

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARIE-CLAUDE ARNAUD

## Le « closing lemma » en topologie $C^1$

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 74 (1998)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1998\\_2\\_74\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1998_2_74__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LE « CLOSING LEMMA » EN TOPOLOGIE $C^1$

Marie-Claude Arnaud

**Résumé.** — À l'aide d'un résultat algébrique dû à Mai, nous écourtons la démonstration du « closing lemma » en topologie  $C^1$  de C. Pugh et C. Robinson et en donnons un énoncé plus précis. Nous traitons un cas nouveau : celui des champs de vecteurs symplectiques.

Nous en déduisons le théorème de densité des points périodiques dans l'ensemble des points non errants ne tendant pas vers  $\infty$  comme le faisaient C. Pugh et C. Robinson, donnant un résultat aussi dans le cas des champs de vecteurs symplectiques. Puis, nous énonçons un résultat nouveau : un lemme de fermeture d'orbite en topologie  $C^1$ , qui permet de rendre un point récurrent périodique en approximant son orbite.

Enfin, nous généralisons la version ergodique du « closing lemma » de R. Mañé au cas des variétés non compactes et des mesures boréliennes positives finies sur tout compact.

**Abstract (The  $C^1$  closing lemma).** — Using an algebraic result due to Mai, we give a simpler proof of the  $C^1$  closing lemma of Pugh and Robinson and give a more precise result. We solve a new case : the case of symplectic vector fields.

We deduce the theorem of density of periodic points in the non wandering set, as Pugh and Robinson did, adding a result about symplectic vector fields. Then, we prove a new result : the  $C^1$  orbit closing lemma, which allows us to transform a recurrent point to a periodic one by approximating its orbit.

Finally, we generalize the  $C^1$  ergodic closing lemma of R. Mañé (the ergodic version of the orbit closing lemma) to the borelian positive measures, finite on every compact, defined on non compact manifolds.



## Table des matières

<b>1. Introduction</b> .....	1
1.1. « Closing lemma » .....	1
1.2. Théorème de densité, comprenant un lemme de fermeture d'orbite . . . .	4
1.3. Une version ergodique du « closing lemma » .....	5
1.4. En topologie $C^k$ pour $k > 1$ .....	7
1.5. Guide du « closing lemma » pour le lecteur .....	8
1.6. Remerciements .....	8
<b>2. Énoncés du « closing lemma »</b> .....	9
2.1. Sans homologie .....	9
2.2. Avec homologie .....	13
2.3. Cas des hamiltoniens .....	16
<b>3. Les théorèmes de densité comprenant un lemme de fermeture d'orbite</b> .....	19
3.1. Sans homologie .....	20
3.2. Avec homologie .....	27
3.3. Cas des hamiltoniens .....	31
<b>4. Une version ergodique du « closing lemma »</b> .....	35
4.1. Énoncés .....	35
4.2. Les étapes de la démonstration .....	37
4.3. Démonstration des résultats intermédiaires .....	47
<b>5. Plan de la démonstration du « closing lemma »</b> .....	57
5.1. Un résultat perturbatif .....	57
5.2. Un résultat concernant les suites de points .....	61
5.3. Démonstration du « closing lemma » .....	64
<b>6. Démonstration des résultats intermédiaires</b> .....	77
6.1. Démonstration des résultats perturbatifs de 5.1 .....	77
6.2. Démonstration des résultats de 5.2 concernant les suites de points . . . .	90
6.3. Démonstration du résultat algébrique 6.2.1 .....	104
<b>Bibliographie</b> .....	119



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

On travaillera dans une variété  $M$  riemannienne de classe  $C^\infty$ . On notera  $d$  la distance riemannienne associée et  $B_\varepsilon(x)$  désignera toujours la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  pour cette distance riemannienne.

### 1.1. « Closing lemma »

Le problème qu'on se pose est le suivant : pour un difféomorphisme  $f$  ou le flot  $(\varphi_t)$  d'un champ de vecteurs, soit  $x$  un point dont l'orbite (positive par exemple) s'accumule sur ce point (on dit que  $x$  est récurrent). Peut-on perturber le difféomorphisme ou le champ de vecteurs (dans une topologie à préciser) de telle sorte qu'il existe un point périodique proche de  $x$  ?

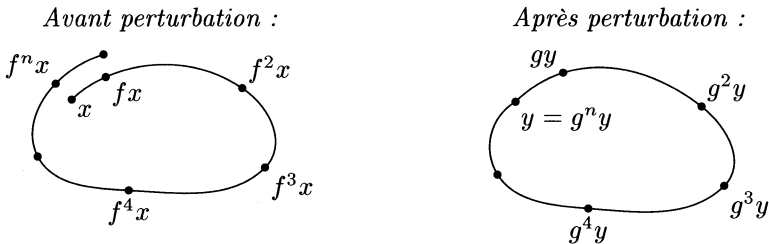


Figure 1

La même question se pose si  $x$  n'est plus récurrent mais non errant, c-à-d limite d'une suite de points  $(y_n)$  pour laquelle il existe une suite d'entiers  $(j_n)$  positifs (par exemple) telle que  $(f^{j_n}(y_n))$  tend vers  $x$ .

REMARQUE IMMÉDIATE. — Ceci revient en fait au problème de rendre  $x$  périodique. En effet :

1. pour les difféomorphismes : si  $g$  est « proche » de  $f$  et  $g^m y = y$  pour un  $y$  proche de  $x$  et un  $m \geq 1$ , on peut construire « proche » de l'identité un difféomorphisme  $h$  tel que  $hy = x$ , et ensuite  $h \circ g \circ h^{-1}$  est « proche » de  $f$  et admet  $x$  comme point périodique ;
2. pour les flots : on considère  $\psi_t = h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$ .

En topologie  $C^0$ , la réponse est oui ; explicitons la démonstration pour les difféomorphismes. Si  $f^n x$  est proche de  $x$  pour un  $n \geq 1$ , on peut construire  $W$  petit voisinage de  $x$  et de  $f^n x$  homéomorphe à un disque fermé ne rencontrant pas  $\{f^j x \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ . On peut alors construire un difféomorphisme  $g$  à support inclus dans  $W$  envoyant  $f^n x$  sur  $x$ . Alors,  $g \circ f$  est proche de  $f$  en topologie  $C^0$  dès que  $W$  est assez petit et  $x$  est un point périodique de période  $n$  de  $g \circ f$ .

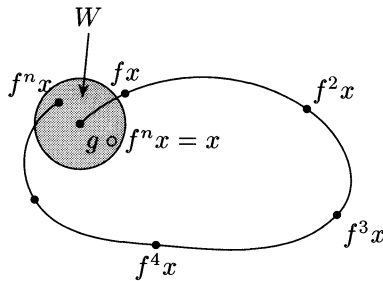


Figure 2

En topologie  $C^1$ , le résultat est beaucoup plus difficile à démontrer. En effet, en topologie  $C^1$ , pour « bouger » un point d'une distance  $\delta$  à l'aide d'une perturbation  $\varepsilon$ -petite en topologie  $C^1$ , on a besoin d'un difféomorphisme différent de l'identité sur un voisinage de taille au moins  $C^{te} \cdot \delta/\varepsilon$ .

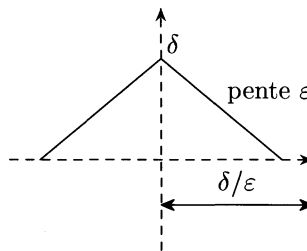


Figure 3

Le problème est alors le suivant :  $f$  désignant un difféomorphisme, supposons que  $f^n p$  pour un  $n > 0$  soit  $\delta$ -proche de  $p$ . Essayons de faire la même construction que dans

le cas précédent : soit  $g$  un difféomorphisme proche de l'identité, plus précisément :  $\|g - \text{Id}\|_{C^1} < \varepsilon$  (on suppose raisonner dans une carte pour prendre la norme) tel que  $g(f^n p) = p$ . Alors, on voit (c'est ce qu'illustre la figure 3 page ci-contre) que le support de  $g - \text{Id}$  contient la boule de centre  $f^n p$  et de rayon  $\delta/\varepsilon$ . Aussi, si l'orbite intermédiaire  $\{f^j p \mid 1 \leq j \leq n-1\}$  de  $p$  sous  $f$  passait par cette boule, l'orbite de  $p$  sous  $g \circ f$  ne passe peut-être plus par  $f^{n-1} p$ , donc on ne peut pas dire qu'on obtient une orbite périodique pour  $g \circ f$ .

Le problème en topologie  $C^1$  est en fait beaucoup plus compliqué qu'en topologie  $C^0$ . C. Pugh a démontré le «closing lemma» en topologie  $C^1$  pour les champs de vecteurs en 1967 dans [13] et [14] (le premier article concerne les points récurrents dans une variété quelconque, le second les points non errants dans une variété compacte). En 1981, dans [15], C. Pugh et C. Robinson ont repris cette démonstration et aussi démontré le «closing lemma» en topologie  $C^1$  pour les difféomorphismes et les flots. Ils y ont de plus démontré le «closing lemma» en topologie  $C^1$  pour des difféomorphismes qui préservent une structure donnée (forme symplectique ou forme volume) ainsi que les champs de vecteurs qui préservent le volume et les champs de vecteurs hamiltoniens. Donnons par exemple leur énoncé pour les difféomorphismes :

#### CLOSING LEMMA POUR LES DIFFÉOMORPHISMES (C. Pugh & C. Robinson)

*Soient  $M$  une variété de classe  $C^r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ),  $f$  un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $M$ ,  $p$  un point non errant de  $f$  tel que la suite  $(f^n(p))_{n \geq 0}$  admet au moins une valeur d'adhérence et  $U$  un voisinage de  $p$ .*

*Alors, il existe aussi proche qu'on le veut en topologie  $C^1$  de  $\text{Id}$  un difféomorphisme  $g$  de classe  $C^r$  de  $M$  tel que  $g \circ f$  a un point périodique dans  $U$ .*

Dans [15], la démonstration concernant la partie algébrique de ce théorème est longue et ardue (on peut d'ailleurs en trouver un bref résumé dans [16]). C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la nouvelle démonstration de cette partie algébrique donnée par Mai en 1984 dans [6] et [7], beaucoup plus courte que la précédente, et c'est elle que nous avons essentiellement reprise dans le chapitre 6, en la réarrangeant en particulier grâce à d'avisés conseils de J.-C. Yoccoz.

Les énoncés du «closing lemma» que nous donnerons dans le chapitre 2 seront en fait beaucoup plus précis que celui donné ci-dessus :

- nous verrons qu'on peut imposer à  $g$  (avec les notations de l'énoncé précédent) d'être à support dans un voisinage de n'importe quel point de l'ensemble  $\omega$ -limite de  $p$  (ceci est nouveau à ma connaissance) ;
- nous décrirons de façon précise l'orbite du point périodique de  $g \circ f$ , montrant en particulier qu'elle approxime un «bout d'une orbite» de  $f$  ; ceci sera fondamental pour la démonstration du lemme de fermeture d'orbite et de la version ergodique du «closing lemma».



Signalons aussi que nous traitons un cas qui n'avait jamais été traité : celui des champs de vecteurs qui préservent une forme symplectique. Dans ce cas, la nouveauté par rapport aux énoncés précédents du « closing lemma » est qu'on commence par faire une perturbation *globale* pour rendre une classe de cohomologie en un certain sens rationnelle avant d'utiliser des perturbations à support simplement connexe.

Expliquons enfin sans entrer dans les détails quel type de perturbation construit C. Pugh dans le cas des difféomorphismes (voir la figure 4 : se plaçant au voisinage d'une orbite  $p, fp, \dots$ , il utilise un certain nombre de perturbations  $g_1, \dots, g_\alpha$  de l'identité à supports disjoints telles que chaque  $g_i$  a son support au voisinage de  $f^i p$  qui permettent de fermer progressivement une orbite : si  $g = g_\alpha \circ \dots \circ g_1$ , alors  $g \circ f$  a une orbite périodique. On fait donc plusieurs perturbations du type de celle décrite quand nous avons explicité le cas de la topologie  $C^0$ .

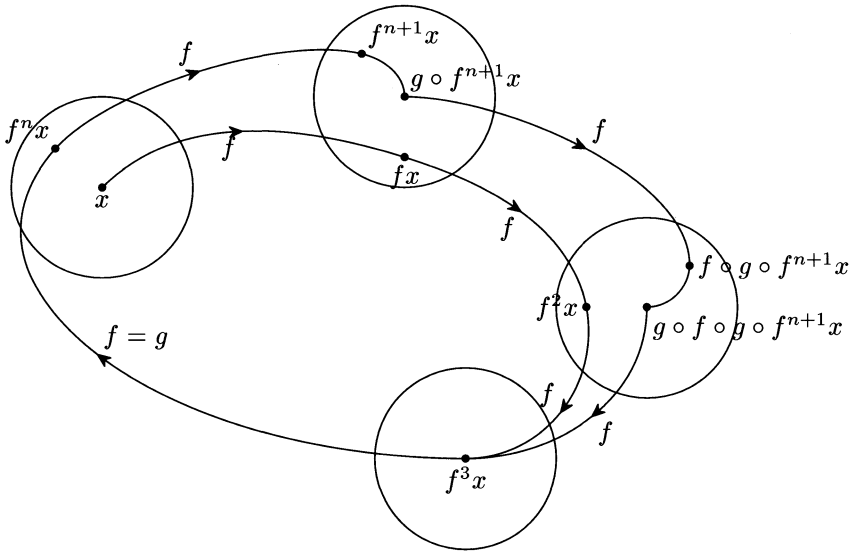


Figure 4

## 1.2. Théorème de densité, comprenant un lemme de fermeture d'orbite

Le « closing lemma » a été utilisé par C. Pugh et C. Robinson pour démontrer dans chacun des cas traités un théorème de densité (nous l'énoncerons au chapitre 3). Nous verrons dans la plupart des cas traités que nous pouvons démontrer que pour un  $G_\delta$  dense en topologie  $C^1$  de difféomorphismes, flots ou champs de vecteurs, l'ensemble des points périodiques est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  tels que

$$\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset.$$

Plus précisément, donnons cet énoncé pour les difféomorphismes,  $\text{Diff}^r(M)$  désignant l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^r$  de  $M$ , que nous munirons de la topologie  $C^1$  de Whitney (elle est décrite dans [15]) :

THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES DIFFÉOMORPHISMES (C. Pugh & C. Robinson)

Soit  $M$  une variété de classe  $C^1$ . Alors, il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $\text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  de  $f$  tels que

$$\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset.$$

Dans le cas des champs de vecteurs symplectiques, nous verrons que cet énoncé est faux dès que  $\dim H^1(M, \mathbf{R}) \geq 2$ .

Signalons que nous travaillons dans  $\text{Diff}^1(M)$  et non dans  $\text{Diff}^k(M)$  pour un  $k \geq 2$  car  $\text{Diff}^1(M)$  muni de la topologie  $C^1$  est un espace de Baire, alors que  $\text{Diff}^k(M)$  pour un  $k \geq 2$  muni de cette même topologie  $C^1$  n'en est pas un.

Nous montrerons mieux dans le chapitre 3, puisque nous donnerons des énoncés d'un lemme de fermeture d'orbite, ce qui permet de répondre à une question de [12]. Le « closing lemma » permet de transformer un point récurrent en un point périodique, mais il ne permet pas de s'assurer que l'orbite du point périodique créé est proche de l'orbite initiale (*i.e.* qu'on a bien fermé l'orbite, et pas seulement rendu le point périodique).

DÉFINITION 1.2.1. — Pour  $f \in \text{Diff}^1(M)$ , on définit l'ensemble  $\Sigma(f)$  des points  $x \in M$  tels que pour tout voisinage  $U$  de  $f$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g \in U$  et  $y \in M$  tel que :

- (i)  $y$  est un point périodique de  $g$  de période notée  $m$  ;
- (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m} B_\varepsilon(g^k y)$  ;
- (iii)  $\forall i \in [0, m], d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$ .

L'énoncé du lemme de fermeture d'orbite est alors :

LEMME DE FERMETURE D'ORBITE POUR LES DIFFÉOMORPHISMES

Soit  $f \in \text{Diff}^1(M)$ ,  $R(f)$  l'ensemble de ses points positivement récurrents. Alors :

- (1)  $R(f)$  est un espace de Baire ;
- (2)  $\Sigma(f)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(f)$ .

### 1.3. Une version ergodique du « closing lemma »

On s'intéresse alors à une version ergodique du lemme de fermeture d'orbite. Dans [8], R. Mañé a démontré que quand on travaille sur une variété compacte, pour un difféomorphisme  $f$ , l'ensemble  $\Sigma(f)$  des points dont on peut fermer l'orbite

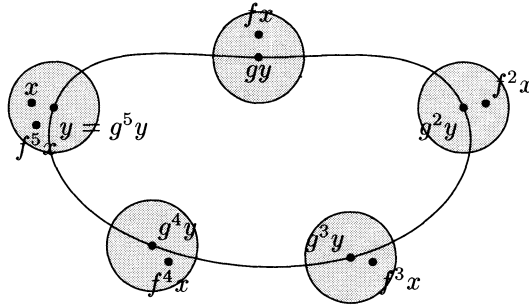


Figure 5

par perturbation petite en topologie  $C^1$  (c-à-d l'orbite trouvée après perturbation est proche de l'orbite initiale) est de mesure de probabilité totale (*i.e.* pour toute mesure de probabilité  $\mu$   $f$ -invariante, l'ensemble de ces points est de  $\mu$ -mesure 1). Sa démonstration de cette version ergodique du «closing lemma» s'appuie de façon fondamentale sur le «closing lemma». Elle a été adaptée par Lan Wen dans [18] au cas des champs de vecteurs.

L'intérêt de cette version ergodique du «closing lemma» est qu'on peut la reformuler en terme de théorie de la mesure de la manière suivante :

*pour tout difféomorphisme  $f$  de  $M$ , pour toute mesure  $\mu$  ergodique pour  $f$ , il existe une suite de difféomorphismes  $(f_n)$  de  $M$  tendant vers  $f$  en topologie  $C^1$ , ayant une orbite périodique  $O_n$ , telle que si  $\mu_n$  désigne la mesure équirépartie suivant  $O_n$ ,  $\mu_n$  est ergodique pour  $f_n$  et tend en topologie vague vers  $\mu$ .*

De plus, R. Mañé a utilisé dans [8] la version ergodique du «closing lemma» pour montrer que si un difféomorphisme  $f$  de  $M$  a un voisinage  $U$  (en topologie  $C^1$ ) dont tout élément  $g$  vérifie : toute orbite périodique de  $g$  est hyperbolique, alors l'ensemble des points non errants de  $f$  est hyperbolique.

Nous avons amélioré le résultat de R. Mañé en le généralisant aux variétés non compactes et aux mesures boréliennes positives finies sur les compacts. L'énoncé que nous obtenons est alors :

VERSION ERGODIQUE DU «CLOSING LEMMA» POUR LES DIFFÉOMORPHISMES

*Soient  $f \in \text{Diff}^1(M)$ ,  $\mu$  une mesure borélienne positive sur  $M$  finie sur tout compact et invariante par  $f$ . Alors :*

$$\mu(R(f) \setminus \Sigma(f)) = 0.$$

On obtient un résultat analogue dans tous les cas où on a démontré le «closing lemma» au chapitre 2. Remarquons que si on suppose la mesure finie, on retrouve à l'aide du théorème de récurrence de Poincaré le résultat de Mañé (sans d'ailleurs

supposer la variété compacte), soit :

$$\mu(M \setminus \Sigma(f)) = 0.$$

#### 1.4. En topologie $C^k$ pour $k > 1$

Il semble naturel de se demander ce qu'il advient du « closing lemma » quand on travaille en topologie  $C^r$  pour  $r \geq 2$ . Pratiquement rien n'est connu sur ce sujet. Citons quand même le cas des champs de vecteurs sur les surfaces : dans ce cas, il est connu que les champs de vecteurs Morse-Smale forment un  $G_\delta$  dense de l'ensemble des champs de vecteurs de classe  $C^k$  de  $M$  (cf. [11]). Or, ces champs de vecteurs Morse-Smale ne présentent pas de récurrence non triviale (autre que les points périodiques). Aussi, un théorème de densité est vrai dans ce cas. Mais cela ne répond pas au problème du « closing lemma » ; même sur le tore  $\mathbf{T}^2$ , celui-ci est inconnu (par contre, sur la sphère  $\mathbf{S}^2$ , il est trivial car aucun champ de vecteurs de la sphère ne présente de récurrence non triviale).

Rappelons aussi (cf. [17]) que pour un difféomorphisme hyperbolique et grâce au lemme de pistage (et même si on suppose simplement que l'ensemble des points non errants est hyperbolique : c'est la proposition 8.19 de [17]), le lemme de fermeture d'orbite en topologie  $C^\infty$  est trivialement vérifié en tout point récurrent ; on sait même que toute orbite récurrente par chaîne de  $f$  peut être approximée par une orbite périodique de  $f$  dans ce cas. Aussi, il existe un ouvert de difféomorphismes pour lesquels le lemme de fermeture d'orbite en topologie  $C^\infty$  est vrai (et même un résultat encore meilleur). Mais bien sûr il existe des difféomorphismes qui ne sont pas hyperboliques.

Le fait que la démonstration de C. Pugh et C. Robinson ne soit valable qu'en topologie  $C^1$  vient des deux remarques suivantes, qui montrent l'avantage de travailler en topologie  $C^1$  plutôt qu'en topologie  $C^k$  pour  $k > 1$  :

- 1) Si on se place dans un voisinage suffisamment petit, une application est proche en topologie  $C^1$  de sa linéarisée. Aussi, en transformant certaines de ces applications en leurs linéarisées, on obtiendra une homogénéité de degré 1.

En topologie  $C^k$ , il faudrait considérer des polynômes de degré  $k > 1$  et on perdrait l'homogénéité.

- 2) On a homogénéité de degré 1 de la taille des perturbations nécessaires : si  $\varepsilon$  mesure la taille maximale voulue de la perturbation pour la distance associée à la topologie  $C^1$ , pour ne changer le champ de vecteurs que dans une boule de rayon maximal  $D$ , on ne peut « bouger » un point au maximum que de  $C^{te} \cdot \varepsilon D$ .

Si on s'autorisait seulement des perturbations petites en topologie  $C^k$ , on pourrait bouger le point d'au maximum  $C^{te} \cdot \varepsilon D^k$  (d'où perte de l'homogénéité de degré 1).

Ces deux remarques réunies font comprendre que la démonstration du « closing lemma » en topologie  $C^1$  passe par la démonstration de certains résultats concernant les applications linéaires.

Il existe en topologie  $C^r$ ,  $r \geq 2$  des contre-exemples au « closing lemma ». Citons dans le cas des variétés non compactes (plus précisément un tore de dimension 2 auquel on a retiré un point) le contre-exemple de C. Gutierrez (cf. [4]) dans le cas des champs de vecteurs quelconques, et dans le cas des hamiltoniens de  $T^*\mathbf{T}^n$  muni d'une forme symplectique constante particulière le résultat de M. Herman (cf. [5]).

### 1.5. Guide du « closing lemma » pour le lecteur

Nous avons choisi de regrouper au chapitre 2 tous les énoncés concernant le « closing lemma » (cas des difféomorphismes quelconques, des difféomorphismes préservant une structure, des flots, des champs de vecteurs, ...). Ensuite, au chapitre 5, nous avons donné les étapes de la démonstration du théorème dans chacun de ces cas, puis démontré les étapes intermédiaires au chapitre 6, encore une fois dans chacun des cas envisagés. Ceci rend ce mémoire assez complexe, et c'est pourquoi nous proposons au lecteur voulant parcourir le trajet minimal pour savoir fermer l'orbite d'un point récurrent de se limiter dans un premier temps au cas des difféomorphismes quelconques en lisant :

- l'énoncé du théorème et les commentaires le concernant (section 2.1) ;
- un résultat perturbatif (énoncé en proposition 5.1.1 et démontré en section 6.1) ;
- un théorème algébrique énoncé en section 6.2 et démontré en section 6.3 ;
- un résultat concernant les suites de points (proposition 5.2.1 démontrée en section 6.2) ;
- la démonstration du « closing lemma », en section 5.3.

Comprendre ce qui se passe dans les autres cas devient alors beaucoup plus facile (en particulier, c'est le même théorème algébrique qui sert dans chaque cas).

### 1.6. Remerciements

Je voudrais remercier M. Herman pour m'avoir constamment encouragée à écrire ce travail. Ses conseils m'ont permis d'éviter bien des embûches. Je voudrais aussi remercier J.-C. Yoccoz, qui m'a aidé à réarranger la démonstration de J. Mai afin de la rendre plus compréhensible, et qui m'a donné l'énoncé de la proposition 4.2.5.a. Enfin, je tiens aussi à remercier le rapporteur anonyme pour ses remarques. La section 1.5 résulte en particulier d'une de ses suggestions.

## CHAPITRE 2

### ÉNONCÉS DU « CLOSING LEMMA »

On supposera que  $M$  est munie d'une distance riemannienne  $d$  et  $B_\varepsilon(x)$  désignera la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ .

#### 2.1. Sans homologie

On travaillera dans les espaces suivants :

- $D = \text{Diff}^k(M)$ ,  $\text{Diff}_\omega^k(M)$  ou  $\text{Diff}_V^k(M)$  (ensemble des difféomorphismes, ou des difféomorphismes préservant une forme symplectique  $\omega$ , ou une forme volume  $V$  – et dans ce dernier cas on suppose que  $\dim(M) \geq 2$  –, de classe  $C^k$  où  $k \geq 1$ ) sera muni de la topologie  $C^1$  ;
- $F = F^k(M)$  (ensemble des flots de classe  $C^k$ ) sera muni de la topologie  $C^1$  ;
- $CV = X^k(M)$  ou  $X_V^k(M)$  (ensemble des champs de vecteurs, ou des champs de vecteurs préservant une forme volume de classe  $C^k$  où  $k \geq 1$  quand  $\dim(M) \geq 3$ ) sera muni de la topologie  $C^1$ .

De plus, si on fixe un difféomorphisme  $f$  (resp. un flot  $(\varphi_t)$ , resp. un champ de vecteurs  $X$  de flot  $(\varphi_t)$ ), on notera  $M(f)$  (resp.  $M((\varphi_t))$ , resp.  $M(X)$ ) l'ensemble des points  $p \in M$  tels que la suite  $(f^n p)_{n \geq 0}$  a une valeur d'adhérence (resp. tels qu'il existe une suite de réels  $(T_n)$  tendant vers  $+\infty$  telle que  $(\varphi_{T_n}(p))$  converge. On notera alors  $\omega(p)$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(f^n p)_{n \geq 0}$  (resp. l'ensemble des limites des suite  $(\varphi_{T_n}(p))$  où  $(T_n)$  est choisie comme décrit ci-dessus).

Remarquons que l'ensemble  $M(f)$  (resp.  $M((\varphi_t))$ , resp.  $M(X)$ ) contient l'ensemble des points positivement récurrents ; de plus, quand  $M$  est compacte, cet ensemble est égal à  $M$  (car dans ce cas toute suite à valeurs dans  $M$  admet une valeur d'adhérence).

CLOSING LEMMA POUR LES DIFFÉOMORPHISMES. — Soit  $f \in D$ ,  $p \in M(f)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $f$  dans  $D$  (donc en topologie  $C^1$ ). Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$

et un entier  $\alpha \geq 1$  tels que si  $x, f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ , alors il existe

- des entiers  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 \leq m_1 + \alpha \leq m_2 \leq m$ ,
- $g \in U$

tels que :

- (0)  $f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho\bar{r}}(p)$  ;  
 (i)  $\forall j \in [\alpha, m_2 - m_1], g^j(f^{m_2} x) = f^j(f^{m_1} x)$   
 (donc en particulier  $g^{m_2 - m_1}(f^{m_2} x) = f^{m_2} x$ ) ;  
 (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_\varepsilon(f^k p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;  
 (iii)  $\forall i \in [0, \alpha], d(g^i(f^{m_2}(x)), f^i(f^{m_1} x)) < \varepsilon$ .

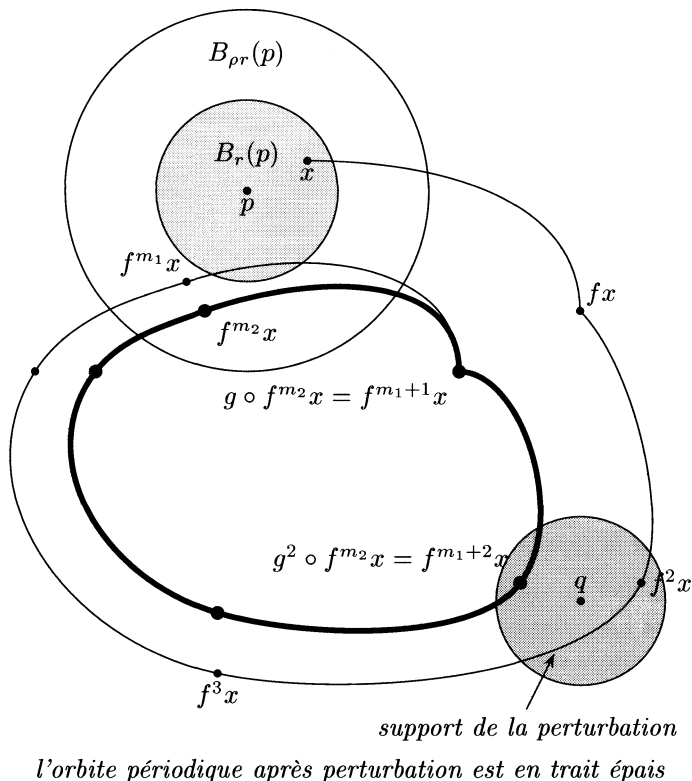


Figure 1

Que signifie cet énoncé? Étant donnée une « petite » boule  $B$  centrée en  $p$ , dès qu'une orbite passe et repasse dans  $B$  (i.e.  $x, f^m x \in B$ ), il existe un « morceau » intermédiaire de cette orbite (i.e.  $\{f^j x \mid m_1 \leq j \leq m_2\}$ ) qui va d'un point  $f^{m_1} x$

compris dans la boule  $\hat{B}$  «homothétique» de la boule  $B$  par une homothétie de rapport  $\rho$  et de centre  $p$  à un point  $f^{m_2}x$  de cette même boule  $\hat{B}$ , et il existe une perturbation  $g$  de  $f$  (la perturbation étant à support dans  $B_\varepsilon(q)$ ) ayant une orbite périodique (démarrant en un point  $y$ ) proche de  $(f^j x)_{m_1 \leq j \leq m_2}$  en ce sens que :

$$\forall j \in [0, m_2 - m_1], \quad d(f^j(f^{m_1}x), g^j y) < \varepsilon,$$

$m_2 - m_1$  étant une période de  $y$  pour  $g$ .

Pour déduire de ce résultat l'existence d'orbites périodiques, il faut de plus supposer que le point est non errant. Dans ce cas, en effet, on peut toujours trouver  $x$  comme dans l'énoncé (*i.e.* dont l'orbite repasse près de  $p$ ) et donc en déduire l'existence d'une orbite périodique démarrant au voisinage de  $p$  pour un difféomorphisme perturbé.

Remarquons qu'on pourrait donner un énoncé concernant les points négativement récurrents (il suffit de changer  $f$  en  $f^{-1}$ ). Une telle remarque est aussi valable pour les flots et les champs de vecteurs ; nous ne l'avons pas fait pour ne pas alourdir le texte.

Dans le cas où  $D = \text{Diff}_V(M)$ , le résultat serait faux en dimension 1. En effet, quand  $M = \mathbf{S}^1$  est le cercle,  $D$  est alors l'ensemble des rotations et le «closing lemma» est clairement faux en des rotations irrationnelles (on ne peut transformer une rotation irrationnelle en une rotation rationnelle en faisant une perturbation à support contenu dans un petit intervalle).

DÉFINITION 2.1.1. — Soit  $(M, \nu)$  une variété munie d'une forme volume ou d'une forme symplectique exacte :  $\nu = d\lambda$  (on dit alors que  $(M, \nu)$  est *exacte volume* ou *exacte symplectique*). On dit qu'un difféomorphisme  $f$  de  $M$  est :

- *exact symplectique* quand  $\nu$  est une forme symplectique et que  $f^*\lambda - \lambda$  est une 1-forme exacte (en particulier, un difféomorphisme exact symplectique est symplectique) ;
- *exact volume* quand  $\nu$  est une forme volume et que  $f^*\lambda - \lambda$  est une forme exacte (en particulier, un difféomorphisme exact volume préserve le volume).

On note alors  $\text{Diff}_{0,\nu}^k(M)$  le groupe des difféomorphismes exacts symplectiques (resp. exacts volume) de classe  $C^k$  de  $M$  muni de la topologie  $C^1$ . Par exemple, un fibré cotangent muni de la forme symplectique qui est la dérivée extérieure de la 1-forme de Liouville est une variété exacte symplectique.

Remarquons que les perturbations que l'on fait dans l'énoncé du «closing lemma» pour les difféomorphismes sont toutes à support dans un ouvert simplement connexe. Or, une perturbation préservant le volume (resp. symplectique) à support simplement connexe d'un difféomorphisme exact volume (resp. exact symplectique) est exact volume (resp. exact symplectique). Aussi :

COROLLAIRE 2.1.2. — Soient  $(M, \nu)$  une variété exacte volume de dimension supérieure ou égale à 2 (resp. exacte symplectique) de classe  $C^\infty$ ,  $f$  un difféomorphisme



exact volume (resp. exact symplectique) de classe  $C^k$  de  $M$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ),  $p \in M(f)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}_{0,\nu}^k(M)$  (donc en topologie  $C^1$ ). Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et un entier  $\alpha \geq 1$  tels que si  $x$ ,  $f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ , alors il existe

- deux entiers  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 \leq m_1 + \alpha \leq m_2 \leq m$ ,
- $g \in U$

tels que :

- (0)  $f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall j \in [\alpha, m_2 - m_1]$ ,  $g^j(f^{m_2} x) = f^j(f^{m_1} x)$   
(donc en particulier  $g^{m_2 - m_1}(f^{m_2} x) = f^{m_2} x$ ) ;
- (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_\varepsilon(f^k p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall i \in [0, \alpha]$ ,  $d(g^i(f^{m_2}(x)), f^i(f^{m_1} x)) < \varepsilon$ .

Pour énoncer le «closing lemma» pour les flots ou les champs de vecteurs, on a besoin de quelques notations.

Chaque fois que le champ de vecteurs (associé à un élément de  $F$  ou élément de  $CV$ ) s'appellera  $X$ , on notera  $C$  l'ensemble de ses zéros et  $(\varphi_t)$  son flot. Sur  $M \setminus C$ , on peut construire une famille  $\Pi(x)$  de petits morceaux d'hypersurfaces contenant  $x$ , transverse à  $X$  et dépendant de façon  $C^1$  de  $x$ . On supposera de plus que  $\Pi(x)$  est une boule ouverte centrée en  $x$  pour la distance induite sur  $\Pi(x)$ , dont on notera  $r_x$  le rayon, et que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_x & : [-r_x, r_x] \times \Pi(x) \longrightarrow M \\ & (t, y) \longmapsto \varphi_t(y) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme sur son image, notée  $P(x)$  (en d'autres termes,  $P(x)$  est une vraie boîte de flot) ; on peut choisir  $r_x$  continûment en fonction de  $x$ . De plus,  $\Pi_\delta(x) = \{y \in \Pi(x) \mid d(x, y) < \delta\}$  et  $P_\delta(x) = \Phi_x([-\delta, \delta] \times \Pi_\delta(x))$ .

CLOSING LEMMA POUR LES FLOTS. — Soient  $\varphi = (\varphi_t) \in F$  (de champ de vecteurs associé  $X$ ),  $p \in M((\varphi_t))$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  (donc en topologie  $C^1$ ). Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $x$ ,  $\varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $\psi = (\psi_t) \in U$  (de champ de vecteurs associé  $Y$ )

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1]$ ,  $\psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x$ ) ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;

(iii)  $\forall t \in [0, \alpha], d(\psi_t(\varphi_{T_2}x), \varphi_t(\varphi_{T_1}x)) < \varepsilon$ .

CLOSING LEMMA POUR LES CHAMPS DE VECTEURS. — Soient  $X \in CV$  (de flot associé  $(\varphi_t)$ ),  $p \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  (donc en topologie  $C^1$ ). Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < t_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $T_3 > 0$ ,
- $Y \in U$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ),
- un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que pour tout  $t \in [0, T_2 - T_1]$  on ait  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1}x, \varphi_{T_2}x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1], \psi_{f(t)}(\varphi_{T_2}x) = \varphi_t(\varphi_{T_1}x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2}x) = \varphi_{T_2}x$ ) ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, \alpha], d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2}x), \varphi_t(\varphi_{T_1}x)) < \varepsilon$   
(en reparamétrant le flot dans les ouverts considérés dans les cas où les flots ou champs de vecteurs sont quelconques, on peut s'arranger pour que  $T_3 = T_2 - T_1$ , mais un tel paramétrage n'est plus possible dans le cas où un volume ou une forme symplectique est préservé).

Rappelons que d'après le théorème de récurrence de Poincaré, si  $\mu$  est une mesure invariante finie,  $\mu$ -presque tout point de  $M$  est récurrent. De plus, les seuls points où on peut espérer perturber l'orbite (et non seulement le point) en une orbite périodique sont les points récurrents. Si alors on suppose que  $p$  est récurrent, on a fait un peu mieux que rendre le point  $p$  périodique : on a approximé un « bout » de son orbite (celui qui va de  $f^{m_1}p$  à  $f^{m_2}p$  dans le cas des difféomorphismes, celui qui va de  $\varphi_{T_1}(p)$  à  $\varphi_{T_2}(p)$  dans le cas des flots ou des champs de vecteurs) par une orbite périodique. Le problème est qu'on souhaite faire démarrer le bout d'orbite qu'on approxime en  $p$ . Ce sera l'objet du lemme de fermeture d'orbite.

## 2.2. Avec homologie

Dans toute la section 2.2,  $(M, \omega)$  sera supposée symplectique et de  $\pi_1$  de type fini et pour  $k \geq 1$ ,  $CV$  sera l'ensemble des champs de vecteurs symplectiques de classe  $C^k$  de  $M$ . Cet ensemble sera muni de la topologie  $C^1$ .

DÉFINITION 2.2.1. — Soit  $\lambda$  une 1-forme différentielle fermée de  $M$ .  $\lambda$  est dite *monogène par intégration* si  $\{\int_\gamma \lambda \mid \gamma \text{ lacet de } M\}$  est un sous-groupe monogène de  $\mathbf{R}$  (ce qui est équivalent en fait à dire que c'est un sous-groupe discret de  $\mathbf{R}$ ).

DÉFINITION 2.2.2. — Si  $\alpha \in H^1(M)$  (premier groupe de cohomologie de  $M$ ),  $\alpha$  est dite *monogène par intégration* si  $\alpha H_1(M, \mathbf{Z})$  est un sous-groupe monogène de  $\mathbf{R}$ .

Remarquons que  $\alpha$  est monogène par intégration si et seulement si toute 1-forme différentielle  $\lambda$  telle que  $[\lambda] = \alpha$  est monogène par intégration si et seulement si il existe une 1-forme différentielle  $\lambda$  monogène par intégration telle que  $[\lambda] = \alpha$ .

Remarquons aussi que pour vérifier qu'une 1-forme différentielle fermée  $\lambda$  est monogène par intégration, il suffit de vérifier pour une base  $B$  de  $H_1(M; \mathbf{Z})$  que le rapport de deux valeurs quelconques de  $[\lambda] \cdot B$  est rationnel.

L'intérêt des formes différentielles monogènes par intégration est qu'elles sont en un certain sens «exactes» :

PROPOSITION 2.2.3. — *Soit  $\lambda$  une forme différentielle fermée monogène par intégration. Alors, il existe  $a \geq 0$  qui ne dépend que de la classe de cohomologie de  $\lambda$  et une fonction  $h : M \rightarrow \mathbf{R}/a\mathbf{Z}$  telle que  $dh = \lambda$ .*

Remarquons que si  $a = 0$ , alors  $\lambda$  est exacte.

*Démonstration de la proposition.* — Soit  $a$  un générateur du groupe monogène  $\{\int_\gamma \lambda \mid \gamma \text{ lacet de } M\}$ . Il est clair que  $a$  ne dépend que de la classe de cohomologie de  $\lambda$ .

Considérons le revêtement universel  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  de  $M$  et posons  $\tilde{\lambda} = p^* \lambda$ . Comme  $\widetilde{M}$  est simplement connexe,  $\tilde{\lambda}$  est exacte, et donc il existe une fonction  $\tilde{h} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $\tilde{\lambda} = d\tilde{h}$ .

Soient alors  $(x, y) \in \widetilde{M}^2$  tels que  $p(x) = p(y)$ . Soit  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$  une courbe joignant  $x$  à  $y$  et posons  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  ( $\gamma$  est donc fermée). Alors :

$$\tilde{h}(y) - \tilde{h}(x) = \int_{\tilde{\gamma}} \tilde{\lambda} = \int_\gamma \lambda \in a\mathbf{Z}$$

Il existe donc  $h : \widetilde{M}/p = M \rightarrow \mathbf{R}/a\mathbf{Z}$  telle que  $h \circ p = \pi \circ \tilde{h}$  où  $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/a\mathbf{Z}$  est la projection canonique. Il est alors clair que  $dh = \lambda$ .  $\square$

Si maintenant  $X$  est un champ de vecteurs de  $CV$  de flot associé  $(\varphi_t)$ ,  $i_X \omega$  est une 1-forme différentielle fermée puisque  $d(i_X \omega) = (d/dt)\varphi_t^* \omega = 0$ . On peut lui appliquer la proposition :

COROLLAIRE 2.2.4. — *Soit  $X$  un champ de vecteur de  $CV$  tel que  $i_X \omega$  est monogène par intégration. Alors, il existe  $a \geq 0$  qui ne dépend que de la classe de cohomologie de  $i_X \omega$  et une fonction  $h : M \rightarrow \mathbf{R}/a\mathbf{Z}$  telle que  $dh = i_X \omega$ .*

*En particulier, si  $(\varphi_t)$  désigne le flot de  $X : h \circ \varphi_t = h$ .*

*On dit alors que  $X$  est pseudo-hamiltonien de pseudo-hamiltonien  $h$ .*

Supposons par exemple que  $M = \mathbf{T}^{2n}$  soit muni de sa forme symplectique usuelle. Les flots engendrés par une rotation rationnelle (i.e.  $\varphi_t = R_{t\alpha}$  où  $\alpha$  est rationnel non nul et  $R_\beta(x) = x + \beta$ ) sont pseudo-hamiltoniens, mais pas hamiltoniens.

Remarquons que quand  $a = 0$ ,  $X$  ou  $(\varphi_t)$  est en réalité hamiltonien de hamiltonien  $h$ .

DÉFINITION 2.2.5. — On définit pour toute classe de cohomologie  $a$  de  $M$  :

$$CV_a = \{X \in CV \mid [i_X \omega] = a\}.$$

Désormais, si  $p \in M$  n'est pas critique, si  $p' \in \Pi(p)$ , on notera  $\Pi_r(p'; p)$  la boule centrée en  $p'$  de rayon  $r$  dans  $\Pi(p)$ . On a alors :

CLOSING LEMMA POUR LES CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES

Soit  $a \in H^1(M)$  une classe de cohomologie monogène par intégration. Soient  $X \in CV_a$  (de flot associé  $(\varphi_t)$  et de pseudo-hamiltonien associé  $H$ ),  $p \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $X$  dans  $CV_a$ . Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$ ,  $\alpha > 0$  et un voisinage  $W$  de  $p$  dans  $\Pi(p)$  tels que si  $x, \varphi_{T_1} x \in \Pi_{\bar{r}}(p'; p) \cap H^{-1}(\{H(p')\})$  pour  $p' \in W$ ,  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 \leq T_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $T_3 > 0$ ,
- $Y \in U$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ),
- un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \longrightarrow [0, T_3]$  tel que pour tout  $t \in [0, T_2 - T_1]$  on ait  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p'; p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1], \psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x$ ) ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p') \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, \alpha], d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t(\varphi_{T_1} x)) < \varepsilon$ .

On peut bien entendu immédiatement déduire de l'énoncé précédent un énoncé qui ne fait plus intervenir  $p'$ , plus proche des précédents énoncés de « closing lemma » que nous avons donné. Nous avons préféré donner celui que nous démontrons effectivement, qui souligne qu'on va en fait raisonner dans chaque surface d'énergie pour faire nos perturbations. Par contre, dans le prochain énoncé, nous ne ferons plus apparaître  $p'$ .

On a un « closing lemma » dans chaque  $CV_a$  où  $a$  est une classe de cohomologie monogène par intégration. Or,  $\mathbf{Q}^n$  étant dense dans  $\mathbf{R}^n$  et comme on a supposé  $H_1(M)$  de type fini, l'ensemble des classes de cohomologie monogènes par intégration est dense dans  $H^1(M)$  (puisqu'il contient l'ensemble des classes de cohomologie à coefficients rationnels). On en déduit que l'ensemble des formes différentielles monogènes par intégration est dense dans l'ensemble des formes différentielles, et donc que l'ensemble des champs de vecteurs pseudo-hamiltoniens est dense dans l'ensemble des champs de vecteurs symplectiques. On en déduit donc pour tout champ de vecteurs symplectique l'existence d'une suite de champs de vecteurs de classe  $C^k$  tendant en topologie  $C^k$  vers

ce champ de vecteurs et en lesquels on peut appliquer le «closing lemma» précédent. Par contre, nous donnerons en 3.2 un exemple de champ de vecteurs symplectique pour lequel le «closing lemma» est faux.

Dans le cas où  $H_1(M)$  est monogène, on sait même que toute classe de cohomologie est monogène par intégration et donc :

**COROLLAIRE 2.2.6.** — *Supposons que  $H_1(M)$  soit monogène. Soient  $X \in CV$  (de flot associé  $(\varphi_t)$  et de pseudo-hamiltonien associé  $H$ ),  $p \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  (donc en topologie  $C^1$ ).*

*Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe*

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 \leq T_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $T_3 > 0$ ,
- $Y \in U$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ),
- un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que pour tout  $t \in [0, T_2 - T_1]$  on ait  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1]$ ,  $\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x$ ) ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, \alpha]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t(\varphi_{T_1} x)) < \varepsilon$ .

Le résultat précédent s'applique par exemple quand  $M = \mathbf{T} \times \mathbf{R}^{2n-1}$ .

### 2.3. Cas des hamiltoniens

On suppose que  $(M, \omega)$  est symplectique, sans faire d'hypothèse sur son  $\pi_1$ . Quand  $a = 0$ , on déduit du paragraphe précédent un énoncé pour les champs de vecteurs hamiltoniens. Nous allons donner tout d'abord l'énoncé qui fait intervenir les surfaces d'énergie, énoncé intéressant quand on s'intéresse aux problèmes concernant les restrictions aux surfaces d'énergie (par exemple quand on veut savoir si les orbites périodiques d'une surface d'énergie donnée sont denses dans cette surface d'énergie) ; ensuite, nous en déduisons un énoncé qui ne fait plus intervenir les surfaces d'énergie, énoncé intéressant quand par exemple on veut créer des orbites périodiques au voisinage d'un point non errant pour le flot hamiltonien, mais pas forcément non errant pour la restriction du flot hamiltonien à sa surface d'énergie.

#### CLOSING LEMMA POUR LES HAMILTONIENS DANS LES SURFACES D'ÉNERGIE

*Soient  $H$  un hamiltonien de classe  $C^k$  ( $2 \leq k \leq \infty$ ) de  $M$ , de champ de vecteurs hamiltonien associé  $X$  et de flot associé  $(\varphi_t)$ ,  $p \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un*

voisinage de  $H$  en topologie  $C^2$ . Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$ ,  $\alpha > 0$  et  $W$  voisinage de  $p$  dans  $\Pi(p)$  tels que si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p')$  pour  $p' \in W$ ,  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 \leq T_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $T_3 > 0$ ,
- $H' \in U$  de classe  $C^k$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ),
- un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que pour tout  $t \in [0, T_2 - T_1]$  on ait  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$

tels que

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p')$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1]$ ,  $\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x$ ) ;
- (ii)  $H = H'$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p') \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, \alpha]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t(\varphi_{T_1} x)) < \varepsilon$ .

On en déduit immédiatement :

CLOSING LEMMA POUR LES HAMILTONIENS. — Soient  $H$  un hamiltonien de classe  $C^k$  ( $2 \leq k \leq \infty$ ) de  $M$ , de champ de vecteurs hamiltonien associé  $X$  et de flot associé  $(\varphi_t)$ ,  $p \in M(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$  et  $U$  un voisinage de  $H$  en topologie  $C^2$ . Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et  $\alpha > 0$  tels que si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$ ,  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 \leq T_1 + \alpha < T_2 \leq T$ ,
- $T_3 > 0$ ,
- $H' \in U$  de classe  $C^k$  (de flot associée noté  $(\psi_t)$ ),
- un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que pour tout  $t \in [0, T_2 - T_1]$  on ait  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1]$ ,  $\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$   
(donc en particulier  $\psi_{T_3}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x$ ) ;
- (ii)  $H = H'$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\varphi_t p) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, \alpha]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t(\varphi_{T_1} x)) < \varepsilon$ .

Pour déduire cet énoncé du précédent, il suffit de remarquer que si on choisit  $r$  et  $W$  assez petits si  $\bar{r} \in ]0, r]$  :

$$\forall x \in \Pi_{\bar{r}}(p), \quad \exists p' \in W \mid x \in \Pi_{\bar{r}}(p'; p) \cap H^{-1}(H(p')) \text{ et } \Pi_{\rho\bar{r}}(p'; p) \subset \Pi_{2\rho\bar{r}}(p).$$



## CHAPITRE 3

### LES THÉORÈMES DE DENSITÉ COMPRENANT UN LEMME DE FERMETURE D'ORBITE

Comme au chapitre 2, on supposera que  $M$  est munie d'une distance riemannienne  $d$  et  $B_\varepsilon(x)$  désignera la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ . Rappelons :

DÉFINITION 3.0.1. — Soit  $f$  un homéomorphisme d'une variété  $M$ , et  $p \in M$ . Alors :

- si  $p \in M$ , son ensemble  $\omega$ -limite, noté  $\omega(p)$  est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(f^n(p))_{n \geq 0}$  ; son ensemble  $\alpha$ -limite, notée  $\alpha(p)$ , est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(f^{-n}(p))_{n \geq 0}$ .
- $p$  est *positivement récurrent* pour  $f$  si  $p \in \omega(p)$  ;
- $p$  est *négativement récurrent* pour  $f$  si  $p \in \alpha(p)$  ;
- $p$  est *récurrent* s'il est positivement récurrent ou négativement récurrent ;
- $p$  est *non errant* s'il existe une suite de points  $p_n \in M$  et une suite d'entiers strictement positifs  $k_n$  tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{k_n} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p.$$

On a des définitions analogues pour les flots en remplaçant  $n \in \mathbf{N}$  par  $t \in \mathbf{R}$ . Un point récurrent est toujours non errant, et un point périodique est toujours positivement et négativement récurrent.

Rappelons aussi qu'un homéomorphisme d'une variété compacte a toujours au moins un point qui est à la fois positivement et négativement récurrent (pour voir cela, il suffit de considérer un compact  $K$  invariant minimal ; si  $p \in K$ , l'ensemble  $\omega$ -limite et l'ensemble  $\alpha$ -limite de  $p$  sont des compacts invariants inclus dans  $K$ , donc égaux à  $K$  et on a bien :  $p \in \omega(p) \cap \alpha(p)$ ).

Rappelons aussi que le théorème de récurrence de Poincaré énonce que si  $\mu$  est une mesure finie sur  $M$  invariante par l'homéomorphisme  $f$ , alors  $\mu$ -presque tout point de  $M$  est récurrent.



### 3.1. Sans homologie

Le théorème de densité démontré par C. Pugh et C. Robinson dans [15] est :

THÉORÈME DE DENSITÉ (C. Pugh & C. Robinson). — *Soit  $M$  une variété (resp. variété de dimension supérieure ou égale à 2 munie d'une forme volume  $V$ , resp. variété munie d'une forme symplectique  $\omega$ ) de classe  $C^\infty$ .*

- (1) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $\text{Diff}^1(M)$  (resp.  $\text{Diff}_V^1(M)$ , resp.  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ ) tel que pour tout  $f$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans l'ensemble des points  $p$  non errants de  $f$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .*
- (2) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $F^1(M)$  tel que pour tout  $\varphi$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $\varphi$  est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  de  $\varphi$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .*
- (3) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $X^1(M)$  (resp.  $X_V^1(M)$  si  $\dim M \geq 3$ ) tel que pour tout  $X$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  de  $X$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .*

Remarquons que si  $M$  est compacte, l'hypothèse  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$  est vérifiée par tous les points  $p$  de  $M$ , et donc on peut l'effacer de l'énoncé.

De même, si  $p$  est récurrent, on a  $p \in \alpha(p) \cup \omega(p)$ . On a donc :

COROLLAIRE 3.1.1 (C. Pugh & C. Robinson). — *Soit  $M$  une variété (resp. variété de dimension supérieure ou égale à 2 munie d'une forme volume  $V$ , resp. variété munie d'une forme symplectique  $\omega$ ) de classe  $C^\infty$ .*

- (1) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $\text{Diff}^1(M)$  (resp.  $\text{Diff}_V^1(M)$ , resp.  $\text{Diff}_\omega^1(M)$ ) tel que pour tout  $f$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans l'ensemble des points récurrents de  $f$ .*
- (2) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $F^1(M)$  tel que pour tout  $\varphi$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $\varphi$  est dense dans l'ensemble des points récurrents de  $\varphi$ .*
- (3) *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $X^1(M)$  (resp.  $X_V^1(M)$  si  $\dim M \geq 3$ ) tel que pour tout  $X$  de  $G$ , l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points récurrents de  $X$ .*

Dans le cas particulier où  $M$  est munie d'une forme volume  $V$  (c'est par exemple le cas quand c'est une variété symplectique) telle que  $M$  soit de volume fini, presque tout point de  $M$  est récurrent, et donc le théorème de densité donne un résultat de densité de l'ensemble des points périodiques dans  $M$ .

Nous avons donné un énoncé concernant l'ensemble des difféomorphismes, flots ou champs de vecteurs de classe  $C^1$  car ces espaces, munis de la topologie  $C^1$ , sont des espaces de Baire, donc dans lesquels des intersections dénombrables d'ouverts denses sont denses. Ce n'est pas le cas de l'ensemble des difféomorphismes, flots ou champs de vecteurs de classe  $C^k$  pour un  $k \geq 2$  muni de la topologie  $C^1$ .

On peut se demander si les orbites périodiques que nous créons en perturbant le difféomorphisme (resp. flot, resp. champ de vecteurs) considéré à l'aide du « closing lemma » sont proches des orbites de la transformation initiale. Plus précisément, définissons :

DÉFINITION 3.1.2

1. Désignons par  $D$  l'un des ensembles  $\text{Diff}^k(M)$ ,  $\text{Diff}_\omega^k(M)$  ou  $\text{Diff}_V^k(M)$  (et dans ce cas on suppose  $\dim M \geq 2$ ) où  $k \geq 1$  muni de la topologie  $C^1$ . Pour tout  $f \in D$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $U$  voisinage de  $f$  dans  $D$  (donc en topologie  $C^1$ ), soit  $\Sigma(U, \varepsilon)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $g \in U$  et  $y \in M$  vérifiant :
  - (i)  $y$  est un point périodique de  $g$  de période notée  $m$ ;
  - (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m} (B_\varepsilon(g^k y) \cap B_\varepsilon(y))$ ;
  - (iii)  $\forall i \in [0, m]$ ,  $d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$ .
2. Désignons alors par  $F$  l'ensemble  $F^k(M)$  où  $k \geq 1$ . Pour tout  $\varphi \in F$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $U$  voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  (donc en topologie  $C^1$ ), soit  $\Sigma(U, \varepsilon)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $\psi \in U$ ,  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :
  - (i)  $y$  est un point périodique de  $\psi$  de période  $T_0$ ;
  - (ii)  $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(y))$ ;
  - (iii)  $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .
3. Désignons par  $CV$  l'un des ensemble  $X^k(M)$ ,  $X_V^k(M)$  (et dans ce cas on suppose que  $\dim M \geq 3$ ) où  $k \geq 1$  muni de la topologie  $C^1$ . Pour tout  $X \in CV$  (de flot associé noté  $\varphi$ ),  $\varepsilon > 0$  et  $U$  voisinage de  $X$  dans  $CV$  (donc en topologie  $C^1$ ), soit  $\Sigma(U, \varepsilon)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $Y \in U$  (de flot associé noté  $\psi$ ),  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :
  - (i)  $y$  est un point périodique de  $Y$  de période  $T_0$ ;
  - (ii)  $Y = X$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(y))$ ;
  - (iii)  $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .

Dans chacun des cas précédents,  $\Sigma(f)$  (resp.  $\Sigma(\varphi)$ , resp.  $\Sigma(X)$ ) désignera  $\bigcap \Sigma(U, \varepsilon)$ . De plus,  $R(f)$  (resp.  $R(\varphi)$ , resp.  $R(X)$ ) désignera l'ensemble des points positivement récurrents de  $f$  (resp.  $\varphi$ , resp.  $X$ ). En d'autres termes,  $\Sigma(U, \varepsilon)$  est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels qu'on peut, en faisant une petite perturbation de la transformation considérée (difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs) à support dans  $U$  et dans  $B_\varepsilon(y) \subset B_{2\varepsilon}(x)$ , transformer l'orbite de  $x$  en une orbite périodique  $\varepsilon$ -proche.

On a alors :  $\Sigma(\alpha) \subset R(\alpha)$  dans tous les cas considérés. On peut alors préciser :

LEMME DE FERMETURE D'ORBITE. — *Dans tous les cas envisagés dans la définition précédente :*

- (1)  $R(\alpha)$  est un  $G_\delta$  de  $M$ , donc un espace de Baire ;  
 (2)  $\Sigma(\alpha)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(\alpha)$ .

Quitte à changer  $\alpha$  en son opposé, on a un résultat analogue pour les points négativement récurrents ; bien sûr, dans ce cas, on approximera un bout de l'orbite négative de  $x$  et non un bout de son orbite positive.

En fait, on peut imposer dans certains cas à la perturbation que nous faisons d'être à support dans une petite boule qui n'est plus centrée en  $x$ . Précisons cela :

### DÉFINITION 3.1.3

- Désignons par  $D$  l'un des ensembles  $\text{Diff}^k(M)$ ,  $\text{Diff}_\omega^k(M)$  ou  $\text{Diff}_V^k(M)$  (et dans ce cas on suppose  $\dim M \geq 2$ ) où  $k \geq 1$  muni de la topologie  $C^1$ . Pour tout  $f \in D$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $U$  voisinage de  $f$  dans  $D$  (donc en topologie  $C^1$ ) et  $q \in M$ , soit  $\Sigma(U, \varepsilon; q)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $g \in U$  et  $y \in M$  vérifiant :
  - $y$  est un point périodique de  $g$  de période notée  $m$  ;
  - $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m} (B_\varepsilon(g^k y) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
  - $\forall i \in [0, m]$ ,  $d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$ .
- Désignons alors par  $F$  l'ensemble  $F^k(M)$  où  $k \geq 1$ . Pour tout  $\varphi \in F$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $U$  voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  (donc en topologie  $C^1$ ) et  $q \in M$ , soit  $\Sigma(U, \varepsilon; q)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $\psi \in U$ ,  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :
  - $y$  est un point périodique de  $\psi$  de période  $T_0$  ;
  - $\psi = \varphi$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
  - $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .
- Désignons par  $CV$  l'un des ensemble  $X^k(M)$ ,  $X_V^k(M)$  (et dans ce cas on suppose que  $\dim M \geq 3$ ) où  $k \geq 1$  muni de la topologie  $C^1$ . Pour tout  $X \in CV$  (de flot associé noté  $\varphi$ ),  $\varepsilon > 0$ ,  $U$  voisinage de  $X$  dans  $CV$  (donc en topologie  $C^1$ ) et  $q \in M$ , soit  $\Sigma(U, \varepsilon; q)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $Y \in U$  (de flot associé noté  $\psi$ ),  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :
  - $y$  est un point périodique de  $Y$  de période  $T_0$  ;
  - $Y = X$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
  - $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .

Dans chacun des cas précédents,  $\Sigma(f; q)$  (resp.  $\Sigma(\varphi; q)$ , resp.  $\Sigma(X; q)$ ) désignera  $\bigcap \Sigma(U, \varepsilon; q)$ . De plus,  $R(f; q)$  (resp.  $R(\varphi; q)$ , resp.  $R(X; q)$ ) désignera l'ensemble des points positivement récurrents de  $f$  (resp.  $\varphi$ , resp.  $X$ ) qui contiennent  $q$  dans leur ensemble  $\omega$ -limite. En d'autres termes,  $\Sigma(U, \varepsilon; q)$  est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels

qu'on peut, en faisant une petite perturbation de la transformation considérée (difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs) dans  $U$  à support dans  $B_\varepsilon(q)$ , transformer l'orbite de  $x$  en une orbite périodique  $\varepsilon$ -proche.

LEMME DE FERMETURE D'ORBITE À SUPPORT LOCALISÉ. — *Dans tous les cas envisagés dans la définition précédente :*

- (1)  $R(\alpha; q)$  est un  $G_\delta$  de  $M$ , donc un espace de Baire ;
- (2)  $\Sigma(\alpha; q)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(\alpha; q)$ .

En d'autres termes, l'ensemble des points dont on peut refermer l'orbite en faisant une petite perturbation à support au voisinage de  $q$  est dense dans l'ensemble des points positivement récurrents qui contiennent  $q$  dans leur ensemble  $\omega$ -limite.

Démontrons maintenant les trois théorèmes que nous venons d'énoncer :

*Démonstration du théorème de densité.* — Notons  $E$  l'ensemble dans lequel on travaille (qui est un ensemble de difféomorphismes, flots ou champs de vecteurs) muni de la topologie  $C^1$ . C'est un espace de Baire.

Soit  $(U_n)$  une base dénombrable d'ouverts de  $M$ . On dira que  $\alpha \in E$  vérifie la propriété  $P_n$  si :

$$P_n(\alpha) : \langle U_n \text{ contient un point périodique ou ne contient pas de point non errant } p \text{ tel que } \alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset \rangle$$

On notera :  $F_n = \{ \alpha \in E \mid P_n(\alpha) \text{ est vraie} \}$ .

Montrons que  $F_n$  contient un ouvert dense. Soit  $\alpha \in E$  et  $W$  un voisinage ouvert de  $\alpha$  dans  $E$ . Deux cas se présentent :

- (1) pour tout  $\beta \in W$ ,  $\beta$  n'a pas de point (non errant)  $p$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$  dans  $U_n$ . Dans ce cas,  $W \subset F_n$  ;
- (2) il existe  $\beta \in W$  tel que  $\beta$  a un point non errant  $p$  dans  $U_n$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ . Quitte à changer  $\alpha$  en  $\alpha^{-1}$  (ce qui correspond au champ de vecteurs opposé quand on raisonne avec des champs de vecteurs), on peut supposer qu'il existe  $q \in \omega(p)$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\varepsilon(p) \subset U_n$ . Utilisons l'énoncé du « closing lemma » dans le cas envisagé (difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs) pour  $\beta$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $q$  et  $W$ .

On en déduit l'existence de constantes  $r < \varepsilon$ ,  $\rho$  et  $\alpha$  vérifiant les conclusions de ce théorème. Or, comme  $p$  est non errant, il existe  $p' \in B_{r/\rho}(p)$  (ou  $p' \in \Pi_{r/\rho}(p)$ ) dans le cas des flots ou champs de vecteurs) dont l'orbite positive revient dans  $B_{r/\rho}(p)$  (ou  $\Pi_{r/\rho}(p)$ ). Utilisant le « closing lemma » en  $p'$ , on trouve  $\beta' \in W$  ayant un point périodique  $p_0$  dans  $B_r(p)$  (ou  $\Pi_r(p)$ ), donc dans  $U_n$ . Quitte à considérer une petite perturbation de  $\beta'$ , on peut supposer que les multiplicateurs de Floquet de ce point périodique sont différents de 1 (ce qui implique que si on fait une « petite » perturbation  $\beta''$  de  $\beta'$ ,  $\beta''$  a un point périodique proche de ce point

périodique de  $\beta'$ ), et donc qu'il existe un ouvert  $W' \subset W$  dont tout élément a une orbite dans  $U_n$ . Dans ce cas,  $W' \subset F_n$ .

Finalement,  $F_n$  contient un ouvert dense.

L'ensemble  $F = \bigcap F_n$  contient donc un  $G_\delta$  dense de  $E$ . Or,  $F$  est exactement l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'ensemble des orbites périodiques est dense dans l'ensemble des points  $p$  non errants tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .  $\square$

*Démonstration du lemme de fermeture d'orbite.* — Nous ne traiterons que le cas des difféomorphismes, celui des flots et champs de vecteurs étant analogue.

(1) Soit pour tout  $n \geq 1$ ,

$$R_n = \{x \in M \mid \exists m \geq 1, d(f^m x, x) < 1/n\}.$$

Alors,  $R_n$  est ouvert donc  $R(f) = \bigcap R_n$  est un  $G_\delta$  de  $M$ . Or, la variété  $M$  est homéomorphe à un espace métrique complet. Donc l'adhérence  $\overline{R(f)}$  de  $R(f)$  est aussi homéomorphe à un espace métrique complet et est donc de Baire. Donc  $R(f) = \bigcap (R(f) \cap R_n)$ , intersection d'ouverts denses de l'espace de Baire  $\overline{R(f)}$ , est aussi un espace de Baire.

(2) On a déjà remarqué que  $\Sigma(f) \subset R(f)$ . Soit  $(V_n)$  une base de voisinages ouverts de  $f$  et  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Alors :

$$\Sigma(f) = \bigcap_{n,m \geq 0} \left( \Sigma(V_n, \varepsilon_m) \cap R(f) \right).$$

Montrons que  $\Sigma(V_n, \varepsilon_k) \cap R(f)$  est un ouvert dense de  $R(f)$ .

Déjà montrons que si  $\varepsilon > 0$  et si  $U$  est un ouvert, alors  $\Sigma(U, \varepsilon)$  est un ouvert. Soit  $x \in \Sigma(U, \varepsilon)$ . Par définition de  $\Sigma(U, \varepsilon)$ , il existe  $g \in U$ ,  $y \in M$  et  $m \geq 1$  tels que :

- (i)  $y$  est un point périodique de  $g$  de période notée  $m$ ;
- (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m} (B_\varepsilon(g^k y) \cap B_\varepsilon(y))$ ;
- (iii)  $\forall i \in [0, m], d(g^i y, f^i x) < \varepsilon$ .

Soit alors

$$\sigma = \bigcap_{0 \leq i \leq m} f^{-i}(B_\varepsilon(g^i y)).$$

Comme  $f$  est continue,  $\sigma$  est ouvert. De plus, par (iii),  $\sigma$  contient  $x$ . Si maintenant  $x' \in \sigma$ , alors on a :  $\forall i \in [0, m], d(g^i y, f^i x') < \varepsilon$  donc  $x' \in \Sigma(U, \varepsilon)$ . Finalement,  $\sigma \subset \Sigma(U, \varepsilon)$  donc effectivement  $\Sigma(U, \varepsilon)$  est ouvert.

Soit  $x \in R(f)$ . Fixons alors  $\varepsilon < \varepsilon_k$  et  $V_n$ . On trouve à l'aide du «closing lemma» trois constantes  $r > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\alpha$  pour  $x, \varepsilon, V_n$  et  $g = x$ . Soit alors  $\bar{r} \in ]0, \varepsilon/3\rho[$ . Comme  $x$  est positivement récurrent, il existe  $m > 0$  tel que  $f^m x \in B_{\bar{r}}(x) \subset B_{\varepsilon/3\rho}(x)$  et donc par le «closing lemma», il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 \leq m_1 + \alpha \leq m_2 \leq m$  et  $g \in V_n$  tels que :

- (0)  $f^{m_1}x, f^{m_2}x \in B_{\rho\bar{r}}(x)$  ;  
 (i)  $\forall j \in [\alpha, m_2 - m_1], g^j(f^{m_2}x) = f^j(f^{m_1}x)$  ;  
 (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_{\varepsilon/3}(f^k x) \cap B_{\varepsilon/3}(x))$  ;  
 (iii)  $\forall i \in [0, \alpha], d(g^i(f^{m_2}(x)), f^i(f^{m_1}x)) < \varepsilon/3$ .

Si on a choisi  $\bar{r}$  assez petit, on a par continuité de  $f$  l'implication :

$$(\forall y, d(y, x) < \rho\bar{r}) \Rightarrow (\forall i \in [0, \alpha], d(f^i y, f^i x) < \frac{\varepsilon}{3})$$

donc en particulier en  $f^{m_1}x$ , on obtient :

$$\forall i \in [0, \alpha], d(f^i(f^{m_1}x), f^i x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où par (iii) :

$$\forall i \in [0, \alpha], d(g^i(f^{m_2}x), f^i x) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

et par (ii) :  $g = f$  sur :

$$M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_{\varepsilon}(g^i(f^{m_2}x)) \cap B_{\varepsilon}(f^{m_2}x))$$

qui contient  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m_2 - m_1} (B_{\varepsilon}(g^i(f^{m_2}x)) \cap B_{\varepsilon}(f^{m_2}x))$ .

Donc  $f^{m_1}x \in B_{\varepsilon}(x) \cap \Sigma(V_n, \varepsilon_k)$ . Comme de plus  $f^{m_1}x \in R(f)$ , on a donc :

$$B_{\varepsilon}(x) \cap (\Sigma(V_n, \varepsilon_k) \cap R(f)) \neq \emptyset.$$

Donc  $\Sigma(V_n, \varepsilon_k) \cap R(f)$  est un ouvert dense de l'espace de Baire  $R(f)$  et donc  $\Sigma(f)$  est un  $G_{\delta}$  dense de  $R(f)$ .

□

### *Démonstration du lemme de fermeture d'orbite à support localisé*

Nous ne traiterons que le cas des flots, celui des difféomorphismes et champs de vecteurs étant analogue. Fixons donc  $(\varphi_t) \in F$ .

(1) Soit pour tout  $n \geq 1$  :

$$R_n(q) = \{x \in M \mid \exists T \geq 1, \exists T' \geq 1, d(\varphi_T x, x) < 1/n \text{ et } d(\varphi_{T'} x, q) < 1/n\}.$$

Alors,  $R_n(q)$  est ouvert. De plus, si  $x \in \bigcap R_n(q)$ , alors  $x$  est récurrent et deux cas se présentent :

- soit  $q = \varphi_{T'} x$  pour un  $T' \geq 1$  ; dans ce cas, on a bien  $q \in \omega(x)$  ;
- soit  $q \neq \varphi_{T'} x$  pour tout  $T' \geq 1$ , dans ce cas on trouve aussi que  $q \in \omega(x)$ .

Réciproquement, un point de  $R(\varphi; q)$  est bien dans l'intersection de ces ensembles donc  $R(\varphi; q) = \bigcap R_n(q)$  est un  $G_{\delta}$  de  $M$ . C'est donc un espace de Baire (on a montré dans la démonstration précédente qu'un  $G_{\delta}$  de  $M$  est un espace de Baire).

- (2) On a :  $\Sigma(\varphi; q) \subset R(\varphi; q)$ . Soit  $(V_n)$  une base de voisinages ouverts de  $f$  et  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Alors :

$$\Sigma(\varphi; q) = \bigcap_{n, m \geq 0} \left( \Sigma(V_n, \varepsilon_m; q) \cap R(\varphi; q) \right).$$

Montrons que  $\Sigma(V_n, \varepsilon_k; q) \cap R(\varphi; q)$  est un ouvert dense de  $R(\varphi; q)$ .

Déjà montrons que si  $\varepsilon > 0$  et si  $U$  est un ouvert, alors  $\Sigma(U, \varepsilon, q)$  est un ouvert. Soit  $x \in \Sigma(U, \varepsilon, q)$ . Par définition de  $\Sigma(U, \varepsilon, q)$ , il existe  $\psi \in U$ ,  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :

- (i)  $y$  est un point périodique de  $\psi$  de période  $T_0$  ;
- (ii)  $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(q))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .

Soit alors

$$\sigma = \bigcap_{0 \leq t \leq T} \varphi_{-t}(B_\varepsilon(\psi_{f(t)} y)).$$

Montrons que  $\sigma$  est un voisinage de  $x$ . Déjà, par (2)(iii),  $\sigma$  contient  $x$ . De plus, par continuité du flot, pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe  $\alpha_t > 0$  et  $\varepsilon_t > 0$  tels que :

$$\forall u \in ]t - \alpha_t, t + \alpha_t[ \cap [0, T], \quad \varphi_u(B_{\varepsilon_t}(x)) \subset B_\varepsilon(\psi_{f(t)} x).$$

On trouve ainsi un recouvrement du compact  $[0, T]$  par des ensembles de la forme :  $]t - \alpha_t, t + \alpha_t[$ , recouvrement dont on peut extraire un recouvrement fini par les ouverts correspondant à  $t_1, \dots, t_r$ . Si on pose alors  $\varepsilon' = \inf\{\varepsilon_{t_1}, \dots, \varepsilon_{t_r}\}$ , on a :  $B_{\varepsilon'}(x) \subset \sigma$ .

Si maintenant  $x' \in \sigma$ , alors on a :  $\forall t \in [0, T]$ ,  $d(\psi_{f(t)} y, \varphi_t x') < \varepsilon$  donc  $x' \in \Sigma(U, \varepsilon; q)$ . Finalement,  $\sigma \subset \Sigma(U, \varepsilon; q)$  donc effectivement  $\Sigma(U, \varepsilon; q)$  est ouvert.

Soit  $x \in R(\varphi; q)$ . Fixons alors  $\varepsilon < \varepsilon_k$  et  $V_n$ . On trouve à l'aide du « closing lemma » trois constantes  $r > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $\alpha$  pour  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $V_n$  et  $q$ . Soit alors  $\bar{r} \in ]0, \varepsilon/3\rho[$ . Comme  $x$  est récurrent, il existe  $T > 0$  tel que

$$\varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(x) \subset B_{\varepsilon/3\rho}(x)$$

et donc par le « closing lemma », il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que

$$0 \leq T_1 \leq T_1 + \alpha \leq T_2 \leq T,$$

$\psi = (\psi_t) \in U$  (de champ de vecteurs associé  $Y$ ) et  $T_3 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que  $\forall t \in [0, T_2 - T_1]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  ;
- (i)  $\forall t \in [\alpha, T_2 - T_1]$ ,  $\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_t(\varphi_{T_1} x)$  ;

(ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_{\varepsilon/3}(\varphi_t p) \cap B_{\varepsilon/3}(q))$ ;

(iii)  $\forall t \in [0, \alpha]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t(\varphi_{T_1} x)) < \varepsilon/3$ .

Si on a choisi  $\bar{r}$  assez petit, on a par continuité de  $\varphi$  et compacité de  $[0, \alpha]$  l'implication :

$$(\forall y, d(y, x) < \rho \bar{r}) \Rightarrow (\forall t \in [0, \alpha], d(\varphi_t y, \varphi_t x) < \frac{\varepsilon}{3})$$

donc en particulier en  $\varphi_{T_1} x$ , on obtient :

$$\forall t \in [0, \alpha], d(\varphi_{T_1} x, \varphi_t x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

d'où par (2)(iii) :

$$\forall i \in [0, \alpha], d(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x), \varphi_t x) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

et par (2)(ii) :  $X = Y$  sur :  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq \alpha} (B_\varepsilon(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x)) \cap B_{\varepsilon/3}(q))$

qui contient  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_2 - T_1} (B_\varepsilon(\psi_{f(t)}(\varphi_{T_2} x)) \cap B_\varepsilon(q))$ .

Donc  $\varphi_{T_1} x \in B_\varepsilon(x) \cap \Sigma(V_n, \varepsilon_k; q)$ . Comme de plus  $\varphi_{T_1} x \in R(\varphi; q)$ , on a donc :

$$B_\varepsilon(x) \cap (\Sigma(V_n, \varepsilon_k; q) \cap R(\varphi; q)) \neq \emptyset.$$

Donc  $\Sigma(V_n, \varepsilon_k; q) \cap R(\varphi; q)$  est un ouvert dense de l'espace de Baire  $R(\varphi; q)$  et donc  $\Sigma(\varphi; q)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(\varphi; q)$ .

□

### 3.2. Avec homologie

On suppose désormais, sauf pour les énoncés en classe de cohomologie fixée (en particulier ceux concernant les hamiltoniens) que  $(M, \omega)$  est une variété symplectique de classe  $C^\infty$  et  $\pi_1$  de type fini. Pour tout entier  $k \geq 1$  et toute classe de cohomologie  $\alpha \in H^1(M)$ ,  $X_{\omega, \alpha}^k$  désignera l'ensemble des champs de vecteurs symplectiques de classe  $C^k$  de  $M$  tels que  $[i_X \omega] = \alpha$ . On montre alors sans difficulté aucune (les démonstrations, calquées sur celles du théorème de densité et du lemme de fermeture d'orbite de la section 3.1, sont omises ici) :

**THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES DE CLASSE DE COHOMOLOGIE FIXÉE**

*Si  $\alpha$  est monogène par intégration, il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $X_{\omega, \alpha}^1$  tel que pour tout  $X \in G$ , l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points  $p$  non errants de  $X$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .*



LEMME DE FERMETURE D'ORBITE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES DE CLASSE DE COHOMOLOGIE FIXÉE

Si  $\alpha$  est monogène par intégration et si  $X \in X_{\omega, \alpha}^k$ , alors :

- (1)  $R(X)$  est un  $G_\delta$  de  $M$ , donc un espace de Baire ;
- (2)  $\Sigma(X)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(X)$ .

où :

DÉFINITION 3.2.1. — On munit  $X_{\omega, \alpha}^k$  de la topologie  $C^1$ . Pour tout  $X \in X_{\omega, \alpha}^k$  (de flot associé noté  $\varphi$ ),  $\varepsilon > 0$  et  $U$  voisinage de  $X$  dans  $X_{\omega, \alpha}^k$ , soit  $\Sigma(\varepsilon, U)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels qu'il existe  $Y \in U$  (de flot associé noté  $\psi$ ),  $y \in M$ ,  $T_0 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T] \rightarrow [0, T_0]$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $|1 - f'(t)| < \varepsilon$  vérifiant :

- (i)  $y$  est un point périodique de  $Y$  de période  $T_0$  ;
- (ii)  $Y = X$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_0} (B_\varepsilon(\psi_t y) \cap B_\varepsilon(y))$  ;
- (iii)  $\forall t \in [0, T_0]$ ,  $d(\psi_{f(t)}(y), \varphi_t(x)) < \varepsilon$ .

On définit alors  $\Sigma(X) = \bigcap \Sigma(U, \varepsilon)$ . On peut alors souhaiter obtenir un résultat sur  $X_\omega^k$  plutôt que sur  $X_{\omega, \alpha}^k$ . En fait, on a :

THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES

Soit  $M$  une variété compacte. Alors :

- (1) il existe un sous-ensemble dense  $D$  de  $X_\omega^1$  tel que pour tout  $X \in D$ , l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points  $p$  non errants de  $X$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$  ;
- (2) si  $\dim H^1(M, \mathbf{R}) \geq 2$ , il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $X_\omega^1$  tel que pour tout  $X \in G$ ,  $X$  n'a pas d'orbite périodique non homologue à un point.

COROLLAIRE 3.2.2. — Il existe un ouvert  $U$  (en topologie  $C^1$ ) non vide de  $X_\omega^k(\mathbf{T}^{2n})$  et un  $G_\delta$  dense  $G_1$  de  $U$  tel que tout élément de  $G_1$  n'a pas d'orbite périodique.

On a vu en introduction au chapitre 3 que tout difféomorphisme, et par conséquent tout flot, d'une variété compacte a au moins un point récurrent. On en déduit que dans  $G_1$ , l'adhérence des points périodiques (qui est l'ensemble vide) ne contient pas les points récurrents. Ce théorème et son corollaire seront démontrés à la fin de cette section.

Nous avons été incapable de montrer un analogue du lemme de fermeture d'orbite sur  $X_\omega^1$ . Le problème est que si on perturbe un champ de vecteurs pour rendre la classe de cohomologie de  $i_X \omega$  monogène par intégration pour pouvoir lui appliquer le « closing lemma », on ne sait pas montrer que les orbites du champ perturbé sont proches de celle du champ non perturbé. Et le « closing lemma » est faux pour certains champs qui ne sont pas monogènes par intégration, ainsi que le montre l'exemple de flot symplectique en lequel le « closing lemma » est faux :

EXEMPLE 3.2.3 (M. Herman). — Nous allons décrire un exemple de flot symplectique  $(\varphi_t)$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{T}^2$  muni de sa structure symplectique standard

$$\Omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

tel que toute perturbation  $(\psi_t)$ , de classe  $C^1$ , de  $(\varphi_t)$  telle que le support de  $\dot{\varphi}_t - \dot{\psi}_t$  est dans une réunion disjointe et finie de fermés simplement connexes n'a pas d'orbite périodique.

Ainsi, en particulier, les perturbations que nous avons faites dans les « closing lemma » énoncés au chapitre 2 n'ont aucune chance de donner naissance à des orbites périodiques.

Considérons donc sur  $\mathbf{T}^2$  le champ de vecteurs  $X$  constant égal à  $(1, \pi)$ . Le flot associé n'a pas d'orbite périodique, toutes ses orbites étant même denses dans  $\mathbf{T}^2$ . De plus :  $i_X \Omega = d\theta_2 - \pi d\theta_1$  est une 1-forme fermée et donc  $X$  est un champ de vecteurs symplectique (de classe  $C^\infty$ ).

Supposons alors que  $Y$  soit une perturbation de  $X$  telle que le support de  $X - Y$  est dans une réunion disjointe et finie de fermés simplement connexes. Alors, la 1-forme  $i_Y \Omega$  est telle que le support de  $\lambda = i_Y \Omega - i_X \Omega$  est dans une réunion disjointe et finie de fermés simplement connexes.  $\lambda$  est donc exacte et  $i_Y \Omega$  et  $i_X \Omega$  appartiennent à la même classe de cohomologie de  $H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ . Supposons que  $Y$  ait une orbite périodique en  $q \in \mathbf{T}^2$ , dont nous noterons  $T$  une période non nulle et  $(\gamma(t))_{0 \leq t \leq T}$  cette orbite. On a alors :

$$\int_\gamma i_X \Omega = \int_\gamma i_Y \Omega = \int_0^T \Omega(Y(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) dt = 0.$$

Vu la définition de  $i_X \Omega$ , cela implique que  $\gamma$  est homotope à un point. Aussi,  $Y$  possède une orbite périodique homotope à un point, et donc aussi un point critique. Ceci est évidemment impossible si  $Y$  est assez proche en topologie  $C^1$  de  $X$ .

Mais il est d'autre part clair que le lemme de fermeture d'orbite en topologie  $C^\infty$  est vrai pour  $X$ , puisqu'on peut l'approximer par des champs constants rationnels qui ont toutes leurs orbites périodiques.

Démontrons maintenant le théorème de densité pour les champs de vecteurs symplectiques et son corollaire :

*Démonstration du théorème de densité pour les champs de vecteurs symplectiques*

Comme  $M$  est compacte,  $H^1(M, \mathbf{R})$  est le dual de  $H_1(M, \mathbf{R})$  ; soient alors  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  des lacets de  $M$  tels que leurs classes d'homologie  $[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]$  forment une base de  $H_1(M, \mathbf{Z})$ . Soit alors  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  la base de  $H^1(M, \mathbf{R})$  qui est la base duale de  $\{[\gamma_1], \dots, [\gamma_n]\}$ . On identifiera  $H^1(M, \mathbf{R})$  à  $\mathbf{R}^n$  à l'aide des coordonnées dans cette base.

- (1) Avec cette convention, remarquons que si  $\alpha \in H^1(M, \mathbf{R})$  est rationnelle, elle est monogène par intégration. En effet,  $\alpha H_1(M, \mathbf{Z})$  est engendré par  $\{\int_{\gamma_1} \alpha, \dots, \int_{\gamma_n} \alpha\}$  qui est une partie de  $\mathbf{Q}$ , et donc  $\alpha \cdot H_1(M, \mathbf{Z})$  est un sous-groupe discret.

Or,  $H^1(M, \mathbf{R}) \cap \mathbf{Q}^n$  est dense dans  $H^1(M, \mathbf{R})$ . On en déduit que

$$\{X \in X_\omega^k \mid [i_X \omega] \text{ est rationnelle}\}$$

est dense dans  $H^1(M, \mathbf{R})$  en topologie  $C^k$  et donc

$$\{X \in X_\omega^k \mid [i_X \omega] \text{ est monogène par intégration}\}$$

est dense dans  $H^1(M, \mathbf{R})$  en topologie  $C^k$ .

Or, on a vu que pour toute classe  $\alpha \in H^1(M, \mathbf{R})$  monogène par intégration, il existe une partie dense  $D_\alpha$  de  $X_{\omega, \alpha}^1$  telle que pour tout  $X \in D_\alpha$ , l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  de  $X$  tels que  $\omega(x) \cup \alpha(x) \neq \emptyset$ .

Finalement,  $D = \bigcup D_\alpha$  est une partie dense de  $X_\omega^1$  dont tous les éléments  $X$  vérifient : l'ensemble des points périodiques de  $X$  est dense dans l'ensemble des points non errants  $p$  de  $X$  tels que  $\omega(p) \cup \alpha(p) \neq \emptyset$ .

- (2) Il est clair que l'ensemble des  $\alpha \in H^1(M, \mathbf{R})$  dont les coordonnées notées  $x_1, \dots, x_n$  vérifient :  $x_1, \dots, x_n$  ne sont pas liés sur  $\mathbf{Q}$  est un  $G_\delta$  dense de  $H^1(M, \mathbf{R})$ . Dans ce cas, on dit que  $\alpha$  est *non résonnant*. Aussi,

$$R = \{X \in X_\omega^k \mid [i_X \omega] \text{ est non résonnante}\}$$

est un  $G_\delta$  dense en topologie  $C^m$  pour tout  $m \in [1, k]$ .

Or, si  $X \in R$  vérifie  $i_X \omega = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$  et si  $\gamma$  est un chemin fermé non homotope à un point,  $\gamma$  s'écrit :  $\gamma = y_1 [\gamma_1] + \dots + y_n [\gamma_n]$  où les  $y_i$  sont des entiers non tous nuls et on a :

$$\int_\gamma i_X \omega = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i \int_{\gamma_i} i_X \omega = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i x_i.$$

Or, comme  $X \in R$ , les  $x_i$  ne sont pas liés sur  $\mathbf{Q}$  et donc  $\int_\gamma i_X \omega \neq 0$ .

Supposons alors que  $X \in R$  ait une orbite périodique  $\gamma$  non homologue à un point ; alors :

$$\int_\gamma i_X \omega = \int_0^T \omega(X, \dot{\gamma}) dt = 0$$

ce qui contredit ce qui précède.

□

*Démonstration du corollaire.* — Considérons  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$  tel que les  $\alpha_i$  forment une famille libre sur  $\mathbf{Q}$  et le champ de vecteur  $X_\alpha$  constant égal à  $\alpha$  sur  $\mathbf{T}^{2n}$ . Alors, il existe un petit voisinage  $V$  en topologie  $C^1$  de  $X_\alpha$  tel que :

$$\forall X \in V, \quad X \text{ n'a pas d'orbite périodique homologue à un point.}$$

En effet, soit  $\varphi$  le flot de  $X$  et  $\tilde{\varphi}$  son flot relevé à  $\mathbf{R}^{2n}$ . Alors, si  $X$  est assez proche de  $X_\alpha$  :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_t}{\partial t}(x) \cdot \alpha \geq \frac{\|\alpha\|^2}{2}$$

*i.e.* on a une fonction de Liapunov ( $x \mapsto x \cdot \alpha$ ) stricte sur les orbites relevées (c'est-à-dire qui croît strictement sur les orbites relevées) ; aussi,  $\tilde{\varphi}$  n'admet pas d'orbite périodique, ce qui signifie que  $X$  n'a pas d'orbite périodique homotope à un point, donc pas d'orbite périodique homologue à un point.

Ceci, joint au théorème, donne la conclusion voulue.  $\square$

Nous aurions aimé montrer que si  $H_1(M, \mathbf{Z}) \neq 0$  est monogène (dans ce cas tout élément de  $X \in X_\omega^1$  vérifie que  $i_X \omega$  est monogène par intégration), alors le théorème de densité est vrai sur un  $G_\delta$  dense de  $X_\omega^1$ . Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenu pour la raison suivante : les orbites périodiques (excepté les points critiques) ne sont pas stables par perturbation (un exposant de Floquet est 1). Dans ce cas, ce qu'on peut dire, c'est que le théorème de densité est vrai sur une partie  $G$  de  $X_\omega^1$  telle que : pour tout  $\alpha \in H^1(M)$ ,  $G \cap X_{\omega, \alpha}^1$  contient un  $G_\delta$  dense de  $X_{\omega, \alpha}^1$ .

Par contre, dans ce cas, il est évident que le lemme de fermeture d'orbite est vrai en tous les champs de vecteurs symplectiques.

### 3.3. Cas des hamiltoniens

Bien entendu, en corollaire des énoncés précédents viennent les énoncés pour les hamiltoniens :

**THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES HAMILTONIENS.** — *Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $C^2(M)$  (ensembles des fonctions de classe  $C^2$  de  $M$  à valeurs réelles muni de la topologie  $C^2$ ) tel que pour tout  $H \in G$ , l'ensemble des points périodiques du champ de vecteurs hamiltonien  $X_H$  de hamiltonien  $H$  est dense dans l'ensemble des points non errants de  $X_H$  tels que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .*

Remarquons que pour s'affranchir de la condition  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ , il suffit de supposer que les surfaces d'énergie  $\{H = C\}$  sont compactes, ce qui est par exemple le cas quand  $H$  est une fonction propre.

#### LEMME DE FERMETURE D'ORBITE POUR LES HAMILTONIENS

*Avec les mêmes notations que dans l'énoncé précédent, si  $H \in C^2(M)$  :*

- (1)  $R(X_H)$  est un  $G_\delta$  de  $M$ , donc un espace de Baire ;
- (2)  $\Sigma(X_H)$  est un  $G_\delta$  dense de  $R(X)$ .

On peut se demander ce qui se passe sur une surface d'énergie fixée. En d'autres termes :

THÉORÈME DE DENSITÉ POUR LES HAMILTONIENS SUR LES HYPERSURFACES D'ÉNERGIE

Il existe un  $G_\delta$  dense  $G$  de  $C^2(M)$  tel que pour tout  $H \in G$ , de flot hamiltonien noté  $(\varphi_t)$ , pour tout  $q \in \mathbf{Q}$ , l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t|_{H^{-1}(q)})$  est dense dans l'ensemble des points non errants pour  $(\varphi_t|_{H^{-1}(q)})$  de  $M(H) \cap H^{-1}(q)$ .

Ainsi, on obtient un résultat sur un ensemble dense de surfaces d'énergie. On en déduit :

COROLLAIRE 3.3.1. — *Supposons que  $U$  soit un ouvert de  $C^2(M)$  tel que tout élément de  $U$  a toutes ses surfaces d'énergie compactes. Avec les notations de l'énoncé précédent, pour tout  $H \in G \cap U$ , de flot hamiltonien noté  $(\varphi_t)$ , il existe un  $G_\delta$  dense  $G(H)$  de  $\mathbf{R}$  tel que pour tout  $h \in G(H)$ , l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t|_{H^{-1}(h)})$  est dense dans  $H^{-1}(h)$ .*

L'intérêt des deux énoncés précédents est qu'ils s'intéressent à un problème de densité dans les surfaces d'énergie, problème qui fut soulevé par H. Poincaré.

On pourrait bien entendu donner un énoncé de lemme de fermeture d'orbite dans les surfaces d'énergie, mais cela ne semble pas impliquer de nouvelles conséquences intéressantes, donc nous ne le faisons pas ici.

*Démonstration du théorème de densité pour les hamiltoniens sur les hypersurfaces d'énergie et de son corollaire*

Rappelons que  $C^2(M)$  muni de la topologie  $C^2$  est un espace de Baire.

Soit  $(U_n)$  une base dénombrable d'ouverts de  $M$ ,  $q \in \mathbf{Q}$ .

On dira que  $H \in C^2(M)$  vérifie la propriété  $P_n(q)$  si :

$P_n(q; H)$  : «  $U_n \cap H^{-1}(q)$  contient un point périodique ou ne contient pas de point non errant  $p$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$  »

On notera :  $F_n(q) = \{H \in C^2(M) \mid P_n(q; H) \text{ est vraie}\}$ . Montrons que  $F_n(q)$  contient un ouvert dense.

Soit  $H \in C^2(M)$  et  $W$  un voisinage ouvert de  $H$  dans  $C^2(M)$ . Deux cas se présentent :

- (1) pour tout  $K \in W$ , le flot hamiltonien de  $K$  n'a pas de point non errant  $p$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$  dans  $U_n \cap K^{-1}(q)$ . Dans ce cas,  $W \subset F_n(q)$  ;
- (2) il existe  $K \in W$  (on note son flot hamiltonien  $(\psi_t)$ ) tel que  $(\psi_t|_{K^{-1}(q)})$  a un point non errant  $p$  dans  $U_n$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ .

Quitte à changer  $H$  en  $-H$  (ce qui correspond au champ de vecteurs opposé quand on raisonne avec des champs de vecteurs), on peut supposer qu'il existe  $q \in \omega(p)$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_\varepsilon(p) \subset U_n$ . Utilisons l'énoncé du « closing lemma » dans les surfaces d'énergie pour  $K$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $q$  et  $W$ . On en déduit l'existence de constantes  $r < \varepsilon$  et  $\rho$  et  $\alpha$  vérifiant les conclusions de ce théorème.

Or, comme  $p$  est non errant pour  $(\psi_t|_{K^{-1}(q)})$ , il existe  $p' \in \Pi_{r/\rho}(p) \cap K^{-1}(q)$  dont l'orbite positive revient dans  $\Pi_{r/\rho}(p)$ .

Utilisant le « closing lemma » en  $p$ , on trouve  $K' \in W$  ayant un point périodique  $p_0$  dans  $\Pi_r(p) \cap K'^{-1}(q)$ , donc dans  $U_n \cap K'^{-1}(q)$ . Quitte à considérer une petite perturbation de  $K'$ , on peut supposer que les multiplicateurs de Floquet de ce point périodique sauf un sont différents de 1 (ce qui implique que si on fait une « petite » perturbation  $K''$  de  $K'$ , le flot de  $K''$  restreint à la surface d'énergie  $K^{-1}(q)$  a un point périodique proche de ce point périodique), et donc qu'il existe un ouvert  $W' \subset W$  dont tout élément a une orbite dans  $U_n$  et dans la surface d'énergie de  $q$ . Dans ce cas,  $W' \subset F_n(q)$ . Finalement,  $F_n(q)$  contient un ouvert dense.

L'ensemble  $F = \bigcap F_n(q)$  contient donc un  $G_\delta$  dense de  $C^2(M)$ . Or,  $F$  est exactement l'ensemble dont on voulait montrer qu'il contient un  $G_\delta$  dense.

Démontrons maintenant le corollaire du théorème. On a démontré que pour tout élément  $H$  de  $G$  (de flot hamiltonien noté  $(\varphi_t)$ ), pour tout  $q \in \mathbf{Q}$ , l'ensemble des orbites périodiques de  $(\varphi_t|_{H^{-1}(q)})$  dont un seul exposant de Floquet est égal à 1 (on dit qu'elle est non dégénérée) est dense dans l'ensemble des points non errants pour  $(\varphi_t|_{H^{-1}(q)})$ . On suppose maintenant que  $H \in U \cap G$ . Alors, on sait que l'ensemble des points récurrents de  $H^{-1}(q)$  est dense dans  $H^{-1}(q)$ ; aussi, l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t|_{H^{-1}(q)})$  dont un seul exposant de Floquet est égal à 1 est dense dans  $H^{-1}(q)$ .

Maintenant, notons pour tout entier  $n$  :

$$S(n) = \left\{ h \in \mathbf{R} \mid H^{-1}(h) \cap U_n = \emptyset \text{ ou} \right. \\ \left. H^{-1}(h) \cap U_n \text{ a une orbite périodique non dégénérée} \right\}$$

et considérons un ouvert  $W$  de  $\mathbf{R}$ . Deux cas se présentent :

- soit :  $\forall h \in W, H^{-1}(h) \cap U_n = \emptyset$ ; alors,  $W \subset S(n)$ ;
- soit il existe  $h_0 \in W$  tel que  $H^{-1}(h_0) \cap U_n \neq \emptyset$ . Alors, il existe  $q \in \mathbf{Q} \cap W$  tel que  $H^{-1}(q) \cap U_n \neq \emptyset$ . Comme l'ensemble des orbites non dégénérées de  $H^{-1}(q)$  est dense dans  $H^{-1}(q)$ , il existe un point périodique non dégénéré dans  $H^{-1}(q) \cap U_n$ , donc un voisinage  $W' = ]q - \varepsilon, q + \varepsilon[$  inclus dans  $W$  de  $q$  tel que : pour tout  $h \in W'$ ,  $H^{-1}(h) \cap U_n$  contient un point périodique non dégénéré.

Aussi,  $S(n)$  contient un ouvert dense, donc  $S = \bigcap S(n)$  contient un  $G_\delta$  dense.  $\square$



## CHAPITRE 4

### UNE VERSION ERGODIQUE DU « CLOSING LEMMA »

La version ergodique du « closing lemma » est en fait la version en théorie de la mesure de ce que nous avons appelé dans la partie précédente le lemme de fermeture d'orbite. Cette version ergodique du « closing lemma » a été démontrée pour les difféomorphismes quelconques par R. Mañé en 1982 dans [8]. Curieusement, bien que sa démonstration soit plus difficile que celle du lemme de fermeture d'orbite, elle lui est nettement antérieure. Quant à la version ergodique du « closing lemma » pour les champs de vecteurs quelconques, elle est due à Lan Wen (cf. [18]).

La version ergodique du « closing lemma » de R. Mañé et Lan Wen ne concernait que les mesures de probabilités boréliennes des variétés compactes. Nous l'avons étendu en un énoncé concernant les mesures boréliennes, finies sur tout compact et définies sur une variété quelconque. De plus, nous l'avons démontré dans tous les cas où nous avons traité le « closing lemma » (difféomorphisme symplectique, préservant un volume. . .).

La différence fondamentale entre notre démonstration et celle de R. Mañé est que nous n'utilisons pas le théorème ergodique de Birkhoff, ce qui nous permet de traiter le cas des variétés non compactes et des mesures infinies.

#### 4.1. Énoncés

Nous gardons pour  $f \in D$ ,  $\varphi \in F$ ,  $X \in CV$ ,  $\Sigma(U, \varepsilon)$ ,  $\Sigma(f)$ ,  $\Sigma(\varphi)$ ,  $\Sigma(X)$ ,  $R(f)$ ,  $R(\varphi)$  et  $R(X)$  les mêmes conventions que dans la section 3.1. On a :

VERSION ERGODIQUE DU « CLOSING LEMMA ». — *Soit  $M$  une variété riemannienne (éventuellement symplectique ou munie d'une forme volume). Soient  $\beta$  un élément de  $D$ ,  $F$  ou  $CV$  ( $\beta$  est donc un difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs) et  $\mu$  une mesure positive borélienne invariante par  $\beta$  telle que la  $\mu$ -mesure de tout compact soit finie. Alors :*

$$\mu(R(\beta) \setminus \Sigma(\beta)) = 0.$$



Dans le cas où  $\mu$  est une mesure finie, le théorème de récurrence de Poincaré nous dit que  $\mu$ -presque tout point de  $M$  est récurrent. On trouve donc :

COROLLAIRE 4.1.1. — *Soient  $M$  une variété riemannienne (éventuellement symplectique ou munie d'une forme volume),  $\beta$  un élément de  $D$ ,  $F$  ou  $CV$  et  $\mu$  une mesure de probabilité borélienne invariante par  $\beta$ . Alors :*

$$\mu(\Sigma(\beta)) = 1.$$

C'est ce dernier énoncé, portant sur les variétés compactes et concernant  $\beta \in \text{Diff}^k(M)$ , que R. Mañé a démontré dans [8].

Reprenons pour  $R(\beta; q)$  et  $\Sigma(\beta; q)$  les mêmes notations qu'à la section 3.1 (grossoyèment,  $R(\beta; q)$  désigne l'ensemble des points positivement récurrents  $p$  tels que  $q \in \omega(p)$  et  $\Sigma(\beta; q)$  désigne l'ensemble des points  $p$  le long de l'orbite positive desquels on peut obtenir une orbite périodique en perturbant uniquement au voisinage de  $q$ ). On a alors :

#### VERSION ERGODIQUE DU « CLOSING LEMMA » À SUPPORT LOCALISÉ

*Soit  $M$  une variété riemannienne (éventuellement symplectique ou munie d'une forme volume). Soit  $\beta$  un élément de  $D$ ,  $F$  ou  $CV$  ( $\beta$  est donc un difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs),  $q \in M$  et  $\mu$  une mesure positive borélienne invariante par  $\beta$  telle que la  $\mu$ -mesure de tout compact soit finie. Alors :*

$$\mu(R(\beta; q) \setminus \Sigma(\beta; q)) = 0.$$

En ce qui concerne les champs de vecteurs symplectiques et en reprenant les notations de la section 3.2, on a aussi un énoncé du même type :

#### VERSION ERGODIQUE DU « CLOSING LEMMA » POUR LES CHAMPS DE VECTEURS SYMPLECTIQUES DE CLASSE DE COHOMOLOGIE FIXÉE

*Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique riemannienne et  $\beta \in H^1(M, \mathbf{R})$  une classe de cohomologie monogène par intégration. Soit  $X \in X_{\omega, \beta}^k$  et  $\mu$  une mesure positive borélienne invariante par  $X$  telle que la  $\mu$ -mesure de tout compact soit finie. Alors :*

$$\mu(R(X) \setminus \Sigma(X)) = 0.$$

En corollaire, on obtient bien entendu une version ergodique du « closing lemma » pour les hamiltoniens. On obtient aussi un analogue du corollaire donné précédemment. Donnons par exemple l'énoncé pour les hamiltoniens dans le cas d'une mesure finie :

COROLLAIRE 4.1.2. — *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique riemannienne et soit  $H$  un hamiltonien de classe  $C^{k+1}$  de  $M$ , de champ de vecteurs hamiltonien associé noté  $X_H$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité invariante par  $X_H$ . Alors :*

$$\mu(\Sigma(X_H)) = 1.$$

## 4.2. Les étapes de la démonstration

Nous allons énoncer dans cette partie les principaux résultats qui permettent de démontrer la version ergodique du « closing lemma », puis nous en déduisons la version ergodique du « closing lemma ». En 4.3, nous démontrerons les résultats intermédiaires. Nous ne démontrerons pas la version ergodique du « closing lemma » à support localisé, car sa démonstration est calquée sur celle de la version ergodique du « closing lemma ».

Désormais,  $CV$  désignera aussi bien ce qu'il désignait dans la section précédente que, dans le cas d'une variété symplectique, l'ensemble  $X_{\omega, \alpha}^k$  où  $\alpha$  est une classe de cohomologie monogène par intégration.

DÉFINITION 4.2.1. —  $\varphi$  étant un flot de classe  $C^1$  de  $M$  dont on note  $C$  l'ensemble des points critiques, on peut définir en tout  $p \in M \setminus C$  une petite boîte de flot :

$$F_p \quad : \quad [-r_p, r_p] \times \Pi_{r_p}(p) \longrightarrow M \\ (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$$

qui soit un plongement. On notera alors :  $P_\delta(p) = F_p([-\delta, \delta] \times \Pi_\delta(x))$ .

On définit des ensembles  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  (abusivement et pour ne pas alourdir, le  $f$ ,  $\varphi$  ou  $X$  n'intervient pas dans l'écriture  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ ) par :

- si  $f \in D : U$  est un voisinage de  $f$  dans  $D$ ,  $\varepsilon, r$  sont des constantes strictement positives et  $\rho > 1$ , on note  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  l'ensemble des  $x \in M$  tels que :  
si  $y, f^m(y) \in B_{\bar{r}}(x)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ , alors il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$ ,  $g \in U$  et  $z \in M$  tels que :

$$(0) \quad f^{m_1}y, f^{m_2}y \in \overline{B}_{\rho\bar{r}}(x); \\ (i) \quad g^{m_2-m_1}(z) = z; \\ (ii) \quad g = f \text{ sur } M - \bigcup_{0 \leq k \leq m_2-m_1} (B_\varepsilon(g^k z) \cap B_\varepsilon(z)); \\ (iii) \quad \forall i \in [0, m_2 - m_1], d(g^i(z), f^i(f^{m_1}y)) < \varepsilon.$$

- si  $\varphi \in F : U$  est un voisinage de  $\varphi$  dans  $F$ ,  $\varepsilon, r$  sont des constantes strictement positives et  $\rho > 1$ , on note  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  l'ensemble des  $x \in M \setminus C$  (où  $C$  désigne l'ensemble des points critiques de  $X = \dot{\varphi}$ ) tels que  $r \leq r_x/\rho$  et :

si  $y, \varphi_{T_1}y \in \Pi_{\bar{r}}(x)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$ ,  $\psi = (\psi_t) \in U$  (de champ de vecteurs associé  $Y$ ),  $z \in M$  et  $T_3 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \longrightarrow [0, T_3]$  tel que  $\forall t \in [0, T_2 - T_1], |1 - f'(t)| < \varepsilon$  tels que :

$$(0) \quad \varphi_{T_1}y, \varphi_{T_2}y \in \overline{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x); \\ (i) \quad \psi_{T_3}(z) = z; \\ (ii) \quad X = Y \text{ sur } M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_3} (B_\varepsilon(\psi_t z) \cap B_\varepsilon(z)); \\ (iii) \quad \forall t \in [0, T_2 - T_1], d(\psi_{f(t)}(z), \varphi_t(\varphi_{T_1}y)) < \varepsilon.$$

- $X \in CV$  : (on note  $C$  l'ensemble de ses points critiques et  $\varphi$  le flot associé)  $U$  est un voisinage de  $X$  dans  $CV$ ,  $\varepsilon, r$  sont des constantes strictement positives et  $\rho > 1$ , on note  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  l'ensemble des  $x \in M \setminus C$  tels que  $r \leq r_x/\rho$  et : si  $y, \varphi_{T_1}y \in \Pi_{\bar{r}}(x)$  (resp. si  $y, \varphi_T(y) \in \Pi_{\bar{r}}(x) \cap H^{-1}(H(x))$  où  $H$  est le pseudo-hamiltonien associé à  $X$  dans le cas des champs de vecteurs symplectiques) pour un  $\bar{r} \in [0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$ ,  $\psi = (\psi_t) \in U$  (de champ de vecteurs associé  $Y$ ),  $z \in M$  et  $T_3 > 0$  ainsi qu'un difféomorphisme  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  tel que  $\forall t \in [0, T_2 - T_1], |1 - f'(t)| < \varepsilon$  tels que :

- (0)  $\varphi_{T_1}y, \varphi_{T_2}y \in \overline{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x)$ ;
- (i)  $\psi_{T_3}(z) = z$ ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_3} (B_\varepsilon(\psi_t z) \cap B_\varepsilon(z))$ ;
- (iii)  $\forall t \in [0, T_2 - T_1], d(\psi_{f(t)}(z), \varphi_t(\varphi_{T_1}y)) < \varepsilon$ .

PROPOSITION 4.2.2. — *Les ensembles  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  sont fermés donc boréliens.*

*Démonstration.* — Traitons tout d'abord le cas des difféomorphismes. Fixons  $U, \varepsilon, r$  et  $\rho > 1$  comme dans la définition précédente.

Soit  $(x_n)$  une suite à valeurs dans  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  convergeant vers  $x \in M$ . Supposons que  $y, f^m y \in B_{\bar{r}}(x)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et un entier  $m \geq 1$ . Alors, il existe  $N \geq 0$  tel que :

$$\forall n \geq N, y, f^m y \in B_{\bar{r}}(x_n).$$

On peut alors appliquer la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  et dire que pour tout  $n \geq N$ , il existe deux entiers  $m_{1,n}$  et  $m_{2,n}$  tels que  $0 \leq m_{1,n} < m_{2,n} \leq m$ ,  $g_n \in U$  et  $z_n \in M$  tels que :

- (0)  $f^{m_{1,n}}y, f^{m_{2,n}}y \in \overline{B}_{\rho\bar{r}}(x_n)$ ;
- (i)  $g_n^{m_{2,n} - m_{1,n}}(z_n) = z_n$ ;
- (ii)  $g_n = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m_{2,n} - m_{1,n}} (B_\varepsilon(g_n^k z_n) \cap B_\varepsilon(z_n))$ ;
- (iii)  $\forall i \in [0, m_{2,n} - m_{1,n}], d(g_n^i(z_n), f^i(f^{m_{1,n}}y)) < \varepsilon$ .

Quitte à extraire une sous-suite, comme les suites  $(m_{1,n})$  et  $(m_{2,n})$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, on peut les supposer constantes, égales à  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. En passant alors à la limite dans (0), on trouve :

$$(0) f^{m_1}y, f^{m_2}y \in \overline{B}_{\rho\bar{r}}(x).$$

Fixons alors  $n = N$ . On a alors pour  $g = g_N \in U$  et  $z = z_N \in M$  :

- (i)  $g^{m_2 - m_1}(z) = z$ ;
- (ii)  $g = f$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq k \leq m_2 - m_1} (B_\varepsilon(g^k z) \cap B_\varepsilon(z))$ ;
- (iii)  $\forall i \in [0, m_2 - m_1], d(g^i(z), f^i(f^{m_1}y)) < \varepsilon$ .

Ceci implique que  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ , donc ce dernier ensemble est fermé donc borélien.

Pour le cas des flots et des champs de vecteurs, il faut encore montrer que des ensembles de la forme  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  sont fermés. Traitons par exemple le cas des flots.

Fixons  $U, \varepsilon, r$  et  $\rho > 1$  comme dans la définition précédente.

Soit  $(x_n)$  une suite à valeurs dans  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  convergeant vers  $x \in M$ . Supposons que  $y, \varphi_T y \in \Pi_{\bar{r}}(x)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ . Alors, il existe  $N \geq 0$  tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \varphi_{u_n} y, \quad \varphi_{t_n + u_n} y \in \Pi_{\bar{r}}(x_n)$$

où  $(t_n)$  est une suite de réels tendant vers  $T$  et  $(u_n)$  une suite de réels tendant vers 0. On peut alors appliquer la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  et dire que pour tout  $n \geq N$ , il existe

- $T_{1,n}$  et  $T_{2,n}$  tels que  $0 \leq T_{1,n} < T_{2,n} \leq t_n$ ,
- $\psi_n = (\psi_{n,t}) \in U$  (de champ de vecteurs associé  $Y_n$ ),
- $z_n \in M$  et  $T_{3,n} > 0$ ,
- un difféomorphisme  $f_n : [0, T_{2,n} - T_{1,n}] \rightarrow [0, T_{3,n}]$  tel que  $\forall t \in [0, T_{2,n} - T_{1,n}], |1 - f'_n(t)| < \varepsilon$

tels que :

- (0)  $\varphi_{T_{1,n}}(\varphi_{u_n} y), \varphi_{T_{2,n}}(\varphi_{u_n} y) \in \bar{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x_n)$ ;
- (i)  $\psi_{n, T_{3,n}}(z_n) = z_n$ ;
- (ii)  $X = Y_n$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_{3,n}} (B_\varepsilon(\psi_{n,t} z_n) \cap B_\varepsilon(z_n))$ ;
- (iii)  $\forall t \in [0, T_{2,n} - T_{1,n}], d(\psi_{n, f_n(t)}(z_n), \varphi_t(\varphi_{T_{1,n}}(\varphi_{u_n} y))) < \varepsilon$ .

Les suites  $(T_{2,n})$  et  $(T_{1,n})$  n'ont qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences possibles (ce sont les  $u \in ]0, T]$  tels que  $\varphi_u(y) \in \bar{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x)$ , il suffit de passer à la limite dans (0) pour trouver cela), donc on peut supposer quitte à extraire une sous-suite qu'elles convergent vers  $T_1$  et  $T_2$  respectivement. On trouve alors en passant à la limite dans (0) que :

$$(0) \quad \varphi_{T_1} y, \varphi_{T_2} y \in \bar{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x).$$

Fixons alors  $n$  assez « grand ». Posons  $T_3 = T_{3,n}$ ,  $\psi = \psi_n$ ,  $Y = Y_n$  et  $z = z_n$ . On a alors :

- (i)  $\psi_{T_3} z = z$ ;
- (ii)  $X = Y$  sur  $M - \bigcup_{0 \leq t \leq T_3} (B_\varepsilon(\psi_t z) \cap B_\varepsilon(z))$ ;
- (iii)  $\forall t \in [0, T_{2,n} - T_{1,n}], d(\psi_{f_n(t)}(z), \varphi_t(\varphi_{T_{1,n}}(\varphi_{u_n} y))) < \varepsilon$ ; donc :

$$\forall t \in [0, T_{2,n} - T_{1,n}], d(\psi_{f_n(t)}(z), \varphi_{t+T_{1,n}+u_n} y) < \varepsilon$$

soit en reparamétrant :

$$\forall t \in [T_{1,n} + u_n - T_1, T_{2,n} + u_n - T_1], d(\psi_{f_n(t+T_1-T_{1,n}-u_n)}(z) \varphi_t(\varphi_{T_1} y)) < \varepsilon.$$

Comme  $(u_n)$  tend vers 0,  $(T_{1,n})$  tend vers  $T_1$  et  $(T_{2,n})$  tend vers  $T_2$ , si  $n$  a été choisi assez grand, on peut modifier aux bornes  $f_n(\cdot + T_1 - T_{1,n} - u_n)$  en  $f : [0, T_2 - T_1] \rightarrow [0, T_3]$  telle que  $|f' - 1| < \varepsilon$  telle que :

$$\forall t \in [0, T_2 - T_1], d(\psi_{f(t)}(z), \varphi_t(\varphi_{T_1}(y))) < \varepsilon.$$

Ceci implique que  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ , donc ce dernier ensemble est fermé donc borélien.  $\square$

PROPOSITION 4.2.3. — *Soit  $\beta$  un difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs,  $(r_n)$  est une suite de réels strictement positifs tendant vers 0 et  $(\rho_n)$  une suite de réels plus grands que 1 tendant vers  $+\infty$ . Alors :*

$$R(\beta) \subset \{p \in M \mid \alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{0 \leq n} \Sigma(\varepsilon, U, \rho_n, r_n).$$

*Démonstration.* — La première inclusion a déjà été vue. Montrons donc la seconde par exemple pour les difféomorphismes.

Soit  $p \in M$  tel que  $\alpha(p) \cup \omega(p) \neq \emptyset$ . Quitte à changer  $f$  en  $f^{-1}$ , on peut supposer que  $\omega(p) \neq \emptyset$ . Utilisons alors le « closing lemma » pour  $p, \varepsilon/3, p$  et  $U$  de manière à obtenir l'existence de constantes  $r > 0, \rho > 1$  et  $\alpha$ .

Il existe alors  $r' \in ]0, r]$  tel qu'on ait l'implication :

$$(\forall y \in M, d(y, x) < \rho r') \Rightarrow (\forall i \in [0, \alpha], d(f^i y, f^i x) < \frac{\varepsilon}{3}).$$

Montrons alors que  $p \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho, r')$  :

supposons que  $y, f^m(y) \in B_{\bar{r}}(x)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r']$  et  $m \geq 1$ , alors par le « closing lemma » il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 \leq m_1 + \alpha \leq m_2 \leq m$  et  $g \in U$  tels que :

$$(0) \quad f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho \bar{r}}(p);$$

$$(i) \quad \forall j \in [\alpha, m_2 - m_1], g^j(f^{m_2} x) = f^j(f^{m_1} x)$$

(donc en particulier  $g^{m_2 - m_1}(f^{m_2} x) = f^{m_2} x$ );

$$(ii) \quad g = f \text{ sur } M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_{\varepsilon/3}(f^k p) \cap B_{\varepsilon/3}(x))$$

$$(iii) \quad \forall i \in [0, \alpha], d(g^i(f^{m_2}(x)), f^i(f^{m_1} x)) < \varepsilon/3.$$

Ceci donne évidemment le (0), (i) et (iii) de la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r')$ . De plus, appliquons l'implication donnée précédemment en  $f^{m_1} x$ . On obtient grâce à (0) :

$$i \in [0, \alpha], \quad d(f^i(f^{m_1} x), f^i x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ceci joint à (iii) donne :

$$i \in [0, \alpha], \quad d(g^i(f^{m_2}(x)), f^i x) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

et donc (ii) implique que :

$$g = f \text{ sur } M - \bigcup_{0 \leq k \leq \alpha} (B_\varepsilon(g^k(f^{m_2}(x))) \cap B_\varepsilon(f^{m_2}(x)))$$

soit le (ii) de la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r')$ .  $\square$

Faisons une dernière remarque sur la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  : avec les mêmes notations que dans cette définition, on a :

- dans le cas des difféomorphismes :  $f^{m_1}x \in \Sigma(U, \varepsilon)$ . Ainsi, on trouve au voisinage des points de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  « beaucoup » de points de  $\Sigma(U, \varepsilon)$  ;
- dans le cas des flots ou champs de vecteurs :  $\varphi_{T_1}x \in \Sigma(U, \varepsilon)$ . Ainsi, on trouve au voisinage des points de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  « beaucoup » de points de  $\Sigma(U, \varepsilon)$ .

Nous énoncerons et démontrerons les résultats voulus simultanément pour  $D$ ,  $F$  et  $CV$ . Pour cela, nous donnons un lemme qui explique comment on peut passer des difféomorphismes aux champs de vecteurs (ou flots), en remplaçant des boules par des boîtes de flot :

LEMME 4.2.4. — *Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^1$  de  $M$ ,  $C$  l'ensemble des points critique de  $\dot{\varphi}$  et  $W$  un voisinage de  $C$ . Alors, pour tout compact  $K \subset M$ , il existe deux constantes  $c \geq 2$  et  $c' \geq 2$  réelles telles que :*

$$\forall x \in K \setminus W, \forall r \leq r_x, P_{r/c}(x) \subset B_r(x) \text{ et } B_{r/c'}(x) \subset P_r(x).$$

Remarquons que la constante  $c$  ne dépend que de  $K$  et non de  $W$ , alors que  $c'$  dépend de  $W$  et  $K$  à la fois.

Ce lemme va nous servir à comparer les mesures de boules et boîtes de flot de « tailles » comparables ; on a en effet :

$$\frac{\mu(P_{r/c}(x))}{\mu(B_r(x))} \leq 1 \text{ et } \frac{\mu(B_{r/c'}(x))}{\mu(P_r(x))} \leq 1.$$

La proposition suivante nous sert à majorer le rapport des mesures d'une boule et d'une boule qui lui est « homothétique » :

PROPOSITION 4.2.5.a. — *Soit  $M$  une variété riemannienne,  $K$  un compact de  $M$  et  $\rho > 1$  une constante. Alors, il existe une constante  $\delta > 0$  telle que pour toute mesure mesure borélienne  $\mu$  de  $M$  finie sur*

$$K_{\rho^{-1}} = \{x \in M \mid d(x, K) \leq \rho^{-1}\},$$

*l'ensemble*

$$E = \{x \in K \mid \exists J, \forall j \geq J, \mu(B_{\rho^{-(j+1)}}(x)) \leq \delta \mu(B_{\rho^{-j}}(x))\}$$

*est de  $\mu$ -mesure nulle.*

Son analogue pour les flots ou champs de vecteurs est :

PROPOSITION 4.2.5.b. — *Soit  $M$  une variété riemannienne,  $K$  un compact de  $M$  et  $\rho > 1$  une constante. Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^1$  sur  $M$ ,  $C$  l'ensemble des points critiques de  $\dot{\varphi}$  et  $W$  un voisinage de  $C$ . Alors, il existe une constante  $\delta > 0$  telle que pour*

toute mesure borélienne  $\mu$  de  $M$  finie sur  $K_{\rho^{-1}} = \{x \in M \mid d(x, K) \leq \rho^{-1}\}$ , l'ensemble

$$E = \{x \in K \setminus W \mid \exists J, \forall j \geq J, \mu(P_{\rho^{-(j+1)}}(x)) \leq \delta \mu(P_{\rho^{-j}}(x))\}$$

est de  $\mu$ -mesure nulle.

#### REMARQUES 4.2.6

- (a) Précisons bien que dans les énoncés précédent, on ne montre pas que  $E$  est borélien, mais juste qu'il est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure nulle.
- (b) Remarquons que ces premières propositions (qui ne font absolument pas intervenir l'aspect dynamique du problème) sont évidentes pour la mesure de Haar d'un tore, ou pour une mesure ayant une densité par rapport à une telle mesure, ou pour une mesure atomique.
- (c) Les énoncés de ces propositions nous ont été suggérés par J.-C. Yoccoz, lors d'un exposé donné sur ce sujet et dans lequel l'énoncé que nous donnions était moins précis.

Au contraire, la proposition suivante utilise l'aspect dynamique du problème et en particulier le « closing lemma ». Pour démontrer ce résultat dans le cas qu'il envisageait, R. Mañé disait (ce qui est vrai dans le cas compact) qu'il suffisait de le démontrer pour les mesures ergodiques, puis utilisait le théorème ergodique de Birkhoff. En fait, nous verrons qu'on n'a nul besoin de se ramener aux mesures ergodiques et qu'il suffit d'utiliser le fait que certaines applications de premier retour préservent la mesure.

PROPOSITION 4.2.7.a. — Soit  $f \in D$ ,  $\mu$  une mesure borélienne de  $M$  finie sur tout compact et invariante sous  $f$ . Alors, si  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ , on a pour tout  $\bar{r} \leq r$  :

$$\mu(\overline{B}_{\rho\bar{r}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f)) \geq \mu(B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)).$$

Donnons l'analogie pour les flots et champs de vecteurs :

PROPOSITION 4.2.7.b. — Soit  $X \in CV$  de flot associé  $\varphi$  (resp.  $\varphi \in F$ ),  $\mu$  une mesure borélienne de  $M$  finie sur tout compact et invariante sous  $\varphi$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ , on a pour tout  $\bar{r} \leq r$  :

$$\mu(\overline{P}_{\rho\bar{r}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(X)) \geq \mu(P_{\bar{r}}(x) \cap R(X))$$

$$(resp : \mu(\overline{P}_{\rho\bar{r}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi)) \geq \mu(P_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)))$$

Avant d'énoncer les dernières propositions nécessaires pour démontrer la version ergodique du « closing lemma », introduisons de nouvelles notations. Le nombre  $\rho > 1$  étant fixé ainsi qu'un entier  $k \geq 1$ , posons :

– dans le cas d'un difféomorphisme  $f$  :

$$H_k(\rho) = \left\{ x \in M \mid \exists (j_n) \rightarrow +\infty, \forall n, \frac{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x))} \geq \frac{1}{k} \right\}$$

(on convient que quand le dénominateur est nul –ce qui implique que le numérateur est nul–, le rapport est 0).

On a vu en proposition 4.2.5.a que si  $K$  est un compact de  $M$  et  $\rho > 1$  un réel, il existe  $k \geq 1$  tel que  $K \setminus H_k(\rho)$  est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure 0. Aussi, une variété étant dénombrable à l'infini, pour tout  $\rho \geq 1$ ,  $M \setminus \bigcup H_k(\rho)$  est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure nulle.

– dans le cas d'un flot  $\varphi$  (resp. d'un champ de vecteurs  $X$  de flot associé  $\varphi$ ), si  $W$  est un voisinage de l'ensemble  $C$  des points critiques de  $\dot{\varphi}$ , si  $\rho \geq 1$  et  $k \geq 1$  :

$$H_k(\rho, W) = \left\{ x \in M \setminus W \mid \exists (j_n) \rightarrow +\infty, \forall n, \frac{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x))} \geq \frac{1}{k} \right\}$$

(on convient comme pour les difféomorphismes que quand le dénominateur est nul le rapport est 0).

On a vu en proposition 4.2.5.b que si  $K$  est un compact de  $M$  et  $\rho \geq 1$  un réel, il existe  $k \geq 1$  tel que  $K \setminus (W \cup H_k(\rho))$  est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure 0. Aussi, une variété étant dénombrable à l'infini, pour tout  $\rho \geq 1$ ,  $M \setminus (W \cup \bigcup H_k(\rho))$  est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure nulle.

PROPOSITION 4.2.8.a. — Soit  $\rho \geq 3$ ,  $\mu$  une mesure de  $M$  finie sur les compacts. Soit  $S$  une partie mesurable de  $M$ . On définit pour tout  $x \in H_k(\rho)$  :

$$\begin{aligned} \bar{f}_j(x) &= \sup_{\substack{m \geq j \\ \frac{\mu(B_{\rho^{-m}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-m+1}}(x))} \geq \frac{1}{k}}} \left\{ \frac{\mu(B_{\rho^{-m}}(x) \cap S)}{\mu(B_{\rho^{-m}}(x))} \right\} \\ \underline{f}_j(x) &= \inf_{\substack{m \geq j \\ \frac{\mu(B_{\rho^{-m}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-m+1}}(x))} \geq \frac{1}{k}}} \left\{ \frac{\mu(B_{\rho^{-m}}(x) \cap S)}{\mu(B_{\rho^{-m}}(x))} \right\} \end{aligned}$$

Alors,  $\bar{f}_j$  et  $\underline{f}_j$  convergent  $\mu$ -presque partout vers la fonction caractéristique de  $S \cap H_k(\rho)$ .

REMARQUES

- (a) Bien sûr, quand  $\mu(B) = 0$ , on écrit :  $\mu(B \cap S)/\mu(B) = 0$  ;
- (b) dire qu'une suite de fonctions  $(f_n)$  converge presque partout dans  $H$  (qui n'est pas forcément un borélien) signifie qu'on a convergence simple des  $f_n$  vers  $f$  dans  $H$  sauf sur une partie de  $H$  qui est incluse dans un borélien de  $\mu$ -mesure nulle ;
- (c) si la variété  $M$  est compacte, on peut trouver  $k$  tel que  $\mu(M \setminus H_k(\rho)) = 0$ , donc la proposition donne un résultat de convergence presque partout dans  $M$  ;



(d) en fait, le résultat est bien connu quand  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathbf{R}^d$ ; nous nous sommes d'ailleurs inspirés de la démonstration de ce résultat dans  $\mathbf{R}^d$  pour construire notre démonstration.

PROPOSITION 4.2.8.b. — Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^1$  de  $M$ . Soit  $W$  un voisinage ouvert de l'ensemble  $C$  des points critiques de  $\dot{\varphi}$ ,  $\mu$  une mesure de  $M$  finie sur les compacts. Avec les mêmes notations que dans le lemme 4.2.4, soit  $\rho \geq 3c \cdot c'$ . Soit  $S$  une partie mesurable de  $M$ . On définit pour tout  $x \in H_k(\rho, W)$  :

$$\begin{aligned} \bar{f}_j(x) &= \sup_{\substack{m \geq j \\ \frac{\mu(P_{\rho-m}(x))}{\mu(P_{\rho-m+1}(x))} \geq 1/k}} \left\{ \frac{\mu(P_{\rho-m}(x) \cap S)}{\mu(P_{\rho-m}(x))} \right\} \\ \underline{f}_j(x) &= \inf_{\substack{m \geq j \\ \frac{\mu(P_{\rho-m}(x))}{\mu(P_{\rho-m+1}(x))} \geq 1/k}} \left\{ \frac{\mu(P_{\rho-m}(x) \cap S)}{\mu(P_{\rho-m}(x))} \right\} \end{aligned}$$

Alors,  $\bar{f}_j$  et  $\underline{f}_j$  convergent  $\mu$ -presque partout vers la fonction caractéristique de  $S \cap H_k(\rho, W)$ .

Expliquons maintenant comment à l'aide de toutes ces propositions on démontre la version ergodique du « closing lemma ».

*Démonstration de la version ergodique du « closing lemma »*

On fixe  $\varepsilon$  et  $W$  une fois pour toutes.

*Cas des difféomorphismes.* — Soit  $\mu$  une mesure borélienne sur  $M$ , finie sur les compacts et invariante par  $f$ . On considère les ensembles de la forme :

$$N(\varepsilon, U, \rho, J, k) = \Sigma(\varepsilon, U, \frac{\rho}{2}, \rho^{-J}) \cap H_k(\rho^2)$$

où  $\rho \geq 6$ .

On sait par la proposition 4.2.3 et les remarques que nous avons faites lors de la définition de  $H_k(\rho)$  qu'une certaine réunion dénombrable  $R$  de tels ensembles vérifie :  $\mu(R(f) \setminus R) = 0$ .

Fixons alors un des ensembles  $N = N(\varepsilon, U, \rho, J, k)$  de cette réunion dénombrable. Soit  $x \in N$ . Alors :

( $\alpha$ )  $x \in H_k(\rho^2)$  donc il existe une suite  $j_n$  tendant vers  $+\infty$  telle que pour tout  $n$  :

$$\frac{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-j_n+2}}(x))} \geq \frac{1}{k}$$

(donc en particulier  $\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))/\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x)) \geq 1/k$  et  $\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x))/\mu(B_{\rho^{-j_n+2}}(x)) \geq 1/k$ )

( $\beta$ )  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$  donc la proposition 4.2.7.a nous dit que pour tout  $\bar{r} \leq \rho^{-J}$  :

$$\begin{aligned} \mu(B_{\rho\bar{r}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f)) &\geq \mu(\overline{B}_{\rho\bar{r}/2}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f)) \\ &\geq \mu(B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)) \end{aligned}$$

donc en particulier pour  $\bar{r} = \rho^{-j_n}$  si  $n$  est assez grand on a :

$$\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f)) \geq \mu(B_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(f)).$$

Définissons alors  $S = R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap \Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$ .  $S$  est une partie borélienne (on a vu dans la démonstration du lemme de fermeture d'orbite que  $R(f)$  et  $\Sigma(U, \varepsilon)$  sont boréliens, et en proposition 4.2.2 que  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$  est borélien). On peut donc utiliser la proposition 4.2.8.a pour cet ensemble et  $\rho$ . Comme  $x \in H_k(\rho^2) \subset H_k(\rho)$ , on peut calculer :

$$\bar{f}_{j_n}(x) \geq \frac{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f))}{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x))}$$

(car on a remarqué en ( $\alpha$ ) que  $\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x)) / \mu(B_{\rho^{-j_n+2}}(x)) \geq 1/k$ ).

La quantité de gauche est égale à :

$$\frac{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f))}{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(f))} \cdot \frac{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(f))}{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))} \cdot \frac{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x))}$$

Or :

(a) on a vu en ( $\beta$ ) que le premier rapport

$$\frac{\mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(f))}{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(f))}$$

est supérieur ou égal à 1 ;

(b) on a vu en ( $\alpha$ ) que  $\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x)) / \mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x)) \geq 1/k$  et donc en appliquant à  $S = R(f)$  la proposition 4.2.8.a, on voit que le deuxième rapport

$$\frac{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(f))}{\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x))}$$

est supérieur à  $1/2$  dès que

$$x \in (R(f) \cap H_k(\rho)) \setminus E$$

où  $E$  est un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle et que  $n$  est assez grand ;

(c) quant au dernier rapport  $\mu(B_{\rho^{-j_n}}(x)) / \mu(B_{\rho^{-j_n+1}}(x))$ , il est plus grand que  $1/k$  par ( $\alpha$ ).

Finalement, on trouve que pour  $x \in (R(f) \cap N) \setminus E$ ,  $\bar{f}_{j_n}(x) \geq 1/2k$  dès que  $n$  est assez grand. Or, la suite  $(\bar{f}_j)$  converge  $\mu$ -presque partout dans  $R(f) \cap N$  vers la fonction caractéristique de  $R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap N$ , qui ne prend que les valeurs 0 ou 1. On en déduit immédiatement que :  $\mu((R(f) \setminus \Sigma(U, \varepsilon)) \cap N) = 0$ .

Comme on sait que  $M$  est une réunion dénombrable d'ensembles de la forme  $N$ , on trouve immédiatement :  $\mu(R(f) \setminus \Sigma(U, \varepsilon)) = 0$ .

*Cas des flots (et des champs de vecteurs).* — Nous ne traitons que le cas des flots, celui des champs de vecteurs lui étant identique (il suffit de changer les  $\varphi$  en  $X$ ). Soit  $\mu$  une mesure borélienne sur  $M$ , finie sur les compacts et invariante par  $\varphi$ .

Soit  $C$  l'ensemble des points critiques de  $\varphi$ . Tout point de  $C$  est périodique, donc dans  $\Sigma(\varphi)$ . Aussi, pour montrer la version ergodique du «closing lemma» pour  $\varphi$ , il suffit de montrer que :  $\mu(R(\varphi) \setminus (\Sigma(\varphi) \cup C)) = 0$ . De plus,  $M \setminus C$  s'écrit comme réunion d'ensembles de la forme  $M \setminus W$ ,  $W$  désignant un voisinage de  $C$ . Pour montrer la version ergodique du «closing lemma» en  $\varphi$ , il suffit de montrer que :  $\mu(R(\varphi) \setminus (\Sigma(\varphi) \cup W)) = 0$ . On considère alors les ensembles de la forme :

$$N(\varepsilon, U, \rho, J, k) = \Sigma(\varepsilon, U, \frac{\rho}{2}, \rho^{-J}) \cap H_k(\rho^2, W)$$

On sait par la proposition 4.2.3 et les remarques que nous avons faites lors de la définition de  $H_k(\rho, W)$  qu'une certaine réunion dénombrable  $R$  de tels ensembles vérifie :  $\mu(R(\varphi) \setminus (R \cup W)) = 0$ .

Fixons alors un des ensembles  $N = N(\varepsilon, U, \rho, J, k)$  de cette réunion dénombrable. Soit  $x \in N$ . Alors :

( $\alpha$ )  $x \in H_k(\rho^2, W)$  donc il existe une suite  $j_n$  tendant vers  $+\infty$  telle que pour tout  $n$  :

$$\frac{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(P_{\rho^{-j_n+2}}(x))} \geq \frac{1}{k}$$

(donc en particulier  $\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x)) / \mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x)) \geq 1/k$  et  
 $\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x)) / \mu(P_{\rho^{-j_n+2}}(x)) \geq 1/k$ )

( $\beta$ )  $x \in \Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$  donc la proposition 4.2.7.b nous dit que pour tout  $\bar{r} \leq \rho^{-J}$  :

$$\begin{aligned} \mu(P_{\rho\bar{r}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi)) &\geq \mu(\bar{P}_{\rho\bar{r}/2}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi)) \\ &\geq \mu(P_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)) \end{aligned}$$

donc en particulier pour  $\bar{r} = \rho^{-j_n}$  si  $n$  est assez grand on a :

$$\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi)) \geq \mu(P_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(\varphi)).$$

Définissons alors  $S = R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap \Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$ .

$S$  est une partie borélienne (on a vu dans la démonstration du lemme de fermeture d'orbite que  $R(\varphi)$  et  $\Sigma(U, \varepsilon)$  sont boréliens, et en proposition 4.2.2 que  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho/2, \rho^{-J})$  est borélien). On peut donc utiliser la proposition 4.2.8.b pour cet ensemble et  $\rho$ . Comme  $x \in H_k(\rho^2, W) \subset H_k(\rho, W)$ , on peut calculer :

$$\bar{f}_{j_n}(x) \geq \frac{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi))}{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x))}$$

(car on a remarqué en ( $\alpha$ ) que  $\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x)) / \mu(P_{\rho^{-j_n+2}}(x)) \geq 1/k$ ).

La quantité de gauche est égale à :

$$\frac{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi))}{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(\varphi))} \cdot \frac{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(\varphi))}{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x))} \cdot \frac{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x))}{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x))}$$

Or :

(a) on a vu en  $(\beta)$  que le premier rapport

$$\frac{\mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi))}{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(\varphi))}$$

est supérieur ou égal à 1 ;

(b) on a vu en  $(\alpha)$  que  $\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x)) / \mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x)) \geq 1/k$  et donc en appliquant à  $S = R(\varphi)$  la proposition 4.2.8.b, on voit que le deuxième rapport

$$\frac{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x) \cap R(\varphi))}{\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x))}$$

est supérieur à  $1/2$  dès que

$$x \in (\varphi \cap H_k(\rho, W)) \setminus E$$

où  $E$  est un ensemble de  $\mu$ -mesure nulle et que  $n$  est assez grand ;

(c) quant au dernier rapport  $\mu(P_{\rho^{-j_n}}(x)) / \mu(P_{\rho^{-j_n+1}}(x))$ , il est plus grand que  $1/k$  par  $(\alpha)$ .

Or, la suite  $(\bar{f}_j)$  converge  $\mu$ -presque partout dans  $R(\varphi) \cap N$  vers la fonction caractéristique de  $R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap N$ , qui ne prend que les valeurs 0 ou 1. On en déduit immédiatement que :  $\mu((R(\varphi) \setminus (\Sigma \cup W)(U, \varepsilon)) \cap N) = 0$ .

Finalement, on trouve que pour  $x \in (R(\varphi) \cap N) \setminus (E \cup W)$ ,  $\bar{f}_{j_n}(x) \geq 1/2k$  dès que  $n$  est assez grand. Or, la suite  $(\bar{f}_j)$  converge  $\mu$ -presque partout dans  $R(\varphi) \cap N \setminus W$  vers la fonction caractéristique de  $R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap N \setminus W$ , qui ne prend que les valeurs 0 ou 1. On en déduit immédiatement que :  $\mu((R(\varphi) \setminus (\Sigma(U, \varepsilon) \cup W)) \cap N) = 0$ .

Comme on sait que  $M$  est une réunion dénombrable d'ensembles de la forme  $N$ , on trouve immédiatement :

$$\mu(R(\varphi) \setminus (\Sigma(U, \varepsilon) \cup W)) = 0$$

donc

$$\mu(R(\varphi) \setminus \Sigma(U, \varepsilon)) = 0.$$

□

### 4.3. Démonstration des résultats intermédiaires

Nous ne démontrerons pas le lemme 4.2.4, qui est très simple.

*Démonstration de la proposition 4.2.5.a.* — Reprenons les notations de la proposition. On écrira :  $K_0 = K_{\rho^{-1}}$ .  $\mu$  étant une mesure borélienne de  $M$  finie sur  $K_0$ , notons  $m_0 = \mu(K_0)$  et définissons pour tout  $J \geq 1$  et  $\delta > 0$  :

$$E_{J,\delta} = \{x \in K \mid \forall j \geq J, \mu(B_{\rho^{-(j+1)}}(x)) \leq \delta \mu(B_{\rho^{-j}}(x))\}.$$

Alors, si  $x \in E_{J,\delta}$ , on a :

$$\forall j \geq J, \mu(B_{\rho^{-j}}(x)) \leq \delta^{j-J} \mu(B_{\rho^{-J}}(x)) \leq \delta^{j-J} m_0.$$

Fixons maintenant  $j \geq J$ .  $E_{J,\delta}$  est recouvert par les boules de rayon  $\rho^{-j}/2$  centrées sur  $E_{J,\delta}$ , donc  $\overline{E}_{J,\delta}$  aussi (car le rayon de ces boules,  $\rho^{-j}/2$ , est constant). On peut donc extraire de ce recouvrement un recouvrement fini de  $\overline{E}_{J,\delta}$  par  $B_{\rho^{-j}/2}(x_1), B_{\rho^{-j}/2}(x_2), \dots, B_{\rho^{-j}/2}(x_m)$ .

On peut alors extraire une sous-famille  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  telle que :

- $(B_{\rho^{-j}}(y_i))_{1 \leq i \leq n}$  est un recouvrement de  $\overline{E}_{J,\delta}$  ;
- $\forall i \neq k, d(y_i, y_k) \geq \rho^{-j}/2$  ;  
(si en effet il existe  $i$  et  $k$  tels que

$$1 \leq i < k \leq m \text{ et } d(x_i, x_k) < \frac{\rho^{-j}}{2},$$

alors  $B_{\rho^{-j}/2}(x_k) \subset B_{\rho^{-j}}(x_i)$  et donc on peut supprimer  $x_k$  pour construire la suite des  $y_i$ )

On a donc finalement : si  $i \neq k$ , alors :  $B_{\rho^{-j}/4}(y_i) \cap B_{\rho^{-j}/4}(y_k) = \emptyset$ .

Estimons le nombre maximal de telles boules ainsi obtenues ; on peut, à l'aide d'une partition de l'unité, définir une mesure  $\lambda$  sur  $K_0$  transportée de la mesure de Lebesgue de  $\mathbf{R}^d$  dans les cartes (où  $d$  est la dimension de  $M$ ). Alors il existe deux constantes  $c_1, \varepsilon_1$  telles que :

$$\forall r \in ]0, \varepsilon_1[, \forall x \in K, \lambda(B_r(x)) \geq c_1 r^d.$$

Alors, si  $\rho^{-j}/4 < \varepsilon_1$  :

$$\begin{aligned} c_2 = \lambda(K_0) &\geq \sum \lambda(B_{\rho^{-j}/4}(y_i)) \\ &\geq \sum c_1 \left( \frac{\rho^{-j}}{4} \right)^d \end{aligned}$$

donc le nombre de boules ainsi obtenues est :  $N_j \leq (c_2/c_1) 4^d \rho^{dj}$ .

Finalement, on peut estimer la  $\mu$ -mesure de  $E_{J,\delta}$  :

$$\begin{aligned} \mu(E_{J,\delta}) &\leq \sum_{j=1}^n \mu(B_{\rho^{-j}}(y_i)) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \delta^{j-J} \mu(B_{\rho^{-j}}(y_i)) \\ &\leq N_j \delta^{j-J} m_0 \\ &\leq \frac{c_2 m_0}{c_1} 4^d \delta^{-J} (\delta \rho^d)^j \end{aligned}$$

si on choisit  $\delta < 1/\rho^d$ , on trouve en faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$  que

$$\mu(E_{J,\delta}) = 0.$$

□

Expliquons comment de ce résultat joint au lemme on déduit la proposition 4.2.5.b :

*Démonstration de la proposition 4.2.5.b.* — En utilisant les mêmes notations que dans le lemme, on voit que pour toute mesure borélienne  $\mu$  de  $M$  :

$$\forall x \in K \setminus W, \forall r \leq \frac{r_x}{c\rho}, \frac{\mu(P_r(x))}{\mu(P_{\rho r}(x))} \geq \frac{\mu(B_{r/c'}(x))}{\mu(B_{c\rho r}(x))}.$$

Soit alors  $k_0$  tel que  $\rho^{k_0} \geq \sup\{c, c'\}$ . On a :

$$\forall x \in K \setminus W, \forall r \leq \frac{r_x}{c\rho}, \frac{\mu(P_r(x))}{\mu(P_{\rho r}(x))} \geq \frac{\mu(B_{r/\rho^{k_0+1}}(x))}{\mu(B_{\rho^{k_0+1}r}(x))}.$$

Appliquons alors la proposition 4.2.5.a à  $\rho^{2(k_0+1)}$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute mesure borélienne  $\mu$  de  $M$ , l'ensemble :

$$E_1 = \{x \in K \mid \exists J, \forall j \geq J, \mu(B_{\rho^{-2(j+1)(k_0+1)}}(x)) \leq \delta \mu(B_{\rho^{-2j(k_0+1)}}(x))\}$$

est de  $\mu$ -mesure 0. Aussi, l'ensemble :

$$E_2 = \left\{x \in K \setminus W \mid \exists J, \forall j \geq J, \mu(P_{\rho^{-(2j+1)(k_0+1)}}(x)) \leq \delta \mu(P_{\rho^{(2j-1)(k_0+1)}}(x))\right\}$$

qui en est une partie est aussi de  $\mu$ -mesure 0. Finalement :

$$E = \{x \in K \setminus W \mid \exists J, \forall j \geq J, \mu(P_{\rho^{-(j+1)}}(x)) \leq \delta \mu(P_{\rho^{-j}}(x))\}$$

qui en est aussi une partie est de  $\mu$ -mesure 0. □

*Démonstration de la proposition 4.2.7.a.* — Nous reprenons les mêmes notations que dans l'énoncé. Fixons une constante  $\varepsilon' > 0$ . Considérons l'application :

$$\begin{aligned} F &: B_{\bar{r}}(x) \cap R(f) \longrightarrow B_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \\ & \quad y \longmapsto f^{m(y)}y \end{aligned}$$

où

$$m(y) = \inf\{k \geq 0 \mid f^k y \in \overline{B}_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon)\}.$$

Vu la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ ,  $F$  est bien définie (le lecteur peut se reporter aux remarques 4.2.6 qui suivraient la démonstration de la proposition 4.2.3).

De plus, on a vu précédemment (dans la démonstration du lemme de fermeture d'orbite, en 3.1) que  $\Sigma(U, \varepsilon)$  est ouvert. Aussi, si  $m = m(y)$ , il existe un voisinage  $W$  de  $y$  tel que :

$$\forall z \in W, f^m z \in B_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon)$$

et donc :

$$\forall z \in W \cap R(f), f^m z \in B_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon).$$

En d'autres termes, l'application  $m$  est semi-continue supérieurement, donc mesurable et donc  $F$  est aussi mesurable.

Montrons que  $F$  est injective :

- si  $y, z \in B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)$  ne sont pas sur une même orbite de  $f$ ,  $F(y)$  et  $F(z)$  ne sont pas sur une même orbite de  $f$  et donc sont distincts ;
- supposons maintenant que  $y \in B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)$  et posons :

$$r(y) = \inf\{r > 0 \mid f^r y \in B_{\bar{r}}(x)\}.$$

Alors, on sait par la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  que :  $0 \leq m(y) < r(y)$  donc que :  $m(y) < r(y) + m(f^{r(y)}(y))$ . Aussi, deux points différents d'une même orbite sous  $f$  ont des images sous  $F$  qui sont différentes.  $F$  est donc bien injective.

Montrons que  $F$  préserve  $\mu$ . Soit  $E$  est une partie borélienne de  $B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)$ . On peut écrire :  $E = \bigcup E_n$  où  $E_n = \{y \in E \mid m(y) = n\}$  est mesurable. Alors :

$$F(E) = \bigcup F(E_n) = \bigcup f^n(E_n).$$

Comme cette dernière réunion est disjointe (car  $F$  est injective) et comme  $\mu$  est invariante par  $f$ , on en déduit :

$$\mu(F(E)) = \sum_{n \geq 0} \mu(f^n(E_n)) = \sum_{n \geq 0} \mu(E_n) = \mu(E).$$

Finalement, on a :

$$\mu(B_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon)) \geq \mu(F(B_{\bar{r}}(x) \cap R(f))) = \mu(B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)).$$

En faisant tendre  $\varepsilon'$  vers 0, on trouve le résultat cherché :

$$\mu(\overline{B}_{\rho\bar{r}}(x) \cap R(f) \cap \Sigma(U, \varepsilon)) \geq \mu(B_{\bar{r}}(x) \cap R(f)).$$

□

*Démonstration de la proposition 4.2.7.b.* — On fait la démonstration pour les flots, celle concernant les champs de vecteurs lui étant identique. Fixons  $\varepsilon' > 0$ .

$\mu$  induit sur  $\Pi_{r_x}(x)$  une mesure  $\mu_0$  définie par : si  $A \subset \Pi_{r_x}(x)$  est borélien,  $\mu_0(A) = \mu(F_p([0, r_x] \times A))$  où  $F_p$  désigne l'application  $(t, y) \mapsto \varphi_t(y)$ . Alors, il est classique que  $\mu_0$  est invariante par l'application de premier retour de Poincaré dans  $\Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x)$ , notée  $P$ . Rappelons que cette application est borélienne, que son ensemble de définition contient  $R(\varphi) \cap \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x)$  et qu'elle est définie par :

$$P(y) = \varphi_{t(y)}(y) \text{ où } t(y) = \inf\{t > 0 \mid \varphi_t y \in \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x)\}.$$

Nous allons alors montrer au lieu du résultat énoncé :

$$\mu_0(\overline{\Pi_{\rho\bar{r}}}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \cap R(\varphi)) \geq \mu_0(\Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)).$$

Il est clair que ce dernier résultat implique le résultat voulu.

Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} F & : \quad \Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi) \longrightarrow \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon) \\ & \quad y \longmapsto P^{m(y)}y \end{aligned}$$

où

$$m(y) = \inf\{k \geq 0 \mid P^k y \in \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon)\}.$$

Vu la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$ ,  $F$  est bien définie (le lecteur peut se reporter à la remarque qui suivait la démonstration de la proposition 4.2.3).

De plus, comme  $\Sigma(U, \varepsilon)$  est ouvert (on l'a vu dans la démonstration du lemme de fermeture d'orbite), si  $m = m(y)$ , il existe un voisinage  $W$  de  $y$  tel que :

$$\forall z \in W, P^m z \in \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap \Sigma(U, \varepsilon)$$

et donc :

$$\forall z \in W \cap R(\varphi), P^m z \in \Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon).$$

En d'autres termes, l'application  $m$  est semi-continue supérieurement, donc mesurable et donc  $F$  est aussi mesurable.

Montrons que  $F$  est injective :

- si  $y, z \in \Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)$  ne sont pas sur une même orbite de  $\varphi$ ,  $F(y)$  et  $F(z)$  ne sont pas sur une même orbite de  $\varphi$  et donc sont distincts ;
- supposons maintenant que  $y \in \Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)$  et posons :

$$r(y) = \inf\{r > 0 \mid P^r y \in \Pi_{\bar{r}}(x)\}.$$

Alors, on sait par la définition de  $\Sigma(\varepsilon, U, \rho, r)$  que :  $0 \leq m(y) < r(y)$  donc que :  $m(y) < m(P^{r(y)}(y))$ . Aussi, deux points différents d'une même orbite sous  $\varphi$  ont des images sous  $F$  qui sont différentes.  $F$  est donc bien injective.



Montrons que  $F$  préserve  $\mu_0$ . Soit  $E$  est une partie borélienne de  $\Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)$ . On peut écrire :  $E = \bigcup E_n$  où  $E_n = \{y \in E \mid m(y) = n\}$  est mesurable. Alors :

$$F(E) = \bigcup F(E_n) = \bigcup P^n(E_n).$$

Comme cette dernière réunion est disjointe (car  $F$  est injective) et comme  $\mu_0$  est invariante par  $P$ , on en déduit :

$$\mu_0(F(E)) = \sum_{n \geq 0} \mu_0(P^n(E_n)) = \sum_{n \geq 0} \mu_0(E_n) = \mu_0(E).$$

Finalement, on a :

$$\mu_0(\Pi_{\rho\bar{r}+\varepsilon'}(x) \cap R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon)) \geq \mu_0(F(\Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi))) = \mu_0(\Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)).$$

En faisant tendre  $\varepsilon'$  vers 0, on trouve bien :

$$\mu_0(\bar{\Pi}_{\rho\bar{r}}(x) \cap R(\varphi) \cap \Sigma(U, \varepsilon)) \geq \mu_0(\Pi_{\bar{r}}(x) \cap R(\varphi)).$$

□

*Démonstration de la proposition 4.2.8.a.* — Le premier lemme est un lemme analogue au lemme de Vitali :

LEMME 4.3.1. — Soit  $\rho \geq 3$ . On définit :

$$B_k(\rho) = \left\{ B_{\rho^{-j}}(x) \mid x \in H_k(\rho), \frac{\mu(B_{\rho^{-j}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-j+1}}(x))} \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Soit  $A$  l'union d'une sous-famille dénombrable  $F = \{F_1, F_2, \dots\}$  de  $B_k(\rho)$  telle que la suite des rayons des  $F_i$  est décroissante. Alors il existe une sous-famille disjointe  $F'$  de  $F$  dont l'union  $A'$  vérifie :

$$\mu(A) \leq k \mu(A').$$

*Démonstration.* — On définit une suite d'entiers  $(i_n)$  (éventuellement finie) par :  $i_1 = 1$ ,  $i_2$  est le plus petit entier tel que  $F_{i_1} \cap F_{i_2} = \emptyset$ ,  $i_3$  est le plus petit entier tel que  $F_{i_3} \cap (F_{i_1} \cup F_{i_2}) = \emptyset$ , .... On trouve alors les boules ouvertes  $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots$ . Soit  $G_j$  la boule ouverte de même centre que  $F_{i_j}$  et de rayon multiplié par  $\rho$ . À chaque  $F_i$  correspond un  $i_j \leq i$  tel que  $F_{i_j} \cap F_i \neq \emptyset$  donc tel que  $F_i \subset G_j$ . Aussi :  $A \subset \left( \bigcup_{j \geq 1} G_j \right)$

et donc :

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu\left(\bigcup_{j \geq 1} G_j\right) \\ &\leq \sum_{j \geq 1} \mu(G_j) \\ &\leq k \sum_{j \geq 1} \mu(F_{i_j}) = k \mu(A'). \end{aligned}$$

□

LEMME 4.3.2. — Soit  $A$  une partie borélienne de  $M$  telle que  $\mu(A \cap S) = 0$ . Alors :  $\bar{f}_j = \underline{f}_j = 0$  presque partout sur  $A$ .

*Démonstration.* —  $\mu$  étant régulière (car borélienne), il suffit de démontrer le résultat pour  $A$  compacte pour l'avoir pour toute partie  $A$  borélienne. On suppose donc  $A$  compacte.

Fixons  $\alpha > 0$  et considérons

$$A_\alpha = \{x \in A \cap H_k(\rho) \mid \bar{f}_{j_0}(x) \geq \alpha\}.$$

Nous voulons montrer que cet ensemble est inclus dans un borélien de  $\mu$ -mesure nulle quels que soient  $\alpha$  et  $k$ . Supposons que ce ne soit pas le cas : il existe  $m = \mu^*(A_\alpha) > 0$  tel que toute partie borélienne contenant  $A_\alpha$  est de  $\mu$ -mesure plus grande que  $m$  (c'est ce qu'on appelle la mesure extérieure de  $A_\alpha$ ).

Fixons alors un  $\delta > 0$ . Pour tout  $x \in A_\alpha$ , comme  $x \in H_k(\rho)$ , il existe  $j = j_x \geq j_0$  tel que :

$$\rho^{-j} < \delta, \quad \frac{\mu(B_{\rho^{-j}}(x))}{\mu(B_{\rho^{-j+1}}(x))} \geq \frac{1}{k}, \quad \frac{\mu(B_{\rho^{-j}}(x) \cap S)}{\mu(B_{\rho^{-j}}(x))} \geq \alpha.$$

On obtient ainsi un recouvrement infini de  $A_\alpha$ . On en extrait un sous-recouvrement dénombrable comme suit :

pour chaque  $j \geq j_0$ , soit  $A_{\alpha,j} = \{x \in A_\alpha \mid j_x = j\}$ . Alors,  $A_{\alpha,j}$  est recouvert par des boules de rayon fixé  $\rho^{-j}$ , donc son adhérence (compacte), est recouverte par ces mêmes boules, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini de  $\bar{A}_{\alpha,j}$  donc de  $A_{\alpha,j}$ . En faisant cela pour chaque  $j$ , on obtient un sous-recouvrement dénombrable de  $A_\alpha$  par des boules dont les rayons sont rangés en ordre décroissant, noté  $F_1$ .

On peut alors appliquer le lemme 4.3.1 et en déduire l'existence d'une sous-famille disjointe  $F_2$  de  $F_1$  qui recouvre  $A_\alpha$  telle que :

$$\mu\left(\bigcup_{B \in F_1} B\right) \leq k \mu\left(\bigcup_{B \in F_2} B\right) = k \sum_{B \in F_2} \mu(B)$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mu^*(A_\alpha)}{k} &= \frac{m}{k} \leq \frac{1}{k} \mu\left(\bigcup_{B \in F_1} B\right) \\ &\leq \sum_{B \in F_2} \mu(B) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \mu\left(\bigcup_{B \in F_2} B \cap S\right). \end{aligned}$$

Mais :

$$\bigcup_{B \in F_2} B \subset \{x \in M \mid d(x, A) \leq \delta\} = A_\delta.$$

Aussi, on a :  $\mu(A_\delta \cap S) \geq \alpha m/k > 0$  et en faisant tendre  $\delta$  vers 0, on trouve :  $0 = \mu(A \cap S) \geq \alpha m/k > 0$  ce qui est une contradiction.  $\square$

Finissons maintenant la démonstration de la proposition.

Considérons  $A = M \setminus S$ , on trouve par le lemme 4.3.2 :

$$\overline{f}|_{A \cap H_k(\rho)} = \underline{f}|_{A \cap H_k(\rho)} = 0.$$

Construisons  $\overline{g}_j, \underline{g}_j, \overline{g}$  et  $\underline{g}$  à partir de  $A$  comme nous avons construit  $\overline{f}_j, \underline{f}_j, \overline{f}$  et  $\underline{f}$  à partir de  $S$ . Alors,  $\overline{g} = \underline{g} = 0$  sur  $S$ . Or, on a les relations :  $\overline{g} + \underline{f} = 1$  et  $\underline{g} + \overline{f} = 1$  par la définition de ces fonctions. Donc finalement :  $\overline{f}|_{S \cap H_k(\rho)} = \underline{f}|_{S \cap H_k(\rho)} = 1$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.2.8.b.* — Le premier lemme est un lemme analogue au lemme 4.3.1. On reprend les mêmes notations que dans ce lemme :

LEMME 4.3.3. — Soit  $\rho \geq 3c \cdot c'$ . Soit  $W$  un voisinage de l'ensemble  $C$  des points critiques de  $\phi$ . On définit :

$$P_k(\rho, W) = \left\{ P_{\rho^{-j}}(x) \mid x \in H_k(\rho, W), \frac{\mu(P_{\rho^{-j}}(x))}{\mu(P_{\rho^{-j+1}}(x))} \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

( $r$  sera le «rayon» de  $P_r(x)$ ). Soit  $A$  l'union d'une sous-famille dénombrable

$$F = \{F_1, F_2, \dots\}$$

de  $P_k(\rho, W)$  telle que la suite des rayons des  $F_i$  est décroissante. Alors il existe une sous-famille disjointe  $F'$  de  $F$  dont l'union  $A'$  vérifie :

$$\mu(A) \leq k^2 \mu(A').$$

*Démonstration.* — Par le lemme 4.2.4, on sait que si  $r \leq r_x/c \cdot c'$ , on a :

$$P_{r/c \cdot c'}(x) \subset B_{r/c'}(x) \subset P_r(x) \subset B_{cr}(x) \subset P_{r \cdot c \cdot c'}(x)$$

donc si  $P_r(x) \in P_k(\rho, W)$  est de rayon assez petit, on a :

$$\frac{\mu(B_{cr}(x))}{\mu(B_{3cr}(x))} \geq \frac{\mu(P_r(x))}{\mu(P_{3cc'r}(x))} \geq \frac{\mu(P_r(x))}{\mu(P_{\rho r}(x))} \geq \frac{1}{k}$$

car  $P_r(x) \subset B_{cr}(x)$  et  $B_{3cr}(x) \subset P_{3cc'r}(x) \subset P_{\rho r}(x)$ .

Posons alors  $F_1 = \{B_{cr}(x) \mid P_r(x) \in F\}$ . Appliquons le lemme 4.3.1 à la famille  $F_1$  et  $\rho_0 = 3$ . On trouve une sous-famille disjointe  $F'_1$  de  $F_1$  telle que :

$$\mu\left(\bigcup_{B \in F_1} B\right) \leq k \mu\left(\bigcup_{B \in F'_1} B\right).$$

Or, si  $P_r(x) \in F$ , on a  $P_r(x) \subset B_{cr}(x)$  avec  $B_{cr}(x) \in F_1$  et si  $B_{cr}(x) \in F_1$ , on a :  $B_{cr}(x) \subset P_{cc'r}(x) \subset P_{\rho r}(x)$ , donc :

$$\mu\left(\bigcup_{P \in F} P\right) \leq k \sum_{B \in F'_1} \mu(B) \leq k \sum_{P_r(x) \in F'} \mu(P_{\rho r}(x)) \leq k^2 \sum_{P \in F'} \mu(P)$$

où  $F' = \{P_r(x) \mid B_{cr}(x) \in F'_1\}$  est bien disjointe.  $\square$

LEMME 4.3.4. — *Soit  $A$  une partie borélienne de  $M$  telle que  $\mu(A \cap S) = 0$ . Alors :  $\overline{f}_j = \underline{f}_j = 0$  presque partout sur  $A$ .*

La démonstration de ce lemme est juste une copie de celle du lemme 4.3.2, en remplaçant les  $B$  par des  $P$  et les  $k$  par des  $k^2$ .

La démonstration de la proposition est alors identique à celle de la proposition précédente.  $\square$



## CHAPITRE 5

### PLAN DE LA DÉMONSTRATION DU « CLOSING LEMMA »

Dans tous les cas envisagés (difféomorphismes, flots et champs de vecteurs), le « closing lemma » sera la conséquence de deux résultats principaux :

- un résultat perturbatif décrivant la taille du support que doit avoir une perturbation de taille (en topologie  $C^1$ ) fixée pour bouger un point d'une distance  $\delta$  donnée ;
- un énoncé concernant l'existence de « bonnes » suites (finies) de points le long desquels on peut perturber le difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs considéré de manière à obtenir une orbite périodique.

Le premier résultat est assez simple à démontrer. Grâce à une remarque de M. Herman, nous en déduisons qu'on peut faire des perturbations de taille fixée en topologie  $C^1$  (mais pas de taille petite) de manière à obtenir une orbite périodique.

Le deuxième résultat est difficile. Il découle d'un résultat algébrique compliqué à démontrer, que nous énoncerons au chapitre 6.

Dans le chapitre 5, nous nous contenterons d'énoncer les résultats intermédiaires et d'en déduire le « closing lemma ». Les résultats intermédiaires seront démontrés au chapitre 6.

#### 5.1. Un résultat perturbatif

Nous gardons pour  $D$ ,  $F$  et  $CV$  les mêmes notations qu'à la section 2.1.  $B_x$  désignera la boule unité fermée de  $T_xM$  (pour la métrique riemannienne) et si  $v \in B_x$ ,  $x + v$  désignera  $\exp_x v$ . Écrire  $x + v$  contiendra le fait que cette quantité est bien définie.

PROPOSITION 5.1.1. — *Soient  $U$  un voisinage de  $\text{Id}$  dans  $D$  en topologie  $C^1$  et  $K$  un compact de  $M$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que quel que soient  $p \in K$  et  $v \in B_p$ , il existe une perturbation  $g \in U$  de l'identité telle que :*

- (i)  $\text{Supp } g \subset B_{|v|}(p)$  ;
- (ii)  $g(p) = p + \varepsilon v$ .

Ainsi, ce résultat, qui sera démontré en 6.1, permet de bouger par une perturbation  $g$  de l'identité un point  $p \in M$  d'un vecteur  $w$  de norme proportionnelle à la taille du support de  $g$ .

On peut en déduire un résultat qui permet de voir qu'on peut fermer certaines orbites d'un difféomorphisme fixé à l'aide de perturbations de taille finies en topologie  $C^1$ .

**PROPOSITION 5.1.2.** — *Soient  $f \in D$  et  $K$  une partie compacte de  $M$ . Alors il existe une constante  $M_1 > 0$  telle que pour tout point non errant  $p \in K$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $g \in D$  telle que :*

- $g = f$  dans  $M \setminus B_\varepsilon(p)$  ;
- $\|Dg - Df\| \leq M_1$  (on prend le supremum des normes d'applications linéaires) ;
- $g$  a un point périodique dans  $B_\varepsilon(p)$ .

*Démonstration.* —  $K$  étant compacte, on peut trouver  $1 > \alpha > 0$  constante telle que  $K_\alpha = \{x \in M \mid d(x, K) \leq \alpha\}$  est compacte.

Définissons un voisinage  $U$  de  $\text{Id}$  dans  $D$  par :

$$U = \{g \in D \mid \|Dg_{K_\alpha} - D\text{Id}_{K_\alpha}\| < 1\}.$$

À l'aide de la proposition 5.1.1 pour le compact  $K_\alpha$  et le voisinage  $U$  de  $\text{Id}$ , on peut trouver une constante  $\varepsilon_0$ . Posons  $N_0 = [4/\varepsilon_0] + 1$ , puis définissons :

$$M_1 = \|Df_{K_\alpha}\| 2^{N_0}.$$

Considérons alors un point non errant  $p \in K$  et un  $\varepsilon > 0$  dont on peut supposer qu'il est inférieur à  $\alpha$ .

Comme  $p$  est non errant, il existe  $x \in B_{\varepsilon/7}(p)$  et  $m \geq 1$  tels que :

$$f^m x \in B_{\varepsilon/7}(p).$$

Supposons que  $x$  ne soit pas périodique (sinon le résultat est déjà montré). Considérons alors  $X = \{f^k x \mid 0 \leq k \leq m\}$  puis :

$$\Delta = \{(z, z') \in (X \cap B_\varepsilon(p))^2 \mid B_{3d(z, z')}(z) \subset B_\varepsilon(p) \text{ et } z \neq z'\}.$$

Alors,  $\Delta$  contient  $(x, f^m x)$  donc est non vide. Soit  $(v_1, v_2)$  un élément de  $\Delta$  pour lequel  $d(v_1, v_2)$  est minimale. Alors :

- comme  $B_{3d(v_1, v_2)}(v_1) \subset B_\varepsilon(p)$ , on a :

$$B_{d(v_1, v_2)}(v_1) \cup B_{d(v_1, v_2)}(v_2) \subset B_\varepsilon(p) ;$$

- par définition de  $(v_1, v_2)$  :

$$\forall z \in (X \cap B_\varepsilon(p)) \setminus \{v_1\}, d(v_1, z) \geq d(v_1, v_2)$$

(sinon le couple  $(v_1, z)$  contredirait la définition de  $(v_1, v_2)$ ) ;

– par définition de  $(v_1, v_2)$  :

$$\forall z \in (X \cap B_\varepsilon(p)) \setminus \{v_2\}, d(v_2, z) \geq \frac{d(v_1, v_2)}{2}$$

(sinon le couple  $(v_2, z)$  contredirait la définition de  $(v_1, v_2)$ ).

Aussi, l'ensemble  $B_{d(v_1, v_2)}(v_1) \cup B_{d(v_1, v_2)/2}(v_2)$  est inclus dans  $B_\varepsilon(p)$  et ne rencontre  $X$  qu'en  $v_1$  et  $v_2$ . Posons  $\delta = d(v_1, v_2)$ . On a alors :

$$\forall x \in [v_1, v_2], B_{\delta/4}(x) \subset B_\delta(v_1) \cup B_{\delta/2}(v_2)$$

(pour voir ceci, il suffit de distinguer le cas  $d(x, v_2) \leq \delta/4$  pour lequel  $B_{\delta/4}(x) \subset B_{\delta/2}(v_2)$  et le cas  $d(x, v_1) \leq 3\delta/4$  pour lequel  $B_{\delta/4}(x) \subset B_\delta(v_1)$ ).

Il y a alors deux possibilités : soit  $v_1$  est « avant »  $v_2$  sur l'orbite de  $x$ , soit  $v_2$  est avant  $v_1$  sur l'orbite de  $x$ . Les deux cas se traitant de façon similaire, nous allons par exemple supposer que  $v_1$  est avant  $v_2$ . Définissons alors une suite de points  $(x_j)_{0 \leq j \leq N_0}$  de  $[v_1, v_2]$  par :  $d(v_2, x_j) = j\delta/N_0$ . On a alors :

$$\forall j \in [0, N_0 - 1], d(x_j, x_{j+1}) = \frac{\delta}{N_0} \leq \varepsilon_0 \frac{\delta}{4}.$$

On peut alors à l'aide de la proposition 5.1.1 construire  $g_j \in U$  telle que :

- (i)  $\text{Supp } g_j \subset B_{\delta/4}(x_j) \subset B_\delta(v_1) \cup B_{\delta/2}(v_2) \subset B_\varepsilon(p)$  ;
- (ii)  $g(x_j) = x_{j+1}$ .

Posons  $g = g_{N_0-1} \circ \dots \circ g_1 \circ g_0$  puis  $F = f \circ g$ . Alors :

- comme chaque  $g_j$  coïncide avec l'identité en dehors de  $B_\varepsilon(p)$  et vérifie  $\|Dg_j\| \leq 2$ , alors  $g$  coïncide avec l'identité en dehors de  $B_\varepsilon(p)$  et vérifie  $\|Dg\| \leq 2^{N_0}$  ; aussi,  $F$  coïncide avec  $f$  en dehors de  $B_\varepsilon(p)$  et vérifie  $\|DF\| \leq \|Df_{B_\varepsilon(p)}\| 2^{N_0} \leq M_1$  ;
- le support de chaque  $g_j$  est dans  $B_\delta(v_1) \cup B_{\delta/2}(v_2)$  donc il en est de même du support de  $g$ , donc le support de  $g$  ne rencontre  $X$  qu'en  $v_1$  et  $v_2$  ; si  $v_1 = f^{m_1}x$  et  $v_2 = f^{m_2}x$ , on a :  $\text{Supp } g \cap \{f^j x \mid m_1 < j < m_2\} = \emptyset$ . Aussi, on a :

$$\begin{aligned} F(v_2) &= f \circ g(v_2) = f(v_1) = f^{m_1+1}x && (\text{car } g(v_2) = v_1) ; \\ F^2(v_2) &= F(f^{m_1+1}x) = f \circ g(f^{m_1+1}x) = f^{m_1+2}x \\ &(\text{car } \text{Supp } g \cap \{f^j x \mid m_1 < j < m_2\} = \emptyset) ; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$F^{m_2-m_1}(v_2) = v_2.$$

Donc  $v_2$  est un point périodique de  $F$ , contenu dans  $B_\varepsilon(p)$ . □

Remarquons que nous avons fait en fait le même type de perturbation que celle que nous avons faite en topologie  $C^0$  dans la section 1.1 : on a considéré une orbite qui se referme presque, puis fait une perturbation du difféomorphisme uniquement là où l'orbite se referme presque, sans toucher à l'orbite intermédiaire. Mais pour pouvoir



faire ceci sans trop perturber le difféomorphisme en topologie  $C^1$ , on a considéré une orbite particulière.

Considérons maintenant le cas des flots. Nous garderons pour

$$\begin{aligned} \Phi_x & : [-r_x, r_x] \times \Pi(x) \longrightarrow M \\ & (t, y) \longmapsto \varphi_t(y) \end{aligned}$$

les mêmes notations qu'en 2.1.  $\Pi(x)$  sera muni d'une structure vectorielle (donnée par l'exponentielle de la métrique riemannienne par exemple) identifiant  $x$  à 0. De plus, nous noterons  $\Pi_r(p'; p)$  la boule de centre  $p'$  et de rayon  $r$  de  $\Pi(p)$  pour cette métrique. On a alors :

PROPOSITION 5.1.3. — *Soient  $\varphi \in F$ ,  $V$  un voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soient  $C$  l'ensemble des points fixes de  $\varphi$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C$ . Il existe alors une fonction continue  $\beta : K \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \longmapsto \inf\{1, r_x / \|X(x)\|\}$  telle que*

(0)  $\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\beta(p)\|X(p)\|}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K$ ,  $p' \in \Pi_{\beta(p)\|X(p)\|}(p)$  et  $v \in \Pi_{\beta(p)\|X(p)\| - \|p'\|}(p)$ , il existe  $\psi \in V$  tel que :

- (i)  $\text{Supp}(\varphi - \psi) \subset \Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$  ;
- (ii)  $\psi_{\beta(p)}(p') = \Phi_p(\beta(p), p' + \varepsilon v)$ .

Nous pourrions bien entendu donner pour les flots un énoncé analogue à la proposition 5.1.2, mais sa démonstration n'apporte aucune surprise par rapport à celle de la proposition 5.1.2. et nous allons démontrer par la suite le «closing lemma», qui est un résultat beaucoup plus fin.

Dans le cas des champs de vecteurs et avec les mêmes notations qu'à la section 2.1, on obtient pour les champs de vecteurs quelconques et les champs de vecteurs préservant le volume :

PROPOSITION 5.1.4. — *Soient  $X \in CV$  de flot associé noté  $(\varphi_t)$ ,  $V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \longmapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que*

(0)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K$  et  $v \in \Pi_{\delta(p)}(p)$ , il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

- (i)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p))$  ;
- (ii)  $\psi_{\lambda_1}(p) = \Phi_p(\lambda_1, p + \varepsilon v)$ .

Remarquons que l'énoncé que nous obtenons pour les champs de vecteurs est plus faible que celui concernant les flots : on doit supposer (ceci dans le but d'obtenir un résultat uniforme en  $p$ ) que l'ensemble sur lequel on fait des perturbations ne contient pas de point périodique de période « petite » (*i.e.* inférieure à  $\lambda$ ).

On considère maintenant le cas des champs de vecteurs symplectiques (décrit dans la section 2.2). Comme dans la section 2.2,  $(M, \omega)$  est une variété symplectique de  $\pi^1$  de type fini, et on pose pour tout  $k \geq 1$  :  $CV = X_\omega^k(M)$ . Si  $\alpha = [\lambda]$  est une classe de cohomologie monogène par intégration, on pose  $CV_\alpha = \{X \in CV \mid [i_X \omega] = \alpha\}$ . Si  $X \in CV_\alpha$  est de flot associé  $(\varphi_t)$  et si

$$\begin{aligned} \Phi_p & : [0, \lambda] \times \Pi_r(p) \longrightarrow M \\ & (t, p') \longmapsto \varphi_t(p') \end{aligned}$$

est une boîte de flot en  $p$ ,  $H_p$  désignera la primitive nulle en  $p$  de  $i_X \omega$ . On notera alors :

$$\Pi_r^0(p) = \{q \in \Pi_r(p) \mid H_p(q) = 0\}.$$

On démontre alors l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5.1.5. — Soient  $X \in CV_\alpha$  de flot associé noté  $(\varphi_t)$ ,  $V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \longmapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que

(0)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K$  et  $v \in \Pi_{\delta(p)}^0(p)$ , il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

- (i)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p))$  ;
- (ii)  $\psi_{\lambda_1}(p) = \Phi_p(\lambda_1, p + \varepsilon v)$ .

## 5.2. Un résultat concernant les suites de points

Le résultat concernant les suites de points que nous obtenons dans le cas des difféomorphismes est le suivant :

PROPOSITION 5.2.1. — Soit  $(M, d)$  une variété riemannienne de classe  $C^\infty$ . Soient  $f : M \longrightarrow M$  un difféomorphisme de classe  $C^1$ ,  $p \in M(f)$  non périodique,  $1/2 > \varepsilon > 0$ ,  $q \in \omega(p)$ . Il existe  $r > 0$ ,  $\rho > 1$  et un entier  $\alpha \geq 1$  tels que :

- (1) les  $f^j(B_{\rho r}(p))$  pour  $j \in [0, \alpha]$  sont deux à deux disjoints et  $\forall j \in [0, \alpha]$ , on a :  $f^j(B_{\rho r}(p)) \subset B_\varepsilon(f^j p)$  ;

(2) si  $x, f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ , alors il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$  et tels que  $f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho\bar{r}}(p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

(i)  $z_0 = f^{m_2} x, z_\alpha = f^{m_1 + \alpha} x$  et

$$\forall i \in [1, \alpha - 1], z_i \in f^i(B_{\rho\bar{r}}(p));$$

(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,

$$d(fz_i, z_{i+1}) \leq \varepsilon \inf_{m_1 + \alpha < j < m_2} \{d(fz_i, f^j x), d(fz_i, f^{i+1}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p)))\};$$

(iii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, d(fz_i, z_{i+1}) \neq 0 \Rightarrow z_i \in B_\varepsilon(q)$ .

Commentons un peu cet énoncé :

- une fois qu'on a fixé  $\alpha$  tel que l'on ait (2), on peut choisir sans problème  $r$  tel que la condition (1) soit vérifiée, ceci vient juste du fait que  $p$  est non périodique et  $f$  est continue;
- la suite  $(z_i)$  est la suite qui va nous permettre de faire une perturbation progressive le long de l'orbite de  $f^{m_1} x$  de façon à refermer cette orbite. Plus précisément :

(i) sert à dire qu'on joint  $f^{m_2} x$  à  $f^{m_1 + \alpha} x$  et que les  $z_i$  restent au voisinage de l'orbite de  $p$ ;

(ii) sert à dire que si on considère la boule « homothétique » par une homothétie de centre  $fz_j$  et de rapport  $1/\varepsilon$  de  $B_{d(fz_j, z_{j+1})}(fz_j)$ , alors cette nouvelle boule ne rencontre ni l'orbite intermédiaire

$$\{f^i x \mid m_1 + \alpha < i < m_2\},$$

ni la frontière  $f^{j+1}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p))$ , ce qui nous permettra à la section 5.3 d'appliquer la proposition 5.1.1 concernant les perturbations à l'intérieur de  $f^{j+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$  et sans toucher à l'orbite intermédiaire;

(iii) sert à dire qu'on pourra imposer à la perturbation d'être à support dans  $B_\varepsilon(q)$ .

Avant de donner le résultat concernant les flots que nous obtenons, rappelons ce qu'est une application de Poincaré : soit  $\varphi = (\varphi_t)$  un flot sur  $M$ ,  $p$  un point non critique, et  $t_0 > 0$ ; on peut alors localement définir une application de premier retour de  $\Pi(p)$  dans  $\Pi(\varphi_{t_0} p)$ , qui à  $q \in \Pi(p)$  assez proche de  $p$  associe le « premier » point de  $(\varphi_t q)_{t > 0}$  à être dans  $\Pi(\varphi_{t_0} p)$ . On notera cette application  $P(\varphi; p; t_0)$ . De plus,  $p$  étant fixé,  $\tau(t_0; q)$  sera le temps de Poincaré :  $\varphi_{\tau(t_0; q)}(q) \in \Pi(\varphi_{t_0} p)$ . On peut alors énoncer :

**PROPOSITION 5.2.2.** — *Soit  $(M, d)$  une variété riemannienne de classe  $C^\infty$ . Soient  $\varphi = (\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$  un flot de  $M$  de classe  $C^1$ ,  $p \in M(\varphi)$  non périodique,  $1/2 > \varepsilon > \varepsilon_0 > 0$ ,  $q \in \omega(p)$ . On note  $C$  l'ensemble des points fixes de  $\varphi$ . On suppose donnée une fonction  $\beta : B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  continue telle que :*

$$\forall q' \in B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C, \Phi_{q'}([0, \beta(q')]) \times \Pi_{\beta(q') \|X(q')\|}(q') \subset B_\varepsilon(q)$$

et  $\Phi_q$  est une submersion sur cet ensemble.

Alors, il existe  $r_p > r > 0$ ,  $\rho > 1$ , un entier  $\alpha \geq 1$  et une suite  $(t_i)_{0 \leq i \leq \alpha}$  telle que  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_\alpha$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,  $t_i + \beta(\varphi_{t_i} p) < t_{i+1}$  et :

$$(1) \quad \Phi \quad : \quad [0, t_\alpha + \sup_{0 \leq j \leq \alpha} \{\beta(\varphi_{t_j} p)\}] \times \Pi_{\rho r}(p) \quad \longrightarrow \quad M$$

$$(t, x) \quad \longmapsto \quad \varphi_t(x)$$

est une submersion telle que :

- (i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_\alpha} p)]$ ,  $\varphi_t(\Pi_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p)$  ;
  - (ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}$ ,  $\Phi([0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i} p)) \subset B_\varepsilon(q)$  ;
- (2) si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

$$(i) \quad z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2} x), \quad z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1} x) \quad \text{et}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, \quad z_i \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p) ;$$

$$(ii) \quad \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$$

$$d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1}))$$

$$\leq \varepsilon_0 \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1 + t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p))) \right\}.$$

On peut encore faire des remarques analogues à celles faites après la proposition 5.2.1 :

- une fois  $t_\alpha$  fixé tel que l'on ait (2), on peut choisir  $r$  sans problème tel que la condition (1)(i) soit vérifiée puisque  $p$  est non périodique et  $\varphi$  est continue ; pour vérifier la condition (1)(ii), il suffit de supposer que  $\varphi_{t_i} p \in B_{\varepsilon/2}(p)$ , ce que nous ferons quand nous construirons les  $t_i$  dans (2) ; ceci nous servira à imposer à la perturbation que l'on fera d'être à support dans  $B_\varepsilon(q)$  ;
- tout comme dans le cas des difféomorphismes, la suite  $(z_i)$  sert à faire une perturbation progressive le long de l'orbite de  $\varphi_{T_1} x$  de façon à refermer cette orbite. Plus précisément :

$$(i) \quad \text{sert à dire qu'on joint } \varphi_{T_2} x \text{ à } P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1} x) = \varphi_{T_1 + \tau(t_\alpha, p)}(x) \text{ et que}$$

$$\text{les } z_i \text{ restent au voisinage de l'orbite de } p ;$$

- (ii) nous permettra à la section 5.3 d'appliquer la proposition 5.1.2 concernant les perturbations à l'intérieur de

$$\Phi_{\varphi_{t_i} p}([0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p)) \subset B_\varepsilon(q)$$

et sans toucher à l'orbite intermédiaire.

Remarquons de plus que nous n'avons pas besoin de donner d'énoncé supplémentaire concernant les champs de vecteurs sans homologie puisque ceux-ci engendrent toujours un flot de classe  $C^1$ .

PROPOSITION 5.2.3. — *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Soient  $a$  une classe de cohomologie monogène par intégration,  $X \in CV_a$  (de flot associé  $(\varphi_t)$  et de pseudo-hamiltonien  $H$ ) de classe  $C^1$ ,  $p \in M(X)$  non périodique,  $1/2 > \varepsilon > \varepsilon_0 > 0$  et  $q \in \omega(p)$ . Soit  $\lambda > 0$ , on note  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$ . On suppose qu'il existe  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  et une fonction  $\delta : B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  continue tels que :*

$$\forall q' \in B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C_\lambda, \Phi_{q'}([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(q')}(q')) \subset B_\varepsilon(q)$$

et  $\Phi_{q'}$  est une submersion sur cet ensemble.

Alors, il existe un voisinage  $W$  de  $p$  dans  $\Pi(p)$ ,  $r \in ]0, r_p[$ ,  $\rho > 1$ , un entier  $\alpha \geq 1$  et une suite  $(t_i)_{0 \leq i < \alpha}$  vérifiant  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_\alpha$  telle que  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,  $t_{i+1} - t_i > \lambda_1$  et :

$$(1) \quad \Phi : [0, t_\alpha + \lambda_1] \times W_{\rho r} \longrightarrow M \\ (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$$

(où  $W = \{x \in \Pi(p) \mid d(x, W) < \rho r\}$ ) est une submersion telle que :

- (i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \lambda_1]$ ,  $\forall p' \in W$ ,  $\varphi_t(\Pi_{\rho r}(p')) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p')$  ;
- (ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}$ ,  $\forall p' \in W$ ,  $\Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i} p')) \subset B_\varepsilon(q)$  ;

(2) si  $p' \in W$  et  $x, \varphi_{T_1} x \in \Pi_{\bar{r}}(p'; p) \cap H^{-1}(H(p'))$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe

- $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p'; p)$
- une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$

tels que :

$$(i) \quad z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2} x), \quad z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1} x) \quad \text{et}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, \quad z_i \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p) \cap H^{-1}(H(p')) ;$$

$$(ii) \quad \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$$

$$d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1})) \\ \leq \varepsilon_0 \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1 + t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p))) \right\}.$$

### 5.3. Démonstration du « closing lemma »

Nous admettons donc ici les résultats énoncés en 5.1 et 5.2, résultats qui seront démontrés au chapitre 6.

*Démonstration du « closing lemma » pour les difféomorphismes*

Considérons comme dans l'énoncé du « closing lemma » (section 2.1)  $f \in D$ ,  $p \in M(f)$ ,  $q \in \omega(p)$ ,  $U$  un voisinage de  $f$  dans  $D$  en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon > 0$ . Remarquons que si  $p$  est périodique de période notée  $\beta$ , l'énoncé du « closing lemma » est une trivialité : dans ce cas, on prend  $\alpha = \beta$ . On supposera donc que  $p$  n'est

pas périodique. Quitte à diminuer  $\varepsilon$  on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte.

- (a) Il existe alors un voisinage  $W$  de l'identité en topologie  $C^1$  dans  $D$  tel que si  $g_1, \dots, g_n$  sont un nombre quelconque de perturbations de l'identité appartenant à  $W$  et à supports deux à deux disjoints inclus dans  $f(\overline{B_\varepsilon}(q))$ , alors  $g_1 \circ \dots \circ g_n \circ f \in U$ .
- (b) Appliquons alors au compact  $f(\overline{B_\varepsilon}(q))$  et au voisinage  $W$  de l'identité la proposition 5.1.1. Il existe donc  $\varepsilon_0 \in ]0, 2\varepsilon/3[$  tel que quel que soit  $x \in f(\overline{B_\varepsilon}(q))$  et  $v \in B_x$ , il existe une perturbation  $g \in W$  de l'identité telle que :

- (i)  $\text{Supp } g \subset B_{|v|}(x)$  ;  
(ii)  $g(x) = x + \varepsilon_0 v$ .

- (c) Appliquons alors à  $f, p, q, \varepsilon_0/2$  la proposition 5.2.1. Elle donne l'existence de  $r > 0, \rho > 1$  et un entier  $\alpha \geq 1$  tels que :

- (1) les  $f^j(B_{\rho r}(p))$  pour  $j \in [0, \alpha]$  sont deux à deux disjoints et vérifient

$$f^j(B_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon_0/2}(f^j p);$$

- (2) si  $x, f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ , alors il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$  et tels que  $f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho \bar{r}}(p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = f^{m_2} x, z_\alpha = f^{m_1 + \alpha} x$  et  $\forall i \in [1, \alpha - 1], z_i \in f^i(B_{\rho \bar{r}}(p))$  ;  
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,

$$d(fz_i, z_{i+1}) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \inf_{m_1 + \alpha < j < m_2} \{d(fz_i, f^j x)\}, d(fz_i, f^{i+1}(\partial B_{\rho \bar{r}}(p)))\};$$

- (iii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, d(fz_i, z_{i+1}) \neq 0 \Rightarrow z_i \in B_{\varepsilon_0/2}(q)$ .

- (d) Supposons donc que  $x, f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ .

Par (c)(2), il existe  $m_1$  et  $m_2$  tels que  $0 \leq m_1 < m_2 \leq m$  et tels que

$$f^{m_1} x, f^{m_2} x \in B_{\rho \bar{r}}(p)$$

et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = f^{m_2} x, z_\alpha = f^{m_1 + \alpha} x$  et  $\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, z_i \in f^i(B_{\rho \bar{r}}(p))$  ;  
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,

$$d(fz_i, z_{i+1}) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \inf_{m_1 + \alpha < j < m_2} \{d(fz_i, f^j x)\}, d(fz_i, f^{i+1}(\partial B_{\rho \bar{r}}(p)))\};$$

- (iii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, d(fz_i, z_{i+1}) \neq 0 \Rightarrow z_i \in B_{\varepsilon_0/2}(q)$ .

- (e) Le (c)(2)(iii) précédent implique que si  $fz_i \neq z_{i+1}$ , alors

$$fz_i \in f(B_{\varepsilon_0/2}(q)) \subset f(B_\varepsilon(q)).$$

Par (b), il existe pour tout  $i \in [0, \alpha - 1]$  une transformation  $g_i \in W$  telle que :

- (i)  $\text{Supp } g_i \subset B_{d(fz_i, z_{i+1})/\varepsilon_0}(fz_i)$  ;  
(ii)  $g_i(fz_i) = z_{i+1}$ .

Or, (d)(i) nous dit que  $z_i \in f^i(B_{\rho\bar{r}}(p))$  donc  $fz_i \in f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$  et (d)(ii) dit que :

$$\frac{2}{\varepsilon_0} d(fz_i, z_{i+1}) \leq d(fz_i, f^{i+1}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p)))$$

aussi, on en déduit que :

$$B_{\frac{2d(fz_i, z_{i+1})}{\varepsilon_0}}(fz_i) \subset f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p)).$$

Or, (c)(1) nous dit que  $f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset B_{\varepsilon_0/2}(f^{i+1}p)$  donc finalement :

$$\text{Supp } g_i \subset B_{\varepsilon_0/2}(f^{i+1}p).$$

De plus, si  $fz_i \neq z_{i+1}$ , on a vu que  $z_i \in B_{\varepsilon_0/2}(q)$ . Joint à (c)(1), cela donne :

$$(A) \quad B_{\frac{2}{\varepsilon_0} d(fz_i, z_{i+1})}(fz_i) \subset f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset f(B_{\varepsilon_0/2}(f^i p)).$$

Ceci s'écrit aussi en utilisant  $f^{-1}$  :

$$f^{-1}(B_{\frac{2}{\varepsilon_0} d(fz_i, z_{i+1})}(fz_i)) \subset B_{\varepsilon_0/2}(f^i p)$$

De cette dernière inclusion et du fait que par (d)(iii)  $z_i \in B_{\varepsilon_0/2}(q)$  dès que  $fz_i \neq z_{i+1}$ , on déduit que si  $fz_i \neq z_{i+1}$  :

$$(B) \quad f^{-1}(B_{\frac{2}{\varepsilon_0} d(fz_i, z_{i+1})}(fz_i)) \subset B_{3\varepsilon_0/2}(q) \subset B_\varepsilon(q).$$

Aussi, on a :

- par (B) et (e)(i) :  $\text{Supp } g_i \subset f(B_\varepsilon(q))$  ;
  - par (A) et (e)(i) :  $\text{Supp } g_i \subset f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ .
- (f) Donc chaque  $g_i$  est à support dans  $f(B_\varepsilon(q))$  et les  $g_i$  sont à supports deux à deux disjoints (car par (c)(1) les  $f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$  sont deux à deux disjoints).

Quand  $fz_i = z_{i+1}$ , on posera  $g_i = \text{Id}$ . Posons alors :  $g = g_{\alpha-1} \circ \dots \circ g_0$  et  $F = g \circ f$ . Alors :

- comme les  $g_i \in W$  sont à support disjoints inclus dans  $f(\overline{B}_\varepsilon(q))$ , on a par (a) :  $F \in U$  ;
- comme les  $g_i$  sont à support disjoints et que le support de chaque  $g_i$  est inclus dans  $f(B_\varepsilon(q)) \cap f^{i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ ,  $F$  ne peut différer de  $f$  que dans  $\bigcup_{1 \leq i \leq \alpha} f^i(B_{\rho\bar{r}}(p)) \cap B_\varepsilon(q)$  ;
- calculons l'orbite de  $z_0 = f^{m_2}x$  sous  $F$ . Pour cela, rappelons que par (e)(i) et (d)(ii), le support de  $g$  ne rencontre pas l'orbite intermédiaire

$$\{f^j x \mid m_1 + \alpha < j < m_2\}.$$

On a alors :

- $F(f^{m_2}x) = F(z_0) = g(fz_0) = g_{\alpha-1} \circ \dots \circ g_1(z_1)$  car  $g_0(fz_0) = z_1$  et donc  $F(f^{m_2}x) = z_1$  car les supports des  $g_i$  sont disjoints et donc  $z_1$  n'est pas dans le support de  $g_{\alpha-1} \circ \dots \circ g_1$  ;

- $F^2(f^{m_2}x) = F(z_1) = g(fz_1) = z_2$  car  $g_1(fz_1) = z_2$  et ni  $z_2$ , ni  $fz_1$  ne sont dans le support de  $g_i$  pour  $i \neq 1$  puisque les supports des  $g_i$  sont disjoints ;
- ...
- finalement :  $F^\alpha(f^{m_2}x) = z_\alpha = f^{\alpha+m_1}x$  ;
- ensuite, comme le support de  $g$  ne rencontre pas l'orbite intermédiaire  $\{f^jx \mid m_1 + \alpha < j < m_2\}$  et comme ce support ne rencontre pas

$$f^{m_2}x \in B_\varepsilon(p),$$

on a  $\forall j \in [\alpha, m_2 - m_1] : F^j(f^{m_2}x) = f^j(f^{m_1}x)$ .

On a ainsi obtenu toutes les conclusions du « closing lemma », sauf le (iii), qui découle du fait que :

$$\forall i \in [0, \alpha], f^i(f^{m_1}x) = F^i(f^{m_2}x) = z_i \in f^i(B_{\rho\bar{r}}(p))$$

par (d)(i) et :

$$f^i(B_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon_0/2}(f^i p)$$

ceci impliquant bien que :

$$\forall i \in [0, \alpha], d(f^i(f^{m_2}x), F^i(f^{m_1}x)) < \varepsilon$$

□

*Démonstration du « closing lemma » pour les flots.* — Considérons comme dans l'énoncé du « closing lemma » (section 2.1)  $\varphi \in F$ ,  $p \in M(\varphi)$ ,  $q \in \omega(p)$ ,  $U$  un voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon > 0$ . Remarquons que si  $p$  est un point périodique de  $\varphi$ , l'énoncé du « closing lemma » est, comme dans le cas des difféomorphismes, une trivialité. On supposera donc que  $p$  n'est pas périodique. Quitte à diminuer  $\varepsilon$  on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte.

- (a) Il existe alors un voisinage  $W$  de  $\varphi$  (en topologie  $C^1$  toujours), tel que si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont un nombre quelconque de perturbations de  $\varphi$  dans  $W$  telles que les support des  $\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $\overline{B_\varepsilon}(q)$ , alors le flot  $\psi$  tel que  $\dot{\psi} = \dot{\varphi} + \sum(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi})$  est dans  $U$ .
- (b) Notons  $C$  l'ensemble des points fixes de  $\varphi$  et appliquons à l'ensemble relativement compact  $B_\varepsilon(q) \setminus C$  la proposition 5.1.3.

Il existe alors une fonction continue  $\beta : B_\varepsilon(q) \setminus C \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto r_x / \|X(x)\|$  telle que

- (0)  $\Phi_y([0, \beta(y)] \times \Pi_{\beta(y)\|X(y)\|}(y)) \subset B_{\varepsilon/2}(y)$  pour tout  $y \in B_\varepsilon(q) \setminus C$  ;
- et un nombre  $\varepsilon_0 \in ]0, \varepsilon[ > 0$  tels que : quels que soient

$$x \in B_\varepsilon(q) \setminus C, y \in \Pi_{\beta(x)\|X(x)\|}(x) \text{ et } v \in \Pi_{\beta(x)\|X(x)\| - \|y\|}(x)$$

(on se ramène toujours à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ ), il existe une perturbation  $\psi \in W$  telle que :

- (i)  $\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \subset \Phi_x([0, \beta(x)] \times \Pi_{\|v\|}(y; x))$  ;
- (ii)  $\psi_{\beta(x)}(y) = \Phi_x(\beta(x), y + \varepsilon_0 v)$ .



- (c) Appliquons alors à  $\varphi, p, q, \varepsilon$  et  $\varepsilon_0/2$  la proposition 5.2.2. Elle donne l'existence de  $r > 0, \rho > 1$  et  $t_0, t_1, \dots, t_\alpha$  tels que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_\alpha$  et tels que :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, t_i + \beta(\varphi_{t_i} p) < t_{i+1}$$

et :

$$(1) \quad \Phi : [0, t_\alpha + \sup_{0 \leq j \leq \alpha} \{\beta(\varphi_{t_j} p)\}] \times \Pi_{\rho r}(p) \longrightarrow M \\ (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$$

est une submersion telle que :

- (i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_\alpha} p)], \varphi_t(\Pi_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p);$   
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, \Phi([0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i} p)) \subset B_\varepsilon(q);$   
(2) si  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r[$  et  $T > 0$ , alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2} x), z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1} x)$  et

$$\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, z_i \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p);$$

- (ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$

$$d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1})) \\ \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1 + t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_t p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p))) \right\}$$

- (d) Notons alors :

$$r_0 = \inf \left\{ r, \inf_{1 \leq i \leq \alpha} \left\{ \bar{r} / \sup_{z \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p)} \{ \|D(P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z))\| \} \right\} \right\}$$

Supposons donc que  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r_0[$  et  $T > 0$ . Par (c)(2), il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que  $\varphi_{T_1} x, \varphi_{T_2} x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2} x), z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1} x)$  et

$$\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, z_i \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p);$$

- (ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$

$$d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1})) \\ \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1 + t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_t p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p))) \right\}$$

- (e) Par (d) et (c)(1),  $z_i \in \Pi_{\rho \bar{r}}(\varphi_{t_i} p) \subset B_\varepsilon(q)$ . Par (b),  $\forall i \in [0, \alpha - 1]$ , il existe un flot  $\psi_i \in W$  tel que :

- (i)  $\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i) \subset \Phi_{\varphi_{t_i} p}([0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times$

$$\Pi_{d(z_i, (P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1}))/\varepsilon_0}(z_i; \varphi_{t_i} p));$$

- (ii)  $\psi_{i, \beta(\varphi_{t_i} p)}(z_i) = \Phi_{\varphi_{t_i} p}(\beta(\varphi_{t_i} p), (P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1}))).$

Or, (d)(i) nous dit que  $z_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)$  et (d)(ii) dit que :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1}) \leq d(z_i, \partial(\Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)))$$

Aussi, on en déduit que :

$$\Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i}p) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)$$

aussi :

$$\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i) \subset \Phi_{\varphi_{t_i}p}([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p))$$

or, par (c)(1),  $\Phi$  étant une submersion et comme  $t_i + \beta(\varphi_{t_i}p) < t_{i+1}$ , les

$$\Phi_{\varphi_{t_i}p}([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p))$$

sont deux à deux disjoints si on a choisi  $r$  assez petit et donc les  $\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i)$  sont aussi deux à deux disjoints.

De plus, le (c)(1)(ii) dit que  $\Phi_{\varphi_{t_i}p}([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)) \subset B_\varepsilon(q)$  donc :

$$\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i) \subset B_\varepsilon(q).$$

Donc chaque  $\psi_i$  est un élément de  $W$  tel que le support de  $\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}$  est dans  $B_\varepsilon(q)$  et les  $\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}$  sont à support deux à deux disjoints. On sait alors par (a) que le flot  $\psi$  tel que  $\dot{\psi} = \dot{\varphi} + \sum(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$  est dans  $U$ .

(f) On veut alors calculer l'orbite de  $\varphi_{T_2}x$  sous  $\psi$ .

Pour cela, rappelons que par (d)(ii),

$$\Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i}p)$$

et

$$\{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha < t < T_2 \text{ et } \varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)\}$$

sont disjoints ; on en déduit immédiatement que l'intersection de :

$$\Phi_{\varphi_{t_i}p}([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i}p))$$

avec

$$\{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha + \beta(\varphi_{t_i}p) < t < T_2\}$$

est vide.

Soit alors  $u \in ]T_1 + t_\alpha, T_1 + t_\alpha + \beta(\varphi_{t_i}p)[$  ; alors, on sait que  $\varphi_{T_1}x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$ . Donc  $\varphi_u x \in \Phi([t_\alpha, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(p))$  ; or, on a vu en (c)(1) que  $\Phi$  est une submersion (donc injective) de  $[0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  dans  $M$ , donc forcément  $\varphi_u(x) \notin \Phi([0, t_\alpha] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(p))$  et donc à condition d'avoir choisi  $r$  assez petit :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \varphi_u x \notin \Phi_{\varphi_{t_i}p}([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p))$$

donc *a fortiori* :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$$

$$\varphi_u x \notin \Phi_{\varphi_{t_i} p}([0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times \Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i} p))$$

aussi :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \varphi_u x \notin \text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$$

Finalement :

$$(C) \quad \{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha < t < T_2\} \cap \text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}) = \emptyset$$

(g) On a alors si  $u_0 = \tau(t_0, \varphi_{T_2} x) : \forall t \in [0, u_0], \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2+t} x$  puisque les  $\text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$  ne rencontrent pas cette orbite (toujours grâce à l'argument suivant lequel  $\Phi$  est une submersion donc injective). En particulier :  $\psi_{u_0}(\varphi_{T_2} x) = z_0$ .

De plus :

$$\psi_{\tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \beta(\varphi_{t_0} p)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{\beta(\varphi_{t_0} p)}(P(\varphi; p; t_0) \circ P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1)$$

par le (e)(ii) d'où si on pose

$$u_1 = \tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \beta(\varphi_{t_0} p) + \tau(t_1; P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1) - \tau(t_0; P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1)$$

alors :

$$\forall t \in ]\tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \beta(\varphi_{t_0} p), u_1[, \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_1}(z_1)$$

on a :

$$\psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_1}(z_1)$$

(en particulier  $\psi_{u_1}(\varphi_{T_2} x) = z_1$ ).

De même :

$$\psi_{u_1 + \beta(\varphi_{t_1} p)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{\beta(\varphi_{t_1} p)}(P(\varphi; p; t_1) \circ P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2)$$

par le (e)(ii) d'où en posant

$$u_2 = u_1 + \beta(\varphi_{t_1} p) + \tau(t_2; P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2) - \tau(t_1; P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2),$$

on a

$$\text{pour } t \in ]u_1 + \beta(\varphi_{t_1} p), u_2[, \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_2}(z_2)$$

etc jusqu'à :

$$\psi_{u_\alpha}(\varphi_{T_2} x) = z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha) \varphi_{T_1} x = \varphi_{\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x) + T_1} x.$$

En utilisant ensuite (C), on conclut que :

$$\forall t \in ]u_\alpha, T_2 - T_1 + u_\alpha - \tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x)], \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t+T_1-u_\alpha+\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x)} x$$

donc en particulier :

$$\psi_{T_2+u_\alpha-T_1-\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1}x)}(\varphi_{T_2}x) = \varphi_{T_2}x.$$

On a donc ainsi obtenu toutes les conclusions du «closing lemma» (on voit facilement que  $\tau(t_i, P(\varphi; p; t_i)^{-1}z_i)$  est proche de  $t_i$ , ce qui permet de trouver effectivement  $f$  proche de l'identité en topologie  $C^1$ ) sauf le (iii), qui lui vient simplement du fait que par (c)(1)(i) :

$$\forall t \in [0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_\alpha}p)], \psi_t(\varphi_{T_2}x) \in \varphi_t(\Pi_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p)$$

□

*Démonstration du «closing lemma» pour les champs de vecteurs sans homologie*

Il est assez tentant de dire que la démonstration est la même que celle concernant les flots, puisqu'on a démontré dans ce cas aussi un lemme de perturbation. Malheureusement, le lemme démontré dans le cas des flots est un peu différent de celui démontré dans le cas des champs de vecteurs : dans le cas des champs de vecteurs, on ne peut bouger que l'orbite passant par  $p$ , alors que dans le cas des flots, on pouvait bouger toute orbite passant par un voisinage de  $p$ . C'est pourquoi la première chose que nous faisons est de nous ramener à un énoncé plus proche du lemme de perturbation pour les flots :

LEMME 5.3.1. — Soient  $X \in CV$  de flot associé noté  $(\varphi_t)$ ,  $V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que

- (i)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient

$$p \in K, p' \in \Pi_{\delta(p)}(p) \text{ et } v \in \Pi_{\delta(p)-\|p'\|}(p),$$

il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

- (ii)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$  ;  
 (iii)  $\psi_{\lambda_1}(p') = \Phi_p(\lambda_1, p' + \varepsilon v)$ .

*Démonstration du lemme 5.3.1.* — Il s'agit en fait d'un simple corollaire de la proposition 5.1.4. En effet, étant donnés  $X$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon_1$  et  $K$  comme dans les hypothèse du lemme 5.3.1, on peut choisir  $\eta$  tel que l'ensemble

$$K_\eta = \{x \in M \mid d(x, K) \leq \eta\} \setminus C_\lambda$$

est relativement compact ; on peut alors trouver  $\lambda_1$ ,  $\delta$  et  $\varepsilon$  vérifiant les conclusions de la proposition 5.1.4. Réappliquons ensuite cette proposition à  $X$ ,  $\lambda_1/2$ ,  $\varepsilon_1$  et  $K$ . On

trouve  $\varepsilon' < \varepsilon$ ,  $\delta_2 < \delta$  et  $\lambda_2 < \lambda$  vérifiant les conclusions de la proposition 5.1.4. On peut alors trouver  $\delta_1 : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  majorée par  $\delta_2$  telle que :

$$\forall p \in K, \Pi_{\delta_1(p)}(p) \subset K_\eta$$

et  $\forall p \in K, \forall p' \in \Pi_{\delta_1(p)}(p), \forall r \in ]0, \delta_1(p)[$ , il existe  $t \in ]0, \lambda_1/2[$  tel que

$$\Phi_{\varphi_t p'}([0, \frac{\lambda_1}{2}] \times \Pi_{\frac{r}{2}}(\varphi_t p')) \subset \Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_r(p''; p))$$

où  $\{p''\} = \{\varphi_t p \mid t \in [-\lambda_1/2, \lambda_1/2]\} \cap \Pi_{\delta_1(p)}(p)$ .

Alors,  $\varepsilon'$ ,  $\lambda_1$  et  $\delta_1$  sont les fonctions qui vérifient les conclusions du lemme précédent.  $\square$

Le lemme que nous venons d'obtenir présente quand même une petite différence avec la proposition 5.1.3 : on ne supposait pas dans l'énoncé de la proposition 5.1.3 que  $K$  était inclus dans  $K \setminus C_\lambda$  pour un certain  $\lambda > 0$ . Or, dans la démonstration du «closing lemma» donnée dans le cas des flots, on a tout d'abord supposé que  $p$  n'est pas périodique. Il existe donc  $\lambda > 0$  et  $r > 0$  tel que :

$$\forall x \in B_r(p), \forall t \in ]0, \lambda[, \varphi_t(x) \neq x.$$

Et on n'utilise dans la démonstration du «closing lemma» donnée dans le cas des flots le lemme de perturbation qu'en des points qui sont sur l'orbite de tels  $x$  (les  $z_i$ ). C'est pourquoi on peut ne se contenter que de l'énoncé du lemme précédent pour démontrer le «closing lemma» dans le cas des champs de vecteurs sans homologie.

NOTE. — Le lecteur intéressé par le détail de cette démonstration peut lire la démonstration qui va suivre, concernant les champs de vecteurs symplectiques, analogue à celle que nous omettons ici.  $\square$

#### *Démonstration du «closing lemma» pour les champs de vecteurs symplectiques*

Considérons comme dans l'énoncé du «closing lemma» (à la section 2.1),  $X \in CV_a$  de pseudo-hamiltonien  $H$  et de flot  $(\varphi_t)$ ,  $p \in M(X)$ ,  $q \in \omega(p)$ ,  $U$  un voisinage de  $X$  dans  $CV_a$  en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon > 0$ . Remarquons que si  $p$  est un point périodique de  $\varphi$ , l'énoncé du «closing lemma» est, comme dans le cas des difféomorphismes, une trivialité. On supposera donc que  $p$  n'est pas périodique. Quitte à diminuer  $\varepsilon$  on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte.

(a) Il existe alors un voisinage  $V$  de  $X$  (en topologie  $C^1$  toujours), tel que si  $X_1, \dots, X_n$  sont un nombre quelconque de perturbations de  $X$  dans  $V$  telles que les support des  $X_i - X$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $\overline{B}_\varepsilon(q)$ , alors le champ de vecteurs  $Y = X + \sum(X_i - X)$  est dans  $U$ . Plutôt que d'utiliser telle quelle la proposition 5.1.5, nous allons donner un énoncé qui s'en déduit qui ressemble plus à l'énoncé concernant les flots :

LEMME 5.3.2. — Soit  $X \in CV_a$  de flot associé noté  $(\varphi_t)$  et de pseudo-hamiltonien  $H, V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que :

(0)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient

$$p \in K, p' \in \Pi_{\delta(p)}(p) \text{ et } v \in \Pi_{\delta(p)-\|p'\|}(p) \cap H^{-1}(H(p')),$$

il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

(i)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p; p'))$  ;

(ii)  $\psi_{\lambda_1}(p') = \Phi_p(\lambda_1, p' + \varepsilon v)$ .

(étant entendu qu'on fait l'addition dans  $\Pi_{\delta(p)-\|p'\|}(p) \cap H^{-1}(H(p'))$ )

Démonstration du lemme 5.3.2. — La démonstration est en fait une copie de la démonstration du lemme 5.3.1, donc nous ne la ferons pas ici.  $\square$

(b) Notons  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et appliquons à l'ensemble relativement compact  $B_\varepsilon(q) \setminus C_\lambda$  le lemme 5.3.2 (pour un  $\lambda$  choisi arbitrairement).

Il existe alors  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  et une fonction continue  $\delta : B_\varepsilon(q) \setminus C_\lambda \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x\}$  tels que :

(0)  $\Phi_y([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(y)}(y)) \subset B_{\varepsilon/2}(y)$  pour tout  $y \in B_\varepsilon(q) \setminus C_\lambda$  et sur cet ensemble  $\Phi_y$  est une submersion ;

et un nombre  $\varepsilon_0 \in ]0, \varepsilon[ > 0$  tels que : quels que soient  $x \in B_\varepsilon(q) \setminus C_\lambda$ ,  $y \in \Pi_{\delta(x)}(x)$  et  $v \in \Pi_{\delta(x)-\|y\|}(x) \cap H^{-1}(H(y))$  (on se ramène toujours à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ ), il existe une perturbation  $Y \in V$  de  $X$  telle que :

(i)  $\text{Supp}(Y - X) \subset \Phi_x([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(y; x))$  ;

(ii)  $\psi_{\lambda_1}(y) = \Phi_x(\lambda_1, y + \varepsilon_0 v)$ .

(c) Appliquons alors à  $X, p, q, \varepsilon$  et  $\varepsilon_0/2$  la proposition 5.2.3 (on prendra avec les mêmes notations que cette proposition  $W = \Pi_{\rho r}(p)$ , ce qui est possible si on prend  $r$  assez petit). Elle donne l'existence de  $r > 0, \rho > 1$  et  $t_0, \dots, t_\alpha$  tels que  $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_\alpha$  et tels que :  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, t_{i+1} - t_i > \lambda_1$  et :

$$(1) \quad \Phi : \quad [0, t_\alpha + \lambda_1] \times \Pi_{2\rho r}(p) \longrightarrow M \\ (t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$$

est une submersion telle que :

(i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \lambda_1], \forall p' \in \Pi_r(p), \varphi_t(\Pi_{\rho r}(p')) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p')$  ;

(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, \forall p' \in \Pi_r(p)$ ,

$$\Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)) \subset B_\varepsilon(q) ;$$

(2) si  $p' \in \Pi_r(p)$  et  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p'; p) \cap H^{-1}(H(p'))$  pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ , alors il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que

$\varphi_{T_1}x, \varphi_{T_2}x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p'; p)$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2}x)$ ,  $z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1}x)$  et  
 $\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, z_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p) \cap H^{-1}(H(p'))$ ;  
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} & d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1})) \\ & \leq \varepsilon_0 \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1+t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p))) \right\}. \end{aligned}$$

(d) Notons alors :

$$r_0 = \inf \left\{ r, \inf_{1 \leq i \leq \alpha} \{ \bar{r} / \sup_{z \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p)} \{ \|D(P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1}))^{-1}(z)\| \} \} \right\}$$

Supposons donc que  $x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p') \cap H^{-1}(H(p'))$  pour  $p' \in \Pi_r(p)$ ,  $\bar{r} \in ]0, r_0]$  et  $T > 0$ . Par (c)(2), il existe  $T_1$  et  $T_2$  tels que  $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$  et tels que  $\varphi_{T_1}x, \varphi_{T_2}x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p')$  et une suite  $z_0, \dots, z_\alpha$  de points de  $M$  tels que :

- (i)  $z_0 = P(\varphi; p; t_0)(\varphi_{T_2}x)$ ,  $z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha)(\varphi_{T_1}x)$  et  
 $\forall i \in \{1, \dots, \alpha - 1\}, z_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p) \cap H^{-1}(H(p'))$ ;  
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} & d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}(z_{i+1})) \\ & \leq \varepsilon_0 \inf \left\{ \inf_{\substack{T_1+t_\alpha < t < T_2 \\ \varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p)}} \{d(z_i, \varphi_t x)\}, d(z_i, \partial(\Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p))) \right\}. \end{aligned}$$

(e) Par (d)(i) et (c)(1),  $z_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p) \subset B_\varepsilon(q)$ . Par (b),  $\forall i \in [0, \alpha - 1]$ , il existe un champ de vecteurs  $Y_i \in V$  de flot associé ( $\psi$ ) tel que :

- (i)  $\text{Supp}(Y_i - X) \subset \Phi_x([0, \lambda_1] \times \Pi_{d(z_i, (P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1}))^{-1}(z_{i+1}))/\varepsilon_0}(z_i; \varphi_{t_i}p))$ ;  
(ii)  $\psi_{i, \lambda_1}(z_i) = \Phi_{\varphi_{t_i}p}(\lambda_1, (P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1}))^{-1}(z_{i+1}))$ .

Or, (d)(i) nous dit que  $z_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p)$  et (d)(ii) dit que :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}z_{i+1}) \leq d(z_i, \partial(\Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p))).$$

Aussi, on en déduit que :

$$\Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1}z_{i+1})}(z_i; \varphi_{t_i}p) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p)$$

aussi :

$$\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i) \subset \Phi([0, \lambda_1\sigma] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p))$$

or, par (c)(1),  $\Phi$  étant une submersion et comme  $t_i + \lambda_1 < t_{i+1}$ , les

$$\Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i}p'; \varphi_{t_i}p))$$

sont deux à deux disjoints si on a choisi  $r$  assez petit et donc les  $\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i)$  sont aussi deux à deux disjoints.

De plus, le (c)(1)(ii) dit que  $\Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)) \subset B_\varepsilon(q)$  donc :

$$\text{Supp}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}_i) \subset B_\varepsilon(q).$$

Donc chaque  $\psi_i$  est un élément de  $V$  tel que le support de  $\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}$  est dans  $B_\varepsilon(q)$  et les  $\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}$  sont à support deux à deux disjoints. On sait alors par (a) que le flot  $\psi$  tel que  $\dot{\psi} = \dot{\varphi} + \sum(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$  est dans  $U$ .

(f) On veut alors calculer l'orbite de  $\varphi_{T_2} x$  sous  $\psi$ .

Pour cela, rappelons que par (d)(ii), l'intersection de

$$\Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i} p)$$

et de

$$\{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha < t < T_2 \text{ et } \varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)\}$$

est vide; on en déduit immédiatement que l'intersection de :

$$\Phi_{\varphi_{t_i} p}([0, \lambda_1] \times \Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i} p))$$

et de

$$\{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha + \lambda_1 < t < T_2\}$$

est vide.

Soit alors  $u \in ]T_1 + t_\alpha, T_1 + t_\alpha + \lambda_1[$ ; alors, on sait que  $\varphi_{T_1} x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p'; p)$ . Donc  $\varphi_u x \in \Phi([t_\alpha, t_\alpha + \lambda_1] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(p'; p))$ ; or, on a vu en (c)(1) que  $\Phi$  est une submersion (donc injective) de  $[0, t_\alpha + \lambda_1] \times \Pi_{\rho r}(p'; p)$  dans  $M$ , donc forcément  $\varphi_u(x) \notin \Phi([0, t_\alpha] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(p'; p))$  et donc à condition d'avoir choisi  $r$  assez petit :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \varphi_u x \notin \Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p))$$

donc *a fortiori* :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\},$$

$$\varphi_u x \notin \Phi([0, \lambda_1] \times \Pi_{\frac{1}{\varepsilon_0}} d(z_i, P(\varphi; p; t_i) \circ P(\varphi; p; t_{i+1})^{-1} z_{i+1})(z_i; \varphi_{t_i} p))$$

aussi :  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \varphi_u x \notin \text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$ . Finalement :

$$(C) \quad \{\varphi_t x \mid T_1 + t_\alpha < t < T_2\} \cap \text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi}) = \emptyset$$

(g) On a alors :  $\forall t \in [0, \tau(t_0, \varphi_{T_2} x) = u_0]$ ,  $\psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2+t} x$  puisque les  $\text{Supp}(\dot{\psi}_i - \dot{\varphi})$  ne rencontrent pas cette orbite (toujours grâce à l'argument suivant lequel  $\Phi$  est une submersion donc injective). En particulier :  $\psi_{u_0}(\varphi_{T_2} x) = z_0$ .

De plus :

$$\dot{\psi}_{\tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \lambda_1}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{\lambda_1}(P(\varphi; p; t_0) \circ P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1)$$



par le (e)(ii) d'où si on pose

$$u_1 = \tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \lambda_1 + \tau(t_1; P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1) - \tau(t_0; P(\varphi; p; t_1)^{-1} z_1)$$

alors :

$$\forall t \in ]\tau(t_0, \varphi_{T_2} x) + \beta(\varphi_{t_0} p), u_1[, \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_1}(z_1)$$

on a :  $\psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_1}(z_1)$  (en particulier  $\psi_{u_1}(\varphi_{T_2} x) = z_1$ ).

De même :  $\psi_{u_1+\lambda_1}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{\lambda_1}(P(\varphi; p; t_1) \circ P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2)$  par le (e)(ii) d'où en posant

$$u_2 = u_1 + \lambda_1 + \tau(t_2; P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2) - \tau(t_1; P(\varphi; p; t_2)^{-1} z_2),$$

on a : pour  $t \in ]u_1 + \lambda_1, u_2[, \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t-u_2}(z_2)$  jusqu'à

$$\psi_{u_\alpha}(\varphi_{T_2} x) = z_\alpha = P(\varphi; p; t_\alpha) \varphi_{T_1} x = \varphi_{\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x) + T_1} x.$$

En utilisant ensuite (C), on conclut que :

$$\forall t \in ]u_\alpha, T_2 - T_1 + u_\alpha - \tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x)], \psi_t(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{t+T_1-u_\alpha+\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x)} x$$

donc en particulier :

$$\psi_{T_2+u_\alpha-T_1-\tau(t_\alpha; \varphi_{T_1} x)}(\varphi_{T_2} x) = \varphi_{T_2} x.$$

On a donc ainsi obtenu toutes les conclusions du « closing lemma » (on voit facilement que  $\tau(t_i, P(\varphi; p; t_i)^{-1} z_i)$  est proche de  $t_i$ , ce qui permet de trouver effectivement  $f$  proche de l'identité en topologie  $C^1$ ) sauf le (iii), qui, lui, vient simplement du fait que par (c)(1)(i) :

$$\forall t \in [0, t_\alpha + \lambda_1], \psi_t(\varphi_{T_2} x) \in \varphi_{f(t)}(\Pi_{pr}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_{f(t)} p)$$

□

## CHAPITRE 6

### DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS INTERMÉDIAIRES

#### 6.1. Démonstration des résultats perturbatifs de 5.1

Nous rappellerons les énoncés que nous allons démontrer.

PROPOSITION 5.1.1. — Soient  $U$  un voisinage de  $\text{Id}$  dans  $D$  en topologie  $C^1$  et  $K$  un compact de  $M$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que quel que soit  $p \in K$  et  $v \in B_p$ , il existe une perturbation  $g \in U$  de l'identité telle que :

- (i)  $\text{Supp } g \subset B_{\|v\|}(p)$  ;
- (ii)  $g(p) = p + \varepsilon v$ .

*Démonstration.* — Remarquons avant toute chose que si on montre qu'il existe  $R > 0$  tel qu'on obtienne le résultat pour tout  $v \in B_R(0)$  où  $0 < R < 1$ , on aura le résultat cherché pour tout  $v \in B_1(0)$  en changeant  $\varepsilon$  en  $\varepsilon R$ .

*Cas des difféomorphismes quelconques.* — Comme  $K$  est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts  $(U_i)_{1 \leq i \leq i_0}$  d'adhérence compacte tels qu'il existe d'autres ouverts  $(V_i)_{1 \leq i \leq i_0}$  vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, i_0\}, \quad \overline{U}_i \subset V_i$$

chaque  $V_i$  se plongeant par  $f_i$  dans  $\mathbf{R}^n$ , ce qui nous permet de raisonner dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . Si maintenant on montre le résultat cherché pour chaque compact  $K_i = f_i(\overline{U}_i)$  de  $\mathbf{R}^n$  muni de sa métrique riemannienne usuelle, on aura le résultat pour toute autre métrique riemannienne (mais le  $\varepsilon_i$  changera) car de telles métriques sont équivalentes sur un compact, puis en prenant l'infimum de ces  $\varepsilon_i$ , on aura le résultat sur  $K$ . Travaillons donc dans un tel espace  $\mathbf{R}^n$ .

On considère une application de classe  $C^\infty$   $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 en 0 et 0 en dehors de  $[-1, 1]$ . On pose alors pour  $(x, x_0) \in (\mathbf{R}^n)^2$  et  $v \in B_1(0)$  :

$$g_{\varepsilon, v, x_0}(x) = x + \varepsilon \gamma\left(\frac{\|x - x_0\|^2}{\|v\|^2}\right)v.$$

Alors

- $\text{Supp } g_{\varepsilon, v, x_0} \subset B_{\|v\|}(x_0)$  ;
- $g_{\varepsilon, v, x_0}(x_0) = x_0 + \varepsilon v$  ;

- $\|g_{\varepsilon, v, x_0} - \text{Id}\|_{C^1} \leq \sup\{\varepsilon \|\gamma\|_{C^0} = \varepsilon, 2\varepsilon \|\gamma'\|_{C^0}\}$  puisque

$$Dg_{\varepsilon, v, x_0}(x) \cdot u = u + 2\varepsilon\gamma' \left( \frac{\|x - x_0\|^2}{\|v\|^2} \right) \frac{(x - x_0) \cdot u}{\|v\|^2} \cdot v.$$

Aussi, si  $\varepsilon$  est choisi assez petit (uniformément en  $v, x_0$ ),  $g_{\varepsilon, v, x_0}$  est aussi proche en topologie  $C^1$  de  $\text{Id}$  qu'on le veut, et on obtient le résultat cherché.

*Cas des difféomorphismes symplectiques.* — L'ensemble  $K$ , étant un compact de  $M$ , est recouvert par un nombre fini d'ouverts  $U_n$  difféomorphes à une boule ouverte  $B_n$  de  $\mathbf{R}^{\dim M}$  par un difféomorphisme symplectique  $\Phi_n : U_n \rightarrow B_n$  telles que si  $B'_n$  désigne la boule homothétique de  $B_n$  par l'homothétie de centre le centre de la boule et de rapport  $1/2$ , les  $U'_n = \Phi_n^{-1}(B'_n)$  recouvrent  $M$ . Le fait qu'on puisse choisir les  $\Phi_n$  symplectiques vient du lemme de Darboux, démontré par exemple dans [8].

Or, pour obtenir le résultat voulu, il suffit de le démontrer pour chaque  $K_n = \overline{B'_n} \cap K$ , puis de prendre comme  $\varepsilon$  cherché l'infimum de ceux trouvés pour les différents  $K_i$ . Nous nous sommes donc ramenés à démontrer le résultat cherché pour un compact contenu dans une carte symplectique.

Il suffit alors de démontrer le résultat dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$  muni de sa métrique riemannienne standard, car on en déduira sur chaque compact le résultat pour une métrique riemannienne quelconque (pour des  $\varepsilon$  différents) puisque de telles métriques sont équivalentes sur un compact, puis on se ramènera à  $M$  à l'aide des cartes.

Fixons des coordonnées symplectiques  $(q, p)$  de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . Un difféomorphisme local proche de l'identité s'exprime toujours à l'aide d'une fonction génératrice (nous ne nous étendrons pas sur la notion de fonction génératrice; le lecteur peut consulter [3] pour en savoir plus sur le sujet). C'est pourquoi nous allons construire  $g$  à l'aide d'une fonction génératrice.

On notera  $J$  la matrice de la forme symplectique usuelle  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^{\dim M}$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ , i.e.  $J \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ . Si  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$  est une fonction de classe  $C^\infty$  qui vaut 1 en 0 et 0 en dehors de  $[-1, 1]$ , on définit

$$s_{\varepsilon, v, x_0}(x) = \varepsilon\gamma \left( \frac{\|x - x_0\|^2}{\|v\|^2} \right) \Omega(x - x_0, v)$$

C'est pour  $\varepsilon$  assez petit la fonction génératrice associée au difféomorphisme symplectique  $g_{\varepsilon, v, x_0}$  de  $\mathbf{R}^{\dim M}$  défini par  $g_{\varepsilon, v, x_0}((q, p)) = (Q, P)$  où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial s_{\varepsilon, v, x_0} / \partial P(q, P) \\ \partial s_{\varepsilon, v, x_0} / \partial q(q, P) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q \\ P \end{pmatrix} + 2\varepsilon\gamma' \left( \frac{\|P - P_0\|^2 + \|q - q_0\|^2}{\|v\|^2} \right) \frac{\Omega((q - q_0, P - p_0), v)}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} P - P_0 \\ q - q_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \varepsilon\gamma \left( \frac{\|P - P_0\|^2 + \|q - q_0\|^2}{\|v\|^2} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $(v_1, v_2)$  sont les coordonnées de  $v$ . Alors,

- en  $x_0$ , on obtient  $g_{\varepsilon, v, x_0}(x_0) = x_0 + \varepsilon v$  ;
- $\|g_{\varepsilon, v, x_0} - \text{Id}\|_{C^1} \leq \sup\{2\varepsilon \|\gamma'\| + \varepsilon \|\gamma\|, 8\varepsilon \|\gamma''\| + 8\varepsilon \|\gamma'\|\}$  comme le montre un calcul de différentielles ;
- $Q = q$  et  $P = p$  dès que  $\|P\|^2 + \|q\|^2 \geq \|v\|^2$ , c-à-d  $\|p\|^2 + \|q\|^2 \geq \|v\|^2$ , donc  $\text{Supp } g_{\varepsilon, v, x_0} \subset B_{\|v\|}(x_0)$ .

Aussi, si  $\varepsilon$  est choisi assez petit (uniformément en  $v, x_0$ ),  $g_{\varepsilon, v, x_0}$  est aussi proche en topologie  $C^1$  de  $\text{Id}$  qu'on le veut, et on obtient le résultat cherché.

*Cas des difféomorphismes préservant le volume.* — Par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans le cas symplectique, on montre qu'on peut se ramener à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . Ici, on n'utilise plus le lemme de Darboux, mais son analogue pour les flots qui préservent le volume, démontré dans [7].

L'idée est d'utiliser ce que nous avons fait pour les difféomorphismes symplectiques.

- (1) soit  $M$  est de dimension paire. Dans ce cas, on utilise directement le difféomorphisme  $g_{\varepsilon, v, x_0}$  construit dans le cas symplectique, et on conclut pareillement ;
- (2) soit  $M$  est de dimension impaire. Avec les hypothèses de l'énoncé, on choisit  $w \in \mathbf{R}^{\dim M}$  non nul et orthogonal à  $v$  (il existe car  $M$  est de dimension supérieure ou égale à 2) et on note  $H$  son orthogonal. Avec les mêmes notations que dans la démonstration du cas symplectique, on pose alors si  $x = x_0 + x' \in \mathbf{R}^{\dim M}$  où  $x_0 \in \mathbf{R}w$  et  $x' \in H$  :

$$g(x) = x_0 + g_{\varepsilon\gamma(\|x_0\|^2/\|v\|^2), v, x_0}(x')$$

On vérifie aisément que si  $\varepsilon$  est petit,  $g$  vérifie le lemme, et il est facile de voir que  $\varepsilon$  est indépendant de  $v$ .

□

Démontrons maintenant la proposition 5.1.3, dont nous rappelons l'énoncé.

**PROPOSITION 5.1.3.** — *Soit  $\varphi \in F, V$  un voisinage de  $\varphi$  dans  $F$  en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C$  l'ensemble des points fixes de  $\varphi$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C$ . Il existe alors une fonction continue  $\beta : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{r_x/\|X(x)\|, 1\}$  telle que*

(0)  $\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\beta(p)\|X(p)\|}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K, p' \in \Pi_{\beta(p)\|X(p)\|}(p)$  et  $v \in \Pi_{\beta(p)\|X(p)\| - \|p'\|}(p)$ , il existe  $\psi \in V$  tel que :

- (i)  $\text{Supp } (\varphi - \psi) \subset \Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$  ;
- (ii)  $\psi_{\beta(p)}(p') = \Phi_p(\beta(p), p' + \varepsilon v)$ .

*Démonstration.* — Comme dans le cas des difféomorphismes, on peut se ramener à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . Posons pour tout  $p \in K$  :

$$\alpha(p) = \inf\{r_p, \|X(p)\|, \frac{\varepsilon_1}{2}, 1\}$$

(cette fonction est continue et ne s'annule pas sur  $K$ ) et définissons :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_p & : [0, \alpha(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p) \longrightarrow M \\ & (t, x) \longmapsto \varphi_{(t/\|X(p)\|)}(x) \end{aligned}$$

Alors,

$$D\tilde{\Phi}_p(t, x)(\delta t, \delta x) = \frac{\delta t}{\|X(p)\|} X(\varphi_{(t/\|X(p)\|)}(x)) + D\varphi_{(t/\|X(p)\|)}(x) \cdot \delta x.$$

Comme  $\bar{K}$  est compact, pour tout  $\varepsilon' > 0$ , on peut choisir  $\beta \in ]0, 1]$  tel que :

$$\forall p \in K, \quad \forall (u, x) \in [0, \beta] \times \Pi_{\alpha(p)}(p), \quad \|D\varphi_u(x) - \text{Id}\| < \varepsilon'$$

et tel que :

$$\forall p \in K, \quad \forall (u, x) \in [0, \beta] \times \Pi_{\alpha(p)}(p), \quad d(\varphi_u(x), p) < \varepsilon_1$$

donc tel que :

$$\forall p \in K, \quad \forall (t, x) \in [0, \beta\alpha(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p), \quad \|D\varphi_{(t/\|X(p)\|)}(x) - \text{Id}\| < \varepsilon'$$

et tel que :

$$(*) \quad \forall p \in K, \quad \tilde{\Phi}_p([0, \beta\alpha(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$$

De plus, quitte à changer la définition de  $r_x$  donnée en 2.1, on peut supposer que pour chaque  $p \in K$  :

$$x \in \Pi_{r_p}(p) \Rightarrow (1 - \varepsilon') \|X(p)\| \leq \|X(x)\| \leq (1 + \varepsilon') \|X(p)\|$$

pour un tel couple  $(t, x) \in [0, \beta\alpha(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p)$ , on a en particulier :

$$\left\| \frac{1}{\|X(p)\|} X(\varphi_{\frac{t}{\|X(p)\|}}(x)) \right\| = \left\| D\varphi_{\frac{t}{\|X(p)\|}}(x) \frac{X(x)}{\|X(p)\|} \right\| \leq (1 + \varepsilon')^2$$

On pose alors  $\zeta(p) = \beta\alpha(p)$ . On a alors : sur  $[0, \zeta(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p)$ ,  $\tilde{\Phi}_p$  est  $\varepsilon'$ -proche en topologie  $C^1$  de l'application  $(t, q) \mapsto q + tX(p)/\|X(p)\|$ , ce résultat étant uniforme en  $p \in K$ .

Aussi, pour faire une perturbation de  $(\varphi_t)$  petite en topologie  $C^1$  à support dans  $\tilde{\Phi}_p([0, \zeta(p)] \times \Pi_{\alpha(p)}(p))$ , il suffit de faire une perturbation petite en topologie  $C^1$  de  $\tilde{\phi}_t = \tilde{\Phi}_p^{-1} \circ \varphi_t \circ \tilde{\Phi}_p$  quand cette quantité est définie, où par définition de  $\tilde{\Phi}_p$  :  $\tilde{\phi}_t(u, x) = (u + t\|X(p)\|, x)$ .

On considère alors deux fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}$  :

$$\begin{aligned} \gamma & : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1] \text{ qui vaut } 1 \text{ en } 0 \text{ et } 0 \text{ en dehors de } [-1, 1]; \\ \eta & : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1] \text{ qui vaut } 0 \text{ sur } ]-\infty, 0] \text{ et } 1 \text{ sur } [1, +\infty[. \end{aligned}$$

On définit alors pour  $p' \in \Pi_{\zeta(p)}(p)$  et  $v \in \Pi_{\zeta(p)-\|p'\|}(p)$  le difféomorphisme local  $h_{\varepsilon,v}$  de  $[0, \zeta(p)] \times \Pi_{\zeta(p)}(p)$  dans lui-même par :

$$h_{\varepsilon,v}(t, q) = (t, q + \varepsilon \eta(\frac{t}{\zeta(p)}) \gamma(\frac{\|q - p'\|^2}{\|v\|^2} v))$$

On définit alors le flot  $(\psi_t)$  de  $M$  par :

(1)  $\dot{\psi}$  coïncide avec  $\dot{\varphi}$  hors de

$$\tilde{\Phi}_p([0, \zeta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p)) = \Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$$

où on pose  $\beta(p) = \zeta(p) / \|X(p)\|$  ;

(2) dans  $\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$  et quand cela a un sens :

$$\tilde{\Phi}_p^{-1} \circ \psi_t \circ \tilde{\Phi}_p(u, q) = h_{\varepsilon,v}(h_{\varepsilon,v}^{-1}(u, q) + (t \|X(p)\|, 0))$$

Alors :

- $(\psi_t)$  est bien un flot à l'intérieur de  $\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p))$  car il est conjugué au flot  $(t, (u, q)) \mapsto (t \|X(p)\| + u, q)$  ;
- le champ de vecteurs  $\dot{\psi}$  coïncide sur  $\partial(\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\|v\|}(p'; p)))$  avec  $\dot{\varphi}$ , et lui est même  $C^\infty$ -tangent ;
- $\psi_{\beta(p)}(p') = \Phi_p(\beta(p), p' + \varepsilon v)$  ;
- de plus,  $h_{\varepsilon,v}$  est proche en topologie  $C^1$  de l'identité et  $\|X\|$  est borné sur  $K$  donc  $(\psi_t)$  est bien proche en topologie  $C^1$  de  $(\varphi_t)$  :

$$\|h_{\varepsilon,v}(t, q) - (t, q)\| = \left\| \left( 0, \varepsilon \eta\left(\frac{t}{\zeta(p)}\right) \gamma\left(\frac{\|q - p'\|^2}{\|v\|^2}\right) v \right) \right\| \leq \varepsilon ;$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} h_{\varepsilon,v}(t, q) - (1, 0) \right\| = \left\| \left( 0, \varepsilon \eta'\left(\frac{t}{\zeta(p)}\right) \gamma\left(\frac{\|q - p'\|^2}{\|v\|^2}\right) \frac{v}{\zeta(p)} \right) \right\| \leq \varepsilon \|\eta'\|_\infty ;$$

$$\left\| \left( \frac{\partial}{\partial q} h_{\varepsilon,v}(t, q) \partial q - (0, \partial q) \right) \right\| = \left\| \left( 0, 2\varepsilon \eta\left(\frac{t}{\zeta(p)}\right) \gamma'\left(\frac{\|q - p'\|^2}{\|v\|^2}\right) \frac{(q - p' \mid \partial q)v}{\|v\|^2} \right) \right\| \leq 2\varepsilon \|\gamma'\|_\infty ;$$

- d'autre part, par (\*) :

$$\Phi_p([0, \beta(p)] \times \Pi_{\beta(p)\|X(p)\|}(p)) = \tilde{\Phi}_p([0, \zeta(p)] \times \Pi_{\zeta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$$

□

La démonstration du lemme de perturbation pour les flots que nous venons de donner est due à Mai (cf. [5]). Son intérêt est que, pour construire le flot perturbé, on fait à l'intérieur de la boîte de flot une conjugaison du flot non perturbé (puis on recolle de façon régulière au flot non perturbé le long de la frontière de la boîte de flot). Ainsi, si le flot initial préserve une certaine structure, et si on impose au difféomorphisme conjugué de préserver cette structure, on obtiendra un flot perturbé qui préserve encore la structure. C. Pugh et C. Robinson procédaient autrement dans [4] : ils ne

traitaient que le cas des flots quelconques, faisant des moyennes barycentriques de flots à l'intérieur de la boîte de flot. Mais, ainsi qu'eux-mêmes le remarquaient, ils ne pouvaient ainsi traiter le cas des flots préservant une structure.

On a bien entendu aussitôt l'idée d'énoncer un lemme de perturbation pour les flots préservant le volume ou les flots symplectiques.

Déjà, nous avons remarqué en section 5.2 à l'aide d'un exemple dû à Michel Herman qu'on ne peut pas faire n'importe quelle perturbation à support « petit » d'un flot symplectique. : il faut fixer une classe de cohomologie (on doit perturber dans une surface d'énergie locale). Mais même si on ne s'autorise que de telles perturbations ou si on se limite au cas des flots préservant le volume, on est confronté au problème suivant :

dans une boîte de flot  $\Phi_p$  (mêmes notations que précédemment) qui a donc même régularité que  $(\varphi)$ , disons de classe  $C^k$ , pour faire une perturbation préservant la structure analogue à celle faite dans le cas des flots quelconques on a besoin de ramener la forme considérée à la forme volume ou symplectique standard sur  $\mathbf{R}^{\dim M}$ .

Considérons par exemple le cas des formes volume. Soit  $V$  la forme volume et  $j : \Pi(p) \rightarrow M$  l'injection canonique ; alors, si  $i_\varphi$  désigne le produit intérieur avec le champ de vecteurs  $\dot{\varphi}$ , on a :  $\Phi_p^* V = dt \wedge j^* i_\varphi V$ . Or,  $j^* i_\varphi V$  est une forme volume de classe  $C^{k-1}$ . Pour construire  $g_{\varepsilon, v}$  préservant le volume dans  $\Pi(p)$ , on a maintenant besoin de se ramener à la forme volume standard de  $\mathbf{R}^{\dim M-1}$ , ce que d'après [7] on ne sait faire qu'à l'aide d'un difféomorphisme de classe  $C^{k-1}$ , qui ne peut donc pas servir à construire un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

Un résultat de perturbation locale des flots préservant le volume n'est donc envisageable que pour les flots de classe  $C^\infty$ , qui correspondent aussi aux champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  préservant le volume. Comme nous allons traiter plus loin le cas des champs de vecteurs de classe  $C^k$  préservant le volume qui contient donc le cas des flots de classe  $C^\infty$  préservant le volume, nous n'avons pas jugé utile de donner un énoncé dans ce cas.

L'énoncé que nous avons donné dans le cas des champs de vecteurs sans homologie est le suivant :

PROPOSITION 5.1.4. — *Soit  $X \in CV$  de flot associé noté  $(\varphi_t)$ ,  $V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que :*

(0)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K$  et  $v \in \Pi_{\delta(p)}(p)$ , il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

(i)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p))$  ;

$$(ii) \psi_{\lambda_1}(p) = \Phi_p(\lambda_1, p + \varepsilon v).$$

*Démonstration.* — Avant de commencer la démonstration, soulignons-en les difficultés :

- remarquons tout d’abord que le cas des champs de vecteurs est différent de celui des flots : un flot de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) n’est pas forcément le flot associé à un champ de vecteurs de classe  $C^k$  (mais de classe  $C^{k-1}$  *a priori*), et le flot associé à un champ de vecteurs de classe  $C^k$  n’est pas forcément de classe  $C^{k+1}$  (mais de classe  $C^k$ );
- remarquons aussi qu’on ne va pas pouvoir, comme dans le cas des flots, raisonner dans les coordonnées définies par une boîte de flot. En effet, si  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $C^k$ , le flot associé est de classe  $C^k$  et donc la boîte de flot associée de classe  $C^k$ . On ne peut donc pas construire dans les coordonnées définies à l’aide de cette boîte de flot un champ de vecteurs de classe  $C^k$  (mais juste de classe  $C^{k-1}$ ).

*Cas des champs de vecteurs quelconques.* — On garde la même définition pour  $\tilde{\Phi}_p$  et  $\beta(p)$  que dans le cas des flots. Comme  $\bar{K}$  est compact, on peut trouver  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tel que :

$$\forall t \in [0, \lambda_1], \quad \forall p \in \bar{K}, \quad \varphi_t p \in B_{\varepsilon_1}(p)$$

et  $\delta_1 : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  continue, dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x, \beta(x) \|X(x)\|\}$  telle que :

$$\forall p \in K, \quad \forall t \in [0, \lambda_1], \quad \forall q \in \Pi_{\delta_1(p)}(p), \quad \varphi_t q \in B_{\varepsilon_1}(p).$$

De plus, comme dans la démonstration de la proposition 5.1.3 (cas des flots), on se ramène à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$  (ce qui permettra de prendre des barycentres de points).

Comme  $X = \partial\varphi_t/\partial t$  est de classe  $C^k$ , il existe une carte :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_p &: [0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \bar{\Pi}_{\delta_1(p)}(p) \rightarrow M \\ &(t, x) \mapsto \tilde{F}_p(t, x) \end{aligned}$$

de classe  $C^{k+1}$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall (t, q) \in \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \|X(p)\| \right\} \times \Pi_{\delta_1(p)}(p) \cup [0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \{p\}, \\ \tilde{F}_p(t, q) = \tilde{\Phi}_p(t, q) = \varphi_{(t/\|X(p)\|)}(q) \end{aligned}$$

Quitte à choisir  $\tilde{F}_p$  assez proche de  $\tilde{\Phi}_p$ , on peut supposer que :

$$\forall r \in ]0, \delta_1(p)], \quad \tilde{F}_p\left([0, \frac{3}{4}\lambda_1 \|X(p)\|] \times \Pi_{3r/4}(p)\right) \subset \tilde{\Phi}_p\left([0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \Pi_r(p)\right)$$

et que, comme c’était le cas pour  $\tilde{\Phi}_p : \left\| \tilde{F}_p \right\|_{C^1}$  et  $\left\| \tilde{F}_p^{-1} \right\|_{C^1}$  sont uniformément bornées pour  $p \in K$  (voir la démonstration de la proposition 5.1.3 pour le résultat concernant  $\tilde{\Phi}_p$ ).



$\gamma$  et  $\eta$  désignant les mêmes fonctions que dans la démonstration de la proposition 5.1.3, on définit pour  $\varepsilon < 1$  et  $\|v\| < \delta_1(p)$  :

$$\forall q \in \Pi_{\delta_1(p)}(p), \quad g_{\varepsilon,v}(q) = q + \varepsilon\gamma\left(\frac{\|q-p\|^2}{\|v\|^2}\right) \cdot v$$

puis on pose :

$$\forall (t, q) \in [0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta_1(p)}(p), \quad \psi_t(q) = \left(1 - \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1}\right)\right)\varphi_t(q) + \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1}\right)\varphi_t(g_{\varepsilon,v}(q)).$$

Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_p & : [0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \bar{\Pi}_{\delta_1(p)}(p) \longrightarrow M \\ & (t, q) \longmapsto \psi_{t/\|X(p)\|}(q) \end{aligned}$$

Sa différentielle est :

$$\begin{aligned} (\delta t, \delta q) & \longmapsto \left( \left(1 - \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1 \|X(p)\|}\right)\right) D\varphi_{t/\|X(p)\|}(q) \right. \\ & \quad \left. + \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1 \|X(p)\|}\right) D\varphi_{t/\|X(p)\|}(g_{\varepsilon,v}(q)) Dg_{\varepsilon,v}(q) \right) \delta q \\ & \quad + \frac{2}{\lambda_1 \|X(p)\|} \eta'\left(\frac{2t}{\lambda_1 \|X(p)\|}\right) \left( \varphi_{t/\|X(p)\|}(g_{\varepsilon,v}(q)) - \varphi_{t/\|X(p)\|}(q) \right) \delta t \\ & \quad + \left( \left(1 - \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1 \|X(p)\|}\right)\right) \frac{X(\varphi_{t/\|X(p)\|}(q))}{\|X(p)\|} + \eta\left(\frac{2t}{\lambda_1 \|X(p)\|}\right) \frac{X(\varphi_{t/\|X(p)\|}(g_{\varepsilon,v}(q)))}{\|X(p)\|} \right) \delta t \end{aligned}$$

Or,  $g_{\varepsilon,v}$  est  $\varepsilon$ -proche de l'identité en topologie  $C^1$  et  $\varepsilon\|v\|$ -proche de l'identité en topologie  $C^0$ . Aussi, quitte à choisir  $\varepsilon$  assez petit (uniformément en  $p$ ) et  $\|v\|$  assez petit (disons  $\|v\| < \delta_2(p) < \delta_1(p)$ , de manière à ce que

$$\frac{\|\varphi_{t/\|X(p)\|}(g_{\varepsilon,v}(q)) - \varphi_{t/\|X(p)\|}(q)\|}{\|X(p)\|}$$

soit petit),  $\tilde{G}_p$  est proche de  $\tilde{F}_p$  en topologie  $C^1$ .

Or, on a vu que  $\|\tilde{F}_p\|_{C^1}$  et  $\|\tilde{F}_p^{-1}\|_{C^1}$  sont uniformément bornés ; on peut donc choisir  $\varepsilon$  uniformément de manière à ce que les  $\tilde{G}_p$  soient des difféomorphismes. On peut aussi bien entendu s'arranger pour que pour tout  $r \in ]0, \delta_2(p)[$  :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_p\left(\left[0, \frac{\lambda_1 \|X(p)\|}{2}\right] \times \Pi_{r/2}(p)\right) & \subset \tilde{F}_p\left(\left[0, \frac{3\lambda_1 \|X(p)\|}{4}\right] \times \Pi_{3r/4}(p)\right) \\ & \subset \tilde{\Phi}_p\left(\left[0, \lambda_1 \|X(p)\|\right] \times \Pi_r(p)\right) \end{aligned}$$

Ceci permet de définir un flot  $(\psi_t)$  dans  $\tilde{G}_p\left(\left[0, \lambda_1 \|X(p)\|/2\right] \times \Pi_{\delta_2(p)}(p)\right)$  de champ de vecteurs associé noté  $Y$ . Il vérifie :

$$(1) \quad \psi_{\lambda_1/2}(p) = \varphi_{\lambda_1/2}(g_{\varepsilon,v}(p)) = \varphi_{\lambda_1/2}(p + \varepsilon v) ;$$

(2)  $\forall q \in \Pi_{\delta_2(p)}(p)$ ,

$$Y(\psi_t(q)) = (1 - \eta(\frac{2t}{\lambda_1}))X(\varphi_t(q)) + \eta(\frac{2t}{\lambda_1})X(\varphi_t \circ g_{\varepsilon,v}(q)) \\ + \frac{2}{\lambda_1}\eta'(\frac{2t}{\lambda_1})(\varphi_t \circ g_{\varepsilon,v}(q) - \varphi_t q);$$

si  $v$  est choisi assez petit (d'une manière qui dépend de  $p$ ),  $g_{\varepsilon,v}$  est proche en topologie  $C^0$  de l'identité, donc  $\tilde{Y} \circ \psi_t$  restreint à  $\{0\} \times \Pi_{\delta(p)}(p)$  est proche en topologie  $C^0$  de  $\tilde{X} \circ \varphi_t$  restreint à  $\{0\} \times \Pi_{\delta(p)}(p)$  (il suffit de choisir  $\delta_2(p)$  assez petit pour que  $\eta'(2t/\lambda_1)(\varphi_t \circ g_{\varepsilon,v}(q) - \varphi_t q)$  soit assez petit sur  $\{0\} \times \Pi_{\delta_2(p)}(p)$ ). Comme  $\dot{\varphi}_t = X \circ \varphi_t$  et  $\dot{\psi}_t = Y \circ \psi_t$ , cela implique que  $(\varphi_t)_{t \in [0, \lambda_1]}$  est proche en topologie  $C^0$  de  $(\psi_t)_{t \in [0, \lambda_1]}$  et donc finalement que  $Y$  est proche en topologie  $C^0$  de  $X$ ; de plus,

$$D\tilde{\psi}_t(0, x)(0, \delta x) = (1 - \eta(\frac{2t}{\lambda_1}))D\phi_t(0, x)(0, \delta x) + \eta(\frac{2t}{\lambda_1})D\phi_t(0, x)(0, Dg_{\varepsilon,v}\delta x)$$

est proche en topologie  $C^0$  de  $D\phi_t(0, x)(0, \delta x)$ ; ceci, joint au résultat précédent, permet de conclure que  $(\psi_t)$  est proche en topologie  $C^1$  de  $(\varphi_t)$ .

Calculons alors :

$$DY(\psi_t(0, q))(D\psi_t(0, q)\delta q + \delta t Y(\varphi_t(0, q))) = \\ (1 - \eta(\frac{2t}{\lambda_1}))DX(\varphi_t(0, q))(D\varphi_t(0, q)\delta q + \delta t X(\varphi_t(0, q))) \\ + \eta(\frac{2t}{\lambda_1})DX(\varphi_t(0, g_{\varepsilon,v}q))(D\varphi_t(0, g_{\varepsilon,v}q)Dg_{\varepsilon,v}(q)\delta q + \delta t X(\varphi_t(0, \varepsilon, v q))) \\ + \frac{4}{\lambda_1}\eta'(\frac{2t}{\lambda_1})(X(\varphi_t \circ g_{\varepsilon,v}(q)) - X(\varphi_t(q)))\delta t \\ + \frac{4}{\lambda_1^2}\eta''(\frac{2t}{\lambda_1})(\varphi_t \circ g_{\varepsilon,v}(q) - \varphi_t q)\delta t \\ + \frac{2}{\lambda_1}\eta'(\frac{2t}{\lambda_1})(D\varphi_t(g_{\varepsilon,v}(q))Dg_{\varepsilon,v}(q) - D\varphi_t q)\delta q.$$

Donc si  $\varepsilon$  est assez petit (indépendamment de  $p$ ) et  $\|v\| < \delta_2(p)$ ,  $Y$  est proche de  $X$  en topologie  $C^1$ .

(3) Le support de  $Y - X$  est alors inclus dans :

$$\tilde{G}_p([0, \frac{\lambda_1 \|X(p)\|}{2}] \times \Pi_{\|v\|}(p)) \subset \tilde{F}_p([0, \frac{3\lambda_1 \|X(p)\|}{4}] \times \Pi_{3\|v\|/2}(p)) \\ \subset \tilde{\Phi}_p([0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \Pi_{2\|v\|}(p))$$

De plus,  $Y$  est  $C^k$ -tangent à  $X$  le long de la frontière de

$$\tilde{G}_p([0, \frac{\lambda_1 \|X(p)\|}{2}] \times \Pi_{\|v\|}(p)),$$

donc on peut prolonger  $Y$  en un champ de classe  $C^k$  coïncidant avec  $X$  hors de  $[0, \lambda_1 \|X(p)\|] \times \overline{\Pi}_{\delta_2(p)}(p)$ . Ce champ de vecteurs satisfait à toutes les propriétés énoncées dans le lemme pour  $\delta = \delta_2/2$ .

*Cas des champs de vecteurs préservant le volume.* — On ne peut pas faire comme dans le cas précédent des moyennes barycentriques de flots, car les flots ainsi obtenus n'ont aucune raison de préserver le volume. C'est pourquoi nous adoptons la démonstration de C. Pugh et C. Robinson. On définit  $\delta(p)$  et  $\lambda_1$  comme dans le cas des champs de vecteurs quelconques et donc on se ramène encore à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$ ; pour cela, on recouvre  $K$  à l'aide d'un nombre fini de cartes, telles que pour chaque  $p \in K$  l'une de ces cartes le contenant dans laquelle on note les coordonnées  $(x_1, \dots, x_m)$  est telle que la courbe  $(\varphi_t p)_{t \in [0, \lambda_1]}$  est transverse au feuilletage par les hyperplans  $\{x_1 = C^{te}\}$ , et même uniformément transverse en ce sens que pour la métrique riemannienne, l'angle entre  $(\varphi_t p)_{t \in [0, \lambda_1]}$  et  $\{x_1 = C^{te}\}$  est uniformément minoré par une constante non nulle.

Soit  $p \in K$ . Pour  $\varepsilon < 1$  et  $v \in \{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$  (on travaille dans la carte décrite précédemment), on définit le chemin :

$$\gamma_{\varepsilon, v}(t) = (1 - \eta(\frac{t}{\lambda_1}))\varphi_t(p) + \eta(\frac{t}{\lambda_1})\varphi_t(p + \varepsilon v)$$

où  $\eta : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  vaut 0 sur  $]-\infty, 3/8]$  et 1 sur  $[5/8, +\infty[$ .

Écrivant  $f = o_n(g)$  si  $f$  et ses  $n$  dérivées premières sont des  $o(g)$  quand  $\varepsilon \|v\|$  tend vers 0 et  $f = O_n(g)$  si  $f$  et ses  $n$  dérivées premières sont des  $O(g)$  quand  $\varepsilon \|v\|$  tend vers 0, on voit alors aisément que :

- (i)  $\gamma_{\varepsilon, v}(t) - \varphi_t(p)$  est un  $o_2(1)$  (en d'autres termes, cette fonction, sa dérivée première et sa dérivée seconde tendent uniformément vers 0 quand  $\varepsilon \|v\|$  tend vers 0 puisque  $t$  et  $p$  parcourent des compacts) et un  $O_1(\varepsilon \|v\|)$  uniformément en  $t$  et  $p$ ;
- (ii) aussi,  $\dot{\gamma}_{\varepsilon, v}(t) - X \circ \gamma_{\varepsilon, v}(t) = \dot{\gamma}_{\varepsilon, v}(t) - X \circ \varphi_t(p) + X \circ \varphi_t(p) - X \circ \gamma_{\varepsilon, v}(t)$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon \|v\|)$ .

À condition de choisir  $\varepsilon \|v\|$  assez petit, la courbe  $\gamma_{\varepsilon, v}$  est transverse au feuilletage par les hyperplans  $\{x_1 = C^{te}\}$ , comme l'était la courbe  $(\varphi_t p)_{t \in [0, \lambda_1]}$ . Construisons une nouvelle carte et donc de nouvelles coordonnées  $z_1, \dots, z_m$ . Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbf{R}^m$  sur  $\{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$  identifié à  $\mathbf{R}^{m-1}$  (où  $m = \dim M$ ). Posons :

- $z_1(t_0, x_0)$  est la longueur du morceau d'arc de  $\gamma_{\varepsilon, v}$  joignant  $(0, 0)$  au « premier » point de  $\gamma_{\varepsilon, v}$  dans  $\{(t, x) \mid t = t_0\}$ , noté  $\gamma_{\varepsilon, v}(t_1)$ ;
- $(z_2, \dots, z_m) = \pi(\varphi_{t_0} x_0 - \gamma_{\varepsilon, v}(t_1))$ .

Comme  $\gamma_{\varepsilon, v}(t) - \varphi_t(0) = O_2(1)$ , il est clair que ces cartes sont bornées en topologie  $C^2$  uniformément en  $p$  quand  $\varepsilon \|v\|$  tend vers 0.

Nous allons alors travailler dans une de ces cartes. Nous noterons  $\tilde{X}$  le champ de vecteurs  $X$  lu dans cette carte et  $\tilde{\varphi}$  le flot correspondant.  $\tilde{V}$  sera la forme volume

lu dans cette carte. On a vu que  $(1, 0) - \tilde{X}(t, 0)$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon \|v\|)$  (ceci découle de  $\hat{\gamma}_{\varepsilon, v} - X \circ \gamma_{\varepsilon, v}$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon \|v\|)$ ). Notons alors :

$$i_{(1,0)}\tilde{V} - i_{\tilde{X}(t,0)}\tilde{V} = \mu(t, 0) = \sum_{j=1}^m \mu_j(t, 0) dz_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}z_j \wedge \cdots \wedge dz_m$$

(où le  $\hat{\phantom{x}}$  signifie qu'on omet ce terme).

Les  $\mu_j$  sont alors des fonctions de classe  $C^k$  qui sont des  $o_1(1)$  et des  $O_0(\varepsilon \|v\|)$  et  $\mu_j = 0$  hors de  $[1/4, 3/4]$ . De plus, les  $\mu_j$  peuvent être prolongées de manière  $C^k$  à  $\mathbf{R}$  tout entier de manière à être constantes dans les deux intervalles où elles n'étaient pas définies *a priori*.

Soit pour tout  $j$   $\Lambda_j$  la primitive de  $\mu_j(\cdot, 0)$  s'annulant en 0. Alors,  $\Lambda_j$  est de classe  $C^{k+1}$  et sur tout intervalle compact,  $\Lambda_j$  est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon \|v\|)$ . Soit alors  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction qui vaut 1 sur  $[-1/2, 1/2]$  et 0 en dehors de  $[-1, 1]$  et  $\gamma_0 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur  $[1/4, 3/4]$  et 0 en dehors de  $[0, 1]$ . On définit pour  $1 \leq j \neq i \leq n$   $\nu_{i,j}$  par :

$$\begin{aligned} \nu_{1,2}(z) &= \gamma\left(\frac{(\|z_2\|^2 + \cdots + \|z_m\|^2)}{\|v\|^2}\right) \gamma_0\left(\frac{z_1}{\lambda_1}\right) (\Lambda_1(z_1 + z_2) - \Lambda_1(z_1)); \\ \nu_{2,3}(z) &= \gamma\left(\frac{(\|z_2\|^2 + \cdots + \|z_m\|^2)}{\|v\|^2}\right) \gamma_0\left(\frac{z_1}{\lambda_1}\right) (\Lambda_2(z_1) - \Lambda_2(z_1 + z_3)); \\ \nu_{i,2}(z) &= \gamma\left(\frac{(\|z_2\|^2 + \cdots + \|z_m\|^2)}{\|v\|^2}\right) \gamma_0\left(\frac{z_1}{\lambda_1}\right) (\Lambda_i(z_1) - \Lambda_i(z_1 + z_2)); \\ \nu_{i,j}(z) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont de classe  $C^{k+1}$ , et un rapide calcul nous montre que  $\nu_{i,j}$  est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon \|v\|)$  (on utilise pour ça le fait que les  $\Lambda_j$  sont des  $O_1(\varepsilon \|v\|)$  et donc si  $\|z_k\| \leq \|v\|$ ,  $\Lambda_j(z_1 + z_k) - \Lambda_j(z_1) = O_0(\varepsilon \|v\|^2)$ ).

Définissons alors la  $(m-2)$ -forme :

$$\nu(z) = \sum_{i \neq j} \nu_{i,j}(z) dz_1 \wedge \cdots \wedge \hat{d}z_{\inf\{i,j\}} \wedge \cdots \wedge \hat{d}z_{\sup\{i,j\}} \wedge \cdots \wedge dz_m$$

Alors,  $d\nu$  est une  $(n-1)$ -forme de classe  $C^k$  qui est un  $O_1(1)$ , et on vérifie aisément que  $d\nu(t, 0) = \mu_j(t, 0)$ .

Si maintenant on définit le champ de vecteurs  $\tilde{Y}$  de classe  $C^k$  par :

$$i_{\tilde{Y} - \tilde{X}} \tilde{V} = d\nu,$$

$\tilde{Y}$  est proche en topologie  $C^1$  de  $\tilde{X}$ , et est  $C^k$ -tangent à  $\tilde{X}$  au bord de la carte, et le champ de vecteurs  $Y$  correspondant sur  $M$  (qui se lit  $\tilde{Y}$  dans la carte et vaut  $X$  ailleurs) satisfait au lemme de perturbation.  $\square$

REMARQUE 6.1.1. — En ce qui concerne les champs de vecteurs quelconques, C. Pugh et C. Robinson remarquent dans [13] que quand on travaille dans une variété de classe

$C^\infty$  (ce que nous faisons tout au long de ce travail), on peut approcher en topologie  $C^k$  tout champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^k$  ayant un point non errant  $p$  par un champ de vecteurs  $Y$  de classe  $C^\infty$  au voisinage de l'orbite de  $p$  pour lequel  $p$  est toujours un point non errant. Dans ce cas, on peut directement raisonner dans une boîte de flot sans perdre de régularité. La démonstration que nous avons préférée à cet argument (qui est elle aussi due à C. Pugh et C. Robinson) a l'avantage d'être valable sur des variétés qui ne sont pas de classe  $C^\infty$ , mais juste de classe  $C^{k+1}$ .

Rappelons maintenant l'énoncé concernant les champs de vecteurs symplectiques :

PROPOSITION 5.1.5. — Soit  $X \in CV_\alpha$  un champ de vecteurs de flot associé noté  $(\varphi_t)$ ,  $V$  un voisinage de  $X$  dans  $CV$  en topologie  $C^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $\varepsilon_1 > 0$ . Soit  $C_\lambda$  l'ensemble des points périodiques de  $(\varphi_t)$  de période inférieure ou égale à  $\lambda$  et  $K$  un ensemble relativement compact de  $M$  inclus dans  $M \setminus C_\lambda$ . Il existe alors une fonction continue  $\delta : K \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , dominée par  $x \mapsto \inf\{1, r_x\}$  et  $\lambda_1 \in ]0, \lambda[$  tels que :

(0)  $\Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(p)) \subset B_{\varepsilon_1}(p)$  et  $\Phi_p$  est une submersion sur cet ensemble pour tout  $p \in K$  ;

et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que : quels que soient  $p \in K$  et  $v \in \Pi_{\delta(p)}^0(p)$ , il existe  $Y \in V$  (de flot associé noté  $(\psi_t)$ ) tel que :

- (i)  $\text{Supp}(X - Y) \subset \Phi_p([0, \lambda_1] \times \Pi_{\|v\|}(p))$  ;
- (ii)  $\psi_{\lambda_1}(p) = \Phi_p(\lambda_1, p + \varepsilon v)$ .

Démonstration. — Remarquons tout de suite que si  $\dim M = 2$ ,  $\Pi_r^0(p)$  est pour  $r$  assez petit réduit à  $\{p\}$  et dans ce cas la proposition est une trivialité. On supposera donc que  $\dim M \geq 4$ .

On définit  $\delta(p)$  et  $\lambda_1$  comme dans le cas des champs de vecteurs quelconques et donc on se ramène encore à travailler dans  $\mathbf{R}^{\dim M}$  ; pour cela, on recouvre  $K$  à l'aide d'un nombre fini de cartes, telles que pour chaque  $p \in K$  l'une de ces cartes contenant  $p$ , dans laquelle on note les coordonnées  $(x_1, \dots, x_m)$ , est telle que la courbe  $(\varphi_t(p))_{t \in [0, \lambda_1]}$  est uniformément transverse au feuilletage par les hyperplans  $\{x_1 = C^{te}\}$  et telle que le champ de vecteurs  $x \mapsto \text{grad} H(x)$  (pour la métrique riemannienne associée à la forme symplectique) est uniformément transverse au feuilletage par les hyperplans  $x_2 = C^{te}$ .

Étant donné  $p \in K$ , choisissons de nouvelles coordonnées  $y_1, \dots, y_m$  où  $y_j = x_j$  sauf pour  $j = 2 : y_2 = H_p$ . Ces cartes ne sont pas uniformément bornées en  $p$ . Par contre, si on définit :

$$\gamma_{\varepsilon, v}(t) = (1 - \eta(\frac{t}{\lambda_1}))\hat{\varphi}_t(0) + \eta(\frac{t}{\lambda_1})\hat{\varphi}_t(\varepsilon v)$$

où  $\hat{\varphi}$  est le flot lu dans cette carte,  $\hat{X}$  le champ de vecteurs lu dans cette carte,  $\hat{\omega}$  la forme symplectique lue dans cette carte et  $\eta : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  vaut 0 sur  $] - \infty, 3/8]$  et 1 sur  $[5/8, +\infty[$ , alors :

- (0)  $y_2(\gamma_{\varepsilon,v}(t)) = y_2(\hat{\varphi}_t(0)) = H_p(p)$  donc  $0 = dy_2(\gamma_{\varepsilon,v}(t)) \cdot \dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t) = i_{\tilde{X}}\hat{\omega}\dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t)$  (car  $y_2$  n'est rien d'autre que le hamiltonien lu dans cette carte);
- (1)  $\gamma_{\varepsilon,v}(t) - \varphi_t(p)$  est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon\|v\|)$  uniformément en  $t$  et  $p$  (en effet, on fait en  $(x_1, x_3, \dots, x_m)$  un barycentre tel que celui étudié dans le cas des champs de vecteurs quelconques dont on avait déjà vu que c'est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon\|v\|)$  et ensuite on prend l'intersection avec  $\{H_p = 0\}$ , qui n'est pas éloigné en topologie  $C^2$  de  $\{x_2 = C^{te}\}$ );
- (2) aussi,  $\dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t) - X \circ \gamma_{\varepsilon,v}(t) = \dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t) - X \circ \varphi_t(p) + X \circ \varphi_t(p) - X \circ \gamma_{\varepsilon,v}(t)$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon\|v\|)$ .

Construisons une nouvelle carte et donc de nouvelles coordonnées  $z_1, \dots, z_m$ . Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbf{R}^m$  sur  $\{0\} \times \mathbf{R}^{m-1}$  identifié à  $\mathbf{R}^{m-1}$ . Posons :

- $z_1(t_0, x_0)$  est la longueur du morceau d'arc de  $\gamma_{\varepsilon,v}$  joignant  $(0, 0)$  au « premier » point de  $\gamma_{\varepsilon,v}$  dans  $\{(t, x) \mid t = t_0\}$ , noté  $\gamma_{\varepsilon,v}(t_1)$ ;
- $(z_2, \dots, z_m) = \pi(\varphi_{t_0}x_0 - \gamma_{\varepsilon,v}(t_1))$ .

Comme  $\gamma_{\varepsilon,v}(t) - \hat{\varphi}_t(0) = O_2(1)$ , il est clair que ces cartes sont bornées en topologie  $C^2$  uniformément en  $p$  quand  $\varepsilon\|v\|$  tend vers 0.

Nous allons alors travailler dans cette carte. Nous noterons  $\tilde{X}$  le champ de vecteurs  $\hat{X}$  lu dans cette carte et  $\tilde{\varphi}$  le flot correspondant.  $\tilde{\omega}$  sera la forme symplectique lue dans cette carte. Notons alors :

$$i_{(1,0)}\tilde{\omega} - i_{\tilde{X}(t,0)}\tilde{\omega} = \mu(t, 0) = \sum_{j=1}^m \mu_j(t, 0)dz_j.$$

Par (0), on a,  $(i_{\tilde{X}(\gamma_{\varepsilon,v}(t))}\hat{\omega} - i_{\dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t)}\hat{\omega})\dot{\gamma}_{\varepsilon,v}(t) = 0$  donc  $\mu_1(t, 0) = 0$ . On peut donc écrire :

$$i_{(1,0)}\tilde{\omega} - i_{\tilde{X}(t,0)}\tilde{\omega} = \mu(t, 0) = \sum_{j=2}^m \mu_j(t, 0)dz_j.$$

Les  $\mu_j$  sont alors des fonctions de classe  $C^k$ , et comme  $(1, 0) - \tilde{X}(t, 0)$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon\|v\|)$  (ceci découle de (1)),  $\mu_j$  est un  $o_1(1)$  et un  $O_0(\varepsilon\|v\|)$ . De plus,  $\mu_j = 0$  hors de  $[1/4, 3/4]$  et les  $\mu_j$  peuvent être prolongées de manière  $C^k$  à  $\mathbf{R}$  tout entier de manière à être constante dans les deux intervalles où elle n'étaient pas définies *a priori*.

Soit, pour tout  $j$ ,  $\Lambda_j$  la primitive de  $\mu_j(\cdot, 0)$  s'annulant en 0. Alors,  $\Lambda_j$  est de classe  $C^{k+1}$  et sur tout intervalle compact :  $\Lambda_j$  est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon\|v\|)$  (uniformément en  $p$ ). Soit alors  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction qui vaut 1 sur  $[-1/2, 1/2]$  et 0 en dehors de  $[-1, 1]$  et  $\gamma_0 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur  $[1/4, 3/4]$  et 0 en dehors de  $[0, 1]$ . On définit :

$$h(z) = \gamma\left(\frac{(\|z_2\|^2 + \dots + \|z_m\|^2)}{\|v\|^2}\right)\gamma_0\left(\frac{z_1}{\lambda_1}\right)\sum_{j=2}^m (\Lambda_1(z_1 + z_j) - \Lambda_1(z_1))$$

$h$  est alors une fonction de classe  $C^{k+1}$ , et un rapide calcul nous montre que  $h(z)$  est un  $o_2(1)$  et un  $O_1(\varepsilon \|v\|)$  (on utilise pour ça le fait que les  $\Lambda_j$  sont des  $O_1(\varepsilon \|v\|)$  et donc si  $\|z_k\| \leq \|v\|$ ,  $\Lambda_j(z_1 + z_k) - \Lambda_j(z_1) = O_0(\varepsilon \|v\|^2)$ ) et  $dh$  est une 1-forme de classe  $C^k$  qui est un  $O_1(\varepsilon)$ , et on vérifie aisément que  $dh(t, 0) = \mu_j(t, 0)$ .

Si on définit le champ de vecteurs  $\tilde{Y}$  de classe  $C^k$  par  $i_{\tilde{Y}-\tilde{X}}\tilde{\omega} = dh$ ,  $\tilde{Y}$  est proche en topologie  $C^1$  de  $\tilde{X}$ , et est  $C^k$ -tangent à  $\tilde{X}$  au bord de la carte, et le champ de vecteurs  $Y$  correspondant sur  $M$  (qui se lit  $\tilde{Y}$  dans la carte et vaut  $X$  ailleurs) satisfait au lemme de perturbation.  $\square$

Signalons que la démonstration précédente est la même que dans [13], sauf que nous avons été plus explicite quant à l'expression de  $h$ .

## 6.2. Démonstration des résultats de 5.2 concernant les suites de points

Commençons par donner un résultat algébrique, dû à Mai, qui permet de démontrer les résultats cherchés. Nous démontrerons le résultat algébrique dans la section 6.3.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — On travaille dans  $\mathbf{R}^n$  muni de sa structure euclidienne standard.

- $N$  désigne un entier strictement plus grand que 1.
- $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots)$  est une suite de difféomorphismes affines de  $\mathbf{R}^n$  vers des espaces euclidiens de dimension  $n$   $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$  (on notera  $d_i$  la distance euclidienne sur  $X_i$ )
- $\overline{B}_r(x)$  désignera la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $B_r(x)$  seront les boules ouvertes correspondantes dans l'espace considéré.
- Le  $1/N$ -noyau de  $\overline{B}_r(x)$  est  $\overline{B}_{r/N}(x)$ .
- Si  $Y \subset \mathbf{R}^n$  ou  $Y \subset X_i$ , on dit que  $\overline{B}_r(x)$  et  $Y$  sont *en contact* si

$$Y \cap \overline{B}_r(x) = Y \cap \partial B_r(x) \neq \emptyset$$

(ici,  $\partial P$  désigne la frontière de  $P$ ).

THÉORÈME 6.2.1 (Mai Jiehua). — *Il existe un nombre réel  $\rho \geq 3$  et un entier positif  $\eta$ , qui dépendent seulement de  $\mathcal{F}$  et de  $N$ , tels que : pour tout sous-ensemble fini ordonné  $X_0 = \{y_i \mid i = 1, 2, \dots\}$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour tout  $y \in \mathbf{R}^n$  et  $\delta > 0$  tel que  $B_{\delta/4}(y) \cap X_0$  contienne au moins deux points, il existe toujours deux points  $w_1 = y_j$  et  $w_2 = y_l$  ( $j > l$ ) dans  $X_0 \cap B_{\rho\delta}(y)$  et une suite de points  $K = (x_1, \dots, x_\eta)$  dans  $B_{\rho\delta}(y)$  vérifiant :*

- (i)  $x_1 = w_1, x_\eta = w_2$  ;
- (ii) si  $Y_0 = \partial B_{\rho\delta}(y) \cup X_0 - \{w_1, w_2\}$ , si  $x_{k,i} = f_i(x_k)$  et si  $Y_i = f_i(Y_0)$ , alors pour  $i \in [1, \eta]$ ,  $x_{i+1,i}$  est dans le  $1/N$ -noyau de la boule fermée de centre  $x_{i,i}$  en contact avec  $Y_i$  (en d'autres termes, pour  $i \in [1, \eta]$ ,  $d_i(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq (1/N)d_i(Y_i, x_{i,i})$ ).

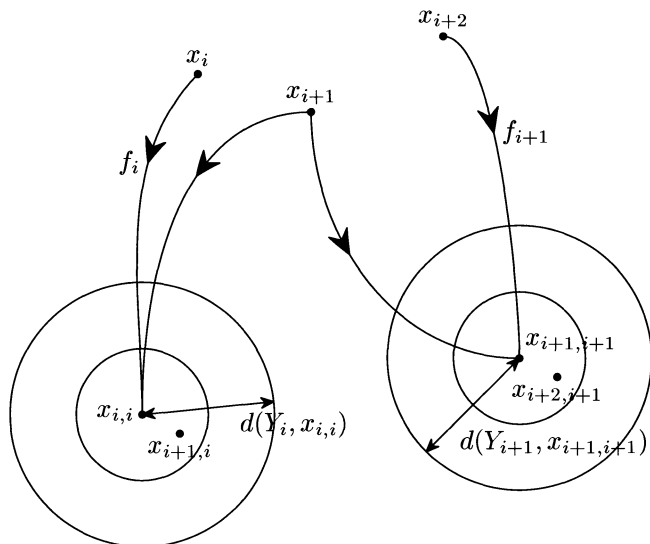


Figure 1

Expliquons comment on déduit de ce résultat les résultats concernant les suites de points (énoncés en 5.2), *i.e.* comment, à partir d'un difféomorphisme, flot ou champ de vecteurs on peut se ramener à travailler avec uniquement des applications affines.

*Démonstration de la proposition 5.2.1 à l'aide du théorème 6.2.1*

- (a) Choisissons  $f$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$ ,  $q \in \omega(p)$  comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.1. Quitte à diminuer  $\varepsilon$ , on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte et homéomorphe à une boule de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . On peut alors trouver un voisinage de  $f(\overline{B_\varepsilon(q)}) \cup \overline{B_\varepsilon(q)} \cup \{p\}$  difféomorphe à  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . C'est pourquoi, par la suite, nous identifierons cet ensemble à une partie de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ .
- (b) On considère alors

$$J = \{j \in \mathbf{N} \mid f^j(p) \in B_\varepsilon(q)\}$$

qui est infini puisque  $q \in \omega(p)$ . On écrira alors  $J = \{j_n \mid n \geq 1\}$  où  $(j_n)$  est une suite strictement croissante. On définit la suite d'applications linéaires :

$$F_n = Df^{j_n} p : T_p M \longrightarrow T_{f^{j_n} p} M$$

Grâce à l'identification précédente, on peut considérer qu'en fait  $F_n$  est une application affine de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . Nous raisonnerons donc dans cet espace.



(c) Posons alors  $\mathcal{F} = (F_n)$ . Soit

$$K = \sup \left\{ 1, \sup \left\{ \frac{d(fx, fy)}{d(x, y)} \mid x, y \in f(\overline{B_\varepsilon}(q)) \cup \overline{B_\varepsilon}(q), x \neq y \right\}, \right. \\ \left. \sup \left\{ \frac{d(x, y)}{d(fx, fy)} \mid x, y \in f(\overline{B_\varepsilon}(q)) \cup \overline{B_\varepsilon}(q), x \neq y \right\} \right\}$$

et  $N = [4K^2/\varepsilon] + 1$ . Utilisons alors le théorème 6.2.1 pour  $\mathcal{F}$  et  $N$ . On obtient ainsi une constante  $\rho' \geq 3$  et un entier positif  $\eta$  qui vérifient les conclusions de ce théorème. Posons alors  $\alpha = j_\eta$  et  $\rho = 4\rho'$ .

(d) Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , il existe  $r > 0$  tel que si  $x, y \in \overline{B_\varepsilon}(q)$ , on a pour tout  $i \in [1, \alpha]$  :

$$(A) \quad f^{j_i} \circ F_i^{-1}x, f^{j_i} \circ F_i^{-1}y \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}d(x, y) \leq d(f^{j_i} \circ F_i^{-1}x, f^{j_i} \circ F_i^{-1}y) \leq 2d(x, y);$$

$$(B) \quad f^{j_i} \circ F_i^{-1}x, f^{j_i} \circ F_i^{-1}y \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \Rightarrow d(x, f^{j_i} \circ F_i^{-1}y) \geq \frac{1}{2}d(x, y);$$

et tel qu'on ait la condition :

(1) les  $f^j(B_{\rho r}(p))$  pour  $j \in [1, \alpha]$  sont deux à deux disjoints et on a pour tout  $j \in [1, \alpha]$ ,  $f^j(B_{\rho r}(p)) \subset B_\varepsilon(f^j p)$

(ceci exprime que la conclusion (1) de la proposition 5.2.1 est remplie).

On suppose de plus que :

$$(C) \quad \forall i \in \{1, \dots, \eta\}, f^{j_i}(B_{\rho r}(p)) \subset B_\varepsilon(q)$$

(e) Supposons maintenant comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.1 que

$$x, f^m x \in B_{\bar{r}}(p)$$

pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $m \geq 1$ . Nous voulons montrer qu'avec les constantes  $r, \rho$  et  $\alpha$  définies ci-dessus, les conclusions de cette proposition sont vérifiées. Remarquons que si  $x$  est périodique de période inférieure ou égale à  $m$ , le résultat est une trivialité; on pose en effet  $m_1 = 0$ ,  $m_2$  est la plus petite période de  $x$  et  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}$ ,  $z_i = f^i x$ . On suppose donc désormais que  $x$  n'est pas périodique de période inférieure ou égale à  $m$ . Définissons pour  $i \in [1, m]$  les points  $y_i = f^i x$  et l'ensemble ordonné  $X_0 = \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}$ . Alors, par hypothèse,  $B_{\bar{r}}(p)$  contient au moins deux points. On peut donc appliquer le théorème 6.2.1 qui implique qu'il existe deux points  $w_1 = y_{m_2} = f^{m_2} x$  et  $w_2 = y_{m_1} = f^{m_1} x$  ( $m_2 > m_1$ ) dans  $X_0 \cap B_{4\rho'\bar{r}}(p) = X_0 \cap B_{\rho\bar{r}}(p)$  et une suite de points  $(x_1, \dots, x_\eta)$  dans  $B_{4\rho'\bar{r}}(p) = B_{\rho\bar{r}}(p)$  vérifiant :

$$(i) \quad x_1 = w_1, x_\eta = w_2;$$

(ii) si  $Y_0 = \partial B_{\rho\bar{r}}(p) \cup X_0 \setminus \{w_1, w_2\}$ , si  $x_{k,i} = F_i(x_k)$  et si  $Y_i = F_i(Y_0)$ , alors pour  $i \in [1, \eta]$ ,  $x_{i+1,i}$  est dans le  $1/N$ -noyau de la boule fermée de

centre  $x_{i,i}$  en contact avec  $Y_i$  (en d'autres termes, pour  $i \in [1, \eta]$ , on a  $d(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq (1/N)d(Y_i, x_{i,i}) \leq d(Y_i, x_{i,i})\varepsilon/(4K^2)$ ).

(f) Définissons alors des points  $z_0, \dots, z_\alpha$  par :

- pour  $i \in [1, \eta]$ ,  $z_{j_i} = f^{j_i} x_i$  ;
- pour  $i \in [0, j_1]$ ,  $z_i = f^i f^{m_2} x$  ;
- pour  $i \in ]j_k, j_{k+1}]$ ,  $z_i = f^{i-j_{k+1}} z_{j_{k+1}}$ .

(g) On a alors :

- (i)  $z_0 = f^{m_2} x$ ,  $z_\alpha = z_{j_\eta} = f^{j_\eta} x_\eta = f^\alpha w_2 = f^{m_1+\alpha} x$  ;  
de plus, si  $i \in [1, \eta]$ , on sait par (e) que

$$x_i \in B_{\rho\bar{r}}(p)$$

donc  $z_{j_i} = f^{j_i} x_i \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))$  et on en déduit par la définition de  $(z_i)$  que :

$$\forall i \in [0, \alpha], \quad z_i \in f^i(B_{\rho\bar{r}}(p))$$

ceci est en fait le (2)(i) de la proposition 5.2.1.

(iii) Supposons que pour un  $i_0 \in \{0, \dots, \alpha\}$ , on ait  $fz_{i_0} \neq z_{i_0+1}$ . Par la définition donnée en (f) des  $z_i$ , on a forcément  $i_0 = j_i$  pour un certain  $i \in \{1, \dots, \eta-1\}$  et donc  $z_{i_0} = z_{j_i} = f^{j_i} x_i \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset B_\varepsilon(q)$  par (C). Ceci donne le (2)(iii) de la proposition 5.2.1.

(ii) Le (2)(ii) de la proposition 5.2.1 étant évident pour des  $i$  tels que  $fz_i = z_{i+1}$ , considérons un  $i$  tel que  $i \in [1, \eta]$ . On a

- par ce qu'on a vu en (g)(i),  $z_{j_i} \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset B_\varepsilon(q)$  ;
- par la définition donnée en (f) de  $(z_i)$  et le fait que par (e), on a  $x_i \in B_{\rho\bar{r}}(p)$  :

$$\begin{aligned} z_{j_{i+1}} &= f^{j_{i+1}-j_i} z_{j_i} = f^{j_{i+1}-j_i} \circ f^{j_i} x_i \\ &= f^{j_{i+1}} x_{i+1} \in f^{j_{i+1}}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset f(B_\varepsilon(q)) \end{aligned}$$

Aussi, on a  $fz_{j_i}, z_{j_{i+1}} \in f(B_\varepsilon(q))$ . Aussi, par la définition de  $K$  donnée en (c), on a :

$$\begin{aligned} d(fz_{j_i}, z_{j_{i+1}}) &\leq K \cdot d(z_{j_i}, f^{-1}z_{j_{i+1}}) = K \cdot d(f^{j_i} x_i, f^{j_i} x_{i+1}) \\ &= K \cdot d(f^{j_i} \circ F_i^{-1} x_{i,i}, f^{j_i} \circ F_i^{-1} x_{i+1,i}) \\ &\leq 2K \cdot d(x_{i,i}, x_{i+1,i}) \end{aligned}$$

Or, par (e)(ii), on sait que  $d(x_{i,i}, x_{i+1,i}) \leq d(Y_i, x_{i,i})\varepsilon/(4K^2)$  ; ceci implique donc :

$$(*) \quad d(fz_{j_i}, z_{j_{i+1}}) \leq d(Y_i, x_{i,i}) \frac{\varepsilon}{(2K)}$$

Or, on a  $F_i(\partial B_{\rho\bar{r}}(p) \cup \{f^j x \mid m_1 < j < m_2\}) \subset Y_i$ . Ceci implique que :

1. comme  $f^{j_i} \circ F_i^{-1}(x_{i,i}) = f^{j_i} x_i \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ , on peut utiliser le (A) qui implique que :

$$\begin{aligned} d(x_{i,i}, F_i(\partial B_{\rho\bar{r}}(p))) &= d(F_i x_i, F_i(\partial B_{\rho\bar{r}}(p))) \\ &= d(F_i \circ f^{-j_i} z_i, F_i \circ f^{-j_i}(f^{j_i}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p)))) \\ &\leq 2d(z_i, \partial f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))) \end{aligned}$$

Donc finalement on a :

$$d(fz_{j_i}, z_{j_i+1}) \leq \frac{\varepsilon}{K} d(x_i, \partial f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))) = \frac{\varepsilon}{K} d(z_{j_i}, \partial f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)))$$

Par la définition donnée en (c) de  $K$ , on a

$$d(z_{j_i}, \partial f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))) \leq K \cdot d(fz_{j_i}, f^{j_i+1}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p))).$$

Aussi, on obtient finalement grâce à (\*)

$$d(fz_{j_i}, z_{j_i+1}) \leq \varepsilon \cdot d(fz_{j_i}, f^{j_i+1}(\partial B_{\rho\bar{r}}(p))).$$

2. comme  $f^{j_i} \circ F_i^{-1}(x_{i,i}) = f^{j_i} x_i \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ , on a pour  $j$  vérifiant  $m_1 + \alpha < j < m_2$ ,  $m_1 \leq j - 1 - j_i < m_2$ ; distinguons deux cas :  
 – soit  $f^{j-1}x \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ . Alors, par (B), on a :

$$\begin{aligned} d(F_i \circ f^{j-1-j_i} x, x_{i,i}) &= d(F_i \circ f^{-j_i}(f^{j-1}x), F_i \circ f^{-j_i} z_i) \\ &\leq 2d(f^{j-1}x, z_i). \end{aligned}$$

De plus,  $z_i \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset B_\varepsilon(q)$  car par définition  $z_i = f^{j_i} x_i$  et  $f^{j-1}x \in f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p)) \subset B_\varepsilon(q)$  par hypothèse. Aussi, par définition de  $K$  :

$$d(f^{j-1}x, z_i) \leq Kd(f^j x, f z_i).$$

Ceci, joint à (\*), donne

$$d(fz_{j_i}, z_{j_i+1}) \leq \varepsilon d(f^j x, f z_i)$$

- soit  $f^{j-1}x \notin f^{j_i}(B_{\rho\bar{r}}(p))$ . Dans ce cas,  $f^j x \notin f^{j_i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p))$  et donc :

$$d(f^j x, f z_{j_i}) \geq d(\partial f^{j_i+1}(B_{\rho\bar{r}}(p)), f z_{j_i})$$

donc finalement, par (1), on a dans ce cas encore :

$$d(fz_{j_i}, z_{j_i+1}) \leq \varepsilon d(f^j x, f z_i).$$

On a finalement montré que

$$d(fz_{j_i}, z_{j_i+1}) \leq \varepsilon \inf\{d(f^j x, f z_i) \mid m_1 + \alpha < j < m_2\}$$

donc nous avons montré le (2)(ii) de la proposition 5.2.1.

□

*Démonstration de la proposition 5.2.2 à l'aide du théorème 6.2.1*

(a) Choisissons  $\varphi, p, \varepsilon, \varepsilon_0, q \in \omega(p)$  et  $\beta : B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.2. Quitte à diminuer  $\varepsilon$ , on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte et homéomorphe à une boule de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . On peut alors trouver un voisinage de  $\overline{B_\varepsilon(q)} \cup \{p\}$  difféomorphe à  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . C'est pourquoi, par la suite, nous identifierons cet ensemble à une partie de  $\mathbf{R}^{\dim M}$ . On peut aussi s'arranger pour que  $\Pi(p)$  soit un hyperplan affine (localement) de  $\mathbf{R}^{\dim M}$  i.e. identifier au voisinage de  $p$   $T_p\Pi(p)$  et  $\Pi(p)$ .

(b) On envisage alors deux cas.

– Soit il existe  $q' \in B_{\varepsilon/2}(q) \cap \omega(p)$  tel que  $\dot{\varphi}(q') \neq 0$ . Par hypothèse, il existe une boîte de flot en  $q'$  notée

$$\Phi_{q'} : [0, \beta(q')] \times \Pi_{\beta(q')\|X(q')\|}(q') \rightarrow M$$

telle que  $\Phi_{q'}([0, \beta(q')] \times \Pi_{\beta(q')\|X(q')\|}(q')) \subset B_\varepsilon(q')$ .

Choisissons alors  $r' < \beta(q')\|X(q')\|$  « suffisamment petit » (on précisera dans quel sens par la suite). On note  $(t_i)_{i \geq 0}$  l'unique suite strictement croissante de réels telle que

$$\{t_i \mid i \geq 0\} = \{t \in \mathbf{R}_+ \mid \varphi_t p \in \Phi_{q'}(\{0\} \times \Pi_{r'}(q'))\}$$

i.e.  $\{\varphi_{t_i} p \mid i \in \mathbf{N}\}$  est l'ensemble des points de l'orbite de  $p$  qui « entrent » dans une petite boîte de flot construite en  $q'$ .

On a alors  $\forall i \in \mathbf{N}, t_{i+1} - t_i > \beta(q')$ . On en déduit vu la continuité de  $\beta$  que si on choisit  $r'$  assez petit,  $\forall i \in \mathbf{N}, t_{i+1} - t_i > \beta(\varphi_{t_i} p)$ .

– Soit on n'est pas dans le cas précédent. Remarquons que dans ce cas on a forcément  $p \notin \omega(p)$  (i.e.  $p$  n'est pas positivement récurrent) car sinon on aurait

$$\forall t \in \mathbf{R}, \varphi_t p \in \omega(p)$$

et on pourrait alors trouver  $t_0 \in \mathbf{R}_+$  tel que

$$\varphi_{t_0} p \in \omega(p) \cap B_\varepsilon(q);$$

or,  $X(\varphi_{t_0} p) = D\varphi_{t_0}(p)X(p) \neq 0$  donc on serait dans le cas précédent.

Dans ce cas, comme  $q \in \omega(p)$ , on peut aisément construire une suite croissante  $(t_i)_{i \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  telle que pour tout  $i \geq 0$  :

$$(i) \quad t_{i+1} > t_i + \beta(\varphi_{t_i} p);$$

$$(ii) \quad \Phi : [0, \beta(\varphi_{t_i} p)] \times \Pi_{\beta(\varphi_{t_i} p)\|X(\varphi_{t_i} p)\|}(\varphi_{t_i} p) \rightarrow M$$

$$(t, x) \mapsto \varphi_t x$$

est une submersion à valeurs dans  $B_\varepsilon(q)$ .

Dans chacun des deux cas décrits précédemment, on a donc construit une suite croissante de réels  $(t_i)_{i \geq 0}$ . On peut alors, pour chaque  $i$  et à condition d'être assez proche de  $p$  (la notion de proximité dépendant de  $i$ ) définir une application de Poincaré  $\Phi_i$  de  $\Pi(p)$  dans  $\Pi(\varphi_{t_i} p)$  qui à chaque  $x \in \Pi(p)$  associe le « premier »

point de l'orbite positive de  $x$  à être dans  $\Pi(\varphi_{t_i}p)$ . On pose alors  $P_i = D\Phi_i(p)$ .  $P_i$  est alors une application affine de l'hyperplan affine  $T_p\Pi(p) = \Pi(p)$  dans l'hyperplan affine  $T_{\varphi_{t_i}p}\Pi(\varphi_{t_i}p) = X_i$  (que l'on munit de la structure euclidienne donnée par la métrique riemannienne de  $M$ ).

- (c) Posons alors  $\mathcal{F} = (P_j)$ ,  $N = [4/\varepsilon_0] + 1$  et utilisons le théorème 6.2.1 pour  $\mathcal{F}$  et  $N$ . On obtient ainsi une constante  $\rho' \geq 3$  et un entier positif  $\eta = \alpha + 1$  qui vérifient les conclusions de ce théorème. On posera  $\rho = 4\rho'K$  où

$$K = \sup \left\{ \sup_{0 \leq i \leq \alpha} \{ \|D\Phi_i|_{\Pi(p)}\| \}, 1 \right\}$$

- (d) L'application  $P_i$  est l'application tangente en  $p$  à  $\Phi_i$ , il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $i \in [0, \alpha]$ , si  $x, y \in \overline{B}_\varepsilon(q) \cap X_i$  :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \Phi_i \circ P_i^{-1}x, \Phi_i \circ P_i^{-1}y &\in \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i}p) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}d(x, y) \leq d(\Phi_i \circ P_i^{-1}x, \Phi_i \circ P_i^{-1}y) \leq 2d(x, y) \end{aligned}$$

et tel qu'on ait la condition :

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \Phi &: [0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_\alpha}p)] \times \Pi_{\rho r}(p) \longrightarrow M \\ &(t, x) \longmapsto \varphi_t x \end{aligned}$$

est une submersion (ceci est possible car  $p$  est supposé non périodique) telle que :

- (i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \beta(\varphi_{t_\alpha}p)]$ ,  $\varphi_t(\Pi_{\rho r}(p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p)$  ;  
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}$ ,  $\Phi([0, \beta(\varphi_{t_i}p)] \times \Pi_{\rho r}(\varphi_{t_i}p)) \subset B_\varepsilon(q)$  (ceci vient de (B)).

On a donc démontré les conclusions (1)(i) et (1)(ii) de la proposition 5.2.2.

- (e) Supposons maintenant comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.2 que

$$x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}(p)$$

pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ . Nous voulons montrer qu'avec les constantes  $r, \rho$  et  $\alpha$  définie ci-dessus, les conclusions de cette proposition sont vérifiées. Remarquons que si  $x$  est périodique de période  $T'$  inférieure ou égale à  $T$ , le résultat est une trivialité; on pose en effet  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T'$  et  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}$ ,  $z_i = \Phi_i x$ . On suppose donc désormais que  $x$  n'est pas périodique de période inférieure ou égale à  $T$ .

L'ensemble  $\{t \in [0, T] \mid \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}(p)\}$  est fini, de cardinal supérieur ou égal à deux, on peut l'écrire en extension  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  où  $\tau_1 < \dots < \tau_m$  et  $m \geq 2$ . On note alors  $X_0 = \{y_i = \varphi_{\tau_i} x \mid 0 \leq i \leq m\}$  ordonné par l'ordre des  $\tau_i$ . Comme  $x$  n'est pas périodique de période inférieure ou égale à  $T$ ,  $\Pi_{\bar{r}}(p) \cap X_0$  contient au moins deux points. On peut donc appliquer le théorème 6.2.1 :

il existe deux points  $w_1 = y_{m_2} = \varphi_{\tau_{m_2}} x$  et  $w_2 = y_{m_1} = \varphi_{\tau_{m_1}} x$  ( $m_2 > m_1$  donc  $\tau_{m_2} > \tau_{m_1}$ ) dans  $X_0 \cap \Pi_{4\rho\bar{r}}(p) = X_0 \cap \Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)$  et une suite de points  $(x_0, \dots, x_\alpha)$  dans  $\Pi_{4\rho\bar{r}}(p) = \Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)$  vérifiant :

- (i)  $x_0 = w_1, x_\alpha = w_2$  ;  
(ii) si  $Y_0 = \partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p) \cup X_0 \setminus \{w_1, w_2\}$  (on prend la frontière dans  $\Pi(p)$ ), si  $x_{k,i} = P_i(x_k)$  et si  $Y_i = P_i(Y_0)$ , alors pour  $i \in [0, \alpha - 1]$ ,  $x_{i+1,i}$  est dans le  $1/N$ -noyau de la boule fermée de centre  $x_{i,i}$  en contact avec  $Y_i$  (en d'autres termes, pour tout  $i \in [0, \alpha - 1]$ , on a

$$d_i(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq \frac{1}{N} d_i(Y_i, x_{i,i}) \leq \frac{\varepsilon_0}{4} d(Y_i, x_{i,i}).$$

(f) Définissons alors des points  $z_0, \dots, z_\alpha$  par :

- $z_0 = \Phi_0 w_1$  ;
- pour  $i \in [1, \alpha]$ ,  $z_i = \Phi_i x_i$ .

(g) On a alors :

- (i)  $z_0 = \Phi_0 w_1 = \Phi_0(\varphi_{\tau_{m_2}} x)$ ,  $z_\alpha = z_\alpha = \Phi_\alpha w_2 = \Phi_\alpha(\varphi_{\tau_{m_1}} x)$  ; de plus, si  $i \in [0, \alpha]$ , on sait par (e) que  $x_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}(p)$  donc

$$z_i = \Phi_i x_i \in \Phi_i((\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)) \cap \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p))$$

d'après la définition de  $K$  donnée en (c) ; ceci nous donne le (2)(i) de la proposition 5.2.2 pour  $T_2 = \tau_{m_2}$  et  $T_1 = \tau_{m_1}$ .

(ii) D'après (g)(i), on sait que :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, z_i \in \Phi_i((\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)) \cap \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p))$$

Aussi, par le (A), pour tout  $i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$  :

$$\begin{aligned} d(z_i, \Phi_i \circ \Phi_{i+1}^{-1} z_{i+1}) &= d(\Phi_i x_i, \Phi_i x_{i+1}) \\ &= d(\Phi_i \circ P_i^{-1} x_{i,i}, \Phi_i \circ P_i^{-1} x_{i+1,i}) \\ &\leq 2d(x_{i,i}, x_{i+1,i}) \end{aligned}$$

Or, par (e)(ii), on sait que pour tout  $i \in [0, \alpha - 1]$ , on a

$$d_i(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq \frac{\varepsilon_0}{4} d(Y_i, x_{i,i}) ;$$

ceci implique donc :

$$(*) \quad \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, d(z_i, \Phi_i \circ \Phi_{i+1}^{-1} z_{i+1}) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} d(Y_i, x_{i,i}).$$

Or, on a  $P_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p) \cup \{\varphi_t x \mid t \in [T_1, T_2]\}) \cap \Pi_{\rho\bar{r}/K}(p) \subset Y_i$  ; ceci implique que :

1. comme  $\Phi_i \circ P_i^{-1} x_{i,i} = \Phi_i x_i \in \Phi_i(\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p)$ , on peut utiliser le (A) qui implique que :

$$\begin{aligned} d(x_{i,i}, P_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p))) &= d(P_i x_i, P_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p))) \\ &= d(P_i \circ \Phi_i^{-1} z_i, P_i \circ \Phi_i^{-1} (\Phi_i \partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p))) \\ &\leq 2d(z_i, \partial\Phi_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p))). \end{aligned}$$

Or,  $P_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)) \subset Y_i$ , donc par (\*), on a finalement

$$d(z_i, \Phi_i \circ \Phi_{i+1}^{-1} z_{i+1}) \leq \varepsilon_0 d(z_i, \partial\Phi_i(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}(p))).$$

2. Soit  $t \in ]T_1 + t_\alpha, T_2[$  tel que  $\varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}(\varphi_{t_i} p)$  ;  
 si  $\varphi_t x \notin \Phi_i(\Pi_{\rho\bar{r}/K}(x))$ , alors  $d(z_i, \varphi_t x) \geq d(z_i, \partial\Phi_i(\Pi_{\rho\bar{r}/K}(x)))$  donc

$$\varepsilon_0 d(\varphi_t x, z_i) \geq d(z_i, \Phi_i \circ \Phi_{i+1}^{-1} z_{i+1})$$

par le (g)(ii)(1). Sinon, on a :

$$t - \tau(t, x) \in ]T_1, T_2[ \subset [0, T] \text{ et } \varphi_{t-\tau(t,x)} x \in \Pi_{\rho\bar{r}/K}(p)$$

donc  $\varphi_{t-\tau(t,x)} x \in X_0$  donc

$$(**) \quad \varphi_t x \in \Phi_i \circ P_i^{-1} Y_i.$$

Or, par le (A) :

$$\begin{aligned} d(x_{i,i}, Y_i) &= d(P_i x_i, Y_i) \\ &= d(P_i \circ \Phi_i^{-1} z_i, P_i \circ \Phi_i^{-1} (\Phi_i \circ P_i^{-1} (Y_i))) \\ &\leq 2d(z_i, \Phi_i \circ P_i^{-1} (Y_i)) \end{aligned}$$

en joignant ceci au résultat (\*) et au résultat (\*\*), on obtient :

$$\begin{aligned} d(z_i, \Phi_i \circ \Phi_{i+1}^{-1} z_{i+1}) &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} d(Y_i x_{i,i}) \\ &\leq \varepsilon_0 d(z_i, \Phi_i \circ P_i^{-1} (Y_i)) \leq \varepsilon_0 d(z_i, \varphi_t x) \end{aligned}$$

ceci donne le (2)(ii) de la proposition 5.2.2.

□

*Démonstration de la proposition 5.2.3 à l'aide du théorème 6.2.1*

- (a) Choisissons  $X, p, \varepsilon, \varepsilon_0, q \in \omega(p), \lambda, \lambda_1$  et  $\beta : B_{\varepsilon/2}(q) \setminus C \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.2. Quitte à diminuer  $\varepsilon$ , on peut supposer que  $B_\varepsilon(q)$  est relativement compacte et difféomorphe par un difféomorphisme symplectique à une partie de  $\mathbf{R}^{dim M}$ . On travaillera donc désormais dans  $\mathbf{R}^{dim M}$ .

- (b) Comme dans le cas des flots, on envisage alors deux cas :

- soit il existe  $q' \in B_{\varepsilon/2}(q) \cap \omega(p)$  tel que  $\dot{\varphi}(q') \neq 0$ . Par hypothèse, il existe une boîte de flot en  $q'$  notée  $\Phi_{q'} : [0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(q')}(q') \rightarrow M$  telle que  $\Phi_{q'}([0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(q')}(q')) \subset B_\varepsilon(q')$ .

Choisissons alors  $r' < \delta(p)$  « suffisamment petit » (on précisera dans quel sens par la suite). On note  $(t_i)_{i \geq 0}$  l'unique suite strictement croissante de réels telle que

$$\{t_i \mid i \geq 0\} = \{t \in \mathbf{R}_+ \mid \varphi_t p \in \Phi_{q'}(\{0\} \times \Pi_{r'}(q'))\}$$

i.e.  $\{\varphi_{t_i} p \mid i \in \mathbf{N}\}$  est l'ensemble des points de l'orbite de  $p$  qui « entrent » dans une petite boîte de flot construite en  $q'$ .

On a alors  $\forall i \in \mathbf{N}, t_{i+1} - t_i > \lambda_1$ .

– soit on n'est pas dans le cas précédent. Remarquons que dans ce cas on a forcément  $p \notin \omega(p)$  (i.e.  $p$  n'est pas positivement récurrent) car sinon on aurait  $\forall t \in \mathbf{R}, \varphi_t p \in \omega(p)$  et on pourrait alors trouver  $t_0 \in \mathbf{R}_+$  tel que  $\varphi_{t_0} p \in \omega(p) \cap B_\varepsilon(q)$ ; or,  $X(\varphi_{t_0} p) = D\varphi_{t_0}(p)X(p) \neq 0$  donc on serait dans le cas précédent.

Dans ce cas, comme  $q \in \omega(p)$ , on peut aisément construire une suite croissante  $(t_i)_{i \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$  telle que pour tout  $i \geq 0$  :

$$(i) \quad t_{i+1} - t_i > \lambda_1 ;$$

$$(ii) \quad \Phi : [0, \lambda_1] \times \Pi_{\delta(p)}(\varphi_{t_i} p) \longrightarrow M \\ (t, x) \longmapsto \varphi_t x$$

est une submersion à valeurs dans  $B_\varepsilon(q)$ .

- (c) Dans chacun des deux cas décrits précédemment, on a donc construit une suite croissante de réels  $(t_i)_{i \geq 0}$ . On peut alors, pour chaque  $i$  et à condition d'être assez proche de  $p$  (la notion de proximité dépendant de  $i$ ) définir une application de Poincaré  $\Phi_i$  de  $\Pi(p)$  dans  $\Pi(\varphi_{t_i} p)$  qui à chaque  $x \in \Pi(p)$  associe le « premier » point de l'orbite positive de  $x$  à être dans  $\Pi(\varphi_{t_i} p)$ . Considérons alors  $R_i$  la restriction de  $\Phi_i$  à la surface d'énergie  $H^{-1}(H(p))$ , puis  $P_i = DR_i(p)$ .  $P_i$  est alors une application affine du sous-espace affine  $T_p(\Pi(p) \cap H^{-1}(H(p)))$  dans le sous-espace affine

$$T_{\varphi_{t_i} p}(\Pi(\varphi_{t_i} p) \cap H^{-1}(H(p))) = X_i$$

(que l'on munit de la structure euclidienne donnée par la métrique riemannienne de  $M$ ). Posons alors  $\mathcal{F} = (P_j)$ ,  $N = 2([4/\varepsilon_0] + 1)$  et utilisons le théorème 6.2.1 pour  $\mathcal{F}$  et  $N$ . On obtient ainsi une constante  $\rho' \geq 3$  et un entier positif  $\eta = \alpha + 1$  qui vérifient les conclusions de ce théorème. On posera  $\rho = 4\rho'K$  où

$$K = \sup \left\{ \sup_{\substack{0 \leq i \leq \eta \\ p' \in W'}} \{ \|D\Phi_{i|\Pi(p')} \| \}, 1 \right\}$$

( $W'$  étant un voisinage petit de  $p$ ).

Étant donné  $p'$  assez proche de  $p$  (la notion de proximité dépendant de  $i$ ), on considère  $R_{i,p'} = \Phi_{i|H^{-1}(H(p'))}$  et on pose  $P_{i,p'} = DR_{i,p'}(p')$ . Comme  $X$  est de classe  $C^1$ , il existe un voisinage  $W \subset W'$  de  $p$  tel que pour tout  $p' \in W$  :

– il existe  $\alpha + 2$  isométries affines,

$$A_{p'} : T_p(\Pi(p) \cap H^{-1}(H(p))) \longrightarrow T_{p'}(\Pi(p) \cap H^{-1}(H(p')))$$

et pour  $i \in [0, \alpha]$ ,

$$A_{i,p'} : T_{\varphi_{t_i} p}(\Pi(\varphi_{t_i} p) \cap H^{-1}(H(p))) \longrightarrow T_{\varphi_{t_i} p'}(\Pi(\varphi_{t_i} p) \cap H^{-1}(H(p'))),$$

dépendant continûment de  $p$ ;

– pour tout  $i \in [0, \alpha]$

$$\|A_{i,p'}^{-1} \circ P_{i,p'} \circ A_{p'} \circ P_i^{-1}\| \leq \sqrt{2}, \quad \|P_i \circ A_i^{-1} \circ P_{i,p'}^{-1} \circ A_{i,p'}\| \leq \sqrt{2}.$$



Alors, soit  $p' \in W$ .

Dans ce qui suit, on prendra des boules pour la métrique riemannienne dans les espaces considérés (qui seront donc  $(\dim M - 2)$ -dimensionnelle). Supposons que  $X_0 = \{z_i \mid i = 1, 2, \dots\}$  soit un ensemble fini ordonné de  $T_{p'}(\Pi(p) \cap H^{-1}(H(p')))$  tel que  $B_{\delta/4}(p') \cap X_0$  contienne au moins deux points. Posons  $Y_0 = A^{-1}X_0$  et  $y_i = A^{-1}z_i$ . Alors, comme  $A$  est une isométrie,  $B_{\delta/4}(p) \cap Y_0$  contient au moins deux points. Il existe donc deux points  $w_1 = y_j$  et  $w_2 = y_\ell$  ( $j > \ell$ ) dans  $Y_0 \cap B_{\rho\delta}(p)$  et une suite de points  $(x_0, \dots, x_\alpha)$  dans  $B_{\rho'\delta}(p)$  vérifiant :

- (i)  $x_0 = w_1, x_\alpha = w_2$  ;
- (ii) si  $Z_0 = \partial B_{\rho\delta}(p) \cup Y_0 - \{w_1, w_2\}$ , si  $x_{k,i} = P_i(x_k)$  et si  $Z_i = P_i(Z_0)$ , alors pour  $i \in [0, \alpha - 1]$ ,  $d(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq (1/N)d(Z_i, x_{i,i})$ .

Posons alors  $u_i = Ax_i$ . Comme  $A$  est une isométrie, cette suite est à valeurs dans  $B_{\rho'\delta}(p)$  et vérifie :

- (i)  $x_0 = z_j, x_\alpha = z_\ell$  ;
- (ii) si  $U_0 = \partial B_{\rho\delta}(p') \cup X_0 - \{z_j, z_\ell\}$ , si  $u_{k,i} = P_{i,p'}(u_k)$  et si  $U_i = P_{i,p'}(U_0)$ , alors par le choix des  $u_i$  et le fait que  $A$  est une isométrie :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \quad d(u_{i+1,i}, u_{i,i}) = \\ d(A_{i,p'}^{-1} \circ P_{i,p'} \circ A_{p'} \circ P_i^{-1} x_{i+1,i}, A_{i,p'}^{-1} \circ P_{i,p'} \circ A_{p'} \circ P_i^{-1} x_{i,i})$$

donc par le choix de  $W$  :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \quad d(u_{i+1,i}, u_{i,i}) \leq \sqrt{2} d(x_{i+1,i}, x_{i,i})$$

donc par le (ii) précédent :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \quad d(u_{i+1,i}, u_{i,i}) \leq \sqrt{2} \frac{1}{N} d(Z_i, x_{i,i}).$$

Or, en utilisant encore une fois les définitions des quantités considérées, on obtient :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \quad d(Z_i, x_{i,i}) = \\ d(P_i \circ A_{p'}^{-1} \circ P_{i,p'}^{-1} \circ A_{i,p'}(A_{i,p'}^{-1} Y_i), P_i \circ A_{p'}^{-1} \circ P_{i,p'}^{-1} \circ A_{i,p'}(A_{i,p'}^{-1} u_{i,i}))$$

donc, par la définition de  $W$  et le fait que  $A_{i,p'}$  est une isométrie :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, \quad d(u_{i+1,i}, u_{i,i}) \leq \frac{2}{N} d(U_i, u_{i,i})$$

donc on obtient les conclusions du théorème 6.2.1 pour tout  $p' \in W$  pour  $N' = N/2 = [4/\varepsilon_0] + 1$ .

- (d) On notera désormais  $\Pi^0(p'; p) = \Pi(p) \cap H^{-1}(H(p'))$ . Si on a choisi un  $r$  assez petit,  $\Pi_r^0(p'; p)$  est une boule  $(\dim M - 2)$ -dimensionnelle.

Soit donc  $p' \in W$ . Comme  $P_{i,p'}$  est la différentielle de  $R_{i,p'}$  en  $p'$ , il existe  $r > 0$

tel que pour tout  $i \in [0, \alpha]$ , si  $x, y \in \overline{B}_\varepsilon(q)$ , :

$$(A) \quad R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}x, R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}y \in \Pi_{\rho r}^0(\varphi_t p, \varphi_t p')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}d(x, y) \leq d(R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}x, R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}y) \leq 2d(x, y)$$

et tel qu'on ait la condition :

$$(B) \quad \Phi : [0, t_\alpha + \lambda_1] \times \Pi_{\rho r}^0(p'; p) \longrightarrow M$$

$$(t, x) \longmapsto \varphi_t x$$

est une submersion (ceci est possible car  $p$  est supposé non périodique et  $p'$  est proche de  $p$ ) telle que :

- (i)  $\forall t \in [0, t_\alpha + \lambda_1], \varphi_t(\Pi_{\rho r}^0(p'; p)) \subset B_{\varepsilon/2}(\varphi_t p'; \varphi_t p)$ ;
- (ii)  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, \Phi([0, \beta(\varphi_t p')]) \times \Pi_{\rho r}^0(\varphi_t p'; \varphi_t p) \subset B_\varepsilon(q)$  (ceci vient de (B)).

On a donc démontré les conclusions (1)(i) et (1)(ii) de la proposition 5.2.3.

(e) Supposons maintenant comme dans l'énoncé de la proposition 5.2.3 que

$$x, \varphi_T x \in \Pi_{\bar{r}}^0(p')$$

pour un  $\bar{r} \in ]0, r]$  et  $T > 0$ . Nous voulons montrer qu'avec les constantes  $r, \rho$  et  $\alpha$  définie ci-dessus, les conclusions de cette proposition sont vérifiées. Remarquons que si  $x$  est périodique de période  $T'$  inférieure ou égale à  $T$ , le résultat est une trivialité; on pose en effet  $T_1 = 0, T_2 = T'$  et  $\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, z_i = R_{i,p'}x$ . On suppose donc désormais que  $x$  n'est pas périodique de période inférieure ou égale à  $T$ .

L'ensemble  $\{t \in [0, T] \mid \varphi_t x \in \Pi_{\rho \bar{r}}^0(p'; p)\}$  est fini, de cardinal supérieur ou égal à deux, on peut l'écrire en extension  $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$  où  $\tau_1 < \dots < \tau_m$  et  $m \geq 2$ . On note alors  $X_0 = \{y_i = \varphi_{\tau_i} x \mid 0 \leq i \leq m\}$  ordonné par l'ordre des  $\tau_i$ . Comme  $x$  n'est pas périodique de période inférieure ou égale à  $T$ ,  $\Pi_{\bar{r}}^0(p'; p) \cap X_0$  contient au moins deux points. On peut donc appliquer le théorème 6.2.1 : il existe deux points  $w_1 = y_{m_2} = \varphi_{\tau_{m_2}} x$  et  $w_2 = y_{m_1} = \varphi_{\tau_{m_1}} x$  ( $m_2 > m_1$  donc  $\tau_{m_2} > \tau_{m_1}$ ) dans

$$X_0 \cap \Pi_{4\rho\bar{r}}^0(p'; p) = X_0 \cap \Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)$$

et une suite de points  $(x_0, \dots, x_\alpha)$  dans  $\Pi_{4\rho\bar{r}}^0(p'; p) = \Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)$  vérifiant :

- (i)  $x_0 = w_1, x_\alpha = w_2$ ;
- (ii) si  $Y_0 = \partial \Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p) \cup X_0 \setminus \{w_1, w_2\}$  (en prenant la frontière dans  $\Pi^0(p'; p)$ ), si  $x_{k,i} = P_{i,p'}(x_k)$  et si  $Y_i = P_{i,p'}(Y_0)$ , alors pour  $i \in [0, \alpha - 1]$ ,  $x_{i+1,i}$  est dans le  $2/N$ -noyau de la boule fermée de centre  $x_{i,i}$  en contact avec  $Y_i$  (en d'autres termes, pour tout  $i \in [0, \alpha - 1]$ , on a

$$d_i(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq \frac{2}{N}d_i(Y_i, x_{i,i}) \leq \frac{\varepsilon_0}{4}d(Y_i, x_{i,i}).$$

(f) Définissons alors des points  $z_0, \dots, z_\alpha$  par :

- $z_0 = R_{0,p'} w_1$  ;
- pour  $i \in [0, \alpha]$ ,  $z_i = R_{i,p'} x_i$ .

(g) On a alors :

- (i)  $z_0 = R_{0,p'} w_1 = R_{0,p'}(\varphi_{\tau_{m_2}} x)$ ,  $z_\alpha = R_{\alpha,p'} w_2 = R_{\alpha,p'}(\varphi_{\tau_{m_1}} x)$  ; de plus, si  $i \in [0, \alpha]$ , on sait par (e) que  $x_i \in \Pi_{\rho\bar{r}}^0(p'; p)$  donc

$$z_i = R_{i,p'} x_i \in R_{i,p'}((\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p')) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}^0(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)$$

d'après la définition de  $K$  donnée en (c) ; ceci nous donne le (2)(i) de la proposition 5.2.3 pour  $T_2 = \tau_{m_2}$  et  $T_1 = \tau_{m_1}$ .

(ii) D'après (g)(i), on sait que :

$$\forall i \in \{0, \dots, \alpha\}, z_i \in R_{i,p'}((\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}^0(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)$$

Aussi, par le (A), pour tout  $i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$  :

$$\begin{aligned} d(z_i, R_{i,p'} \circ R_{i+1,p'}^{-1} z_{i+1}) &= d(R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1} x_{i,i}, R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1} x_{i+1,i}) \\ &\leq 2d(x_{i,i}, x_{i+1,i}). \end{aligned}$$

Or, par (e)(ii), on sait que pour tout  $i \in [0, \alpha - 1]$ , on a

$$d_i(x_{i+1,i}, x_{i,i}) \leq \frac{\varepsilon_0}{4} d(Y_i, x_{i,i}) ;$$

ceci implique donc :

$$(*) \quad \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}, d(z_i, R_{i,p'} \circ R_{i+1,p'}^{-1} z_{i+1}) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} d(Y_i, x_{i,i}).$$

Or, on a  $P_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p) \cup \{\varphi_t x \mid t \in [T_1, T_2]\}) \cap \Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p) \subset Y_i$  ; ceci implique que :

1. comme

$$R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1} x_{i,i} = R_{i,p'} x_i \in R_{i,p'}(\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)) \subset \Pi_{\rho\bar{r}}^0(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p),$$

on peut utiliser le (A) qui implique que :

$$\begin{aligned} d(x_{i,i}, P_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p))) &= d(P_{i,p'} x_i, P_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p))) \\ &= d(P_{i,p'} \circ R_{i,p'}^{-1} z_i, P_{i,p'} \circ R_{i,p'}^{-1}(R_{i,p'} \partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p))) \\ &\leq 2d(z_i, \partial R_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p))) \end{aligned}$$

Or,  $P_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)) \subset Y_i$ , donc par (\*), on a finalement

$$d(z_i, R_{i,p'} \circ R_{i+1,p'}^{-1} z_{i+1}) \leq \varepsilon_0 d(z_i, \partial R_{i,p'}(\partial\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p))).$$

2. Soit  $t \in ]T_1 + t_\alpha, T_2[$  tel que  $\varphi_t x \in \Pi_{\rho\bar{r}}^0(\varphi_{t_i} p'; \varphi_{t_i} p)$  ; si  $\varphi_t x \notin R_{i,p'}(\Pi_{\rho\bar{r}/K}(x; p))$ , alors

$$d(z_i, \varphi_t x) \geq d(z_i, \partial R_{i,p'}(\Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(x; p)))$$

donc

$$\varepsilon_0 d(\varphi_t x, z_i) \geq d(z_i, R_{i,p'} \circ R_{i+1,p'}^{-1} z_{i+1})$$

par le 1. Sinon, on a :

$$t - \tau(t, x) \in ]T_1, T_2[ \subset [0, T]$$

et

$$\varphi_{t-\tau(t,x)}x \in \Pi_{\rho\bar{r}/K}^0(p'; p)$$

donc

$$\varphi_{t-\tau(t,x)}x \in X_0$$

donc

$$(**) \quad \varphi_t x \in R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}(Y_i).$$

Or, par le (A) :

$$\begin{aligned} d(x_{i,i}, Y_i) &= d(P_{i,p'}x_i, Y_i) \\ &= d(P_{i,p'} \circ R_{i,p'}^{-1}z_i, P_{i,p'} \circ R_{i,p'}^{-1}(R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}(Y_i))) \\ &\leq 2d(z_i, R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}(Y_i)) \end{aligned}$$

en joignant ceci au résultat (\*) et au résultat (\*\*), on obtient :

$$\begin{aligned} d(z_i, R_{i,p'} \circ R_{i+1,p'}^{-1}z_{i+1}) &\leq \frac{\varepsilon_0}{2}d(Y_i, x_{i,i}) \\ &\leq \varepsilon_0 d(z_i, R_{i,p'} \circ P_{i,p'}^{-1}(Y_i)) \\ &\leq \varepsilon_0 d(z_i, \varphi_t x) \end{aligned}$$

ceci donne presque le (2)(ii) de la proposition 5.2.3, sauf que les boules qui interviennent sont restreintes à la surface d'énergie contenant leur centre. Mais il est facile de voir qu'il existe une constante  $K_1$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall p' \in \Pi_r(p), \forall \bar{r} \in ]0, r[, \forall y \in \Pi_{\rho\bar{r}}^0(p'; p), \\ d(y, \Pi_{\rho\bar{r}}^0(p')) \leq K_1 d(y, \Pi_r^0(p'; p)). \end{aligned}$$

Ceci donne alors le (2)(ii) de la proposition 5.2.3 pour  $\varepsilon'_0 = \varepsilon/K_1$ . □

Soulignons la différence entre cette dernière démonstration et les précédentes. Dans ce cas, nous sommes obligés de faire varier un point  $p'$  au voisinage de  $p$ , car le lemme de perturbation dont nous nous servons (la proposition 5.1.5) ne s'applique que dans une surface d'énergie donnée. Le fait qu'on puisse quand même conclure dans ce cas (avec un point  $p$  variable) vient du fait que le théorème algébrique est, en un certain sens stable, comme nous allons maintenant l'expliquer.

Plus précisément, avec les notations rappelées en début de section 6.2, on munit l'ensemble des suites d'applications affines  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots)$ , chaque  $f_i$  allant de  $\mathbf{R}^n$  vers  $X_i$ , de la topologie produit. Soient alors  $\mathcal{F}$  et  $N$  comme dans les hypothèses du théorème 6.2.1. Il existe alors un voisinage  $W$  de  $\mathcal{F}$ ,  $\rho \geq 3$  et un entier positif  $\eta$  tels

que pour tout  $G \in W$ , les conclusions du théorème 6.2.1 soient vérifiées pour  $G$ ,  $\rho$  et  $N$ .

Pour démontrer ceci (nous faisons en fait cela dans la démonstration précédente), on applique le théorème 6.2.1 à  $\mathcal{F}$ ,  $2N$ . Ceci nous permet de trouver  $\rho \geq 3$  et  $\eta$ . Ensuite, on définit :

$$W = \{G = (g_1, g_2, \dots) \mid \forall i \in [1, \eta], \|g_i \circ f_i^{-1}\| \leq \sqrt{2} \text{ et } \|f_i \circ g_i^{-1}\| \leq \sqrt{2}\}$$

où  $\|f\| = \sup\{\|fx\| \mid \|x\| = 1\}$ . Il n'est alors pas difficile de voir qu'on a les conclusions du théorème 6.2.1 pour tout  $G \in W$  pour  $N$ ,  $\rho$  et  $\eta$ .

### 6.3. Démonstration du résultat algébrique 6.2.1

Reprenons les mêmes notations qu'en section 6.2. Avant de démontrer le théorème 6.2.1, nous allons :

- dans un premier temps faire quelques remarques concernant cet énoncé ;
- dans un deuxième temps donner un énoncé équivalent au précédent qui nous permettra de raisonner dans une boule fixée sans considérer des images par différentes applications linéaires.

#### REMARQUES

- (1) Remarquons qu'un énoncé analogue au théorème 6.2.1 serait faux si le  $1/N$ -noyau de  $B_r(x)$  désignait maintenant  $B_{r^k/N}(x)$  (ce qui serait intéressant en topologie  $C^k$ ) car on voit aisément que dans ce cas, si on diminue l'ensemble  $X_0$  en faisant des homothéties de rapport de plus en plus petit, les valeurs de  $\eta$  tendent vers  $+\infty$ .
- (2) Le point essentiel qui permet de simplifier la démonstration originelle de C. Pugh et C. Robinson est de raisonner sur des ellipsoïdes et non plus sur des parallélépipèdes : on ne tient compte que des dimensions, et non plus d'une quelconque inclinaison.

C. Pugh et C. Robinson avaient d'ailleurs eux-mêmes déjà remarqué que si on peut se servir d'ellipsoïdes, la démonstration est considérablement simplifiée, mais leurs constructions leur interdisaient de ce servir des ces ensembles.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Associons à chaque  $f_i$  l'unique ellipsoïde  $E_i$  de la forme  $F_i^{-1}(B_{R_i}(0))$  (où  $F_i$  désigne l'application linéaire associée à l'application affine  $f_i$ ) et dont le plus petit demi-axe est de longueur 1. On note alors  $\lambda_i z_i$  le plus grand demi-axe de  $E_i$  (il y en a éventuellement plusieurs, auquel cas on en choisit un), où  $z_i$  est de norme 1 et  $\lambda_i \geq 1$ . On note  $E = (E_1, E_2, \dots)$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$  et tout  $r \geq 0$ , on pose  $E_i(x, r) = \{x + ry \mid y \in E_i\}$ . C'est l'ellipsoïde de la  $E_i$ -famille de centre  $x$  et de rayon intérieur  $r$ .

Le  $1/N$ -noyau de  $E_i(x, r)$  est alors  $E_i(x, r/n)$ .

On est alors amené à reformuler le théorème 6.2.1 de la manière suivante :

**THÉORÈME 6.3.1** (Mai Jiehua). — *Il existe un nombre réel  $\rho \geq 3$  et un entier positif  $\eta > 0$  déterminés par  $E$  et  $N$  tels que : pour tout sous-ensemble fini ordonné  $X_0 = \{y_i \mid i = 1, 2, \dots\}$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour tout point  $y \in \mathbf{R}^n$  et  $\delta > 0$  tel que  $B_{\delta/4}(y) \cap X_0$  contienne au moins deux points, il existe toujours deux points  $w_1 = y_j$  et  $w_2 = y_l$  ( $j > l$ ) dans  $X_0 \cap B_{\rho\delta}(y)$  et une suite de points  $K = (x_1, \dots, x_\eta)$  dans  $B_{\rho\delta}(y)$  vérifiant :*

- (i)  $x_1 = w_1, x_\eta = w_2$  ;
- (ii) pour tout  $i \in [1, \eta]$ ,  $x_{i+1}$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E_i$ -famille de  $\mathbf{R}^n$  ayant pour centre  $x_i$  et en contact avec l'ensemble  $\partial B_{\rho\delta}(y) \cup X_0 - \{w_1, w_2\}$ .

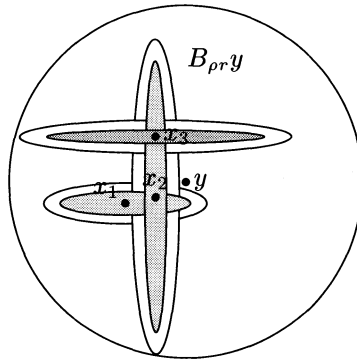


Figure 2. (en grisé, les  $1/N$ -noyaux)

Ce théorème est équivalent au théorème 6.2.1. Nous allons donner la démonstration du théorème 6.3.1. Commençons par déterminer pour chaque  $\rho \geq 3$  un ensemble où la « densité » est petite :

**LEMME 6.3.2.** — *Soit  $\rho \geq 3$ ,  $X_0, y$  et  $\delta$  comme dans les hypothèses du théorème 6.3.1. Alors, il existe deux points  $v_1$  et  $v_2$  dans  $X_0 \cap B_{\rho\delta}(y)$  tels que, si  $\delta_1 = d(v_1, v_2)$ , alors :*

- (i)  $\overline{B}_{\rho\delta_1}(v_1) \subset \overline{B}_{\rho\delta}(y)$  ;
- (ii)  $\forall z \in X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1), \forall z' \in X_0 - \{z\}, d(z, z') > \delta_1/2$ .

*Démonstration du lemme 6.3.2.* — On définit l'ensemble

$$\Delta = \{(z, z') \in (X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta}(y))^2 \mid \overline{B}_{\rho d(z, z')}(z) \subset \overline{B}_{\rho\delta}(y) \text{ et } z \neq z'\}.$$

On remarque déjà que  $\Delta$  est non vide. En effet, par hypothèse  $B_{\delta/4}(y) \cap X_0$  contient au moins deux points, notés  $z$  et  $z'$  ; alors, on a  $d(z, z') < \delta/2$  donc  $\rho d(z, z') < \rho\delta/2$ , et  $d(z, y) < \delta/4$ , tout ceci impliquant que :

$$\overline{B}_{\rho d(z, z')}(z) \subset \overline{B}_{\rho\delta}(y).$$

De plus, comme  $\Delta$  est fini, il existe un point  $(v_1, v_2)$  de  $\Delta$  tel que  $d(v_1, v_2)$  soit minimale. On choisit alors un tel point. Ce couple vérifie alors la conclusion (i) du lemme 6.3.2. Montrons qu'il en vérifie aussi la conclusion (ii) : supposons donc qu'il existe  $z \in X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  et  $z' \in X_0 - \{z\}$  tels que  $d(z, z') \leq \delta_1/2$ . Alors :

- $z \in X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1) \subset \overline{B}_{\rho\delta}(y)$  et comme

$$z' \in X_0, d(z, z') \leq \frac{\delta_1}{2} \text{ et } d(z, v_1) \leq \frac{\rho\delta_1}{2},$$

on a  $d(z', v_1) \leq (\rho + 1)\delta_1/2 \leq \rho\delta_1$  donc

$$z' \in X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta_1}(v_1) \subset X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta}(y);$$

- $z \neq z'$  par hypothèse ;
- si  $t \in \overline{B}_{\rho d(z, z')}(z)$ , alors :

$$d(t, v_1) \leq d(t, z) + d(z, v_1) \leq \rho d(z, z') + \frac{\rho\delta_1}{2} \leq \rho\delta_1$$

donc  $\overline{B}_{\rho d(z, z')}(z) \subset \overline{B}_{\rho\delta_1}(v_1) \subset \overline{B}_{\rho\delta}(y)$  ;

- de plus,  $d(z, z') \leq \delta_1/2 < \delta_1$ .

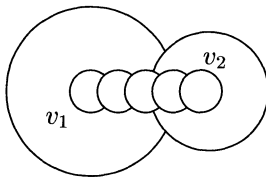
Tout ceci contredit la définition de  $\delta_1$ . □

REMARQUE 6.3.3. — Avec les notations du lemme précédent, remarquons que la partie  $B_{\delta_1}(v_1) \cup \overline{B}_{\delta_1/2}(v_2)$  de l'espace  $\mathbf{R}^n$  ne rencontre  $X_0$  qu'en  $v_1$  et  $v_2$ . En effet :

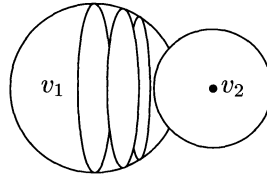
- par le (ii) du lemme 6.3.2 appliqué à  $z = v_2$ , on voit que :

$$\overline{B}_{\delta_1/2}(v_2) \cap X_0 = \{v_2\};$$

- si  $B_{\delta_1}(v_1)$  contenait un autre point  $v \in X_0$  que  $v_1$ , le couple  $(v_1, v)$  serait dans  $\Delta$ , ce qui contredirait la définition de  $\delta_1$ .



*cas des similitudes*



*cas impossible à résoudre directement*

Figure 3

Si on cherche alors à joindre  $v_1$  à  $v_2$  (ou d'autres points déduits de ces deux points) à l'aide d'une suite d'ellipsoïdes, l'idée la plus naturelle est de s'arranger pour que ces ellipsoïdes soient contenus dans l'ensemble  $B_{\delta_1}(v_1) \cup \overline{B}_{\delta_1/2}(v_2)$ . C'est visiblement possible si les ellipsoïdes considérés sont des boules euclidiennes (*i.e.* quand les  $f_i$  sont des similitudes), ce dernier cas se traitant comme le cas  $n = 1$  (dont la résolution va suivre). De même, si les grands axes sont bornés (*i.e.* si les rapports du module de la

plus grande valeur propre et de la plus petite valeur propre de  ${}^t F_i F_i$  sont uniformément bornés), on peut conclure comme dans le cas où les ellipsoïdes sont des boules.

Malheureusement, si par exemple les ellipsoïdes ont leurs petits axes parallèles à la droite joignant  $v_1$  à  $v_2$  et leurs grands axes de longueur « grande » et tendant « vite » vers  $+\infty$ , ce raisonnement n'est plus valable.

La démonstration du théorème 6.3.1 se fait alors par récurrence sur la dimension  $n$ .

LEMME 6.3.4. — *Le théorème 6.3.1 est vrai si  $n = 1$ .*

*Démonstration du lemme 6.3.4.* — On pose alors :

$$\rho = 3, \quad \eta = 2N + 1$$

On applique le lemme 6.3.2, ce qui nous permet de déterminer  $v_1$  et  $v_2$ . On peut par exemple supposer que  $v_1$  est avant  $v_2$  (pour l'ordre sur  $X_0$  donné par les indices dans l'écriture en extension de  $X_0$ ). On définit alors :

$$\text{pour } i = 1, \dots, \eta, \quad x_i = v_1 + \frac{i-1}{2N}(v_2 - v_1)$$

Ces  $x_i$  conviennent car dans ce cas, l'intervalle  $[v_1 - |v_1 - v_2/2|, v_2 + |v_1 - v_2/2|]$  ne rencontre  $X_0$  qu'en  $v_1$  et  $v_2$  et est inclus dans  $\overline{B}_{\rho\delta}(y)$ .  $\square$

On a déjà remarqué que cette démonstration serait valable dans le cas où les grands axes des ellipsoïdes sont bornés. Donnons un autre cas où on peut encore démontrer le théorème en construisant une suite sur un segment, cas qui suppose que l'ensemble  $X_0$  est d'une certaine « forme ».

LEMME 6.3.5. — *On suppose avoir choisi  $\rho$  (indépendant de  $X_0$ ).*

*Il existe un entier  $\tau$  qui ne dépend que de  $\rho$  et de  $N$  tel que : si on a choisi  $v_1$  et  $v_2$  dans  $X_0$  par le lemme 6.3.2 où on note  $\delta_1 = d(v_1, v_2)$ , si il existe  $w_1$  et  $w_2$  distincts dans  $X_0 \cap \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_\tau$  tels que le  $E_{j_k}$ -ellipsoïde centré en  $w_1$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  est en contact avec  $w_2$ , alors, pour tout  $\eta \geq j_\tau + 1$ , il existe une suite vérifiant les conclusions du théorème 6.3.1 et joignant le second (pour l'ordre de  $X_0$ ) des points  $w_1, w_2$  au premier de ces points.*

*Démonstration du lemme 6.3.5.* — On note  $\tau$  un entier assez grand pour que :

$$\left(\frac{N+1}{N+2}\right)^{\tau-1} \leq \frac{1}{(N+1)\rho}.$$

Supposons que  $w_1, w_2$  et  $(j_i)_{1 \leq i \leq \tau}$  vérifient les hypothèses du lemme.

Remarquons tout d'abord qu'il existe deux cas : soit  $w_1$  est avant  $w_2$ , soit  $w_2$  est avant  $w_1$ . Pour traiter simultanément ces deux cas, faisons une petite remarque :

LEMME 6.3.6. — *Soit  $F$  un sous-ensemble fermé non vide de  $\mathbf{R}^n$ ,  $w_1$  et  $w_2$  deux points de  $\mathbf{R}^n$ ,  $E$  un ellipsoïde de longueur de plus petit axe égale à 1,  $N$  un entier.*



Alors, si  $w_2$  est dans le  $1/(N+1)$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E$ -famille centré en  $w_1$  en contact avec  $F$ , alors  $w_1$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E$ -famille centré en  $w_2$  et en contact avec  $F$ .

*Démonstration du lemme 6.3.6.* — Considérons l'ellipsoïde  $E(w_1, r_1)$  qui est en contact avec  $F$ . Supposons que  $w_2$  soit dans le  $1/(N+1)$ -noyau de cet ellipsoïde  $w_2 \in E(w_1, r_1/(N+1))$ .

Considérons alors l'ellipsoïde  $E(w_2, Nr_1/(N+1))$  et montrons qu'il est inclus dans  $E(w_1, r_1)$ .

Si  $x \in E(w_2, Nr_1/(N+1))$ , alors  $x + w_1 - w_2 \in E(w_1, Nr_1/(N+1))$ . Or,

$$w_2 - w_1 \in E\left(0, \frac{r_1}{(N+1)}\right).$$

Aussi, en sommant on obtient :

$$x \in E\left(w_1, \frac{Nr_1}{(N+1)}\right) + E\left(0, \frac{r_1}{(N+1)}\right) = E(w_1, r_1).$$

On a donc bien  $E(w_2, Nr_1/(N+1)) \subset E(w_1, r_1)$  donc  $E(w_2, Nr_1/(N+1))$  est inclus dans l'ellipsoïde  $E(w_2, r_2)$  en contact avec  $F$ .

On a par hypothèse,  $w_2 \in E(w_1, r_1/(N+1))$ . Comme tout ellipsoïde est symétrique par rapport à son centre, cela implique que  $w_1 \in E(w_2, r_1/(N+1))$  i.e. que  $w_1$  est dans le  $1/N$ -noyau de  $E(w_2, Nr_1/(N+1))$ , donc *a fortiori* dans le  $1/N$ -noyau de  $E(w_2, r_2)$ .  $\square$

Soit maintenant un entier  $\eta \geq j_\tau + 1$ , comme dans les hypothèses du lemme 6.3.5. Pour ne pas séparer le cas où  $w_1$  est avant  $w_2$  du cas où  $w_2$  est avant  $w_1$ , on notera :

- si  $w_2$  est avant  $w_1$ , pour  $k \in [1, \tau]$ ,  $n_k = j_k$  et  $x_0 = w_1$ ,  $x_\eta = w_2$  ;
- si  $w_1$  est avant  $w_2$ , pour  $k \in [1, \tau]$ ,  $n_k = j_{\tau+1-k}$  et  $x_0 = w_2$ ,  $x_\eta = w_1$ .

Nous allons maintenant définir une suite de points à partir de laquelle nous définirons les points qui permettent de conclure dans l'énoncé du lemme. On pose :

- $y_0 = w_1$ ,  $y_{\tau+1} = w_2$  ;
- pour  $k \in [1, \tau]$ ,  $y_k = w_2 + ((N+1)/(N+2))^{k-1} (w_1 - w_2)$ .

On constate alors que :

1. pour tout  $k \in [1, \tau]$ ,  $y_{k+1}$  est dans le  $1/(N+1)$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E_{n_k}$ -famille de centre  $y_k$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  ;
2.  $y_\tau$  est dans le  $1/(N+1)$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E_{n_\tau}$ -famille de centre  $y_{\tau+1} = w_2$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ .

En effet :

1. on a  $y_0 = y_1 = w_1$  et pour  $k \in [1, \tau]$ , on a  $y_{k+1} = y_k + (1/(N+2))(w_2 - y_k)$  et  $w_2$  est en contact avec l'ellipsoïde la  $E_{n_k}$ -famille de centre  $y_k$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ . Aussi,  $y_{k+1}$  est bien dans le  $1/(N+2)$ -noyau (et donc

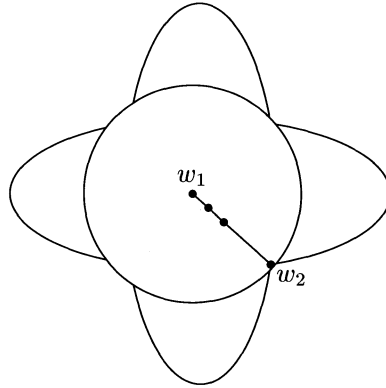


Figure 4

*a fortiori* le  $1/(N+1)$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E_{n_k}$ -famille de centre  $y_k$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ .

2. on a

$$y_\tau = y_{\tau+1} + \left( \frac{(N+1)}{(N+2)} \right)^{\tau-1} (w_1 - w_2)$$

et

$$\left( \frac{(N+1)}{(N+2)} \right)^{\tau-1} \leq \frac{1}{((N+1)\rho)}.$$

Considérons alors l'homothétie  $f$  qui envoie le  $E_{n_\tau}$ -ellipsoïde de centre  $w_1$  en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  et dont nous appelons  $r$  le rayon extérieur sur le  $E_{n_\tau}$ -ellipsoïde de centre  $y_{\tau+1} = w_2$  en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  et dont nous appelons  $r^*$  le rayon extérieur. La valeur absolue de son rapport est  $r^*/r$ , et on sait que :

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{\rho\delta_1}{2} && \text{car tous ces ensembles sont dans } \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1); \\ r^* &\geq \frac{\delta_1}{2} && \text{par le (ii) du lemme 6.3.2.} \end{aligned}$$

La valeur absolue de ce rapport est donc minorée par  $1/\rho$ .

Le demi-diamètre (rayon) du segment intersection de la droite  $(w_1w_2)$  avec l'ellipsoïde de la  $E_{n_\tau}$ -famille de centre  $y_{\tau+1} = w_2$  et en contact avec

$$(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$$

est donc minoré par  $(1/\rho)\|w_1 - w_2\|$ . On notera  $w$  une des extrémités du segment intersection de la droite  $(w_1w_2)$  avec l'ellipsoïde de la  $E_{n_\tau}$ -famille de centre  $y_{\tau+1} = w_2$  et en contact avec  $(X_0 - \{w_1\}) \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ .

Or, on avait vu que  $y_\tau = y_{\tau+1} + \lambda \cdot (w_1 - w_2)$  où  $|\lambda| \leq 1/((N+1)\rho)$  et on vient de voir que  $w - y_{\tau+1} = w - w_2 = \mu \cdot (w_1 - w_2)$  où  $|\mu| \geq 1/\rho$ . Finalement,  $y_\tau = y_{\tau+1} + (\lambda/\mu)(w - y_{\tau+1}) = y_{\tau+1} + \alpha(w - y_{\tau+1})$  où  $|\alpha| \leq 1/(N+1)$ , ce qui donne le résultat cherché.

Définissons maintenant la suite cherchée.

*Premier cas* : si  $w_2$  est avant  $w_1$ , nous posons :

- pour tout  $k \in [1, \tau[$ , pour  $m \in [n_k + 1, n_{k+1}]$ ,  $x_m = y_{k+1}$  ;
- pour tout  $m \in [n_\tau + 1, \eta]$ ,  $x_m = w_2$ .

*Deuxième cas* : si  $w_1$  est avant  $w_2$ , nous posons :

- pour tout  $m \in [0, j_1]$ ,  $x_m = w_2$  ;
- pour tout  $k \in [1, \tau]$ , pour  $m \in [j_k + 1, j_{k+1}]$ ,  $x_m = y_{\tau+1-k}$ .

En fait, nous construisons une suite à partir de  $(y_k)$  qui a même image, mais un ensemble de définition différent :  $(x_m)$  fait les mêmes « sauts » que faisait  $(y_k)$ , mais en étant stationnaire plus longtemps entre ces sauts et en inversant dans le deuxième cas l'ordre de la suite. Remarquons en particulier que la condition (ii) du théorème 6.3.1 est trivialement vérifiée là où la suite est stationnaire, puisque si  $x_i = x_{i+1}$ ,  $x_{i+1}$  est dans le  $1/N$ -noyau de tout ellipsoïde centré en  $x_i$ .  $\square$

*Démonstration par récurrence du théorème 6.3.1.* — On suppose qu'il est vrai pour  $n - 1$ . Signalons au lecteur que tout au long de la démonstration nous parlerons de constantes qui sembleront dépendre de  $\delta_1$  ; en fait, le problème est homogène en  $\delta_1$  et on obtient bien des constantes.

L'idée directrice du raisonnement qui va suivre est la suivante : déjà, on choisit une direction suivant laquelle les grands axes des ellipsoïdes considérés s'accumulent. On considère un hyperplan  $\mathbf{R}^{n-1}$  perpendiculaire à cette direction, et on projette le problème (*i.e.* configuration  $X_0$  et suite d'ellipsoïdes) orthogonalement sur cet hyperplan. On applique alors l'hypothèse de récurrence, trouve une suite *ad hoc* joignant deux points de la configuration projetée et relève cette suite dans  $\mathbf{R}^n$  de telle sorte que le premier point soit un point de  $X_0$ . Le dernier point de cette suite n'est alors peut-être pas un point de  $X_0$ , mais il a même projection qu'un point de  $X_0$ . L'idée est alors d'utiliser un dernier « grand » ellipsoïde pour « joindre verticalement » ce dernier point au point de  $X_0$  qui a même projection. Plus précisément :

- soit on peut trouver un tel grand ellipsoïde et c'est terminé ;
- soit on ne peut pas trouver un tel grand ellipsoïde et on verra qu'on peut se ramener au cas du lemme 6.3.5.

Nous choisissons donc un point d'accumulation de la suite des directions des grands axes des ellipsoïdes  $E_i$  considérés, et on peut bien entendu supposer que cette direction est tout simplement le vecteur  $(0, \dots, 0, 1)$ .  $p$  désigne alors la projection sur  $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\} = \mathbf{R}^{n-1}$  parallèlement à  $(0, \dots, 0, 1)$ . On notera alors  $E_i^* = p(E_i)$  et

$E^* = (E_1^*, E_2^*, \dots)$ . Appliquant alors l'hypothèse de récurrence à  $E^*$  et  $N$ , on détermine  $\eta^*$  et  $\rho^*$ .

Nous choisissons alors  $\rho$  « très grand », où nous préciserons ultérieurement ce que signifie ce qualificatif. À l'aide du lemme 6.3.2 et en gardant ses notations, on choisit alors  $v_1$  et  $v_2$  vérifiant ce lemme, et on pose  $\delta_1 = d(v_1, v_2)$ .

Dans un premier temps et comme annoncé précédemment, nous allons opérer un rapprochement horizontal, *i.e.* en projection dans  $\mathbf{R}^{n-1}$ .

*Rapprochement horizontal.* — On considère un cylindre très allongé, de la forme :

$$C = \overline{B}_{(8\rho^*+1)\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \times [-C_1\delta_1, C_1\delta_1],$$

$C_1$  étant une « grande » constante que nous préciserons ultérieurement. Précisons de suite que  $\rho$  a été choisi de telle sorte que  $C \subset \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ , et même mieux, tel que  $C \subset \overline{B}_{1/(2(N+1))(\rho/2-8\rho^*-C_1-1)\delta_1}(v_1)$  *i.e.* tel que  $C$  est dans le  $1/(N+1)$ -noyau de  $\overline{B}_{(1/2)(\rho/2-8\rho^*-C_1-1)\delta_1}(v_1)$ .

On pose alors  $X_1 = X_0 \cap C$  et on distingue deux cas :

- (i) Soit deux points de  $X_1$  ont leurs projections « proches » sur  $\mathbf{R}^{n-1}$ , *i.e.* il existe  $u_1$  et  $u_2$  dans  $X_1$  tels que  $d(p(u_1), p(u_2)) \leq \delta_1/C_2$ , où  $C_2 \geq 1$  est une grande constante choisie telle que :

- un  $E_{\eta^*}$ -ellipsoïde quelconque, de centre noté  $x$  et de grand demi-axe au moins  $\delta_1/2$  contient dans son  $1/N$ -noyau tous les points de

$$\overline{B}_{2\delta_1/C_2}(x, \mathbf{R}^{n-1});$$

- $2/C_2 < 8\rho^* + 1$ .

$C_2$  ne dépend donc que de  $E_{\eta^*}$  et  $\rho^*$ .

Dans ce cas, on n'a pas besoin de rapprocher d'avantage horizontalement les deux points  $u_1$  et  $u_2$ , et on peut supposer que  $u_1$  est après  $u_2$  pour l'ordre de  $X_0$ .

- (ii) Sinon, posons  $X_1^* = p(X_1)$ . Les points de  $X_1^*$  sont deux à deux distants d'au moins  $\delta_1/C_2$  et tous dans  $\overline{B}_{(8\rho^*+1)\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1})$ . On peut donc majorer leur nombre par une constante  $C_3$  qui ne dépend que de  $\rho^*$  et  $C_2$ .

Maintenant, nous pouvons préciser comment  $C_1$  se construit à l'aide de  $C_3$  :  $C_1$  est égal à  $(C_3+1)C_4$  où  $C_4\delta_1$  est un majorant du diamètre de la réunion d'une suite de  $(\eta^*-1)$  ellipsoïdes des familles  $E_1, \dots, E_{\eta^*-1}$ , notée  $B_1, \dots, B_{\eta^*-1}$  telle que :

- le plus petit axe de chacun est au plus  $8\rho^*\delta_1$  ;
- si  $j \in \{1, \dots, \eta^*-2\}$ , le centre de  $B_{j+1}$  est dans  $B_j$  (donc  $C_4$  ne dépend que de  $\rho^*$  et de  $E_1, \dots, E_{\eta^*-1}$ ).

On suppose aussi que  $C_4 > 1$ .

Alors, dans ce cas (ii) où  $X_1^*$  a au plus  $C_3$  éléments, il existe deux « tranches » du cylindre  $C$ , de hauteur  $C_4\delta_1$ , l'une « au dessus » et l'autre « au dessous » de

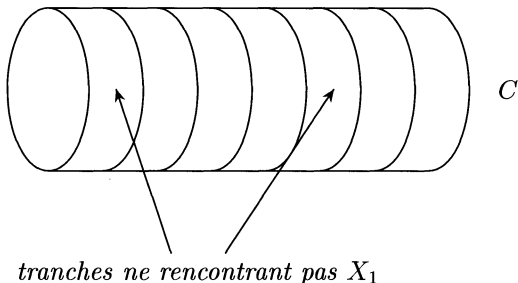


Figure 5

$\mathbf{R}^{n-1}$ , qui ne rencontrent pas  $X_1$ . Soit plus précisément :

$$\overline{B}_{(8\rho^*+1)\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \times \left( [-b_1\delta_1 - C_4\delta_1, -b_1\delta_1] \cup [b_2\delta_1, b_2\delta_1 + C_4\delta_1] \right) \cap X_1$$

est vide où  $b_1 \geq 0$  et  $b_2 \geq 0$ . Comme  $v_1 \in X_0$ , on a forcément  $b_1 > 0$  et  $b_2 > 0$ .

On note alors  $C_0 = \overline{B}_{8\rho^*\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \times [-b_1\delta_1, b_2\delta_1]$  et  $X_2 = X_0 \cap C_0$ . Alors,  $v_1 \in X_2$ . De plus, comme  $C_4 \geq 1$  par hypothèse, on a  $v_2 \in C_0$ . Donc finalement  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $X_2$ .

On applique alors l'hypothèse de récurrence à  $X_2^* = p(X_2)$ ,  $y = v_1$ ,  $\delta = 8\delta_1$  (dans ce cas, on a

$$p(v_2) \in B_{\delta/4}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) = B_{2\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1})$$

et donc  $B_{\delta/4}(y, \mathbf{R}^{n-1}) \cap X_2^*$  contient bien au moins deux points) et on trouve  $u_1^*, u_2^*$  (avant  $u_1^*$ ) dans  $p(X_2)$  et une suite  $K^* = (x_1^*, \dots, x_{\eta^*}^*)$  telle que  $x_1^* = u_1^*$ ,  $x_{\eta^*}^* = u_2^*$  et pour  $i \in [1, \eta^* - 1]$ ,  $x_{i+1}^*$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde  $D_i^*$  de la  $E_i^*$ -famille dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  de centre  $x_i^*$  en contact avec

$$\partial B_{8\rho^*\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \cup X_2^* - \{u_1^*, u_2^*\}.$$

On relève ensuite  $x_1^*, \dots, x_{\eta^*}^*$  en  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\eta^*}$  (tels que  $p(\tilde{x}_i) = x_i^*$ ) de la manière suivante :

- $\tilde{x}_1 = p^{-1}(x_1^*) \cap X_2 = u_1$  ;
- $\tilde{x}_{i+1}$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde  $D_i$  de la  $E_i$ -famille telle que  $p(D_i) = D_i^*$  (ceci est possible car, comme une projection commute avec un homothétie, l'image du  $1/N$ -noyau de  $D_i$  est le  $1/N$ -noyau de  $p(D_i)$ ).

Ensuite, on pose  $u_2 = p^{-1}(u_2^*) \cap X_2$ .

Remarquons que les  $D_i$  ont leurs demi petits axes inférieurs à  $8\rho^*\delta_1/2$  (car tel est cas pour les  $D_i^*$ ) et donc par construction de  $C_4$ , ils sont contenus dans

$$\overline{B}_{8\rho^*\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \times ([-b_1\delta_1 - C_4\delta_1, -b_1\delta_1] \cup [b_2\delta_1, b_2\delta_1 + C_4\delta_1]) \cup C_0.$$

Or, cet ensemble ne rencontre  $X_0$  que suivant  $X_2$ . Donc les  $D_i$  ne rencontrent pas  $X_0 - \{u_1, u_2\}$ .

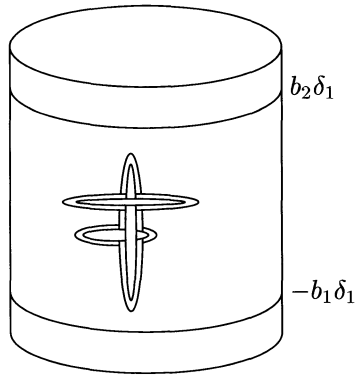


Figure 6

De plus, les  $D_i$  sont des parties de

$$\overline{B}_{8\rho^*\delta_1}(v_1, \mathbf{R}^{n-1}) \times ([-b_1\delta_1 - C_4\delta_1, -b_1\delta_1] \cup [b_2\delta_1, b_2\delta_1 + C_4\delta_1]) \cup C_0,$$

donc de  $C$ , donc de  $B_{\rho\delta_1}(v_1)$ , qui ne rencontrent donc pas  $\partial B_{\rho\delta_1}(v_1)$ .

Finalement, les  $D_i$  ne rencontrent pas  $\partial B_{\rho\delta_1}(v_1) \cup X_0 - \{u_1, u_2\}$ .

Nous avons donc, dans les deux cas, déterminé des points « proches » en projection ( $u_1$  et  $u_2$  dans le cas (i),  $\tilde{x}_{\eta^*}$  et  $u_2$  dans le cas (ii)). Nous allons maintenant opérer un rapprochement vertical permettant de joindre ces deux points.

C'est pour opérer ce rapprochement que nous déterminerons  $\eta$ .

*Rapprochement vertical.* — Rappelons avant toute chose que le  $\rho$  choisi l'a été de telle sorte que le cylindre  $C$  est contenu dans le  $1/(N+1)$ -noyau de

$$\overline{B}_{(1/2)(\rho/2-8\rho^*-C_1-1)\delta_1}(v_1).$$

On va alors travailler dans  $X_0 \cap B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  et on posera

$$Y_0 = X_0 \cup \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1) - \{u_1, u_2\}.$$

Soit  $\lambda$  tels que pour tout couple  $(y_1, y_2)$  d'éléments de  $\mathbf{R}^n$  de même norme et non nuls et tout point  $x$  de  $\mathbf{R}^n$  tels que :

- $x \in C_0$  et la sphère de centre  $x$  passant par  $x + y_1$  et  $x + y_2$  rencontre le cylindre  $C_0$  (façon de dire que les deux vecteurs ont leur norme bornée);
- $d(y_1/\|y_1\|, y_2/\|y_2\|) \leq \lambda$ ;

alors  $d(y_1, y_2) \leq \inf\{\delta_1/C_2, 2\delta_1/C_2^2, 2\delta_1/C_2\}$ .

En fait,  $\lambda$  désigne ici une « inclinaison » maximale et nous sommes juste en train de dire que si on borne la norme de deux vecteurs non nuls et de même norme et si on impose que leur angle soit « petit », alors ils sont « proches » l'un de l'autre.

On choisit alors un certain nombre  $\nu$  (on précisera ensuite comment choisir  $\nu$ ) d'indices  $\eta^* + 1 \leq j_1 < \dots < j_\nu$  deux à deux distincts tels que pour tout  $k \in [1, \nu]$ , si  $z_k$

désigne un vecteur directeur normé du grand axe de  $E_{j_k}$ , alors  $d(z_k, (0, \dots, 0, 1)) \leq \lambda$ . En d'autres termes, ces ellipsoïdes ont leurs grands axes peu inclinés par rapport à la verticale (ils permettront éventuellement d'effectuer un déplacement vertical). Remarquons que les  $j_k$  ne dépendent que de la suite d'ellipsoïdes considérée.

On posera  $\eta = j_\nu + 1$ .

On note alors, pour tout  $k \in [1, \nu]$ ,  $B_k$  l'ellipsoïde de la  $E_{j_k}$ -famille de centre  $u_2$  et en contact avec  $Y_0$ ,  $r_k$  désignant alors la longueur du plus grand demi axe de  $B_k$ .

On distingue immédiatement deux cas :

1) Quand tous les grands axes sont « petits » :

On suppose que pour  $k \in [1, \nu]$ ,  $r_k < (\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1$ . Alors, un élément  $x$  de  $\bar{B}_k$  vérifie :

$$d(x, v_1) \leq d(x, u_2) + d(u_2, v_1) \leq r_k + (8\rho^* + C_1 + 1)\delta_1$$

(on a  $d(u_2, v_1) \leq (8\rho^* + C_1 + 1)\delta_1$  car  $u_2 \in C$ ).

Vu l'inégalité concernant  $r_k$ , ceci implique que

$$d(B_k, \partial B(v_1, \frac{\rho\delta_1}{2})) > 0$$

Remplaçons alors les  $B_k$  par les  $B'_k$  qui sont les ellipsoïdes de la  $E_{j_k}$ -famille de centre  $u_2$  et en contact avec  $Y_0 \cup \{u_1\}$ . On a alors pour tout  $k$ ,  $B'_k \subset B_k$  donc *a fortiori* aucun des  $B'_k$  n'est en contact avec  $\partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ , donc comme ils sont en contact avec  $Y_0 \cup \{u_1\}$ , ils sont forcément en contact avec des points de  $X_0 \cap B_{\rho\delta_1/2}(v_1) - \{u_2\}$ .

Mais ces derniers points de  $X_0$ , comme ils sont deux à deux distants d'au moins  $\delta_1/2$  (par le choix du lemme 6.3.2) et dans  $B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ , ont leur nombre majoré par une constante  $C_5$  qui ne dépend que de  $\rho$ . On peut alors supposer que  $\nu = \tau C_5$  où  $\tau$  a été choisi d'après le lemme 6.3.5 et donc il existe au moins un point  $w_2$  de  $X_0 \cap B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$  qui est en contact avec  $\tau$  ellipsoïdes parmi les  $B'_{j_k}$  ; en d'autres termes, il existe  $i_1 < \dots < i_\tau \leq \nu$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, \tau\}$ ,  $w_2$  est en contact avec  $B'_{j'_{i_1}}$  où on note  $j'_i = j_{i_1}$ . Or, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, \tau\}, j'_i \leq j_\nu = \eta - 1.$$

On applique alors le lemme 6.3.5 pour  $\eta = j_\nu + 1$ , les hypothèses de ce lemme étant vérifiées par :

- $w_1 = u_2, w_2$  et  $1 \leq j'_1 < \dots < j'_\tau$  ;
- $\eta = j_\nu + 1 \geq j'_\tau$ .

Remarquons que nous avons choisi ainsi  $\nu$  une fois pour toute, et donc aussi  $\eta$ .

2) Quand un grand axe est « grand » :

On suppose maintenant que pour un indice  $k$ , on a :

$$r_k \geq (\frac{\rho}{2} - \rho^* - C_1 - 1)\delta_1.$$

Nous allons alors utiliser  $B_k$  pour faire un déplacement vertical. Mais, en fait,  $B_k$  est un peu incliné (d'au plus  $\lambda$ ) par rapport à la verticale. Nous ferons donc :

- un dernier petit déplacement horizontal à l'aide d'un ellipsoïde de la  $E_{\eta^*}$ -famille;
- un grand déplacement suivant la direction du grand axe de  $E_{j_k}$  à l'aide d'un  $E_{j_k}$ -ellipsoïde.

Procédons donc ainsi, en séparant les deux cas mis en évidence lors de l'étude des déplacements horizontaux (nous garderons les mêmes notations que celles que nous avons adoptées lors de cette étude) :

*Cas (i).* On pose  $w_1 = u_1$  et  $w_2 = u_2$ . Soit  $y$  le point de  $p^{-1}(p(w_2))$  de même « altitude » que  $w_1$  (i.e. tel que  $\overrightarrow{w_1 y} \in \mathbf{R}^{n-1}$ ). On définit alors :

- $x_1 = \dots = x_{\eta^*} = w_1$  ;
- $x_{\eta^*+1} = \dots = x_{j_k}$  est celui des deux points d'intersection de la sphère de centre  $w_2$  passant par  $y$  et de la droite

$$\{w_2 + cz_k \mid c \in \mathbf{R}\}$$

(rappelons que  $z_k$  est un vecteur directeur du grand axe de  $B_k$ ) le plus proche de  $y$  ;

- $x_{j_k+1} = \dots = x_{\eta} = w_2$ .

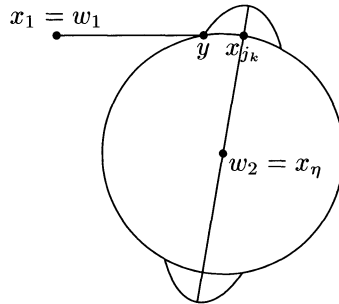


Figure 7

On a alors  $d(w_1, x_{j_k}) \leq d(w_1, y) + d(y, x_{j_k})$  où :

- comme on est dans le cas (i),

$$d(w_1, y) = d(p(w_1), p(w_2)) \leq \frac{\delta_1}{C_2} ;$$

- de plus,  $w_2 \in C_0$  et la sphère de centre  $w_2$  passant par  $y$  rencontre (en  $y$ )  $C_0$  et

$$d\left(\frac{y - w_2}{\|y - w_2\|}, \frac{x_{j_k} - w_2}{\|x_{j_k} - w_2\|}\right) = d(z_k, (0, \dots, 0, 1)) \leq \lambda.$$

Donc par le choix de  $\lambda$ ,  $d(y, x_{j_k}) \leq \delta_1/C_2$ .



Aussi, finalement,  $d(w_1, x_{j_k}) \leq 2\delta_1/C_2$ .

Or, comme  $w_1 \in C$  et  $C \subset \overline{B}_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ , on a :

$$\begin{aligned} d(w_1, \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)) &\geq d(C, \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)) \\ &\geq \left(\frac{\rho}{2} - \left(\frac{\rho}{2} - 8\rho^* - C_1 - 1\right)\delta_1\right) \\ &\geq \delta_1 \end{aligned}$$

(on utilise ici le fait que  $C \subset B_{(\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1}(v_1)$  et donc que :

$$d(C, \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)) \geq d(B_{(\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1}(v_1), \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)).$$

De plus, par le lemme 6.3.2, la distance de  $w_1$  à tout point de

$$X_0 \cap B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$$

est plus grande que  $\delta_1/2$ . Donc le  $E_{\eta^*}$ -ellipsoïde de centre  $w_1$  en contact avec  $Y_0$  est de demi-grand axe de longueur au moins  $\delta_1/2$ . Par définition de  $C_2$ , il contient dans son  $1/N$ -noyau tout point situé à une distance inférieure à  $2\delta_1/C_2$  de  $w_1$ , donc en particulier  $x_{\eta^*+1} = x_{j_k}$ .

De plus, rappelons qu'on avait choisi  $\rho$  de telle sorte que  $C$  soit inclus dans le  $1/(N+1)$ -noyau de  $\overline{B}_{1/2(\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1}(v_1)$ .

Or,  $w_1 \in C$  et  $w_2 \in C$  par hypothèse. Aussi, vu la définition de  $y$ ,  $y \in C$  et donc  $y$  et  $w_2$  sont tous deux dans le  $1/(N+1)$ -noyau de

$$\overline{B}_{(1/2)(\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1}(v_1).$$

Donc :

$$\begin{aligned} d(x_{\eta^*+1}, w_2) &= d(x_{j_k}, w_2) \\ &= d(y, w_2) \\ &\leq \frac{1}{(N+1)} \left(\frac{\rho}{2} - 8\rho^* - C_1 - 1\right)\delta_1. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse,  $r_k \geq (\rho/2 - 8\rho^* - C_1 - 1)\delta_1$ . Aussi,  $x_{\eta^*+1} = x_{j_k}$  est dans le  $1/(N+1)$ -noyau de  $B_{\eta^*}$  et donc par le lemme 6.3.6  $w_2$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde de la  $E_{j_k}$ -famille de centre  $x_{j_k}$  et en contact avec  $Y_0 - \{w_2\}$ .

*Cas (ii).* On pose  $w_1 = u_1$  et  $w_2 = u_2$ . On choisit :

- $x_i = \tilde{x}_i$  pour  $i \in [1, \eta^*]$  ;
- $x_{\eta^*+1} = \dots = x_{j_k}$  est celui des deux points d'intersection de la sphère de centre  $w_2$  passant par  $x_{\eta^*}$  avec la droite passant par  $w_2$  et de direction donnée par le grand axe de  $E_{j_k}$  le plus proche de  $x_{\eta^*}$  ;
- $x_{j_k+1} = \dots = x_{\eta} = w_2$ .

Pour  $i \in [1, \eta^* - 1]$ , on a vu en effectuant le rapprochement horizontal que  $x_{i+1}$  est dans le  $1/N$ -noyau de l'ellipsoïde  $D_i$  de la  $E_i$ -famille.

De plus,  $w_2 \in C_0$  et la sphère de centre  $w_2$  passant par  $x_{\eta^*}$  rencontre (en  $x_{\eta^*}$ )  $C_0$  et

$$d\left(\frac{x_{\eta^*} - w_2}{\|x_{\eta^*} - w_2\|}, \frac{x_{j_k} - w_2}{\|x_{j_k} - w_2\|}\right) = d(z_k, (0, \dots, 0, 1)) \leq \lambda.$$

Donc par le choix de  $\lambda$ ,  $d(x_{\eta^*}, x_{j_k}) \leq \inf\{2\delta_1/C_2^2, 2\delta_1/C_2\}$ . Aussi, d'après le choix de  $C_2$ , tout ellipsoïde de la  $E_{\eta^*}$ -famille de demi-grand axe au moins  $\inf\{\delta_1/C_2, \delta_1\}$  et de centre  $x_{\eta^*}$  contient dans son  $1/N$ -noyau  $x_{j_k}$ .

Or :

– comme on est dans le cas (ii),

$$\forall x \in X_0 \cap C \setminus \{u_1, u_2\}, d(x, x_{\eta^*}) \geq \frac{\delta_1}{C_2};$$

– comme  $x_{\eta^*} \in C_0$  et que  $d(C_0, C) \geq \inf\{\delta_1, C_4\delta_1\} = \delta_1$ , on a

$$\forall x \in X_0 \setminus C, d(x, x_{\eta^*}) \geq \delta_1;$$

– de même, comme  $C \subset B_{\rho\delta_1/2}(v_1)$ , on a

$$d(x_{\eta^*}, \partial B_{\rho\delta_1/2}(v_1)) \geq d(C_0, \partial C) \geq \delta_1.$$

donc  $\forall x \in Y_0$ ,  $d(x, x_{\eta^*}) \geq \inf\{\delta_1/C_2, \delta_1\}$ .

Aussi, l'ellipsoïde de la  $E_{\eta^*}$ -famille de centre  $x_{\eta^*}$  en contact avec  $Y_0$  a son demi-grand axe de longueur au moins  $\inf\{\delta_1/C_2, \delta_1\}$  donc contient dans son  $1/N$ -noyau  $x_{j_k}$ .

De plus, on conclut comme dans le cas (i) que  $w_2$  est dans le  $1/N$ -noyau du  $E_{j_k}$ -ellipsoïde de centre  $x_{j_k}$  et en contact avec  $Y_0$ .

□

REMARQUE 6.3.7. — Remarquons que le théorème 6.3.1 serait faux si le  $1/N$ -noyau de  $\overline{B}_r(x)$  désignait maintenant  $\overline{B}_{r^k/N}(x)$  (ce qui serait intéressant en topologie  $C^k$ ), car on voit aisément que dans ce cas, si on fait agir sur  $X_0$  des homothéties de rapport de plus en plus petit, les valeurs de  $\eta$  possibles tendent vers  $+\infty$ .

De plus, nous nous sommes ramenés en 6.1 au cas traité dans le théorème 6.3.1 en remplaçant certaines applications par leur linéarisée, ce qui est possible quand on autorise les perturbations petites en topologie  $C^1$  (mais pas en topologie  $C^2$ !).



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM et J. MARSDEN – *Foundations of mechanics*, Benjamin N.Y., 1967.
- [2] V. ARNOLD – *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, 1976.
- [3] V. ARNOLD et A. AVEZ – *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.
- [4] C. GUTIERREZ – «A counter-example to a  $C^2$  closing lemma», *Erg. Th. and Dyn. Syst.* **7** (1987), p. 509–530.
- [5] M. HERMAN – «Exemple de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie  $C^\infty$  n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergie», *C.R.A.S* (1991), no. 313, p. 49–51.
- [6] MAI JIEHUA – «A simpler proof of  $C^1$  closing lemma», *Scientia Sinica* **10** (1986), no. XXIV, p. 1020–1031.
- [7] ———, «A simpler proof of the extended  $C^1$  closing lemma», *Chinese Science Bull.* **34-3** (1989), p. 180–184.
- [8] R. MAÑÉ – «An ergodic closing lemma», *Annals of Mathematics* **116** (1982), p. 503–540.
- [9] J. MOSER – «On the volume element on a manifold», *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965), p. 286–294.
- [10] ———, «Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D. Birkhoff», *Springer Lect. Notes in Math.* **597** (1977), p. 464–494.
- [11] J. PALIS et W. DE MELO – *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, 1982.
- [12] J. PALIS et C. PUGH – «Fifty problems in dynamical systems», *L.N. in Math.* **468** (1974), p. 345–353.

- [13] C. PUGH – «The closing lemma», *Amer. J. Math.* **89** (1967), p. 956–1009.
- [14] ———, «An improved closing lemma and a general density theorem», *Amer. J. Math.* **89** (1967), p. 1010–1021.
- [15] C. PUGH et C. ROBINSON – «The  $C^1$  closing lemma, including hamiltonians», *Erg. Th. & Dyn. Syst.* **3** (1983), p. 261–314.
- [16] C. ROBINSON – «Introduction to the closing lemma», *Springer Lect. Notes in Math.* **668** (1978), p. 223–230.
- [17] M. SHUB – «Stabilité globale des systèmes dynamiques», *Asterisque* **56** (1978).
- [18] L. WEN – «On the  $C^1$ -stability conjecture of flows», *J. Diff. Equations* **129** (1996), p. 334–357.