i\right\}\right) + \log(D) \\ &\leq D^2(\log(B) + \log(V) + h) + \frac{c_{12}}{D} + \log(D) \leq \frac{c_{12} + 0,1}{D} U_0, \end{aligned}$$

dans le cas où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$ ; dans le cas général, on obtient :

$$h(P) \leq \frac{c_{12} + 0,1}{2D} U_0.$$

On en déduit donc la relation (16). Le fait que $P$ n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{G}$ découle immédiatement du fait que les $a_{i,j}$ ne sont pas tous nuls. La proposition 7.1 est donc établie.

Le lemme suivant va nous permettre d'interpoler $P(\boldsymbol{\Phi})$ pour estimer sa valeur en $s\boldsymbol{w}$ (en fait il ne s'agit de rien de plus que du lemme des accroissements finis).

**Lemme 7.3** *Pour tout couple* $(\boldsymbol{t}, s) \in \Sigma$, *on a :*

$$\left| D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}\left(F(s\boldsymbol{u})\right) - D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}\left(F(s\boldsymbol{w})\right) \right| < \exp\left(-(p+1)U_0\right).$$

*Démonstration* : soient $(\boldsymbol{t}, s) \in \Sigma$, on définit alors une fonction holomorphe $f$ d'une variable complexe en posant :

$$f(z) = D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}\left(F(s\boldsymbol{u} + sz(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}))\right).$$

Le lemme des accroissements finis nous donne :

$$|f(0) - f(1)| \leq \max\left\{|f'(x)|, 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Nous allons majorer le membre de gauche. La formule de dérivation des fonctions composées nous donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=0}^{k} s(w_i - u_i) \frac{\partial D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} F}{\partial z_i}(s\boldsymbol{u} + sx(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u})) \\ &= s\left(\sum_{i=0}^{k} \beta_i u_i - u_0\right) \frac{\partial D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} F}{\partial z_0}(s\boldsymbol{u} + sx(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u})). \end{aligned}$$

La proposition 6.9 nous donne maintenant :

$$\log\left(\max\{|f'(x)|, 0 \le x \le 1\}\right) \le \log\left(s|\mathcal{L}(\boldsymbol{u})|\right) + c_9 U_0$$
$$+ \ \log\max\left\{\frac{\partial D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F}{\partial z_0}(s\boldsymbol{u} + sx(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}), 0 \le x \le 1, |\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{t}|\right\}.$$

Soyons plus précis puisqu'une application brutale de la proposition 6.9 ne donnerait pas l'estimation ci-dessus : la formule du changement de base permet d'écrire :

$$\frac{\partial D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}} F}{\partial z_0} = \sum_{|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{t}|} A_{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F}{\partial z_0}.$$

La preuve de la proposition 6.9 revient simplement à dire que :

$$\left|\sum_{|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{t}|} A_{\boldsymbol{\tau}} D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F\right| \le \sum_{|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{t}|} |A_{\boldsymbol{\tau}}| \max_{|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{t}|} \{|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{\tau}} F|\}.$$

L'énoncé dit donc que :

$$\log\left(\sum_{|\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{t}|} |A_{\boldsymbol{\tau}}|\right) \le c_9 U_0.$$

Le même argument s'applique clairement à notre cas, avec $D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} F$ remplacé par $\frac{\partial}{\partial z_0} D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} F$. Appliquons maintenant le lemme 3.5 à la fonction $F$, avec $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{e}_i$, $1 \le i \le k$, et enfin $\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{u} + sx(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u})$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\log\left(\max\{|f'(x)|,\ 0 \le x \le 1\}\right) &\le (2(k+1)T)\log((2(k+1)^2 T)) \\
&\quad + L_0 \log(2(k+1)S|u_0| + 1) + Dh(P) + \sum_1^k 3\pi L_i \frac{\Im m\ \tau}{4} \\
&\quad + \sum_{i=1}^k 3\pi L_i \left(\frac{(2(k+1)S\left|\frac{u_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1)^2}{\Im m\ \tau} + 2(k+1)S\left|\frac{u_i}{\omega_{1,i}}\right| + 1\right) \\
&\quad + \ (3,6 + Dh)\sum_1^k L_i + \sum_0^k \log(L_i + 1) + 2L_0 D\log(B) - c_8 U_0 \\
&\quad + \ \log(2(k+1)S) + c_9 U_0 \\
&\le \ c_{12} U_0 + Dh(P) + \log(2(k+1)S) - D^2(\log(B) + \log(V) + h) - c_8 U_0 \\
&\le (2c_{12} + 0,2 - c_8)U_0 \le -(p+1)U_0,
\end{aligned}$$

(dans le cas particulier où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$; dans le cas général, il faut remplacer $2c_{12}$ par $\frac{1}{2}c_{12} + c_{13}$, mais la dernière inégalité est inchangée, comme on le vérifie aisément en utilisant l'inégalité $c_{13} \leq 1,8c_{12}$, établie page 87). Le lemme 7.3 est donc établi.

## 7.2 Extrapolation

Les formules classiques d'interpolation liées au lemme de SCHWARZ, permettent d'obtenir l'estimation :

**Proposition 7.4** *Pour tout couple* $(\boldsymbol{t}, s) \in \mathbb{Z}^{k+2}, |\boldsymbol{t}| < (k+1)T$, *et* $0 \leq s < (k+1)S$, *on a :*

$$\left|D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}(s\boldsymbol{u})\right| \leq 2\exp(-c_{14}U_0),$$

*avec*

$$\begin{aligned} c_{14} &= (k+1)\left(\left(6 - \frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right) \\ &+ (k+1)\left(\left(12 - \frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k^2\log(2) + 15k\log(k+1)\right) \\ &+ (k+1)\,(63,5k - 1,4\log(k+1) + 45,8)\,, \end{aligned}$$

*dans le cas particulier où* $\tilde{\mathbb{G}} = 0$, *et,*

$$\begin{aligned} c_{14} &= \left(\frac{16}{3} - \frac{8(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)^2\log(k+1) \\ &+ \left(\frac{32}{3} - \frac{16(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2) + 15k(k+1)\log(k+1) \\ &+ (k+1)\,(60,6k + 3,2\log(k+1) + 51,8) \end{aligned}$$

*dans le cas général.*

*Démonstration* : on déduit de l'inégalité (17) et du lemme 7.3, que :

$$\log\left|D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}F(s\boldsymbol{w})\right| \leq -pU_0 + e^{-U_0},$$

pour tout couple $(\boldsymbol{t}, s) \in \Sigma$. Dans le cas non périodique, on fixe un $k$-uplet $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ tel que $\sum_{i=1}^{k} t_i \leq (k+1)T$, et l'on pose :

$$f(z) = D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}(F(z\boldsymbol{w})).$$

Dans le cas périodique, on fixe $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1}, 0)$, $\sum_1^k t_i \leq (k+1)T$, et l'on pose encore :

$$f(z) = D_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{t}}(F(z\boldsymbol{w})).$$

On a alors,

$$\log(|f^{(t)}(s)| < -pU_0 + e^{-U_0},$$

pour tout $t$, $1 \leq t \leq (k+1)T$ et tout $s$, $0 \leq s \leq S_0$ dans le cas non périodique et pour tout $t$, $0 \leq t \leq T_0$ et tout $s$, $0 \leq s \leq 2(k+1)S$ dans le cas périodique. Commençons par traiter le cas non périodique et rappelons la formule d'interpolation :

**Lemme 7.5** *Soit $f$ une fonction analytique dans le disque : $\{z, |z| \leq R\}$. Soient $S'$ et $T'$ deux entiers positifs et $r$ un nombre réel tels que : $S' \geq 2$ et $S' \leq r \leq \frac{R}{2}$. On a alors l'inégalité :*

$$\begin{aligned} |f|_{2r} \leq\ & 2|f|_R . \left(\frac{4r}{R}\right)^{T'S'} \\ & + 5\left(\frac{18r}{S'}\right)^{T'S'} \max\left\{\left|\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dz^t}f(s)\right|, 0 \leq t \leq T', 0 \leq s \leq S'\right\}. \end{aligned}$$

*Démonstration* : *voir* le lemme 2–3 de [W].

Traitons tout d'abord le cas où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$. Appliquons alors le lemme 7.5 à notre fonction $f$, avec $r = \frac{(k+1)S}{2}$, $R = 2(k+1)SE$, $S' = S_0$ et enfin $T' = (k+1)T$. Calculons pour ceci $|f|_R$ : on obtient, en appliquant la proposition 6.9 :

$$\log(|f|_R) \leq \log(\max\{D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} F(z\boldsymbol{w}), |z| \leq R, |\boldsymbol{t}| \leq (k+1)T\}) + c_9 U_0.$$

Le lemme 3.5 (appliqué avec $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$) donne alors :

$$
\begin{aligned}
\log(|f|_R) &\leq (k+1)T\log((k+1)^2T) + L_0\log(R|w_0|+1) + 2L_0D\log(B) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} 3\pi L_i \left( \frac{\left(R\frac{|w_i|}{|\omega_{1,i}|}+1\right)^2}{\Im m\ \tau} + \left(R\frac{|w_i|}{|\omega_{1,i}|}+1\right) + \frac{1}{4}\Im m\ \tau \right) \\
&+ (3,6+Dh)\sum_{i=1}^{k} L_i + Dh(P) + \sum_{0}^{k}\log(L_i+1) + c_9U_0,
\end{aligned}
$$

ce qui donne, en remplaçant tous les paramètres par leur valeur (le calcul est presque identique à celui de $c_{12}$) :

$$
\begin{aligned}
\log(|f|_R) &\leq (k+1)U_0\left(\frac{2}{3}\log(k+1) + \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{e^3}\right)(k+1)\right) + c_9U_0 \\
&+ (k+1)U_0\left(0,023 + \frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)(k+1)}\right) + (c_{12}+0,1)U_0 \\
&+ \frac{2,44}{c_6}U_0 + \frac{1}{3}\log(c_5)(k+1)U_0 + 4e^2k(k+1)^2c_7U_0 + 0,01U_0.
\end{aligned}
$$

En remplaçant les différentes constantes par leurs valeurs numériques, on trouve :

$$\log(|f|_R) \leq c_{15}U_0,$$

avec :

$$
\begin{aligned}
c_{15} &= (k+1)\left(\left(2+\frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right) \\
&+ (k+1)\left(\left(4+\frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)\log(2)k^2 + 25k\log(k+1)\right) \\
&+ (k+1)\left(67,3k + 41,4\log(k+1) + 73,6\right).
\end{aligned}
$$

La formule d'interpolation (lemme 7.5) donne alors :

$$
\begin{aligned}
|f|_{2r} &\leq 2\exp(c_{15}U_0 - (k+1)TS_0\log(E)) \\
&+ 5\exp\left((k+1)TS_0\log\left(\frac{9(k+1)S}{S_0}\right) - pU_0 + e^{-U_0}\right).
\end{aligned}
$$

De plus, on dispose des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(k+1)TS_0\log(E) &\geq (k+1)\left(\frac{U_0}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}-1\right)\\
&\times 8(k+1)(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)\\
&\times D(\log\log(B)+h+\log(DE))\\
&- \log(E)(k+1)\left(\frac{U_0}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}-1\right)\\
&\geq 8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)U_0\\
&- 8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)\\
&\times D(\log\log(B)+h+\log(DE))\\
&- (k+1)U_0\frac{\log(E)}{D(\log\log(B)+h+\log(DE))}\\
&\geq 8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15-0,01)U_0;
\end{aligned}$$

et donc,

$$c_{15}U_0+\log(2)-(k+1)TS_0\log(E)\leq -c_{16}U_0,$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned}
c_{16} &= (k+1)\left(\left(6-\frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right)\\
&+ (k+1)\left(\left(12-\frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k^2\log(2)+15k\log(k+1)\right)\\
&+ (k+1)\left(63,5k-1,4\log(k+1)+45,8\right).
\end{aligned}$$

Nous allons vérifier que :

$$5\exp\left((k+1)TS_0\log\left(\frac{9(k+1)S}{S_0}\right)-pU_0+e^{-U_0}\right)\leq \exp(-c_{16}U_0).$$

Pour ceci, il suffit d'établir :

$$\left((k+1)TS_0\log\left(\frac{9(k+1)S}{S_0}\right)-pU_0+e^{-U_0}+\log(5)\right)\leq -c_{16}U_0.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)\log\left(9(k+1)^{(k+2)}4^k\right)&\\ +\ 8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)&\\ \times\ \log\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)&\\ +\ 8(k+1)^2(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)\log(1+\lambda)&\\ -\ p+c_{16}+0,01\ \leq\ 0.&\end{aligned}$$

Cette inégalité étant directement vérifiée pour $k\leq 10000$, nous allons l'établir pour les grandes valeurs de $k$. Commençons par majorer :

$$\begin{aligned}&\log(9(k+1)^{(k+2)}4^k)+\log(1+\lambda)\\ &\quad+\ \log\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)\\ &\quad\leq\ \log(9)+2k\log(2)+(k+2)\log(k+1)+\log(1+\lambda)\\ &\quad+\ \log\left(\frac{12(13+4e^2)}{25+4e^2}(k+1)\log(4(k+1))+56\log(k+1)+54\right)\\ &\quad\leq\ (k+2)\log(k+1)+2k\log(2)+1,1\log(k+1)+5,9.\end{aligned}$$

Il s'agit donc de vérifier :

$$\begin{aligned}&8(k+1)^2\times(k\log(4(k+1))+5\log(k+1)+15)\\ &\qquad\times\ ((k+2)\log(k+1)+2k\log(2)+1,1\log(k+1)+5,9)\\ &\qquad-\ \left(\frac{12\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1))\right)c_{12}\\ &\qquad-\ (28\log(k+1)+24,9)c_{12}+c_{16}+0,01\ \leq\ 0.\end{aligned}$$

C'est-à-dire, en remplaçant $c_{12}$ et $c_{16}$ par leur valeurs :

$$\begin{aligned}
8k(k+1)^3 &\times (\log(k+1))^2 + 32\log(2)(k+1)^2k^2\log(k+1) + 45,8(k+1)\\
&+\ 56,8k(k+1)^2\log(k+1)^2 + 32\log(2)^2k^2(k+1)^2 + 708(k+1)^2\\
&+\ 334,4k(k+1)^2\log(2) + 124(k+1)^2(\log(k+1))^2 + 63,5k(k+1)\\
&+\ \left(6 - \frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right) k(k+1)^2\log(k+1) + 257,1k(k+1)^2\log(k+1)\\
&+\ \left(12 - \frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right) k^2(k+1)\log(2) + 608(k+1)^2\log(k+1)\\
&+\ 15(k+1)k\log(k+1) - 1,4(k+1)\log(k+1) + 0,01\\
&-\ (k+1)\left(\frac{6\,(13+4e^2)}{(25+4e^2)}(k+1)\log(4(k+1)) + 28\log(k+1) + 24,9\right)\\
&\times\ \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{16}{13+4e^2}\right) k(k+1)\log(k+1) + \left(\frac{8}{3} + \frac{32}{13+4e^2}\right) k^2\log(2)\right.\\
&+\ \left. 7,8k\log(k+1) + 16,4k + 16,4\log(k+1) + 20,7\right] \ \leq\ 0.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&-\ 27,5k(k+1)^2\log(k+1)^2 + 13,6k(k+1)^2(\log(k+1))\\
&+\ 70,4k(k+1)^2 - 171,1k(k+1)(\log(k+1))^2\\
&-\ 167,3k(k+1)(\log(k+1)) + 283,6k(k+1)\\
&-\ 411,9(k+1)\log(k+1)^2 - 484,6(k+1)\log(k+1) + \ 104,3(k+1) \leq 0,
\end{aligned}$$

Ce qui est trivial. Dans le cas non périodique, nous avons donc établi que :

$$|f|_{2r} \leq 2\exp(-c_{16}U_0),$$

si $\tilde{\mathbb{G}} = 0$. Dans le cas général, les mêmes calculs que ci-dessus mènent à :

$$|f|_R \leq \exp(c_{17}U_0),$$

avec :

$$\begin{aligned}
c_{17} &= \left(\frac{8}{3}+\frac{8\,(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)^2\log(k+1)\\
&+ \left(\frac{16}{3}+\frac{16\,(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2)+25k(k+1)\log(k+1)\\
&+ (k+1)\,(70,4k+36,8\log(k+1)+67,2)\,.
\end{aligned}$$

Avec la minoration déjà obtenue pour $(k+1)TS_0$, on en tire :

$$c_{17}+\log(2)-(k+1)TS_0 \le -c_{18}U_0,$$

avec :

$$\begin{aligned}
c_{18} &= \left(\frac{16}{3}-\frac{8(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)^2\log(k+1)\\
&+ \left(\frac{32}{3}-\frac{16(1+2e^2)}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2)+15k(k+1)\log(k+1)\\
&+ (k+1)\,(60,6k+3,2\log(k+1)+51,8)\,.
\end{aligned}$$

Grâce à la majoration (obtenue aussi facilement que ci-dessus pour $k \ge 10000$, et vérifiée directement pour les petites valeurs de $k$) :

$$5\exp\left(-p+\exp(-U_0)+(k+1)TS_0\log\left(\frac{9(k+1)S}{S_0}\right)\right) \le \exp(-c_{18}),$$

et au lemme d'interpolation, on a bien :

$$|f|_{2r} \le 2\exp(-c_{18}).$$

Cette relation entraîne en particulier, l'inégalité requise pour établir la proposition 7.4.

Traitons maintenant le cas périodique (avec $\tilde{\mathbb{G}} = 0$). Commençons par appliquer le lemme 7.5 avec $T' = T_0$, $S' = (k+1)S$, $r = \frac{(k+1)S}{2}$, et enfin $R = 4rE$. Il s'agit tout d'abord de calculer $|f|_R$. Le même raisonnement que ci-dessus permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\log(|f|_R) &\leq T_0 \log((k+1)T_0) + L_0 \log(R|w_0|+1) + 2L_0 D \log(B) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} 3\pi L_i \left( \frac{\left(R\frac{|w_i|}{|\omega_{1,i}|}+1\right)^2}{\Im m\, \tau} + \left(R\frac{|w_i|}{|\omega_{1,i}|}+1\right) + \frac{1}{4}\Im m\, \tau \right) \\
&+ (3,6+Dh)\sum_{i=1}^{k} L_i + Dh(P) + \sum_{0}^{k}\log(L_i+1) + c_9 U_0,
\end{aligned}$$

en remplaçant les paramètres par leur valeurs, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\log(|f|_R) &\leq U_0 \frac{\log(2(k+1)c_4)}{c_6(e+1)} + \left(\frac{2,44}{c_6}U_0\right) \\
&+ c_9 U_0 + (c_{12}+0,1)U_0 + 4e^2 k(k+1)^2 c_7 U_0 + 0,02 U_0
\end{aligned}$$

(pour cette dernière estimation, il suffit de remplacer la majoration de $T\log((k+1)^2T)$ obtenue précédemment, par l'inégalité $T_0\log((k+1)^2T_0) \leq 0,01U_0$, qui se vérifie facilement). En remplaçant les différentes constantes par leurs valeurs numériques, on trouve :

$$\log(|f|_R) \leq c_{19} U_0,$$

avec :

$$\begin{aligned}
c_{19} &= (k+1)\left(\left(\frac{4}{3}+\frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right) \\
&+ (k+1)\left(\left(\frac{8}{3}+\frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k^2\log(2) + 22,4k\log(k+1)\right) \\
&+ (k+1)\,(62,76k + 36,8\log(k+1) + 70,2)\,.
\end{aligned}$$

La formule d'interpolation (lemme 7.5) donne alors :

$$\begin{aligned}
|f|_{2r} &\leq 2\exp(c_{19}U_0 - (k+1)T_0 S\log(E)) \\
&+ 5\exp\left((k+1)T_0 S\log(9) - pU_0 + e^{-U_0} + \log(5)\right).
\end{aligned}$$

Un calcul analogue au cas précédent conduit à :

$$(k+1)T_0 S\log(E) \geq 8(k+1)^2(k\log(k+1) + 5\log(k+1) + 14,99)U_0,$$

et donc,

$$c_{15}U_0 + \log(2) - (k+1)TS_0\log(E) \leq -c_{20}U_0,$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned} c_{20} &= (k+1)\left(\left(\frac{20}{3} - \frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1)\right) \\ &+ (k+1)\left(\left(\frac{40}{3} - \frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k^2\log(2) + 17,6k\log(k+1)\right) \\ &+ (k+1)\left(68,13k + 2,9\log(k+1) + 49,7\right). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on vérifie aisément que :

$$5\exp\Big((k+1)TS_0\log(9) - pU_0 + e^{-U_0} + \log(5)\Big) \leq \exp(-c_{20}U_0).$$

On obtient donc :

$$|f|_{2r} \leq 2\exp(-c_{20}U_0).$$

Appliquons maintenant l'inégalité de CAUCHY : soient $t$, un entier, $0 \leq t \leq (k+1)T$, et $s$ un entier, $0 \leq s < (k+1)S$. On a donc :

$$|f^{(t)}(s)| \leq ((k+1)T)!|f|_{2r}.$$

Ce qui donne, en remplaçant $|f|_{2r}$ par sa valeur,

$$\begin{aligned} \log(|f^{(t)}(s)|) &\leq -c_{20}U_0 + \log(2) + (k+1)T\log((k+1)T) \\ &\leq -c_{20}U_0 + \log(2) + \frac{1}{3}(k+1)\log(k+1)U_0 \\ &+ \frac{1}{3}(k+1)\log(c_5)U_0 + \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{e^3}\right)(k+1)^2U_0 \\ &+ 0,023(k+1)U_0. \end{aligned}$$

En remplaçant $c_{20}$ par sa valeur et $c_5$ par son majorant trouvé page 81, on obtient :

$$\begin{aligned} \log(|f^{(t)}(s)|) &\leq -(k+1)\left(6 - \frac{16(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k(k+1)\log(k+1) \\ &- \left(12 - \frac{32(1+e^2)}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2) - 15k(k+1)\log(k+1) \\ &- 63,59k(k+1) + 1,4(k+1)\log(k+1) - 45,9(k+1) \\ &\leq -c_{16}U_0. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on obtient, en posant :

$$\begin{aligned} c_{21} &= \left(2+\frac{8(1+2e^2)}{13+4e^2}\right) k(k+1)^2\log(k+1) \\ &+ \left(4+\frac{16(1+2e^2)}{13+4e^2}\right) k^2(k+1)\log(2) + 22,4k\log(k+1) \\ &+ 65,4k(k+1) + 34,1(k+1)\log(k+1) + 63(k+1), \end{aligned}$$

$$\log(|f|_R) \leq c_{21}U_0,$$

et l'on obtient après application de la formule d'interpolation :

$$|f|_{2r} \leq 2\exp(-c_{22}U_0),$$

avec :

$$\begin{aligned} c_{22} &= \left(6-\frac{8(1+2e^2)}{13+4e^2}\right) k(k+1)^2\log(k+1) \\ &+ \left(12-\frac{16(1+2e^2)}{13+4e^2}\right) k^2(k+1)\log(2) + 17,6k(k+1)\log(k+1) \\ &+ (k+1)\left(65,6k + 5,9\log(k+1) + 56,9\right), \end{aligned}$$

Ce qui donne, après application de l'inégalité de CAUCHY :

$$\log(|f^{(s)}|) \leq -c_{18}U_0.$$

La proposition 7.4 est donc établie.

## 7.3 Inégalité de la taille

Nous allons établir le :

**Lemme 7.6** *Reprenons le polynôme $P$ construit précédemment, et soient $t_1,\ldots,t_k$ et $s$ des entiers positifs tels que $|\boldsymbol{t}| = t_1+\cdots+t_k \leq (k+1)T$, $s < (k+1)S$ ; supposons que la fonction $F = P\circ\boldsymbol{\Phi}$ a un zéro en $s\boldsymbol{u}$ d'ordre exactement $|\boldsymbol{t}|$ le long de $W$ et que $D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{e}}F(s\boldsymbol{u}) \neq 0$. On dispose alors de l'inégalité :*

$$\log\left|D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{e}}F(s\boldsymbol{u})\right| \geq -c_{23}U_0,$$

*où l'on peut prendre dans le cas où* $\tilde{\mathbb{G}} = 0$,

$$\begin{aligned} c_{23} &= \left(2 + \frac{36}{13+4e^2}\right) k(k+1)^2 \log(k+1) \\ &+ \left(4 + \frac{72}{13+4e^2}\right) k^2(k+1)\log(2) + 13,3k(k+1)\log(k+1) \\ &+ (k+1)\,(32,1k + 25,2\log(k+1) + 46,7)\,, \end{aligned}$$

*et dans le cas général :*

$$\begin{aligned} c_{23} &= \left(\frac{4}{3} + \frac{28}{13+4e^2}\right) k(k+1)^2 \log(k+1) \\ &+ \left(\frac{8}{3} + \frac{56}{13+4e^2}\right) k^2(k+1)\log(2) + 9,4k(k+1)\log(k+1) \\ &+ (k+1)\,(23,9k + 17\log(k+1) + 36,4)\,, \end{aligned}$$

*Démonstration* : le point crucial pour obtenir cette estimation est de remarquer que la dérivée d'ordre $L+1$ d'un polynôme de degré $L$ est identiquement nulle. Commençons par écrire *in extenso* le polynôme $P$ :

$$P = \sum_{0 \le \lambda_0 \le L_0} \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\boldsymbol{\lambda}_i| \le L_i} p_{\boldsymbol{\lambda}} X_0^{\lambda_0} \left( \prod_{i=1}^{k} X_{i,0}^{\lambda_{i,0}} X_{i,1}^{\lambda_{i,1}} X_{i,2}^{\lambda_{i,2}} \right).$$

Dans cette expression, $\lambda_0$ est un entier positif, et, pour $1 \le i \le k$,

$$\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i,0}, \lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}), \lambda_{i,j} \ge 0, 1 \le i \le k, 0 \le j \le 2,$$

et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_k)$. Notons enfin $\Theta_{\boldsymbol{\lambda}}$, un monôme type de $P \circ \boldsymbol{\Phi}$, *ie.*

$$\Theta_{\boldsymbol{\lambda}} = X_0^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{2} \varphi_i^{3\lambda_{i,0}} \left(\varphi_i^3 \wp_i\right)^{\lambda_{i,1}} \left(\varphi_i^3 \wp_i'\right)^{\lambda_{i,2}}.$$

Maintenant, pour chaque indice $i$, $1 \le i \le k$, notons $f_i$ la fonction $\varphi_i(z)^3$ ou $\varphi_i(z)^3 \wp_i'(z)$ suivant que $su_i$ appartient ou non au réseau des périodes $\Lambda_i$ de la courbe $\mathcal{E}_i$. Puisque $\boldsymbol{t}$ est un multi-indice «minimal» pour lequel $D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} P \circ \boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})$ est non nul, la formule de LEIBNIZ nous assure que :

$$\frac{D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} P \circ \boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})}{\prod_i f_i(su_i)^{L_i}} = D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} \left( \frac{P \circ \boldsymbol{\Phi}}{\prod_i f_i^{L_i}} \right) (s\boldsymbol{u}).$$

Pour minorer le membre de gauche de cette relation, nous allons évaluer la hauteur du membre de droite qui est un nombre algébrique. Pour $1 \leq i \leq k$, choisissons $\theta_i \in \mathbb{C}$, où $\theta_i = 0$ si $su_i$ est un élément du réseau $\Lambda_i$ des périodes de $\wp_{\mathcal{E}_i}$, $\theta_i = \frac{1}{2}\omega_{2,i}$, si $su_i = \frac{1}{2}\omega_{1,i}$, et $\theta_i = \frac{1}{2}\omega_{1,i}$ sinon. Posons alors $\boldsymbol{\vartheta} = (0, \theta_1, \ldots, \theta_k)$. Rappelons que («astuce» d'ANDERSON–BAKER–COATES) :

$$D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}\left(\frac{P \circ \boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})}{\prod_i f_i(su_i)^{L_i}}\right) = D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}\left(\frac{P \circ \boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{z})}{\prod_i f_i(su_i + \theta_i + z_i)^{L_i}}\right)_{|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\vartheta}}.$$

Appliquons la proposition 8.2 à chaque monôme $\frac{\Theta_{\boldsymbol{\lambda}}}{X_0^{\lambda_0} \prod_i f_i^{L_i}}$. Chaque facteur de ce monôme pour lequel $su_i$ n'est pas une période de $\Lambda_i$, est un monôme en $(\wp_i(su_i + \theta_i + z_i), \wp_i'(su_i + \theta_i + z_i))$, et la proposition 8.2 nous assure que ce dernier peut s'écrire comme une fraction rationnelle en $(\wp_i(z_i), \wp_i'(z_i))$, dont le numérateur est de degré au plus $2L_i$. Le dénominateur de cette fraction rationnelle est lui égal à $(\wp_i(z_i) - \wp_i(su_i + \theta_i))^{3L_i}$.

Nous avons ainsi transformé $\frac{\Theta_{\boldsymbol{\lambda}}(s\boldsymbol{u}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\vartheta})}{\prod_i f_i(su_i+\theta_i+z_i)^{L_i}}$ en :

$$\frac{A_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{z})}{\prod_{i, su_i \notin \Lambda_i} (\wp_i(su_i + \theta_i) - \wp_i(z_i))^{3L_i}},$$

où $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ est un polynôme en $(\wp_i(z_i), \wp_i'(z_i))$ de degré $\leq 2L_i$ pour les indices $i$ pour lesquels $su_i \notin \Lambda_i$ et, par périodicité, en $\left(\frac{\wp_i(\theta_i+z_i)}{\wp_i'(\theta_i+z_i)}, \frac{1}{\wp_i'(\theta_i+z_i)}\right)$, de degré $\leq L_i$, pour les indices $i$ pour lesquels $su_i \in \Lambda_i$ (plus précisément, il s'agit d'un produits de polynômes en une variable de la forme ci-dessus, multiplié par $(su_0 + z_0)^{\lambda_0}$). La formule de LEIBNIZ et la «minimalité» de $\boldsymbol{t}$ nous assurent que :

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}\left(\frac{P \circ \boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{z})}{\prod_i f_i(su_i + \theta_i + z_i)^{L_i}}\right)_{|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\vartheta}} &= \frac{1}{\prod\limits_{i, su_i \notin \Lambda_i} ((\wp_i(su_i + \theta_i) - \wp_i(\theta_i))^{3L_i}} \\ &\times \; D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}\left(\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} A_{\boldsymbol{\lambda}}\right)_{|\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\vartheta}}. \end{aligned}$$

Nous noterons $Q$ le polynôme $\sum_{\boldsymbol{\lambda}} p_{\boldsymbol{\lambda}} A_{\boldsymbol{\lambda}}$. Maintenant, en revenant à la définition de l'opérateur différentiel $D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}$,

$$D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}} = \left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{t_1} \circ \cdots \circ \left(\beta_k \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_k}\right)^{t_k},$$

développons $D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}$ ; on obtient :

$$
\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q(\boldsymbol{z})) &= \sum_{\lambda_0=0}^{L_0} \sum_{1\leq i\leq k} \sum_{|\boldsymbol{\lambda}_i|\leq L_i} p_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{i_1=0}^{t_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{t_k} \binom{t_1}{i_1} \cdots \binom{t_k}{i_k} \\
&\times \frac{\beta_1^{t_1-i_1} \ldots \beta_k^{t_k-i_k} \lambda_0!}{(\lambda_0 - (t_1 + \cdots + t_k) + (i_1 + \cdots + i_k))!} \\
&\times (X_0)^{\lambda_0-(t_1+\cdots+t_k)+(i_1+\cdots+i_k)} \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^{i_k} \left(\frac{A_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{z})}{X_0^{\lambda_0}}\right).
\end{aligned}
$$

Ci-dessus, nous avons utilisé la convention :

$$
\begin{cases}
\frac{\lambda_0!}{(\lambda_0-(t_1+\cdots+t_k)+(i_1+\cdots+i_k))!} = 0, \\
\text{si} \quad \lambda_0 < (t_1 + \cdots + t_k) - (i_1 + \cdots + i_k).
\end{cases}
$$

Pour calculer $h\left(D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q)\right)$, introduisons les notations suivantes : nous noterons $\boldsymbol{i}$, le $k$-uplet $(i_1, \ldots, i_k)$, $\beta$ le point projectif :

$$
\beta = \left(1, (\beta_1^{t_1-i_1} \ldots \beta_k^{t_k-i_k})_{\boldsymbol{i}, |\boldsymbol{t}-\boldsymbol{i}|\leq L_0}\right),
$$

$\gamma$ le point projectif :

$$
\gamma = \left(1, \left(\binom{t_1}{i_1} \cdots \binom{t_k}{i_k} \frac{\lambda_0!}{(\lambda_0 - (t_1 + \cdots + t_k) + (i_1 + \cdots + i_k))!}\right)_{\boldsymbol{i}}\right),
$$

et enfin, $c = (1, (c_{\boldsymbol{\lambda},\mu,\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{\lambda},\mu,\boldsymbol{i}}))$, le point projectif formé par les coefficients des polynômes : $\frac{\partial^{i_1}}{\partial z_1^{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{i_k}}{\partial z_k^{i_k}} \left(\frac{A_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{z})}{X_0^{\lambda_0}}\right)$, auxquels nous adjoignons 1. On déduit donc de la définition de la hauteur, que :

$$
\begin{aligned}
h\left(D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q)\right) &\leq h(P) + h(c) + h(\beta) + h(\gamma) \\
&+ \log\left((L_0 + 1)(L_1 + 1)^2 \ldots (L_k + 1)^2\right) \\
&+ \log\left((t_1 + 1) \ldots (t_k + 1)\right).
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant $h(\beta)$ :

$$\begin{aligned}
h(\beta) &\leq \frac{1}{D}\sum_v \log\max\left\{1, \max_{\boldsymbol{i}}\left\{\left|\beta_1^{t_1-i_1}\dots\beta_k^{t_k-i_k}\right|_v\right\}\right\} \\
&\leq \frac{1}{D}\sum_v \max_{\boldsymbol{i}}\left\{1, \sum_{j=1}^{k}(t_j-i_j)\log\max\left\{\log\left(|\beta_j|\right), 1\leq j\leq k\right\}\right\} \\
&\leq \frac{1}{D}\max_{\boldsymbol{i}}\left\{\sum_{j=1}^{k}(t_j-i_j)\right\}\sum_v \log\max\left\{1, \log\left(|\beta_j|\right), 1\leq j\leq k\right\} \\
&\leq 2kL_0\log(B).
\end{aligned}$$

Majorons maintenant $h(\gamma)$. Comme les coordonnées de $\gamma$ sont toutes des entiers rationnels, on en déduit :

$$\begin{aligned}
h(\gamma) &\leq \log\max_{\lambda_0,\boldsymbol{i}}\left\{\begin{pmatrix} t_1 \\ i_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} t_k \\ i_k\end{pmatrix}\frac{\lambda_0!}{(\lambda_0-|\boldsymbol{t}|+|\boldsymbol{i}|)!}\right\} \\
&\leq \max_{\lambda_0}\left\{\log(2^{|\boldsymbol{t}|}\lambda_0!)\right\}\leq (k+1)T\log(2)+L_0\log(L_0).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\log(L_0+1) \quad + &\quad \log(L_1+1)^2\dots(L_k+1)^2(t_1+1)\dots(t_k+1)) \\
&\leq \log(L_0+1)+2\sum_{i=1}^{k}\log(L_i+1)+k\log((k+1)T+1).
\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à estimer $h(c)$. Pour ceci, on utilise les propositions 8.1 et 8.2. En remarquant que $\frac{A_{\boldsymbol{\lambda}}}{X_0^{\lambda_0}}$ est un produit de $k$ polynômes en une variable $A_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{j=1}^{k} A_{\boldsymbol{\lambda},j}$, nous avons :

$$\frac{\partial^{i_1}}{\partial z_1^{i_1}}\circ\dots\circ\frac{\partial^{i_k}}{\partial z_k^{i_k}}\left(\frac{A_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{z})}{X_0^{\lambda_0}}\right) = X_0^{\lambda_0}\prod_{j=1}^{k}\frac{\partial^{i_j}}{\partial z_j^{i_j}}\left(A_{\boldsymbol{\lambda},j}\right).$$

La proposition 8.1 va donc pouvoir s'appliquer à chacun des facteurs ci–dessus, puisqu'il s'agit de dériver des polynômes en des fonctions elliptiques d'une seule courbe à la fois. Notons $d = (1, (d_{\boldsymbol{\lambda},\mu,j})_{\boldsymbol{\lambda},\mu,1\leq j\leq k})$, le point projectif formé des coefficients des polynômes $A_{\boldsymbol{\lambda},j}$ $(1 \leq j \leq k)$, et, de même, $d_j$ le point projectif formé des coefficients du polynôme $A_{\boldsymbol{\lambda},l}$, $1 \leq j \leq k$ auxquels nous adjoignons 1. Soit $v$ une place de $K$. On a, en utilisant la proposition 8.1 :

$$\begin{aligned}\log \max_{\boldsymbol{\lambda},\mu,\boldsymbol{i}} \{|c_{\boldsymbol{\lambda},\mu,\boldsymbol{i}}|_v\} &\leq \sum_{j=1}^{k} \log \max_{\boldsymbol{\lambda},\mu} \{|d_{\mu,\boldsymbol{\lambda},j}|_v\} + \log \max_{\boldsymbol{i}} \{|\boldsymbol{i}| \log |2|_v\} \\ &+ \max_{\boldsymbol{i}} \{|\boldsymbol{i}|\} \log \max \{1, |g_{2,j}|_v, |g_{3,j}|_v, 1 \leq j \leq k\} \\ &+ \log(\delta_1) + \log(\delta_2),\end{aligned}$$

où $\delta_1 = \delta_2 = 1$ si $v \nmid \infty$, et, si $v \mid \infty$, $\delta_1 = 6^{(k+1)T} \prod_{j=1}^{k} \prod_{l_j=1}^{t_j} (2L_j + l_j)$, $\delta_2 = 4^{(k+1)T}$.

On en déduit, en notant $L$ le maximum des $L_i$, $1 \leq i \leq k$ :

$$\begin{aligned}h(c) &\leq \sum_{j=1}^{k} h(d_j) + (k+1)T\log(48) + (k+1)Th \\ &+ (k+1)T\log(2L + (k+1)T),\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la proposition 8.2 pour majorer la hauteur des points $d_j$. On obtient :

$$h(d_j) \leq L_j(2h(\gamma_j') + h) + L_j\log(120),$$

où nous avons noté $\gamma_j'$, le point de la courbe $\mathcal{E}_j$ défini par : $\gamma_j' = (1, \wp_j(su_j + \theta_j), \wp_j'(su_j + \theta_j))$.

En mettant toutes ces inégalités ensemble, on en déduit :

$$\begin{aligned}h\left(D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q)\right) &\leq \sum_{j=1}^{k} L_j(2h(\gamma_j') + h) + L_j\log(120) + (k+1)T\log(96) \\ &+ (k+1)Th + (k+1)T\log(2L + (k+1)T) + 2kL_0\log(B) \\ &+ L_0\log(L_0) + 2\sum_{j=1}^{k}\log(L_j + 1) + \log(L_0 + 1) \\ &+ k\log((k+1)T + 1) + h(P).\end{aligned}$$

On en déduit donc que le nombre $(D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q(\boldsymbol{z}))_{|\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\vartheta}}$, est algébrique, de hauteur au plus :

$$\begin{aligned}
h\left((D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q(\boldsymbol{z}))_{|\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\vartheta}}\right) \;\le\; & h\left(D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(Q)\right) + L_0((k+1)S+1) + \log(L_0+1) \\
& + ((k+1)T + \sum_{i=1}^{k} 2L_i) \max\{h(\theta_i), 1 \le i \le k\} + k\log(2L+(k+1)T) \\
& \le h(P) + L_0\log(L_0) + (k+1)T\log(96) + 2kL_0\log(B) + (k+1)Th \\
& + \sum_{i=1}^{k} L_i(2h(\gamma_i') + h + \log 120)) + (k+1)T\log(2L+(k+1)T) + \log(L_0+1) \\
& + 2\sum_{i=0}^{k}\log(L_i+1) + k\log((k+1)T+1) + L_0\log((k+1)S+1) \\
& + k\log((k+1)T+2L+1) + \left((k+1)T + \sum_{i=1}^{k} 2L_i\right)\max\{h(\theta_i), 1\le i\le k\}.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la hauteur du dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(P\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u}+\theta+\boldsymbol{z}))_{|\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\vartheta}}}{\prod_{i=1}^{k} f_i(su_i)^{L_i}}\right) \;\le\; & h(P) + L_0\log(L_0) + (k+1)T\log(96) \\
+ \; & (k+1)Th + k\log((k+1)T+1) \\
+ \; & \sum_{i=1}^{k} L_i(2h(\gamma_i') + h + \log(120)) \\
+ \; & (k+1)T\log(2L+(k+1)T) \\
+ \; & L_0\log((k+1)S+1) + \log(L_0+1) \\
+ \; & k\log((k+1)T+2L+1) \\
+ \; & (k+1)T\max\{h(\theta_i), 1\le i\le k\} \\
+ \; & \sum_{i=1}^{k} 2L_i\max\{h(\theta_i), 1\le i\le k\} \\
+ \; & \sum_{i=1}^{k} L_i(2h(\gamma_i') + h + \log(96)) \\
+ \; & 2kL_0\log(B) + 2\sum_{i=0}^{k}\log(L_i+1).
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le lemme 3.4, pour contrôler les hauteurs des $\theta_i$, et des $\gamma_i'$. Comme $\theta_i$ est un point de deux torsion de la courbe $\mathcal{E}_i$, $\hat{h}(\theta_i) = 0$, et le lemme 3.4 nous assure que $h(\theta_i) \leq \frac{3}{2}h + 8\log(2)$; de même, $\hat{h}(\gamma_i') = s^2\hat{h}(\gamma_i)$, et donc, $h(\gamma_i') \leq \frac{3}{2}h + 8\log(2) + s^2\log(V_i)$. L'inégalité de la taille, jointe au lemme 3.1, relation (7) nous assure donc que l'on a :

$$\begin{aligned}
\log\left|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}P\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})\right| \quad \geq \quad & -D\left(h(P) + L_0\log(L_0) + 2kL_0\log(B)\right) \\
- \quad & D\left(\sum_{i=1}^{k} L_i(4s^2\log(V_i) + 8h)\right) \\
- \quad & D\left(\sum_{i=1}^{k} L_i(32\log(2) + \log(11520))\right) \\
- \quad & D(k+1)T + k)\log(2L + (k+1)T + 1) \\
- \quad & D\left((k+1)T\left(2,5h + 8\log(2) + \log(96)\right)\right) \\
- \quad & D\left(\sum_{i=0}^{k} 2\log(L_i+1) + k\log((k+1)T+1)\right) \\
- \quad & DL_0\log((k+1)s+1) - D\log(L_0+1) \\
- \quad & \sum_{i=1}^{k} L_i\left(3\log(10) + \frac{3\pi\Im m\ \tau_i}{4}\right) \\
- \quad & \sum_{i=1}^{k} L_i\left(6\pi\frac{s|u_i|}{|\omega_{1,i}|} + 6\log(|\omega_{1,i}|)\right) \\
- \quad & \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i\left(\log(1 + |\omega_{1,i}^2||\wp_i(su_i)|\right).
\end{aligned}$$

En remplaçant les paramètres par leurs valeurs, on en déduit que (là encore, le calcul est presque identique à celui du paragraphe 7.1, page 74 à page 84) :

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} L_i(8h + 32\log(2) + \log(11520))\right) \leq 10^{-3}U_0,$$

$$D\left(2\sum_{i=0}^{k} \log(L_i+1) + k\log((k+1)T+1)\right) \leq 10^{-3}U_0,$$

$$D\log(L_0+1) \leq 10^{-3}U_0,$$

ainsi que :

$$\sum_{i=1}^{k} L_i \left(3\log(10) + \frac{3\pi \Im m\ \tau_i}{4} + 6\pi\frac{s|u_i|}{|\omega_{1,i}|} + 6\log(|\omega_{1,i}|)\right) \leq 10^{-3}U_0.$$

Passons maintenant à :

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i \log\left(1+|\omega_{1,i}^2||\wp_i(su_i)|\right) \leq \sum_{i=1}^{k}(k+1)^2 L_i D S^2 \log(V_i) + 10^{-3}U_0,$$

de même,

$$\begin{aligned} D((k+1)T+k)\log(2L+(k+1)T) &\leq D(k+1)T\log((k+1)T) + 10^{-3}U_0 \\ &\leq \frac{(k+1)\log(k+1)}{3}U_0 \\ &+ \frac{1}{3}(k+1)\log(c_5)U_0 + 10^{-3}U_0 \\ &+ \left(\frac{\log(3)}{3}+3\right)(k+1)^2U_0, \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned} DL_0\log((k+1)s+1) &+ 2kDL_0\log(B) + DL_0\log(L_0) \\ &\leq \frac{\log((k+1)c_4)}{c_6(e+1)}U_0 + \frac{\log(c_5)U_0}{(e+1)c_6} \\ &+ \left(\frac{5k+3}{c_6} + \frac{(k+2)\log(1+e)}{c_6(e+1)}\right)U_0 + 10^{-3}U_0, \end{aligned}$$

et enfin,

$$D(k+1)T\,(2,5h + 8\log(2) + \log(96)) \leq 4,3(k+1)U_0.$$

On en déduit donc (dans le cas où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$) :

$$\begin{aligned} \log|D_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{t}}(P\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})| &\geq -(k+1)U_0\left(5k(k+1)c_7 + \frac{1}{3}\log(c_5)\right) \\ &- (k+1)U_0\left(\frac{1}{3}\log(k+1) + \frac{\log((k+1)c_4)}{c_6(k+1)(e+1)}\right) \\ &- (k+1)U_0\left(\frac{\log(c_5)}{(e+1)(k+1)} + \left(\frac{\log 3}{3}+3\right)k\right) \\ &- (k+1)U_0\,(5,5++c_{12})\,, \end{aligned}$$

ce qui donne, en remplaçant les diverses constante par leurs valeurs,

$$\log|D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{e}}(F\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})| \geq -c_{24}U_0,$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} c_{24} &= \left(2+\frac{36}{13+4e^2}\right)k(k+1)^2\log(k+1)\\ &+ \left(4+\frac{72}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2)+13,3k(k+1)\log(k+1)\\ &+ (k+1)\,(32,1k+25,2\log(k+1)+46,7)\,. \end{aligned}$$

Enfin, dans le cas général, on peut poser :

$$\begin{aligned} c_{24} &= \left(\frac{4}{3}+\frac{28}{13+4e^2}\right)k(k+1)^2\log(k+1)\\ &+ \left(\frac{8}{3}+\frac{56}{13+4e^2}\right)k^2(k+1)\log(2)+9,4k(k+1)\log(k+1)\\ &+ (k+1)\,(23,9k+17\log(k+1)+36,4)\,. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme 7.6.

**Lemme 7.7** *Reprenons le polynôme $P$ construit précedemment; pour tout entier $s$, $1\leq s<(k+1)S$, la fonction $F=P(\boldsymbol{\Phi})$ a un zéro en $s\boldsymbol{u}$ d'ordre au moins $(k+1)T+1$ le long de $W$.*

*Démonstration* : si ce n'est pas le cas, on dispose d'un multi–indice $\boldsymbol{t}$ de longueur inférieure à $(k+1)T$, et d'un entier $s$, $1\leq s<(k+1)S$ pour lequel $D_{\boldsymbol{e}}P(\boldsymbol{\Phi})(s\boldsymbol{u}))\neq 0$. Le lemme 7.6 nous donne alors l'inégalité

$$\log|D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{e}}(F\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})| \geq -c_{24}U_0,$$

de plus, le lemme 7.4 nous fournit l'inégalité :

$$\log|D^{\boldsymbol{t}}_{\boldsymbol{e}}(F\circ\boldsymbol{\Phi}(s\boldsymbol{u})| \leq -c_{14}U_0+\log(2),$$

il suffit, pour établir le lemme, de vérifier que ces deux inégalités sont incompatibles. Comme précedémment, on suppose $k\geq 10000$. Traitons tout d'abord, le cas où $\tilde{\mathbb{G}} = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} c_{14} - c_{24} &= 1,7k\log(k+1) + 31,4k - 26,6\log(k+1) - 0,9 \\ &> 1,7k\log(k+1) - 27,5\log(k+1) > 1,6k\log(k+1) \\ &> \log(2). \end{aligned}$$

Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned} c_{14} - c_{24} &= \frac{16}{13+4e^2}k(k+1)\log(k+1) + \frac{32}{13+4e^2}k^2\log(2) \\ &+ 5,6k\log(k+1) + 36,7k + 15,4 - 13,8\log(k+1) \\ &> \frac{16}{13+4e^2}k(k+1)\log(k+1) \\ &+ 5,6k\log(k+1) - 13,,8\log(k+1) \\ &> \frac{16}{13+4e^2}k(k+1)\log(k+1) > \log(2). \end{aligned}$$

Le lemme 7.7 est donc établi.

# 8 Formules de translations, de dérivations

L'équation de WEIERSTRASS et les relations classiques entre les fonctions elliptiques nous permettent d'écrire très simplement des formules explicites pour les opérateurs de dérivation et de translation par un point ; on peut ainsi aisément controler la hauteur de ces opérations. Nous résumons ces propriétés dans les deux énoncés qui suivent :

## 8.1 Dérivations

**Proposition 8.1** *Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, définie sur corps de nombres $K$, de degré sur $\mathbb{Q} \leq D$, et donnée avec un modèle de Weierstraß $\mathcal{E}$ (à coefficients dans $K$) :*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

*Soient $h$ un nombre réel, $h \geq \max\{1, h(1, g_2, g_3), h(j_{\mathcal{E}})\}$, et $\wp_{\mathcal{E}}$, la fonction de Weierstraß associée au modèle de $\mathcal{E}$. Soient enfin un polynôme $P$, à coefficients dans $K$, de degré au plus $L$ en deux variables $X_1$ et $X_2$, et $T$ un nombre entier $\geq 1$. Dans ces conditions, $\frac{d^T}{dz^T}(P(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z)))$ peut s'écrire comme un polynôme en $(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z))$, de degré au plus $L+T$ en $(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z))$, dont les coefficients sont des éléments de $K$, de hauteur au plus :*

$$h(P) + T(h + \log(36)) + T\log(L+T).$$

*Avec les mêmes hypothèses, $\frac{d^T}{dz^T}\left(P\left(\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}, \frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}\right)\right)$ peut s'écrire comme un polynôme en $\left(\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}, \frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}\right)$, de degré en $\left(\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}, \frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}\right)$ au plus $L+T$, dont les coefficients sont des éléments de $K$, de hauteur au plus :*

$$h(P) + T(h + \log(48)) + T\log(L+T).$$

*N.B. C'est la hauteur du «polynôme dérivé» qui est ainsi majorée, et non la hauteur de chacuns des coefficients.*

*Plus précisément, les coefficients de ces polynômes sont des combinaisons linéaires, de longueur au plus* $3^T$ (resp. $4^T$)*, de monômes de degré* 1 *en les coefficients de* $P$*, de degré au plus* $T$ *en* $g_2$*,* $g_3$ *; les coefficients de ces combinaisons linéaires, sont des nombres rationnels dont les dénominateurs divisent* $2^T$*, et dont les numérateurs sont majorés en valeur absolue par* $6^T \prod_{j=1}^T (L+j)$.

*Démonstration* : on déduit de l'équation de WEIERSTRASS, la relation :

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \frac{g_2}{2}.$$

Soit $P$ un polynôme, élément de $K[X,Y]$ de degré total $L$. Ecrivons :

$$P(X,Y) = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(P(\wp(z), \wp'(z))) &= \sum_{i,j} a_{i,j}(i\wp(z)^{i-1}\wp'(z)^{j+1}) \\ &+ \sum_{i,j} a_{i,j}(6j\wp(z)^{i+2}\wp'(z)^{j-1} - \frac{g_2}{2} j\wp(z)^i\wp'(z)^{j-1}). \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{d}{dz}(P(\wp(z), \wp'(z))) = \sum_{k,l} b_{k,l}\wp(z)^k\wp'(z)^l$, où les coefficients $b_{k,l}$ sont soumis aux relations :

$$b_{k,l} = (k+1)a_{k+1,l-1} + 6(l+1)a_{k-2,l+1} - \frac{g_2}{2}(l+1)a_{k,l+1}.$$

Notons $P^{(1)}$ le polynôme de $K[X,Y]$ défini par cette relation de récurrence (*ie.* $P^{(1)}(X,Y) = \sum_{k,l} b_{k,l}X^kY^l$). On en déduit donc clairement que :

$$h(P^{(1)}) \leq h(P) + \log(L+1) + h + \log(36),$$

il est également clair que le degré total de $P^{(1)}$ est au plus $L+1$. Nous noterons de même, pour tout entier $T \geq 1$, $P^{(T)}$, le polynôme défini par induction par la relation $P^{(T)} = (P^{(T-1)})^{(1)}$. Il est clair que :

$$P^{(T)}(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z)) = \frac{d^T}{dz^T}(P(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z)).$$

On vérifie immédiatement par induction que :

$$\begin{cases} h(P^{(T)}) & \leq \quad h(P) + T(h + \log(36)) + T\log(L+T) \\ \deg(P^{(T)}) & \leq \quad L+T. \end{cases}$$

Ceci établit la première assertion de la proposition 8.1. Pour la deuxième, on calcule de même,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(P\left(\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}, \frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)}\right)\right) &= \sum_{i,j} a_{i,j}\left(-i\left(\frac{6\wp_{\mathcal{E}}(z)^2 - \frac{g_2}{2}}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{i+1}}\right)\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^j}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^j}\right) \\ &- \sum_{i,j} a_{i,j}\left(j\frac{(6\wp_{\mathcal{E}}(z)^2 - \frac{g_2}{2})}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^i}\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^j}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{j+1}}\right) \\ &+ \sum_{i,j} a_{i,j}\left(j\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^i}\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_{i,j}\left(-6i\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^{j+2}}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{j+2}}\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{i-1}}\right) \\ &+ \sum_{i,j} a_{i,j}g_2\left(\frac{1}{2}i - j\right)\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^j}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^j}\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{i+1}} \\ &- \sum_{i,j} a_{i,j}\left(\frac{1}{2}j\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^i}\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}\right) \\ &- \sum_{i,j} a_{i,j}\left(\frac{3}{2}g_3 j\frac{\wp_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{j-1}}\frac{1}{\wp'_{\mathcal{E}}(z)^{i+2}}\right). \end{aligned}$$

En notant comme précédemment $P^{(1)}$ le polynôme de deux variables ainsi construit, on vérifie aisément que $P^{(1)}$ est de degré au plus $L+1$, et de hauteur au plus $h(P) + h + \log(48) + \log(L+1)$. Une induction permet alors immédiatement de conclure à la validité de la deuxième assertion de la proposition 8.1.

Il reste à établir la dernière assertion. Dans le premier cas (*resp.* le deuxième), on voit que les coefficients de $P^{(1)}$ sont des combinaisons linéaires, de longueur au plus 3 (*resp.* 4), de monômes de degré 1 en les coefficients de $P$ et de degré au plus 1 en $g_2$, $g_3$. Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des nombres rationnels dont le dénominateur est au plus 2 en valeur absolue, et le numérateur est majoré en valeur absolue par $12(L+1)$. Une induction permet encore une fois de conclure. La proposition 8.1 est donc entièrement démontrée.

## 8.2 Translations

**Proposition 8.2** *Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, définie sur corps de nombres $K$, de degré sur $\mathbb{Q} \leq D$, et donnée avec un modèle de Weierstraß $\mathcal{E}$(à coefficients dans $K$) :*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

*Soient $h$ un nombre réel, $h \geq \max\{1, h(1, g_2, g_3), h(j_{\mathcal{E}})\}$, et $\wp_{\mathcal{E}}$ la fonction de Weierstraß associée au modèle de $\mathcal{E}$ que nous avons fixé. Soit de plus un polynôme $P$, à coefficients dans $K$, de degré au plus $L$ en deux variables $X_1$ et $X_2$. Soit enfin un nombre complexe $u$, tel que $\gamma = (1, \wp_{\mathcal{E}}(u), \wp'_{\mathcal{E}}(u)) \in K^3$. Dans ces conditions, la fonction de $z$ : $z \longmapsto P(\wp_{\mathcal{E}}(z+u), \wp'_{\mathcal{E}}(z+u))$ peut s'écrire comme une fraction rationelle en $(\wp_{\mathcal{E}}(z), \wp'_{\mathcal{E}}(z))$, dont le dénominateur et le numérateur sont de degré au plus $2L$, dont les coefficients sont des éléments de $K$. La hauteur du numérateur est au plus :*

$$h(P) + L(2h(\gamma) + h + \log(216)) + \log\left(\frac{(L+1)(L+2)}{2}\right);$$

*enfin, la hauteur du dénominateur est :*

$$\leq L(2h(\gamma) + h + \log(96)) - \log(4).$$

*De plus, une autre expression du dénominateur est $(\wp_{\mathcal{E}}(z) - \wp_{\mathcal{E}}(u))^{3L}$.*

*Une autre description de l'action des opérateurs de translation est la suivante : les coefficients du numérateur peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes de degré 1 en les coefficients de $P$, de degré au plus $2L$ en $\wp_{\mathcal{E}}(u)$, $\wp'_{\mathcal{E}}(u)$, de degré inférieur à $L$ en $g_2$, $g_3$. Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs* *divisent $2^{2L}$, et les numérateurs sont majorés en valeur absolue par $3^L$. Enfin, la longueur maximale de ces combinaisons linéaires est $10^L c'$, où $c'$ est le nombre de coefficients non nuls du polynôme $P$.*

**Remarque :** c'est cette dernière information, plus versatile, bien que plus technique que nous utilisons en fait.

*Démonstration* : commençons par démontrer le lemme suivant, qui va nous permettre d'expliciter autant que faire se peut, l'expression $P(\wp_{\mathcal{E}}(u+z), \wp'_{\mathcal{E}}(u+z))$ :

**Lemme 8.3** *Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique, donnée avec un modèle de Weierstraß :*

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

*et $\wp$ la fonction de Weierstraß associée. On dispose alors des «formules» d'addition :*

$$\wp(u+z) = -\wp(u) - \wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(z)}{\wp(u) - \wp(z)}\right)^2, \tag{22}$$

*et :*

$$\begin{aligned}\wp'(u+z) &= \frac{3\wp(u)\wp'(u)\wp(z)^2 - \wp(z)\wp'(z)(3\wp(u)^2 - \frac{g_2}{4})}{D} \\ &+ \frac{\frac{1}{4}\wp'(z)^2\wp'(u)}{D} \\ &- \frac{\wp'(z)\left(\frac{1}{4}\wp'(u)^2 - \frac{1}{2}g_2\wp(u) - \frac{3}{4}g_3\right)}{D} \\ &- \frac{\frac{1}{2}g_2\wp'(u)\wp(z) + \frac{3}{4}g_3\wp'(u) + \frac{1}{4}g_2\wp(u)\wp'(u)}{D},\end{aligned} \tag{23}$$

*avec :*

$$\begin{aligned}D &= (\wp(z) - \wp(u))^3 \\ &= \frac{1}{4}\wp'(z)^2 - 3\wp(z)^2\wp(u) + \wp(z)\left(3\wp(u)^2 + \frac{g_2}{4}\right) \\ &- \frac{1}{4}\wp'(u)^2 - \frac{g_2}{4}\wp(u).\end{aligned}$$

*Démonstration* : si la première relation (22) est extrêmement classique, et se trouve dans presque tous les livres traitant de la théorie des courbes elliptiques (*voir*, par exemple [L1] page 14), la deuxième (23), est plus difficile à trouver dans les traités récents du fait de sa complexité (et sans doute du faible nombre d'applications théoriques). Bien qu'il ne s'agisse que de dériver la relation (22) nous donnons ici une démonstation. Par dérivation par rapport à $z$, on obtient :

$$\wp'(u+z) = -\wp'(z) - \frac{1}{2}\frac{(\wp'(u)-\wp'(z))\wp''(z)}{(\wp(u)-\wp(z))^2} + \frac{1}{2}\frac{(\wp'(u)-\wp'(z))^2\wp'(z)}{(\wp(u)-\wp(z))^3}.$$

Ce qui donne, en remplaçant $\wp''(z)$ par sa valeur,

$$\begin{aligned}(\wp(u)-\wp(z))^3\wp'(u+z) &= -(\wp(u)-\wp(z))^3\wp'(z)\\ &+ \frac{1}{2}(\wp'(u)-\wp'(z))^2\wp'(z)\\ &- \left(3\wp^2(z)-\frac{g_2}{4}\right)(\wp'(u)-\wp'(z))(\wp(u)-\wp(z))\\ &= \wp'(z)\left[\frac{1}{2}\wp'(u)^2+\frac{1}{2}\wp'(z)^2\right]\\ &- \wp'(z)\left[\wp'(u)\wp'(z)+\wp(u)^3\right]\\ &+ \wp'(z)\left[3\wp(u)^2\wp(z)-3\wp(u)\wp(z)^2+\wp(z)^3\right]\\ &- 3(\wp'(u)-\wp'(z))\left(\wp(u)\wp(z)^2-\wp(z)^3\right)\\ &+ \left[\frac{g_2}{4}(\wp'(u)-\wp'(z))(\wp(u)-\wp(z))\right].\end{aligned}$$

En utilisant l'équation de WEIERSTRASS, on transforme cette expression en :

$$\begin{aligned}(\wp(u)-\wp(z))^3\,\wp'(u+z) &= \frac{g_2}{4}(\wp'(u)-\wp'(z))(\wp(u)-\wp(z))\\ &+ \wp'(z)\left[\frac{1}{4}\wp'(u)^2+\frac{3}{4}\wp'(z)^2\right]\\ &- \wp'(z)\left[\wp'(u)\wp'(z)-3\wp(u)^2\wp(z)\right]\\ &- \wp'(z)\left[3\wp(u)\wp(z)^2-\frac{g_2}{4}(\wp(z)-\wp(u))\right]\\ &- 3(\wp'(u)-\wp'(z))\wp(u)\wp(z)^2\\ &+ 3(\wp'(u)-\wp'(z))\left(\frac{1}{4}\wp'(z)^2+\frac{g_3}{4}+\frac{g_2}{4}\wp(z)\right).\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
(\wp(u)-\wp(z))^3\wp'(u+z) = {} & \frac{g_2}{4}(\wp'(u)-\wp'(z))(\wp(u)-\wp(z)) \\
& + \frac{3}{4}g_3(\wp'(u)-\wp'(z)) \\
& + \frac{3}{4}g_2(\wp'(u)-\wp'(z))\wp(z)+\frac{g_2}{4}(\wp(z)-\wp(u))\wp'(z) \\
& + \frac{1}{4}(\wp'(u)^2\wp'(z)-\wp'(u)\wp'(z)^2) \\
& + 3\wp(u)\wp(z)(\wp(u)\wp'(z)-\wp'(u)\wp(z)) \\
= {} & \frac{1}{4}(\wp'(u)^2\wp'(z)-\wp'(u)\wp'(z)^2) \\
& + 3\wp(u)\wp(z)(\wp(u)\wp'(z)-\wp'(u)\wp(z)) \\
& + \frac{3}{4}g_3(\wp'(u)-\wp'(z))+\frac{g_2}{4}(\wp'(u)\wp(u)-\wp'(z)\wp(z)) \\
& + \frac{g_2}{2}[\wp(z)\wp'(u)-\wp(u)\wp'(z)].
\end{aligned}
$$

On en déduit, après réarrangement des termes,

$$
\begin{aligned}
(\wp(u)-\wp(z))^3\wp'(u+z) = {} & -3\wp(u)\wp'(u)\wp(z)^2+\left(3\wp(u)^2-\frac{g_2}{4}\right)\wp(z)\wp'(z) \\
& - \frac{1}{4}\wp'(u)\wp'(z)^2+\frac{g_2\wp'(u)}{2}\wp(z) \\
& + \left(\frac{1}{4}\wp'(u)^2-\frac{g_2}{2}\wp(u)-\frac{3g_3}{4}\right)\wp'(z) \\
& + \frac{g_2}{4}\wp(u)\wp'(u)+\frac{3}{4}g_3\wp'(u).
\end{aligned}
$$

Afin d'établir la relation (23), il ne reste plus qu'à transformer le dénominateur :

$$
\begin{aligned}
(\wp(u)-\wp(z))^3 &= 3\wp(u)\wp(z)^2-\frac{1}{4}\wp'(z)^2-\left(3\wp(u)^2+\frac{g_2}{4}\right)\wp(z) \\
&+ \frac{1}{4}\wp'(u)^2+\frac{g_2}{4}\wp(u).
\end{aligned}
$$

Le lemme 8.3 est donc entièrement établi. On en déduit que $\wp(u+z)$ et $\wp'(u+z)$, peuvent s'écrire comme des fractions rationnelles en $(\wp(z),\wp'(z))$

dont le numérateur et le dénominateur sont de degré majoré par 2. Plus précisément, posons :

$$\begin{aligned}
P_1(X,Y) &= -\frac{g_2}{4}X^2 - \frac{1}{2}\wp'(u)XY + \frac{1}{4}\wp(u)Y^2 \\
&- \left(\frac{1}{4}\wp'(u)^2 + \frac{3g_3}{4}\right)X + \frac{1}{2}\wp(u)\wp'(u)Y + \frac{g_2}{4}\wp(u)^2 \\
&+ \frac{3g_3}{4}\wp(u), \\
P_2(X,Y) &= 3\wp(u)\wp'(u)X^2 - XY\left(3\wp(u)^2 - \frac{g_2}{4}\right) + \frac{1}{4}\wp'(u)Y^2 \\
&- \left(\frac{1}{4}\wp'(u)^2 - \frac{1}{2}g_2\wp(u) - \frac{3}{4}g_3\right)Y - \frac{1}{2}g_2\wp'(u)X \\
&- \frac{3}{4}g_3\wp'(u) - \frac{1}{4}g_2\wp(u)\wp'(u),
\end{aligned}$$

et :

$$Q = \frac{1}{4}Y^2 - 3\wp(u)X^2 + \left(3\wp(u)^2 + \frac{g_2}{4}\right)X - \frac{1}{4}\wp'(u)^2 - \frac{g_2}{4}\wp(u).$$

On a simplement :

$$(\wp(u+z), \wp'(u+z)) = \left(\frac{P_1(\wp(z),\wp'(z))}{Q(\wp(z),\wp'(z))}, \frac{P_2(\wp(z),\wp'(z))}{Q(\wp(z),\wp'(z))}\right).$$

De plus, on a clairement les inégalités :

$$\begin{cases} h(P_1) \leq 2h(\gamma) + h + \log(24), \\ h(P_2) \leq 2h(\gamma) + h + \log(36), \\ h(Q) \leq 2h(\gamma) + h + \log(24). \end{cases}$$

**Lemme 8.4** *Soient $P$, $Q$, $R$, $S$, quatre polynômes $\in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$, à coefficients algébriques. Nous noterons $h(1,Q,R,S)$, la hauteur du point projectif défini par les coefficients de $Q$, $R$ et $S$ (auxquels nous adjoignons 1), $L$ le degré de $P$ et enfin $c_1$, (resp. $c_2$, resp. $c_3$) le nombre maximum de coefficients non nuls de $Q$ (resp. $R$, resp. $S$). Posons $c = \max\{c_1,c_2,c_3\}$, et $P(X,Y) = \sum_{i+j\leq L} a_{i,j}X^iY^j$. Alors, le polynôme $T(X,Y)$ défini par :*

$$T = \sum_{i+j\leq L} a_{i,j}Q^{L-(i+j)}R^iS^j,$$

*est de hauteur :*

$$h(T) \leq h(P) + Lh(1,Q,R,S) + L\log(c) + \log\left(\frac{(L+1)(L+2)}{2}\right).$$

*Démonstration* : ce lemme est presque immédiat en revenant à la définition de la hauteur. Soit $K$ un corps de nombres contenant tous les coefficients des polynômes $P$, $Q$, $R$, $S$, et $v$ une place de $K$. Notons $b_\mu$, les coefficients de $Q$, $R$ et $S$, ordonnés arbitrairement. Les coefficients de $T$ s'exprimant comme une somme de monômes homogènes de degré 1 en les coefficients de $P$, et homogènes de degré $L$ en les coefficients de $Q$, $R$ et $S$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\log\max\{1, |\text{coefficients de } T|_v\} &\leq \log\max\{1, |a_{i,j}|_v\} \\ &+ L\log\max\{1, |b_\mu|_v\} + \delta,\end{aligned}$$

où $\delta = 0$ si $v$ est finie et $\delta = \log(\text{nombre de monômes})$ si $v$ est infinie. Il reste à estimer $\delta$. Comme le nombre de monômes est au plus égal au nombre de produits possibles lorsque l'on développe $\sum_{i,j} a_{i,j} Q^{L-(i+j)} R^i S^j$, on en déduit :

$$\delta \leq \log\left(\frac{1}{2}c^L(L+1)(L+2)\right).$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}h(T) &= \frac{1}{D}\sum_v \log\max\{1, |\text{coefficients de T}|_v\} \\ &\leq \frac{1}{D}\sum_v \log\max\{1, |a_{i,j}|_v\} + \frac{1}{D}\sum_v L\log\max\{1, |b_\mu|_v\} \\ &+ \frac{1}{D}\sum_{v|\infty} \log\left(\frac{1}{2}c^L(L+1)(L+2)\right) \\ &\leq h(P) + Lh(1,Q,R,S) + L\log(c) + \log\left(\frac{(L+1)(L+2)}{2}\right).\end{aligned}$$

Le lemme est donc établi.

On peut maintenant revenir à la preuve de la proposition 8.2. Soit $P$ un polynôme de $K[X,Y]$. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\begin{aligned}P(\wp(u+z), \wp'(u+z)) &= \sum_{i+j\leq L} a_{i,j} \frac{P_1(\wp(z), \wp'(z))^i P_2(\wp(z), \wp'(z))^j}{Q(\wp(z), \wp'(z))^{i+j}} \\ &= \frac{\sum_{i+j\leq L} Q(\wp(z), \wp'(z))^{L-(i+j)} P_1(\wp(z), \wp'(z))^i P_2(\wp(z), \wp'(z))^j}{Q(\wp(z), \wp'(z))^L}.\end{aligned}$$

Nous sommes dans les conditions d'application du lemme 8.4 et l'on peut donc réécrire cette expression comme une fraction rationnelle en $(\wp(z), \wp'(z))$ dont le dénominateur est de degré $\leq L\deg(Q) = 2L$, dont le numérateur est de degré : $\leq L\max\{\deg(Q), \deg(P_1), \deg(P_2)\} = 2L$, et enfin la hauteur du numérateur est

$$\leq h(P) + L(2h(\gamma) + h + \log(36) + L\log(6)) + \log\left(\frac{(L+1)(L+2)}{2}\right).$$

Evaluons enfin la hauteur du dénominateur :

**Lemme 8.5** *Soit $P$ un polynôme de $K[X,Y]$, de degré $M$, et $L$ un entier $\geq 1$. Alors,*

$$h(P^L) \leq Lh(P) + (L-1)\log\left(\frac{(M+1)(M+2)}{2}\right).$$

*Plus précisément, si $c$ est le nombre de coefficients non nuls de $P$, on a :*

$$h(P^L) \leq Lh(P) + (L-1)\log(c).$$

*Démonstration* : écrivons $P(X,Y) = \sum_{i,j,i+j\leq M} a_{i,j}X^iY^j$. Pour $L = 1$, le lemme 8.5 est clairement vrai, et nous pouvons supposer par induction que la conclusion de ce dernier est exacte pour un entier $L \geq 1$. Posons $P^L(X,Y) = \sum_{k,l} b_{k,l}X^kY^l$. Calculons alors $P^{L+1}$. On a :

$$P^{L+1} = P^L.P = \sum_{m,n} c_{m,n}X^mY^n = \sum_{m,n}\sum_{i+k=m}\sum_{j+l=n} a_{i,j}b_{k,l}X^mY^n.$$

On en déduit que si $v$ est une place de $K$,

$$\log\max\{1, |c_{m,n}|_v\} \leq \log\max\{1, |a_{i,j}|_v\} + \log\max\{1, |b_{k,l}|_v\} + \delta,$$

où $\delta = 0$ si $v$ est finie, et $\delta = c \leq \log\left(\frac{(M+1)(M+2)}{2}\right)$, si $v\,|\,\infty$. On en déduit,

$$h(P^{L+1}) \leq h(P^L) + h(P) + \log(c),$$

et il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure. Le lemme 8.5 est donc établi. En utilisant le lemme 8.5, on vérifie que la hauteur de $Q^L$ est

$$\leq L(2h(\gamma) + h + \log(24)) + (L-1)\log(4).$$

Les premières assertions de la proposition 8.2 sont donc établies. Il reste à vérifier que les coefficients du numérateur peuvent bien s'écrire comme annoncé. Tout d'abord, remarquons que les coefficients des polynômes $Q$, $P_1$ et $P_2$ introduits ci–dessus, sont tous des combinaisons linéaires de monômes de degré au plus 2 en $\wp_{\mathcal{E}}(u)$, $\wp'_{\mathcal{E}}(u)$, et de degré au plus 1 en $g_2$, $g_3$ ; que de plus la longueur maximale de ces combinaisons linéaires est 3, et qu'enfin, les coefficicients de ces combinaison linéaires sont des nombres rationnels, de dénominateur 1, 2 ou 4, et de numérateur de valeur absolue au plus 3. Enfin, l'écriture :

$$P\left(\wp_{\mathcal{E}}(z+u), \wp'_{\mathcal{E}}(z+u)\right) = \frac{\sum_{i,j} a_{i,j} Q^{L-i-j} P_1^i P_2^j}{Q\left(\wp_{\mathcal{E}}(z+u), \wp'_{\mathcal{E}}(z+u)\right)^L},$$

permet de vérifier que les coefficients du polynôme $\sum_{i,j} a_{i,j} Q^{L-i-j} P_1^i P_2^j$, sont de la forme voulue sauf, peut-être l'assertion sur la *longueur* des combinaisons linéaires. On vérifie aisément que les polynômes $Q$, $P_1$, $P_2$, peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de 10 monômes au plus en $X$, $Y$, $\wp_{\mathcal{E}}(u)$, $\wp'_{\mathcal{E}}(u)$, $g_2$, $g_3$. Le développement de $\sum_{i,j} a_{i,j} Q^{L-i-j} P_1^i P_2^j$ fournit donc au plus $10^L c'$ monômes ; ce nombre constitue donc clairement un majorant du nombre de termes pouvant intervenir dans l'écriture des coefficients de $\sum_{i,j} a_{i,j} Q^{L-i-j} P_1^i P_2^j$. La proposition 8.2 est donc entièrement établie.

# 9 Lemme de zéros et conclusion

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme de zéros de P. PHILIPPON (*voir* [Ph2], théorème 1). Nous utilisons cet énoncé de préférence au théorème 2–1 de [Ph1]. En effet, cette version du lemme de zéros permet de gagner une factorielle de la dimension du groupe (grâce à l'utilisation des multiplicités de SAMUEL) et donc un terme de la forme $k^{2k^2}$ dans l'estimation finale. En revanche, cela nous conduit à renoncer au raffinement récemment introduit par L. DENIS (*voir* [De]), car ce dernier est écrit pour raffiner la version précédente de théorème de P. PHILIPPON. Il est toutefois vraisemblable que ce raffinement peut être également apporté à l'énoncé ci-dessous (tout au moins dans le cadre qui nous intéresse). Un tel raffinement permettrait un gain d'un facteur $2^{2k^2}$ dans l'estimation finale. On pourra noter que ce nouveau lemme (compte tenu de l'absence du raffinement de L. DENIS n'est meilleur (pour notre étude) que le précédent que dans le cas $k \geq 4$. Nous n'avons pas toutefois pris la peine de distinguer les cas $k \leq 3$ et $k \geq 4$.

Nous rappelons ci–dessous son énoncé tel que l'on pourra le trouver dans [Ph2], traduit dans le cas qui nous intéresse, à savoir un produit de courbes elliptiques et d'un facteur $\mathbb{G}_a$ :

**Lemme 9.1** *Soit* $\mathbb{G} = \mathbb{G}_a \times \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$, *plongé dans* $\mathbb{P} \times \mathbb{P}^2 \times \ldots \times \mathbb{P}^2$, *comme ci–dessus. Soient* $W$ *un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à l'origine de* $\mathbb{G}$, $T$ *un entier* $\geq 1$, *et* $L_0, L_1, \ldots, L_k$, $k+1$ *entiers positifs. Soit enfin* $\Sigma$ *un ensemble fini de points de* $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ *contenant l'élément neutre* 0 *du groupe algébrique commutatif* $\mathbb{G}$. *Supposons donné un polynôme* $P$ *de* $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{P}}]$, *de multidegré* $\leq (L_0, \ldots, L_k)$, *non identiquement nul sur* $\mathbb{G}$, *qui s'annule à un ordre* $\geq (k+1)T+1$ *le long* $W$ *en tous les points de* $\Sigma^{(k+1)}$. *Il existe alors un sous–groupe algébrique connexe* $B$ *de* $\mathbb{G}$ *(*$B \neq \mathbb{G}$*), tel que l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$(\operatorname{codim}_W (W \cap T_B(\mathbb{C})))! \binom{T + \operatorname{codim}_W (W \cap T_B(\mathbb{C}))}{\operatorname{codim}_W (W \cap T_B(\mathbb{C}))} \operatorname{card}(\Sigma + B/B)$$
$$\times\ H(B; L_0, \ldots, L_k) \leq 2^k H(\mathbb{G}; L_0, \ldots, L_k).$$

Avant d'appliquer ce résultat, rappelons la signification de la notation $\Sigma^{(k+1)}$. Soient $\Sigma$ un ensemble de points de $\mathbb{G}$ contenant l'élément neutre de $\mathbb{G}$, et $n$ un entier $\geq 1$. Alors, $\Sigma^{(n)} = \left\{\sum_{i\leq n} P_i, P_i \in \Sigma\right\}$. Dans notre cas, nous avons établi l'existence, dans les paragraphes précédents, d'un polynôme $P$, non identiquement nul sur $\mathbb{G}$, s'annulant le long de l'hyperplan $W$ (noyau de notre forme linéaire $\mathcal{L}$), à un ordre $\geq (k+1)T+1$, aux points de l'ensemble $\Sigma^{(k+1)}$, où $\Sigma = \{\boldsymbol{\Phi}(s\gamma), 0 \leq s < S\}$. Le lemme 9.1 nous assure donc de l'existence d'un sous–groupe algébrique commutatif $B$ de $\mathbb{G}$ tel que l'inégalité du lemme 9.1 soit vraie. Commençons par supposer que $T_B(\mathbb{C}) \not\subset W$, puisque le cas contraire est «moralement» couvert par la proposition 5.1. Dans ce cas, nous avons :

$$(\mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B))! \begin{pmatrix} T + \mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B) \\ \mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B) \end{pmatrix} \mathrm{card}\,(\Sigma + B/B)$$

$$\times\ H(B, L_0, L_1, \ldots, L_k) \leq 2^k H(\mathbb{G}, L_0, \ldots, L_k).$$

Ce qui donne en particulier :

$$(\mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B))! \begin{pmatrix} T + \mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B) \\ \mathrm{codim}_{\mathbb{G}}(B) \end{pmatrix} \leq (k+1)!6^k \frac{\prod_{i=0}^k L_i}{H(B; L_0, \ldots, L_k)}.$$

C'est-à-dire, dans le cas où $B$ est contenu dans le produit $0 \times \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$, en remplaçant les paramètres par leur valeur (et en notant $d'$ la dimension de $B$ et $r'$ la codimension de $B$),

$$(T+1)^{r'} \leq (k+1)!6^k U_0^{r'-1} \frac{{c_7}^{r'-1}}{A_1 \times \ldots \times A_{r'-1}} \frac{U}{c_6 D(\log(B) + \log(DE))},$$

où les $A_i$ sont les termes $DS^2 \log(V_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ rangés par ordre croissant. On en déduit, en minorant $T+1$ par $\frac{U_0}{D(\log(\log(B))+h+\log(DE))}$,

$$U_0 \leq \frac{(k+1)!6^k (D(\log\log(B) + h + \log(DE))^{r'} {c_7}^{r'-1} U}{A_1 \times \ldots \times A_{r'-1} \times c_6 D(\log(B) + \log(DE))}.$$

C'est-à-dire, en minorant $DS^2 \log(V_i)$ par :

$$c_4 D(\log(\log(B)) + h + \log(DE)),$$

$$U_0 \leq U \frac{(k+1)!6^k {c_7}^{r'-1} (\log(\log(B)) + h + \log(DE))}{{c_4}^{r'-1} c_6 (\log(B) + \log(DE))}.$$

De plus si $r' \geq 2$, on a (puisque $c_4 \geq c_7$) :

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!6^k {c_7}^{r'-1}}{{c_4}^{r'-1}} &\leq \frac{(k+1)!6^k c_7}{c_4}\\ &\leq \frac{(k+1)!6^k(\log(4(k+1))+20)}{4^k(k+1)^k 8(k+1)20} < 1.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\log(\log(B))+h+\log(DE)}{\log(B)+\log(DE)} < 1$ en tenant compte de la condition 2, cette dernière inégalité ést en contradiction avec la définition de $U$ (*voir* proposition 5.1). Eliminons maintenant le cas $r' = 1$. On a alors $B = 0 \times \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$, et l'inégalité du lemme de zéros entraîne en particulier :

$$(T+1)k!3^k L_1 \ldots L_k \leq (k+1)!6^k L_0 \ldots L_k,$$

c'est-à-dire (en tenant compte de la définition de $c_6$) :

$$\begin{aligned}U_0 &\leq \frac{(k+1)2^k}{c_6} \times \frac{\log(\log(B))+h+\log(DE)}{\log(B)+\log(DE)} U\\ &\leq \frac{\log(\log(B))+h+\log(DE)}{\log(B)+\log(DE)} U < U.\end{aligned}$$

Mais, cette inégalité est en contradiction avec la définition de $U$. On en déduit donc que $B$ est de la forme : $\mathbb{G}_a \times B'$ avec $B' \subset \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_k$. Dans ce cas, la contradiction n'est pas plus complexe à obtenir; l'inégalité du lemme de zéros conduisant cette fois–ci aux inégalités :

$$(T+1)^{r'} \leq (k+1)!6^k U_0^{r'} \frac{{c_7}^{r'}}{A_1 \times \ldots \times A_{r'}},$$

d'où :

$$\begin{aligned}1 &\leq (k+1)!6^k(D(\log\log(B)+h+\log(DE))^{r'}\\ &\times \frac{{c_7}^{r'}}{A_1 \times \ldots \times A_{r'}}.\end{aligned}$$

On vérifie aisément que le membre de droite de cette expression est maximal pour $r'$ minimal, c'est-à-dire, $r' = 1$. On obtient dans ces conditions :

$$1 \leq \frac{(k+1)!6^k c_7 D(\log(\log(B))+h+\log(DE))}{DS^2\log(V_k)}.$$

Ce qui donne :

$$1 \leq \frac{(k+1)!6^k c_7}{c_4}.$$

Or, cette dernière inégalité est contradictoire avec les définitions de $c_4$ et $c_7$.

Le sous-groupe $B$ est donc tel que $T_B(\mathbb{C}) \subset W$. Nous allons donc appliquer la proposition 5.1. Cette dernière nous assure que :

$$(r'-1)! \begin{pmatrix} T^{\#} + r' - 1 \\ r' - 1 \end{pmatrix} \operatorname{card}\left((\Gamma(S)+B)/B\right) H\left(B; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right)$$
$$\geq (1+\varepsilon)\, 2^k H\left(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right);$$

De plus, le lemme 5.2, nous assure que $L_i \geq \left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right) L_i^{\#}$. De même, on a $T \geq \left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right) T^{\#}$, puisque l'on a clairement $c_5 \geq 800k^3 + 2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
&(r'-1)! \begin{pmatrix} T + r' - 1 \\ r' - 1 \end{pmatrix} \operatorname{card}\left((\Gamma(S)+B)/B\right) H\left(B; L_0, \ldots, L_k\right) \\
\geq\; & \left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right)^k (r'-1)! \begin{pmatrix} T^{\#} + r' - 1 \\ r' - 1 \end{pmatrix} \\
\times\; & \operatorname{card}\left((\Gamma(S)+B)/B\right) 2^k H\left(B; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right) \\
\geq\; & (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right)^k 2^k H\left(\mathbb{G}; L_0^{\#}, \ldots, L_k^{\#}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que cette dernière inégalité contredit l'inégalité du lemme de zéros (lemme 9.1), puisque :

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right)^k &= \left(1 + \frac{1}{200k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{400k^3+1}\right)^k \\
&\geq \exp\left(\frac{1}{200k^2} - \frac{1}{400k^2}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{80000k^4} - \frac{1}{160000k^5}\right) > 1.
\end{aligned}$$

En conclusion, aucun sous–groupe connexe $B$ de $\mathbb{G}$ ne vérifie la conclusion de lemme de zéros. Nous avons donc obtenu une contradiction, ce qui signifie que l'hypothèse 5.3 est erronée, et on en déduit que soit :

$$|\mathcal{L}(\boldsymbol{u})| \geq \exp\left(-c_8 U_0\right),$$

soit que $\boldsymbol{u} \in T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C})$. Dans ce dernier cas, le théorème est vrai puisque $T_{\tilde{\mathbb{G}}}(\mathbb{C}) \subset W$, et puisque le lemme 6.2, point $(i)$ nous assure que le degré de $\tilde{\mathbb{G}}$ vérifie la majoration souhaitée. Pour achever la preuve du théorème 2.1, il suffit donc de vérifier que :

$$c_8 c_5 + 0,01 \leq c_1.$$

(le terme $0,01$ provient du fait qu'il nous faut tenir compte du changement de forme linéaire effectué au lemme 4.1 et de l'inégalité $D\log(B) \leq 0,01U_0$.) Nous vérifions directement cette inégalité pour $k \leq 10000$. Il reste donc à l'établir pour $k \geq 10000$. Pour $k \geq 10000$, on a :

$$c_8 c_5 + 0,01 \leq 12k(k+1)^3(\log(k+1))^2 c_5.$$

Il suffit donc, en remplaçant $c_1$ par sa valeur, et en utilisant la majoration de $c_5$ obtenue page 83, d'établir :

$$\begin{aligned} 3\log(k+1) &+ \log(k) + \log(12) + 2\log(\log(k+1)) \\ &+ 2k(k+1)\log(k+1) + 4k^2\log(2) + 6,8k\log(k+1) \\ &+ 11,3k + 3,7\log(k+1) + 5,2 \\ &\leq \log(2,9) + 6\log(10) + 6k\log(10) \\ &+ 12,3\log(k+1) + 9k\log(k+1) \\ &+ 4k^2\log(2) + 2k^2\log(k+1). \end{aligned}$$

C'est-à-dire, après simplification :

$$\begin{aligned} 2\log(\log(k+1)) + \log(12) &+ 11,3k + 5,2 \\ &\leq \log(2,9) + 6\log(10) + 5,6\log(k+1) \\ &+ 6k\log(10) + 0,2k\log(k+1), \end{aligned}$$

qui est trivialement vérifiée.

Le théorème 2.1 est donc entièrement établi.

# 10 Démonstration du corollaire

Afin de déduire de notre résultat principal le corollaire 2.2, nous allons tout d'abord énoncer une version explicite de quelques-uns des lemmes auxiliaires nécessaires (*voir* [Ma–Wu1]).

Rappelons tout d'abord les notations. On se donne une courbe elliptique $\mathcal{E}$, définie sur un corps de nombres $k$, de degré $d$ sur $\mathbb{Q}$, que l'on suppose munie d'un modèle de WEIERSTRASS :

$$y^2 = 4x^3 - g_{2,\mathcal{E}}x - g_{3,\mathcal{E}},$$

et l'on note $h(\mathcal{E}) = \max\{1, h(j_{\mathcal{E}}, h(1, g_{2,\mathcal{E}}, g_{3,\mathcal{E}})\}$. On suppose également donnée une deuxième courbe elliptique $\mathcal{E}^\star$, également définie sur $k$, et l'on suppose que $\mathcal{E}^\star$ est isogène à $\mathcal{E}$. Nous noterons $N$ le degré d'une isogénie $\varphi$ liant $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}^\star$, qu'il n'y a pas de restriction à supposer *minimale*, au sens du degré. On note enfin comme précédemment $\Omega_{\mathcal{E}}$ (*resp.* $\wp_{\mathcal{E}}$) le réseau des périodes de $\mathcal{E}$ (*resp.* la fonction de WEIERSTRASS associée à $\mathcal{E}$). On a dans ces conditions les lemmes suivants :

**Lemme 10.1** *Il existe un entier positif $b \leq \exp(2d(h+\log(4))$ tel que si $n$ est un entier positif, et $\zeta$ un élément de $\Omega_{\mathcal{E}}/n$, qui n'est pas dans $\Omega_{\mathcal{E}}$, le nombre $\xi = \wp_{\mathcal{E}}(\zeta)$ vérifie :*

*(i) $\xi$ est un nombre algébrique, de degré au plus $d(n^2-1)$ et de hauteur au plus $\frac{3}{2}h(\mathcal{E}) + 8\log(2)$.*

*(ii) $bn^2\xi$ est un entier algébrique, et $|\xi| \leq 120n^2\exp(dh(\mathcal{E}))$.*

*Démonstration* : (il s'agit ici du lemme 3–4 de [Ma–Wu1]). Le point (*i*) est immédiat (on obtient la majoration du degré en utilisant la formule de multiplication classique, et la majoration de la hauteur provient du fait que la hauteur de NÉRON–TATE d'un point de torsion est nulle et de la formule de comparaison entre la hauteur de WEIL et celle de NÉRON–TATE (*voir* le lemme 3.4). Passons à la preuve du point (*ii*). Pour majorer $|\xi|$, écrivons $\zeta = \omega_1(\alpha + \beta\tau)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{1}{2}$. Le $q$–développement de $\wp$ (et la minoration de $|\omega_1|$ obtenue page 68 à partir du lemme 3.2, relation 9) nous donne alors :

$$\begin{aligned}
|\xi| &\leq 4\pi^2|\omega_1|^{-2}\left[\frac{1}{12} + \left|\frac{e^{2i\pi\beta\tau}}{\left(1 - e^{2i\pi(\alpha+\beta\tau)}\right)^{-2}}\right|\right] \\
&+ 4\pi^2|\omega_1|^{-2}\left[\sum_{m\geq 1}\left|\frac{q^m\left(|e^{2i\pi\beta\tau}| + |e^{-2i\pi\beta\tau}|\right)}{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{3}(m-\frac{1}{2})}\right)^2}\right| + 2\sum_{n\geq 1}\frac{ne^{-\pi\sqrt{3}n}}{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{3}n}\right)}\right] \\
&\leq 4\pi^2|\omega_1|^{-2}\left[\frac{1}{12} + \frac{2e^{-\pi\sqrt{3}}}{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{3}}\right)^3} + \frac{2e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(1 - e^{-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\left(1 - e^{-\pi\sqrt{3}}\right)}\right] \\
&+ 4\pi^2|\omega_1|^{-2}\left[\left|\frac{e^{2i\pi\beta\tau}}{\left(1 - e^{2i\pi(\alpha+\beta\tau)}\right)^2}\right|\right] \\
&\leq 4\pi^2|\omega_1|^2\left|\frac{e^{2i\pi\beta\tau}}{\left(1 - e^{2i\pi(\alpha+\beta\tau)}\right)^2}\right| + 2,9\exp\left(\frac{2}{3}dh(\mathcal{E})\right).
\end{aligned}$$

Majorons maintenant séparément le terme qui reste à évaluer. Comme $\zeta$ est un point d'ordre $n$, il est clair que (tout au moins lorsque $n$ est assez grand, on vérifie que $n \geq 6$ convient) $1 - e^{2i\pi\frac{\zeta}{\omega_1}}$ est minimal lorsque $\frac{\zeta}{\omega_1} = \frac{1}{n}$. Il est de plus clair que (toujours avec $n \geq 6$) :

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \geq \frac{0,35\pi^2}{n^2},$$

(on vérifie que pour les petites valeurs de $n$, la borne inférieure donnée ci–dessus est aussi une borne inférieure de $|1 - e^{2i\pi\frac{\zeta}{\omega_1}}|^2$). On en déduit :

$$\left|\frac{e^{2i\pi\beta\tau}}{\left(1 - e^{2i\pi(\alpha+\beta\tau)}\right)^2}\right| \leq \frac{n^2}{0,35\pi^2}\exp\left(\pi\Im m\ \tau\right).$$

En conclusion, on obtient :

$$|\xi| \leq 2,9\exp\left(\frac{2}{3}dh(\mathcal{E})\right) + 115,91n^2\exp(dh(\mathcal{E})) \leq 118,8\exp(dh(\mathcal{E}))n^2.$$

Enfin, comme dans [Ma–Wu1], on vérifie que $n^2\xi$ est un entier algébrique sitôt que $\frac{g_2}{4}$ et $\frac{g_3}{4}$ sont des entiers algébriques. En remplaçant $g_2$ et $g_3$ par $b_0^4 g_2$, $b_0^6 g_3$, on obtient un nouveau modèle de la courbe $\mathcal{E}$, dans lequel $\xi$ est remplacé par $b_0^2\xi$. Pour avoir l'assertion du lemme, il suffit donc de choisir pour $b_0$ un entier rationnel tel que $\frac{g_2}{4}$ et $\frac{g_3}{4}$ soient des entiers algébriques. On en déduit donc l'existence d'un tel entier $\leq \exp(d(h(\mathcal{E}) + \log(4))$. Il suffit de prendre $b = b_0^2$ pour avoir le lemme.

Rappelons maintenant la notion «d'isogénie normalisée» de D. MASSER et G. WÜSTHOLZ. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$ deux courbes elliptiques définies sur un corps de nombres $k$. Comme toujours dans ce texte, on fixe un plongement de $k$ dans le corps des nombres complexes et l'on suppose que les courbes elliptiques sont données avec un modèle de WEIERSTRASS, ce qui permet de parler de réseau des périodes, de fonction $\wp$ etc... Ces différents objets sont équipés d'un $\star$ s'ils sont relatifs à $\mathcal{E}^\star$. Soit $\varphi$ une isogénie de $\mathcal{E}^\star$ vers $\mathcal{E}$, et soit $\alpha$ l'unique nombre complexe tel que $\varphi$ se traduise par la multiplication par $\alpha$ au niveau des espaces tangents. L'isogénie $\varphi$ est dite *normalisée* si $\alpha = 1$, *ie* si le réseau des périodes $\Omega^\star$ est inclu dans $\Omega$. Enonçons maintenant une version explicite du lemme de normalisation de D. Masser et G. Wüstholz.

**Lemme 10.2** *Soit $d \geq 1$ un entier rationnel, et $k$ un corps de nombres de degré sur $\mathbb{Q}$ au plus $d$. Soient de plus $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_1^\star$ deux courbes elliptiques définies sur $k$, et $\varphi$ une isogénie de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}_1^\star$ de degré $N$. Soit $k'$ la plus petite extension de $k$ sur laquelle $\varphi$ est rationnelle. Le corps $k'$ est dans ces conditions de degré au plus 12 sur $k$, et il existe une courbe elliptique $\mathcal{E}^\star$ définie sur $k'$, isomorphe (sur $k'$) à $\mathcal{E}_1^\star$, telle que l'isogénie induite de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}^\star$ soit normalisée. De plus, nous avons :*

$$\begin{aligned} h(\mathcal{E}^\star) &\leq 78\log(N) + 54dh(\mathcal{E}) + 36\log(4)d + 127,4 \\ &\leq 78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

*Démonstration* : l'assertion sur le degré de $k'$ se trouve déjà dans [Ma–Wu1]. Il ne reste donc qu'à calculer la constante dans l'estimation de la hauteur de $\mathcal{E}^\star$. Il est donc inutile de reprendre toute leur démonstration. Soient $\Omega$ le réseau des périodes de $\mathcal{E}$, et $\Omega^\star$ le noyau de $\varphi$ composée avec l'exponentielle de $\mathcal{E}$. Le réseau $\Omega$ est donc un sous réseau de $\Omega^\star$, et si l'on note $\wp^\star$ la fonction de WEIERSTRASS associée au réseau $\Omega^\star$ $g_2^\star, g_3^\star$ les invariants correspondants, l'équation (6.3) de [Ma–Wu1] s'écrit :

$$g_2^\star = g_2 + 10\sum \wp''(\omega^\star), \qquad g_3^\star = g_3 + \frac{7}{6}\sum \wp^{(iv)}(\omega^\star). \tag{24}$$

Ici les sommes sont prises sur un ensemble de représentants des classes non nulles de $\Omega^\star/\Omega$. La preuve de [Ma–Wu1] revient à dire que la courbe elliptique $\mathcal{E}^\star$ associée à l'équation de WEIERSTRASS de $\wp^\star$ satisfait toutes les conditions du lemme. Nous nous bornerons ici à calculer la hauteur de $\mathcal{E}^\star$. Par commodité, rappelons :

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}, \qquad \wp^{(iv)}(z) = 120\wp^3(z) - 18g_2\wp(z) - 12g_3, \tag{25}$$

(formule (6.4) de [Ma–Wu1]).

Le lemme 10.1, et les relations (24) et (25) nous donnent :

$$\begin{aligned} |g_2^\star| &\le \exp(dh(\mathcal{E})) + 10N(6 \times (120\exp(dh(\mathcal{E}))N^2)^2 + \frac{1}{2}\exp(dh(\mathcal{E})) \\ &\le 5,2.10^6 N^5 \exp(2dh(\mathcal{E})). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} |g_3^\star| &\le \exp(dh(\mathcal{E})) + \frac{7}{6}N(120 \times 120^3 \exp(3dh(\mathcal{E}))N^6 \\ &+ 18 \times 120N^2 \exp(dh(\mathcal{E})) + 12\exp(dh(\mathcal{E}))) \\ &\le 2,42.10^8 N^7 \exp(3dh(\mathcal{E})). \end{aligned}$$

Enfin, toujours par le lemme 10.1, il existe un entier $b_1 \le \exp(2d(h(\mathcal{E})+\log(4)))$ tel que $b_1N^2\wp(\omega^\star)$ soit un entier algébrique, on notera de plus que par construction de $b_1$ (*voir* la démonstration du lemme 10.1), $b_1g_2$, $b_1g_3$ sont tous deux des entiers algébriques. On en déduit l'existence d'un entier $b = b_1^3N^6 \le \exp(6d(h+\log(4))N^6$ tel que $bg_2^\star$ et $bg_3^\star$ soient tous deux des entiers algébriques. Notons enfin que l'expression (24) est encore valable pour tous les conjugués de $g_2^\star$, $g_3^\star$ puisque qu'il est loisible de travailler avec les fonctions de WEIERSTRASS conjuguées de $\mathcal{E}$. En notant $d^\star$ le degré sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(g_2^\star, g_3^\star)$, la définition de la hauteur donne alors :

$$\begin{aligned} d^\star h(1, g_2^\star, g_3^\star) &= \sum_v \log(\max\{1, |g_2^\star|_v, |g_3^\star|_v\}) \\ &\le d^\star(\log(b) + \log(2,42.10^8 N^7 \exp(3dh(\mathcal{E}))) \\ &\le d^\star\,(13\log(N) + 9dh(\mathcal{E}) + 6d\log(4) + 19,31) \end{aligned}$$

(puisque la contribution aux places finies est contrôlée par $b$). Comme nous utilisons comme mesure de la hauteur d'une courbe elliptique, le maximum de la hauteur des invariants $g_2^\star$, $g_3^\star$ et de celle de l'invariant modulaire $j^\star$, il convient de contrôler également $h(j^\star)$. Or, nous avons : $j^\star = \frac{1728 {g_2^\star}^3}{{g_2^\star}^3 - 27{g_3^\star}^2}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
h(j^\star) &\leq \log(1728) + 3h(g_2^\star) + h({g_2^\star}^3 - 27{g_3^\star}^2) \\
&\leq 6h(1, g_2^\star, g_3^\star) + \log(93312) \\
&\leq 78\log(N) + 54dh(\mathcal{E}) + 36\log(4)d + 127,4 \\
&\leq 78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Le lemme 10.2 est donc établi.

Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du corollaire 2.2. Quitte à remplacer $k$ par une extension $k'$ de degré au plus 12, nous pouvons supposer que les courbes elliptiques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\star$ sont liées par une isogénie normalisée, rationnelle sur $k'$. Il n'y a pas de restriction à supposer que cette isogénie $\varphi$, de $\mathcal{E}^\star$ vers $\mathcal{E}$ est minimale au sens du degré, (en particulier, son noyau est alors cyclique). Fixons une base $\omega_1, \omega_2$ du réseau $\Omega$, ainsi qu'une base $\omega_1^\star, \omega_2^\star$ du réseau $\Omega^\star$. Puisque $\Omega^\star \subset \Omega$, il existe des entiers rationnels $m_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ tels que :

$$\omega_1^\star = m_{1,1}\omega_1 + m_{1,2}\omega_2, \qquad \omega_2^\star = m_{2,1}\omega_1 + m_{2,2}\omega_2,$$
$$m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} = \pm N.$$

On a alors dans ces conditions le lemme :

**Lemme 10.3** *On a :*

$$\max\{|m_{1,1}|, |m_{1,2}|\} \leq 2\sqrt{Ndh(\mathcal{E})},$$

$$\max\{|m_{2,1}|, |m_{2,2}|\} \leq d\sqrt{6Nh(\mathcal{E})h(\mathcal{E}^\star)},$$

*et :*

$$\max\{|m_{1,1}|, |m_{1,2}|, |m_{2,1}|, |m_{2,2}|\} \geq \sqrt{\frac{N}{2}}.$$

*Démonstration* : (il s'agit du lemme 4.1 de [Ma–Wu1]). Ecrivons $\tau = x+iy$, et $\tau^\star = x^\star + iy^\star$ (il n'y a pas de restriction à supposer que $\tau$ et $\tau^\star$ sont dans le domaine fondamental usuel de pour l'action du groupe modulaire). De la relation :

$$(m_{1,2}x + m_{1,1})^2 + (m_{1,2}y)^2 = N\frac{y}{y^\star} \tag{26}$$

(voir la relation 4.5 de [Ma–Wu1]), on tire :

$$|m_{1,2}| \le \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{yy^\star}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{N}.$$

On tire encore de la relation (26) :

$$|m_{1,1}|(|m_{1,1}| - |m_{1,2}|) \le \frac{Ny}{y^\star}.$$

Si $|m_{1,1}| \le 2|m_{1,2}|$, on a $|m_{1,1}| \le \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{N}$. Dans le cas contraire, on a (en tenant compte de l'inégalité $y \le \frac{3}{2}dh$) :

$$|m_{1,1}| \le \sqrt{2}\sqrt{N\frac{y}{y^\star}} \le \sqrt{2}.3^{\frac{1}{4}}\sqrt{dh}\sqrt{N}.$$

d'où la première inégalité du lemme. Passons à la deuxième. On a aussi (*voir* [Ma–Wu1], page 11) :

$$|m_{2,2}\tau + m_{2,1}|^2 = |\tau^\star|^2|m_{1,2}\tau + m_{1,1}|^2,$$

qui implique :

$$(m_{2,2}x + m_{2,1})^2 + (m_{2,2}y)^2 = |m_{2,2}\tau + m_{2,1}|^2 \le \frac{4}{3}Nyy^\star.$$

On en déduit :

$$|m_{2,2}| \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{N\frac{y^\star}{y}}.$$

Les inégalités triviales $y \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y^\star \le \frac{3}{2}dh(\mathcal{E}^\star)$ entrainent donc :

$$|m_{2,2}| \le \frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\sqrt{Ndh(\mathcal{E}^\star)}.$$

On a également, en raisonnant comme pour la première inégalité :

$$|m_{2,1}| \leq \sqrt{\frac{8}{3}Nyy^\star} \leq d\sqrt{6Nh(\mathcal{E})h(\mathcal{E}^\star)}.$$

Ce qui entraîne bien la deuxième inégalité du lemme 10.3. Enfin, la dernière inégalité se déduit trivialement de la relation : $m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} = \pm N$. Le lemme 10.3 est donc établi.

Nous pouvons maintenant démontrer le corollaire : nous allons appliquer le théorème 2.1 à la forme linéaire :

$$\mathcal{L} : -z_0 + m_{1,1}z_1 + m_{1,2}z_2 - z_3,$$

Le point $\boldsymbol{u} = (0, \omega_1, \omega_2, \omega_i^\star)$ de $\mathbb{C}^4$ ($i = 1$ ou $i = 2$ suivant la forme linéaire utilisée), espace tangent de $\mathbb{G} = \mathbb{G}_a \times \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}^\star$ est un zéro de $\mathcal{L}$. Le théorème nous assure donc de l'existence d'un sous-groupe algébrique propre $H$ de $\mathbb{G}$ dont l'espace tangent est contenu dans le noyau de $\mathcal{L}$ et tel que $\boldsymbol{u} \in T_{H(\mathbb{C})}$. De plus, le degré de $H$ est majoré explicitement. Pour pouvoir utiliser cette dernière information, fixons les paramètres entrant dans l'énoncé du théorème.

Nous poserons :

$$D = 12d,$$

$$\log(V) = \log(V_1) = \log(V_2) = \log(V_3) = 78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}),$$

$$\log(B) = e\left(78\log(N) + 232dh(\mathcal{E})\right),$$

$$h = 78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}),$$

et enfin :

$$E = e.$$

Pour vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'applications du théorème, il faut vérifier $D\log(B) \geq \log(V_i)$ (condition (1)), ce qui est clair, que $h \geq \max\{h(\mathcal{E}), h(\mathcal{E}^\star)\}$, $\log(B) \geq eh$ (c'est comme cela que nous avons défini $\log(B)$), que $\log(B) \geq \max\{h(m_{i,1}), h(m_{i,2})\}$ ($i = 1$ ou $2$), ce qui est clair en utilisant le lemme 10.3 (c'est la condition (2) du théorème), que $\log(V) \geq \max\{h(\mathcal{E}), h(\mathcal{E}^\star)\}$ (c'est comme cela que nous avons défini $\log(V)$) et enfin que $\log(V) \geq \frac{3\pi \Im m\, \tau}{D}$, ce qui est clair en utilisant la majoration triviale de $\Im m\, \tau$ par $1,5dh(\mathcal{E})$ (c'est la condition (3)). Remarquons que puisque le noyau $W$ de $\mathcal{L}$ n'est pas l'espace tangent à l'origine d'un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}$, le sous-groupe $H$ ne peut-être de dimension 3. Il est donc de dimension 1 ou 2. Supposons tout d'abord que $H$ est de dimension 1. Le théorème 2.1 nous assure donc (en remplaçant $k$ et $\tilde{d}$ par leur valeurs) que son degré est majoré par :

$$9,06.10^{29} D^3 (78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}) + \log\log(B) + \log(D))^2 \log(V).$$

Comme le sous–groupe $H$ contient $\boldsymbol{u}$ dans son espace tangent, il est clair qu'il n'est pas « scindé» au sens de D. Masser et G. Wüstholz (*ie.* qu'il n'est pas contenu dans $0 \times \mathcal{E}^2 \times 0$ ou dans $0 \times \mathcal{E}^\star$. Le lemme d'isogénie de [Ma–Wu1] nous assure dans ces conditions de l'existence d'une isogénie liant $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}^\star$ de degré au plus $9\deg(H)^2$ Comme on a supposé que l'isogénie $\varphi$ est minimale au sens du degré, on en déduit :

$$\begin{aligned} N &\leq 1,75 \times 10^{67} d^6 \log(V)^2 \\ &\times (78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}) + \log\log(B) + \log(12d) + 1)^4. \end{aligned}$$

En remplaçant les paramètres par leur valeur, on en tire :

$$\begin{aligned} N &\leq 2,73 \times 10^{81} d^{12} h(\mathcal{E})^6 \left(1 + \frac{78\log(N)}{232dh(\mathcal{E})}\right)^2 \\ &\times \left(1 + \frac{78\log(N) + \log(78\log(N) + 232dh(\mathcal{E})) + 2 + \log(12d)}{232dh(\mathcal{E})}\right)^4 \\ &\leq 10^{93} d^{12} h(\mathcal{E})^6 \end{aligned}$$

(cette dernière inégalité se vérifie assez facilement ; on commence par remplacer $N$ par $x = \frac{N}{d^{12}h(\mathcal{E})^6}$, et l'ondémontre aisément que la fonction de $x$ obtenue en calculant la différence entre le deuxième membre divisé par $d^12h(\mathcal{E})^6$ et $x$ est décroissante et négative en $x$ pour $x \geq 10^{93}$, on est donc certain que $x \leq 10^{93}$). Passons maintenant au cas où $\dim(H) = 2$. Dans ce cas, on tire du théorème 2.1 :

$$\begin{aligned} \deg(H) &\leq 2,77.10^{49} D^5 \log(V)^2 \\ &\times (78\log(N) + 232dh(\mathcal{E}) + \log(\log(B)) + \log(D))^3. \end{aligned}$$

Le lemme d'isogénie de [Ma–Wu1] nous conduit donc comme ci-dessus à l'inégalité :

$$\begin{aligned} N &\leq 3.85 \times 10^{111} d^{10} \log(V)^4 \\ &\times (78 \log(N) + 232 dh(\mathcal{E}) + \log(\log(B)) + \log(12d) + 1)^6. \end{aligned}$$

Ce qui donne comme ci-dessus :

$$\begin{aligned} N &\leq 1,74 \times 10^{135} d^{20} h(\mathcal{E})^{10} \left(1 + \frac{78\log(N)}{232dh(\mathcal{E})}\right)^4 \\ &\times \left(1 + \frac{78\log(N) + \log(78\log(N) + 232dh(\mathcal{E})) + 2 + \log(12d)}{232dh(\mathcal{E})}\right)^6 \\ &\leq 10^{160} d^{20} h(\mathcal{E})^{10}. \end{aligned}$$

Le corollaire 2.2 est donc entièrement établi.

# Bibliographie


[Ba1] A. BAKER. *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV,* Mathematika, t. **13**, pages 204–216, 1966 ; t. **14**, pages 102–107, 220–228, 1967 ; t. **15**, pages 204–216, 1968.

[Ba2] A. BAKER. *On the periods of the Weierstraß $\wp$-function*, Symposia Mathematicae IV (INDAM Rome, 1968/69), Academic Press, pages 155–174, 1970.

[Ba–Wü] A. BAKER et G. WÜSTHOLZ. *Logarithmic forms and group varieties*, J. Reine Angew. Math., t. **442**, pages 19–62, 1993.

[Be–Ph] D. BERTRAND et P. PHILIPPON. *Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs*, Illinois journal of mathematics, t. **32** (2), pages 263–280, 1988.

[B-G-M-M-S] J. B. BLASS, A. M. GLASS, D. K. MANSKI, D. B. MERONK et R. P. STEINER. *Constants for lower bounds in linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Acta Arithmetica, t. **55**, pages 1–22, 1990.

[Bo] J. B. BOST. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres [d'après D. Masser et G. Wüstholz]. *Séminaire Bourbaki*, exposé 795, pages 795-1–795-43, Mars 1995.

[Ch] M. CHARDIN. *Une majorarion de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique*, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. **117**, pages 305–318, 1989; voir aussi : *Contributions à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1990.

[Co–La] J. COATES et S. LANG. *Diophantine approximation on abelian varieties with C. M.*, Inventiones mathematicae, t. **34**, pages 129–133, 1976.

[Dav1] S. DAVID. *Théorie de Baker dans les familles de groupes algébriques commutatifs*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1989.

[Dav2] S. DAVID. *Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes*, Compositio Mathematica, t. **78**, pages 121–160, 1991.

[De] L. DENIS. *Lemmes de multiplicités et intersections.* Comptes rendus Acad. sci. Paris, t. **314** (série 1), pages 97–100, 1992.

[F–P] A. FAISANT et G. PHILIBERT. *Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire $j$*, Journal of number theory, t. **25**, pages 184–200, 1987.

[G–P–Z] J. GEBEL, A. PETHÖ et H. ZIMMER. *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arithmetica, t. **LXVIII** (2), pages 171–192, 1994.

[H] R. HARTSHORNE. *Algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, t. **52**, Springer Verlag, 1977.

[Hi1] N. HIRATA. Formes linéaires d'intégrales elliptiques. *Séminaire de théorie des nombres, Paris 1988–1989*, Catherine Goldstein, éditeur, Progress in Math. t. **91**, Birkhäuser, pages 117–140, 1990.

[Hi2] N. HIRATA. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Inv. Math.*, t. **104** (2), pages 401–433, 1991.

[Hi3] N. HIRATA. Une relation entre les points entiers sur une courbe algébrique et les points rationnels de la Jacobienne, *The proceedings of the third conference of the Canadian Number Theory association, 1991*, N. Yui éditeur, Advances in Number theory, Oxford University Press, pages 35-43, 1993.

[L1] S. LANG. *Elliptic functions*, Addison–Wesley, 1973.

[L2] S. LANG. *Elliptic curves : diophantine analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, t. **231**, Springer-Verlag, 1978.

[L3] S. LANG. *Fundamentals of diophantine geometry*, Springer–Verlag, 1983.

[La] H. LANGE. *Families of translations of commutative algebraic groups*, Journal of algebra, t. **109**, pages 260–265, 1987.

[Lau] M. LAURENT. Sur quelques résultats récents de transcendance, *Journées arithmétiques de Luminy 1989*, Astérisque t. **198**–**200**, pages 209–230, 1991 ; *voir* aussi Linear forms in two logarithms and interpolation determinants, dans *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*, appendix, Matscience Lecture notes in mathematics, Madras, 1992.

[Ma] D. MASSER. *Elliptic functions and transcendence*, Springer Lecture notes, t. **437**, 1975.

[Ma–Wu1] D. MASSER et G. WÜSTHOLZ. *Estimating isogenies on elliptic curves*, Inventiones math., t. **100**, pages 1–24, 1990.

[Ma–Wu2] D. MASSER et G. WÜSTHOLZ. *Periods and minimal abelian subvarieties*, Annals of Math., t. **137**, pages 407–458, 1993.

[Ne] Y. V. NESTÉRENKO. *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Math. Sbornik, t. **123** (165) n$^o$1, pages 11–34, 1984 ; Math. USSR. Sbornik, t. **51** (1), pages 9–32, 1985.

[Pe] F. PELLARIN. *Estimation du degré d'une Isogénie entre courbes elliptiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. de Paris, t. **321**, série I, pages 685–688, 1995, 1995.

[Ph1] P. PHILIPPON. *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. **114**, pages 355–383, 1986.

[P–W] P. PHILIPPON et M. WALDSCHMIDT. *Formes linéaires de logarithmes dans les groupes algébriques commutatifs*, Illinois Journal of Mathematics, t. **32**(2), pages 281–314, 1988.

[Ph2] P. PHILIPPON. *Nouveaux lemmes de zéros*, Manuscript, 1995, (à paraître au Rocky Mountain math Journal).

[St–Tz] R. STOEKER et N. TZANAKIS. *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arithmetica, t. **67**, pages 177–196, 1994.

[W] M. WALDSCHMIDT. *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith., t. **37**, pages 257–283, 1980.

[Z] H. ZIMMER. *On the difference of the Weil height and the Néron–Tate height.* Math. Z., t. **147** (n$^o$ 1), pages 35–51, 1976.

Sinnou DAVID

UA 763, Problèmes Diophantiens,

Département de mathématiques, UFR 920,

Université Pierre et Marie CURIE,

4, Place JUSSIEU,

75005 PARIS,

**tel.** (1) 44277520

**adresse électronique :**

`david@mathp6.jussieu.fr`