FRANÇOIS LOESER

Faisceaux pervers, transformation de Mellin et déterminants

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 66 (1996)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1996_2_66__1_0>

MÉMOIRES DE LA SMF 66

FAISCEAUX PERVERS, TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉTERMINANTS

François LOESER

Société Mathématique de France 1996

FAISCEAUX PERVERS, TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉTERMINANTS

François LOESER

Résumé. — La transformation de Mellin des faisceaux pervers ℓ-adiques sur un tore associe à un faisceau pervers un module cohérent sur le schéma des caractères ℓ-adiques du tore. On étudie dans ce mémoire les aspects arithmétiques de cette transformation de Mellin, tels que l'action semi-linéaire du groupe de Galois sur le transformé de Mellin. On exprime en particulier certains déterminants associés à des faisceaux pervers en fonction de faisceaux pervers hypergéométriques.

Abstract. — The Mellin transformation of ℓ-adic perverse sheaves on a torus associates a coherent module on the scheme of ℓ-adic characters of the torus to a perverse sheaf. In this memoir, we study the arithmetical aspects of the Mellin transformation, such as the semi-linear Galois action on the Mellin transform. In particular, we express several determinants associated to perverse sheaves in terms of hypergeometric perverse sheaves.

Mots clefs. — Faisceaux pervers, faisceaux hypergéométriques, déterminants, transformation de Mellin, cohomologie ℓ-adique.

***Classification mathématique par sujets* (1991)**. — 11K30, 14G10.

François LOESER
Centre de Mathématiques, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau, URA 169 du CNRS.
Institut de Mathématiques, Université P. et M. Curie, Case 82, 4 place Jussieu F-75252 Paris Cedex 05, UMR 9994 du CNRS.
E-mail : loeser@math.polytechnique.fr

Table des matières

INTRODUCTION

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et soit T un k-tore (i.e. un k-schéma en groupes isomorphe à

$$\operatorname{Spec} k[x_1, \cdots, x_n, x_1^{-1}, \cdots, x_n^{-1}]).$$

Dans le travail [G-L], effectué en collaboration avec O. Gabber, on a étudié la catégorie des faisceaux pervers ℓ-adiques (pour ℓ différent de p) sur T en utilisant les foncteurs de transformation de Mellin. Ces foncteurs, notés $\mathcal{M}_*$ et $\mathcal{M}_!$, associent à un faisceau pervers sur T, ou plus généralement à un objet de $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, un objet de $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{C}(T))$, la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-modules à cohomologie bornée et cohérente sur le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma $\mathcal{C}(T)$ des caractères ℓ-adiques. L'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}(T)$ s'identifie au groupe des caractères ℓ-adiques continus du groupe fondamental modéré du tore T, et, pour A un objet de $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$, la restriction de $\mathcal{M}_*(A)$ (resp. $\mathcal{M}_!(A)$) à χ s'identifie canoniquement à $R\Gamma(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi)$ (resp. $R\Gamma_c(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi)$). De plus $\mathcal{M}_*(A)$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-module si et seulement si A est pervers.

Un des résultats principaux de [G-L] est la détermination de l'ensemble $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ des faisceaux pervers irréductibles sur T de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à un 1. On peut munir naturellement $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ d'une structure de groupe provenant du produit de convolution. On a un isomorphisme de groupes abéliens $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T) \simeq T(k) \times \mathbf{Z}^{(\mathcal{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$, en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-tores de dimension 1 de T. En fait, on a introduit dans [G-L] une catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ obtenue en localisant la catégorie abélienne des faisceaux pervers ℓ-adiques sur T par rapport à la sous-catégorie pleine des objets de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. On a démontré dans [G-L] que

$\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est munie d'un produit de convolution $*_{\mathrm{int}}$ et que, avec ce produit, elle est munie d'une structure naturelle de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-catégorie tannakienne. On a donc en particulier un foncteur déterminant dans cette catégorie que l'on note $\det_{\mathrm{int}}$ et que l'on peut voir comme étant à valeur dans $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$. D'autre part, à tout faisceau pervers A sur T on peut associer des faisceaux pervers hypergéométriques $H_!(A)$ et $H_{\mathrm{int}}(A)$ qui ne dépendent que de la monodromie modérée de A à l'infini. Un des résultats principaux du présent travail, le théorème 3.6.1, est que les classes de $\det_{\mathrm{int}} A$ et de $H_{\mathrm{int}}(A)$ sont égales dans $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$, à convolution par un faisceau ponctuel près, sous l'hypothèse que A provient par changement de base d'un objet défini sur un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$. De plus si A vérifie une condition de modération à l'infini l'ambiguïté provenant du faisceau ponctuel peut être levée. Pour démontrer ce résultat, on se ramène au cas où k est la clôture algébrique d'un corps fini k_0 et où A provient par changement de base d'un faisceau pervers A_0 défini sur un k_0-tore déployé T_0. Dans ce cas les transformés de Mellin $\mathcal{M}_*(A)$ et $\mathcal{M}_!(A)$ sont munis d'une action semi-linéaire donnée par la transformation de Frobenius géométrique. Plus généralement, on a des foncteurs de transformation de Mellin ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ qui associent à un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ un objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ muni d'un isomorphisme φ-semi-linéaire, avec φ l'automorphisme de $\mathcal{C}(T)$ induit par la transformation de Frobenius géométrique. On a donc ainsi associé aux objets discrets que sont les objets de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ des objets continus munis d'isomorphismes φ-semi-linéaires, i.e. des sortes de « cristaux ℓ-adiques ». Contrairement aux foncteurs $\mathcal{M}_*$ et $\mathcal{M}_!$, qui sont loin d'être fidèles, les foncteurs ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ sont injectifs sur les groupes de Grothendieck (proposition 4.2.1). On déduit le théorème 3.6.1 des théorèmes 4.5.1 et 4.5.3, où est effectué le calcul du déterminant de ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$, pour A_0 dans $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, en fonction du transformé de Mellin ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ d'un représentant sur T_0 du faisceau pervers hypergéométrique $H_!(A_0 \otimes k)$. Pour démontrer les théorèmes 4.5.1 et 4.5.3 nous utilisons de façon essentielle la détermination des faisceaux pervers irréductibles sur T de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à un 1 effectuée en [G-L]. Ce résultat permet de se ramener au cas d'un tore de dimension 1, où l'on utilise alors la formule du produit de Laumon pour le déterminant de la cohomologie [La2]. Nous utilisons également le fait que, par le « principe de Hartogs », il suffit de connaître $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ en dehors d'un fermé partout de codimension au moins 2 dans $\mathcal{C}(T)$.

De façon plus générale, si k_0 est un corps de clôture algébrique k, si T_0 est un k_0-tore déployé, et si A_0 est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, le groupe de Galois G de k_0 agit (semi-linéairement) sur $\mathcal{M}_*(A_0 \otimes k)$ et sur $\mathcal{M}_!(A_0 \otimes k)$. On définit ainsi des foncteurs ${}^G\mathcal{M}_*$ et ${}^G\mathcal{M}_!$ qu'il nous ensemble intéressant d'étudier. Par exemple, pour $T_0 = \operatorname{Spec} k_0[t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}]$ et $A_0 = Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[2](1))$, avec $j : U \to T_0$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire du fermé $t_1 + t_2 = 1$, on retrouve un module introduit par Ihara dans [I1]. Plus précisément la restriction de $\mathcal{M}_!(A_0 \otimes k)$ muni de l'action de G à la composante connexe de l'unité $\mathcal{C}(T)_\ell \simeq \operatorname{Spec} \bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ est isomorphe au module d'Ihara après extension des scalaires de $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ à $\bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ (théorème 6.5.2). Ce module est de rang 1 et admet une base canonique dans laquelle l'action de G est donnée par des séries dont les coefficients sont reliés à l'action de G sur les ℓ-unités circulaires ([I1],[A],[Co2],[I-K-Y],[I3]). Dans le cas général, pour A_0 un faisceau pervers ℓ-adique sur T_0, si on prend des sections m_i du module $\mathcal{M}_*(A_0 \otimes k)$ qui induisent une base au point générique de $\mathcal{C}(T)_\ell$, l'action d'un élément σ de G sur les m_i sera donnée par une matrice Φ_σ dont les coefficients appartiennent au corps des fractions de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$. On peut faire essentiellement de même sur les autres composantes de $\mathcal{C}(T)$. On obtient ainsi des matrices qui fournissent une description semi-linéaire de l'action du groupe de Galois sur les faisceaux pervers sur un tore et qui sont une généralisation des séries d'Ihara. Il est possible d'étendre les théorèmes 4.5.1 et 4.5.3 à ce cadre : le calcul du déterminant de ${}^G\mathcal{M}_!(A_0)$ pour A_0 dans $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est effectué en 6.4 pour k_0 de caractéristique > 0 et en 7.2 pour k_0 de caractéristique 0.

D'une certaine façon on peut voir la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-modules cohérents munis d'un isomorphisme φ-semi-linéaire (resp. d'une action semi-linéaire de G), dont une définition précise est donnée en 4.1 (resp. 6.1), comme étant un analogue arithmétique de la catégorie des modules holonomes aux différences (cf. [L-S1], [S]). Par analogie avec le résultat principal de [S] on peut conjecturer que, pour k un corps algébriquement clos et T un k-tore, pour tout faisceau pervers ℓ-adique A sur T, il existe un fermé Z de $\mathcal{C}(T)$, réunion finie de cotores algébriques translatés (cf. 2.1) de codimension 1, tel que la restriction de $\mathcal{M}_*A$ à $\mathcal{C}(T) - Z$ soit (isomorphe à) un module libre. Dans la situation précédente, cela entrainerait l'existence de sections m_i telles que les matrices Φ_σ aient leur pôles situés sur Z.

Passons en revue le contenu de cet article. Après deux premières sections de caractère préliminaire, nous énonçons dans la section 3 les résultats concernant le calcul de $\det_{\text{int}}$ en caractéristique > 0. La section 4 est consacrée au cas des corps finis et aux foncteurs ${}^\varphi\mathcal{M}_*$ et ${}^\varphi\mathcal{M}_!$. Dans la section 5 on démontre les principaux résultats énoncés dans les sections précédentes. La section 6 est consacrée à l'action du groupe de Galois sur les transformés de Mellin. On y effectue le calcul du déterminant de ${}^G\mathcal{M}_!$ et on y fait lien avec le module d'Ihara.

Dans la section 7 on donne l'analogue des principaux résultats précédents en caractéristique 0. En particulier on associe à un faisceau pervers A sur T des faisceaux pervers hypergéométriques $H'_!(A)$ et $H'_{\text{int}}(A)$. Dans ce cas le calcul de $\det_{\text{int}}$ a déjà été effectué au langage près dans le travail [L-S1] dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules. Nous en donnons en 7.3 une traduction dans le formalisme du présent article. Enfin dans l'appendice A on démontre un résultat qui n'est pas utilisé dans le reste de l'article. Ce résultat affirme essentiellement que les couples (L, Φ) avec L un $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-module localement libres de rang 1 et Φ un isomorphisme φ-semi-linéaire sont déterminés par les valeurs propres de Φ^e en x pour e parcourant les entiers et x parcourant l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}(T)$ fixés par φ^e. Dans le cas non ramifié une forme essentiellement équivalente de ce résultat est due à Coleman ([Co1], [A]). Enfin l'appendice B est consacré à la démonstration d'un lemme sur le comportement des constantes locales par torsion par un caractère multiplicatif.

Cet article est une suite de [G-L]. Il n'aurait donc pas vu le jour sans ce précédent travail effectué en collaboration avec O. Gabber. Je tiens également à remercier O. Gabber pour les discussions que nous avons pu avoir concernant certains points de ce travail, en particulier pour son aide dans la démonstration du théorème A.1.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET CONVENTIONS

1.1. Soit k un corps algébriquement clos et soit k_0 un sous-corps de k dont k est la clôture algébrique. On note p l'exposant caractéristique de k. Cet entier est égal à la caractéristique de k si celle ci est non nulle, et à 1 sinon. Soit ℓ un nombre premier distinct de p et soit $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_\ell$. On pose $\hat{\mathbf{Z}}(1)(k) := \varprojlim_{(p,N)=1} \mu_N(k)$ et on pose $\mathbf{Z}_\ell(1)(k) := \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(k)$.

1.2. Soit T un k-tore. On note $X_*(T)$ le groupe abélien libre de rang n, $X_*(T) := \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{gr}}(\mathbf{G}_{m,k}, T)$, $\hat{X}_*(T) := X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}(1)(k)$ et $X_{*\ell}(T) := X_*(T) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell(1)(k)$.

On a des isomorphismes canoniques $X_*(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \mathbf{Z}$, $\hat{X}_*(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \hat{\mathbf{Z}}(1)(k)$ et $X_{*\ell}(\mathbf{G}_{m,k}) \simeq \mathbf{Z}_\ell(1)(k)$.

On note $\pi_1(T)$ le groupe fondamental de T pointé en 1, $\pi_1(T)^t$ le groupe fondamental modéré, c'est à dire le quotient de $\pi_1(T)$ par sa partie sauvage, et $\pi_1(T)_\ell$ le quotient pro-ℓ maximal de $\pi_1(T)^t$. Par la théorie de Kummer $\hat{X}_*(T)$ s'identifie canoniquement à $\pi_1(T)^t$ et $X_{*\ell}(T)$ à $\pi_1(T)_\ell$.

1.3. Si X est un schéma séparé et de type fini sur schéma régulier S de dimension 0 ou 1, on note $D_c^b(X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée des complexes de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceaux à cohomologie bornée constructible sur X et $\mathrm{Perv}(X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ la catégorie abélienne des faisceaux pervers ℓ-adiques sur X. Quand S est le spectre d'un corps fini ou d'un corps algébriquement clos ces catégories sont définies dans [B-B-D], le cas général résultant du formalisme de [E].

Si X_0 est un k_0-schéma séparé et de type fini, on pose $X := X_0 \otimes k$. On note $\Phi : D_c^b(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ le foncteur d'image inverse, $D_c^b(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ l'image essentielle de Φ et $\mathrm{Perv}(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ l'image essentielle de la restriction de Φ à $\mathrm{Perv}(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. La catégorie $\mathrm{Perv}(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathrm{Perv}(X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Si A_0 est un objet de $D^b_c(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on note A ou $A_0 \otimes k$ l'objet correspondant de $D^b_c(X_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Pour tout point fermé λ de X on note $\delta_{\{\lambda\}}$ l'image directe par l'inclusion de λ dans X du faisceau $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ sur λ. Si T est un k-tore et si χ est un caractère $\chi : \pi_1(T)^t \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, on note $\mathcal{L}_\chi$ le faisceau de Kummer correspondant. C'est un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur T.

1.4. Soit T_0 un k_0-tore. On note $\pi : T_0 \times T_0 \to T_0$ la loi de groupe, et si A_0 et B_0 sont des objets de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on pose $A_0 *_! B_0 := R\pi_!(A_0 \boxtimes B_0)$ et $A_0 *_* B_0 := R\pi_*(A_0 \boxtimes B_0)$.

1.5. Si R est un anneau commutatif topologique linéairement topologisé et G un groupe abélien profini, on note $R[[G]] = \varprojlim R/I[G/U]$, la limite étant prise sur les idéaux ouverts I de R et les sous-groupes ouverts U de G.

1.6. Si A et B sont deux ensembles, on note $A^{(B)}$ l'ensemble des applications de B dans A à support fini.

1.7. Si $\mathcal{X}$ est un schéma localement noethérien régulier de dimension finie, on note $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$ la sous-catégorie triangulée de la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules formée des complexes à cohomologie bornée et cohérente (i.e. de type fini). Pour tout objet K de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X})$, on pose $DK := R\mathcal{H}\mathrm{om}(K, \mathcal{O}_\mathcal{X})$. Avec ces conventions on a des isomorphismes de foncteurs $D \circ D \simeq \mathrm{Id}$.

CHAPITRE 2

RAPPELS ET COMPLÉMENTS

Dans cette section k est un corps algébriquement clos et T un k-tore. Dans [G-L] on fait l'hypothèse que k est de caractéristique strictement positive, mais les 7 premières sections de [G-L] restent valides telles quelles en général.

2.1. Le schéma $\mathcal{C}(T)$ et la transformation de Mellin

On renvoie à [G-L] 3.2 et 3.3 pour les définitions et les démonstrations.

On a défini dans [G-L] 3.2 un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-schéma $\mathcal{C}(T)$ dont l'ensemble des points fermés s'identifie canoniquement au groupe des caractères continus $\pi_1(T)^t \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (et à l'ensemble des $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-points de $\mathcal{C}(T)$). On note $\mathcal{C}(T)_\ell$ la composante connexe de $\mathcal{C}(T)$ contenant l'identité. On a par définition

$$\mathcal{C}(T)_\ell = \operatorname{Spec} \bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]].$$

D'après [G-L] 3.2.2, $\mathcal{C}(T)_\ell$ est un schéma noethérien régulier. Les composantes connexes de $\mathcal{C}(T)$ sont toutes isomorphes comme schémas à $\mathcal{C}(T)_\ell$.

Si $\pi : T \to T'$ est un morphisme de tores, on note $\pi^\vee : \mathcal{C}(T') \to \mathcal{C}(T)$ le morphisme qu'on en déduit par fonctorialité. Si π est surjectif de noyau un tore, on dit que $\pi : T \to T'$ est un quotient de T. Un cotore algébrique de $\mathcal{C}(T)$ est un sous-schéma de la forme $\pi^\vee(\mathcal{C}(T'))$ avec $\pi : T \to T'$ un quotient de T. Un sous-schéma de la forme $\chi \cdot Z$ avec χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ et Z un cotore algébrique de $\mathcal{C}(T)$ est appelé cotore algébrique translaté (cf. [G-L] 3.2).

On a défini dans [G-L] 3.3 des foncteurs de « transformation de Mellin » $\mathcal{M}_*$ et $\mathcal{M}_!$:

$$D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{C}(T)).$$

Pour A un objet de $D_c^b(T,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ on a, en notant $i_\chi : \{\chi\} \to \mathcal{C}(T)$ l'inclusion, des isomorphismes canoniques ([G-L] 3.3.2)

$$Li_\chi^* \mathcal{M}_*(A) \simeq R\Gamma(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

et

$$Li_\chi^* \mathcal{M}_!(A) \simeq R\Gamma_c(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi).$$

La transformation de Mellin $\mathcal{M}_*$ est un foncteur t-exact ([G-L] 3.4.1), la catégorie $D_c^b(T,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ étant munie de la t-structure de la perversité moitié et la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ étant munie de la t-structure usuelle. De même le foncteur $\mathcal{M}_!$ est un foncteur t-exact si on munit la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ de la t-structure duale.

2.2. Les entiers $n_{S,x,\chi}$

Soit S un sous-tore de dimension 1 de T et soit T/S le tore quotient. On note i_S l'inclusion $S \to T$ et $p : T \to T/S$ le morphisme quotient. Soit $\bar{S}$ une compactification propre et lisse de S. (On a $\bar{S} \simeq \mathbf{P}^1_k$ mais on ne choisit pas un tel isomorphisme pour l'instant.) On écrit $\bar{S} - S = \{a, b\}$. On note $\bar{T}$ la compactification partielle associée à $\bar{S}$: on a une projection $\bar{p} : \bar{T} \to T/S$ prolongeant p, et $\bar{T} - T$ est la somme disjointe de deux diviseurs lisses isomorphes à T/S notés $\bar{a}$ et $\bar{b}$, correspondant respectivement à a et à b. On note $j : T \to \bar{T}$ et $i : \bar{T} - T \to T$ les morphismes d'inclusion.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Dans [G-L] 7.3 on a associé à A les complexes de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-modules à cohomologie bornée cohérente

$$\Delta\mathcal{M}_{S,x}(A) := R\Gamma(\bar{x}, i^* Rj_*(A \otimes \mathcal{L}_T))$$

pour $x = a, b$, le terme de droite étant défini dans loc.cit. D'après la proposition 7.3.3 de [G-L] l'objet $\Delta\mathcal{M}_{S,x}(A)$ est isomorphe à un module placé en degré zéro et il existe un ensemble fini K de points fermés de $\mathcal{C}(S)$ tel que le support de $\Delta\mathcal{M}_{S,x}(A)$ soit contenu dans la réunion des $i_S^{\vee -1}(\chi)$, avec χ dans K. De plus, d'après la proposition 7.3.4 de [G-L], la longueur de $\Delta\mathcal{M}_{S,x}(A)$ est la même au point générique de toutes les composantes connexes de $i_S^{\vee -1}(\chi)$. On note cet entier $n_{S,x,\chi}(A)$; l'ensemble des triplets (S, x, χ) tels que $n_{S,x,\chi}(A)$ n'est pas nul est fini.

L'entier $n_{S,x,\chi}(A)$ admet également la description suivante en terme de cycles proches ([G-L] 7.3). On choisit un isomorphisme de tores $T \simeq T/S \times S$, et donc un isomorphisme $\bar{T} \simeq T/S \times \bar{S}$, et on note les projections p_1 et p_2. Pour x dans $\{a, b\}$, on peut identifier $\bar{x}$ à T/S. Soit η_x un point générique du localisé strict de $\bar{S}$ en x. On choisit une clôture séparable $k(\bar{\eta}_x)$ de $k(\eta_x)$ et un isomorphisme de foncteurs fibres $V_{\bar{\eta}_x} \simeq V_1$ sur la catégorie des revêtements étales modérés de S. On note $R\psi^t_{\eta_x,p_2}(A[-1])$ le complexe des cycles proches modérés de $A[-1]$ en η_x relativement à p_2. On note $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta_x,p_2}(A[-1])$ le même objet avec l'action opposée de $\mathrm{Gal}\,(\bar{\eta}_x \,|\, \eta_x)$. C'est un faisceau pervers (cf. [Il] corollaire 4.5), et on peut l'identifier à un faisceau pervers sur $\bar{x} \simeq T/S$ muni d'une action continue de $\pi_1(S)^t$ par le choix précédent de l'isomorphisme de foncteurs fibres. Pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(S)$, on note $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta_x,p_2}(A[-1])^\chi$ le composant χ-isotypique de $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta,p_2}(A[-1])$, c'est à dire le plus grand sous-objet de $R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta_x,p_2}(A[-1])$ sur lequel l'action d'un générateur topologique γ de $\pi_1(S,1)^t$ est de la forme $\chi(\gamma) + N_\gamma$ avec N_γ nilpotent. On a l'égalité

$$n_{S,x,\chi}(A) = \chi(\bar{x}, R\psi^{t,\mathrm{op}}_{\eta_x,p_2}(A[-1])^\chi).$$

2.3. Rappels sur la catégorie $\mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$

Rappelons la définition de la catégorie $\mathrm{Perv_{int}}(\mathrm{T}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ définie dans [G-L] 3.7. On note $S(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie de la catégorie abélienne $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ formée des faisceaux pervers sur T de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Si A est un objet de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note A_t le plus grand sous-objet de A appartenant à $S(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et A^t le plus petit sous-objet B de A tel que A/B appartienne à $S(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ (ceci a un sens car la classe des sous-objets de A appartenant à $S(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est stable par sous-objets et somme). On note $\mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont les objets sont les faisceaux pervers A tels que $A_t = 0$ et $A^t = A$. Cette catégorie est munie d'une structure de catégorie abélienne (cf. [G-L] 3.7.2).

On a un foncteur exact et commutant à la dualité,

$$\mathrm{int} : \mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$$

qui à un objet A de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ associe

$$A_{\mathrm{int}} := A^t/(A^t \cap A_t) \simeq (A^t + A_t)/A_t.$$

On a de plus un produit de convolution

$$*_{\mathrm{int}} : \mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \times \mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$$

qui est un bifoncteur biexact commutatif et associatif commutant à la dualité. Si A et B sont des objets de $\mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques

$$A *_{\mathrm{int}} B \simeq ({}^pH^0(A *_! B))_{\mathrm{int}} \simeq ({}^pH^0(A *_* B))_{\mathrm{int}}. \tag{2.3.1}$$

D'après [G-L] Théorème 3.7.5, la catégorie $\mathrm{Perv_{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ munie du produit $*_{\mathrm{int}}$ peut être munie d'une structure de catégorie tannakienne.

2.4. Les foncteurs $\det_{\rm int}$, $\det_!$ et $\det_*$

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}_{\rm int}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On note $r = \chi(T, A)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de A. Soit $A^{*_{\rm int}r}$ le produit $A *_{\rm int} \cdots *_{\rm int} A$ (r fois). De l'action du groupe symétrique S_r sur T^r, on déduit une action de S_r sur $A^{*_{\rm int}r}$. On a ainsi un morphisme d'antisymétrisation

$$a : A^{*_{\rm int}r} \longrightarrow A^{*_{\rm int}r}$$

donné par

$$a = \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \sigma^*,$$

en notant σ^* l'automorphisme de $A^{*_{\rm int}r}$ associé à σ.

On définit le faisceau pervers $\det_{\rm int}(A)$ comme le faisceau pervers image $\mathrm{Im}\, a$. Il est clair que c'est un objet de $\mathrm{Perv}_{\rm int}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. C'est aussi le déterminant de A dans la catégorie tannakienne $(\mathrm{Perv}_{\rm int}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell), *_{\rm int})$.

En général, pour A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on peut également définir des faisceaux pervers $\det_!(A)$ et $\det_*(A)$. Si $r = \chi(T, A)$, on définit $\det_! A$ comme l'image du morphisme de faisceaux pervers

$${}^pH^0 a : {}^pH^0 A^{*_!d} \longrightarrow {}^pH^0 A^{*_!d},$$

en notant

$$a : A^{*_!r} \longrightarrow A^{*_!r}$$

le morphisme d'antisymétrisation. On définit de même $\det_*(A)$ en remplaçant $!$ par $*$. Dans toutes ces définitions, on convient qu'un produit de convolution indexé par l'ensemble vide est égal à $\delta_{\{1\}}$.

PROPOSITION 2.4.1. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(1) *On a un isomorphisme canonique*

$$D \det_* A \simeq \det_! DA.$$

(2) *On a des isomorphismes canoniques*

$$\det_{\rm int}(A_{\rm int}) \simeq (\det_!(A))_{\rm int} \simeq (\det_*(A))_{\rm int}.$$

(3) *Soit U un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ sur lequel $\mathcal{M}_* A$ est isomorphe à un module localement libre. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{M}_*(\det_* A)_{|U} \simeq \det \mathcal{M}_* A_{|U}.$$

On a également l'énoncé analogue pour $\mathcal{M}_!$ et $\det_!$.

(4) *Les faisceaux pervers* $\det_!(A)$, $\det_*(A)$, *et* $\det_{\rm int}(A_{\rm int})$ *sont de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1.*

Démonstration. — L'énoncé (1) est conséquence de la dualité et (2) est conséquence directe des définitions, de 2.3.1 et de l'exactitude du foncteur int. Démontrons (3) pour $\mathcal{M}_*A$, l'énoncé pour $\mathcal{M}_!A$ étant dual. Comme $\mathcal{M}_*(A^{*_*r})$ est isomorphe à un module localement libre sur U (d'après [G-L] 3.3.1 (f)), on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{M}_*(A)^{\otimes r}_{|U} \simeq \mathcal{M}_*(A^{*_*r})_{|U} \simeq \mathcal{M}_*({}^pH^0(A^{*_*r}))_{|U}$$

par t-exactitude de $\mathcal{M}_*$ ([G-L] 3.4.1). Par ces isomorphismes $\det \mathcal{M}_*A_{|U}$, qui est canoniquement isomorphe à l'image du morphisme d'antisymétrisation

$$\mathcal{M}_*(A)^{\otimes r}_{|U} \longrightarrow \mathcal{M}_*(A)^{\otimes r}_{|U},$$

correspond à l'image de $\mathcal{M}_*({}^pH^0a)_{|U}$. Par t-exactitude de $\mathcal{M}_*$ celle-ci est canoniquement isomorphe à $\mathcal{M}_*(\det_*A)_{|U}$. Le fait que les faisceaux pervers $\det_!(A)$ et $\det_*(A)$ soient de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 est conséquence de (3) et de [G-L] 3.4.3, et on en déduit l'énoncé pour $\det_{\mathrm{int}}(A_{\mathrm{int}})$ par (2). $\square$

2.5. Objets ψ-modérés à l'infini

Soit A un faisceau pervers sur $\mathbf{G}_{m,k}$. On dit que A est modéré à l'infini si ses modules de cycles proches en 0 et ∞ sont modérés. Plus généralement si A est un objet de $D^b_c(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on dit que A est modéré à l'infini si ses objets de cohomologie pervers le sont.

Fixons un isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n \simeq \operatorname{Spec} k[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}]$ et notons $\pi_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. Si A est un objet de $D^b_c(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on dit que A est ψ-modéré à l'infini, si pour tout i et pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$, $R\pi_{i!}(A \otimes \mathcal{L}_\chi)$ est modéré à l'infini. Il est clair que si $T = \mathbf{G}_{m,k}$ et ψ est l'identité, A est modéré à l'infini si et seulement si A est ψ-modéré à l'infini.

2.6. Valeurs critiques

Dans toute la suite de ce numéro on fixe un isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n \simeq \operatorname{Spec} k[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}]$.

Pour tout objet K de $D^b_c(\mathbf{G}_{m,k}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, pour tout point fermé x de $\mathbf{G}_{m,k}$, on note $a_x(K)$ l'entier chute totale du rang de K en x (cf. [La2] 2.2). Si K est un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau, on a

$$a_x(K) := r(K) - r_x(K) + s_x(K)$$

en notant $r(K)$ le rang générique de K, $r_x(K)$ le rang en x et $s_x(K)$ le conducteur de Swan en x. En général $a_x(K)$ est défini par additivité à partir de ce cas. Comme l'entier $a_x(K)$ est nul pour presque tout x, on peut poser

$$\lambda(K) := \prod_{x \in \mathbf{G}_{m,k}(k)} x^{-a_x(K)}.$$

Soit $\pi_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. Pour tout objet A de $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on pose $\lambda_i(A) = \lambda(R\pi_{i!}(A))$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$. On note $\lambda(A)$ le point fermé de T de composantes $\lambda_i(A)$.

PROPOSITION 2.6.1. — (1) *Pour tout triangle $A \to B \to C$ dans la catégorie $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a $\lambda(B) = \lambda(A) \cdot \lambda(C)$.*

(2) *Pour tout faisceau pervers A sur T vérifiant $\chi(T, A) = 0$ on a $\lambda(A) = 1$.*

(3) *Pour tout faisceau pervers A sur T on a $\lambda(A) = \lambda(A_{\mathrm{int}})$.*

(4) *Soit A un objet de $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui est ψ-modéré à l'infini. Pour tout point fermé a de T on a*

$$\lambda(\delta_{\{a\}} *_! A) = \lambda(\delta_{\{a\}} *_* A) = a^{\chi(T,A)} \cdot \lambda(A).$$

Si A est de plus pervers, on a également

$$\lambda(\delta_{\{a\}} *_{\mathrm{int}} A_{\mathrm{int}}) = a^{\chi(T,A)} \cdot \lambda(A).$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est clair par additivité de a_x. Démontrons (2) par récurrence sur n. Pour $n = 0$, l'énoncé est clair. D'après (1) on peut supposer en général que A est simple. Pour $n = 1$, d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich, A est alors de la forme $A = \mathcal{L}_\chi[-1]$ (c'est aussi le cas $n = 1$ du Théorème 5.1.2 de [G-L]), ce qui donne l'énoncé. Pour $n \geq 2$, on note T_i le tore de dimension $n - 1$,

$$T_i := \operatorname{Spec} k[t_j, t_j^{-1}]_{j \neq i}$$

et $p_i : T \to T_i$ la projection canonique. Si A n'est pas de la forme $p_i^* A'[1]$ avec A' pervers sur T_i, alors d'après [B-B-D] p. 111, l'objet de cohomologie pervers ${}^pH^1 Rp_{i!}A$ est nul et donc $Rp_{i!}A$ est pervers, car $Rp_{i!}$ est de t-amplitude $[0, 1]$. Par hypothèse de récurrence on a alors $\lambda_j(A) = 1$ pour $j \neq i$. Si A est de la forme $p_i^* A'[1]$ avec A' pervers sur T_i, on a $Rp_{i!}A \simeq A' \oplus A'[-1]$, d'où l'on tire également $\lambda_j(A) = 1$ pour $j \neq i$. L'énoncé (3) est conséquence de (1) et (2). La première partie de (4) est une conséquence directe de la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich, et la seconde partie s'en déduit au vu de (3). □

CHAPITRE 3

FAISCEAUX PERVERS HYPERGÉOMÉTRIQUES ET CALCUL DE $\det_{\mathrm{int}}$

Dans cette section k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et T est un k-tore.

3.1. Faisceaux pervers hypergéométriques

On fixe un caractère additif non trivial $\psi : \mathbf{F}_p \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$. On note $\mathcal{L}_\psi$ le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbf{A}^1_k$ associé à ψ. On note

$$j : \mathbf{G}_{m,k} = \mathrm{Spec}\ k[x, x^{-1}] \longrightarrow \mathbf{A}^1_k = \mathrm{Spec}\ k[x]$$

l'inclusion et inv l'automorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathbf{G}_{m,k}$.

Pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ on pose

$$H(\psi\,;\chi) := \mathcal{L}_\chi \otimes (j^*\mathcal{L}_\psi[1]).$$

C'est un faisceau pervers sur $\mathbf{G}_{m,k}$.

Avec ces notations on peut énoncer de la façon suivante la formule de Davenport-Hasse.

Proposition 3.1.1. — *Etant donné un entier strictement positif N, on note $\pi : \mathbf{G}_{m,k} \to \mathbf{G}_{m,k}$ le morphisme $x \mapsto x^N$ et N' le facteur premier à p de N. Le faisceau pervers $R\pi_!(H(\psi\,;\chi))$ est isomorphe à $\delta_{\{N'^{N'}\}} *_! (*_{!\chi'} H(\psi\,;\chi'))$ pour χ' parcourant l'ensemble des N' points fermés de $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ vérifiant ${\chi'}^N = \chi$.*

Démonstration. — Quand N est premier à p cet énoncé est démontré dans [K] 8.9.1. Il suffit de traiter le cas où $N = p$. Dans ce cas il existe un unique point fermé χ' de $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ tel que ${\chi'}^p = \chi$. On a alors $\pi^*\mathcal{L}_{\chi'} \simeq \mathcal{L}_\chi$ et on se ramène par la formule de projection au cas où $\chi = 1$, qui est clair. $\square$

Etant donnés un entier positif m, un point fermé λ de T, des points fermés χ_i de $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ et des morphismes de tores $\pi_i : \mathbf{G}_{m,k} \to T$, pour $1 \leq i \leq m$, on pose

$$\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_! R\pi_{1!}(H(\psi\,;\chi_1)) *_! \cdots *_! R\pi_{m!}(H(\psi\,;\chi_m)),$$
$$\mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_* R\pi_{1*}(H(\psi\,;\chi_1)) *_* \cdots *_* R\pi_{m*}(H(\psi\,;\chi_m))$$

et

$$\mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) := \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} R\pi_{1*}(H(\psi\,;\chi_1)) *_{\mathrm{int}} \cdots *_{\mathrm{int}} R\pi_{m*}(H(\psi\,;\chi_m)).$$

D'après [G-L] 8.1.3, ce sont des faisceaux pervers sur T. Remarquons que, si π n'est pas constant, le morphisme canonique $R\pi_! H(\psi\,;\chi) \to R\pi_* H(\psi\,;\chi)$ est un isomorphisme et que, compte tenu de la formule de Davenport-Hasse, on peut supposer que les π_i non constants sont des immersions. D'autre part, d'après [G-L] 8.1.4, si les π_i ne sont pas constants, $\mathrm{Hyp}(\mathrm{int}, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ est l'image du faisceau pervers $\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$ par le morphisme canonique

$$\mathrm{Hyp}(!, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)) \longrightarrow \mathrm{Hyp}(*, \lambda, (\chi_i), (\pi_i)).$$

Pour $? =!, *, \mathrm{int}$ on note $\mathrm{Hyp}_?(T)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ formée des objets de la forme $\mathrm{Hyp}(?, \lambda, (\chi_i), (\pi_i))$. Si k_0 est un sous-corps de k et T_0 est un k_0-tore déployé, on note $\mathrm{Hyp}_?(T_0)^g$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ formée des objets isomorphes à des objets de $\mathrm{Hyp}_?(T_0 \otimes k)$.

Remarquons que $\mathrm{Hyp}_?(T)$ ne dépend pas du choix de ψ et que les faisceaux ponctuels $\delta_{\{\lambda\}}$ appartiennent à $\mathrm{Hyp}_?(T)$ (cf. [G-L] 8.1). Si A est un objet de $\mathrm{Hyp}_!(T)$ (resp. $\mathrm{Hyp}_*(T)$), le transformé de Mellin $\mathcal{M}_!(A)$ (resp. $\mathcal{M}_*(A)$) est un module localement libre de rang 1 ([G-L] Proposition 8.1.3).

3.2. Le groupe $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$

Soit $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$. D'après [G-L] 8.1.6, $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ muni du produit induit par $*_{\mathrm{int}}$ est un groupe abélien. De plus l'inverse de la classe de $H(\psi\,;\chi)$ dans $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(\mathbf{G}_{m,k})$ est la classe du faisceau pervers $\delta_{\{-1\}} *_{\mathrm{int}} \mathrm{inv}^*(H(\psi\,;\chi^{-1}))$. Ceci résulte de l'isomorphisme $Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]) \simeq H(\psi\,;1) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,;1)$, avec j l'inclusion $\mathbf{G}_{m,k} - \{-1\} \to \mathbf{G}_{m,k}$ ([K] 8.4.8).

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-tores de dimension 1 de T. Pour $S \in \mathcal{S}$ on note $i_S : S \to T$ l'inclusion. Pour tout $S \in \mathcal{S}$ on se donne un isomorphisme de tores $\varphi_S : \mathbf{G}_{m,k} \to S$.

Soit $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T)$ le groupe abélien

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T) := T(k) \times \mathbf{Z}^{(\mathcal{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}.$$

On définit alors un morphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T) \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$$

en associant à (λ, n), pour λ dans $T(k)$ et n une fonction $\mathcal{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathbf{Z}$ à support fini, la classe de $\delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} (*_{\mathrm{int}\, S,\chi}(R(i_S \circ \varphi_S)_! H(\psi\,;\chi))^{n(S,\chi)})$ (on note multiplicativement le produit $*_{\mathrm{int}}$ et on convient qu'un produit de convolution indexé par l'ensemble vide est égal à $\delta_{\{1\}}$). D'après [G-L] Théorème 8.6.1, le morphisme $\Phi : \mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T) \to \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

3.3. Le monoïde $\mathbf{H}_!(T)$

On note $\mathbf{H}_!(T)$ le monoïde abélien dont les objets sont les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathrm{Hyp}_!(T)$, le produit étant induit par $*_!$. Pour tout S dans $\mathcal{S}$, on se donne une compactification lisse $\bar{S}$ de S. On note $\bar{\mathcal{S}}$ l'ensemble des couples (S, x) avec S dans $\mathcal{S}$ et x dans $\bar{S} - S$. Pour (S, x) dans $\bar{\mathcal{S}}$ on note $\varphi_{S,x}$ l'unique morphisme de tores $\varphi_{S,x} : \mathbf{G}_{m,k} \to S$ dont le prolongement aux compactifications envoie 0 sur x.

Soit $\mathcal{H}_!(T)$ le monoïde

$$\mathcal{H}_!(T) := T(k) \times \mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}.$$

On note $(\delta_{S,x,\chi})$ la base canonique du monoïde $\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$.

On définit alors un morphisme de monoïdes

$$\Phi : \mathcal{H}_!(T) \longrightarrow \mathbf{H}_!(T)$$

caractérisé par

$$\Phi(\lambda, 1) = \delta_{\{\lambda\}}$$

et

$$\Phi(1, \delta_{S,x,\chi}) = R(i_S \circ \varphi_{S,x})_! H(\psi\,;\chi).$$

A tout morphisme de tores $\pi : T \to T'$, on associe un morphisme de monoïdes $\pi_! : \mathcal{H}_!(T) \to \mathcal{H}_!(T')$ de la façon suivante. Soit S un sous-tore de dimension 1 de T tel que $\pi : S \to S' := \pi(S)$ soit une isogénie. A $x \in \bar{S} - S$ on associe le point correspondant x' de $\bar{S}' - S'$. On note $N(S)$ le degré du morphisme $S \to S'$ et $N'(S)$ sa partie première à p. On définit $\pi_!$ de façon unique en demandant que sa restriction à $T(k) \times 1$ soit donnée par $\pi : T(k) \times 1 \to T'(k) \times 1$ et qu'il envoie $(1, \delta_{S,x,\chi})$ sur

$$((i_{S'} \circ \varphi_{S',x'})(N'(S)^{N'(S)}), \sum_{\chi'^{N(S)} = \chi} \delta_{S',x',\chi'})$$

si $\pi : S \to S' := \pi(S)$ est une isogénie et sur $(1, 1)$ sinon.

D'après la formule de Davenport-Hasse le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_!(T) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{H}_!(T) \\ {\scriptstyle \pi_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R\pi_!} \\ \mathcal{H}_!(T') & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{H}_!(T') \end{array}$$

est commutatif.

On définit une action du groupe $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ sur $\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ de la façon suivante : si $((S,x),y)$ appartient à $\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des morphismes de tores

$$\mathbf{G}_{m,k} \xrightarrow{\varphi_{S,x}} S \longrightarrow T$$

d'où l'on tire un morphisme $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, ce qui permet de faire agir $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ par translation sur y. On en déduit une action de $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ sur $\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$ en faisant agir comme ci dessus à la source et trivialement au but, et une action sur $\mathcal{H}_!(T)$ en imposant à l'action d'être triviale sur le facteur $T(k)$. Il est clair que, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ et pour tout élément h de $\mathcal{H}_!(T)$, on a (avec une notation légèrement abusive), $\Phi(\chi\cdot h) = \Phi(h)\otimes\mathcal{L}_\chi$ (cf. [G-L] 2.6).

LEMME 3.3.1. — *Soient h_1 et h_2 des éléments de $\mathcal{H}_!(T)$. Si pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T'\times T''$ avec $\dim T'' = 1$, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T')$, les objets $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi)\cdot h_1)$ et $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi)\cdot h_2)$ de $\mathcal{H}_!(T'')$ sont égaux (on note π' et π'' les projections), alors h_1 et h_2 sont égaux.*

Démonstration. — Par la proposition 3.3.4, les éléments h_1 et h_2 ont les mêmes projections sur $\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$. On voit alors directement qu'ils ont les mêmes projections sur $T(k)$. □

THÉORÈME 3.3.2. — *Le morphisme $\Phi : \mathcal{H}_!(T) \to \mathbf{H}_!(T)$ est un isomorphisme de monoïdes abéliens.*

Démonstration. — La surjectivité de Φ étant claire, démontrons l'injectivité. Quand T est de dimension 1, c'est une conséquence de [K] 8.4.2, 8.4.7 et 8.5.3.1. On en déduit le résultat dans le cas général grâce au lemme 3.3.1. En effet si $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$, pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T'\times T''$ avec $\dim T'' = 1$, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$, on a $R\pi''_!(\Phi(h_1)\otimes\mathcal{L}_\chi) \simeq R\pi''_!(\Phi(h_2)\otimes\mathcal{L}_\chi)$. On en tire que, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T')$, les objets $\Phi(\pi''_!(\pi'^\vee(\chi)\cdot h_1))$ et $\Phi(\pi''_!(\pi'^\vee(\chi)\cdot h_2))$ sont égaux. On peut alors conclure en utilisant le résultat en dimension 1 et le lemme 3.3.1. □

Fixons un isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n \simeq \operatorname{Spec} k[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}]$ et notons $\pi_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. On note $\mathbf{H}_!(T)^t_\psi$ l'ensemble des objets de $\mathbf{H}_!(T)$ correspondants à des faisceaux pervers ψ-modérés à l'infini.

On définit un sous-monoïde $\mathcal{H}_!(T)^t_\psi$ de $\mathcal{H}_!(T)$ de la façon suivante. Si T est de dimension 1, on écrit $\bar{T} - T = \{x, y\}$, et on définit $\mathcal{H}_!(T)^t$ comme le sous-monoïde de $\mathcal{H}_!(T)$ constitué des (λ, n) vérifiant

$$\sum_\chi n(T, x, \chi) = \sum_\chi n(T, y, \chi).$$

On dira qu'un élément h de $\mathcal{H}_!(T)$ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^t_\psi$ si, pour tout i, $\pi_{i!}h$ est dans $\mathcal{H}_!(\mathbf{G}_{m,k})^t$. Remarquons que si $\pi_{i!}h$ appartient à $\mathcal{H}_!(\mathbf{G}_{m,k})^t$ alors, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$, $\pi_{i!}(\chi \cdot h)$ appartient à $\mathcal{H}_!(\mathbf{G}_{m,k})^t$.

PROPOSITION 3.3.3. — *La restriction de Φ à $\mathcal{H}_!(T)^t_\psi$ induit un isomorphisme de monoïdes $\mathcal{H}_!(T)^t_\psi \simeq \mathbf{H}_!(T)^t_\psi$.*

Démonstration. — Quand T est de dimension 1, c'est une conséquence de [K] 8.4.2 et 8.4.7. Le cas général s'en déduit directement d'après les définitions et la remarque précédente. □

On note $\mathcal{G}_!(T)^1$ le groupe $\mathcal{G}_!(T)^1 := \mathbf{Z}^{(\bar{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$.

Pour tout morphisme de tores $\pi : T \to T'$, le morphisme $\pi_! : \mathcal{H}_!(T) \to \mathcal{H}_!(T')$ induit un morphisme de groupes $\pi_! : \mathcal{G}_!(T)^1 \to \mathcal{G}_!(T')^1$ par passage au quotient et au groupe associé. De même, de l'action du groupe $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ sur $\mathcal{H}_!(T)$ on déduit une action de $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ sur $\mathcal{G}_!(T)^1$.

PROPOSITION 3.3.4. — *Soient h_1 et h_2 des éléments de $\mathcal{G}_!(T)^1$. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-tores de dimension 1 de T.*

On suppose que, pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$, avec T'' de dimension 1, tel que les projections $S_i \to T''$ soient des morphismes finis pour tout $i \in I$, il existe un ensemble partout dense U de points fermés de $\mathcal{C}(T')$ tel que, pour tout point fermé χ de U, les objets $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_1)$ et $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_2)$ de $\mathcal{G}_!(T'')^1$ soient égaux (on note π' et π'' les projections). Alors h_1 et h_2 sont égaux.

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition plus générale suivante. □

Soit N un entier ≥ 1. Pour tout k-tore T on note $\mathcal{C}_N(T)$ la réunion des composantes connexes de $\mathcal{C}(T)$ contenant un caractère d'ordre fini $e \leq N$. Un point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ appartient à $\mathcal{C}_N(T)$ si et seulement si il existe un entier $e \leq N$ tel que χ^e appartienne à $\mathcal{C}(T)_\ell$. Le schéma $\mathcal{C}(T)$ est égal à la limite inductive filtrante des $\mathcal{C}_N(T)$ et chaque $\mathcal{C}_N(T)$ a un nombre fini de composantes connexes (cf. [G-L] 3.2).

On note $\mathcal{G}_!(T)^1_N$ le groupe $\mathcal{G}_!(T)^1_N := \mathbf{Z}^{(\bar{\mathcal{S}} \times \mathcal{C}_N(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$. Par restriction on a une surjection canonique $\mathcal{G}_!(T)^1 \to \mathcal{G}_!(T)^1_N$.

PROPOSITION 3.3.5. — *Soient h_1 et h_2 des éléments de $\mathcal{G}_!(T)^1$. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-tores de dimension 1 de T.*

On suppose que, pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$, avec T'' de dimension 1, tel que les projections $S_i \to T''$ soient des morphismes finis pour tout $i \in I$, et pour tout entier $N \geq 1$, il existe un ensemble partout dense U_N de points fermés de $\mathcal{C}(T')$ tel que, pour tout point fermé χ de U_N, les images des objets $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_1)$ et $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_2)$ dans $\mathcal{G}_!(T'')^1_N$ soient égales (on note π' et π'' les projections). Alors h_1 et h_2 sont égaux.

Démonstration. — On peut supposer que $h_2 = 1$. Considérons l'ensemble fini $\mathcal{T}(h_1)$ des cotores algébriques translatés de la forme $(\varphi_{S,x} \circ i_S)^{\vee -1}(y)$ pour $((S,x),y)$ décrivant le support de h_1. Supposons que le support de h_1 ne soit pas vide. Dans ce cas $\mathcal{T}(h_1) = \{\mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_m\}$ avec $m \geq 1$. Fixons un isomorphisme $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1 vérifiant l'hypothèse de la proposition et tel que de plus les projections $S \to T''$ soient des morphismes finis pour S appartenant à l'image de la projection du support de h_1 dans $\mathcal{S}$. On note π' et π'' les projections et i' et i'' les immersions canoniques. Dans ce cas les morphismes $i'^\vee_{|\mathcal{T}_i} : \mathcal{T}_i \to \mathcal{C}(T')$ sont finis et surjectifs sur les points fermés, et il existe alors un ouvert partout dense U de $\mathcal{C}(T')$ tel que, pour tout point fermé χ dans U, les intersections $i'^{\vee -1}(\chi) \cap \mathcal{T}_i$ soient des ensembles finis non vides et disjoints. Soit χ un point fermé dans U. La décomposition en produit $T \simeq T' \times T''$ permet d'identifier $i'^{\vee -1}(\chi)$ à $\mathcal{C}(T'')$ et les points des $i'^{\vee -1}(\chi) \cap \mathcal{T}_i$ correspondent alors exactement aux éléments de $\mathcal{T}(\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_1))$. On peut choisir N assez grand pour que, modulo cette identification, les intersections $i'^{\vee -1}(\chi) \cap \mathcal{T}_i$ soient toutes contenues dans $\mathcal{C}_N(T'')$, pour tout χ dans $U \cap \mathcal{C}(T')_\ell$. Pour tout point fermé χ de $U \cap \mathcal{C}(T')_\ell$ l'image de $\pi''_!(\pi'^\vee(\chi) \cdot h_1)$ dans $\mathcal{G}_!(T'')^1_N$ est alors non triviale. Par conséquent, si U_N était un ensemble dense comme dans l'énoncé de la proposition, l'intersection de $U \cap \mathcal{C}(T')_\ell$ et de U_N serait vide, ce qui est absurde. □

PROPOSITION 3.3.6. — *Soient A et B deux objets de* $\mathrm{Hyp}_!(T)$. *On suppose que A et B ont des semi-simplifiés isomorphes. Alors A et B sont isomorphes.*

Démonstration. — Lorsque T est de dimension 1 c'est une conséquence de [K] 8.4.10 (valide aussi pour $(n, m) = (0, 0)$) et 8.5.3.1. En général soit $T \simeq T' \times T''$ un isomorphisme de tores avec T'' de dimension 1. Soient π' et π'' les projections. Pour tout faisceau pervers C sur T, il existe, d'après [G-L] 2.3.2 et 2.4, un ensemble partout dense $U(C)$ de points fermés de $\mathcal{C}(T')$ tel que pour tout χ dans $U(C)$, l'objet $R\pi''_!(C \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ soit pervers. Soient A_i (resp. B_i) les composants simples de A (resp. B). Il existe donc un ensemble partout dense U de points fermés de $\mathcal{C}(T')$ tel que pour tout χ dans U, les $R\pi''_!(A_i \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ et les $R\pi''_!(B_i \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ soient respectivement des composants (non nécessairement simples) de $R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ et de $R\pi''_!(B \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$. Pour un tel χ les faisceaux pervers $R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ et $R\pi''_!(B \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$ ont des semi-simplifiés isomorphes. Ils sont donc isomorphes et on en tire par 3.3.2 et 3.3.4 que A et B sont isomorphes à convolution par un faisceau $\delta_{\{\lambda\}}$ près. En reprenant l'argument précédent on obtient que pour tout isomorphisme $T \simeq T' \times T''$ on a $\pi''(\lambda) = 1$ et donc que $\lambda = 1$. □

3.4. Faisceaux hypergéométriques associés à un faisceau pervers

Soit S un sous-tore de dimension 1 de T. On reprend les notations de 2.2. On s'est donné une immersion $j : \mathbf{G}_{m,k} \to \mathbf{A}^1_k$. Pour x dans $\bar{S} - S$ on note $\varphi_{S,x}$ l'unique isomorphisme de tores $\varphi_{S,x} : \mathbf{G}_{m,k} \to S$ dont le prolongement aux compactifiés envoie 0 sur x.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On associe à A l'objet suivant de $\mathrm{Hyp}_!(T)$:

$$H_!(A) := *_!\Big((Ri_{S!}(R\varphi_{S,x}{}_!(H(\psi\,; 1)) \otimes \mathcal{L}_{\chi^{-1}}))^{n_{S,x,\chi}(A)}\Big),$$

le produit étant pris sur tous les S, x et χ. On note multiplicativement le produit $*_!$ sur $\mathrm{Hyp}_!(T)$ et on convient qu'un produit de convolution indexé par l'ensemble vide est égal à $\delta_{\{1\}}$. On définit de même, en remplaçant ! par $*$, $H_*(A)$ dans $\mathrm{Hyp}_*(T)$.

De façon similaire, on pose

$$H_{\mathrm{int}}(A) := *_{\mathrm{int}}\Big((Ri_{S!}(R\varphi_{S,x}{}_!(H(\psi\,; 1)) \otimes \mathcal{L}_{\chi^{-1}}))^{n_{S,x,\chi}(A)}\Big),$$

le produit étant pris sur tous les S, x et χ, en notant multiplicativement le produit $*_{\mathrm{int}}$ sur $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$, ce qui est justifié par [G-L] 8.1.4. On a $H_{\mathrm{int}}(A) \simeq (H_!(A))_{\mathrm{int}}$. D'après [G-L] 8.1.4, $H_{\mathrm{int}}(A)$ est un objet de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$, et, si A est un objet de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$, il existe λ dans $T(k)$ tel que $A \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A)$.

PROPOSITION 3.4.1. — (1) *Si* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *est une suite exacte dans* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a des isomorphismes*

$$H_!(B) \simeq H_!(A) *_! H_!(C)$$

et

$$H_{\mathrm{int}}(B) \simeq H_{\mathrm{int}}(A) *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(C).$$

(2) *Soit* $T \simeq T' \times T''$ *un isomorphisme de tores avec* T'' *de dimension 1, soit* χ *un point fermé de* $\mathcal{C}(T'')$ *et soit* A' *un objet de* $\mathrm{Perv}\,(T', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Notons* π' *et* π'' *(resp.* i' *et* i''*) les projections (resp. immersions) canoniques et fixons un isomorphisme* $T'' \simeq \mathbf{G}_{m,k}$. *Si* $A \simeq \pi'^* A' \otimes \pi''^*(\mathcal{L}_\chi[1])$, *on a, en notant* r *la caractéristique d'Euler-Poincaré de* A', *des isomorphismes*

$$H_!(A) \simeq Ri''_!\Big((H(\psi\,;\chi) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,;\chi^{-1}))^{*_! r}\Big)$$

et

$$H_{\mathrm{int}}(A) \simeq Ri''_!\Big((H(\psi\,;\chi) *_{\mathrm{int}} \mathrm{inv}^* H(\psi\,;\chi^{-1}))^{*_{\mathrm{int}} r}\Big).$$

(3) *Pour tout objet* A *de* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *il existe un point fermé* λ *de* T *tel que les faisceaux pervers* $H_{\mathrm{int}}(A)$ *et* $\delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A_{\mathrm{int}})$ *soient isomorphes.*

(4) *Pour tout objet* A *de* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *pour tout point fermé* χ *de* $\mathcal{C}(T)$ *on a des isomorphismes canoniques* $H_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi) \simeq H_!(A) \otimes \mathcal{L}_\chi$ *et* $H_{\mathrm{int}}(A \otimes \mathcal{L}_\chi) \simeq H_{\mathrm{int}}(A) \otimes \mathcal{L}_\chi$.

Démonstration. — L'énoncé (1) est une conséquence directe de la description de $n_{S,x,\chi}$ en terme de cycles proches rappelée en 2.2 et de l'exactitude du foncteur cycles proches pour les faisceaux pervers. Pour (2), il suffit de démontrer le premier isomorphisme. Par translation il suffit de vérifier que si A est de la forme $\pi'^*(A'[1])$ avec A' pervers sur T' alors $H_!(A)$ est isomorphe à $(Ri''_*(H(\psi\,;1) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,;1)))^{*_! r}$, avec $r = \chi(T', A')$. D'après [G-L] 3.3.1 (d), le cône du morphisme canonique $\mathcal{M}_!(A) \to \mathcal{M}_*(A)$ a un support contenu dans $\pi'^\vee \mathcal{C}(T')$. Ceci entraîne, d'après [G-L] 7.3.5, que les $n_{S,x,\chi}(A)$ sont nuls pour $S \neq T''$. On constate directement que les $n_{T'',x,\chi}(A)$ sont nuls pour $\chi \neq 1$ et sont égaux à r pour $\chi = 1$. Démontrons (3). D'après (1), il suffit de démontrer que le faisceau pervers $H_{\mathrm{int}}(A)$ est à support ponctuel pour A simple vérifiant $\chi(T, A) = 0$. Dans ce cas, d'après [G-L] 5.1.1, il existe un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1, un point fermé χ de $\mathcal{C}(T'')$ et un objet A' de $\mathrm{Perv}\,(T', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, tels que l'on ait un isomorphisme

$$A \simeq \pi'^* A' \otimes \pi''^*(\mathcal{L}_\chi[1]),$$

et on déduit l'énoncé de (2) car $H(\psi\,;\chi) *_{\text{int}} \operatorname{inv}^* H(\psi\,;\chi^{-1})$ est ponctuel (cf. 3.2). Quant à l'énoncé (4), il se déduit directement de l'isomorphisme canonique (rappelé en [G-L] 2.6) $(B *_! C) \otimes \mathcal{L}_\chi \simeq (B \otimes \mathcal{L}_\chi) *_! (C \otimes \mathcal{L}_\chi)$ pour B et C dans $D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. □

Soit T un tore de dimension n sur k. On dit qu'une propriété est vérifiée pour ω-presque tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$: pour $n = 0$ si elle est vérifiée, pour $n = 1$ si elle est vérifiée pour χ appartenant au complémentaire d'une partie dénombrable de points fermés de $\mathcal{C}(T)$, pour $n \geq 2$ si pour tout isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1 pour ω-presque tout point fermé χ'' de $\mathcal{C}(T'')$ la propriété est vérifiée par (χ', χ'') pour ω-presque tout point fermé χ' de $\mathcal{C}(T', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Soit A un objet de $\operatorname{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des sous-tores S de dimension 1 de T tels que $n_{S,x,\chi}(A)$ ne soit pas identiquement nul.

PROPOSITION 3.4.2. — *Soit T un k-tore et soit A un objet de* $\operatorname{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1. On note π' et π'' les projections.*

(1) *Pour ω-presque tout point fermé χ_0 de $\mathcal{C}(T')$, l'objet $R\pi''_*(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et il existe un point fermé λ de T'' tel que l'on ait un isomorphisme*
$$H_*(R\pi''_*(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_* R\pi''_*(H_*(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})).$$

(2) *Pour ω-presque tout point fermé χ_0 de $\mathcal{C}(T')$, l'objet $R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et il existe un point fermé λ de T'' tel que l'on ait un isomorphisme*
$$H_!(R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_! R\pi''_!(H_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})).$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est la proposition 8.4.1 de [G-L], à ceci près que dans loc.cit. on suppose que, pour tout S dans $\mathcal{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker \pi''$ est finie. Cette condition est en fait superflue. En effet la proposition 8.4.1 de [G-L] est obtenue comme conséquence directe de la proposition 7.5.1 de [G-L], et bien que figurant dans son énoncé la condition n'est pas utilisée de façon essentielle dans sa démonstration. La preuve de l'énoncé (2) est toute pareille (on pourrait aussi le déduire de (1) par dualité). □

Remarque. — En fait pour la suite de l'article (excepté le cas $n > 1$ de 3.5.3, mais voir la remarque qui suit 3.5.3) on peut n'utiliser la proposition 3.4.2 (et la variante 3.4.3) que dans le cas où, pour tout S dans $\mathcal{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker \pi''$ est finie.

On aura besoin en fait de la variante suivante de l'énoncé (2) de la proposition précédente. On définit le quantificateur « est vérifié pour presque tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ » de façon similaire à « est vérifié pour ω-presque tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ » en remplaçant « dénombrable » par « fini ». (Remarque : cette terminologie ne coïncide pas exactement avec celle employée dans [G-L].) Pour tout entier $N \geq 1$ on pose

$$\mathcal{H}_!(T)_N := T(k) \times \mathbf{N}^{(\bar{S} \times \mathcal{C}_N(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))},$$

et $\mathbf{H}_!(T)_N = \Phi(\mathcal{H}_!(T)_N)$. On notera π_N la projection canonique $\mathbf{H}_!(T) \to \mathbf{H}_!(T)_N$.

PROPOSITION 3.4.3. — *Soit T un k-tore et soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On considère un isomorphisme de tores $T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1. On note π' et π'' les projections. Soit N un entier ≥ 1. Pour presque tout point fermé χ_0 de $\mathcal{C}(T')$, l'objet $R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et il existe un point fermé λ de T'' tel que les images par π_N des classes de $H_!(R\pi''_!(A \otimes \mathcal{L}_{\chi_0}))$ et de $\delta_{\{\lambda\}} *_! R\pi''_!(H_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0}))$ soient égales dans $\mathbf{H}_!(T'')_N$.*

Démonstration. — La présence du quantificateur « pour ω-presque tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ » dans les énoncés (1) et (2) de la proposition précédente tient au lemme 5.2.5 de [G-L]. L'apparition du dénombrable dans ce lemme est due au fait que $\mathcal{C}(T)$ a une infinité dénombrable de composantes connexes (si T est de dimension au moins 1). Comme par contre $\mathcal{C}_N(T)$ a un nombre fini de composantes connexes, on a la variante suivante du lemme 5.2.5 de [G-L] (avec la même démonstration), qui permet de reprendre la démonstration de [G-L] 8.4.1 (ou plutôt de l'énoncé dual) sans changement. □

LEMME 3.4.4. — *Soit T un tore de dimension n sur k et soit N un entier ≥ 1. Soit Z un sous-schéma fermé de $\mathcal{C}_N(T)$, partout de dimension $\leq d < n$. Soit $i : T'' \to T$ l'inclusion d'un sous-tore de dimension r. Alors, pour presque tout χ dans $\mathcal{C}(T'', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, l'intersection $i^{\vee -1}(\chi) \cap Z$ est partout de dimension $\leq d - r$.* □

3.5. Normalisation

On fixe un isomorphisme

$$\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n \simeq \mathrm{Spec}\, k[t_1, t_1^{-1}, \cdots, t_n, t_n^{-1}].$$

Pour tout objet A de $\mathrm{Hyp}_?(T)$, avec $? =!, *, \mathrm{int}$, on pose

$$\tilde{A} := \delta_{\{\lambda(A)^{-1}\}} *_? A.$$

C'est un objet de $\mathrm{Hyp}_?(T)$ et d'après 2.6.1 (4), on a $\lambda(\tilde{A}) = 1$ si A est ψ-modéré à l'infini. Si A est obtenu par changement de base à partir de A_0 défini sur un sous-corps k_0 de k, il en de même pour $\tilde{A}$ et on note $\tilde{A}_0$ l'objet correspondant défini sur k_0. La proposition suivante, qui ne sera pas utilisée dans la suite de ce travail, donne une formule pour $\tilde{A}$ quand A est ψ-modéré à l'infini.

PROPOSITION 3.5.1. — *Soit A un objet ψ-modéré à l'infini de* $\mathrm{Hyp}_?(T)$, *avec* $? =!, *, \mathrm{int}$, *de la forme*

$$A = R\pi_{1!}(H(\psi\,;\chi_1)) *_? \cdots *_? R\pi_{m!}(H(\psi\,;\chi_m)),$$

avec $\pi_j : \mathbf{G}_{m,k} \to T$ des morphismes de tores non constants. Notons $n_{i,j}$ la partie première à p du résidu en zéro de $\pi_j^* \frac{dt_i}{t_i}$. La i-ème composante, pour $1 \leq i \leq n$, du point $\lambda(A)$ est égale à l'entier $\prod_{1 \leq j \leq m} n_{i,j}^{n_{i,j}}$.

Démonstration. — L'énoncé pour int est conséquence de celui pour ! d'après la proposition 2.6.1. Pour ! et $*$, en utilisant la formule de Davenport-Hasse, on se ramène au cas $n = 1$ qui est une conséquence de [K] 8.4.2 et 8.4.10. □

PROPOSITION 3.5.2. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(1) *On a $\lambda(H_!(A)) = \lambda(H_{\mathrm{int}}(A))$.*

(2) *On a $\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A) \simeq (\tilde{H}_!(A))_{\mathrm{int}}$.*

(3) *Si $H_!A$ est ψ-modéré à l'infini on a $\lambda(\tilde{H}_!(A)) = \lambda(\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A)) = 1$.*

Démonstration. — (1) est conséquence de 2.6.1 (3), (2) est conséquence de (1) car $\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A) = \delta_{\{\lambda(H_{\mathrm{int}}(A))^{-1}\}} *_{\mathrm{int}} H_{\mathrm{int}}(A)$, et (3) est conséquence de (2) et de 2.6.1 (4). □

PROPOSITION 3.5.3. — *Si A est un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *$\psi$-modéré à l'infini, alors le faisceau pervers $H_!(A)$ est ψ-modéré à l'infini.*

Démonstration. — Pour $n = 1$ l'énoncé est clair, d'après la proposition 3.3.3, car on vérifie directement que $\Phi^{-1}(H_!(A))$ est dans $\mathcal{H}_!(T)^t$. En général, soit $\pi_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. D'après 3.4.2 (2), il existe un point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ tel que $R\pi_{i!}(A \otimes \mathcal{L}_\chi)$ soit pervers et tel que $R\pi_{i!}(H_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi))$ soit isomorphe à $H_!(R\pi_{i!}(A \otimes \mathcal{L}_\chi))$ à convolution par un faisceau ponctuel $\delta_{\{\lambda\}}$ près. On en tire que $R\pi_{i!}(H_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi))$ est modéré à l'infini. Comme $H_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi) \simeq H_!(A) \otimes \mathcal{L}_\chi$ d'après 3.4.1 (4), on déduit de la proposition 3.3.3 et de la remarque qui la précède que $R\pi_{i!}(H_!(A))$ est modéré à l'infini.

Remarque. — Quand A est justiciable de 4.5.2 ou de 6.4.4, il n'est pas nécessaire d'invoquer 3.4.2 (2) dans la preuve.

3.6. Calcul de $\det_{\mathrm{int}}$

On note $\widetilde{\mathrm{Perv}}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ le quotient du semi-groupe $([\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)], *_{\mathrm{int}})$ des classes d'équivalence d'objets de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ par le sous(-semi)-groupe des classes d'équivalence des $\delta_{\{\lambda\}}$, λ décrivant l'ensemble des points fermés de T.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de la section, qui sera démontré dans la section 5.

THÉORÈME 3.6.1. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On suppose qu'il existe un schéma S, intègre et de type fini sur $\mathbf{F}_p$, de corps des fonctions $k_0 \subset k$ et de dimension r, un S-tore déployé T_S tel que $T \simeq T_S \otimes k$, et un objet A_S de* $\mathrm{Perv}(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *tel que A provienne de $A_S[-r]$ par changement de base de T_S à T. Les classes des faisceaux pervers* $\det_{\mathrm{int}}(A)$ *et $H_{\mathrm{int}}(A)$ dans le quotient* $\widetilde{\mathrm{Perv}}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *sont égales. Soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. Si A est ψ-modéré à l'infini, alors les faisceaux pervers* $\det_{\mathrm{int}}(A)$ *et* $\delta_{\{\lambda(A)\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}_{\mathrm{int}}(A)$ *sont isomorphes.*

Remarque. — Quand $\chi(T, A) = 1$, l'énoncé du théorème est valide sans l'hypothèse que A provienne par changement de base d'un faisceau pervers défini sur T_S avec S de type fini sur $\mathbf{F}_p$: en effet, on a alors $A \simeq \det_{\mathrm{int}}(A)$ et d'après [G-L] Théorème 8.5.1, il existe un point fermé λ de T tel que

$$A \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}_{\mathrm{int}}(A).$$

Si A est ψ-modéré à l'infini, $\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A)$ est aussi ψ-modéré à l'infini d'après la relation précédente, et d'après 2.6.1 (4) on a nécessairement $\lambda = \lambda(A)$.

3.7. $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$ et $\mathbf{H}_!(T_0)^g$

Soit k_0 un sous-corps de k dont k est la clôture algébrique et soit T_0 un k_0-tore déployé. On pose $G := \mathrm{Gal}\,(k \mid k_0)$.

On note $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$ (resp. $\mathbf{H}_!(T_0)^g$) le sous-groupe (resp. sous-monoïde) de $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ (resp. $\mathbf{H}_!(T)$) formé des classes d'équivalence d'objets de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$ (resp. $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$). On a une action naturelle de G sur $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ (cf. 6.1), et donc également sur $\mathbf{Z}^{(\mathcal{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$ et $\mathbf{N}^{(\mathcal{S} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$.

On déduit de 3.2.1 et 3.3.2 l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.7.1. — *Les isomorphismes Φ de 3.2 et 3.3 induisent respectivement un isomorphisme de groupes*

$$\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g \simeq T(k_0) \times (\mathbf{Z}^{(\mathcal{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G$$

et un isomorphisme de monoïdes

$$\mathbf{H}_!(T_0)^g \simeq T(k_0) \times (\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G.$$

Démonstration. — Les isomorphismes Φ de 3.2 et 3.3 étant G-équivariants, leurs inverses induisent des morphismes injectifs

$$\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g \longrightarrow T(k_0) \times (\mathbf{Z}^{(\mathcal{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G$$

et

$$\mathbf{H}_!(T_0)^g \longrightarrow T(k_0) \times (\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G.$$

La surjectivité du deuxième morphisme résulte de 3.7.2 (1). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}_!(T) \arrow[r, "\mathrm{int}"] \arrow[d, "\Phi^{-1}"'] & \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T) \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\ \mathcal{H}_!(T) \arrow[r, "\lambda"] & \mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T), \end{tikzcd}$$

le premier morphisme horizontal étant induit par le foncteur int et le morphisme λ étant l'unique morphisme faisant commuter le diagramme. Remarquons que par [G-L] 8.1.4 (ii) et 3.7.2 (2), le foncteur int induit un morphisme int : $\mathbf{H}_!(T_0)^g \to \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}_!(T_0)^g \arrow[r, "\mathrm{int}"] \arrow[d] & \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T_0)^g \arrow[d] \\ T(k_0) \times (\mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] & T(k_0) \times (\mathbf{Z}^{(\mathcal{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G, \end{tikzcd}$$

en notant $\tilde{\lambda}$ le morphisme induit par λ. Ce morphisme étant surjectif, ainsi que le premier morphisme vertical, on en déduit la surjectivité du deuxième morphisme vertical. $\square$

LEMME 3.7.2. — *Soient H_i, pour $1 \leq i \leq N$, des sous-groupes d'indice fini de G. On note k_i le corps fixé par H_i. Soit B_i un objet de $D^b_c(T_0 \otimes k_i, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ pour $1 \leq i \leq N$.*

(1) *Les objets $A_! := *_{!\,\substack{\sigma\in G/H_i \\ 1\leq i\leq N}} ({}^\sigma B_i)$ et $A_* := *_{*\,\substack{\sigma\in G/H_i \\ 1\leq i\leq N}} ({}^\sigma B_i)$ appartiennent à $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Ici ${}^\sigma B_i$ désigne le transformé de B_i par σ (cf. 6.1.1).*

(2) *Si $A_!$ et A_* sont des faisceaux pervers, le noyau et le conoyau du morphisme canonique $\alpha : A_! \to A_*$ appartiennent à* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. *De plus la suite exacte de faisceaux pervers* $0 \to \mathrm{Ker}\,\alpha \to A_! \to \mathrm{Im}\,\alpha \to 0$ *provient par changement de base d'une suite exacte de faisceaux pervers sur* T_0.

Démonstration. — Soit T_i' le k_0-tore déduit de $T_0 \otimes k_i$ par restriction des scalaires de k_i à k_0. Soit $\bar{B}_i$ dans $D_c^b(T_0 \otimes k_i, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ d'image B_i. Il lui est associé un objet B_i' de $D_c^b(T_i', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Si on note N_i le morphisme norme $T_i' \to T_0$, on a un isomorphisme $(*_{!1\leq i\leq N} RN_{i!}B_i') \otimes k \simeq A_!$ (resp. $(*_{*1\leq i\leq N} RN_{i*}B_i') \otimes k \simeq A_*$). Ceci démontre (1). Pour (2) il suffit de remarquer que l'on a alors

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \simeq (\mathrm{Ker}\, *_{!1\leq i\leq N} RN_{i!}B_i' \longrightarrow *_{*1\leq i\leq N} RN_{i*}B_i') \otimes k$$

ainsi que l'isomorphisme similaire pour le conoyau et l'image. □

La proposition suivante sera utilisée ultérieurement.

PROPOSITION 3.7.3. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$. *Il existe un objet A_0 de* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *tel que $A \simeq A_0 \otimes k$ et un épimorphisme $\lambda : B_0 \to A_0$ dans* $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *avec $B_0 \otimes k$ dans* $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$ *et* $\chi(T, (\mathrm{Ker}\lambda) \otimes k) = 0$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe du lemme 3.7.2 et de [G-L] 8.1.4. □

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE MELLIN SUR UN CORPS FINI

4.1. Les foncteurs ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$

Dans cette section et dans l'essentiel de la suivante k_0 est un corps fini de caractéristique p et de cardinal q, et T_0 est un k_0-tore déployé. De façon générale tous les k_0-tores considérés dans cette section et dans la suivante sont supposés déployés. On note k une clôture algébrique fixée de k_0. On note $F_0 : T_0 \to T_0$ le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ sur T_0 et $F := F_0 \otimes \mathrm{Id}_k : T \to T$ le morphisme de Frobenius sur T. Si α est une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$, on note $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^{(\alpha)}$ le faisceau de rang 1 sur Spec k_0 pour lequel l'action de l'automorphisme de Frobenius géométrique est égale à α. Plus généralement, pour A_0 un objet de $D_c^b(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note $A_0^{(\alpha)}$ le produit tensoriel de A_0 par l'image inverse de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^{(\alpha)}$ et on dit que $A_0^{(\alpha)}$ se déduit de A_0 par torsion.

On note $\varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ le morphisme associé à $F : T \to T$ par fonctorialité. C'est un automorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$. Si χ est un point fermé de $\mathcal{C}(T)$, on a $\varphi(\chi) = \chi^q$. On note $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ la catégorie dont les objets sont les couples (K, Φ) avec K objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ et

$$\Phi : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi} K \simeq K$$

un isomorphisme dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$, les morphismes étant définis de façon évidente. Le produit tensoriel

$$\otimes^L : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \times D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$$

se relève naturellement en un produit, encore noté $\otimes^L$,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \times D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)).$$

De même, si $\pi : T_0 \to T'_0$ est un morphisme de tores, le foncteur

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}\otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T'))$$

se relève naturellement en un foncteur, encore noté $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}\otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}}$,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T')).$$

Si π est un quotient, le foncteur $R\pi^\vee_* : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T')) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ se relève naturellement en un foncteur, encore noté $R\pi^\vee_*$,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T')) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)).$$

On note inv l'involution $x \mapsto x^{-1}$ sur T et on note de même l'automorphisme de $\mathcal{C}(T)$ qui s'en déduit. D'après ce qui précède on a un foncteur

$$\mathrm{inv}^* = \mathrm{inv}_* : D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)).$$

De même, si χ est un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ fixé par φ, si on note $m_\chi : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T)$ le morphisme de multiplication par χ, le foncteur $m^*_\chi : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ se relève naturellement en un foncteur, encore noté m^*_χ,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)).$$

On note ${}^\varphi\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ le module trivial $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ muni de $\Phi : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}\otimes^L_\varphi\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ donné par $\Phi(1\otimes 1) = 1$. C'est une unité pour le produit $\otimes^L$. Pour α une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$, on note ${}^\varphi\mathcal{O}^{(\alpha)}_{\mathcal{C}(T)}$ le module trivial $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ muni de $\Phi : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_\varphi \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ donné par $\Phi(1\otimes 1) = \alpha$. Pour tout objet M de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ on pose $M^{(\alpha)} = {}^\varphi\mathcal{O}^{(\alpha)}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L M$ et on dit que $M^{(\alpha)}$ se déduit de M par torsion.

Le foncteur de dualité $D : M \mapsto R\mathcal{H}om(M, \mathcal{O})$ de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ dans lui même se relève naturellement en un foncteur, encore noté D, $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$.

Soit A_0 un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On déduit de l'isomorphisme canonique $A \simeq RF_*(A)$, d'après [G-L] 3.3.1(c), des isomorphismes canoniques

$$(*) \qquad \mathcal{M}_*(A) \simeq \mathcal{M}_*(RF_*(A)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_\varphi \mathcal{M}_*(A).$$

Dualement, comme $RF_* \simeq RF_!$, on a des isomorphismes canoniques

$$(**) \qquad \mathcal{M}_!(A) \simeq \mathcal{M}_!(RF_!(A)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_\varphi \mathcal{M}_!(A).$$

On définit ainsi des foncteurs, notés ${}^\varphi\mathcal{M}_*$ et ${}^\varphi\mathcal{M}_! : D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$, en associant à un objet A_0 de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ le couple formé de $\mathcal{M}_*(A)$ (resp. $\mathcal{M}_!(A)$) et de l'isomorphisme inverse de $(*)$ (resp. $(**)$).

On a le formulaire suivant, qui est conséquence directe de [G-L] 3.3.1, excepté l'énoncé (h) qui est de vérification immédiate.

FORMULAIRE 4.1.1. — *Les foncteurs ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$ vérifient les propriétés suivantes.*

(a) *Au morphisme de foncteurs $\mathcal{M}_! \to \mathcal{M}_*$ correspond un morphisme de foncteurs ${}^{\varphi}\mathcal{M}_! \to {}^{\varphi}\mathcal{M}_*$.*

(b) *Dualité : si T_0 est un tore de dimension n, on a, pour tout objet A_0 de $D_c^b(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, des isomorphismes fonctoriels*

$$D({}^{\varphi}\mathcal{M}_! A_0) \simeq \mathrm{inv}^* \, {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(DA_0)$$

et

$$D({}^{\varphi}\mathcal{M}_* A_0) \simeq \mathrm{inv}^* \, {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(DA_0).$$

(c) *Compatibilité à l'image directe : si $\pi : T_0 \to T_0'$ est un morphisme de tores, on a des isomorphismes canoniques*

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(R\pi_!(A_0)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')} \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$$

et

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(R\pi_*(A_0)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')} \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0)$$

pour tout objet A_0 de $D_c^b(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(d) *Compatibilité à l'image inverse pour les tores quotients : si $\pi : T_0 \to T_0'$ définit un tore quotient du tore T_0 de dimension relative d, on a, pour tout objet A_0 de $D_c^b(T_0', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, des isomorphismes canoniques*

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\pi^*(A_0)) \simeq R\pi_*^{\vee}({}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0(-d))[-2d])$$

et

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(\pi^*(A_0)) \simeq (\wedge^{\max}_{\mathbf{Z}_\ell} \pi_1(\mathrm{Ker}\pi)_\ell)^{\vee} \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} R\pi_*^{\vee}({}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0)[-d]).$$

(e) *Compatibilité au produit externe : si $T_0 = T_{1,0} \times T_{2,0}$ et $A_0 = A_{1,0} \boxtimes A_{2,0}$ (produit tensoriel externe) avec $A_{i,0}$ objet de $D_c^b(T_{i,0}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, alors on a des isomorphismes canoniques*

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_{1,0}) \boxtimes {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_{2,0})$$

et

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_{1,0}) \boxtimes {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_{2,0}).$$

(f) *Convolution : on a des isomorphismes canoniques*

$$^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0 *_! B_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$$

et

$$^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0 *_* B_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0) \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(B_0).$$

(g) *Torsion par un caractère: si A_0 est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et si χ est un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ fixé par φ, on a des isomorphismes canoniques*

$$m_\chi^{*\,\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0 \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

et

$$m_\chi^{*\,\varphi}\mathcal{M}_*(A_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0 \otimes \mathcal{L}_\chi).$$

Ici $\mathcal{L}_\chi$ est vu comme un faisceau sur T_0 dont la fibre à l'origine est isomorphe au $\mathrm{Gal}(k \mid k_0)$*-module trivial.*

(h) *Torsion : si A_0 est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et si α est une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$, on a des isomorphismes canoniques*

$$^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0^{(\alpha)}) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)^{(\alpha^{-1})}$$

et

$$^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0^{(\alpha)}) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0)^{(\alpha^{-1})}. \quad \square$$

Pour tout entier $e > 0$ on note k_0^e l'extension de degré e de k_0 contenue dans k et $F_{k_0^e} \in \mathrm{Gal}(k \mid k_0^e)$ la transformation de Frobenius géométrique. Soit χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ fixé par φ^e. On peut voir alors $\mathcal{L}_\chi$ comme un faisceau sur $T_0 \otimes k_0^e$, dont la fibre à l'origine est isomorphe comme $\mathrm{Gal}(k \mid k_0^e)$-module au module trivial. On note $i_\chi : \{\chi\} \to \mathcal{C}(T)$ l'inclusion. Pour tout objet (K, Φ) de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ on pose $\Phi^{(e)} = \Phi \circ (\mathrm{Id} \otimes_\varphi \Phi) \circ \cdots \circ (\mathrm{Id} \otimes_{\varphi^{e-1}} \Phi)$.

L'énoncé suivant est conséquence directe de 4.1.1 (c) et (g).

Proposition 4.1.2. — *Soit A_0 un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et soit χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ fixé par φ^e. Avec les notations précédentes, on a des diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccc}
Li_\chi^*\mathcal{M}_*(A) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi) \\
{\scriptstyle Li_\chi^*\Phi^{(e)}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle F_{k_0^e}} \\
Li_\chi^*\mathcal{M}_*(A) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(T, A \otimes \mathcal{L}_\chi)
\end{array}$$

et

$$\begin{tikzcd} Li_\chi^*\mathcal{M}_!(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "Li_\chi^*\Phi^{(e)}"'] & R\Gamma_c(T, A\otimes \mathcal{L}_\chi) \\ Li_\chi^*\mathcal{M}_!(A) \arrow[r, "\sim"] & R\Gamma_c(T, A\otimes \mathcal{L}_\chi) \arrow[u, "F_{k_0^e}"'] \end{tikzcd} \ . \quad \square$$

Pour tout entier $e > 0$ on a un couple de foncteurs adjoints

$$A^e : D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi^e}(\mathcal{C}(T)) \quad \text{et} \quad B^e : D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi^e}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$$

définis de la manière suivante. A un objet (K, Φ) de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ on associe l'objet

$$A^e(K, \Phi) := (K, \Phi^{(e)}).$$

A un objet (K, Φ) de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi^e}(\mathcal{C}(T))$ on associe l'objet $B^e(K, \Phi) := (Q, \Psi)$, avec

$$Q := K \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_\varphi K) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi^{e-1}} K),$$

l'isomorphisme Ψ étant défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_\varphi Q &\simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_\varphi K) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi^e} K) \\ &\simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi^e} K) \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_\varphi K) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi^{e-1}} K) \\ &\simeq K \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_\varphi K) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi^{e-1}} K) \simeq Q, \end{aligned}$$

le second isomorphisme étant obtenu par permutation des facteurs et le troisième en appliquant Ψ au premier facteur.

PROPOSITION 4.1.3. — *Soit e un entier strictement positif. Soit π le morphisme canonique $T_0 \otimes k_0^e \to T_0$.*

(1) *Pour tout objet A_0 de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*

$${}^{\varphi^e}\mathcal{M}_*(\pi^* A_0) \simeq A^e({}^{\varphi}\mathcal{M}_*(A_0)) \quad et \quad {}^{\varphi^e}\mathcal{M}_!(\pi^* A_0) \simeq A^e({}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)).$$

(2) *Pour tout objet A_1 de $D^b_c(T_0 \otimes k_0^e, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*

$${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(R\pi_* A_1) \simeq B^e({}^{\varphi^e}\mathcal{M}_* A_1) \quad et \quad {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(R\pi_* A_1) \simeq B^e({}^{\varphi^e}\mathcal{M}_! A_1).$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est immédiat et (2) résulte de l'isomorphisme canonique

$$R\pi_* A \simeq A \oplus RF_* A \oplus \cdots RF_*^{e-1} A$$

et du fait que π soit un morphisme fini. $\square$

4.2. Injectivité de ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ sur $K(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$

On note $K(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $K_\varphi(\mathcal{C}(T))$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$. Les foncteurs ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ induisent des morphismes de groupes abéliens notés $K({}^{\varphi}\mathcal{M}_*)$ et $K({}^{\varphi}\mathcal{M}_!) : K(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to K_\varphi(\mathcal{C}(T))$.

PROPOSITION 4.2.1. — *Les morphismes $K({}^{\varphi}\mathcal{M}_*)$ et $K({}^{\varphi}\mathcal{M}_!)$ sont injectifs.*

Démonstration. — Cela résulte directement de la proposition qui suit. □

PROPOSITION 4.2.2. — *Soient K_1 et K_2 deux faisceaux pervers sur T_0. Si les objets ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(K_1)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(K_2)$ (resp. ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(K_1)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(K_2)$) sont isomorphes, alors les semi-simplifiés de K_1 et K_2 sont isomorphes.*

Soit e un entier > 0. Soit χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ vérifiant $\varphi^e(\chi) = \chi$. On voit χ comme un caractère multiplicatif $\chi : k_0^e \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$ et $\mathcal{L}_\chi$ comme un faisceau sur $T_0 \otimes k_0^e$ dont la fibre à l'origine est isomorphe comme $\mathrm{Gal}(k \mid k_0^e)$-module au module trivial. Pour tout objet K de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note $s^e(K, \chi)$ la trace de $F_{k_0^e}$ sur $R\Gamma_c(T, K \otimes \mathcal{L}_\chi)$. D'après la proposition 4.1.2 c'est aussi la trace de $(Li_\chi^* \Phi^{(e)})^{-1}$ sur $Li_\chi^* \mathcal{M}_!(K)$.

La proposition 4.2.2 est donc conséquence de la proposition suivante (il suffit, par dualité, de faire la démonstration pour ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$).

PROPOSITION 4.2.3. — *Soient K_1 et K_2 deux faisceaux pervers sur T_0. Si pour tout entier $e > 0$ et tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ vérifiant $\varphi^e(\chi) = \chi$ on a $s^e(K_1, \chi) = s^e(K_2, \chi)$, alors K_1 et K_2 ont des semi-simplifiés isomorphes.*

Pour tout objet K de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et tout $x \in T(k_0^e)$ on note $t^e(K, x)$ la trace de $F_{k_0^e}$ sur la restriction de K au point géométrique associé à x.

LEMME 4.2.4. — *Pour tout objet K de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et tout $x \in T(k_0^e)$ on a*

$$t^e(K, x) = \frac{1}{(q^e - 1)^n} \sum_{\chi \in \mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)^{\varphi^e - 1}} s^e(K, \chi) \chi(x^{-1}),$$

Démonstration. — D'après la formule des traces de Grothendieck on a

$$s^e(K, \chi) = \sum_{x \in T(k_0^e)} t^e(K, x) \chi(x).$$

On en déduit l'énoncé par inversion de « Fourier-Mellin » usuelle pour les fonctions sur les groupes abéliens finis. □

Démonstration de la proposition 4.2.3. — Par le lemme 4.2.4, pour tout entier $e > 0$ et tout $x \in T(k_0^e)$ on a $t^e(K_1, x) = t^e(K_2, x)$. D'après [La2] 1.1.2.1 (conséquence du théorème de Chebotarev), K_1 et K_2 ont alors des semi-simplifiés isomorphes. □

Sous des hypothèses d'existence de résolution des singularités, on a des variantes des énoncés précédents « à la codimension 2 près » (qui ne seront pas utilisées dans la suite de ce travail).

Si K est un faisceau pervers sur T_0, on note $Z(K)_2$ la somme des composants simples A de K tels le support de $\mathcal{M}_*(A \otimes k)$ ne soit pas partout de codimension au moins 2 dans $\mathcal{C}(T)$. Si (L_1, Φ_1) et (L_2, Φ_2) sont des objets de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ et U un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ invariant par φ on dit que (L_1, Φ_1) et (L_2, Φ_2) sont isomorphes sur U s'il existe un isomorphisme $G : L_{1|U} \to L_{2|U}$ tel que $G \circ \Phi_{1|U} = \Phi_{2|U} \circ (\mathrm{Id} \otimes_\varphi G)$.

PROPOSITION 4.2.5. — *Soit T_0 un tore de dimension n sur k_0. On suppose que la résolution des singularités et la simplification des idéaux sont valides pour les variétés de dimension $\leq n$ définies sur k. Soient K_1 et K_2 des faisceaux pervers sur T_0.*

(1) *On suppose que K_1 et K_2 n'ont pas de sous-objet non nul de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à zéro. Si les objets ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(K_1)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(K_2)$ sont isomorphes sur un ouvert invariant par φ partout de codimension au moins 2 dans $\mathcal{C}(T)$, alors $Z(K_1)_2 \simeq Z(K_2)_2$.*

(2) *On suppose que K_1 et K_2 n'ont pas de quotient non nul de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à zéro. Si les objets ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(K_1)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(K_2)$ sont isomorphes sur un ouvert invariant par φ partout de codimension au moins 2 dans $\mathcal{C}(T)$, alors $Z(K_1)_2 \simeq Z(K_2)_2$.*

Démonstration. — L'énoncé (2) se déduit de (1) par dualité (d'après [G-L] 6.1.1 (b), $\mathcal{M}_*(K)$ et $\mathcal{M}_!(K)$ ont le même support). Démontrons (1). D'après le théorème 6.5.1 de [G-L], sous l'hypothèse d'existence de résolution des singularités, il existe des faisceaux pervers K_1' et K_2' sur T, des monomorphismes $K_i \otimes k \to K_i'$, tels que pour $i = 1, 2$, $\mathcal{M}_*(K_i')$ soit l'enveloppe réflexive de $\mathcal{M}_*(K_i \otimes k)$. On constate en inspectant la preuve qu'ils sont définis sur k_0, autrement dit qu'il existe des faisceaux pervers $\bar{K}_i$ sur T_0, tels que les faisceaux pervers K_i soient des sous-objets des $\bar{K}_i$ et tels que les $\bar{K}_i \otimes k$ soient isomorphes aux faisceaux pervers K_i'. Comme le support de $\mathcal{M}_*(\mathrm{Coker}(K_i \to \bar{K}_i) \otimes k)$ est partout de codimension au moins 2 (par t-exactitude de $\mathcal{M}_*$), on a alors un isomorphisme ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*(\bar{K}_1) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_*(\bar{K}_2)$ par le principe de Hartogs (proposition 4.3.1), et la proposition 4.2.1 permet de conclure. □

4.3. Modules de rang 1

Soit U un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par φ. On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(U)$ la catégorie dont les objets sont les couples (M,φ) avec M un $\mathcal{O}_U$-module cohérent et Φ un isomorphisme

$$\Phi : \mathcal{O}_U \otimes_\varphi M \simeq M,$$

les morphismes étant définis de façon évidente. Si V est un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par φ et contenant U, on a un foncteur de restriction $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(V) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(U)$ noté $M \to M_{|U}$. On note ${}^{\varphi}\Lambda(U)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(U)$ formée des objets sont les modules sous-jacents sont des $\mathcal{O}_U$-modules localement libres L de rang 1. L'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de ${}^{\varphi}\Lambda(U)$ forme un groupe pour le produit tensoriel, que l'on note ${}^{\varphi}L(U)$. L'élément neutre de ce groupe est la classe du module trivial ${}^{\varphi}\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)_{|U}}$, et l'inverse de la classe d'un module coïncide avec la classe du module dual.

La forme suivante du principe de Hartogs sera utilisée de façon essentielle dans ce travail.

PROPOSITION 4.3.1. — *Soit V un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par φ. Soit U un ouvert de V stable par φ et partout de codimension au moins 2 dans V. Soient (M_1,Φ_1) et (M_2,Φ_2) des objets de* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(V)$. *On suppose que M_1 et M_2 sont des modules réflexifs et que $(M_1,\Phi_1)_{|U}$ et $(M_2,\Phi_2)_{|U}$ sont isomorphes dans* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(U)$. *Alors (M_1,Φ_1) et (M_2,Φ_2) sont isomorphes. En particulier, si L_1 et L_2 sont des objets de ${}^{\varphi}\Lambda(V)$ tels que $L_{1|U}$ et $L_{2|U}$ sont isomorphes dans ${}^{\varphi}\Lambda(U)$, alors L_1 et L_2 sont isomorphes dans ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(V))$.*

Démonstration. — Par hypothèse on a un isomorphisme $\Psi_U : M_{1|U} \to M_{2|U}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_U \otimes_\varphi M_{1|U} & \xrightarrow{\Phi_{1|U}} & M_{1|U} \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes_\varphi \Psi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_U} \\
\mathcal{O}_U \otimes_\varphi M_{2|U} & \xrightarrow{\Phi_{2|U}} & M_{2|U}.
\end{array}$$

Par le principe de Hartogs usuel, Ψ_U se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\Psi : M_1 \to M_2$ et on a $\Psi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ (\mathrm{Id} \otimes_\varphi \Psi)$. $\square$

Soit (L,Φ) un objet de ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$, soit e un entier ≥ 1, et soit x un point fermé de $\mathcal{C}(T)$ vérifiant $\varphi^e(x) = x$. On note i_x l'inclusion de x dans $\mathcal{C}(T)$. Le morphisme $\Phi^{(e)}$ induit un isomorphisme de l'espace vectoriel de rang 1 $i_x^*(L)$

dont on note $\lambda(L, \Phi^{(e)}, x)$ la valeur propre. Remarquons que les définitions entraînent que $\lambda(L, \Phi^{(e)}, x)$ est une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$.

L'énoncé suivant, qui ne sera pas utilisé dans la suite de ce travail, est conséquence des résultats démontrés dans l'appendice A.

THÉORÈME 4.3.2. — *Deux objets (L_1, Φ_1) et (L_2, Φ_2) appartenant à la catégorie ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ sont isomorphes si et seulement si pour tout entier $e \geq 1$, pour tout point fermé x de $\mathcal{C}(T)$ vérifiant $\varphi^e(x) = x$, on a*

$$\lambda(L_1, \Phi_1^{(e)}, x) = \lambda(L_2, \Phi_2^{(e)}, x).$$

Démonstration. — En remplaçant $\mathcal{C}(T)$ par $\mathcal{C}(T)_\ell$ dans la définition de la catégorie ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ on obtient une catégorie notée ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T)_\ell)$. Pour tout entier $f \geq 1$ on définit de même une catégorie notée ${}^{\varphi^f}\Lambda(\mathcal{C}(T)_\ell)$ en remplaçant φ par φ^f. Soit $\mathcal{O}$ une composante connexe de $\mathcal{C}(T)$. La φ-orbite de $\mathcal{O}$ est une union finie de, disons f, composantes connexes de $\mathcal{C}(T)$ et φ^f laisse $\mathcal{O}$ stable. Si (L, Φ) est un objet de $\mathcal{C}(T)$, on peut voir la restriction de $(L, \Phi^{(f)})$ à $\mathcal{O}$ comme un objet de ${}^{\varphi^f}\Lambda(\mathcal{C}(T)_\ell)$. La donnée de cet objet est équivalente à celle de la restriction de (L, Φ) à la φ-orbite de $\mathcal{O}$. Il suffit donc de démontrer que, pour tout entier $f \geq 1$, deux objets (L_1, Φ_1) et (L_2, Φ_2) de la catégorie ${}^{\varphi^f}\Lambda(\mathcal{C}(T)_\ell)$ sont isomorphes si et seulement si, pour tout entier $e \geq 1$, pour tout point fermé x de $\mathcal{C}(T)_\ell$ vérifiant $(\varphi^f)^e(x) = x$, on a $\lambda(L_1, \Phi_1^{(e)}, x) = \lambda(L_2, \Phi_2^{(e)}, x)$. On peut supposer que (L_2, Φ_2) est trivial. Remarquons que $\mathcal{C}(T)_\ell$ est factoriel. En effet, l'anneau $\bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ est limite inductive filtrante des anneaux $R[[\pi_1(T)_\ell]][\ell^{-1}]$ pour R décrivant l'ensemble des anneaux d'entiers d'extensions finies de $\mathbf{Q}_\ell$ contenues dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$; ces anneaux sont factoriels car $R[[\pi_1(T)_\ell]]$ est isomorphe à un anneau de séries formelles $R[[t_1, \cdots, t_n]]$ et la noethérianité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ permet de conclure. Le module L_1 est donc libre. Soit m une base de L_1. On a $\Phi_1(1 \otimes m) = Fm$ avec F une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$. Comme $\lambda(L_1, \Phi_1, 1) = 1$, F prend la valeur 1 à l'origine de $\pi_1(T)_\ell$. C'est donc une unité de $R[[\pi_1(T)_\ell]]$ pour R convenable. Pour tout choix d'un générateur γ de $\mathbf{Z}_\ell(1)(k)$, on a, par la théorie d'Iwasawa, un isomorphisme

$$R[[\mathbf{Z}_\ell(1)(k)]] \simeq R[[t]],$$

à savoir celui qui envoie γ sur $1+t$. Ainsi pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on a, étant donné γ, un isomorphisme

$$\lambda : R[[\pi_1(T)_\ell]] \simeq R[[t_1, \cdots, t_n]].$$

Via λ à l'automorphisme φ correspond l'automorphisme de $R[[t_1, \cdots, t_n]]$ donné par $t_i \mapsto (1 + t_i)^q - 1$. Le corollaire A.7 permet alors de conclure. En effet l'assertion (1) est vérifiée pour la matrice scalaire $q^f \cdot \mathrm{Id}$, et (2) fournit alors un isomorphisme de (L_1, Φ_1) avec le module trivial. $\square$

On note ${}^{\varphi}U(\mathcal{C}(T))$ le sous-groupe de ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))$ engendré par les classes des modules ${}^{\varphi}\mathcal{O}^{(\alpha)}_{\mathcal{C}(T)}$ avec α une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$. C'est aussi le sous-groupe engendré par les classes des modules ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\delta^{(\alpha)}_{\{1\}})$.

On note ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ le groupe quotient ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))/{}^{\varphi}U(\mathcal{C}(T))$ et ${}^{\varphi}V(\mathcal{C}(T))$ le sous-groupe de ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))$ engendré par les classes des modules ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda\}})^{(\alpha)}$, λ décrivant $T_0(k_0)$, et α décrivant l'ensemble des unités de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$. On note ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^1$ le groupe quotient ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))/{}^{\varphi}V(\mathcal{C}(T))$.

4.4. Déterminants

Par la théorie du déterminant des complexes parfaits [K-M] on a un foncteur « déterminant »

$$\det : D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow {}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$$

défini de la façon suivante. Si (K, Φ) est un objet de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$, on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi} \det K \simeq \det K$$

en composant l'isomorphisme

$$\det(\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi} K) \simeq \det K$$

induit par Φ avec l'inverse de l'isomorphisme de changement de base

$$\det(\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi} K) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi} \det K$$

donné par [K-M] p.42.

LEMME 4.4.1. — (1) *Si $A_0 \to B_0 \to C_0$ est un triangle dans $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0) \simeq \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \otimes \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(C_0).$$

(2) *Pour tout objet A_0 de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on a un isomorphisme canonique*

$$\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq \otimes_i \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!({}^pH^i A_0)^{(-1)^i}.$$

On a les énoncés similaires pour ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$.

Démonstration. — L'énoncé (1) résulte du fait que ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_*$ sont des foncteurs triangulés et (2) est conséquence de (1). □

Pour tout entier $e > 0$ on a des foncteurs $a^e : {}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T)) \to {}^{\varphi^e}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ et $b^e : {}^{\varphi^e}\Lambda(\mathcal{C}(T)) \to {}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$. Le foncteur a^e est donné par la restriction du foncteur A^e et le foncteur b^e est défini de façon analogue à B^e en remplaçant $\oplus$ par $\otimes$.

PROPOSITION 4.4.2. — *Soit e un entier > 0.*

(1) *Pour tout objet K de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ on a un isomorphisme canonique*

$$\det A^e(K) \simeq a^e \det K.$$

(2) *Pour tout objet K de $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi^e}(\mathcal{C}(T))$ on a un isomorphisme canonique*

$$\det B^e(K) \simeq b^e \det K.$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est évident. Quant à (2), il résulte de ce que le foncteur det transforme les sommes en produits. □

PROPOSITION 4.4.3. — *Si A_0 et B_0 sont deux objets de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui définissent des objets isomorphes de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$, alors les classes de* $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ *et* $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$ *dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ sont égales.*

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où A_0 et B_0 sont des objets simples de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après [B-B-D] 5.3.9, il existe un entier strictement positif e et un objet A_1 de $\mathrm{Perv}(T_0 \otimes \mathbf{F}_{q^e}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ tels que $A_0 \simeq \pi_* A_1$, en notant π le morphisme canonique $T_0 \otimes \mathbf{F}_{q^e} \to T_0$, et tels que $A_1 \otimes k$ soit simple. De plus $A_0 \otimes k$ est semi-simple et ses composants simples sont les $F^{*i}_{k_0}(A_1 \otimes k)$ pour $0 \leq i < e$. On peut donc prendre le même e pour B_0 et choisir un B_1 tel que $A_1 \otimes k \simeq B_1 \otimes k$. D'après le lemme suivant, il existe un faisceau géométriquement constant de rang 1 E sur $T_0 \otimes \mathbf{F}_{q^e}$ tel que $A_1 \simeq B_1 \otimes E$. Les classes de $\det {}^{\varphi^e}\mathcal{M}_!(A_1)$ et de $\det {}^{\varphi^e}\mathcal{M}_!(B_1)$ sont donc égales dans ${}^{\varphi^e}L(\mathcal{C}(T))^0$. Les propositions 4.1.3 et 4.4.2 permettent alors de conclure. En général, par le lemme 4.4.1, on peut supposer que A_0 et B_0 sont des faisceaux pervers sur T_0. On peut alors les remplacer par leurs semi-simplifiés A_0^{ss} et B_0^{ss} dans $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ (pour tout faisceau pervers C_0 sur T_0 on a $C_0^{ss} \otimes k \simeq (C_0 \otimes k)^{ss}$) et on se ramène alors au cas où A_0 et B_0 sont simples dans $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. □

LEMME 4.4.4. — *Soit k_0 un corps de clôture algébrique k. Soit X_0 un schéma lisse géométriquement intègre et séparé de type fini sur k_0 et soient A_0 et B_0 des faisceaux pervers sur X_0. On suppose que $A_0 \otimes k$ et $B_0 \otimes k$ sont simples et définissent des objets isomorphes de* $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. *Il existe alors un faisceau géométriquement constant E sur X_0 de rang 1 tel que $A_0 \simeq B_0 \otimes E$.*

Démonstration. — Compte tenu de la structure des faisceaux pervers simples sur $X_0 \otimes k$ ([B-B-D] 4.3), on peut se ramener au cas où A_0 et B_0 sont des systèmes locaux. Dans ce cas fixons un point géométrique $\bar{x}$ de X_0 et notons V_1 et V_2 les $\pi_1(X_0, \bar{x})$-modules associés respectivement à A_0 et B_0. Par le lemme de Schur $W := \mathrm{Hom}_{\pi_1(X_0 \otimes k, \bar{x})}(V_1, V_2)$ est un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de rang 1. On en déduit l'énoncé recherché car on a un isomorphisme de $\pi_1(X_0, \bar{x})$-modules $V_1 \simeq V_2 \otimes W$ et le système local associé à W est géométriquement constant. □

D'après la proposition 4.4.3, pour tout objet de A de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ de représentant A_0 dans $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, la classe de $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ ne dépend pas du choix de A_0. On la note $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A)^g$.

Soit H un objet de $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$, de représentant H_0 dans $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Comme le module ${}^{\varphi}\mathcal{M}_! H_0$ appartient à ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$, $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H)^g$ est égal à la classe de ${}^{\varphi}\mathcal{M}_! H_0$ dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$. On note ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$ le sous-groupe de ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ engendré par les $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H)^g$, H décrivant la classe des objets de $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$. Remarquons que ${}^{\varphi}V(\mathcal{C}(T))/{}^{\varphi}U(\mathcal{C}(T))$ est un sous-groupe de ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$. On note ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1$ le groupe quotient.

On aura besoin de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4.5. — *Soit $\pi : T \to T'$ un quotient de tores avec* $\dim T' = \dim T - 1$. *Soit E un objet de* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T'))$. *On suppose que sur toutes les composantes connexes de $\mathcal{C}(T')$ le rang générique de E est égal à un même entier r. On a alors un isomorphisme*

$$\det R\pi^\vee_*(E) \simeq (\det R\pi^\vee_*({}^{\varphi}\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}))^{\otimes r}.$$

Démonstration. — Soit $E = (E, \Phi)$ un objet de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T'))$ de rang générique r sur toutes les composantes connexes de $\mathcal{C}(T')$. Soit t une équation de $\pi^\vee(\mathcal{C}(T'))$ dans $\mathcal{C}(T)$. Soit $i : T' \to T$ un morphisme de tores qui est une section de π. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}} E \xrightarrow{t\otimes 1} \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}} E \longrightarrow R\pi^\vee_*(E) \longrightarrow 0.$$

On pose $M_1 := (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}} E, \Phi_1)$, le morphisme Φ_1 étant déterminé par $\Phi_1(1 \otimes (1 \otimes m)) = 1 \otimes \Phi(1 \otimes m)$. On définit de même $M_2 := (\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}} E, \Phi_2)$, le morphisme Φ_2 étant déterminé par $\Phi_2(1 \otimes (1 \otimes m)) = \frac{\varphi(t)}{t} \otimes \Phi(1 \otimes m)$. Remarquons que $\frac{\varphi(t)}{t}$ est une section globale de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ dont la restriction à $\pi^\vee(\mathcal{C}(T'))$ est constante et égale à q. On a la suite exacte suivante dans $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{t\otimes 1} M_1 \longrightarrow R\pi^\vee_*(E) \longrightarrow 0,$$

dont on déduit l'isomorphisme

$$\det R\pi_*^\vee(E) \simeq \det M_1 \otimes (\det M_2)^{-1}$$

dans ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$.

Soit L l'objet $(\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}, \Phi_3)$, avec Φ_3 déterminé par $\Phi_3(1 \otimes 1) = \frac{t}{\varphi(t)}$. On a dans $D^b_{\mathrm{coh}\,\varphi}(\mathcal{C}(T))$ un isomorphisme $M_1 \simeq L \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} M_2$, d'où l'on tire un isomorphisme

$$\det M_1 \simeq (\det L)^{\otimes r} \otimes \det M_2$$

dans ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$. Finalement, on a un isomorphisme $\det R\pi_*^\vee(E) \simeq (\det L)^{\otimes r}$. On en déduit le résultat car on a en particulier $\det R\pi_*^\vee({}^{\varphi}\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}) \simeq \det L$. □

4.5. Calcul de $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!$

A tout objet A de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ on associe un élément $G_!(A)$ de ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$ de la façon suivante. Si A est pervers, on pose $G_!(A) := \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H_!(A))^g$. En général, on pose

$$G_!(A) := \bigotimes_i G_!({}^pH^iA)^{(-1)^i},$$

le produit dans ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$ étant noté multiplicativement. Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ on définit de même un élément $\tilde{G}_!(A)$ de ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$, en remplaçant $H_!$ par $\tilde{H}_!$ dans la définition.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats principaux de la section, qui seront démontrés dans la section 5.

Théorème 4.5.1. — *Soit A un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. On a l'égalité*

$$[\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A)^g] = [G_!(A)]$$

dans le groupe quotient ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^1$.

Corollaire 4.5.2. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. *Pour tout morphisme de tores $p : T \to T'$ et tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ fixé par un itéré de φ tels que $Rp_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi)$ soit un faisceau pervers, il existe un point fermé λ de T tel que l'on ait un isomorphisme*

$$H_!(Rp_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi)) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_! Rp_!(H_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi)).$$

Théorème 4.5.3. — *Soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. Soit A un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ qui est ψ-modéré à l'infini. On a l'égalité*

$$\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A)^g = \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda(A)\}})^g \cdot \tilde{G}_!(A)$$

dans le groupe quotient ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$.

4.6. Structure du groupe ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$

On a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 4.6.1. — (1) *Le morphisme*

$$\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\quad)^g : \mathbf{H}_!(T_0)^g \longrightarrow {}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$$

est un monomorphisme de monoïdes et induit par 3.7.1 un isomorphisme

$$T(k_0) \times (\mathbf{Z}^{(\bar{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G \simeq {}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T)).$$

(2) *L'isomorphisme précédent induit par passage au quotient un isomorphisme de groupes abéliens*

$$(\mathbf{Z}^{(\bar{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G \simeq {}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1.$$

(3) *Pour tout entier $e \geq 1$, les morphismes canoniques*

$${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow {}^{\varphi^e}G_!(\mathcal{C}(T)) \quad \textit{et} \quad {}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1 \longrightarrow {}^{\varphi^e}G_!(\mathcal{C}(T))^1$$

sont injectifs.

Démonstration. — Les assertions (2) et (3) sont des conséquences directes de (1). Pour (1) il suffit de démontrer l'injectivité du morphisme

$$\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\,)^g : \mathbf{H}_!(T_0)^g \longrightarrow {}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T)).$$

Il suffit de démontrer que si A_0 et B_0 sont des faisceaux pervers sur T_0 dont l'image dans $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ appartient à $\mathrm{Hyp}_!(T)$, tels que les modules ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$ soient isomorphes à torsion près, alors $A_0 \otimes k$ et $B_0 \otimes k$ sont isomorphes. Quitte à tordre A_0 par une unité de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ on peut supposer que les modules ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$ sont isomorphes. D'après la proposition 4.2.1, les faisceaux pervers A_0 et B_0 ont les mêmes constituants simples, et donc $A_0 \otimes k$ et $B_0 \otimes k$ ont les mêmes constituants simples. La proposition 3.3.6 permet de conclure. □

Pour tout entier $N \geq 1$, on note ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1_N$ le groupe

$$(\mathbf{Z}^{(\bar{S}\times\mathcal{C}_N(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))})^G$$

vu comme quotient de ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1$.

On aura besoin de l'énoncé suivant. Soit $T_0 \simeq T_0' \times T_0''$ un isomorphisme de tores. On note i' et i'' les inclusions $T' \to T$ et $T'' \to T$. Pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T')$ fixé par un itéré de φ, on note e_χ le plus petit entier strictement positif e tel que χ soit fixé par φ^e. Si L est un objet de ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ on voit sa restriction à $i'^{\vee-1}(\chi)$ comme un objet de ${}^{\varphi^{e_\chi}}\Lambda(\mathcal{C}(T''))$.

PROPOSITION 4.6.2. — *Soient L_1 et L_2 des objets de ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ dont les classes dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ appartiennent à ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$. Soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-tores de dimension 1 de T. On suppose que, pour tout isomorphisme de tores $T_0 \simeq T_0' \times T_0''$ avec $\dim T_0'' = 1$, tel que les projections $S_i \to T''$ soient des morphismes finis pour tout $i \in I$, et pour tout entier $N \geq 1$, il existe un ensemble partout dense U_N de points fermés de $\mathcal{C}(T')$, formé de points fixés par des itérés de φ, tel que, pour tout point fermé χ de U_N, les restrictions de L_1 et L_2 à $i'^{\vee-1}(\chi)$ ont des images égales dans le groupe ${}^{\varphi^{e_\chi}}G_!(\mathcal{C}(T''))^1_N$. Alors les classes de L_1 et L_2 dans le groupe ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))^1$ sont égales.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des propositions 3.3.5 et 4.6.1. $\square$

L'énoncé suivant est un cas particulier du théorème 4.3.2. Nous en donnons une démonstration directe, ce qui permet d'éviter d'utiliser le théorème 4.3.2.

PROPOSITION 4.6.3. — *Soient L_1 et L_2 des objets de ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ dont les classes dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ appartiennent à ${}^{\varphi}G_!(\mathcal{C}(T))$. On suppose que pour tout entier $e \geq 1$, pour tout point fermé x de $\mathcal{C}(T)$ vérifiant $\varphi^e(x) = x$, on a*

$$\lambda(L_1, \Phi_1^{(e)}, x) = \lambda(L_2, \Phi_2^{(e)}, x).$$

Alors L_1 et L_2 sont isomorphes.

Démonstration. — On peut supposer que L_2 est trivial. Le module L_1 est alors de la forme

$$L_1 = {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \otimes {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)^{-1}$$

avec A_0 et B_0 des objets de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont les images dans $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ appartiennent à $\mathrm{Hyp}_!(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. D'après la proposition 4.2.3 A_0 et B_0 ont les mêmes composants simples. On a donc $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$, autrement dit ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(B_0)$, et L_1 est donc trivial. $\square$

CHAPITRE 5

DÉMONSTRATIONS

On reprend dans cette section les hypothèses et les notations de la section précédente.

5.1. Démonstration du théorème 4.5.1

5.1.1. On peut clairement supposer que $A = A_0 \otimes k$ avec A_0 un objet simple de $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On peut également supposer que A est simple dans $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. En effet, d'après [B-B-D] 5.3.9, il existe un entier $e > 0$, et un faisceau pervers B_1 sur $T_1 = T_0 \otimes k_0^e$, tels que $B = B_1 \otimes k$ soit simple sur T et tels que A_0 soit isomorphe à $R\pi_* B_1$, en notant $\pi : T_1 \to T_0$ le morphisme canonique. D'après la proposition 4.1.3, on a un isomorphisme

$$^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq B^{e\,\varphi^e}\mathcal{M}_!(B_1).$$

On en tire, d'après la proposition 4.4.2, un isomorphisme

$$\det{}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0) \simeq b^e \det{}^{\varphi^e}\mathcal{M}_!(B_1).$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $\det{}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H_!(A))^g$ et $b^e\det{}^{\varphi^e}\mathcal{M}_!(H_!(B))^g$ sont isomorphes. Pour cela il suffit de remarquer que, pour tout triplet (S, x, χ), on a l'égalité

$$n_{S,x,\chi}(A) = \sum_{\chi' \in \{\chi, \varphi(\chi), \cdots, \varphi^e(\chi)\}} n_{S,x,\chi'}(B),$$

de laquelle on déduit que les faisceaux pervers $H_!(A)$ et $H_!(B) *_! RF_* H_!(B) *_! \cdots *_! RF_*^{e-1} H_!(B)$ sont isomorphes à convolution par un faisceau ponctuel $\delta_{\{\lambda\}}$ près, ce qui donne le résultat voulu.

On va tout d'abord commencer par le cas où $\chi(T, A) = 0$. Comme on vient de le voir, on peut supposer que A est simple dans $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après le théorème 5.1.1 de [G-L], il existe un isomorphisme de tores $\psi : T \simeq T' \times T''$

avec T'' de dimension 1, un faisceau pervers A' sur T' et un point fermé χ de $\mathcal{C}(T'')$ tels que $A \simeq \pi'^*(A'[1]) \otimes \pi''^*\mathcal{L}_\chi$, en notant π' et π'' les projections. Choisissons des k_0-tores déployés T'_0 et T''_0 tels que l'on ait un isomorphisme $T_0 \simeq T'_0 \times T''_0$ dont ψ provienne par extension des scalaires. En restreignant A à $\pi''^{-1}(1)$ on obtient que A' est un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ et donc aussi que χ est fixé par φ. Soit A'_0 un faisceau pervers sur T'_0 dont A' provient par changement de base. Quitte à tordre A par $\pi''^*\mathcal{L}_{\chi^{-1}}$, on peut supposer que $\chi = 1$. On a alors $A_0 \simeq \pi'^*(A'_0[1])$. On déduit de 4.1.1 (d) que les classes des modules $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g$ et $\det R\pi'^\vee_*({}^\varphi\mathcal{M}_!(A'_0))$ dans ${}^\varphi L(\mathcal{C}(T))^0$ sont égales. D'après [G-L] Théorème 3.4.3, $R\pi'^\vee_*({}^\varphi\mathcal{M}_!(A'_0))$ et $R\pi'^\vee_*({}^\varphi\mathcal{M}_*(A'_0))$ sont isomorphes sur un ouvert stable par φ dont le complémentaire est partout de codimension au moins 2, et de plus le complexe sous-jacent à ${}^\varphi\mathcal{M}_*(A'_0)$ est isomorphe à un module et est de rang générique $r = \chi(T', A')$ sur toutes les composantes connexes de $\mathcal{C}(T')$. D'après la proposition 4.3.1 et la proposition 4.4.5 les classes de $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g$ et de $(\det R\pi'^\vee_*({}^\varphi\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')}))^{\otimes r}$ dans ${}^\varphi L(\mathcal{C}(T))^0$ sont donc égales. En appliquant ce qui précède à

$$A = \pi'^*(\delta_{\{1\}}[1]) \simeq Ri''_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]),$$

en notant i'' l'inclusion de T'', on obtient que la classe de $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(Ri''_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]))^g$ dans ${}^\varphi L(\mathcal{C}(T))^0$ est égale à celle de $\det R\pi'^\vee_*({}^\varphi\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')})$, et par conséquent que

$$\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g = (\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(Ri''_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]))^g)^{\otimes r}.$$

Fixons un isomorphisme $T''_0 \simeq \mathbf{G}_{m,k_0}$. On a la suite exacte suivante de faisceaux pervers sur T''_0

$$0 \longrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell[1] \longrightarrow Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]) \longrightarrow \delta_{\{-1\}} \longrightarrow 0$$

en notant j l'inclusion $\mathbf{G}_{m,k_0} - \{-1\} \to \mathbf{G}_{m,k_0}$. Comme, d'après [K] 8.4.8, on a un isomorphisme

$$Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1]) \simeq H(\psi\,; 1) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,; 1),$$

on en tire que dans ${}^\varphi L(\mathcal{C}(T))^1$ les classes de $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g$ et de

$$(\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(Ri''_*(H(\psi\,; 1) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,; 1))))^{\otimes r}$$

sont égales. D'après 3.4.1 (2), si A est de la forme $\pi'^*(A'[1])$ avec A' pervers sur T' alors $H_!(A)$ est isomorphe à $(Ri''_*(H(\psi\,; 1) *_! \mathrm{inv}^* H(\psi\,; 1)))^{*_! r}$, ce qui donne le résultat. $\square$

5.1.2. Considérons maintenant le cas où $\chi(T, A) > 0$.

PROPOSITION 5.1.1. — *Pour tout objet A de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$, $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g$ appartient au groupe ${}^\varphi G_!(\mathcal{C}(T))$.*

Démonstration. — Compte tenu de ce qui précède, on peut supposer que A est simple dans $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et que $\chi(T, A) > 0$. Considérons le cas où $\chi(T, A) = 1$. Dans ce cas A est un objet de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T_0)^g$ d'après le théorème 8.2 de [G-L]. D'après la proposition 3.7.3, on peut choisir A_0 avec $A_0 \otimes k \simeq A$ tel qu'il existe un épimorphisme $\lambda : B_0 \to A_0$ dans $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ avec $B = B_0 \otimes k$ dans $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$. Par définition même de ${}^\varphi G_!(\mathcal{C}(T))$ l'objet $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(B)^g$ appartient à ${}^\varphi G_!(\mathcal{C}(T))$. D'autre part le noyau C_0 de λ est un objet de $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et on a $\chi(T, C) = 0$ pour $C = C_0 \otimes k$. Ses constituants simples dans $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ étant aussi de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à zéro, $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(C)^g$ appartient également à ${}^\varphi G_!(\mathcal{C}(T))$ d'après ce qui précède, ce qui donne le résultat dans ce cas, car $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g \simeq \det {}^\varphi\mathcal{M}_!(B)^g \otimes (\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(C)^g)^{-1}$.

Dans le cas général où A est un objet simple de $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ vérifiant $\chi(T, A) > 0$, comme $\chi(T, (\det_! A)) = 1$ (d'après 2.4.1 (4)), la proposition suivante permet de se ramener au cas précédent. $\square$

Soit A_0 un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On peut définir comme en 2.4 des faisceaux pervers $\det_! A_0$ et $\det_* A_0$ sur T_0. De plus on a des isomorphismes canoniques $\det_!(A_0 \otimes k) \simeq (\det_! A_0) \otimes k$ et $\det_*(A_0 \otimes k) \simeq (\det_* A_0) \otimes k$.

PROPOSITION 5.1.2. — *Soit A_0 un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On suppose que A appartient à $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a des isomorphismes canoniques*

$$\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(\det_! A_0) \simeq \det {}^\varphi\mathcal{M}_! A_0$$

et

$$\det {}^\varphi\mathcal{M}_*(\det_* A_0) \simeq \det {}^\varphi\mathcal{M}_* A_0.$$

Démonstration. — Les deux énoncés étant équivalents par dualité, il suffit de démontrer le second. On reprend les notations de [G-L]. On peut supposer que A n'est pas l'objet nul. D'après [G-L] 3.4.3, $\mathcal{M}_* A$ est localement libre en dehors du fermé $\Delta(A)$. D'après [G-L] 7.3.5, $\Delta(A)$ est de la forme $Z \cup W$ avec Z un fermé partout de codimension au moins 2 et W un fermé contenu dans une réunion finie de cotores algébriques translatés de codimension 1 de $\mathcal{C}(T)$. Comme A n'a pas de sous-objet non nul de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, le support de la torsion du module $\mathcal{M}_* A$ est contenu dans Z d'après [G-L] 6.1.2 et est donc partout de codimension au moins 2. Soit U l'ouvert maximal de $\mathcal{C}(T)$ sur lequel $\mathcal{M}_* A$ est localement libre. C'est donc un ouvert dense de $\mathcal{C}(T)$ dont le complémentaire est partout de codimension au moins 2, qui de plus est clairement stable par φ. D'après la proposition 2.4.1 (3) les restrictions de $\mathcal{M}_*(\det_* A)$ et de $\det \mathcal{M}_* A$ à l'ouvert U sont canoniquement isomorphes. Par construction même cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$^{\varphi}\mathcal{M}_*(\det_* A_0)_{|U} \simeq \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_* A_{0|U}$$

et le principe de Hartogs 4.3.1 permet de conclure. □

5.1.3. Supposons que le théorème est établi lorsque T_0 est de dimension 1, et démontrons qu'il vaut alors en général. Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Soient L_1 et L_2 des objets de ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$ dont les classes dans ${}^{\varphi}L(\mathcal{C}(T))^0$ sont respectivement égales à $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A)^g$ et à $G_!(A)$.

On fixe un isomorphisme de tores déployés $T_0 \simeq T_0' \times T_0''$ avec $\dim T_0'' = 1$. On note π' et π'' (resp. i' et i'') les projections (resp. les immersions) associées. On suppose que pour tout S dans $\mathcal{S}(A)$ l'intersection $S \cap \mathrm{Ker}\, \pi''$ est finie. Soit N un entier ≥ 1.

D'après la proposition 4.6.2, qui est applicable à L_1 et L_2 d'après la proposition 5.1.1, il suffit de démontrer qu'il existe un ensemble partout dense U_N de points fermés de $\mathcal{C}(T')$, formé de points fixés par des itérés de φ, tel que, pour tout point fermé χ de U_N, les restrictions de L_1 et L_2 à $i'^{\vee -1}(\chi)$ ont des images égales dans le groupe ${}^{\varphi^{e_\chi}}G_!(\mathcal{C}(T''))^1_N$.

Soit A_0 un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Remarquons que si χ est un point fermé de $\mathcal{C}(T')$ fixé par un itéré de φ, la restriction de ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ à $i'^{\vee -1}(\chi)$ vue comme élément de $D^b_{\mathrm{coh}\, \varphi^{e_\chi}}(\mathcal{C}(T''))$ est isomorphe à ${}^{\varphi^{e_\chi}}\mathcal{M}_!(R\pi''_!(A_0 \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi))$ d'après 4.1.1 (c) et (g). Compte tenu du comportement du foncteur déterminant par changement de base ([K-M] p.42), on en déduit que la restriction de $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0)$ à $i'^{\vee -1}(\chi)$ vu comme élément de ${}^{\varphi^{e_\chi}}\Lambda(\mathcal{C}(T''))$ est isomorphe à $\det {}^{\varphi^{e_\chi}}\mathcal{M}_!(R\pi''_!(A_0 \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi))$.

L'image de la restriction de L_1 à $i'^{\vee -1}(\chi)$ dans ${}^{\varphi^{e_\chi}}G_!(\mathcal{C}(T''))^0$ est donc égale à la classe de $\det {}^{\varphi^{e_\chi}}\mathcal{M}_!(R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi))^g$, et celle de L_2 à celle de

$$\det {}^{\varphi^{e_\chi}}\mathcal{M}_!(R\pi''_!(H_!(A) \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi))^g.$$

Comme $H_!(A) \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi \simeq H_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_\chi)$, on déduit de la proposition 3.4.3 que, pour presque tout point fermé χ_0 de $\mathcal{C}(T')$, l'objet $R\pi''_!(A \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})$ est un faisceau pervers, et qu'il existe un point λ de $T_0''(k_0)$ tel que les images par π_N des classes de $H_!(R\pi''_!(A \otimes \mathcal{L}_{\chi_0}))$ et de $\delta_{\{\lambda\}} *_! R\pi''_!(H_!(A) \otimes \pi'^*\mathcal{L}_{\chi_0})$ soient égales dans $\mathbf{H}_!(T'')_N$. Ceci permet de conclure, car si une propriété est vérifiée pour presque tout point fermé de $\mathcal{C}(T')$, il existe un ensemble partout dense de points fermés de $\mathcal{C}(T')$, formé de points fixés par des itérés de φ, vérifiant cette propriété.

5.1.4. On suppose maintenant que $T_0 = \mathbf{G}_{m,k_0}$ et que A_0 est un faisceau pervers simple sur T_0. Le cas où A_0 est ponctuel étant clair on peut supposer que A_0 est de la forme $A_0 = j_{!*}(\mathcal{F}[1])$ avec $\mathcal{F}$ un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur un ouvert non vide U_0 de $\mathbf{G}_{m,k_0}$, de morphisme d'inclusion $j : U_0 \to \mathbf{G}_{m,k_0}$.

On considère $\mathbf{G}_{m,k_0} = \operatorname{Spec} k_0[x, x^{-1}]$ comme plongé dans $\mathbf{P}^1_{k_0}$ via son plongement dans $\mathbf{A}^1_{k_0}$. Pour tout entier $e > 0$ on note k_0^e l'extension de degré e de k_0 contenue dans k. Si x est un point fermé de $\mathbf{P}^1_{k_0^e}$, on note S_x^e le hensélisé de $\mathbf{P}^1_{k_0^e}$ en x, η_x^e le point générique de S_x^e, G_x^e le groupe de Galois de η_x^e et I_x^e son groupe d'inertie. On supprime l'exposant e quand il n'y a pas ambiguïté. Si V est un G_x-module on note V^t sa partie modérée, c'est à dire le plus grand sous-objet sur lequel l'action de I_x se factorise par son quotient modéré I_x^t. Pour χ un caractère $k_0^{e\times} \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ on notera $\mathcal{L}_\chi$ le faisceau de Kummer associé à χ. C'est un faisceau sur $T_0 \otimes k_0^e$, dont la fibre à l'origine est isomorphe comme $\operatorname{Gal}(k \mid k_0^e)$-module au module trivial. On notera V_χ la restriction de $\mathcal{L}_\chi$ à η_0^e.

On va utiliser la formule du produit pour les constantes locales de Laumon ([La2] 3.2.1.1). On reprend les notations de [La2], en particulier la notation utilisée pour les constantes locales $\varepsilon_\psi(T, K, \omega)$ et $\varepsilon_0(T, V, \omega)$. On prendra $\omega = \frac{dx}{x}$.

On note χ_i, pour $i \in E_0$, (resp. $i \in E_\infty$,) les points du support de $\Delta\mathcal{M}_{\mathbf{G}_{m,k},0}(A)$ (resp. $\Delta\mathcal{M}_{\mathbf{G}_{m,k},\infty}(A)$) comptés avec multiplicité. D'après 4.6.1 (3), on peut supposer, quitte à remplacer k_0 par une extension finie, que les χ_i sont tous fixés par φ. On pose alors

$$H_!(A_0) := (*_{!\,i\in E_0} H(\psi\,;\chi_i^{-1}))\ *_!\ (*_{!\,i\in E_\infty} \operatorname{inv}^*(H(\psi\,;\chi_i))).$$

C'est un faisceau pervers sur $\mathbf{G}_{m,k_0}$ et on a $H_!(A_0) \otimes k \simeq H_!(A)$.

Le semi-simplifié du I_0-module $\mathcal{F}^t_{\eta_0}$ est isomorphe à $(\oplus_{i\in E_0} \mathcal{L}_{\chi_i^{-1}})_{\eta_0}$. D'après le calcul de la monodromie locale des faisceaux hypergéométriques sur $\mathbf{G}_{m,k}$ effectué dans [K] Theorem 8.4.11, le semi-simplifié du I_0-module $H_!(A_0)[-1]^t_{\eta_0}$ est également isomorphe à $(\oplus_{i\in E_0} \mathcal{L}_{\chi_i^{-1}})_{\eta_0}$. De même les semi-simplifiés des I_∞-modules $\mathcal{F}^t_{\eta_\infty}$ et $H_!(A_0)[-1]^t_{\eta_\infty}$ sont isomorphes à $(\oplus_{i\in E_\infty} \mathcal{L}_{\chi_i^{-1}})_{\eta_\infty}$.

LEMME 5.1.3. — *Soit V un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau modérément ramifié sur η_0^e. Pour tout caractère $\chi : k_0^{e\times} \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ le quotient*

$$\frac{\varepsilon_0(S_0^e, V \otimes V_\chi, \omega)}{\varepsilon_0(S_0^e, V, \omega)}$$

ne dépend que du semi-simplifié de V vu comme I_0^e-module.

Démonstration. — Par multiplicativité de ε_0 sur les suites exactes courtes, on peut supposer que le faisceau V est simple. Il existe alors un entier $f > 0$ tel que V soit de la forme $\pi_* V'$ avec π le morphisme $\eta_0^{ef} \to \eta_0^e$ associé à l'inclusion de k_0^e dans k_0^{ef} et V' un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau modérément ramifié de rang 1 sur η_0^e. En utilisant [La2] 3.1.5.4 (iv) et la formule de projection on se ramène au cas où V est de rang 1. Tout faisceau isomorphe à V comme I_0^e-module est de la forme $V \otimes F$ avec F non ramifié de rang 1 et l'énoncé résulte alors de [La2] 3.1.5.6. □

On déduit du lemme précédent l'égalité

$$\begin{aligned}(1)\quad & \varepsilon_0(S_0^e, ((A_0 \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)^t_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (A_0 \otimes k_0^e)^t_{\eta_0}, \omega)^{-1} = \\ & \qquad \varepsilon_0(S_0^e, ((H_!(A_0) \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)^t_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (H_!(A_0) \otimes k_0^e)^t_{\eta_0}, \omega)^{-1}.\end{aligned}$$

La démonstration du lemme suivant, vraisemblablement bien connu, est donnée dans l'appendice B.

LEMME 5.1.4. — *Soit V un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau sur η_0 d'image inverse $V \otimes k_0^e$ sur η_0^e. Il existe t dans $k_0^\times$ tel que, pour tout $e > 0$ et pour tout caractère $\chi : k_0^{e\times} \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$, on a*

$$\begin{aligned}& \varepsilon_0(S_0^e, (V \otimes k_0^e) \otimes V_\chi, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, V \otimes k_0^e, \omega)^{-1} = \\ & \qquad \chi(t) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, ((V \otimes k_0^e) \otimes V_\chi)^t, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (V \otimes k_0^e)^t, \omega)^{-1}.\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent il existe t_1 dans $k_0^\times$ tel que, pour tout $e > 0$ et pour tout χ, on ait

$$\begin{aligned}(2)\quad & \varepsilon_0(S_0^e, ((A_0 \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (A_0 \otimes k_0^e)_{\eta_0}, \omega)^{-1} = \\ & \qquad \chi(t_1) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, ((A_0 \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)^t_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (A_0 \otimes k_0^e)^t_{\eta_0}, \omega)^{-1}.\end{aligned}$$

De même, il existe t_2 dans $k_0^\times$ tel que, pour tout $e > 0$ et pour tout χ, on ait

$$\begin{aligned}(3)\quad & \varepsilon_0(S_0^e, ((H_!(A_0) \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (H_!(A_0) \otimes k_0^e)_{\eta_0}, \omega)^{-1} = \\ & \qquad \chi(t_2) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, ((H_!(A_0) \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi)^t_{\eta_0}, \omega) \cdot \varepsilon_0(S_0^e, (H_!(A_0) \otimes k_0^e)^t_{\eta_0}, \omega)^{-1}.\end{aligned}$$

Les énoncé similaires valent pour ∞, en remplaçant partout 0 par ∞.

D'autre part, d'après [La2] 3.1.5.6, pour tout objet K de $D_c^b(\mathbf{G}_{m,k_0^e}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a

$$(4) \qquad \prod_{x \in |\mathbf{G}_{m,k_0^e}|} \varepsilon_\psi(S_x, (K \otimes \mathcal{L}_\chi)_{\eta_x}, \omega) \cdot \varepsilon_\psi(S_x, K_{\eta_x}, \omega)^{-1} = \chi(\lambda(K))^{-1}.$$

Ici $|\mathbf{G}_{m,k_0^e}|$ désigne l'ensemble des points fermés de $\mathbf{G}_{m,k_0^e}$.

Compte tenu de (1), (2), (3), de leurs analogues à l'infini, et de (4), on déduit alors de la formule du produit de Laumon ([La2] 3.2.1.1) qu'il existe t dans $k_0^\times$ tel que, pour tout $e > 0$ et pour tout χ, on ait

$$\frac{\det(F_{k_0^e}, R\Gamma_c(T, (A_0 \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi))}{\det(F_{k_0^e}, R\Gamma_c(T, A_0))} = \chi(t) \frac{\chi(\lambda(A))}{\chi(\lambda(H_!(A)))} \frac{\det(F_{k_0^e}, R\Gamma_c(T, (H_!(A_0) \otimes k_0^e) \otimes \mathcal{L}_\chi))}{\det(F_{k_0^e}, R\Gamma_c(T, H_!(A_0)))}.$$

En utilisant les propositions 4.1.2 et 5.1.1, on déduit de la proposition 4.6.3 et de l'égalité précédente que les classes des modules $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A_0)$ et $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(H_!(A_0))$ ($\simeq {}^\varphi\mathcal{M}_!(H_!(A_0))$) dans ${}^\varphi L(\mathcal{C}(T))^1$ sont égales. $\square$

5.2. Démonstration du corollaire 4.5.2

Quitte à remplacer k_0 par une extension finie, on peut supposer que $\chi = 1$. D'après le théorème 4.5.1, il existe un point a de $T_0(k_0)$ tel que les objets $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A)^g$ et $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(\delta_{\{a\}} *_! H_!(A))^g$ soient isomorphes. On en tire par image inverse à $\mathcal{C}(T')$ et par 4.1.1. (c), en utilisant la commutation du déterminant au changement de base, que les objets $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(Rp_!A)^g$ et $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(Rp_!(\delta_{\{a\}} *_! H_!(A))^g)$ sont isomorphes. On en déduit l'énoncé voulu, en appliquant le théorème 4.5.1 à $Rp_!A$ et en utilisant la proposition 4.6.1. $\square$

5.3. Démonstration du théorème 4.5.3

Pour $n = 1$, dans la preuve du théorème 4.5.1 donnée en 5.1.4, quand A est modéré à l'infini, on peut prendre $t = 1$ (car $H_!(A)$ est modéré par le cas $n = 1$ de 3.5.3). On obtient alors, avec les notations de la preuve, que $\det {}^\varphi\mathcal{M}_!(A_0)$ et ${}^\varphi\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda(A)\}} *_! \tilde{H}_!(A_0))$ sont isomorphes à torsion près, ce qui donne le résultat dans ce cas.

Supposons maintenant que $n > 1$. On note $p_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. On peut supposer que A est un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Soit χ un point fermé de $\mathcal{C}(T)$, fixé par un itéré de φ, tel que $Rp_{i!}(A \otimes \mathcal{L}_\chi)$ soit un faisceau pervers pour tout i. Un tel χ existe d'après [G-L] 2.3.1 et 2.4. On peut supposer que $\chi = 1$, quitte à remplacer k_0 par une extension finie, ce qui est possible d'après la proposition 4.6.1. D'après le théorème 4.5.1, il existe un point a de $T_0(k_0)$ tel que les objets $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A)^g$ et $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\delta_{\{a\}} *_! \tilde{H}_!(A))^g$ soient isomorphes. On en tire par image inverse à $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ que les objets $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(Rp_{i!}A)^g$ et $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(Rp_{i!}(\delta_{\{a\}} *_! \tilde{H}_!(A))^g)$ sont isomorphes. D'après le résultat pour $n = 1$, les objets $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(Rp_{i!}A)^g$ et $\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\delta_{\lambda_i(A)} *_! \tilde{H}_!(Rp_{i!}A))^g$ sont isomorphes. D'après la proposition 4.6.1, on a donc

$$Rp_{i!}(\delta_{\{a\}} *_! \tilde{H}_!(A)) \simeq \delta_{\lambda_i(A)} *_! \tilde{H}_!(Rp_{i!}A).$$

Par le cas $n = 1$ de la proposition 3.5.3 le faisceau pervers $\tilde{H}_!(Rp_{i!}A)$ est modéré à l'infini. Il en est donc de même pour $Rp_{i!}\tilde{H}_!(A)$. Par 2.6.2 (4) et 3.5.2 (3) on en déduit que $p_i(a) = \lambda_i(A)$, d'où le résultat. $\square$

5.4. Démonstration du théorème 3.6.1 : corps finis

On démontre ici le théorème 3.6.1 pour les corps finis.

THÉORÈME 5.4.1. — *Soit* A_0 *un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Les classes des faisceaux pervers* $\det_{\mathrm{int}}(A)$ *et* $H_{\mathrm{int}}(A)$ *dans le quotient* $\widetilde{\mathrm{Perv}}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *sont égales. Soit* ψ *un isomorphisme* $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. *Si de plus* A *est* ψ*-modéré à l'infini, les faisceaux pervers* $\det_{\mathrm{int}}(A)$ *et* $\delta_{\{\lambda(A)\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}_{\mathrm{int}}(A)$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Si B_0 est un objet de $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note $H_!(B_0)$ un objet de $\mathrm{Perv}\,(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont $H_!(B)$ se déduise après changement de base. Par la proposition 5.1.2, on a un isomorphisme

$$\det{}^{\varphi}\mathcal{M}_!(\det_! A_0) \simeq \det{}^{\varphi}\mathcal{M}_!(A_0).$$

On déduit donc du théorème 4.5.1, qu'il existe un point λ de $T_0(k_0)$ et une unité α de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ tels que les modules ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H_!(A_0))$ et ${}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H_!(\det_! A_0) *_! \delta_{\{\lambda\}}^{(\alpha)})$ soient isomorphes dans ${}^{\varphi}\Lambda(\mathcal{C}(T))$. D'après la proposition 4.6.1, les faisceaux pervers $H_!(A)$ et $H_!(\det_! A) *_! \delta_{\{\lambda\}}$ sont donc isomorphes. Comme $(H_!(A))_{\mathrm{int}} \simeq H_{\mathrm{int}}(A)$ et que le faisceau pervers $(H_!(\det_! A) *_! \delta_{\{\lambda\}})_{\mathrm{int}}$ est de la forme $H_{\mathrm{int}}(\det_{\mathrm{int}} A) *_{\mathrm{int}} \delta_{\{\lambda'\}}$, avec λ' dans $T(k)$, d'après les propositions 2.4.1 et 3.4.1, on obtient le premier énoncé, car, d'après [G-L] 8.5.1, $H_{\mathrm{int}}(\det_{\mathrm{int}} A)$ est isomorphe, à convolution par un faisceau ponctuel près, à $\det_{\mathrm{int}} A$.

Si A est ψ-modéré à l'infini, en faisant le même raisonnement en utilisant le théorème 4.5.3 au lieu du théorème 4.5.1, on obtient que les faisceaux pervers $\tilde{H}_!(A) *_! \delta_{\{\lambda(A)\}}$ et $\tilde{H}_!(\det_! A) *_! \delta_{\{\lambda(\det_! A)\}}$ sont isomorphes. Comme $\tilde{H}_!(A)$ est ψ-modéré à l'infini, d'après la proposition 3.5.3, on en tire que $\tilde{H}_!(\det_! A)$ est également ψ-modéré à l'infini. On a donc, d'après 2.6.1 (4), $\lambda(A) = \lambda(\det_! A)$.

D'autre part, d'après la partie déjà démontrée du théorème, on sait qu'il existe a dans $T(k)$ tel que

$$\det_{\mathrm{int}}(A) \simeq \delta_{\{a\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}_{\mathrm{int}}(A).$$

Par 2.6.1 (4) et 3.5.2 (3), on a $\lambda(\det_{\mathrm{int}}(\mathrm{A})) = a$. Mais, d'autre part, d'après 2.6.1 (3), on a $\lambda(\det_{\mathrm{int}}(\mathrm{A})) = \lambda(\det_!(\mathrm{A}))$. Finalement on a donc $a = \lambda(A)$, ce qui donne le résultat. $\square$

5.5. Démonstration du théorème 3.6.1

Soit X un schéma intègre et de type fini sur un corps de caractéristique p, de corps des fonctions k_0 et de dimension r. Soit T_0 un k_0-tore déployé et soit T_X un X-tore déployé dont T_0 provienne par extension des scalaires. Pour tout point géométrique s de X on note T_s le $k(s)$-tore fibre de T_X en s et i_s l'inclusion $T_s \to T_X$. Soit k un corps algébriquement clos contenant k_0 et soit $T = T_0 \otimes_{k_0} k$. A tout sous-tore S de T correspond un sous-tore S_s de T_s. On a un isomorphisme canonique $\mathcal{C}(S_s) \simeq \mathcal{C}(S)$ induit par l'isomorphisme canonique $\pi_1(S)^t \to \pi_1(S_s)^t$ par lequel on identifiera $\mathcal{C}(S_s)$ et $\mathcal{C}(S)$.

PROPOSITION 5.5.1. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On suppose qu'il existe un objet A_X de* $\mathrm{Perv}(T_X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *tel que A provienne par changement de base de $A_X[-r]$. Pour tout point géométrique s de X on pose $A_s = Li_s^* A_X[-r]$.*

(1) *Il existe un ouvert dense U de X tel que, pour tout point géométrique s de U, A_s soit pervers.*

(2) *Si A est un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *il existe un ouvert dense U tel que, pour tout point géométrique s de U, A_s soit un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T_s, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

(3) *Si, pour tout point géométrique s d'un ouvert dense de X, A_s est un faisceau pervers ponctuel sur T_s (resp. de support l'origine dans T_s), alors A est ponctuel (resp. de support l'origine dans T).*

(4) *Il existe un ouvert dense U de X tel que $\lambda(A)$ se prolonge en une section de T_X au dessus de U dont l'image dans T_s soit égale à $\lambda(A_s)$ pour tout point géométrique s de U.*

(5) *Soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. Si A est ψ-modéré à l'infini alors il existe un ouvert dense U tel que, pour tout point géométrique s de U, A_s soit ψ-modéré à l'infini (on désigne encore par ψ l'isomorphisme $T_s \simeq (\mathbf{G}_{m,k(s)})^n$ déduit du précédent).*

(6) *Pour tout entier $N \geq 1$ il existe un ouvert dense U_N de X tel que, pour tout sous-tore S de dimension 1 de T et tout point x de $\bar{S} - S$, on ait,*

pour tout χ dans $\mathcal{C}_N(S)$ (notations de 3.3) et tout point géométrique s de U_N,

$$n_{S,x,\chi}(A) = n_{S_s,x,\chi}(A_s)\,,$$

en notant toujours x le point correspondant de $\bar{S}_s$.

Démonstration. — Les assertions (1) à (5) sont claires par constructibilité et le théorème de changement de base propre (la constructibilité du conducteur de Swan est établie dans [La1]). Pour (6) il suffit de vérifier qu'il existe un ouvert dense W_N de X et un ensemble fini F_N de sous-tores de dimension 1 de T tels que $n_{S_s,x,\chi}(A_s) = 0$ pour tout point géométrique s de W_N, tout $S \notin F_N$, tout x et tout χ dans $\mathcal{C}_N(S)$. En effet, compte tenu de l'interprétation des $n_{S,x,\chi}$ en terme de cycles proches rappelée en 2.2, le résultat est alors conséquence de la constructibilité de $R\psi$ et du théorème de changement de base propre. D'après [G-L] 4.1.1 et avec les notations de loc. cit., la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de $\Delta(A_s) \cap \mathcal{C}_N(T_s)$ est contenue dans la réunion d'un ensemble fini de cotores algébriques translatés de $\mathcal{C}_N(T_s)$. La démonstration, basée sur [G-L] 4.1.1′ et 4.1.2, donne que, par constructibilité et changement de base propre, on peut choisir les mêmes cotores sur un ouvert dense. □

Remarque. — Les assertions (1) à (5) de la proposition 5.5.1 restent valides pour X de type fini sur $\mathbf{Z}$ avec la même démonstration. Il en est de même pour (6) avec les modifications suivantes. Quitte à rapetisser X, on peut supposer que, pour tout caractère χ tel que l'entier $n_{S,x,\chi}(A)$ n'est pas nul pour tout S et tout x, χ est dans l'image de j_s pour tout point géométrique s de X, avec j_s le morphisme canonique $\mathcal{C}(S_s) \to \mathcal{C}(S)$ provenant du morphisme canonique $\pi_1(S)^t \to \pi_1(S_s)^t$. En effet, le morphisme canonique $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k(s)}) \to \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})$ est une immersion ouverte d'image la réunion des composantes connexes ne contenant pas de caractère non trivial d'ordre une puissance de la caractéristique résiduelle de s. Alors, pour tout entier $N \geq 1$, il existe un ouvert dense U_N de X tel que, pour tout point géométrique s de U_N, A_s est un faisceau pervers et tel que, pour tout sous-tore S de dimension 1 de T et pour tout point x de $\bar{S} - S$, on ait l'égalité $n_{S,x,\chi}(A) = n_{S_s,x,\chi_s}(A_s)$, pour tout point géométrique s de U_N et pour tout χ dans $\mathcal{C}_N(S)$ de la forme $\chi = j_s(\chi_s)$, en notant toujours x le point correspondant de $\bar{S}_s$.

Fin de la démonstration. — Pour tout entier $N \geq 1$ on considère le sous-groupe

$$\mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T)_N = T(k) \times \mathbf{Z}^{(\mathcal{S} \times \mathcal{C}_N(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$$

de $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}(T)$. On note $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)_N$ son image par l'isomorphisme Φ de 3.2 dans $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ et π_N la projection $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T) \to \mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)_N$.

Fixons un isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ et prenons A comme dans l'énoncé du théorème 3.6.1. Comme $\mathbf{H}_{\mathrm{int}}(T)$ est un groupe, on peut poser

$$B := \det_{\mathrm{int}}(A) *_{\mathrm{int}} \delta_{\{\lambda(A)^{-1}\}} *_{\mathrm{int}} (\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A))^{-1}.$$

C'est un objet de $\mathrm{Hyp}_{\mathrm{int}}(T)$ bien défini à isomorphisme près. Fixons un entier $N \geq 1$. D'après les énoncés (1), (2), (4) et (6) de la proposition précédente il existe un ouvert non vide U de S et un faisceau pervers B_U sur T_U, de restriction à T égale à B, tels que, pour tout point fermé s de U, A_s soit un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T_s, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $\pi_N B_s$ soit isomorphe à

$$\pi_N[\det_{\mathrm{int}}(A_s) *_{\mathrm{int}} \delta_{\{\lambda(A_s)^{-1}\}} *_{\mathrm{int}} (\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A_s))^{-1}]$$

(le fait que $\tilde{H}_{\mathrm{int}}(A)$ provienne d'un objet défini sur un ouvert dense de S est conséquence de la preuve de 3.7.1). On déduit du théorème 5.4.1 et de 5.5.1 (3) que $\pi_N B$ est à support ponctuel. En prenant N suffisamment grand pour que $B = \pi_N B$ on obtient que B est également à support ponctuel. Si A est ψ-modéré à l'infini, on obtient de même, en utilisant 5.5.1 (5), que B est de support l'origine. $\square$

CHAPITRE 6

ACTION DU GROUPE DE GALOIS SUR LE TRANSFORMÉ DE MELLIN

6.1. La catégorie $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$

6.1.1. Dans cette section, on note k_0 un corps de caractéristique (peut-être nulle) différente de ℓ et k une clôture algébrique fixée de k_0. On pose $G := \mathrm{Gal}\,(k \mid k_0)$. Pour T_0 un k_0-tore déployé on pose $T := T_0 \otimes k$.

Pour tout élément σ de G on pose $\mu_\sigma := \mathrm{Id}_{T_0} \otimes \sigma^{-1} : T \to T$. Pour tout x de $T(k)$ on a $\mu_\sigma(x) = \sigma(x)$. Pour tout objet A de $D^b_c(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on pose ${}^\sigma A := \mu_{\sigma *} A$. Si k_0 est un corps fini et si σ est l'automorphisme de Frobenius arithmétique on a ${}^\sigma A \simeq RF_* A$ avec les notations de 4.1.

De l'action de G sur T on déduit une action continue de G sur $\pi_1(T)^t$. Cette action correspond à l'action par automorphismes intérieurs provenant de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(T)^t \longrightarrow \pi_1(T_0)^t \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Quand $T_0 = \mathbf{G}_{m,k_0}$, l'action de G sur $\pi_1(\mathbf{G}_{m,k})^t \simeq \hat{\mathbf{Z}}(1)(k)$ est donnée par le caractère cyclotomique ℓ-adique. L'action de G sur $\pi_1(T)^t$ se prolonge en une action continue sur $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)^t]]$, de laquelle on déduit une action de G sur $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$. Pour tout élément σ de G on note $\varphi_\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ le morphisme correspondant.

PROPOSITION 6.1.1. — *Pour tout objet A de $D^b_c(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{M}_*({}^\sigma A) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi_\sigma} \mathcal{M}_*(A) \quad \textit{et} \quad \mathcal{M}_!({}^\sigma A) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi_\sigma} \mathcal{M}_!(A).$$

Démonstration. — Soit R l'anneau des entiers d'une extension finie de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ tel que A provienne après changement de base d'un objet A_R de $D_c^b(T,R)$. Soit L_T le $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-faisceau lisse constructible libre tordu de rang 1 sur T considéré dans [G-L] 3.1. On a des isomorphismes canoniques $\mu_{\sigma^{-1}*}L_T \simeq \mu_\sigma^* L_T \simeq R[[\pi_1(T)_\ell]] \otimes_{\varphi_\sigma} L_T$ en notant toujours φ_σ le morphisme $R[[\pi_1(T)_\ell]] \to R[[\pi_1(T)_\ell]]$ associé à σ et

$$\begin{aligned} R\Gamma(T, \mu_{\sigma*}(A_R) \otimes_R^L L_T) &\simeq R\Gamma(T, A_R \otimes_R^L \mu_{\sigma^{-1}*}(L_T)) \\ R\Gamma_c(T, \mu_{\sigma*}(A_R) \otimes_R^L L_T) &\simeq R\Gamma_c(T, A_R \otimes_R^L \mu_{\sigma^{-1}*}(L_T)). \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de l'isomorphisme recherché sur $\mathcal{C}(T)_\ell$, et donc sur tout $\mathcal{C}(T)$ par translation . □

6.1.2. On note $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ la catégorie dont les objets sont les (K, Φ_σ) pour $\sigma \in G$, avec K objet de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ et

$$\Phi_\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi_\sigma} K \simeq K$$

des isomorphismes dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ satisfaisant la relation

$$\Phi_{\sigma'\sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ (1 \otimes_{\varphi_{\sigma'}} \Phi_\sigma)$$

pour σ et σ' dans G.

On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ la sous-catégorie de $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ définie par la condition que le complexe K est concentré en degré zéro. Cette catégorie est équivalente à la catégorie formée des (M, Φ_σ) pour $\sigma \in G$, avec M un $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$-module cohérent et

$$\Phi_\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes_{\varphi_\sigma} M \simeq M$$

des isomorphismes satisfaisant la relation

$$\Phi_{\sigma'\sigma} = \Phi_{\sigma'} \circ (1 \otimes_{\varphi_{\sigma'}} \Phi_\sigma)$$

pour σ et σ' dans G.

Si U est un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par G on définit de même des catégories $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(U)$ et $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(U)$.

Remarque. — On définit une sous-catégorie $D^b_{\mathrm{coh\,cont}\,G}(\mathcal{C}(T))$ de la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ en imposant la condition de continuité suivante. La projection canonique $\pi_1(T)^t \to \pi_1(T)_\ell$ admet une section, ce qui permet de voir $\pi_1(T)_\ell$ comme un sous-groupe de $\pi_1(T)^t$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes Γ de $\pi_1(T)^t$ stables par G, contenant $\pi_1(T)_\ell$, et tels que $\pi_1(T)_\ell$ soit d'indice fini dans Γ. (Remarquons que $\pi_1(T)^t$ est réunion filtrante de tels sous-groupes.) Pour un tel sous-groupe Γ on pose $\mathcal{C}_\Gamma(T) = \mathrm{Spec}\, \bar{\mathbf{Q}}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell[[\Gamma]]$. Le schéma $\mathcal{C}_\Gamma(T)$ est réunion d'un ensemble fini de composantes connexes de $\mathcal{C}(T)$, il est stable par G et $\mathcal{C}_\Gamma(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}(T)(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. La condition de continuité est la suivante. On demande que, pour tout Γ dans $\mathcal{G}$, il existe R dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$, anneau d'entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$, tel que $K_{|\mathcal{C}_\Gamma(T)}$ et les $\Phi_{\sigma|\mathcal{C}_\Gamma(T)}$ proviennent par extension des scalaires d'un objet N de $D^b_{\mathrm{coh}}(R[[\Gamma]])$ et d'isomorphismes $\Psi_\sigma : R[[\Gamma]] \otimes^L_{\varphi_\sigma} N \simeq N$, en notant $\varphi_\sigma : R[[\Gamma]] \to R[[\Gamma]]$ le morphisme associé à σ, vérifiant l'égalité $\Psi_{\sigma'\sigma} = \Psi_{\sigma'} \circ (1 \otimes_{\varphi_{\sigma'}} \Psi_\sigma)$, tels que l'action semi-linéaire $G \times N \to N$ donnée par $(\sigma, m) \mapsto \Psi_\sigma(1 \otimes m)$ induise une action continue, pour la topologie profinie, sur les objets de cohomologie de N. Tous les énoncés suivants concernant $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ sont également valides pour $D^b_{\mathrm{coh\,cont}\,G}(\mathcal{C}(T))$, mais nous n'utiliserons pas ce fait.

6.1.3. Comme en 4.2 le produit tensoriel

$$\otimes^L : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \times D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$$

se relève naturellement en un produit, encore noté $\otimes^L$,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \times D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)),$$

si $\pi : T_0 \to T'_0$ est un morphisme de tores, le foncteur

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')} \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}} : D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T'))$$

se relève naturellement en un foncteur, encore noté $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T')} \otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}}$,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T')),$$

et le foncteur de dualité $D : M \to R\mathcal{H}om(M, \mathcal{O})$ de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{C}(T))$ dans lui même se relève naturellement en un foncteur, encore noté D,

$$D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)).$$

De même, on a également un foncteur

$$\mathrm{inv}^* = \mathrm{inv}_* : D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)),$$

et, pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$, fixé par G, on a un foncteur de translation

$$m^*_\chi : D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)).$$

On note ${}^G\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ le module trivial $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ muni des Φ_σ définis par $\Phi_\sigma(1 \otimes 1) = 1$. C'est une unité pour $\otimes^L$. Plus généralement, si $\alpha : G \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$ est un caractère continu, on note ${}^G\mathcal{O}^{(\alpha)}_{\mathcal{C}(T)}$ le module trivial $\mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)}$ muni des Φ_σ définis par $\Phi_\sigma(1 \otimes 1) = \alpha(\sigma)$.

6.1.4. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. On a un foncteur de restriction évident $A^H : D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}\,H}(\mathcal{C}(T))$. Ce foncteur admet un adjoint à droite donné par le foncteur d'induction $B^H : D^b_{\mathrm{coh}\,H}(\mathcal{C}(T)) \to D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ défini de la façon suivante. Fixons un ensemble de représentants R de G/H. Soit (K, Φ_σ) un objet de $D^b_{\mathrm{coh}\,H}(\mathcal{C}(T))$. On associe à K l'objet $Q := \oplus_{\alpha\in R}\, \varphi^*_\alpha K$, en posant $\varphi^*_\alpha K = \mathcal{O}_{\mathcal{C}(T)} \otimes^L_{\varphi_\alpha} K$. Pour σ dans G et α dans R, on écrit $\sigma\alpha = \beta\sigma_\alpha$ avec β dans R et σ_α dans H. On a alors un isomorphisme canonique $\varphi^*_\sigma Q \simeq \oplus_{\alpha\in R}\, \varphi^*_\beta \varphi^*_{\sigma_\alpha} K$ duquel on tire, grâce aux isomorphismes Φ_{σ_α}, un isomorphisme $\varphi^*_\sigma Q \simeq \oplus_{\alpha\in R}\, \varphi^*_\beta K$ qui donne un isomorphisme $\varphi^*_\sigma Q \simeq Q$ car les β décrivent R.

6.2. Les foncteurs ${}^G\mathcal{M}_!$ et ${}^G\mathcal{M}_*$

Comme pour tout objet A_0 de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et tout élément σ de G on a des isomorphismes canoniques, vérifiant la condition de cocycle, $A \simeq {}^\sigma A$, les objets $\mathcal{M}_! A$ et $\mathcal{M}_* A$ sont naturellement sous-jacents, d'après la proposition 6.1.1, à des objets de $D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$. (Ils sont aussi sous-jacents à des objets de $D^b_{\mathrm{coh\,cont}\,G}(\mathcal{C}(T))$, la condition de continuité étant conséquence de ce que si R est un anneau fini sur $\mathbf{F}_\ell$ et B un objet de $D^b_c(T_0, R)$, l'action de G sur $R\Gamma(T_0, B)$ et sur $R\Gamma_c(T_0, B)$ se factorise par un quotient fini, mais ce fait ne sera pas utilisé dans ce travail.) On définit ainsi, comme en 4.1, des foncteurs, notés ${}^G\mathcal{M}_!$ et ${}^G\mathcal{M}_*$:

$$D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)).$$

Ces foncteurs vérifient un formulaire tout à fait analogue à 4.1.1 (a)-(g), obtenu en remplaçant partout φ par G. Pour tout caractère continu $\alpha : G \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$, on note $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^{(\alpha)}$ le $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-faisceau de rang 1 sur $\operatorname{Spec} k_0$ qui est associé à α. Si A_0 est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on note $A_0^{(\alpha)}$ l'objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ obtenu par produit tensoriel de A_0 avec l'image inverse de $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^{(\alpha)}$. On a alors des isomorphismes canoniques ${}^G\mathcal{M}_!(A_0^{(\alpha)}) \simeq {}^G\mathcal{M}_!(A_0)^{(\alpha)}$ et ${}^G\mathcal{M}_*(A_0^{(\alpha)}) \simeq {}^G\mathcal{M}_*(A_0)^{(\alpha)}$.

Remarquons que, pour tout objet de A_0 de $\operatorname{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, ${}^G\mathcal{M}_*(A_0)$ est un objet de $\operatorname{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$.

Dans le cas où k_0 est un corps fini, soit σ le Frobenius arithmétique. Avec les notations de 4, on a alors $\varphi = \varphi_\sigma$ et ${}^\varphi\mathcal{M}_!(A_0)$ (resp. ${}^\varphi\mathcal{M}_*(A_0)$) est obtenu à partir de ${}^G\mathcal{M}_!(A_0)$ (resp. ${}^G\mathcal{M}_*(A_0)$) en prenant $\Phi = \Phi_\sigma$.

On a l'analogue suivant de la proposition 4.1.3 (avec la même preuve).

PROPOSITION 6.2.1. — *Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. Soit π le morphisme canonique $T_0 \otimes k^H \to T_0$.*

(1) *Pour tout objet A_0 de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*
$$ {}^H\mathcal{M}_*(\pi^* A_0) \simeq A^H({}^G\mathcal{M}_*(A_0)) \quad et \quad {}^H\mathcal{M}_!(\pi^* A_0) \simeq A^H({}^G\mathcal{M}_!(A_0)). $$

(2) *Pour tout objet A_1 de $D^b_c(T_0 \otimes k^H, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, on a des isomorphismes canoniques*
$$ {}^G\mathcal{M}_*(R\pi_* A_1) \simeq B^H({}^H\mathcal{M}_* A_1) \quad et \quad {}^G\mathcal{M}_!(R\pi_* A_1) \simeq B^H({}^H\mathcal{M}_! A_1). \quad \square $$

Pour U un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par G, on définit de façon analogue à 4.3 la catégorie ${}^G\Lambda(U)$, et le groupe ${}^GL(U)$. La proposition 4.3.1 (principe de Hartogs) s'étend telle quelle à ce cadre. On note ${}^GU(\mathcal{C}(T))$ le sous-groupe de ${}^GL(\mathcal{C}(T))$ engendré par les classes des ${}^G\mathcal{O}^{(\alpha)}_{\mathcal{C}(T)}$ avec $\alpha : G \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$ un caractère continu, et on définit les groupes ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$, ${}^GV(\mathcal{C}(T))$ et ${}^GL(\mathcal{C}(T))^1$ de manière similaire à 4.3.2.

On définit comme en 4.4 un foncteur déterminant
$$ \det : D^b_{\mathrm{coh}\, G}(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow {}^G\Lambda(\mathcal{C}(T)) $$
pour lequel on a l'analogue du lemme 4.4.1.

Pour H un sous-groupe d'indice fini de G on peut définir de façon similaire à 4.4 des foncteurs
$$ a^H : {}^G\Lambda(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow {}^H\Lambda(\mathcal{C}(T)) \quad \text{et} \quad b^H : {}^H\Lambda(\mathcal{C}(T)) \longrightarrow {}^G\Lambda(\mathcal{C}(T)) $$
pour lesquels on dispose de l'analogue de la proposition 4.4.2.

PROPOSITION 6.2.2. — *Soient A_0 et B_0 deux objets de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ qui définissent des objets isomorphes de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Les classes de $\det {}^G\mathcal{M}_!(A_0)$ et de $\det {}^G\mathcal{M}_!(B_0)$ dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$ sont égales.*

Démonstration. — Commençons par traiter le cas où A_0 et B_0 sont des faisceaux pervers semi-simples sur T_0. D'après [B-B-D] 4.3 il suffit de considérer le cas où A_0 et B_0 sont de la forme $j_{!*}\mathcal{A}_0$ et $j_{!*}\mathcal{B}_0$ avec $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$ des systèmes locaux semi-simples et $j : X_0 \hookrightarrow T_0$ localement fermé lisse géométriquement connexe dans T_0. Fixons un point géométrique $\bar{x}$ de X_0 et posons $\Gamma = \pi_1(X_0, \bar{x})$ et $\mathcal{H} = \pi_1(X_0 \otimes k, \bar{x})$. On a une suite exacte
$$ 0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 0. $$

Notons M_1 et M_2 les Γ-modules semi-simples associés à $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}_0$. Par hypothèse il sont isomorphes comme $\mathcal{H}$-modules. On va utiliser la théorie de Clifford

([Cl], [C-R]) dont nous allons rappeler certains points dans le présent cadre. Soit M un Γ-module semi-simple. Le $\mathcal{H}$-module $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M$ est semi-simple. Si A désigne l'ensemble des classes de $\mathcal{H}$-modules simples et L_a, pour a dans A, le module simple correspondant, on a $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M \simeq \oplus_{a\in A}\tilde{L}_a$, avec $\tilde{L}_a$ somme de copies de L_a. Le groupe Γ agit sur A et on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des Γ-orbites. On a une décomposition $M \simeq \oplus_{o\in\mathcal{O}} M_o$ avec $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M_o \simeq \oplus_{a\in o}\tilde{L}_a$. Il s'ensuit que l'on peut supposer que dans M_1 et M_2 n'apparaît qu'une seule orbite. Fixons des composants simples isomorphes L_1 et L_2 de $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M_2$ et notons $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ les sous-modules correspondants. Posons $\tilde{\mathcal{H}}_i = \{x \in \Gamma \mid x\tilde{L}_i = \tilde{L}_i\}$ pour $i = 1, 2$. On a $\tilde{\mathcal{H}}_1 = \tilde{\mathcal{H}}_2$. En effet, $x \in \tilde{\mathcal{H}}_i$ si et seulement si pour tout $L' \subset \tilde{L}_i$ simple on a $xL' \simeq L'$. Or si $L' \subset \tilde{L}_1$ et $L'' \subset \tilde{L}_2$ sont simples, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules $\varphi : L' \simeq L''$, et $x\varphi x^{-1} : xL' \simeq xL''$ est un isomorphisme pour tout x dans Γ. Posons $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_i$. C'est un sous-groupe d'indice fini de Γ, les modules $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ sont naturellement des $\tilde{\mathcal{H}}$-modules et on a $M_i \simeq \mathrm{Ind}_{\tilde{\mathcal{H}}}^{\Gamma} \tilde{L}_i$. En utilisant 6.2.1 et l'analogue de la proposition 4.4.2 pour $H = \tilde{\mathcal{H}}/\mathcal{H}$, on se ramène au cas où $\tilde{\mathcal{H}} = \Gamma$ (cas primitif). Une représentation projective de Γ sur un corps K avec système de facteurs α est la donnée de $T : \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$, avec V un K-vectoriel de dimension finie, telle que pour tout x, y dans Γ on ait $T(x)T(y) = \alpha(x, y)T(xy)$ avec $\alpha : \Gamma \times \Gamma \to K^\times$. D'après Clifford, si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe normal de Γ, K un corps algébriquement clos et M un Γ-module simple (de dimension finie sur K) primitif pour $\mathcal{H}$, i.e. de la forme $M = \tilde{L}$ avec L un sous-module simple de $\mathrm{Res}_{\mathcal{H}} M$, alors on a un isomorphisme $M \simeq L\otimes_K W$ avec W un K-vectoriel de dimension finie, l'action de Γ sur $L \otimes_K W$ étant de la forme $x \mapsto U(x) \otimes V(x)$ avec U une représentation projective de Γ sur L prolongeant l'action de $\mathcal{H}$, et V une représentation projective de Γ qui se factorise par $\Gamma/\mathcal{H}$. Remarquons (cf. [C-R] p. 279) que, par le lemme de Schur, si U' est une autre représentation projective de Γ sur L prolongeant l'action de $\mathcal{H}$, on a $U' = \xi U$ avec $\xi : \Gamma \to K^\times$. En posant $V' = \xi^{-1}V$ on peut donc remplacer U par U'. Par conséquent on a des isomorphismes $M_1 \simeq L \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_1$ et $M_2 \simeq L \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_2$ avec L muni de la même action projective de Γ prolongeant celle de $\mathcal{H}$ et W_1 et W_2 des vectoriels de même rang munis d'une action projective de Γ se factorisant par $\Gamma/\mathcal{H}$ et ayant le même système de facteurs. Si on ne considère que la structure de $\mathcal{H}$-module il est associé à L un système local $\mathcal{L}$ sur $X_0 \otimes k$. On a $\mathcal{A} \simeq \mathcal{L}\otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_1$ et $\mathcal{B} \simeq \mathcal{L}\otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_2$. On a par conséquent des isomorphismes $\mathcal{M}_!(A) \simeq \mathcal{M}_!(j_{!*}\mathcal{L}) \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_1$ et $\mathcal{M}_!(B) \simeq \mathcal{M}_!(j_{!*}\mathcal{L}) \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_\ell} W_2$. On en tire un isomorphisme

$$(\det \mathcal{M}_!(A)) \otimes (\det \mathcal{M}_!(B))^{-1} \simeq [(\det W_1) \otimes (\det W_2)^{-1}]^{\otimes r}$$

avec $r = \chi(T, j_{!*}\mathcal{L})$. Cet isomorphisme est compatible à l'action de G sur chaque facteur, ce qui donne l'énoncé recherché dans ce cas.

En général, on se ramène au cas où A_0 et B_0 sont pervers. Remarquons que d'après ce qui précède si C_0 est un objet simple de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, alors $C_0 \otimes k$ est semi-simple (et tous ses composants simples sont dans la même G-orbite). On peut donc remplacer A_0 et B_0 par leur semi-simplifié. $\square$

Si A est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$, on note $\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g$ la classe dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$ de $\det {}^G\mathcal{M}_!(A_0)$ pour A_0 un représentant de A. D'après la proposition précédente cette classe est indépendante du choix de A_0.

En particulier, on peut considérer le sous-groupe ${}^GG_!(\mathcal{C}(T))$ de ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$ engendré par les $\det {}^G\mathcal{M}_!(H)^g$, H décrivant la classe des objets de $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$ et le groupe quotient ${}^GG_!(\mathcal{C}(T))^1 := {}^GG_!(\mathcal{C}(T))/({}^GV(\mathcal{C}(T))/{}^GU(\mathcal{C}(T)))$.

6.3. Ramification

Soit S un schéma intègre normal et de type fini sur $\mathbf{Z}$ de corps des fonctions k_0. On suppose que ℓ est inversible sur S. Soit T_S un S-tore déployé. On pose $T_0 = T_S \otimes k_0$ et on note $\bar{\eta}$ le point géométrique de S associé à k. Soit U un ouvert de $\mathcal{C}(T)$ stable par G et soit K un objet de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\, G}(U)$. On dit que K est non ramifié sur S si l'action semi-linéaire de $G = \mathrm{Gal}\,(k \mid k_0)$ se factorise à travers $\pi_1(S, \bar{\eta})$. Plus précisément si σ et σ' dans G ont même image dans $\pi_1(S, \bar{\eta})$ on demande que $\Phi_\sigma = \Phi_{\sigma'}$ (ceci a un sens car $\varphi_\sigma = \varphi_{\sigma'}$). On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\, G}(U)_{\mathrm{nr}\, S}$ la catégorie correspondante.

Pour tout point fermé s de S on note $k(s)$ le corps résiduel de s, $\overline{k(s)}$ une clôture algébrique de $k(s)$, $\bar{s}$ le point géométrique correspondant et on pose $T_s = T_S \otimes k(s)$, $T_{\bar{s}} = T_s \otimes \overline{k(s)}$. On note $\varphi_s : T_s \to T_s$ le morphisme de Frobenius géométrique. On a une immersion ouverte canonique $j_s : \mathcal{C}(T_{\bar{s}}) \to \mathcal{C}(T)$, provenant du morphisme canonique $\pi_1(T)^t \to \pi_1(T_{\bar{s}})^t$ On a alors un foncteur

$$\psi_{U,s} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\, G}(U)_{\mathrm{nr}\, S} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\, \varphi_s}(j_s^{-1}(U)).$$

En effet on a un foncteur de restriction

$$\mathrm{res}_{U,s} : \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(U) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(j_s^{-1}(U))$$

et le choix d'un chemin (i.e. d'un isomorphisme de foncteurs fibres) entre $\bar{\eta}$ et $\bar{s}$ fournit un morphisme $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}(s) \mid k(s)) \to \pi_1(S, \bar{\eta})$ et donc une action semi-linéaire du morphisme de Frobenius arithmétique de $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}(s) \mid k(s))$ sur $\mathrm{res}_{U,s}(K)$ pour K dans $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\, G}(U)_{\mathrm{nr}\, S}$. L'objet ainsi défini ne dépendant pas, à isomorphisme canonique près, des choix, ceci définit $\psi_{U,s}$.

Si A_S est un objet de $D^b_c(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ on note A_0 son image inverse sur T_0 et A_s son image inverse sur T_s pour s point fermé de S.

PROPOSITION 6.3.1. — *Soit A_S un objet de $D^b_c(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Pour tout entier $M \geq 1$, il existe un ouvert dense S' de S tel que, pour tout entier i, l'objet de cohomologie $\mathcal{H}^i({}^G\mathcal{M}_!(A_0)_{|\mathcal{C}_M(T)})$ soit non ramifié sur S' et tel que, pour tout point fermé s de S', on ait un isomorphisme canonique*

$$\psi_{\mathcal{C}_M(T),s}(\mathcal{H}^i({}^G\mathcal{M}_!(A_0)_{|\mathcal{C}_M(T)})) \simeq \mathcal{H}^i({}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(A_s)_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})}).$$

En particulier $\det{}^G\mathcal{M}_!(A_0)_{|\mathcal{C}_M(T)}$ *est non ramifié sur S' et pour tout point fermé s de S' on a un isomorphisme canonique*

$$\psi_{\mathcal{C}_M(T),s}(\det{}^G\mathcal{M}_!(A_0)_{|\mathcal{C}_M(T)}) \simeq \det{}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(A_s)_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})}.$$

Les énoncés similaires valent pour $\mathcal{M}_*$.

Démonstration. — On va faire la démonstration pour $M = 1$, le cas général s'en déduisant (et pouvant être démontré de même). On note $\tilde{k}_0 \subset k$ l'extension de k_0 engendrée par $\mathbf{Z}_\ell(1)(k)$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k \mid \tilde{k}_0)$ s'identifie au noyau du caractère cyclotomique ℓ-adique. Soit $\tilde{S}$ le normalisé de S dans $\tilde{k}_0$. On note encore $\bar{\eta}$ le point géométrique de $\tilde{S}$ associé à k. Soit R l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$ tel que A_S provienne par changement de base d'un objet $A_{S,R}$ de $D^b_c(T_S, R)$. Notons $A_{\tilde{S},R}$ l'image inverse de $A_{S,R}$ sur $T_{\tilde{S}} = T_S \otimes \tilde{S}$ et $\pi : T_{\tilde{S}} \to \tilde{S}$ la projection canonique. Le $R[[\pi_1(T)_\ell]]$-faisceau lisse constructible libre tordu L_T provient par extension des scalaires d'un faisceau $L_{T_{\tilde{S}}}$ sur $T_{\tilde{S}}$. Par constructibilité des $R^i\pi_!(A_{\tilde{S},R} \otimes^L_R L_{T_{\tilde{S}}})$ il existe un ouvert dense $\tilde{S}'$ de $\tilde{S}$ tel que les $R^i\pi_!(A_{\tilde{S},R} \otimes^L_R L_{T_{\tilde{S}}})$ soient tous lisses sur $\tilde{S}'$. Par conséquent l'action de $\mathrm{Gal}(k \mid \tilde{k}_0)$ sur les $H^i_c(T, A_R \otimes^L_R L_T)$ se factorise par celle de $\pi_1(\tilde{S}, \bar{\eta})$, en notant A_R l'image inverse de $A_{S,R}$ sur T. Soit S' un ouvert dense de S dont l'image inverse dans $\tilde{S}$ est contenue dans $\tilde{S}'$. Commme le caractère cyclotomique ℓ-adique est non ramifié en dehors de ℓ, il résulte de ce qui précède que l'action semi-linéaire de G sur les $\mathcal{H}^i\mathcal{M}_!(A)_{|\mathcal{C}(T)_\ell}$ se factorise par $\pi_1(S', \bar{\eta})$. Ceci donne la première assertion de l'énoncé et le reste en résulte par le théorème de changement de base pour les morphismes propres. Les énoncés analogues pour $\mathcal{M}_*$ se déduisent par dualité. $\square$

6.4. Calcul de $\det{}^G\mathcal{M}_!$

A tout objet A de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ on associe, comme en 4.5, un élément $G_!(A)$ de ${}^GG_!(\mathcal{C}(T))$ de la façon suivante. Si A est pervers, on pose $G_!(A) :=$

$\det {}^G\mathcal{M}_!(H_!(A))^g$. En général, on pose

$$G_!(A) := \bigotimes_i G_!({}^pH^iA)^{(-1)^i},$$

le produit dans ${}^GG_!(\mathcal{C}(T))$ étant noté multiplicativement. Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ on définit de même un élément $\tilde{G}_!(A)$ de ${}^GG_!(\mathcal{C}(T))$, en remplaçant $H_!$ par $\tilde{H}_!$ dans la définition.

Les théorèmes 4.5.1 et 4.5.3 admettent la généralisation suivante.

THÉORÈME 6.4.1. — *Soit S un schéma intègre et de type fini sur $\mathbf{F}_p$, de corps des fonctions k_0. Soit T_0 un k_0-tore déployé. Soit A un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. On suppose qu'il existe un S-tore déployé T_S et un objet A_S de $D^b_c(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ tels que T_0 et A proviennent de T_S et de A_S par extension des scalaires. On a l'égalité*

$$[\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g] = [G_!(A)]$$

dans le groupe quotient ${}^GL(\mathcal{C}(T))^1$. Soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. Si, de plus, A est ψ-modéré à l'infini, on a l'égalité

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda(A)\}})^g \cdot \tilde{G}_!(A)$$

dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$.

Démonstration. — On peut supposer que A est un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ et que A provient par changement de base de A_S avec $A_S[r]$ pervers sur T_S, en désignant par r la dimension de S.

Commençons par démontrer le premier énoncé dans le cas où $\chi(T, A) = 0$, sans utiliser l'hypothèse d'existence d'un modèle sur T_S. On peut alors supposer que $A = A_0 \otimes k$ avec A_0 un faisceau pervers simple sur T_0. En utilisant 6.2.1 et l'analogue de la proposition 4.4.2 on se ramène comme dans la démonstration de 6.2.2 au cas primitif, i.e. on peut supposer que tous les composants simples de A sont isomorphes. Soit B un composant simple de A. On a $\chi(T, B) = 0$ et donc, d'après le théorème 5.1.1 de [G-L], il existe un isomorphisme de tores $\psi : T \simeq T' \times T''$ avec T'' de dimension 1, un faisceau pervers B' sur T' et un point fermé χ de $\mathcal{C}(T'')$ tels que $B \simeq \pi'^*(B'[1]) \otimes \pi''^*\mathcal{L}_\chi$, en notant π' et π'' les projections. Choisissons des k_0-tores déployés T'_0 et T''_0 tels que l'on ait un isomorphisme $T_0 \simeq T'_0 \times T''_0$ dont ψ provienne par extension des scalaires. Tous les composants simples de A étant de cette forme, χ est invariant sous l'action de G et donc $\mathcal{L}_\chi$ est sous-jacent à un faisceau sur T_0. En tordant par $\pi''^*\mathcal{L}_{\chi^{-1}}$ on se ramène au cas où $A_0 \simeq \pi'^*({A'}_0[1])$ avec ${A'}_0$ pervers sur T'_0 et on termine la démonstration comme en 5.1.1 (remarquons que l'on dispose de l'analogue de la proposition 4.4.5 dans le présent cadre : il suffit de remplacer partout dans la démonstration φ par φ_σ, les Φ par des Φ_σ et q par $\kappa(\sigma)$, en notant κ le caractère cyclotomique ℓ-adique).

Soit ϵ l'involution naturelle non triviale sur $\bar{\mathcal{S}}$ donnée par l'échange des points à l'infini et soit ϵ' l'involution $((S,x),\chi) \mapsto (\epsilon(S,x),\chi^{-1})$ sur $\bar{\mathcal{S}} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On en déduit une involution sur $\mathcal{H}_!(T) \simeq \mathbf{H}_!(T)$. Pour tout sous-ensemble K de $\mathcal{H}_!(T) \simeq \mathbf{H}_!(T)$ on note K_{sym} l'ensemble des éléments de K fixés par cette involution. On définit de même $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$ et on note ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$ le sous-groupe de ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))$ engendré par les images des éléments de $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$.

PROPOSITION 6.4.2. — *Sous les hypothèses précédentes on suppose que A est un objet de* $\mathrm{Perv}(T_0,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ *et provient par changement de base de A_S avec $A_S[r]$ pervers sur T_S, en désignant par r la dimension de S. On a alors*

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g = G_!(A)\cdot\Gamma$$

avec Γ dans ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$.

Démonstration. — Si $\chi(T,A)=0$ alors $\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g$ appartient au groupe ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$ d'après ce qui précède et 3.4.1 (2) (on n'utilise pas ici l'existence d'un modèle de A sur T_S). Remarquons par ailleurs qu'on peut supposer que $A = A_0 \otimes k$ avec A_0 pervers simple sur T_0. En effet si $B_S[r]$ est un composant simple de $A_S[r]$, l'image inverse de B_S sur T_0 est soit nulle soit un composant simple de l'image inverse de A_S sur T_0, et par conséquent les composants simples de l'image inverse de A_S sur T_0 satisfont à l'hypothèse de l'énoncé. Dans ce cas A est semi-simple et tous ses composants simples ont la même caractéristque d'Euler-Poincaré. On peut donc supposer que A est un objet de $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. D'après l'analogue de la proposition 5.1.2 on a alors $\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\det_! A)^g$. Comme $\det_{\mathrm{int}} A \simeq (\det_! A)_{\mathrm{int}}$ par 2.4.1 (2), on obtient de même que, à un élément de ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$ près, $\det {}^G\mathcal{M}_!(\det_! A)^g$ et $\det {}^G\mathcal{M}_!(\det_{\mathrm{int}} A)^g$ sont égaux. D'après le théorème 3.6.1 il suffit de vérifier que $\det {}^G\mathcal{M}_!(H_{\mathrm{int}}(A))^g = G_!(A)\cdot\Gamma$ avec Γ dans ${}^G G_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$, ce qui résulte alors de la proposition 3.7.3. □

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème. On reprend les notations de 6.3. Remarquons que par la preuve de 3.7.1, quitte à rétrécir S, on peut supposer qu'il existe un faisceau pervers $H_!(A)_S[r]$ sur T_S tel que $H_!(A)$ provienne par changement de base de $H_!(A)_S$. D'après la proposition 6.4.2 on peut écrire

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(A_0) \simeq \det {}^G\mathcal{M}_!(H_!(A)_0) \cdot \det {}^G\mathcal{M}_!(H_0^1) \cdot \det {}^G\mathcal{M}_!(H_0^2)^{-1}$$

avec H_0^1 et H_0^2 des faisceaux pervers sur T_0 dont l'image inverse sur T appartient à $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$. On peut aussi supposer que H_0^1 et H_0^2 proviennent de H_S^1 et H_S^2 avec $H_S^1[r]$ et $H_S^2[r]$ pervers sur T_S. Enfin on peut supposer que pour tout point fermé s de S, A_s, $H_!(A)_s$, H_s^1 et H_s^2 sont pervers. Soit M un entier ≥ 1. D'après la proposition 6.3.1 il existe un ouvert dense S_M de S tel que pour tout point fermé s de S_M on ait

$$\begin{aligned}\det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(A_s)_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})} \\ \simeq [\det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_!(A)_s) \cdot \det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_s^1) \cdot \det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_s^2)^{-1}]_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème 4.5.1, $\det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(A_s)$ est égal dans ${}^{\varphi_s}L(\mathcal{C}(T_{\bar{s}}))^0$ à $\det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_!(A_{\bar{s}}) *_! \delta_{\{\lambda\}})$ avec λ convenable. Posons, pour T un k-tore,

$$\mathcal{H}_!(T)^1 = \mathbf{N}^{(\bar{S}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}.$$

On a un morphisme canonique $(\mathcal{H}_!(T)^1)^G \to (\mathcal{H}_!(T_{\bar{s}})^1)^{\varphi_s}$ dont on déduit un morphisme $\mu : \mathbf{H}_!(T_0)^g \to \mathbf{H}_!(T_s)^g$ obtenu en composant avec les morphismes canoniques $\mathbf{H}_!(T_0)^g \to \mathcal{H}_!(T)^G \to (\mathcal{H}_!(T)^1)^G$ et $(\mathcal{H}_!(T_{\bar{s}})^1)^{\varphi_s} \to \mathcal{H}_!(T_{\bar{s}})^{\varphi_s} \to \mathbf{H}_!(T_s)^g$. Soit N un entier ≥ 1. On a défini en 3.4 pour tout tore T un morphisme de troncation $\pi_N : \mathcal{H}_!(T) \to \mathcal{H}_!(T)_N$ dont on déduit un foncteur $\pi_N : \mathrm{Hyp}_!(T) \to \mathrm{Hyp}_!(T)$. D'après 5.5.1 (6) il existe un ouvert dense $S_{M,N}$ de S_M tel que pour tout point fermé s de $S_{M,N}$ on ait

$$H_!(A_{\bar{s}}) \simeq \mu(H_!(A)) \cdot H$$

avec H dans $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$ tel que $\pi_N H$ soit ponctuel. On déduit de ce qui précède que

$$[\det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_s^1) \cdot \det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_s^2)^{-1}]_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})} \simeq \det {}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(H_s^3)_{|\mathcal{C}_M(T_{\bar{s}})}$$

avec H_s^3 faisceau pervers sur T_s d'image inverse $H_{\bar{s}}^3$ sur $T_{\bar{s}}$ dans $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$ avec $\pi_N H_{\bar{s}}^3$ ponctuel. On déduit du lemme suivant, en prenant M assez grand pour que $\pi_M H^1 = H^1$ et $\pi_M H^2 = H^2$ et $N = M$, que H_1 et H_2 sont isomorphes à convolution par un faisceau ponctuel près, ce qui donne la première partie de l'énoncé.

LEMME 6.4.3. — *Soit k_0 un corps fini et soit T_0 un k_0-tore déployé. Soit M un entier ≥ 1. Soient H_0^1 et H_0^2 (resp. H_0^3) des faisceaux pervers sur T_0 tels* *que H^1 et H^2 appartiennent à* $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$ *(resp.* $\mathrm{Hyp}_!(T_0)^g$*). On suppose que* $\pi_M H^1 = H^1$*, que* $\pi_M H^2 = H^2$*, que* $\pi_M H^3$ *est ponctuel et que*

$$(6.4.3) \qquad [\det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H^1_0) \cdot \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H^2_0)^{-1}]_{|\mathcal{C}_M(T)} \simeq \det {}^{\varphi}\mathcal{M}_!(H^3_0)_{|\mathcal{C}_M(T)}.$$

Alors H^1 et H^2 sont isomorphes à convolution par un faisceau ponctuel près.

Démonstration. — Pour $i_\chi : \chi \to \mathcal{C}_M(T)$ un point fermé fixé par φ^e on compare les normes archimédiennes des valeurs propres de $Li^*_\chi\Phi^{(e)}$ (qui sont des sommes de Gauss, par la proposition 4.1.2) sur les deux membres de (6.4.3). □

Fixons maintenant un isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ et supposons que A est ψ-modéré à l'infini. On a alors $\det {}^{G}\mathcal{M}_!(A)^g = \det {}^{G}\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda\}})^g \cdot \tilde{G}_!(A)$ dans ${}^{G}G_!(\mathcal{C}(T))$ avec λ dans $T_0(k_0)$. Il reste à voir que $\lambda = \lambda(A)$. Soit S' un ouvert dense de S tel que $\lambda(A)$ et λ se prolongent en une section de T_S au dessus de S'. On note $\lambda(A)_s$ et λ_s leurs images dans T_s pour s point fermé de S'. En appliquant 4.5.3, 5.5.1 (4) et 6.3.1, on obtient, quitte à remplacer S' par un ouvert dense plus petit, que, pour tout point fermé s de S', les modules ${}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda_s\}})_{|\mathcal{C}(T_{\bar{s}})_\ell}$ et ${}^{\varphi_s}\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda(A)_s\}})_{|\mathcal{C}(T_{\bar{s}})_\ell}$ sont isomorphes à torsion près. Ici on voit $\delta_{\{\lambda_s\}}$ et $\delta_{\{\lambda(A)_s\}}$ comme des faisceaux pervers sur T_s. En restreignant les modules à l'origine de $\mathcal{C}(T_{\bar{s}})_\ell$ on voit que cela entraîne que les deux modules sont isomorphes. Fixons un entier $n > 0$. Par la proposition 4.1.2 on en tire que pour tout caractère χ d'ordre $\leq \ell^n$ du groupe abélien fini $T_s(k(s))$, on a $\chi(\lambda_s) = \chi(\lambda(A)_s)$, ce qui entraîne que $\lambda_s \cdot \lambda(A)_s^{-1}$ est une puissance ℓ^n-ième dans $T_s(k(s))$. Par le théorème de Chebotarev on en déduit que $\lambda \cdot \lambda(A)^{-1}$ est une puissance ℓ^n-ième dans $T_0(k_0)$, ceci pour tout $n > 0$. On a donc bien $\lambda = \lambda(A)$. □

Remarque. — Le théorème 6.4.1, ainsi que son analogue en caractéristique zéro, le théorème 7.2.5, est à rapprocher d'un résultat de T. Saito [Sa], qui exprime le déterminant de la cohomologie d'un système local modéré dans le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans une variété projective en fonction de caractères de Hecke algébriques associés aux sommes de Jacobi.

COROLLAIRE 6.4.4. — *Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ *vérifiant les hypothèses du théorème. Pour tout morphisme de tores $p : T \to T'$ tel que $Rp_!(A)$ soit un faisceau pervers, il existe un point fermé λ de T tel que l'on ait un isomorphisme*

$$H_!(Rp_!(A)) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_! Rp_!(H_!(A)).$$

Démonstration. — Similaire à celle du corollaire 4.5.2. □

6.5. Un exemple : le module d'Ihara

Dans ce numéro k_0 est à nouveau un corps de caractéristique différente de ℓ mais peut-être nulle. Rappelons la définition du module d'Ihara ℓ-adique ([I1], [I2], [I3]). Considérons le corps de séries de Puiseux $L := \varinjlim_{(p,N)=1} k((t^{1/N}))$ et notons M l'extension pro-ℓ maximale de $k(t)$ dans L, non ramifiée en dehors des places $0, 1$ et ∞. Soit $\mathcal{F}_\ell$ le groupe de Galois de $M \mid k(t)$. C'est un pro-ℓ groupe libre sur deux générateurs et on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathcal{F}_\ell \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(M \mid k_0(t)) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Le groupe G agit naturellement sur L par son action sur les coefficients des séries de Puiseux. On a ainsi un scindage canonique $\rho : G \to \mathrm{Gal}\,(M \mid k_0(t))$, qui permet de faire agir G sur $\mathcal{F}_\ell$ par conjugaison par ρ. Ce scindage correspond au choix du point de base $\overrightarrow{01}$ (au sens de [D2]) pour le groupe fondamental pro-ℓ $\pi_1(\mathbf{P}^1_k - \{0,1,\infty\})_\ell$ et on a alors un isomorphisme $\mathcal{F}_\ell \simeq \pi_1(\mathbf{P}^1_k - \{0,1,\infty\}, \overrightarrow{01})_\ell$ compatible à l'action de G. Le module d'Ihara ℓ-adique est le module $\mathrm{Ih}_\ell := \mathcal{F}'_\ell/\mathcal{F}''_\ell$. (Si Γ est un groupe topologique, on note Γ' l'adhérence du sous-groupe des commutateurs dans Γ.) L'action continue de $\mathcal{F}_\ell/\mathcal{F}'_\ell$ sur Ih_ℓ par automorphismes intérieurs permet de munir Ih_ℓ d'une structure de $\mathbf{Z}_\ell[[\mathcal{F}_\ell/\mathcal{F}'_\ell]]$-module par rapport à laquelle l'action de G est semi-linéaire. D'après [I1] c'est un $\mathbf{Z}_\ell[[\mathcal{F}_\ell/\mathcal{F}'_\ell]]$-module libre de rang 1, une base étant donnée par la classe du commutateur $x_0x_1x_0^{-1}x_1^{-1}$ de deux générateurs topologiques x_0 et x_1 de G.

Considérons le tore $T_0 := \mathrm{Spec}\,k_0[t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}]$ et l'immersion

$$i : \begin{cases} \mathbf{P}^1_k - \{0,1,\infty\} \longrightarrow T \\ t \longmapsto t_1 = t,\ t_2 = 1 - t. \end{cases}$$

Comme $\pi_1(T)_\ell$ est abélien, cette immersion fournit un isomorphisme canonique $\mathcal{F}_\ell/\mathcal{F}'_\ell \simeq \pi_1(T)_\ell$ compatible à l'action de G. On note A le $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau pervers $Ri_!\mathbf{Z}_\ell[1](1) \simeq Ri_*\mathbf{Z}_\ell[1](1)$. Soit L_T le $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$-faisceau lisse constructible libre tordu de rang 1 sur T considéré dans [G-L] 3.1. Rappelons qu'il est obtenu à partir du caractère tautologique $\pi_1(T)_\ell \to \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]^\times$.

Proposition 6.5.1. — *On a un isomorphisme canonique de $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules*

$$\mathrm{Ih}_\ell \simeq H^0_c(T, A \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} L_T)$$

compatible à l'action semi-linéaire de G.

Démonstration. — On considère la tour de revêtements

$$\cdots \xrightarrow{p} T^{(n+1)} \xrightarrow{p} T^{(n)} \xrightarrow{p} \cdots$$

avec $T^{(n)} = T$ et $p : (t_1, t_2) \mapsto (t_1^\ell, t_2^\ell)$. On note p_n le morphisme composé $T^{(n)} \to T^{(0)}$. On pose $X = \mathbf{P}^1_k - \{0, 1, \infty\}$. Par image inverse par i on obtient ainsi une tour de revêtements $q_n : X^{(n)} \to X$. Soient γ_1 et γ_2 des générateurs topologiques de $\pi_1(T)_\ell$ engendrant les groupes d'inertie associés aux diviseurs $t_1 = 0$ et $t_2 = 0$. Pour tout entier n, on note $\mathfrak{A}_n$ l'idéal de $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$ engendré par $\gamma_1^{\ell^n} - 1$ et $\gamma_2^{\ell^n} - 1$. On a un isomorphisme canonique de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$p_{n*}\mathbf{Z}_\ell \simeq L_T \otimes_{\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]} \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]/\mathfrak{A}_n$$

et donc en particulier un isomorphisme canonique de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$q_{n*}\mathbf{Z}_\ell \simeq i^*(L_T) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]} \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]/\mathfrak{A}_n.$$

On en tire des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} H^0_c(T, A \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} L_T) &\simeq H^1_c(X, i^*L_T(1)) \\ &\simeq \varprojlim H^1_c(X, i^*(L_T) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]} \mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]/\mathfrak{A}_n(1)) \\ &\simeq \varprojlim H^1_c(X, q_{n*}\mathbf{Z}_\ell(1)) \\ &\simeq \varprojlim H^1_c(X^{(n)}, \mathbf{Z}_\ell(1)). \end{aligned}$$

On a une action continue naturelle de $\pi_1(T)_\ell$ sur $\varprojlim H^1_c(X^{(n)}, \mathbf{Z}_\ell(1))$ et l'isomorphisme $H^0_c(T, A \otimes^L_{\mathbf{Z}_\ell} L_T) \simeq \varprojlim H^1_c(X^{(n)}, \mathbf{Z}_\ell(1))$ est un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules compatible à l'action de G.

Il reste à construire un isomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell[[\pi_1(T)_\ell]]$-modules, compatible à l'action de G, $\mathrm{Ih}_\ell \simeq \varprojlim H^1_c(X^{(n)}, \mathbf{Z}_\ell(1))$. La construction est toute pareille à celle effectuée dans [I2] Proposition 1.3. On considère le sous-corps $K_n := k(t)(t^{\ell^{-n}}, (1-t)^{\ell^{-n}})$ de L. C'est le corps des fonctions de $X^{(n)}$ et $F := \cup K_n$ est l'extension abélienne pro-ℓ maximale de $k(t)$ non ramifiée en dehors de 0, 1 et ∞. On a donc un isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}\,(F \mid k(t)) \simeq \mathcal{F}'_\ell$. Soit K'_n l'extension abélienne pro-ℓ maximale de K_n contenue dans M et non ramifiée en dehors de 0, 1 et ∞ ; le corps $F' := \cup K'_n$ est l'extension abélienne pro-ℓ maximale de F non ramifiée en dehors de 0, 1 et ∞. On obtient ainsi des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{F}'_\ell/\mathcal{F}''_\ell \simeq \mathrm{Gal}\,(F' \mid F) \simeq \varprojlim \mathrm{Gal}\,(K'_n \mid K_n).$$

On en tire l'isomorphisme recherché en utilisant l'isomorphisme canonique

$$\mathrm{Gal}\,(K'_n \mid K_n) \simeq H^1_c(X^{(n)}, \mathbf{Z}_\ell(1)). \quad \square$$

On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)_\ell)$ la catégorie obtenue par restriction des objets de la catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T))$ à $\mathcal{C}(T)_\ell$. Par linéarisation de l'action de G et extension des scalaires, on associe naturellement à Ih_ℓ un objet $\mathcal{I}h_\ell$ de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}\,G}(\mathcal{C}(T)_\ell)$. On pose $\bar{A} := A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \bar{\mathbf{Q}}_\ell$. On note $j : U \to T$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire de $i(X)$ dans T et on pose $\bar{B} := Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[2](1))$.

THÉORÈME 6.5.2. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{I}h_\ell \simeq H^0({}^G\mathcal{M}_!(\bar{A}))_{|\mathcal{C}(T)_\ell} \simeq \det {}^G\mathcal{M}_!(\bar{A})_{|\mathcal{C}(T)_\ell} \simeq {}^G\mathcal{M}_!(\bar{B})_{|\mathcal{C}(T)_\ell}.$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme est conséquence directe de la proposition précédente. Comme $\mathcal{M}_!(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[2](1))$ est supporté par l'origine dans $\mathcal{C}(T)$, on déduit de la suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell[2](1) \longrightarrow \bar{B} \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$$

que ${}^G\mathcal{M}_!(\bar{B})$ et ${}^G\mathcal{M}_!(\bar{A})$ sont canoniquement isomorphes en dehors de l'origine. Pour conclure il suffit de savoir que $\mathcal{M}_!(\bar{B})$ est isomorphe à un module localement libre, ce qui est un cas particulier de la proposition 7.1.2. En effet, ceci entraîne que, en dehors de l'origine, $\mathcal{M}_!(\bar{A})$ est isomorphe à un module localement libre, et donc, en dehors de l'origine les objets $H^0({}^G\mathcal{M}_!(\bar{A}))$, $\det {}^G\mathcal{M}_!(\bar{A})$ et ${}^G\mathcal{M}_!(\bar{B})$ sont canoniquement isomorphes, et on peut conclure par le principe de Hartogs. □

Remarque. — L'action de G sur la la classe du commutateur $x_0x_1x_0^{-1}x_1^{-1}$ dans Ih_ℓ est donnée par la fonction beta ℓ-adique d'Ihara ([I1],[I3]). De façon similaire si k_0 est un corps de type fini sur $\mathbf{F}_p$ et $\psi : \mathbf{F}_p \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell$ est un caractère additif non trivial, on peut considérer le faisceau pervers $H(\psi\,; 1)$ (cf. 3.1) sur $\mathbf{G}_{m,k_0}$. La restriction de ${}^G\mathcal{M}_!(H(\psi\,; 1))$ à $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})_\ell$ est étroitement reliée à la composante ℓ-adique de la fonction gamma hyperadélique d'Anderson (cf. [A] Th. 6 et [Co2] Th. 5.3).

CHAPITRE 7

CARACTÉRISTIQUE 0

7.1. Le foncteur $H_!^{\prime}$

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ, mais éventuellement nulle. Soit T un k-tore. On note $\mathcal{H}_!(T)^1$ le quotient du monoïde $\mathcal{H}_!(T)$ par $T(k)$. Autrement dit on a $\mathcal{H}_!(T)^1 = \mathbf{N}^{(\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$. Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. A la donnée des entiers $n_{S,x,\chi}$ définis en 2.3 est naturellement associé un élément de $\mathcal{H}_!(T)^1$, que l'on note $\gamma(A)$.

Soit δ un élément de $\mathcal{H}_!(T)^1$. On considère le tore $\Theta_1 := \prod(\mathbf{G}_{m,k})^{\delta(S,x,\chi)}$ pour (S,x,χ) parcourant $\bar{\mathcal{S}}\times\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. On a un morphisme canonique de tores $\pi_1:\Theta_1\to T$ donné par

$$\pi_1(x) = \prod_{i,(S,x,\chi)} \varphi_{S,x}(x_{i,(S,x,\chi)})$$

pour $x = (x_{i,(S,x,\chi)})$, avec $1\le i\le\delta(S,x,\chi)$. Notons Θ le quotient de Θ_1 par l'action diagonale de $\mathbf{G}_{m,k}$.

On note $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}_!(T)^1$ formé des δ tels que le morphisme $\pi_1:\Theta_1\to T$ se factorise en un morphisme $\pi:\Theta\to T$. C'est un sous-monoïde de $\mathcal{H}_!(T)^1$.

LEMME 7.1.1. — *On suppose que k est de caractéristique nulle.*

(1) *Pour tout isomorphisme $\psi : T\simeq(\mathbf{G}_{m,k})^n$ on a $\mathcal{H}_!(T)^{h1} = \mathcal{H}_!(T)^{t1}_\psi$, en notant $\mathcal{H}_!(T)^{t1}_\psi$ l'image de $\mathcal{H}_!(T)^{t}_\psi$ dans $\mathcal{H}_!(T)^1$.*

(2) *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T,\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *l'élément $\gamma(A)$ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$.*

Démonstration. — Soit δ dans $\mathcal{H}_!(T)^1$ et soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$. On note $\pi_i : T \to \mathbf{G}_{m,k}$ la projection sur le i-ème facteur. Pour tout sous-tore S de dimension 1 de T, tout y dans $\bar{S} - S$ et tout $1 \leq i \leq n$, on note $N_i(S, y)$ l'entier tel que

$$(\pi_i \circ \varphi_{S,y})^* \frac{dx}{x} = N_i(S, y) \frac{dx}{x}.$$

L'appartenance de δ à $\mathcal{H}_!(T)^t_\psi$ est équivalente aux relations

$$\sum_{(S,x,\chi)} N_i(S, x)\, \delta(S, x, \chi) = 0$$

pour $1 \leq i \leq n$. Les mêmes relations sont équivalentes à l'appartenance de δ à $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$. Ceci démontre (1). L'énoncé (2) est clair quand T est de dimension 1. En général on peut choisir ψ de telle sorte que pour tout S dans $\mathcal{S}(A)$, l'intersection $S \cap \ker \pi_i$ est finie (ce qui est en fait inutile, cf. la preuve de 3.4.2) et on se ramène au cas $n = 1$ par la proposition 7.5.1 de [G-L], de façon similaire à la preuve de 3.5.3. □

On suppose à partir de maintenant que δ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$. Soit $\mathbf{P}$ l'espace projectif obtenu en quotientant $\prod(\mathbf{A}^1_k)^{\delta(S,x,\chi)} - \{0\}$ par l'action diagonale de $\mathbf{G}_{m,k}$. On a une inclusion canonique $\Theta \to \mathbf{P}$. On note $D_{i,(S,x,\chi)}$ le diviseur dans $\mathbf{P}$ d'équation $x_{i,(S,x,\chi)} = 0$. On note Z l'image du fermé $\sum x_{i,(S,x,\chi)} = 0$ dans Θ. C'est un diviseur dans Θ. Soit $j : U \to \Theta$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Comme l'abélianisé du groupe fondamental modéré de U est libre de rang $\dim \Theta + 1$ et est topologiquement engendré par les lacets autour des diviseurs $D_{i,(S,x,\chi)}$, il existe un unique $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-système local modéré de rang 1 sur U et de monodromie χ le long des diviseurs $D_{i,(S,x,\chi)}$. On le note $\mathcal{L}(\delta)$. Il admet aussi la description suivante. Soit $y = \sum x_{i,(S,x,\chi)}$ sur Θ_1. On considère le système local sur $U_1 = \Theta_1 - \{y = 0\}$ défini par $\mathcal{L}_1(\delta) := \mathcal{L}_2(\delta)_{|U_1} \otimes \mathcal{L}_3(\delta)_{|U_1}$ avec $\mathcal{L}_2(\delta) := \bigoplus_{i,(S,x,\chi)}(x^*_{i,(S,x,\chi)}\mathcal{L}_\chi)$ et $\mathcal{L}_3(\delta) := y^*\mathcal{L}_{\chi_0^{-1}}$ pour $\chi_0 = \prod_{(S,x,\chi)} \chi^{\delta(S,x,\chi)}$. Ce système local est invariant sous l'action diagonale de $\mathbf{G}_{m,k}$ et le système local qui lui correspond sur U est isomorphe à $\mathcal{L}(\delta)$.

On pose $A_!(\delta) := Rj_*\mathcal{L}(\delta)[\dim \Theta]$ et $H'_!(\delta) := R\pi_! A_!(\delta)$. Dualement on pose $A_*(\delta) := Rj_!\mathcal{L}(\delta)[\dim \Theta]$ et $H'_*(\delta) := R\pi_* A_*(\delta)$.

PROPOSITION-DÉFINITION 7.1.2. — *Soit δ un élément de $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$.*

(1) *Les objets $A_!(\delta)$ et $H'_!(\delta)$ (resp. $A_*(\delta)$ et $H'_*(\delta)$) sont des faisceaux pervers.*

(2) *Les objets* $\mathcal{M}_!(A_!(\delta))$ *et* $\mathcal{M}_!(H'_!(\delta))$ *(resp.* $\mathcal{M}_*(A_*(\delta))$ *et* $\mathcal{M}_*(H'_*(\delta))$*) sont isomorphes à des modules localement libres de rang 1.*

(3) *Soit* $H'_{\text{int}}(\delta)$ *l'image du morphisme canonique de faisceaux pervers*

$$H'_!(\delta) \longrightarrow H'_*(\delta).$$

Les faisceaux pervers $H'_{\text{int}}(\delta)$, $(H'_!(\delta))_{\text{int}}$ *et* $(H'_*(\delta))_{\text{int}}$ *sont isomorphes.*

Démonstration. — Par dualité il suffit de démontrer les énoncés (1) et (2) pour !. D'après [G-L] 3.5.2 (1), l'énoncé (1) est conséquence de (2). Comme $H'_!(\delta) = R\pi_! A_!(\delta)$, il suffit, d'après [G-L] 3.3.1 (c), de démontrer l'énoncé concernant $\mathcal{M}_!(A_!(\delta))$. Pour cela, il suffit de démontrer que, pour tout point fermé $i_\chi : \chi \to \mathcal{C}(T)$, le complexe $Li_\chi^* \mathcal{M}_!(A_!(\delta))$ a une cohomologie de rang 1 en degré 0 et nulle dans les autres degrés. Par [G-L] 3.3.2, il suffit de démontrer l'énoncé analogue pour $R\Gamma_c(\Theta, A_!(\delta) \otimes \mathcal{L}_\chi)$, qui résulte du lemme suivant, au vu de l'isomorphisme $A_!(\delta) \otimes \mathcal{L}_\chi \simeq Rj_*(\mathcal{L}(\delta) \otimes j^*\mathcal{L}_\chi)$. L'énoncé (3) est conséquence de (1) et de (2), par un argument tout à fait similaire à la preuve de [G-L] 8.1.4. □

LEMME 7.1.3. — *Soit* $\mathcal{L}$ *un système local modéré de rang 1 sur* U. *L'objet de cohomologie* $H^i_c(\Theta, Rj_*\mathcal{L})$ *est de rang 1 si* $i = \dim\Theta$ *et est nul sinon.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord que la monodromie de $\mathcal{L}$ le long de Z n'est pas triviale. On a alors un isomorphisme $Rj_!\mathcal{L} \simeq Rj_*\mathcal{L}$ et le résultat est conséquence du lemme 7.1.4. Supposons maintenant que la monodromie de $\mathcal{L}$ le long de Z est triviale mais que $\mathcal{L}$ n'est pas trivial. Dans ce cas les $H^i_c(\Theta, j_*\mathcal{L})$ sont tous nuls par Künneth. Notons i l'inclusion de Z dans Θ et A le système local $j_*\mathcal{L}$. Comme on a un isomorphisme $i^!A \simeq i^*A[-2]$, on obtient alors en appliquant le foncteur $R\Gamma_c$ au triangle

$$A \longrightarrow Rj_*j^*A \longrightarrow i_*i^!A[1]$$

que l'on a pour tout i des isomorphismes $H^i_c(\Theta, Rj_*\mathcal{L}) \simeq H^{i-1}_c(Z, i^*A)$, d'où le résultat dans ce cas en appliquant le lemme 7.1.4 à i^*A. Il reste alors à traiter le cas où $\mathcal{L}$ est le faisceau constant $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$. Par dualité il suffit de démontrer que $H^i(\Theta, Rj_!\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est de rang 1 si $i = \dim\Theta$ et est nul sinon. Pour cela remarquons que pour $0 \leq i < \dim\Theta$ le morphisme canonique $H^i(\Theta, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to H^i(Z, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est un isomorphisme : on peut le constater *de visu* pour $k = \mathbf{C}$, et de là passer au cas général par des résultats généraux. On en déduit le résultat voulu en écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow Rj_!\bar{\mathbf{Q}}_\ell \longrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell \longrightarrow i_*\bar{\mathbf{Q}}_\ell \longrightarrow 0.$$

LEMME 7.1.4. — *On considère dans l'espace projectif* $\mathbf{P}^n$ *un ouvert* U *formé du complémentaire de* $n+2$ *hyperplans* D_i *en position générale. Soit* $\mathcal{L}$ *un système local modéré non constant de rang 1 sur* U. *L'objet de cohomologie* $H^i_c(U,\mathcal{L})$ *est de rang 1 si* $i=n$ *et est nul sinon.*

Démonstration. — Soit j l'inclusion de U dans $\mathbf{P}^n$. Si les monodromies le long des $n+2$ hyperplans sont toutes non triviales on a un isomorphisme $Rj_!\mathcal{L} \simeq Rj_*\mathcal{L}$ et le résultat est clair (les $H^i_c(U,\mathcal{L})$ sont nuls pour $i \neq n$ et $\chi(U,\bar{\mathbf{Q}}_\ell) = (-1)^n$). Sinon, soit D_{i_0} un hyperplan le long duquel la monodromie de $\mathcal{L}$ est triviale. Soit U' (resp. U'') le complémentaire dans $\mathbf{P}^n$ (resp. D_{i_0}) de la réunion des D_i pour $i \neq i_0$. Soit $\mathcal{L}'$ (resp. $\mathcal{L}''$) la restriction de $j_*\mathcal{L}$ à U' (resp. U''). Comme U' est isomorphe à un tore, les $H^i_c(U',\mathcal{L}')$ sont tous nuls. Par le triangle associé à l'inclusion $U \to U'$, on en tire des isomorphismes $H^i_c(U,\mathcal{L}) \simeq H^{i-1}_c(U'',\mathcal{L}'')$. Comme $\mathcal{L}''$ vérifie aussi l'hypothèse, on obtient le résultat par récurrence à partir du cas trivial $n=0$. $\square$

PROPOSITION 7.1.5. — *Soient* δ_1 *et* δ_2 *des éléments de* $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$. *On a des isomorphismes de faisceaux pervers*

$$H'_!(\delta_1\cdot\delta_2) \simeq H'_!(\delta_1) *_! H'_!(\delta_2) \quad \textit{et} \quad H'_*(\delta_1\cdot\delta_2) \simeq H'_*(\delta_1) *_* H'_*(\delta_2).$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer l'énoncé pour !, celui pour $*$ s'en déduisant par dualité. On pose $\delta_3 = \delta_1\cdot\delta_2$ et on note avec un indice δ_i des objets relatifs à δ_i. On a un isomorphisme canonique $\Theta_{1,\delta_3} \simeq \Theta_{1,\delta_1} \times \Theta_{1,\delta_2}$ duquel on déduit un morphisme de tores $p : \Theta_{\delta_3} \to \Theta_{\delta_1} \times \Theta_{\delta_2}$. Soit $m : T\times T \to T$ le morphisme donné par la loi de groupe. On déduit du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Theta_{\delta_3} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi_{\delta_3}"'] & \Theta_{\delta_1} \times \Theta_{\delta_2} \arrow[d, "\pi_{\delta_1}\times\pi_{\delta_2}"] \\
T & T \times T \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

qu'il suffit de démontrer que $Rp_!A_!(\delta_3)$ est isomorphe à $A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2)$.

Remarquons que p est une fibration de fibre $\mathbf{G}_{m,k}$, qu'au dessus de $U_{\delta_1}\times U_{\delta_2}$ le diviseur Z_{δ_3} coupe les fibres de p transversalement en un unique point, que l'intersection de Z_{δ_3} avec $p^{-1}((U_{\delta_1}\times Z_{\delta_2}) \cup (Z_{\delta_1}\times U_{\delta_2}))$ est vide, tandis que $p^{-1}(Z_{\delta_1}\times Z_{\delta_2})$ est contenu dans Z_{δ_3}.

On en tire en particulier, en utilisant le lemme 7.1.3 et le théorème de changement de base pour les morphismes propres, que la restriction de

$$Rp_!A_!(\delta_3)[-\dim\Theta_{\delta_3}+1]$$

à l'ouvert $U_{\delta_1} \times U_{\delta_2}$ est un système local de rang 1. Ce système local est modéré, comme on le voit en le restreignant à des droites dans $U_{\delta_1} \times U_{\delta_2}$ et en appliquant la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich. Notons W l'ouvert maximal de $\mathbf{P}_{\delta_3}$ sur lequel p se prolonge en $p' : W \to \mathbf{P}_{\delta_1} \times \mathbf{P}_{\delta_2}$. Remarquons que p' est une fibration de fibre $\mathbf{G}_{m,k}$. Notons $\bar{Z}_{\delta_i}$ l'adhérence de Z_{δ_i} dans $\mathbf{P}_{\delta_i}$ et V l'ouvert complémentaire de $\mathbf{P}_{\delta_1} \times \bar{Z}_{\delta_2} \cup \bar{Z}_{\delta_1} \times \mathbf{P}_{\delta_2}$ dans $\mathbf{P}_{\delta_1} \times \mathbf{P}_{\delta_2}$. La restriction de p' à $p'^{-1}(V) \cap \bar{Z}_{\delta_3}$ induit un isomorphisme entre $p'^{-1}(V) \cap \bar{Z}_{\delta_3}$ et V, et le système local $\mathcal{L}(\delta_3) \otimes p^*(\mathcal{L}(\delta_1) \boxtimes \mathcal{L}(\delta_2))^\vee$ sur U_{δ_3} se prolonge en un système local modéré $\mathcal{L}'$ sur $p'^{-1}(V) - p'^{-1}(V) \cap Z_{\delta_3}$ (l'exposant $^\vee$ désigne le système local dual). Si j' désigne l'inclusion de $p'^{-1}(V) - p'^{-1}(V) \cap Z_{\delta_3}$ dans $p'^{-1}(V)$, on déduit donc du lemme 7.1.3 et du théorème de changement de base pour les morphismes propres que $Rp'_!(Rj'_*(\mathcal{L}'))[1]$ est un système local de rang 1 sur V. La restriction de ce système local à $U_{\delta_1} \times U_{\delta_2}$ est isomorphe à

$$Rp_! A_!(\delta_3)[-\dim \Theta_{\delta_3} + 1]_{|U_{\delta_1} \times U_{\delta_2}} \otimes p^*(\mathcal{L}(\delta_1) \boxtimes \mathcal{L}(\delta_2))^\vee,$$

il est donc modéré, et par conséquent isomorphe au système local constant, car le groupe fondamental modéré de V est trivial. On a donc un isomorphisme

$$Rp_! A_!(\delta_3)[-\dim \Theta_{\delta_3} + 1]_{|U_{\delta_1} \times U_{\delta_2}} \simeq \mathcal{L}(\delta_1) \boxtimes \mathcal{L}(\delta_2)$$

dont on déduit un morphisme non nul

$$Rp_! A_!(\delta_3) \longrightarrow R(j_{\delta_1} \times j_{\delta_2})_*(\mathcal{L}(\delta_1) \boxtimes \mathcal{L}(\delta_2))[\dim \Theta_{\delta_3} - 1] \simeq A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2).$$

D'après 7.1.2 et [G-L] 3.3.1 (c) et (e), $\mathcal{M}_! Rp_! A_!(\delta_3)$ et $\mathcal{M}_!(A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2))$ sont isomorphes à des modules localement libres de rang 1. En particulier $Rp_! A_!(\delta_3)$ est pervers, d'après [G-L] 3.5.2. De plus le morphisme de faisceaux pervers $Rp_! A_!(\delta_3) \to A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2)$ est un épimorphisme, d'après le lemme qui suit. Soit x un point géométrique de $\Theta_{\delta_1} \times \Theta_{\delta_2}$. Le calcul des objets de cohomologie de $Rp_! A_!(\delta_3)_{|x}$ est immédiat par changement de base propre et on constate qu'ils ont même rang que ceux de $A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2)_{|x}$. Ceci force le morphisme $Rp_! A_!(\delta_3) \to A_!(\delta_1) \boxtimes A_!(\delta_2)$ à être un isomorphisme. En effet si le noyau K de ce morphisme n'était pas nul, considérons un point géométrique x localisé au point générique d'une composante irréductible du support de K. La restriction $K_{|x}$ aurait alors un unique objet de cohomologie non nul, ce qui conduirait à une contradiction. □

LEMME 7.1.6. — *Soit $f : A \to B$ un morphisme non nul de faisceaux pervers sur un tore T. On suppose que $\mathcal{M}_! A$ est isomorphe à un module localement libre et que $\mathcal{M}_! B$ est isomorphe à un module localement libre de rang 1. Alors f est un épimorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer l'énoncé dual : si $\mathcal{M}_*A$ est isomorphe à un module localement libre de rang 1 et si $\mathcal{M}_*B$ est isomorphe à un module localement libre, alors f est un monomorphisme. Par t-exactitude de $\mathcal{M}_*$ ([G-L] 3.4.1) on a une suite exacte de modules cohérents

$$0 \longrightarrow H^0\mathcal{M}_*\mathrm{Ker}\, f \longrightarrow H^0\mathcal{M}_*A \longrightarrow H^0\mathcal{M}_*\mathrm{Im}\, f \longrightarrow 0.$$

Si $H^0\mathcal{M}_*\mathrm{Ker}\, f$ n'était pas nul, $H^0\mathcal{M}_*\mathrm{Im}\, f$ serait de torsion et donc nul, car c'est un sous-module de $H^0\mathcal{M}_*B$. Par [G-L] 3.4.6 ceci entraîne que $\mathrm{Im}\, f$ est nul, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent $H^0\mathcal{M}_*\mathrm{Ker}\, f$ est nul, et donc également $\mathrm{Ker}\, f$ par [G-L] 3.4.6. □

LEMME 7.1.7. — *Avec les notations et les hypothèses de 6.1.1, supposons que δ appartient à $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G$. Alors les faisceaux pervers $H'_!(\delta)$, $H'_*(\delta)$ et $H'_{\mathrm{int}}(\delta)$, ainsi que le noyau C du morphisme canonique $H'_!(\delta) \to H'_*(\delta)$ appartiennent à* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. *De plus la suite exacte $0 \to C \to H'_!(\delta) \to H'_{\mathrm{int}}(\delta) \to 0$ provient par changement de base d'une suite exacte de faisceaux pervers sur T_0.*

Démonstration. — On considère les G-orbites des (S, x, χ) comptées avec leur multiplicité dans δ et la famille $\mathcal{H}$ des stabilisateurs de ces orbites. Ce sont des sous-groupes d'indice fini de G. Pour H dans $\mathcal{H}$, on note T'_H le k_0-tore obtenu à partir de $\mathbf{G}_{m,k^H}$ par restriction des scalaires de k^H à k_0. Fixons un caractère χ pour chaque orbite. Le système local $\mathcal{L}_\chi$ est défini sur le facteur $\mathbf{G}_{m,k^H}$ correspondant et donne par restriction des scalaires un système local $\mathcal{L}_H$ sur T'_H. Soit Θ'_1 le produit des T'_H et $\mathcal{L}'_2(\delta)$ le système local sur Θ'_1 obtenu par produit externe des $\mathcal{L}_H$. Par extension des scalaires on a des isomorphismes $\Theta_1 \simeq \Theta'_1 \otimes k$ et $\mathcal{L}_2(\delta) \simeq \mathcal{L}'_2(\delta) \otimes k$. L'ouvert U_1 est obtenu par extension des scalaires à partir d'un ouvert U'_1 de Θ'_1 et comme χ_0 est fixé par G, le système local $\mathcal{L}_3(\delta)$ provient par extension des scalaires d'un système local $\mathcal{L}'_3(\delta)$. On en tire que $\mathcal{L}_1(\delta)$ provient par extension des scalaires d'un système local $\mathcal{L}'_1(\delta)$ sur U'_1. En quotientant par l'action diagonale de $\mathbf{G}_{m,k_0}$ on obtient un k_0-tore Θ' et un système local $\mathcal{L}'(\delta)$ sur l'ouvert $j' : U' \to \Theta'$ image de U'_1. On a un morphisme $\pi' : \Theta' \to T_0$ induit par le produit des morphismes normes, et $R\pi'_! Rj'_* \mathcal{L}'(\delta)[\dim \Theta]$ est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont l'image dans $D^b_c(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ est isomorphe à $H'_!(\delta)$. On démontre de même que $H'_*(\delta)$, le noyau et le conoyau du morphisme canonique $H'_!(\delta) \to H'_*(\delta)$ appartiennent à $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ ainsi que le dernier énoncé. □

7.2. Calcul de $\det_{\rm int}$ et de $\det {}^G\mathcal{M}_!$

On reprend les notations et les hypothèses de 6.1.1. En particulier k_0 est pour l'instant un corps de caractéristique différente de ℓ, peut-être nulle.

Soit A un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Si $\gamma(A)$ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$ on pose $H'_!(A) := H'_!(\gamma(A))$ et $H'_{\rm int}(A) := H'_{\rm int}(\gamma(A))$. Comme $\gamma(A)$ appartient alors à $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G$, il résulte du lemme 7.1.7 que $H'_!(A)$ et $H'_{\rm int}(A)$ sont des objets de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on pose $\tilde{H}'_!(A) := \delta_{\{\lambda(H'_!(A))^{-1}\}} *_! H'_!(A)$ et $\tilde{H}'_{\rm int}(A) := \delta_{\{\lambda(H'_{\rm int}(A))^{-1}\}} *_{\rm int} H'_{\rm int}(A)$. Remarquons que par 2.6.1 on a $\tilde{H}'_{\rm int}(A) \simeq \tilde{H}'_!(A)_{\rm int}$.

On a l'analogue suivant de la proposition 3.4.1.

PROPOSITION 7.2.1. — *On suppose que k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle.*

(1) *Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte dans* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *on a des isomorphismes canoniques*

$$H'_!(B) \simeq H'_!(A) *_! H'_!(C)$$

et

$$H'_{\rm int}(B) \simeq H'_{\rm int}(A) *_{\rm int} H'_{\rm int}(C).$$

(2) *Soit $T \simeq T' \times T''$ un isomorphisme de tores avec T'' de dimension 1, soit χ un point fermé de $\mathcal{C}(T'')$ et soit A' un objet de* $\mathrm{Perv}\,(T', \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Notons π' et π'' (resp. i' et i'') les projections (resp. immersions) canoniques et $j : T'' - \{-1\} \to T''$ l'inclusion canonique. Si $A \simeq \pi'^* A' \otimes \pi''^*(\mathcal{L}_\chi[1])$, on a, en notant r la caractéristique d'Euler-Poincaré de A', des isomorphismes canoniques*

$$H'_!(A) \simeq Ri''_!(Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1])^{*_! r} \otimes \mathcal{L}_\chi)$$

et

$$H'_{\rm int}(A) \simeq Ri''_!(\delta_{\{-1^r\}} \otimes \mathcal{L}_\chi).$$

(3) *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *il existe un point fermé λ de T tel que les faisceaux pervers $H'_{\rm int}(A)$ et $\delta_{\{\lambda\}} *_{\rm int} H'_{\rm int}(A_{\rm int})$ soient isomorphes.*

(4) *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}\,(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$, *pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$, on a des isomorphismes canoniques*

$$H'_!(A \otimes \mathcal{L}_\chi) \simeq H'_!(A) \otimes \mathcal{L}_\chi$$

et

$$H'_{\rm int}(A \otimes \mathcal{L}_\chi) \simeq H'_{\rm int}(A) \otimes \mathcal{L}_\chi.$$

Démonstration. — L'énoncé (1) est une conséquence directe de la description de $n_{S,x,\chi}$ en terme de cycles proches rappelée en 2.2, de l'exactitude du foncteur cycles proches pour les faisceaux pervers, ainsi que des propositions 7.1.1 et 7.1.5. Pour (2) on se ramène comme en 3.4.1 au cas $\chi = 1$ et on a le même calcul des $n_{S,x,\chi}(A)$: seuls les $n_{T'',x,1}(A)$ sont non nuls et on a $n_{T'',x,1}(A) = r$. Si $r = 0$ le résultat est clair et si $r = 1$ on a $H'_!(A) \simeq Ri''_! Rj_*(\bar{\mathbf{Q}}_\ell[1])$ par définition. On en déduit le résultat pour r général par 7.1.5. L'énoncé (3) résulte de (2) par l'argument déjà donné en 3.4.1, et (4) se déduit directement de la formule de projection. $\square$

On note $\mathrm{Hyp}'_!(T_0)^g$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ formée des objets de la forme $\delta_{\{\lambda\}} *_! H'_!(\gamma)$ avec λ dans $T_0(k_0)$ et γ dans $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G$. On note $\mathbf{H}'_!(T_0)^g$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathrm{Hyp}'_!(T_0)^g$. D'après la proposition 7.1.5, $\mathbf{H}'_!(T_0)^g$ muni du produit de convolution $*_!$ est un monoïde. Remarquons que si A est un objet de $\mathrm{Hyp}'_!(T_0)^g$ il en est de même de $A \otimes \mathcal{L}_\chi$ pour tout point fermé χ de $\mathcal{C}(T)$ fixé par G. On note ${}^G G'_!(\mathcal{C}(T))$ le sous-groupe de ${}^G L(\mathcal{C}(T))^0$ engendré par les $\det {}^G\mathcal{M}_!(H)^g$, H décrivant $\mathbf{H}'_!(T_0)^g$ et ${}^G G'_!(\mathcal{C}(T))^1$ son image dans ${}^G L(\mathcal{C}(T))^1$.

On pose $G'_!(A) := \det {}^G\mathcal{M}_!(H'_!(A))^g$. Plus généralement si A est un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ on pose $G'_!(A) := \bigotimes_i G'_!({}^pH^i A)^{(-1)^i}$. On définit de façon similaire, pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, des objets $\tilde{G}'_!(A)$.

PROPOSITION 7.2.2. — *Soit k_0 un corps fini de caractéristique différente de ℓ et soit T_0 un k_0-tore déployé. Soit δ un élément de $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G$. On note $H_!(\delta)$ l'objet de $\mathbf{H}_!(T_0)^g$ associé à $1 \times \delta$ par la proposition 3.7.1. Soit ψ un isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$.*

(1) *On a l'égalité*
$$[\det {}^G\mathcal{M}_!(H'_!(\delta))^g] = [\det {}^G\mathcal{M}_!(H_!(\delta))^g]$$
dans le groupe quotient ${}^G L(\mathcal{C}(T))^1$.

(2) *Il existe λ dans $T_0(k_0)$ tel que les faisceaux pervers $H'_!(\delta)_{\mathrm{int}}$ et $\delta_{\{\lambda\}} *_! H_!(\delta)_{\mathrm{int}}$ soient isomorphes.*

(3) *Si δ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^{t1}_\psi$, on a l'égalité*
$$\det {}^G\mathcal{M}_!(\tilde{H}'_!(\delta))^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\tilde{H}_!(\delta))^g$$
dans ${}^G L(\mathcal{C}(T))^0$.

(4) *Si δ appartient à $\mathcal{H}_!(T)^{t1}_\psi$, les faisceaux pervers $\tilde{H}'_{\mathrm{int}}(\delta)$ et $\tilde{H}_{\mathrm{int}}(\delta)$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Démontrons (1). D'après le théorème 6.4.1 (ou le théorème 4.5.1) on a l'égalité

$$[\det {}^G\mathcal{M}_!(A_!(\delta))^g] = [\det {}^G\mathcal{M}_!(H_!(A_!(\delta)))^g]$$

dans le groupe quotient ${}^GL(\mathcal{C}(\Theta))^1$. Comme le déterminant commute aux changements de base, on a l'égalité

$$[\det {}^G\mathcal{M}_!(R\pi_!A_!(\delta))^g] = [\det {}^G\mathcal{M}_!(R\pi_!H_!(A_!(\delta)))^g]$$

dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^1$.

A chacun des $\sum \delta(S,x,\chi)$ facteurs $\mathbf{G}_{m,k}$ de Θ_1 correspond une immersion de tores $\mathbf{G}_{m,k} \to \Theta$ et un caractère χ. Ces données définissent un élément δ' de $\mathcal{H}_!(\Theta)^1$. Avec les notations de 3.3 on a $\pi_!(1 \times \delta') = 1 \times \delta$. De plus on vérifie directement que $\gamma(A_!(\delta)) = \delta'$. On a donc, d'après 3.3, un isomorphisme $R\pi_!H_!(A_!(\delta)) \simeq H_!(\delta)$, ce qui donne (1).

Démontrons maintenant (3). Il existe λ dans $T_0(k_0)$ tel que l'on ait l'égalité

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(\tilde{H}'_!(\delta))^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda\}} *_! \tilde{H}_!(\delta))^g$$

dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$. D'autre part, d'après le théorème 6.4.1 appliqué à $\tilde{H}'_!(\delta)$, on a

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(\tilde{H}'_!(\delta))^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\tilde{H}_!(\tilde{H}'_!(\delta)))^g.$$

D'après 4.6.1 on a donc $\delta_{\{\lambda\}} *_! \tilde{H}_!(\delta) = \tilde{H}_!(\tilde{H}'_!(\delta))$ et par conséquent $\lambda = 1$.

Comme $H'_!(A)$ est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1, il a un unique constituant simple de caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle qui est isomorphe à $H'_{\mathrm{int}}(A)$. Les énoncés (2) et (4) sont donc des conséquences directes de (1) et (3) et de la proposition 4.2.2. □

THÉORÈME 7.2.3. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et soit T un k-tore. Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *On suppose qu'il existe un schéma S, intègre et de type fini sur $\mathbf{Z}$, de corps des fonctions $k_0 \subset k$ et de dimension r, un S-tore déployé T_S tel que $T \simeq T_S \otimes k$, et un objet A_S de* $\mathrm{Perv}(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *tel que A provienne de $A_S[-r]$ par changement de base de S à k. Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ on a un isomorphisme*

$$\det_{\mathrm{int}}(A) \simeq \delta_{\{\lambda(A)\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}'_{\mathrm{int}}(A)$$

dans $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

Démonstration. — La démonstration est tout à fait analogue à 5.5. Nous ne donnons pas les détails car en 7.3 nous démontrons un résultat plus général en utilisant les $\mathcal{D}$-modules. □

THÉORÈME 7.2.4. — *Soit S un schéma intègre et de type fini sur $\mathbf{Z}$, de corps des fonctions k_0 de caractéristique 0. Soit T_0 un k_0-tore déployé. Soit A un objet de $D^b_c(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$. On suppose qu'il existe un S-tore déployé T_S et un objet A_S de $D^b_c(T_S, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ tels que T_0 et A proviennent de T_S et de A_S par changement de base. Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on a l'égalité*

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g = \det {}^G\mathcal{M}_!(\delta_{\{\lambda(A)\}})^g \cdot \tilde{G}'_!(A)$$

dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$.

Démonstration. — La démonstration est très proche de celle du théorème 6.4.1. On peut supposer que A est un objet de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ et que A provient par changement de base de A_S avec $A_S[r]$ pervers sur T_S, en désignant par r la dimension de S.

Commençons par démontrer que l'on a l'égalité cherchée dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^1$ dans le cas où $\chi(T, A) = 0$, sans utiliser l'hypothèse d'existence d'un modèle sur T_S. D'après 7.2.1, on peut supposer que $A = A_0 \otimes k$ avec A_0 un faisceau pervers simple sur T_0 et on peut se ramener, comme en 6.4 au cas où A est de la forme $A \simeq \pi'^*(A'[1])$ avec $T_0 \simeq T'_0 \times T''_0$ un isomorphisme de tores et T''_0 de dimension 1. Notons i'' l'inclusion de T'' dans T, j l'inclusion $T''_0 - \{-1\} \to T''_0$ et posons $r = \chi(T', A')$. En reprenant le raisonnement de 5.1.1 on obtient que les classes de $\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g$ et de $[\det {}^G\mathcal{M}_!(Ri''_! Rj_* \bar{\mathbf{Q}}_\ell[1])^g]^{\otimes r}$ dans ${}^GL(\mathcal{C}(T))^0$ sont égales, ce qui donne le résultat par 7.2.1 (2).

On note $\mathrm{Hyp}'_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$ la sous-catégorie de $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ formée des objets de la forme $\delta_{\{\lambda\}} *_! H'_!(\gamma)$ avec λ dans $T_0(k_0)$ et γ dans $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G_{\mathrm{sym}}$ et on note ${}^GG'_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$ le sous-groupe de ${}^GG'_!(\mathcal{C}(T))$ engendré par les $\det {}^G\mathcal{M}_!(H)^g$, pour H dans $\mathrm{Hyp}'_!(T_0)^g_{\mathrm{sym}}$. On a alors l'analogue suivant de la proposition 6.4.2, avec la même démonstration.

PROPOSITION 7.2.5. — *Sous les hypothèses précédentes on suppose que A est un objet de* $\mathrm{Perv}(T_0, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)^g$ *et provient par changement de base de A_S avec $A_S[r]$ pervers sur T_S, en désignant par r la dimension de S. On a alors*

$$\det {}^G\mathcal{M}_!(A)^g = G'_!(A) \cdot \Gamma$$

avec Γ dans ${}^GG'_!(\mathcal{C}(T))_{\mathrm{sym}}$. □

On peut maintenant terminer la démonstration comme en 6.4, en utilisant la remarque suivant la proposition 5.5.1, le fait que pour tout δ dans $(\mathcal{H}_!(T)^{h1})^G$, quitte à remplacer S par un ouvert dense on peut supposer (cf. la preuve de 7.1.7), que $H'(\delta)$ provient par changement de base de $H'(\delta)_S$ avec $H'(\delta)_S[r]$ pervers sur T_S, et la proposition 7.2.2. □

7.3. Calcul de $\det_{\text{int}}$ dans le cas général

7.3.1. On démontre dans cette section le résultat suivant en se ramenant, via la correspondance de Riemann-Hilbert, à un résultat analogue établi dans [L-S1] (théorème 3.3.3) pour les $\mathcal{D}$-modules.

THÉORÈME 7.3.1. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Soit T un k-tore. Soit A un objet de* $\mathrm{Perv}_{\text{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. *Pour tout isomorphisme $T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$ on a un isomorphisme*

$$\det_{\text{int}}(A) \simeq \delta_{\{\lambda(A)\}} *_{\text{int}} \tilde{H}'_{\text{int}}(A)$$

dans $\mathrm{Perv}_{\text{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$.

7.3.2. Commençons par rappeler le théorème 3.3.3 de [L-S1] sous la forme qui nous sera utile. On fixe un entier $n \geq 0$ et on note $\mathcal{L}$ l'ensemble des formes linéaires $L(s) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i s_i$ avec ℓ_i dans $\mathbf{Z}$ pour $i = 1, \cdots, n$ qui sont primitives (i.e. non nulles et à coefficients premiers entre eux). On pose $\mathcal{G}_n^1 := \mathbf{Z}^{(\mathcal{L} \times \mathbf{C}/\mathbf{Z})}$ et on note $\delta(L, \lambda)$ les éléments de la base canonique de ce $\mathbf{Z}$-module libre. On note Δ_n l'anneau des opérateurs aux différences algébriques en n variables. C'est le quotient de l'algèbre libre engendrée par $\mathbf{C}[s_1, \cdots, s_n]$ et $\mathbf{C}[\tau_1, \cdots, \tau_n, \tau_1^{-1}, \cdots, \tau_n^{-1}]$ par les relations $\tau_i \cdot s_i = (s_i + 1) \cdot \tau_i$ et $\tau_i \cdot s_j = s_j \cdot \tau_i$ si $i \neq j$. On pose $\Delta_n(s) := \Delta_n \otimes_{\mathbf{C}[s]} \mathbf{C}(s)$. On note, comme dans [L-S1], $\mathcal{H}G(n)$ le groupe des classes d'isomorphisme des $\Delta_n(s)$-modules de rang 1 sur $\mathbf{C}(s)$. On a un morphisme de groupes $h : \mathcal{G}_n^1 \to \mathcal{H}G(n)$ qui à $\delta(L, \lambda)$ associe la classe d'isomorphisme du module engendré par

$$\frac{\Gamma(L(s) - \tilde{\lambda})}{\prod \ell_i^{\ell_i s_i}},$$

en notant Γ la fonction gamma usuelle (on note $\tilde{\lambda}$ un relèvement de λ dans $\mathbf{C}$ et on convient que $\ell_i^{\ell_i s_i} = 1$ pour $\ell_i = 0$).

On considère $\mathbf{C}^{\times n}$ comme une variété analytique complexe et on note $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$ la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathbf{C}$-faisceaux à cohomologie algébriquement constructible. A tout objet A de $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$ on associe un élément $\delta(A)$ de $\mathcal{G}_n^1$ de la façon suivante. On considère la compactification standard $\mathbf{C}^{\times n} \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^n$. On note, pour I_0 et I_∞ des parties disjointes de $\{1, \cdots, n\}$, X_{I_0,I_∞} le tore défini par $x_i = 0$, $i \in I_0$, $x_i^{-1} = 0$, $i \in I_\infty$ et $x_i \neq 0$, $i \notin I$, avec $I = I_0 \cup I_\infty$. Ici $x_1, \cdots, x_n$ sont les coordonnées canoniques sur $\mathbf{C}^{\times n}$. Les X_{I_0,I_∞}, pour I non vide, forment une partition de $(\mathbf{P}^1)^n - \mathbf{C}^{\times n}$. On note $\mathcal{L}_I^+$ l'ensemble des formes linéaires $L(s) = \sum_{i\in I} \ell_i s_i$, avec ℓ_i dans $\mathbf{N}$, qui sont primitives. Soit A un objet de $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$. Pour I non vide, on a défini dans [L-S1] p.486 une fonction constructible $x \mapsto \gamma_{L,\lambda}(x)$, nulle pour tout (L, λ) dans $\mathcal{L}_I^+ \times \mathbf{C}^\times$ en dehors d'un ensemble fini. On note $\gamma_{L,\lambda,I_0,I_\infty}$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de X_{I_0,I_∞} pondérée par $\gamma_{L,\lambda}$ et on pose $\delta(A) = \sum \gamma_{L,\lambda,I_0,I_\infty} \delta(L(s_{I_0} - s_{I_\infty}), \frac{\log\lambda}{2i\pi})$.

On note $D(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}})$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}}$-modules algébriques et $D_h^b(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}})$ (resp. $D_{h\,r}^b(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}})$) la sous-catégorie formée des complexes bornés à cohomologie holonome (resp. holonome et régulière). Par la correspondance de Riemann-Hilbert pour les $\mathcal{D}$-modules algébriques (cf. [Bo] Chap. VIII), le foncteur de de Rham algébrique

$$\mathrm{DR} : D_h^b(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}}) \longrightarrow D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$$

induit une équivalence de catégories entre $D_{h\,r}^b(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}})$ et $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$. On note RH un quasi inverse. Soit $\mathfrak{M} : D_h^b(\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}}) \to D^b(\Delta_n)$ le foncteur de transformation de Mellin algébrique (cf. [L-S1] 1.2). Il associe à un $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^{\times n}}$-module algébrique son module des sections globales vu comme Δ_n-module via l'isomorphisme entre l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur $\mathbf{C}^{\times n}$ et Δ_n obtenu en identifiant x_i à τ_i et $-x_i\partial_{x_i}$ à s_i, avec x_i les coordonnées canoniques sur $\mathbf{C}^{\times n}$. On note $M \mapsto \mathfrak{M}(M)(s)$ le composé de ce foncteur avec le foncteur $\otimes_{\mathbf{C}[s]}\mathbf{C}(s) : D^b(\Delta_n) \to D^b(\Delta_n(s))$. D'après [L-S1] 1.2.1 l'image de ce foncteur est contenue dans la sous-catégorie des complexes à cohomologie de dimension finie sur $\mathbf{C}(s)$, ce qui permet de définir un foncteur $M \mapsto \det \mathfrak{M}(M)(s)$ à valeur dans la catégorie des $\Delta_n(s)$-modules de rang 1 sur $\mathbf{C}(s)$. Enfin, pour λ dans $\mathbf{C}^{\times n}$ on note $[\lambda^s]$ la classe du module engendré par λ^s dans $\mathcal{HG}(n)$ et pour tout objet A de $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$ on définit un point $\lambda(A)$ de $\mathbf{C}^{\times n}$ de façon analogue à 2.6.

Le théorème 3.3.3 de [L-S1] (ou plutôt un cas particulier de celui-ci) peut être énoncé de la façon suivante.

THÉORÈME 7.3.2. — *Pour tout objet A de $D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$ la classe du module* $\det \mathfrak{M}(\mathrm{RH}(A))(s)$ *dans $\mathcal{HG}(n)$ est égale à* $[\lambda(A)^s]\, h(\delta(A))$.

7.3.3. Démonstration du théorème 7.3.1. — Comme A peut être obtenu par changement de base à partir d'un objet défini sur un sous-corps de $\mathbf{C}$, on peut supposer que $k = \mathbf{C}$, par le théorème de changement de base pour les morphismes lisses. Si X est un schéma séparé et de type fini sur $\mathbf{C}$, on note X_{an} le schéma X muni de la topologie transcendante. Du morphisme de topos $X_{\mathrm{an}} \to X$ on déduit par image inverse un foncteur pleinement fidèle $D_c^b(X, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(X_{\mathrm{an}}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$. Le choix d'un isomorphisme $\alpha : \bar{\mathbf{Q}}_\ell \simeq \mathbf{C}$ (désormais supposé fixé) fournit une équivalence de catégories entre $D_c^b(X_{\mathrm{an}}, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ et $D_c^b(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$ (cf. [E] Theorem 7.2). Pour tout isomorphisme $\psi : T \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^n$, on a donc un foncteur pleinement fidèle $\beta_\psi : D_c^b(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell) \to D_c^b(\mathbf{C}^{\times n}, \mathbf{C})$.

Remarquons que si on munit $(\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell), *_{\mathrm{int}})$ de la structure de catégorie tannakienne donnée par le théorème 3.7.5 de [G-L] le foncteur de la catégorie $\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ à valeur dans celle des $K(s)$-espaces vectoriels de dimension finie qui à un objet A associe $\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(A))(s)$ est un foncteur fibre. En particulier, pour tout objet A de $(\mathrm{Perv}_{\mathrm{int}}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell), *_{\mathrm{int}})$ on a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(\det_{\mathrm{int}} A))(s) \simeq \det \mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(A))(s).$$

On déduit donc du théorème 7.3.2 que la classe de $\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(\det_{\mathrm{int}} A))(s)$ dans $\mathcal{H}G(n)$ est égale à $[\lambda(\beta_\psi A)^s]\, h(\delta(\beta_\psi A))$. D'après [L-S2] il existe un unique $\mathcal{D}$-module holonome simple M tel que la classe de $\mathfrak{M}(M)(s)$ soit égale à $h(\delta(\beta_\psi A))$. Or si A est un objet simple de $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ le $\mathcal{D}$-module $\mathrm{RH}\,\beta_\psi(A)$ est simple (la catégorie des modules holonomes réguliers est une sous-catégorie pleine stable par sous-objets et quotients de la catégorie des modules holonomes). Il suffit donc de vérifier que la classe de $\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(\tilde{H}'_{\mathrm{int}}(A)))(s) \simeq \mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(\tilde{H}'_!(A)))(s)$ dans $\mathcal{H}G(n)$ est égale à $h(\delta(\beta_\psi A))$. En appliquant le théorème 7.3.2 à $\beta_\psi(H'_!(A))$ on voit qu'il suffit de démontrer que la classe de $\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(H'_!(A)))(s)$ dans $\mathcal{H}G(n)$ est égale à $[\lambda^s]\, h(\delta(\beta_\psi A))$ avec λ dans $\mathbf{C}^{\times n}$, ce qui résulte des propositions 7.3.3 et 7.3.5. $\square$

On note $\mathcal{G}_!(T)^1$ le groupe $\mathcal{G}_!(T)^1 := \mathbf{Z}^{(\bar{\mathcal{S}} \times \mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,k})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell))}$ (cf. 3.3). L'isomorphisme α induit une injection $\mathcal{G}_!((\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})^n)^1 \hookrightarrow \mathcal{G}_n^1$. En effet on a une injection $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell) \hookrightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, obtenue en composant l'injection $\mathcal{C}(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})(\bar{\mathbf{Q}}_\ell) \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ donnée par l'évaluation sur le générateur de $X_*(\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})$ avec les isomorphismes $\bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times \simeq \mathbf{C}^\times \simeq \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, le dernier isomorphisme étant donné par $\lambda \mapsto \frac{\log \lambda}{2i\pi}$, et une bijection canonique $\bar{\mathcal{S}}((\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})^n) \simeq \mathcal{L}$ qui à (S, x) dans $\bar{\mathcal{S}}((\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})^n)$ associe L tel que $i_S \circ \varphi_{S,x} : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \to (\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}})^n$ soit donné par $x_i = x^{\ell_i}$ pour $i = 1, \cdots, n$. On en tire via ψ une injection $\alpha_\psi : \mathcal{G}_!(T)^1 \hookrightarrow \mathcal{G}_n^1$.

PROPOSITION 7.3.3. — *Pour tout objet A de* $\mathrm{Perv}(T, \bar{\mathbf{Q}}_\ell)$ *on a l'égalité*

$$h(\alpha_\psi(\gamma(A))) = h(\delta(\beta_\psi(A))).$$

Démonstration. — Pour $n = 1$ on a $\alpha_\psi(\gamma(A)) = \delta(\beta_\psi(A))$ par définition. Pour $n > 1$ on se ramène à ce cas par le lemme 3.3.4 de [L-S1] que la proposition 3.4.2 du présent article et le lemme 3.3.2 de [L-S1] permettent d'appliquer. $\square$

LEMME 7.3.4. — *Considérons dans $\mathbf{C}^{\times N}$ le complémentaire $j : U \hookrightarrow \mathbf{C}^{\times N}$ des diviseurs $x_i = 0$, $i = 1, \cdots, N$, et $\sum_{1 \le i \le N} x_i = 1$. Pour tout choix de nombres complexes non nuls λ_i et μ soit $\mathcal{L}$ le $\mathbf{C}$-système local de rang 1 sur U de monodromie λ_i le long de $x_i = 0$ et μ le long de $\sum_{1 \le i \le N} x_i = 1$. Il existe alors des nombres complexes α_i et β vérifiant* $\exp 2i\pi\alpha_i = \lambda_i$ *et* $\exp 2i\pi\beta = \mu$ *tels que* $\mathrm{RH}\, Rj_*\mathcal{L} \simeq \mathcal{D}/I$ *avec I l'idéal à gauche engendré par les*

$$x_i \big(\sum_{1 \le k \le N} (\alpha_k - x_k \partial_{x_k}) + \beta\big) - (\alpha_i - x_i \partial_{x_i})$$

pour $1 \le i \le N$.

Démonstration. — Pour tout choix de nombres complexes α_i et β vérifiant $\exp 2i\pi\alpha_i = \lambda_i$ et $\exp 2i\pi\beta = \mu$ on a $\mathrm{DR}(\mathcal{D}/I)_{|U} \simeq \mathcal{L}$. Si $\mu \neq 1$, on a toujours $\mathrm{DR}(\mathcal{D}/I) \simeq Rj_*\mathcal{L}$, tandis que si $\mu = 1$, il suffit de prendre β dans $\mathbf{N}$. $\square$

PROPOSITION 7.3.5. — *Soit γ un élément de $\mathcal{H}_!(T)^{h1}$. Il existe λ dans $\mathbf{C}^{\times n}$ tel que la classe de $\mathfrak{M}(\mathrm{RH}\,\beta_\psi(H'_!(\gamma)))(s)$ dans $\mathcal{H}G(n)$ soit égale à $[\lambda^s]\, h(\alpha_\psi\gamma)$.*

Démonstration. — En appliquant le lemme précédent au tore Θ, avec $\psi' : \Theta \simeq (\mathbf{G}_{m,k})^N$, et au faisceau $A_!(\gamma)$ (ou plutôt à son image $\beta_{\psi'} A_!(\gamma)$ dans $D_c^b(\mathbf{C}^{\times N}, \mathbf{C})$) considérés en 7.1, on obtient le calcul de $\mathrm{RH}\,\beta_{\psi'} A_!(\gamma)$ et de son image directe $\mathrm{RH}\,\beta_\psi(H'_!(\gamma))$, par un calcul en tout point similaire à celui détaillé dans [Dw-L] p.169-172. $\square$

Pour conclure remarquons qu'il aurait été suffisant de connaître l'énoncé de la proposition 7.3.3 pour un ψ particulier, ce qui permettrait d'utiliser la proposition 8.4.1 de [G-L] à la place de la proposition 3.4.2. En effet, on aurait alors, pour tout isomorphisme ψ, $\det_{\mathrm{int}}(A) \simeq \delta_{\{\lambda\}} *_{\mathrm{int}} \tilde{H}'_{\mathrm{int}}(A)$ avec λ convenable et on obtient $\lambda = 1$ en appliquant le théorème 7.3.2 aux transformés des deux membres par $\mathrm{RH}\,\beta_\psi$.

APPENDICE A

Soit R un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$ et de corps résiduel parfait k de caractéristique ℓ. On note K le corps des fractions de R, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $\bar{\mathfrak{M}}$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $\bar{K}$.

Si $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ et si $F(t) \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$, on note F^α la série de $R[[t_1, \cdots, t_n]]$ obtenue en substituant

$$(\prod_i (1+t_i)^{\alpha_{ij}}) - 1$$

à t_j. Si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \bar{\mathfrak{M}}^n$, on pose $\alpha(1+\varepsilon) = (\prod_i (1+\varepsilon_i)^{\alpha_{ij}})$.

THÉORÈME A.1. — *Soit $\alpha \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ une matrice semblable dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ à une matrice diagonale et soit $F(t) \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ une unité. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *Pour tout entier $f \geq 1$ et pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \bar{\mathfrak{M}}^n$ tel que, pour tout i, $1 + \varepsilon_i$ soit une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ et tel que $\alpha^f(1+\varepsilon) = 1 + \varepsilon$,*

$$F(\varepsilon) \cdot F(\alpha(1+\varepsilon) - 1) \cdots F(\alpha^{f-1}(1+\varepsilon) - 1)$$

est une racine de l'unité.

(2) *$F(0)$ est une racine de l'unité et il existe des entiers $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbf{Z}_\ell$ et une unité $G(t) \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ tels que*

$$F(t) = F(0) \cdot \prod_i (1+t_i)^{\beta_i} \cdot G(t) \cdot G^\alpha(t)^{-1}.$$

La démonstration de cet énoncé occupe la suite de cette section. Dans le cas où R n'est pas ramifié, c'est une variante d'un résultat de Coleman

[Co1], généralisé par Anderson [A]. Remarquons que l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est immédiate. Pour la réciproque, on peut supposer, et on supposera dans la suite, que $F(0) = 1$. On note (t) l'idéal engendré par les t_i dans $R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$. On commence par l'énoncé additif suivant.

LEMME A.2. — *Soit $\alpha \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ une matrice semblable dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ à une matrice diagonale et soit $f \in 1+(t)R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$ (resp. $1+(t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$). Si pour tout entier $e \geq 1$ et pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathfrak{M}^n$ tel que, pour tout i, $1+\varepsilon_i$ soit une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ et tel que $\alpha^e(1+\varepsilon) = 1+\varepsilon$, on a*

$$\sum_{0 \leq i < e} f(\alpha^i(1+\varepsilon) - 1) = 0,$$

alors il existe $g \in (t)R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$ (resp. $(t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$) vérifiant $f(t) = g(t) - g^\alpha(t)$.

Démonstration. — Pour $n = 1$ et $R = \mathbf{Z}_\ell$ cet énoncé est démontré dans [Co1]. La démonstration s'étend directement au cas général. $\square$

On va maintenant démontrer (1) $\Rightarrow$ (2) quand R est une extension non ramifiée de $\mathbf{Z}_\ell$, en reprenant essentiellement la démonstration de [Co1]. On note φ le morphisme de Frobenius arithmétique associé à l'extension $R\,|\,\mathbf{Z}_\ell$. On suppose pour commencer que $F \in (t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$. On utilise à la suite de [Co1], [A] le logarithme tordu

$$\lambda : \begin{cases} 1+(t)R\,[[t_1, \cdots, t_n]] \longrightarrow (t)R\,[[t_1, \cdots, t_n]] \\ f(t) \longmapsto \log f(t) - \ell^{-1} \log f^\varphi(((1+t_i)^\ell - 1)), \end{cases}$$

en notant f^φ la série obtenue en transformant les coefficients de f par φ. Le fait que cette application soit à valeurs dans $(t)R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$ est conséquence du lemme de Dieudonné-Dwork pour le groupe multiplicatif formel (cf. [I-K-Y] Lemma 4). On note $\tilde{\lambda}$ sa restriction : $1+(t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]] \to (t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$. Le morphisme $\tilde{\lambda}$ est un isomorphisme d'inverse

$$\widetilde{\mathrm{Exp}} : \begin{cases} (t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]] \to 1+(t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]] \\ g(t) \mapsto \exp(\sum_{j \geq 0} \ell^{-j} g^{\varphi^j}(((1+t_i)^{\ell^j} - 1))). \end{cases}$$

On vérifie que cette application est bien définie. Il résulte du lemme de Dieudonné-Dwork pour le groupe multiplicatif formel qu'elle est à valeurs dans $1 + (t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$. Si $F(t) \in (t)^2R\,[[t_1, \cdots, t_n]]$ vérifie (1), $\tilde{\lambda}F = g - g^\alpha$ d'après le lemme A.2 et donc $F = G \cdot (G^\alpha)^{-1}$ avec $G = \widetilde{\mathrm{Exp}}\, g$.

Il suffit pour terminer de démontrer que si $F \in 1+(t)R[[t_1,\cdots,t_n]]$ vérifie (1) il existe $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbf{Z}_\ell^n$ et $G \in 1+(t)R[[t_1,\cdots,t_n]]$ tels que

$$F \cdot \prod(1+t_i)^{\lambda_i} \cdot G \cdot (G^\alpha)^{-1} \in 1+(t)^2 R[[t_1,\cdots,t_n]].$$

Pour cela on peut supposer, quitte à conjuguer par un automorphisme de la forme

$$t_j \longmapsto \prod((1+t_i)^{\beta_{ij}}-1),$$

avec (β_{ij}) dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$, que α est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$. On écrit $1-\alpha_i = u_i\ell^{r_i}$ avec u_i une unité et r_i un entier. Si

$$F = 1 + \sum_{1\le i\le n} \gamma_i t_i \mod (t)^2$$

avec $\gamma_i \in R$, on a

$$\lambda F = \sum_{1\le i\le n} (\gamma_i - \gamma_i^\varphi)t_i \mod (t)^2.$$

De plus, comme, d'après le lemme A.2, $\lambda F = g - g^\alpha$ avec $g \in (t)R[[t_1,\cdots,t_n]]$, il existe des ψ_i dans R tels que

$$\gamma_i - \gamma_i^\varphi = (1-\alpha_i)\psi_i.$$

On peut donc écrire

$$\gamma_i = -\lambda_i + \ell^{r_i}\gamma_i'$$

avec $\lambda_i \in \mathbf{Z}_\ell$ et $\gamma_i' \in R$. Si on pose $\vartheta_i = -\frac{\gamma_i'}{u_i} \in R$ et $G = \prod_{1\le i\le n}(1+\vartheta_i t_i)$ on obtient le résultat cherché.

Pour traiter le cas où R est ramifié on a besoin de la proposition suivante qui sera démontrée plus loin.

PROPOSITION A.3. — *Soit $\alpha \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ une matrice semblable dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ à une matrice diagonale. Si $F \in 1+(t)R[[t_1,\cdots,t_n]]$ vérifie (1) et si il existe un entier strictement positif N tel que F^N vérifie (2) alors F vérifie (2).*

Démontrons le théorème quand R est l'anneau des entiers d'une extension galoisienne finie totalement ramifiée du corps des fractions de $W(k)$, de groupe de Galois G. Soit π une uniformisante de R. Soit $F \in 1+(t)R[[t_1,\cdots,t_n]]$ vérifiant (1). Pour $\sigma \in G$ on a

$$F/F^\sigma = 1 \mod \pi(t)R[[t_1,\cdots,t_n]].$$

Il existe donc un entier strictement positif m tel que

$$(F/F^\sigma)^m = 1 \mod \ell^2(t)R\,[[t_1,\cdots,t_n]].$$

On écrit

$$F^{|G|} = \prod_{\sigma\in G} F^\sigma \cdot \prod_{\sigma\in G}(F/F^\sigma).$$

Comme la série $\prod_{\sigma\in G} F^\sigma$ appartient à $W(k)\,[[t_1,\cdots,t_n]]$, la conclusion du théorème vaut pour elle. D'après le lemme qui suit, il existe alors un entier strictement positif N tel que F^N vérifie (2) et la proposition A.3 permet de conclure. En général, si R est l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de $W(k)$, il existe R' contenant R anneau des entiers d'une extension galoisienne finie totalement ramifiée du corps des fractions de $W(k)$. Notons H le groupe de Galois de $R' \mid R$. Soit $F \in 1 + (t)R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$ vérifiant (1). Comme F vérifie (2) dans $R'\,[[t_1,\cdots,t_n]]$, $F^{|H|}$ vérifie (2) dans $R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$ ce qui permet de conclure d'après la proposition A.3. $\square$

LEMME A.4. — *Soit R un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique et de caractéristique résiduelle ℓ. Si $F \in 1 + \ell^2(t)R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$ vérifie (1) alors F vérifie (2).*

Démonstration. — Dans ce cas, considérons la série $\log F$ qui appartient à $\ell(t)R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$. D'après le lemme A.2 , on peut écrire $\log F = g - g^\alpha$ avec $g \in \ell(t)R\,[[t_1,\cdots,t_n]$. On a alors $F = G\cdot(G^\alpha)^{-1}$ avec $G = \exp g$. $\square$

Démonstration de la proposition A.3. — Comme la série $(1+t)^{1/m}$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$ pour m premier à ℓ on peut supposer que N est une puissance de ℓ, et il suffit donc de traiter le cas $N=\ell$. Pour cela on utilise le lemme suivant.

LEMME A.5. — *On considère l'inclusion d'algèbres*

$$R\,[[t_1,\cdots,t_n]] \hookrightarrow R\,[[t'_1,\cdots,t'_n]]$$

donnée par $1+t_i \mapsto (1+t'_i)^\ell$. On note α le prolongement naturel de l'action de α sur $R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$ en une action sur $R\,[[t'_1,\cdots,t'_n]]$. Si F^ℓ vérifie (2) dans $R\,[[t_1,\cdots,t_n]]$ alors F vérifie (2) dans $R\,[[t'_1,\cdots,t'_n]]$.

D'après le lemme A.5 on a

$$F = \prod_i (1+t'_i)^{\beta_i}\cdot G'(t')\cdot G'^\alpha(t')^{-1}$$

avec $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbf{Z}_\ell$ et $G'(t') \in 1+(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$. On peut de plus supposer que les β_i sont tous nuls. En effet, on peut supposer que α est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, et on a $\ell a_i = \beta_i + (1-\alpha_i)b_i$ en écrivant

$$F = 1 + \sum a_i t_i \mod (t)^2 R[[t_1, \cdots, t_n]]$$

et

$$G' = 1 + \sum b_i t'_i \mod (t')^2 R[[t'_1, \cdots, t'_n]].$$

Soit I l'ensemble des i tels que ℓ divise $(1-\alpha_i)$; pour $i \in I$, ℓ divise β_i. Comme $\prod_{i \notin I}(1+t'_i)^{\beta_i}$ est de la forme $H \cdot (H^\alpha)^{-1}$ avec $H \in 1+(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ (prendre $H = \prod_{i \notin I}(1+t'_i)^{\beta_i(1-\alpha_i)^{-1}}$), en remplaçant F par $F \cdot \prod_{i \in I}(1+t_i)^{-\beta_i/\ell}$ on se ramène au cas où $F(t) = G'(t') \cdot G'^\alpha(t')^{-1}$.

Le $R[[t_1, \cdots, t_n]]$-module $R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ est libre de rang ℓ^n. Il existe une base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq \ell^n}$ de ce module, avec $\varphi_1 = 1$ et $\varphi_i(0) = 0$ pour $i \neq 1$, telle que α envoie chaque φ_i sur le $R[[t_1, \cdots, t_n]]$-multiple d'un φ_j. On note $\varrho : R[[t'_1, \cdots, t'_n]] \to R[[t_1, \cdots, t_n]]$ la rétraction α-équivariante donnée par la projection sur φ_1. Si on pose $G = \varrho(G')$, on a $G(0) = 1$ et $F = G \cdot G^{\alpha-1}$ (car $G' = F \cdot G'^\alpha$). $\square$

Il reste à démontrer le lemme A.5.

Démonstration du lemme A.5. — Il suffit de démontrer que si un élément F de $1+(t)R[[t_1, \cdots, t_n]]$ est de la forme $F^\ell = G \cdot (G^\alpha)^{-1}$ avec $G \in 1+(t)R[[t_1, \cdots, t_n]]$ alors il existe $G' \in 1+(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ tel que $F = G' \cdot (G'^\alpha)^{-1}$. On choisit une uniformisante π de R et on note e l'indice de ramification absolu : on a $(\ell) = (\pi^e)$. On note v_π la valuation π-adique.

Le lemme suivant est immédiat.

LEMME A.6. —

(1) *Pour tout* $H \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ *il existe* $H' \in R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ *tel que*

$$H'^\ell = H \mod (\pi).$$

(2) *Pour tout* $H' \in R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ *il existe* $H \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ *tel que*

$$H'^\ell = H \mod (\pi).$$

On a les mêmes énoncés en remplaçant $R[[t_1, \cdots, t_n]]$ *par* $(t)R[[t_1, \cdots, t_n]]$ *ou par* $1+(t)R[[t_1, \cdots, t_n]]$ *et* $R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ *par* $(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ *ou par* $1+(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$. $\square$

D'après le lemme il existe $H_1 \in 1 + (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ tel que

$$G = H_1^\ell \mod (\pi).$$

On pose $G_1 = G/H_1^\ell$ et $F_1 = F\cdot(H_1/H_1^\alpha)^{-1}$. On a $F_1^\ell = G_1/G_1^\alpha$, $v_\pi(G_1-1) > 0$ $v_\pi(F_1^\ell - 1) > 0$ et par suite $v_\pi(F_1 - 1) > 0$. On va construire par récurrence sur i des suites H_i, G_i et F_i d'éléments de $1 + (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ tels que $F_{i+1} = F_i\cdot(H_{i+1}/H_{i+1}^\alpha)^{-1}$, $F_i^\ell = G_i/G_i^\alpha$, $v_\pi(G_i-1) > 0$ et tels que les suites $v_\pi(F_i - 1)$ et $v_\pi(H_i - 1)$ soient strictement croissantes. Soit $r = v_\pi(F_i - 1)$. On écrit $F_i = 1 + \pi^r\varphi$ avec $\varphi \in (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$.

Si $r\ell < e + r$, on a

$$F_i^\ell = 1 + \pi^{r\ell}\varphi^\ell \mod (\pi^{r\ell+1}).$$

On déduit de la relation $F_i^\ell = G_i/G_i^\alpha$ que $G_i - G_i^\alpha \in (\pi^{r\ell})R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$. Posons $Q_i = \frac{G_i - G_i^\alpha}{\pi^{r\ell}}$. D'après le lemme A.2, on a $Q_i = \tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^\alpha$ avec $\tilde{G}_i$ dans $1 + (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$. On en tire la relation

$$\varphi^\ell = \tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^\alpha \mod (\pi).$$

Comme $\varphi^\ell = \psi \mod (\pi)$ avec $\psi \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ d'après le lemme A.6, on en déduit, en utilisant la rétraction ϱ introduite plus haut, que

$$\varphi^\ell = \gamma_i - \gamma_i^\alpha \mod (\pi),$$

avec γ_i dans $(t)R[[t_1, \cdots, t_n]]$. Il existe alors $\gamma'_i \in (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ tel que

$$\gamma_i'^\ell = \gamma_i \mod (\pi).$$

On pose $H_{i+1} = 1 + \pi^r\gamma'_i$, $G_{i+1} = G_i/H_{i+1}^\ell$, et $F_{i+1} = F_i \cdot (H_{i+1}/H_{i+1}^\alpha)^{-1}$.

Si $r\ell = e + r$, on pose $u = \ell\pi^{-e}$ et on a

$$F_i^\ell = 1 + \pi^{r\ell}(\varphi^\ell + u\varphi) \mod (\pi^{r\ell+1}).$$

Comme précédemment on peut écrire $G_i - G_i{}^\alpha = \pi^{r\ell}(\tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^\alpha)$ avec $\tilde{G}_i$ dans $1 + (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ et on en tire la relation

$$\varphi^\ell + u\varphi = \tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^\alpha \mod (\pi).$$

Remarquons qu'il existe une unique série γ'_i dans $(t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$ telle que $\gamma_i'^\ell + u\gamma'_i = \tilde{G}_i - 1$. On pose alors $H_{i+1} = 1 + \pi^r\gamma'_i$, $G_{i+1} = G_i/H_{i+1}^\ell$, et $F_{i+1} = F_i \cdot (H_{i+1}/H_{i+1}^\alpha)^{-1}$.

Si $r\ell > e + r$, on a

$$F_i^\ell = 1 + \ell\pi^r\varphi \mod (\pi^{e+r+1}).$$

De façon analogue aux cas précédents on peut écrire $G_i - G_i{}^{\alpha} = \ell\pi^r(\tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^{\alpha})$ avec $\tilde{G}_i$ dans $1 + (t')R[[t'_1, \cdots, t'_n]]$. On en tire la relation

$$\varphi = \tilde{G}_i - \tilde{G}_i{}^{\alpha} \mod (\pi)$$

et on pose alors $H_{i+1} = 1 + \pi^r(\tilde{G}_i - 1)$, $G_{i+1} = G_i/H_{i+1}^{\ell}$, et $F_{i+1} = F_i \cdot (H_{i+1}/H_{i+1}^{\alpha})^{-1}$.

On a $F_{i+1}^{\ell} = G_{i+1}/G_{i+1}^{\alpha}$, $v_{\pi}(F_{i+1}^{\ell} - 1) > v_{\pi}(F_i^{\ell} - 1)$ et donc aussi $v_{\pi}(F_{i+1} - 1) > v_{\pi}(F_i - 1)$ et, par récurrence, $v_{\pi}(H_{i+1} - 1) > v_{\pi}(H_i - 1)$. Finalement, en posant $G' = \prod_{i=1}^{\infty} H_i$, on obtient $F = G'/G'^{\alpha}$. $\square$

On déduit du théorème A.1 l'énoncé suivant.

COROLLAIRE A.7. — *Soit $\alpha \in \mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_{\ell})$ une matrice semblable dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{Z}_{\ell})$ à une matrice diagonale et soit $F(t) \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ une unité. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *Pour tout entier $f \geq 1$ et pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathfrak{M}^n$ tel que, pour tout i, $1 + \varepsilon_i$ soit une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ et tel que $\alpha^f(1 + \varepsilon) = 1 + \varepsilon$, on a l'égalité*

$$F(\varepsilon) \cdot F(\alpha(1 + \varepsilon) - 1) \cdots F(\alpha^{f-1}(1 + \varepsilon) - 1) = 1.$$

(2) *Il existe une unité $G(t) \in R[[t_1, \cdots, t_n]]$ telle que*

$$F(t) = G(t) \cdot G^{\alpha}(t)^{-1}.$$

Démonstration. — L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) étant immédiate, il suffit de démontrer la réciproque. Le théorème A.1 permet de supposer que F est de la forme $\prod_i (1 + t_i)^{\beta_i}$ avec des β_i dans $\mathbf{Z}_{\ell}$ et on vérifie alors l'énoncé directement. $\square$

APPENDICE B

B.1. Démonstration du lemme 5.1.4. — Soit K un corps local non archimédien d'égale caractéristique p. On fixe une clôture séparable $\bar{K}$ de K. Pour toute extension L de K contenue dans $\bar{K}$ on note $G(L)$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{K} \mid L)$, $I(L)$ le sous-groupe d'inertie et $P(L)$ le sous-groupe d'inertie sauvage. Par extension de K on entendra extension contenue dans $\bar{K}$. On fixe un caractère additif non trivial $\psi : K \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ et on note $c(\psi)$ son conducteur. Pour tout $G(K)$-module V (i.e. un $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de $G(K)$ définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$ contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ continue pour la topologie ℓ-adique) et toute mesure de Haar dx sur K on note $\varepsilon(V, \psi, dx)$ et $\varepsilon_0(V, \psi, dx)$ les constantes locales définies par Deligne dans [D1].

Pour tout caractère $\chi : G(K) \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ (défini sur une extension finie de $\mathbf{Q}_\ell$ contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ et continu pour la topologie ℓ-adique) on notera V_χ le $G(K)$-module de rang 1 qui lui est associé. Par composition avec l'homomorphisme de réciprocité $K^\times \to G(K)^{\mathrm{ab}}$ on obtient un caractère de $K^\times$ que l'on notera également χ.

Pour tout $G(K)$-module V et tout caractère $\chi : G(K) \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ on pose

$$r(V, \chi, \psi) := \frac{\varepsilon_0(V \otimes V_\chi, \psi, dx)}{\varepsilon_0(V, \psi, dx)}.$$

C'est un scalaire indépendant du choix de dx (d'après [D1] 4.1). On posera $V^t = V^{P(K)}$.

Par la théorie du corps de classe local, le lemme 5.1.4 est conséquence directe de l'énoncé suivant.

Proposition B.8. — *Pour tout $G(K)$-module V il existe un élément z de $K^\times$ tel que, pour toute extension non ramifiée $K' \mid K$ et tout caractère modérément* *ramifié* $\chi : G(K') \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ *on ait*

$$r(\mathrm{Res}_{G(K')} V, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K' \mid K}) = \chi(z)\, r((\mathrm{Res}_{G(K')} V)^t, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K' \mid K}).$$

Démonstration. — Comme à χ et ψ fixés les invariants $r(\mathrm{Res}_{G(K')} V, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K' \mid K})$ et $r((\mathrm{Res}_{G(K')} V)^t, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K' \mid K})$ sont multiplicatifs sur les suites exactes courtes, ils ne dépendent que de la classe de V dans le groupe de Grothendieck des $G(K)$-modules. Par [D1] 8.12 et le théorème de Brauer il suffit de traiter le cas où V est de la forme $V = \mathrm{Ind}_{G(L)}^{G(K)} W$ avec W un $G(L)$-module de rang 1 et L une extension finie de K. On a alors $V^t \simeq \mathrm{Ind}_{P(K)G(L)}^{G(K)} W^t$, W^t étant vu comme $P(K)G(L)$-module en faisant agir trivialement $P(K)$. Deux cas sont possibles : $W^t = 0$ ou $W^t = W$.

B.2. Le cas $W^t = 0$. — Commençons par traiter le cas où $V = W$. On a $W = V_\alpha$ avec $\alpha : G(L) \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ un caractère sauvagement ramifié, i.e. de conducteur $m \geq 2$. Posons $n = [\frac{m+1}{2}]$. Il existe y dans L de valuation $-(m + c(\psi))$, bien défini modulo $\pi^{-(n+c(\psi))}$ (avec π une uniformisante de L), tel que $\alpha(1 + a) = \psi(ya)$ pour tout a dans L vérifiant $v_\pi(a) \geq n$. D'après un calcul effectué dans [D1] p.546, pour tout caractère χ de $G(L)$, de conducteur $\leq m-n$, on a

$$\varepsilon_0(V_\alpha \otimes V_\chi, \psi, dx) = \chi^{-1}(y)\, \varepsilon_0(V_\alpha, \psi, dx).$$

Comme $m - n \geq 1$, cette égalité est en particulier vérifiée pour tout caractère χ qui est modérément ramifié.

Si L' est une extension finie non ramifiée de L, on a, pour $x \in \mathcal{O}_{L'}$,

$$\mathrm{N}_{L' \mid L}(1 + x) = 1 + \mathrm{Tr}_{L' \mid L}(x) \qquad \mathrm{mod} \quad \pi^{2v_\pi(x)}.$$

On en déduit que si $v_\pi(x) \geq n$ on a

$$\alpha \circ \mathrm{N}_{L' \mid L}(1 + x) = \alpha(1 + \mathrm{Tr}_{L' \mid L}(x)) = \psi(y\ \mathrm{Tr}_{L' \mid L}\, x) = \psi(\mathrm{Tr}_{L' \mid L}(yx)).$$

Par le calcul précédent on obtient que

$$r(\mathrm{Res}_{G(L')} W, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L' \mid L}) = \chi^{-1}(y)$$

pour tout caractère modérément ramifié χ de $G(L')$.

En général, soit K' une extension finie non ramifiée de K. On choisit un ensemble de représentants S dans $G(K)$ de l'ensemble des doubles classes $G(K')\backslash G(K)/G(L)$. On note L' le corps de groupe de Galois $G(L') = G(L) \cap G(K')$. C'est une extension non ramifiée de L. Pour s dans S on note K'_s le corps de groupe de Galois $G(K'_s) = s\, G(L) s^{-1} \cap G(K')$. Comme $G(K')$ est normal dans $G(K)$, on a $G(K'_s) = s\, G(L')s^{-1}$ et donc $K'_s = L'^{s^{-1}}$. Soit W_s le $G(K'_s)$-module obtenu par restriction de W à partir de $G(K'_s) \to G(L') \to G(L)$. Par la formule des doubles classes (cf. [Se] Proposition 15), on a

$$\mathrm{Res}_{G(K')} V = \oplus_{s\in S} \mathrm{Ind}_{G(K'_s)}^{G(K')}(W_s).$$

On en tire, par [D1] 5.6, que l'on a, pour tout caractère modérément ramifié χ de $G(K')$,

$$\begin{aligned} r(&\mathrm{Res}_{G(K')} V, \chi, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K' \mid K}) \\ &= \prod_{s\in S} r(W_s, \chi \circ \mathrm{N}_{K'_s \mid K'}, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K'_s \mid K}) \\ &= \prod_{s\in S} r(\mathrm{Res}_{G(L')} W, \chi \circ \mathrm{N}_{K'_s \mid K'} \circ s, \psi \circ \mathrm{Tr}_{K'_s \mid K} \circ s) \\ &= \prod_{s\in S} r(\mathrm{Res}_{G(L')} W, \chi \circ \mathrm{N}_{K'_s \mid K'} \circ s, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L' \mid K}) \\ &= \prod_{s\in S} \chi^{-1} \circ \mathrm{N}_{K'_s \mid K'}(sy) \\ &= \chi^{-1}(\mathrm{N}_{L \mid K}\, y), \end{aligned}$$

d'où le résultat, car $V^t = 0$.

B.3. Le cas $W^t = W$. — On note W' le $P(K)G(L)$-module obtenu en faisant agir $P(K)$ trivialement sur W. On a $P(K)G(L) = G(\tilde{K} \cap L)$ en notant $\tilde{K}$ l'extension modérément ramifiée maximale de K dans $\bar{K}$ et $V^t = \mathrm{Ind}_{G(\tilde{K}\cap L)}^{G(K)} W'$.

En général, si E est une extension finie de K d'uniformisante π_E, si β est un caractère modérément ramifié $E^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ et ψ est un caractère additif non trivial, on notera $\overline{\beta}$ le caractère induit par β sur le corps résiduel, $\overline{\psi}_{\pi_E}$ le caractère induit par $y \mapsto \psi(\pi_E^{-c(\psi_E)-1} y)$, et $g(\overline{\beta}, \overline{\psi}_{\pi_E})$ la somme de Gauss $-\sum_{x\in(\mathcal{O}_E/\pi_E)^\times} \overline{\beta}(x)\overline{\psi}_{\pi_E}(x)$. Si U est un $G(E)$-module modérément ramifié de rang 1, et β le caractère associé à U, on a, pour tout caractère modérément ramifié χ de $G(E)$,

$$r(U, \chi, \psi) = \chi^{-1}(\pi_E^{-c(\psi)-1}) \frac{g(\overline{\beta}^{-1}\overline{\chi}^{-1}, \overline{\psi}_{\pi_E})}{g(\overline{\beta}^{-1}, \overline{\psi}_{\pi_E})}.$$

En particulier, fixons des uniformisantes $\pi_{\tilde{K}\cap L}$ et π_L de $\tilde{K} \cap L$ et L respectivement. Pour tout caractère modérément ramifié $\beta : (\tilde{K} \cap L)^\times \to \bar{\mathbf{Q}}_\ell^\times$ on a, en posant $k = \mathcal{O}_L/\pi_L = \mathcal{O}_{\tilde{K}\cap L}/\pi_{\tilde{K}\cap L}$,

$$\begin{aligned}
g(\overline{\beta}\circ \mathrm{N}_{L\,|\,\tilde{K}\cap L}, \overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}}_{\pi_L}) &= -\sum_{x\in k^\times} \overline{\beta}\circ \mathrm{N}_{L\,|\,\tilde{K}\cap L}(x)\overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}}_{\pi_L}(x) \\
&= -\sum_{x\in k^\times} \overline{\beta}(x^{[L:\tilde{K}\cap L]})\overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}}_{\pi_L}(x) \\
&= -\sum_{x\in k^\times} \overline{\beta}(x^{[L:\tilde{K}\cap L]})\overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}}_{\pi_L}(x^{[L:\tilde{K}\cap L]}) \\
&= g(\overline{\beta}, \overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}}_{\pi_L}) \\
&= \overline{\beta}(\lambda)\, g(\overline{\beta}, \overline{\psi\circ \mathrm{Tr}_{\tilde{K}\cap L\,|\,K}}_{\pi_{\tilde{K}\cap L}})
\end{aligned}$$

avec λ dans $k^\times$ ne dépendant que de ψ et des uniformisantes $\pi_{\tilde{K}\cap L}$ et π_L.

On déduit de ce qui précède qu'il existe C dans $(\tilde{K}\cap L)^\times$, bien défini modulo $\pi_{\tilde{K}\cap L}$ et ne dépendant que de ψ et des uniformisantes $\pi_{\tilde{K}\cap L}$ et π_L, tel que, pour tout caractère modérément ramifié χ de $G(\tilde{K}\cap L)$, on ait

$$r(W, \mathrm{Res}_{G(L)}\,\chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{L\,|\,K}) = \chi(C)\, r(W', \chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{\tilde{K}\cap L\,|\,K}).$$

De plus cette égalité reste valide, avec le même C modulo $\pi_{\tilde{K}\cap L}$, si on remplace L par une extension finie non ramifiée L' et $\tilde{K}\cap L$ par $\tilde{K}\cap L'$.

Soit K' une extension finie non ramifiée de K. On reprend les notations du cas précédent. Pour tout caractère modérément ramifié χ de $G(K')$ on a

$$r(\mathrm{Res}_{G(K')}\,V, \chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{K'\,|\,K}) = \prod_{s\in S} r(\mathrm{Res}_{G(L')}\,W, \chi\circ \mathrm{N}_{K'_s\,|\,K'}\circ s, \psi\circ \mathrm{Tr}_{L'\,|\,K})$$

et

$$\begin{aligned}
&r(\mathrm{Res}_{G(K')}\,V^t, \chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{K'\,|\,K}) \\
&\qquad = \prod_{s\in S} r(\mathrm{Res}_{G(\tilde{K}\cap L')}\,W, \chi\circ \mathrm{N}_{\tilde{K}\cap K'_s\,|\,K'}\circ s, \psi\circ \mathrm{Tr}_{\tilde{K}\cap L'\,|\,K}).
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}
&r(\mathrm{Res}_{G(K')}\,V, \chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{K'\,|\,K})\, r(\mathrm{Res}_{G(K')}\,V^t, \chi, \psi\circ \mathrm{Tr}_{K'\,|\,K})^{-1} = \\
&\qquad = \prod_{s\in S} \chi\circ \mathrm{N}_{\tilde{K}\cap K'_s\,|\,K'}(sC) = \chi(\mathrm{N}_{\tilde{K}\cap L\,|\,K}C),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

BIBLIOGRAPHIE

[A] G. ANDERSON. — The hyperadelic gamma function, *Inventiones Mathematicae* **95** (1989), 63–131.

[B-B-D] A. BEILINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE. — Faisceaux pervers, in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, p. 7–172, *Astérisque* nº 100, 1982.

[Bo] A. BOREL. — *Algebraic $\mathcal{D}$-modules*, *Perspectives in Math.* nº 2, Academic Press, Boston, 1987.

[Cl] A. H. CLIFFORD. — Representations induced in an invariant subgroup, *Ann. Math.* **38** (1937), 533–550.

[Co1] R. COLEMAN. — A formal analogue of Hilbert's theorem 90, *Proceedings of the American Mathematical Society* **94** (1985), 603–604.

[Co2] R. COLEMAN. — Anderson-Ihara Theory : Gauss Sums and Circular Units, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **17** (1989), 55–72.

[C-R] C. W. CURTIS et I. REINER. — *Methods of representation theory I*, Wiley, New York, 1981.

[D1] P. DELIGNE. — Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in *Modular Functions of One Variable II*, p. 55–106, *Springer Lect. Notes in Math.* nº 349, 1973.

[D2] P. DELIGNE. — Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in *Galois groups over* $\mathbf{Q}$, p. 79–298, *Publ. MSRI* nº 16, Springer Verlag, 1989.

[Dw-L] B. DWORK et F. LOESER. — Hypergeometric series and functions as periods of exponential modules, in *Barsotti Symposium in Algebraic*

Geometry, p. 153–174, *Perspectives in Mathematics*, Academic Press, 1994.

[E] T. Ekedahl. — On the adic formalism, in *The Grothendieck Festschrift vol. II*, p. 197–218, *Progress in Math.* n° 87, Birkhäuser, 1990.

[G-L] O. Gabber et F. Loeser. — Faisceaux pervers ℓ-adiques sur un tore, *Duke Math. J.* **83** (1996), 501–606.

[I1] Y. Ihara. — Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications, *Ann. Math.* **123** (1987), 43–106.

[I2] Y. Ihara. — On Galois representations arising from towers of coverings on $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, *Inventiones Mathematicae* **86** (1986), 427–459.

[I3] Y. Ihara. — Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, *Proceedings of the ICM, Kyoto* **1** (1991), 99–120.

[I-K-Y] Y. Ihara, M. Kaneko et A. Yukinari. — On some properties of the universal power series for Jacobi sums, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **12** (1987), 65–86.

[Il] L. Illusie. — Autour du théorème de monodromie locale, in *Périodes p-adiques*, p. 9–57, *Astérisque* n° 223, 1994.

[K] N. Katz. — *Exponential sums and differential equations*, *Annals of Math. Studies* n° 124, Princeton University Press, 1990.

[Kn-M] F. Knudsen et D. Mumford. — The projectivity of the moduli space of stable curves. I: Preliminaries on 'det' and 'Div', *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55.

[La1] G. Laumon. — Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne), in *Caractéristique d'Euler-Poincaré*, p. 173–219, *Astérisque* n° 82-83, 1981.

[La2] G. Laumon. — Transformation de Fourier, Constantes d'équations fonctionnelles et Conjecture de Weil, *Publ. Math. I.H.E.S.* **65** (1987), 131–210.

[L-S1] F. Loeser et C. Sabbah. — Équations aux différences finies et déterminants de fonctions multiformes, *Comment. Math. Helvetici* **66** (1991), 458–503.

[L-S2] F. Loeser et C. Sabbah. — Caractérisation des $\mathcal{D}$-modules hypergéométriques sur le tore II, *C. R. Acad. Sc. Paris* **315** (1992), 1263–1264.

[S] C. SABBAH. — Lieu des pôles d'un système d'équations aux différences finies, *Bull. Soc. mat. France* **120** (1992), 371–396.

[Sa] T. SAITO. — Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant, and the determinant of ℓ-adic cohomologies, *Journal of Algebraic Geometry* **3** (1994), 411–434.

[Se] J.-P. SERRE. — *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.