

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLE BARDY

Systemes de racines infinis

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 65 (1996)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1996_2_65__R1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Mémoire de la
Société Mathématique de France
Numéro 65, 1996

Systemes de racines infinis

Nicole BARDY

Abstract — The aim of this work is to create sets of axioms of root systems that are general enough to include Kac-Moody algebras'ones and also the systems that appear in the generalization by Borchers of these algebras or in their almost- K -split forms, and compatible with Moody and Pianzola's axiomatization of 'real root systems'.

In this abstract theory, we prove the basic theorems (essential to make the theory useful) which deal with the problems of subroot systems, conjugacy of bases, fields' extensions and quotient root systems (which appear in the study of almost- K -split forms).

Résumé — L'objet de ce mémoire est de développer une théorie abstraite des systèmes de racines de façon suffisamment générale pour englober les systèmes des algèbres de Kac-Moody, ceux de leur généralisation par Borchers ainsi que ceux des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody ; cette axiomatisation devant, de plus, être compatible à celle des «systèmes de racines réelles» proposée par Moody et Pianzola.

Une fois la structure définie, sont abordés les problèmes de fonctorialité et sont alors traités : le changement de corps de base, la notion de sous-système et une généralisation du théorème classique de conjugaison des bases (dans le cas indécomposable).

Enfin, le cadre abstrait choisi permet d'obtenir deux théorèmes de stabilité importants lors du quotient par un groupe d'automorphismes de diagramme et du quotient par une partie de type fini. (Ces quotients apparaissent dans l'étude des systèmes de racines des formes presque-déployées.)

AMS Subject Classification Index: 17B67, 17B65, 20F55.

Table des matières

Introduction	1
Quelques exemples de systèmes de racines	1
Vers une axiomatisation	5
Résumé des résultats du mémoire	7
Remerciements	12
1 Système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds	13
1.1 Matrice de Borcherds et groupe de Weyl associé	13
Matrices de Borcherds	13
Classification	15
Réalisation d'une matrice A de Borcherds sur une extension \mathbf{K} de \mathbb{K}	18
Le groupe de Weyl	20
Résultats de J.-Y. Hée pour l'action de \mathbb{W} sur $\tilde{Q}(I_{re})$	23
L'action de \mathbb{W} sur Q sous l'hypothèse (R1)	27
1.2 Étude du système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds	29
L'algèbre $\tilde{g}(A, R)$	29
L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds	30
Étude de relations entre éléments de \mathfrak{g}	33
Propriétés du système de racines universel de l'algèbre de K.M.B. . .	36
Remarque	42
2 Systèmes de racines à base libre – axiomes et construction	43
2.1 Matrices de Borcherds relatives	43
Définitions	43
Matrices de Kac-Moody relatives et indécomposables (M. R. I.).	
Classification	46
Coracines	50

2.2	Systèmes de racines à bases libres	52
	Généralités	52
	Résultat d'unicité	55
2.3	Construction d'un système de racines à base libre	57
	Premiers résultats d'inclusion ; le candidat Θ	57
	Premières propriétés du candidat Θ	57
	Les conditions de chaînes réelles	58
	Les conditions de chaînes imaginaires	61
2.4	Existence des systèmes de racines	62
3	Coracines des racines imaginaires dans le cas libre	67
3.1	Notion de cônes radiciels duaux	67
	Définitions et résultats utiles	67
	Propriétés des éléments de K_c	68
	Le cône radiciel dual associé : cas « standard »	69
	Définition des cônes duaux : cas général	72
3.2	Coracines	73
	Propriétés des cônes duaux	73
	Choix d'une coracine	74
	Application à l'étude du système de racines	76
4	Systèmes générateurs de racines et systèmes de racines engendrés	79
4.1	Systèmes générateurs de racines, définitions	79
	Définitions	79
	Morphismes de S.G.R. et extension des scalaires	83
	Changement de corps (de base)	84
	Le groupe de Weyl et les racines réelles	85
	Chaînes et système de racines engendré	85
4.2	Revêtement	86
	Définition	86
	Groupe de Weyl et racines réelles, lien avec le revêtement	89
	Systèmes de racines	92
4.3	Structure du système de racines $\Delta(S)$	98
	Les sous-systèmes $\Delta(J)$ avec $J \subset I$ (cas « standard »)	98
	Les coracines	99
	Système générateur de racines normalisé	102
4.4	Géométrie d'un S.G.R.	109

Généralités	110
Les facettes	111
Hypothèses supplémentaires, cône de Tits	113
Murs et cloisons	116
Extension des résultats du second chapitre	118
5 Sous-systèmes et Théorème de conjugaison des bases	127
5.1 Notion de sous-systèmes	128
Définition	128
Coracines et groupe de Weyl	129
Géométrie d'un sous-système	130
Propriétés de Ω^{re} si Ω est un sous-système	134
Base de Ω	135
Invariance des conditions sur les S.G.R.	139
5.2 Théorème de conjugaison des bases	141
L'hypothèse de rang fini	141
Notion de base	142
Bases réelles	145
Bases	147
6 Quotients d'un système générateur de racines	151
6.1 Quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme	152
Automorphismes de diagramme	152
Action d'un groupe fini d'automorphismes de diagramme	153
Propriétés de $\bar{\Delta}$, conditions de chaînes	158
Le système générateur de racines S_{Γ}	159
Invariance des différentes conditions sur les S.G.R.	162
6.2 Quotient par une partie de type fini	164
Hypothèses	164
Les racines restreintes	165
Coracines	167
Propriétés de Δ^1	170
Le système générateur de racines S^1	172
Invariance des conditions sur les S.G.R.	174
Généralisation	175
Bibliographie	177

A	Index des notations et des définitions	179
A.1	Dans tout le document	179
	Notations	179
	Définitions	180
A.2	Chapitre 1	182
	Notations	182
	Définitions	182
A.3	Chapitre 2	182
	Notations	182
A.4	Chapitre 3	182
	Notations	182
	Définitions	182
A.5	Chapitre 4	182
	Notations	182
	Définitions	183
A.6	Chapitre 5	183
	Notations	183
	Définitions	183
A.7	Chapitre 6	183
	Notations	183
	Définitions	184
B	Index des définitions et axiomes	185
C	Index des propriétés	187

Introduction

Quelques exemples de systèmes de racines

1. Vers 1890, dans leur étude de la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, Killing et Cartan utilisent de façon essentielle certaines formes linéaires (sur une « sous-algèbre de Cartan » \mathfrak{h} d'une telle algèbre \mathfrak{g}) qu'ils nomment « racines » (parce qu'elles apparaissent comme les racines de $\det(\text{ad}_{\mathfrak{g}}x - \alpha \text{Id}_{\mathfrak{g}})$ considérées comme des fonctions de $x \in \mathfrak{h}$).

La classification des algèbres de Lie semi-simples complexes se ramène à celle des « systèmes de racines associés » qui elle-même se réduit à la détermination de certaines matrices à coefficients entiers (matrices de Cartan). Les systèmes de racines considérés pour cela sont dits ici de type fini et réduits.

La présentation de Serre, par générateurs et relations, permet de retrouver, à partir d'une matrice de Cartan, l'algèbre de Lie semi-simple complexe correspondante.

L'étude des systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples réelles a fait apparaître les systèmes de racines de type fini non réduits, c'est-à-dire dans lesquels pour certaines racines α , l'élément 2α est encore une racine.

Kac et Moody introduisent indépendamment en 1968 de nouvelles algèbres, dites à présent de Kac-Moody, qui constituent une généralisation des algèbres semi-simples en dimension infinie ; pour l'étude de ces algèbres va apparaître une nouvelle notion de racine : les racines imaginaires.

La construction de l'algèbre de Kac-Moody (cf. [K]) est une généralisation de la construction de Serre à partir des générateurs de Chevalley et d'une matrice de Cartan.

Soit à présent $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ une matrice de Cartan généralisée (on dira ici de

Kac-Moody) c'est-à-dire que I est un ensemble fini non vide et que l'on a :

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z}, & \forall (i, j) \in I^2 ; \\ a_{ii} = 2, & \forall i \in I ; \\ a_{ij} \leq 0, & \forall i \neq j ; \\ a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0, & \forall (i, j) \in I^2. \end{cases}$$

Considérons alors une réalisation R , c'est-à-dire un espace vectoriel \mathfrak{h} sur un corps \bar{k} (algébriquement clos), deux familles $\Pi^\vee := (\alpha_i^\vee)_{i \in I}$ dans \mathfrak{h} et $\Pi := (\alpha_i)_{i \in I}$ dans \mathfrak{h}^* (le dual de \mathfrak{h}) et telles que $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = a_{ji}$ pour tous i et j dans I . Pour simplifier les énoncés qui suivent, on suppose la réalisation libre, c'est-à-dire Π et Π^\vee libres dans \mathfrak{h}^* et \mathfrak{h} .

Considérons $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ l'algèbre définie par les générateurs $\{\mathfrak{h}, e_i, f_i ; (i \in I)\}$ et les relations :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0, & \forall (h, h') \in \mathfrak{h}^2 ; \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I ; \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I ; \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee, & \forall (i, j) \in I^2 \end{cases}$$

et le quotient de cette algèbre par le plus grand des idéaux \mathfrak{S} tels que $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$; nous obtenons ainsi l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$.

La sous-algèbre \mathfrak{h} de $\tilde{\mathfrak{g}}$ s'injecte dans $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(A)$ et agit de façon $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisable (elle est en fait la sous-algèbre maximale pour cette propriété) d'où la décomposition de \mathfrak{g} suivant les sous-espaces propres de $\text{ad}(\mathfrak{h})$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha \text{ où } Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i.$$

De plus, chaque sous-espace radiciel \mathfrak{g}_α (pour $\alpha \neq 0$) est de dimension finie. Le système de racines est alors :

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in Q \setminus \{0\} ; \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}.$$

Il vérifie $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ où $\Delta_+ := \Delta \cap \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{N} \alpha_i \right) = -\Delta_-$.

Dans cette étude, la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules permet de constater que pour tout $i \in I$, il existe une involution r_i du système de racines. On peut encore considérer r_i comme une réflexion sur \mathfrak{h} et donc définir, comme dans le cas classique, le groupe de Weyl W engendré par ces réflexions ; $((W, (r_i)_{i \in I})$ est encore un système de Coxeter). Mais dans ce cas, si on note $\Delta^{\text{re}} := W\Pi$, alors on a seulement $\Delta^{\text{re}} \subset \Delta$ et l'égalité n'est vraie que si l'algèbre considérée est en fait une algèbre semi-simple (donc de

dimension finie). Les racines de $\Delta \setminus \Delta^{\text{re}}$ sont alors dites « imaginaires » et on note $\Delta^{\text{im}} = \Delta \setminus \Delta^{\text{re}}$. Si $\mathfrak{g}(A)$ n'est pas semi-simple (i.e. si A n'est pas de type fini) alors Δ^{re} et Δ^{im} sont infinis ([K ; 5.6]).

2. Considérons à présent une autre situation (développée dans [B₃R]), conduisant à des systèmes de racines. Dans la suite, k est un corps de caractéristique 0 et \bar{k} désigne la clôture algébrique de k .

Une algèbre de Lie \mathfrak{g}_k est une k -forme de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ définie sur \bar{k} si et seulement si les deux algèbres $\mathfrak{g}(A)$ et $\mathfrak{g}_k \otimes_k \bar{k}$ sont isomorphes ; on peut alors considérer (en fixant un tel isomorphisme), l'action k -linéaire du groupe de Galois Γ de l'extension $[\bar{k}, k]$ sur $\mathfrak{g}(A)$.

Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}(A)$ sont les sous-algèbres $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -diagonalisables maximales ; elles sont toutes conjuguées à \mathfrak{h} par un automorphisme intérieur. De plus, il existe des sous-algèbres de Cartan définies sur k .

Les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}(A)$ sont les sous-algèbres complètement résolubles maximales (cf. [PK]) ; les deux sous-algèbres de Borel standards étant $\mathfrak{b}^{\varepsilon} := \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\varepsilon}} \mathfrak{g}_{\alpha})$ où $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Dans le cas où A est « indécomposable » (1.1), et si l'algèbre $\mathfrak{g}(A)$ n'est pas de dimension finie, elle admet deux classes de sous-algèbres de Borel non conjuguées par automorphisme intérieur (chacune contenant une sous-algèbre de Borel standard).

Les sous-algèbres paraboliques sont les sous-algèbres de $\mathfrak{g}(A)$ conjuguées par un automorphisme intérieur à une sous-algèbre $\mathfrak{p}^{\varepsilon}(J) := \mathfrak{b}^{\varepsilon} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta_{-\varepsilon}(J)} \mathfrak{g}_{\alpha})$ où $\Delta_{\varepsilon}(J) := \Delta \cap \bigoplus_{i \in J} \mathbb{N}(\varepsilon \alpha_i)$ (dite parabolique standard de type J pour $J \subset I$).

Une sous-algèbre \mathfrak{s}_k de \mathfrak{g}_k est une sous-algèbre de Cartan (resp. de Borel, resp. parabolique) si la sous-algèbre $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_k \otimes_k \bar{k}$ est une sous-algèbre de Cartan (resp. de Borel, resp. parabolique) dans $\mathfrak{g}(A)$ (qui est donc définie sur k). Dans la suite, on suppose A indécomposable et $\mathfrak{g}(A)$ de dimension infinie.

Si \mathfrak{g}_k est une k -forme de $\mathfrak{g}(A)$, deux cas sont possibles :

- l'action du groupe Γ préserve chaque classe de conjugaison de sous-algèbres de Borel (ou, ce qui est encore équivalent, il existe une sous-algèbre parabolique propre définie sur k) ; dans ce cas la k -forme est dite *presque-déployée* ;
- l'action du groupe échange les deux classes de sous-algèbres de Borel ; la k -forme est alors dite *presque-anisotrope*.

Dans le cas presque-déployé, il existe une sous-algèbre torique déployée maximale \mathfrak{t}_k de \mathfrak{g}_k (c'est-à-dire diagonalisable pour l'action adjointe dans \mathfrak{g}_k et maximale pour cette propriété), une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_k de \mathfrak{g}_k , une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}^{\varepsilon}$ de $\mathfrak{g}(A)$ et une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^{\varepsilon}$ de $\mathfrak{g}(A)$ définie sur k minimale et contenant \mathfrak{t}_k telles que :

$$(*) \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^{\varepsilon} \subset \mathfrak{p}^{\varepsilon}$$

où l'on note de façon générale $X := X_k \otimes_k \bar{k}$.

Si G est le groupe associé à l'algèbre $\mathfrak{g}(A)$ (cf. [PK]), le groupe Γ agit sur G et on note G_k l'ensemble des points fixes sous cette action. Alors, G_k agit transitivement sur les paires $(t_k, \mathfrak{p}_k^\varepsilon)$ du type précédent.

Dans une telle situation, \mathfrak{p}^ε est forcément de type fini, c'est-à-dire que l'algèbre \mathfrak{l} dérivée du Levi de \mathfrak{p}^ε (i.e. du centralisateur de \mathfrak{t}), est une sous-algèbre semi-simple. En particulier, le groupe de Weyl $W(\mathfrak{l})$ est fini et agit transitivement sur les sous-algèbres de Borel satisfaisant à (*).

Considérons alors $\gamma \in \Gamma$, il est clair que $\gamma(\mathfrak{b}^\varepsilon)$ satisfait encore à (*); il existe donc un élément w_γ de $W(\mathfrak{l})$ tel que $\gamma w_\gamma(\mathfrak{b}^\varepsilon) = \mathfrak{b}^\varepsilon$; en posant $\gamma^* := \gamma \circ w_\gamma$ pour tout γ , on définit une action de Γ sur la base Π (dite action étoile) correspondant à \mathfrak{b}^ε , donc Γ agit sur le diagramme de Dynkin comme un groupe d'« automorphismes de diagramme » (6.1).

Dans le cas quasi-déployé (où \mathfrak{b}^ε est définie sur k), on a $\gamma^* = \gamma$ pour tout γ .

Toujours avec les notations précédentes, pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on considère α' sa restriction à la sous-algèbre \mathfrak{t} . Le système de racines relatives est alors l'ensemble $\Delta' := \{\alpha' \neq 0; \alpha \in \Delta\}$.

L'étude abstraite de Δ' se fait grâce à des quotients de Δ , le premier correspondant à la recherche du système de racines de la forme quasi-déployée (qui existe toujours) et le second à l'action du groupe de Weyl de \mathfrak{l} (ces études abstraites sont développées ici au chapitre 6). Dans le système de racines relatif de ces formes presque-déployées, une racine réelle peut admettre un double et il existe des racines imaginaires, mais l'aspect nouveau est que, dans ce cadre d'étude, il existe des racines imaginaires simples (i.e. situées dans la base).

Considérons en effet l'exemple suivant : la matrice de Cartan généralisée $A = (a_{ij})$ où $1 \leq i \leq 11$ et $1 \leq j \leq 11$ est définie par $a_{5,10} = a_{10,5} = a_{5,11} = a_{11,5} = -1$, $a_{i,i+1} = -1$ si $i \notin \{9, 11\}$, $a_{i,i-1} = -1$ si $i \notin \{10, 1\}$ et les autres coefficients nuls, alors il existe (d'après les résultats de Ben Messaoud [B₃R]) une \mathbb{R} -forme presque-déployée de l'algèbre de Kac-Moody complexe $\mathfrak{g}(A)$ pour laquelle $\Gamma.1 = \{1, 9\}$, $\Gamma.10 = \{10, 11\}$ et où \mathfrak{l} désigne la sous-algèbre engendrée par les e_i et f_i pour $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Alors $\Delta' = \Delta'^{\text{re}} \cup \Delta'^{\text{im}}$ avec $\Delta'^{\text{re}} = \{\pm\alpha'_1, \pm 2\alpha'_1\}$ et $\Delta'^{\text{im}} = \{\pm(m\alpha'_1 + p\alpha'_{10}); p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq m \leq 2p\}$ en particulier, $\mathbb{N}^*\alpha'_{10} \subset \Delta'$ donc α'_{10} est une racine simple imaginaire.

Néanmoins, dans le cas des k -formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody construites à partir d'une réalisation libre de A , les bases des systèmes de racines relatifs sont encore libres et il est aussi à noter que dans le cas d'une racine simple imaginaire, tout multiple entier de cette racine est encore une racine.

3. Parallèlement, Borchers étudie dans [Bo], les algèbres de Kac-Moody généralisées

(que nous nommerons ici algèbres de Kac-Moody-Borcherds). Il considère une matrice de « Cartan généralisée » (dite ici de Borcherds normalisée), c'est-à-dire vérifiant seulement :

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{R}, & \forall (i, j) \in I^2 ; \\ a_{ii} \in \{2\} \cup \mathbb{R}_-, & \forall i \in I ; \\ a_{ij} \in \mathbb{Z}, & \text{si } a_{ii} > 0 ; \\ a_{ij} \leq 0, & \forall i \neq j ; \\ a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0, & \forall (i, j) \in I^2. \end{cases}$$

On note I_{re} (resp. I_{im}) l'ensemble des $i \in I$ tels que $a_{ii} > 0$ (resp. ≤ 0).

Il construit alors par le même procédé de générateurs et relations que Kac et Moody, mais sans supposer que la réalisation est libre (voir aussi 1.2), une algèbre dont le système de racines admet des racines imaginaires dans la base (les α_i pour $i \in I_{im}$). Cependant, au moins dans le cas où la réalisation est libre, il est clair qu'aucun multiple d'une telle racine n'est une racine.

Si $\alpha \in \Delta_+$, si α_i est une racine simple imaginaire et si $\alpha + \alpha_i$ a un support connexe, alors $\alpha + \mathbb{N}\alpha_i \subset \Delta$. Les racines imaginaires simples peuvent alors (dans le cas où A est indécomposable) être caractérisées par cette propriété puisque les chaînes $(\alpha + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta$ sont bornées si α_i est réelle.

Dans le cas symétrisable où il se place, Borcherds obtient des résultats analogues à ceux précédemment obtenus pour les algèbres de Kac-Moody (caractérisation de $\mathfrak{g}(A)$ par les relations de Serre et lien entre la nature d'une racine α et le signe de (α, α) , (voir aussi [K ; 11.13]). Si A n'est pas de type fini, l'ensemble Δ^{im} (donc Δ) est infini ; par contre Δ^{re} peut être fini.

Vers une axiomatisation

Rappelons les axiomatiques connues de différents cas particuliers de systèmes de racines.

1. Une présentation axiomatique des systèmes de racines de type fini non réduits est exposée dans [Bbki ; Lie chap. 6].
2. Dans le cadre des algèbres de Kac-Moody, le système de racines est encore assez bien connu ([K ; chap.5]). Les racines imaginaires qui interviennent peuvent, dans ce cas, être caractérisées par le fait que si α est une telle racine, $n\alpha$ est encore une racine pour tout n entier non nul alors que les racines réelles ne sont pas multipliables.

Dans le cas où la matrice est de plus « symétrisable » (cf. [K ; 2.1 et 11.13.1]), \mathfrak{g} est exactement le quotient de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par l'idéal engendré par les premiers

membres des relations de Serre (toujours vérifiées par les générateurs de Chevalley). Dans ce cas particulier, il est possible d'introduire une forme bilinéaire symétrique (qui généralise la forme de Killing) et la caractérisation de la nature des racines est alors facile :

$$\alpha \in \Delta^{\text{re}} \iff (\alpha, \alpha) > 0 ;$$

$$\alpha \in \Delta^{\text{im}} \iff (\alpha, \alpha) \leq 0.$$

3. Enfin, Moody et Pianzola, dans [MP], développent une étude plus axiomatique des systèmes de racines (ou plus exactement des ensembles des racines réelles des systèmes de racines) et montrent la nécessité de ne pas se restreindre au cas où la base du système est libre car cette propriété ne peut pas être stable par passage aux sous-systèmes.
4. L'idée était donc de trouver une axiomatique englobant tous les systèmes de racines précédents et donc, en particulier, compatible au passage aux sous-systèmes en un sens bien sûr à définir mais devant être compatible à la notion de Moody et Pianzola (c'est-à-dire stable sous les réflexions par rapport aux racines réelles qu'il contient) mais aussi à la notion de système clos (et si possible moins exigeant). En effet, en complétant comme Moody et Pianzola, un système de racines réelles avec des racines imaginaires, on voudrait trouver effectivement un système de racines.

Il faut donc considérer, dans les études précédentes, des cas où la base n'est pas libre (réalisation quelconque d'une matrice (1.1.4)) et ceci nous conduit bien sûr (dans les passages aux quotients qui traduisent, de façon abstraite, l'étude des systèmes de racines relatifs) à devoir considérer pour les racines imaginaires des ensembles quelconques de multiples.

Dans le cas des racines réelles, on doit aussi admettre éventuellement certains doubles des racines simples. Pour cela, la matrice sera supposée de Borchers relative (2.1) (admettant pour coefficient $a_{ii} = 1$ si α_i est réelle et si $2\alpha_i$ est une racine).

Dans le cas imaginaire, il ne devrait y avoir a priori pas de restriction, cependant, pour pouvoir utiliser des méthodes de récurrence, on a dû imposer aux sous-ensembles N_i de \mathbb{Q} (tels que $\mathbb{Q}_+ \alpha_i \cap \Delta = N_i \alpha_i$ dans le cas libre, et dans le cas général, tels que le système de racines est engendré par $\bigcup_{i \in I} N_i \alpha_i$) de ne pas admettre 0 pour borne inférieure (2.2). La condition supplémentaire $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ si $j \in I_{\text{re}}$ implique $2N_i a_{ji} / a_{jj} \subset \mathbb{Z}$ permettant ainsi de pouvoir définir une bonne notion de chaînes (cf. (SR3b) de (2.2)).

Cette axiomatique est donc développée ici et les définitions essentielles en sont données au chapitre 4, elle englobe presque toutes les notions de systèmes de racines précédemment définies (mais non celle développée par J.-Y. Hée pour les groupes

de Kac-Moody-Ree qu'il construit ([Hée 2]) ni celle des systèmes correspondant aux sous-algèbres de Slodowy [Sl]).

Résumé des résultats du mémoire

1. Le chapitre 1 est consacré aux résultats déjà connus concernant les racines dites réelles (essentiellement obtenus grâce à [Hée 1]) et à l'étude détaillée des systèmes de racines des algèbres de Kac-Moody-Borcherds (intéressant en tant qu'exemple introductif à la notion et illustrant certaines propriétés des racines imaginaires, ce système de racines « concret » permet également d'introduire la plupart des notations utilisées dans ce mémoire).

La classification en trois types pour le cas I fini, des matrices indécomposables, obtenue par Vinberg dans le cas réel, est généralisée aux matrices de Borcherds à coefficients dans un corps \mathbb{K} totalement ordonné quelconque (1.1). Une classification plus précise pour les types qui s'y prêtent est donnée dans un cadre plus général en (2.1).

Les résultats de J.-Y. Hée (utilisés en 1.1) portent en fait sur « des bases de racines » sur des anneaux plus généraux que \mathbb{Z} . Ses résultats nous sont très utiles pour l'étude des racines réelles (en particulier 1.1.8 et 1.1.9) et la plupart des propriétés énoncées dans ces paragraphes en découlent très facilement.

La définition de l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds a été légèrement modifiée pour permettre de se ramener au cas où $\{i \in I ; \alpha_i^\wedge = 0\} = \emptyset$ (cf. 1.2.3).

Le système de racines « universel » (à base libre) $\tilde{\Omega}$ est obtenu grâce à la graduation de l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds par le \mathbb{Z} -module libre $\tilde{Q} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$. Celle-ci est obtenue en imposant au générateur e_i (resp. f_i) d'être de degré α_i (resp. $-\alpha_i$) pour chaque i , et à tout élément de \mathfrak{h} d'être de degré 0. Le \mathbb{Z} -module libre \tilde{Q} (et donc le système de racines à base libre) n'est inclus dans \mathfrak{h}^* que dans le cas d'une réalisation « à base Π libre ». La proposition (1.2.13) décrit les propriétés qui sont en fait caractéristiques de cet ensemble (cf. 2.2) et qui (si on note $\tilde{Q}_+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$, et $\tilde{Q}_- = -\tilde{Q}_+$) sont :

$$(SR1) \quad \tilde{\Omega} \subset \tilde{Q} ; \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_+ \sqcup -\tilde{\Omega}_+ \text{ où } \tilde{\Omega}_+ = \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+ ;$$

$$(SR2) \quad \forall i \in I, \mathbb{Q}_+\alpha_i \cap \tilde{\Omega} = \{\alpha_i\} ;$$

$$(SR3) \quad \forall i \in I_{re}, \forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i, \{\alpha + n\alpha_i, n \in \mathbb{Z}\} \cap \tilde{\Omega} = [\alpha - p\alpha_i, \dots, \alpha + q\alpha_i] \subset \tilde{\Omega}_+ \\ \text{où } p \text{ et } q \text{ sont dans } \mathbb{N} \text{ et vérifient } p - q = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle ;$$

$$(SR4) \quad \forall i \in I_{im}, \forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i,$$

$$(a) \quad \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0 \iff \alpha + \mathbb{N}\alpha_i \subset \tilde{\Omega}_+ ;$$

$$(b) \quad \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \implies \alpha + \alpha_i \notin \tilde{\Omega}_+ ;$$

(SR5) $\forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$, il existe $i \in I$ tel que : $\alpha - \alpha_i \in \tilde{\Omega}$.

(les axiomes (SR3) et (SR4) sont appelés propriétés de chaînes).

Le corollaire (1.2.16) traduit les conséquences de cette structure pour le système des poids de la représentation de \mathfrak{h} dans \mathfrak{g} (c'est-à-dire pour l'image Ω dans \mathfrak{h}^* de $\tilde{\Omega} \subset \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$).

2. Les chapitres 2 et 4 ont pour but d'axiomatiser cette notion de systèmes à base libre (2.2) ou non (4.1) sous certaines hypothèses sur la réalisation.

Toute cette théorie est faite dans des \mathbf{K} -modules libres (pour $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$ ou un corps de caractéristique nulle) et pour pouvoir envisager de faire de la géométrie de chambres (dans un espace vectoriel sur \mathbb{R}), on suppose que les coefficients de la matrice sont des rationnels.

Nous construisons au chapitre 2, un système de racines à base libre de façon axiomatique, en introduisant la possibilité d'admettre des multiples d'éléments de la base.

Plus précisément, on considère une matrice $(a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ et des ensembles $N_i \subset \mathbb{Q}_+^*$ pour $i \in I$ tels que :

- $(a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$ est de Borchers relative (cf. 2.1) c'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes des matrices de Borchers normalisées si ce n'est que $a_{ii} \in \{1, 2\} \cup \mathbb{R}_-$ pour tout $i \in I$;
- $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{\text{re}}$ c'est-à-dire quand $a_{jj} > 0$, pour tout $i \in I$. (On verra au chapitre 4 que l'on peut parfois supposer seulement que pour tout $i \in I$, on a $2N_i a_{ji}/a_{jj} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{\text{re}}$ et $a_{ji} \neq -1/2$ si $a_{jj} = 1$.)
- 0 n'est pas adhérent à N_i (une hypothèse de normalisation supplémentaire est donnée en 2.2).
- Si i est réel (i.e. $a_{ii} > 0$), on a $N_i = \{1\}$ si $a_{ii} = 2$ (on note alors $i \in I_1$) et $N_i = \{1, 2\}$ si $a_{ii} = 1$ (on note alors $i \in I_2$).

On considère alors les espaces vectoriels $Q_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \alpha_i$ et $Q_{\mathbb{Q}}^{\wedge} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \alpha_i^{\wedge}$ qui sont en dualité par $\langle \alpha_j, \alpha_i^{\wedge} \rangle = a_{ij}$, et le système de racines à base libre $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ associé à A et aux N_i est défini comme un sous-ensemble Δ de $Q_{\mathbb{Q}}$ (2.2) vérifiant les axiomes SR1b, SR3b, SR4b et SR5b (analogues aux axiomes SR1, SR3, SR4 et SR5 ci-dessus) ainsi que :

(SR2b) $\forall i \in I ; \mathbb{Q}_+ \alpha_i \cap \Delta = N_i \alpha_i$.

Le système de racines $\tilde{\Omega}$ obtenu précédemment est donc un exemple correspondant au cas où $N_i = \{1\}$ pour tout i .

Si α_i est une racine simple réelle, sa coracine est $\alpha_i^{\vee} = \alpha_i^{\wedge}$ si $a_{ii} \neq 1$. Si $a_{ii} = 1$, alors α_i^{\wedge} est la coracine de $2\alpha_i$ et la coracine de α_i est $\alpha_i^{\vee} = 2\alpha_i^{\wedge}$.

Aux racines réelles (c'est-à-dire conjuguées sous l'action du groupe de Weyl W à un élément de $N_i\alpha_i$ pour i réel) sont naturellement associées des coracines comme dans le cas classique (1.1.9 et 2.1) et les résultats usuels, comme l'égalité des supports de la racine et de la coracine, sont encore vérifiés dans ce cadre abstrait (le support de $\alpha = \sum n_i\alpha_i$ ou de $\alpha^\vee = \sum n_i\alpha_i^\vee$ est l'ensemble des $i \in I$ tels que $n_i \neq 0$). Il faut bien sûr déterminer et établir les propriétés nécessaires à la suite, et la principale difficulté est la non-existence (a priori) d'une algèbre admettant un tel ensemble pour système de racines. Nous avons donc généralisé un résultat déjà établi pour les systèmes de racines des algèbres de Kac-Moody, à savoir une caractérisation de ces systèmes par des propriétés abstraites pour établir les conditions à imposer et, sous l'hypothèse d'existence, l'unicité d'un tel système (2.2.2) (ainsi que sa minimalité « pour les conditions de chaînes »). C'est enfin par sa construction explicite (2.3) que nous en démontrons l'existence. Le système de racines peut alors être décrit par :

$$\Delta = W(\{\alpha_i ; i \in I_{\text{re}}\}) \sqcup W(\{2\alpha_i ; i \in I_2\}) \sqcup \pm W\left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i\right) \sqcup \pm W(K')$$

où $K' = \{\alpha \in \bigoplus_{j \in I} M_j\alpha_j \setminus \sqcup_{i \in I} \mathbb{Q}_+\alpha_i ; S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I_{\text{re}})\}$ et où M_j est le plus petit sous-ensemble de \mathbb{Q} stable pour l'addition et contenant 0 et N_i .

3. Au chapitre 3, nous introduisons une notion de coracines pour les racines imaginaires, dans le but de généraliser les résultats obtenus dans le cas symétrisable pour les algèbres de Kac-Moody grâce à la forme bilinéaire et en particulier :

$$\begin{aligned} (\alpha, \alpha) \leq 0 &\iff \alpha \in \Delta^{\text{im}} ; \\ \alpha \in \Delta_+, \beta \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\alpha, (\alpha, \beta) < 0 &\implies \alpha + \beta \in \Delta. \end{aligned}$$

Nous décrivons alors les différents choix possibles pour les coracines. Cette notion est définie de façon compatible à l'action du groupe de Weyl ; c'est-à-dire que la coracine de $w(\alpha)$ est l'image par w de la coracine de α . Seul le choix de la coracine d'une racine située dans K' est à faire ((3.1.10) et (3.2.5)). Les propositions (3.2.8) et (3.2.9) établissent alors les propriétés attendues.

4. Le chapitre 4 est consacré à l'axiomatique des systèmes générateurs de racines (S.G.R. (4.1) notion analogue aux réalisations), les hypothèses alors nécessaires sont :

- celles déjà décrites sur les ensembles de multiples de racines de la base (nécessaires dès le chapitre 2) ;
- La non nullité de toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs (non tous nuls) des racines de la base.

La définition du système de racines associé est alors fondée sur une construction par récurrence basée sur les propriétés de chaînes. Dans le cas libre, cette construction conduit au système de racines à base libre défini en (2.2). Et la notion de revêtement (4.2) permet de considérer un système de racines d'un S.G.R. quelconque comme la projection d'un système de racines à base libre (de façon analogue au cas du système des poids dans le cas d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds).

Les groupes de Weyl d'un système générateur de racines S et d'un revêtement de S sont isomorphes (4.2.22). En 4.3, on introduit la condition (BN) d'existence d'une fonction « hauteur » permettant à partir d'un S.G.R. d'en définir un normalisé (i.e. vérifiant (SGRN) (4.1)) ayant même système de racines (4.3.8). Cette même hypothèse permet en (4.3.11) de « presque » caractériser les racines réelles. La proposition (4.1.2) établit les conditions sous lesquelles on peut considérer un S.G.R. comme obtenu à partir d'un système générateur sur \mathbb{Q} . Il est à noter que lorsque ceci n'est pas vrai, il est toujours possible de considérer le système comme défini sur \mathbb{Q} .

Si le S.G.R. est défini sur \mathbb{Q} ou sur un autre sous-corps de \mathbb{R} , nous pouvons, par extension de corps, le considérer comme défini sur \mathbb{R} ce qui permet une approche géométrique (basée uniquement sur les racines réelles du système) et qui n'est qu'une petite généralisation des résultats de Moody et Pianzola. Sous l'hypothèse (T) (4.4) vérifiée dans le cadre de l'article de Moody et Pianzola, les résultats classiques concernant le cône de Tits (4.4.9) et l'existence de « suffisamment » de murs (4.4.14) sont établis.

Grâce aux résultats obtenus dans ce 4.4, nous pouvons généraliser un peu la notion de systèmes de racines en supposant seulement que si $i \in I_{\text{re}}$, alors $2N_j a_{ij}/a_{ii} \subset \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$ et que $a_{ij} \neq -1$ pour tout $j \in I$ si $i \in I_2$ (4.4.19).

5. Nous vérifions, au chapitre 5, la stabilité de nos définitions par passage aux sous-systèmes (pour une définition suffisamment large de cette notion). L'objectif initial, qui était de pouvoir considérer comme sous-systèmes des systèmes clos mais aussi des cas tels que A_2 dans G_2 ou B_2 dans BC_2 , a été atteint à l'aide de la définition (5.1). Pour étudier les racines réelles du sous-système et en extraire une base, nous reprenons la méthode utilisée par Moody et Pianzola, basée sur une « géométrie relative ». Cela nécessite comme dans la section 4.4 de supposer vérifiée l'hypothèse (T). En ce qui concerne les racines imaginaires, il est nécessaire de pouvoir affirmer que l'intersection du sous-système Ω et de la demi-droite rationnelle passant par une racine devant être dans la base n'admet pas 0 pour point d'accumulation. Pour cela, l'hypothèse (B) (5.1.14) est supposée vérifiée. Sous ces hypothèses, il est possible de trouver un système générateur de racines qui admet Ω pour système de racines.

La seconde partie du chapitre est consacrée à la démonstration de la conjugaison des bases par $\pm W$ dans le cas indécomposable. L'hypothèse nouvelle imposée dans

ce paragraphe concerne la matrice extraite de la matrice de Borchers obtenue en ne conservant que les lignes et les colonnes qui correspondent à des indices réels : celle-ci doit être de rang fini. L'importance de cette hypothèse est expliquée au (5.2). La notion de base (5.2.1) permet de montrer que, sous l'hypothèse (BN), deux bases d'un même système de racines donnent le même système de racines réelles (5.2.2). Les coracines (dont la définition a été généralisée au cas non libre (4.3)) permettent de définir une notion d'indécomposabilité d'une partie du système de racines et la proposition (5.2.3) fait le lien entre les propriétés d'indécomposabilité du système de racines et celle de la base.

Nous montrons ainsi qu'à une composante du système de racines réelles correspond une composante de l'ensemble des racines réelles d'une base. La proposition (5.2.4) énonce (sous l'hypothèse (T)) un résultat analogue à celui de Moody et Pianzola de conjugaison des bases dans le cas d'une composante indécomposable de Δ^{re} .

En ce qui concerne les racines imaginaires, nous introduisons une relation d'équivalence (5.2.6) pour laquelle, dans le cas indécomposable, il y a exactement deux classes correspondant aux racines imaginaires positives et négatives par rapport à une base. Ceci permet de démontrer la conjugaison des ensembles de racines positives sous $\pm W$ et, sous l'hypothèse (BN), la conjugaison des bases (5.2.9) pour lesquelles les S.G.R. sont normalisés.

6. Enfin, le chapitre 6 est consacré aux passages aux quotients qui correspondent (dans l'étude abstraite) au passage d'un système de racines d'une algèbre de Kac-Moody aux systèmes de racines de k -formes de cette algèbre. Plus exactement, le quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme intervient dans la recherche du système de racines correspondant à une forme quasi-déployée d'une algèbre de Kac-Moody.

Si Γ est ce groupe fini de permutations de I , le système de racines à étudier est :

$$\bar{\Delta} := \{\bar{\alpha} := (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\alpha) ; \alpha \in \Delta\}$$

et sous la condition (B) introduite en 5.1.14, nous montrons l'existence d'un S.G.R. qui admet pour système de racines $\bar{\Delta}$.

Le quotient par une partie de type fini correspond à l'étude du système de racines restreintes au centralisateur de l'algèbre dérivée semi-simple du Levi d'un parabolique dans le cas des algèbres de Kac-Moody. De façon abstraite, on se donne une partie I_0 de I supposée de type fini, c'est-à-dire que le groupe W_0 engendré par les réflexions r_i pour $i \in I_0$ est fini ou que l'ensemble Δ_0 des racines de Δ combinaisons linéaires des α_i pour $i \in I_0$ est fini. Le système de racines à étudier

est alors :

$$\Delta^1 := \{(1/|W_0|) \sum_{w \in W(F)} w(\alpha)/\alpha \in \Delta - \Delta_0\} \subset Q_{\mathbb{Q}}^1$$

et de la même façon l'existence d'un S.G.R. l'admettant pour système de racines est démontrée sous l'hypothèse (B) et deux hypothèses (D) et (E) portant seulement sur I_0 .

Une version simplifiée de ces résultats, suffisante pour l'étude des systèmes de racines relatifs des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody figure déjà dans [B₃R] ; nous y avons également effectué un certain nombre de calculs précis de tels quotients (pour toutes les formes réelles presque-déployées des algèbres affines).

Remerciements

Ce mémoire correspond à une nouvelle thèse préparée à Nancy sous la direction de G. Rousseau à qui je souhaite exprimer ma profonde gratitude. Je remercie également le rapporteur de cet article pour sa lecture attentive de mon travail ainsi que pour ses remarques qui m'ont permis d'en améliorer la rédaction (en particulier pour la section 2.3).

Nicole Bardy

Institut Élie Cartan

U.M.R. 9973

Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I,

B.P. 239

54 506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

France

E-mail : bardy@iecn.u-nancy.fr

1. Système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds

Ce chapitre est un point de départ plutôt concret et heuristique.

- Il est concret parce qu'il décrit un système de racines en termes d'algèbres de Lie (à savoir les algèbres de Borcherds dont on a légèrement modifié la construction).
- Il est heuristique parce qu'une à une, les propriétés caractéristiques des systèmes de racines vont faire leur apparition ; elles deviendront des axiomes dès l'étape suivante (on retrouve le signe constant pour tous les coefficients d'une racine, les propriétés de chaînes ...).

Tout pourrait être montré « à la main » par des calculs de crochets. Pourtant, on a préféré utiliser d'emblée des résultats de J.-Y. Hée qui seront utiles et généralisables tout au long de ce travail : ils sont insérés dans les préliminaires qui occupent la première moitié du chapitre.

Notations générales

Dans tout l'article, \mathbb{K} est un corps totalement ordonné (souvent \mathbb{Q} ou \mathbb{R}), \mathbb{K}_+ (resp. \mathbb{K}_-) désigne l'ensemble des éléments positifs (resp. négatifs) ou nuls de \mathbb{K} et $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Tous les corps considérés dans ce mémoire sont supposés commutatifs.

1.1 Matrice de Borcherds et groupe de Weyl associé

Matrices de Borcherds

Définition 1.1.1 — Une matrice $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$, (I ensemble d'indices fini ou dénombrable) est dite de Borcherds (générale) si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$(B1) \quad a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ pour tout } (i, j) \in I^2 ;$$

$$(B2) \quad a_{ij} \in \mathbb{K}_- \text{ pour tout } (i, j) \in I^2 \text{ tel que } i \neq j ;$$

(B3) si $a_{ii} > 0$, pour tout $j \in I$ on a $\frac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$;

(B4) si $a_{ij} = 0$, alors $a_{ji} = 0$.

Lorsque le coefficient a_{ii} est strictement positif, l'indice i appartient à I_{re} et est dit *réel* ; lorsque a_{ii} est négatif ou nul, i est dit *imaginaire* (on note $i \in I_{\text{im}}$) ; enfin on note $i \in I_0$ si $a_{ii} = 0$.

Remarques et définitions. 1. Les matrices étudiées par Borchers dans [Bo ; 1] sont symétriques et vérifient ces propriétés. La définition adoptée ici est plus proche de celle de Kac [K ; 11.13] : celui-ci suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la matrice normalisée au sens suivant.

2. La matrice sera dite *de Borchers normalisée* si de plus, A vérifie :

(B5) pour tout $i \in I_{\text{re}}$, $a_{ii} = 2$.

On a alors $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, pour $i \in I_{\text{re}}$ et pour tout $j \in I$.

Si A est une matrice de Borchers générale, on lui associe la matrice de Borchers normalisée $B(A) = (a'_{ij})$ où $a'_{ij} = \frac{2a_{ij}}{a_{ii}}$, si $i \in I_{\text{re}}$, et $a'_{ij} = a_{ij}$, si $i \in I_{\text{im}}$.

3. Si I_{im} est vide et si A vérifie (B5), A est une matrice *de Kac-Moody* (ou encore *de Cartan généralisée*) ; sa transposée A^t est alors aussi une matrice de Kac-Moody. Une matrice de Borchers A est dite *symétrisable* (resp. *de Cartan*) s'il existe des coefficients strictement positifs ε_i tels que si on pose $b_{ij} = \varepsilon_i a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est symétrique (resp. symétrique définie positive et A vérifie (B5) avec I fini). Si I_{re} est connexe au sens de 5. ci-dessous (ou si chaque composante connexe de I ne contient qu'une composante de I_{re}), on peut supposer les ε_i pour $i \in I_{\text{re}}$ dans \mathbb{Q}_+^* . Une matrice de Cartan est une matrice de Kac-Moody.

4. Une matrice carrée est dite *décomposable* s'il existe une partition $I = I_1 \sqcup I_2$ de I en deux ensembles non vides, telle que $a_{ij} = a_{ji} = 0$ dès que $i \in I_1$ et $j \in I_2$. Dans le cas contraire et si $I \neq \emptyset$, la matrice est dite *indécomposable*.

Si $J \subset I$ et si $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$, on note $A(J)$ la matrice extraite de A en ne conservant que les lignes et colonnes dont les indices sont dans J ; c'est une matrice de Borchers générale (resp. normalisée) si A en est une.

5. À une matrice de Borchers normalisée A est associé un *diagramme de Dynkin* ainsi construit : à tout $i \in I$, on associe un point, indexé par i , auprès duquel on fait figurer le coefficient a_{ii} si ce dernier est négatif ou nul ; si $a_{ij} \neq 0$, on lie les sommets i et j du diagramme. Plus précisément, si i et j sont deux éléments de I_{re} , on a $a_{ij}a_{ji} \in \mathbb{N}$ et on utilise les conventions de Kac, [K ; 4.7] :

- si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ et $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$, les deux sommets sont liés par $|a_{ij}|$ segments, et ceux-ci sont munis d'une flèche dirigée vers i si $|a_{ij}| > 1$ et d'une flèche dirigée vers j si $|a_{ji}| > 1$;

- si $a_{ij}a_{ji} > 4$ ou si l'un au moins des deux sommets i, j appartient à I_{im} , on les lie par un trait gras au dessus duquel on note $|a_{ij}|$ près de i et $|a_{ji}|$ près de j .

Le diagramme de $A(J)$ se déduit de celui de A en ne conservant que les sommets associés aux éléments i de J et les segments qui les lient (avec leurs ornements). Il est clair qu'une matrice de Borchers normalisée est indécomposable si et seulement si son diagramme de Dynkin est un graphe connexe.

6. En réalité, on pourrait supposer I quelconque mais l'hypothèse I dénombrable permet de traiter toutes les applications intéressantes (cf. [K]) ; et il sera donc important de noter dans ce mémoire la stabilité de cette hypothèse lors des différentes opérations sur les systèmes de racines.

Classification

Comme dans [K ; chap.4] où le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est traité, on peut établir une classification des *matrices de Vinberg* (c'est-à-dire des matrices A vérifiant (B1), (B2) et (B4)), d'ordre fini n et qui, de plus, sont indécomposables. Introduisons comme Kac, la notation : pour $v \in \mathbb{K}^n$, $v \geq 0$ (resp. $v > 0$) si et seulement si toutes ses coordonnées sont positives ou nulles (resp. strictement positives).

Alors, sous les hypothèses précédentes, A et sa transposée A^t (qui est aussi une matrice de Vinberg) sont simultanément et exclusivement dans une des situations suivantes :

(Fin) $\det(A) \neq 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$;

$Av \geq 0$ implique $v > 0$ ou $v = 0$;

A et A^t sont alors dites *de type fini* ;

(Aff) $\det(A) = 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au = 0$;

$Av \geq 0$ implique $Av = 0$;

A et A^t sont alors dites *de type affine* ;

(Ind) Il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$;

$Av \geq 0, v \geq 0$ implique $v = 0$;

A et A^t sont alors dites *de type indéfini*.

En particulier, notons que (Fin), (Aff), (Ind), sont caractérisées par l'existence du vecteur u donné dans cette classification.

Démonstration. Soit $V = \mathbb{K}^m$, la démonstration de Kac repose sur le « lemme fondamental » démontré par Vinberg [V], dans le cas où \mathbb{R} est le corps considéré.

Montrons qu'il est encore valable dans le cas d'un corps totalement ordonné quelconque.

Lemme fondamental 1.1.2 — Si v_1, \dots, v_n sont des éléments de V tels que :

$$(*) \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0 \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K}_+ (\forall i \in \{1 \dots n\}) \implies \lambda_i = 0 (\forall i \in \{1 \dots n\}),$$

alors il existe une forme linéaire définie sur V strictement positive sur les v_i .

Montrons ce résultat par récurrence sur n , pour $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Si $n = 1$, la propriété (*) implique $v_1 \neq 0$ donc l'existence de μ ne pose aucun problème pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $n \geq 2$ et le résultat établi au rang $n - 1$.

Soient alors n vecteurs de V vérifiant l'hypothèse (*), seul le cas où aucun de ces vecteurs n'est nul doit être étudié. Soit $C := \sum_{i=1}^{i=n-1} \mathbb{K}_+ v_i$.

- Si le vecteur v_n est dans le cône C , le résultat est immédiat par hypothèse de récurrence.
- Sinon $v_n \notin C$, ce qui implique $\mathbb{K}_+ v_n \cap C = \{0\}$, de plus par (*), on a nécessairement $\mathbb{K}_- v_n \cap C = \{0\}$; donc $C \cap \mathbb{K} v_n = \{0\}$ et la dimension m est supérieure ou égale à 2.

On considère alors $V' := V/\mathbb{K}v_n$, et on note v'_1, \dots, v'_{n-1} les classes des v_i . Une relation linéaire $\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i v'_i = 0$ à coefficients positifs dans \mathbb{K} , implique : $\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i v_i \in C \cap \mathbb{K}v_n = \{0\}$ et donc par (*) la nullité de tous les λ_i .

Par hypothèse de récurrence, il existe dans V' une forme linéaire μ_1 strictement positive sur chacun des v'_i pour $i \in \{1 \dots n - 1\}$. On note encore $\mu_1 \in V^*$ la forme linéaire sur V nulle sur $\mathbb{K}v_n$, et induisant μ_1 lors du passage au quotient.

Soit $\mu_2 \in V^*$ telle que $\mu_2(v_n) > 0$, et soit $\lambda := \sup_{i \in \{1 \dots n-1\}} \left\{ \frac{-\mu_2(v_i)}{\mu_1(v_i)} + 1 \right\}$ alors $\mu := \lambda \mu_1 + \mu_2$ convient.

La suite de la démonstration est analogue à celle de Vinberg [V] reproduite par Kac [K; 4.3]. □

- Remarques et définitions.*
1. Si l'un des a_{ii} est strictement négatif (resp. négatif ou nul), la matrice est de type indéfini (resp. de type indéfini ou affine). Il est clair en effet que l'existence d'un vecteur tel que ceux caractérisant les cas affines et finis (resp. le cas fini) est alors impossible.
 2. Si A est une matrice de Borchers normalisée indécomposable de type fini (resp. de type affine), c'est une matrice de Cartan (resp. une matrice de Kac-Moody affine usuelle (i.e. *affine réelle*)) ([K; th.4.3]) ou la matrice nulle d'ordre 1 dite *affine imaginaire*.

3. Multiplier une ligne ou une colonne d'une matrice de Vinberg par un scalaire strictement positif ne change pas le type de cette matrice. En particulier, A et sa normalisée $B(A)$ (définie en 1.1.1 Rq. 2) sont de même type. Une matrice de Borchers indécomposable A est encore dite de type affine réel si $B(A)$ l'est.
4. Une matrice de Vinberg indécomposable d'ordre infini A est de type :
 - *profini* : (ou affine infini [K ; 7.11]) si toute sous-matrice principale indécomposable de A d'ordre fini est de type fini ;
 - *proindéfini* : sinon. Dans ce cas, il existe une sous-matrice principale indécomposable de A de type indéfini et toute sous-matrice principale indécomposable d'ordre fini de A contenant une telle sous-matrice est alors de type indéfini.
5. Une matrice de Vinberg d'ordre fini n , décomposable est dite de type :
 - *fini, affine, indéfini* : si chacune de ses composantes est de ce type ;
 - *semi-affine* : si ses composantes sont de type affine ou fini ;
 - *infini* : si ses composantes sont de type affine ou indéfini.

À partir de la classification des matrices de Vinberg indécomposables, on obtient, pour une matrice de Vinberg d'ordre fini n , la caractérisation des trois premiers cas par :

- type fini : il existe dans \mathbb{K}^n un élément $u > 0$ tel que $Au > 0$;
- type affine : il existe dans \mathbb{K}^n un élément $u > 0$ tel que $Au = 0$;
- type indéfini : il existe dans \mathbb{K}^n un élément $u > 0$ tel que $Au < 0$.

6. On indiquera plus loin (2.1), dans un cadre plus général, la classification des matrices de Borchers (normalisées) indécomposables de type fini, affine ou profini.
7. Notons $(\tilde{\alpha}_i)_{i \in I}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{(I)}$. Si $\alpha \in \mathbb{K}^{(I)}$, on définit *le support* S_α de α comme l'ensemble des indices $i \in I$ tels que la composante de α suivant $\tilde{\alpha}_i$ soit non nulle.
8. Si J est une partie de I et si le type de $A(J)$ est défini (ce qui n'est pas toujours vrai dans le cas décomposable), celui-ci sera également *le type de J* . Il est clair qu'un sous-ensemble connexe J de I contenant un $i \in I_{\text{im}}$ est de type indéfini ou éventuellement affine imaginaire si J est réduit à un élément de I_0 .

Enfin, deux parties connexes de I seront dites *liées* si leur réunion est connexe.

Démontrons à présent un résultat valable dans le cas d'une matrice A de Vinberg et qui nous sera très utile dans la suite (en particulier pour définir les coracines des racines imaginaires au chapitre 3).

Proposition 1.1.3 — Soit A une matrice de Vinberg qui n'est pas de type fini.

Soit $\alpha \neq 0$ un élément de $\mathbb{K}^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}\tilde{\alpha}_i$ dont les coordonnées sont positives ou nulles, de support S_α connexe et tel que $A\alpha \leq 0$. Si l'on pose :

$$Z_\alpha = \{i \in S_\alpha / (A\alpha)_i = 0\},$$

où $(A\alpha)_i$ désigne la coordonnée de $A\alpha$ suivant $\tilde{\alpha}_i$, alors seuls les cas suivants sont possibles :

1. $S_\alpha = Z_\alpha$ et est de type affine, $A(S_\alpha)u = 0$ caractérise les multiples de α dans $\bigoplus_{i \in S_\alpha} \mathbb{K}\tilde{\alpha}_i$.
2. Z_α est une partie de I_{re} qui est de type fini (non nécessairement connexe) ou vide, donc strictement incluse dans le support et S_α est de type indéfini.

Démonstration. Considérons α , l'élément précité. D'après la classification des matrices, S_α n'est pas de type fini.

Par définition, $Z_\alpha \subset S_\alpha$.

1. Si $Z_\alpha = S_\alpha$, alors $\alpha \in \bigoplus_{i \in S_\alpha} \mathbb{K}\tilde{\alpha}_i$ et : $(\forall i \in S_\alpha)$, $(\alpha)_i > 0$ et $(A\alpha)_i = 0$.
Par suite, $A(S_\alpha)$ est nécessairement de type affine. Dans ce cas, on sait que le corang de la matrice est 1, d'où le résultat annoncé.
2. Sinon, il existe un élément i de S_α tel que $(A\alpha)_i < 0$.

Supposons alors Z_α non vide (cas où il n'y a rien à montrer). Soit T une composante connexe de Z_α . Par connexité de S_α , il existe $s \in T$ lié à $S_\alpha \setminus Z_\alpha$. Si $\alpha = \sum_{i \in S_\alpha} n_i \tilde{\alpha}_i$, on pose $\beta = \sum_{i \in T} n_i \tilde{\alpha}_i$, on a alors :

$$(A\alpha)_i = 0 = (A(\alpha - \beta) + A\beta)_i \quad (\forall i \in T).$$

Or, $\alpha - \beta$ est un élément strictement positif de $\bigoplus_{i \in (S_\alpha \setminus T)} \mathbb{K}\tilde{\alpha}_i$, on a donc $(A(\alpha - \beta))_i \leq 0$ pour $i \in T$ et même $(A(\alpha - \beta))_s < 0$. Ceci implique $(A\beta)_s = \sum_{i \in T} n_i a_{si} > 0$ et $(A\beta)_i \geq 0$ ($\forall i \in T$).

Par suite, dans $\mathbb{K}^{(T)}$, β est un élément strictement positif, $A(T)\beta \geq 0$ et $A(T)\beta \neq 0$. La matrice $A(T)$ est donc de type fini.

Le support de α est évidemment une partie finie de I et Z_α est bien réunion d'un nombre fini de composantes connexes de type fini. \square

Réalisation d'une matrice A de Borchers sur une extension \mathbf{K} de \mathbb{K}

Définitions 1.1.4 — Soient A une matrice de Borchers à coefficients dans \mathbb{K} et \mathbf{K} une extension de \mathbb{K} .

On appelle réalisation de A sur \mathbf{K} tout quadruplet $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge)$ formé de :

- deux \mathbf{K} -espaces vectoriels $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge$ munis d'une dualité \langle, \rangle , c'est-à-dire d'une forme bilinéaire définie sur $\mathfrak{h}^\wedge \times \mathfrak{h}$ à valeurs dans \mathbf{K} ;
- une famille $\Pi^\wedge = (\alpha_i^\wedge)_{i \in I}$ d'éléments de \mathfrak{h} et une autre $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathfrak{h}^\wedge vérifiant $\langle \alpha_j, \alpha_i^\wedge \rangle = a_{ij}$.

Deux réalisations $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge)$ et $(\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'^\wedge, \Pi', \Pi'^\wedge)$ de A sur \mathbf{K} sont isomorphes s'il existe deux \mathbf{K} -isomorphismes ϕ^\wedge de \mathfrak{h} sur \mathfrak{h}' et ϕ de \mathfrak{h}^\wedge sur \mathfrak{h}'^\wedge tels que $\phi(\Pi) = \Pi'$, $\phi^\wedge(\Pi^\wedge) = \Pi'^\wedge$ et $\langle u, v \rangle = \langle \phi(u), \phi^\wedge(v) \rangle$ pour tout $(u, v) \in \mathfrak{h}^\wedge \times \mathfrak{h}$.

Remarques et définitions. 1. Une réalisation est dite de Kac si, de plus, elle satisfait aux conditions suivantes :

- (a) $|I| = n < \infty$,
- (b) les familles Π et Π^\wedge sont libres,
- (c) si l désigne le rang de A , alors $n - l = \dim \mathfrak{h} - n$,
- (d) $\mathfrak{h}^\wedge = \mathfrak{h}^*$ (le dual de \mathfrak{h}), cf. [K ; 1.1].

2. Si I est fini, il existe une unique réalisation de Kac à isomorphisme (non forcément unique) près (cf. [K ; 1.1]).

3. La dualité \langle, \rangle induit une application φ de \mathfrak{h}^\wedge dans \mathfrak{h}^* ; on note $[\alpha]$ l'image de α par φ . La dualité est dite *non dégénérée* lorsque φ est une injection de \mathfrak{h}^\wedge dans \mathfrak{h}^* .

4. Il existe une réalisation de A , pour laquelle Π et Π^\wedge sont libres, et la dualité non dégénérée.

Démonstration du point 4. On considère l'espace vectoriel de dimension $2|I|$ noté \mathfrak{h} de base des éléments $(\alpha_i^\wedge)_{i \in I}, (\eta_i)_{i \in I}$. Alors, si \mathfrak{h}^\wedge est le dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} et si les formes linéaires α_j sont définies par $\alpha_j(\alpha_i^\wedge) = a_{ij}$ et $\alpha_j(\eta_i) = \delta_{ij}$, la réalisation $R = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, (\alpha_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\wedge)_{i \in I})$ de la matrice $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I}$ satisfait à ces conditions. □

5. Soient \tilde{Q} le \mathbb{Z} -module libre $\tilde{Q} = \mathbb{Z}^{(I)}$ et $(\tilde{\alpha}_i)_{i \in I}$ la base canonique de celui-ci. Introduisons alors $\tilde{Q}_+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N} \tilde{\alpha}_i = \mathbb{N}^{(I)}$ et $\tilde{Q}_- = -\tilde{Q}_+$. Dans \mathfrak{h}^\wedge , on a le \mathbb{Z} -module $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$ et dans $\mathfrak{h}^*, [Q] = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} [\alpha_i]$. Enfin, on note $Q^\wedge = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i^\wedge ; Q_{\mathbf{K}}^\wedge = \sum_{i \in I} \mathbb{K} \alpha_i^\wedge$; (qui sont contenus dans \mathfrak{h}). Pour tous ces ensembles l'ajout de $*$ en exposant signifie que l'on retire 0. De même, l'ajout de \mathbf{K} en indice à $\tilde{Q}, Q, [Q]$ ou Q^\wedge , signifie que l'on remplace dans leurs définitions \mathbb{Z} par \mathbf{K} .

Si Ψ est l'application \mathbb{Z} -linéaire de \tilde{Q} dans Q qui à $\tilde{\alpha}_i$ associe α_i , pour $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}$, $[\tilde{\alpha}]$ désigne $[\Psi(\tilde{\alpha})]$.

Notons que les modules \tilde{Q} et $\tilde{Q}_{\mathbf{K}}$ sont indépendants de la réalisation considérée.

6. Les propriétés éventuelles suivantes de la réalisation seront intéressantes en particulier dans (1.2) et au chapitre 4 :

- (R1) $\sum_i n_i \alpha_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, implique $n_i = 0$ pour tout $i \in I$; la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est alors dite \mathbb{N} -libre ;
- (R2) $\alpha_i^\wedge \neq 0$ pour tout $i \in I$;
- (R3) l'espace \mathfrak{h}^\wedge s'injecte dans \mathfrak{h}^* (i.e. la dualité est non dégénérée) ;
- (R4) la famille Π est une base de \mathfrak{h}^\wedge ;
- (R5) dans \mathfrak{h}^* , $[Q]$ est un \mathbb{Z} -module libre qui admet pour base une famille libre de \mathfrak{h}^* ;
- (R6) la famille $([\alpha_i])_{i \in I}$ est libre dans le \mathbb{Z} -module $[Q]$;
- (R7) la famille Π est libre dans \mathfrak{h}^\wedge , la réalisation est dite libre ;
- (R8) la famille Π^\wedge est libre dans \mathfrak{h} , la réalisation est dite colibre.

7. Si $\alpha \in \tilde{Q}_{\mathbb{K}} = \mathbf{K}^{(I)}$, on définit :

- la support S_α de α comme en 1.1.1 Rq. 7 ;
- la hauteur de α , comme la somme $ht(\alpha)$ des coordonnées de α . Cette dernière notion ne sera importante que lorsque $\alpha \in \tilde{Q}_\pm$.

8. Si $J \subset I$, on pose $\tilde{Q}(J) = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z} \tilde{\alpha}_i = \mathbb{Z}^{(J)}$, et on définit aussi de façon évidente $\tilde{Q}_+(J)$ et $\tilde{Q}_-(J)$. De même, $Q(J)$, $Q^\wedge(J)$, $Q_{\mathbb{K}}(J)$, $Q_{\mathbb{K}}^\wedge(J)$ sont définis comme Q , Q^\wedge , $Q_{\mathbb{K}}$, $Q_{\mathbb{K}}^\wedge$ en remplaçant I par J .

9. On pose $\alpha_i^\vee = \alpha_i^\wedge$ si $i \in I_{\text{im}}$, $\alpha_i^\vee = (2/a_{ii})\alpha_i^\wedge$ si $i \in I_{\text{re}}$ et $\Pi^\vee = (\alpha_i^\vee)_{i \in I}$. Alors, la donnée $R' = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation de la matrice normalisée $B(A)$.

Le groupe de Weyl

Définition 1.1.5 — À une matrice de Borchers normalisée A est associé le groupe de Weyl $\mathbb{W}(A)$ (noté \mathbb{W} lorsqu'il n'y a pas de confusion possible), qui est le groupe de Coxeter défini par générateurs et relations :

$$\mathbb{W} = \langle (R_i)_{i \in I_{\text{re}}} / (R_i R_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ si } m_{ij} < \infty \text{ pour } (i, j) \in I_{\text{re}}^2 \rangle$$

où les coefficients m_{ij} sont donnés par : $m_{ii} = 1$ et si $i \neq j$ on note λ l'entier positif

$a_{ij}a_{ji}$ et l'on a :

$$\begin{aligned} m_{ij} = 2 &\iff \lambda = 0 ; \\ m_{ij} = 3 &\iff \lambda = 1 ; \\ m_{ij} = 4 &\iff \lambda = 2 ; \\ m_{ij} = 6 &\iff \lambda = 3 ; \\ m_{ij} = \infty &\iff \lambda \geq 4. \end{aligned}$$

Le groupe de Weyl est donc caractérisé par le graphe de Coxeter sous-jacent au graphe de Dynkin de $A(I_{re})$ (obtenu en supprimant flèches et nombres et en remplaçant les liaisons doubles munies de deux flèches opposées ou quadruples par des traits gras).

Le groupe \mathbb{W} étant engendré par les R_i pour $i \in I_{re}$, si $w \in \mathbb{W}$, il s'écrit $w = R_{i_1} \dots R_{i_n}$, une telle décomposition est dite de longueur n .

Une décomposition pour laquelle le minimum des longueurs possibles est atteint est réduite. La longueur d'une telle décomposition de $w \in \mathbb{W}$ est appelée longueur de w et est notée $l(w)$.

Soient \mathbf{K} une extension de \mathbb{K} , A une matrice de Borchers normalisée à coefficients dans \mathbb{K} et R une réalisation de A sur \mathbf{K} , on utilise les notations introduites au 1.1. (en particulier ici $\alpha_i^\wedge = \alpha_i^\vee$).

Actions de \mathbb{W} sur \mathfrak{h} , \mathfrak{h}^\wedge et \tilde{Q}

Soient, dans $GL(\mathfrak{h}^\wedge)$, $GL(\mathfrak{h})$ et $GL(\tilde{Q})$ et pour $i \in I_{re}$, les réflexions :

1. $r_i(h) = h - \langle h, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i = h - [h](\alpha_i^\vee) \alpha_i$ ($\forall h \in \mathfrak{h}^\wedge$) ;
2. $r_i^\vee(h) = h - [\alpha_i](h) \alpha_i^\vee$ ($\forall h \in \mathfrak{h}$) ;
3. $\tilde{r}_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ ($\forall \alpha \in \tilde{Q}$) où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne cette fois, la dualité définie entre \tilde{Q} et Q^\wedge par $\langle \tilde{\alpha}_i, \alpha_j^\vee \rangle = a_{ji}$ où $(i, j) \in I^2$.

Calculons d'abord l'ordre de la restriction de $\tilde{r}_i \tilde{r}_j$ à $\mathbb{Z}\tilde{\alpha}_i \oplus \mathbb{Z}\tilde{\alpha}_j$ pour $(i, j) \in I_{re}^2$.

Dans la base $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j)$, la matrice de son action est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 + a_{ij}a_{ji} & a_{ij} \\ -a_{ji} & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique P a donc ses coefficients dans \mathbb{Z} , on le plonge dans $\mathbb{C}[X]$.

Si $\lambda > 4$, alors P n'admet pas de racines réelles donc, 1 et -1 n'étant pas valeurs propres, l'ordre de la restriction, et donc de l'automorphisme $\tilde{r}_i \tilde{r}_j$, est infini.

Si $\lambda = 4$, alors 1 est valeur propre double, la matrice M est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est d'ordre infini.

De même, grâce au calcul des valeurs propres, on a :

- si $\lambda = 3$, l'ordre de la restriction est 6 ;
- si $\lambda = 2$, l'ordre de la restriction est 4 ;
- si $\lambda = 1$, l'ordre de la restriction est 3 ;
- si $\lambda = 0$, l'ordre de la restriction est 2.

Montrons à présent que l'ordre de $\tilde{r}_i \tilde{r}_j$ est toujours égal à l'ordre m_{ij} de sa restriction à $V_{ij} = \mathbb{Z}\tilde{\alpha}_i \oplus \mathbb{Z}\tilde{\alpha}_j$.

On peut supposer que $m_{ij} < \infty$ sans quoi il n'y a rien à démontrer. Par suite, $\lambda \neq 4$ et la sous-matrice $A(\{i, j\}) = \begin{pmatrix} 2 & a_{ij} \\ a_{ji} & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Donc, dans $\tilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K}$ ou \tilde{Q} , l'ordre de $\tilde{r}_i \tilde{r}_j$ est m_{ij} puisque : $\tilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K} = V_{ij} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K} \oplus \{\delta \in \tilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K} / \alpha_i^\vee(\delta) = \alpha_j^\vee(\delta) = 0\}$ (le second facteur de cette décomposition étant fixe par \tilde{r}_i et \tilde{r}_j).

On répète un raisonnement analogue pour l'ordre de $r_i r_j$ dans \mathfrak{h}^\wedge et de $r_i^\vee r_j^\vee$ dans \mathfrak{h} . Si $\lambda \neq 4$, le résultat est le même car alors les parties (α_i, α_j) et $(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)$ sont libres.

Si $\lambda = 4$, l'ordre de $r_i r_j$ (resp. $r_i^\vee r_j^\vee$) est $m_{ij} = \infty$ sauf peut-être si α_i et α_j (resp. α_i^\vee et α_j^\vee) sont colinéaires ce qui, vues les valeurs possibles de a_{ij} et a_{ji} , signifie que quitte à permuter i et j , on a $\alpha_i = -\alpha_j$ ou $\alpha_i = -2\alpha_j$ (resp. $\alpha_i^\vee = -\alpha_j^\vee$ ou $\alpha_i^\vee = -2\alpha_j^\vee$).

Nous définissons donc des actions du groupe de Weyl sur \mathfrak{h}^\wedge (resp. \mathfrak{h} , resp. \tilde{Q}) en considérant les représentations τ (resp. τ^\vee , resp. $\tilde{\tau}$) de \mathbb{W} dans $\text{GL}(\mathfrak{h}^\wedge)$ (resp. $\text{GL}(\mathfrak{h})$, resp. $\text{GL}(\tilde{Q})$), qui à R_i associent r_i (resp. r_i^\vee , resp. \tilde{r}_i). Nous noterons $W := \tau(\mathbb{W})$ (resp. $W^\vee := \tau^\vee(\mathbb{W})$, resp. $\tilde{W} := \tilde{\tau}(\mathbb{W})$). Nous nous permettrons cependant aussi de noter $w.\alpha_i = \tau(w)\alpha_i$, $w.\alpha_i^\vee = \tau^\vee(w)\alpha_i^\vee$ et $w.\tilde{\alpha}_i = \tilde{\tau}(w)\tilde{\alpha}_i$.

Remarques. 1. L'élément r_i^\vee ne stabilise pas nécessairement $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, il faut et il suffit pour cela que la transposée de A soit également une matrice de Borchers, sinon il existe $j \in I_{\text{re}}$ et $i \in I$ tels que $-a_{ij} \notin \mathbb{N}$.

2. Il apparaît immédiatement que $\tilde{Q}(I_{\text{re}})$ est stable sous l'action de \mathbb{W} et que :

$$\begin{aligned} \forall w \in W \quad & (\tau(w) - \text{Id})(\mathfrak{h}^\wedge) \subset Q_{\mathbf{K}}(I_{\text{re}}) ; \\ & (\tau^\vee(w) - \text{Id})(\mathfrak{h}) \subset Q_{\mathbf{K}}^\wedge(I_{\text{re}}) ; \\ & (\tilde{\tau}(w) - \text{Id})(\tilde{Q}) \subset \tilde{Q}(I_{\text{re}}). \end{aligned}$$

3. Si A est une matrice de Borchers (générale) et R une réalisation de A , on leur associe les objets ci-dessus attachés à la matrice normalisée $B(A)$ et à la réalisation R' de 1.1.4 Rq. 9).

Résultats de J.-Y. Hée pour l'action de \mathbb{W} sur $\tilde{Q}(I_{\text{re}})$

La matrice A étant supposée normalisée, $A(I_{\text{re}})$ est à coefficients entiers et le triplet $(\tilde{Q}(I_{\text{re}}), (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I_{\text{re}}}, (R_i)_{i \in I_{\text{re}}})$ est une « base de racines sur \mathbb{Z} » au sens de Hée (cf. [Hée 1 ; n° 2.12a]). On note $\tilde{\Pi}_{\text{re}} = (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I_{\text{re}}}$.

Jean-Yves Hée considère en fait des bases de racines sur des anneaux plus généraux que \mathbb{Z} , par exemple un sous-anneau L de \mathbb{R} . On remplace donc dans les définitions précédentes \mathbb{Z} par L . En particulier, A est une matrice de Vinberg à coefficients dans L telle que $a_{ii} = 2$ pour tout $i \in I$ et dans la définition de \tilde{Q} , l'anneau \mathbb{Z} est remplacé par L .

La condition (B3) est remplacée par une condition portant sur chacun des produits $\lambda = a_{ij}a_{ji}$ pour $i \neq j$: λ vérifie l'une des propriétés suivantes :

- $\lambda = 0$ et alors $m_{ij} = 2$;
- $\lambda \geq 4$ et alors $m_{ij} = \infty$;
- $\exists k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ tel que $\lambda = 4 \cos^2(\pi/k)$ et alors $m_{ij} = k$.

Le nombre m_{ij} apparaissant ci-dessus est l'ordre de $\tilde{r}_i \tilde{r}_j$ et sert à définir le groupe de Weyl \mathbb{W} comme en 1.1.5.

Nous pouvons donc appliquer les résultats de Hée à $(\tilde{Q}(I_{\text{re}}), (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I_{\text{re}}}, (R_i)_{i \in I_{\text{re}}})$.

Au sens de Hée, les racines sont les conjuguées sous l'action du groupe de Weyl des racines simples (i.e. ici, des $\tilde{\alpha}_i$ pour $i \in I_{\text{re}}$) ; dans ce mémoire, ces racines sont dites réelles.

L'un des résultats principaux de Hée [Hée 1 ; n° 2.10 et n° 2.38] est que les conditions indiquées ci-dessus sont nécessaires et suffisantes pour que toute racine (réelle) s'écrive comme une combinaison linéaire à coefficients dans L ($= \mathbb{Z}$ ici) tous positifs ou tous négatifs des racines simples. Autrement dit, si nous notons $\tilde{\Delta}^{\text{re}}$ l'ensemble des racines réelles, $\tilde{\Delta}^{\text{re}} \subset \tilde{Q}(I_{\text{re}})_+ \cup \tilde{Q}(I_{\text{re}})_-$. De nombreux résultats sur le groupe de Weyl et son action sur \tilde{Q} peuvent alors être obtenus grâce à [Hée 1].

Proposition 1.1.6 — Soient $w \in \mathbb{W}$ de longueur l et $w = R_{i_1} \dots R_{i_l}$ une décomposition réduite de w , on a :

- (a) $\tilde{r}_{i_1} \dots \tilde{r}_{i_{l-1}}(\tilde{\alpha}_{i_l}) \in \tilde{Q}_+(I_{\text{re}})$;
- (b) si, comme Hée, on note Φ_w le cône $\{\alpha \in \tilde{Q}_{\mathbb{Q},+} / \tilde{\tau}(w)(\alpha) \in \tilde{Q}_{\mathbb{Q},-}\}$ et si $\tilde{\Delta}_w = \Phi_w \cap \tilde{\Delta}^{\text{re}}$, alors on a : $\tilde{\Delta}_w = \{\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{r}_{i_1}(\tilde{\alpha}_{i_2}), \dots, \tilde{r}_{i_1} \dots \tilde{r}_{i_{l-1}}(\tilde{\alpha}_{i_l})\}$ et $\Phi_w = \mathbb{Q}_+ \tilde{\Delta}_w$; en particulier, $l(w) = \text{Card}(\tilde{\Delta}_w)$;
- (c) l'ensemble des i tels que R_i apparaisse dans une décomposition réduite de w ne dépend pas de la décomposition réduite considérée ;
- (d) si $i \in I_{\text{re}}$, on a :
 - (1) soit $l(wR_i) < l(w) \iff w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_- \iff l(wR_i) = l(w) - 1$;

(2) soit $l(wR_i) > l(w) \iff w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_+ \iff l(wR_i) = l(w+1)$; (l'égalité $l(wR_i) = l(w)$ est impossible);

(e) la représentation $\tilde{\tau}$ est fidèle.

Définition 1.1.7 — On appelle support de w l'ensemble d'indices considéré dans l'assertion (c).

Démonstration. On déduit (a) et (b) de [Hée 1 ; n° 2.9 et n° 2.23], d'ailleurs (a) est classique. Pour (c), on peut se référer au problème des mots dans un système de Coxeter ([Br] ou [Bbki; Lie, chap.4]). Les démonstrations de (d) et (e) sont alors très faciles (voir aussi [Hée 1]) :

(d) Si $w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_-$, alors, d'après (a), $R_{i_1} \dots R_{i_l} R_i$ n'est pas une décomposition réduite de wR_i donc $l(wR_i) < l(w)$ et en fait $l(wR_i) = l(w) - 1$.

Si au contraire $w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_+$, alors $wR_i.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_-$, donc $l(\tilde{\tau}(w)) = l(\tilde{\tau}(wR_i^2)) = l(\tilde{\tau}(wR_i)) - 1$. Le triplet $(\tilde{Q}(I_{re}), (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I_{re}}, (R_i)_{i \in I_{re}})$ étant une « base de racines », $w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_- \setminus \{0\} \sqcup \tilde{Q}_+ \setminus \{0\}$; le reste de l'assertion est alors évident.

(e) Si $w \neq 1$, il existe un indice $i \in I_{re}$ tel que $l(wR_i) < l(w)$ et donc $w(\tilde{\alpha}_i) \in \tilde{Q}_{\mathbb{Q},-}$. Comme $(\forall i \in I_{re}), \mathbb{Q}_+\tilde{\alpha}_i \cap \sum_{j \in I_{re}} \mathbb{Q}_-\tilde{\alpha}_j = \{0\}$, on a donc $w(\tilde{\alpha}_i) \neq \tilde{\alpha}_i$. \square

Remarques. 1. Le (e) de la proposition 1.1.6 nous permet d'identifier \mathbb{W} et son image par $\tilde{\tau}$. Dans la suite, nous noterons donc w l'élément $\tilde{\tau}(w)$.

2. Contrairement à $\tilde{\tau}$, la représentation τ n'est pas toujours fidèle. Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et les espaces $\mathfrak{h} = \mathbf{K}\alpha_1^\vee$ et $\mathfrak{h}^\wedge = \mathfrak{h}^*$. Supposons enfin $\alpha_2^\vee = -\alpha_1^\vee$ et $\alpha_2 = -\alpha_1$, alors $\tau(R_1) = \tau(R_2)$.

Cependant, nous allons établir en 1.1.14 la fidélité de la représentation τ sous l'hypothèse (R1) : la famille Π est \mathbb{N} -libre. Nous utiliserons encore pour cela quelques résultats de [Hée 1] que nous rappelons sans démonstration.

Proposition 1.1.8 ([Hée 1 ; n° 2.17]) — Soient i et j dans I_{re} et w un élément de \mathbb{W} tels que :

$$w.\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_j,$$

alors il existe un entier naturel $n \leq l(w)$, une suite $\{w_h\}_{h \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{W} \setminus \{1\}$, et deux suites $\{i_h\}_{h \leq n+1}, \{j_h\}_{h \leq n}$ dans I_{re} tels que :

- $w = w_n \dots w_1$ avec $l(w) = \sum_{h \leq n} l(w_h)$;
- $i_1 = i, i_{n+1} = j$;
- $w_h.\tilde{\alpha}_{i_h} = \tilde{\alpha}_{i_{h+1}}, i_h \neq j_h, i_{h+1} \in \{i_h, j_h\}, w_h \in \langle R_{i_h}, R_{j_h} \rangle$;
- $m_{i_h, j_h} < \infty$ et $l(w_h) = m_{i_h, j_h} - 1$ avec de plus :
 - si $m_{i_h, j_h} = 2n_h$, on a $i_{h+1} = i_h$ et $w_h = R_{j_h}(R_{i_h} R_{j_h})^{n_h - 1}$;
 - si $m_{i_h, j_h} = 2n_h + 1$, on a $i_{h+1} = j_h$ et $w_h = (R_{i_h} R_{j_h})^{n_h}$.

Remarque. Ce résultat (ou le (b) du lemme suivant) est proche d'un énoncé de Bourbaki [Bbki; Lie n° 4; 1.3 prop. 4] qui porte sur la conjugaison des réflexions fondamentales R_i pour $i \in I_{\text{re}}$.

Lemme 1.1.9 — Soit $w \in \mathbb{W}$, si dans \tilde{Q} , on a $w.\tilde{\alpha}_i = \mu\tilde{\alpha}_j$ avec $(i, j) \in I_{\text{re}}^2$ et $\mu \in \mathbb{N}^*$ alors :

- (a) $\mu = 1$,
- (b) si i et j sont distincts, alors ils peuvent être connectés dans le diagramme de Dynkin par un chemin formé de liaisons simples (i.e. de type A_2) entre des éléments de I_{re} .
- (c) $w(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee$ (dans \mathfrak{h}).

Démonstration. (a) Comme \mathbb{W} stabilise \tilde{Q} et $\tilde{\alpha}_i$ est indivisible dans \tilde{Q} , il est clair que si $w(\tilde{\alpha}_i) = \mu\tilde{\alpha}_j$ avec $\mu \in \mathbb{N}^*$ alors $\mu = 1$.

On peut utiliser la proposition précédente. Dans le cas qui nous intéresse, on sait que les coefficients $m_{i,j}$ sont dans $\{2, 3, 4, 6, \infty\}$; le seul coefficient impair est donc 3 qui correspond à une liaison simple, l'assertion (b) en résulte aussitôt.

Pour l'assertion (c), on est ramené, avec les notations de la proposition précédente à montrer que $w_h.\alpha_{i_h}^\vee = \alpha_{i_{h+1}}^\vee$. On note plus simplement $p = i_h$ et $q = j_h$ ($p \neq q$).

Si $m_{p,q}$ est impair, il vaut 3, on a donc $a_{pq}a_{qp} = 1$ c'est-à-dire $a_{pq} = a_{qp} = -1$. Il est alors clair que $w_h = R_p R_q$ conjugue α_p^\vee et α_q^\vee et dans ce cas $i_{h+1} = q$.

Si $m_{p,q}$ est pair, $m_{p,q} = 2n_h \in \{2, 4, 6\}$, on a $i_h = i_{h+1} = p$ et $w_h = R_q(R_p R_q)^{n_h-1}$ fixe α_p . Il est alors facile de vérifier par le calcul qu'il fixe également α_p^\vee dans les cinq cas qui apparaissent : $(-a_{pq}, -a_{qp}, n_h)$ peut être égal à $(0, 0, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 3, 3)$, ou à $(3, 1, 3)$.

Remarque. Les six cas particuliers que l'on a à examiner correspondent à des sous-systèmes de rang 2 qui sont des systèmes de racines au sens classique. Dans ce cas, il existe une forme bilinéaire invariante qui identifie α_p^\vee à α_p et α_q^\vee à α_q ; les calculs sont donc éventuellement superflus.

□

Nous allons à présent indiquer quelques propriétés des racines réelles qui se déduisent facilement de l'article de J.-Y. Hée, nous vérifierons aux chapitres 2 et 3 qu'elles sont encore vraies pour les racines imaginaires (pour les définitions que nous donnerons des coracines).

Dans le reste de ce paragraphe (i.e. jusqu'à 1.1.13), nous considérons une réalisation $(Q_{\mathbb{Q}}, Q_{\mathbb{Q}}^\wedge, \Pi, \Pi^\vee)$ de A (toujours supposée normalisée) sur \mathbb{Q} qui est libre et colibre (cf. (R7) et (R8)). Alors, Π et Π^\vee sont des bases de $Q_{\mathbb{Q}}$ et $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$ et la dualité entre $Q_{\mathbb{Q}}$ et $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$ est définie par $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = a_{ji}$.

Enfin, notons que $(Q(I_{\text{re}}), \Pi_{\text{re}}, (r_i)_{i \in I_{\text{re}}})$ est une base de racines sur \mathbb{Z} au sens de [Hée 1] et il en est de même de $(Q^\vee(I_{\text{re}}), \Pi_{\text{re}}^\vee, (r_i)_{i \in I_{\text{re}}})$, où $Q^\vee = \bigoplus_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, $\Pi_{\text{re}} = (\alpha_i)_{i \in I_{\text{re}}}$ et $\Pi_{\text{re}}^\vee = (\alpha^\vee)_{\alpha \in \Pi(I_{\text{re}})}$.

Remarque et définition. Il résulte de 1.1.9 que si $j \in I_{\text{re}}$ et $w \in \mathbb{W}$, alors $w.\alpha_j^\vee$ ne dépend que de $\alpha = w.\alpha_j$, on le note α^\vee ; c'est la coracine de α .

Lemme 1.1.10 — *Soit α une racine réelle.*

$$(1) \text{ On a : } \alpha \in Q_+ \iff \alpha^\vee \in Q_+^\vee.$$

(2) Soient $\{i, j\} \subset I_{\text{re}}$ et $w \in W$ tels que $\alpha = w(\alpha_j) \in Q_+$, alors :

$$\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0 \iff \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle < 0$$

$$\text{et } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \iff \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle = 0.$$

Démonstration. (1) La réalisation étant libre et colibre, si on pose $\Delta_w^\vee = \{\alpha^\vee \in \Delta_+^\vee / w.\alpha^\vee \in \Delta_-^\vee\}$ où $\Delta^\vee = \mathbb{W}.\Pi^\vee$, alors 1.1.6 (b) permet d'affirmer que $\Delta_w^\vee = \{\alpha^\vee \in \Delta_+^\vee / \alpha \in \Delta_w\}$. Ainsi pour $j \in I_{\text{re}}$ et $w \in W$, on a : $w.\alpha_j \in Q_+ \iff w.\alpha_j^\vee \in Q_+^\vee$, d'où le résultat annoncé.

(2) D'après [Hée 1 ; n° 2.13], si $\alpha = w(\alpha_j)$, l'élément $r_\alpha = wr_jw^{-1}$ est également bien défini, c'est-à-dire ne dépend pas de la décomposition de α considérée.

On a $r_\alpha(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha^\vee$, avec $\alpha^\vee = w(\alpha_j^\vee)$. La racine réelle α étant positive, elle n'est pas proportionnelle à α_i puisque $i \in I_{\text{re}}$ et $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$. On a donc :

$$\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0 \iff r_\alpha(\alpha_i^\vee) \in Q_+^\wedge \iff r_\alpha(\alpha_i) \in Q_+ \iff \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \leq 0.$$

Il reste à voir que si l'un des deux termes est nul, les deux le sont, mais ceci résulte trivialement du lemme 1.1.9 appliqué à $w = r_\alpha$. \square

L'assertion (2) du lemme précédent se généralise à tout couple de racines réelles :

Lemme 1.1.11 — *Si α et β sont dans $W.\Pi_{\text{re}}$, alors $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ et $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ sont de même signe au sens strict.*

Démonstration. Si $\beta = -\alpha$, on a $\beta = r_\alpha.\alpha$ d'où $\beta^\vee = -\alpha^\vee$. On peut donc supposer α et β non proportionnelles. À conjugaison près, on a $\alpha = \alpha_j$ et en changeant β en $-\beta$, on peut supposer $\beta \in Q_+$. Le résultat se déduit alors du lemme précédent. \square

Lemme 1.1.12 — *Si $i \in I_{\text{re}}$, et si $w \in \mathbb{W}$, alors :*

$$S_{w(\alpha_i)} = S_{w(\alpha_i^\vee)}.$$

Démonstration. L'ensemble $\Phi = W\Pi_{\text{re}}$ est l'ensemble de racines associé à la base de racines $(Q(I_{\text{re}}), \Pi_{\text{re}}, (r_i)_{i \in I_{\text{re}}})$, il en est de même de $\Phi^\vee = W\Pi^\vee$ (où $\Pi^\vee = (\alpha_i^\vee)_{i \in I_{\text{re}}}$) associé à $(Q^\vee, \Pi^\vee, (r_i)_{i \in I_{\text{re}}})$.

Si J est une partie de I_{re} , Hée a établi ([Hée 1 ; n° 2.15]) l'égalité : $\Phi(J) := \Phi \cap Q(J) = W(J).\Pi(J)$ (resp. $\Phi^\vee(J) = W(J).\Pi^\vee(J)$) donc $\Phi(J)$ (resp. $\Phi^\vee(J)$) est l'ensemble de racines associé à la base de racines $(Q(J), \Pi(J), (r_i)_{i \in J})$ (resp. $(Q^\vee(J), \Pi^\vee(J), (r_i)_{i \in J})$).

Alors, si J est le support de α , on a $\alpha \in Q(J) \cap \Phi$ et donc $\alpha^\vee \in Q^\vee(J) \cap \Phi^\vee$; ce qui implique $S_{\alpha^\vee} \subset S_\alpha$. De même, si J est le support de α^\vee , $\alpha^\vee \in Q^\vee(J) \cap \Phi^\vee$, alors $\alpha \in Q(J) \cap \Phi$. Ceci établit l'égalité des supports puisque $\alpha = w(\alpha_i) \implies \alpha^\vee = w(\alpha_i^\vee)$, qui est proportionnel à $w(\alpha_i^\vee)$. \square

Lemme 1.1.13 — *Le support d'un élément de $\mathbb{W}.\Pi_{\text{re}}$ est connexe.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe $w \in \mathbb{W}$ et $\alpha_i \in \Pi_{\text{re}}$ tels que le support de $w(\alpha_i)$ ne soit pas connexe, c'est-à-dire $w(\alpha_i) = u + v$ avec $u \in Q_{\mathbb{Q}}(J)$ non nul et $v \in Q_{\mathbb{Q}}(F)$ non nul pour J et F deux parties non liées de I . Comme w stabilise $Q(I_{\text{re}})$, J et F sont des parties de I_{re} .

D'après [Hée 1 ; n° 2.15], comme $w(\alpha_i) \in \Delta^{\text{re}}(J \sqcup F)$, il existe $w' \in \mathbb{W}(J \sqcup F) = \mathbb{W}(J) \times \mathbb{W}(F)$, et $j \in J \sqcup F$ tels que $w'(w(\alpha_i)) \in \mathbb{K}\alpha_j$. Supposons $j \in J$, $\mathbb{W}(F)$ n'agit pas sur $Q_{\mathbb{K}}(J)$ qui est stable sous $\mathbb{W}(J)$, on peut donc supposer $w' \in \mathbb{W}(J)$ mais alors $w'(w(\alpha_i)) = w'(w(u)) + v$ ne peut pas être proportionnelle à α_j , d'où une contradiction. \square

L'action de \mathbb{W} sur Q sous l'hypothèse (R1)

L'application \mathbb{Z} -linéaire Ψ de \tilde{Q} dans \mathfrak{h} , définie en 1.1.4 Rq. 5, est \mathbb{W} -équivariante : par définition de r_i et \tilde{r}_i , on a en effet $\Psi \circ \tilde{r}_i = r_i \circ \Psi$.

Cette propriété de Ψ va être très utile pour étudier l'action de \mathbb{W} .

Dans le cas d'une réalisation où la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est \mathbb{N} -libre, autrement dit sous l'hypothèse (R1) de 1.1, nous allons encore pouvoir démontrer la fidélité de la représentation τ (1.1.14). Enfin nous introduirons en 1.1.15 des parties de Q dont nous montrerons, toujours sous l'hypothèse (R1), l'égalité. Ce dernier résultat nous sera très utile dans la suite de ce mémoire, en particulier dans le cas libre au chapitre 3 mais aussi sous l'hypothèse (R1) vérifiée dans ce que nous appellerons au chapitre 4, un système générateur de racines.

Proposition 1.1.14 — *Si la réalisation vérifie la propriété (R1), alors la représentation τ est fidèle.*

Remarque. La propriété (R1) peut aussi s'écrire : $Q_+ \cap Q_- = \{0\}$.

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{W}$, tel que $\tau(w) = \text{Id}$. Si $w \neq 1$, il existe d'après 1.1.6 (b) un indice réel i tel que $w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_-(I_{\text{re}})$, donc $w.\tilde{\alpha}_i = -\sum_{j \in I_{\text{re}}} n_j \tilde{\alpha}_j$ avec $n_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j \in I_{\text{re}}$. Par Ψ , on obtient $\alpha_i = w.\alpha_i = -\sum_{j \in I_{\text{re}}} n_j \alpha_j$. Ceci contredit l'hypothèse faite. \square

On considère dans Q et $Q_{\mathbb{Q}}$,

$$\begin{aligned} B &= \{\alpha \in Q_+ / \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \forall i \in I_{\text{re}}\}; \\ B_{\mathbb{Q}} &= \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} / \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \forall i \in I_{\text{re}}\}; \\ B' &= \{\alpha \in Q_+ / w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{N}\alpha_i, \forall w \in \mathbb{W}\}; \\ B'_{\mathbb{Q}} &= \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} / w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_i, \forall w \in \mathbb{W}\}. \end{aligned}$$

Lemme 1.1.15 — *Sous la condition (R1), on a :*

$$B = B' \text{ et } B_{\mathbb{Q}} = B'_{\mathbb{Q}}.$$

De plus, si $\alpha \in B'_{\mathbb{Q}}$ et $w \in \mathbb{W}$ sont tels que $w(\alpha) \in B'_{\mathbb{Q}}$, alors $w(\alpha) = \alpha$ et w s'écrit comme un produit d'éléments R_i pour des $i \in I_{\text{re}}$ tels que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

N.B : Si la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est libre dans \mathfrak{h}^\wedge , le résultat obtenu en remplaçant \mathbb{Q} par \mathbb{K} est encore valable.

Remarque. Il est clair en effet que si α est dans $B'_{\mathbb{Q}}$ alors $B'_{\mathbb{Q}} \cap W.\alpha = \{\alpha\}$, cet argument interviendra souvent dans la suite, l'élément α apparaissant comme l'élément de hauteur (voir aussi (BN) de 4.3) minimum de son orbite.

Démonstration. L'inclusion $B'_{\mathbb{Q}} \subset B_{\mathbb{Q}}$ est claire. En effet, si $\alpha \in B'_{\mathbb{Q}}$ et si $i \in I_{\text{re}}$, on a : $r_i(\alpha) - \alpha = -\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \in \sum_{j \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_j$ et donc $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ (grâce à (R1)). Ainsi, $\alpha \in B_{\mathbb{Q}}$.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $\alpha \in B_{\mathbb{Q}}$, prouvons par récurrence sur $l(w)$, que :

$$w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_i.$$

Si $l(w) = 0$, le résultat est évident.

Si $l(w) = 1$, il existe $i \in I_{\text{re}}$ tel que $w = R_i$, alors : $w(\alpha) - \alpha = -\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \in \mathbb{Q}_+\alpha_i$ et donc appartient à $\sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. De plus, $w(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

Supposons que si $w \in \mathbb{W}$ est tel que $l(w) \leq l - 1$, où $l \in \mathbb{N}^*$, alors $w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_i$.

Soient alors $w \in \mathbb{W}$ tel que $l(w) = l$, et $w = R_{i_1} \dots R_{i_l}$ une décomposition réduite de w , on a :

$$\begin{aligned} w(\alpha) - \alpha &= (R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot \alpha - \alpha) + R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} (R_{i_l} \cdot \alpha - \alpha) \\ &= (R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot \alpha - \alpha) + R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot (-\langle \alpha, \alpha_{i_l}^\vee \rangle \alpha_{i_l}) \end{aligned}$$

et $R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot \alpha - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ par hypothèse de récurrence.

De plus, par hypothèse sur α , on a $R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot (-\langle \alpha, \alpha_{i_l}^\vee \rangle \alpha_{i_l}) \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ puisque la décomposition de w considérée est réduite (prop. 1.1.6 (a) et la \mathbb{W} -équivariance de Ψ). Alors, d'après (R1), $w(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $R_{i_1} \dots R_{i_{l-1}} \cdot \alpha = \alpha$ et $\langle \alpha, \alpha_{i_l}^\vee \rangle = 0$; d'où le résultat annoncé.

En ce qui concerne B' et B , l'assertion est alors évidente puisque ce sont exactement les intersections respectives de $B_{\mathbb{Q}}$ et $B'_{\mathbb{Q}}$ avec Q . \square

On déduit en particulier de ce résultat une petite amélioration du lemme 1.1.9 :

Lemme 1.1.16 — *On suppose toujours la condition (R1) vérifiée.*

Soient $w \in \mathbb{W}$, $(i, j) \in I^2$ et $\mu \in \mathbb{N}^*$ tels que $w(\tilde{\alpha}_i) = \mu \tilde{\alpha}_j$, alors :

- (a) $\mu = 1$;
- (b) si i et j sont distincts, alors ils sont dans I_{re} ;
- (c) $w(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee$.

Démonstration. Il reste à voir le cas où i ou j appartient à I_{im} .

On sait que, $(w - \text{Id})(\tilde{Q}) \subset \tilde{Q}(I_{\text{re}})$, donc si i ou j est dans I_{im} , $w(\tilde{\alpha}_i) - \tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}(I_{\text{re}})$, ce qui implique $i = j$. Si $w = R_{i_1} \dots R_{i_l}$, on sait d'après 1.1.15 que $\langle \tilde{\alpha}_i, \alpha_{i_t}^\vee \rangle = 0$, pour tout $t \in \{1 \dots l\}$. La matrice A vérifiant (B4), le scalaire $\langle \tilde{\alpha}_i, \alpha_i^\vee \rangle$ est également nul et donc $w(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee$. \square

1.2 Étude du système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds

L'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)$

Soient \mathbf{K} une extension de \mathbb{K} , A une matrice de Borcherds générale à coefficients dans \mathbb{K} et R une réalisation de A sur \mathbf{K} . On introduit, comme Kac, l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ définie sur \mathbf{K} par les générateurs $\{\mathfrak{h}, e_i, f_i ; (i \in I)\}$ et les relations :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0, & \forall (h, h') \in \mathfrak{h}^2 ; \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I ; \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I ; \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee, & \forall (i, j) \in I^2 ; \end{cases}$$

Remarque. Il existe un automorphisme de l'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui à e_i (resp. f_i), pour $i \in I$, (resp. $h \in \mathfrak{h}$) associe $-f_i$ (resp. $-e_i$, resp. $-h$). Il s'agit d'une involution que nous noterons $\tilde{\omega}$.

Comme Kac ([K ; 1.2]), on peut établir :

Lemme 1.2.1 — Soient A une matrice de Borcherds et $R = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge)$ une réalisation de A .

- (a) L'application évidente de $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{K}e_i \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathbf{K}f_i \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ est injective. Notons V_1 son image et identifions \mathfrak{h} et les générateurs e_i et f_i à leurs images. L'algèbre \mathfrak{h} est une sous-algèbre commutative de $\tilde{\mathfrak{g}}$.
- (b) La sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) engendrée par les e_i (resp. par les f_i) est isomorphe à l'algèbre de Lie libre sur les générateurs e_i (resp. f_i).
- (c) $\tilde{\omega}(\tilde{\mathfrak{n}}_+) = \tilde{\mathfrak{n}}_-$; $\tilde{\omega}(\tilde{\mathfrak{n}}_-) = \tilde{\mathfrak{n}}_+$; $\tilde{\omega}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.
- (d) $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_-$ (somme vectorielle d'espaces qui ne sont pas des idéaux).
- (e) Une graduation d'algèbre de Lie de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par \tilde{Q} est définie en donnant à e_i, f_i , pour $i \in I$ et $h \in \mathfrak{h}$ les degrés respectifs $\tilde{\alpha}_i, -\tilde{\alpha}_i$ et 0.
Alors, $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\alpha \in \tilde{Q}} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, où $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est l'ensemble des éléments homogènes de degré α et pour cette graduation, on a : $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h}$; $\tilde{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \tilde{Q}_+} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$; $\tilde{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\alpha \in \tilde{Q}_-} \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$.
En particulier, si $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}$, on a nécessairement, $\alpha \in \tilde{Q}_+^* \sqcup \tilde{Q}_-^* \sqcup \{0\}$.
L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est contenu dans l'espace propre $\tilde{\mathfrak{g}}_{[\alpha]}$ de \mathfrak{h} de poids $[\alpha] \in \mathfrak{h}^*$.
Pour tout $\alpha \in \tilde{Q} \setminus \{0\}$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est finie et $\tilde{\omega}(\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha) = \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$.
Pour $i \in I$, on a $\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}_i} = \mathbf{K}e_i, \tilde{\mathfrak{g}}_{-\tilde{\alpha}_i} = \mathbf{K}f_i, \tilde{\mathfrak{g}}_{m\tilde{\alpha}_i} = \{0\}$ si m est différent de $-1, 0$ et 1 .
- (f) Il existe un unique idéal \mathfrak{r}_1 (resp. \mathfrak{r}) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ maximal parmi les idéaux gradués d'intersection nulle avec \mathfrak{h} (resp. V_1). L'idéal \mathfrak{r}_1 (resp. \mathfrak{r}) est somme directe des idéaux $\tilde{\mathfrak{n}}_+ \cap \mathfrak{r}_1$ et $\tilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{r}_1$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}_+ \cap \mathfrak{r}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}_- \cap \mathfrak{r}$).

Remarques et définitions. 1. Si $\alpha \in \tilde{Q} \setminus \{0\}$ est telle que $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}$, α est une racine de $(\tilde{\mathfrak{g}} ; \mathfrak{h})$.

2. La démonstration du (e) ne peut pas être directement calquée sur celle proposée par Kac ([K ; 1.2]) où l'hypothèse « la famille Π est libre dans \mathfrak{h}^\wedge » permet de montrer que $\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \tilde{\mathfrak{g}}_{[\alpha]}$; autrement dit la graduation est dans ce cas fournie par l'action adjointe de \mathfrak{h} . Mais l'adaptation est facile une fois faites les distinctions indiquées ci-dessus.

L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds

L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds est alors définie comme le quotient de $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ par l'idéal \mathfrak{r} et est notée $\mathfrak{g}(A, R)$, ou parfois \mathfrak{g} ou $\mathfrak{g}(A)$.

Il est clair que V_1 s'injecte dans \mathfrak{g} , on peut ainsi identifier les e_i et les f_i avec leurs images.

Lemme 1.2.2 — Si $a_{ij} = 0$, alors les éléments $[e_i, e_j]$ et $[f_i, f_j]$ appartiennent à l'idéal \mathfrak{r} et donc, dans \mathfrak{g} , on a $(ade_i)e_j = 0$ et $(adf_i)f_j = 0$.

Démonstration. Soient i et j dans I tels que $a_{ij} = 0$ (donc $a_{ji} = 0$). Considérons le sous-espace vectoriel \mathfrak{S} de $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ engendré par les crochets itérés $[e_{i_1} \dots e_{i_n}]$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et $i_{n-1} = i, i_n = j$.

Montrons que \mathfrak{S} est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Il est clair que \mathfrak{S} est stable sous l'action de $\text{ad}(e_m)$ pour tout $m \in I$.

Pour $h \in \mathfrak{h}$, on a $[h, [e_{i_1} \dots e_{i_n}]] = \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{i_l}(h)[e_{i_1} \dots e_{i_n}]$, donc \mathfrak{S} est stable sous l'action adjointe de \mathfrak{h} .

Reste à étudier l'action des f_p (pour $p \in I$). On a, grâce à l'identité de Jacobi :

$$[f_p, [e_{i_1} \dots e_{i_n}]] = \sum_{l=1}^{l=n} [e_{i_1} [e_{i_2} [\dots [e_{i_{l-1}} [[f_p, e_{i_l}], [e_{i_{l+1}} \dots e_{i_n}]] \dots]]].$$

Il est immédiat que les termes de la somme correspondant à des indices $l < n - 1$ sont dans \mathfrak{S} , et seuls sont à regarder les cas $l = n - 1$ et $l = n$. Or, si $l \in \{n - 1, n\}$, les crochets $[[f_p, e_i], e_j]$ et $[e_i, [f_p, e_j]]$ sont nuls. En effet, considérons, par exemple le premier terme ; si $p \neq i$ le résultat est évident ; si $p = i$, alors le terme étudié est égal à $\alpha_j(\alpha_i^\wedge) e_j = a_{ij} e_j = 0$.

Le sous-espace vectoriel \mathfrak{S} est donc un idéal gradué d'intersection nulle avec V_1 (puisque ses générateurs sont des crochets itérés contenant tous obligatoirement e_i et e_j comme derniers termes). Par suite, \mathfrak{S} est contenu dans \mathfrak{r} , ce qui établit le lemme. \square

Proposition 1.2.3 — Soient A une matrice de Borchers générale, indexée par I , R une réalisation donnée de A et \mathfrak{g} l'algèbre de Kac-Moody-Borchers associée à A et R .

(a) Si J_0 est l'ensemble des i tels que $\alpha_i^\wedge = 0$, on a : $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} \oplus (\bigoplus_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i))$.

Si F_0 désigne l'ensemble des indices i tels que $e_i \in \mathfrak{r}_1$, on a $F_0 = J_0$; enfin, si $I' = I - F_0$, alors l'application canonique $V = (\bigoplus_{i \in I'} \mathbf{K}e_i) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{i \in I'} \mathbf{K}f_i) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1$ est injective. On identifiera les e_i pour $i \in I'$ avec leurs images dans \mathfrak{g} .

En particulier, si $F_0 = \emptyset$, on a $\mathfrak{g}(A, R) = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1$.

(b) $\mathfrak{g}^1 = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{n}^1_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^1_-$ où \mathfrak{n}^1_+ (resp. \mathfrak{n}^1_-) est engendrée par les e_i (resp. les f_i) pour $i \in I'$. Et on a, pour \mathfrak{g} , la décomposition correspondante : $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$.

$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r} \approx (\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1) \oplus (\bigoplus_{i \in F_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i))$ où le facteur de droite est un idéal commutatif de \mathfrak{g} qui commute à \mathfrak{n}_+ et à \mathfrak{n}_- , mais pas nécessairement à \mathfrak{h} .

(c) L'automorphisme $\tilde{\omega}$ passe au quotient en une involution ω de \mathfrak{g} telle que $\omega(\mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_-$; $\omega(\mathfrak{n}_-) = \mathfrak{n}_+$; $\omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$; $\omega|_{\mathfrak{h}} = -\text{Id}_{\mathfrak{h}}$.

Démonstration. (a) Montrons tout d'abord que $F_0 = J_0$.

Soit i tel que $e_i \in \mathfrak{r}_1$; comme \mathfrak{r}_1 est un idéal, $[e_i, f_i]$ est dans $\mathfrak{r}_1 \cap \mathfrak{h} = \{0\}$; donc $\alpha_i^\wedge = 0$, et $i \in J_0$. Donc $F_0 \subset J_0$.

Pour établir l'inclusion inverse, notons $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \sum_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i)$.

Soit $i \in J_0$, on a $a_{ij} = 0$ pour tout $j \in I$, ce qui implique (lemme 1.2.2) que $\text{ad}e_j$ et $\text{ad}f_j$ envoient e_i et f_i dans \mathfrak{r} . D'autre part, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, adh envoie e_i et f_i dans $\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i$. Le sous-espace \mathfrak{r}' est donc un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Il est gradué et intersecte \mathfrak{h} trivialement puisqu'il ne contient pas d'élément non nul de degré 0. La maximalité de l'idéal \mathfrak{r}_1 implique alors $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}_1$ d'où $F_0 = J_0$.

Démontrons l'égalité $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} \oplus (\bigoplus_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i))$.

D'après ce qui précède, $\bigoplus_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i) \subset \mathfrak{r}_1$. Comme \mathfrak{r}_1 est gradué, il existe un sous-espace vectoriel gradué \mathfrak{r}'_1 tel que $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}'_1 \oplus (\bigoplus_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i))$. L'idéal \mathfrak{r} est gradué, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r} \cap (\bigoplus_{i \in J_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i)) = \{0\}$; par suite, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'_1$. De plus, $V \cap \mathfrak{r}_1 = \{0\}$ puisque si $i \notin F_0$, $e_i \notin \mathfrak{r}_1$; et donc, V_1 étant gradué, $\mathfrak{r}'_1 \cap V_1 = \{0\}$.

Montrons à présent que \mathfrak{r}'_1 est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Pour $x \in \tilde{\mathfrak{g}}$ et $y \in \mathfrak{r}'_1$, on sait déjà que $[x, y] \in \mathfrak{r}_1$. Grâce à la graduation, il suffit de démontrer que : $\forall j \in I, \forall y \in \mathfrak{r}'_1$ de degré $\alpha > 0$, si $[f_j, y] \in \mathbf{K}e_i$ pour $i \in J_0$, alors $[f_j, y] = 0$.

Autrement dit, il suffit de montrer que : $\forall j \in I, \forall i \in J_0, \forall y \in \mathfrak{r}'_1 \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j}$, $[f_j, y] = 0$. Sous ces hypothèses, y est proportionnel à $[e_i, e_j]$; or, $[f_j, [e_i, e_j]] = 0$ puisque $[e_i, \alpha_j^\wedge] = -a_{ji}e_i = 0$ (car $\alpha_i^\wedge = 0 \implies a_{ji} = 0$).

Le sous-espace \mathfrak{r}'_1 est donc un idéal, et, par maximalité de \mathfrak{r} , on a $\mathfrak{r}'_1 = \mathfrak{r}$ et l'égalité cherchée.

Le noyau de l'application canonique de V dans $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1$ est donc $\mathfrak{r} \cap \bigoplus_{i \in I'} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i) = \{0\}$; d'où l'injectivité de celle-ci.

Ainsi, nous pouvons identifier les e_i et les f_i , pour $i \in I$, avec leurs images dans \mathfrak{g} .

(b) De plus, l'égalité $\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{r}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+) \oplus (\mathfrak{r}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-)$ et la décomposition $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_-$ permettent d'écrire :

$$\mathfrak{g}^1 = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1 = (\tilde{\mathfrak{n}}_+ / (\mathfrak{r}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+)) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\tilde{\mathfrak{n}}_- / (\mathfrak{r}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-)) = \mathfrak{n}_+^1 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-^1$$

où \mathfrak{n}_+^1 (resp. \mathfrak{n}_-^1) est engendrée par les e_i (resp. les f_i) pour $i \in I'$. En effet, $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ est engendrée par les e_i pour $i \in I$ et $(\mathfrak{r}_1 \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+)$ contient les e_i pour $i \in F_0$.

Enfin, l'assertion (c) est évidente. \square

La graduation de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par \tilde{Q} passe au quotient en une graduation de $\mathfrak{g}(A)$.

Définition 1.2.4 — L'ensemble des $\alpha \in \tilde{Q} \setminus \{0\}$ tels que $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, noté $\tilde{\Omega} = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, est appelé système de racines universel de $\mathfrak{g}(A)$.

Comme Borchers ([Bo; 1]), on peut établir les résultats suivants :

- Proposition 1.2.5** — (a) On a : $\tilde{\Omega} \subset \tilde{Q}_+ \sqcup \tilde{Q}_-$ et $\tilde{\Omega}_+ = -\tilde{\Omega}_-$ où l'on note $\tilde{\Omega}_+ = \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+$ et $\tilde{\Omega}_- = \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_-$.
- (b) Pour tout $\alpha \in \tilde{\Omega}$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ est finie et $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Si $\beta \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\tilde{\alpha}_i$ où $i \in I$, alors $(\beta + \mathbb{Z}\tilde{\alpha}_i) \cap \tilde{\Omega} \subset \tilde{\Omega}_+$ et de plus $\mathbb{N}\tilde{\alpha}_i \cap \tilde{\Omega}_+ = \{\tilde{\alpha}_i\}$.
- (c) Si $a \in \mathfrak{n}_+^1 = \bigoplus_{\alpha \in \tilde{\Omega}_+} \mathfrak{g}_\alpha^1$ est tel que $[a, f_i] = 0$ pour tout $i \in I$, alors $a = 0$ (dans \mathfrak{g}^1).
- (d) Le support d'une racine est connexe.

Remarques. 1. L'hypothèse de maximalité de \mathfrak{r}_1 est essentielle pour démontrer (c), par contre, pour (a), (b), (d) on peut considérer le quotient \mathfrak{g}_1 de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par un idéal gradué inclus dans \mathfrak{r} et contenant l'idéal engendré par :

$$(\text{ade}_i)^{1-a_{ij}} e_j, (\text{adf}_i)^{1-a_{ij}} f_j \ (\forall i \in I_{re}) \ (\text{cf. 1.2.6 ci-dessous});$$

$$(\text{ade}_i) e_j, (\text{adf}_i) f_j, \ (\text{si } i \in I_{im} \text{ et } a_{ij} = 0) \ (\text{cf. 1.2.2 ci-dessus}).$$

2. D'après (c), le centre de \mathfrak{g} est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h} / \langle \alpha_i, h \rangle = 0 \ (\forall i \in I)\}$ (puisque le centre d'une algèbre de Lie graduée est un idéal gradué). On montre encore ce résultat sans utiliser (c) (donc aussi pour \mathfrak{g}_1) si la réalisation vérifie (R6).
3. On note Ω (resp. $[\Omega]$), l'image de $\tilde{\Omega}$ dans \mathfrak{h}^\wedge (resp. \mathfrak{h}^*) par l'application additive de \tilde{Q} dans \mathfrak{h}^\wedge (resp. dans \mathfrak{h}^*) qui envoie $\tilde{\alpha}_i$ sur α_i (resp. sur $[\alpha_i]$). Alors, $[\Omega] \cup \{0\}$ est l'ensemble des poids de \mathfrak{h} dans la représentation adjointe. On étudiera plus tard la structure de Ω sous certaines hypothèses (voir 1.2.10 ainsi que le chapitre 4).
4. L'assertion (c) ne nécessite que l'hypothèse (B1) et peut, si on remplace \mathfrak{n}_+^1 par \mathfrak{n}_+ , être généralisée en : $\{a \in \mathfrak{n}_+; \forall i \in I, [f_i, a] = 0\} = \bigoplus_{i \in F_0} \mathbf{K}e_i$.

Étude de relations entre éléments de \mathfrak{g}

D'après la proposition 1.2.3, on a :

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r} \approx (\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}_1) \oplus \left(\bigoplus_{i \in F_0} (\mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i) \right);$$

c'est-à-dire que \mathfrak{g} est la somme d'un idéal commutatif et d'une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre de Kac-Moody-Borchers obtenue en considérant la matrice $A(I - F_0)$ et la réalisation immédiatement déduite de celle considérée. De plus, l'action de $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R)/\mathfrak{r}$ sur l'idéal commutatif se réduit à celle de \mathfrak{h} (qui est diagonale).

On supposera dans tout le reste du chapitre que la réalisation R de la matrice A vérifie l'hypothèse (R2) c'est-à-dire que $F_0 = \emptyset$, ce qui entraîne $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$. De plus, changer α_i^\wedge en $c_i \alpha_i^\wedge$ avec $c_i > 0$, donne une nouvelle algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}'$ qui est canoniquement isomorphe à $\tilde{\mathfrak{g}}$, le nouvel idéal maximal \mathfrak{r}' ayant \mathfrak{r} pour image par cet isomorphisme. Par conséquent, quitte à remplacer, pour $i \in I_{\text{re}}, \alpha_i^\wedge$ par $\alpha_i^\vee = (2/a_{ii})\alpha_i^\wedge$ (c'est-à-dire A par $B(A)$), on peut supposer que la matrice de Borchers est normalisée, ce qu'on fera (sauf indication contraire) dans la suite de ce chapitre.

Comme Borchers ([Bo ; 1]), on peut montrer :

Proposition 1.2.6 — *L'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ satisfait à :*

$$\begin{aligned} (\text{ade}_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, & \quad (\text{adf}_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, & \quad (\forall (i, j) \in I_{\text{re}} \times I) ; \\ (\text{ade}_i) e_j = 0, & \quad (\text{adf}_i) f_j = 0, & \quad (\forall (i, j) \in I^2 \text{ tel que } a_{ij} = 0). \end{aligned}$$

Remarques. 1. Pour $i \in I_{\text{re}}$, les relations :

$$(\text{ade}_i) e_j = 0, (\text{adf}_i) f_j = 0, \text{ (pour tout } j \in I \text{ tel que } a_{ij} = 0)$$

se déduisent des premières relations.

2. Dans [Bo ; 1], Borchers démontre que, si la matrice A est symétrique (et si la dualité est non dégénérée), les relations de 1.2.6 caractérisent le quotient par \mathfrak{r} (voir également [K ; 11.13]).

3. Dans tout ce chapitre, on peut, sauf indication contraire, remplacer \mathfrak{g} par le quotient \mathfrak{g}_1 de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par un idéal gradué inclus dans \mathfrak{r} et contenant l'idéal engendré par : $(\text{ade}_i)^{1-a_{ij}} e_j, (\text{adf}_i)^{1-a_{ij}} f_j, (\forall (i, j) \in I_{\text{re}} \times I)$; et $(\text{ade}_i) e_j, (\text{adf}_i) f_j, (\text{ si } (i, j) \in I_{\text{im}} \times I \text{ et } a_{ij} = 0)$.

Corollaire 1.2.7 — *Si $i \in I_{\text{re}}$, ade_i et adf_i sont localement nilpotents sur \mathfrak{g} .*

Lemme 1.2.8 — *Pour tout i dans I , on pose $\mathfrak{g}_{(i)} = \mathbf{K}e_i \oplus \mathbf{K}f_i \oplus \mathbf{K}\alpha_i^\vee$.*

(a) *Si $a_{ii} = 0$, $[\mathfrak{g}_{(i)}, \mathfrak{g}_{(i)}] = \mathbf{K}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{(i)})$.*

On a supposé $\alpha_i^\vee \neq 0$, donc $\mathbf{K}\alpha_i^\vee = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{(i)})$ et $\mathfrak{g}_{(i)}$ est isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg.

(b) *Sinon, $\mathfrak{g}_{(i)}$ est isomorphe à \mathfrak{sl}_2 , et $\{e_i ; (2/a_{ii})f_i ; (2/a_{ii})\alpha_i^\vee\}$ est, dans $\mathfrak{g}_{(i)}$, un \mathfrak{sl}_2 -triplet standard.*

Démonstration. Immédiat. □

Corollaire 1.2.9 — *Soit $i \in I_{\text{re}}$.*

L'algèbre \mathfrak{g} se décompose en somme directe de sous-modules $\mathfrak{g}_{(i)}$ -irréductibles de dimensions finies.

Si $\alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \{\tilde{\alpha}_i\}$, alors $\{\alpha + s\tilde{\alpha}_i, s \in \mathbb{Z}\} \cap \tilde{\Omega} = [\alpha - p\tilde{\alpha}_i \dots \alpha + q\tilde{\alpha}_i] \subset \tilde{\Omega}_+$ où p et q sont dans \mathbb{N} et $p - q = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$.

Si $\alpha \in \tilde{\Omega}_+$, et si $\alpha + \tilde{\alpha}_i \notin \tilde{\Omega}_+$, alors $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$.

Si $\alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \{\tilde{\alpha}_i\}$ et si $\alpha - \tilde{\alpha}_i \notin \tilde{\Omega}_+$, alors $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$.

Remarque. Considérons l'algèbre \mathfrak{g}_{re} engendrée par les e_i, f_i pour $i \in I_{\text{re}}$ ($a_{ii} = 2$). On sait qu'un sous-espace radiciel \mathfrak{g}_α où $\alpha \in \tilde{Q}_+$ est engendré par les crochets itérés

$[e_{i_1} \dots e_{i_n}]$ tels que $\sum_{j=1}^{j=n} \tilde{\alpha}_{i_j} = \alpha$. Ainsi, on a $\mathfrak{g}_{\text{re}} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{re}}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+(I_{\text{re}})} \mathfrak{g}_\alpha \right)$.

L'algèbre \mathfrak{g}_{re} est l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice $A(I_{\text{re}})$ et à sa réalisation $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{re}}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi_{\text{re}}, \Pi_{\text{re}}^\vee)$, où $\Pi_{\text{re}} = (\alpha_i)_{i \in I_{\text{re}}} = \Pi(I_{\text{re}})$.

En effet, pour chaque $i \in I_{\text{re}}$, on a supposé $a_{ii} = 2$, donc $(e_i, f_i, \alpha_i^\vee)$ est le \mathfrak{sl}_2 -triplet obtenu dans le lemme précédent.

L'algèbre \mathfrak{g}_{re} est engendrée par $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{re}}$, les e_i, f_i , pour $i \in I_{\text{re}}$, qui vérifient les relations :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0, & \forall (h, h') \in \mathfrak{h}^2 ; \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I_{\text{re}} ; \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, & \forall h \in \mathfrak{h}, \forall i \in I_{\text{re}} ; \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee, & \forall (i, j) \in I_{\text{re}}^2 ; \\ (\text{ade}_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, & \forall (i, j) \in I_{\text{re}}^2 ; \\ (\text{adf}_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, & \forall (i, j) \in I_{\text{re}}^2 . \end{cases}$$

De plus, d'après 1.2.5 (c), si $a \in \bigoplus_{\alpha \in \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+(I_{\text{re}})} \mathfrak{g}_\alpha$, et si $[a, f_i] = 0$ pour tout i dans I_{re} , alors $a = 0$. Ceci permet d'établir la minimalité de \mathfrak{g}_{re} parmi les algèbres dans lesquelles les relations précédentes sont vérifiées et de montrer qu'il n'existe aucun idéal gradué d'intersection triviale avec \mathfrak{h} dans \mathfrak{g}_{re} (cf. [R2 ; prop.A2]). Cet alinéa n'est pas valable pour l'algèbre \mathfrak{g}_1 de la remarque 1. suivant 1.2.5.

Démonstration du corollaire. Utilisons la notion, introduite par Kac, de \mathfrak{g}_{re} -module intégrable (cf. [K ; 3.6]).

L'algèbre $\mathfrak{g}(A, R)$ est un tel \mathfrak{g}_{re} -module, c'est-à-dire que pour la représentation adjointe, l'action de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{re}}$ est diagonalisable, et que les e_i, f_i , pour $i \in I_{\text{re}}$ sont localement nilpotents. Le corollaire est alors une application évidente de [K ; 3.6]. \square

D'après le corollaire 1.2.9, si $\alpha \in \tilde{\Omega}$ et $i \in I_{\text{re}}$, alors $R_i \cdot \alpha \in \tilde{\Omega}$, et donc :

Proposition 1.2.10 — *L'ensemble $\tilde{\Omega}$ est invariant sous l'action du groupe de Weyl.*

De même, il est clair, à partir de la condition $(\alpha \in \tilde{\Omega} \implies \alpha \in \tilde{Q}_+ \sqcup \tilde{Q}_-)$, que :

Proposition 1.2.11 — *Soit $\alpha \in \tilde{\Omega}_+$, si $i \in I_{\text{re}}$ et si $R_i \cdot \alpha \in \tilde{\Omega}_-$, alors $\alpha = \tilde{\alpha}_i$.*

Au vu du corollaire 1.2.7, on définit, pour $i \in I_{\text{re}}$, un automorphisme de \mathfrak{g} en posant :

$$\tau_i = \exp(\text{ade}_i) \exp(\text{ad}(-f_i)) \exp(\text{ade}_i).$$

- Proposition 1.2.12** — 1. Pour $i \in I_{\text{re}}$ et $\alpha \in \tilde{Q}$, on a $\tau_i|_{\mathfrak{h}} = r_i^\vee$ et $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{r_i \cdot \alpha}$.
2. Si π est une représentation intégrable de $\mathfrak{g}_{\text{re}} + \mathfrak{h}$, on a, pour $i \in I_{\text{re}}$ et $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $r_i^\pi(V_\lambda) = V_{r_i^*(\lambda)}$ où $r_i^\pi = \exp(\pi e_i) \exp(-\pi f_i) \exp(\pi e_i) = \exp(\pi f_i) \exp(-\pi e_i) \exp(\pi f_i)$.

Démonstration. La démonstration du second résultat est donnée dans [K ; 3.8].

Pour le premier point, considérons $U = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\alpha + n\alpha_i}$. L'espace U est stable sous l'action de ade_i et de adf_i . L'automorphisme τ_i fixe les éléments h de \mathfrak{h} tels que $\alpha_i(h) = 0$, et comme de plus $\tau_i(\alpha_i^\vee) = -\alpha_i^\vee$ (calcul facile), on a $\tau_i|_{\mathfrak{h}} = r_i^\vee$. Par suite, $\tau_i(\mathfrak{g}_{[\alpha]}) = \mathfrak{g}_{[r_i(\alpha)]}$. On a alors : $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \tau_i(\mathfrak{g}_{[\alpha]}) \cap U = \mathfrak{g}_{[r_i(\alpha)]} \cap U = \mathfrak{g}_{r_i(\alpha)}$. \square

Propriétés du système de racines universel de l'algèbre de K.M.B.

Proposition 1.2.13 — L'ensemble $\tilde{\Omega}$ vérifie les propriétés suivantes :

- (SR1) $\tilde{\Omega} \subset \tilde{Q}$; $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+) \sqcup (\tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_-)$ et si l'on note $\tilde{\Omega}_+ = \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_+$ et $\tilde{\Omega}_- = \tilde{\Omega} \cap \tilde{Q}_-$, alors $\tilde{\Omega}_+ = -\tilde{\Omega}_-$;
- (SR2) $\forall i \in I$, $\mathbb{Q}_+ \tilde{\alpha}_i \cap \tilde{\Omega} = \{\tilde{\alpha}_i\}$;
- (SR3) $\forall i \in I_{\text{re}}, \forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\tilde{\alpha}_i$, $\{\alpha + s\tilde{\alpha}_i, s \in \mathbb{Z}\} \cap \tilde{\Omega} = [\alpha - p\tilde{\alpha}_i, \dots, \alpha + q\tilde{\alpha}_i] \subset \tilde{\Omega}_+$ où p et q sont dans \mathbb{N} et vérifient $p - q = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$;
- (SR4) $\forall i \in I_{\text{im}}, \forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \tilde{\alpha}_i$,
- (i) $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0 \iff \alpha + \mathbb{N}\tilde{\alpha}_i \subset \tilde{\Omega}_+$;
- (ii) $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \implies \alpha + \tilde{\alpha}_i \notin \tilde{\Omega}_+$;
- (SR5) $\forall \alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{Q}_+ \tilde{\alpha}_i$, il existe $i \in I$ tel que $\alpha - \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Omega}$.

Remarque. On verra en 2.2 que ces cinq propriétés caractérisent $\tilde{\Omega}$.

Démonstration. Les propriétés (SR1),(SR2),(SR3) ont déjà été démontrées en 1.2.5 et 1.2.9.

Pour établir (SR5), considérons $\alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \{\tilde{\alpha}_i ; i \in I\}$; l'espace radiciel \mathfrak{g}_α n'est pas réduit à l'élément nul et est engendré par des crochets itérés des e_i . Soit un tel crochet itéré non nul $[e_{i_1} \dots e_{i_n}]$ avec $\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{i_j} = \alpha$ (et $n \geq 2$), le crochet $[e_{i_2} \dots e_{i_n}]$ est nécessairement non nul donc $\mathfrak{g}_{\alpha - \tilde{\alpha}_{i_1}} \neq \{0\}$, et $\alpha - \tilde{\alpha}_{i_1}$ est encore une racine.

Montrons enfin (SR4). Considérons $i \in I_{\text{im}}$ et $\alpha \in \tilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \tilde{\alpha}_i$, on note S_α le support de α ; on a : $a_{ii} \leq 0$; si de plus $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$, la réunion $\{i\} \cup S_\alpha$ n'est pas connexe (cf. 1.2.5 (d), $\alpha + \tilde{\alpha}_i$ ne peut alors pas être dans $\tilde{\Omega}$).

L'assertion (ii) est alors évidente.

Pour montrer l'assertion (i), il suffit, par récurrence, de prouver que l'on a : $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0 \implies \alpha + \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Omega}_+$. Supposons $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ et $\alpha + \tilde{\alpha}_i \notin \tilde{\Omega}$. Alors, si $v_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$, on a $[\alpha_i^\vee, v_\alpha] = \alpha(\alpha_i^\vee)v_\alpha \neq 0$, donc $[[e_i, f_i], v_\alpha] \neq 0$; par suite, $[e_i, v_\alpha]$ et $[f_i, v_\alpha]$ ne sont pas simultanément nuls. L'hypothèse $\alpha + \tilde{\alpha}_i \notin \tilde{\Omega}$ implique alors $\alpha - \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Omega}_+$.

Le sous-espace $(\bigoplus_{s=-\infty}^0 \mathfrak{g}_{\alpha+s\tilde{\alpha}_i})$ est un $\mathfrak{g}_{(i)}$ -module et comme : $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_+ \sqcup \tilde{\Omega}_-$,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} / \mathfrak{g}_{\alpha-(k_0+1)\tilde{\alpha}_i} = \{0\} \text{ et } \mathfrak{g}_{\alpha-p\tilde{\alpha}_i} \neq \{0\} \forall p \in \{0..k_0\}.$$

Considérons le $\mathfrak{g}_{(i)}$ -module de dimension finie : $U = \bigoplus_{s=-k_0}^0 \mathfrak{g}_{\alpha+s\tilde{\alpha}_i}$.

Si $a_{ii} \neq 0$, d'après la théorie des représentations de dimension finie de \mathfrak{sl}_2 , $(\alpha - k_0\tilde{\alpha}_i)(\alpha_i^\vee) = -\alpha(\alpha_i^\vee)$ et donc $(\alpha - k_0\tilde{\alpha}_i)(\alpha_i^\vee) = -\alpha(\alpha_i^\vee) > 0$, ce qui est impossible car $\alpha - k_0\tilde{\alpha}_i \in \tilde{Q}_+$ et $i \in I_{im}$.

Dans le cas $a_{ii} = 0$, l'espace vectoriel U est de dimension finie, on choisit une base dans chaque $\mathfrak{g}_{\alpha-p\tilde{\alpha}_i}$ pour p entre 0 et k_0 . L'endomorphisme $\text{ad}\alpha_i^\vee$ agit sur les sous-espaces radiciels par $(\alpha - p\tilde{\alpha}_i)(\alpha_i^\vee) = \alpha(\alpha_i^\vee)$ sur chaque élément. Ainsi, $\text{ad}\alpha_i^\vee = \alpha(\alpha_i^\vee)I_U$ et d'autre part, $\text{ad}e_i \text{ad}f_i - \text{ad}f_i \text{ad}e_i = \text{ad}\alpha_i^\vee$. La trace de l'opérateur considéré doit donc être nulle, ce qui contredit notre hypothèse $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, puisque le corps est de caractéristique nulle.

Dans les deux cas, on a bien obtenu une contradiction, ce qui démontre le résultat cherché. \square

Parenthèse abstraite

En vue d'une généralisation ultérieure de la notion de systèmes de racines, nous allons établir à présent un résultat (basé sur un raisonnement de Kac, [K ; 5.3]) dans un cadre un peu plus général que celui de ce chapitre. Tout ce qui précède a été (ou peut être) prouvé par des arguments de crochets et d'algèbres de Lie ; ici le raisonnement est forcément abstrait.

On considère A , une matrice de Borcherds générale indexée par I , une réalisation libre (cf. (R7) de 1.1) $R = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I}, (\alpha_i^\wedge)_{i \in I})$ de A et pour chaque $i \in I$ un sous-ensemble M_i de \mathbb{Q}_+ satisfaisant aux conditions suivantes :

- si $i \in I_{re}$, $M_i = \mathbb{N}$;
- si $i \in I_{im}$, M_i contient 0 et 1, $M_i \setminus \{0\}$ admet 3/4 pour minorant et M_i est stable pour l'addition ;
- si $(i, j) \in I \times I_{re}$, alors $2M_i a_{ji} / a_{jj} \subset \mathbb{Z}$.

Sous ces hypothèses, si $M_{i,ind}$ désigne l'ensemble des éléments indécomposables par l'addition de $M_i \setminus \{0\}$, il est clair que tout élément de $M_i \setminus \{0\}$ est somme finie d'éléments de $M_{i,ind}$ et que $1 \in M_{i,ind}$.

Enfin, à chaque $i \in I$ est associé une partie N_i de M_i qui contient $M_{i,ind}$ (en particulier, $1 \in N_i$) et qui pour $i \in I_{re}$ est contenue dans $\{1, 2\}$.

Pour $i \in I_{re}$, on définit $\alpha_i^\vee = 2\alpha_i^\wedge / a_{ii}$ comme en 1.1.

On note $\bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i$, l'ensemble des combinaisons linéaires des $\tilde{\alpha}_i$ à coefficients dans les M_i ; comme la réalisation est libre, c'est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^{(I)} = Q_{\mathbb{Q}}$.

Sous les hypothèses précédentes, on a :

si $\alpha \in \bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i$, alors $\langle \tilde{\alpha}, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in I_{re}$, puisque si $i \in I$ et $j \in I_{re}$, alors $M_j \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 2M_j a_{ij} / a_{ii} \subset \mathbb{Z}$.

Soit enfin :

$$K = \left\{ \alpha \in \bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i \setminus \left(\bigcup_{i \in I_{im}} M_i \tilde{\alpha}_i \right); S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I) \right\}.$$

Si $\alpha \in \bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i$, on définit la chaîne issue de α de direction $\tilde{\alpha}_i$ par :

$$\begin{aligned} Ch(\alpha, \tilde{\alpha}_i) &= \alpha + M_i \tilde{\alpha}_i \text{ si } i \in I_{im}, \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0 \text{ et } \alpha \notin \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i; \\ &= \{\alpha\} \text{ si } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0 \text{ ou } \alpha \in \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i; \\ &= \{\alpha, \alpha + \tilde{\alpha}_i, \dots, \alpha + u \tilde{\alpha}_i\} \text{ si } i \in I_{re}, \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -u \in -\mathbb{N} \text{ et } \alpha \notin \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i; \\ &= \{\alpha, \alpha - \tilde{\alpha}_i, \dots, \alpha + u \tilde{\alpha}_i\} \text{ si } i \in I_{re}, \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -u \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \notin \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i. \end{aligned}$$

Proposition 1.2.14 — Soit P_0 la plus petite des parties Θ de $\bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i$ telles que :

- (i) $\forall i \in I, N_i \tilde{\alpha}_i \subset \Theta$;
- (ii) $\forall i \in I, \forall \alpha \in \Theta, Ch(\alpha, \tilde{\alpha}_i) \subset \Theta$.

Alors, avec les notations précédentes : pour tout $\alpha \in K$ il existe $i \in I$ et $m_i \in M_{i,ind}$ tels que $\alpha - m_i \tilde{\alpha}_i \in P_0$ et $\langle \alpha - m_i \tilde{\alpha}_i, \alpha_i^\vee \rangle < 0$.

De plus, K est inclus dans P_0 .

Remarques. 1. La partie P_0 est facile à décrire à l'aide de la démonstration qui suit ; il s'agit de l'ensemble des éléments α de $\bigoplus_{i \in I} M_i \tilde{\alpha}_i$ pour lesquels il existe deux suites finies $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ et (i_0, i_1, \dots, i_n) où $n \in \mathbb{N}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) $\beta_n = \alpha$,
- (ii) $\beta_0 \in N_{i_0} \tilde{\alpha}_{i_0}$,
- (iii) pour $1 \leq m \leq n$, on a $\langle \beta_{m-1}, \alpha_{i_m}^\wedge \rangle < 0$, avec $\beta_{m-1} \notin M_{i_m} \tilde{\alpha}_{i_m}$, et $\beta_m \in Ch(\beta_{m-1}, \tilde{\alpha}_{i_m})$.

2. Le même résultat est encore valable si on remplace \mathbb{Q} par un corps ordonné archimédien \mathbf{K}_1 contenu dans un même corps ordonné que \mathbb{K} .

3. Notons que cette proposition établit, dans le cadre plus général considéré ici, l'analogie de la propriété (SR5) de 1.2.13.

Démonstration. (1) L'ensemble P_0 est l'intersection de toutes les parties Θ satisfaisant aux hypothèses de la proposition. Soit Θ une telle partie, montrons que tout élément α de K appartient à Θ .

Il suffit de montrer qu'il existe $i \in I$ et $m_i \in M_{i,ind}$ tels que $\alpha - m_i \tilde{\alpha}_i \in \Theta$ puisque :

- si $i \in I_{re}$, on a $\langle \alpha - \tilde{\alpha}_i, \alpha_i^\wedge \rangle = \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle - a_{ii} < 0$ car $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0$ et $a_{ii} > 0$;
- si $i \in I_{im}$, on sait par hypothèse que $\alpha - m_i \tilde{\alpha}_i$ est dans la partie Θ . C'est donc un élément de $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i$ à coordonnées toutes positives ou nulles. Par connexité du support de α , l'égalité $\alpha = (\alpha - m_i \tilde{\alpha}_i) + m_i \tilde{\alpha}_i$ implique soit $i \in S_{\alpha - m_i \tilde{\alpha}_i}$ (ce support n'étant pas réduit à $\{i\}$ par hypothèse sur les éléments de K), soit il lui est lié. Dans les deux cas, on a clairement $\langle \alpha - m_i \tilde{\alpha}_i, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$.

D'après les hypothèses sur Θ , on a $\alpha \in \Theta$ donc $K \subset \Theta$.

(2) Supposons donc $\alpha \in K$ et $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i$.

Considérons $\Theta_\alpha = \{\delta \in \Theta / \delta = \sum_{i \in I} p_i \tilde{\alpha}_i \text{ avec } n_i - p_i \in M_i (\forall i \in I) \text{ et } \delta \neq \alpha\}$. Par hypothèse, pour tout $i \in I$, on a $M_{i,ind} \tilde{\alpha}_i \subset \Theta$ et donc $\Theta_\alpha \neq \emptyset$.

L'image par la fonction hauteur de Θ_α est un ensemble borné de \mathbb{Q}_+ qui admet donc une borne supérieure μ dans \mathbb{R} . Soit $\beta \in \Theta_\alpha$ dont la hauteur est dans $[\mu - 1/2, \mu]$. Supposons $\beta = \sum_{i \in I} p_i \tilde{\alpha}_i$.

Il suffit de démontrer :

$$(*) \quad \exists i \in I, \exists m_i \in M_{i,ind} \text{ tels que : } \beta = \alpha - m_i \tilde{\alpha}_i.$$

Supposons l'assertion (*) fautive, et α minimale pour cela.

(a) Montrons alors l'égalité des supports S_β et S_α . Il est clair que $S_\beta \subset S_\alpha$.

Si $S_\beta \neq S_\alpha$, on considère un indice i dans $S_\alpha \setminus S_\beta$ lié au support de β , (il existe par connexité de S_α).

Par hypothèse $\langle \beta, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$, donc l'inclusion $Ch(\beta, \tilde{\alpha}_i) \subset \Theta$ implique que $\beta + n_i \tilde{\alpha}_i \in \Theta$, pour tout $n_i \in M_{i,ind}$; la négation de (*) et la maximalité de β entraînent alors une contradiction avec l'hypothèse $i \in S_\alpha \setminus S_\beta$ puisque la coordonnée de α suivant i est dans $M_i \setminus \{0\}$. On en déduit l'égalité des supports.

(b) Considérons alors le sous-ensemble de S_α :

$$\begin{aligned} L &= \{i \in S_\alpha / n_i \neq p_i\} = \{i \in S_\alpha / p_i \leq n_i - 3/4\} \\ &= \{i \in S_\alpha / \exists m_i \in M_i \setminus \{0\} ; p_i = n_i - m_i\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\beta \neq \alpha$ donc $L \neq \emptyset$. Montrons que $L \neq S_\alpha$, c'est-à-dire qu'il existe $i \in S_\alpha$ pour lequel $n_i = p_i$.

Supposons au contraire $L = S_\alpha$. Le support de α n'étant pas réduit à un élément, pour tout élément j du support, pour tout $m_j < n_j - p_j$ où $m_j \in M_{j,\text{ind}}$, et $n_j - p_j - m_j \in M_j$, on a $\beta + m_j \tilde{\alpha}_j \neq \alpha$ (à cause de la négation de $(*)$ et de la maximalité de β). Par définition de Θ_α , un tel m_j existe ce qui implique $\langle \beta, \alpha_j^\wedge \rangle \geq 0$ pour tout $j \in S_\beta$.

On en déduit que $A(S_\beta)\beta \geq 0$ et donc $A(S_\beta)$ qui est indécomposable (par connexité de S_β) est de type fini ou affine.

D'autre part, $A(S_\beta)\alpha \leq 0$ car $\alpha \in K$, ce qui interdit l'éventualité $A(S_\beta)$ de type fini. Donc $A(S_\beta)$ est de type affine et grâce au théorème de classification on a : $A(S_\beta)\beta \geq 0 \implies A(S_\beta)\beta = 0$ et $A(S_\beta)\alpha \leq 0 \implies A(S_\beta)\alpha = 0$.

La matrice $A(S_\beta)$ est de *corang* 1 donc α et β sont proportionnels et leurs coordonnées sont entières. Soit δ l'élément de \tilde{Q} de plus petite hauteur vérifiant $A(S_\beta)\delta = 0$, alors $\alpha = n\delta$, $\beta = m\delta$ avec $0 < m < n$.

D'après la minimalité de α , β satisfait à $(*)$ donc il existe $i \in S_\beta$ et $\gamma \in \Theta$ tels que $\gamma = \beta - \tilde{\alpha}_i$, puisque les indices contenus dans S_β sont réels. Alors $\langle \beta - \tilde{\alpha}_i, \alpha_i^\vee \rangle = -2$ donc $\beta + \tilde{\alpha}_i \in \Theta$. Or, $\beta + \tilde{\alpha}_i \leq \alpha$ et $\beta + \tilde{\alpha}_i \neq \alpha$, ce qui contredit la maximalité de β .

Les ensembles L et S_α ne peuvent donc pas être égaux.

(c) Montrer que $L \neq \emptyset$ et $L \neq S_\alpha$ permet d'aboutir à une contradiction.

Considérons une composante connexe F de L . Par connexité du support de α , la partie F est liée à $S_\alpha \setminus L = \{i \in S_\alpha ; n_i = p_i\}$. Soit i_0 un indice de F suivant lequel une telle liaison existe. D'après la définition de L et les hypothèses sur Θ , on a :

$$\forall i \in F, \langle \beta, \alpha_i^\wedge \rangle \geq 0.$$

Posons $\beta' = \sum_{i \in F} p_i \tilde{\alpha}_i$, alors :

$$\langle \beta', \alpha_i^\wedge \rangle = \langle \beta, \alpha_i^\wedge \rangle - \sum_{j \notin F} p_j \langle \tilde{\alpha}_j, \alpha_i^\wedge \rangle \geq 0 \quad (\forall i \in F) ;$$

$$\langle \beta', \alpha_{i_0}^\wedge \rangle = \langle \beta, \alpha_{i_0}^\wedge \rangle - \sum_{j \notin F} p_j \langle \tilde{\alpha}_j, \alpha_{i_0}^\wedge \rangle > 0.$$

En effet, comme $i \in F$, on sait que $\langle \tilde{\alpha}_j, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0$, pour tout $j \notin F$, et qu'il existe $j \in F$ tel que $\langle \tilde{\alpha}_j, \alpha_{i_0}^\wedge \rangle < 0$. Comme β' est un élément de $Q(F)$ dont toutes les coordonnées sont strictement positives, la propriété précédente implique :

la matrice $A(F)$ est de type fini.

Si d'autre part on considère $\gamma = \sum_{i \in F} (n_i - p_i) \tilde{\alpha}_i$, on a :

$$\langle \gamma, \alpha_i^\wedge \rangle = \langle \alpha - \beta, \alpha_i^\wedge \rangle \quad (\forall i \in F)$$

car F est une composante connexe du support L de $\alpha - \beta$, suivant laquelle les coordonnées de $\alpha - \beta$ et de γ coïncident.

Pour i dans F , on a $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0$ et $\langle \beta, \alpha_i^\wedge \rangle \geq 0$, ce qui implique :

$$\langle \gamma, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 \ (\forall i \in F).$$

Toutes les coordonnées de γ dans $Q(F)$ sont strictement positives donc :

la matrice $A(F)$ ne peut pas être de type fini.

D'où la contradiction cherchée ($F = \emptyset$ imposant $L = S_\alpha$).

(d) Par suite, pour tout α élément de K , on peut trouver $i \in I$ et $n_i \in M_i^*$ tel que $\alpha - n_i \tilde{\alpha}_i \in \Theta$ et donc $\alpha \in \Theta$. \square

Retour à l'étude du système de racines.

Sous les hypothèses de ce chapitre, notons $\tilde{\Pi} := (\tilde{\alpha}_i)_{i \in I}$, $\tilde{\Pi}_{\text{im}} := \tilde{\Pi}(I_{\text{im}})$ et :

$$K = \{ \alpha \in \tilde{Q}_+ \setminus (\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} \mathbb{Z} \tilde{\alpha}_i ; S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I) \}.$$

Proposition 1.2.15 — *On peut alors décrire $\tilde{\Omega}$:*

$$\tilde{\Omega} = \mathbb{W}\tilde{\Pi}_{\text{re}} \cup \pm \mathbb{W}\tilde{\Pi}_{\text{im}} \cup \pm \mathbb{W}K.$$

Remarque. La partie $\mathbb{W}\tilde{\Pi}_{\text{re}}$ est l'ensemble $\tilde{\Omega}^{\text{re}}$ des racines réelles de $\tilde{\Omega}$; il coïncide avec $\tilde{\Delta}^{\text{re}}$ décrit (comme $\tilde{\Pi}_{\text{re}}$) au cinquième paragraphe de 1.1.

Démonstration. En appliquant la proposition (1.2.14) à $\Theta = \tilde{\Omega}_+$ avec $M_i = \mathbb{N}$ pour tout i , on obtient immédiatement le résultat important $K \subset \tilde{\Omega}$.

D'après la stabilité de $\tilde{\Omega}$ sous \mathbb{W} , on a déjà l'inclusion $\mathbb{W}\tilde{\Pi}_{\text{re}} \cup \pm \mathbb{W}\tilde{\Pi}_{\text{im}} \cup \pm \mathbb{W}K \subset \tilde{\Omega}$. Il reste à montrer que toute racine positive est conjuguée à un élément de la base ou de K . Pour cela, il suffit de remarquer que, d'après la proposition 1.1.6, si un élément de $\tilde{\Omega}_+$ n'est pas conjugué à un élément de la base, alors son orbite sous \mathbb{W} est incluse dans \tilde{Q}_+ .

Alors un élément de hauteur minimale de cette orbite est dans K . \square

De façon immédiate, on en déduit que :

Corollaire 1.2.16 — *Le système de racines $\tilde{\Omega}$ de la donnée radicielle associée à l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds ne dépend pas de la réalisation, il est aussi le même que celui de toute algèbre \mathfrak{g}_1 construite comme dans la remarque 1. suivant 1.2.5.*

Les systèmes de racines $[\Omega]$ et Ω (cf. 1.2.5 Rq. 3, associés à cette algèbre dépendent des réalisations mais sont les mêmes pour \mathfrak{g}_1 .

Toute racine de Ω ou $[\Omega]$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe, des racines simples.

Définition 1.2.17 — L'égalité $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$ donne une bonne décomposition de la racine α si, dans \tilde{Q} , l'élément $\sum_{i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i$ est dans $\tilde{\Omega}$.

Corollaire 1.2.18 — On considère les systèmes de racines Ω et $[\Omega]$.

Ces systèmes de racines vérifient les conditions déduites des conditions de chaînes (SR3) et (SR4) ; en particulier, ils sont stables sous l'action du groupe de Weyl.

Si α est une racine réelle et si β une racine non proportionnelle à α , alors l'ensemble $\{\beta, \beta \pm \alpha, \dots, r_\alpha(\beta)\}$ est dans le système.

Si α_i est une racine imaginaire simple et β une autre racine positive (au sens où il existe une « bonne décomposition » de β dans $\sum_{i \in I} \mathbb{N} \alpha_i$), si $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ alors $\beta + \mathbb{N} \alpha_i$ est inclus dans le système.

Les deux systèmes vérifient (SR5) ($\alpha \in \Omega_+$ signifiant que α est positive au sens précédent).

Remarque

On vient de voir dans ce paragraphe qu'il est légitime de considérer des racines imaginaires en plus des racines réelles introduites en 1.1. On introduira abstraitement ces racines imaginaires dans les paragraphes suivants.

On peut noter qu'un certain nombre de résultats de la section 1.1 sur les racines réelles prouvés ici abstraitement à l'aide de [Hée 1]), peuvent être démontrés plus concrètement grâce à l'algèbre \mathfrak{g} ou \mathfrak{g}_{re} (voir [K]).

2. Systèmes de racines à base libre – axiomes et construction

Pour généraliser le chapitre 1, on peut prendre au moins deux directions :

- Être un peu moins contraignant pour la matrice de départ : ce changement n'est pas anodin puisqu'il permet de couvrir l'étude de formes d'algèbres de Lie (d'où le nom de ces matrices : matrices de Borchers relatives).
- Mais surtout faire un choix d'axiomes abstraits, permettant la construction effective du système de racines.

Pour ces axiomes, on exploite quatre principes :

- les coefficients des racines (exprimées en fonction des racines simples) sont tous de même signes (SR1b),
- on limite les multiples possibles d'une racine simple (SR2b),
- on impose des conditions de chaînes réelles (SR3b) et imaginaires (SR4b),
- une condition (SR5b) permet des raisonnements de minimalité (elle est analogue à la propriété (SR5) du chapitre 1).

La construction met tout de suite en évidence les difficultés générales, en particulier la vérification des relations de chaînes qui occupe la majeure partie de la construction.

Signalons enfin qu'il ne s'agit pas de la généralisation définitive -qui a lieu au chapitre 4 - puisque tout ceci n'est valable qu'en partant d'une réalisation libre (au sens de 1.1.4 Rq. 6.) de la matrice.

2.1 Matrices de Borchers relatives

Définitions

Une matrice de Borchers générale $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I^2}$, à coefficients dans \mathbb{K} , d'ensemble d'indices I fini ou dénombrable, sera dite *de Borchers relative* (en

abrégé M.R.) si, en plus des propriétés : (B1), (B2), (B3), (B4) de 1.1.1, elle vérifie la condition :

$$(B5') \quad i \in I_{\text{re}} \implies a_{ii} \in \{1, 2\}.$$

On définit alors une partition de I par :

$$\begin{aligned} a_{ii} = 1 &\iff i \in I_2 ; \\ a_{ii} = 2 &\iff i \in I_1 ; \\ a_{ii} < 0 &\iff i \in I_- ; \\ a_{ii} = 0 &\iff i \in I_0. \end{aligned}$$

On a alors $I_{\text{re}} = I_1 \sqcup I_2$ et $I_{\text{im}} = I_0 \sqcup I_-$.

Une telle matrice est dite *de Kac-Moody relative* si, de plus, tous ses coefficients sont des entiers (cf. [B₃R] où l'on trouvera la justification de ce genre de définition) ; sa transposée est alors encore de Kac-Moody relative.

Si $I_{\text{im}} = \emptyset$ et si la matrice A est de type fini, c'est une *matrice de Cartan relative*.

Dans le cas des matrices de Borchers relatives, on a, pour tout $j \in I$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_1$ et $2a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_2$. Le cas des matrices de Borchers relatives telles que $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_{\text{re}}$ est particulièrement intéressant (cf. 2.2).

Notons qu'une matrice de Cartan (resp. de Kac-Moody) relative n'est pas nécessairement une matrice de Cartan (resp. de Kac-Moody). Cependant, ce choix de définition est justifié par l'étude des systèmes de racines relatives des algèbres semi-simples (resp. des algèbres de Kac-Moody) qui sont associés (cf. chapitre 6 et [B₃R]) à des matrices de Cartan (resp. de Kac-Moody) relatives.

La *matrice de Borchers normalisée associée à A* notée $B(A)$ est déduite de A en multipliant par deux tous les coefficients d'une ligne indexée par i si $i \in I_2$, autrement dit ses coefficients b_{ij} vérifient $b_{ij} = 2a_{ij}$ si $i \in I_2$, et $b_{ij} = a_{ij}$ sinon.

Diagramme de Dynkin

Si A est une matrice de Borchers relative, on lui associe un *diagramme de Dynkin*, que l'on obtient à partir de celui de la matrice normalisée $B(A)$ en ajoutant une croix à côté des sommets correspondant aux éléments de I_2 .

Comme pour une matrice de Borchers normalisée, A est indécomposable (cf. 1.1) si et seulement si son diagramme de Dynkin est un graphe connexe.

Matrice de Kac-Moody associée

À une matrice de Borchers relative A , on associe une matrice de Kac-Moody normalisée, notée $K(A)$, définie par : $K(A) = (b_{ij})_{(i,j) \in I_{\text{re}}^2}$ où $b_{ij} = 2a_{ij}/a_{ii} \in \mathbb{Z}$, autrement dit $K(A) = B(A(I_{\text{re}})) = B(A)(I_{\text{re}})$.

Groupe de Weyl

Nous conservons les mêmes notations qu'au chapitre 1.

Le *groupe de Weyl* \mathbb{W} associé à la matrice A est celui attaché classiquement (cf. 1.1.5) à la matrice de Kac-Moody $K(A)$.

Considérons une réalisation $(Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}, Q_{\mathbb{K}}, \Pi, \Pi^{\wedge})$ de A sur \mathbb{K} dans laquelle :

- $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ et $\Pi^{\wedge} = (\alpha_i^{\wedge})_{i \in I}$ sont des bases de $Q_{\mathbb{K}}$ et $Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}$;
- la dualité entre $Q_{\mathbb{K}}$ et $Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}$ est définie par $\langle \alpha_i, \alpha_j^{\wedge} \rangle = a_{ji}$.

(En particulier, cette réalisation est libre et colibre (cf. 1.1.4 Rq. 6.))

Sous ces hypothèses, $\mathfrak{h}^{\wedge} = \tilde{Q}_{\mathbb{K}} = Q_{\mathbb{K}}$ et $\mathfrak{h} = \tilde{Q}_{\mathbb{K}}^{\wedge} = Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}$.

Pour alléger les notations dans ce chapitre, nous identifions Π et $\tilde{\Pi}$ et nous n'utiliserons donc pas le signe \sim .

Si $i \in I_{\text{re}}$, la *coracine* de α_i est l'élément suivant de $Q^{\wedge}(I_{\text{re}})$ (déjà introduit en 1.1) :

$$\alpha_i^{\vee} = 2\alpha_i^{\wedge}/a_{ii}.$$

Ainsi, $\alpha_i^{\vee} = \alpha_i^{\wedge}$ si $i \in I_1$, $\alpha_i^{\vee} = 2\alpha_i^{\wedge}$ si $i \in I_2$ et $\langle \alpha_j, \alpha_i^{\vee} \rangle = b_{ij}$ pour tout $(i, j) \in I_{\text{re}}^2$.

Alors, si τ (resp. τ^{\wedge}) désigne la représentation de \mathbb{W} dans $\text{GL}(Q_{\mathbb{K}})$ (resp. dans $\text{GL}(Q_{\mathbb{K}}^{\wedge})$), $R_i.\alpha = \tau(R_i)(\alpha) = r_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_i^{\vee} \rangle \alpha_i$ pour tout $\alpha \in Q_{\mathbb{K}}$ (resp. pour tout $\alpha^{\wedge} \in Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}$, $R_i.\alpha^{\wedge} = \tau^{\wedge}(R_i)(\alpha^{\wedge}) = r_i^{\vee}(\alpha^{\wedge}) = \alpha^{\wedge} - \langle \alpha_i, \alpha^{\wedge} \rangle \alpha_i^{\vee}$).

En général, r_i^{\vee} ne stabilise pas Q^{\wedge} (ni $Q^{\wedge}(I_{\text{re}})$) ; par contre, il stabilise $Q_{\mathbb{Q}}^{\wedge}(I_{\text{re}})$ puisque $2a_{ji} \in \mathbb{Z}$ dès que $j \in I_{\text{re}}$.

Comme la réalisation considérée est libre et colibre, la proposition 1.1.6 (e) établit la fidélité de ces deux représentations. Dans la suite, via les isomorphismes qui se déduisent de ce résultat, nous identifierons R_i, r_i^{\vee} et r_i , et de même, \mathbb{W}, W^{\vee} et W .

On définit, comme au chapitre précédent, la longueur d'un élément de W . Il est facile de démontrer que W stabilise $Q(I_{\text{re}})$, et que :

$$\begin{aligned} \forall w \in W, (w - \text{Id}_Q)(Q) &\subset Q(I_{\text{re}}) ; \\ r_i(Q_{\mathbb{Q},+}) \cap Q_{\mathbb{Q},-} &= \mathbb{Q} - \alpha_i. \end{aligned}$$

Notons pour simplifier : $\Pi_{\text{re}} ; \Pi_{\text{im}} ; \Pi_1 ; \Pi_2 ; \Pi_0 ; \Pi_-$ les intersections de Π et de $Q_{\mathbb{Q}}(I_{\text{re}}) ; Q_{\mathbb{Q}}(I_{\text{im}}) ; Q_{\mathbb{Q}}(I_1) ; Q_{\mathbb{Q}}(I_2) ; Q_{\mathbb{Q}}(I_0) ; Q_{\mathbb{Q}}(I_-)$; elles sont indexées par $I_{\text{re}}, I_{\text{im}}, I_1, I_2, I_0, I_-$.

Lemme 2.1.1 — *Supposons que la matrice de Borchers relative A vérifie de plus : si $i \in I_2$, alors quel que soit $j \in I_{\text{re}}$, $a_{ij} \neq -1/2$.*

Soit $w \in W$, si $w.\alpha_i = \mu\alpha_j$ avec $\mu \in \mathbb{N}^$ alors :*

- (a) $\mu = 1$,

(b) si i et j sont distincts, alors i et j sont dans I_1 , et peuvent être connectés dans le diagramme de Dynkin par un chemin formé de liaisons simples entre des éléments de I_1 .

(c) $w.\alpha_i^\wedge = \alpha_j^\wedge$.

Démonstration. D'après la démonstration du lemme 1.1.9, si $w.\alpha_i = \mu\alpha_j$ avec $\mu \in \mathbb{N}^*$ alors : $\mu = 1$. Si, de plus, i et j sont distincts, alors ils sont réels et dans ce cas, s'ils sont liés, $b_{ij}b_{ji} = 1$. Par suite, $a_{ij} = a_{ji} = -1 = b_{ij} = b_{ji}$ puisque a_{ij} et a_{ji} ne peuvent être égaux à $-1/2$. Ainsi, $a_{ii} = a_{jj} = 2$ et les deux indices considérés sont donc dans I_1 . Le reste découle alors des lemmes 1.1.9 et 1.1.16. \square

Reprenons les notations introduites pour le lemme 1.1.15 et rappelons (1.1.4 Rq. 7.) que pour $\alpha \in Q_{\mathbb{K}}$, $ht(\alpha)$ désigne la hauteur de α et S_α son support.

Lemme 2.1.2 — Soient $i \in I_{re}$, $w \in W$ et $\alpha \in B_{\mathbb{Q}}$, on a :

$$\begin{aligned} ((l(w) < l(r_i w)) \implies (ht(w.\alpha) \leq ht(r_i w.\alpha) \text{ et } S_{w.\alpha} \subset S_{r_i w.\alpha})) \\ (ht(w.\alpha) < ht(r_i w.\alpha)) \implies (l(w) < l(r_i w)). \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on a $S_{w.\alpha} \neq S_{r_i w.\alpha}$ si et seulement si $i \notin S_{w.\alpha}$ mais est lié à $S_{w(\alpha)}$ et alors $S_{r_i w.\alpha} = S_{w.\alpha} \cup \{i\}$.

Démonstration. D'après (1.1.6), on a $l(r_i w) = l(w^{-1}r_i) > l(w) = l(w^{-1}) \iff w^{-1}.\alpha_i \in Q_+$.

Ceci implique, d'après (1.1.10), $\langle \alpha, w^{-1}(\alpha_i^\wedge) \rangle \leq 0$ et permet d'établir l'inégalité $ht(w.\alpha) \leq ht(r_i w.\alpha)$ ainsi que l'inclusion des supports.

Si $ht(w.\alpha) < ht(r_i w.\alpha)$, on a $\langle \alpha, w^{-1}(\alpha_i^\wedge) \rangle < 0$ donc $w^{-1}.\alpha_i \notin Q_-$, d'où $w^{-1}.\alpha_i \in Q_+$ d'après les résultats de Hée rappelés en 1.1. Le résultat annoncé en résulte alors.

Sous ces hypothèses, on a $r_i w.\alpha = w.\alpha - \langle \alpha, w^{-1}(\alpha_i^\vee) \rangle \alpha_i$, et les deux termes de cette somme sont dans Q_+ , on a donc facilement la dernière assertion. \square

Corollaire 2.1.3 — Pour tout $\alpha \in B_{\mathbb{Q}}$ dont le support est connexe et pour tout $w \in W$, le support de $w.\alpha$ est connexe.

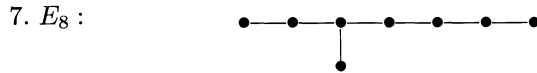
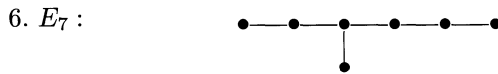
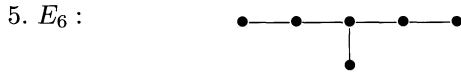
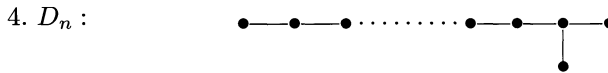
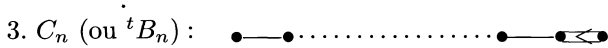
Démonstration. L'assertion résulte immédiatement de 2.1.2. \square

Matrices de Kac-Moody relatives et indécomposables (M. R. I.). Classification

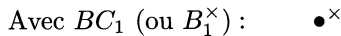
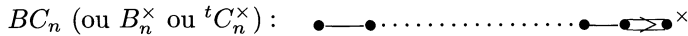
Dans la classification qui va suivre, le nombre $|I|$ de sommets du graphe de Dynkin est l'entier n ou $n + 1$ selon que le type est fini ou affine ; cet entier n figure en indice d'au moins un des noms proposés (le premier). Si un nom comporte des croix en exposant (une ou deux suivant le nombre de croix du diagramme) le nom

de la matrice normalisée correspondante s'obtient en retirant ces croix. Le « t » en haut à gauche d'un nom de matrice normalisée correspond au passage à la matrice transposée (qui est de même type cf. 1.1).

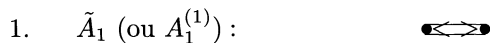
• Les *MRI normalisées de type fini* sont les matrices de Cartan (cf. [K ; n° 4 table Fin])



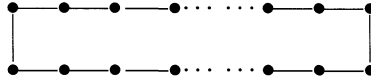
La seule *M.R.I de type fini non normalisée* est la matrice déduite de celle correspondant au système B_n en divisant la dernière ligne par 2, le système correspondant étant BC_n ; son diagramme est :



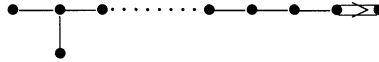
• Les *M.R.I normalisées de type affine* sont les matrices de type affine usuelles (cf. [K ; n° 4 table Aff]) ainsi que l'unique M.R.I affine imaginaire Z_0 :



2. \tilde{A}_n (ou $A_n^{(1)}$) pour $n \geq 2$:



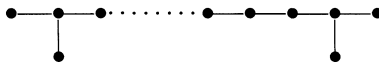
3. \tilde{B}_n (ou $B_n^{(1)}$) pour $n \geq 3$:



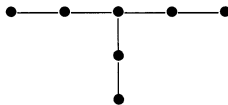
4. \tilde{C}_n (ou $C_n^{(1)}$) pour $n \geq 2$:



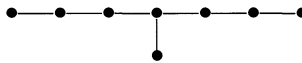
5. \tilde{D}_n (ou $D_n^{(1)}$) pour $(n \geq 4)$:



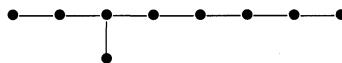
6. \tilde{E}_6 (ou $E_6^{(1)}$) :



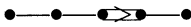
7. \tilde{E}_7 (ou $E_7^{(1)}$) :



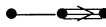
8. \tilde{E}_8 (ou $E_8^{(1)}$) :



9. \tilde{F}_4 (ou $F_4^{(1)}$) :



10. \tilde{G}_2 (ou $G_2^{(1)}$) :



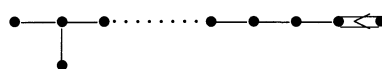
11. \widetilde{BC}_1 (ou $A_2^{(2)}$) :



12. \widetilde{BC}_n (ou $A_{2n}^{(2)}$) ($n \geq 2$) :



13. ${}^t\tilde{B}_n$ (ou $A_{2n+1}^{(2)}$) pour $n \geq 3$:



14. ${}^t\tilde{C}_n$ (ou $D_{n+1}^{(2)}$) pour $n \geq 2$:



- 15. ${}^t\tilde{F}_4$ (ou $E_6^{(2)}$) :
- 16. ${}^t\tilde{G}_2$ (ou $D_4^{(3)}$) :
- 17. Z_0 (ou $Z_0^{(1)}$) :

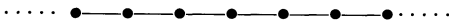


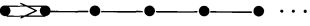
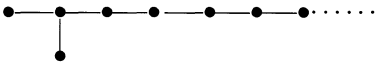
Les noms donnés entre parenthèses sont (sauf pour $Z_0^{(1)}$) ceux de [K]. Ils font référence à la réalisation de l’algèbre de Kac-Moody affine correspondante comme algèbre de lacet. Les noms donnés ici en premier sont plus naturels dans la théorie abstraite des systèmes de racines ; ils apparaissent (pour la plupart) sous cette forme dans [Ra].

• *Les M.R.I de type affines non normalisées* sont celles dont les diagrammes de Dynkin sont :

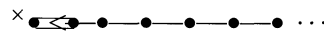
- 1. \tilde{A}_1^\times (ou $A_1^{(1)\times}$) :
- 2. $\tilde{A}_1^{\times\times}$ (ou $A_1^{(1)\times\times}$) :
- 3. \widetilde{BC}_n^\times (ou $A_{2n}^{(2)\times}$) ($n \geq 2$) :
- 4. \widetilde{BC}_1^\times (ou $A_2^{(2)\times}$) :
- 5. \tilde{C}_2^\times (ou $C_2^{(1)\times}$) :
- 6. \tilde{B}_n^\times (ou $B_n^{(1)\times}$) :
- 7. ${}^t\tilde{C}_n^\times$ (ou $D_{n+1}^{(2)\times}$) :
- 8. ${}^t\tilde{C}_n^{\times\times}$ (ou $D_{n+1}^{(2)\times\times}$) :

Cette classification se déduit facilement de la classification des matrices de Kac-Moody affines de 1.1. et de 2.1. Elle correspond (sauf pour Z_0) à la classification des échelonnages de Bruhat et Tits [BR T1, BR T2], cf. [B3R].

• *Les MRI de type profini* (cf. la classification de 1.1) sont celles qui ont pour diagrammes de Dynkin :

1. A_∞ 
2. $A_{+\infty}$ 
3. B_∞ 
4. C_∞ 
5. D_∞ 

6. BC_∞ (ou B_∞^\times) (seule M.R.I de type profini non normalisée) :



Cette classification résulte de 2.1 et de l'exercice 4.14 de [K].

Coracines

Corollaire 2.1.4 — *Supposons comme en 2.1.1, que si $i \in I_2$, alors quel que soit $j \in I_{re}$, on a $a_{ij} \neq -1/2$.*

Si $\alpha = w(\alpha_i)$, alors $w(\alpha_i^\wedge)$ ne dépend que de α (et pas de la racine simple ni de l'élément du groupe de Weyl). Autrement dit, si $w(\alpha_i) = w'(\alpha_{i'})$, alors $w(\alpha_i^\wedge) = w'(\alpha_{i'}^\wedge)$.

Remarques et définitions. D'après 1.1.10, si $i \in I_{re}$, l'assertion précédente est vraie aussi pour $w(\alpha_i^\vee)$ qui est la coracine de α , notée α^\vee . Notons en effet que (comme à la remarque 9 suivant 1.1.4), $R' = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation de la matrice normalisée $B(A)$.

Si $\alpha = w.\alpha_i$ et si $i \in I_2$ (c'est-à-dire si $\alpha_i^\vee \neq \alpha_i^\wedge$ i.e. $\alpha_i^\vee = 2\alpha_i^\wedge$), on pose $(2\alpha)^\vee = w.\alpha_i^\wedge$, c'est la coracine de 2α (qui est considérée comme une racine : cf. 2.2).

Enfin, si $i \in I_{im}$, la coracine de $w(\alpha_i)$ est $w(\alpha_i^\wedge)$.

Démonstration. D'après 2.1.1,

$$w(\alpha_i) = w'(\alpha_j) \implies w^{-1}w'(\alpha_j) = \alpha_i \implies w^{-1}w'(\alpha_j^\wedge) = \alpha_i^\wedge.$$

et dans ce cas i et j sont simultanément dans I_1, I_2, I_0 ou I_- . □

Lemme 2.1.5 — Si $i \in I$, et si $w \in W$, alors :

$$S_{w(\alpha_i)} = S_{w(\alpha_i^\wedge)}.$$

Démonstration. Si $i \in I_{\text{re}}$, cela résulte de 1.1.12.

Si $i \in I_{\text{im}}$, on sait que $w.\alpha_i - \alpha_i \in Q(I_{\text{re}})$, de même $w(\alpha_i^\wedge) - \alpha_i^\wedge \in Q_{\mathbb{Q}}^\wedge(I_{\text{re}})$ et il s'agit de montrer l'égalité des supports de ces deux éléments.

Considérons une décomposition de longueur minimale de w , $w = R_{i_1} \dots R_{i_n}$,

$$\begin{aligned} w.\alpha_i - \alpha_i &= \sum_{s \leq n} R_{i_1} \dots R_{i_s}.\alpha_i - R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}.\alpha_i ; \\ &= \sum_{s \leq n} R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}(-\langle \alpha_i, \alpha_{i_s}^\wedge \rangle \alpha_{i_s}). \end{aligned}$$

Or, $i \in I_{\text{im}}$, donc $\langle \alpha_i, \alpha_{i_s}^\wedge \rangle \leq 0$, et par minimalité de la décomposition on a selon (1.1.6) :

$$R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}.\alpha_{i_s} \in Q_+.$$

Comme $w(\alpha_i) - \alpha_i$ est la somme de tels éléments, son support est la réunion des supports des $r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}}(\alpha_{i_s})$ qui ne sont pas affectés d'un coefficient nul. On obtient bien sûr une décomposition tout à fait analogue de $w.\alpha_i^\wedge - \alpha_i^\wedge$ dans $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$. On sait, d'après le cas réel que :

$$S_{R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}(\alpha_{i_s})} = S_{R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}(\alpha_{i_s}^\wedge)}$$

Enfin, comme la matrice vérifie la propriété de symétrie combinatoire (B4), les coefficients des termes $R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}(\alpha_{i_s})$ et $R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}}(\alpha_{i_s}^\wedge)$ dans les deux décompositions sont simultanément nuls ou strictement positifs. D'où le résultat. \square

Lemme 2.1.6 — Si $i \in I$, $w \in W$ et $w.\alpha_i \geq 0$, alors $w.\alpha_i^\wedge \geq 0$.

Remarque. Comme au 1.1, $u \geq 0$ signifie que ses coordonnées dans les bases $(\alpha_i)_{i \in I}$ ou $(\alpha_i^\wedge)_{i \in I}$ sont toutes positives ou nulles.

Démonstration. Pour $i \in I_{\text{re}}$, cela résulte de 1.1.10. Pour α_i avec $i \in I_{\text{im}}$, le résultat est clair en introduisant dans $Q_{\mathbb{K}}^\wedge$ les parties :

$$B_{\mathbb{K}}^{\wedge} = \{ \alpha \in Q_{\mathbb{K}^+}^\wedge / w.\alpha - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{K}_+ \alpha_i, \forall w \in W \} ;$$

$$B_{\mathbb{K}}^{\wedge} = \{ \alpha \in Q_{\mathbb{K}^+}^\wedge / \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0, \forall i \in I_{\text{re}} \}.$$

On a encore $B_{\mathbb{K}}^{\wedge} = B_{\mathbb{K}}^{\wedge}$ comme en 1.1.15 et $\alpha_i \in B^{\wedge}$, ce qui implique le résultat. \square

Lemme 2.1.7 — Si α et β sont dans $W.\Pi$, alors $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ et $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ sont de même signe au sens strict.

Démonstration. Le résultat a déjà été établi pour α et β réelles (cf. 1.1.11).

Si β est imaginaire, quitte à conjuguer sous W , on peut supposer $\beta = \alpha_i$ où $i \in I_{\text{im}}$. Alors, $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ (resp. $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle$) :

- est strictement négatif si et seulement si α est positive et son support est lié à i (et n'est pas réduit à $\{i\}$ si $i \in I_0$) ;
- est strictement positif si et seulement si α est négative et son support est lié à i (et n'est pas réduit à $\{i\}$ si $i \in I_0$) ;
- est nul si et seulement si le support de α n'est pas lié à i (ou est réduit à $\{i\}$ si $i \in I_0$).

□

2.2 Systèmes de racines à bases libres

Généralités

Supposons donnée une matrice de Borcherds relative, indexée par $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_0 \sqcup I_-$ partition définie comme précédemment.

Notations.

Pour tout $i \in I$, on suppose donnée une partie N_i de \mathbb{Q}_+^* telle que :

- (a) N_i admet comme plus petit élément 1, ou elle ne contient pas sa borne inférieure, mais est minorée par $3/4$ et contient 1 ;
- (b) si $i \in I_2$, alors $N_i = \{1, 2\}$;
- (c) si $i \in I_1$, alors $N_i = \{1\}$;
- (d) si $i \in I$ et $j \in I_{\text{re}}$, alors $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (en particulier, cela impose $a_{ji} \in \mathbb{Z}$).

On note $N_{i,\text{ind}}$, l'ensemble des éléments indécomposables de N_i (i.e. les éléments p de N_i qui ne s'écrivent pas comme somme d'éléments de N_i), et M_i le plus petit sous-ensemble de \mathbb{Q}_+ qui contient 0 et N_i et qui est stable par l'addition (on a donc $M_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{\text{re}}$). On a $1 \in N_{i,\text{ind}}$. Il est clair que $M_i \setminus \{0\}$ admet la même borne inférieure que N_i et est engendré par $N_{i,\text{ind}}$ pour l'addition ; ainsi, $N_{i,\text{ind}} = M_{i,\text{ind}}$ (avec les notations de la parenthèse abstraite de 1.2).

Définition.

On appelle alors *système de racines à base libre* $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$, associé à A et aux N_i un sous-ensemble Δ de $Q_{\mathbb{Q}}$ (dont les éléments sont appelés des racines), qui vérifie les propriétés suivantes :

(SR1b) $\Delta = \Delta_+ \sqcup (-\Delta_+)$ où $\Delta_+ = \Delta \cap Q_{\mathbb{Q},+}$;

(SR2b) $\forall i \in I, \mathbb{Q}_+ \alpha_i \cap \Delta = N_i \alpha_i$;

(SR3b) $\forall i \in I_{\text{re}}, \forall \alpha \in \Delta \setminus \mathbb{Z} \alpha_i,$

$$\{\alpha + s\alpha_i/s \in \mathbb{Z}, -\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq s \leq 0\} \subset \Delta \text{ si } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 ;$$

$$\{\alpha + s\alpha_i/s \in \mathbb{Z}, -\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geq s \geq 0\} \subset \Delta \text{ si } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0 ;$$

(SR4b) $\forall i \in I_{\text{im}}, \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \alpha_i,$

$$\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0 \iff \alpha + M_i \alpha_i \in \Delta_+ ;$$

$$\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle = 0 \implies \alpha + n_i \alpha_i \notin \Delta_+ (\forall n_i \in N_{i,\text{ind}}) ;$$

(SR5b) $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \bigsqcup_{i \in I} \mathbb{Q}_+ \alpha_i,$ il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,\text{ind}}$ tels que : $\alpha - n_i \alpha_i \in \Delta$.

Le sous-ensemble $\Delta \cap Q_{\mathbb{Q},-}$ est noté Δ_- ; on a donc $\Delta_+ = -\Delta_-$.

Nous démontrerons en 2.2.1, l'unicité d'un tel système de racines.

Enfin, nous établirons son existence en 2.4.1, en précisant sa construction.

Remarques et définitions. (1) D'après (SR1b), si $\alpha \in \Delta$, alors $-\alpha \in \Delta$. D'après (SR1b) et (SR3b), Δ est stable par r_i pour $i \in I_{\text{re}}$.

(2) *Diagramme de Dynkin associé.* À un tel système de racines à base libre, on associe le diagramme de Dynkin de la matrice de Borchers relative A , auquel on ajoute encore les ornements suivants : pour un sommet correspondant à un indice i imaginaire, on note en indice l'ensemble N_i , s'il n'est pas réduit à $\{1\}$.

(3) L'hypothèse $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (i.e. $N_i \alpha_i (\alpha_j^\wedge) \subset \mathbb{Z}$) peut être remplacée dans ce 2.2, par une hypothèse un peu moins forte qui est $N_i (2a_{ji}/a_{jj}) \subset \mathbb{Z}$ (i.e. $N_i \alpha_i (\alpha_j^\vee) \subset \mathbb{Z}$) ; elle est utile dans la section 2.3 (à partir de 2.3.3), c'est-à-dire pour l'existence du système de racines. Cependant, nous pourrions généraliser en fin de section 4.4 les résultats de 2.3 et 2.4 sous l'hypothèse suivante (un peu plus forte que celle introduite dans les lemmes 2.1.1 et 2.1.4) : $N_i (2a_{ji}/a_{jj}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $(i, j) \in I_{\text{re}} \times I$ et $a_{ij} \neq -1/2$ si $(i, j) \in I_2 \times I$ (sous les hypothèses de la fin de 4.4).

(4) À partir des propriétés (SR1b), (SR2b), (SR5b), il est aisé de voir que si un tel système existe, il est inclus dans $\pm \bigoplus_{i \in I} M_i \alpha_i$. De plus, $\bigoplus_{i \in I} \pm M_i \alpha_i$ est stable sous l'action de W (si $j \in I_{\text{re}}$, on a $2M_i a_{ji}/a_{jj} = M_i \alpha_i (\alpha_j^\vee) \subset \mathbb{Z}$).

Démonstration de (4). En effet, grâce à (SR1b), et (SR5b), si α est dans $Q_{\mathbb{Q}}$ et dans le système de racines à base libre, il existe une suite finie $\{i_j\}_{\leq n}, (n \in \mathbb{N})$ d'éléments de I et des $n_{i_j} \in N_{i_j, \text{ind}}$ tels que pour tout $s \leq n, \alpha - n_{i_1} \alpha_{i_1} \dots - n_{i_s} \alpha_{i_s}$ est encore dans $Q_{\mathbb{Q}}$ et dans le système de racines et telle que $\alpha - n_{i_1} \alpha_{i_1} \dots - n_{i_s} \alpha_{i_s}$ est proportionnel à une racine de la base. D'où le résultat. \square

(5) L'hypothèse $N_j a_{ij} \subset \mathbb{Z}$ pour $i \in I_{\text{re}}$ (ou l'hypothèse de la remarque (3)), et la remarque précédente assurent que pour tout $\alpha \in \Delta$, le scalaire $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ (pour

$i \in I_{\text{re}}$) est entier, ainsi $r_i \cdot \alpha \in \alpha + \mathbb{Z}\alpha_i$ et l'ensemble décrit en (SR3b), qui est appelé la « α_i -chaîne » de α à $r_i \cdot \alpha$, contient $r_i \cdot \alpha$; de plus, il coïncide avec la α_i -chaîne de $r_i \cdot \alpha$ à α .

(6) Sous l'hypothèse (SR1b), (SR3b) est équivalente à la condition :

(SR3) (encore appelée *condition de chaînes réelles*) (cf. 1.2.13) $\forall i \in I_{\text{re}}, \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i$ alors $\{\alpha + s\alpha_i/s \in \mathbb{Z}\} \cap \Delta = \{\alpha - p\alpha_i, \dots, \alpha + q\alpha_i\} \subset Q_+$ où p et q sont dans \mathbb{N} et $p - q = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$.

Démonstration de 6. L'implication (SR3) \implies (SR3b) est évidente. Pour montrer la réciproque, considérons l'ensemble S tel que $\{\alpha + s\alpha_i/s \in \mathbb{Z}\} \cap \Delta = \{\alpha + s\alpha_i, s \in S\}$. D'après (SR1b), il est clair que cette intersection est incluse dans $Q_{\mathbb{Q},+}$, donc S est un ensemble minoré de \mathbb{Z} qui admet un plus petit élément noté $-p$. Par suite, $\alpha - p\alpha_i \in \Delta$ et (SR3b) implique $r_i(\alpha - p\alpha_i) = \alpha + (-\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + p)\alpha_i \in \Delta$ et $\{-p, -p+1, \dots, p - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle\} \subset S$ car $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ (cf. remarque (5)).

Si il existe un élément $q > p - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ dans S , l'image par r_i de $\alpha + q\alpha_i$ est également dans Δ , donc, $\alpha - (\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + q)\alpha_i \in \Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$, ce qui implique $-(\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + q) \in S$, avec $-(\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + q) < -p$ et donc contredit la minimalité de p .

On obtient alors aisément tous les résultats de (SR3b). \square

(7) Si $i \in I_{\text{im}}$, $\langle \alpha_i, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0$ donc si $\alpha \in \Delta_+$, on a $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0$. Ainsi, sous (SR4b) : $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0 \iff \exists n_i \in N_{i,\text{ind}} ; \alpha + n_i\alpha_i \in \Delta_+$ et la seconde assertion de (SR4b) est une équivalence.

(8) On verra (en 2.3.4 et 2.4.1) que tout élément α de Δ a un support S_α connexe. L'hypothèse $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle = 0$ équivaut (pour $\alpha \in \Delta_+$ et $i \in I_{\text{im}}$) à $S_\alpha \cup \{i\}$ disconnexe et implique donc $\alpha + n_i\alpha_i \notin \Delta_+$, pour chaque $n_i \in M_i$.

(9) On dit toujours que α_i est une « racine simple » ; cependant, lorsque N_i n'est pas inclus dans $[1, \infty[$, α_i n'est pas bien déterminée par la demi-droite $\mathbb{Q}_+\alpha_i$.

(10) Si $\alpha \in \bigoplus_{i \in I} M_i\alpha_i$, alors pour tout w dans le groupe de Weyl, $w \cdot \alpha - \alpha$ est dans $Q(I_{\text{re}})$. Ainsi, si l'orbite $W \cdot \alpha$ de α sous W est contenue dans $\bigoplus_{i \in I} M_i\alpha_i$, cette orbite contient un élément de plus petite hauteur qui est forcément dans $B_{\mathbb{Q}}$ (cf. 1.1.14).

(11) On pourrait, dans ces définitions et les résultats qui vont suivre, remplacer \mathbb{Q} par un corps ordonné archimédien \mathbf{K}_1 contenu dans un même corps ordonné que \mathbb{K} .

Motivation de ces définitions

D'après 1.2.13, le système de racines à base libre d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds est du type indiqué avec $N_i = \{1\}$ pour tout i . Dans [B₃R], nous avons rencontré de tels systèmes de racines avec $N_i = \mathbb{N}^*$ pour $i \in I_{\text{im}}$. Dans

[B ; A 2.7] et [B-R], on trouve des systèmes avec $I = I_0$ réduit à un élément i et $N_i = \{n \in \mathbb{N}/n \text{ non multiple de } s\}$ pour un certain entier s .

La définition précédente est donc une généralisation naturelle. On verra d'ailleurs en 2.4 que beaucoup de ces systèmes de racines sont des systèmes Ω associés à une algèbre de Kac-Moody-Borcherds.

En ce qui concerne N_i :

- les raisonnements par récurrence sur la hauteur des racines nécessitent que 0 ne soit pas adhérent à N_i , on a donc supposé par normalisation que $1 \in N_i$ et $N_i \subset [3/4, +\infty[$.
- On aurait pu imposer : « N_i contient sa borne inférieure (dans \mathbb{R}) », ou « N_i n'a pas de points d'accumulation dans \mathbb{R} » ou même « N_i est à dénominateurs bornés » (c'est toujours le cas s'il existe un $j \in I_{re}$ tel que $a_{ji} \neq 0$ et c'est vérifié dans la plupart des applications), cela aurait eu l'avantage que α_i soit bien déterminé pour tout i . Malheureusement, cela aurait compliqué les théorèmes de passage aux quotients et aux sous-systèmes que l'on démontrera.

Résultat d'unicité

Théorème 2.2.1 — *Sous les hypothèses précédentes, si, pour une famille $(N_i)_{i \in I}$ (satisfaisant aux hypothèses de 2.2) donnée, il existe un système de racines à base libre, alors il est unique. De plus, lorsqu'un tel système Δ existe, il est le plus petit sous-ensemble Ω de $Q_{\mathbb{Q}}$ qui vérifie (SR1b), (SR2b), (SR3b) et (SR4b).*

N.B : S'il existe, ce système est noté $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$. D'après la proposition 1.2.14 et la deuxième assertion de ce théorème, ce système est égal à $P_0 \cup -P_0$.

Démonstration. Supposons donc l'existence d'un système Δ vérifiant (SR1b), (SR2b), (SR3b), (SR4b) et (SR5b).

Considérons l'ensemble \mathfrak{F} des sous-ensembles Γ de Q qui vérifient simultanément (SR1b), (SR2b), (SR3b), (SR4b). Par hypothèse, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Notons Ω l'intersection de tous les éléments de \mathfrak{F} . On vérifie aisément que $\Omega \in \mathfrak{F}$.

Il est clair que $\Omega \subset \Delta$. Montrons l'inclusion inverse.

Supposons au contraire que Δ ne soit pas inclus dans Ω . Par (SR1b), qui est vérifié par les deux ensembles, il existe un élément β de Δ_+ qui n'est pas dans Ω_+ . L'ensemble des valeurs de la hauteur sur les éléments de $\Delta_+ \setminus \Omega_+$ admet une borne inférieure h_0 dans \mathbb{R} . Soit alors un élément α de $\Delta_+ \setminus \Omega_+$ tel que $ht(\alpha) - h_0 < 1/2$.

Par hypothèse, Δ vérifie (SR5b) ; par suite, il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,ind}$ tel que $\alpha - n_i \alpha_i \in \Delta_+$. Le coefficient de α suivant α_i est nécessairement strictement positif et α n'est pas proportionnel à α_i ((SR2b) est vérifié dans Ω et dans Δ). De plus, il en est de même de $\alpha - n_i \alpha_i$, cet élément est forcément (par minimalité de α) dans

Ω puisque $n_i \geq 3/4$, mais on sait que Ω vérifie les quatre premières propriétés de la définition. En conséquence :

(a) Cas où $i \in I_{\text{im}}$.

(a.1) Si $\langle \alpha - n_i \alpha_i, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$, alors, par (SR4b) dans Ω , $\alpha - n_i \alpha_i + n_i \alpha_i = \alpha \in \Omega$;

(a.2) Si $\langle \alpha - n_i \alpha_i, \alpha_i^\wedge \rangle \geq 0$ (donc est nul puisque $\alpha - n_i \alpha_i \in \Delta_+$), alors, par (SR4b) dans Δ , on a $\alpha - n_i \alpha_i + n_i \alpha_i \notin \Delta$.

Dans les deux cas, on a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha \in \Delta \setminus \Omega$.

(b) Cas où $i \in I_{\text{re}}$. Grâce à (SR3b), la α_i -chaîne liant $\alpha - \alpha_i$ à son image sous r_i est incluse dans les deux systèmes. Notre hypothèse $\alpha \notin \Omega$ implique donc $\langle \alpha - \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$. Mais alors, $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ et comme $r_i(\alpha) \in \Delta_+$, l'élément $r_i(\alpha)$ est de hauteur strictement inférieure à α ; d'où une contradiction avec la caractérisation de α puisque par (SR3b) dans Ω , $r_i \cdot \alpha$ n'est pas non plus un élément de Ω .

Par suite, un tel élément α ne peut exister et donc $\Delta = \Omega$. □

Remarque. Si un ensemble Δ' vérifie les mêmes hypothèses que ci-dessus en remplaçant toutefois dans (SR4b) et (SR5b) $N_{i,\text{ind}}$ pour $i \in I_{\text{im}}$, par un sous-ensemble S_i de M_i contenant $N_{i,\text{ind}}$, alors la démonstration ci-dessus montre encore que Δ' est égal à Ω . D'ailleurs le Δ que l'on va construire vérifie cette hypothèse (SR4b) modifiée (cf. 2.2 Rq. (8) ou 2.3.9).

Théorème 2.2.2 — *Si, pour tout i dans I , on a $N_i \subset \mathbb{N}$, et si l'on suppose encore l'existence du système de racines à base libre, il est inclus dans tous les sous-ensembles de Q contenant Π et qui vérifient (SR1) (dont l'énoncé donné en 1.2.13 est identique à (SR1b) mais dans Q), (SR2b), (SR3b), (SR4b). (c'est donc le plus petit d'entre eux.)*

Remarque. Notons que si $N_i \subset \mathbb{N}$, on a $N_{i,\text{ind}} = \{1\}$ et $M_i = \mathbb{N}$ et ainsi les hypothèses (SR4) de 1.2.13 et (SR4b) (resp. (SR5) de 1.2.13 et (SR5b)) sont équivalentes.

Démonstration. Sous les hypothèses de (2), le système est inclus dans Q (voir Rq. 4. n° 2.2). La démonstration est alors essentiellement la même que celle du théorème précédent.

On considère cette fois, \mathfrak{F} l'ensemble des sous-ensembles Γ de Q qui vérifient simultanément (SR1), (SR2b), (SR3b), (SR4b). On note encore Ω l'intersection de tous les éléments de \mathfrak{F} (toujours non vide par l'hypothèse).

De même $\Omega \in \mathfrak{F}$, et si \mathfrak{F}' désigne à présent l'ensemble des parties de Q qui vérifient les cinq premières propriétés du théorème (par hypothèse, cet ensemble n'est pas vide). Il est clair que $\Omega \subset \Gamma$ pour tout $\Gamma \in \mathfrak{F}'$.

L'inclusion inverse se démontre comme précédemment. □

Corollaire 2.2.3 — Si $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ existe, alors pour toute partie J de I , le système à base libre $\Delta(A(J), (N_i)_{i \in I \cap J})$ existe également, plus précisément :

$$\Delta(A(J), (N_i)_{i \in I \cap J}) = \Delta(A, (N_i)_{i \in I}) \cap Q_{\mathbb{Q}}(J).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'intersection considérée possède bien les propriétés exigées. \square

2.3 Construction d'un système de racines à base libre

Premiers résultats d'inclusion ; le candidat Θ

Soient A une matrice de Borchers relative, et pour chaque $i \in I$, un sous-ensemble N_i de \mathbb{Q} vérifiant les hypothèses de 2.2. Si le système de racines à base libre associé à A et aux N_i existe, on le note en général $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ et plus simplement Δ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les données.

On a vu en remarque (1) de 2.2 que le système de racines est stable sous l'action du groupe de Weyl, par suite :

Proposition 2.3.1 —

$$W(\Pi_{\text{re}}) \cup 2W(\Pi_2) \cup \pm W\left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i\right) \subset \Delta.$$

De plus : $\Delta \subset \pm \bigoplus_{i \in I} M_i \alpha_i$, posons alors :

$$K' = \left\{ \alpha \in \bigoplus_{j \in I} M_j \alpha_j \setminus \sqcup_{i \in I} (\mathbb{Q}_+) \alpha_i ; S_{\alpha} \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^{\wedge} \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I_{\text{re}}) \right\},$$

$$\text{et } K_c = K' \cup \left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i \right).$$

Dans la suite, on pose :

$$\Theta = W(\Pi_{\text{re}}) \cup W(2\Pi_2) \cup \pm W(K_c).$$

Nous démontrerons en (2.4.1) que Θ est le système de racines cherché.

Premières propriétés du candidat Θ

Lemme 2.3.2 — L'ensemble Θ vérifie (SR1b) et de plus, s'écrit comme une réunion disjointe :

$$\Theta = W.\Pi_{\text{re}} \sqcup W(2\Pi_2) \sqcup W.K_c \sqcup -W.K_c.$$

Démonstration. On a $K_c \subset B_{\mathbb{Q}}$ et $B_{\mathbb{Q}} = B'_{\mathbb{Q}}$ d'après 1.1.15, donc $W.K_c \subset Q_{\mathbb{Q},+}$. De plus, tout élément α de $B_{\mathbb{Q}}$ est l'unique élément de plus petite hauteur de son orbite sous l'action de W et est donc l'unique élément commun à $B_{\mathbb{Q}}$ et à cette orbite. D'après 1.1.16, les réunions sont bien disjointes. D'autre part, on sait que si $\Phi = W(\Pi_{\text{re}})$ alors $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$, avec $\Phi_- = -\Phi_+$, ceci grâce à 1.1.6 (d). Il est clair que la propriété est encore vraie pour $W(2\Pi_2)$; d'où le lemme. \square

Remarque. Dans le cas où $N_i \subset \mathbb{N}$, on a $M_i = \mathbb{N}$ et donc la propriété (SR1) est vérifiée dans Q .

Lemme 2.3.3 — *L'ensemble Θ vérifie (SR2b), c'est-à-dire : $\Theta \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = N_i\alpha_i$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Pour tout α élément de K_c , on a $w.\alpha - \alpha \in \bigoplus_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_i$. Par suite, $w.\alpha$ n'appartient à une demi-droite rationnelle $\mathbb{Q}_+\alpha_i$ que si $i \in I_{\text{im}}$ et si $w.\alpha = \alpha \in K_c \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = N_i\alpha_i$.

D'autre part, l'image par W d'une racine simple réelle est dans $Q(I_{\text{re}})$.

Ces deux résultats permettent d'affirmer que si $i \in I_{\text{im}}$, alors $\Theta \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = N_i\alpha_i$.

Enfin, $W.\Pi_{\text{re}} \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = W.\Pi_{\text{re}} \cap \mathbb{N}\alpha_i$, et s'il existe $(i, j) \in I_{\text{re}}^2$ tels que $w.\alpha_i = n\alpha_j$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $w^{-1}.\alpha_j = \alpha_i/n \in Q$, d'où $n = 1$. De même, $2w.\alpha_i = n\alpha_j$ avec $(i, j) \in I_2 \times I$ implique $n = 2$ (et même $i = j$ d'après 2.1.1). \square

Nous nous permettons d'ores et déjà d'appeler les éléments de Θ des *racines*.

Lemme 2.3.4 — *Si α appartient à Θ , le support de α est connexe.*

Démonstration. Si $\alpha \in W.\Pi_{\text{re}} \cup 2W.\Pi_{\text{re}}$, cela résulte de 1.1.13. Si $\alpha \in \pm W.K_c$, on le déduit de 2.1.3. \square

Les conditions de chaînes réelles

Lemme 2.3.5 — *Soit $\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+}$ tel que, pour tout $w \in W$, l'élément $w.\alpha$ soit dans $Q_{\mathbb{Q},+}$ et ait un support connexe. Soit $i \in I_{\text{re}}$ tel que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq -1$. Alors, pour tout $w \in W$, $w.(\alpha + \alpha_i)$ appartient à $Q_{\mathbb{Q},+}$ et est à support connexe.*

Démonstration. Soit $w \in W$. Si $w.\alpha_i \in Q_{\mathbb{Q},+}$, alors $w(\alpha + \alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+}$ et est à support connexe puisque $w.\alpha$ et $w.\alpha_i$ (d'après 1.1.13) ont des supports connexes et que $\langle w.\alpha, w.\alpha_i^\vee \rangle = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$.

Dans le cas où $w.\alpha_i \in Q_{\mathbb{Q},-}$, on a $w = w'r_i$, avec $w' \in W$ et $w'.\alpha_i \in Q_{\mathbb{Q},+}$. L'égalité $w(\alpha + \alpha_i) = w'r_i(\alpha + \alpha_i) = w'.\alpha - (\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + 1)w'.\alpha_i$ permet alors de conclure. En effet, par hypothèse $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle + 1 \leq 0$, $w'.\alpha$ et $w'.\alpha_i$ appartiennent à $Q_{\mathbb{Q},+}$ et leurs supports sont connexes et liés puisque $\langle w'.\alpha, w'.\alpha_i^\vee \rangle = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$. \square

Lemme 2.3.6 — *Soient E une partie de $Q_{\mathbb{Q}}$ et i un élément de I_{re} tels que :*

- (i) pour tout $\alpha \in E$, $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $r_i(E) \subset E$,
- (iii) pour tout $\alpha \in E$ tel que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, on a $(\alpha + \alpha_i) \in E$.

Alors, pour tout $\alpha \in E$, la α_i -chaîne $Ch(\alpha, \alpha_i)$ joignant α à $r_i(\alpha)$ est contenue dans E .

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur l'entier $n = |\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle|$.

L'assertion étant triviale pour $n = 0$, considérons $n \geq 1$.

Grâce à (ii), quitte à échanger α et $r_i(\alpha)$, nous pouvons supposer que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$.

Si $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$, la α_i -chaîne $Ch(\alpha, \alpha_i)$ est réduite à deux éléments α et $r_i(\alpha)$ qui, d'après (ii) ou (iii), sont bien dans E .

Si $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq -2$, posons $\beta = \alpha + \alpha_i$; alors d'après (iii), $\beta \in E$ et on a $|\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle| < |\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle|$ donc par hypothèse de récurrence, $Ch(\beta, \alpha_i)$ est incluse dans E . D'après (ii), $r_i(\alpha) \in E$. Enfin, $Ch(\alpha, \alpha_i) = Ch(\beta, \alpha_i) \cup \{\alpha, r_i(\alpha)\}$; d'où le résultat. \square

Proposition 2.3.7 — Pour tout $\alpha \in W.K_c$ et tout $i \in I_{re}$, la α_i -chaîne $Ch(\alpha, \alpha_i)$ joignant α à $r_i(\alpha)$ est contenue dans $W.K_c$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $W.K_c$ vérifie toutes les hypothèses du lemme 2.3.6. L'inclusion $W.K_c \subset \bigoplus_{i \in I} M_i \alpha_i$ permet d'établir (i), le (ii) est trivial. Enfin, (iii) résulte du lemme 2.3.5. \square

Proposition 2.3.8 — Soit $i \in I_{re}$, pour tout $\alpha \in W(\Pi \cup 2\Pi_2) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$, la α_i -chaîne $Ch(\alpha, \alpha_i)$ joignant α à $r_i.\alpha$ est contenue dans Θ .

Démonstration. Il s'agit de montrer que Θ vérifie les hypothèses du lemme 2.3.6. Les assertions (i) et (ii) sont triviales et il reste seulement à établir (iii) pour $\alpha \in W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2)$, puisque (iii) est vrai dans $W.K_c$ et $-W.K_c = -r_i(W.K_c)$.

Pour des raisons de symétrie (par $-r_i$), il suffit de considérer le cas $\alpha \in Q_+$.

Il s'agit en fait de montrer que : si $\alpha \in Q_+ \cap W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$ et $\alpha_i \in \Pi_{re}$ sont tels que $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2)$ et $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, alors $W(\alpha + \alpha_i) \subset Q_+$ et ne contient que des éléments dont le support est connexe (ceci impliquant de façon évidente $\alpha + \alpha_i \in W.K_c$).

Pour cela, nous allons établir par récurrence sur la longueur de w l'assertion suivante :

- $\forall w \in W, \forall i \in I_{re}, \forall \alpha \in (W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2) \cap Q_+) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$ tels que $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2)$,
- ($\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$) \implies (*) ($w(\alpha + \alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+}$ et $S_{w(\alpha+\alpha_i)}$ est connexe).

Si $l(w) = 0$, il est clair que, sous les hypothèses précédentes, le support de $\alpha + \alpha_i$ est connexe et que l'élément considéré est bien dans Q_+ .

Admettons la propriété démontrée pour $l(w) < n$ et considérons $w \in W$ de longueur n et $i \in I_{\text{re}}$. Supposons qu'il existe $\alpha \in (W \cdot (\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2) \cap Q_+) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$ tel que :

- $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$;
- $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$;
- $w(\alpha + \alpha_i)$ ne satisfait pas à (*).

On sait que pour tout w' dans W , $\{w'(\alpha), w'(\alpha_i)\} \subset \Phi_+ \sqcup \Phi_-$.

Comme $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, il est clair que si les deux éléments de la somme sont dans la même partie de Φ , le support de la somme est connexe et que si de plus, ils sont tous deux dans Φ_+ , alors $w'(\alpha + \alpha_i)$ satisfait à (*).

Sous l'hypothèse précédente, l'un au moins des deux termes est donc dans Φ_- . Considérons $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$, une décomposition réduite de w , il existe un plus petit indice $i_s, s \geq 1$ tel que $r_{i_s} \dots r_{i_n} \{\alpha, \alpha_i\} \cap \Phi_- \neq \emptyset$.

D'après 1.1.6, α n'étant pas proportionnel à α_i , les deux racines ne sont pas envoyées simultanément dans Φ_- ; l'intersection précédente est réduite à un élément qui est $-\alpha_{i_s}$ ou $-2\alpha_{i_s}$ (par minimalité de s).

(1) Considérons d'abord le cas où cette intersection est réduite à $-\alpha_{i_s}$.

Si $s \neq n$, on a une contradiction avec l'hypothèse de récurrence puisque, si on note $w' = r_{i_1} \dots r_{i_s}$, la longueur de w' est strictement inférieure à n alors que $w'(r_{i_{s+1}} \dots r_{i_n} \cdot \alpha + r_{i_{s+1}} \dots r_{i_n} \cdot \alpha_i)$ ne vérifie pas (*) (l'un des deux éléments de la somme est égal à α_{i_s} et (cf. 1.1.10) $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle < 0$). Par suite, $s = n$.

On est alors dans l'un des cas suivants :

- (a) $\alpha_{i_n} = \alpha_i$ et $\alpha \in W \cdot (\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$;
- (b) $\alpha_{i_n} = \alpha$ et $\alpha \in W \cdot \Pi_{\text{re}}$;

Ainsi, $r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\{\alpha, \alpha_i\}) \subset Q_+$, et $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle < 0$ (d'après 1.1.10). Enfin, $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle$ et $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ sont différents de -1 car $w(\alpha + \alpha_i) \notin W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$.

Dans le cas (b),

$$\begin{aligned} w(\alpha + \alpha_i) &= r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(-\alpha + \alpha_i - \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \alpha) \text{ puisque } \alpha_{i_n} = \alpha ; \\ &= r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha + \alpha_i) - (2 + \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle) r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}). \end{aligned}$$

Les remarques précédentes imposent $r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha + \alpha_i) \in Q_+$ mais aussi la connexité de son support puisque : $\langle r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha + \alpha_i), r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}^\vee) \rangle = \langle \alpha + \alpha_i, \alpha_{i_n}^\vee \rangle = 2 + \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \leq 0$. Le cas où ce facteur est nul étant trivial dans la formule précédente.

Dans le cas (a),

$$\begin{aligned} w(\alpha + \alpha_i) &= r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(-\alpha_i + r_i(\alpha)) \text{ avec } \alpha_i = \alpha_{i_n} ; \\ &= r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i - \alpha_i) ; \\ &= r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha) + (-\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle - 1) r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha_i). \end{aligned}$$

Comme précédemment, $r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha + \alpha_i)$ est un élément positif dont le support est connexe puisque $\langle r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha), r_{i_1} \dots r_{i_{n-1}}(\alpha_i^\vee) \rangle = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$.

Dans les deux cas (a) et (b), on obtient une contradiction avec les hypothèses faites, ce qui établit le résultat cherché.

Nous avons en particulier démontré que la propriété (*) est vérifiée dans le cas où $\alpha \in W.\Pi_{\text{re}}$.

(2) Considérons à présent le cas où $r_{i_s} \dots r_{i_n} \{\alpha, \alpha_i\} \cap \Phi_- = \{-2\alpha_{i_s}\}$, alors $r_{i_{s+1}} \dots r_{i_n} \alpha = 2\alpha_{i_s}$ et on note $\alpha' = r_{i_{s+1}} \dots r_{i_n}(\alpha_i)$. Sous cette hypothèse, $i_s \in I_2$, on a $\alpha_{i_s}^\vee = 2\alpha_{i_s}^\wedge$ et donc $\langle \alpha', \alpha_{i_s}^\vee \rangle \in -2\mathbb{N}^*$; en particulier, il ne peut pas être égal à -1 (voir aussi 2.4.5).

De plus, α' est dans $W.\Pi_{\text{re}} \cap Q_+$ et on a $\langle \alpha', \alpha_{i_s}^\vee \rangle < 0$, donc, d'après le résultat établi dans le cas (1), $\alpha' + \alpha_{i_s}$ est dans Θ , est positif, et a un support connexe et $\langle \alpha' + \alpha_{i_s}, \alpha_{i_s}^\vee \rangle \leq 0$.

(a) Si $\alpha' + \alpha_{i_s} \in W.K'$, $\langle \alpha' + \alpha_{i_s}, \alpha_{i_s}^\vee \rangle = \langle \alpha', \alpha_{i_s}^\vee \rangle + 2 \leq 0$. Deux cas sont possibles :

- 1) $\langle \alpha' + \alpha_{i_s}, \alpha_{i_s}^\vee \rangle = 0$, mais alors $r_{i_s}(\alpha') = \alpha' + 2\alpha_{i_s}$, ce qui contredit $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi_2)$;
- 2) $\langle \alpha' + \alpha_{i_s}, \alpha_{i_s}^\vee \rangle < 0$, ce qui implique $\alpha' + 2\alpha_{i_s} \in W.K_c$ à cause de la proposition 2.3.7, donc $\alpha + \alpha_i \in W.K_c$.

(b) Si $\alpha' + \alpha_{i_s} \in W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$, on a forcément $\langle \alpha', \alpha_{i_s}^\vee \rangle < -2$ puisque $\alpha' + 2\alpha_{i_s} \notin W(\Pi \cup 2\Pi_2)$. Par suite, $\langle \alpha' + \alpha_{i_s}, \alpha_{i_s}^\vee \rangle < 0$.

Alors, si $\alpha' + \alpha_{i_s} \in W.\Pi$, le résultat vient par (1).

Si $\alpha' + \alpha_{i_s} \in 2W.\Pi_2$, pour ne pas contredire l'hypothèse de récurrence (appliquée à $\alpha' + \alpha_{i_s}$ et α_{i_s}), on doit encore avoir $s = n$ donc $\alpha = 2\alpha_{i_n}$ et $\alpha' = \alpha_i$. De plus, $\langle \alpha_i + \alpha_{i_n}, \alpha_{i_n}^\vee \rangle$ est entier pair et est strictement inférieur à 2. S'il était nul, on aurait alors $\alpha_i + 2\alpha_{i_n} = r_{i_n}(\alpha_i)$. Il est donc inférieur ou égal à -2 . Par suite, on a $\langle \alpha_i + 2\alpha_{i_n}, \alpha_{i_n}^\vee \rangle \leq 0$ et $\langle \alpha_i + 2\alpha_{i_n}, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$; ce qui prouve que $\alpha_i + 2\alpha_{i_n} \in K'$. Donc $\alpha + \alpha_i \in K' \subset W.K'$. \square

Les conditions de chaînes imaginaires

Proposition 2.3.9 — *L'ensemble Θ satisfait à la condition (SR4b). Plus précisément, soient $i \in I_{\text{im}}$, et $\alpha \in \Theta_+ \setminus \mathbb{Q}\alpha_i$.*

- (i) Si $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$, on a $\alpha + M_i \alpha_i \subset \Theta_+$.
- (ii) Si $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle = 0$, alors quel que soit $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$, $\alpha + \lambda \alpha_i \notin \Theta_+$.

Démonstration. (i) Soit $\lambda \in M_i$. Montrons que $(\alpha + \lambda \alpha_i) \in \Theta_+$. En écrivant λ comme somme d'un nombre fini $k \geq 1$ d'éléments de N_i et en raisonnant par récurrence sur k , on voit qu'on peut supposer que $\lambda \in N_i$. On distingue alors deux cas.

Premier cas : $\alpha \in W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$, i.e. $\alpha = w(h\alpha_j)$, où $w \in W$, $j \in I_{\text{re}}$, et l'une des deux conditions suivantes est satisfaite : ou bien $h = 1$, ou bien $h = 2$ et $j \in I_2$.

On a $\alpha + \lambda\alpha_i = w(h\alpha_j + w^{-1}(\lambda\alpha_i))$, et $w^{-1}(\lambda\alpha_i) \in \Theta$. Compte tenu de la condition de chaînes réelles (cf. 2.3.7) et de la stabilité de Θ sous l'action de W , il suffit de vérifier que $\langle w^{-1}(\lambda\alpha_i), \alpha_j^\vee \rangle \leq -h$. Or, comme $\lambda \in N_i$ et que $j \in I_{\text{re}}$, $\langle w^{-1}(\lambda\alpha_i), \alpha_j^\vee \rangle$ est un entier, et cet entier est pair (donc n'est pas égal à -1 ; voir aussi 2.4.5) si $j \in I_2$. Il suffit donc de vérifier que $\langle w^{-1}(\lambda\alpha_i), \alpha_j^\vee \rangle < 0$.

Or, $\langle w^{-1}.\alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = \langle \alpha_i, w.\alpha_j^\vee \rangle$ et (cf. 2.1.7), $\langle \alpha_i, w.\alpha_j^\vee \rangle$ est du signe de $\langle w.\alpha_j, \alpha_i^\wedge \rangle$; enfin, $\langle w.\alpha_j, \alpha_i^\wedge \rangle = (1/h)\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$ par hypothèse ; d'où l'inégalité cherchée.

Second cas : $\alpha \in W.K_c$.

Nous allons montrer que $(\alpha + \lambda\alpha_i) \in W.K'$.

Pour tout $w \in W$, $w.\alpha$ et $w(\lambda\alpha_i)$ appartiennent à $\bigoplus_{j \in I} M_j \alpha_j$ et ont des supports connexes et liés (car $\langle w.\alpha, w.\alpha_i^\vee \rangle = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$) ; ainsi, $w(\alpha + \lambda\alpha_i)$ appartient à $\bigoplus_{j \in I} M_j \alpha_j$ et a un support connexe.

D'après 2.2 Rq. (10), on peut considérer l'élément de hauteur minimale de $W(\alpha + \lambda\alpha_i)$. Il appartient à $K' \cup (\bigcup_{j \in I_{\text{im}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_j)$. Reste à montrer qu'il est en fait dans K' . Supposons au contraire que $w(\alpha + \lambda\alpha_i) = \mu\alpha_j$, où $w \in W$, $\mu \in \mathbb{Q}_+^*$ et $j \in I_{\text{im}}$. Puisque $w.\alpha$ et $w.\alpha_i$ sont à coordonnées positives, l'égalité $\mu\alpha_j = w.\alpha + \lambda w.\alpha_i$ impose à $w.\alpha$ et $w.\alpha_i$ d'être tous deux proportionnels à α_j . Par suite, les deux racines α et α_i sont proportionnelles ; ce qui est exclu par hypothèse.

(ii) Supposons $(\alpha + \lambda\alpha_i) \in \Theta$. Alors, (cf. 2.3.4) le support de cet élément est connexe, contient i (car $\lambda > 0$), et est distinct de $\{i\}$ (car $\alpha \notin \mathbb{Q}\alpha_i$) ; donc le support de α contient un élément j distinct de i et lié à i . Comme $i \in I_{\text{im}}$, on en déduit que $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$, d'où une contradiction. \square

2.4 Existence des systèmes de racines

Théorème 2.4.1 — *Si A est une matrice de Borcherds relative et si les ensembles N_i vérifient les hypothèses de 2.2, le système de racines à base libre associé existe et on a :*

$$\Delta(A, (N_i)_{i \in I}) = \Theta = W.\Pi_{\text{re}} \sqcup 2W.\Pi_2 \sqcup \pm W.K_c.$$

Démonstration. Il reste à montrer que Θ vérifie (SR5b). Pour un élément de Θ_+ non proportionnel à une racine simple et qui n'est pas dans K' , le résultat est clair grâce à la condition sur les chaînes réelles ; pour un élément de K' , il résulte de la proposition (1.2.14) qui s'applique à Θ puisque (SR3) et (SR3b) sont équivalents sous l'hypothèse (SR1b) (cf. 2.2) et puisque la condition (ii) de 1.2.7 est conséquence

de (SR3) et (SR4b). Par suite, si $\alpha \in K'$, il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,\text{ind}}$ tel que $\alpha - n_i\alpha_i \in \Theta$. \square

Remarque. Il résulte de 2.3.4 que sous les hypothèses de 2.4.1, le support d'une racine (i.e. d'un élément de $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$) est connexe.

Corollaire 2.4.2 — *Soient A une matrice de Borcherds relative, I son ensemble d'indices et $I = I_{\text{re}} \cup I_{\text{im}}$ la partition associée (1.1). À la matrice A , on associe la matrice de Kac-Moody relative C définie par :*

$$\begin{aligned} (\forall i \in I_{\text{re}}) (\forall j \in I) c_{ij} &= a_{ij} \\ (\forall i \in I_{\text{im}}) (\forall j \in I) c_{ij} &= 0 \iff a_{ij} = 0 \\ c_{ij} &= -1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Alors, si les ensembles N_i pour $i \in I$ sont des parties de \mathbb{Q} vérifiant les hypothèses habituelles (cf. 2.2), dans $Q_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$, les systèmes de racines à bases libres $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ et $\Delta(C, (N_i)_{i \in I})$ sont égaux.

Démonstration. D'après les structures des deux systèmes de racines, il suffit évidemment de démontrer que les deux ensembles K' correspondant à chacune des matrices (disons K_A et K_C) sont égaux. En effet, vu la construction de la matrice C à partir de A , la matrice de Kac-Moody associée à A ($K(A)$ cf. 2.1) coïncide avec celle associée à C , par suite les groupes de Weyl associés sont les mêmes.

En ce qui concerne les ensembles K_A et K_C , ils sont égaux puisque :

- la condition de connexité du support est la même dans les deux cas (puisque, aux coefficients près, les diagrammes de Dynkin des deux matrices sont les mêmes),
- les conditions $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ coïncident elles aussi puisque les lignes correspondant à un indice réel sont les mêmes dans les deux matrices.

\square

Exemple 2.4.3

Soit A une matrice de Kac-Moody relative, d'ensemble d'indices I .

Supposons $I_{\text{re}} = I_1$; ainsi pour tout $i \in I_{\text{re}}$, on a $N_i = \{1\}$; posons dans ce cas $S_i = N_i$;

- pour $i \in I_0$, considérons $N_i = S_i$ quelconque vérifiant les hypothèses de 2.2 ;
- pour $i \in I_-$, choisissons une partie S_i de \mathbb{Q}_+^* de plus petit élément 1 ou ne contenant pas de plus petit élément mais incluse dans $[3/4, +\infty[$ et contenant 1 et vérifiant $S_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{\text{re}}$. Définissons alors N_i comme l'ensemble réunion de S_i et de tous les éléments de \mathbb{Q}_+^* de la forme $n = \sum_{j=1}^h n_j s_j$ avec $h \geq 2$, $n_j \in \mathbb{N}^*$ et $s_j \in S_i$, les s_j étant tous différents.

On prend alors comme nouvel ensemble d'indices $S = \sqcup_{i \in I} (\{i\} \times S_i)$, et la matrice $B = (b_{h,l})$ telle que si $h = (i, s_i)$ et $l = (j, s_j)$, alors $b_{h,l} = s_j a_{ij}$

Une réalisation libre $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge)$ de A , devient une réalisation de B , pour $h = (i, s_i)$, on pose $\alpha_h = s_i \alpha_i$ et $\alpha_h^\wedge = \alpha_i^\wedge$. Alors le système de racines non libre Ω de l'algèbre de Borchers correspondante est le système à base libre $\Delta(A, (N_i))$.

En effet, on peut considérer le système à base libre $\tilde{\Omega}$ de l'algèbre de Borchers puis son image dans \mathfrak{h}^\wedge par l'application additive qui envoie α_h sur α_h (où h parcourt S) et qui est équivariante pour l'action de W . On sait que $\tilde{\Omega} = W(\pm \bigcup_{h \in S} \alpha_h) \cup W(\pm \tilde{K})$ où \tilde{K} est l'ensemble des éléments α de $\sum_{h \in S} \mathbb{N} \alpha_h$, qui ont un support connexe non réduit à un élément et tels que $\langle \alpha, \alpha_h^\wedge \rangle < 0$ pour tout h . Or, d'après l'hypothèse sur la réalisation, l'image de \tilde{K} est exactement la réunion de l'ensemble des éléments α de $\sum_{h \in S} \mathbb{N} \alpha_h$, qui ont un support connexe non réduit à un élément et tels que $\langle \alpha, \alpha_h^\wedge \rangle < 0$ pour tout h et des $N_i \alpha_i$, l'image de la base est $\bigcup_{i \in I} S_i \alpha_i$. Par équivariance de l'application de projection, on obtient l'égalité cherchée.

Remarque 2.4.4

Supposons donnés une matrice de Borchers relative A à coefficients dans \mathbb{Q} indécomposable, d'ordre $|I| \geq 2$ fini et des sous-ensembles N_i de \mathbb{Q}_+^* quelconques (satisfaisant aux hypothèses de 2.2) pour $i \in I_{\text{im}}$. Alors, le vecteur u intervenant dans les trois types de la classification de 1.1 est à coefficients dans \mathbb{Q}_+^* et on peut supposer que ses coefficients sont dans \mathbb{N}^* et premiers entre eux.

On note $u = (u_i)_{i \in I}$ et $\delta = \sum_{i \in I} u_i \alpha_i$, alors :

- pour le cas indéfini, δ est une racine imaginaire positive de support I et contenue dans K' , plus précisément $\langle \delta, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$ pour tout $i \in I$;
- pour le cas affine, δ est une racine imaginaire positive (la plus petite) de support I et contenue dans K' , plus précisément $\langle \delta, \alpha_i^\wedge \rangle = 0$ pour tout $i \in I$;
- pour le cas fini, sauf dans le cas A_2 , δ n'est pas une racine, la plus grande racine μ d'un système de type fini vérifiant seulement $A\mu \geq 0$ et $A\mu \neq 0$.

Cependant, l'existence de μ vérifiant ces deux conditions suffit à caractériser le cas du type fini.

Remarque 2.4.5

Notons que pour la construction du système de racines, l'hypothèse $N_i a_{ij} \subset \mathbb{Z}$ pour $i \in I_{\text{re}}$ est seulement utilisée pour démontrer que :

$$(*) \quad \text{si } i \in I_2 \text{ alors } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \neq -1 \text{ ou bien } \alpha + 2\alpha_i \in \Theta$$

Sous les hypothèses de 2.1.1, si la condition (*) est vérifiée, l'hypothèse $2N_j a_{ij}/a_{ii}$ est alors suffisante.

Nous démontrerons plus loin (au dernier paragraphe de la section 4.4) que (*) est effectivement satisfaite (sous les hypothèses du n° 4.4) si, lorsque $i \in I_2$, on a $a_{ij} \neq -1/2$ pour tout $j \in I$ (hypothèse un peu plus forte que celle de 2.1.1).

3. Coracines des racines imaginaires dans le cas libre

Étant données deux racines, il est souvent utile de savoir si leur somme est encore une racine. Dans le cas où l'une des deux est simple, la condition de chaîne correspondante fournit un test théorique adapté.

On voudrait pouvoir appliquer un tel critère à tout couple de racines (en particulier pour pouvoir envisager une notion correcte de sous-système). Pour cela, il faut attacher une coracine à toute racine : il reste donc à considérer les racines imaginaires. On aboutit en regardant de plus près leurs supports possibles.

Ceci amène à définir des cônes (dans les deux espaces en dualité de la réalisation) sur lesquels l'action du groupe de Weyl a de bonnes propriétés.

Une définition de coracines est alors possible à condition de renoncer à une détermination complète : la coracine est à choisir arbitrairement dans un cône donné. Ce choix est inoffensif puisqu'il est sans contradiction avec le cas symétrisable où on a une détermination plus univoque.

Situation

Dans ce chapitre, on suppose donnés A une matrice de Borcherds relative indexée par I ainsi que, pour $i \in I_{\text{im}}$, des sous-ensembles N_i de \mathbb{Q}_+ vérifiant les hypothèses données en 2.2. Le système de racines à base libre associé $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ est noté Δ . Ainsi, comme au chapitre 2, les familles $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\alpha_i^\wedge)_{i \in I}$ sont libres.

3.1 Notion de cônes radiciels duaux

Définitions et résultats utiles

Les éléments de Π sont, comme avant, appelés *racines simples*, les éléments de $W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2)$, *racines réelles*, les autres éléments de Δ , *racines imaginaires*.

Supports de racines

Il résulte de 2.1.3 qu'une racine imaginaire ne peut avoir qu'un support de type indéfini ou affine. En effet, si $\alpha \in \Delta_{\text{im}+}$, elle est conjuguée sous l'action de W à un élément β de K_c , et le support de β est inclus dans celui de α .

Pour une racine α , on note FS_α la fermeture du support de α , c'est-à-dire l'ensemble des $i \in I$ qui sont dans le support S_α ou qui lui sont liés.

Propriétés des éléments de K_c

Remarques. 1. On a déjà vu que si $\alpha \in K_c$, $w \in W$, on a $S_\alpha \subset S_{w(\alpha)}$. Plus précisément, il résulte de 2.1.2 que si $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ est une décomposition réduite de w , on a l'inclusion $S_{w(\alpha)} \subset S_\alpha \cup \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}\}$.

2. D'après ce résultat et 2.2.3, si J est une partie de I , alors l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) de $\Delta(A(J), (N_i)_{i \in J})$ est l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) de $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ qui sont dans $Q_{\mathbb{Q}}(J)$. En effet, étant donné la structure des systèmes de racines, il suffit de vérifier que $(W.K') \cap Q_{\mathbb{Q}}(J) = W(J)K'(J)$ (où $K'(J)$ est défini comme K' mais à partir des α_i pour $i \in J$). En fait, l'égalité des ensembles de racines réelles peut également être démontrée en utilisant les résultats de Hée [Hée 1 ; II.15].

Proposition 3.1.1 — Soit α une racine appartenant à K_c , on note

$$Z_\alpha = \{i \in S_\alpha / \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle = 0\}$$

la proposition 1.1.3, se traduit dans ce contexte par :

seuls les cas suivants sont possibles :

1. $S_\alpha = Z_\alpha$ est de type affine, α est alors proportionnelle à la racine imaginaire positive minimale de $\Delta(A(S_\alpha))$ ou à la « racine simple » α_i si $S_\alpha = \{i\}$.
2. Z_α est une partie de I_{re} qui est de type fini (non nécessairement connexe) ou vide, donc strictement incluse dans le support S_α qui est de type indéfini.

Définition 3.1.2 — Si S est une partie finie et connexe de I et Z une partie de S , on définit :

$$K_{(S,Z)} = \{\alpha \in K_c / S_\alpha = S \text{ et } Z_\alpha = Z\} \text{ et}$$

$$K_{(S,Z)}^\wedge = \{\alpha^\wedge \in Q_{\mathbb{K},+}^\wedge ; S_{\alpha^\wedge} = S, Z_{\alpha^\wedge} = Z \text{ et } \langle \alpha_i, \alpha^\wedge \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I)\}$$

où $Z_{\alpha^\wedge} = \{i \in S_{\alpha^\wedge} ; \langle \alpha_i, \alpha^\wedge \rangle = 0\}$.

Dans Δ , on note :

- $\Delta_1 = W(\Pi_1)$ l'ensemble des racines réelles non divisibles non multipliables.
- $\Delta_2 = W(\Pi_2)$ l'ensemble des racines réelles non divisibles, multipliables.

- $2\Delta_2 = W(2\Pi_2)$ l'ensemble des racines réelles divisibles, non multipliables.
- $\Delta_0 = W(\bigcup_L \pm K_{(L,L)})$ où L parcourt les parties connexes de type affine de I , l'ensemble des racines imaginaires affines.
- $\Delta_{(-)} = W(\bigcup_{(S,Z)} \pm K_{(S,Z)})$ où (S, Z) parcourt l'ensemble des couples tels que S est une partie finie de I , connexe et de type indéfini et Z une partie de S , l'ensemble des racines imaginaires de type indéfini.

D'après 3.1.1, Δ est la réunion disjointe de $\Delta_1, \Delta_2, 2\Delta_2, \Delta_0$ et $\Delta_{(-)}$; de plus, $K_{(S,Z)}$ ne peut être non vide que si S est connexe et si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite (c'est en fait une équivalence voir 3.1.7) :

1. $S = Z$ est de type affine ;
2. S est de type indéfini et Z vide ou de type fini.

D'après les résultats ci-dessus et 2.4, Δ contient une composante connexe de type indéfini ou proindéfini si et seulement si $\Delta_{(-)} \neq \emptyset$.

Le cône radiciel dual associé : cas « standard »

Dans le début de ce paragraphe (jusqu'en 3.1.5), on considère une partie Z de type fini de I . Le groupe $W(Z)$ est donc fini. Si S est une partie connexe de I contenant Z et telle que $K_{(S,Z)} \neq \emptyset$, alors tout élément α de $K_{(S,Z)}$ est fixe sous l'action de $W(Z)$.

Dans $Q_{\mathbb{Q}}$, on pose :

$$(\forall i \in I) \alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(Z)|} \right) \sum_{w \in W(Z)} w(\alpha_i).$$

Si on note $Z(i)$ la composante connexe de $Z \cup \{i\}$ contenant i , et $Z_i := Z(i) \cap Z$, alors Z_i est la réunion des composantes connexes de Z liées à i , et on a :

$$\alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(Z_i)|} \right) \sum_{w \in W(Z_i)} w(\alpha_i).$$

Lemme 3.1.3 — Pour tout $i \in I$, $\alpha_i^1 \neq 0 \iff i \notin Z$.

Démonstration. Ceci est clair puisque si $i \notin Z$, alors $w(\alpha_i) \in \Delta_+$ pour tout $w \in W$; et si $i \in Z$:

$$\alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(Z)|} \right) \sum_{w \in W(Z)} w(\alpha_i) = \left(\frac{1}{2|W(Z)|} \right) \sum_{w \in W(Z)} (w(\alpha_i) + wr_i(\alpha_i)).$$

□

Si $\alpha = \sum_{i \in S} n_i \alpha_i$ est un élément de $K_{(S,Z)}$ (où S est une partie de I de type indéfini contenant Z), il est fixe sous l'action de $W(Z)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i \in S} n_i \alpha_i = \left(\frac{1}{|W(Z)|} \right) \sum_{i \in S} n_i \left(\sum_{w \in W(Z)} w(\alpha_i) \right) \\ &= \sum_{i \in S \setminus Z} n_i (\alpha_i^1). \end{aligned}$$

Dans $Q_{\mathbb{K}}^{\wedge}$, on pose également :

$$\begin{aligned} \forall i \in S \setminus Z, \alpha_i^{\sim} &= \sum_{w \in W(Z)} w(\alpha_i^{\wedge}) \\ &= \left(|W(Z_i)| \alpha_i^{\wedge} + \sum_{w \in W(Z_i)} (w(\alpha_i^{\wedge}) - \alpha_i^{\wedge}) \right) \cdot \frac{|W(Z)|}{|W(Z_i)|} \end{aligned}$$

(la dernière décomposition montre que les coordonnées de α_i^{\sim} sont positives ou nulles).

Soit $A^{(1)}$ la matrice indexée par $I \setminus Z$ dont les coefficients sont : $a_{ij}^1 := \langle \alpha_j, \alpha_i^{\sim} \rangle = \langle \alpha_j^1, \alpha_i^{\sim} \rangle = |W(Z)| \langle \alpha_j^1, \alpha_i^{\wedge} \rangle$ pour $(i, j) \in (I \setminus Z)^2$.

Lemme 3.1.4 — *La matrice $A^{(1)}$ est une matrice de Vinberg.*

Si $(i, j) \in (I_{\text{re}} \times I)$, alors $\langle \alpha_j, \alpha_i^{\sim} \rangle$ est entier.

De plus, pour $i \in I \setminus Z$, $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle > 0$ (resp. $= 0$, < 0) si et seulement si $Z(i)$ est de type fini (resp. affine, indéfini).

Démonstration. Si i et j sont tous les deux dans $I \setminus Z$ et si $i \neq j$, alors $\langle \alpha_j^1, \alpha_i^{\sim} \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i^{\sim} \rangle \in \mathbb{K}_-$.

De plus, il est clair sur sa formule de définition que α_i^{\sim} est fixe sous l'action de $W(Z)$, donc, si $j \in Z$, on a $\langle \alpha_j, \alpha_i^{\sim} \rangle = 0$.

Dans le calcul de $A^t(Z(i))\alpha_i^{\sim}$ (où A^t désigne la transposée de A) seule la coordonnée $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle$ n'est pas nécessairement nulle et donc détermine le signe (au sens large) de $A^t(Z(i))\alpha_i^{\sim}$ dans $Q_{\mathbb{Q}}(Z(i))$.

(1) Si $A^t(Z(i))$ est de type fini, comme α_i^{\sim} est positif (i.e. ses coordonnées suivant les α_i sont toutes positives ou nulles) et non nul, on a forcément $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle > 0$. (De plus, i est forcément un indice réel donc pour tout $w \in W(Z_i)$, $w(\alpha_i^{\wedge})$ est à coefficients entiers, donc $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle \in \mathbb{N}^*$.)

(2) Si $A^t(Z(i))$ est de type affine, en considérant α_i^{\sim} et son opposé, on voit que nécessairement $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle = 0$.

(3) Si $A^t(Z(i))$ est de type indéfini, si on suppose $A^t(Z(i))\alpha_i^{\sim} \geq 0$, on a de même une absurdité, donc $\langle \alpha_i, \alpha_i^{\sim} \rangle < 0$.

Notons que de plus, si $i \neq j$ pour i et j dans $S \setminus Z$,

$$\begin{aligned}
 (\langle \alpha_j, \alpha_i^\sim \rangle = 0) &\implies ((\forall w \in W(Z)) \langle \alpha_j, w(\alpha_i^\sim) \rangle = 0) \\
 &\implies ((\forall w \in W(Z)) j \text{ n'est pas lié à } S_{w(\alpha_i^\sim)}) \\
 &\implies ((\forall w \in W(Z)) j \text{ n'est pas lié à } S_{w(\alpha_i)}) \text{ (cf. 2.1.5)} \\
 &\implies ((\forall w \in W(Z)) \langle \alpha_i, w^{-1}(\alpha_j^\wedge) \rangle = 0) \\
 &\implies (\langle \alpha_i, \alpha_j^\sim \rangle = 0).
 \end{aligned}$$

On a ainsi bien établi que $A^{(1)}$ est une matrice de Vinberg et les dernières assertions sont déjà démontrées ou évidentes. \square

Lemme 3.1.5 — *Soit S une partie finie de I contenant Z .*

- (1) *Si $A(S)$ est indécomposable alors $A^{(1)}(S \setminus Z)$ est indécomposable.*
- (2) *Si $A(S)$ est de type indéfini alors $A^{(1)}(S \setminus Z)$ est de type indéfini.*

Démonstration. (1) Supposons au contraire l'existence d'une partition de $S \setminus Z = I_1 \sqcup I_2$ telle que pour tous $i \in I_1$, et $j \in I_2$, on ait $\langle \alpha_i^\wedge, \alpha_j^\sim \rangle = 0$. Par connexité de S , on peut trouver $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$, tels que dans $\{i_1\} \cup Z \cup \{i_2\}$, i_1 et i_2 soient dans une même composante connexe, plus précisément il existe une partie connexe L de Z liée à i_1 et à i_2 .

Un raisonnement par l'absurde permet de montrer qu'il existe $w \in W(L)$ tel que le support de $w(\alpha_{i_2}^\wedge)$ soit $L \cup \{i_2\}$ (si le support d'un élément n'est pas toute la composante connexe, on trouve un indice qui est lié à ce support sans être dedans ; l'image par la réflexion correspondante donne un élément de support plus grand). Par suite, pour un tel w , on a $\langle \alpha_{i_1}, w(\alpha_{i_2}^\sim) \rangle < 0$; ce qui contredit notre hypothèse initiale $\langle \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}^\sim \rangle = 0$.

(2) Par hypothèse, $A(S)$ et sa transposée sont de type indéfini, il existe donc dans $Q_{\mathbb{K}}^\wedge(S)$ un vecteur strictement positif v , tel que $A^t(S)v < 0$.

Considérons alors $v^\sim = \sum_{w \in W(Z)} w(v)$; on a facilement :

$$v = \sum_{i \in S} n_i \alpha_i \implies v^\sim = \sum_{i \in S} n_i \alpha_i^\sim.$$

Les n_i étant tous strictement positifs, le vecteur v^\sim est strictement positif dans $\bigoplus_{i \in S \setminus Z} \mathbb{K} \alpha_i^\sim$, et pour tout j dans $S \setminus Z$, $\langle \alpha_j, v^\sim \rangle = \langle \alpha_j^\wedge, v^\sim \rangle = \langle \alpha_j^\wedge, v \rangle < 0$ puisque α_j^\wedge est un élément positif non nul de $Q_{\mathbb{Q}}(S)$. Par suite, on a montré que $A^{(1)}(S \setminus Z)v^\sim < 0$, ce qui prouve que cette matrice est de type indéfini.

N.B : Il est clair que de plus, si $i \in Z$, $\langle \alpha_i, v^\sim \rangle = 0$. Si S est connexe, v^\sim est donc un élément de $K^\wedge_{(S,Z)}$ qui ne peut donc être vide. \square

Proposition 3.1.6 — Si $Z \subset S \subset I$ avec S finie et connexe, alors :

$$K_{(S,Z)} \neq \emptyset \iff K^\wedge_{(S,Z)} \neq \emptyset.$$

Démonstration. D'après (3.1.1), si S est de type fini le résultat est évident puisque les deux cônes sont vides. De même, on traite facilement le cas affine.

Si S est de type indéfini et $K_{(S,Z)} \neq \emptyset$, alors Z est vide ou de type fini et il est clair que dans la démonstration précédente du (2) (cf. le N.B), pour tout $i \in Z$, on a $\langle \alpha_i, v^\sim \rangle = 0$; ce qui montre que $K^\wedge_{(S,Z)}$ n'est pas vide.

La réciproque se montre de façon tout à fait analogue. \square

Corollaire 3.1.7 — Si S est une partie finie non vide et connexe de I telle que $Z \subset S$, alors :

$K_{(S,Z)} \neq \emptyset \iff (S, Z)$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- la partie S est de type affine et $S = Z$;
- la partie S est de type indéfini et Z est

vide ou de type fini, éventuellement non connexe.

Démonstration. L'implication \implies est claire à partir de 3.1.1.

L'implication \impliedby résulte de la démonstration précédente puisque l'hypothèse d'existence de l'élément v n'était basée que sur l'hypothèse « S est de type indéfini », on peut toujours à partir de v , construire v^\sim fixe sous l'action de $W(Z)$ si Z est de type fini. Le cas affine se traite facilement. \square

Définition des cônes duaux : cas général

Proposition 3.1.8 — Soient (S, Z) et (L, J) deux couples de parties de I telles que $K_{(L,J)} \neq \emptyset$ et $K_{(S,Z)} \neq \emptyset$ et soient w et w' deux éléments de W , on a :

$$w(K_{(L,J)}) \cap w'(K_{(S,Z)}) = \emptyset, \quad w(K^\wedge_{(L,J)}) \cap w'(K^\wedge_{(S,Z)}) = \emptyset,$$

sauf si $(S, Z) = (L, J)$ et si $w^{-1}w'$ fixe point par point $K_{(L,J)}$ et $K^\wedge_{(L,J)}$.

N.B : On établit au passage le résultat intéressant suivant :

Corollaire 3.1.9 — Si $\alpha^\wedge \in K^\wedge_{(S,Z)}$ et si $w \in W$ est tel que $w(\alpha^\wedge) = \alpha^\wedge$, alors $w \in W((I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha)$. Le résultat analogue pour $K_{(S,Z)}$ est également vrai.

Démonstration. (1) Dans le lemme 1.1.15, on a introduit les ensembles B'^\wedge et B^\wedge ; si $\alpha^\wedge \in K^\wedge_{(S,Z)}$, on a encore la caractérisation de α^\wedge comme unique élément de hauteur minimale de son orbite, et donc :

$$\langle \alpha_i, w(\alpha^\wedge) \rangle \leq 0 \quad (\forall i \in I_{re}) \implies w(\alpha^\wedge) = \alpha^\wedge.$$

Supposons $w(K_{(L,J)}^\wedge) \cap w'(K_{(S,Z)}^\wedge) \neq \emptyset$, alors $K_{(L,J)}^\wedge \cap w^{-1}w'(K_{(S,Z)}^\wedge) \neq \emptyset$, or un élément α^\wedge de cette intersection est, d'après la remarque précédente, fixe par $w^{-1}w'$, d'où l'égalité des deux couples.

(2) Soient $\alpha^\wedge \in K_{(S,Z)}^\wedge$ et $w \in W$ tel que $w(\alpha^\wedge) = \alpha^\wedge$. Si $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ est une décomposition minimale de w , on voit facilement (2.1.2) que pour tout s entre 1 et n , $r_{i_s}(\alpha) = \alpha$. Par suite, $\langle \alpha, \alpha_{i_s}^\wedge \rangle = 0$; d'où $i_s \in (I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha$. Ainsi, w fixe point par point $K_{(S,Z)}$ et $K_{(S,Z)}^\wedge$.

(On a évidemment le même résultat dans $\mathbb{Q}_\mathbb{Q}$.)

(3) Revenons à la situation du (1), alors $w^{-1}w' \in W((I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha)$, et donc fixe tout élément de $K_{(S,Z)}$. □

Corollaire 3.1.10 — Soit $\alpha \in K_c$, si C désigne le cône $w.K_{(S_\alpha, Z_\alpha)}$, alors le cône $w.K_{(S_\alpha, Z_\alpha)}^\wedge$ dépend uniquement de C et non du choix de w ou de α .

Il est licite de poser : $C^\wedge = w.K_{(S_\alpha, Z_\alpha)}^\wedge$.

Définition 3.1.11 — Sous ces hypothèses, C et C^\wedge sont alors appelés cônes duaux .

3.2 Coracines

Propriétés des cônes duaux

Proposition 3.2.1 — Soient α et β deux éléments de K_c ,

- (a) $\langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle \subset \mathbb{K}_-$;
- (b) $\langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle \cap \mathbb{K}_* \neq \emptyset \implies \langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle \subset \mathbb{K}_*$.

Démonstration. (a) Par hypothèse, α est dans K_c , et le cône $K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge$ est formé d'éléments positifs donc (a) est évident.

(b) Si $\langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle \cap \mathbb{K}_* \neq \emptyset$, il existe $\gamma^\wedge \in K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge$ tel que $\langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle < 0$. Le support de α rencontre nécessairement $FS_{\gamma^\wedge} \setminus Z_{\gamma^\wedge}$, qui est égal à $FS_{\delta^\wedge} \setminus Z_{\delta^\wedge}$ pour tout $\delta \in K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge$. Par suite, $0 \notin \langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle$. □

Proposition 3.2.2 — Sous les hypothèses de la proposition précédente, si β^\wedge est un élément quelconque de $K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge$,

- $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle = 0 \iff$ les supports de α et de β sont disjoints,
- ou bien α et β sont proportionnelles
- de rapport dans \mathbb{Q}_+ et de type affine.

Démonstration. Si $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle = 0$, on a (d'après 3.2.1) $\langle \alpha, K_{(S_\beta, Z_\beta)}^\wedge \rangle = \{0\}$. Le support de α est donc inclus dans la réunion de $I \setminus FS_\beta$ et Z_β qui sont deux parties non liées de I .

Si β n'est pas de type affine, Z_β est de type fini, donc S_α (qui ne peut pas être de type fini car $\alpha \in K_c$) est, par connexité, inclus dans $I \setminus FS_\beta$. Par suite, S_α et S_β sont disjoints.

Si β est de type affine,

- si $S_\alpha \subset S_\beta$, on a $S_\alpha = S_\beta$ (car S_α n'est pas de type fini) et les deux racines sont nécessairement affines proportionnelles car $K_{(S_\alpha, S_\alpha)} \subset \mathbb{Q}_+\alpha$;
- sinon, $S_\alpha \subset I \setminus FS_\alpha$ et S_α et S_β ne peuvent être liés.

L'implication inverse est claire. \square

Choix d'une coracine

Si $a \in \mathbb{K}$, $\text{sgn}(a)$ vaut 0 si a est nul, + (resp. -) si a est strictement positif (resp. négatif).

Soit α une racine imaginaire positive, elle est conjuguée, sous l'action de W à un unique élément γ de K_c . Si $\alpha = w(\gamma)$, alors $\alpha \in w(K_{(S_\gamma, Z_\gamma)})$; notons $C(\alpha)$ ce cône et $C^\wedge(\alpha) = wK_{(S_\gamma, Z_\gamma)}^\wedge$ son dual au sens de 3.1.11.

Proposition 3.2.3 — *Si $\beta \in \Delta_+$ est donné, et si $\delta^\wedge \in C^\wedge(\alpha) = C^\wedge$, alors : $\text{sgn}(\langle \beta, \delta^\wedge \rangle)$ ne dépend pas du choix de δ^\wedge dans C^\wedge . De plus, si $\beta \in \Delta_+^{\text{im}}$, le scalaire $\langle \beta, \delta^\wedge \rangle$ est toujours négatif ou nul.*

Démonstration. (1) Avec les notations de l'énoncé, si $\delta^\wedge \in C^\wedge$ et si $\gamma^\wedge = w^{-1}(\delta^\wedge) \in w^{-1}C^\wedge = K_{(S_\gamma, Z_\gamma)}^\wedge$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \beta, \delta^\wedge \rangle < 0 &\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \langle w^{-1}(\beta), \gamma^\wedge \rangle < 0 \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta_+ \text{ et } S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) \neq \emptyset \\ \langle \beta, \delta^\wedge \rangle = 0 &\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \langle w^{-1}(\beta), \gamma^\wedge \rangle = 0 \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta \text{ et } S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) = \emptyset \\ \langle \beta, \delta^\wedge \rangle > 0 &\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \langle w^{-1}(\beta), \gamma^\wedge \rangle > 0 \stackrel{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta_- \text{ et } S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) \neq \emptyset \end{aligned}$$

Les trois équivalences (b) ne dépendent pas du choix de γ^\wedge dans le cône dual $K_{(S_\gamma, Z_\gamma)}^\wedge$, et il s'agit donc de voir que les équivalences (a) ne dépendent pas du choix de w tel que $w(\gamma^\wedge) \in C^\wedge(\alpha)$: d'après 3.1.8, un tel w est dans $W_\gamma = W((I \setminus FS_\gamma) \cup Z_\gamma)$ et il fixe le cône $K_{(S_\gamma, Z_\gamma)}$ et son dual point par point.

(2) Si β est une racine imaginaire positive, on a $w^{-1}(\beta) \in \Delta_+$ pour tout w dans W et donc $\langle \beta, \delta^\wedge \rangle \leq 0$. \square

Proposition 3.2.4 — *Soit β une racine imaginaire ; si $\beta^\wedge \in C^\wedge(\beta)$, alors β et β^\wedge ont même support.*

Remarque. On connaît déjà le résultat analogue pour une racine réelle et sa coracine (cf. 1.1.12).

Démonstration. Considérons l'élément $\gamma \in (K_c \cap W.\beta)$. On démontre alors le résultat pour tout $w.\gamma$ où $w \in W$, par récurrence sur la longueur de w .

Si $l(w) = 0$, le résultat est clair par définition du cône dual.

Supposons le résultat vrai si la longueur de w est inférieure ou égale à $n - 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons alors un élément w de W de longueur n , et $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ une décomposition réduite de celui-ci.

Par hypothèse de récurrence $r_{i_2} \dots r_{i_n}(\gamma) = r_{i_1} w(\gamma)$ et $r_{i_1} w(\gamma^\wedge)$ ont même support, et d'après le lemme 2.1.2, il est clair que $S_{r_{i_1} w(\gamma)} \subset S_{w(\gamma)}$ avec l'inclusion stricte (et l'égalité $S_{w(\alpha)} = S_{r_{i_1} w(\alpha)} \cup \{i_1\}$) si et seulement si $i_1 \notin S_{r_{i_1} w(\gamma)}$ mais lui est lié.

On en déduit facilement qu'il en est de même pour l'inclusion de $S_{r_{i_1} w(\gamma^\wedge)}$ dans $S_{w(\gamma^\wedge)}$. D'où le résultat. \square

Définition 3.2.5 — Pour tout couple (S, Z) vérifiant les conditions de 3.1.7, on choisit arbitrairement un élément de $K_{(S, Z)}^\wedge$ avec pour seule restriction :

si $i \in I_{\text{im}}$, pour le couple $(\{i\}, \emptyset)$ (ou $(\{i\}, \{i\})$ avec $i \in I_0$), on choisit comme élément α_i^\wedge . Ainsi la nouvelle définition est bien compatible avec la précédente.

Si α est un élément de $K_{(S, Z)}$, l'élément précédemment défini est la coracine de α notée α^\wedge .

Si β est une racine imaginaire positive, il existe $w \in W$ tel que $w(\beta)$ est dans K_c donc dans un cône $K_{(S, Z)}$ sa coracine sera $(\beta)^\wedge = w^{-1}(\alpha^\wedge)$, où $\alpha^\wedge = (w(\beta))^\wedge$ (on a vu en 3.1.8 que cet élément β^\wedge ne dépend pas du choix de w tel que $w(\beta) \in K_c$.)

Si α est une racine imaginaire négative, sa coracine sera $-(-\alpha)^\wedge$.

Remarques. 1. D'après 3.1.2, α est une racine imaginaire de type affine (resp. indéfini) si et seulement si $\langle \alpha, \alpha^\wedge \rangle = 0$ (resp. $\langle \alpha, \alpha^\wedge \rangle < 0$).

2. Si la matrice de Borchers A est symétrisable (1.1.1 Rq. 3.), et si on considère une réalisation de Kac de A (1.1.4 Rq. 1), il existe sur \mathfrak{h} une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par le groupe de Weyl ([K] ou [Bo]) et donc une application linéaire $\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^\wedge$. Pour $i \in I$, $\nu^{-1}(\alpha_i) \in \mathbb{K}_+^* \alpha_i^\wedge$, donc $\nu(Q_{\mathbb{K}_+}^\wedge) = Q_{\mathbb{K}_+}$.

Si α est une racine imaginaire, $\nu^{-1}(\alpha)$ est un choix possible pour la coracine c'est-à-dire qu'il est bien situé dans le cône dual ; ce choix permet une « bonne détermination » de la coracine. Pourtant, même dans le cas symétrisable, le cône dual n'est pas réduit à une demi-droite, un autre choix est donc possible.

Corollaire 3.2.6 — Si α est une racine imaginaire et β une racine quelconque,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta^\wedge \rangle = 0 &\iff \langle \beta, \alpha^\wedge \rangle = 0 ; \\ &\text{et } \langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \cdot \langle \beta, \alpha^\wedge \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque. Le résultat analogue est déjà connu si les deux racines sont réelles (1.1.11).

Démonstration. En conjuguant par $\pm W$, on se ramène au cas où $\alpha \in K_c$. Quitte à changer β en $-\beta$, on a de plus $\beta \in \Delta_+$. On utilise alors les équivalences démontrées à la proposition 3.2.3 (vu 3.2.4 et 2.1.5). \square

Application à l'étude du système de racines

Considérons la chambre de Weyl négative :

$$C_{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} / \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 \ (\forall i \in I_{\text{re}})\}$$

et le cône de Tits négatif :

$$X^\wedge = \bigcup_{w \in W} w.C_{\mathbb{Q}}.$$

Proposition 3.2.7 — On a :

- $X^\wedge = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} / \langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0 \text{ pour au plus un nombre fini de racines réelles positives } \beta\}$.
- X^\wedge est un cône convexe.

Démonstration. Soit $X' = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} / \langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0 \text{ pour au plus un nombre fini de racines réelles positives}\}$.

Si α est un élément de $Q_{\mathbb{Q}}$, on note : $M_\alpha = \{\beta \in \Delta_+^{\text{re}} / \langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0\}$.

Avec cette définition, $\alpha \in X' \iff |M_\alpha| < \infty$.

Si $\alpha \in C_{\mathbb{Q}}$, alors $|M_\alpha| = 0$ donc $B_{\mathbb{Q}} \subset X'$. Montrons que X' est stable sous l'action de W ; ce qui établira l'inclusion $X \subset X'$.

Les générateurs r_i où $i \in I_{\text{re}}$ de W étant d'ordre deux, il suffit de montrer que $r_i(X') \subset X'$.

Soit α un élément de X' , on a $\langle r_i(\alpha), \beta^\vee \rangle = \langle \alpha, r_i(\beta^\vee) \rangle$.

Or, si β est une racine réelle positive son image par r_i est une racine positive si et seulement si $\beta \in (\Delta_+^{\text{re}} \setminus \{\alpha_i, 2\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i, -2\alpha_i\}$ et si r_i induit une involution de cet ensemble.

Comme $|M_\alpha|$ est fini, il en est de même de $|M_{r_i(\alpha)}|$, et $r_i(\alpha) \in X'$.

Pour montrer l'inclusion inverse, on raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de M_α où $\alpha \in X'$.

- Si $|M_\alpha| = 0$, alors $\alpha \in C_{\mathbb{Q}}$ est dans le cône de Tits.
- Supposons le résultat établi si le cardinal de M_α est strictement inférieur à n où $n \in \mathbb{N}^*$.

- Considérons alors α tel que $|M_\alpha| = n$, il existe au moins un élément réel de la base, α_i tel que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ (raisonnement par l'absurde immédiat).
- D'après les remarques précédentes, $M_{r_i(\alpha)} = M_\alpha \setminus \{\alpha_i, 2\alpha_i\}$ d'où $|M_{r_i(\alpha)}| = |M_\alpha| - 2/a_{ii}$. Par hypothèse de récurrence, $r_i(\alpha) \in X^\wedge$ et par stabilité évidente du cône de Tits sous l'action de W , α est dans X^\wedge .

Il est évident sur la définition de X' que $X' = X$ est un cône convexe.

En effet, si α et β sont dans X' , et si $t \in \mathbb{Q}_+ \cap [0, 1]$, si $\gamma \in \Delta_+^{\text{re}}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle t\alpha + (1-t)\beta, \gamma^\vee \rangle > 0 &\implies \gamma \in M_\alpha \cup M_\beta \text{ donc} \\ M_{t\alpha+(1-t)\beta} \subset M_\alpha \cup M_\beta &\implies |M_{t\alpha+(1-t)\beta}| \leq |M_\alpha| + |M_\beta| < \infty, \end{aligned}$$

et si $t \in \mathbb{Q}_+$, $M_{t\alpha} = M_\alpha$ donc $t\alpha \in X'$. □

Proposition 3.2.8 — *Si α et β sont deux racines imaginaires positives, alors :*

$$\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0 \implies \alpha + \beta \in \Delta_+^{\text{im}},$$

sauf s'il existe $w \in W$ et $i \in I$ tels que $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ soient dans $N_i\alpha_i$.

N.B : (1) Le cas exclus dans cette proposition est tel que $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*\beta$.

(2) Comme $\beta \in \Delta_+^{\text{im}}$, on a $\langle \beta, \beta^\wedge \rangle \leq 0$ et donc, par récurrence, $\alpha + \mathbb{N}\beta \in \Delta_+^{\text{im}}$.

Remarque. Le résultat analogue ($\alpha + \beta \in \Delta$) est déjà connu si l'une des deux racines est réelle (et sans autre condition sur α et β que $\alpha \notin \mathbb{Q}\beta$) à cause de la condition de chaîne (SR3), de 3.2.6 et 1.1.10.

Démonstration. On a montré que β , et β^\wedge ont même support. Comme $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$, S_α et S_β sont liés. Il est clair que $K_c \subset C_\mathbb{Q}$ donc une racine imaginaire positive est un élément du cône de Tits négatif.

Par convexité de ce cône, $\alpha + \beta \in X^\wedge$, et donc (cf. 3.2.7), il existe un élément w du groupe de Weyl, tel que $w(\alpha + \beta) \in C_\mathbb{Q}$. Pour montrer que $\alpha + \beta$ est une racine, il suffit d'établir que $w(\alpha + \beta) \in K_c$. Il s'agit d'un élément de $R = \sum_{i \in I} M_i\alpha_i$ à coordonnées toutes positives ou nulles puisque $(W.\alpha \cup W.\beta) \subset \Delta_+^{\text{im}}$. De plus, le support de cet élément est connexe, puisque :

$$\langle w(\alpha), (w(\beta))^\wedge \rangle = \langle w(\alpha), w(\beta^\wedge) \rangle = \langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0.$$

Donc, sauf éventuellement dans le cas où $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ sont proportionnelles à une même racine simple, $w(\alpha + \beta) \in K_c$. □

Proposition 3.2.9 — *Si α et β sont deux racines imaginaires positives :*

$$\alpha + \beta \in \Delta \implies \langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$$

sauf si α et β sont \mathbb{Q} -proportionnelles et de type affine.

Démonstration. Considérons $w \in W$ et $\gamma \in K_c$ tels que $\beta = w^{-1}.\gamma$. Comme $\alpha + \beta \in \Delta$, on a $w(\alpha + \beta) \in \Delta$.

Les supports de $w(\alpha)$ et de γ sont donc liés.

Par suite, si le support de $w(\alpha)$ n'est pas inclus dans Z_γ , il existe $i \in S_{w(\alpha)}$ tel que $\langle \alpha_i, \gamma^\wedge \rangle < 0$ (et donc $\langle w(\alpha), \gamma^\wedge \rangle < 0$).

Mais la racine α étant imaginaire, $S_{w(\alpha)}$ ne peut pas être de type fini (puisqu'il contient le support de la racine située dans K_c conjuguée à α).

Ainsi, soit les deux racines $w(\alpha)$ et γ ont même support $Z_\gamma = S_\gamma = S_{w(\alpha)}$ de type affine et donc α et β sont de type affine et proportionnelles avec un coefficient dans \mathbb{Q}_+ , soit $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$. □

4. Systèmes générateurs de racines et systèmes de racines engendrés

On étudie ici la dernière généralisation de la définition des systèmes de racines : on ne se limite plus au cas d'une réalisation libre, et on introduit la notion de système générateur de racines. Le système de racines est ici défini à l'aide d'une récurrence (cela dit la compatibilité avec l'axiomatique du chapitre 2 est optimale puisque les deux définitions coïncident dans le cas d'une réalisation libre).

Le principal instrument de travail est le revêtement d'un système générateur de racines qui permet de revenir au cas libre : c'est grosso modo la donnée d'une réalisation libre et d'une projection W -équivariante sur le système quelconque considéré. Dès lors, on appliquera souvent le raisonnement typique : résolution dans le revêtement et projection.

Il importe de s'assurer de la régularité des relèvements ; on discutera au 4.3 les moyens d'obtenir de « bonnes décompositions » et des systèmes dits normalisés qui lèvent ce genre de difficulté.

Enfin, on développe une géométrie des systèmes générateurs de racines. Ce point de vue porte ses fruits dès ce chapitre puisqu'il permet une discussion plus approfondie de certaines hypothèses de construction, mais l'efficacité de cette méthode sera plus manifeste au chapitre suivant.

Dans la suite du mémoire, \mathbf{K} désigne un corps de caractéristique 0 (resp. l'anneau des entiers).

4.1 Systèmes générateurs de racines, définitions

Définitions

Un *système générateur de racines* (en abrégé S.G.R.) sur \mathbf{K} (resp. sur \mathbb{Z}) est la donnée d'un 7-uplet $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ composé :

(SGR1) d'une matrice de Borchers relative $A = (a_{ij})_{(ij) \in I^2}$, à coefficients dans \mathbb{Q} , indexée par I ;

- (SGR2) de deux \mathbf{K} -modules V et V^\wedge (i.e. deux \mathbf{K} -espaces vectoriels si $\mathbf{K} \neq \mathbb{Z}$) ; si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, on supposera de plus V libre et V^\wedge sans torsion ;
- (SGR3) d'une dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre ces deux \mathbf{K} -modules (i.e. une forme bilinéaire définie sur $V \times V^\wedge$ et à valeurs dans \mathbf{K}) ;
- (SGR4) d'une famille $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ (appelée *la base*) de V et d'une autre $\Pi^\wedge = (\alpha_i^\wedge)_{i \in I}$, (*la cobase*) située dans V^\wedge , toutes deux indexées par l'ensemble I et telles que pour tous i et j dans I , $\langle \alpha_j, \alpha_i^\wedge \rangle = a_{ij}$;
- (SGR5) pour chaque $i \in I$, d'une partie N_i de \mathbb{Q}_+^* vérifiant (comme au n° 2.2) :
- (a) N_i admet comme plus petit élément 1, ou elle ne contient pas sa borne inférieure, mais est minorée par $3/4$ et contient 1 ;
 - (b) si $i \in I_2$, alors $N_i = \{1, 2\}$;
 - (c) si $i \in I_1$, alors $N_i = \{1\}$;
 - (d) si $i \in I$ et $j \in I_{re}$, alors $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (en particulier, cela impose $a_{ji} \in \mathbb{Z}$). Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$, on suppose de plus que :
 - (e) dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$, on a $N_i \alpha_i \subset V$;

(SGR6) pour lesquelles les conditions suivantes sont satisfaites :

- (a) la base $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I}$ est \mathbb{N} -libre (condition (R1) de 1.1.4 Rq. 6.), autrement dit : $\sum_{i \in I} n_i \alpha_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{N}$ implique $n_i = 0$ pour tout $i \in I$;
- (b) quel que soit $(i, j) \in I^2$ avec $i \neq j$, $\alpha_i \notin \mathbb{Q}_+ \alpha_j$, i.e. $\mathbb{N} \alpha_i \cap \mathbb{N} \alpha_j = \{0\}$.

La donnée $(V^\wedge, V, \Pi, \Pi^\wedge)$ est donc une réalisation de A . Comme dans le cas des systèmes de racines à bases libres, on note $\Pi_{re} = (\alpha_i)_{i \in I_{re}}$, $\Pi_1 = (\alpha_i)_{i \in I_1}$, $\Pi_2 = (\alpha_i)_{i \in I_2}$ et $\Pi_{im} = (\alpha_i)_{i \in I_{im}}$.

Considérons encore les sous-ensembles suivants de V ou V^\wedge définis comme en 1.1 : $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$, $Q_+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N} \alpha_i$, $Q_- = \sum_{i \in I} -\mathbb{N} \alpha_i$, $Q^\wedge = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i^\wedge$, $Q_{re} = Q(I_{re})$, $Q_{re}^\wedge = Q^\wedge(I_{re})$ et si \mathbf{K} est un corps, $Q_{\mathbb{Q}}$, $Q_{\mathbf{K}}$, $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$, $Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ qui sont les ensembles définis comme Q ou Q^\wedge en remplaçant \mathbb{Z} par \mathbb{Q} ou \mathbf{K} .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, on définit de façon analogue $Q_{\mathbb{Q}}$, (resp. $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$) dans $V_{\mathbb{Q}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (resp. dans $V_{\mathbb{Q}}^\wedge = V^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$).

Dans la suite, nous raisonnerons souvent dans $Q_{\mathbb{Q}}$, pourtant lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ la plupart des résultats seront vrais dans V (identifié à son image dans $V_{\mathbb{Q}}$ via l'injection naturelle) ; en particulier le système de racines (construit en 4.2) est dans V .

Enfin, si $i \in I_{re}$, la *coracine* de α_i est l'élément de $Q^\wedge(I_{re})$: $\alpha_i^\vee = 2\alpha_i^\wedge / a_{ii}$.

Pour $\alpha \in V^\wedge$, on note $[\alpha]$ l'image de α dans le dual V^* de V (i.e. la forme linéaire telle que $[\alpha](u) = \langle u, \alpha \rangle$ pour tout $u \in V$).

Sous les hypothèses de (SGR5), pour tout $i \in I$, on note encore M_i la plus petite partie de \mathbb{Q}_+ , contenant $N_i \cup \{0\}$ et stable sous l'addition.

Il est clair que pour tout $i \in I$, l'ensemble $M_i^* := M_i \setminus \{0\}$ possède également les deux propriétés :

- ou bien 1 est le plus petit élément de M_i^* , ou bien M_i^* qui n'a pas de plus petit élément, est contenu dans $[3/4 ; +\infty[$ et contient 1.
- $M_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$, si $j \in I_{\text{re}}$.

On considérera éventuellement les hypothèses intéressantes suivantes :

$$(Z) \forall i \in I, \forall j \in I, N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z} ;$$

(en particulier, la matrice A est alors une matrice de Kac-Moody relative, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont entiers) ;

$$(SGRN) \text{ si } i \in I_{\text{im}}, n_i \in N_i \text{ et } n_i \alpha_i = \sum_{j \in S} n_j \alpha_j \text{ où } n_j \in M_j^* (\forall j \in S)$$

et où S est une partie connexe de I , alors $S = \{i\}$;

(on dit alors que le S.G.R. est *normalisé*).

Pour tout $i \in I$, définissons P_i le sous-groupe additif de \mathbb{Q} engendré par N_i (ou M_i) et posons : $R = \sum_{i \in I} P_i \alpha_i$ (resp. $R_+ = \sum_{i \in I} M_i \alpha_i$) le sous-ensemble de V formé des combinaisons des α_i à coefficients dans P_i (resp. M_i).

N.B : Contrairement aux conventions de notations précédentes, R_+ qui est inclus dans l'ensemble des éléments de R s'écrivant comme combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs des α_i , ne lui est pas forcément égal.

L'ensemble R est en dualité sur \mathbb{Z} avec Q_{re}^\wedge , c'est-à-dire que $\langle \alpha, \alpha^\wedge \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in R$ et tout $\alpha^\wedge \in Q_{\text{re}}^\wedge$. Sous la condition (Z), ceci est encore vrai si l'on remplace Q_{re}^\wedge par Q^\wedge .

Remarques. 1. Cette notion généralise celle d'ensemble de données radicielles de Moody et Pianzola [MP]. Les notions de bases de racines ou de générateurs de racines de Hée [Hée 1] sont analogues mais généralisent [MP] dans une autre direction.

2. La définition des S.G.R. n'est pas symétrique en V et V^\wedge , il manque en particulier des ensembles N_i^\wedge et surtout l'équivalent de (SGR6).

3. Si on suppose qu'un élément i de I_{im} est lié à un élément j de I_{re} , alors N_i est à dénominateurs bornés. Sous cette hypothèse sur N_i (vérifiée dans la plupart des applications), N_i contient sa borne inférieure qui est donc 1. S'il en est ainsi pour tous les N_i , le sous- \mathbb{Z} -module R de V est engendré par des éléments $(1/n_i)\alpha_i$ où n_i divise le plus petit multiple commun des dénominateurs des éléments de N_i (donc de M_i).

4. On a choisi, à partir de ce chapitre, de considérer plus particulièrement l'hypothèse (Z) (A à coefficients entiers ; $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour tous i et j). Cette hypothèse semble raisonnable en ce qu'elle recouvre les applications principales, par exemple la démonstration des résultats pour les systèmes de racines de formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody ($[B_3R]$). Par contre, on admet toujours que N_i puisse ne pas contenir sa borne inférieure (ce qui ne peut alors arriver que si $a_{ij} = 0$ pour tout j dans I). Cela permet en particulier de simplifier, aux chapitres 5 et 6, les résultats de stabilité par passage aux quotients ou aux sous-systèmes de la notion de système générateur de racines.

D'autre part, le système de racines que l'on va construire (cf. n° 4.1) ne change pas si on multiplie une ligne imaginaire de la matrice par un élément de \mathbb{Q}_+^* , mais ceci ne permet pas de se ramener au cas où $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$ (il suffirait par exemple que les N_i soient à dénominateurs uniformément bornés).

5. Pour retrouver les systèmes de racines (non libres) des algèbres de Borchers, on aurait pu abandonner (SGR6b) et supposer $N_i = \{1\}$ ou \mathbb{N}^* si $i \in I_{\text{im}}$; mais cela nous aurait imposé d'admettre des racines \mathbb{Q} -colinéaires et même égales dans la base Π (cf. 2.4.3).

On a préféré cette définition qui nécessite l'introduction des N_i à la section 2.2. Elle exclut les racines simples \mathbb{Q} -colinéaires mais autorise, pour i et j dans I_{im} , $\alpha_i \in \mathbf{K}\alpha_j$.

Une autre définition aurait également été possible en remplaçant partout \mathbb{Q} par un corps ordonné archimédien \mathbf{K}_2 contenu dans \mathbf{K} .

6. La normalisation (SGRN) permet en général de caractériser la base par le système de racines engendré. On peut d'ailleurs « souvent » (sous l'hypothèse (BN) de 4.3) trouver une nouvelle base et de nouveaux N_i qui seront normalisés et donneront quand même le même système de racines au sens de 4.1 (cf. 4.3).

Dans le cas où Π est libre, les hypothèses (SGR6a), (SGR6b) et (SGRN) sont clairement vérifiées.

7. Si, pour tout élément i de I , N_i est réduit à $\{1\}$, le S.G.R. est une réalisation de la matrice A (de Borchers normalisée) vérifiant les hypothèses supplémentaires (SGR6b) et (SGR6a) (donc en particulier (R1) de 1.1.4 Rq. 6.).

Certaines autres réalisations peuvent être considérées comme des S.G.R. (pour une autre matrice) : voir l'exemple 2.4.3. Ceci nécessite $N_i = \{1\}$ pour tout $i \in I_{\text{re}}$, c'est-à-dire A de Borchers normalisée.

8. La condition (SGR6b) est clairement toujours vérifiée si i ou j est dans I_{re} .

On verra aussi en 4.2.3 que la condition (SGR6a) se réduit à une condition portant uniquement sur les composantes connexes de type affine de I .

9. On introduira plus tard (à partir de 11.4.17) une généralisation de la notion de S.G.R. où la condition (SGR5) est modifiée devenant la condition (SGR5') obtenue en remplaçant, pour $j \in I_{\text{re}}$ et pour $i \in I$, la propriété $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (i.e. $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in R$ et tout indice i réel) par $N_i(2a_{ji}/a_{jj}) \subset \mathbb{Z}$ (i.e. $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in R$ et tout indice i réel). On doit cependant supposer de plus que $a_{ji} \neq -1/2$ si $j \in I_2$ et $i \in I$.
10. La condition (SGR6a) impose $Q_+ \cap Q_- = \{0\}$ (resp. $Q_{\mathbb{Q},+} \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \{0\}$) si \mathbf{K} est un corps et $R_+ \cap R_- = \{0\}$.

Morphismes de S.G.R. et extension des scalaires

Soient deux systèmes générateurs de racines sur \mathbf{K} , $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ et $S^1 = (A^1, V^1, V^{1\wedge}, \langle, \rangle, \Pi^1, \Pi^{1\wedge}, (N_j^1)_{j \in I^1})$.

Une application \mathbf{K} -linéaire ϕ de V dans V^1 vérifie la condition (M1) si :

$$\forall j \in I \exists j' \in I^1 \text{ tel que } \phi(N_j \alpha_j) \subset N_{j'}^1 \alpha_{j'}^1.$$

Notons que la condition (SGR6b) assure l'unicité de l'élément j' . Cette remarque nous permet de justifier la définition suivante de morphisme de S.G.R. (l'axiome (M2) de celle-ci assurant que si j est un indice réel, alors j' aussi et donc la cohérence de (M3)). Comme en 3.2, sgn représente la fonction définie sur \mathbb{K} telle que : $\text{sgn}(a)$ vaut 0 si a est nul, + (resp. -) si a est strictement positif (resp. négatif).

Définitions 4.1.1 — *Un morphisme de S dans S^1 est une application \mathbf{K} -linéaire ϕ de V dans V^1 qui vérifie :*

- (M1) $\forall j \in I \exists j' \in I^1$ tel que $\phi(N_j \alpha_j) \subset N_{j'}^1 \alpha_{j'}^1$;
- (M2) $\forall (i, j) \in I^2, \text{sgn}(\langle \alpha_i, \alpha_j^\wedge \rangle) = \text{sgn}(\langle \alpha_i^1, \alpha_{j'}^{1\wedge} \rangle)$;
- (M3) $\forall i \in I_{\text{re}}, {}^t\phi([\alpha_i^{1\vee}]) = s_i[\alpha_i^\vee]$ où s_j désigne l'élément de $N_{j'}^1 \subset \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\phi(\alpha_j) = s_j \alpha_{j'}^1$. En particulier, pour tout $i \in I_{\text{re}}$ et tout $j \in I$, on a $\langle \phi(\alpha_j), \phi(\alpha_i)^\vee \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$, où l'on note encore $\alpha_i^\vee = (2/a_{ii})\alpha_i^\wedge$ et $(2\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\wedge$ si $a_{ii} = 1$ (cf. 2.1.4) et de même dans $V^{1\wedge}$.

Remarques. 1. L'application $i \mapsto i'$ induite par ϕ de I dans I^1 est encore notée ϕ . Elle vérifie pour tout $(i, j) \in I^2, \text{sgn}(a_{\phi(i), \phi(j)}^1) = \text{sgn}(a_{ij})$ et pour $i \in I_{\text{re}}$ et $j \in I$, on a : $(2s_i/a_{ii})a_{ij} = (2s_j/a_{\phi(i), \phi(i)}^1)a_{\phi(i), \phi(j)}^1$.

2. Le \mathbf{K} -module V^\wedge n'est pas bien déterminé (même à isomorphisme près) par la classe d'isomorphisme de S . On peut supposer, par exemple, que $V^\wedge = V^*$ ou encore que $V^\wedge = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{K}\alpha_i^\wedge$. On utilisera éventuellement ces deux possibilités.

Extension des scalaires

Soient \mathbf{K}' un corps contenant \mathbf{K} et S un système générateur de racines sur \mathbf{K} , alors $S_{\mathbf{K}'} = S \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}' = (A, V \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}', V^\wedge \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}', \langle, \rangle, \Pi \otimes_{\mathbf{K}} 1, \Pi^\wedge \otimes_{\mathbf{K}} 1, (N_i)_{i \in I})$ est un S.G.R. sur \mathbf{K}' . Le S.G.R. S vérifie la condition (Z) (ou la condition (SGRN)) si et seulement si c'est le cas de $S_{\mathbf{K}'}$.

De même, on peut étendre les scalaires pour un morphisme de S.G.R.

Changement de corps (de base)

On suppose, dans ce paragraphe, que \mathbf{K} est un corps et que Π engendre l'espace vectoriel V .

Proposition 4.1.2 — *Un S.G.R. S est isomorphe à un $S_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$ où $S_{\mathbb{Q}}$ est un système générateur de racines sur \mathbb{Q} si et seulement si l'espace vectoriel des relations linéaires entre les α_i est engendré par les relations linéaires à coefficients dans \mathbb{Q} .*

Remarque. De manière générale, si S est un S.G.R. sur \mathbf{K} , on peut construire un S.G.R. $S_{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{Q} et un morphisme de $S_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$ dans S correspondant à une application surjective Φ de $V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$ sur V , tels que Φ induise une bijection entre les systèmes de racines engendrés (définis un peu plus loin).

Démonstration. L'implication directe est évidente puisque si un tel isomorphisme existe alors $Q_{\mathbf{K}} \approx Q \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$; d'où la nécessité de la condition.

Réciproquement, notons $V_{\mathbb{Q}}$ le \mathbb{Q} -sous-espace vectoriel de V engendré par Π . Par hypothèse, on a un isomorphisme de $V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$ sur V qui induit clairement un isomorphisme de $S_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{K}$ sur S , avec $S_{\mathbb{Q}} = (A, V_{\mathbb{Q}}, V_{\mathbb{Q}}^*, \langle, \rangle, \Pi, \Pi_{\mathbb{Q}}^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ où $\alpha_i^\wedge_{\mathbb{Q}}$ est la restriction à $V_{\mathbb{Q}}$ de α_i^\wedge . \square

Proposition 4.1.3 — *Supposons la matrice A de rang fini.*

Un S.G.R. $S_{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{Q} est isomorphe à un $S_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où $S_{\mathbb{Z}}$ est un S.G.R. sur \mathbb{Z} si et seulement si :

- (1) $\forall (i, j) \in I^2, N_i a_{ji} \in \mathbb{Z}$;
- (2) $R \cap (Q^\wedge)^\perp$ est un \mathbb{Z} -module libre.

Remarque. Sous les hypothèses (1) et (2), N_i est à dénominateurs bornés, pour tout $i \in I_{\text{im}}$. Cela est dû à (1) sauf si $\{i\}$ est une composante connexe de I et si $a_{ii} = 0$, mais ce cas est réglé par (2).

Démonstration. L'implication directe est encore facile à établir. Pour la réciproque, l'hypothèse (1) montre que, par l'application linéaire $\phi : \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}^{(I)}$ telle que $\phi(\alpha)_i = \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle$, on a $\phi(R) \subset \mathbb{Z}^{(I)}$. Par hypothèse, l'image est contenue dans un sous-espace de dimension finie N de $\mathbb{Q}^{(I)}$. Il existe une base e_1, \dots, e_N de ce sous-espace vectoriel et $\{i_1, \dots, i_N\}$ deux à deux distincts dans I tels que la composante

de $\phi(\alpha_{i_s})$ sur e_j soit $\delta_{s,j}$ pour j de 1 à N . Alors $\phi(R) \subset \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_N$ est un \mathbb{Z} -module libre. Comme par hypothèse, $R \cap \ker \phi$ est un \mathbb{Z} -module libre, R est un \mathbb{Z} -module libre. Il est alors facile de construire $S_{\mathbb{Z}} = (A, R, R^*, \langle, \rangle, \Pi, \Pi_{\mathbb{Z}}^{\wedge}, (N_i)_{i \in I})$ qui convient. \square

Le groupe de Weyl et les racines réelles

On définit un élément de $GL(V)$ (qui stabilise Q et $Q_{re} := Q(I_{re})$ et $Q_{\mathbb{Q}}$ si \mathbf{K} est un corps), d'ordre deux en posant, sous les hypothèses précédentes,

$$r_i(v) = v - \langle v, \alpha_i^{\vee} \rangle v_i \text{ pour tout } v \in V.$$

Le groupe W est le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les r_i pour $i \in I_{re}$.

De même, pour $i \in I_{re}$, on définit $r_i^{\wedge} \in GL(V^{\wedge})$, d'ordre deux et stabilisant $Q_{\mathbf{K}}^{\wedge}$, $Q_{\mathbb{Q}}^{\wedge}$ (si \mathbf{K} est un corps) et Q_{re}^{\wedge} (ainsi que Q^{\wedge} si (Z) est vérifiée) en posant pour tout $v^{\wedge} \in V^{\wedge}$:

$$r_i^{\wedge}(v^{\wedge}) = v^{\wedge} - \langle \alpha_i, v^{\wedge} \rangle \alpha_i^{\vee}.$$

Ces r_i^{\wedge} (pour $i \in I_{re}$) engendrent un sous-groupe W^{\wedge} de $GL(V^{\wedge})$.

Désignons toujours par \mathbb{W} le groupe de Weyl associé à A . Deux représentations de groupes τ de \mathbb{W} dans W (resp. τ^{\wedge} de \mathbb{W} dans W^{\wedge}) sont définies en posant $\tau(R_i) = r_i$ (resp. $\tau^{\wedge}(R_i) = r_i^{\wedge}$) (démonstration analogue à celle de 1.1).

L'ensemble $\Delta^{re} = W(\Pi_{re} \cup 2\Pi_2)$ est le système de racines réelles de S , et on a donc : $Q_{re} = \sum_{\alpha \in \Delta^{re}} \mathbb{Z}\alpha$ et $Q_{re}^{\wedge} = \sum_{\alpha \in \Delta^{re}} \mathbb{Z}\alpha^{\wedge}$.

Il est clair que $W, W^{\wedge}, Q, Q^{\wedge}, Q_{re}, Q_{re}^{\wedge}$, et Δ^{re} (ainsi que Δ que l'on va définir) ne changent pas par extension des scalaires.

Chaînes et système de racines engendré

Si $\phi \in R_+$, on définit encore la chaîne issue de ϕ de direction α_i :

$$\begin{aligned} Ch(\phi, \alpha_i) &= \phi + M_i \alpha_i \text{ si } i \in I_{im}, \langle \phi, \alpha_i^{\wedge} \rangle < 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i ; \\ &= \{\phi\} \text{ si } \langle \phi, \alpha_i^{\wedge} \rangle = 0 \text{ ou } \phi \in \mathbb{Q}\alpha_i ; \\ &= \{\phi, \phi + \alpha_i, \dots, \phi + u\alpha_i\} \text{ si } i \in I_{re}, \langle \phi, \alpha_i^{\vee} \rangle = -u \leq 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i ; \\ &= \{\phi, \phi - \alpha_i, \dots, \phi + u\alpha_i\} \text{ si } i \in I_{re}, \langle \phi, \alpha_i^{\vee} \rangle = -u \geq 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i. \end{aligned}$$

On construit alors par récurrence sur l'entier n , une suite de parties de $Q_{\mathbb{Q}}$ (ou

encore de $Q_{\mathbb{Q}} \cap V \subset \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$), en posant :

$$\begin{aligned}\Delta_0(+) &= \Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2 \cup \left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i \right); \\ \Delta_n(+) &= \bigcup_{\alpha_i \in \Pi} \bigcup_{\phi \in \Delta_{n-1}(+)} Ch(\phi, \alpha_i); \\ \Delta_n &= \Delta_n(+) \cup (-\Delta_n(+)).\end{aligned}$$

On prouvera (4.2.13) que $\Delta_n(+) \subset R_+$ pour tout n , ce qui justifie cette définition par récurrence et montre que cette suite est croissante pour l'inclusion ; on pourra ainsi considérer la réunion de ces ensembles qui sera appelée *système de racines de S* et noté $\Delta(S)$.

Remarques. Dans la suite, nous établirons les résultats suivants :

1. (en 4.2.22) le système $\Delta(S)$ ne dépend que de la classe de S à isomorphisme près ;
2. (en 4.3.11) sous une hypothèse supplémentaire (BN), les ensembles $\Delta(S)$ et $\Delta(S)_+ = \cup \Delta_n(+)$ déterminent la base Π et les N_i (à une équivalence près s'il existe $i \in I$ tel que N_i n'ait pas de plus petit élément) ;
3. (en 4.2.17) le système $\Delta(S)$ contient Δ^{re} et (en 4.2.16) $R = \sum_{\alpha \in \Delta(S)} \mathbb{Z}\alpha$.

4.2 Revêtement

Définition

Un *revêtement libre* du système S est un S.G.R. $\tilde{S} = (A, \tilde{V}, \tilde{V}^{\wedge}, \langle, \rangle, \tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}^{\wedge}, (N_i)_{i \in I})$ tel que :

- la matrice A et les ensembles N_i sont ceux définis pour S ;
- le \mathbf{K} -module \tilde{V}^{\wedge} est le dual \tilde{V}^* de \tilde{V} et \langle, \rangle est la dualité canonique ;
- les parties $\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}^{\wedge}$ sont libres dans \tilde{V} et \tilde{V}^{\wedge} .

Considérons dans \tilde{V} , le système de racines à base libre $\tilde{\Delta}$ associé à A et aux N_i (chapitre 2), et notons avec des \sim toutes les notions introduites au chapitre 2 pour cette donnée. En particulier, $\tilde{\Delta} \subset \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}$.

Il existe alors deux applications \mathbf{K} -linéaires Ψ et Ψ^{\wedge} définies par :

$$\begin{aligned}\Psi : \tilde{Q}_{\mathbf{K}} &\longrightarrow \sum_{i \in I} \mathbf{K}\alpha_i \subset V \\ &\tilde{\alpha}_i \mapsto \alpha_i \\ \Psi^{\wedge} : \tilde{Q}_{\mathbf{K}}^{\wedge} &\longrightarrow \sum_{i \in I} \mathbf{K}\alpha_i^{\wedge} \subset V^{\wedge}. \\ &\tilde{\alpha}_i^{\wedge} \mapsto \alpha_i^{\wedge}\end{aligned}$$

- Remarques.* 1. Il n'y a pas unicité du revêtement libre. Par contre $\tilde{\Delta}$, $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, $\tilde{Q}_{\mathbf{K}}$, $\tilde{Q}_{\mathbf{K}}^{\wedge}$, Ψ et Ψ^{\wedge} sont bien déterminés par le S.G.R. S . En particulier, $\tilde{S}_{\mathbb{Q}} = (A, \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}, \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}^*, \langle, \rangle, \tilde{\Pi}, \tilde{\Pi}^{\wedge}, (N_i)_{i \in I})$ est bien déterminé à isomorphisme près (on peut par exemple remplacer $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}^*$ par \tilde{V}^{\wedge} dans $\tilde{S}_{\mathbb{Q}}$ si \mathbf{K} est un corps).
2. L'existence d'un revêtement libre résulte de 1.1.4 Rq. 4.

Lemme 4.2.1 —

$$(\forall \alpha \in \tilde{Q}_{\mathbf{K}}), (\forall \alpha^{\wedge} \in \tilde{Q}_{\mathbf{K}}^{\wedge}), \langle \alpha, \alpha^{\wedge} \rangle = \langle \Psi(\alpha), \Psi^{\wedge}(\alpha^{\wedge}) \rangle.$$

En conséquence, Ψ est un morphisme du S.G.R. $\tilde{S}_{\mathbf{K}}$ dans le S.G.R. S .

Démonstration. Les applications Ψ et Ψ^{\wedge} étant \mathbf{K} -linéaires, il suffit de vérifier l'égalité pour les $\tilde{\alpha}_i$ (resp. les $\tilde{\alpha}_i^{\wedge}$), pour lesquels c'est évident. \square

Proposition 4.2.2 —

$$\begin{aligned} \ker \Psi &\subset \{ \beta \in \tilde{Q}_{\mathbf{K}} / \langle \beta, \tilde{\alpha}_j^{\wedge} \rangle = 0 (\forall j \in I) \}; \\ \ker \Psi^{\wedge} &\subset \{ \beta^{\wedge} \in \tilde{Q}_{\mathbf{K}}^{\wedge} / \langle \tilde{\alpha}_j, \beta^{\wedge} \rangle = 0 (\forall j \in I) \}. \end{aligned}$$

Démonstration. Les deux démonstrations étant analogues, on ne prouvera que la première assertion. Si $\Psi(\beta) = 0$, alors pour tout $i \in I$, $\langle \Psi(\beta), \alpha_i^{\wedge} \rangle = 0$, soit (d'après le lemme 4.2.1) $\langle \beta, \tilde{\alpha}_i^{\wedge} \rangle = 0$. \square

Remarques. L'application Ψ (définie ci-dessus) envoie $\tilde{R} = \bigoplus P_i \tilde{\alpha}_i$ dans R . On note encore Ψ (resp. Ψ^{\wedge}) l'application linéaire de $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}^{\wedge}$) dans $Q_{\mathbb{Q}}$ (resp. $Q_{\mathbb{Q}}^{\wedge}$) définie comme précédemment si \mathbf{K} est un corps. On a $\Psi(\tilde{R}_+) = R_+$ et $\Psi(\tilde{Q}_{\mathbb{Q}+}) = Q_{\mathbb{Q}+}$. En particulier, pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, l'image par Ψ de $\tilde{\Delta}$ peut être vue dans V .

Comme le système de racines $\tilde{\Delta}$ est une réunion disjointe de $\tilde{\Delta}_+ \subset \tilde{R}_+$ et de $\tilde{\Delta}_- = -\tilde{\Delta}_+$, on a $\Psi(\tilde{\Delta}_-) \cap \Psi(\tilde{\Delta}_+) = \emptyset$ et $\Psi(\tilde{\alpha}) \neq 0$ pour toute racine $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}$.

Indiquons à présent un axiome équivalent à (SGR6a) qui interviendra souvent dans les raisonnements du chapitre 6.

Proposition 4.2.3 — *La condition (SGR6a) de 4.1 est équivalente à l'hypothèse plus technique suivante :*

(SGR6a') *si J est une réunion finie de composantes connexes de I de type affine, alors un élément $u = \sum_{j \in J} n_j \alpha_j$ tel que $n_j \in \mathbb{N}^*$ pour tout $j \in J$, et pour lequel on a $\sum_{j \in J} n_j a_{ij} = 0$ pour tout $i \in I$, n'est pas nul dans V .*

Remarques 4.2.4. (1) Si \mathbf{K} est un corps, il est clair que la condition (SGR6a) se généralise en remplaçant \mathbb{N} par \mathbb{Q}_+ (c'est-à-dire en supposant les n_i dans \mathbb{Q}_+).

Comme, pour chaque composante connexe J_s de type affine, la matrice $A(J_s)$ est de corang 1, l'hypothèse (SGR6a') est équivalente à celle obtenue en

supposant les n_i dans \mathbb{Q}_+ et d'après (1.1), ceci équivaut également, si I est fini, à l'existence d'une \mathbb{Q} -forme linéaire sur V prenant des valeurs strictement positives sur les éléments de l'ensemble : $E := \{v \in \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i ; \langle v, \alpha_i^\wedge \rangle = 0 (\forall i \in I)\}$.

(2) Si \mathbf{K} est un corps ordonné, la condition (SGR6a) se généralise en remplaçant \mathbb{N} par \mathbf{K}_+ (c'est-à-dire en supposant les n_i dans \mathbf{K}_+) à condition de supposer vérifié l'axiome suivant :

(SGRord) si J est une réunion de composantes connexes de I de type affine, alors un élément $u = \sum_{i \in J} n_i \alpha_i$ tel que $n_i \in \mathbf{K}_+^*$ pour tout $i \in J$ et pour lequel $A(J)u = 0$ n'est pas nul dans V .

(3) Si l'on supprime l'hypothèse (SGR6a), une racine de type imaginaire correspondant à une composante connexe de I de type affine peut être nulle. Dans ce cas, l'étude de chaque système de type affine montre que, dans V , le système est de type fini.

Comme l'hypothèse (SGR6a) (ou (SGR6a')) n'est pas imposée dans $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge$, deux coracines $\tilde{\alpha}^\wedge$ et $\tilde{\beta}^\wedge$ qui diffèrent d'une combinaison linéaire de coracines de type affine correspondant à une composante J de type affine de I , peuvent avoir même image par Ψ^\wedge . Dans ce cas, elles appartiennent à $\tilde{\Delta}^\wedge(J)$ (dont la définition est évidente) qui est de type affine, et sont des racines réelles, on sait alors ([K ; 6.3]) que $\tilde{\Delta}^{\text{re}\wedge}(J)$ est périodique de période proportionnelle à la racine imaginaire. Il est donc facile de déterminer dans chaque cas l'image de l'ensemble des coracines réelles, on vérifie qu'elle est isomorphe à un système de type fini.

Exemple. Dans le cas affine réel indécomposable, la racine imaginaire positive minimale δ est non nulle à cause de (SGR6a) ; par contre, on peut avoir $\delta^\wedge = 0$; le système Δ^\wedge est alors celui correspondant à X_n si Δ correspond à $X_n^{(1)}$ sauf dans les cas B_n et C_n qui sont échangés.

Démonstration. L'hypothèse (SGR6a') est bien sûr une conséquence de (SGR6a). Montrons l'implication inverse.

Supposons $\alpha = \sum_{j \in J} n_j \alpha_j$, avec des coefficients n_j entiers positifs non tous nuls, montrons que $\alpha \neq 0$. Posons $\tilde{\alpha} = \sum_{j \in J} n_j \tilde{\alpha}_j \in \tilde{Q}$.

Si $\alpha = 0$, alors $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_+ \cap \ker \Psi$. Par suite, il existe $u = \tilde{\alpha} \geq 0, \neq 0$ tel que $Au = 0$.

D'après la classification des matrices (1.1), chaque composante connexe de I rencontrant le support de u est une composante connexe de I de type affine. L'hypothèse (SGR6a') permet alors d'obtenir la contradiction cherchée. \square

Comme dans [MP], on obtient les propriétés :

Lemme 4.2.5 — On a :

$$(\forall i \in I) \mathbb{Q}_{-\alpha_i} \cap \sum_{j \in I} \mathbb{Q}_{+\alpha_j} = \{0\}$$

et aussi la propriété d'intersection faible (P.I.F.)

$$(P.I.F.) \quad \text{si } i \in I_{\text{re}}, \mathbb{Q}_{+\alpha_i} \cap \sum_{j \neq i} \mathbb{Q}_{+\alpha_j} = \{0\}.$$

Remarque. Si \mathbf{K} est un corps ordonné et si $i \in I_{\text{re}}$, alors $\mathbf{K}_{+\alpha_i} \cap \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{+\alpha_j} = \{0\}$. Par contre, la première propriété qui est basée sur (SGR6a), ne s'étend pas aussi facilement, il faut supposer, pour obtenir la généralisation de ce résultat, qu'aucune combinaison positive à coefficients dans \mathbf{K} d'éléments de l'ensemble E de la remarque 4.2.4 (1) n'est nulle (ce qui, d'après 1.1, est vrai sous l'hypothèse (SGRord) de 4.2.4 (2)).

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement de la condition (SGR6a).

Pour établir la seconde, seul est à considérer le cas où $n_i \alpha_i = \sum_{j \neq i} n_j \alpha_j$ avec tous les n_j positifs ou nuls dans \mathbb{Q} , alors, par la dualité, on a :

$$n_i \langle \alpha_i, \alpha_i^\wedge \rangle = \sum_{j \neq i} n_j \langle \alpha_j, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0,$$

ce qui entraîne $i \in I_{\text{im}}$ ou $n_i = 0$. □

Groupe de Weyl et racines réelles, lien avec le revêtement

La représentation du groupe de Weyl \mathbb{W} associé à $K(A)$ (cf. 2.1) dans l'espace \tilde{V} du revêtement est fidèle (cf. 1.1.6). On note \tilde{W} l'image de \mathbb{W} dans $GL(V)$.

On note $W|_Q$ (resp. $W|_{Q_\mathbb{Q}^\wedge}$) le sous groupe de $GL(Q)$ (resp. de $GL(Q_\mathbb{Q}^\wedge)$) engendré par les restrictions à Q (resp. à $Q_\mathbb{Q}^\wedge$) des réflexions $r_i = \tau(R_i)$ (resp. $r_i^\wedge = \tau^\wedge$) pour $i \in I_{\text{re}}$.

Proposition 4.2.6 — Il existe un unique homomorphisme surjectif :

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \mathbb{W} &\longrightarrow W|_Q \\ R_i &\mapsto r_i \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \sigma_2 : \mathbb{W} &\longrightarrow W|_{Q_\mathbb{Q}^\wedge} \\ R_i &\mapsto r_i^\wedge \end{aligned}$$

qui fait de $\Psi : \tilde{Q} \rightarrow Q$ (resp. $\Psi^\wedge : \tilde{Q}_\mathbb{Q}^\wedge \rightarrow Q_\mathbb{Q}^\wedge$) une application $(\mathbb{W}, W|_Q)$ -équivariante (resp. $(\mathbb{W}, W|_{Q_\mathbb{Q}^\wedge})$ -équivariante).

De plus, σ_1 est un isomorphisme.

Remarques.

1. L'existence et l'unicité de l'homomorphisme restent vraies si on remplace Q par $Q_\mathbb{Q}$ ou $Q_\mathbb{K}$ et, de même de manière duale, $Q_\mathbb{Q}^\wedge$ par $Q_\mathbb{K}^\wedge$
2. L'injectivité n'est valable que pour σ_1 puisqu'on a vu (en remarque 4.2.3) qu'un système de coracines de type affine donc de groupe de Weyl infini, peut être envoyé sur un système de type fini.

Démonstration. (a) L'existence des homomorphismes surjectifs σ_1 et σ_2 résulte trivialement de celle, signalée au quatrième paragraphe de 4.1, des représentations τ et τ^\wedge .

(b) L'équivariance des applications Ψ et Ψ^\wedge se démontre comme au n° 1.1.

(c) Quant à l'injectivité de σ_1 , elle résulte de 1.1.14. \square

Lemme 4.2.7 — Si $i \in I_{\text{re}}$, on a $\Psi^{-1}(Q_+ \alpha_i) \cap \tilde{\Delta} = N_i \tilde{\alpha}_i$.

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}$, telle que $\Psi(\tilde{\alpha}) = n_i \alpha_i$, avec $n_i \in \mathbb{Q}_+$. On sait que $\Psi(\tilde{Q}_{\mathbb{Q},-}) \cap Q_{\mathbb{Q},+} = \{0\}$, donc $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_+$.

Supposons $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}^{\text{im}}$, son orbite sous \mathbb{W} est formée de racines toutes positives, donc par équivariance de Ψ , on a $\mathbb{W}.\alpha_i \subset Q_{\mathbb{Q},+}$. D'après 4.2.5, $\mathbb{W}.\alpha_i$ ne peut pas rencontrer $Q_{\mathbb{Q},-} \setminus \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse $i \in I_{\text{re}}$.

Par suite, $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}^{\text{re}}$ et $\Psi(R_i.\tilde{\alpha}) \in Q_-$ donc $R_i.\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_-$ alors que $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_+$; la racine $\tilde{\alpha}$ est donc proportionnelle à $\tilde{\alpha}_i$, ce qui établit le résultat cherché grâce à (SR2b). \square

Proposition 4.2.8 — L'application Ψ induit une bijection entre $\tilde{\Delta}^{\text{re}}$ et Δ^{re} . De plus, $\Psi^{-1}(\Delta^{\text{re}}) \cap \tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}^{\text{re}}$.

Remarque. Si l'on pose $\Delta_+^{\text{re}} = \Delta^{\text{re}} \cap Q_{\mathbb{Q},+} = \Psi(\tilde{\Delta}_+^{\text{re}})$ et $\Delta_-^{\text{re}} = \Delta^{\text{re}} \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \Psi(\tilde{\Delta}_-^{\text{re}})$, on a donc : $\Delta^{\text{re}} = \Delta_+^{\text{re}} \sqcup \Delta_-^{\text{re}}$.

Démonstration. Les égalités $\Psi(\mathbb{W}.\tilde{\alpha}_i) = W.\alpha_i$ et $\Psi(\tilde{\Delta}^{\text{re}}) = \Delta^{\text{re}}$ résultent de l'équivariance de Ψ et la surjectivité de σ_1 . D'après 4.2.5, si $i \in I_{\text{re}}$ et $n_i w \tilde{\alpha}_i$ désigne une racine réelle quelconque de $\tilde{\Delta}$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi(n_i w \tilde{\alpha}_i) = \Psi(p_j w' \tilde{\alpha}_j) &\iff \Psi(n_i w'^{-1} w \tilde{\alpha}_i) = p_j \alpha_j \\ &\iff \Psi(w'^{-1}(n_i w \tilde{\alpha}_i)) = p_j \alpha_j \end{aligned}$$

ce qui implique (d'après 4.2.7) $n_i w'^{-1} w \tilde{\alpha}_i = p_j \tilde{\alpha}_j$; l'application considérée est donc injective.

Pour le second point, il suffit de remarquer qu'un élément de $\tilde{\Delta}$ est dans $\tilde{\Delta}^{\text{re}}$ si et seulement si son orbite sous \mathbb{W} rencontre \tilde{Q}_+ et \tilde{Q}_- ; on conclut par équivariance de Ψ grâce à la remarque 4.2.2). \square

Corollaire 4.2.9 — (1) *La représentation τ est un isomorphisme de \mathbb{W} sur W pour laquelle Ψ est (\mathbb{W}, W) équivariante.*

(2) *L'application ρ de \mathbb{W} dans $W|_{Q_{\mathbb{Q}}}$ qui à tout élément w du groupe de Weyl associe la restriction de son action à $Q_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme.*

Remarque. On a des résultats analogues pour $W|_Q$ et $W|_{Q_{\mathbb{K}}}$.

Démonstration. Cela résulte de 4.2.6. \square

Dans la suite, via τ , nous identifierons W et \mathbb{W} .

Corollaire 4.2.10 — *Si $w \in \mathbb{W} \setminus \{\text{Id}\}$, et $w = R_{i_1} \dots R_{i_p}$ où $p = l(w)$,*

(a) *$i \in I_{\text{re}}$ est tel que $l(wR_i) < l(w)$ si et seulement si $w.\alpha_i \in \Delta_-^{\text{re}}$;*

(b) *$w.\alpha_{i_p} \in \Delta_-^{\text{re}}$;*

(c) *$l(w) = |\{\alpha \in \Delta_{\text{nd},+}^{\text{re}} / w.\alpha \in \Delta_-\}|$.*

Démonstration. On a $w.\alpha_i \in \Delta_-^{\text{re}} \iff w.\tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}_-^{\text{re}}$, il suffit donc d'appliquer la proposition 1.1.6 pour démontrer (a) et (b).

(c) Pour tout $w \in W$, $l(w) = l(\sigma^{-1}(w)) = |\{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_+^{\text{re}} / \Psi(w.\tilde{\alpha}) \in \tilde{\Delta}_-\}|$ mais on sait que Ψ induit une bijection entre les racines réelles du revêtement et celles du système générateur de racines (4.2.8), ce qui permet de démontrer le résultat annoncé. \square

Corollaire 4.2.11 — *Si i, j sont deux indices réels, $w(\alpha_i) = \pm\alpha_j \iff wr_iw^{-1} = r_j$.*

Démonstration. Le résultat analogue est vrai dans le revêtement puisque par une éventuelle composition par r_j , on se ramène à utiliser le lemme 1.1.9, qui prouve que $w(\tilde{\alpha}_i) = \pm\tilde{\alpha}_j$ implique $w(\tilde{\alpha}_i^\wedge) = \pm\tilde{\alpha}_j^\wedge$. L'implication inverse est évidente et l'assertion dans S résulte alors de 4.2.8. \square

Corollaire 4.2.12 — (a) *Si $\alpha = w.\alpha_i$ avec $i \in I_{\text{re}}$, alors $\alpha^\wedge = w.\alpha_i^\wedge$ ne dépend pas de la décomposition considérée, de même $\alpha^\vee = w.\alpha_i^\vee$.*

(b) *Pour tout $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$, on définit une réflexion dans V en posant : pour tout $v \in V$, $r_\alpha(v) := v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha$.*

Si $\alpha \in \{w.\alpha_i, 2w.\alpha_i\}$, alors $r_\alpha = wr_iw^{-1}$, et on a :

$$W = \langle r_\alpha, ; \alpha \in \Delta^{\text{re}} \rangle.$$

Démonstration. La racine α étant réelle, son antécédent dans $\tilde{\Delta}$ est unique (4.1.2), on le note $\tilde{\alpha}$. Cette unicité et l'équivariance de Ψ impliquent l'égalité $\tilde{\alpha} = w.\tilde{\alpha}_i$ et donc par (2.1.4) $\tilde{\alpha}^\wedge = w.\tilde{\alpha}_i^\wedge$, ainsi, on a $\Psi^\wedge(\tilde{\alpha}^\wedge) = w.\alpha_i^\wedge$. Le reste est alors immédiat. \square

Systèmes de racines

À partir de ce paragraphe, nous nous permettons de ne considérer que $Q_{\mathbb{Q}}$. Ceci n'a pour but que d'alléger les énoncés. Il est facile de voir que, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, le système de racines construit ici est dans R , c'est-à-dire dans V d'après (SGR5e).

Si \tilde{S} est un revêtement (libre) de S , on construit comme pour S à la section 4.1, les ensembles $\tilde{\Delta}_n$ pour tout entier n ; et on considère le système $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ de base $\tilde{\Pi}$ construit comme au 2.2.

Lemme 4.2.13 — *Pour tout entier n , on a :*

$$\tilde{\Delta}_n \subset \Delta(A, (N_i)_{i \in I}) \text{ et } \Delta_n(+) \subset \Psi(\tilde{\Delta}_n(+)) \subset Q_{\mathbb{Q},+}.$$

Démonstration. On a $\tilde{\Delta}_0 \subset \Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ d'après les propriétés (SR1b), (SR2b) et la récurrence sur n est immédiate grâce aux propriétés (SR3b) et (SR4b) de $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ (cf. 2.2). Plus précisément, on voit que $\tilde{\Delta}_n(+) \subset \Delta(A, (N_i)_{i \in I})_+$.

Le deuxième résultat est tout aussi facilement obtenu par récurrence.

- Au rang 0, la vérification est immédiate.
- Pour $n > 0$, si $\phi \in \Delta_n(+) \setminus \Delta_{n-1}$, il existe un élément β de $\Delta_{n-1}(+)$ et un indice $i \in I$ tel que $\phi \in Ch(\beta, \alpha_i)$ (cette chaîne n'étant pas réduite à β) ; par hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{\beta}$ dans $\tilde{\Delta}_{n-1}(+) \cap \Psi^{-1}(\beta)$, et $\tilde{\beta}$ est tel que $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i \rangle = \langle \beta, \alpha_i \rangle$ (d'après 4.2.1). L'élément $\tilde{\beta}$ ne peut pas être \mathbb{Q} -proportionnel à $\tilde{\alpha}_i$. En effet, si tel était le cas, $\tilde{\beta}$ serait nécessairement dans $\tilde{\Delta}_0$ donc β appartiendrait à Δ_0 et serait alors \mathbb{Q} -proportionnel à α_i (SGR6b), d'où une contradiction. Par suite, on a $Ch(\beta, \alpha_i) \subset \Psi(Ch(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i)) \subset \Psi(\tilde{\Delta}_n)$.

□

Proposition 4.2.14 — *La suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.*

Démonstration. D'après 4.2.13, $\Delta_n(+) \subset Q_{\mathbb{Q},+}$ et même $\Delta_n(+) \subset R_+$ (remarque (4) en début de 2.2). L'inclusion de $\Delta_n(+) \subset \Delta_{n+1}(+)$ est alors évidente et l'assertion résulte de : $\Delta_n(-) = -\Delta_n(+) \subset -\Delta_{n+1}(+) \subset \Delta_{n+1}$. □

Définition 4.2.15 — *Le système de racines de S (ou système de racines engendré par S) est l'ensemble :*

$$\Delta(S) : = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Nous montrerons en 4.2.19 que cette définition coïncide avec celle du deuxième chapitre dans le cas d'un S.G.R. à base libre.

Corollaire 4.2.16 —

On a : $\Delta(S) \subset R \subset Q_{\mathbb{Q}}$.

De plus, si $\Delta_+(S) = \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},+}$ et si $\Delta_-(S) = \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},-}$, alors :

$$\Delta(S) = \Delta_+(S) \cup \Delta_-(S) \text{ et } \Delta_+(S) = -\Delta_-(S) \subset R_+.$$

Remarque. Par définition de R et R_+ , on a donc $R = \sum_{\alpha \in \Delta(S)} \mathbb{Z}\alpha$ et également $R_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+(S)} \mathbb{N}\alpha$.

Démonstration. Cela résulte de la propriété (SR1b) de $\tilde{\Delta}(A, (N_i)_{i \in I})$ (cf. 2.2), de la remarque 2.2 (4)) et du lemme 4.2.13, puisque $\Delta(S) \subset \Psi(\tilde{\Delta}(A, (N_i)_{i \in I}))$. \square

Lemme 4.2.17 —

$$\Delta^{\text{re}} \subset \Delta(S).$$

Démonstration. Comme $\Delta(S)$ contient les chaînes liant ses éléments à leurs images par les r_i ($i \in I_{\text{re}}$), il est stable sous l'action de \mathbb{W} . D'autre part, Δ_0 contient $\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2$ et est contenu dans $\Delta(S)$. \square

On note Δ^{im} l'ensemble $\Delta(S) \setminus \Delta^{\text{re}}$.

Proposition 4.2.18 — *Le système de racines $\Delta(S)$ est le plus petit sous-ensemble de $Q_{\mathbb{Q}}$ (ou R) contenant $N_i\alpha_i$ pour tout $i \in I$ et vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- (1) *si $\alpha \in \Delta(S)$ alors $-\alpha \in \Delta$ (propriété de symétrie) ;*
- (2) *si $\alpha \in \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},+}$ et si $i \in I$, alors la α_i -chaîne $Ch(\alpha, \alpha_i)$ est incluse dans $\Delta(S)$.*

Démonstration. Évident par construction. \square

Remarque. Supposons $\Pi = \Pi_{\text{re}}$, il résulte aussitôt de ce corollaire que $\Delta(S)$ est le plus petit sous-ensemble Ω de $Q_{\mathbb{Q}}$ contenant $\Delta^{\text{re}}(S)$ et tel que : pour tout $\alpha \in \Omega$ et tout $\beta \in \Delta^{\text{re}}$ non proportionnels :

$$[\beta, r_{\alpha}(\beta)] = \{\beta, \beta \pm \alpha, \dots, \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha\} \subset \Omega.$$

Proposition 4.2.19 — *Si \tilde{S} est un revêtement libre de S , on a, avec les notations de la section 2.2,*

$$\Delta(\tilde{S}) = \Delta(A, (N_i)_{i \in I}).$$

Démonstration. On a $\Delta(\tilde{S}) \subset \Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ (cf. 4.2.13).

D'après 4.2.18, dans \tilde{S} , le système $\Delta(\tilde{S})$ est le plus petit sous-ensemble de $\tilde{Q}_{\mathbb{Q},+} \cup \tilde{Q}_{\mathbb{Q},-}$ contenant $\tilde{\Pi}_{\text{re}} \cup (\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \tilde{\alpha}_i)$ et vérifiant les deux propriétés suivantes :

- la stabilité sous $\tilde{\alpha} \mapsto -\tilde{\alpha}$,
- pour tout $i \in I$, pour tout $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}_+$, on a $Ch(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_i) \subset \tilde{\Delta}_+$.

La proposition 1.2.14 implique $\mathbb{W}.\tilde{K} \subset \Delta(\tilde{S})$, l'inclusion de $\Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ est alors évidente puisque $\Delta(A, (N_i)_{i \in I}) = \mathbb{W}(\tilde{\Pi}_{\text{re}} \cup 2\tilde{\Pi}_2 \cup \pm(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \tilde{\alpha}_i)) \cup \pm \mathbb{W}.\tilde{K}$. Ceci établit l'inclusion inverse (vu 2.4.1) et donc l'égalité. \square

Dans la suite, nous noterons $\tilde{\Delta}$ le système de racines du revêtement \tilde{S} .

Proposition 4.2.20 — *Soient S un S.G.R. et \tilde{S} un revêtement libre de S , on a :*

$$\Delta(S) = \Psi(\tilde{\Delta}).$$

Si $\tilde{\alpha} = \sum_{i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}$ et $\alpha = \Psi(\tilde{\alpha})$, l'égalité $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$ est appelée une « bonne décomposition » de α .

Remarque. En particulier, le support d'une bonne décomposition est connexe.

Démonstration. D'après 4.2.13 et 4.2.16, il suffit d'établir l'inclusion $\Psi(\tilde{\Delta}_+) \subset \Delta$. Montrons par « récurrence » sur la hauteur $ht(\tilde{\beta})$ pour $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}_+$ que $\Psi(\tilde{\beta}) = \beta \in \Delta$.

D'après 4.2.8, l'assertion est vraie pour $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}^{\text{re}}$. Supposons alors $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}_+^{\text{im}}$.

Si $ht(\tilde{\beta}) \leq 1$, alors $\tilde{\beta} \in N_i \tilde{\alpha}_i$ et le résultat est immédiat.

Supposons $ht(\tilde{\beta}) = n \in \mathbb{Q}_+$ où $n > 1$ et le résultat démontré pour toute racine de hauteur inférieure ou égale à $n - 3/4$. Il existe un élément w du groupe de Weyl tel que $w.\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$ et on a $ht(w.\tilde{\beta}) \leq ht(\tilde{\beta})$ avec égalité si et seulement si $w.\tilde{\beta} = \tilde{\beta}$ (donc si et seulement si $\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$) et $ht(w.\tilde{\beta}) \leq ht(\tilde{\beta}) - 1$ sinon (cf. 2.1.2).

Si $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}_+^{\text{im}} \setminus \tilde{K}_c$, le résultat est, par hypothèse de récurrence, démontré pour l'élément de \tilde{K}_c conjugué sous \mathbb{W} à $\tilde{\beta}$ et le résultat est immédiat par équivariance de Ψ et par stabilité de Δ sous l'action de \mathbb{W} .

Reste le cas où $\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$.

Si $\tilde{\beta} \in N_i \tilde{\alpha}_i$ pour un certain i , le résultat est clair.

Sinon, d'après 4.2.19, $\tilde{\Delta}$ vérifie (SR5b) (cf. 2.2) donc il existe un indice j et un rationnel $n_j \in N_{j, \text{ind}}$ tels que $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j \in \tilde{\Delta}_+$; on a alors, $ht(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j) \leq ht(\tilde{\beta}) - 3/4$. Par hypothèse de récurrence, $\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j) = \beta - n_j \alpha_j \in \Delta_+$. De plus, $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$:

- si $j \in I_{\text{re}}$, c'est clair car par hypothèse $\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$;
- si $j \in I_{\text{im}}$, cela résulte de la connexité des supports des éléments de $\tilde{\Delta}$ comme $\tilde{\beta} \notin N_j \tilde{\alpha}_j$, il admet au moins un autre indice dans son support.

En conséquence, sous les hypothèses précédentes, $\tilde{\beta}$ n'est pas proportionnel à une racine simple (donc $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j \notin \mathbb{Q}_+ \tilde{\alpha}_j$) et $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$, par conséquent $\tilde{\beta} \in Ch(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j)$.

(1) Si $\beta - n_j \alpha_j \notin \mathbb{Q} \alpha_j$, alors $\beta \in Ch(\beta - n_j \alpha_j, \alpha_j)$, d'après la construction par chaînes de Δ ; ainsi, $\beta \in \Delta$.

(2) Si $\beta - n_j \alpha_j \in \mathbb{Q} \alpha_j$, (et $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j \notin \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_j$), d'après 4.2.7, $j \in I_{\text{im}}$ et $\beta - n_j \alpha_j = q \alpha_j$ n'est pas une bonne décomposition si le système est normalisé, ou sinon n'est pas la seule. Deux cas sont possibles :

(a) soit $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j = m_s \tilde{\alpha}_s$ pour $m_s \in N_s$ (et $s \in I$), alors $\langle \alpha_s, \alpha_j^\wedge \rangle < 0$; donc $\beta \in Ch(m_s \alpha_s, \alpha_j)$ (d'après (SGR6b), deux racines simples ne sont pas \mathbb{Q} -proportionnelles); ainsi $\beta \in \Delta$.

(b) soit $\beta - n_j \alpha_j$ n'est pas colinéaire à une racine simple mais est un élément de \tilde{K}_c puisque son image par Ψ est dans $\mathbb{Q}_+ \alpha_j$. Il existe alors (par (SR5b) dans $\tilde{\Delta}$) un indice s et un rationnel $m_s \in N_{s, \text{ind}}$ tels que $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s \in \tilde{\Delta}_+$, on a, comme précédemment, $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s^\wedge \rangle < 0$. De plus, $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle \leq 0$ car $j \in I_{\text{im}}$ et $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s$ est une racine positive. D'autre part, $\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s)$ appartient à Δ et $ht(\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s)) < ht(\beta) - 3/4$.

(α) Si $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ et si $\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s) \notin \mathbb{Q} \alpha_j$, alors

$\beta - m_s \alpha_s \in Ch(\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s), \alpha_j)$ et, comme j est dans I_{im} , on a :

$\langle \tilde{\beta} - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s^\wedge \rangle = \langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s^\wedge \rangle + n_j \langle \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_s^\wedge \rangle < 0$ alors :

Si $s \neq j$, on a $\beta \in Ch(\beta - m_s \alpha_s, \alpha_s)$ car β n'est pas \mathbb{Q} -proportionnel à α_s .

Si $s = j$, on recommence le raisonnement du (b) en remplaçant β par $\beta - m_s \alpha_s$ (c'est le même raisonnement mais avec $n_j \in M_j^*$ au lieu de $N_{j, \text{ind}}$). Cette boucle sera faite jusqu'à arriver au cas $j \neq s$ ce qui est toujours possible puisque $\tilde{\beta} \notin \mathbb{Q} \tilde{\alpha}_i$ et que la hauteur diminue d'au moins $3/4$ à chaque fois.

(β) Si $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle$ est strictement négatif et $\Psi(\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s) \in \mathbb{Q} \alpha_j$ alors $s = j$ et on recommence la boucle précédente jusqu'à arriver au cas $j \neq s$.

(γ) Si $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle = 0$, on a forcément $\langle \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ car $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$. De plus, $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s$ a un support J qui n'est pas lié à j car $\tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s = \sum_{p \in J} n_p \tilde{\alpha}_p$ avec $n_p > 0$ et $j \in I_{\text{im}}$. L'hypothèse implique donc $\langle \tilde{\alpha}_p, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle = 0$ pour tout $p \in J$ et en particulier, on en déduit que $s \notin J$ donc $\langle \tilde{\beta} - n_j \tilde{\alpha}_j - m_s \tilde{\alpha}_s, \tilde{\alpha}_s^\wedge \rangle < 0$.

Or, par hypothèse, $\beta - n_j \alpha_j \in \mathbb{Q} \alpha_j$. Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\beta - n_j \alpha_j = q \alpha_j$, si $l \in J$, $\langle \sum_{p \in J} n_p \alpha_p, \alpha_l^\wedge \rangle = \langle q \alpha_j - n_s \alpha_s, \alpha_l^\wedge \rangle = 0 - \langle n_s \alpha_s, \alpha_l^\wedge \rangle \geq 0$. Par connexité du support de $\tilde{\beta}$, il existe dans J au moins un indice l qui est lié à s et donc pour lequel $\langle \sum_{p \in J} n_p \alpha_p, \alpha_l^\wedge \rangle > 0$. D'après la classification des matrices de Vinberg (cf. 1.1), J est une partie de type fini de I . Par suite, la racine $\sum_{p \in S} n_p \alpha_p$ est une racine réelle.

Dans le S.G.R. S , $m_s \alpha_s \in \Delta$ puisque $m_s \in N_s$, $n_j \alpha_j + m_s \alpha_s \in Ch(m_s \alpha_s, \alpha_j)$; de plus, $\langle n_j \alpha_j + m_s \alpha_s, (\sum_{p \in J} n_p \alpha_p)^\wedge \rangle < 0$ (cf. 3.2.6). Soit $w \in W$ tel que $w(\sum_{p \in J} n_p \alpha_p)$ soit proportionnelle à une racine simple réelle, $w(n_j \alpha_j + m_s \alpha_s) \in \Delta$ et n'est pas proportionnelle à $w(\sum_{p \in J} n_p \alpha_p)$ (puisque cette dernière est réelle) donc : $w(n_j \alpha_j + m_s \alpha_s) + w(\sum_{p \in J} n_p \alpha_p) \in Ch(w(n_j \alpha_j + m_s \alpha_s), w(\sum_{p \in S} n_p \alpha_p))$ et le résultat recherché vient par stabilité de Δ sous l'action de W . \square

Corollaire 4.2.21 — *L'ensemble $\Delta(S)$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$;
- $\forall i \in I_{\text{re}}, \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Z}\alpha_i, \text{Ch}(\alpha, \alpha_i) \subset \Delta_+$;
- $\forall i \in I_{\text{im}}, \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\alpha_i, (\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0) \implies \alpha + n_i \alpha_i \in \Delta$ pour tout $n_i \in M_i$;
- $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus (\bigcup_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i)$, il existe $i \in I$, et $n_i \in N_{i, \text{ind}}$ tels que $\alpha - n_i \alpha_i \in \Delta_+$;
- $\forall i \in I_{\text{re}}, \Delta \cap \mathbb{Q}_+ \alpha_i = N_i \alpha_i$;
- $\forall i \in I_{\text{im}}, N_i \alpha_i \subset \Delta \cap \mathbb{Q}_+ \alpha_i$.

Démonstration. Immédiat par la proposition 4.2.16, le lemme 4.2.7 et les propriétés d'un système de racines à base libre (2.2). \square

Remarque. Dans le cas d'une racine simple imaginaire, l'ensemble des racines positives multiples de α_i n'est pas forcément réduit à $N_i \alpha_i$. Un autre multiple $q\alpha_i$ peut apparaître comme image par Ψ d'une racine imaginaire de $\tilde{\Delta}$, dans ce cas, $q\alpha_i$ n'est pas une « bonne décomposition ». Considérons par exemple la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

On peut avoir dans V l'égalité : $(2/3)\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (il suffit de prendre $V = \tilde{Q}_{\mathbf{K}}$ quotienté par cette relation) ainsi, comme $s(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \in \tilde{\Delta}^{\text{im}}$ pour tout entier non nul s , on a $(2s/3)\alpha_4 \in \Delta$. Si l'on veut un S.G.R. normalisé (4.1), il faut imposer $2s/3 \notin N_4$ ($\forall s \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 4.2.22 — *Soit ϕ un isomorphisme de $S = (A, V, V^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$, un S.G.R. sur un S.G.R. $S^1 = (A^1, V^1, V^{1\wedge}, \langle, \rangle^1, \Pi^1, \Pi^{1\wedge}, (N_j^1)_{j \in I_{\text{im}}^1})$, l'isomorphisme ϕ de V sur V^1 échange $\Delta(S)$ et $\Delta(S^1)$.*

Remarque. Si ϕ est un morphisme de S sur S^1 qui injecte Π dans Π^1 (donc \tilde{Q} dans \tilde{Q}^1) alors $\phi(\Delta(S))$ est inclus dans $\Delta(S^1)$. Si ϕ n'est pas injectif sur Π , il faut, pour avoir encore la même inclusion, ajouter des conditions de compatibilité entre les N_i et les N_j^1 .

Démonstration. L'isomorphisme de S.G.R. ϕ induit une bijection de Π sur Π^1 et une autre de I sur I^1 grâce à laquelle on peut identifier I et I^1 , on a alors :

- par (M1), $N_i = N_i^1$ et $s_i = 1$ pour tout $i \in I$; (ceci quitte à changer α_i et N_i si N_i n'a pas de plus petit élément, ce qui ne change pas $\Delta(S)$) ;
- par (M2), $\text{sgn}(a_{ij}) = \text{sgn}(a_{ij}^1)$ pour tout couple (i, j) d'éléments de I ;
- par (M3), $a_{ij} = a_{ij}^1$ pour tout $i \in I_{\text{re}}$.

Ainsi, il est clair que les matrices C et C^1 associées respectivement à A et A^1 dans la proposition 2.4.2 sont égales. Considérons alors des revêtements libres de V (resp. V^1) \tilde{V} (resp. \tilde{V}^1) et l'application $\tilde{\phi}$ de \tilde{Q} dans \tilde{Q}^1 qui envoie $\tilde{\alpha}_i$ sur $\tilde{\alpha}_{\phi(i)}^1$.

On a $\tilde{\phi}(\Delta(A, (N_i))) = \tilde{\phi}(\Delta(C, (N_i))) = \Delta(A^1, (N_i))$ et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Delta(A, (N_i)) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \Delta(C, (N_i)) \\ \Psi \downarrow & & \Psi^1 \downarrow \\ \Delta(S) & \xrightarrow{\phi} & \Delta(S^1) \end{array}$$

est commutatif, ce qui établit le résultat cherché. □

Démonstration de la remarque. Si ϕ induit une injection de Π dans Π^1 , elle induit une injection de I dans I^1 et on peut encore identifier I et son image. On a alors $N_i \subset N_i^1$ et la matrice C est extraite de C^1 et donc :

$$\tilde{\phi}(\Delta(A, (N_i)_{i \in I})) = \tilde{\phi}(\Delta(C, (N_i)_{i \in I})) \subset \Delta(C^1, (N_i^1)_{i \in I^1}) = \Delta(A^1, (N_{\phi i})_{i \in I^1}).$$

Si ϕ n'est pas injective, les hypothèses de compatibilité à ajouter, pour assurer l'inclusion $\phi(\Delta(S)) \subset \Delta(S^1)$, sont du genre de celles de l'exemple suivant :

L'ensemble I a deux éléments tels que $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21}$ et $\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_2) = \alpha_1^1$ alors il faut que N_1^1 contienne la plus petite partie de \mathbb{Q} contenant N_i pour $i \in \{1, 2\}$ et stable sous l'addition. □

Lemme 4.2.23 — Si $\alpha \in \Delta_+(S)$, et $r_i \cdot \alpha \in \Delta_-(S)$ pour $i \in I_{re}$, alors $\alpha \in N_i \alpha_i$.

Démonstration. On connaît le résultat analogue dans $\tilde{\Delta}$, on conclut grâce à l'équivariance de Ψ et à la relation $\Psi(\tilde{Q}_{\mathbb{Q},+}) \cap \Psi(\tilde{Q}_{\mathbb{Q},-}) = Q_{\mathbb{Q},+} \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \{0\}$ (4.2.3). □

Lemme 4.2.24 — Soient $(i, j) \in I^2$ et $w \in \mathbb{W}$, si $w(n_i \alpha_i) = n_j \alpha_j$ avec $n_i \in N_i$ et $n_j \in N_j$, alors $w \cdot \alpha_i^\wedge = \alpha_j^\wedge$.

Démonstration. Par (\mathbb{W}, W) -équivariance de Ψ , l'hypothèse s'écrit $\Psi(w(n_i \tilde{\alpha}_i)) = n_j \alpha_j$ (avec $n_i \tilde{\alpha}_i$ et $n_j \tilde{\alpha}_j$ dans $\tilde{\Delta}$).

Si $j \in I_{im}$, cela implique $\langle w(\tilde{\alpha}_i), \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle \leq 0$ pour tout $s \in I$, et donc $w(n_i \tilde{\alpha}_i)$ est dans l'intersection de $W(n_i \tilde{\alpha}_i)$ avec \tilde{K}_c (qui est vide si $i \in I_{re}$ et réduite à un élément d'après 1.1.15 si $i \in I_{im}$). Ceci prouve que $w(n_i \tilde{\alpha}_i) = n_i \tilde{\alpha}_i$, donc $i = j \in I_{im}$ et w fixe $\tilde{\alpha}_i$. Le support de w (cf. 1.1.9 (c)) est donc inclus (cf. 1.1.15) dans $\{h \in I ; a_{ih} = 0\}$. Il est alors clair que $w(\alpha_i^\wedge) = \alpha_i^\wedge$.

Si $j \in I_{re}$, alors d'après 4.2.7, $w(n_i \tilde{\alpha}_i) \in \tilde{\Delta} \cap \Psi^{-1}(N_j \alpha_j) = N_j \tilde{\alpha}_j$ et le résultat est alors connu (2.1.1). □

4.3 Structure du système de racines $\Delta(S)$

Les sous-systèmes $\Delta(J)$ avec $J \subset I$ (cas « standard »)

Considérons le S.G.R. $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ toujours défini sur \mathbf{K} ,

Proposition 4.3.1 — *Soit J une partie quelconque de I , alors :*

$S_J = (A(J), V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi(J), \Pi^\wedge(J), (N_i)_{i \in J})$ est un système générateur de racines, de groupe de Weyl $\mathbb{W}_J = \langle r_i ; (i \in I_{\text{re}} \cap J) \rangle$, de système de racines :

$$\Delta(J) = \Psi(\tilde{\Delta}(J)) = \{\alpha \in \Delta / \exists \tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta} \cap \tilde{Q}(J) \text{ telle que } \Psi(\tilde{\alpha}) = \alpha\}.$$

En particulier, $\Delta^{\text{re}}(J) = \Delta^{\text{re}} \cap (Q_+(J) \cup Q_-(J))$.

L'identité de V induit un morphisme de S.G.R de S_J dans S .

Si S vérifie la condition (Z) ou l'hypothèse (SGRN), il en est de même pour S_J .

Démonstration. Il est clair que S_J possède les propriétés requises pour être un système générateur de racines. De plus, le S.G.R. $(A(J), \tilde{V}, \tilde{V}^\wedge, \langle, \rangle, \tilde{\Pi}(J), \tilde{\Pi}^\wedge(J), (N_i)_{i \in J})$ est un revêtement de S_J . D'après le corollaire 2.2.3, $\tilde{\Delta} \cap \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$ est le système de racines de \tilde{S}_J ; d'où, par projection, le résultat dans V . Dans le revêtement libre, toujours selon 2.2.3, on a $\tilde{\Delta}^{\text{re}}(J) = \tilde{\Delta}^{\text{re}} \cap \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$. Une racine réelle de $\tilde{\Delta} \cap \tilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$ donnant une racine réelle dans $\tilde{\Delta}(J)$, on a donc $\Delta^{\text{re}}(J) \subset \Delta^{\text{re}} \cap (Q_+(J) \cup Q_-(J))$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de considérer le cas des éléments $\alpha \in \Delta^{\text{re}} \cap Q_+(J)$. Procédons par récurrence sur la hauteur (définie comme la hauteur de l'unique élément $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{\Delta}$ tel que $\Psi(\tilde{\alpha}) = \alpha$).

- Si la hauteur est 1, mais également s'il s'agit du double d'une racine simple, le résultat est dû à (P.I.F) (cf. 4.2.5).
- Sinon, comme $\tilde{\alpha}$ est réelle, il existe $i \in S_{\tilde{\alpha}}$ tel que $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_i^\vee \rangle > 0$, ce qui implique $i \in J$ et on se ramène à $r_i(\alpha)$ pour lequel on peut conclure par hypothèse de récurrence.

Les deux autres assertions sont immédiates. □

N.B : En général, l'égalité $\Delta^{\text{re}}(J) = \Delta^{\text{re}} \cap Q(J)$ est fautive. Elle est cependant vérifiée dès que la famille Π_{re} est libre (la démonstration étant basée sur la même récurrence). De même, en général, $\Delta(J) \neq \Delta \cap Q_{\mathbb{Q}}(J)$. Considérons par exemple la matrice ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut trouver une réalisation de A dans laquelle $\alpha_4 := -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et il est clair que la racine α_4 est alors dans $Q(J)$ pour $J := \{1, 2, 3\}$.

Remarque. On obtient d'autres « sous-systèmes » intéressants en considérant toujours une partie J de I mais en choisissant des ensembles N'_j pour $j \in J$ seulement inclus dans les N_j définis pour le système (la démonstration étant analogue à celle faite ici).

Les coracines

Proposition 4.3.2 — Soit $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$, pour tout $\beta \in \Delta \setminus \mathbb{Q}\alpha$, on a

$$\{\beta, \beta \pm \alpha, \dots, \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha\} \subset \Delta.$$

Démonstration. Le résultat analogue est vrai dans $\tilde{\Delta}$ (cf. 2.2) pour une racine réelle simple. La stabilité de $\tilde{\Delta}$ sous \mathbb{W} et l'égalité $\Psi(\tilde{\Delta}) = \Delta$ permettent de conclure. \square

Si α est une racine imaginaire positive on note :

$$\zeta(\alpha) = \Psi^{-1}(\alpha) \cap \tilde{\Delta} \text{ et } \zeta^\wedge(\alpha) = \{(\tilde{\beta})^\wedge / \tilde{\beta} \in \zeta(\alpha)\}.$$

Proposition 4.3.3 — Si α et β sont toutes deux des racines imaginaires positives et s'il n'existe pas d'élément w du groupe de Weyl tel que $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ soient proportionnelles à une même « racine simple » α_i avec des coefficients dans N_i , on a :

$$\langle \beta, \Psi^\wedge(\zeta^\wedge(\alpha)) \rangle \neq \{0\} \implies \beta + \alpha \in \Delta.$$

Démonstration. Considérons $\tilde{\beta}$ un élément de $\zeta(\beta)$. Sous les hypothèses de la proposition, il existe au moins un élément $\tilde{\gamma}^\wedge$ de $\zeta^\wedge(\alpha)$ tel que $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}^\wedge \rangle \neq 0$. Les racines $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ étant imaginaires positives, $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}^\wedge \rangle < 0$. D'après 3.2.8, on a alors $\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}$ sauf dans le cas où $\tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ sont conjuguées sous l'action d'un même élément du groupe de Weyl à un multiple d'une même « racine simple » imaginaire $\tilde{\alpha}_i$ avec des coefficients dans N_i , et le résultat cherché vient par projection. \square

Proposition 4.3.4 — Soient $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}(S)$ et $\beta \in \Delta_+^{\text{im}}(S)$.

S'il existe un élément $\tilde{\beta}$ de $\zeta(\beta)$ tel que $\langle \Psi^{-1}(\alpha), \tilde{\beta}^\wedge \rangle < 0$, alors $\langle \tilde{\beta}, \Psi^{-1}(\alpha^\wedge) \rangle < 0$ et donc $\beta + \alpha \in \Delta$.

Démonstration. Immédiat, d'après les propriétés du revêtement ((SR3b) et 3.2.6). \square

Remarque. D'après les trois propositions précédentes, si α, β sont des racines positives telles que $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ et $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$ (pour un $\beta^\wedge \in \Psi^\wedge(\zeta^\wedge(\beta))$ si β est imaginaire), alors $\alpha + \beta \in \Delta$. Si α et β sont imaginaires, la condition $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ peut être affaiblie (4.3.3).

Lemme 4.3.5 — Soient α une racine imaginaire positive et $\tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha)$, on sait qu'il existe $w \in \mathbb{W}$ tel que $w(\tilde{\alpha}) \in \tilde{K}_c$, dans ce cas $w(\zeta(\alpha)) \subset \tilde{K}_c$.

Pour un tel choix de w , l'ensemble $FS_{\tilde{\beta}} \setminus Z_{\tilde{\beta}}$ (cf. 3.1 et 3.1.1) ne dépend pas du choix de $\tilde{\beta}$ dans $\zeta(w(\alpha)) = w(\zeta(\alpha))$.

Remarque. Avec les notations de 3.1 et 3.1.1, si $\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$:

$$(I \setminus FS_{\tilde{\beta}}) \cup Z_{\tilde{\beta}} = \{i \in I; \langle \tilde{\beta}, \alpha_i^\wedge \rangle = 0\},$$

$$FS_{\tilde{\beta}} \setminus Z_{\tilde{\beta}} = \{i \in I; \langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0\}.$$

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha)$, la racine $\tilde{\alpha}$ est imaginaire positive, il existe donc un élément du groupe de Weyl w tel que $w.\tilde{\alpha} \in \tilde{K}_c$. Soit $\tilde{\beta} \in w(\zeta(\alpha))$ (i.e. $\Psi(w^{-1}.\tilde{\beta}) = \alpha$). Par équivariance de Ψ , on a :

$$\begin{aligned} \Psi(w.\tilde{\alpha}) = \Psi(\tilde{\beta}) &\iff \Psi(\tilde{\alpha}) = \Psi(w^{-1}\tilde{\beta}) ; \\ &\implies \langle \Psi(w.\tilde{\alpha}), \alpha_i^\wedge \rangle = \langle \Psi(\tilde{\beta}), \alpha_i^\wedge \rangle \quad \forall i \in I ; \\ &\implies \langle w.\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle = \langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

Ce qui impose $w.\tilde{\beta} \in \tilde{K}_c$ ainsi que l'égalité des ensembles $FS_{w.\tilde{\alpha}} \setminus Z_{w.\tilde{\alpha}}$ et $FS_{\tilde{\beta}} \setminus Z_{\tilde{\beta}}$, d'après la remarque précédente. \square

Proposition 4.3.6 — Si α est une racine imaginaire et si $\zeta(\alpha)$ contient une racine imaginaire affine (au sens de 3.1.2), alors il n'est formé que de racines imaginaires affines.

On pourra donc ainsi parler du type d'une racine imaginaire α :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est de type affine} &\iff \exists \tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha) / \tilde{\alpha} \text{ est de type affine} ; \\ &\iff \forall \tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha), \tilde{\alpha} \text{ est de type affine} ; \\ \alpha \text{ est de type indéfini} &\iff \exists \tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha) / \tilde{\alpha} \text{ est de type indéfini} ; \\ &\iff \forall \tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha), \tilde{\alpha} \text{ est de type indéfini.} \end{aligned}$$

Démonstration. On peut supposer la racine α positive. Soient alors $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ deux éléments distincts de $\zeta(\alpha)$ (donc imaginaires dans $\tilde{\Delta}$).

Le type d'une racine n'étant pas modifié par l'action d'un élément du groupe de Weyl, on peut supposer dans la suite que $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont dans \tilde{K}_c .

Si $\tilde{\alpha}$ est de type affine, alors $S_{\tilde{\alpha}} = Z_{\tilde{\alpha}}$.

(1) Si $S_{\tilde{\beta}} \cap S_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$, d'après 4.3.5 $(I \setminus FS_{\tilde{\beta}}) \cup Z_{\tilde{\beta}} = (I \setminus FS_{\tilde{\alpha}}) \cup Z_{\tilde{\alpha}}$ mais $S_{\tilde{\alpha}} = Z_{\tilde{\alpha}}$ rencontre $S_{\tilde{\beta}}$ donc $Z_{\tilde{\beta}}$ et est connexe donc $S_{\tilde{\alpha}} \subset Z_{\tilde{\beta}}$. La partie $Z_{\tilde{\beta}}$ n'est donc pas de type fini. D'après 3.1.1, $\tilde{\beta}$ est nécessairement de type affine avec $S_{\tilde{\beta}} = Z_{\tilde{\beta}}$ donc les supports des deux éléments sont égaux (un support de type affine ne contient strictement que des parties de type fini).

(2) Si $S_{\tilde{\beta}} \cap S_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$. Supposons que $\tilde{\beta}$ ne soit pas de type affine. Alors, il existe $i \in S_{\tilde{\beta}}$ tel que $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$ et donc $i \in FS_{\tilde{\alpha}} \setminus S_{\tilde{\alpha}}$ d'après (4.3.5). Par définition de $FS_{\tilde{\alpha}}$, il existe $j \in S_{\tilde{\alpha}}$ tel que $\langle \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ mais alors $j \in Z_{\tilde{\alpha}} \cap FS_{\tilde{\beta}}$ donc $j \in Z_{\tilde{\beta}} \subset S_{\tilde{\beta}}$ car $Z_{\tilde{\alpha}} = S_{\tilde{\alpha}} \subset (I \setminus FS_{\tilde{\beta}}) \cup Z_{\tilde{\beta}}$; ce qui contredit l'hypothèse $S_{\tilde{\alpha}} \cap S_{\tilde{\beta}} = \emptyset$. \square

Remarque. Soit α une racine de type affine, supposée dans $\Psi(\tilde{K}_c)$. Considérons toujours $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ dans $\zeta(\alpha)$.

— Si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ ont des supports égaux (affines), alors $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont \mathbb{Q} -proportionnelles puisque $\text{Corang}(A(S_{\tilde{\alpha}})) = 1$. Ayant de plus même image par Ψ , ils sont égaux.

— Sinon $S_{\tilde{\alpha}} \cap S_{\tilde{\beta}} = \emptyset$ et $FS_{\tilde{\alpha}} \cap S_{\tilde{\beta}} = FS_{\tilde{\beta}} \cap S_{\tilde{\alpha}} = \emptyset$ (démonstration facile en reprenant (2)). En particulier, comme $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}^\wedge$ ont même support, $FS_{\tilde{\alpha}^\wedge} \cap S_{\tilde{\beta}} = \emptyset$ et on a : $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^\wedge \rangle = 0$.

Ainsi, pour toute racine imaginaire affine α et tous $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ dans $\zeta(\alpha)$, on a $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}^\wedge \rangle = 0$.

Notons encore que s'il existe un indice $i \in I$ tel que $\langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle < 0$ (i.e. $FS_{\tilde{\alpha}} \setminus S_{\tilde{\alpha}} \neq \emptyset$), alors $\zeta(\alpha)$ est réduit à un élément.

Proposition 4.3.7 — *Si γ est une racine imaginaire, et si α est une racine quelconque de $\Delta(S)$, le signe de $\langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle$ (au sens strict c'est-à-dire comme élément de $\{0, +, -\}$) ne dépend pas du choix de γ^\wedge dans $\Psi^\wedge(\zeta^\wedge(\gamma))$.*

N.B. : Dans la suite, pour $\gamma \in \Delta^{\text{im}}$, γ^\wedge désignera toujours un élément de $\Psi^\wedge(\zeta^\wedge(\gamma))$.

On peut choisir ces éléments γ^\wedge de façon que $(w(\gamma))^\wedge = w(\gamma^\wedge)$ pour tout $w \in W$ et pour tout $\gamma \in \Delta^{\text{im}}$.

La matrice étant à coefficients dans \mathbb{Q} , ces choix et celui de 3.2.5 peuvent aussi être faits de façon que $\gamma^\wedge \in \Psi^\wedge(\tilde{Q}^\wedge) \subset Q^\wedge$. Cependant, il n'est pas sûr que l'on puisse avoir à la fois $\gamma^\wedge \in Q^\wedge$ et l'invariance par W ; c'est le cas avec la condition (Z) ou au moins si la matrice A est à coefficients entiers (Q^\wedge étant alors stable par W) ou encore si I_{re} est fini.

Démonstration. Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$ deux éléments de $\zeta(\gamma)$. On peut supposer la racine γ positive, et même $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\delta}$ simultanément dans \tilde{K}_c . Enfin, on se ramène au cas où α est une racine positive (en considérant $-\alpha$ si nécessaire).

Supposons $\gamma^\wedge = \Psi^\wedge(\tilde{\gamma}^\wedge)$ et $\delta^\wedge = \Psi^\wedge(\tilde{\delta}^\wedge)$; soit $\tilde{\alpha} \in \zeta(\alpha)$, on a alors :

$$(1) \langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle < 0 \iff \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^\wedge \rangle < 0 \iff S_{\tilde{\alpha}} \cap (FS_{\tilde{\gamma}} \setminus Z_{\tilde{\gamma}}) \neq \emptyset;$$

$$(2) \langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle = 0 \iff \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}^\wedge \rangle = 0 \iff S_{\tilde{\alpha}} \cap (FS_{\tilde{\gamma}} \setminus Z_{\tilde{\gamma}}) = \emptyset.$$

Grâce à (4.3.5), on sait que $FS_{\tilde{\gamma}} \setminus Z_{\tilde{\gamma}}$ ne dépend pas du choix de l'élément $\tilde{\gamma}$ dans $\zeta(\gamma)$; les deux scalaires $\langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle$ et $\langle \alpha, \delta^\wedge \rangle$ sont donc de même signe. \square

Système générateur de racines normalisé

Soit $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ un système générateur de racines. On considère la condition suivante :

(BN) il existe un corps totalement ordonné \mathbb{K} , un élément $\varepsilon > 0$ de \mathbb{K} et une application \mathbb{Q} -linéaire θ de $Q_{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{K} telle que, pour tout $i \in I$, $\theta(\alpha_i) > \varepsilon$ et $\theta(\alpha_i) < s_i \varepsilon$ pour un $s_i \in \mathbb{N}$.

Si (BN) est vérifiée, l'application θ est appelée *une « hauteur »*.

N.B. (1) La dernière inégalité de (BN) est superflue lorsque \mathbb{K} est archimédien, c'est-à-dire est un sous-corps de \mathbb{R} .

(2) Quitte à changer ε , on peut transformer la dernière assertion sur θ en :

$$\forall \alpha \in \Delta_+, \exists s_\alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } \varepsilon < \theta(\alpha) < s_\alpha \varepsilon.$$

Ainsi, la condition (BN) ne dépend que de Δ_+ et non de la base Π .

(3) Cette condition (BN) est une conséquence de l'hypothèse suivante :

(MP₁) Il existe une base $(\gamma_j)_{j \in J}$ de $Q_{\mathbb{Q}}$ telle que $\Pi \subset \bigoplus_{j \in J} \mathbb{N} \gamma_j$.

Les conditions (BN) et (MP₁) sont invariantes par isomorphisme de S.G.R. Nous reviendrons sur ces conditions (BN) et (MP₁) avec quelques autres en 4.4

Proposition 4.3.8 — *Soit S un S.G.R. satisfaisant à l'hypothèse (BN).*

On peut extraire de $\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i$ une partie Φ_{im} , d'éléments α deux à deux non \mathbb{Q} -proportionnels et, pour chaque $\alpha \in \Phi_{\text{im}}$, déterminer un ensemble de rationnels $N(\alpha)$ pour lesquels, si $\alpha \in \Phi_{\text{im}}$:

- $N(\alpha) \subset N_i \alpha_i$ pour un certain i (unique et on pose alors $\alpha^\wedge = \alpha_i^\wedge$) ; et
- ou bien $N(\alpha)$ admet pour plus petit élément 1 ;
- ou bien $N(\alpha)$ ne possède pas de plus petit élément, est minoré par 3/4 et contient 1.

On note $\Phi := \Phi_{\text{im}} \cup \Pi_{\text{re}}$ et $\Phi^\wedge = (\alpha^\wedge)$ où α parcourt Φ .

De plus, si A' désigne la matrice de coefficients $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ pour α et β dans Φ , alors $S' = (A', V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Phi, \Phi^\wedge, (N(\alpha))_{\alpha \in \Phi})$ est un système générateur de racines normalisé tel que : $\Delta_+(S') = \Delta_+(S)$ et $\Delta^{\text{re}}(S') = \Delta^{\text{re}}(S)$.

Enfin, si S vérifie l'hypothèse (Z), alors S' aussi.

L'identité est un morphisme de S.G.R. de S' dans S .

Remarque. Intuitivement, on peut interpréter cette proposition de la manière suivante :

Par hypothèse, Π (avec N_i donné pour chaque $i \in I$) est une base du S.G.R. S donc toute racine α de Δ , qui n'est pas dans un $N_i \alpha_i$, admet une bonne

décomposition du type $\sum n_j \alpha_j$ où l'on peut supposer tous les n_j dans $N_{j,\text{ind}}$ (quitte à faire apparaître plusieurs fois une même racine simple).

Si une racine $n_i \alpha_i$ admet une bonne décomposition $n_i \alpha_i = \sum x_j \alpha_j$ en fonction des éléments de $\bigcup_{j \in I} N_j \alpha_j \setminus \{n_i \alpha_i\}$, alors on obtient une autre bonne décomposition de α ne faisant pas intervenir $n_i \alpha_i$ en remplaçant dans sa décomposition $n_i \alpha_i$ chaque fois qu'il apparaît par $\sum x_j \alpha_j$.

On extrait donc la base de $\Pi_{\text{re}} \cup (\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$ (ou plus exactement de la réunion $\Pi_{\text{re}} \cup (\bigcup_{i \in I_0} N_i \alpha_i) \cup (\bigcup_{i \in I_-} N_{i,\text{ind}} \alpha_i)$ car si $\alpha = n_i \alpha_i + m_i \alpha_i$ avec $m_i \in N_i$ et $n_i \in N_{i,\text{ind}}$ et si $n_i \alpha_i$ admet une bonne décomposition en fonction des éléments de $\bigcup_{j \in I} N_j \alpha_j \setminus \{n_i \alpha_i\}$ ceci ne donne pas une bonne décomposition de α si $i \in I_0$).

Par ailleurs, cette remarque ne démontre pas la proposition car il faut extraire les éléments de la nouvelle base les uns après les autres (de peur que $n_i \alpha_i$ ait une bonne décomposition avant mais plus après) ce qui nécessite une récurrence faite à l'aide de θ .

Démonstration. 1. Construction du candidat par récurrence.

Soit θ la forme linéaire de $Q_{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{K} définie grâce à la condition (BN) ; pour les besoins de la récurrence, posons :

$$K_n := \bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i \cap \theta^{-1}([0 ; (n+1)(\varepsilon/4)[).$$

Par hypothèse, $K_0 = K_1 = K_2 = \emptyset$ et la réunion des K_n est $\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i$.

Construisons alors par récurrence des familles de vecteurs $\Phi^{(n)}$ (à n fixé, $\Phi^{(n)}$ sera égal à $\Pi_{\text{re}} \cup (\Phi \cap (K_n))$), ainsi que des ensembles de rationnels positifs $N^{(n)}(\alpha)$ (correspondant, à n et α fixés, à $N_{\alpha} \cap [0 ; \frac{(n+1)\varepsilon}{4\theta(\alpha)}[$) pour chaque α dans $\Phi^{(n)} \cap \Delta^{\text{im}}$.

— Pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on pose $\Phi^{(n)} := \Phi_{\text{re}} = \Pi_{\text{re}}$. Pour ces éléments, $N(\alpha)$ est $\{1, 2\}$ si la racine est multipliable, et $\{1\}$ sinon.

— Soit $n > 2$. Supposons connus les $\Phi^{(n-1)}$ (aux choix possibles près concernant les racines α pour lesquelles $N(\alpha)$ n'a pas de plus petit élément), contenus dans $\Phi_{\text{re}} \cup K_{n-1}$, ainsi que, pour les éléments α de $\Phi^{(n-1)} \setminus \Phi_{\text{re}}$, les $N^{(n-1)}(\alpha)$ de plus petit élément 1 ou sans plus petit élément mais contenus dans $[3/4, \infty[$ et contenant 1.

Si $\alpha \in \Phi^{(n-1)} \cap \Phi_{\text{re}}$, on pose $N^{(n-1)}(\alpha) = N(\alpha)$.

Pour tout $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$, notons $N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}}$ l'ensemble des éléments indécomposables pour l'addition de $N^{(n-1)}(\alpha)$; en particulier, $N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}} = \{1\}$ si α est une racine réelle.

Définissons un ensemble intermédiaire $\Phi'^{(n)}$ inclus dans $K_n \setminus K_{n-1}$.

— Soit β dans $K_n \setminus K_{n-1}$, on dit que β appartient à $\Phi'^{(n)}$ si β vérifie les deux propriétés :

- (a) la racine β n'est \mathbb{Q} -proportionnelle à aucune racine de $\Phi^{(n-1)}$;

(b) Si $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$ et $n_\alpha \in N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}}$ sont tels que $\beta - n_\alpha \alpha$ est une racine de $\Delta_+(S)$, alors $\langle \beta - n_\alpha \alpha, \alpha^\wedge \rangle = 0$ ou bien $\beta - n_\alpha \alpha \in N^{(n-1)}(\alpha) \cdot \alpha$.

Nous définissons à présent $\Phi^{(n)} \setminus \Phi^{(n-1)} = \Phi^{(n)} \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ de la façon suivante :

Pour tout élément β de $\Phi'^{(n)}$, considérons $R(\beta)$ l'ensemble des rationnels q tels que $q\beta$ soit encore dans $\Phi'^{(n)}$; il est clair que $R(\beta) \subset]3/4 ; 4/3[$. Si $R(\beta)$ a un plus petit élément q_1 , posons $\alpha = q_1\beta$, sinon fixons arbitrairement un unique élément α dans $R(\beta)\beta$. Dans les deux cas, posons $\alpha \in \Phi^{(n)}$ avec $N^{(n)}(\alpha) = R(\alpha)$.

Si β n'est pas dans $\Phi'^{(n)}$, il n'intervient pas dans la construction de Φ .

Reste à définir $N^{(n)}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$, c'est la réunion de $N^{(n-1)}(\alpha)$ et des rationnels q tels que $q\alpha$ soit un élément de $K_n \setminus K_{n-1}$ qui vérifie (b).

Enfin, posons $\Phi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi^{(n)}$ et $N(\alpha) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N^{(n)}(\alpha)$ pour $\alpha \in \Phi$. Par construction, deux éléments de Φ ne peuvent pas être \mathbb{Q} -proportionnels et $N(\alpha)$ est un sous-ensemble de \mathbb{Q}_+ qui admet 1 pour plus petit élément ou bien contient 1 et est contenu dans $]3/4 ; \infty[$ (et n'a pas de plus petit élément). De plus, pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un indice $i \in I$ tel que $N(\alpha)\alpha \subset N_i\alpha_i$.

On pose alors $\Phi = \bigcup_n \Phi^{(n)}$ et on définit S' comme dans l'énoncé.

2. Montrons qu'avec cette définition, S' est un système générateur de racines.

Soit J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $N_i\alpha_i \cap \Phi \neq \emptyset$; pour $j \in J$, l'intersection $N_j\alpha_j \cap \Phi$ est réduite à un élément noté γ_j .

La base de S' est extraite de $\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i \cup \Pi_{\text{re}}$ donc la matrice A' est obtenue à partir de A de la manière suivante :

(a) on efface les colonnes et les lignes correspondant aux $i \in I_{\text{im}} \setminus J$ (on verra que cela signifie que tout élément de $N_i\alpha_i$ a une bonne décomposition en fonction des autres).

(b) on multiplie les colonnes conservées par le rationnel q_i tel que $q_i\alpha_i \in \Phi$.

La matrice ainsi obtenue est alors de Borchers relative et à coefficients $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ rationnels et même entiers si β est réel.

(SGR2) et (SGR3) sont vérifiés puisque, par hypothèse, S est un système de racines.

On a remarqué que les parties $N(\alpha)$ contiennent 1, sont incluses dans $]3/4, \infty[$ et que leur plus petit élément, s'il existe, est 1. D'autre part, $N(\gamma_i)\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle \subset N_i\alpha_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $\gamma_i \in \Phi$ et $\gamma_j \in \Phi_{\text{re}}$ (resp. et $\gamma_j \in \Phi$ si S vérifie (Z)) ce qui établit (SGR5) (resp. et (Z)).

(SGR4) résulte du choix de A' .

Reste à établir (SGR6).

Toute somme d'éléments de $\Phi_{\text{re}} \cup (\bigcup_{\alpha \in \Phi_{\text{im}}} N(\alpha)\alpha)$ est un élément non nul de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q},+}$, on sait que $\Psi(\tilde{\mathbb{Q}}_{\mathbb{Q},+} \setminus \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$, ce qui permet d'établir (a).

Deux éléments de Φ n'étant jamais \mathbb{Q} -proportionnels, (b) est vérifié.

Ainsi, S' est bien un système générateur de racines.

3. Montrons que $\Delta_+(S') \subset \Delta_+(S)$.

D'après (4.2.18), $\Delta(S')$ est le plus petit sous-ensemble de $Q'_\mathbb{Q} = \sum_{j \in J} \mathbb{Q}\gamma_j$ symétrique, contenant $N(\gamma_j)\gamma_j$ pour tout $j \in J$ et tel que :

si $\alpha \in \Delta_+(S')$ et si $\gamma_j \in \Phi$, alors la chaîne $Ch(\alpha, \gamma_j) \subset \Delta(S')$.

Or $\Delta(S) \cap Q'_\mathbb{Q}$ vérifie ces trois propriétés (car chaque $N(\gamma_j)\gamma_j$ est dans un $N_i\alpha_i$) et donc $\Delta_+(S') \subset \Delta_+(S)$.

4. Reste à prouver que S' est un S.G.R. normalisé.

Soit $\alpha \in \Phi_{\text{im}}$ tel que $n_\alpha\alpha = \sum_{j \in T} x_j\gamma_j$ pour $n_\alpha \in N(\alpha)$, $T \subset J$ connexe et x_j dans $M(\gamma_j) \setminus \{0\}$ (en reprenant les notations du chapitre des S.G.R. pour des $\gamma_j \in \Phi$) pour tout $j \in T$.

Si T n'est pas réduit à un point, par 1.2.14 appliqué à un revêtement de S' et grâce à 4.2.20, il existe $\gamma_s \in \Phi$ et $n_{\gamma_s} \in N_{\gamma_s, \text{ind}}^1$ tels que $\sum_{j \in T} n_j\gamma_j - n_{\gamma_s}\gamma_s \in \Delta(S') \subset \Delta(S)$ et tel que $\langle \sum_{j \in T} x_j\gamma_j - n_{\gamma_s}\gamma_s, \gamma_s^\wedge \rangle < 0$; ce qui contredit la construction de Φ et des $N(\gamma)$.

Par suite, $n_\alpha\alpha = x_j\gamma_j$; ce qui impose $\alpha = \gamma_j$ puisque deux éléments de Φ ne peuvent, par construction, être \mathbb{Q} -proportionnels.

Ceci prouve que S' est un système générateur de racines normalisé.

5. Montrons enfin que $\Delta_+(S) = \Delta_+(S')$.

Supposons l'existence d'un élément β de $\Delta(S)$ n'appartenant pas à $\Delta(S')$. Comme $\Phi_{\text{re}} = \Pi_{\text{re}}$, l'égalité des deux groupes de Weyl ainsi que celle des ensembles $\Delta(S)^{\text{re}} = \Delta^{\text{re}}(S')$ sont claires, β est donc nécessairement imaginaire; on peut supposer $\beta \in \Delta(S)_+$. Supposons $\theta(\beta)$ minimal à $\varepsilon/4$ près dans $\theta(\Delta(S)_+ \setminus \Delta(S'))$. Cet élément β est évidemment dans $K_{\Delta(S)}$ (par minimalité dans son orbite sous W). Montrons qu'en fait un tel élément ne peut exister.

Par hypothèse, on sait que $\beta = \sum_{i \in T} m_i\alpha_i$, où $T \subset I$ est connexe, $m_i \in M_i^*$ et $m_i \in N_i$ si $T = \{i\}$.

1^{er} cas : $T = \{i\}$, $\beta = n_i\alpha_i$. Si $i \in J$ et $n_i\alpha_i \in N(\gamma_i)\gamma_i$, c'est clair. Sinon, il existe par construction de la base, $s \in J$ et $m_s \in N(\gamma_s)_{\text{ind}}$ tels que $\beta - m_s\gamma_s \in \Delta_+(S)$ et $\langle \beta - m_s\gamma_s, \gamma_s^\wedge \rangle < 0$; par récurrence, $\beta - m_s\gamma_s \in \Delta_+(S')$ et donc $\beta \in \Delta_+(S')$:

- si on peut choisir $s \neq i$, γ_s et β ne sont pas \mathbb{Q} -proportionnelles et cela résulte des conditions de chaînes ;
- sinon $s = i$, si $\beta - m_s\gamma_s \in \mathbb{Q}\alpha_i$ est un élément de $K_c(S) \setminus N(\gamma_i)\gamma_i$, donc $\beta \in K_c(S')$ et par suite, est dans $\Delta_+(S')$; si $\beta - m_s\gamma_s \in N(\gamma_i)\gamma_i$, la construction de $N(\gamma_i)$ entraîne $\beta \in \Delta_+(S')$.

2^{ème} cas : $|T| \geq 2$, on peut écrire $\beta = \sum_{s=1}^{s=l} n_s \alpha_{i_s}$ avec $n_s \in \mathbb{N}_{i_s}^*$ et $\{i_1, \dots, i_l\}$ connexe dans I et non réduit à un élément. D'après le premier cas, $n_s \alpha_{i_s} = \sum_{j \in S_s} x_j \gamma_j$ avec S_s connexe dans J et $x_j \in M(\gamma_j) \setminus \{0\}$. La réunion des S_s est connexe car si i_a et i_b sont liés dans I $\langle \alpha_{i_a}, \alpha_{i_b}^\wedge \rangle < 0$ donc il existe $j \in S_a$ tel que $\langle \gamma_j, \alpha_{i_b}^\wedge \rangle < 0$ ainsi, $\langle \alpha_{i_b}, \gamma_j^\wedge \rangle < 0$ et il existe $j' \in S_b$ tel que $\langle \gamma_{j'}, \gamma_j^\wedge \rangle < 0$. De plus, cette réunion n'est clairement pas réduite à un seul élément. Ainsi β a une décomposition à support connexe non réduit à un élément sur Φ avec des coefficients dans les $M(\gamma_j)$, et comme $\beta \in K_{\Delta(S)}$, on a $\beta \in K_{\Delta(S')}$, d'où la contradiction. \square

Remarques 4.3.9. (1) En ce qui concerne la conservation des propriétés de la matrice.

Si A est de type fini, affine, indéfini ou profini, il en est de même de la nouvelle matrice obtenue. Par contre, si A est de type proindéfini, la nouvelle matrice peut être de type proindéfini ou de type indéfini. Enfin, si I est décomposable, le nouvel ensemble d'indices I' a le même nombre de composantes indécomposables non réduites à un élément de type affine (composantes de type affine imaginaire).

En effet, si l'on considère une décomposition de la matrice A en sous-matrices indécomposables et la partition de I en parties non vides correspondante, $I = \bigcup_{s=1}^{s=n} I_s$ où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; si $i \in I_s$, α_i ne peut s'écrire comme une bonne décomposition d'éléments de $\Delta(I_p)$ pour $p \neq s$ que si α_i est une racine de type affine et si I_s est réduit à cet élément. Dans la construction de la nouvelle base, si I_s n'est pas une composante connexe de type affine réduite à un élément, il lui correspond une composante connexe de I' . Et réciproquement, si I'_s est une composante connexe de I' , il ne lui correspond qu'une seule composante dans I sauf dans le cas où I_s est de type affine.

Supposons alors la matrice A indécomposable; elle est de type fini (resp. affine, indéfini) si et seulement s'il existe dans $Q_+(I)$, un élément $u = \sum_{i \in I} u_i \alpha_i$ avec $u_i > 0$ pour tout i , tel que $Au > 0$ (resp. $Au = 0$, $Au < 0$) mais alors $u \in Q_+(I')$, toutes ses coordonnées sont strictement positives et $A'u > 0$ (resp. $A'u = 0$, $A'u < 0$) car $\gamma_i^\wedge \in Q_{\mathbb{Q},+}^\wedge$.

Si A est de type profini, toutes les racines simples sont réelles et donc la normalisation ne change rien et $A = A'$ est de type profini (cet argument était également valable dans les cas des types fini et affine).

Si A est de type proindéfini, on peut extraire de A une matrice d'ordre fini et de type indéfini donc A' est de type indéfini ou proindéfini. Elle peut être de type indéfini. Considérons par exemple le cas où $\Pi := (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $i \in I_-$ pour tout i et tels que :

- α_1 et α_2 sont linéairement indépendants et $a_{12} < 0$;
- $\alpha_n := \alpha_1 + (n-1)\alpha_2$ pour tout $n > 2$.

Il est clair que Π' sera égal à (α_1, α_2) .

(2) Comme $N(\alpha)\alpha \subset N_i\alpha_i$ pour un certain i , les propriétés « N_i à dénominateurs bornés », « N_i sans points d'accumulation » sont conservées, par contre, l'hypothèse « N_i de plus petit élément 1 » n'est pas forcément conservée (si l'hypothèse « N_i sans points d'accumulation » n'est pas vérifiée).

Lemme 4.3.10 — *On suppose vérifiée l'hypothèse (BN). Soit $\alpha \in \Delta$.*

- (1) *Si, pour tout $\beta \in \Delta$, la partie $(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta$ est bornée, alors $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ ou bien $\alpha \in \pm N_i\alpha_i$ avec $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$.*
- (2) *Si $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$, alors pour toute racine β de Δ , $(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta$ est bornée et plus précisément, il existe deux entiers p et q positifs ou nuls tels que :*

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta = [\beta - p\alpha, \dots, \beta + q\alpha] \text{ avec } p - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord (2). Quitte à conjuguer par W et à considérer $-\beta$ au lieu de β , on peut supposer que $\alpha = \alpha_i$ et que β est une racine positive non colinéaire à α . On sait que si $\beta + n\alpha_i \in \Delta$, alors $r_i(\beta + n\alpha_i) = \beta - (n + \langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle)\alpha_i \in \Delta$. Considérons alors la fonction « hauteur » θ de (BN), il est clair que :

- (a) Pour $n > 0$ très grand, $\theta(\beta + n\alpha_i) > 0$ et $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) < 0$;
- (b) Pour $n < 0$ avec $|n|$ très grand, $\theta(\beta + n\alpha_i) < 0$ et $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) > 0$.

Traisons le cas où $\beta + n\alpha_i \in \Delta$, pour $n > 0$ très grand.

Il existe dans un revêtement \tilde{S} de S , une racine $\tilde{\gamma}$ positive telle que $\Psi(\tilde{\gamma}) = \beta + n\alpha_i$; par équivariance de Ψ , on a $\Psi(r_i(\tilde{\gamma})) = r_i(\Psi(\tilde{\gamma})) = r_i(\beta + n\alpha_i)$ mais dans \tilde{S} , on sait que la racine $r_i(\tilde{\gamma})$ est positive ce qui implique $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) > 0$; d'où la contradiction cherchée. Le reste de l'assertion résulte de la condition de chaînes.

Pour (1), considérons $\alpha \in \Delta^{\text{im}}$ et qui n'est pas dans un $\pm N_i\alpha_i$ pour un i tel que $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$ (i.e. $\{i\}$ composante connexe de I). Alors, deux cas sont à envisager :

- soit, il existe un $j \in I$ tel que $\alpha \notin \pm N_j\alpha_j$ et $\langle \alpha, \alpha_j^\wedge \rangle \neq 0$, alors on peut supposer α positive ; d'après 3.2.3 et 3.2.8, l'intersection considérée (pour $\beta = \alpha_j$) ne peut être bornée ;
- soit, α est une racine affine correspondant à une composante indécomposable de type affine réelle, on est donc ramené au cas des systèmes affines bien connus ([K ; 6.3]) pour lesquels on sait que l'intersection considérée n'est jamais bornée.

□

Corollaire 4.3.11 — *Supposons l'hypothèse (BN) vérifiée pour le S.G.R. S et considérons tous les S.G.R. $S_1 = (A_1, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi_1, \Pi_1^\wedge, (N_{i_1})_{\alpha_i \in \Pi_1})$ pour lesquels :*

- 1. $\Delta_+(S_1) = \Delta_+(S)$, donc $\Delta(S_1) = \Delta(S)$;

2. $\Delta^{\text{re}}(S_1) = \Delta^{\text{re}}(S)$;
3. pour tout $(\alpha, \beta) \in \Pi_{1\text{im}}$, si β^\wedge (resp. β_1^\wedge) est une coracine de β dans S (resp. S_1), alors $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ et $\langle \alpha, \beta_1^\wedge \rangle$ sont de même signe (au sens strict).

Un S.G.R normalisé vérifiant ces propriétés existe (d'après 4.3.8) et est unique en ce sens que sa base Φ et les ensembles $N(\alpha)$ sont uniques (au choix d'une constante près si $N(\alpha)$ n'a pas de plus petit élément) ; par contre, la cobase Φ^\wedge n'est pas unique.

De plus, l'ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Phi} N(\alpha)\alpha$ (qui est déterminé de façon unique) est inclus dans $\bigcup_{\alpha \in \Pi_1} N_1(\alpha)\alpha$ pour tout S.G.R. S_1 vérifiant ces conditions ; c'est donc l'intersection de tous ces sous-ensembles de Δ .

Remarque. Nous montrerons en cours de démonstration, le résultat intéressant suivant :

sous les trois hypothèses précédentes, $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ et $\langle \alpha, \beta_1^\wedge \rangle$ sont de même signe (au sens strict) pour toutes racines α et β de Δ et de plus sont égaux si la racine β est réelle.

Démonstration. Commençons par démontrer (dans les parties (1) et (2)) le résultat énoncé en remarque.

(1) Connaissant $\Delta_+(S)$ et $\Delta^{\text{re}}(S)$ et l'application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ pour $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ d'après 4.3.10, le groupe de Weyl est connu. Les racines simples réelles sont (d'après 4.2.8) les racines positives non divisibles qui induisent les réflexions r_α telles que $r_\alpha(\Delta_-) \cap \Delta_+ \subset \{\alpha, 2\alpha\}$; elles sont donc bien déterminées par $\Delta_+(S)$ et $\Delta^{\text{re}}(S)$. D'autre part, si α est simple réelle, $N(\alpha) = \{1, 2\}$ ou $\{1\}$ selon que $2\alpha \in \Delta$ ou non.

(2) Soient α et β deux racines de Δ , on doit montrer que $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ et $\langle \alpha, \beta_1^\wedge \rangle$ sont de même signe (au sens strict). Pour cela, on peut se ramener au cas où les deux racines sont positives.

Si la racine β est réelle, cela résulte immédiatement de ce qui précède.

Si la racine α est réelle, le même argument permet de conclure grâce à 3.2.6.

Reste le cas où les deux racines sont imaginaires positives. Grâce à l'action de W , on peut supposer $\beta \in \Psi_1(\tilde{K}_{c_1})$ (ces notations indiquant que l'on considère un revêtement de S_1) ; alors $\beta \in \Psi(\tilde{K}_c)$, et la racine α reste imaginaire positive. Dans ce cas, $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ et $\langle \alpha, \beta_1^\wedge \rangle$ sont négatifs ou nuls. On note $\Pi_1 = \{\gamma_i\}_{i \in T}$. On n'a, a priori ici, aucune relation d'inclusion entre les $N(\gamma_i)\gamma_i$ et les $N(\alpha)\alpha$.

Supposons $\langle \alpha, \beta_1^\wedge \rangle < 0$, alors si S_α est le support de α dans T , $\alpha \in Q_{1\mathbb{Q}^+}(S_\alpha)$ et il existe un indice $r \in S_\alpha$ tel que $\langle \gamma_r, \beta_1^\wedge \rangle < 0$. Ceci implique (3.2.6) $\langle \beta, \gamma_{r_1}^\wedge \rangle < 0$ et donc, si L est le support de β dans T , alors il existe un indice $l \in L$ tel que $\langle \gamma_l, \gamma_{r_1}^\wedge \rangle < 0$ et (par 3.) ou par l'égalité dans le cas des racines réelles), $\langle \gamma_l, \gamma_r^\wedge \rangle < 0$. Par suite, $\langle \beta, \gamma_r^\wedge \rangle < 0$; en effet, si γ_r est une racine réelle, le résultat est connu et si γ_r est imaginaire, l'hypothèse $\langle \gamma_l, \gamma_r^\wedge \rangle < 0$ suffit. Par 3.2.6 (dans S), on a alors $\langle \gamma_r, \beta^\wedge \rangle < 0$.

La racine β est dans $\Psi(\tilde{K}_c)$, α s'écrit comme somme de racines γ positives de $\Delta(S)$ (donc telles que $\langle \gamma, \beta^\wedge \rangle \leq 0$), somme dans laquelle apparaît γ_r (qui est telle que $\langle \gamma_r, \beta^\wedge \rangle < 0$) donc $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$.

Ceci démontre le résultat énoncé en remarque.

(3) Montrons l'existence et l'unicité du S.G.R.

Il est clair que dans la démonstration de 4.3.8 dont nous reprenons ici les notations on pouvait remplacer dans la construction :

$$K_n := \left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i \right) \cap \theta^{-1}([0 ; (n+1)(\varepsilon/4)])$$

par $K_n := K_c \cap \theta^{-1}([0 ; (n+1)(\varepsilon/4)])$

où $K_c := \{\alpha \in \Delta_+(S), \langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \leq 0 (\forall \beta \in \Delta_+^{\text{re}})\}$ est indépendant du S.G.R. S_1 .

En effet, $K_c = \Psi(\tilde{K}_c)$ et tout élément de $K_c \setminus (\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$ admet évidemment une bonne décomposition en fonction des éléments de Φ qui lui sont de « hauteur » θ inférieure (cf. remarque 4.3.8). Plus précisément, la proposition 1.2.14 (appliquée au revêtement de $\Delta(S')$) montre que pour $\beta \in K_c \setminus (\bigcup_{i \in J_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$, il existe un indice j de I et un rationnel $n_j \in N_{j_{\text{ind}}}$ tels que $\beta - n_j \alpha_j \in \Psi(\Delta_+ \setminus N_j \tilde{\gamma}_j)$ et $\langle \beta - n_j \alpha_j, \gamma_j^\wedge \rangle < 0$, une telle racine β ne peut donc vérifier la condition b) qui définit $\Phi'_{(n)}$ et permet de construire Φ et les $N(\alpha)$ pour $\alpha \in \Phi$. D'autre part, d'après le résultat énoncé en remarque, les conditions (a) et (b) (critères de sélection des éléments de la base dans la démonstration de 4.3.8) sont indépendantes du S.G.R. S_1 vérifiant les trois hypothèses ci-dessus ; on obtient donc le même ensemble $\bigcup_{\alpha \in \Phi} N(\alpha)\alpha$. Aux choix possibles près concernant les racines α telles que $N(\alpha)$ n'aient pas de plus petit élément, on a aussi le même Φ et les mêmes $N(\alpha)$ (à une constante près) à partir de chacun des S_1 .

Ceci permet d'établir l'unicité de Φ et la deuxième assertion résulte de 4.3.8, puisqu'on a montré qu'on peut extraire $\bigcup_{\alpha \in \Phi} N(\alpha)\alpha$ de $\bigcup_{i \in I} N_i \alpha_i$. □

Remarque 4.3.12. Si Π est fini, alors la condition (BN) est vérifiée avec θ à valeurs dans \mathbb{Q} . Si, de plus, l'axiome (SGRord) de 4.2.4 (2) est vérifié, L'application θ de (BN) définie sur V et à valeurs dans \mathbf{K} peut être supposée \mathbf{K} -linéaire.

La première assertion résulte en effet du « lemme fondamental » de 1.1.

Si l'axiome (SGRord) est vérifié, alors (cf. remarque 4.2.4 (2)) une combinaison à coefficients dans \mathbf{K} positifs ou nuls des α_i nulle dans V est nécessairement à coefficients tous nuls. On conclut encore grâce à 1.1.

4.4 Géométrie d'un S.G.R.

Dans ce paragraphe, on suppose que \mathbf{K} est un corps ordonné. D'après le troisième paragraphe de 4.1, l'étude du système de racines de tout S.G.R. peut se ramener à

ce cas (avec même $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbf{K} = \mathbb{R}$) quitte à ne considérer que $Q_{\mathbb{Q}}$ et non son plongement dans V .

Pour éviter certaines situations paradoxales, on est aussi amené à supposer vérifié l'axiome (SGRord) de 4.2.4 (2) (c'est automatique si $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$).

Généralités

Si $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ est un système générateur de racines, nous considérons dans sa classe d'isomorphisme le système, encore noté S tel que $V^\wedge = (V)^*$. Nous pouvons donc noter $\alpha(x)$ le scalaire $\langle \alpha, x \rangle$.

Définitions 4.4.1 — Si $x \in V$, on définit :

$$\begin{aligned} H_x &= \{v \in V^* / v(x) = \langle x, v \rangle = 0\} ; \\ H_x^+ &= \{v \in V^* / v(x) = \langle x, v \rangle > 0\} ; \\ H_x^- &= \{v \in V^* / v(x) = \langle x, v \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{H}_\Delta = \{H_\alpha / \alpha \in \Delta^{\text{re}}\}$.

On définit une relation d'équivalence entre les éléments de V^* relative à \mathcal{H}_Δ en posant :

$x \approx_\Delta y \iff (\forall H \in \mathcal{H}_\Delta)$ l'une des conditions suivantes est réalisée :

- 1) x et y sont dans H ;
- 2) x et y sont du même côté au sens strict de H ;
- i.e. Si $H = H_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle > 0$.

Pour $x \in V^*$, on note \bar{x} sa classe d'équivalence dans le quotient V^* / \approx_Δ . Enfin, on dit que H_α sépare (au sens strict) x et y , si $\alpha(x)\alpha(y) < 0$.

Lemme 4.4.2 — Si α et β sont deux racines réelles, alors :

$$H_\alpha = H_\beta \iff \beta \in \{\pm\alpha, \pm 2\alpha, \pm\alpha/2\} \cap \Delta^{\text{re}},$$

donc $\mathcal{H}_\Delta = \{H_\alpha ; \alpha \in \Delta_{+, \text{nd}}^{\text{re}}\}$, et $|\mathcal{H}_\Delta| = |\Delta_{+, \text{nd}}^{\text{re}}|$.

Démonstration. Notons i l'injection de V dans V^{**} , il est clair que $i(\alpha) \neq 0$ puisque $i(\alpha)(\alpha^\wedge) > 0$ (α est une racine réelle). Les deux hyperplans H_α et H_β sont les noyaux des deux formes linéaires $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ et ne sont confondus que lorsque celles-ci sont proportionnelles. Par injectivité de i , la proportionnalité de $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ implique celle de α et β et leur appartenance à Δ permet de conclure grâce au corollaire 4.2.21. \square

Proposition 4.4.3 — Le groupe W^\vee est isomorphe à W donc à \mathbb{W} . Dans la suite, on identifiera donc les trois groupes.

Démonstration. Supposons $r_{i_1}^\wedge \dots r_{i_n}^\wedge = \text{Id}_{V^\wedge} = (r_{i_n}^\wedge \dots r_{i_1}^\wedge)^{-1}$, on a :

$$(\forall \alpha \in V)(\forall x \in V^*) \langle r_{i_n} \dots r_{i_1}(\alpha), x \rangle = \langle \alpha, r_{i_1}^\wedge \dots r_{i_n}^\wedge(x) \rangle = \langle \alpha, x \rangle.$$

Par dualité des deux espaces :

$$\forall \alpha \in V, r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha) = \alpha,$$

$$\text{donc } r_{i_1} \dots r_{i_n} = \text{Id}.$$

□

Proposition 4.4.4 — *Le groupe de Weyl opère sur $V_{\text{reg}}^* := V^* \setminus (\bigcup_{H \in \mathcal{H}_\Delta} H)$, et sur le quotient V^*/\approx_Δ .*

Démonstration. On sait que W agit sur les racines réelles, soit w un élément du groupe de Weyl, alors on a :

$$\begin{aligned} w.H_\alpha &= \{w.x / \langle \alpha, x \rangle = 0, x \in V^*\} = \{x \in V^* / \langle \alpha, w^{-1}.x \rangle = 0\} ; \\ &= \{x \in V^* / \langle w.\alpha, (x) \rangle = 0\} ; \\ &= H_{w.\alpha}. \end{aligned}$$

De plus, si x et y sont du même côté de H_α , on a $\langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle > 0$ ce qui implique $\langle w.\alpha, w.x \rangle \langle w.\alpha, w.y \rangle > 0$, et ainsi $w.x$ et $w.y$ sont du même côté de H_α . □

Les facettes

Définitions 4.4.5 — *On définit dans $V^\wedge = V^*$:*

- la chambre fondamentale « ouverte » :

$$C_\emptyset = \{x \in V^* / \langle \alpha_i, x \rangle > 0 (\forall i \in I_{\text{re}})\} ;$$

- la chambre fondamentale « fermée » :

$$\bar{C} = \{x \in V^* / \langle \alpha_i, x \rangle \geq 0 (\forall i \in I_{\text{re}})\} ;$$

- les facettes fondamentales : Si $J \subset I_{\text{re}}$:

$$C_J = \{x \in \bar{C} / \langle \alpha_i, x \rangle = 0 \Leftrightarrow (i \in J)\} ;$$

- le cône de Tits « ouvert » :

$$\mathfrak{T}^\circ = \{x \in V^* / \langle \alpha, x \rangle > 0 (\text{p.p.t. } \alpha \in \Delta_+^{\text{re}})\} ;$$

– le cône de Tits « fermé » :

$$\mathfrak{F} = \{x \in V^* / \langle \alpha, x \rangle \geq 0 \text{ (p.p.t. } \alpha \in \Delta_+^{\text{re}})\}.$$

Tous ces ensembles sont clairement des cônes convexes.

On a déjà défini, en 3.2.7, dans $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}$ des ensembles analogues à \bar{C} et \mathfrak{F} mais pour un choix différent des signes.

Lemme 4.4.6 — (a) La chambre fondamentale fermée est réunion des facettes fondamentales : $\bar{C} = \sqcup_{J \subset I_{\text{re}}} C_J$;

(b) Si $J \subset I_{\text{re}}$ et $C_J \neq \emptyset$, alors C_J est une classe d'équivalence pour la relation relative à \mathcal{H}_{Δ} ;

(c) Les racines de Δ^{re} nulles sur C_J sont les racines réelles de $\Delta(J)$, en particulier :

$$C_J \subset \mathfrak{F}^{\circ} \iff J \text{ est de type fini.}$$

Démonstration. (a) est trivial.

(c) Si $x \in C_J$, il est clair que $\{\alpha \in Q_+ / \langle \alpha, x \rangle = 0\}$ est $Q_+(J)$. Or, d'après (4.3.1), $Q(J)_+ \cap \Delta^{\text{re}} = \Psi(\tilde{\Delta}_+^{\text{re}}(J)) = \Delta_+^{\text{re}}(J)$, le résultat en découle aussitôt.

(b) Sous les hypothèses de la proposition, soit $x \in C_J$, si y est également dans cette facette, on a pour tout $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, x \rangle &\geq 0 \text{ et } \langle \alpha, y \rangle \geq 0, \text{ ainsi que} \\ \langle \alpha, y \rangle &= 0 \iff \alpha \in \Delta^{\text{re}}(J). \end{aligned}$$

Ceci montre que x et y sont bien dans la même classe d'équivalence sous \mathcal{H}_{Δ} , d'où $C_J \subset \bar{x}$.

Réciproquement, si $y \in \bar{x}$ alors x et y sont simultanément dans H_{α} si $\alpha \in \Delta^{\text{re}}(J)$ et sont du même côté au sens strict sinon, ce qui prouve que $y \in C_J$. \square

Remarque. D'après (c), si $C_J \neq \emptyset$, alors $\forall i \in I_{\text{re}} \setminus J$, $\alpha_i \notin Q(J)$ donc on a $\Delta^{\text{re}}(J) = \Delta^{\text{re}} \cap Q(J)$ (cf. 4.3.1).

Proposition 4.4.7 — Soient J et J' des parties de I_{re} et $w \in W$. Si $(w.C_J) \cap C_{J'} \neq \emptyset$, on a :

- (a) $J = J'$;
- (b) $w.C_J = w.C_{J'} = C_J = C_{J'}$;
- (c) $w \in W_J$.

Remarque. Le sous-groupe W_J fixe C_J point par point, la proposition montre alors que W_J est exactement le stabilisateur de C_J .

Définitions 4.4.8 — Soit $w \in W$, si $C_J \neq \emptyset$, alors $w.C_J$, est une facette de type J et $w.C_\emptyset$ (resp. $w.\bar{C}$) est une chambre ouverte (resp. fermée).

Une facette de type $\{i\}$ est appelée une cloison et l'hyperplan de \mathcal{H}_Δ qui la contient est unique (c'est H_{α_i} , si la facette est fondamentale), c'est le mur correspondant.

Démonstration. (1) Soient $w \in W$ et $i \in I_{\text{re}}$, si $l(r_i w) < l(w)$, alors pour tout élément x de la chambre fondamentale « fermée », $\langle \alpha_i, w.x \rangle \leq 0$.

En effet, (cf. 4.2.10), l'inégalité $l(r_i w) = l(w^{-1}r_i) < l(w) = l(w^{-1})$ implique $w^{-1}(\alpha_i) \in \Delta_-$, l'assertion est alors immédiate sachant que x est dans \bar{C} .

(2) Démontrons la proposition par récurrence sur la longueur de l'élément du groupe de Weyl.

- Si $l(w) = 0$, $w = \text{Id}$ donc :

$$C_J \cap C_{J'} \neq \emptyset \implies \exists x \in C_J \cap C_{J'}.$$

Or, $C_{J'}$ (resp. C_J) est la classe d'équivalence relativement à \mathcal{H}_Δ de x , d'où l'égalité des deux facettes, ainsi que celle de J et de J' .

- Supposons alors $n \in \mathbb{N}^*$ et la proposition vraie pour un élément du groupe W de longueur $0 \leq p < n$.
- Soit $w \in W$ de longueur n . Si $w = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ est une décomposition réduite de w , alors, d'après (1), pour tout x dans C_J , $\langle \alpha_{i_1}, w.x \rangle \leq 0$.
- De plus, par hypothèse, il existe un élément x de C_J tel que $w.x \in C_{J'}$, on a donc $\langle \alpha_{i_1}, w.x \rangle = 0$, d'où $i_1 \in J'$.

Il est clair que r_{i_1} fixe $C_{J'}$ point par point. Si $w' = r_{i_1} w$, on a $w'(x) = r_{i_1} w.x = w.x \in C_{J'}$ donc $w'(C_J) \cap C_{J'} \neq \emptyset$ et w' est un élément de longueur $n - 1$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on a facilement les égalités $J = J'$, $w'(C_J) = C_{J'}$ d'où $w.C_J = C_{J'}$, enfin comme w' et r_{i_1} fixent C_J point par point, il en est de même de w . □

Hypothèses supplémentaires, cône de Tits

Dans la suite de ce chapitre, la condition suivante sera souvent supposée vérifiée :

$$(T) C_\emptyset \text{ engendre l'espace vectoriel } V^*.$$

On considèrera éventuellement également l'hypothèse :

(MP₂) il existe une base de V telle que Π_{re} soit incluse dans le cône positif engendré par cette base.

Remarques. La condition (MP₂) est une version affaiblie de l'hypothèse fondamentale de Moody et Pianzola pour leurs ensembles de données radicielles [MP] :

(MP) l'ensemble $Q(I_{\text{re}})$ est un \mathbb{Z} -module libre possédant une base $(\gamma_j)_{j \in J}$ libre dans V telle que $\Pi_{\text{re}} \subset \bigoplus_{j \in J} \mathbb{N}\gamma_j$.

Cette condition est elle-même vérifiée sous l'hypothèse classique :

(L) Π_{re} est libre dans V .

Dans le cas d'une réalisation sur \mathbb{R} dans laquelle la dimension de $Q_{\mathbb{R}}(I_{\text{re}})$ est finie, si $Q(I_{\text{re}})$ est un \mathbb{Z} -module libre alors l'hypothèse (T) implique (MP). En effet, $Q_{\mathbb{R}^+}(I_{\text{re}})$ est un cône propre et l'intérieur du cône dual C_{\emptyset} est non vide, on peut donc appliquer le lemme 5 du paragraphe 6 de [MP] ; ce qui établit le résultat.

En effet, il est à noter que dans le cadre de Moody et Pianzola où $\Pi = \Pi_{\text{re}}$ et $N_i = \{1\}$ pour tout i , (SGR5) et (SGR6b) ou (SGRN) sont sans objet, et (SGR6a) une conséquence de (MP) ou de (MP₂) ou encore de (T).

Par ailleurs, la condition (MP₁) du troisième paragraphe de 4.3 est un affaiblissement de (MP) si $\Pi = \Pi_{\text{re}}$

Si \mathbf{K}' est un corps ordonné contenant \mathbf{K} , et si le S.G.R. S vérifie l'une des conditions (T), (BN), (L), (MP), (MP₂), ou (MP₁) alors le S.G.R. $S_{\mathbf{K}'}$ obtenu par extension des scalaires la vérifie aussi. La réciproque est vraie a priori uniquement pour les conditions (L), (MP), (BN) et (MP₁) ce qui fait l'intérêt de celles-ci.

Toutes ces hypothèses sont invariantes par isomorphisme de S.G.R.

Proposition 4.4.9 — (a) La condition (T) est une conséquence de la condition (MP₂).

Si la condition (T) est réalisée alors :

$$(b) \mathfrak{X} = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{J \subset I_{\text{re}}} w.C_J = W.\bar{C} ;$$

$$(c) \mathfrak{X}^{\circ} = \bigcup_{w \in W} \bigcup_{\{J \text{ de type fini}\}} w.C_J.$$

Démonstration. (a) Sous l'hypothèse (MP₂), notons $(\gamma_i)_{i \in N}$ la base telle que $\Pi_{\text{re}} \subset \bigoplus_{i \in N} \mathbf{K}_+ \gamma_i$.

La chambre fondamentale « ouverte » contient le cône des formes linéaires strictement positives sur cette base donc n'est pas vide. Notons $\mathbf{1}_{\mathbf{K}_+}$ la fonction indicatrice de \mathbf{K}_+ . Soit $x \in V^*$, on a alors $x = y + z$ où y et z sont les formes linéaires définies par : (pour chaque $i \in N$) $y(\gamma_i) = x(\gamma_i) \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{K}_+}(x(\gamma_i)) + 1$ et $z(\gamma_i) = x(\gamma_i) \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{K}_+}(-x(\gamma_i)) - 1$. Il est clair alors que y et $-z$ sont dans la chambre fondamentale « ouverte ». D'où le résultat.

$$(b) \text{ et } (c) \text{ Posons } X = \bigcup_{w \in W} \left(\bigcup_{J \subset I_{\text{re}}} w.C_J \right) \text{ (resp. } X^{\circ} = \bigcup_{w \in W} \left(\bigcup_{\{J \text{ de type fini}\}} w.C_J \right));$$

on a $X = W.\bar{C}$.

Il est clair que $\bar{C} \subset \mathfrak{X}$ (resp. $C_J \subset \mathfrak{X}^\circ$ pour J de type fini). Pour établir l'inclusion $X \subset \mathfrak{X}$ (resp. $X^\circ \subset \mathfrak{X}^\circ$), il suffit alors de prouver que les cônes de Tits sont stables sous l'action de W . Pour cela, il suffit de reprendre la démonstration de 3.2.7. (en effet, le nombre de racines réelles qui s'annulent sur un élément est inchangé par l'action d'un élément de W).

Pour l'inclusion inverse, on a de même déjà fait cette démonstration en 3.2.7, dans le cas du cône « fermé ».

Montrons que $\mathfrak{X}^\circ \subset X^\circ$. Si $x \in \mathfrak{X}^\circ$ alors x est aussi dans le cône « fermé » donc dans X ; par suite, il existe une partie J de I_{re} et un élément w du groupe de Weyl tels que $w.x \in C_J$. Mais on sait que le cône ouvert est stable par w donc C_J rencontre \mathfrak{X}° , ce qui implique (4.4.6.c) que J est de type fini. \square

Proposition 4.4.10 — (1) Si la matrice est de type fini, alors $\mathfrak{X}^\circ = V^*$.

(2) Si la matrice est indécomposable et de type affine réel, et si δ désigne la plus petite racine imaginaire positive, alors :

$$\mathfrak{X}^\circ = \{x \in V^* ; \langle \delta, x \rangle > 0\}.$$

N.B : Dans ces deux cas, l'hypothèse (T) (et même (MP)) est automatiquement vérifiée car Π_{re} est libre. En effet, dans le premier cas, la matrice A est inversible donc $\Pi = \Pi_{re}$ est libre. Dans le second, A est de corang 1, mais d'après (SGR6a), on a encore Π_{re} libre.

Démonstration. (1) Lorsque la matrice est de type fini, le système de racines (donc a fortiori l'ensemble des racines réelles positives) est fini ; le résultat est alors immédiat par définition du cône de Tits.

(2) Lorsque la matrice est de type affine réel, toutes les racines de la base sont réelles et on a :

$$\bigcup_{J \text{ de type fini}} C_J \subset \{x \in V^* ; \langle \alpha, x \rangle > 0 \text{ p.p.t. } \alpha \text{ racine positive}\}.$$

Par suite, comme $\mathbb{N}\delta \subset \Delta_+$,

$$\bigcup_{J \text{ de type fini}} C_J \subset \{x \in V^* ; \langle \delta, x \rangle > 0\}.$$

D'où l'inclusion du cône de Tits « ouvert » dans l'ensemble $\{x \in V^* ; \langle \delta, x \rangle > 0\}$.

Montrons à présent que si $x \in V^*$ vérifie $\langle \delta, x \rangle > 0$, alors c'est un élément du cône de Tits ouvert.

D'après l'étude des systèmes de racines classiques de type affine (cf.[K ; 6.3]), pour tout tel système, il existe une constante s égale à 1, 2 ou 3 telle que :

$$\alpha \in \Delta^{re} \iff \alpha + s\delta \in \Delta^{re}.$$

Si l'on considère Ω un ensemble de représentants de $\Delta^{\text{re}}/\mathbb{Z}s\delta$ formé d'éléments de Δ_+ de hauteur minimale, alors Ω est fini. De plus, pour tout $\beta \in \Omega$, il existe un entier n tel que $(\beta + ns\delta)(x) > 0$ et donc l'ensemble des racines réelles positives γ telles que $\langle \gamma, x \rangle \leq 0$ est fini. Ceci démontre l'inclusion inverse et donc l'égalité.

Dans le cas d'un système de type affine relatif, il est clair que le même raisonnement est valable puisque le cône de Tits coïncide avec celui défini en ne considérant que les racines réelles non divisibles. \square

Murs et cloisons

Dans tout ce paragraphe, on suppose l'hypothèse (T) vérifiée.

Proposition 4.4.11 — *Si x et y sont deux éléments du cône \mathfrak{X} , il existe un nombre fini (noté $\#(x, y)$), d'hyperplans de \mathcal{H}_Δ séparant (au sens strict) x et y .*

Démonstration. On sait que les éléments de \mathcal{H} sont en correspondance bijective avec les racines réelles positives non divisibles de Δ . De plus, d'après la caractérisation précédente des éléments de \mathfrak{X} , on a l'inclusion :

$$\{\alpha \in \Delta^{\text{re}}/H_\alpha \text{ sépare } x \text{ et } y\} \subset \{\alpha \in \Delta^{\text{re}}/\alpha(x) < 0\} \cup \{\alpha \in \Delta^{\text{re}}/\alpha(y) < 0\}.$$

Le résultat est alors immédiat puisque les deux ensembles apparaissant au membre de droite sont finis. \square

Lemme 4.4.12 — *Soient x et y dans \mathfrak{X} , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\exists w \in W$ tel que $\{x, y\} \subset w.\bar{C}$;
- (2) aucun hyperplan de \mathcal{H} ne sépare (au sens strict) x et y .

Démonstration. (1) \implies (2) : Supposons au contraire l'existence d'un tel hyperplan H . Soit $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ une racine telle que $H = H_\alpha$ avec $\alpha(x)\alpha(y) < 0$, alors $\langle w^{-1}.\alpha, w^{-1}.x \rangle \langle w^{-1}.\alpha, w^{-1}.y \rangle < 0$ pour l'élément w donné par (1). Ceci impose à $w^{-1}.\alpha$ d'être simultanément dans Δ_+ et Δ_- ; ce qui est impossible.

(2) \implies (1) : Supposons qu'aucun hyperplan de \mathcal{H} ne sépare deux points x et y du cône de Tits. Quitte à faire opérer un élément de W (ce qui ne change pas le nombre d'hyperplans séparant deux points) on peut supposer $x \in \bar{C}$ (4.4.9), et comme $y \in \mathfrak{X}$, il existe un élément w de W tel que $y \in w.\bar{C}$.

On fait alors une démonstration par récurrence sur la longueur de w .

- Si $l(w) = 0$, le résultat cherché est immédiat.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que si (x', y') est un couple de points de $\bar{C} \times w.\bar{C}$ pour w tel que $l(w) = p < n \in \mathbb{N}^*$, qui ne sont séparés par aucun hyperplan de \mathcal{H} alors il existe $w' \in W$ tel que $\{x', y'\} \subset w'.\bar{C}$.

- Considérons le cas où $l(w) = n$. Par hypothèse, si $\alpha_i(y) < 0$, alors $\alpha_i(x) = 0$; de plus, $\langle w^{-1}.\alpha_i, w^{-1}y \rangle < 0$ entraîne $w^{-1}.\alpha_i \in \Delta_-$ ce qui implique (4.2.10) $l(r_i w) < l(w)$. Appliquons r_i , alors $r_i(x) = x \in \bar{C}$ et $r_i y \in r_i w.\bar{C}$ et ces deux points de \mathfrak{X} ne sont séparés au sens strict par aucun hyperplan de \mathcal{H} . Puisque $l(r_i w) < l(w)$, par hypothèse de récurrence $r_i w.y$ et x sont dans une même chambre $w'.\bar{C}$ et donc $\{x, y\} \subset r_i w'.\bar{C}$.

□

Proposition 4.4.13 — *Si x et y sont deux points de \mathfrak{X} , alors $[x, y] = \{tx + (1 - t)y; t \in \mathbf{K}, 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans un nombre fini de facettes.*

Démonstration. D'après (4.4.11), $\#(x, y)$ est fini, on peut donc raisonner par récurrence sur cet entier.

- Si $\#(x, y) = 0$, pour toute racine réelle α , on a $\alpha(x)\alpha(y) \geq 0$ donc le segment ouvert $]x, y[= [x, y] \setminus \{x, y\}$ est dans une classe d'équivalence sous \approx_Δ et est inclus dans \mathfrak{X} par convexité de ce cône. Par suite, il existe $J \subset I_{\text{re}}$ et un élément w de W , tels que $]x, y[\subset w.C_J$. On sait que x et y sont tous deux dans \mathfrak{X} , donc qu'il existe $\{w_x, w_y\} \subset W$ ainsi que deux parties I_x, I_y de I_{re} tels que $x \in w_x.C_{I_x}$, $y \in w_y.C_{I_y}$. Ainsi, le segment $[x, y]$ est inclus dans la réunion de trois facettes.
- Supposons $n > 0$ et la propriété établie jusqu'au rang n , c'est-à-dire que si x et y sont deux points de \mathfrak{X} tels que $0 \leq \#(x, y) = p < n$, alors le segment $[x, y]$ est contenu dans un nombre fini de facettes.
- Soient alors x et y sont deux points de \mathfrak{X} tels que $\#(x, y) = n$ et H_α un hyperplan qui sépare x et y . Quitte à changer α en $-\alpha$, on peut supposer $\langle \alpha, y \rangle > 0$ et $\langle \alpha, x \rangle < 0$. Posons :

$$t = \frac{\langle \alpha, y \rangle}{\langle \alpha, y \rangle - \langle \alpha, x \rangle} = 1 + \frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, y \rangle - \langle \alpha, x \rangle},$$

alors comme $(\langle \alpha, y \rangle - \langle \alpha, x \rangle) > 0$, on a $0 \leq t \leq 1$ et l'élément $z = tx + (1 - t)y$ est situé dans $]x, y[\cap H_\alpha \subset \mathfrak{X}$. Les deux couples (x, z) et (z, y) sont dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ et les entiers $\#(x, z)$, $\#(z, y)$ sont strictement inférieurs à n . En effet, un hyperplan qui sépare x et z (resp. y et z) ne sépare pas z et y (resp. x et z) mais sépare x et y , et par construction, l'hyperplan H_α ne sépare aucun des deux couples de points considérés ici.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $[x, z]$ et à $[z, y]$ et on obtient le résultat cherché puisque $[x, y] = [x, z] \cup [z, y]$. □

Proposition 4.4.14 — *Tout hyperplan de \mathcal{H}_Δ est un mur et plus précisément, quel que soit l'indice réel i , la cloison $C_{\{i\}}$ n'est pas vide et contient un système générateur de l'hyperplan H_{α_i} .*

Démonstration. D'après l'hypothèse (T), C_\emptyset contient une famille génératrice de V^* . Soit $i \in I_{\text{re}}$ arbitraire, C_\emptyset et son image par r_i ne sont pas dans la même classe d'équivalence relativement à \mathcal{H}_Δ , car $\langle \alpha_i, C_\emptyset \rangle > 0$ et $\langle \alpha_i, r_i(C_\emptyset) \rangle < 0$.

Considérons $\{v_\delta\}_{\delta \in F}$, une famille génératrice de V^* incluse dans C_\emptyset , il est clair que $\{r_i(v_\delta)\}_{\delta \in F}$ est une famille génératrice de V^* contenue dans $r_i(C_\emptyset)$. De plus,

$$(\forall \delta \in F), (\exists c_\delta \in [v_\delta, r_i(v_\delta)] ; \text{ tel que } \alpha_i(c_\delta) = 0).$$

Enfin, pour tout $\delta \in F$, on a $c_\delta \in C_{\{i\}}$; en effet, pour $j \in I_{\text{re}}$, tel que $j \neq i$, $\langle \alpha_j, r_i(C_\emptyset) \rangle = \langle r_i(\alpha_j), C_\emptyset \rangle > 0$ puisque $r_i(\alpha_j) \in Q_+$.

Montrons que $\{c_\delta\}_{\delta \in F}$ engendre H_{α_i} . Pour tout $\delta \in F$, on sait que c_δ appartient à l'intervalle $[v_\delta, v_\delta + \langle \alpha_i, v_\delta \rangle \alpha_i^\vee]$. La famille $(v_\delta)_{\delta \in F}$ étant génératrice, la famille $(\alpha_i^\vee, c_\delta)_{\delta \in F}$ l'est également.

La codimension de l'espace engendré par les c_δ est donc au plus 1. Tous ces éléments sont dans l'hyperplan H_{α_i} , ils engendrent donc ce sous-espace vectoriel de V^* . \square

Remarque 4.4.15. Si $x \in C_\emptyset$ et $y \in \bar{C}$ alors $[x, y[= [x, y] \setminus \{y\}$ est contenu dans C_\emptyset . Réciproquement, si $x \in C_\emptyset$ et $y \in V^*$ sont tels que $[x, y[\subset C_\emptyset$, alors $y \in \bar{C}$. De plus,

$$C_\emptyset = \bar{C} \cap (V^* \setminus (\bigcup_{H \in \mathcal{H}_\Delta} H)).$$

Ceci permet de décrire entièrement la chambre fermée $w.\bar{C}$ à partir de la chambre ouverte $w.C_\emptyset$ et réciproquement ; on dira que $w.\bar{C}$ est « l'adhérence » de $w.C_\emptyset$.

Un mur d'une chambre ouverte est par définition un mur correspondant à une cloison contenue dans l'adhérence de cette chambre.

Les murs de la chambre fondamentale C_\emptyset sont les H_{α_i} pour $i \in I_{\text{re}}$.

Remarque 4.4.16. Si V est de dimension finie et si $\mathbf{K} = \mathbb{R}$, alors V^* a une topologie. L'hypothèse (T) équivaut à « C_\emptyset contient un ouvert de V^* ».

Les facettes « fermées » sont alors des fermés de V^* . Une chambre « fermée » est l'adhérence de la chambre « ouverte » correspondante.

Par contre, le cône de Tits « fermé » n'est pas forcément un fermé [K ; 5.8b] et la chambre « ouverte » C_\emptyset n'est pas forcément un ouvert même sous l'hypothèse (T) ou (MP) [MP ; chap.5 exemple 5].

Extension des résultats du second chapitre

Nous nous proposons à présent de généraliser (sous les hypothèses du paragraphe précédent) les résultats du second chapitre au cas d'une matrice de Borcherds générale A et d'ensembles $(N_i)_{i \in I}$ vérifiant les hypothèses (a), (b), (c) de 2.2 (ou

(SGR5)) la condition d) $N_j a_{ij} \subset \mathbb{Z}$ pour tout $i \in I_{re}$ et tout $j \in I$, étant remplacée par :

- (i) si $i \in I_2$, alors pour tout $j \in I$, $a_{ij} \neq -1/2$;
- (ii) pour chaque $i \in I_{re}$, $2N_j a_{ij}/a_{ii} \subset \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$.

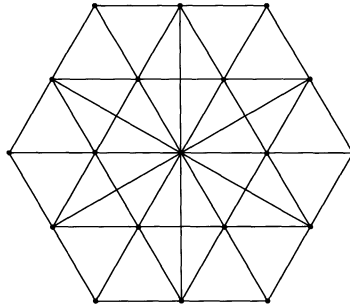
Nous avons déjà remarqué (cf. 2.2 (3)) que tous les résultats du 2.2 sont encore vrais sous l'hypothèse (ii). Nous devons donc vérifier que le 2.3 reste valable.

Remarques. 1. On a donc comme nouvelles possibilités : $i \in I_2$ pour $a_{ij} = -3/2, -5/2, \dots$

- 2. La condition (ii) équivaut à $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in I_{re}$ et tout $\alpha \in R$.
- 3. Cette généralisation conduit à l'existence d'un nouveau système indécomposable de type fini : G_2^\times de diagramme de Dynkin :



et pour lequel Δ est : $\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm 2\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm 2(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm 2(\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}$;



ainsi que d'un nouveau système indécomposable de type affine $G_2^{(1)\times}$ de diagramme de Dynkin :



et pour lequel, si δ_0 désigne la plus petite racine imaginaire positive, $\Delta = \{n\delta_0/n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{\alpha + n\delta_0/\alpha \in \Delta(G_2^\times), n \in \mathbb{Z}\}$.

- 4. Le système de racines G_2^\times apparait lorsque l'on regarde certains systèmes de racines restreintes. Dans [Ru], H. Rubenthaler étudie les *sous-algèbres admissibles* des algèbres de Lie simples de dimensions finies.

Considérons A matrice de type fini indécomposable, indexée par I et θ une partie de I , on note \mathfrak{g} l'algèbre de K.M. associée.

Si $I - \theta = \{j\}$, le couple (I, θ) est admissible (au sens de [Ru]) s'il existe un sl_2 triplet X_j, Y_j, H_j tel que :

- H_j est le double du poids fondamental π_j tel que $\alpha_i(\pi_j) = \delta_{ij}$ pour tout $(i, j) \in I$;
- $X_i \in \bigoplus_{\{\alpha ; \alpha(H_j)=2\}} \mathfrak{g}_\alpha$;
- $Y_i \in \bigoplus_{\{\alpha ; \alpha(H_j)=2\}} \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

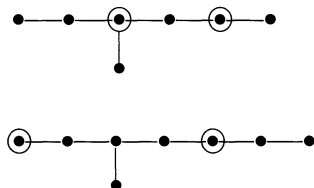
Pour une partie θ de I , le couple (I, θ) est admissible si pour tout $j \in I - \theta$, le couple $(I(j), I(j) - \{j\})$ (où $I(j)$ désigne la composante connexe de $(\theta) \cup \{j\}$ qui contient j) est admissible.

Si $(I, I \setminus \theta)$ est admissible, la famille des sl_2 triplets $\{X_j, Y_j, H_j\}$ (où $j \in I - \theta$) engendre une sous-algèbre simple de \mathfrak{g} appelée sous-algèbre admissible associée à (I, θ) .

Le diagramme de Dynkin correspondant à cette sous-algèbre est la donnée du diagramme associé à A où sont entourées les racines qui correspondent aux éléments de $I - \theta$.

La liste des diagrammes de Dynkin des sous-algèbres admissibles (et le type de la sous-algèbre admissible obtenue) est donnée dans [Ru].

On y trouve notamment les diagrammes suivants :



qui représentent des sous-algèbres de type G_2 (cf. [Ru]).

Si l'on considère alors le système de racines restreintes de \mathfrak{g} par rapport à la sous-algèbre abélienne $\mathbb{C}H_4 \oplus \mathbb{C}H_6$ (cf. numérotation de [Bbki ; Lie chap. 4]) dans le premier cas et $\mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_6$ dans le second (voir aussi chapitre 6), on trouve le système G_2^\times .

Lemme 4.4.17 — Soient A une matrice de Borchers et des ensembles $(N_i)_{i \in I}$ satisfaisant aux hypothèses du second chapitre (2.2). Soit $\Delta = \Delta(A, (N_i)_{i \in I})$ le système de racines à base libre associé.

Soient $\beta \in \Delta$ et $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$, l'ensemble $(\beta + \mathbb{Q}\alpha) \cap \Delta$ contient au plus quatre racines réelles si $\alpha \in \mathbb{W}.\Pi_1$ et six sinon.

De plus, les racines réelles de $(\beta + \mathbb{Q}\alpha) \cap \Delta$ sont situées aux extrémités de cette « α -chaîne

Démonstration. Par conjugaison sous W (et en remplaçant éventuellement α par $\alpha/2$), on peut supposer que $\alpha = \alpha_i$ où $i \in I_{\text{re}}$ et, quitte à changer β en $-\beta$, que β est positive. Enfin, il suffit de considérer le cas où $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha_i$ car on sait que $\Delta \cap \mathbb{Q}\alpha_i \subset \{\pm\alpha_i, \pm 2\alpha_i\}$.

Sous ces hypothèses, $(\beta + \mathbb{Q}\alpha_i) \cap \Delta \subset \Delta_+$ et cette partie de Δ_+ admet un élément de hauteur minimale que nous notons β_0 . Par minimalité de β_0 , on a $\langle \beta_0, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$.

Si $(\beta + \mathbb{Q}\alpha_i) \cap \Delta^{\text{re}} = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, soit $\gamma_0 \in (\beta + \mathbb{Q}\alpha_i) \cap \Delta^{\text{re}} = (\beta + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta^{\text{re}}$ tel que $\langle \gamma_0, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ et tel que la hauteur de $\gamma_0 - r_i(\gamma_0)$ soit minimale (i.e. γ_0 est le plus petit élément $\phi \in (\beta + \mathbb{Q}\alpha_i) \cap \Delta^{\text{re}}$ tel que $\langle \phi, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$). Soit $p \in \mathbb{N}$, $\langle \gamma_0 + p\alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2 + p\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle \geq 2$, puisque (1.1.10) $\langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$. D'après la condition de chaînes, si $\gamma_0 + p\alpha_i \in \Delta$, alors $p\alpha_i \in \Delta$ et donc $p = 1$ si $i \in I_1$ et $p \in \{1, 2\}$ sinon.

Donc $(\gamma_0 + \mathbb{N}\alpha_i) \cap \Delta \subset \{\gamma_0, \gamma_0 + \alpha_i\}$ si $i \in I_1$ et $(\gamma_0 + \mathbb{N}\alpha_i) \cap \Delta \subset \{\gamma_0, \gamma_0 + \alpha_i, \gamma_0 + 2\alpha_i\}$ sinon.

Par minimalité de γ_0 , on a $(\beta + \mathbb{Q}\alpha) \cap \Delta^{\text{re}} \subset \{r_i(\gamma_0 + \alpha_i), r_i(\gamma_0), \gamma_0, \gamma_0 + \alpha_i\}$ si $i \in I_1$ et $(\beta + \mathbb{Q}\alpha) \cap \Delta^{\text{re}} \subset \{r_i(\gamma_0 + 2\alpha_i), r_i(\gamma_0 + \alpha_i), r_i(\gamma_0), \gamma_0, \gamma_0 + \alpha_i, \gamma_0 + 2\alpha_i\}$ sinon.

La dernière assertion du lemme résulte de 2.3.7. □

Considérons alors une matrice A et des ensembles $(N_i)_{i \in I_{\text{im}}}$ satisfaisant aux hypothèses (i) et (ii) (en plus de (a), (b) et (c) de 2.2).

Si $B(A)$ désigne toujours la matrice normalisée associée à A (1.1), le chapitre 2 établit l'existence du système $\Delta(B(A), (N_i)_{i \in I})$ noté en abrégé Δ .

Posons alors : $\Theta = W(\Pi_{\text{re}} \cup 2\Pi_2) \cup \pm W(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i) \cup \pm W.K' = \Delta \cup 2W\Pi_2 \subset R$.

Nous appelons encore racines les éléments de Θ et notons $\Theta_{\text{im}} = \Delta_{\text{im}}$ et $\Theta_{\text{re}} = \Theta \setminus \Theta_{\text{im}}$.

Nous allons montrer que Θ est le système de racines à base libre associé à A et aux $(N_i)_{i \in I}$. En fait, seules les conditions de chaînes ne sont pas évidentes.

D'après la remarque 2.4.5, nous pourrions généraliser les propositions 2.3.7, 2.3.8, 2.3.9 et 2.4.1 si nous démontrons le lemme suivant.

Lemme 4.4.18 — Soient $i \in I_2$ et $\alpha \in \Theta$, si $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$, alors $\alpha + 2\alpha_i \in \Theta$.

Démonstration. Si $\alpha \in \Theta_-$ est telle que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$, alors $-r_i(\alpha)$ est une racine positive pour laquelle on a aussi $\langle -r_i(\alpha), \alpha_i^\vee \rangle = -1$ et $\alpha + 2\alpha_i \in \Theta$ équivaut par $-r_i$ à $(-r_i.\alpha) + 2\alpha_i \in \Theta$.

Sous l'hypothèse de ce lemme, supposons l'existence d'une racine α de Θ_+ telle que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$. Comme $\alpha_i \in \Delta$, on a $\gamma(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Theta$, donc $\alpha \in \Delta$ (i.e. $\alpha/2 \notin \Theta$ si α est réelle).

Nous allons démontrer par récurrence sur la hauteur de $\alpha \in \Delta_+$ que si $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$, alors $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$.

Si α est de hauteur 1, $\alpha = \alpha_j$ pour $j \in I$ et il n'y a rien à démontrer puisque par hypothèse $\langle \alpha_j, \alpha_j^\vee \rangle \neq -1$.

Supposons le résultat établi si $ht(\alpha) < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe une racine $\alpha \in \Delta_+$ de hauteur n telle que $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$.

(1) Premier cas : $\alpha \in \Delta_{\text{re}} := W \cdot \Pi_{\text{re}}$ et $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \in \{-1, -2, -3\}$.

Pour pouvoir utiliser les résultats de la section 4.4, nous considérons le système de racines Δ .

Le sous-groupe de W engendré par les réflexions r_α et r_i est fini et contient un élément w tel que $w(\{\alpha_i, \alpha\}) \subset \Delta_-$. L'intersection N des noyaux des formes linéaires sur V^\wedge induites par α_i et α rencontre donc le cône de Tits ouvert. En effet, dans le quotient de V^\wedge par N (isomorphe à \mathbb{R}^2), on a un système de rang 2 ; et l'image du cône de Tits, qui est convexe, contient un ouvert dans chacun des quatre quadrants et donc aussi 0.

Il existe donc une facette $C_{k,j}$ de \mathfrak{T}° conjuguée à une famille génératrice de N . Quitte à conjuguer sous l'action de W , on peut ainsi se ramener à un système de rang 2 qui soit de type fini (et indécomposable car r_α et r_i ne commutent pas) ; c'est-à-dire de base (α_k, α_j) avec $k \in I_2$ et de type BC_2 ou G_2^\times et où $\alpha = n\alpha_k + m\alpha_j$. Notons qu'en fait dans les deux cas, $k = i$ puisque la racine α_i ne peut être conjuguée à aucune autre racine simple (cf. lemme 1.1.9).

(a) Type BC_2 : On a alors $\langle \alpha_k, \alpha_j^\vee \rangle = -1$ et $\langle \alpha_j, \alpha_k^\vee \rangle = -2$.

On a $\langle \alpha, \alpha_k^\vee \rangle = 2n - 2m$ qui ne peut être égal à ± 1 .

(b) Type G_2^\times : On a alors $\langle \alpha_k, \alpha_j^\vee \rangle = -1$ et $\langle \alpha_j, \alpha_k^\vee \rangle = -3$.

On a $\langle \alpha, \alpha_k^\vee \rangle = 2n - 3m$, au vu des racines dans un système de type G_2 , $\langle \alpha, \alpha_k^\vee \rangle = -1$ implique $\alpha = r_j(\alpha_k) = \alpha_j + \alpha_k$. Alors, $\alpha + 2\alpha_k = \alpha_j + 3\alpha_k = r_k(\alpha_j)$ est bien une racine.

(2) Second cas : $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ et $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \leq -4$ ou $\alpha \in \Delta^{\text{im}}$.

Par hypothèse $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$, donc $\alpha + \alpha_i = r_i(\alpha)$ est une racine réelle si et seulement si α en est une.

D'après la condition de chaîne (ou 3.2.8), $\alpha_i + 2\alpha$ est une racine.

Comme $\alpha \in W \cdot \Pi_{\text{re}} \cup \Delta^{\text{im}}$, cette racine $\alpha_i + 2\alpha$ est nécessairement imaginaire. En effet, on peut raisonner dans le système Δ , alors :

- soit α est réelle et alors $\alpha_i, \alpha + \alpha_i$ et leurs images par r_α (contenues dans $\alpha_i + 3\alpha + \mathbb{N}\alpha$) sont des racines réelles de $\alpha_i + \mathbb{Z}\alpha$ qui ne peut en contenir plus de quatre d'après le lemme précédent ;
- soit α et $\alpha + \alpha_i$ sont imaginaires, alors :
 - si $2\alpha \in \Delta$, toujours d'après le résultat précédent, $\alpha_i + 2\alpha \in \Delta_{\text{im}}$ (puisque dans l'intersection $(2\alpha + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta$, la racine $\alpha_i + 2\alpha$ est située entre 2α et $r_i(2\alpha)$).

- si $2\alpha \notin \Delta$, alors $\alpha = w.\alpha_j \in \Pi_{\text{im}}$ avec $w \in W$ et $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \geq \langle \alpha_j, w^{-1}.\alpha_i^\vee \rangle = -1$ contredit nos hypothèses (car $w^{-1}.\alpha_i^\vee$ est une racine positive (2.1.6) dont le support contient i puisque α_i ne peut être conjuguée à une racine simple autre qu'elle même (2.1.1)).

On a donc montré que $\alpha_i + 2\alpha$ est imaginaire.

Notons alors $\delta = w(2\alpha + \alpha_i)$ le plus petit élément de $W.(2\alpha + \alpha_i)$ (il est dans K'). Les supports de δ et de $\delta - w.\alpha_i = 2w.\alpha$ sont connexes et on a $\langle \delta, w.\alpha_i^\vee \rangle = \langle (2\alpha + \alpha_i), \alpha_i^\vee \rangle = 0$.

Par suite, $S_{w.\alpha_i} \subset Z_\delta$ (avec les notations de 3.1.1).

Pour tout $k \in Z_\delta$, $\langle \delta, \alpha_k^\vee \rangle = 0$ d'où $\langle 2w.\alpha, \alpha_k^\vee \rangle = -\langle w.\alpha_i, \alpha_k^\vee \rangle$; donc :

$$\langle w.\alpha_i, \alpha_k^\vee \rangle \text{ doit être pair.}$$

(A) Si δ est de type affine, $w.\alpha_i \in \Delta(S_\delta)$. Le groupe $W(S_\delta)$ n'agit pas sur δ donc, quitte à conjuguer sous W , on peut supposer que $w.\alpha_i$ est une racine simple α_q de $\Delta(S_\delta)$. La racine $\beta = w.\alpha$ étant toujours positive et située dans ce même système.

L'existence du double de la racine réelle α_q dans $\Theta(S_\delta)$ impose à ce système d'être de type $G_2^{(1)\times}$ ou une M.R.I de type affine non normalisée (cf. 2.1).

Les M.R.I de type affine non normalisées ne posent pas de problème ; en effet, $\langle \beta, \alpha_q^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ donc $\langle \beta, \alpha_q^\vee \rangle \in 2\mathbb{Z}$.

Reste $G_2^{(1)\times}$. Il suffit de remarquer que dans ce cas, si α_q est une racine simple et β une racine réelle (non divisible), la structure du système de racines rappelée ci-dessus montre que $2\beta + \alpha_q$ ne peut pas être une racine imaginaire ce qui contredit nos hypothèses.

(B) Si δ n'est pas de type affine, Z_δ est de type fini et $\Theta(Z_\delta)$ contient $2w.\alpha_i$ donc la composante connexe de Z_δ contenant le support de $w.\alpha_i$ est de type G_2^\times ou BC_n et $w.\alpha_i$ est conjuguée de la racine qui admet un double (i.e. α_2 resp. α_n).

Cas BC_n ($n \geq 2$) : Toute racine positive conjuguée à α_n est de la forme $\beta_p = \sum_{s=p}^n \alpha_s$; mais alors $\langle \beta_p, \alpha_p^\vee \rangle = 1$, sauf pour $p = n$ auquel cas $\langle \beta_n, \alpha_{n-1}^\vee \rangle = -1$

Cas G_2^\times : Les racines positives conjuguées à α_2 sont $\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1 + 2\alpha_2$.

Or, $\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -1, \langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = 1$ et $\langle \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle = 1$.

Dans les deux cas, on trouve un indice k de Z_δ pour lequel $\langle w.\alpha_i, \alpha_k^\vee \rangle$ est impair ; d'où une contradiction.

Par suite, la composante connexe de Z_δ contenant le support de $w.\alpha_i$ ne peut être que de type BC_1 . La racine α_i ne pouvant être conjuguée à une autre racine simple qu'elle-même, $\{i\}$ (cf. 2.1.1) est une composante connexe de Z_δ et $w.\alpha_i = \alpha_i$.

Si $2\alpha + \alpha_i \notin K'$, alors $ht(2w.\alpha + \alpha_i) < ht(2\alpha + w(\alpha_i)) = ht(2\alpha + \alpha_i)$, donc $ht(w.\alpha) < ht(\alpha)$ et $\langle w(\alpha), \alpha_i^\vee \rangle = -1$ donc par hypothèse de récurrence, $w.\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$ et par w^{-1} , on a $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$.

On peut donc supposer $2\alpha + \alpha_i \in K'$ (donc $\delta = 2\alpha + \alpha_i$).

On sait alors qu'il existe un indice j tel que $\alpha - \alpha_j \in \Delta$ (on peut supposer $j \neq i$ sinon par r_i , on a $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$); et si $\alpha \notin K_c$ on peut supposer de plus que $j \in I_{re}$ et que $\langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle > 0$.

- Si $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique à $\alpha - \alpha_j$ donc $\alpha - \alpha_j + 2\alpha_i \in \Delta$. Comme $2\alpha + \alpha_i \in K'$, on a $\langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ d'où $\langle \alpha - \alpha_j + 2\alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle < 0$ et donc $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$. Ce cas est donc résolu et écarté.
- Alors, $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \leq -2$ donc $\langle \alpha - \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \geq 1$ donc $\alpha - \alpha_j - \alpha_i \in \Delta$ et si $\alpha \notin K_c$, on a de plus $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle < -1$ car $\langle 2\alpha + \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ implique $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -2\langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle \leq -2$.

Nous allons séparer l'étude en trois cas :

- (a) $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle < 0$;
- (b) $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \geq 2$;
- (c) $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \in \{0, 1\}$.

Le cas (a) : (α est forcément située dans K_c) alors $\alpha - \alpha_i \in \Delta$ et par r_i , l'élément $\alpha + 2\alpha_i$ est bien une racine.

Le cas (b) : Si $\alpha \notin K_c$, on est dans ce cas dès que $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -3$, si $\alpha \in K_c$ ce cas implique $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -4$ si $j \in I_{re}$. On a donc toujours $\alpha_i + \alpha_j \in K'$ et $\alpha - 3\alpha_j - \alpha_i \in \Delta$.

Si $\alpha - 3\alpha_j - \alpha_i \in \Delta_+$, son support étant lié à celui de $\alpha_i + \alpha_j$, on a $\alpha - 3\alpha_j - \alpha_i + 3(\alpha_i + \alpha_j) \in \Delta$ i.e. $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$ (le cas où $S_\alpha \subset \{i, j\}$ de type affine ne pose pas de problème car alors $2\alpha + \alpha_i$ est de type affine ce qui contredit nos hypothèses de (B)).

Si $\alpha - 3\alpha_j - \alpha_i \in \Delta_-$, alors $\alpha - (3\alpha_j + \alpha_i) \in Q_- \setminus \{0\}$, montrons qu'aucun cas n'est possible : $\alpha = \alpha_i + \alpha_j$ et $\alpha = 3\alpha_j$ sont exclus car $\alpha - 3\alpha_j - \alpha_i \in \Delta_-$; $\alpha = \alpha_i + 2\alpha_j$ $\alpha = 2\alpha_j$ sont impossibles puisque $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ doit être impair.

Le cas (c) : Si $\alpha \in K_c$ et $j \in I_{re}$, alors $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -2$. Si $\alpha \notin K_c$, on a déjà vu que $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha - \alpha_j, r_i(\alpha_j^\vee) \rangle &= \langle r_i \cdot \alpha, \alpha_j^\vee \rangle + \langle -\alpha_j, r_i(\alpha_j^\vee) \rangle \\
 &= \langle \alpha_i + \alpha, \alpha_j^\vee \rangle + \langle -\alpha_j, \alpha_j^\vee - \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \alpha_i^\vee \rangle \\
 &= \langle \alpha, \alpha_j^\vee \rangle + \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle + \langle -\alpha_j, \alpha_j^\vee \rangle + \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \\
 &= \langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle + 2\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle + \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \\
 &= \langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle + \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle (2 + \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle)
 \end{aligned}$$

qui est :

- (1) strictement positif si $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle < -2$ ou si $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -2$ et $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = 1$,
- (2) nul si $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -2$ et $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = 0$.

Dans le cas (1), $\alpha - \alpha_j - r_i(\alpha_j) \in \Delta$ et $\alpha_j + r_i \cdot \alpha_j \in K_c$ (si $j \in I_{re}$, on a $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \leq -2$ et $a_{ji} \leq -2$, or $\langle \alpha_j + r_i \cdot \alpha_j, \alpha_j^\vee \rangle = 4 - \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \cdot \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$).

Si $\alpha - \alpha_j - r_i(\alpha_j) \in \Delta_+$, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence $\alpha - \alpha_j - r_i(\alpha_j) + 2\alpha_i$ est dans Δ et son support est lié à celui de $\alpha_j + r_i(\alpha_j)$ donc $\alpha - \alpha_j - r_i(\alpha_j) + 2\alpha_i + (\alpha_j + r_i(\alpha_j)) \in \Delta$ i.e. $\alpha + 2\alpha_i \in \Delta$ (le cas $S_\alpha \subset \{i, j\}$ affine est exclus dans B)).

Si $\alpha - \alpha_j - r_i(\alpha_j) \in \Delta_-$, alors $\alpha \leq 2\alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$, étudions les cas :

- $\alpha = 2\alpha_j + n\alpha_i$ est impossible car $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$ doit être impair ;
- $\alpha = \alpha_j + n\alpha_i$ n'est possible que si $n = 1$ car par hypothèse $\alpha - \alpha_j \in \Delta$ mais alors $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = -1$ implique $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = -3$, donc $r_i(\alpha_j) = \alpha + 2\alpha_i \in \Delta$.

Dans le cas (2), on a $\langle \alpha - \alpha_j - \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = -1$ et $\alpha - \alpha_j - \alpha_i \in \Delta_+$ donc, par hypothèse de récurrence, $\alpha - \alpha_j + \alpha_i \in \Delta$ et $\alpha_i + \alpha_j \in K_c$ (car si $j \in I_{re}$, alors $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq -2$ et $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \leq -2$). Les supports des deux racines étant liés, on a encore $\alpha + 2\alpha_i = \alpha - \alpha_j + \alpha_i + (\alpha_i + \alpha_j) \in \Delta$. □

Conclusion 4.4.19. Ce lemme étant démontré, nous pouvons (cf. 2.4.5) généraliser les résultats d'existence et unicité du système de racines à base libre au cas où seule l'hypothèse suivante est vérifiée : $2N_j a_{ij} / a_{ii} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_{re}$ et si $i \in I_2$, alors, pour tout $j \in I$, $a_{ij} \neq -1/2$.

Il est alors facile de généraliser tous les résultats du chapitre 4 à condition de remplacer lorsqu'elle apparaît la propriété :

$$\text{pour tout } i \in I_{re}, a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } j \in I;$$

par :

$$\text{pour tout } j \in I, \text{ si } i \in I_{re} \text{ alors } 2a_{ij} / a_{ii} \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{ij} \neq -1/2 \text{ si } a_{ii} = 1.$$

La matrice normalisée obtenue dans la proposition 4.3.8 possède les mêmes propriétés. Nous remarquerons que tous les résultats qui vont suivre (dans les deux chapitres suivants) peuvent être obtenus sous ces hypothèses. Cependant, nous privilégierons le cadre d'étude de 2.2 qui est le plus souvent utilisé.

5. Sous-systèmes et Théorème de conjugaison des bases

Une structure étant définie, il convient de s'intéresser aux problèmes de fonctorialité. Les morphismes de S.G.R. ont été définis en 4.1 ; la première partie de ce chapitre (5.1) traite de la notion de sous-système.

La seconde (5.2) porte sur la généralisation du théorème classique ([K ; 5.9] et [MP]) de conjugaison des bases.

Comme annoncé précédemment, les raisonnements de ce chapitre utilisent les méthodes mises en place à la section 4.4, pour ces problèmes assez distincts.

- L'usage est constant en ce qui concerne les sous-systèmes ; d'ailleurs un résultat crucial s'énonce géométriquement : c'est l'existence de murs relatifs. La définition de sous-structures requiert en général des stabilités ; les systèmes de racines ne font pas exception. On prouve donc le résultat suivant : dès qu'une partie est symétrique et stable par les conditions de chaînes concernant chaque couple de ses éléments, elle peut-être vue elle-même comme un système de racines.

- Pour les bases (qu'on définit au passage), la géométrie règle les problèmes de racines réelles (sous l'hypothèse $A(I_{re})$ de rang fini).

Il faut définir et étudier une relation d'équivalence appropriée, sur les racines imaginaires, pour aboutir au résultat attendu : la conjugaison des bases par $\pm W$.

Situation. Soit $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ un système générateur de racines sur \mathbf{K} (\mathbb{Z} ou un corps) tel que $V^\wedge = V^*$.

Si $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}$, on fera de la géométrie dans $V_{\mathbb{R}}^$ le dual de $V \otimes_{\mathbf{K}} \mathbb{R}$ (qui contient $V^\wedge \otimes_{\mathbf{K}} \mathbb{R}$). Sinon (ou toujours si l'on veut), on notera $V_{\mathbb{R}}^*$ l'ensemble des applications \mathbb{Q} -linéaires de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{R} , et d'après la remarque 4.1.2, les résultats de géométrie de 4.4 sont encore valables dans ce $V_{\mathbb{R}}^*$. En particulier, la chambre fondamentale C_{\emptyset} est incluse dans $V_{\mathbb{R}}^*$.*

L'hypothèse (T) (i.e. C_{\emptyset} engendre $V_{\mathbb{R}}^*$) est supposée vérifiée.

5.1 Notion de sous-systèmes

Définition

Soit $\Delta = \Delta(S)$ le système de racines du S.G.R considéré, si Ω est une partie non vide de Δ , on note $\Omega_+ = \Omega \cap \Delta_+$, $\Omega^{\text{re}} = \Omega \cap \Delta^{\text{re}}$, $\Omega^{\text{im}} = \Omega \cap \Delta^{\text{im}}$ etc...

Le sous-ensemble Ω de Δ est un *sous-système* de Δ si :

(SSR1) $\alpha \in \Omega \implies -\alpha \in \Omega$ (condition de symétrie) ;

(SSR2) si $\alpha \in \Omega_+$, si $\beta \in (\Omega_+ \cup \Omega^{\text{re}})$ et si $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$, on a :

$$\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0 \implies \alpha + \beta \in \Omega ;$$

(SSR3) si $(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega^{\text{re}}$, alors $r_\beta(\alpha) \in \Omega$.

Remarque. Un sous-ensemble non vide Ω symétrique (condition SSR1) et *clos*, c'est-à-dire vérifiant :

$$(SC) \text{ quel que soit } (\alpha, \beta) \in \Omega^2, \text{ si } \alpha + \beta \in \Delta, \text{ alors } \alpha + \beta \in \Omega,$$

est un sous-système de racines de Δ . En effet, on montre grâce aux conditions de chaînes réelles qu'un système symétrique et clos est stable sous l'action de W , donc vérifie (SSR3) et (cf. remarque 4.3.4) que si α et β sont deux racines positives non \mathbb{Q} -proportionnelles, telles que $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$, alors leur somme est encore dans Δ d'où (SSR2).

La réciproque est fautive. Dans BC_2 par exemple, $\{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$ est un sous-système mais n'est pas clos. Plus généralement (cf. [Ru]), C_n possède un sous-système de type D_n qui n'est pas clos.

Exemple. Si $J \subset I$, il est clair que $\Delta(J) \subset \Delta$ est un sous-système clos.

Lemme 5.1.1 — *Soit $w \in W$, si Ω est un sous-système, alors $w.\Omega$ en est un également.*

Démonstration. Il est clair que sous les hypothèses de ce lemme, $w.\Omega$ vérifie (SSR1).

Pour (SSR3), considérons $\alpha \in w.\Omega$ et $\beta \in (w.\Omega)^{\text{re}} = w.\Omega^{\text{re}}$, alors par (SSR3) dans Ω :

$$r_\beta.\alpha = wr_{w^{-1}\beta}w^{-1}.\alpha = w(r_{w^{-1}\beta}w^{-1}.\alpha) \in w(\Omega).$$

Reste à établir (SSR2). Soient $\alpha \in (w.\Omega)_+$ et $\beta \in (w.\Omega)_+ \cup w.\Omega^{\text{re}}$ et non proportionnelle à α . Supposons $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$; ceci implique $\langle w^{-1}.\alpha, (w^{-1}.\beta)^\wedge \rangle < 0$. On doit alors envisager les différents cas :

(1) $w^{-1}.\alpha$ et $w^{-1}.\beta$ sont des racines positives, et le résultat est dû à (SSR2) dans Ω ;

(2) $w^{-1}.\alpha$ et $w^{-1}.\beta$ sont toutes deux négatives et le même argument que pour (1) permet de conclure en considérant $-w^{-1}.\alpha$ et $-w^{-1}.\beta$;

(3) $w^{-1}.\alpha$ est positive et $w^{-1}.\beta$ est négative, β est nécessairement réelle ; on peut encore utiliser (SSR2) dans Ω ;

(4) $w^{-1}.\alpha$ est négative et $w^{-1}.\beta$ est positive ; on se ramène au cas précédent en échangeant les rôles de α et β , grâce à l'argument $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \langle \beta, \alpha^\wedge \rangle > 0$. \square

Lemme 5.1.2 — *Un sous-système Ω possède les deux propriétés suivantes (dites propriétés de chaînes) :*

(a) *si $\alpha \in \Omega^{\text{re}}$ et si $\beta \in \Omega \setminus \mathbb{Q}\alpha$, alors :*

$$[\beta, r_\alpha.\beta] := \{\beta, \beta \pm \alpha, \dots, \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha\} \subset \Omega ;$$

(b) *si $\alpha \in \Omega^{\text{im}}$ et si $\beta \in \Omega \setminus \mathbb{Q}\alpha$, alors :*

$$\langle \beta, \alpha^\wedge \rangle < 0 \implies \beta + \mathbb{N}\alpha \subset \Omega.$$

N.B : (1) Réciproquement, ces deux propriétés de Ω impliquent les conditions (SSR2) et (SSR3).

(2) Il résulte de ce lemme que si α et β sont deux racines non \mathbb{Q} -proportionnelles situées dans Ω et telles que $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$, alors $\alpha + \beta \in \Omega$.

Démonstration. (a) Si $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \geq 0$, par (SSR3), on se ramène à $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ (en échangeant β et $r_\alpha.\beta$) ; de plus, (SSR1) permet alors (quitte à échanger β en $-\beta$ et α en $-\alpha$) de supposer $\beta \geq 0$. Si $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ est nul, il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après (SSR2), la racine $\beta + \alpha$ est dans Ω . Par récurrence sur l'argument précédent, $\beta + p\alpha$ est dans Ω pour tout entier p compris entre 1 et $E((-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle)/2)$, par (SSR2) ou (SSR3), on montre que c'est encore vrai pour $p = E((-\langle \beta, \alpha^\vee \rangle)/2) + 1$, enfin on complète la chaîne grâce à r_α par la condition (SSR3).

(b) D'après le lemme précédent, quitte à conjuguer par $\pm W$, on peut se ramener à un sous-système dans lequel $\alpha \in K_c$. Dans ce cas, l'inégalité implique $\beta \in \Omega_+$ et (SSR2) permet d'affirmer que $\alpha + \beta \in \Omega$. Le résultat complet est obtenu par une récurrence alors immédiate. On peut également raisonner directement, en utilisant (a) si β est réelle (grâce à 3.2.6), et 3.2.3 (qui implique $\beta \in \Omega_+^{\text{im}}$) si β est imaginaire ainsi que (SSR2). \square

Coracines et groupe de Weyl

On note :

- $\Omega_{\text{nm}}^{\text{re}}$ l'ensemble des racines réelles de Ω dont les doubles ne sont pas dans Ω .
- $\Omega_{\text{nd}}^{\text{re}}$ celui des racines réelles α de Ω telles que $\alpha/2$ n'est pas dans Ω .

Il est clair qu'une racine non divisible (resp. non multipliable) de Δ est non divisible (resp. non multipliable) dans Ω . La réciproque n'est pas nécessairement vraie (B_n et C_n sont des sous-systèmes de BC_n).

La coracine d'une racine réelle α de Ω est la même que celle définie lorsqu'on considère α comme une racine de Δ , par contre, il est nécessaire de modifier parfois la définition de α « chapeau », au sens de Ω , on note α'^{\wedge} cette nouvelle définition.

- Si $\alpha \in \Omega_{nm}^{re} \cap \Delta_{nm}^{re}$, on pose $\alpha'^{\wedge} = \alpha^{\wedge}$ et $\alpha'^{\vee} = \alpha^{\vee} = \alpha^{\wedge}$.
- Si $\alpha \in \Omega_{nm}^{re}$ et est multipliable dans Δ , on pose $\alpha'^{\wedge} = \alpha^{\vee} = 2\alpha^{\wedge}$ et $\alpha'^{\vee} = \alpha^{\vee}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{re} \setminus \Omega_{nm}^{re}$, alors elle est multipliable dans Δ , et on pose $\alpha'^{\wedge} = \alpha^{\wedge}$ et $\alpha'^{\vee} = \alpha^{\vee} = 2\alpha^{\wedge}$ et également $(2\alpha)'^{\wedge} = (2\alpha)^{\wedge} = \alpha^{\wedge}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{im}$ on choisit, comme au chapitre précédent, arbitrairement un élément de $\Psi^{\wedge}(\zeta^{\wedge}(\alpha))$ et on le note α'^{\wedge} .

Remarque. Si une racine $\alpha \in \Omega^{re}$ est le double d'une racine de Δ^{re} qui n'est pas dans Ω , on a $\alpha'^{\vee} = \alpha^{\vee} = (\alpha/2)^{\wedge} = (\alpha'/2)^{\wedge} = \alpha'^{\wedge}$.

On définit le groupe de Weyl relatif par :

$$W_{\Omega} = \langle r_{\alpha} / \alpha \in \Omega^{re} \rangle .$$

Il est clair sur la définition d'un sous-système (SSR3) que W_{Ω} stabilise Ω ainsi que Ω^{re} .

Remarque. Cette dernière propriété et les deux paragraphes qui vont suivre sont en fait encore vrais si $\Omega = \Omega^{re}$ est une partie de Δ^{re} vérifiant la condition (SSR3) (et donc aussi (SSR1)).

Géométrie d'un sous-système

On considère toutes les notions introduites au 4.4 mais dans $V_{\mathbb{R}}^*$. On pose $\mathcal{H}_{\Omega} = \{H_{\alpha} ; \alpha \in \Omega^{re}\}$, et on définit, comme au chapitre précédent, la relation d'équivalence \approx_{Ω} sur $V_{\mathbb{R}}^*$ relative à Ω (c'est-à-dire à \mathcal{H}_{Ω}). On appelle alors :

- *chambre relative « ouverte »*; toute classe d'équivalence C^{Ω} pour \approx_{Ω} qui rencontre $W.C_{\emptyset}$, l'intersection $C^{\Omega} \cap \mathfrak{T}^{\circ}$ engendre alors $V_{\mathbb{R}}^*$, car

$$C^{\Omega} \cap w.C_{\emptyset} \neq \emptyset \implies w.C_{\emptyset} \subset C^{\Omega} ;$$

- *chambre relative « fermée »*; si $D = C^{\Omega}$ est une chambre relative « ouverte » et $x \in D$, la chambre relative fermée correspondante est :

$$\bar{D} = \{y \in V_{\mathbb{R}}^* / \forall \alpha \in \Omega^{re}, \langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle \geq 0\}.$$

- *Les cloisons relatives d'une chambre relative « fermée » \bar{D}* sont les classes d'équivalence F pour \approx_{Ω} telles que $F \cap \mathfrak{T}^{\circ}$ engendre l'hyperplan H_{α} pour un $\alpha \in \Omega^{re}$, avec :

$$\forall y \in F \exists x \in D | y, x [\subset D.$$

- L'hyperplan H_α est alors le mur correspondant à F , c'est un *mur de la chambre relative* \bar{D} .
- Un *mur relatif* est un hyperplan qui est le mur d'une chambre relative.

Remarque. En dimension finie, la chambre fermée est l'adhérence de la chambre ouverte. En effet, quelle que soit la dimension, si $x \in D$ et $y \in \bar{D}$, alors $[x, y[\subset D$, et

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \{y \in V_{\mathbb{R}}^* / [x, y[\subset D (\forall x \in D)\} \\ D &= \bar{D} \cap (V_{\mathbb{R}}^* \setminus \cup_{\alpha \in \Omega^{re}} H_\alpha). \end{aligned}$$

Lemme 5.1.3 — *Pour tout $\alpha \in \Omega_{+,nd}^{re}$ il existe $x_0 \in H_\alpha \cap \mathfrak{X}^\circ$ tel que, $\forall \beta \in \Delta^{re} \setminus \mathbb{Q}\alpha$ $x_0 \notin H_\beta$.*

Alors, x_0 est dans une cloison relative d'une chambre relative.

Démonstration. Soit $\alpha \in \Omega_{+,nd}^{re}$, si $w \in W$ et $i \in I_{re}$ sont tels que $\alpha \in \{w.\alpha_i, 2w.\alpha_i\}$, alors $H_\alpha = w.H_{\alpha_i}$. D'après (4.4.14), $w.C_{\{i\}} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in w.C_{\{i\}}$, $\{i\}$ est de type fini donc $x_0 \in \mathfrak{X}^\circ$ et pour toute racine réelle β non proportionnelle à α , on a $\langle \beta, x_0 \rangle \neq 0$. □

Il résulte de ce lemme de façon immédiate :

Corollaire 5.1.4 — *Pour tout $\alpha \in \Omega^{re}$, l'hyperplan H_α est un mur relatif ; il contient toujours une cloison relative.*

Proposition 5.1.5 — *Soient $\alpha \in \Omega^{re}$ et $x_0 \in H_\alpha \cap \mathfrak{X}^\circ$ tel que $x_0 \notin H_\beta$ si $\beta \in \Omega^{re} \setminus \mathbb{Q}\alpha$. (D'après le lemme précédent, un tel x_0 existe.) Ce point x_0 est exactement dans deux chambres relatives fermées ; celles-ci ne dépendent que de la classe de x_0 modulo \approx_Ω et cette classe est une cloison relative de chacune de ces chambres.*

De plus, ces deux chambres sont échangées dans la réflexion $r_\alpha \in W_\Omega$ et H_α est un mur de celles-ci.

Démonstration. On peut supposer $\alpha \in \Omega_{+,nd}^{re}$. Soit x'_0 choisi comme en 5.1.3 ; d'après 4.4.11, quitte à changer x'_0 en un point de $]x_0, x'_0]$, on peut supposer que tous les points de $]x_0, x'_0]$ sont dans une même facette F qui est alors une cloison. Il existe $w \in W$ tel que $w.\bar{F} \subset \bar{C}$. Les deux chambres C_\emptyset et $r_{w.\alpha}.C_\emptyset$ contiennent des familles génératrices de $V_{\mathbb{R}}^*$, il est clair qu'il en est de même de leurs images par w^{-1} . De plus, chacune des chambres $w^{-1}.C_\emptyset$ et $w^{-1}r_{w.\alpha}.C_\emptyset$ est incluse dans une chambre relative et ces chambres relatives sont distinctes puisque :

$$\langle \alpha, w^{-1}.C_\emptyset \rangle . \langle \alpha, w^{-1}r_{w.\alpha}.C_\emptyset \rangle = \langle w.\alpha, C_\emptyset \rangle . \langle w.\alpha, r_{w.\alpha}.C_\emptyset \rangle < 0.$$

Notons alors C_1^Ω celle qui contient $w^{-1}(C_\emptyset)$ et C_2^Ω la seconde. Supposons que x_0 ou un autre élément de la classe F_0 de x_0 modulo \approx_Ω soit dans une chambre relative fermée \bar{D} éventuellement distincte des deux précédentes. Par définition, D rencontre

WC_\emptyset donc contient une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$. Par suite, il existe un élément x_1 de D , tel que $\langle \alpha, x_1 \rangle \neq 0$, mais alors :

$$D = \left\{ x \in V_{\mathbb{R}}^* / (\forall \beta \in \Omega^{\text{re}} \setminus \mathbb{Q}\alpha) \langle \beta, x \rangle \langle \beta, x_0 \rangle > 0 \right. \\ \left. \text{et } (\forall \beta \in \mathbb{Q}\alpha) \langle \beta, x \rangle \langle \beta, x_1 \rangle > 0 \right\}.$$

Ceci prouve que D est forcément l'une des deux chambres précédentes.

Le même raisonnement qu'en 4.4.14 montre que F_0 est bien une cloison relative. \square

Corollaire 5.1.6 — Une cloison relative F est cloison relative d'exactly deux chambres.

Proposition 5.1.7 — Deux chambres relatives différentes sont toujours séparées par un mur relatif.

Démonstration. Soient C_1^Ω et C_2^Ω deux chambres relatives distinctes. C_i^Ω pour $i \in \{1, 2\}$, contient une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$, donc pour toute racine réelle α de Ω , il existe $x_\alpha^i \in C_i^\Omega$ tel que $\langle \alpha, x_\alpha^i \rangle \neq 0$, on note alors $\varepsilon_i(\alpha)$ le signe de ce scalaire. (Il est bien sûr indépendant du choix de l'élément dans la chambre relative). Chacune des deux chambres est caractérisée par la propriété :

$$C_i^\Omega = \{x / \varepsilon_i(\alpha) \cdot \langle \alpha, x \rangle > 0 \ (\forall \alpha \in \Omega)\}.$$

Les deux chambres étant distinctes, il existe $\alpha \in \Omega^{\text{re}}$ tel que $\varepsilon_1(\alpha)\varepsilon_2(\alpha) < 0$, donc H_α est un mur relatif qui les sépare. \square

Proposition 5.1.8 — Le groupe W_Ω agit transitivement sur

$$\mathcal{C} = \{\text{chambres relatives de } \Omega\}$$

et il est engendré par les r_α où la racine $\alpha \in \Omega_{+, \text{nd}}^{\text{re}}$ est telle que H_α soit un mur d'une chambre relative donnée.

Démonstration. (1) On note :

$$R(x, y) = \{\alpha \in \Omega_{+, \text{nd}}^{\text{re}} / \langle \alpha, x \rangle \langle \alpha, y \rangle < 0\} \text{ et} \\ \#_\Omega(x, y) = |R(x, y)| \\ = |\{\text{Murs relatifs qui séparent } x \text{ et } y\}|.$$

Si x et y sont dans le cône de Tits, on sait (4.4.11) que $\#_\Omega(x, y) \leq \#(x, y) < \infty$. Or, une chambre relative rencontre le cône de Tits et il est clair que cet entier ne dépend pas des choix de x et y dans leurs classes d'équivalence pour Ω .

(2) Soient alors deux chambres telles que $\#_{\Omega}(C_1^{\Omega}, C_2^{\Omega}) > 0$ (où $\#_{\Omega}(C_1^{\Omega}, C_2^{\Omega})$ désigne bien sûr $\#(x, y)$ pour $x \in C_1^{\Omega}$ et $y \in C_2^{\Omega}$). Montrons qu'il existe donc $x \in C_1^{\Omega} \cap \mathfrak{X}^{\circ}$ et $y \in C_2^{\Omega} \cap \mathfrak{X}^{\circ}$ tels que le segment $[x, y]$ coupe les hyperplans H_{α} qui séparent les deux chambres, en des points tous distincts.

En effet, soient x et y quelconques dans l'intersection de chacune des chambres avec le cône de Tits « ouvert ». Notons $V' = V_{\mathbb{R}}^*/(\bigcap_{\alpha \in R(x,y)} H_{\alpha})$, V' est un espace vectoriel de dimension finie.

L'image C'_1 de $C_1^{\Omega} \cap \mathfrak{X}^{\circ}$ est un cône convexe de V' qui contient une famille génératrice de V' , donc C'_1 contient un ouvert de V' .

Pour $\beta \neq \alpha$ séparant les deux chambres relatives, $H'_{\alpha} \cap H'_{\beta}$ (avec les notations évidentes) est de codimension deux dans V' donc y' (le projeté de y) et cette intersection engendrent un hyperplan qu'on note $H^y_{\alpha,\beta}$.

La réunion finie des $H^y_{\alpha,\beta}$, quand (α, β) parcourt l'ensemble $R(x, y)^2$ privé de sa diagonale, ne peut contenir un ouvert de V' , il existe donc $x'_0 \in C'_1$ n'appartenant pas à cette réunion. Il suffit de relever x'_0 en $x_0 \in C_1^{\Omega} \cap \mathfrak{X}^{\circ}$, alors x_0 et y conviennent.

(3) Considérons à présent deux chambres relatives C_i^{Ω} pour $i \in \{1, 2\}$, et raisonnons par récurrence sur $\#_{\Omega}(C_1^{\Omega}, C_2^{\Omega})$ pour établir le résultat suivant :

pour une chambre relative C^{Ω} , on note $W(C^{\Omega})$ le groupe engendré par les r_{α} pour α associée à un mur de C^{Ω} , alors C_2^{Ω} est conjuguée à C_1^{Ω} sous l'action de $W(C_1^{\Omega}) = W(C_2^{\Omega})$.

Si cet entier est nul, les deux chambres relatives sont égales et le résultat est vrai. En effet, les chambres étant des classes d'équivalence, elles sont égales si leur intersection n'est pas vide. Or, comme l'entier considéré est nul et que ces classes ne peuvent être contenues dans un hyperplan (elles contiennent une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$), on a bien $C_1^{\Omega} \cap C_2^{\Omega} \neq \emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat établi lorsque $\#_{\Omega}(C_1^{\Omega}, C_2^{\Omega}) < n$.

Soient alors deux chambres relatives telles que $\#_{\Omega}(C_1^{\Omega}, C_2^{\Omega}) = n$ et x et y deux points de ces chambres obtenus dans (2). On note $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ les intersections successives de $[x, y]$ et des hyperplans H_{β_i} séparant les deux points. Soit un point $z \in]x_1, x_2[$ alors $z \in r_{\beta_1}(C_1^{\Omega})$ d'après la proposition (5.1.5) H_{β_1} est un mur de C_1^{Ω} donc $r_{\beta_1} \in W(C_1^{\Omega})$ et par conjugaison $W(r_{\beta_1}.C_1^{\Omega}) = W(C_1^{\Omega})$. De plus, $[z, y]$ coupe $n - 1$ hyperplans et par récurrence C_2^{Ω} est conjuguée à $r_{\beta_1}(C_1^{\Omega})$ par $W(r_{\beta_1}(C_1^{\Omega})) = W(C_2^{\Omega})$, d'où le résultat.

(4) La proposition résulte du résultat précédent et de 5.1.4 car W est engendré par les réflexions par rapport à des murs. □

Propriétés de Ω^{re} si Ω est un sous-système

Soit C la chambre relative « ouverte » qui contient C_\emptyset . Considérons :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \{\alpha \in \Omega_{\text{nd}}^{\text{re}} \cap \Omega_{\text{nm}} ; H_\alpha \text{ est un mur de } C \text{ et } \langle \alpha, x \rangle > 0 (\forall x \in C)\}; \\ \Phi_2 &= \{\alpha \in \Omega_{\text{nd}}^{\text{re}} ; 2\alpha \in \Omega, H_\alpha \text{ est un mur de } C \text{ et } \langle \alpha, x \rangle > 0 (\forall x \in C)\}.\end{aligned}$$

N.B : D'après le choix de C , on a : $\Phi_1 \cup \Phi_2 \subset \Omega_{+, \text{nd}}^{\text{re}}$.

On pose $\Phi_{\text{re,nd}} = \Phi_1 \cup \Phi_2$, et $\Phi_{\text{re}} = \Phi_{\text{re,nd}} \cup 2\Phi_2$. Enfin, si $\alpha \in \Phi_1$ (resp. Φ_2), on pose $N(\alpha) = \{1\}$ (resp. $N(\alpha) = \{1, 2\}$).

Proposition 5.1.9 —

$$\Omega^{\text{re}} = W_\Omega(\Phi_{\text{re}}).$$

Démonstration. Soient β une racine réelle de Ω non divisible et $x \in H_\beta \cap \mathfrak{T}^\circ$ qui n'est dans aucun autre hyperplan. D'après (5.1.3), x est dans une face d'une chambre relative C' dont H_β est un mur. Selon (5.1.8), il existe un élément w du groupe de Weyl relatif pour lequel $C' = w.C$. Comme Ω est stable sous W_Ω , il en est de même de Ω^{re} en tant qu'intersection de Ω et Δ^{re} . Il est alors immédiat que W_Ω stabilise les ensembles des racines non divisibles (resp. non multipliables).

L'hyperplan $H_{w.\beta} = w.H_\beta$ est évidemment un mur de C donc $w.\beta$ ou $wr_\beta.\beta$ est dans Φ . □

Proposition 5.1.10 — Posons $B'_{\text{re}} = (\langle \alpha, \beta'^\wedge \rangle)$ (où β'^\wedge est défini en 5.1) lorsque α et β parcourent $\Phi_{\text{re,nd}}$.

Alors, B'_{re} est une matrice de Kac-Moody relative (sans indice imaginaire).

Démonstration. D'après (4.2.8) et (4.3.1), si $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}(J)$, alors $\tilde{\alpha}$ (son unique image réciproque dans $\tilde{\Delta}$) est positive et son support est inclus dans J . La coracine de $\tilde{\alpha}$ a les mêmes propriétés. Par Ψ^\wedge , $\alpha^\wedge \in Q_+^\wedge(J)$.

(1) Il est clair que les coefficients de la matrice considérée sont dans \mathbb{Z} .

(2) Montrons que si les deux racines α et β sont dans $\Phi_{\text{re,nd}}$ et ne sont pas égales, alors $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \leq 0$.

L'hyperplan H_α est un mur de C . Soit x_0 comme en (5.1.3), x_0 est dans une cloison F de mur H_α . Pour tout $y \in \bar{C}$, on a :

$\langle \alpha, y \rangle - \langle \beta, y \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle \alpha, r_\beta(y) \rangle \geq 0$ car H_β est le seul mur séparant C et son image par r_β .

De plus, tout élément x de F vérifie $\langle \alpha, x \rangle = 0$, et $\langle \beta, x \rangle > 0$.

Enfin, d'après l'inégalité $\langle \alpha, r_\beta(x_0) \rangle \geq 0$ (vérifiée puisque $x_0 \in F \subset \bar{C}$), le produit $\langle \beta, y \rangle \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ est négatif ou nul, donc $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0$; ce qui permet d'établir le résultat.

(3) Si $\alpha \in \Phi_1$ (resp. Φ_2), on a $\langle \alpha, \alpha'^\wedge \rangle = 2$ (resp. 1) grâce au choix des coracines.

(4) Si $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle = 0$, il résulte de (2.1.7) que $\langle \beta, \alpha^\wedge \rangle = 0$. □

Théorème 5.1.11 — *Le 7-uplet $S'_{\text{re}} = (B'_{\text{re}}, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Phi_{\text{re}}, \Phi_{\text{re}}^\wedge, (N(\alpha))_{\alpha \in \Phi_{\text{re}}})$ est un système générateur de racines sans racine simple imaginaire de système de racines réelles Ω^{re} .*

Démonstration. L'absence de racine simple imaginaire simplifie les axiomes à vérifier. La preuve de (SGR6a) est basée sur le fait qu'une somme d'éléments de Φ_{re} est une somme d'éléments de Π_{re} . La vérification des autres axiomes est facile. La dernière assertion résulte alors de 5.1.9 et 5.1.8. □

On déduit de 5.1.8 et de l'étude des systèmes générateurs de racines :

Corollaire 5.1.12 — *Le couple $(W_\Omega, (r_\alpha)_{\alpha \in \Omega^{\text{re}}})$ est le groupe de Coxeter correspondant à B'_{re} ou plus exactement à la matrice de Kac-Moody déduite de B'_{re} comme en section 1.1.*

Remarque 5.1.13. Soit Ω^{re} une partie de Δ^{re} vérifiant (SSR1) et (SSR3) ; d'après ce qui a été remarqué, tous les résultats de ce paragraphe et du précédent sont encore valables. Le système de racines $\bar{\Omega}$ de S'_{re} est obtenu en complétant Ω^{re} par les conditions de chaînes réelles (remarque 4.2.18), donc est contenu dans Δ et est même un sous-système de Δ . D'autre part, avec des notations évidentes, $\bar{\Omega} = \Omega^{\text{re}} \cup W_\Omega K_{c\Omega}$ et pour toute racine $\alpha \in W_\Omega K_{c\Omega}$, $\mathbb{N}^* \alpha \subset \bar{\Omega}$, on a donc $\bar{\Omega} \cap \Delta^{\text{re}} = \Omega^{\text{re}}$. Cependant, il peut exister d'autres sous-systèmes Ω de Δ vérifiant $\Omega \cap \Delta^{\text{re}} = \Omega^{\text{re}}$, par exemple $\Omega^{\text{re}} \cup \Delta^{\text{im}}$.

On obtient ainsi une correspondance bijective entre les sous-systèmes de Δ^{re} au sens de Moody et Pianzola [MP] et les sous-systèmes de Δ dont la base est réelle (c'est-à-dire engendrés par leurs racines réelles).

Base de Ω

Notons $\Omega_+^{\text{im}} = \Delta_+^{\text{im}} \cap \Omega$; d'après (SSR3), Ω_+^{im} est W_Ω stable.

Définition 5.1.14 — *Le S.G.R. S vérifie la condition (B), s'il satisfait à l'une des hypothèses suivantes :*

- (BN) (cf. 4.3).
- (BZ) (Z) et Π n'a pas une infinité de composantes connexes de type affine.
- (BF) $V_{\mathbb{R}}$ est de dimension finie et 0 n'est pas adhérent à $R_+ \setminus \{0\}$.

N.B. : La seconde condition indiquée ici implique que :

- (a) les racines de type affine et orthogonales à toutes les autres racines forment une réunion finie de parties non adhérentes à 0 de droites rationnelles.
- (b) si $\alpha \in \Delta$ n'est pas du type considéré en (a), alors il existe $\beta \in \Delta$ telle que $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \neq 0$ et de plus $\langle q\alpha, \beta^\wedge \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q\alpha \in \Delta$.

Lemme 5.1.15 —

$$\forall \alpha \in \Omega_+^{\text{im}} \exists \beta \in W_\Omega(\alpha) \langle \beta, \gamma^\wedge \rangle \leq 0 \quad (\forall \gamma \in \Omega_+^{\text{re}}).$$

Plus précisément, si on note : $B_\Omega = \{\alpha \in \mathbb{Q}_\mathbb{Q} / \langle \alpha, \gamma^\wedge \rangle \leq 0 \quad (\forall \gamma \in \Omega_+^{\text{re}})\}$, alors $W_\Omega(\alpha) \cap B_\Omega$ est réduit à un point.

Démonstration. Soit $\tilde{\alpha}$ un élément quelconque de $\zeta(\alpha)$, considérons dans $\tau^{-1}(W_\Omega) \cdot (\tilde{\alpha})$, un élément $\tilde{\beta}$ de hauteur minimale, alors $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}^\wedge \rangle \leq 0 \quad (\forall \gamma \in \Psi^{-1}(\Omega^{\text{re}}))$, et l'image par Ψ de $\tilde{\beta}$ est solution. On pose encore (cf. 1.1.15) :

$$B'_\Omega = \{\alpha \in \mathbb{Q}_\mathbb{Q} / (w \cdot \alpha - \alpha) \in \sum_{\beta \in \Phi_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \beta \quad (\forall w \in W_\Omega)\}.$$

On a $B'_\Omega \subset B_\Omega$ car $\mathbb{Q}_- \gamma \cap \sum_{\beta \in \Phi_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \beta = \{0\}$ (cf. 4.2.5).

De plus, on a l'inclusion inverse car W_Ω est un groupe de Coxeter, et on peut faire la démonstration par récurrence comme en (1.1.15) en utilisant 4.2.10 (vu 5.1.11). Enfin, il est clair (d'après (SGR6a) et 5.1.11) que si α et $w \cdot \alpha$ sont simultanément dans B'_Ω , ils sont égaux.

Construction de la base.

On suppose dorénavant la condition (B) vérifiée.

Notons $K_\Omega = B_\Omega \cap \Omega_+^{\text{im}}$ et considérons Φ' un ensemble de représentants dans K_Ω des classes d'équivalence dans K_Ω pour la relation de \mathbb{Q} -proportionnalité. Pour chaque élément α de Φ' , posons $R(\alpha) := \{n \in \mathbb{Q}_+ ; n\alpha \in K_\Omega\}$. Si cet ensemble de rationnels positifs admet un plus petit élément, on note celui-ci q , sinon on choisit $q \in R(\alpha)$ tel que $(3/4)q$ soit un minorant de $R(\alpha)$ (un tel q existe grâce à (B)). Dans les deux cas, on pose $\gamma := q\alpha \in \Phi_{\text{im}}$ et $N^1(\gamma) := \{n \in \mathbb{Q}_+ ; n\gamma \in K_\Omega\}$. La base Φ est alors la réunion de Φ_{re} et de Φ_{im} ainsi construite.

Pour tout $\gamma \in \Phi$, l'ensemble $N^1(\gamma)$ contient 1, sa borne inférieure est dans l'intervalle $[3/4, 1]$ (c'est 1 s'il s'agit d'un plus petit élément). Enfin, deux éléments de Φ ne sont jamais \mathbb{Q} -proportionnels. \square

Considérons une numérotation $(\gamma_j)_{j \in J}$ des éléments de Φ . On note :

- $N_i^1 = N^1(\gamma_i)$ pour tout $j \in J$;
- J_{re} (resp. J_1 ; resp. J_2) l'ensemble des indices j de J tels que $\gamma_j \in \Phi_{\text{re}}$ (resp. Φ_1 ; resp. Φ_2) et
- J_{im} (resp. J_0 ; resp. J_-) l'ensemble de ceux pour lesquels γ_j est imaginaire (resp. de type affine ; resp. de type indéfini).

On suppose dans la suite que les coracines des éléments de Δ sont choisies de façon compatible à l'action de W , ceci est possible d'après la remarque 4.3.7. Dans le cas où la condition (Z) est vérifiée, on peut de plus supposer que les coracines sont situées dans Q^\wedge .

Proposition 5.1.16 — La matrice $B = \left(\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle \right)_{(\gamma_i, \gamma_j) \in \Phi}$ est de Borchers relative et $b_{ij} = \langle \gamma_j, \gamma_i^\wedge \rangle$ est un entier si $i \in J_{re}$.

Elle est à coefficients entiers si S vérifie la condition (Z).

Démonstration. (1) Si la condition (Z) est vérifiée ou si $j \in J_{re}$, le coefficient $b_{ji} = \langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle$ de la matrice B est dans \mathbb{Z} puisque, d'après l'hypothèse précédente $\gamma_j^\wedge \in Q^\wedge$. D'autre part, Φ est dénombrable car Δ l'est.

(2) Supposons $\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle = 0$, ($i \neq j$). D'après 4.3.7, le signe, au sens strict, de $\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle$ ne dépend pas du choix de γ_j^\wedge dans $\Psi^\wedge(\zeta^\wedge(\gamma_i))$. Soit $\tilde{\gamma}_j \in \zeta(\gamma_j)$ (resp. $\tilde{\gamma}_i \in \zeta(\gamma_i)$), on a, par (3.2.6) :

$$\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle = \langle \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j^\wedge \rangle = 0 \iff \langle \tilde{\gamma}_j, \tilde{\gamma}_i^\wedge \rangle = \langle \gamma_j, \gamma_i^\wedge \rangle = 0$$

(3) Si γ_i et γ_j sont dans $\Phi_{im} = \Phi \setminus \Phi_{re}$, alors $\langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle$ est du signe de $\langle \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j^\wedge \rangle$ avec les notations du (2), donc est négatif ou nul par (3.2.3).

(4) Si l'une des deux racines est réelle et l'autre non, (3.2.6) permet de supposer que $\gamma_i \in \Phi_{re}$. Comme γ_j est dans K_Ω , il est clair que $\langle \gamma_j, \gamma_i^\wedge \rangle \leq 0$.

(5) Les autres conditions requises résultent de 5.1.10. □

Si $\gamma_i \in \Phi_{re}$, on note N_i^1 l'ensemble $N^1(\gamma_i)$ défini en 5.1.11.

Théorème 5.1.17 — Si S vérifie la condition (B) et si l'on pose :

$$S_1 := (B, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Phi, \Phi^\wedge, (N_i^1)_{i \in J}),$$

alors S_1 est un système générateur de racines et $\Delta(S_1) = \Omega$.

De plus, si S vérifie la condition (BN) (resp. (Z), resp. (BF)), S_1 la vérifie également.

Remarques. 1. Si S vérifie (BZ), alors $\{i \in J ; N_i^1 \not\subset [1, +\infty]\}$ est fini.

2. L'hypothèse « Π n'a pas une infinité de composantes connexes de type affine » n'est pas forcément conservée car les racines affines α de Ω orthogonales aux éléments de $\Omega \setminus \mathbb{Q}\alpha$ ne sont pas nécessairement orthogonales à toutes les racines de $\Delta \setminus \mathbb{Q}\alpha$.

3. De même, la condition « I fini » qui permet également d'assurer que S_1 est un S.G.R tel que $\Delta(S_1) = \Omega$ ne passe pas au sous-système (cf. [MP]).

4. Toute condition permettant d'assurer que les N_i^1 tels qu'ils ont été construits sont minorés par des constantes strictement positives permet de montrer, de façon analogue, le théorème.

Démonstration. L'axiome (SGR1) résulte de la proposition précédente ; (SGR2) et (SGR3) sont vérifiés puisque S est un système de racines.

(SGR4) résulte du choix de B .

Par construction, les parties N_i^1 contiennent 1, sont incluses dans $[3/4, \infty[$ et leur plus petit élément, lorsqu'il existe, est 1. Ceci établit (SGR5), car $N_i^1 \langle \gamma_i, \gamma_j^\wedge \rangle \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in J_{\text{re}}$ (R et Q_{re}^\wedge sont en dualité sur \mathbb{Z}).

Reste à établir (SGR6) :

(1) tout élément de Φ et toute somme d'éléments de $\Phi_{\text{re}} \cup (\bigcup_{\alpha \in \Phi_{\text{im}}} N^1(\alpha)\alpha)$ est un élément non nul de $Q_{\mathbb{Q},+}$, puisque $\Psi(\tilde{Q}_{\mathbb{Q},+} \setminus \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$. Ceci permet de montrer (a).

(2) Par construction de la base Φ , deux éléments de Φ ne sont jamais \mathbb{Q} -proportionnels, ce qui établit (b).

Ainsi, S_1 est un système générateur de racines.

D'après (4.2.18), $\Delta(S_1)$ est le plus petit sous-ensemble de $\sum_{j \in J} \mathbb{Q}\gamma_j$ symétrique et tel que si $\alpha \in \Delta_+(S_1)$ et $\gamma_j \in \Phi$ alors $Ch(\alpha, \gamma_j) \subset \Delta(S_1)$. Or, d'après SSR1 et (5.1.2), Ω vérifie ces deux propriétés (dans le cas d'une chaîne imaginaire, il faut appliquer 5.1.2 (b) de façon répétitive à tous les $\alpha \in N_i^1\gamma_i$).

Supposons à présent l'existence d'un élément β de Ω qui n'est pas dans $\Delta(S_1)$; comme $\Omega^{\text{re}} = W_\Omega \Phi^{\text{re}} = \Delta^{\text{re}}(S_1)$, β est nécessairement imaginaire. Par symétrie des deux ensembles, on peut le supposer dans Ω_+ ; enfin, par stabilité de Ω et $\Delta(S_1)$ sous W_Ω , on peut le supposer dans K_Ω . Il suffit en effet de considérer $\tilde{\beta} \in \zeta(\beta)$ puis dans $W_\Omega.\tilde{\beta}$, un élément de hauteur minimale. Par construction de la base, il est clair que la racine β apparaît dans un $N_i^1\gamma_i$ donc dans $\Delta(S_1)$; d'où une contradiction.

La stabilité de (BN) est claire puisque la restriction de θ convient, celle de la troisième hypothèse est évidente. Pour montrer celle de (Z), il suffit de remarquer que sous cette hypothèse, $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ est dans \mathbb{Z} pour tout couple de racines. \square

Corollaire 5.1.18 — *Si S vérifie (BN), alors il existe un S.G.R. normalisé S_2 correspondant à Ω .*

Démonstration. D'après la proposition précédente, S_1 vérifie (BN), le corollaire résulte alors de (4.3.11). \square

Invariance des conditions sur les S.G.R.

Les hypothèses sur la réalisation

Il est clair que le S.G.R. S_1 associé au sous-système Ω vérifie aussi la condition (T).

L'hypothèse (MP) (cf. 4.4) passe au sous-système au moins dans le cas où $Q_{\mathbf{K}}(I_{re})$ est de dimension finie dans V . On déduit en effet ceci du lemme 5 du paragraphe 6 de [MP] :

$Q'_{re,+} = \sum_{\alpha' \in \Phi'_{re}} \mathbb{N}\alpha' \subset Q_{re,+} = \sum_{i \in I_{re}} \mathbb{N}\alpha_i \subset \bigoplus_{j \in N} \mathbb{N}\gamma_j$ si $(\gamma_i)_{j \in N}$ est la base satisfaisant à (MP) dans S . On se place alors dans $V_{\mathbb{R}} = V \otimes \mathbb{R}$ où l'on considère les cônes $C = \bigoplus \mathbb{R}_+\gamma_i$ et $C' = V' \cup C$ où $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Q'$. Alors, C' est un cône propre et C'^{o+} (au sens de [MP]) n'est pas vide car $C_{\emptyset} \neq \emptyset$ grâce à (MP) dans S et donc on peut appliquer le lemme 5 précité.

Ainsi, si S vérifie (MP) ou (MP₂) (resp. (MP₁)) et si $Q_{\mathbf{K}}(I_{re})$ (resp. $Q_{\mathbf{K}}$) est de dimension finie, il en va de même de S_1 (en fait le sous-espace engendré par les racines réelles du sous-système est bien sûr inclus dans $Q_{\mathbf{K}}(I_{re})$).

Par contre, Moody et Pianzola (cf. [MP]) ont montré que, même si elle est vérifiée dans S , la condition (L) n'est plus forcément vérifiée dans S_1 (cf. 5.1.13) ; ce qui a nécessité l'abandon de cette hypothèse au chapitre 4.

Les hypothèses sur les ensembles N_i

L'hypothèse « les N_i de plus petit élément 1 » n'est pas préservée lors du passage à S_1 . Par exemple, si Δ contient une infinité de composantes connexes de type affines réelles de racines imaginaires proportionnelles et si le sous-système considéré est celui formé des racines imaginaires de ces composantes connexes

Ce même exemple permet de voir que l'hypothèse « les N_i sans point d'accumulation dans \mathbb{R} » (resp. « à dénominateurs bornés ») n'est pas conservée dans le sous-système.

Par contre, si on suppose simultanément « les N_i sans point d'accumulation dans \mathbb{R} » (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) (la première hypothèse n'ayant alors de conséquence que sur les racines affines formant une composante connexe de la base), il est facile de voir que, pour que les $N^1(\alpha)$ soient sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. « à dénominateurs bornés »), il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

si α est une racine imaginaire d'une composante connexe de type affine de I alors $\{n \in \mathbb{Q} ; n\alpha \in \Omega\}$ est sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés).

En effet, pour toute autre racine $\alpha \in \Phi$, il existe au moins un indice i tel que $\langle \alpha, \gamma_i^\wedge \rangle \neq 0$ et la condition (Z) (qui est conservée lors du passage au sous-système) implique alors $N^1(\alpha)$ sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés).

Les hypothèses sur le type de la matrice

Si la matrice A est de type fini (resp. profini), la matrice de tout sous-système est de type fini (resp. fini ou profini). En effet, A est de type fini ou profini si et seulement si $\Delta(A)$ n'a pas de racines imaginaires ; le sous-système Ω de Δ est donc dans le même cas.

Si A est de type affine, alors B est décomposable en matrices de type affine ou fini ; autrement dit, B est de type semi-affine. En effet, A est de type affine (ou fini ou profini) si et seulement si elle n'admet pas de racine de type indéfini (c'est-à-dire pour laquelle $\langle \alpha, \alpha^\wedge \rangle < 0$), il en est donc de même de Ω et par suite B est de type fini ou affine (car on verra en 5.2 que B est de rang fini donc ne peut pas être de type profini).

Remarque. Même si la matrice A est indécomposable, B peut être décomposable.

Si la matrice A est de type affine et indécomposable, les « composantes » de B sont alors toutes de type affine ou fini. Si B a une sous-matrice de type affine, $\Delta(B)$ contient au moins un multiple de la racine imaginaire de Δ ; sinon B est de type fini (elle n'est pas forcément indécomposable mais toutes ses composantes sont de type fini).

Enfin, si A est de type indéfini, les composantes indécomposables de B peuvent être de type fini, affine, indéfini ou proindéfini. Cette dernière possibilité apparaît dans l'exemple du « Démon de Maxwell » de [MP].

Si A est de type proindéfini, alors le type de B est quelconque.

On a vu que la matrice A peut être indécomposable sans que B le soit. On peut, par exemple, étudier le sous-système $\Delta(J)$ pour J réunion de deux parties non vides de I et non liées dans le diagramme de Dynkin.

Par contre, si Φ est indécomposable, on peut l'extraire d'une composante indécomposable de Δ et donc Ω est obtenu comme sous-système d'un $\Delta(J)$ où J est composante connexe de I .

Généralisation

Sous l'hypothèse (BN), tous les résultats de ce chapitre se généralisent au cas des hypothèses affaiblies du dernier paragraphe de 4.4 à condition de remplacer lorsque la racine β est réelle, la propriété $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ par $2\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle / \langle \beta, \beta^\wedge \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ où Φ est la base du S.G.R. normalisé

suisant α_j^\wedge , et cette application se factorise par l'application de $Q_{\text{re}} \otimes \mathbf{K}$ dans le dual de $Q_{\text{re}}^\wedge \otimes \mathbf{K}$.

En fait, la matrice $A(I_{\text{re}})$ est de rang fini si et seulement s'il existe une réalisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\wedge, \Pi, \Pi^\wedge)$ de $A(I_{\text{re}})$ avec \mathfrak{h} et/ou \mathfrak{h}^\wedge de dimension finie.

(3) Cette hypothèse est stable par passage aux sous-systèmes. Plus précisément, si $A(I_{\text{re}})$ est de rang fini et Ω un sous-système de racines du système Δ engendré par le S.G.R. correspondant à A , sa matrice réelle B'_{re} (avec les notations de 5.1.10) est de rang fini.

En effet, $Q_{\text{re}} = \sum_{\alpha \in \Delta^{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha$ et le rang de l'application de $Q_{\text{re}} \otimes \mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}^{\Delta^\wedge(I_{\text{re}})}$ qui envoie $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ sur le vecteur de composante $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle$ suivant β^\wedge est fini. Cette condition passe aussitôt au sous-système Ω et entraîne le résultat.

D'autre part, $A(I_{\text{re}})$ ne change pas par isomorphisme ou normalisation, donc cette hypothèse est stable sous ces transformations.

(4) Nous montrerons, en 5.2.4, que, sous l'hypothèse indiquée (et si $I = I_{\text{re}}$ est indécomposable), les bases du système de racines Δ sont conjuguées par $\pm W$. Ceci ne pourrait être vrai en général qu'en grossissant le groupe W :

supposons en effet que $I = I_{\text{re}}$ soit indécomposable mais contienne une partie infinie J dont les éléments sont deux à deux non liés, que J soit la réunion de deux parties infinies J_1 et J_2 telles que pour tout $i \in I$, le nombre d'éléments de J_1 liés à i soit fini. Considérons alors le produit infini commutatif $\tilde{w} = \prod_{j \in J_1} r_j$. La dernière hypothèse assure que \tilde{w} restreint à un sous-espace de dimension finie de $Q_{\mathbf{K}}$ est la restriction d'un élément du groupe de Weyl W . Ainsi, $\tilde{w} \in \text{GL}(Q_{\mathbf{K}})$ stabilise Δ et il est clair que $\tilde{w} \cdot \Pi$ est une base. Par contre, $\tilde{w} \cdot \Pi \cap \Pi$ (qui contient α_i pour $i \in J_2$) et $\tilde{w} \cdot \Pi \cap -\Pi$ (qui contient α_i pour $i \in J_1$) sont infinis ; donc $\tilde{w} \cdot \Pi$ ne peut être conjugué à Π par $\pm W$.

Notion de base

Une racine α est *indivisible* si pour $q \in \mathbb{N}$, $(1/q)\alpha \in \Delta \implies q = 1$.

Une partie Σ de Δ est dite *décomposable* s'il existe une partition de Σ en deux parties non vides, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ telle que si $\gamma_1 \in \Sigma_1$ et si $\gamma_2 \in \Sigma_2$, alors $\langle \gamma_1, \gamma_2^\wedge \rangle = 0$.

Dans le cas contraire, Σ est *indécomposable*.

Définitions 5.2.1 — Une partie Φ de Δ est une base de Δ , si elle est formée de racines indivisibles et si l'on peut trouver :

- pour chaque élément α de Φ , une partie $N(\alpha, \Phi)$ de \mathbb{Q}_+ qui ou bien admet 1 pour plus petit élément ou bien n'a pas de plus petit élément mais contient 1 et est contenue dans $[3/4, \infty[$; si α est réelle, $N(\alpha, \Phi) = \{1\}$ si $2\alpha \notin \Delta$ et $N(\alpha, \Phi) = \{1, 2\}$ si $2\alpha \in \Delta$;

- une partie $\Phi^{1\wedge} = \{\alpha^{1\wedge} ; \alpha \in \Phi\}$ de Q^\wedge vérifiant :
 - pour une racine réelle $\alpha \in \Phi$, on a $\alpha^{1\wedge} = \alpha^\vee$ si $2\alpha \notin \Delta$ et $\alpha^{1\wedge} = \alpha^\vee/2 = (2\alpha)^\vee$ sinon (i.e. $\alpha^{1\wedge} = \alpha^\wedge$) ;
 - pour une racine imaginaire, $\alpha^{1\wedge}$ est un élément de Q^\wedge tel que, pour tout $\beta \in \Phi$, $\langle \beta, \alpha^{1\wedge} \rangle$ et $\langle \beta, \alpha^\wedge \rangle$ soient de même signe au sens strict ;

pour lesquelles si A^1 est la matrice des $\langle \alpha, \beta^{1\wedge} \rangle$ pour α et β dans Φ ,

$S^1 := (A^1, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Phi, \Phi^{1\wedge}, (N(\alpha, \Phi))_{\alpha \in \Phi})$ est un S.G.R. tel que :

$$\Delta(S^1) = \Delta(S).$$

Si S ne vérifie pas l'hypothèse (BN), on suppose de plus $\Delta^{\text{re}}(S^1) = \Delta^{\text{re}}(S)$.

En particulier, la matrice A^1 sera une matrice de Borcherds relative, son type (s'il est défini) est le type de Φ .

Il est clair que dans la définition habituelle de S , la famille Π est une base de $\Delta(S)$.

Remarque. Si S vérifie la condition (Z), alors, pour un choix convenable des coracines $\alpha^{1\wedge}$ (par exemple $\alpha^{1\wedge} = \alpha^\wedge$), S^1 vérifie également (Z).

Lemme 5.2.2 — *Sous les hypothèses précédentes, $\Delta^{\text{re}}(S^1) = \Delta^{\text{re}}(S)$ et pour tout $\alpha \in \Delta^{\text{re}}(S)$, α^\wedge et α^\vee sont les mêmes dans les deux définitions. En particulier, les groupes de Weyl sont les mêmes.*

D'autre part, $A^1(I_{\text{re}}^1)$ est aussi de rang fini.

Démonstration. En effet, si α est une racine réelle de Φ , il résulte de la définition de $\alpha^{1\wedge}$ en fonction de α^\vee que $\alpha^{1\vee} = \alpha^\vee$ et $\alpha^{1\wedge} = \alpha^\wedge$. D'autre part, si S vérifie (BN), d'après la caractérisation en 4.3.10 des racines réelles, l'égalité des deux systèmes nécessite l'égalité des ensembles des racines réelles (le signe de $\langle \alpha, \alpha^\wedge \rangle$ permettant de lever l'imprécision dans la caractérisation puisque cette imprécision concerne des éléments « isolés » des bases, qui se retrouvent donc (à une constante près) dans les deux bases).

Dans tous les cas, si $i \in I_{\text{re}}$, le groupe de Weyl W^1 contient au moins un w^1 qui envoie α_i sur une racine de Φ , et, par suite, contient les r_i pour $i \in I_{\text{re}}$; ce qui établit l'inclusion $W \subset W^1$. L'inclusion inverse est immédiate puisque les générateurs de W^1 (qui sont les réflexions par rapport aux éléments de Φ_{re}) sont évidemment dans W . Enfin, l'argument cité à la remarque (3) du premier paragraphe de 5.2 permet de prouver la dernière assertion. □

Proposition 5.2.3 — *Si Φ est une base de $\Delta = \Delta(S)$, alors :*

- (a) $\Delta(S)$ est indécomposable $\implies \Phi$ est indécomposable ;
- (b) $\Delta^{\text{re}}(S)$ est indécomposable $\iff \Phi_{\text{re}} := \Phi \cap \Delta^{\text{re}}(S)$ est indécomposable ;

$$(c) \quad \Phi \begin{cases} \text{est indécomposable} \\ \text{et n'est pas de type affine} \end{cases} \implies \Delta(S) \text{ est indécomposable.}$$

Démonstration. (a) Supposons Φ décomposable, il existe alors une partition $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ non triviale et telle que $\langle \alpha_1, \alpha_2^\wedge \rangle = 0$ dès que $\alpha_1 \in \Phi_1$ et $\alpha_2 \in \Phi_2$.

Notons Δ_1 (resp. Δ_2) le sous-système de racines de Δ associé à Φ_1 (resp. Φ_2), on a alors les inclusions $\Delta_1 \subset \sum_{\alpha \in \Phi_1} \mathbb{Q}\alpha$ (resp. $\Delta_2 \subset \sum_{\alpha \in \Phi_2} \mathbb{Q}\alpha$) et, pour les ensembles des coracines correspondantes $(\Delta_1)^\wedge \subset \sum_{\alpha \in \Phi_1} \mathbb{Z}\alpha^\wedge$ (resp. $(\Delta_2)^\wedge \subset \sum_{\alpha \in \Phi_2} \mathbb{Z}\alpha^\wedge$). Alors, $\langle \Delta_1, (\Delta_2)^\wedge \rangle = 0$ et d'après la construction de Δ à partir des conditions de chaînes, on a $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ et donc Δ est décomposable. Ce qui établit (a).

(b) Si Δ^{re} est décomposable, soit $\Delta^{\text{re}} = \Delta_1 \cup \Delta_2$, une décomposition en deux parties non vides et orthogonales de Δ^{re} . Considérons $\Phi_1 = \Phi_{\text{re}} \cap \Delta_1$ et $\Phi_2 = \Delta_2 \cap \Phi_{\text{re}}$; alors $\Phi_{\text{re}} = \Phi_1 \cup \Phi_2$ et les deux parties de Φ ainsi définies sont non vides car le groupe de Weyl est le produit direct de ses deux sous-groupes $\langle r_\alpha; \alpha \in \Delta_1 \rangle$ et $\langle r_\alpha; \alpha \in \Delta_2 \rangle$. En effet, $\langle r_\alpha; \alpha \in \Delta_1 \rangle$ n'agit pas sur Δ_2 et inversement, une seule de ces deux parties ne suffit donc pas pour engendrer Δ^{re} tout entier. Ainsi, Φ_{re} est décomposable. Pour la réciproque, le même raisonnement qu'au (a) est valable en remplaçant les conditions de chaînes par l'action du groupe de Weyl.

(c) Supposons Δ décomposable et Φ indécomposable et montrons qu'alors Φ est nécessairement de type affine. Soit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ une partition de Δ en deux parties orthogonales non triviales. Posons $\Phi_1 = \Phi \cap \Delta_1$ et $\Phi_2 = \Phi \cap \Delta_2$, l'hypothèse faite implique alors que l'une de ces deux parties de Φ est vide, (puisque l'on obtient une partition de Φ en deux parties orthogonales). Supposons $\Phi_2 = \emptyset$. Le raisonnement sur le groupe de Weyl donné au (b), montre que Δ_2 n'est formé que de racines imaginaires sur lesquelles W n'agit pas et qui sont toutes orthogonales à la base. Par suite, Δ_2 n'est formé que de racines de type affines et la base Φ est nécessairement de type affine à cause de l'orthogonalité de Δ_1 et Δ_2 . \square

Remarque. Une partie Σ de Δ est dite *fortement décomposable* s'il existe une partition de Σ , en deux parties non vides, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ telle que si $\gamma_1 \in \Sigma_1$ et $\gamma_2 \in \Sigma_2$, alors ni $\gamma_1 + \gamma_2$ ni $\gamma_1 - \gamma_2$ n'est une racine.

Cette notion est plus forte que la notion habituelle, elle signifie qu'on peut partitionner Σ en deux parties fortement orthogonales et pas seulement orthogonales. Cependant, elle ne permettrait pas d'obtenir un « meilleur » énoncé de la proposition 5.2.3. En effet, deux parties fortement orthogonales de $\bigcup_{i \in I} N_i \alpha_i$ n'engendrent pas nécessairement des parties fortement orthogonales de Δ ni même disjointes toujours à cause des racines de type affine.

Notations — Dans la suite, nous considérons deux S.G.R. sur \mathbf{K} , notés $S := (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N(\alpha, \Pi))_{\alpha \in \Pi})$ et $S^1 := (A^1, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Phi, \Phi^\wedge, (N(\alpha, \Phi))_{\alpha \in \Phi})$ tels que Π et Φ soient les bases d'un même système de racines Δ et tel que S vérifie (T).

D'après (4.2.16), $R = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha$, et donc :

$$R = \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}N(\alpha, \Pi)\alpha = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}N(\alpha, \Phi)\alpha.$$

De plus,

$$Q_{\text{re}}^\wedge = \sum_{\alpha \in \Pi_{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha^\wedge = \sum_{\alpha \in \Phi_{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha^\wedge.$$

On considère alors $S_{\mathbb{R}}$ et $S_{\mathbb{R}}^1$, on note $V_{\mathbb{R}}$, le \mathbb{R} -espace correspondant.

Bases réelles

Remarque préliminaire. Les résultats de ce paragraphe n'utilisent que Δ^{re} , les propriétés du lemme 5.2.2 ainsi que sa conséquence 5.2.3 (b) qui montre que les composantes indécomposables de $\Delta^{\text{re}}(S)$ permettent de caractériser les composantes connexes de Φ_{re} et de Π_{re} . En effet, si $\Delta^{\text{re}}(S^1) = \Delta^{\text{re}}(S)$ et si Π et Φ ne sont formées que de racines réelles, alors $\Delta(S^1) = \Delta(S)$, d'après la remarque suivant 4.2.18.

Proposition 5.2.4 — *Soit Δ_1 une composante indécomposable de $\Delta^{\text{re}}(S^1)$, on note Π_1 et Φ_1 les composantes connexes de Π_{re} et Φ_{re} correspondantes, il existe $w \in W$ tel que $\Pi_1 = w.\Phi_1$ ou $\Pi_1 = -w.\Phi_1$. De plus, si Π_1 ou Φ_1 est de type fini, on peut toujours supposer $\Pi_1 = w.\Phi_1$.*

N.B: En fait, w est dans le sous-groupe de W engendré par les réflexions correspondant à Π_1 .

Démonstration. Soient C (resp. F) la chambre ouverte fondamentale relative à Π_1 (resp. Φ_1), et \mathfrak{C} le cône de Tits relatif à Φ_1 , c'est-à-dire $\mathfrak{C} = W.\bar{F}$ où \bar{F} est la chambre fermée correspondant à F . (Par hypothèse sur S , la chambre C engendre $V_{\mathbb{R}}^*$.)

Si $W\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$, soit $w' \in W$ tel que $w'\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$. Le résultat est alors immédiat car $w'.F$, C et $-C$ sont des classes d'équivalence pour la relation $\approx_{\mathcal{H}_\Delta}$; d'où l'égalité $w.C = \pm F$ (où $w' = w^{-1}$), permettant d'identifier la famille $w.\Pi_1$ (ou $-w.\Pi_1$) à Φ_1 en tant qu'ensemble des racines non divisibles et positives sur la chambre F correspondant aux murs de la chambre F .

Montrons que $W\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$. D'après le premier paragraphe de 5.2, trois cas sont possibles pour la base Φ_1 .

(1) Elle est de type fini. D'après 4.4.10, $\mathfrak{X} = V_{\mathbb{R}}^*$ donc $W\bar{F} \cap C \neq \emptyset$. Ainsi, $\Pi_1 = w.\Phi_1$ et Π_1 est de type fini.

(2) Elle est de type affine ; le cône \mathfrak{X} est alors un demi-espace (cf. 4.4.10) donc $\pm\mathfrak{X}$ rencontre C car C ne peut pas être contenue dans un hyperplan (elle contient une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$). Ainsi $\Pi_1 = \pm w(\Phi_1)$ est de type affine.

Cette conclusion est encore valable lorsque C n'engendre pas $V_{\mathbb{R}}^*$ sous la condition supplémentaire : Π_1 n'est pas de type fini. En effet, dans ce cas, $V_{\mathbb{R}}^* \setminus \pm\mathfrak{X}$ est une réunion finie de facettes pour \mathcal{H}_{Δ_1} .

(3) Elle est de type indéfini ou proindéfini.

Dans ce cas, Π_1 n'est pas nécessairement finie. Soit J une partie finie de I_1 (où I_1 est une numérotation des éléments de Π_1), telle que $A(J)$ soit indécomposable de type indéfini et que $\Pi(J)$ engendre l'image de $Q_{\text{re}} \otimes \mathbb{R}$ dans le dual de $Q_{\text{re}}^{\wedge} \otimes \mathbb{R}$.

Montrons qu'un tel choix est possible. Notons que $A(I_1)$ ne peut pas être de type profini, puisque le rang de $A(I_1)$ est fini. Donc, si toute matrice indécomposable d'ordre fini extraite de $A(I_1)$ est de type fini ou affine, alors $A(I_1)$ elle-même est de type fini ou affine et l'ensemble Φ_1 aussi (d'après (1) et (2)) ; ce qui contredit notre hypothèse. Par suite, Π_1 est de type indéfini ou proindéfini.

On peut alors choisir, parmi les éléments de Π_1 , une famille finie dont l'image est génératrice de l'image de $Q(I_1) \otimes \mathbb{R}$ dans le dual de $Q_{\text{re}}^{\wedge} \otimes \mathbb{R}$, qui est de dimension finie, puis la compléter par un nombre fini d'éléments encore choisis dans Π_1 pour obtenir une famille indécomposable (il s'agit de relier les éléments de la famille choisie dans le diagramme de Dynkin restreint à I_1).

L'ensemble d'indices J étant ainsi choisi, il existe $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}$ (dans un revêtement de S) de support J et tel que $\langle \tilde{\gamma}, \alpha^{\wedge} \rangle < 0$ pour toute racine simple α de $\Pi(J)$ (cf. 2.4.4). On note γ la « projection » dans $\Delta(S)$ de cette racine.

Démontrons le résultat intermédiaire suivant :

pour tout $\alpha \in \Pi_1$, on a $\langle \gamma, \alpha^{\wedge} \rangle < 0$ et donc $\langle \alpha, \gamma^{\wedge} \rangle < 0$ (cf. 3.2.6) c'est-à-dire $\gamma^{\wedge} \in -C$.

Comme la décomposition de γ (choisi comme avant), est dans $\Pi(J)$, pour une racine simple α qui n'est pas dans cette partie de la base, on a $\langle \gamma, \alpha^{\wedge} \rangle \leq 0$. Le support de $\tilde{\gamma}$ est exactement J et l'image de $\Pi(J)$ engendre l'image de $Q(I_1) \otimes \mathbb{R}$. Si on suppose l'existence de $\alpha \in \Pi_1$, telle que $\langle \gamma, \alpha^{\wedge} \rangle = 0$, alors nécessairement $\langle \beta, \alpha^{\wedge} \rangle = 0$ pour tout $\beta \in \Pi(J)$ et donc pour tout $\beta \in \Pi_1$, ce qui contredit l'hypothèse Π_1 indécomposable.

Considérons alors l'élément γ . Dans le système générateur S^1 , il admet une « bonne décomposition », c'est-à-dire est l'image d'une racine du revêtement $\tilde{\Delta}^1$ dans \tilde{S}^1 . C'est évidemment une racine imaginaire (comme dans S), et, quitte à considérer son opposé, on peut la supposer dans Δ_{+, Φ_1} . Il existe alors un élément

du groupe de Weyl w tel que $w.\gamma \in K_{\Phi_1}$ (l'indice signifiant que sa définition est relative à S^1), donc $-w.\gamma^\wedge \in \bar{F}$.

Ainsi, on a encore $w.\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$. □

Corollaire 5.2.5 — Si Π_{re} est indécomposable, S^1 vérifie (T).

Remarque. Ce résultat n'est pas vrai en général sans l'hypothèse d'indécomposabilité. On construit facilement un contre-exemple avec $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. La base Π considérée est réunion de deux composantes Π_1 et Π_2 de type affine $A_1^{(1)}$ et si δ_1 et δ_2 sont les plus petites racines imaginaires positives correspondantes, on prend pour espace V le quotient de $\tilde{Q}_{\mathbb{R}}$ par la relation $\delta_1 = \sqrt{2}\delta_2$. Le S.G.R S vérifie (T) mais si $\Phi = \Pi_1 \sqcup -\Pi_2$, alors S^1 ne vérifie ni (T) ni (SGRord) (cf. 4.2.4 (2)).

Bases

Supposons que les deux systèmes S et S^1 vérifient (T) et (BN).

Définition 5.2.6 — Soient α et β dans Δ^{im} ,

- la racine β est dite liée à α si $\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta \subset \Delta$ ou $\beta \in \mathbb{Q}_+\alpha$;
- la racine β est dite fiable à α s'il existe une famille finie $(\beta_i)_{i \in \{0 \dots n+1\}}$ formée de racines imaginaires telles que $\beta_0 = \beta$, $\beta_{n+1} = \alpha$ et (β_i, β_{i+1}) liées pour tout entier de 0 à n .

On note : $\alpha \Re \beta$ lorsque α est fiable à β .

Proposition 5.2.7 — Ainsi définie, \Re est une relation d'équivalence sur les racines imaginaires, pour laquelle si Δ a une base indécomposable et n'est pas de type fini, il y a deux classes d'équivalence (à savoir Δ_+^{im} et Δ_-^{im}).

N.B : Si une base Π de Δ est indécomposable, alors Δ est indécomposable sauf si Π est de type affine indécomposable mais alors toute autre base de Δ , pour laquelle le système est normalisé, est indécomposable (cf. 5.2.2 et 5.2.4).

Démonstration. La première assertion est immédiate. Supposons donc que toute base de Δ soit indécomposable et de type affine ou indéfini. Soient α et β deux racines imaginaires positives (pour l'une des bases, disons Φ) ; montrons qu'elles sont dans la même classe. Supposons leurs supports disjoints, on peut alors considérer dans I^1 , un chemin $\{i_0, i_1 \dots i_n\}$ non vide liant les supports de ces deux racines c'est-à-dire tel que $i_0 \in S_\alpha$ et $i_n \in S_\beta$. (En réalité dans cette démonstration, on « remonte » dans un revêtement ou bien on ne considère que des bonnes décompositions.)

Posons alors $\alpha_0 := \alpha$, choisissons une racine imaginaire α_1 dans K_Φ (i.e. par rapport à S^1) de support $S_{\alpha_0} \cup \{i_1\}$; et, en supposant construite $\alpha_{n-1} \in K_\Phi$, une racine imaginaire α_n dans K_Φ de support $S_{\alpha_{n-1}} \cup \{i_n\}$ et enfin $\alpha_{n+1} := \beta$. A chaque rang, de telles racines existent puisque le support de α_0 n'est pas de type fini.

Les supports des éléments consécutifs α_i et α_{i+1} ne sont pas disjoints et dans chaque paire de ce type, un des deux éléments au moins est dans K_Φ .

Si on montre que α_i et α_{i+1} sont liés ou reliables, on aura le résultat pour α et β .

Si les supports de α et β ne sont pas disjoints, nous intercalons entre $\alpha_0 := \alpha$ et $\alpha_2 := \beta$ une racine notée α_1 de support celui de α et qui soit dans K_Φ , ce qui permet de raisonner de la même façon.

On peut donc supposer les supports de α et β non disjoints et α située dans K_Φ .

Si $\langle \beta, \alpha^\wedge \rangle < 0$ et $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$, alors $\beta + \mathbb{N}\alpha \subset \Delta$. Comme on a aussi $\langle \alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$ et $\langle \beta, \beta^\wedge \rangle \leq 0$, on obtient de même, $\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta \subset \Delta$.

Sinon, $\langle \beta, \alpha^\wedge \rangle = 0$ implique, puisque les deux supports ne sont pas disjoints, une relation d'inclusion entre eux ; et plus exactement, $S_\beta \subset Z_\alpha$. Or, le support de S_β n'est pas de type fini, donc, d'après 3.1.1, $S_\alpha = S_\beta$ est de type affine. Ceci implique $\beta \in \mathbb{Q}_+\alpha$; d'où à nouveau $\alpha \mathfrak{R} \beta$.

Ainsi, toutes les racines imaginaires positives sont dans la même classe.

Reste à montrer que deux racines imaginaires de signe opposé (disons $\alpha \in \Delta_{+, \Phi}$ et $\beta \in \Delta_{-, \Phi}$), ne sont pas dans la même classe d'équivalence.

Pour cela, considérons x une forme linéaire sur V vérifiant l'hypothèse (BN) (i.e. une hauteur), alors on a $x(\alpha) > (3\varepsilon/4)$ et $x(\beta) < -(3\varepsilon/4)$. Comme $-x(\alpha)/x(\beta) \in \mathbb{R}_+^*$, il existe, d'après le théorème de Dirichlet, des entiers strictement positifs p et q tels que : $|q(-x(\alpha)/x(\beta)) - p| < (3\varepsilon/4)/(-x(\beta))$ donc $|qx(\alpha) + px(\beta)| < (3\varepsilon/4)$ ce qui implique $px + q\beta \notin \Delta$. Les racines α et β ne sont donc pas reliables. \square

Corollaire 5.2.8 — Si Δ est à base indécomposable, deux cas sont possibles :

$$\begin{aligned} \Delta_+^{\text{im}}(S^1) &= \Delta_+^{\text{im}}(S) ; \\ \text{ou } \Delta_+^{\text{im}}(S^1) &= \Delta_-^{\text{im}}(S). \end{aligned}$$

Remarque. Sous l'hypothèse (BN), si $\Delta_+^{\text{im}}(S)$ et Π_{re} sont connus, on sait déterminer de façon unique l'ensemble $\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i$ pour lequel le système est normalisé (cf. 4.3.11), et par suite, les éléments de Π pour lesquels N_i admet un plus petit élément (en particulier, toutes les racines simples non affines).

Théorème 5.2.9 — On suppose l'hypothèse (BN) vérifiée par S et S^1 . Supposons Δ à base (Π ou Φ) indécomposable, alors il existe $w \in W$ tel que $\Delta_+(\Pi) = \pm w \Delta_+(\Phi)$.

Si de plus, S et S^1 sont normalisés, alors $\Pi \approx w \cdot \Phi$ ou $\Pi \approx -w \cdot \Phi$, où la relation d'équivalence \approx entre deux bases signifie que l'identité de V est un isomorphisme des deux S.G.R., autrement dit, $\alpha_i = \alpha_i^1$ sauf éventuellement dans le cas N_i sans plus petit élément auquel cas, on a seulement $N_i \alpha_i = N_i^1 \alpha_i^1$ (avec toujours les mêmes conditions sur les N_i).

Démonstration. Quitte à changer Φ en $-\Phi$, on peut supposer que $\Delta_+^{\text{im}}(S^1) = \Delta_+^{\text{im}}(S)$.

Soient $\Pi_{\text{re}} = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_s$ la décomposition de Π_{re} en composantes indécomposables de Π_{re} et $\Phi_{\text{re}} = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_s$ la décomposition correspondante de Φ_{re} (cf. 5.2). Le groupe de Weyl \mathbb{W} se décompose en produit direct $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 \times \dots \times \mathbb{W}_s$. Pour tout j de 1 à s , il existe un élément $w_j \in W_j$ tel que $w_j \cdot \Phi_j = \pm \Pi_j$ et si Π_j est de type fini tel que $w_j \cdot \Phi_j = \Pi_j$ (5.2.4). Si Π_j n'est pas de type fini, $\emptyset \neq w_j \cdot \Delta(\Phi_j)_+^{\text{im}} \subset \Delta(\Pi_j) \cap \Delta_+^{\text{im}}(S) = \Delta(\Pi_j)_{\text{im}+}$ donc en fait, $w_j \cdot \Phi_j = \Pi_j$. Ainsi, si $w = \prod_{j=1}^{j=s} w_j$, alors $w \in W$ et $w \cdot \Phi_{\text{re}} = \Pi_{\text{re}}$.

On a ainsi (à w près) $\Delta_+^{\text{re}}(S^1) = \Delta_+^{\text{re}}(S)$, $\Delta_+(S^1) = \Delta_+(S)$ et on termine grâce à 4.3.11. □

Remarque. La généralisation des résultats de ce 5.2 sous les hypothèses de 4.4.5 est immédiate.

6. Quotients d'un système générateur de racines

Une structure étant donnée, il est naturel de se demander quelles relations d'équivalence laissent une structure analogue sur le quotient.

Pour les systèmes de racines, on peut envisager deux relations : l'une attachée à un groupe fini d'automorphismes (dits de diagramme), l'autre à une partie de type fini de l'ensemble d'indices du S.G.R.

Les méthodes de démonstration de la persistance de la structure sont les mêmes, bien que les difficultés ne soient pas nécessairement situées au même point :

- construction d'invariants dans le S.G.R. par moyennisation,
- vérification de la compatibilité de la relation d'équivalence aux notions usuelles : revêtement, groupe de Weyl ...
- preuve assez facile pour la partie réelle du système,
- preuve plus technique pour le système tout entier avec vérification préalable des conditions de chaînes.

Finalement, on obtient un S.G.R. « quotient » à partir des invariants construits.

Notations générales

Considérons un S.G.R. $S = (A, V, V^\wedge, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\wedge, (N_i)_{i \in I})$ sur \mathbf{K} (où $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$ ou un corps de caractéristique nulle) ; nous supposons la condition (B) de 5.1.14 vérifiée dans chacun des deux derniers paragraphes de 6.1 et de 6.2.

Dans la suite, les coracines des éléments de Δ sont supposées choisies de façon compatible à l'action de W (identifié à \mathbb{W}), ceci est possible d'après la remarque 4.3.7 (si la condition (Z) est satisfaite, nous les choisissons de plus dans Q^\wedge).

6.1 Quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme

Automorphismes de diagramme

Un *automorphisme de diagramme* de S (ou de $\Delta(S)$) est un couple (ϕ, ϕ^\wedge) de $GL(V) \times GL(V^\wedge)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(AD1) \quad \forall (v, v^\wedge) \in V \times V^\wedge, \langle \phi(v), \phi^\wedge(v^\wedge) \rangle = \langle v, v^\wedge \rangle ;$$

$$(AD2) \quad \forall (i, j) \in I^2, \langle \phi(\alpha_i), (\phi(\alpha_j))^\wedge \rangle \text{ et } \langle \alpha_i, \alpha_j^\wedge \rangle \text{ sont de même signe au sens strict ;}$$

$$(AD3) \quad \phi \text{ stabilise } (\bigcup_{i \in I} N_i \alpha_i) \text{ et } \phi^\wedge \text{ stabilise } \Pi_{\text{re}}^\wedge.$$

Un tel automorphisme est dit *compatible à la matrice* A si, de plus, pour tout couple (i, j) d'éléments de I , $\langle \phi(\alpha_i), (\phi(\alpha_j))^\wedge \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j^\wedge \rangle$.

Remarques. 1. Si $V^\wedge = V^*$, ou plus généralement si la dualité entre V et V^\wedge est non dégénérée, alors un automorphisme compatible à A est bien déterminé par la connaissance de ϕ , et alors $\phi^\wedge = {}^t\phi^{-1}$ (cf. 6.1.2).

2. Pour un S.G.R. donné, on note $Diag(S)$ le groupe des automorphismes de diagramme de S , et $Diag_A(S)$ le sous-groupe de ceux qui sont compatibles à A .

3. Si (ϕ, ϕ^\wedge) est un automorphisme de diagramme tel que ${}^t\phi^{-1} = \phi^\wedge$, alors ϕ est un automorphisme du système générateur de racines (cf. 6.1.1 pour (M3)).

4. Comme ϕ stabilise l'ensemble des droites $\mathbf{K}\alpha_i$ qui sont deux à deux distinctes, on peut définir une permutation sur l'ensemble des indices I , encore notée ϕ , par $\phi(i) := j$ si $\phi(\alpha_i) = \lambda\alpha_j$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ (en fait, $\lambda = 1$ sauf peut-être si N_i et/ou N_j n'ont pas de plus petit élément). On obtient ainsi un homomorphisme $num : Diag(S) \rightarrow \mathfrak{S}(I)$.

Proposition 6.1.1 — *Soit ϕ un automorphisme de diagramme de S .*

1. *Pour tout indice $i \in I_{\text{re}}$, $\phi(\alpha_i) \in \Pi_{\text{re}}$ et $(\phi(\alpha_i))^\wedge = \phi^\wedge(\alpha_i^\wedge)$.*

2. *L'automorphisme ϕ normalise les images du groupe de Weyl par τ dans $GL(V)$ et par τ^\wedge dans $GL(V^\wedge)$.*

3. *L'action de ϕ sur I stabilise I_1, I_2, I_0, I_- . De plus, pour tout couple $(i, j) \in I^2$, l'égalité $\phi(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_j$ implique $\lambda_i N_i = N_j$; ce nombre λ_i est égal à 1 dès que N_i a un plus petit élément.*

4. *L'automorphisme ϕ stabilise K' (l'image de \tilde{K}' par Ψ), et donc $\Delta^{\text{re}}, \Delta_+^{\text{im}}, \Delta_-^{\text{im}}$.*

Démonstration. D'après (AD3), l'image d'une racine simple α_i est une racine simple (à une constante près si N_i n'a pas de plus petit élément). (AD2) et (AD3) permettent d'affirmer que ϕ conserve le type d'une racine simple, c'est-à-dire stabilise I_1, I_2, I_0, I_- . L'automorphisme ϕ^\wedge stabilise Π_{re}^\wedge donc, si $i \in I_{\text{re}}$, $\phi^\wedge(\alpha_i^\wedge) \in$

Π_{re}^\wedge et par (AD1), $\langle \phi(\alpha_i), \phi^\wedge(\alpha_i^\wedge) \rangle > 0$ d'où nécessairement $\phi^\wedge(\alpha_i^\wedge) = (\phi(\alpha_i))^\wedge$. Pour tout $i \in I_{\text{re}}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi \circ \tau(r_i) \circ \phi^{-1} &= \tau(r_{\phi(i)}) \text{ et de même,} \\ \phi^\wedge \circ r_i^\wedge \circ \phi^{\wedge-1}(\alpha_j^\wedge) &= \alpha_j^\wedge - \langle \alpha_i, \phi^{\wedge-1}(\alpha_j^\wedge) \rangle \phi^\wedge(\alpha_i^\vee); \\ &= \alpha_j^\wedge - \langle \phi(\alpha_i), \alpha_j^\wedge \rangle (\phi(\alpha_i))^\vee; \\ &= r_{\phi(\alpha_i)}^\wedge(\alpha_j^\wedge) \end{aligned}$$

Ainsi, ϕ normalise les actions du groupe de Weyl sur V et V^\wedge . Pour montrer la stabilité de K' , il suffit de voir que les propriétés caractéristiques de ses éléments (avoir une « bonne décomposition » à support connexe non réduit à un point et avoir son opposé dans la chambre fondamentale) sont conservées par ϕ . Les autres assertions de cette proposition sont alors évidentes. \square

Proposition 6.1.2 — *Supposons Π et Π^\wedge libres dans V^\wedge et V et $\mathbf{K} \neq \mathbb{Z}$.*

Soit Γ un groupe fini de permutations de I tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout couple d'éléments i et j de I , on ait $a_{\gamma(i), \gamma(j)} = a_{ij}$ et $N_{\gamma(i)} = N_i$.

On peut alors construire un homomorphisme (injectif) r de Γ dans $\text{Diag}_A(S)$ tel que : $\text{num} \circ r = \text{Id}$ et que les actions de Γ sur V^\wedge et V ainsi définies stabilisent Π et Π^\wedge .

Démonstration. Posons $r(\gamma) = (\gamma, \gamma^\wedge)$ et cherchons les actions de Γ sur V et V^\wedge . Pour $i \in I$ et $\gamma \in \Gamma$, posons $\gamma(\alpha_i) := \alpha_{\gamma(i)}$ et $\gamma^\wedge(\alpha_i^\wedge) := \alpha^\wedge_{\gamma(i)}$. Ainsi définies, les actions de Γ sur $Q_{\mathbf{K}}$ et $Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ sont compatibles avec la dualité.

Considérons le sous-espace de V^\wedge , $c := \{v^\wedge \in V^\wedge / \langle \alpha_i, v^\wedge \rangle = 0 \ (\forall i \in I)\}$. Il est clair que Γ agit comme un groupe fini d'automorphismes de $Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ qui stabilise $c \cap Q_{\mathbf{K}}^\wedge$. Celui-ci a donc un supplémentaire Q_1 dans $Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ stable par Γ . Soit c_1 un supplémentaire de $c \cap Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ dans c . Fixons finalement un supplémentaire V_1 de $Q_{\mathbf{K}}^\wedge$ dans V^\wedge contenant c_1 . Posons $V_2 = V_1 \oplus Q_1$, alors $c \cap V_2 = c_1$ et $c_1 \cap Q_1 = \{0\}$. Dans V_1 , choisissons un supplémentaire noté V_3 de c_1 , alors $V_3 \oplus Q_1$ est un supplémentaire de c dans V^\wedge . Pour obtenir (AD1), on peut déduire par dualité non dégénérée avec Q une action de Γ sur V_3 (supposé stable). Choisissons n'importe quelle action de Γ sur c_1 (par exemple la triviale) ; nous avons ainsi défini l'action de Γ sur V^\wedge . Pour déterminer son action sur V , on procède de la même façon mais en considérant $\mathfrak{d} := \{v \in V / \langle v, v^\wedge \rangle = 0 \ (\forall v^\wedge \in V^\wedge)\}$. Les axiomes (AD1), (AD2), (AD3) sont clairement vérifiés. \square

Action d'un groupe fini d'automorphismes de diagramme

Soit Γ un sous-groupe fini de $\text{Diag}_A(S)$ (on note $\gamma = (\gamma, \gamma^\wedge)$ un élément de Γ). Pour simplifier les énoncés dans la suite, Π est supposée stable par Γ . On peut

toujours se ramener à ce cas en modifiant les α_i pour lesquels N_i n'a pas de plus petit élément (cela est possible car si $\gamma.\alpha_i = \lambda\alpha_i$, on a $\lambda N_i = N_i$ ce qui implique $\lambda = 1$).

On se propose d'étudier $\bar{\Delta} := \{\bar{\alpha} := (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\alpha ; \alpha \in \Delta\}$ (contenu dans V si \mathbf{K} est un corps, dans $V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$), et de montrer qu'il existe un système générateur de racines dont le système de racines est $\bar{\Delta}$ et dont les modules sont : $V_{\Gamma} := \{\bar{v} := (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.v ; v \in V\}$ (qui coïncide avec V^{Γ} si \mathbf{K} est un corps), $V_{\Gamma}^{\wedge} := (V^{\wedge})^{\Gamma}$, et pour lequel la dualité est celle déduite de la précédente (ou sa restriction à $(V^{\Gamma} \times (V^{\wedge})^{\Gamma})$ si \mathbf{K} est un corps).

Le lemme suivant donne une interprétation légèrement différente de ces notions :

Lemme 6.1.3 — *On suppose la dualité non dégénérée. Soit ρ l'application \mathbf{K} -linéaire de V dans le dual $(V_{\Gamma}^{\wedge})^*$ déduite de la dualité ; (si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$, on considère également l'application \mathbb{Q} -linéaire encore notée ρ de $V \otimes \mathbb{Q}$ dans $(V_{\Gamma}^{\wedge})^* \otimes \mathbb{Q}$). Alors :*

- (a) pour tout élément v de V , $\rho(v) = \rho(\bar{v})$;
- (b) l'application ρ est injective sur V_{Γ} .

Ainsi, on peut identifier V_{Γ} avec $\rho(V)$ de façon que \bar{v} corresponde à $\rho(v)$ et que la dualité entre V_{Γ} et V_{Γ}^{\wedge} ait son image dans \mathbf{K} et soit non dégénérée.

Remarque. Ce lemme n'est plus vrai si Γ n'est pas compatible à A .

Démonstration. Soient $x \in V^{\wedge}$ et $v \in V$, on a :

$$\langle \bar{v}, x \rangle = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \gamma.v, x \rangle = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle v, \gamma^{-1}.x \rangle.$$

- (a) Si $x \in V_{\Gamma}^{\wedge}$, alors $\langle \bar{v}, x \rangle = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle v, x \rangle = \langle v, x \rangle$ donc $\rho(v) = \rho(\bar{v})$.
- (b) Si $\rho(\bar{v}) = 0$, alors pour tout $x \in V^{\wedge}$, on a $\langle \bar{v}, x \rangle = (1/|\Gamma|) \langle v, \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}.x \rangle = 0$ car $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-1}.x$ est dans V_{Γ}^{\wedge} , et donc par dualité non dégénérée, $\bar{v} = 0$. \square

Premières définitions

Pour tout $\alpha \in V$, posons :

$$\bar{\alpha} := (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\alpha \text{ et ;}$$

$$\bar{\Pi} := (\bar{\alpha})_{\alpha \in \Pi} ;$$

$$\bar{Q} = Q_{\Gamma} := \{\bar{\alpha} ; \alpha \in Q\} \subset V_{\Gamma} ;$$

$$\bar{R} = R_{\Gamma} := \{\bar{\alpha} ; \alpha \in R\} \text{ le } \mathbb{Z}\text{-module engendré par } \bar{\Delta} := \{\bar{\alpha} \neq 0 ; \alpha \in \Delta\} ;$$

$$\bar{Q}^{\wedge} = Q_{\Gamma}^{\wedge} := \{\bar{\alpha}^{\wedge} := \sum_{\beta^{\wedge} \in \Gamma.\alpha^{\wedge}} \beta^{\wedge} ; \alpha^{\wedge} \in Q^{\wedge}\} \subset (Q^{\wedge})^{\Gamma}.$$

Il est clair que $\bar{\alpha}_i$ (resp. N_i , resp. $\bar{\alpha}_i^{\wedge}$) ne dépend pas du choix de l'indice dans l'orbite de i sous l'action de Γ , c'est pourquoi on le note $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ (resp. $N_{\bar{i}}$, resp. $\bar{\alpha}_{\bar{i}}^{\wedge}$) si $\bar{i} := \Gamma i$. On a alors $\bar{Q} = \sum_{\bar{i} \in I/\Gamma} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ et $Q_{\Gamma}^{\wedge} = \sum_{\bar{i} \in I/\Gamma} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_{\bar{i}}^{\wedge}$. L'indice + signifie

toujours qu'on ne considère que les combinaisons à coefficients positifs. Dans la suite, on note $\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}} := \langle \bar{\alpha}_{\bar{j}}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle$, pour \bar{i} et \bar{j} dans I/Γ . Pour une partie J de I stable sous l'action de Γ , on note $\bar{\Delta}(J)$, $\bar{Q}(J)$ etc... les ensembles associés comme précédemment à $\Delta(J)$.

On a alors facilement la propriété analogue à (SR1b) :

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \cup \bar{\Delta}_- \text{ où } \bar{\Delta}_+ := \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_+, \bar{\Delta}_- := \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_-, \text{ avec } \bar{\Delta}_- = -\bar{\Delta}_+.$$

Soient $(v, v^\wedge) \in V \times V^\wedge$, on note $\bar{v}^\wedge := \sum_{u^\wedge \in \Gamma.v^\wedge} u^\wedge \in V_\Gamma^\wedge$, alors : $\langle \bar{v}, \bar{v}^\wedge \rangle = \langle v, \bar{v}^\wedge \rangle = |\Gamma.v^\wedge| \langle v, v^\wedge \rangle$. En particulier, $\langle \bar{v}, \bar{v}^\wedge \rangle, \langle v, \bar{v}^\wedge \rangle$ et $\langle \bar{v}, v^\wedge \rangle$ sont de même signe au sens strict. De plus, quand $v \in R$ et $v^\wedge \in Q^\wedge$, ces scalaires sont dans \mathbb{Q} (et même dans \mathbb{Z} si le S.G.R. S vérifie la condition (Z) car les α^\wedge sont alors choisis dans Q^\wedge).

Les orbites sous l'action de Γ dans I

On déduit facilement la classification suivante des orbites de la classification des matrices de Kac-Moody relatives de type fini ou affine faite en 2.1.

Une orbite $\bar{i} = \Gamma i$ pour $i \in I$ est de type fini si et seulement si elle est formée de composantes connexes (toutes identiques) du type :

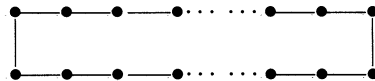
- A_1 • on a $\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 2, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}} \notin \bar{\Delta}(\bar{i})$ et l'orbite est alors dite de type 1.
- BC_1 •[×] on a $\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 1, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}} \in \bar{\Delta}(\bar{i})$ et l'orbite est alors dite de type 2.
- A_2 •——• on a $\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 1, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}} \in \bar{\Delta}(\bar{i})$ A_2 et l'orbite est alors dite de type 3.

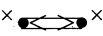
On note \bar{I}_{re} l'ensemble des orbites de type fini, et plus précisément \bar{I}_1 (resp. \bar{I}_2) l'ensemble des orbites de type 1 (resp. de types 2 ou 3).

Une orbite \bar{i} est de type affine (et on note $\bar{i} \in \bar{I}_0$) si et seulement si ses composantes connexes (toutes identiques) sont du type :

\tilde{A}_1 (ou $A_1^{(1)}$) : 

\tilde{A}_n (ou $A_n^{(1)}$) pour $n \geq 2$:



$\tilde{A}_1^{\times \times}$ (ou $A_1^{(1)\times \times}$) : 

$Z_0^{(1)}$ (type affine imaginaire) : •₀

Dans chacun des trois premiers cas, on a $\bar{\Delta}(\bar{i}) \cap \mathbb{Q}_+ \bar{\alpha}_{\bar{i}} = \mathbb{N} \bar{\alpha}_{\bar{i}}$, dans le dernier $N_i \bar{\alpha}_{\bar{i}} \subset \bar{\Delta}(\bar{i}) \cap \mathbb{Q}_+ \bar{\alpha}_{\bar{i}}$ avec égalité si (SGRN) est vérifié.

Toute autre orbite est de type indéfini, et on note \bar{I}_- l'ensemble de ces orbites. On pose $\bar{I}_{\text{im}} = \bar{I}_0 \cup \bar{I}_-$.

Action de Γ sur le groupe de Weyl

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $i \in I_{\text{re}}$, posons $\gamma.r_i := r_{\gamma(i)}$. Nous définissons ainsi une action de Γ sur W . D'après 6.1.1, l'automorphisme $\gamma.r_i$ agit comme $\gamma \circ r_i \circ \gamma^{-1}$ sur V et comme $\gamma^\wedge \circ r_i^\wedge \circ (\gamma^\wedge)^{-1}$ sur V^\wedge .

Pour tout $\bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}}$, on note $R_{\bar{i}}$, l'élément le plus long du groupe $W(\bar{i})$, on a ainsi :

- si \bar{i} est de type 1 ou 2, $R_{\bar{i}}$ est le produit (commutatif) des r_j pour tous les éléments j de l'orbite \bar{i} .
- si \bar{i} est de type 3, $R_{\bar{i}}$ est le produit (commutatif) des éléments les plus longs de chaque composante connexe de l'orbite, c'est-à-dire aussi le produit des réflexions par rapport aux plus grandes racines positives des systèmes de racines correspondant aux composantes connexes de \bar{i} . En fait, si $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_k, j_k\}$ sont les composantes connexes de \bar{i} , alors $R_{\bar{i}}$ est le produit commutatif des éléments $r_{i_l} r_{j_l} r_{i_l}$ pour $l = 1, \dots, k$.

L'élément $R_{\bar{i}}$ reste fixe sous l'action de Γ , son action sur V ou sur V^\wedge commute donc à celle de Γ . Par suite, cet élément du groupe de Weyl stabilise Q_Γ et R_Γ et c'est une involution. Par ailleurs, on a clairement $R_{\bar{i}}(\bar{\alpha}_{\bar{i}}) = -\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ et $R_{\bar{i}}(\bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge) = -\bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge$.

Lien avec le revêtement

Considérons un revêtement libre \tilde{S} . D'après 6.1.2, il existe une action de Γ sur \tilde{S} par des automorphismes de diagramme compatibles à A , stabilisant $\tilde{\Pi}^\wedge$ et $\tilde{\Pi}$ et induisant la même action de Γ sur I . L'application Ψ (resp. Ψ^\wedge) est alors Γ -équivariante et commute donc à l'application $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ (resp. à l'application $\alpha^\wedge \mapsto \bar{\alpha}^\wedge$ à des constantes strictement positives près, égales à un pour les racines réelles). En particulier, $\Psi(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta}$ et $\Psi(\bar{\alpha}_{\bar{i}}) = \bar{\alpha}_{\bar{i}}$.

Dans le revêtement \tilde{V}_Γ , il est clair que la famille $(\bar{\alpha}_{\bar{i}})_{\bar{i} \in \bar{I}}$ est libre.

Proposition 6.1.4 — *Le \mathbf{K} -module V_Γ (resp. $(V^\wedge)^\Gamma = V_\Gamma^\wedge$) est libre (resp. sans torsion).*

Pour \bar{i} de type fini, $R_{\bar{i}}$ induit dans V_Γ^\wedge (resp. dans V_Γ) une réflexion par rapport à l'hyperplan $\{v^\wedge \in (V^\wedge)^\Gamma ; \langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, v^\wedge \rangle = 0\}$ de V_Γ^\wedge (resp. $\{v \in V_\Gamma ; \langle v, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle = 0\}$ de V_Γ).

Plus précisément, pour tout $v \in V_\Gamma$, ; on a $R_{\bar{i}}(v) = v - \langle v, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\vee \rangle \bar{\alpha}_{\bar{i}}$ où la coracine

de $\bar{\alpha}_i$ est définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i^\vee &= \bar{\alpha}_i^\wedge && \text{si l'orbite est de type 1} \\ &= 2\bar{\alpha}_i^\wedge && \text{sinon.} \end{aligned}$$

De même, pour $x \in (V^\wedge)^\Gamma = V_\Gamma^\wedge$, on a $R_{\bar{i}}(x) = x - \langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, v^\wedge \rangle \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\vee$.

Démonstration. En effet, V_Γ est un \mathbf{K} -module libre même si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$ car V_Γ est isomorphe à $|\Gamma|V_\Gamma \subset V^\Gamma \subset V$; de même V_Γ^\wedge , contenu dans V^\wedge , est un \mathbf{K} -module sans torsion.

Montrons que, pour tout v dans V_Γ , $R_{\bar{i}}(v) - v \in \mathbf{K}\bar{\alpha}_{\bar{i}}$. On sait que $R_{\bar{i}} \in W(\bar{i})$ et on peut donc affirmer que $R_{\bar{i}}(v) - v \in Q_{\mathbf{K}}(\bar{i})$ pour tout élément v de V et que $R_{\bar{i}}$ stabilise $Q_{\mathbf{K}}(\bar{i})$. Mais comme l'action sur V de $R_{\bar{i}}$ et celle de Γ commutent, $R_{\bar{i}}(v) - v \in (Q_{\mathbf{K}}(\bar{i}))^\Gamma = \mathbf{K}\bar{\alpha}_{\bar{i}}$. D'autre part, $R_{\bar{i}}$ fixe l'hyperplan indiqué et comme $R_{\bar{i}}$ est d'ordre deux, il suffit de vérifier (ce qui est facile) que $\langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\vee \rangle = 2$. L'assertion concernant l'action $R_{\bar{i}}$ sur V_Γ^\wedge se démontre de façon analogue. \square

On note $\bar{I} := I/\Gamma$ et $\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}} = \langle \bar{\alpha}_{\bar{j}}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle$ pour tout couple $(\bar{i}, \bar{j}) \in \bar{I}^2$. Enfin, on définit la matrice $\bar{A} := \left(\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}} \right)_{(\bar{i}, \bar{j}) \in \bar{I}^2}$.

Proposition 6.1.5 — *La matrice \bar{A} est une matrice de Borchers relative à coefficients dans \mathbb{Q} et la partition de \bar{I} correspondante est $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I}_-$.*

Notons que pour \bar{i} et \bar{j} deux éléments distincts de \bar{I} , $\langle \bar{\alpha}_{\bar{j}}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle = 0$ si et seulement si les deux orbites correspondantes ne sont pas liées dans I .

Si le S.G.R. S vérifie la condition (Z), alors \bar{A} est à coefficients dans \mathbb{Z} (c'est-à-dire est une matrice de Kac-Moody relative).

Démonstration. Il est clair que le coefficient $\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}}$ est dans \mathbb{Q} (resp. \mathbb{Z} si S vérifie (Z) ou si $i \in I_{re}$) et que pour $\bar{i} \in \bar{I}_{re}$,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 1 &\iff \mathbb{Q}_+\alpha \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}_{\bar{i}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}}\}; \\ \bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 2 &\iff \mathbb{Q}_+\alpha \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}_{\bar{i}}\}. \end{aligned}$$

Si $\bar{i} \in \bar{I}_0$, alors $\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} = 0$. Ceci est évident dans le cas où les composantes connexes de \bar{i} sont de type affines imaginaires. Dans les cas affines réels, $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ est en fait proportionnelle à la somme de racines imaginaires de chaque composante connexe et donc $\langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \alpha_j^\wedge \rangle = 0$ pour tout $j \in \bar{i}$.

Enfin, si $\bar{i} \in \bar{I}_-$, on a $\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} < 0$. En effet, l'orbite étant de type indéfini, il existe dans $\tilde{Q}(\bar{i})$ un élément $\tilde{\alpha}$ de coordonnées toutes strictement positives et tel que pour tout $j \in \bar{i}$, on ait $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$. Son image α dans Q appartient à Δ et $\bar{\alpha}$ est dans $\mathbf{K}_+\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ et vérifie évidemment $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle < 0$.

Si $\bar{i} \neq \bar{j}$, les orbites sont disjointes, d'où $\langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \bar{\alpha}_{\bar{j}}^\wedge \rangle = \langle \alpha_i, \bar{\alpha}_j^\wedge \rangle \leq 0$. De plus, ce scalaire est nul si et seulement si les deux orbites ne sont pas liées (c'est-à-dire si pour tout $(i, j) \in \bar{i} \times \bar{j}$, $a_{ij} = a_{ji} = 0$), alors on a bien $\langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \bar{\alpha}_{\bar{j}}^\wedge \rangle = 0 \iff \langle \bar{\alpha}_{\bar{j}}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle = 0$. \square

On note $\bar{\Pi}_{\text{re}}$ l'ensemble des $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ où \bar{i} est une orbite de type fini (et non l'ensemble des $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ pour $\bar{i} \subset I_{\text{re}}$). Si $\bar{\alpha} \in \bar{\Pi}_{\text{re}}$, on note $\bar{N}(\bar{\alpha}) = \{1\}$ si $2\bar{\alpha} \notin \bar{\Delta}$ et $\bar{N}(\bar{\alpha}) = \{1, 2\}$ si $2\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}$.

Proposition 6.1.6 — Soit $(\bar{\Delta})^{\text{re}}$ le sous-ensemble des racines $\bar{\alpha}$ de $\bar{\Delta}$ pour lesquelles il existe dans W^Γ un élément noté $R_{\bar{\alpha}}$ induisant dans V_Γ^\wedge une réflexion par rapport à l'hyperplan de $(V^\wedge)^* : H_{\bar{\alpha}} = \{v^\wedge \in V_\Gamma^\wedge ; \langle \bar{\alpha}, v^\wedge \rangle = 0\}$.

Le 7-uplet $\bar{S}_{\text{re}} := (\bar{A}_{\text{re}}, V_\Gamma, (V^\wedge)^\Gamma, \langle, \rangle, (\bar{\alpha}_i)_{i \in \bar{I}_{\text{re}}}, (\bar{\alpha}_i^\wedge)_{i \in \bar{I}_{\text{re}}}, (\bar{N}(\bar{\alpha}))_{\{\bar{\alpha} \in \bar{\Pi}_{\text{re}}\}})$ est un S.G.R. sans racine simple imaginaire. Il admet pour système de racines réelles $\Delta^{\text{re}}(\bar{S}_{\text{re}}) = \bar{\Delta}^{\text{re}}$ et son groupe de Weyl est le sous-groupe $\bar{W} := W^\Gamma$ des éléments de W fixes sous l'action de Γ , c'est aussi le sous-groupe de W engendré par les $R_{\bar{i}}$ pour $\bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}}$.

Remarque. J.-Y. Hée [Hée 1 ; n° 3 9] caractérise les éléments de $\bar{\Delta}^{\text{re}}$ comme les racines $\bar{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ dont l'orbite sous Γ est « prénilpotente ».

Démonstration. Considérons l'action de Γ sur le S.G.R. $T = (A(J), V, V^\wedge, \langle, \rangle, (\alpha_i)_{i \in J}, (\alpha_i^\wedge)_{i \in J})$, où J est la réunion des Γ -orbites de type fini. La matrice correspondante $\bar{A}(J)$ est la sous-matrice principale extraite de \bar{A} en ne conservant que les lignes et colonnes indexées par les \bar{i} tels que $\bar{\alpha}_{\bar{i}} > 0$.

Le résultat important d'égalité des sous-groupes W^Γ et $\langle R_{\bar{i}} ; \bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}} \rangle$ a été établi par Hée, (cf. [Hée 1 ; n° 3 7]). Par suite, le groupe de Weyl de ce système de racines est W^Γ , et le résultat annoncé est évident. \square

Propriétés de $\bar{\Delta}$, conditions de chaînes

Lorsque $\bar{i} \in \bar{I}$ n'est pas de type fini, posons :

$$M''_{\bar{i}} = \{n \in \mathbb{Q}_+ / \exists \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}(\bar{i}), \text{ de hauteur } n\}$$

et $M'_{\bar{i}}$ la plus petite partie de \mathbb{Q}_+ contenant $M''_{\bar{i}}$ et stable par l'addition.

Proposition 6.1.7 — (a) Soient \bar{i} une orbite de type fini (i.e. $\bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}}$) et $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \{\bar{\alpha}_{\bar{i}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}}\}$.

La $(\bar{\alpha}_{\bar{i}})$ -chaîne $\{\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \pm \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \dots, R_{\bar{i}}(\bar{\alpha})\}$ est incluse dans $\bar{\Delta}_+$.

(b) Soient $\bar{i} \in \bar{I}_{\text{im}}$ et $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \bar{\alpha}_{\bar{i}}$, si $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle < 0$, alors $\bar{\alpha} + M'_i \bar{\alpha}_{\bar{i}} \subset \bar{\Delta}_+$.

Démonstration. (a) Considérons $\bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}}$ et $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \{\bar{\alpha}_{\bar{i}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{i}}\}$, il existe une racine positive α dans Δ telle que $\bar{\alpha} = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \alpha$. Le support de α n'est pas inclus dans \bar{i} et donc $W(\bar{i}) \cdot \alpha \subset \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}_+} \setminus \mathcal{Q}_{\mathbb{Q}}(\bar{i})$.

Supposons \bar{i} de type 1 ou 2, alors $R_{\bar{i}}$ est le produit commutatif des r_j pour tous les points j de l'orbite \bar{i} . Si $R_{\bar{i}} = r_{i_1} \dots r_{i_n}$; on pose $\beta_{j_s} := r_{i_s} \dots r_{i_n}(\alpha)$ pour tout s entre 1 et n . D'après la propriété (SR3b) de Δ , il existe dans Δ une chaîne de direction α_{j_s} entre β_{j_s} et $\beta_{j_{s-1}}$ qui par « projection » (i.e. par $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$) donne dans $\bar{\Delta}$ une chaîne de direction $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ entre β_{j_s} et $\beta_{j_{s-1}}$. La projection de toutes ces chaînes donne donc une $(\bar{\alpha}_{\bar{i}})$ -chaîne contenant $\bar{\alpha}$ et son image par $R_{\bar{i}}$ (qui dépasse peut-être $[\bar{\alpha}, R_{\bar{i}}(\bar{\alpha})]$) contenue dans $\bar{\Delta}$.

Si l'orbite est de type 3, on note J_1, \dots, J_n ses différentes composantes connexes $J_s = \{i_s, j_s\}$ alors $R_{\bar{i}}$ est le produit commutatif des $r_{\alpha_{i_s} + \alpha_{j_s}} = r_{i_s} r_{j_s} r_{i_s}$ pour $s \in \{1, \dots, n\}$. On note $\beta_s := r_{\alpha_{i_s} + \alpha_{j_s}} \dots r_{\alpha_{i_n} + \alpha_{j_n}}(\alpha)$. Dans Δ , on a une α_{j_s} -chaîne de $r_{i_s}(\beta_{s+1})$ à $r_{j_s} r_{i_s}(\beta_{s+1})$ et des α_{i_s} -chaînes de β_s à $r_{i_s}(\beta_{s+1})$ et de $r_{j_s} r_{i_s}(\beta_{s+1})$ à $r_{i_q} r_{j_s} r_{i_s}(\beta_{s+1})$, qui donnent « par projection » une $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ chaîne de $\bar{\beta}_{s+1}$ à $\bar{\beta}_s$. La réunion de toutes ces chaînes donne donc par projection une $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ -chaîne (éventuellement trop longue) qui contient $\bar{\alpha}$ et son image par $R_{\bar{i}}$.

(b) Soient à présent \bar{i} une orbite de type affine ou indéfini, $\bar{\alpha}$ un élément de $\bar{\Delta}$ non \mathbb{Q} -proportionnel à $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$, un élément m de $M''_{\bar{i}}$, une racine $\bar{\beta} \in \bar{\Delta}(\bar{i})$ de hauteur m et β son image dans Δ . La condition $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge \rangle < 0$ équivaut à $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}^\wedge \rangle < 0$ et donc à $\langle \bar{\alpha}, \beta^\wedge \rangle < 0$. Elle implique, par définition de $\bar{\alpha}$, l'existence d'au moins un élément γ de Γ tel que $\langle \gamma.\alpha, \beta^\wedge \rangle < 0$ (α désigne toujours une racine telle que $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\alpha = \bar{\alpha}$). Mais alors, d'après la remarque 4.3.4, $\gamma.\alpha + \beta \in \Delta$ et donc, $\bar{\alpha} + \bar{\beta} \in \bar{\Delta}$. Par une récurrence immédiate sur ce résultat, on obtient $\bar{\alpha} + m\bar{\alpha}_{\bar{i}} \in \bar{\Delta}$ pour tout $m \in M'_{\bar{i}}$. □

Le système générateur de racines S_Γ

Supposons vérifiée l'hypothèse (B) de 5.1.14.

Posons $\Phi_{re} := \bar{\Pi}_{re}$; pour $\bar{\alpha} \in \Phi_{re}$, on a déjà défini $\bar{N}(\bar{\alpha})$.

Déterminons Φ (qui sera la base du système générateur) et $\bigcup_{\alpha \in \Phi} \bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$ (qui engendrera $\bar{\Delta}$). Soient $\Psi' := \bigcup_{\bar{i} \in \bar{I}_{im}} M''_{\bar{i}} \bar{\alpha}_{\bar{i}}$ et Ψ un système de représentants dans Ψ' de Ψ'/\mathbb{Q} .

Construisons alors Φ_{im} en définissant, pour chaque élément de Ψ , une racine relative simple de la façon suivante :

Si $\bar{\beta} \in \Psi$, $R(\bar{\beta}) := \{n \in \mathbb{Q} ; n\bar{\beta} \in \Psi'\}$,

- si $R(\bar{\beta})$ admet un plus petit élément, nous le notons q ;
- sinon, désignons par q un élément (choisi) de $R(\bar{\beta})$ tel que $(3/4)q$ minore $R(\bar{\beta})$, ceci est possible grâce à (B).

Dans les deux cas, posons $\bar{\alpha} := q\bar{\beta} \in \Phi_{im}$ et $\bar{N}(\bar{\alpha}) := \{n \in \mathbb{Q} ; n\bar{\alpha} \in \Psi'\}$.

La famille $\Phi = \Phi_{re} \cup \Phi_{im}$ est ainsi définie et on note Φ^\wedge la famille des coracines correspondantes (incluse dans $\{\bar{\alpha}_{\bar{i}}^\wedge ; \bar{i} \in \bar{I}\}$).

Pour tout couple $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \Phi^2$, on pose $\bar{a}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}^\wedge \rangle$. Soit \bar{A} la matrice $\left(\bar{a}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \right)_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \Phi^2}$.

Proposition 6.1.8 — *Le 7-uplet $S_\Gamma := (\bar{A}, V_\Gamma, (V^\wedge)^\Gamma, \langle, \rangle, \Phi, \Phi^\wedge, (\bar{N}(\bar{\alpha}))_{\bar{\alpha} \in \Phi})$ est un S.G.R. qui vérifie (B), dont le système de racines est exactement $\bar{\Delta}$.*

En particulier, si le S.G.R. S vérifie la condition (Z) (resp. (BN)) alors S_Γ aussi.

Remarques. 1. L'application $v \mapsto \bar{v}$ de V dans V_Γ n'est pas un morphisme de S.G.R. (par exemple, l'image d'une racine réelle n'est pas toujours une racine réelle).

2. Pour établir que S_Γ est un S.G.R. de système de racines $\bar{\Delta}$, l'hypothèse (B) peut être remplacée par toute condition permettant d'affirmer que les $\bar{N}(\bar{\alpha})$ n'admettent pas 0 pour borne inférieure dans \mathbb{R} . En particulier, l'hypothèse « I fini » convient et est stable lors du passage au quotient.

3. La modification de $\bar{\Pi}$ et des M_i'' pour obtenir Φ et les $\bar{N}(\bar{\alpha})$ est nécessitée par l'axiome (SGR5) sur la nature des $\bar{N}(\bar{\alpha})$ et la non \mathbb{Q} -colinéarité des éléments de la base dans un système générateur.

4. Si Π est libre dans V , alors $(\bar{\alpha}_i)_{i \in \bar{I}}$ est libre dans V_Γ , et il résulte de la démonstration ci-dessous que $\Phi = (\bar{\alpha}_i)_{i \in \bar{I}}$ et $\bar{N}(\bar{\alpha}_i) = M_i''$ (l'axiome (SGRN) est automatiquement vérifié dans le cas libre, cf. remarque 6. du paragraphe « définitions » de 4.1).

5. En construisant ainsi $\Phi := \Phi_{\text{re}} \cup \Phi_{\text{im}}$, il est possible qu'une racine $\bar{\alpha}_i$ ne soit pas simple, mais elle est alors dans un $\bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$ pour un $\bar{\alpha} \in \Phi$. Avec la construction précédente, un élément $\bar{\beta}$ de $\bar{\Delta}$ proportionnel à une racine simple relative $\bar{\alpha} \in \Phi$ qui n'est pas dans $\bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$, admet une « bonne décomposition » dans la base Φ . En effet, si un $\bar{\beta} \in \mathbb{Q}_+\bar{\alpha} \setminus \bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$, alors $\bar{\beta}$ provient d'une racine du revêtement qui n'est pas dans un $\Delta(\bar{j})$ (avec $\bar{\alpha}_j \in \mathbb{Q}\bar{\alpha}_i$) et une décomposition de cette racine fournit la « bonne décomposition » cherchée.

Démonstration. Montrons qu'avec la construction précédente, on obtient bien un S.G.R.

Les axiomes (SGR2) et (SGR3) sont vérifiés puisque V_Γ (resp. $(V^\wedge)^\Gamma$) est un \mathbf{K} -module libre (resp. sans torsion) ; ces deux modules étant en dualité (6.1.4).

La matrice \bar{A} est facilement obtenue à partir de A vu la composition de Φ , et est évidemment une matrice de Borcherds relative à coefficients dans \mathbb{Q} , de plus, par construction même de la matrice \bar{A} , la donnée $(V_\Gamma, (V^\wedge)^\Gamma, \Phi, \Phi^\wedge)$ est une réalisation de \bar{A} d'où (SGR4).

En ce qui concerne, l'axiome (SGR5) et la condition (Z), par construction, les parties $\bar{N}(\bar{\alpha})$ vérifient les conditions voulues ; d'autre part, $\bar{N}(\bar{\alpha})\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}^\wedge \rangle$ est inclus

dans une réunion de $M_{\bar{i}}'' \langle \bar{\alpha}_{\bar{i}}, \bar{\beta}_{\bar{j}}^{\wedge} \rangle$ pour certains \bar{i} et \bar{j} dans \bar{I} , c'est-à-dire contenu dans $\langle R, \beta_j^{\wedge} \rangle$ donc dans \mathbb{Z} si $\bar{j} \in \bar{I}_{\text{re}}$ (donc $j \in I_{\text{re}}$) ou si S vérifie la condition (Z).

La famille Φ est formée d'éléments non nuls puisque, par 4.2.5 dans $Q_{\mathbb{Q}}$, une somme d'éléments positifs non nuls est non nulle ; ceci permet d'établir (SGR6 a). Par construction, deux éléments de ϕ ne peuvent pas être \mathbb{Q} -proportionnels ; d'où (SGR6 b).

Montrons à présent que le système de racines de S_{Γ} est bien $\bar{\Delta}$.

D'après (6.1.7), $\bar{\Delta}$ satisfait aux conditions de chaînes relatives à Φ , de plus, $\bar{\Delta}$ est symétrique et donc $\Delta(S_{\Gamma}) \subset \bar{\Delta}$.

Montrons l'inclusion inverse. Supposons au contraire que $\bar{\Delta} \setminus \Delta(S_{\Gamma}) \neq \emptyset$, et considérons β dans cet ensemble. D'après 6.1.6, $\beta \in \bar{\Delta}^{\text{im}}$. Par symétrie des deux systèmes, on peut supposer que β est une racine positive. Enfin, par stabilité des deux ensembles sous l'action du groupe de Weyl, on peut supposer également que $\langle \beta, \bar{\alpha}_{\bar{i}}^{\wedge} \rangle \leq 0$ pour tout \bar{i} . Alors, il existe $\tilde{\beta} = \sum_{i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i \in \bar{\Delta}$ tel que $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \Psi(\tilde{\beta}) = \beta$. Si le support de $\tilde{\beta}$ n'est pas réduit à un point, alors β s'écrit $\sum_{\bar{i} \in \bar{I}} n_{\bar{i}} \bar{\alpha}_{\bar{i}}$, avec des $n_{\bar{j}} \in M_{\bar{j}}$ (i.e. M_j pour tout j de cette orbite). Au vu de la construction de la base Φ , on peut mettre β sous la forme $\beta = \sum_{\alpha \in \Phi} x_{\alpha} \alpha$, avec $x_{\alpha} \in \bar{M}(\alpha) = M_{\Gamma}(\alpha)$ le plus petit sous-ensemble de \mathbb{Q} stable pour l'addition, contenant $\bar{N}(\alpha) = N_{\Gamma}(\alpha)$ et 0. L'ensemble des α tels que dans cette décomposition $x_{\alpha} \neq 0$ est connexe car le support de $\tilde{\beta}$ l'est (si on a effectué un échange du type précédent, on a remplacé un $n_{\bar{j}} \bar{\alpha}_{\bar{j}}$ par un $m_{\alpha} \alpha$ pour un $\alpha = \gamma_{\bar{s}} \in \Phi$ ($\gamma_{\bar{s}} = n_{\bar{s}} \bar{\alpha}_{\bar{s}}$), ainsi, si $\bar{\alpha}_{\bar{j}}$ est lié à $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ alors \bar{i} est lié à \bar{s}). Par suite, $\beta \in K_c(\Phi)$ avec les notations évidentes ; c'est-à-dire en remplaçant dans la définition usuelle Π par Φ . Grâce à la proposition 1.2.14, on en déduit que $\beta \in \Delta(S_{\Gamma})$, d'où la contradiction.

Si le support de $\tilde{\beta}$ est réduit à un point $\tilde{\beta} = n_{\bar{j}} \tilde{\alpha}_{\bar{j}}$, alors $\beta = n_{\bar{j}} \bar{\alpha}_{\bar{j}}$ avec $n_{\bar{j}} \in N_{\bar{j}}$, auquel cas β est dans $N(\bar{\alpha}) \bar{\alpha}$ pour un certain élément $\bar{\alpha}$ de Φ et on a le même résultat.

L'hypothèse (BN) (cf. 4.3) est elle-aussi conservée. Soit θ la \mathbb{Q} -forme linéaire sur $Q_{\mathbb{Q}}$ satisfaisant à (BN), θ induit, par restriction, une \mathbb{Q} -forme sur $Q_{\mathbb{Q}}^{\Gamma}$ (encore notée θ) pour laquelle $\theta(\bar{\alpha}_{\bar{i}}) = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \alpha_i$ et donc pour les éléments α de la base du système quotient on a : $\theta(\alpha) \geq (3/4)\varepsilon$.

Il est clair alors que l'hypothèse (B) est conservée. □

Corollaire 6.1.9 — *Si S satisfait à (BN), alors S_{Γ} aussi et, dans la proposition précédente, on peut donc obtenir à partir de $\bar{\Pi}$, une nouvelle base Φ contenue dans $\Phi_{\text{re}} \cup (\bigcup_{\bar{\alpha} \in \Phi_{\text{im}}} \bar{N}(\bar{\alpha}) \bar{\alpha})$ pour laquelle le S.G.R. (obtenu en remplaçant Φ par Φ' dans S_{Γ} et en ne retenant que les coracines correspondantes) est normalisé et tel que le système de racines reste le même.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de 4.3.11. □

Invariance des différentes conditions sur les S.G.R

On suppose toujours vérifiée l'hypothèse (B) de 5.1.14.

Hypothèses sur la réalisation

Proposition 6.1.10 — *Les hypothèses (BN), (T), (L), « $A(I_{\text{re}})$ de rang fini» sont conservées par passage au quotient sous l'action de Γ .*

Sous l'hypothèse supplémentaire « $Q_{\mathbf{K}}(I_{\text{re}})$ de dimension finie», les hypothèses (MP), (MP₂) le sont également.

Enfin, il en est de même de (MP₁) si $Q_{\mathbf{K}}$ est de dimension finie.

Démonstration. (T) (cf. 4.4) Soit (β_i) une famille génératrice de V^* alors $(\bar{\beta}_i = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot \beta_i)$ est génératrice de $(V^*)^\Gamma = V_\Gamma^*$ puisque \mathbf{K} est alors supposé être un corps.

Pour (BN), l'assertion a été montrée en 6.1.8.

(L) (cf. 4.4) La condition de liberté de la base passe au quotient sous l'action de Γ , ceci a déjà été utilisé pour les revêtements.

L'hypothèse $A(I_{\text{re}})$ de rang fini équivaut à l'existence d'une réalisation de dimension finie de cette matrice. Comme Γ stabilise I_{re} et que les racines relatives réelles proviennent de $\Delta(I_{\text{re}})$, il est clair qu'on peut raisonner sur cette réalisation. Dans ce cas, il est évident que $\bar{Q}_{\mathbb{Q}}(\bar{I}_{\text{re}}) \subset Q_{\mathbb{Q}}(I_{\text{re}})$ et donc $\bar{A}(\bar{I}_{\text{re}})$ admet une réalisation de dimension finie ; elle est donc de rang fini.

Supposons $Q_{\mathbf{K}}(I_{\text{re}})$ de dimension finie. La démonstration de la conservation des hypothèses (MP) et (MP₂) est alors analogue à celle faite dans le cadre des sous-systèmes.

Notons $Q_{\Gamma+\text{re}} = \sum_{\bar{i} \in \bar{I}_{\text{re}}} \mathbb{N} \bar{\alpha}_{\bar{i}} \subset (1/|\Gamma|)Q_+(I_{\text{re}}) \subset \bigoplus \mathbb{N}(1/|\Gamma|)\gamma_i$. On se place dans $V_{\mathbb{R}}$ et on considère encore $C = \bigoplus \mathbb{R}_+ \gamma_i$ et cette fois $C' = C \cap Q_{\Gamma+\text{re}}$. Comme précédemment, C'^+ n'est pas vide, donc il existe une base de Q_Γ libre dans V_Γ telle que le cône positif qu'elle engendre contienne la base du système quotient et il suffit de compléter cette famille libre de V_Γ en une base de cet espace vectoriel.

La conservation de (MP₁) sous l'hypothèse proposée est tout à fait analogue si on peut montrer l'existence d'un $x \in V^*$ tel que $x(\alpha_i) > 0$ pour tout $i \in I_{\text{im}}$. Ceci résulte facilement d'une démonstration analogue à celle du (a) de 4.4.9. \square

Les hypothèses sur les ensembles N_i

L'hypothèse « les N_i sans point d'accumulation dans \mathbb{R} » (resp. « à dénominateurs bornés ») ne passe pas aux quotients car une racine $n\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ peut provenir d'une infinité de supports différents.

Par contre, si on suppose simultanément « les N_i sans point d'accumulation dans \mathbb{R} » (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) (la première hypothèse n'ayant alors de conséquence que sur les racines affines formant une composante connexe de la base), il est facile de voir que pour que les $\bar{N}(\bar{\alpha})$ soient sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés), il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

si \bar{i} est une orbite de type affine qui est réunion de composantes connexes de la base, alors $\{n \in \mathbb{Q}, n\bar{\alpha}_i \in \bar{\Delta}\}$ est sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés).

En effet, pour toute autre racine simple relative $\bar{\alpha}$, il existe au moins un indice i tel que $\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_i \rangle \neq 0$ et la condition (Z) (qui est conservée lors du passage au quotient) impose alors à $\bar{N}(\bar{\alpha})$ d'être sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés).

L'hypothèse « les N_i de plus petit élément 1 » passe au quotient à condition de ne pas imposer au système quotient d'être normalisé. Dans ce cas, on peut citer comme contre-exemple :

si $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $N_0 = \{1, 1 + 1/n (n \in \mathbb{N}^*)\}$ et si le diagramme de Dynkin est le suivant (la numérotation des sommets se faisant de gauche à droite) :



avec Γ d'ordre 2, échangeant les deux composantes $A_1^{(1)}$. Alors, le diagramme de Dynkin du système obtenu par quotient est :



et $\bar{N}_0 = \{1 + 1/n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ si on normalise le système quotient.

L'hypothèse « les N_i à dénominateurs uniformément bornés » ne passe pas aux quotients car des multiples de $\bar{\alpha}_i$ peuvent provenir d'une infinité de supports différents, les rapports n'étant pas forcément bornés.

Les hypothèses sur le type de la matrice

Si l'on considère une matrice indexée par I quelconque, on raisonne sur $A(J)$ où J est l'orbite d'une composante connexe de I . Toutes les composantes connexes de J sont alors de même type.

Si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, indéfini) (i.e. chacune de ces composantes connexes est de type fini (resp. affine, indéfini)) ; d'après 1.1, il existe $u \in \tilde{Q}(J)$ avec $u > 0$ (i.e. de coordonnées u_i pour $i \in J$ toutes strictement positives) tel que $A^t u > 0$ (resp. $A^t u = 0, A^t u < 0$).

Alors, si $u_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot u$, on a $u_\Gamma \in \tilde{Q}_\Gamma$ et $u_\Gamma > 0$ et $\langle u_\Gamma, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle = |\Gamma| \langle u, \bar{\alpha}_i^\wedge \rangle > 0$ (resp. $= 0, < 0$) car $\bar{\alpha}_i^\wedge$ est une somme de coracines positives. Ceci prouve que $\bar{A}^t u_\Gamma > 0$ (resp. $\bar{A}^t u_\Gamma = 0, \bar{A}^t u_\Gamma < 0$) et la matrice \bar{A} est de donc type fini (resp. affine, indéfini).

Si $A(J)$ est de type profini ou proindéfini, il en est de même de \bar{A} comme on le voit en regardant des sous-matrices de dimensions finies.

Il est clair que si A est indécomposable, \bar{A} est indécomposable. La réciproque est fautive. L'indécomposabilité de \bar{A} permet cependant d'affirmer que les composantes connexes de I sont permutées transitivement par Γ .

Généralisation

Il est facile de vérifier que sous les hypothèses plus générales du dernier paragraphe de 4.4, tous les résultats de ce chapitre sont encore vrais (à condition de remplacer pour $\bar{i} \in \bar{I}_{re}$, $\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}} \in \mathbb{Z}$ par $2\bar{a}_{\bar{i}\bar{j}}/\bar{a}_{\bar{i}\bar{i}} \in \mathbb{Z}$). il est alors facile de remarquer que si $\bar{i} \in \bar{I}_2$, alors quel que soit $\bar{j} \in \bar{I}$, on a bien $a_{\bar{i}\bar{j}} \neq -1$.

6.2 Quotient par une partie de type fini

Hypothèses

Soient S un S.G.R. sur \mathbf{K} (\mathbb{Z} ou un corps), Δ son système de racines, W son groupe de Weyl. On suppose $V^\wedge = V^*$ (à partir de 6.2.2).

Dans cette section, F est une partie de type fini de I (éventuellement non connexe). La famille $\Pi(F)$ est formée de racines simples réelles de Δ . Dans un revêtement \tilde{S} , $\tilde{\Delta}(F)$ n'est formé que de racines réelles et est donc en bijection par Ψ avec $\Delta(F)$. Enfin, $(W(F), (r_i)_{i \in F})$ est un système de Coxeter fini, on note w_0 l'élément de plus grande longueur de ce groupe.

Si $i \in I \setminus F$, on note $F(i)$ la composante connexe de $\{i\} \cup F$ contenant i . Lorsque $F(i)$ est de type fini (c'est-à-dire $\{i\} \cup F$ de type fini, éventuellement décomposable), on suppose de plus vérifiées les hypothèses suivantes :

- (D) la plus grande racine positive de $\tilde{\Delta}(A(F(i)))$ admet une coordonnée suivant α_i , inférieure ou égale à deux ;
- (E) si $F(i)$ est de type A_n , alors n est impair et α_i est la racine médiane ;
 - si $F(i) = D_{2n+1}$ alors $i \notin \{2n, 2n+1\}$;
 - Si $F(i) = E_6$ alors $i \in \{2, 4\}$ (avec la numérotation usuelle cf. [Bbki ; Lie]).

Remarques. 1. Dans le cas de E_6 , la conjonction de (D) et (E) impose $i = 2$.
 2. (E) se traduit par : i est stable par l'automorphisme d'opposition de $F(i)$ induit par $-w_i$ où w_i est le plus long élément de $W(F(i))$.

3. À partir de 6.2.7, on supposera vérifiées de nouvelles conditions.

On définit : $Q^{1\wedge} := \{h \in Q^\wedge ; \alpha_i(h) = 0 (\forall i \in F)\} \subset (V^\wedge)^{W(F)} = V^{1\wedge} = \{v \in V^\wedge ; \alpha_i(v) = 0 (\forall i \in F)\}$.

Les racines restreintes

Pour tout $\alpha \in V$, posons :

$$\alpha^1 := (1/|W(F)|) \sum_{w \in W(F)} w(\alpha).$$

Notons alors :

$$Q_{\mathbb{Q}}^1 = \{\alpha^1 / \alpha \in Q_{\mathbb{Q}}\} \subset (Q_{\mathbb{Q}})^{W(F)} \text{ ou } (Q)^{W(F)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ si } \mathbf{K} = \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$\Delta^1 := \{\alpha^1 ; \alpha \in \Delta \text{ et } \alpha^1 \neq 0\} \text{ appelé système de racines restreintes.}$$

L'application ainsi définie de V dans $V^{W(F)}$ (ou dans $V^{W(F)} \otimes \mathbb{Q}$) qui à α associe α^1 , est linéaire et son image $V_F = V^1$ est un \mathbf{K} -module libre qui contient $V^{W(F)}$ (et est contenu dans $(1/|W(F)|) \cdot V^{W(F)}$). Par linéarité, on peut prolonger la dualité précédemment définie au couple V_F, V^\wedge .

Lemme 6.2.1 — *Supposons la dualité non dégénérée. Soit ρ l'application \mathbf{K} -linéaire de V dans le dual $(V^{1\wedge})^*$ (ou de $V \otimes \mathbb{Q}$ dans $(V^{1\wedge})^* \otimes \mathbb{Q}$ si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$) déduite de la dualité, alors :*

- (a) pour tout $\alpha \in V$, on a $\rho(\alpha) = \rho(\alpha^1)$;
- (b) l'application ρ est injective sur V^1 .

Ainsi, on peut identifier V^1 avec $\rho(V)$ de façon que α^1 corresponde à $\rho(v)$. La dualité ainsi obtenue entre V^1 et $V^{1\wedge}$ a son image dans \mathbf{K} et est non dégénérée.

N.B. : Ceci fournit une autre interprétation de la notion de racine restreinte. La démonstration est analogue à celle de 6.1.1.

Lemme 6.2.2 — (a) Pour $i \in I$, on a $\alpha_i^1 = 0 \iff i \in F$;

(b) Le noyau de l'application linéaire $\alpha \mapsto \alpha^1$ de V dans $V^{W(F)}$ (ou $V^{W(F)} \otimes \mathbb{Q}$) est : $V(F) = \{\alpha \in V / \exists n \in \mathbb{N}^* ; n\alpha \in Q_{\mathbf{K}}(F)\}$, c'est-à-dire $Q_{\mathbf{K}}(F)$ si \mathbf{K} est un corps.

(c) $(V^1)^* = \{h \in V^* / h(q) = 0, \forall q \in Q(F)\} = V^{1\wedge}$.

Démonstration. (a) est démontré en 3.1.3. Ainsi, $V(F)$ est contenu dans le noyau. Inversement, si $\alpha \in V$, alors $|W(F)| \cdot (\alpha^1 - \alpha) \in Q_{\mathbf{K}}(F)$, donc si $\alpha^1 = 0$, alors $\alpha \in V(F)$. La dernière assertion résulte aussitôt de (b). □

On pose $I^1 := I \setminus F$.

Lemme 6.2.3 — L'espace $Q_{\mathbb{Q}}^1$ est engendré par les α_i^1 pour $i \in I^1$ et

$$\Delta^1 = \{\alpha^1/\alpha \in \Delta - \Delta(F)\} \subset Q_{\mathbb{Q}}^1.$$

De plus, $\Delta^1 = \Delta_+^1 \sqcup \Delta_-^1$ où l'indice + (resp. -) signifie qu'on considère les combinaisons positives (resp. négatives) des α_i^1 .

Démonstration. La première assertion est immédiate ; si $\alpha \in \Delta(F)$ alors son image α^1 est nulle (6.2.2). Si l'on considère à présent une racine α de $\Delta \setminus \Delta(F)$, que l'on suppose par exemple positive, alors, pour tout $w \in W(F)$, on a $w(\alpha) \in \Delta_+ \setminus \Delta(F)$ donc l'image de α est un élément de $Q_{\mathbb{Q}^+} \setminus \{0\}$ et le dernier résultat est immédiat (vu 4.2.3). \square

Définition 6.2.4 — Soit $i \in I^1$.

(a) Si $F(i)$ est de type fini, l'élément α_i^1 est une racine restreinte simple réelle (on note $i \in I_{\text{re}}^1$). Dans ce cas, on écrit :

- $i \in I_1^1$, si le coefficient suivant α_i de la plus grande racine de $\tilde{\Delta}(A(F(i)))$ est 1 ;
- $i \in I_2^1$, dans le cas contraire donc par (D) si et seulement si ce coefficient est 2.

N.B. : Comme on a clairement $\{\alpha_i^1, 2\alpha_i^1, \dots, s\alpha_i^1\} = \Delta(F(i))_+^1$ où s est ce coefficient, il est nécessaire de supposer (D) pour pouvoir espérer obtenir un S.G.R. (voir aussi le paragraphe « Généralisation » de 6.2).

(b) Si $F(i)$ n'est pas de type fini, α_i^1 est une racine restreinte simple imaginaire ; on note alors $i \in I_{\text{im}}^1$.

Plus précisément, le type de α_i^1 est le type de $F(i)$. On note $i \in I_0^1$ si ce type est affine et $i \in I_-^1$ s'il est indéfini.

Proposition 6.2.5 — Si $F(i)$ est de type fini et si w_i désigne l'élément de plus grande longueur de $W(F(i))$, alors w_i stabilise V_F et γ induit une réflexion par rapport à α_i^1 . Il permet donc de définir une coracine, c'est-à-dire un élément $\alpha_i^{1\nu}$ de $(V_F)^*$ tel que $w_i.v = v - \langle v, \alpha_i^{1\nu} \rangle \alpha_i^1$ pour tout $v \in V_F$ et $\langle \alpha_i^1, \alpha_i^{1\nu} \rangle = 2$.

On note W^1 le sous-groupe du groupe de Weyl engendré par les éléments w_i , pour $i \in I_{\text{re}}^1$.

Démonstration. Dans tous les cas, w_i induit l'identité sur $Q(F \setminus F(i))$ et $Q^\wedge(F \setminus F(i))$.

Si $F(i)$ est de type $B_n, C_n, D_{2n}, BC_n, E_7, E_8, F_4$ et G_2 (ou même G_2^\times défini dans la généralisation de 4.4), w_i induit $-\text{Id}$ sur $Q(F(i))$ et $Q^\wedge(F(i))$ donc w_i commute à $W(F)$. Dans les cas A_n, E_6 et D_{2n+1} , w_i est l'opposé de l'involution d'opposition sur $Q(F(i))$ et $Q^\wedge(F(i))$, et grâce à l'hypothèse (E), fixe i , donc

normalise $W(F)$. Ainsi, l'application $\alpha \mapsto \alpha^1$ commute toujours à l'action de w_i . Par suite, $w_i.\alpha_i^1 = (w_i.\alpha_i)^1 = -\alpha_i^1$, et w_i stabilise V_F .

Il suffit alors de montrer que $w_i.h - h \in \mathbf{K}\alpha_i^1$ pour tout $h \in V_F$, puisque $w_i^2 = \text{Id}$. Comme w_i commute à $\alpha \mapsto \alpha^1$, on a, pour tout $h \in V^1 : h = v^1 \implies w_i(h) - h = (w_i(v) - v)^1 \in (Q_{\mathbf{K}}(F(i)))^1$ qui coïncide avec $\mathbf{K}\alpha_i^1$. \square

Lien avec le revêtement

Considérons un revêtement libre \tilde{S} du S.G.R. S . Les applications Ψ et Ψ^\wedge sont alors $W(F)$ -équivariantes. En particulier, Ψ commute à l'application $\alpha \mapsto \alpha^1$ d'où $\Psi(\tilde{\Delta}^1) = \Delta^1$, et $\Psi(\tilde{\alpha}_i^1) = \alpha_i^1$.

Dans le revêtement \tilde{V}_F , la famille $(\tilde{\alpha}_i^1)_{i \in I^1}$ est libre.

Coracines

On introduit, pour tout $i \in I$, l'élément $\alpha_i^2 := \sum_{\beta^\wedge \in W(F).\alpha_i^\wedge} \beta^\wedge$ de $Q_{\mathbf{Q}}^\wedge \cap (V^\wedge)^{W(F)}$. En fait, $\alpha_i^2 \in (Q^\wedge)^{W(F)}$ si $i \in I_{\text{re}}$ ou si S vérifie (Z) (pour tout élément i de F le vecteur ainsi défini est nul). Par définition des coracines, $w(\alpha_i^\wedge)$ est toujours un choix de coracine possible pour $w(\alpha_i)$ et plus précisément, avec les notations du chapitre 4, par équivariance de Ψ^\wedge , on a :

$$\alpha_i^2 = \left(\frac{|W(F).\alpha_i^\wedge|}{|W(F).\tilde{\alpha}_i^\wedge|} \right) \Psi^\wedge(\tilde{\alpha}_i^2) \in \mathbb{Q}_+^* \Psi^\wedge(\tilde{\alpha}_i^2) \text{ où } \tilde{\alpha}_i^2 = \sum_{\tilde{\beta}^\wedge \in W(F).\tilde{\alpha}_i^\wedge} \tilde{\beta}^\wedge.$$

Soit B la matrice dont les coefficients sont $b_{ij} := \langle \alpha_j^1, \alpha_i^2 \rangle$ pour i et j dans I^1 .

Toujours avec les notations introduites pour le revêtement et celles du paragraphe 3 (en particulier les définitions de : $\tilde{\alpha}_j^1 = \left(\frac{1}{|W(Z)|} \right) \sum_{w \in W(Z)} w(\tilde{\alpha}_i)$ et de $(\tilde{\alpha}_i)^\sim = \sum_{w \in W(Z)} w(\tilde{\alpha}_i^\wedge)$), on a :

$$b_{ij} = \left(\frac{|W(F).\alpha_i^\wedge|}{|W(F)|} \right) \langle \tilde{\alpha}_j^1, (\tilde{\alpha}_i)^\sim \rangle,$$

car $\Psi^\wedge((\tilde{\alpha}_i)^\sim) = (|W(F).\tilde{\alpha}_i^\wedge|/|W(F)|)\alpha_i^2$ et $\Psi(\tilde{\alpha}_j^1) = \alpha_j^1$.

D'après 3.1.4, la matrice B est de Vinberg et :

- $b_{ii} > 0 \iff F(i)$ est de type fini ;
- $b_{ii} = 0 \iff F(i)$ est de type affine ;
- $b_{ii} < 0 \iff F(i)$ est de type indéfini.

Sous les hypothèses de ce chapitre, b_{ij} est un rationnel et même un entier si $i \in I_{\text{re}}$ ou si le S.G.R. S vérifie (Z) (car $\langle w(\alpha_i), \alpha_j^2 \rangle \in \mathbb{Z}$ et est indépendant de $w \in W(F)$).

D'après le lemme 3.1.5, la matrice $B(J)$ (où $J \subset I \setminus F$) est indécomposable si et seulement si J est inclus dans une composante connexe de $J \cup F$.

En multipliant α_j^2 par $2/b_{jj}$ (resp. $1/b_{jj}$) si $j \in I_1^1$ (resp. $j \in I_2^1$), on obtient l'élément $\alpha_j^{1^\wedge}$ de $Q_{\mathbb{Q},+}(F(i))$.

La partition $I^1 = I_{\text{im}}^1 \sqcup I_{\text{re}}^1$ est celle associée à la matrice B et pour tout $j \in I_{\text{im}}^1$, on pose $\alpha_j^{1^\wedge} = \alpha_j^2$.

Le support de $\alpha_j^{1^\wedge}$ (ou plus exactement celui de $(\tilde{\alpha}_j)^\sim$) est toujours $F(i)$. De plus, si $i \in I_{\text{re}}^1$, la matrice $A(F(i))$ est de déterminant non nul, il existe donc une et une seule solution dans $Q_{\mathbb{Q}}^\wedge(F(i))$ du système d'équations :

$$\begin{aligned} \alpha_i(\alpha^\wedge) &= 2, \\ \alpha_j(\alpha^\wedge) &= 0 \quad (\forall j \in F(i) \setminus \{i\}). \end{aligned}$$

Cette solution étant $\alpha^\wedge = (2/b_{ii})\alpha_i^2$.

Considérons une décomposition $r_{i_1} \dots r_{i_n}$ de w_i dans $W(F(i))$, alors pour tout $h \in V_F$ on a dans V (ou $V_{\mathbb{Q}}$ si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$) :

$$(w_i(h) - h)^1 = \left(\sum_{j=1}^{j=n} \langle r_{i_{j+1}} \dots r_{i_n}(h), \alpha_{i_j}^{\vee} \rangle \alpha_{i_j} \right)^1 = \langle h, \left(\sum_{j=1}^{j=n} r_{i_n} \dots r_{i_{j+1}}(\alpha_{i_j}^{\vee}) \right) \rangle \alpha_i^1.$$

Ceci montre que $\alpha_i^{1^\vee}$ (la coracine de α_i^1 cf. 6.2.5) est dans $Q^\wedge(F(i))$, alors, d'après ce qui précède, on a $\alpha_i^{1^\vee} = (2/b_{ii})\alpha_i^2$.

Remarques. 1. Pour tout $i \in I^1$, les éléments $\Psi^\wedge(\tilde{\alpha}_i^{1^\wedge})$ et $\alpha_i^{1^\wedge}$ sont colinéaires.

Si $i \in I_{\text{re}}^1$, alors $\Psi^\wedge(\tilde{\alpha}_i^{1^\wedge}) = \alpha_i^{1^\wedge}$ et $\Psi^\wedge(\tilde{\alpha}_i^{1^\vee}) = \alpha_i^{1^\vee}$.

2. Il est possible que $\alpha_i^{1^\wedge}$ (qui vaut $\alpha_i^{1^\vee}/2$ si $2\alpha_i^1$ est une racine restreinte (i.e. si $i \in I_2^1$) et $\alpha_i^{1^\vee}$ sinon) ne soit pas dans $Q^\wedge(F(i))$, et donc pas nécessairement dans V^\wedge si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$.

Il est facile de déterminer les coracines grâce aux tables de Bourbaki, il suffit en effet, pour obtenir $\alpha_i^{1^\vee}$, de considérer dans le système de racines fini dual de celui correspondant à $F(i)$, le double du poids fondamental ω_i . On peut alors déterminer les cas où les coefficients de $\alpha_i^{1^\wedge}$ sont entiers et ainsi établir :

Lemme 6.2.6 — *Sous les hypothèses (D) et (E) et si, pour tout $i \in I_{\text{re}}^1$, on exclut les cas suivants pour $F(i)$ et i :*

- B_n avec $i \geq 3$ et i impair,
- D_n pour $3 \leq i \leq n - 2$ et i impair,
- E_7 si $i = 2$,

alors la matrice A_{re}^1 des $\langle \alpha_i^1, \alpha_j^{1^\wedge} \rangle$ pour i et j dans I_{re}^1 est une matrice de Kac-Moody relative sans indices imaginaires. De plus, $\alpha_j^1 \in V^{1^\wedge}$, pour tout $j \in I^1$, même si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$.

Remarques. (a) Si cependant, dans les cas particuliers précités, la matrice considérée est de Kac-Moody relative alors les résultats qui vont suivre sont encore valables si \mathbf{K} est un corps et il en va de même si $\mathbf{K} = \mathbb{Z}$ et si V^\wedge contient les $\alpha_i^{1^\wedge}$ pour $i \in I_2^1$ (c'est automatique pour $i \in I_1^1$ et $i \in I_{\text{im}}^1$). Sous les hypothèses (D) et (E), la généralisation de 4.4 permet de lever la plupart de ces contraintes (voir aussi le paragraphe « Généralisation » de 6.2).

(b) Dans la suite, on suppose toujours vérifiées les conditions de ce lemme. Celles-ci sont d'ailleurs vraies dans les cas rencontrés en pratique dans $[\mathbf{B}_3\mathbf{R}]$, on sait même qu'alors i est 1 ou une puissance de 2 si $F(i)$ est \mathbf{B}_n ou \mathbf{D}_n (cf. [T]).

Proposition 6.2.7 — On a $Q_{\mathbb{Q}^-}^1 \cap Q_{\mathbb{Q}^+}^1 = \{0\}$ et si la racine α_i^1 est réelle, alors $Q_{\alpha_i^1} \cap (\sum_{j \neq i} \mathbb{Q}_+ \alpha_j^1) = \{0\}$.

Démonstration. La première assertion est immédiate puisque $Q_{\mathbb{Q}^+}^1$ (resp. $Q_{\mathbb{Q}^-}^1$) est inclus dans $Q_{\mathbb{Q}^+}$ (resp. $Q_{\mathbb{Q}^-}$). La seconde résulte alors du fait que $\langle \alpha_i^1, \alpha_i^{1^\wedge} \rangle > 0$ pour $i \in I_{\text{re}}^1$, alors que $\langle \alpha_i^1, \alpha_j^{1^\wedge} \rangle \leq 0$ pour tout $j \in I^1 \setminus \{i\}$. \square

Corollaire 6.2.8 — Si $i \in I_{\text{re}}^1$, on a :

- $\mathbb{Q}_+ \alpha_i^1 \cap \Delta^1 = \{\alpha_i^1\}$ si $i \in I_1^1$, on note alors $N^1(\alpha_i^1) = \{1\}$ et
- $\mathbb{Q}_+ \alpha_i^1 \cap \Delta^1 = \{\alpha_i^1, 2\alpha_i^1\}$ si $i \in I_2^1$, on note alors $N^1(\alpha_i^1) = \{1, 2\}$.

Démonstration. Soit α est une racine de Δ telle que $\alpha^1 \in \mathbb{Q}_+ \alpha_i^1$, si $\alpha = \sum_{j \in J} n_j \alpha_j$ ($n_j > 0$ pour tout $j \in J$) est une « bonne décomposition » de α (c'est-à-dire qu'une racine du revêtement admet une décomposition analogue), alors $\alpha^1 = \sum_{j \in J} n_j \alpha_j^1$ dans Δ^1 , avec des n_j tous positifs et dans M_j^* . D'après 6.2.7, J est inclus dans $F(i)$ (car J est connexe) et donc $\alpha \in \Delta(F(i))$. Donc α doit être inférieure (ou égale) à la plus grande racine de ce système. On conclut alors grâce à l'hypothèse (D) et à la définition de I_1^1 et I_2^1 . \square

On note Δ_{re}^1 l'ensemble des racines restreintes (dites réelles) $\alpha^1 \in \Delta^1$ qui peuvent changer de signe sous l'action d'un élément du groupe W^1 .

Corollaire 6.2.9 — Le 7-uplet

$$S_{\text{re}}^1 := (A_{\text{re}}^1, V_F, V^{1^\wedge}, \langle, \rangle, (\alpha_i^1)_{i \in I_{\text{re}}^1}, (\alpha_i^{1^\wedge})_{i \in I_{\text{re}}^1}, (N^1(\alpha_i^1))_{i \in I_{\text{re}}^1})$$

est un système générateur de racines sans racine simple imaginaire et de plus, $\Delta^{\text{re}}(S_{\text{re}}^1) = \Delta_{\text{re}}^1$.

Démonstration. Les axiomes des systèmes générateurs de racines ont déjà été vérifiés. En effet, en l'absence de racine simple imaginaire les conditions restrictives sont peu nombreuses ((SGR6a) résulte de 6.2.7). Par ailleurs, d'après 6.2.7 et 6.2.8, les seules racines de Δ_{re}^1 qui peuvent devenir négatives sous l'action de W^1 sont de

la forme $w.\alpha_i^1$ pour $w \in W^1$, $i \in I_{\text{re}}^1$ ou $2w(\alpha_i^1)$ pour $w \in W^1$ et $i \in I_2^1$; d'où le dernier résultat. \square

Propriétés de Δ^1

Considérons, toujours sous les hypothèses de 6.2 et 6.2.6, les deux familles $(\alpha_i^1)_{i \in I^1}$, $(\alpha_i^{1\wedge})_{i \in I^1}$ et la matrice de Borchers relative $A^1 = (a_{ij}^1)$ où $a_{ij}^1 = \langle \alpha_j^1, \alpha_i^{1\wedge} \rangle$ pour i et j dans I^1 .

Par définition de A^1 , on a bien :

$$\begin{aligned} i \in I_1^1 &\iff a_{ii}^1 = 2; \\ i \in I_2^1 &\iff a_{ii}^1 = 1; \\ i \in I_0^1 &\iff a_{ii}^1 = 0; \\ i \in I_-^1 &\iff a_{ii}^1 < 0. \end{aligned}$$

Proposition 6.2.10 — Si $i \in I_{\text{re}}^1$ et si $\alpha^1 \in \Delta^1 \setminus \{\alpha_i^1, 2\alpha_i^1\}$, alors la (α_i^1) -chaîne $\{\alpha^1, \alpha^1 \pm \alpha_i^1, \dots, w_i(\alpha^1)\}$ est incluse dans Δ^1 .

Démonstration. Soient $w_i = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ une décomposition de longueur minimale de w_i et $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}$ telle que $(\Psi(\tilde{\alpha}))^1 = \alpha^1$. Alors, $\tilde{\alpha}$ n'est pas dans $\tilde{\Delta}(F(i))$ donc, comme $w \in W(F(i))$, la racine $w(\tilde{\alpha})$ n'est jamais proportionnelle à un élément de $\tilde{\Pi}(F)$. Dans $\tilde{\Delta}$, la condition (SR3b) entraîne l'existence d'une $(\tilde{\alpha}_{i_j})$ -chaîne de $r_{i_{j+1}} \dots r_{i_n}(\tilde{\alpha})$ à $r_{i_j} \dots r_{i_n}(\tilde{\alpha})$ pour tout j entre 1 et n . Par projection dans Δ , puis dans Δ^1 (via les applications Ψ et $\alpha \mapsto \alpha^1$), il est clair que la réunion de ces chaînes donne dans Δ^1 une (α_i^1) -chaîne qui contient α et son image par w_i (éventuellement plus longue que la chaîne de l'énoncé), ce qui établit le résultat cherché. \square

Soient $\beta^1 \in \Delta^1$ et $\alpha \in \Delta$ admettant β^1 pour image par l'application $\alpha \mapsto \alpha^1$.

Si $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Delta}$, a pour image α par Ψ , le support $S_{\tilde{\alpha}}$ de $\tilde{\alpha}$ est le support d'une « bonne décomposition » de α .

Sous ces hypothèses, la composante connexe de $S_{\tilde{\alpha}} \cup F$ qui contient le support de $\tilde{\alpha}$ est le support relatif de β^1 correspondant à $\tilde{\alpha}$ (avec $(\Psi(\tilde{\alpha}))^1 = \beta^1$), noté $S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)$, et $S_{\tilde{\alpha}} \setminus F$ est un support de β^1 .

Lemme 6.2.11 — Sous les hypothèses précédentes, il existe dans $\tilde{\Delta}$, une racine $\tilde{\alpha}^{\text{rel}}$ dont l'image par Ψ , notée α^{rel} , vérifie $(\alpha^{\text{rel}})^1 = \beta^1$ et $S_{\tilde{\alpha}^{\text{rel}}} = S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)$.

Démonstration. Par symétrie des systèmes de racines, on se restreint au cas où toutes les racines qui interviennent ici sont positives.

Supposons, avec les notations précédentes, le support de $\tilde{\alpha}$ strictement inclus dans $S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)$ (sinon, il n'y a rien à démontrer).

Considérons la décomposition de $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \oplus \tilde{\alpha}_2$, de $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{Q}(I \setminus F) \oplus \tilde{Q}(F)$. On peut supposer $\tilde{\alpha}_2 \neq 0$, car l'hypothèse $S_{\tilde{\alpha}} \neq S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)$ implique l'existence d'un indice i dans $S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)$, tel que $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$, on peut donc remplacer $\tilde{\alpha}$ par $\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_i$. Notons alors J' une composante connexe de $S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1) \cap F$, par l'argument précédent, on peut supposer que $\tilde{\alpha}_2$ a au moins une coordonnée strictement positive dans $\tilde{\Pi}(J')$. De même, en itérant ce raisonnement jusqu'à $|J' \cap S_{\tilde{\alpha}}| = |J'|$, et en remplaçant à chaque étape $\tilde{\alpha}$ par $\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_i$ où i désigne l'indice ajouté à $S_{\tilde{\alpha}}$, on obtient la racine cherchée (puisque F est fini). \square

Proposition 6.2.12 — *Soient α_i^1 une racine restreinte simple imaginaire et $\beta^1 \in \Delta_+^1 \setminus \mathbb{Q}_+ \alpha_i^1$. Si un support relatif de β^1 est lié à i dans I , alors $\beta^1 + M_i \alpha_i^1 \subset \Delta^1$, où M_i est toujours l'ensemble défini en 2.2 relatif à I et à Π (en particulier $M_i = \mathbb{N}$ si $i \in I_{\text{re}}$).*

Démonstration. D'après 6.2.11, il existe $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}$ dont l'image par $\tilde{\alpha} \mapsto (\Psi(\tilde{\alpha}))^1$ est β^1 et dont le support est le support relatif considéré de β^1 . Les trois cas suivants peuvent se présenter.

— *Premier cas : $i \in I_{\text{im}}$.*

L'assertion est alors immédiate puisque, d'après les hypothèses, $\tilde{\beta} \notin \mathbb{Q} \alpha_i$. Dans ce cas, $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle$ est strictement négatif ce qui, par (SR4b) dans $\tilde{\Delta}$, implique $\tilde{\beta} + M_i \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}$ et donc le résultat analogue dans Δ^1 .

— *Second cas : $i \in I_{\text{re}}$ et i n'est pas dans ce support relatif mais lui est lié.*

Alors $\langle \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$, donc $\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}_i$ est une racine ((SR3b) dans $\tilde{\Delta}$) et $\beta^1 + \alpha_i^1 \in \Delta^1$; pour la suite de la démonstration, on est ramené au cas suivant.

— *Troisième cas : $i \in I_{\text{re}}$ et i est dans le support relatif considéré de β^1 .*

Nous allons, pour traiter ce cas, procéder par étapes.

(1) Il existe dans $\tilde{\Delta}$ une racine $\tilde{\gamma}$ telle que $(\Psi(\tilde{\gamma}))^1 = \beta^1$, pour tout $j \in F$, $\langle \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle \leq 0$ et dont le support contient $S_{\tilde{\beta}}^{\text{rel}}(\beta^1) \setminus F$.

Considérons $\Omega := \{\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}(S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1)) ; (\Psi(\tilde{\beta}))^1 = \beta^1 \text{ et } (S_{\tilde{\alpha}}^{\text{rel}}(\beta^1) \setminus F) \subset S_{\tilde{\beta}}\}$ et désignons, pour tout élément $\tilde{\beta}$ de $\tilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, la somme de ses coordonnées suivant F par $h_F(\tilde{\beta})$. Comme F est de type fini, pour tout $j \in F$, on a $M_j = \mathbb{N}$ donc la « hauteur relative à F », h_F , d'une racine de $\tilde{\Delta}_+$ (ou plus généralement d'un élément de $\tilde{R}_+ = \bigoplus M_i \tilde{\alpha}_i$) est un entier positif. On peut donc considérer un élément γ de Ω de « hauteur relative à F » minimale. Or, s'il existe un indice j dans F tel que $\langle \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle > 0$, alors $\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}_j$ est encore dans Ω (par (SR3b) dans $\tilde{\Delta}$ et l'égalité $\alpha_j^1 = 0$); ce qui contredit la minimalité de $\tilde{\gamma}$.

(2) Montrons que $\beta^1 + \alpha_i^1 \in \Delta^1$. Dans le cas étudié, $F(i)$ n'est pas de type fini, $i \in I_{\text{re}}$, et $i \in S_{\tilde{\gamma}}$, en conservant les notations de (1).

Si $\langle \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}_i^\wedge \rangle < 0$, alors (SR3b) dans $\tilde{\Delta}$ entraîne le résultat.

Si on, notons w_0 l'élément le plus long de $W(F)$ (i.e. le produit des éléments les plus longs correspondant à chacune des composantes connexes de F). Comme w_0 envoie $\tilde{\Pi}(F)$ sur son opposé, on a :

$$(*) \forall j \in F, \langle w_0(\tilde{\gamma}), \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle \geq 0.$$

Soient $\tilde{\gamma}_1 \in \tilde{Q}(F(i))$ et $\tilde{\gamma}_2 \in \tilde{Q}(I \setminus F(i))$ tels que $w_0(\tilde{\gamma}) := \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$.

La racine $w_0(\tilde{\gamma})$ est positive, donc il en est de même de $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$. Enfin, il est évident que $(\Psi(w_0(\tilde{\gamma})))^1 = \beta^1$; il suffit donc de montrer que $w_0(\tilde{\gamma}) + \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}$.

(a) Supposons $A(F(i))\tilde{\gamma}_1 \geq 0$, alors :

- soit $\tilde{\gamma}_1 = 0$; ce qui est absurde puisque i est dans le support de γ .
- soit $F(i)$ est de type affine et $\tilde{\gamma}_1$ est proportionnelle à la racine imaginaire minimale de $\Delta(F(i))$, et donc, $A(F(i))\tilde{\gamma}_1 = 0$. Or, le support de $\tilde{\gamma}_2$ est lié à $F(i)$ (par connexité du support de la racine $w_0(\tilde{\gamma})$), donc il existe $j \in F(i)$ tel que $\langle \tilde{\gamma}_2, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$. Ce scalaire est encore égal à $\langle w_0(\tilde{\gamma}), \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle$ ce qui, d'après (*), implique $j = i$ et donc $w_0(\tilde{\gamma}) + \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}$.

(b) Si, au contraire, il existe un élément j de $F(i)$ tel que $\langle \tilde{\gamma}_1, \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$, on a encore $\langle w_0(\tilde{\gamma}), \tilde{\alpha}_j^\wedge \rangle < 0$ et donc par (*), $j = i$ et comme précédemment $w_0(\tilde{\gamma}) + \tilde{\alpha}_i \in \tilde{\Delta}$.

(3) Par une récurrence immédiate sur l'étape (2), il est clair qu'on obtient $\beta^1 + \mathbb{N}\alpha_i^1$, soit encore le résultat cherché dans le troisième cas. \square

Proposition 6.2.13 — Soient α_i^1 ($i \in I \setminus F$) une racine restreinte imaginaire et $\beta^1 \in \Delta_+^1 \setminus \mathbb{Q}\alpha_i^1$, alors un support relatif de β^1 est lié à i si et seulement si $\langle \beta^1, \alpha_i^{1\wedge} \rangle < 0$.

Démonstration. L'implication \Leftarrow est immédiate,

Montrons la réciproque. On a vu (6.2.11), que pour tout support relatif S , de β^1 , il existe une racine $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}$, de support S . Si i n'est pas dans le support relatif considéré, le résultat est clair en considérant cette racine puisque i est lié à son support sans être dedans. Si i est dans le support, β^1 admet une décomposition (provenant de celle de $\tilde{\beta}$) telle que le coefficient suivant α_i^1 est non nul, et dans laquelle intervient un autre α_j^1 lié à $F(i)$, donc $\langle \beta^1, \alpha_i^{1\wedge} \rangle < 0$ (car $\langle \alpha_i^1, \alpha_i^{1\wedge} \rangle \leq 0$). \square

Le système générateur de racines S^1

Toujours sous les hypothèses de 6.2 et 6.2.6 ainsi que (B) de 5.1.14, nous voulons montrer qu'il existe un système générateur de racines qui a pour système de racines Δ^1 et dont les modules sont $V_F = V^1$, et $V^{1\wedge} = (V^\wedge)^{W(F)}$.

Construction de la base

Nous procédons comme dans le cas du quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme. Néanmoins, il faut remplacer en général les $\bar{}$ par des $()^1$ et de façon moins évidente, dans la construction proprement dite, l'ensemble

$$\Psi' := \left(\bigcup_{i \in \bar{I}_{\text{im}}} M_i'' \bar{\alpha}_i \right)$$

par :

$$\Psi' := \left(\bigcup_{i \in I_{\text{im}}^1} T_i \alpha_i^1 \right) \cap \Delta^1$$

où $T_i = M_i$ si $F(i) \neq \{i\}$, et N_i sinon et $\Phi_{\text{im}} := (\alpha_i^1)_{I_{\text{re}}^1}$. En effet, si $F(i) \neq \{i\}$, les racines de $\tilde{\Delta}(F(i)) - \tilde{\Delta}(F)$ donnent des racines restreintes proportionnelles à α_i^1 qui peuvent a priori ne pas admettre de « bonne décomposition » et les coefficients de proportionnalité sont dans M_i et pas nécessairement dans N_i .

On obtient ainsi une partie Φ^1 et des ensembles $N^1(\alpha^1)$ pour $\alpha^1 \in \Phi^1$ satisfaisant à (SGR6) et aux axiomes sur les ensembles N_i ; on note $\Phi^{1\wedge}$ un ensemble formé par des $\beta^{1\wedge}$ si les $\beta \in \Delta$ sont tels que $\beta^1 \in \Phi^1$.

Soit alors A^2 , la matrice dont les coefficients sont les $\langle \alpha^1, \beta^{1\wedge} \rangle$ pour α^1 et β^1 parcourant Φ^1 .

Il est clair qu'il s'agit d'une matrice de Borchers relative dont les coefficients $\langle \alpha^1, \beta^{1\wedge} \rangle$ sont dans \mathbb{Q} (et même dans \mathbb{Z} si $\beta \in \Phi_{\text{re}}^1$ ou pour tout $\beta \in \Phi^1$ si le S.G.R. S vérifie la condition (Z)) et que, si l'on en extrait celle formée par les lignes et colonnes réelles, on obtient la matrice A_{re}^1 déjà définie.

Il en résulte alors le résultat recherché :

Proposition 6.2.14 — *Le 7-uplet $S^1 := (A^2, V_F, (V^1)^\wedge, \langle, \rangle, \Phi^1, \Phi^{1\wedge}, (N^1(\alpha^1))_{\alpha^1 \in \Phi})$ est un système générateur de racines qui vérifie (B) et $\Delta(S^1) = \Delta^1$.*

Remarque. Comme dans le cas du quotient par Γ , pour montrer que S^1 est un système générateur de racines tel que $\Delta(S^1) = \Delta^1$, l'hypothèse (B) peut être remplacée par toute condition permettant d'affirmer que les $N^1(\alpha^1)$ n'admettent pas 0 pour borne inférieure dans \mathbb{R} . À nouveau, l'hypothèse « I fini » convient et est stable lors de ce passage au quotient.

Démonstration. La conservation de l'hypothèse (B) se démontre comme dans les cas du quotient par Γ . Il reste à établir essentiellement l'égalité des deux systèmes de racines.

Montrons que $\Delta(S^1) \subset \Delta^1$. Comme :

$$\left(\bigcup_{\alpha^1 \in \Phi_1^1} N^1(\alpha^1) \alpha^1 \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I \setminus F} T_i \alpha_i^1 \right) \subset \Delta^1,$$

il suffit de vérifier les conditions de chaînes dans Δ^1 . Pour les chaînes réelles, cela résulte de 6.2.10 et pour les chaînes imaginaires, de 6.2.12 et 6.2.13.

Reste à montrer que $\Delta^1 \subset \Delta(S^1)$. Raisonnons (comme dans le cas de Δ_Γ) par l'absurde, en considérant un élément β dans $\Delta^1 \setminus \Delta(S^1)$ qui est forcément imaginaire et que nous pouvons supposer dans K_c^1 (avec les notations évidentes). Considérons alors $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}$ qui a pour image β dans le quotient deux cas sont possibles :

- $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}(F(i))$ donc $\beta \in T_i \alpha_i^1$ et son cas à été étudié en construisant la base,
- sinon la décomposition de $\tilde{\beta}$ donne une « bonne décomposition » de β (à support connexe) et donc $\beta \in \Delta(S^1)$ par 1.2.14, d'où toujours une contradiction.

□

Corollaire 6.2.15 — *Si S satisfait à (BN), il en est de même de S^1 et donc on peut « extraire » de sa base, une nouvelle base pour laquelle le système générateur obtenu est normalisé et admet pour système de racines Δ^1 .*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de 4.3.11.

□

Invariance des conditions sur les S.G.R.

Les résultats de conservation sont tout à fait analogues à ceux obtenus dans le cas du quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme, les démonstrations sont quasiment les mêmes c'est pourquoi on ne les reproduit pas ici.

Hypothèses sur la réalisation

Proposition 6.2.16 — *Les hypothèses (BN), (A), (L) et « $A(I_{re})$ de rang fini » sont conservées lors du passage au système S^1 .*

Sous l'hypothèse supplémentaire « $Q_{\mathbf{K}}(I_{re})$ de dimension finie », les hypothèses (MP), (MP₂) le sont également.

Enfin, il en est de même de (MP₁) si la dimension de $Q_{\mathbf{K}}$ est finie.

Les hypothèses sur les ensembles N_i

Les problèmes posés sont exactement les mêmes que dans le passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme. Les « bons cas » sont les mêmes.

La condition à ajouter dans le cas où « les N_i sont sans point d'accumulation dans \mathbb{R} (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) est vérifiée » est :

si $\{i\}$ est une composante connexe de type affine ou si la composante connexe de $\{i\}$ dans $\{i\} \cup F$ est de type affine alors $\{n \in \mathbb{Q} ; n\alpha^1 \in \Delta^1\}$ est sans point d'accumulation dans \mathbb{R} .

Les hypothèses sur le type de la matrice

Si la matrice est indéxée par I quelconque, le raisonnement est fait sur chaque composante connexe de I qui n'est pas réduite à des éléments de F . Si l'on veut considérer une partie connexe L de I , on prendra en fait J la plus grande partie connexe de I , telle que $L \subset J \subset L \cup F$.

Notons alors $A(J)$ la matrice indécomposable considérée.

Si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, resp. indéfini), comme dans le cas du quotient par Γ , on utilise la caractérisation de 1.1 (il existe $u \in \tilde{Q}(J)$ avec $u > 0$ (i.e. de coordonnées $(u_i)_{i \in J}$ toutes strictement positives tel que ${}^tAu > 0$ (resp. ${}^tAu = 0$, resp. ${}^tAu < 0$)).

Le raisonnement mené comme dans le cas des automorphismes de diagramme en remplaçant u_Γ par $u_F := \sum_{w \in W(F)} w(u)$ permet d'établir que :

si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, indéfini ou même profini, proindéfini), alors $A^1(J^1)$ est du même type.

Il est clair encore que si A est indécomposable, il en est de même de A^1 . L'indécomposabilité de A^1 n'implique pas celle de A mais elle permet de montrer que I contient au plus une composante connexe L contenant des éléments qui ne sont pas dans F ; en fait, dans ce cas, on obtient le même système de racines Δ^1 par quotient de $\Delta(L)$.

Généralisation

Dans le cadre de la généralisation de la notion de systèmes de racines proposée en 4.4, nous pouvons encore considérer une partie de type fini F et le système de racines restreintes correspondant.

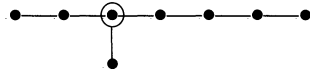
Les hypothèses restrictives de 6.2.6 sont alors inutiles puisque les coracines peuvent être dans $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}(\alpha_i^\vee / 2)$, il suffit de voir qu'on a bien $a_{ij}^1 \neq -1/2$ pour α_i^1 réelle ; ce qui est facile d'après la remarque précédant 6.2.6 (cf. Bbki chapitre 4). (Seuls le cas D_3 , i impair reste exclus mais cela relève de la restriction sur A_n dans (E)).

Les résultats de ce chapitre sont alors valables si on remplace la condition : $a_{ij}^1 \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$ par : $2a_{ij}^1/a_{ii}^1 \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$ lorsque la racine restreinte α_i^1 est réelle.

La condition (D) est essentielle pour pouvoir affirmer que pour une racine restreinte réelle α'_i , on a bien $\Delta' \cap \mathbb{Z}\alpha'_i \subset \{\pm\alpha'_i, \pm 2\alpha'_i\}$.

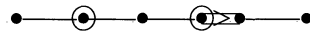
Notons cependant que cette hypothèse (D) nous empêche de pouvoir considérer dans notre étude un certain nombre de diagrammes admissibles (au sens de [Ru], voir remarque 4.4.19) qui vérifient néanmoins la condition (E). Pour pouvoir admettre ces diagrammes dans cette étude il suffit en fait de considérer comme un système de racines (de type fini) le système noté A_1^N dont la base est formée d'une seule racine réelle mais pour lequel $\Delta = \{\pm\alpha_i, \pm 2\alpha_i \dots \pm N\alpha_i\}$ pour N valant 3 ou 4.

Supprimer la condition (D) serait alors possible dans le cas où I est de type fini si on admet dans la théorie le système A_1^N avec $N \leq 6$. Les diagrammes des sous-algèbres admissibles (cf. [Ru]) entreraient alors dans le cadre de notre étude. Notons que d'autres diagrammes seraient également admis comme par exemple :



la condition d'existence des sl_2 -triplets (utilisée par Rubenthaler) étant plus forte que la condition (E).

Cependant, enlever la condition (D) nous conduirait à considérer des cas tels que :



conduisant à un système Δ' de base $\{\alpha'_2, \alpha'_4\}$ formée de racines réelles telles que :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}\alpha'_4 \cap \Delta' &= \{\alpha'_4, 2\alpha'_4, 3\alpha'_4\} \\ \mathbb{N}\alpha'_2 \cap \Delta' &= \{\alpha'_2\} \\ \langle \alpha'_2, \alpha'_4 \rangle &= -6, \text{ et} \\ \langle \alpha'_4, \alpha'_2 \rangle &= -1. \end{aligned}$$

Ceci ne semble pas pouvoir rentrer dans le cadre d'une théorie raisonnable des systèmes de racines et (surtout) n'être encore intervenu dans aucun travail mathématique.

Bibliographie

- [B] J. Bausch, *Étude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines*, Revue de l'Institut Elie Cartan **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).
- [B-R] J. Bausch et G. Rousseau, *Involutions de première espèce des algèbres affines*, Revue de l'Institut Elie Cartan **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).
- [Bbki ; Alg] N. Bourbaki, *Algèbre commutative chapitre 1, modules plats*, Hermann, Paris.
- [Bbki ; Lie] ———, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris.
- [Bo ; 1] R. Borcherds, *Generalized Kac-Moody algebras*, J. of algebra **115** (1989), 501–512.
- [B₃R] V. Back, N. Bardy, H. Ben-Messaoud et G. Rousseau, *Formes presque-déployées d'algèbres de Kac-Moody : Classification et racines relatives*, Journal of Algebra **171** (1995), 43–96.
- [Br] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, Berlin (1989).
- [BR T1 et 2] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, n° 1 et n° 2*, Publ. Math. I.H.E.S., **41** (1972), 5–252 ; **60** (1984), 5–184.
- [Hée 1] J.-Y. Hée, *Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné*, Geometriae Dedicata **37** (1991), 65–102.
- [Hée 2] ———, *Torsion de groupes munis d'une donnée radicielle*, Thèse d'Etat, Orsay (1993).
- [K] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, troisième édition, Cambridge University Press (1990).
- [MP] R. V. Moody et A. Pianzola, *On infinite root systems*, Trans. of the A.M.S, **315** n°2 (1989) 661–696.

- [PK] D. H. Peterson et V. G. Kac, *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **80** (1983) 1778–1782.
- [Ra] J. Ramagge, *A realisation of certain KM groups of types II and III*, Journal of Algebra **171** (1995) 713–806.
- [R1] G. Rousseau, *Espaces affines symétriques et algèbres affines*, Revue de l'Institut Elie Cartan **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).
- [R2] —————, *L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody*, Bull. Soc. Math. Belg. **42** (1990) 673–694.
- [Ru] H. Rubenthaler, *Construction de certaines algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples*, Journal of Algebra **81** (1983) 268–278.
- [Sl] P. Slodowy, *Beyond Kac-Moody algebras and inside*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. **5** (1986) 361–371.
- [T] J. Tits, *Classification of algebraic groups and discontinuous subgroups*, Boulder 1965, Proc. of Symposia in pure math. n° 9 (1966), 33–62.
- [V] Z. B. Vinberg, *Discrete linear groups generated by reflections*, Math. USSR-Izvestija **5** (1971), 1083–1119.

A. Index des notations et des définitions

A.1 Dans tout le document

Notations

- $\mathbb{K} \dots$ un corps totalement ordonné.
- $\mathbf{K} \dots$ un corps de caractéristique 0 ou \mathbb{Z} (au chapitre 1, une extension de \mathbb{K}).
- $I \dots$ un ensemble d'indices (supposé dénombrable).
- $A \dots$ (1.1.1) une matrice de Borcherds (relative à partir du chapitre 2) indexée par I .
- $B(A) \dots$ (1.1.1 Rq. 2. et 2.1) matrice de Borcherds normalisée associée à A .
- $A(J)$ pour $J \subset I \dots$ la matrice obtenue à partir de A en ne conservant que les lignes et colonnes qui correspondent à $i \in J$.
- $\Pi = (\alpha_i)_{i \in I} \dots$ famille d'éléments de \mathfrak{h}^\wedge , base du système de racines.
- $\Pi_{\text{im}}, \Pi_{\text{re}}, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_0, \Pi_- \dots$ (3.1) les racines simples α_i pour $i \in I_{\text{im}}, I_{\text{re}}, I_1, I_2, I_0, I_-$.
- $\tilde{Q} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} \tilde{\alpha}_i$; $\tilde{Q}_+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N} \tilde{\alpha}_i$; $\tilde{Q}_- = -\tilde{Q}_+$; $Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$;
 $[Q] = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} [\alpha_i]$;
- $Q^\wedge = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i^\wedge$; $Q_{\mathbb{K}}^\wedge = \sum_{i \in I} \mathbb{K} \alpha_i^\wedge$.

Pour tous ces ensembles (1.1) l'ajout de $*$ en exposant signifie que l'on retire 0. De même, l'ajout de \mathbf{K} en indice à $\tilde{Q}, Q, [Q], Q^\wedge$, ou $Q_{\mathbb{K}}^\wedge$ (dans ce dernier cas \mathbf{K} remplace \mathbb{K}) signifie que l'on remplace dans leur définition \mathbb{Z} (resp. \mathbb{K}) par \mathbf{K} .

Si $J \subset I$, l'ajout de (J) signifie qu'on considère les ensembles définis de la même façon en remplaçant I par J .

- I_{im} (resp. I_{re}) \dots (1.1.1) l'ensemble des $i \in I$ tel que $a_{ii} < 0$ (resp. $a_{ii} > 0$).
- $I_1, ($ resp. $I_2, I_0, I_-), \dots$ (2.1) les ensembles des $i \in I$ tels que a_{ii} , vaut 2 (resp. 1, 0, est < 0)

- $S_\alpha \dots$ (1.1.2 Rq. 7.) support d'un élément α de $\mathbb{K}^{(I)}$ (et dans la suite pour $\alpha \in \mathbb{Q}^{(I)}$ ou $\mathbf{K}^{(I)}$).
- $ht(\alpha) \dots$ (1.1.4 Rq. 7.) hauteur d'un élément α de $\tilde{Q}_{\mathbb{Q},+}$.
- $Z_\alpha \dots$ (1.1.3 et 3.1.2) $Z_\alpha = \{i \in S_\alpha / (A\alpha)_i = 0\}$, où $(A\alpha)_i$ désigne la coordonnée de $A\alpha$ suivant $\tilde{\alpha}_i$
- $\mathbb{W}(A) \dots$ (1.1.5) groupe de Weyl associé à A une matrice de Borcherds normalisée.
- $m_{ij} \dots$ (1.1.5) ordre du produit $R_i R_j$.
- $l(w) \dots$ (1.1.5) longueur d'un élément w du groupe de Weyl.
- $\tilde{\Delta}_w \dots$ (1.1.6) $\{\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+}^* / w(\alpha) \in Q_{\mathbb{Q},-}\}$.
- $B'_Q \dots$ (1.1.15) $\{\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} / w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{re}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i, \forall w \in W\}$.
- $B_Q \dots$ (1.1.15) $\{\alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} / \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \forall i \in I_{re}\}$.
- $N_i \dots$ (pour 1.2.14 et à partir de 2.2) une partie de \mathbb{Q}_+^* , de plus petit élément 1, ou ne contenant pas sa borne inférieure, mais minorée par $3/4$ et contenant 1, et telle que :
 - si $i \in I_2$, alors $N_i = \{1, 2\}$ (seulement utilisé à partir de 2.2) ;
 - si $i \in I_1$, alors $N_i = \{1\}$ ($I_{re} = I_1$ dans le premier chapitre) ;
 - si $i \in I$ et $j \in I_{re}$, alors $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (ou seulement parfois $2N_i a_{ji} / a_{jj} \subset \mathbb{Z}$ (1.2.7 et 4.4.19)).
- $M_i \dots$ (1.2.14 et à partir de 2.2) plus petite partie de \mathbb{Q}_+ contenant N_i et 0 et stable sous l'addition.
- $N_{i,ind}$ (resp. $M_{i,ind}$) \dots (1.2.14 et 2.2) éléments de N_i (resp. $M_i \setminus \{0\}$) qui ne s'écrivent pas comme somme d'éléments de cet ensemble.
- $\Delta(A, \{N_i\}) \dots$ (2.2.1) système de racines à base libre associé à la matrice A et aux N_i .
- $K' \dots$ (2.3.1) $\{\alpha \in \bigoplus_{j \in I} M_j \alpha_j \setminus \sqcup_{i \in I} (\mathbb{Q}_+) \alpha_i ; S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 (\forall i \in I_{re})\}$.
- $K_c \dots$ (2.3.1) $K' \cup (\bigcup_{i \in I_{im}} N_i \alpha_i)$ dans le cas libre et $\Psi(\tilde{K}_c)$ sinon.
- $Ch(\alpha ; \alpha_i) \dots$ (1.2.14, 2.3.6, 2.3.7 et 4.1) α_i -chaîne issue de α .
- $\text{sgn}(a) \dots$ (3.2.3) fonction donnant le signe du scalaire a (dans $\{-, 0, +\}$).

Définitions

- Actions du groupe de Weyl sur \mathfrak{h} , \mathfrak{h}^\wedge et $\tilde{Q} \dots$ (quatrième paragraphe de 1.1).
- Bases de racines sur \mathbb{Z} au sens de J.-Y. Hée \dots (cinquième paragraphe de 1.1).

- Bonne décomposition ... (1.2.17 et 4.2.20).
- Condition de chaîne réelle ... (1.2.13 et 2.2)).
- Coracine d'une racine réelle ... (1.1.9).
- Coracine d'une racine imaginaire ... (3.2.5).
- Décomposition réduite d'un élément w du groupe de Weyl ... (1.1.5).
- Diagramme de Dynkin d'une matrice de Borcherds normalisée ... (1.1.1 Rq. 5.).
- Diagramme de Dynkin d'une matrice de Borcherds relative ... (2.1).
- Diagramme de Dynkin d'un système de racines à base libre ... (2.2).
- Dualité non dégénérée ... (1.1.4 Rq. 3.).
- Isomorphisme de réalisation ... (1.1.4).
- Matrice indécomposable ... (1.1.1 Rq. 4.).
- Matrice de Borcherds générale ... (1.1.1).
- Matrice de Borcherds normalisée ... (1.1.1 Rq. 2.).
- Matrice de Borcherds relative ... (2.1).
- Matrice de Cartan relative ... (2.1).
- Matrice de Kac-Moody ... (1.1.1 Rq. 3.).
- Matrice de Kac-Moody relative ... (2.1).
- Matrice de Vinberg ... (second paragraphe de 1.1).
- Matrice symétrisable ... (1.1.1 Rq. 3.).
- Morphisme de S.G.R ... (second paragraphe de 4.1).
- Parties de I liées ... (1.1.2 Rq. 8.).
- Réalisation ... (troisième paragraphe de 1.1).
- Racine affine réelle ... (1.1.2 Rq. 2.).
- Racine affine imaginaire ... (1.1.2 Rq. 2.) racine conjuguée à α_i où $i \in I_0$.
- Racine réelle (non) divisible ... (3.1.2).
- Racine réelle (non) multipliable ... (3.1.2).
- Support d'un élément w du groupe de Weyl ... (1.1.7).
- Type de A ... (1.1.2 Rq. 5.) fini, affine, indéfini, profini, proindéfini, semi affine, infini.
- Type de J une partie de I , ... (1.1) c'est le type de $A(J)$.

A.2 Chapitre 1

Notations

- $\tilde{\mathfrak{g}}(A, R) \dots$ (1.2).
- $\mathfrak{g}(A, R) \dots$ (1.2) l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à A .
- $\tilde{\Omega} \dots$ (1.2.4) système de racines universel de $\mathfrak{g}(A, R)$.
- $K \dots$ (1.2.15) $\{\alpha \in \tilde{Q}_+ \setminus (\bigcup_{i \in I_{\text{im}}} \mathbb{Z}\alpha_i ; S_\alpha \text{ est connexe et } \langle \alpha, \alpha_i^\wedge \rangle \leq 0 (\forall i \in I))\}$.

Définitions

- Graphe de Coxeter \dots (1.1.4).

A.3 Chapitre 2

Dans ce chapitre la base Π est supposée libre, l'utilisation des \sim n'est pas nécessaire.

Notations

- $A \dots$ matrice de Borcherds relative toujours indexée par I .
- M.R.I \dots (2.1) matrice de Kac-Moody relative indécomposable, classification.
- $K(A) \dots$ (2.1) matrice de Kac-Moody associée à A .

A.4 Chapitre 3

Notations

- $K_{(S,Z)} \dots$ (3.1.2) $\{\alpha \in K_c / S_\alpha = S \text{ et } Z_\alpha = Z\}$.
- $C_{\mathbb{Q}} \dots$ (3.2.7) chambre de Weyl négative.
- $X^\wedge \dots$ (3.2.7) cône de Tits négatif.

Définitions

- Cônes duaux \dots (3.1.11).

A.5 Chapitre 4

Notations

- $P_i \dots$ (4.1) le sous-groupe additif de \mathbb{Q} engendré par N_i (ou M_i)(4.1).
- $R = \sum_{i \in I} P_i \alpha_i ; R_+ = \sum_{i \in I} M_i \alpha_i$.

- $\sim \dots$ (4.2) caractérise ce qui est relatif au revêtement.
- $\Psi \dots$ (4.2) projection de \tilde{Q} sur Q .
- $\Delta \dots$ (4.2.15).
- $\Delta_n \dots$ (4.2.13).
- $\zeta(\alpha), \zeta^\wedge(\alpha) \dots$ (4.3.3).
- $\theta \dots$ (troisième paragraphe de 4.3) fonction « hauteur » de la condition (BN).
- $H_\alpha \dots$ (4.4.1) $\{v \in V^*/v(\alpha) = \langle \alpha, v \rangle = 0\}$.
- $\mathcal{H}_\Delta \dots$ (4.4.1) $\{H_\alpha/\alpha \in \Delta_{\text{re}}\}$.
- $x \approx_\Delta y \dots$ (4.4.1) relation d'équivalence sur V^* .

Définitions

- Facettes \dots (4.4.5 et 4.4.8).
- Revêtement libre d'un S.G.R. \dots (4.2).
- S.G.R. \dots (4.1) système générateur de racines.

A.6 Chapitre 5

Notations

- $\Omega \dots$ (5.1) sous-système de racines de Δ .

Définitions

- Chambre relative \dots (troisième paragraphe de 5.1).
- Mur relatif \dots (troisième paragraphe de 5.1).
- Partie de Δ *indécomposable* \dots (5.2.1).
- Partie de Δ *fortement décomposable* \dots (5.2.3 Rq.).
- Racine indivisible \dots (5.2.1).
- Relation d'équivalence sur les racines imaginaires \dots (5.2.6)

A.7 Chapitre 6

Notations

- $\text{Diag}(S) \dots$ (6.1) groupe des automorphismes de diagramme.

- $Diag_A(S) \dots$ (6.1) groupe des automorphismes de diagramme compatibles à A .
- $\Gamma \dots$ (6.1) un groupe fini d'automorphismes de diagramme compatibles à A .
- $Q_\Gamma, R_\Gamma \dots$ (second paragraphe de 6.1).
- $\bar{\Delta} \dots$ (second paragraphe de 6.1) système de racines relatives.
- $S_\Gamma \dots$ (6.1.8) système générateur de racines quotient.
- $F(i) \dots$ (6.2).
- $\alpha^1 \dots$ (6.2) racine restreinte.
- $\Delta^1 \dots$ (6.2) système des racines restreintes.

Définitions

- Support relatif \dots (6.2).

B. Index des définitions et axiomes

- (Bn) pour $1 \leq n \leq 4 \dots$ (1.1.1) axiomes d'une matrice de Borcherds générale.
- (Bn) pour $1 \leq n \leq 4$ et $(B5) \dots$ (1.1.1 Rq. 2.) axiomes d'une matrice de Borcherds normalisée.
- (Bn) pour $1 \leq n \leq 4$ et $(B'5) \dots$ (2.1) axiomes d'une matrice de Borcherds relative.
- (SRn) pour $1 \leq n \leq 5 \dots$ (1.2.13) les propriétés du système de racine universel de $\mathfrak{g}(A)$.
- $(SRnb)$ (pour $1 \leq n \leq 5$)... (2.2) axiomes des systèmes de racines à base libre.
- $(SGRn)$ $1 \leq n \leq 6 \dots$ (4.1) axiomes d'un système générateur de racines.
- $(SSRn)$ pour $n \in \{1, 2, 3\} \dots$ (5.1) axiomes d'un sous-système de racines.
- (Mn) pour $n \in \{1, 2, 3\} \dots$ (4.1.1) axiomes d'un morphisme de S.G.R.
- (ADn) pour $n \in \{1, 2, 3\} \dots$ (6.1) axiomes d'un automorphisme de diagramme.

C. Index des propriétés

- Propriétés d'une matrice de Vinberg (1.1) :
 - (Fin) $\det(A) \neq 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$;
 - $Av \geq 0$ implique $v > 0$ ou $v = 0$;
 - A et A^t sont alors dites *de type fini* ;
 - (Aff) $\det(A) = 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au = 0$;
 - $Av \geq 0$ implique $Av = 0$; A et A^t sont alors dites *de type affine* ;
 - (Ind) Il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$;
 - $Av \geq 0, v \geq 0$ implique $v = 0$; A et A^t sont alors dites *de type indéfini*.
- Propriétés d'une réalisation (1.1) :
 - (R1) $\sum_i n_i \alpha_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, implique $n_i = 0$ pour tout $i \in I$; la famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est alors dite *\mathbb{N} -libre* ;
 - (R2) $\alpha_i^\wedge \neq 0$ pour tout $i \in I$;
 - (R3) L'espace \mathfrak{h}^\wedge s'injecte dans \mathfrak{h}^* (i.e. la dualité est non dégénérée) ;
 - (R4) La famille Π est une base de \mathfrak{h}^\wedge ;
 - (R5) Dans \mathfrak{h}^* , $[Q]$ est un \mathbb{Z} -module libre qui admet pour base une famille libre de \mathfrak{h}^* ;
 - (R6) La famille $([\alpha_i])_{i \in I}$ est libre dans le \mathbb{Z} -module $[Q]$;
 - (R7) La famille Π est libre dans \mathfrak{h}^\wedge , la réalisation est dite *libre* ;
 - (R8) La famille Π^\wedge est libre dans \mathfrak{h} , la réalisation est dite *colibre*.
- Propriétés d'un système générateur de racines (4.1) :
 - (SGRN) ... (premier paragraphe de 4.1) condition de normalisation d'un S.G.R. ;

- (Z) ... (premier paragraphe de 4.1) condition « d'intégralité » du S.G.R. ;
 (SGRord) ... (4.2.4) ;
 (P.I.F.) ... (4.2.5) propriété d'intersection faible ;
 (BN) ... (troisième paragraphe de 4.3) hypothèse d'existence d'une fonction « hauteur » ;
- Propriété de symétrie ... (4.2.18).
 - Hypothèses supplémentaires sur les S.G.R. :
 - (MP₁) ... (4.3) Il existe une base $(\gamma_j)_{j \in J}$ de $Q_{\mathbb{Q}}$ telle que $\Pi \subset \bigoplus_{j \in J} \mathbb{N}\gamma_j$;
 - (T) ... (4.4) C_{\emptyset} engendre V^* ;
 - (MP) ... (4.4) hypothèse fondamentale de Moody et Pianzola pour leurs ensembles de données radicielles [MP] : L'ensemble $Q(I_{re})$ est un \mathbb{Z} -module libre possédant une base $(\gamma_j)_{j \in J}$ libre dans V telle que $\Pi_{re} \subset \bigoplus_{j \in J} \mathbb{N}\gamma_j$;
 - (MP₂) ... (4.4) il existe une base de V telle que Π_{re} soit incluse dans le cône positif engendré par cette base ;
 - (L) ... (4.4) Π_{re} est libre dans V .
 - (SC) ... (5.1) Propriété d'un système clos.
 - (B) ... (5.1.14) L'une des trois conditions (BN), (BZ) ou encore (BF) est vérifiée.
 - (BF) ... (5.1.14) $V_{\mathbb{R}}$ est de dimension finie et 0 n'est pas adhérent à $R_+ \setminus \{0\}$.
 - (BZ) ... (5.1.14) (Z) et Π n'a pas une infinité de composantes connexes de type affine.
 - (D) (E) ... (6.2) hypothèses supplémentaires nécessaires lors du passage au quotient par une partie de type fini.