

MÉMOIRES DE LA SMF 106

**PROPRIÉTÉS DE LEFSCHETZ  
AUTOMORPHES POUR LES  
GROUPES UNITAIRES  
ET ORTHOGONAUX**

Nicolas Bergeron

**Société Mathématique de France 2006**  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*N. Bergeron*

Institut de Mathématiques de Jussieu, U.M.R. 7586, Équipe *Analyse Algébrique*,  
Université Pierre et Marie Curie, Case 82, 4, place Jussieu,  
75252 PARIS CEDEX 05, France.

*E-mail* : `Nicolas.Bergeron@math.jussieu.fr`

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 11F75, 22E47, 22E55, 11G18, 14G35, 58J50.

**Mots clefs.** — Variétés arithmétiques, cohomologie des variétés localement symétriques, spectre automorphe, représentations cohomologiques.

---

# PROPRIÉTÉS DE LEFSCHETZ AUTOMORPHES POUR LES GROUPES UNITAIRES ET ORTHOGONAUX

Nicolas Bergeron

**Résumé.** — Soit  $S = S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$  une variété arithmétique obtenue comme quotient d'un espace symétrique  $X = G(\mathbb{R})/K$  –  $G$  étant un groupe semi-simple connexe sur  $\mathbb{Q}$ ,  $K \subset G(\mathbb{R})$  un sous-groupe compact maximal – par un sous-groupe arithmétique  $\Gamma$  de  $G(\mathbb{Q})$ . Si  $H \subset G$  est un sous-groupe semi-simple connexe tel que  $H(\mathbb{R}) \cap K$  soit un sous-groupe compact maximal, alors  $Y = H(\mathbb{R})/H(\mathbb{R}) \cap K$  est un sous-espace symétrique de  $X$ . Pour tout  $g \in G(\mathbb{Q})$  on peut former la variété arithmétique  $S(H, g) = (H(\mathbb{Q}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash Y$  et considérer l'immersion naturelle  $j_g : S(H, g) \rightarrow S$  induite par l'application  $H(\mathbb{A}) \rightarrow G(\mathbb{A})$ ,  $h \mapsto gh$ . Supposons  $G$  anisotrope ce qui implique que  $S$  et  $S(H, g)$  sont compactes. Alors, pour tout entier positif  $k$ , l'application  $j_g$  induit l'application de restriction

$$R_g : H^k(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(S(H, g), \mathbb{C}).$$

Dans ce Mémoire nous nous concentrons sur le cas des espaces symétriques associés aux groupes orthogonaux et unitaires,  $O(p, q)$  et  $U(p, q)$ ; nous démontrons des critères explicites d'injectivité du produit (sur les  $g \in G(\mathbb{Q})$ ) des applications  $R_g$  en restriction à la partie fortement primitive (au sens de Vogan et Zuckerman) de la cohomologie. Nous démontrons également des critères explicites d'injectivité de l'application

$$H^k(S(H), \mathbb{C}) \rightarrow H^{k+\dim S - \dim S(H)}(S, \mathbb{C})$$

duale à l'application de restriction  $R_e$ .

Les résultats obtenus s'inscrivent naturellement dans un programme conjectural plus large que nous décrivons et auquel on peut penser comme à un analogue automorphe des Théorèmes de Lefschetz classiques sur les variétés projectives. Il est peut-être un peu surprenant qu'une telle analogie subsiste dans le cas de variétés arithmétiques réelles.

La démonstration consiste à réduire les problèmes globaux mentionnés ci-dessus à leurs analogues locaux à l'aide de Théorèmes de Burger et Sarnak et de propriétés d'isolation des représentations cohomologiques dans le dual automorphe. Les méthodes utilisées sont alors essentiellement issues de la théorie des représentations.

Finalement, nous déduisons de ces résultats des applications à la construction de classes de cohomologie non nulles dans certaines variétés arithmétiques.

**Abstract (Automorphic Lefschetz properties for unitary and orthogonal groups)**

Let  $G$  be a connected semisimple group over  $\mathbb{Q}$ . Given a maximal compact subgroup  $K \subset G(\mathbb{R})$  – such that  $X = G(\mathbb{R})/K$  is a Riemannian symmetric space – and a convenient arithmetic subgroup  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ , one constructs an arithmetic manifold  $S = S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$ . If  $H \subset G$  is a connected semisimple subgroup such that  $H(\mathbb{R}) \cap K$  is maximal compact, then  $Y = H(\mathbb{R})/H(\mathbb{R}) \cap K$  is a symmetric subspace of  $X$ . For each  $g \in G(\mathbb{Q})$  one can construct an arithmetic manifold  $S(H, g) = (H(\mathbb{Q}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash Y$  and a natural immersion  $j_g: S(H, g) \rightarrow S$  induced by the map  $H(\mathbb{A}) \rightarrow G(\mathbb{A}), h \mapsto gh$ . Let us assume that  $G$  is anisotropic, which implies that  $S$  and  $S(H, g)$  are compact. Then, for each positive integer  $k$ , the map  $j_g$  induces a restriction map

$$R_g: H^k(S, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(S(H, g), \mathbb{C}).$$

In this paper we focus on symmetric spaces associated to the unitary and orthogonal groups, namely  $O(p, q)$  and  $U(p, q)$ , and give explicit criteria for the injectivity of the product of the maps  $R_g$  (for  $g$  running through  $G(\mathbb{Q})$ ) when restricted to the strongly primitive (in the sense of Vogan and Zuckerman) part of the cohomology. We also give explicit criteria for the injectivity of the map

$$H^k(S(H), \mathbb{C}) \longrightarrow H^{k+\dim S - \dim S(H)}(S, \mathbb{C})$$

dual to the restriction map  $R_e$ .

The results we obtain fit into a larger conjectural picture that we describe and which bears a strong analogy with the classical Lefschetz Theorems. This may sound quite surprising that such an analogy still exists in the case of the real arithmetic manifolds.

We reduce the global problems mentioned above to local ones by using Theorems of Burger and Sarnak and isolation properties of cohomological representations in the automorphic dual. The methods used then are mainly representation-theoretic.

We finally derive some applications concerning the non vanishing of some cohomology classes in arithmetic manifolds.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>1. Introduction</b> .....	1
<b>2. Représentations cohomologiques</b> .....	11
2.1. Le cas des groupes unitaires .....	13
2.2. Le cas des groupes orthogonaux .....	17
2.3. Restriction entre $K$ -types .....	24
<b>3. Théorème 1.3 et cohomologie <math>L^2</math></b> .....	27
3.1. Démonstration du Théorème 1.3 .....	27
3.2. Un calcul de cohomologie $L^2$ .....	29
3.3. Rappels sur les séries discrètes de $G/H$ .....	31
3.4. Construction de la forme harmonique .....	34
3.5. Démonstration du Théorème 3.4 .....	36
3.6. Application aux groupes unitaires et orthogonaux .....	42
<b>4. Isolation des représentations cohomologiques</b> .....	49
4.1. Isolation dans le dual unitaire .....	49
4.2. Isolation sous la condition $d = 0$ .....	55
4.3. Isolation dans le dual automorphe .....	57
<b>5. Restriction des représentations cohomologiques</b> .....	59
5.1. Restriction et séries discrètes .....	59
5.2. Restriction de représentations cohomologiques .....	63
5.3. Produits tensoriels de représentations cohomologiques .....	67
5.4. Représentations cohomologiques discrètement décomposables .....	69
<b>6. Géométrie de l'espace symétrique associé au groupe <math>O(p, q)</math></b> .....	75
6.1. Préliminaires .....	75
6.2. Sous-espaces totalement géodésiques .....	76
6.3. Croissance du volume .....	80
6.4. Fonction distance à l'hypersurface .....	85

6.5. Séries de Poincaré .....	87
6.6. Tours de revêtements finis .....	91
<b>7. Calcul de la cohomologie <math>L^2</math></b> .....	97
7.1. Une proposition de Donnelly et Xavier .....	97
7.2. Cohomologie $L^2$ relative .....	99
7.3. Démonstration du Théorème 7.1 .....	101
<b>8. Démonstration des principaux résultats</b> .....	103
8.1. Autour d'un Théorème de Burger et Sarnak .....	103
8.2. Restriction et cup-produit virtuels .....	105
8.3. L'application « cup-produit avec $[Sh^0H]$ » .....	108
8.4. Applications .....	112
8.5. Sur la classe de cohomologie des symboles modulaires .....	113
<b>9. Généralisations et Perspectives</b> .....	115
9.1. Généralisations .....	115
9.2. Perspectives .....	119
<b>Bibliographie</b> .....	121

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Rappelons que si  $M$  est une variété projective de dimension complexe  $n$ , l'étude des groupes de cohomologie complexes<sup>(1)</sup>  $H^*(M)$  de degré  $*$   $\neq n$  peut se réduire à l'étude des groupes de cohomologie d'une variété projective de dimension strictement plus petite. Plus précisément, Lefschetz a démontré le célèbre résultat suivant.

THÉORÈME DE LEFSCHETZ. — *Soit  $H$  un hyperplan générique de l'espace projectif ambiant. Alors,*

1. *l'application naturelle de restriction*

$$H^i(M) \longrightarrow H^i(M \cap H)$$

*est injective pour  $i \leq n - 1$ , et*

2. *l'application naturelle « cup-produit avec  $[M \cap H]$  »*

$$H^i(M \cap H) \longrightarrow H^{i+2}(M)$$

*est injective pour  $i \leq n - 2$ .*

Le but de cet article (qui est un prolongement de [2]) est de décrire un phénomène analogue au Théorème de Lefschetz dans le monde automorphe et pour les groupes unitaires et orthogonaux (*i.e.* pour les variétés arithmétiques associées aux groupes  $U(p, q)$  ou  $O(p, q)$ ).

**Définitions des objets.** — Dans tout le texte nous désignerons par  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et **anisotrope** sur  $\mathbb{Q}$ . Les adèles  $\mathbb{A}$  de  $\mathbb{Q}$  forment un anneau localement compact, dans lequel  $\mathbb{Q}$  se plonge diagonalement comme un sous-anneau. On peut considérer le groupe  $G(\mathbb{A})$  des points adéliques de  $G$ , qui contient  $G(\mathbb{Q})$  comme sous-groupe discret.

Nous supposons, pour simplifier et toujours dans tout le texte, que le groupe réductif  $G$  est presque simple sur  $\mathbb{Q}$  modulo son centre. Autrement dit, il n'a pas

---

<sup>(1)</sup>Tous les groupes de cohomologie considérés dans cet article sont à coefficients complexes.

de sous-groupe distingué, non central et connexe défini sur  $\mathbb{Q}$ . Il découle de cette hypothèse que tous les facteurs simples de l'algèbre de Lie complexe  $\mathfrak{g}$  de  $G$  (modulo son centre) sont isomorphes. Nous supposons de plus que le groupe  $G(\mathbb{R})$  des points réels est le produit (avec intersection finie) d'un groupe compact et d'un groupe réel non compact qui est *presque simple* modulo son centre que l'on suppose compact. Nous notons ce dernier groupe  $G^{\text{nc}}$  (nc signifie ici non compact), et nous le supposons généralement isomorphe soit au groupe  $U(p, q)$  soit au groupe  $O(p, q)$ .

Un *sous-groupe de congruence* de  $G(\mathbb{Q})$  est un sous-groupe de la forme  $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ , où  $K_f$  est un sous-groupe compact ouvert du groupe  $G(\mathbb{A}_f)$  des points adéliques finis de  $G$ . Soient  $X_G = G(\mathbb{R})/K_\infty$  l'espace symétrique associé au groupe  $G$ , où  $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$  est un sous-groupe compact maximal, et  $d_G$  la dimension réelle de  $X_G$ .

Dans cet article on étudie les quotients (compacts, puisque  $G$  est anisotrope<sup>(2)</sup>)  $\Gamma \backslash X_G$ , où  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  est un sous-groupe de congruence; ces quotients s'identifient aux composantes connexes de  $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K_f = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G(\mathbb{A}_f))/K_f$ , où  $K_f \subset G(\mathbb{A}_f)$  est un sous-groupe compact ouvert. Précisément, désignons par  $G_f$  l'adhérence de  $G(\mathbb{Q})$  dans le groupe  $G(\mathbb{A}_f)$ . Un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  s'écrit  $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$  où  $K_f$  est l'adhérence de  $\Gamma$  dans  $G_f$  et,

$$(1.1) \quad \Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f.$$

Plus exactement, on s'intéresse ici à la cohomologie (à coefficients complexes)  $H^*(\Gamma \backslash X_G)$  de ces quotients.

Une fois donnés deux sous-groupes de congruence  $\Gamma' \subset \Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ , on obtient un revêtement fini

$$\Gamma' \backslash X_G \longrightarrow \Gamma \backslash X_G$$

qui induit un morphisme injectif

$$H^*(\Gamma' \backslash X_G) \longrightarrow H^*(\Gamma \backslash X_G)$$

en cohomologie. Les groupes de cohomologies  $H^*(\Gamma \backslash X_G)$  (ou  $H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f)$ ) forment donc un système inductif indexé par les sous-groupes de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  (ou par les sous-groupes compacts ouverts  $K_f \subset G_f$ ). En passant à la limite (inductive) on définit

$$(1.2) \quad H^*(Sh^0 G) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Gamma}} H^*(\Gamma \backslash X_G) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K_f}} H^*(G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f)/K_f).$$

La notation ci-dessus provient de ce que lorsque l'espace  $X_G$  est hermitien, on appelle *variété de Shimura* l'espace topologique

$$(1.3) \quad Sh^0 G = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Gamma}} \Gamma \backslash X_G = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f).$$

Cet espace est en tout cas toujours bien défini et est un espace topologique dont on peut considérer la cohomologie de Čech et il est de plus démontré dans [47] que

<sup>(2)</sup>Sauf dans la dernière partie où nous discuterons du cas isotrope.



sa cohomologie coïncide avec (1.2). Pour ce qui nous concerne, il sera suffisant de considérer que  $H^*(Sh^0G)$  n'est qu'une notation pour la limite inductive (1.2).

**L'application de restriction et son application duale.** — Soit  $H \subset G$  un sous-groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}$ . On suppose que

$$(1.4) \quad H(\mathbb{R}) \cap K_\infty \text{ est un sous-groupe compact maximal de } H(\mathbb{R}).$$

Il existe alors une involution de Cartan  $\theta$  de  $G$  dont la restriction à  $H$  est une involution de Cartan de  $H(\mathbb{R})$ . On a une décomposition correspondante

$$(1.5) \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H$$

avec  $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ .

Considérons maintenant  $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$  un sous-groupe de congruence sans torsion de  $G(\mathbb{Q})$ . Le quotient  $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X_G$  est une variété compacte qui s'identifie à  $S(K_f) = G(\mathbb{Q}) \backslash (X \times G_f) / K_f$ .

Soit  $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$  un sous-groupe compact ouvert. Si  $K_f^H \subset K_f$ , il existe une application naturelle  $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$ . Puisque  $\Gamma$  est sans torsion, l'application  $j$  est finie et non ramifiée. On rappelle le résultat suivant, dû à Deligne [14].

LEMME 1.1. — *Étant donné  $K_f^H \subset H(\mathbb{A}_f)$ , il existe un sous-groupe compact ouvert  $K_f^1 \subset G(\mathbb{A}_f)$  avec  $K_f^H \subset K_f^1$ , tel que l'application naturelle  $j' : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f^1)$  soit injective.*

En particulier, si l'on prend  $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}_f)$ , on obtient une application naturelle finie  $j : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$ . Si l'on remplace  $K_f$  par un sous-groupe suffisamment petit  $K_f^1$ , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(K_f^H) & \xrightarrow{j'} & S(K_f^1) \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & S(K_f) \end{array}$$

où  $\pi$  est la projection naturelle de revêtement et  $j'$  est injective.

En passant à la limite (inductive) sur les  $K_f$ , les applications  $j$  induisent l'application de restriction

$$(1.6) \quad \text{res}_H^G : H^*(Sh^0G) \longrightarrow H^*(Sh^0H).$$

Pour simplifier la lecture nous utiliserons la notation  $Sh^0H \subset Sh^0G$  pour résumer que  $H$  est un sous-groupe algébrique réductif, connexe, presque simple modulo son centre compact et vérifiant la condition (1.4).

L'application duale à l'application de restriction induite par  $j$

$$H^*(S(K_f^H)) \longrightarrow H^*(S(K_f))$$

induit, en passant à la limite (inductive) sur les  $K_f$ , l'application

$$(1.7) \quad \bigwedge_H^G : H^*(Sh^0 H) \longrightarrow H^{*+d_G-d_H}(Sh^0 G)$$

« cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  » (duale à (1.6)).

Nous aurons besoin de considérer également une modification de l'application de restriction : l'application de restriction virtuelle. Expliquons sa construction. Soit  $g \in G(\mathbb{Q})$ . Fixons  $K_f^H$  un compact ouvert de  $H(\mathbb{A}_f)$ , et considérons l'application  $j_g : X_H \times H_f \rightarrow X_G \times G_f$  donnée par  $j_g(x, h) = (gx, h)$ . Il est facile de vérifier que  $j_g$  induit une application injective  $H(\mathbb{Q}) \backslash (X_H \times H_f) / K_f^H \rightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash (X_G \times G_f) / K_f^H$ . En supposant que  $K_f^H = K_f \cap H(\mathbb{A}) \subset K_f$  (où  $K_f$  est un sous-groupe compact ouvert dans  $G(\mathbb{A}_f)$ ), on obtient alors une application naturelle  $j_g : S(K_f^H) \rightarrow S(K_f)$ , en utilisant les notations précédentes. Puisque  $\Gamma$  est sans torsion, cette application est finie et non ramifiée. On peut également décrire  $j_g$  comme l'application naturelle  $(H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H \rightarrow \Gamma \backslash X_G$ . On obtient de cette manière toute une famille, paramétrée par  $g \in G(\mathbb{Q})$ , de sous-variétés de  $\Gamma \backslash X_G$  – les images des applications  $j_g$ . En cohomologie celles-ci induisent l'application de *restriction virtuelle*

$$H^*(S(\Gamma)) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(S_H(g)),$$

où  $S_H(g) = (H(\mathbb{R}) \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H$ , et l'application de restriction est déduite de la famille d'applications  $(j_g)$ . En passant à la limite (inductive) sur les  $\Gamma$ , l'application de restriction virtuelle induit l'application de *restriction virtuelle*  $\text{Res}_H^G$  :

$$(1.8) \quad \text{Res}_H^G : H^*(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^*(Sh^0 H).$$

*Une Conjecture tirée de [2].* — Dans [2] nous avons énoncé la conjecture suivante et montré qu'elle pouvait être déduite de conjectures classiques sur le spectre automorphe des groupes semi-simples (Conjectures d'Arthur).

CONJECTURE 1.2. — *Supposons fixées des données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(k, 1)$  (resp.  $U(k, 1)$ ) et  $G^{\text{nc}} = O(n, 1)$  (resp.  $U(n, 1)$ ), où  $n \geq k \geq 1$  sont des entiers. Alors,*

1. *pour tout entier  $i \leq d_H/2$ , l'application de restriction virtuelle*

$$\text{Res}_H^G : H^i(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^i(Sh^0 H)$$

*est injective ;*

2. *pour tout entier  $i \leq d_H - d_G/2$ , l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  »*

$$\bigwedge_H^G : H^i(Sh^0 H) \longrightarrow H^{i+d_G-d_H}(Sh^0 G)$$

*est injective.*

Concernant les résultats partiels inconditionnellement démontrés nous renvoyons le lecteur à [2], remarquons néanmoins que dans le cas **unitaire** le point 1. est un Théorème de Venkataramana [54].

Le lien entre la Conjecture 1.2 et le Théorème de Lefschetz est particulièrement évident lorsque  $k = n - 1$ , le but de cet article est d'explorer ces « propriétés de Lefschetz » en rang supérieur. Dans ce cas la combinatoire est bien plus compliquée comme le montre déjà [3] qui généralise le Théorème de Venkataramana mentionné ci-dessus au cas  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Mais d'un autre côté la « rigidité » du rang supérieur (plus précisément une généralisation de la propriété (T) de Kazhdan découverte par Vogan) permet d'obtenir des résultats inconditionnels en petit degré. Le but de cet article est alors double. D'abord démontrer des propriétés de Lefschetz en petit degré puis dégager des conjectures concernant les autres degrés.

**Énoncés des principaux résultats.** — Concernant les groupes unitaires nos méthodes nous permettrons de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3. — *Supposons fixées des données  $Sh^0 H_i \subset Sh^0 G$  ( $i = 1, 2$ ) avec  $H_1^{\text{nc}} = U(p, q - 1)$ ,  $H_2^{\text{nc}} = U(p - 1, q)$  et  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$  avec  $p, q \geq 2$ . Alors,*

1. *pour tout entier  $\mathbf{k} < \mathbf{p} + \mathbf{q} - 1$ , l'application de restriction virtuelle*

$$\text{Res}_{H_1}^G \times \text{Res}_{H_2}^G : H^k(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H_1) \times \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H_2)$$

*est injective ;*

2. *pour tout entier  $\mathbf{k} < \mathbf{q} - \mathbf{p} - 1$  (resp.  $\mathbf{k} < \mathbf{p} - \mathbf{q} - 1$ ), l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H_1]$  (resp.  $[Sh^0 H_2]$ ) »*

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{H_1}^G : H^k(Sh^0 H_1) \longrightarrow H^{k+2p}(Sh^0 G) \\ \text{(resp. } & \bigwedge_{H_2}^G : H^k(Sh^0 H_2) \longrightarrow H^{k+2q}(Sh^0 G)) \end{aligned}$$

*est injective.*

De manière plus surprenante un résultat analogue est également vrai pour les groupes orthogonaux.

THÉORÈME 1.4. — *Supposons fixées des données  $Sh^0 H_i \subset Sh^0 G$  ( $i = 1, 2$ ) avec  $H_1^{\text{nc}} = O(p, q - 1)$ ,  $H_2^{\text{nc}} = O(p - 1, q)$  et  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$  avec  $p, q \geq 3$ . Alors,*

1. *pour tout entier  $\mathbf{k} \leq \mathbf{p} + \mathbf{q} - 4$ , l'application de restriction virtuelle*

$$\text{Res}_{H_1}^G \times \text{Res}_{H_2}^G : H^k(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H_1) \times \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H_2)$$

*est injective ;*

2. pour tout entier  $\mathbf{k} \leq (\mathbf{q} - \mathbf{p} - \mathbf{3})/2$  (resp.  $\mathbf{k} \leq (\mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{3})/2$ ), l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H_1]$  (resp.  $[Sh^0 H_2]$ ) »

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{H_1}^G : H^k(Sh^0 H_1) \longrightarrow H^{k+p}(Sh^0 G) \\ \text{(resp. } & \bigwedge_{H_2}^G : H^k(Sh^0 H_2) \longrightarrow H^{k+q}(Sh^0 G)) \end{aligned}$$

est **injective**.

Le cas des groupes  $O(2, n)$  ( $n \geq 3$ ) est légèrement différent nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. — Supposons fixées des données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{nc} = O(2, n-1)$  et  $G^{nc} = O(2, n)$  avec  $n \geq 3$ . Alors,

1. pour tout entier  $\mathbf{k} \leq \mathbf{n} - 1$ , l'application de restriction virtuelle

$$\text{Res}_H^G : H^k(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H)$$

est **injective** ;

2. pour tout entier  $\mathbf{k} \leq \left[\frac{\mathbf{n}}{2}\right] - \mathbf{2}$ , l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  »

$$\bigwedge_H^G : H^k(Sh^0 H) \longrightarrow H^{k+2}(Sh^0 G)$$

est **injective**.

Le point 1. du Théorème 1.5 est dû à Venkataramana [54].

En prenant  $k = 0$  dans le point 2. des Théorèmes 1.4 et 1.5 on retrouve le résultat suivant dû à Millson et Raghunathan [43]<sup>(3)</sup>.

COROLLAIRE 1.6. — Supposons fixées les données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{nc} = O(p, q-1)$  et  $G^{nc} = O(p, q)$  avec  $1 \leq p \leq q$ . Alors, la classe fondamentale de  $Sh^0 H$  est non triviale dans  $H^p(Sh^0 G)$ .

Les Théorèmes 1.4 et 1.5 sont en particulier une vaste généralisation de ce Corollaire. Le point le plus surprenant est peut-être que mises bout à bout les applications des points 1. et 2. impliquent une sorte de décomposition de Lefschetz dans un cadre réel. Les Théorèmes 1.3 et 1.4 permettent en tout cas de comprendre géométriquement la façon dont certaines classes de cohomologie apparaissent dans l'esprit du Corollaire ci-dessus. Il n'est pas facile en général d'exhiber des classes de cohomologie non triviales dans les variétés arithmétiques associées aux groupes orthogonaux.

<sup>(3)</sup>Pour  $q$  petit le Corollaire ne découle pas directement des Théorèmes il faut travailler un petit peu plus, cf. § 8.5.

Lorsque celles-ci proviennent de groupes orthogonaux sur des corps de nombres, le Corollaire ci-dessus permet de telles constructions. C'est d'ailleurs historiquement le premier résultat concernant ce problème. Lorsqu'elles proviennent d'autres constructions Raghunathan et Venkataramana ont remarqué qu'il pouvait être utile de les plonger dans des variétés arithmétiques associées aux groupes unitaires. Le théorème suivant éclaire les relations entre leurs groupes de cohomologie.

THÉORÈME 1.7. — *Supposons fixées les données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$ ,  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$  et  $p, q \geq 3$ . Alors,*

1. *pour tout entier  $k \leq p + q - 3$ , l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{k,0}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H)$$

*est injective ;*

2. *si  $pq$  est pair, la classe de  $Sh^0 H$  dans  $H^{pq}(Sh^0 G)$  est non triviale.*

Là encore le cas où  $p = 2$  et  $q \geq 3$  est légèrement différent, nous montrons le théorème suivant.

THÉORÈME 1.8. — *Supposons fixées les données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(2, n)$ ,  $G^{\text{nc}} = U(2, n)$  et  $n \geq 3$ . Alors,*

1. *pour tout entier  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{k,0}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^k(Sh^0 H)$$

*est injective ;*

2. *la classe de  $Sh^0 H$  dans  $H^{2n}(Sh^0 G)$  est non triviale.*

En prenant  $k = p$  dans les Théorèmes 1.7 et 1.8 on obtient le corollaire intéressant suivant<sup>(4)</sup>.

COROLLAIRE 1.9. — *Supposons fixées les données  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$ ,  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$  et  $1 \leq p \leq q$ . Alors, l'application de restriction virtuelle*

$$Res_H^G : H^{p,0}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^p(Sh^0 H)$$

*est injective.*

De ce Corollaire et d'un Théorème classique de Borel et Wallach [9] sur la cohomologie des variétés arithmétiques associées aux groupes unitaires, nous déduisons le Corollaire suivant.

<sup>(4)</sup>Pour  $q$  petit le Corollaire ne découle pas directement du Théorème il faut travailler un petit peu plus, cf. § 8.2.

**COROLLAIRE 1.10.** — *Soit  $G$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe de type  $D_n$ ,  $\neq {}^{3,6}D_4$  et  $n > 2$ , et tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ , avec  $1 \leq p \leq q$ . Alors,*

$$H^p(\text{Sh}^0 G) \neq 0.$$

Ce résultat n'est nouveau que pour  $n = 3$  et  $p > 1$ , les autres cas sont traités dans différents articles de Li [37], Raghunathan et Venkataramana [46] et Li-Millson [38]. La démonstration que l'on en donne ici permet de traiter tous ces cas de manière uniforme, notons que ce Corollaire reste vrai si  $G$  est isotrope avec la même démonstration (cf. § 9.1).

Nos méthodes s'appliquent également au produit dans la cohomologie. Dans [6], nous avons pu démontrer le Théorème suivant.

**THÉORÈME 1.11.** — *Supposons fixée une donnée  $\text{Sh}^0 G$  avec  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie de degrés respectifs  $k$  et  $l$  dans  $H^*(\text{Sh}^0 G)$  avec  $\mathbf{k} + 1 \leq \mathbf{q} + \mathbf{p} - 1$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

Les méthodes (différentes) de cet article nous permettrons de démontrer (en rang supérieur) le Théorème analogue suivant pour les groupes orthogonaux.

**THÉORÈME 1.12.** — *Supposons fixée une donnée  $\text{Sh}^0 G$  avec  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ , avec  $p, q \geq 3$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie de degrés respectifs  $k$  et  $l$  dans  $H^*(\text{Sh}^0 G)$  avec  $\mathbf{k} + 1 \leq \mathbf{q} + \mathbf{p} - 3$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

Le résultat analogue pour le groupe  $O(2, n)$  est un Théorème de Venkataramana [54].

Concluons cette description des résultats en remarquant qu'en rang 1 la conjecture suivante découle elle aussi des conjectures d'Arthur.

**CONJECTURE 1.13.** — *Supposons fixée une donnée  $\text{Sh}^0 G$  avec  $G^{\text{nc}} = O(1, n)$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie de degrés respectifs  $k$  et  $l$  dans  $H^*(\text{Sh}^0 G)$  avec  $\mathbf{k} + 1 \leq \mathbf{n}/2$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que*

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0.$$

**Vue d'ensemble.** — Nous montrons essentiellement deux types de résultats : l'injectivité de l'application de restriction virtuelle et l'injectivité de l'application « cup-produit avec la classe d'un cycle », tout ceci pour les groupes unitaires et orthogonaux et en certains degrés. Les méthodes de démonstration dans chacun de ces deux cas sont sensiblement différentes. Commençons par souligner que, bien que cette introduction ne le laisse pas paraître, ces deux types de résultats s'appliquent naturellement aux

classes de cohomologie dites « fortement primitives ». Cette notion est reliée à la classification, par Vogan et Zuckerman, des représentations cohomologiques des groupes semi-simples réels. Nous faisons les rappels nécessaires dans le chapitre 2. Puis nous paramétrons explicitement les modules cohomologiques des groupes unitaires et orthogonaux et analysons les applications de restriction entre  $K$ -types. Ces résultats basiques sont utilisés dans toute la suite du texte.

Dans chacun des deux types de résultats que nous démontrons, la méthode est analytique. Il s'agit de ramener l'injectivité de l'application considérée à un analogue local.

Dans le cas de l'application de restriction virtuelle cette réduction repose sur une méthode due à Burger et Sarnak ainsi que sur des observations dues pour l'essentielle à Harris et Li. Tout ceci est détaillé au § 8.1. Le problème local auquel on est réduit est celui de déterminer les représentations cohomologiques de  $G$  qui restreintes à  $H$  contiennent (discrètement) une représentation cohomologique de  $H$ . Ce problème est étudié et essentiellement résolu dans le chapitre 5. Pour faire fonctionner la méthode de Burger et Sarnak il faut encore s'assurer que les représentations cohomologiques en question sont isolées dans le « dual automorphe ». C'est en particulier le cas des représentations cohomologiques isolées dans tout le dual unitaire. Celles-ci sont complètement classifiées par Vogan. Dans le chapitre 4 nous appliquons le résultat de Vogan aux groupes unitaires et orthogonaux. Ces différentes étapes sont mises bout à bout au § 8.2 dans lequel nous démontrons nos résultats généraux d'injectivité de l'application de restriction virtuelle. Remarquons que dans le cas des groupes unitaires la méthode de Venkataramana, plus élémentaire, se généralise (cf. [3]). C'est l'une des motivations de cet article de généraliser ces résultats à des espaces non hermitiens. Nous commençons donc, au § 3.1, par déduire des résultats de [3] la démonstration du point 1. du Théorème 1.3.

Dans le cas de l'application « cup-produit » nous réduisons le problème de l'injectivité à un calcul de cohomologie  $L^2$  des variétés  $\Lambda \backslash X_G$  où  $\Lambda$  est un sous-groupe de congruence de  $H$ , cf. § 8.3. Cette réduction repose là encore sur les résultats d'isolation du chapitre 4. C'est déjà la méthode utilisée dans [7], avec Clozel, dans le cas des groupes unitaires. Nous commençons par revenir sur ce cas dans le chapitre 3 en précisant ce calcul de cohomologie  $L^2$ . Les résultats de ce chapitre, outre le fait qu'ils servent de motivations à une bonne partie de la suite, sont explicitement utilisés dans les chapitres 6 et 7 ainsi qu'aux § 8.3, 8.5 et 9.1. Dans le cas des groupes orthogonaux le calcul de cohomologie  $L^2$  est effectué dans le chapitre 7; il repose sur l'étude de la géométrie des espaces symétriques associés (chapitre 6).

*Remerciements.* — Je tiens à remercier Patrick Delorme et Jacques Carmona qui m'ont signalé une erreur dans une première version du texte. J'ai contourné le problème posé par cette erreur à l'aide de la correspondance thêta, cf. § 5.1, l'approche suivie dans ce paragraphe est sous-jacente dans [24], Michael Harris et Jian-Shu Li

m'ont d'ailleurs informé qu'ils avaient eux aussi pensé à cette méthode après l'écriture de [24]. Enfin, merci à Laurent Clozel, cet article s'inscrit évidemment dans le prolongement de notre travail en commun [7].



## CHAPITRE 2

### REPRÉSENTATIONS COHOMOLOGIQUES

Puisque  $G$  est anisotrope sur  $\mathbb{Q}$ , un théorème de Borel et Harish-Chandra [8] affirme que si  $\Gamma$  est un sous-groupe de congruence de  $G$ , la variété  $S(\Gamma)$  est compacte.

Dans ce chapitre les facteurs compacts de  $G(\mathbb{R})$  ne nous intéresseront pas, nous noterons  $\mathfrak{g}_0$  l'algèbre de Lie de  $G^{\text{nc}}$  et  $\mathfrak{k}_0$  l'algèbre de Lie de  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G^{\text{nc}}$ . Soit  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$  la décomposition de Cartan associée. Si  $\mathfrak{l}_0$  est une algèbre de Lie, nous noterons  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$  sa complexification.

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de congruence de  $G$ . Soit  $\mathcal{E}^k(S(\Gamma))$  l'espace des formes différentielles de degré  $k$  sur  $S(\Gamma)$ . Puisque le fibré cotangent  $T^*S(\Gamma)$  est isomorphe au fibré  $\Gamma \backslash G^{\text{nc}} \times_K \mathfrak{p}^* \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}} / K = S(\Gamma)$ , qui est associé au  $K$ -fibré principal  $K \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}} \rightarrow \Gamma \backslash G^{\text{nc}} / K$  et à la représentation de  $K$  dans  $\mathfrak{p}^*$ , on a :

$$(2.1) \quad \mathcal{E}^k(S(\Gamma)) \simeq \left( C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}}) \otimes \bigwedge^k \mathfrak{p}^* \right) \simeq \text{Hom}_K \left( \bigwedge^k \mathfrak{p}, C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}}) \right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Notons  $\Delta$  le laplacien de Hodge-de Rham sur la variété riemannienne (localement symétrique)  $S(\Gamma)$  (où la métrique est déduite de la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}_0$ ). L'espace des formes harmoniques de degré  $k$  est donné par

$$\mathcal{H}^k(S(\Gamma)) := \{ \omega \in \mathcal{E}^k(S(\Gamma)) : \Delta \omega = 0 \}.$$

La théorie de Hodge fournit un isomorphisme naturel

$$H^*(S(\Gamma)) \simeq \mathcal{H}^*(S(\Gamma)).$$

Soit  $(\pi, V_\pi)$  un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module irréductible. À l'aide de (2.1) on définit une application linéaire

$$(2.2) \quad T_\pi : \begin{cases} \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \otimes \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, C^\infty(\Gamma \backslash G^{\text{nc}})) & \longrightarrow \mathcal{E}^*(S(\Gamma)), \\ \psi \otimes \varphi & \longmapsto \varphi \circ \psi. \end{cases}$$

Soit  $\widehat{G}^{\text{nc}}$  l'ensemble des classes d'équivalence des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules irréductibles qui sont unitarisables. Rappelons qu'Harish-Chandra a démontré que  $\widehat{G}^{\text{nc}}$  s'identifie naturellement au dual unitaire de la composante connexe de l'identité  $G_0^{\text{nc}}$  de  $G^{\text{nc}}$ . Soient  $U(\mathfrak{g})$  l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie complexe  $\mathfrak{g}$ ,  $Z(\mathfrak{g})$  son centre et

$\Omega \in Z(\mathfrak{g})$  le casimir défini par la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}_0$ . On définit le sous-ensemble  ${}_0\widehat{G}^{\text{nc}}$  de  $\widehat{G}^{\text{nc}}$  par

$${}_0\widehat{G}^{\text{nc}} := \{\pi \in \widehat{G}^{\text{nc}} : \pi(\Omega) = 0\},$$

où l'on a conservé la même notation  $\pi$  pour la représentation de  $U(\mathfrak{g})$ .

L'action de  $G_0^{\text{nc}}$  sur  $X_G$  induit la représentation de  $U(\mathfrak{g})$  sur l'espace des formes différentielles sur  $X_G$ . En particulier, le casimir  $\Omega (\in Z(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g}))$  agit sur  $\mathcal{E}^*(X_G)$  comme le laplacien de Hodge-de Rham, puisque la métrique riemannienne sur  $X_G$  est induite par la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}_0$ . Il découle de tout ceci que

$$(2.3) \quad \text{Image}(T_\pi) \subset \mathcal{H}^*(S(\Gamma)) \simeq H^*(S(\Gamma))$$

si et seulement si  $\pi \in {}_0\widehat{G}^{\text{nc}}$ . On dit dans ce cas que le sous-espace de  $H^*(S(\Gamma))$  correspondant à l'image de  $T_\pi$  est la  $\pi$ -composante, et on écrit  $H^*(\pi : \Gamma)$ . Autrement dit,

$$(2.4) \quad H^k(\pi : \Gamma) := \text{Image}(T_\pi) \cap H^k(S(\Gamma)) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

via l'isomorphisme (2.3).

Un résultat dû à Gel'fand et Piatetski-Shapiro [22] affirme que la représentation régulière droite dans  $L^2(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}})$  admet une décomposition en somme directe de Hilbert discrète

$$L^2(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}) \simeq \sum^\oplus \text{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}})) \otimes \pi = \sum^\oplus n_\Gamma(\pi) \pi,$$

où  $\pi$  parcourt cette fois le dual unitaire de  $G_0^{\text{nc}}$  et la multiplicité

$$n_\Gamma(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, L^2(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}})) < \infty.$$

Alors la formule de Matsushima est résumée dans le lemme suivant.

LEMME 2.1 ([9], [41]). — *Sous les notations précédentes. On a*

$$(2.5) \quad H^*(\pi : \Gamma) \simeq n_\Gamma H^*(\mathfrak{g}, K; \pi),$$

$$(2.6) \quad H^*(S(\Gamma)) = \bigoplus_{\pi \in {}_0\widehat{G}^{\text{nc}}} H^*(\pi : \Gamma).$$

En passant à la limite (inductive) sur les sous-groupes de congruence  $\Gamma \subset G$ , nous parlerons de  $\pi$ -composante de la cohomologie  $H^*(Sh^0G)$  de la variété de Shimura  $Sh^0G$ , ce que nous noterons  $H^*(\pi : Sh^0G)$ . La décomposition (2.6) se traduit alors en

$$(2.7) \quad H^*(Sh^0G) = \bigoplus_{\pi \in {}_0\widehat{G}^{\text{nc}}} H^*(\pi : Sh^0G).$$

D'après Parthasarathy [45], Kumaresan [35] et Vogan-Zuckerman [57], les  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules unitarisables ayant des groupes de  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie non triviaux peuvent être décrit comme suit. Notons  $\mathfrak{t}_0 = \text{Lie}(T)$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{k}_0$ . On considère les sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g} : \mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  [57], où  $\mathfrak{l}$  est le

centralisateur d'un élément  $X \in i\mathfrak{t}_0$  et  $\mathfrak{u}$  est le sous-espace engendré par les racines positives de  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{q}$  est stable sous  $\theta$ ; on en déduit une décomposition  $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . Soit  $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ .

Associé à  $\mathfrak{q}$ , se trouve un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module irréductible bien défini  $A_{\mathfrak{q}}$  caractérisé par les propriétés suivantes. Supposons effectué un choix de racines positives pour  $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  de façon compatible avec  $\mathfrak{u}$ . Soit  $e(\mathfrak{q})$  un générateur de la droite  $\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . Alors  $e(\mathfrak{q})$  est le vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible  $V(\mathfrak{q})$  de  $K$  contenue dans  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$ ; et dont le plus haut poids est donc nécessairement  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . La classe d'équivalence du  $(\mathfrak{g}, K)$ -module  $A_{\mathfrak{q}}$  est alors uniquement caractérisée par les deux propriétés suivantes.

(2.8)  $A_{\mathfrak{q}}$  est unitarisable avec le même caractère infinitésimal que la représentation triviale

$$(2.9) \quad \text{Hom}_K(V(\mathfrak{q}), A_{\mathfrak{q}}) \neq 0.$$

Remarquons que la classe du module  $A_{\mathfrak{q}}$  ne dépend alors en fait que de l'intersection  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ , autrement dit deux sous-algèbres paraboliques  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{u}'$  vérifiant  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}$  donnent lieu à une même classe de module cohomologique.

De plus,  $V(\mathfrak{q})$  intervient avec multiplicité un dans  $A_{\mathfrak{q}}$  et  $\bigwedge^R(\mathfrak{p})$ , et

$$(2.10) \quad H^i(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}}) \cong \text{Hom}_{L \cap K} \left( \bigwedge^{i-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C} \right).$$

Ici  $L$  est un sous-groupe de  $K$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$ .

Si  $\Gamma$  est un sous-groupe de congruence de  $G$ , la  $A_{\mathfrak{q}}$ -composante  $H^R(A_{\mathfrak{q}} : \Gamma)$  de  $H^R(S(\Gamma))$  sera dite *fortement primitive*. D'après ce que nous avons rappelé ci-dessus la  $A_{\mathfrak{q}}$ -composante fortement primitive est donc la somme sur une base  $\{\varphi\}$  de  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(A_{\mathfrak{q}}, C^\infty(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}))$  des formes différentielles  $\omega_\varphi$  définies par

$$\omega_\varphi(g.\lambda) = \varphi(\omega(\lambda))(g) \quad (\lambda \in \bigwedge^R \mathfrak{p}, g \in G_0^{\text{nc}}),$$

où  $\omega : \bigwedge^R \mathfrak{p} \rightarrow A_{\mathfrak{q}}$  est une  $K$ -application non nulle (uniquement définie à un scalaire près) qui factorise nécessairement via la composante isotypique  $V(\mathfrak{q})$ . De même nous parlerons de  $H^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G)$  comme de la  $A_{\mathfrak{q}}$ -composante *fortement primitive*, et notons  $H_{\text{prim}+}^*(Sh^0 G)$  la composante fortement primitive de la cohomologie.

## 2.1. Le cas des groupes unitaires

Dans ce paragraphe  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers strictement positifs avec  $p \leq q$ . Le rang réel de  $G$  est donc  $p$ . On a

$$(2.11) \quad G^{\text{nc}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\},$$

où  $A \in M_{p \times p}(\mathbb{C})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{C})$ ,  $C \in M_{q \times p}(\mathbb{C})$  et  $D \in M_{q \times q}(\mathbb{C})$ . Soit

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G^{\text{nc}} : A \in U(p), D \in U(q) \right\}.$$

Le complexifié  $K_{\mathbb{C}}$  de  $K$  est le groupe

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{C}}^{\text{nc}} : A \in GL_p, D \in GL_q \right\}.$$

L'involution de Cartan  $\theta$  est donnée par  $x \mapsto -\bar{x}$ . Soit

$$T = \left\{ g \in K_{\mathbb{C}} : g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, D \text{ matrices diagonales} \right\}.$$

Rappelons que la multiplication par  $i = \sqrt{-1}$  induit une décomposition

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-.$$

Nous notons  $(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$  les éléments de  $T$  ou de son algèbre de Lie. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est bien évidemment  $M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{C})$ , et l'on voit ses éléments sous forme de blocs comme dans (2.11). On a alors,

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{q \times p}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit  $E = \mathbb{C}^p$  (resp.  $F = \mathbb{C}^q$ ) la représentation standard de  $U(p)$  (resp.  $U(q)$ ). Alors, comme représentation de  $K_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$ .

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  les bases canoniques respectives de  $E$  et  $F$ . Choisissons comme sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}_K$  dans  $\mathfrak{k}$  l'algèbre des matrices dans  $\mathfrak{k}$ , qui sont triangulaires supérieures sur  $E$  et triangulaires inférieures sur  $F$  par rapport à ces bases. Alors l'ensemble des racines simples compactes positives

$$(2.12) \quad \Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t}) = \{x_i - x_j : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{y_j - y_i : 1 \leq i < j \leq q\}.$$

Les racines de  $T$  apparaissant dans  $\mathfrak{p}^+$  sont les formes linéaires  $x_i - y_j$  avec  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$ .

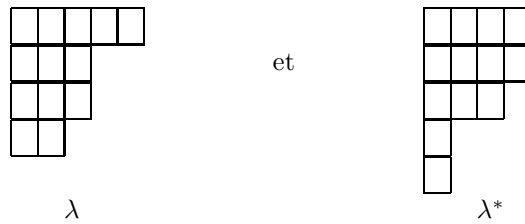
**Modules cohomologiques et diagrammes de Young.** — Nous avons vu comment associer une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}$  à un élément  $X = (x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) \in \mathfrak{it}_0$  (les  $x_i, y_j$  sont donc tous réels). Rappelons le choix fixé (2.12) de racines simples compactes positives. Après conjugaison par un élément de  $K$ , on peut supposer, et nous le supposerons effectivement par la suite, que  $X$  est dominant par rapport à  $\Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$ , *i.e.* que  $\alpha(X) \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi(\mathfrak{b}_K, \mathfrak{t})$ ; il satisfait alors aux inégalités

$$x_1 \geq \dots \geq x_p \text{ et } y_q \geq \dots \geq y_1.$$

Nous allons maintenant associer à  $X$  un couple de partitions. Rappelons qu'une *partition* est une suite décroissante  $\lambda$  d'entiers naturels  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ . Les entiers  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  sont des *parts*. La *longueur*  $l(\lambda)$  désigne le nombre de parts non nulles, et le *poids*  $|\lambda|$ , la somme des parts. On se soucie peu, d'ordinaire, des parts nulles : on se permet en particulier, le cas échéant, d'en rajouter ou d'en ôter

Le *diagramme de Young* de  $\lambda$ , que l'on notera également  $\lambda$ , s'obtient en superposant, de haut en bas, des lignes dont l'extrémité gauche est sur une même colonne, et de longueurs données par les parts de  $\lambda$ . Par symétrie diagonale, on obtient le diagramme de Young de la *partition conjuguée*, que l'on notera  $\lambda^*$ .

Le diagramme de Young de la partition  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$  et de sa conjugué sont donc :



Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions telles que le diagramme de  $\mu$  contienne  $\lambda$ , ce que nous noterons  $\lambda \subset \mu$ . Notons  $\mu/\lambda$  le complémentaire du diagramme de  $\lambda$  dans celui de  $\mu$  : c'est une *partition gauche* son diagramme est un *diagramme gauche*. Dans la pratique les partitions  $\lambda$  que nous rencontrerons seront incluses dans la *partition rectangulaire*  $p \times q = \underbrace{(q, \dots, q)}_{p \text{ fois}} = (q^p)$ , le diagramme gauche  $p \times q/\lambda$  est alors le diagramme de

Young d'une partition auquel on a appliqué une rotation d'angle  $\pi$  ; nous noterons  $\hat{\lambda}$  cette partition, la *partition complémentaire* de  $\lambda$  dans  $p \times q$ . Par exemple, la partition  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$  est incluse dans le rectangle  $5 \times 5$ , et dans ce rectangle,  $\hat{\lambda} = (5, 3, 2, 2)$ .

Nous associons maintenant à notre élément  $X \in \mathfrak{it}_0$  un couple  $(\lambda, \mu)$  de partitions comme suit.

- La partition  $\lambda \subset p \times q$  est associée au sous-diagramme de Young de  $p \times q$  constitué des cases de coordonnées  $(i, j)$  telles que  $x_i > y_j$ .
- La partition  $\mu \subset p \times q$  est associée au sous-diagramme de Young de  $p \times q$  constitué des cases de coordonnées  $(i, j)$  telles que  $x_i \geq y_j$ .

Le lemme suivant est absolument immédiat.

LEMME 2.2. — *Le couple de partitions  $(\lambda, \mu)$  associé à un élément  $X \in \mathfrak{it}_0$  vérifie :*

1. *la suite d'inclusion  $\lambda \subset \mu \subset p \times q$ , et*
2. *que le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  est une réunion de diagrammes rectangulaires  $p_i \times q_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  ne s'intersectant qu'en des sommets.*

Réciproquement, étant donné un couple de partitions  $(\lambda, \mu)$  vérifiant 1 et 2, on peut toujours trouver un élément  $X \in \mathfrak{it}_0$  tel que  $(\lambda, \mu)$  soit le couple de partitions associé à  $X$ .

Nous dirons d'un couple de partitions  $(\lambda, \mu)$  qu'il est *compatible* (ou *compatible dans  $p \times q$*  en cas d'ambiguïté) s'il vérifie les points 1. et 2. du Lemme 2.2.

Remarquons maintenant que si  $X$  et  $X'$  sont deux éléments de  $\mathfrak{it}_0$  de même couple de partitions associé  $(\lambda, \mu)$  et de sous-algèbres paraboliques associées respectives  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$  alors  $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{u}'$ . On déduit donc de la remarque suivant la définition des modules  $A_{\mathfrak{q}}$  et du Lemme 2.2 que chaque couple compatible de partitions  $(\lambda, \mu)$  définit sans ambiguïté une classe d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda, \mu)$ . Nous nous autoriserons à parler de « la » sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}(\lambda, \mu) = \mathfrak{l}(\lambda, \mu) \oplus \mathfrak{u}(\lambda, \mu)$  de  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé  $A(\lambda, \mu)$ , l'important pour nous est qu'une telle sous-algèbre existe (d'après le Lemme 2.2). Nous supposerons de plus, ce que l'on peut toujours faire, que le groupe  $L(\lambda, \mu)$  associé à la sous-algèbre de Levi  $\mathfrak{l}(\lambda, \mu)$  n'a pas de facteurs compacts non abéliens. Il est alors facile de voir que

$$(2.13) \quad L(\lambda, \mu)/(L(\lambda, \mu) \cap K) = \prod_{i=1}^m U(p_i, q_i)/U(p_i) \times U(q_i).$$

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman mentionnés plus haut affirment alors que

$$\widehat{G}_{VZ}^{\text{nc}} := \{A(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions}\} \subset {}_0\widehat{G}^{\text{nc}} \subset \widehat{G}^{\text{nc}}$$

est l'ensemble des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules ayant des groupes de  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie non nuls.

Comme représentation de  $K_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$  et  $\mathfrak{p} = (E \otimes F^*) \oplus (E \otimes F^*)^*$ . Il est bien connu (cf. [20]) qu'à chaque partition  $\lambda$ , il correspond une représentation irréductible  $E^\lambda$  de  $GL(E)$ .

Considérons la représentation de  $K_{\mathbb{C}}$

$$(2.14) \quad V(\lambda) := E^\lambda \otimes (F^{\lambda^*})^*.$$

C'est une sous-représentation irréductible de  $\bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*)$ ; son vecteur de plus haut poids est

$$(2.15) \quad v(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_i \otimes f_j^*$$

et son vecteur de plus bas poids est

$$(2.16) \quad w(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} e_{p-i+1} \otimes f_{q-j+1}^*.$$

On peut montrer, cf. [20], que la représentation

$$(2.17) \quad \bigwedge \mathfrak{p}^+ = \bigwedge (E \otimes F^*) = \bigoplus_{\lambda \subset p \times q} V(\lambda),$$

où chaque sous-espace irréductible  $V(\lambda)$  apparaît avec multiplicité 1.

Soit maintenant  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions. Le vecteur

$$(2.18) \quad v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^* \in \bigwedge^{|\lambda|}(E \otimes F^*) \otimes \bigwedge^{|\hat{\mu}|}(E \otimes F^*)^* = \bigwedge^{|\lambda|, |\hat{\mu}|} \mathfrak{p}$$

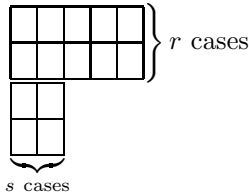
est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda, \mu) \cap \mathfrak{p})$  et engendre donc sous l'action de  $K_{\mathbb{C}}$  un sous-module irréductible que l'on note  $V(\lambda, \mu)$ . Ce module est isomorphe à  $V(\mathfrak{q}(\lambda, \mu))$  et apparaît avec multiplicité exactement un dans  $\bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|} \mathfrak{p}$  (cf. [57]).

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions. Nous noterons  $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G) = H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(A(\lambda, \mu) : Sh^0 G)$  la  $A(\lambda, \mu)$ -composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 G$ .

*Cohomologie holomorphe.* — Rappelons que le sous-espace  $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$  apparaît dans la cohomologie holomorphe si et seulement si  $\mu = p \times q$ . La partition  $\lambda$  est alors naturellement paramétrée par un couple d'entier  $(r, s)$  avec  $0 \leq r \leq p$  et  $0 \leq s \leq q$  tels que

$$\lambda = (\underbrace{q, \dots, q}_r \text{ fois}, \underbrace{s, \dots, s}_{p-r} \text{ fois})$$

de diagramme de Young :



(Ici  $p = 4$  et  $q = 5$ .)

Dans ce cas le sous-espace  $H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)$  apparaît dans la cohomologie holomorphe de degré  $|\lambda| = rq + s(p-r)$  (remarquons que  $|\hat{\mu}| = 0$ ), nous le noterons pour simplifier  $H^\lambda(Sh^0 G)$ .

### 2.2. Le cas des groupes orthogonaux

Dans ce paragraphe  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$  et  $G_0^{\text{nc}} = SO(p, q)_0$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers strictement positifs. Le rang réel de  $G$  est donc  $\min(p, q)$ . On a

$$(2.19) \quad G^{\text{nc}} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : {}^t g \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\},$$

où  $A \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{q \times p}(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{q \times q}(\mathbb{R})$ . Soit

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G^{\text{nc}} : A \in O(p), D \in O(q) \right\},$$

et  $K_0 = SO(p) \times SO(q)$  la composante connexe de l'identité dans  $K$ . L'involution de Cartan  $\theta$  est donnée par  $x \mapsto -{}^t x$ . On a alors,

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}.$$





- $e_i \otimes \bar{f}_j^*$  de valeur propre associée  $x_i + y_j$  ;
- $\bar{e}_i \otimes f_j^*$  de valeur propre associée  $-x_i - y_j$  ;
- $\bar{e}_i \otimes \bar{f}_j^*$  de valeur propre associée  $-x_i + y_j$ .

Ici l'entier  $i$  parcourt  $[1, r]$  et l'entier  $j$  parcourt  $[1, s]$ .

Pour la suite, nous fixons un système positif de  $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  comme suit :

$$(2.22) \quad \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{x_i \pm x_j : 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{y_j \pm y_i : 1 \leq i < j \leq s\}.$$

$p = 2r$  et  $q = 2s + 1$ . — Les systèmes de racines de  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{p}$  sont alors représentés par

$$(2.23) \quad \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm(x_i \pm x_j) : 1 \leq i < j \leq r\} \\ \cup \{\pm(y_i \pm y_j) : 1 \leq i < j \leq s\} \cup \{\pm y_i : 1 \leq i \leq s\},$$

$$(2.24) \quad \Delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{t}) = \{\pm(x_i \pm y_j) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\} \\ \cup \{\pm x_i : 1 \leq i \leq r\}.$$

Nous conservons les notations du paragraphe précédent et notons  $f_{s+1}$  le vecteur  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^q$ . Les systèmes  $(e_1, \bar{e}_1, \dots, e_r, \bar{e}_r)$  et  $(f_1, \bar{f}_1, \dots, f_s, \bar{f}_s, f_{s+1})$  sont alors des bases de  $E$  et  $F$  respectivement. L'action adjointe d'un élément  $(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \in \mathfrak{t}$  sur  $\mathfrak{p} = E \otimes F^*$  est diagonalisée par les vecteurs  $e_i \otimes f_j^*$ ,  $e_i \otimes \bar{f}_j^*$ ,  $\bar{e}_i \otimes f_j^*$  et  $\bar{e}_i \otimes \bar{f}_j^*$  comme au paragraphe précédent ainsi que par les vecteurs  $e_i \otimes f_{s+1}^*$  et  $\bar{e}_i \otimes f_{s+1}^*$  ( $1 \leq i \leq r$ ) de valeurs propres associées respectives  $x_i$  et  $-x_i$ .

Pour la suite, nous fixons un système positif de  $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  comme suit :

$$(2.25) \quad \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{x_i \pm x_j : 1 \leq i < j \leq r\} \\ \cup \{y_j \pm y_i : 1 \leq i < j \leq s\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq s\}.$$

$p = 2r + 1$  et  $q = 2s + 1$ . — Les systèmes de racines de  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{p}$  sont alors représentés par

$$(2.26) \quad \Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{\pm(x_i \pm x_j) : 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm x_i : 1 \leq i \leq r\} \\ \cup \{\pm(y_i \pm y_j) : 1 \leq i < j \leq s\} \cup \{\pm y_i : 1 \leq i \leq s\},$$

$$(2.27) \quad \Delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{t}) = \{\pm(x_i \pm y_j) : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\} \\ \cup \{\pm x_i : 1 \leq i \leq r\} \cup \{\pm y_j : 1 \leq j \leq s\} \cup \{0\}.$$

Nous conservons les notations des paragraphes précédents et notons  $e_{r+1}$  le vecteur  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{C}^p$ . Les systèmes  $(e_1, \bar{e}_1, \dots, e_r, \bar{e}_r, e_{r+1})$  et  $(f_1, \bar{f}_1, \dots, f_s, \bar{f}_s, f_{s+1})$  sont alors des bases de  $E$  et  $F$  respectivement. L'action adjointe d'un élément  $(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \in \mathfrak{t}$  sur  $\mathfrak{p} = E \otimes F^*$  est diagonalisée par les vecteurs  $e_i \otimes f_j^*$ ,  $e_i \otimes \bar{f}_j^*$ ,  $\bar{e}_i \otimes f_j^*$ ,  $\bar{e}_i \otimes \bar{f}_j^*$ ,  $e_i \otimes f_{s+1}^*$  et  $\bar{e}_i \otimes f_{s+1}^*$  comme au paragraphe précédent ainsi que par les vecteurs  $e_{r+1} \otimes f_j^*$ ,  $e_{r+1} \otimes \bar{f}_j^*$  ( $1 \leq j \leq s$ ) et  $e_{r+1} \otimes f_{s+1}^*$  de valeurs propres associées respectives  $-y_j$ ,  $y_j$  et  $0$ .

Pour la suite, nous fixons un système positif de  $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  comme suit :

$$(2.28) \quad \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \{x_i \pm x_j : 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{x_i : 1 \leq i \leq r\} \\ \cup \{y_j \pm y_i : 1 \leq i < j \leq s\} \cup \{y_i : 1 \leq i \leq s\}.$$

**Modules cohomologiques.** — Nous avons vu comment associer une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}$  à un élément  $X = (x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \in i\mathfrak{t}_0$  (les  $x_i, y_j$  sont donc tous réels). Après conjugaison par un élément de  $K_0$ , on peut supposer, et nous le supposons effectivement par la suite, que  $X$  est dominant par rapport au choix (2.22), (2.25) ou (2.28) de  $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , *i.e.* que  $\alpha(X) \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Alors  $X$  satisfait aux inégalités

$$x_1 \geq \dots \geq x_{r-1} \geq |x_r| \geq 0 \text{ et } y_s \geq \dots \geq y_2 \geq |y_1| \geq 0.$$

(Lorsque  $p$  est impair (resp.  $q$  est impair) on peut de plus supposer  $x_r \geq 0$  (resp.  $y_1 \geq 0$ .)

Dans la suite nous notons

$$z_1, \dots, z_p \text{ (resp. } w_1, \dots, w_q)$$

les réels  $x_i, -x_i$  et 0 (resp.  $y_j, -y_j$  et 0) rangés par ordre décroissant (resp. croissant).

Nous associons alors à notre élément  $X \in i\mathfrak{t}_0$  la partition  $\lambda \subset p \times q$  dont le sous-diagramme de Young est constitué des cases de coordonnées  $(i, j)$  telles que  $z_i > w_j$ . Il est facile de vérifier que le couple de partitions  $(\lambda, \hat{\lambda})$  est compatible.

Nous dirons d'une partition  $\lambda$  telle que le couple  $(\lambda, \hat{\lambda})$  est compatible qu'elle est *orthogonale*. Le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$  est alors réunion de diagrammes rectangulaires et est invariant par symétrie centrale. Lorsque  $\hat{\lambda}/\lambda$  est constitué d'un nombre impair de diagrammes rectangulaires nous dirons que la partition orthogonale  $\lambda$  est *impaire* (et qu'elle est *paire* dans le cas contraire).

Comme dans le cas unitaire la donnée d'une partition orthogonale **impaire**  $\lambda$  définit sans ambiguïté une classe d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda)$ . Le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module est cohomologique de degré primitif  $R = |\lambda|$ . Nous notons  $\mathfrak{q}(\lambda) = \mathfrak{l}(\lambda) \oplus \mathfrak{u}(\lambda)$  « la » sous-algèbre parabolique correspondante (en supposant toujours que  $\mathfrak{l}(\lambda)$  n'a pas de facteur compact non abélien).

Écrivons le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$  comme réunion de diagrammes rectangulaires :  $(a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \dots * (a_1 \times b_1)$ . Soit  $L(\lambda)$  le sous-groupe de  $G$  associé à la sous-algèbre de Levi  $\mathfrak{l}(\lambda)$ . Il est alors facile de vérifier que

$$(2.29) \quad L(\lambda)/(L(\lambda) \cap K) = (O(p_0, q_0)/O(p_0) \times O(q_0)) \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)/U(a_i) \times U(b_i),$$

où le plongement du groupe  $O(p_0, q_0) \times \prod_{i=1}^m U(a_i, b_i)$  dans  $O(p, q)$  est (à conjugaison dans  $O(p, q)$  près) induit par le plongement (au niveau des groupes unitaires)

$$U(p_0, q_0) \times U(a_1, b_1) \times \dots \times U(a_m, b_m) \longrightarrow U(p, q) \\ (g_0, g_1, \dots, g_m) \longmapsto (g_0, g_1, \bar{g}_1, \dots, g_m, \bar{g}_m).$$

Comme représentation de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{p} = E \otimes F^*$ . Soient

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = (e_1, e_2, \dots, \bar{e}_2, \bar{e}_1)$$

et

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_q) = (\bar{f}_s, \bar{f}_{s-1}, \dots, f_{s-1}, f_s)$$

les bases respectives de  $E$  et  $F$  obtenues en réordonnant respectivement les vecteurs  $e_i, \bar{e}_i$  et les vecteurs  $f_j, \bar{f}_j$  de telle manière que  $\varepsilon_i \otimes \gamma_j^*$  soit un vecteur propre pour l'action adjointe de  $X$  sur  $\mathfrak{p}$  de valeur propre  $z_i - w_j$ .

En supposant toujours que la partition orthogonale  $\lambda$  est impaire, le vecteur

$$(2.30) \quad v(\lambda) := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} \varepsilon_i \otimes \gamma_j^*$$

appartient à  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$  et est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda) \cap \mathfrak{p})$  pour l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$ . Il engendre donc sous l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$  un sous-module irréductible  $V(\lambda)$  qui est le plus bas  $K$ -type de  $A(\lambda)$ .

Lorsque la partition  $\lambda$  est paire la situation est un petit peu plus compliquée car le diagramme  $\lambda$  peut provenir d'un élément  $X$  avec  $x_r$  ou  $y_1$  non nul. Nous distinguons alors encore une fois trois cas.

$p = 2r$  et  $q = 2s$ . — Soit  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale **paire**. Nous distinguons alors trois cas.

1.  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* = \lambda_{s+1}^*$  : On associe à  $\lambda$  deux classes d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda)_+$  et  $A(\lambda)_-$ . Chacun de ces  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules est cohomologique de degré primitif  $R = |\lambda|$ . Nous notons  $\mathfrak{q}(\lambda)_{\pm} = \mathfrak{l}(\lambda)_{\pm} \oplus \mathfrak{u}(\lambda)_{\pm}$  « la » sous-algèbre parabolique correspondante (en supposant toujours que  $\mathfrak{l}(\lambda)_{\pm}$  n'a pas de facteur compact abélien). L'espace symétrique associé au groupe  $L(\lambda)_{\pm}$  est alors de la forme (2.29) comme ci-dessus avec  $p_0 = q_0 = 0$ .
2.  $\lambda_r = \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$  : On associe à  $\lambda$  deux classes d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda)^+$  et  $A(\lambda)^-$ . Chacun de ces  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules est cohomologique de degré primitif  $R = |\lambda|$ . Nous notons  $\mathfrak{q}(\lambda)^{\pm} = \mathfrak{l}(\lambda)^{\pm} \oplus \mathfrak{u}(\lambda)^{\pm}$  « la » sous-algèbre parabolique correspondante (en supposant toujours que  $\mathfrak{l}(\lambda)^{\pm}$  n'a pas de facteur compact abélien). L'espace symétrique associé au groupe  $L(\lambda)^{\pm}$  est alors de la forme (2.29) comme ci-dessus avec  $p_0 = q_0 = 0$ .
3.  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$  : On associe à  $\lambda$  quatre classes d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda)_+^+, A(\lambda)_+^-, A(\lambda)_-^+$  et  $A(\lambda)_-^-$ . Chacun de ces  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules est cohomologique de degré primitif  $R = |\lambda|$ . Nous notons  $\mathfrak{q}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} = \mathfrak{l}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} \oplus \mathfrak{u}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  « la » sous-algèbre parabolique correspondante (en supposant toujours que  $\mathfrak{l}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  n'a pas de facteur compact abélien). L'espace symétrique associé au groupe  $L(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  est alors de la forme (2.29) comme ci-dessus avec  $p_0 = q_0 = 0$ .

D'après Vogan et Zuckerman [57], l'ensemble

$$\begin{aligned} & \left\{ A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} : \begin{array}{l} \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et paire} \\ \lambda_r > \lambda_{r+1} \text{ et } \lambda_s^* > \lambda_{s+1}^* \end{array}, \text{ et } \pm_1, \pm_2 \text{ deux signes} \right\} \\ & \cup \left\{ A(\lambda)_{\pm} : \begin{array}{l} \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et paire} \\ \lambda_r > \lambda_{r+1} \text{ et } \lambda_s^* = \lambda_{s+1}^* \end{array}, \text{ et } \pm \text{ un signe} \right\} \\ & \cup \left\{ A(\lambda)_{\pm} : \begin{array}{l} \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et paire} \\ \lambda_r = \lambda_{r+1} \text{ et } \lambda_s^* > \lambda_{s+1}^* \end{array}, \text{ et } \pm \text{ un signe} \right\} \\ & \cup \left\{ A(\lambda) : \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et impaire} \right\} \end{aligned}$$

décrit de manière exhaustive l'ensemble des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules cohomologiques.

Faisons agir le signe  $+$  trivialement sur  $E$  et  $F$  et le signe  $-$  sur  $E$  (resp.  $F$ ) par l'application linéaire qui fixe chacun des vecteurs  $e_i, \bar{e}_i$  (resp.  $f_j, \bar{f}_j$ ) pour  $i = 1, \dots, r-1$  (resp.  $j = 2, \dots, s$ ) et qui échange les vecteurs  $e_r$  et  $\bar{e}_r$  (resp.  $f_1$  et  $\bar{f}_1$ ) si (et seulement si)  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  (resp.  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ ). Nous notons de plus  $v^{\pm}$  l'action de  $\pm$  sur un vecteur  $v$  de  $E$  ou de  $F$ .

Si  $\lambda$  est une partition orthogonale paire, le vecteur

$$(2.31) \quad v(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} := \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{\lambda_i} \varepsilon_i^{\pm 1} \otimes (\gamma_j^{\pm 2})^*$$

appartient à  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$ . Et,

- si  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* = \lambda_{s+1}^*$ ,  $v(\lambda)_{\pm}$  est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda)_{\pm} \cap \mathfrak{p})$  pour l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$ . Il engendre donc sous l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$  un sous-module irréductible  $V(\lambda)_{\pm}$  qui est le plus bas  $K$ -type de  $A(\lambda)_{\pm}$ ;
- si  $\lambda_r = \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ ,  $v(\lambda)_{\pm}^{\pm}$  est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda)_{\pm}^{\pm} \cap \mathfrak{p})$  pour l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$ . Il engendre donc sous l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$  un sous-module irréductible  $V(\lambda)_{\pm}^{\pm}$  qui est le plus bas  $K$ -type de  $A(\lambda)_{\pm}^{\pm}$ ;
- si  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ ,  $v(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} \cap \mathfrak{p})$  pour l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$ . Il engendre donc sous l'action de  $(K_0)_{\mathbb{C}}$  un sous-module irréductible  $V(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  qui est le plus bas  $K$ -type de  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$ .

$p = 2r$  et  $q = 2s + 1$ . — Soit  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale **paire**. On associe à  $\lambda$  deux classes d'équivalence de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules que nous notons  $A(\lambda)_+$  et  $A(\lambda)_-$ . Chacun de ces  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules est cohomologique de degré primitif  $R = |\lambda|$ . Nous notons  $\mathfrak{q}(\lambda)_{\pm} = \mathfrak{l}(\lambda)_{\pm} \oplus \mathfrak{u}(\lambda)_{\pm}$  « la » sous-algèbre parabolique correspondante (en supposant toujours que  $\mathfrak{l}(\lambda)_{\pm}$  n'a pas de facteur compact abélien). L'espace symétrique associé au groupe  $L(\lambda)_{\pm}$  est alors de la forme (2.29) comme ci-dessus avec  $p_0 = q_0 = 0$ .

D'après Vogan et Zuckerman [57], l'ensemble

$$\{A(\lambda)_\pm : \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et paire et } \pm \text{ un signe}\} \\ \cup \{A(\lambda) : \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale et impaire}\}$$

décrit exhaustivement l'ensemble des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules cohomologiques.

Si  $\lambda$  est une partition orthogonale paire, le vecteur

$$(2.32) \quad v(\lambda)_\pm := \bigwedge_{i=1}^p \bigwedge_{j=1}^{\lambda_i} \varepsilon_i^\pm \otimes \gamma_j^*$$

appartient à  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$  et est un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u}(\lambda)_\pm \cap \mathfrak{p})$  pour l'action de  $(K_0)_\mathbb{C}$ . Il engendre donc sous l'action de  $(K_0)_\mathbb{C}$  un sous-module irréductible  $V(\lambda)_\pm$  qui est le plus bas  $K$ -type de  $A(\lambda)_\pm$ .

$p = 2r + 1$  et  $q = 2s + 1$ . — Alors toute partition orthogonale dans  $p \times q$  est impaire. D'après Vogan et Zuckerman [57], l'ensemble

$$\{A(\lambda) : \lambda \subset p \times q \text{ orthogonale}\}$$

décrit exhaustivement l'ensemble des  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules cohomologiques.

À toute partition  $\lambda$  de longueur  $l(\lambda) \leq p$ , nous associons la représentation irréductible  $\overline{\Gamma}_\lambda$  du groupe  $O(p, \mathbb{C})$  obtenue par la construction de Weyl (voir par exemple [21]) à partir de la partition  $(\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_{[p/2]} - \lambda_{p-[p/2]+1})$ . Rappelons alors que

- si  $p$  impair  $= 2r + 1$ , la restriction  $\Gamma_\lambda$  de la représentation  $\overline{\Gamma}_\lambda$  au groupe  $SO(p, \mathbb{C})$  est irréductible de plus haut poids  $(\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_r - \lambda_{r+2})$ ;
- si  $p$  est pair  $= 2r$  et  $\lambda_r = \lambda_{r+1}$ , la restriction  $\Gamma_\lambda$  de la représentation  $\overline{\Gamma}_\lambda$  au groupe  $SO(p, \mathbb{C})$  est irréductible de plus haut poids  $(\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_{r-1} - \lambda_{r+2})$ ;
- si  $p$  est pair  $= 2r$  et  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$ , la restriction de la représentation  $\overline{\Gamma}_\lambda$  au groupe  $SO(p, \mathbb{C})$  est la somme de deux représentations irréductibles  $\Gamma_\lambda^+$  et  $\Gamma_\lambda^-$  de plus haut poids respectifs  $(\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_r - \lambda_{r+1})$  et  $(\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_{r+1} - \lambda_r)$ .

Soit maintenant  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale.

- Si  $\lambda$  est impaire, la représentation  $V(\lambda)$  de  $K_0$  s'identifie à  $\Gamma_\lambda \otimes \Gamma_{\lambda^*}^*$ .
- Si  $\lambda$  est paire,  $p = 2r$ ,  $q = 2s$ ,  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ , chaque représentation  $V(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  de  $K_0$  s'identifie à  $\Gamma_\lambda^{\pm 1} \otimes (\Gamma_{\lambda^*}^{\pm 2})^*$ .
- Si  $\lambda$  est paire,  $p = 2r$ ,  $q = 2s$ ,  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* = \lambda_{s+1}^*$ , chaque représentation  $V(\lambda)_\pm$  de  $K_0$  s'identifie à  $\Gamma_\lambda^\pm \otimes \Gamma_{\lambda^*}^*$ .
- Si  $\lambda$  est paire,  $p = 2r$ ,  $q = 2s$ ,  $\lambda_r = \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ , chaque représentation  $V(\lambda)^\pm$  de  $K_0$  s'identifie à  $\Gamma_\lambda \otimes (\Gamma_{\lambda^*}^\pm)^*$ .
- Si  $\lambda$  est paire,  $p = 2r$  et  $q = 2s + 1$ , chaque représentation  $V(\lambda)_\pm$  de  $K_0$  s'identifie à  $\Gamma_\lambda^\pm \otimes \Gamma_{\lambda^*}^*$ .

On dit d'une partition paire  $\lambda \subset p \times q$  qu'elle est de *type 1* (resp. *type 2*; *type 3*) si  $p = 2r$ ,  $q = 2s$ ,  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* = \lambda_{s+1}^*$  ou  $p = 2r$  et  $q = 2s + 1$  (resp.  $p = 2r$ ,

$q = 2s$ ,  $\lambda_r = \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$  ou  $p = 2r + 1$  et  $q = 2s$ ;  $p = 2r$ ,  $q = 2s$ ,  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$  et  $\lambda_s^* > \lambda_{s+1}^*$ ).

Soit  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale. Nous notons  $H^\lambda(Sh^0G)_{\pm 1}^{\pm 2} = H^{|\lambda|}(A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2} : Sh^0G)^{(1)}$  la  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$ -composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0G$ .

D'après Harish-Chandra les modules  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  correspondent à des représentations unitaire du groupe **connexe**  $G_0^{\text{nc}} = SO_0(p, q)$ , nous aurons besoin d'étendre celles-ci à des représentations du groupe non connexe  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Remarquons tout d'abord qu'il correspond à chaque représentation  $\Gamma_\lambda^\pm$  la représentation  $\overline{\Gamma}_\lambda$  du groupe compact non connexe  $O(p)$ . À toute partition orthogonale  $\lambda \subset p \times q$  il correspond donc la représentation irréductible  $\overline{V}(\lambda) = \overline{\Gamma}_\lambda \otimes \overline{\Gamma}_{\lambda^*}$  du groupe  $K$ . Il existe alors une unique représentation unitaire irréductible du groupe  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$  de plus bas  $K$ -type  $\overline{\Gamma}_\lambda \otimes \overline{\Gamma}_{\lambda^*}$ . Nous notons cette représentation  $\overline{A}(\lambda)$ .

### 2.3. Restriction entre $K$ -types

Dans ce paragraphe nous rassemblons divers résultats concernant la restriction des plus bas  $K$ -types des modules cohomologiques construits aux paragraphes précédents. Dans la suite nous aurons à considérer à la fois le cas du groupe  $U(p, q)$  et du groupe  $O(p, q)$ . Pour distinguer ces deux cas nous utiliserons les notations évidentes  $K_U$ ,  $\mathfrak{p}_U$ ,  $\mathfrak{p}_U^\pm$ ,  $V_U(\lambda)$ ,  $V_U(\lambda, \mu) \dots$  lorsque nous parlerons du cas du groupe  $U(p, q)$  et nous conserverons les notations du § 2.2 lorsque nous parlerons du groupe  $O(p, q)$ .

LEMME 2.3. — Soient  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$  et  $r$  un entier  $\leq p \leq q$ . On plonge  $GL_{q-r}$  dans  $GL_q$  par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_r \end{pmatrix}.$$

Supposons que la partition  $(r^p)$  s'inscrive<sup>(2)</sup> dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ , i.e. que la partition  $\mu - (r^p)$  contienne  $\lambda$ . Alors, le  $(GL_p \times GL_q)$ -module  $V_U(\lambda, \mu)$  vu comme  $(GL_p \times GL_{q-r})$ -module contient le module  $V_U(\lambda, \mu - (r^p))$  avec multiplicité 1.

*Démonstration.* — On peut facilement translater  $v(\lambda) \otimes w(\hat{\mu})^*$  par  $1 \times GL_q$  de manière à obtenir un vecteur de plus haut poids pour  $GL_p \times GL_{q-r}$  qui engendre  $V_U(\lambda, \mu - (r^p))$ . Enfin, on constate que la multiplicité est triviale en projetant sur  $V_U(\lambda)$ .  $\square$

REMARQUE. — Il découle de plus de la démonstration de [3, Théorème 31] que si  $V_U(\alpha, \beta)$ , avec  $\alpha, \beta$  partitions dans  $p \times (q - r)$ , est un sous- $(GL_p \times GL_{q-r})$ -module de

<sup>(1)</sup>Suivant la parité et le type 1, 2 ou 3 de  $\lambda$  les signes  $\pm_1$  et  $\pm_2$  peuvent être sans signification auquel cas nous les ignorons.

<sup>(2)</sup>Pour une définition générale, cf. [3].

$V_U(\lambda, \mu)$  avec  $|\alpha| + |\hat{\beta}| = |\lambda| + |\hat{\mu}|$  alors  $\alpha = \lambda$  et  $\hat{\beta} = \hat{\mu}$ . La partition  $(r^p)$  doit donc s'inscrire dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  et  $V_U(\alpha, \beta) = V_U(\lambda, \mu - (r^p))$ .

Par dualité (pour la forme de Killing) l'inclusion  $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}_U$  induit l'application  $\mathfrak{p}_U \rightarrow \mathfrak{p}$  que nous dirons « de restriction ». Cette dernière application induit

$$(2.33) \quad \bigwedge \mathfrak{p}_U \longrightarrow \bigwedge \mathfrak{p}.$$

LEMME 2.4. — *Si  $\lambda$  est une partition orthogonale dans  $p \times q$ , alors l'image de  $V_U(\lambda)$  dans  $\bigwedge \mathfrak{p}$  par l'application de restriction (2.33) est non triviale et contient avec multiplicité 1 le  $K$ -module  $\overline{V(\lambda)}$ .*

*Démonstration.* — Il est démontré dans [39] (cf. aussi [21]) que si  $\lambda$  est une partition de longueur  $l(\lambda) \leq p$ , la représentation  $E^\lambda$  (de  $GL(E) = GL_p$ ), vue comme  $O(p, \mathbb{C})$ -module, contient avec multiplicité un la représentation  $\overline{\Gamma}_\lambda$ . Le Lemme 2.4 découle alors immédiatement de la section précédente.  $\square$

REMARQUE. — De même que dans le cas unitaire, si  $\overline{V(\alpha)}$ , où  $\alpha$  est une partition orthogonale dans  $p \times q$ , est un sous- $(O(p, \mathbb{C}) \times O(q, \mathbb{C}))$ -module de  $V_U(\lambda)$  avec  $|\alpha| = |\lambda|$  alors  $\alpha = \lambda$ .

LEMME 2.5. — *Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$ . Alors, l'image de  $V_U(\lambda, \mu)$  dans  $\bigwedge \mathfrak{p}$  par l'application de restriction (2.33) est triviale sauf si  $\lambda = 0$  ou  $\mu = p \times q$ .*

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que l'application (2.33) envoie une matrice  $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_U$  sur la matrice  $\frac{B-tC}{2}$ . Quitte à conjuguer le plongement de  $\mathfrak{p}$  dans  $\mathfrak{p}_U$  par un élément de  $(K_U)_{\mathbb{C}}$ , on peut donc supposer que les vecteur  $e_i \otimes f_j^* \in E \otimes F^*$  et  $(e_{p-i+1} \otimes f_{q-j+1}^*)^* \in (E \otimes F^*)^*$  (pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$ ) s'envoient sur  $\varepsilon_i \otimes \gamma_j^*$ .

Il est donc immédiat que l'image de  $V_U(\lambda, \mu)$  dans  $\bigwedge \mathfrak{p}$  par l'application de restriction (2.33) est triviale sauf si  $\lambda = 0$  ou  $\mu = p \times q$ .  $\square$

LEMME 2.6. — *Soit  $\lambda$  une partition orthogonale dans  $p \times q$  et  $r$  un entier  $\leq p \leq q$ . On plonge  $O(q-r, \mathbb{C})$  dans  $O(q, \mathbb{C})$  par*

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_r \end{pmatrix}.$$

*Supposons que la partition  $(r^p)$  s'inscrive dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$ , i.e. que la partition  $\hat{\lambda} - (r^p)$  contienne  $\lambda$ . La partition  $\lambda$  est alors contenue et orthogonale dans  $p \times (q-r)$  et le  $(O(p, \mathbb{C}) \times O(q, \mathbb{C}))$ -module  $\overline{V(\lambda)}$  vu comme  $(O(p, \mathbb{C}) \times O(q-r, \mathbb{C}))$ -module contient le module  $\overline{V(\lambda)}$  avec multiplicité 1.*

*Démonstration.* — Il est clair que si  $(r^p)$  s'inscrit dans  $\hat{\lambda}/\lambda$  alors la partition  $\lambda$  est contenue et orthogonale dans  $p \times (q-r)$ . Le lemme découle alors des décompositions (25.34) et (25.35) de [21, § 25.3].  $\square$

REMARQUE. — De même que dans le cas unitaire, si  $\overline{V(\alpha)}$ , où  $\alpha$  est une partition orthogonale dans  $p \times (q - r)$ , est un sous- $(O(p, \mathbb{C}) \times O(q - r, \mathbb{C}))$ -module de  $\overline{V(\lambda)}$  avec  $|\alpha| = |\lambda|$  alors (et toujours d'après les décompositions (25.34) et (25.35) de [21, § 25.3])  $\alpha = \lambda$ . La partition  $(r^p)$  doit donc s'inscrire dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$  et  $\overline{V(\alpha)} = \overline{V(\lambda)}$ .



## CHAPITRE 3

### THÉORÈME 1.3 ET COHOMOLOGIE $L^2$

#### 3.1. Démonstration du Théorème 1.3

*Premier point.* — Le premier point du Théorème 1.3 est démontré dans [3]. Plus généralement, le Théorème suivant découle de [3, Théorèmes 25 et 31].

THÉORÈME 3.1. — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soit  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = U(p, q-r)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \cdots * (p_m \times q_m)$ . Alors, l'application*

$$H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{prim}^+}^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(Sh^0 H)$$

*obtenue en composant l'application  $\text{Res}_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 H$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  (i.e. si  $p_1 + \cdots + p_m = p$  et  $r \leq q_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ ). Son image est alors contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^{\lambda, \mu - (r^p)}(Sh^0 H)$ .*

(L'assertion sur la composante fortement primitive, qui n'est pas explicitée dans [3], découle de la Remarque suivant le Lemme 2.3.)

Le Théorème 3.1 concerne des classes de cohomologie fortement primitives alors que le Théorème 1.3 concerne des classes quelconques ; expliquons brièvement comment déduire le point 1. du Théorème 1.3 du Théorème 3.1. Soient donc  $G$ ,  $H_1$  et  $H_2$  comme dans le Théorème 1.3 et  $\alpha$  une classe de cohomologie  $\in H^*(Sh^0 G)$  de degré  $\leq p+q-2$ . Quitte à projeter  $\alpha$  sur une «  $\pi$ -composante » de la cohomologie, on peut supposer  $\alpha \in H^*(\pi : Sh^0 G)$ , pour une certaine représentation cohomologique  $\pi$  de  $G$ . Le degré  $R$  de  $\pi$  est alors  $\leq p+q-2$ . Supposons  $p \leq q$ . Un petit exercice de combinatoire montre alors que soit  $R = p+q-2$  (auquel cas la classe  $\alpha$  est fortement primitive et

le Théorème 3.1 s'applique directement avec  $H = H_1$  ou  $H_2$ ) soit  $\pi$  est de l'une des formes suivantes :

- $\pi = A((a^p))$  (resp.  $\pi = A(((q-a)^p), (q^p))$ ) et  $R = ap$  ;
- $\pi = A((q))$  (resp.  $\pi = A((q^{p-1}), (q^p))$ ) et  $R = q$ .

Contentons-nous de traiter le premier cas. D'après (2.10), on a

$$\mathrm{Hom}_K\left(\bigwedge^* \mathfrak{p}, A((a^p))\right) = H^{*-R}(\mathbb{G}_{p,q-a}),$$

où  $\mathbb{G}_{p,q-a} = U(p, q-a)/(U(p) \times U(q-a))$  est la grassmannienne des  $p$ -plans dans  $\mathbb{C}^{p+q-a}$  dont la cohomologie  $H^*(\mathbb{G}_{p,q-a}) = \mathrm{Hom}_{U(p) \times U(q-a)}(\bigwedge^* \mathbb{C}^{p(q-a)}, \mathbb{C})$ . De la même manière l'anneau de cohomologie  $H^*(\mathbb{G}_{p,q})$  s'identifie à la composante triviale  $H^*(1 : Sh^0G)$  de la cohomologie. Il est classique, cf. par exemple [3], qu'il est engendré par les classes de Chern de  $Sh^0G$ . L'application canonique de restriction

$$H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \longrightarrow H^*(\mathbb{G}_{p,q-a})$$

est surjective et la  $A((a^p))$ -composante,  $H^*(A((a^p)) : Sh^0G)$ , de la cohomologie s'identifie en fait au sous-anneau engendré par sa partie fortement primitive  $H^R(A((a^p)) : Sh^0G)$  et la cohomologie triviale  $H^*(1 : Sh^0G)$ . Quitte à décomposer  $\alpha$ , on peut donc écrire  $\alpha = C \wedge \beta$ , où  $\beta \in H^R(A((a^p)) : Sh^0G)$  et  $C \in H^*(\mathbb{G}_{p,q})$ . Le Théorème 3.1 s'applique à  $\beta$  avec  $H = H_1$  et, puisque le degré de  $\alpha$  est  $\leq p+q-2$ , la classe  $C$  est également de degré  $\leq p+q-2$ . Mais il est bien connu que l'application canonique de restriction

$$H^*(\mathbb{G}_{p,q}) \longrightarrow H^*(\mathbb{G}_{p,q-1})$$

est injective en degré  $* < 2q$ . Il s'ensuit que l'image de la classe  $\alpha$  par l'application de restriction virtuelle de  $Sh^0G$  vers  $Sh^0H_1$  est non nulle. Le point 1. est donc démontré.

Le cadre naturel de notre étude est la composante fortement primitive de la cohomologie. Nous nous y tiendrons dorénavant. Les théorèmes énoncés dans l'Introduction se déduisent des résultats du chapitre 8 suivant le procédé décrit ci-dessus.

*Deuxième point.* — Le deuxième point du Théorème 1.3 est quant à lui démontré dans [7]. Plus généralement nous conjecturons le résultat suivant.

**CONJECTURE 3.2.** — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\mathrm{nc}} = U(p, q+r)$ . Soit  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\mathrm{nc}} = U(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\mathrm{nc}}$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \cdots * (p_m \times q_m)$ . Alors, l'application*

$$H^{\lambda, \mu}(Sh^0H) \longrightarrow H_{\mathrm{prim}^+}^{|\lambda|+p^r+|\mu|}(Sh^0G)$$

*obtenue en composant l'application  $\bigwedge_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0G$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  (i.e. si  $p_1 + \cdots + p_m = p$  et  $r \leq q_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ ). Son image est alors contenue dans  $H^{\lambda+(r^p), \mu}(Sh^0G)$ .*

Nous allons maintenant chercher à motiver cette Conjecture.

Dans [7], le deuxième point du Théorème 1.3 est principalement déduit de deux théorèmes, l'un concernant l'isolation des représentations cohomologiques de petit degré dans le dual unitaire de  $G^{\text{nc}}$  et l'autre calculant la cohomologie  $L^2$  (réduite) en petit degré des variétés  $\Lambda \backslash X_G$ , où  $\Lambda$  est un sous-groupe de congruence de  $H$ .

Le résultat concernant l'isolation des représentations cohomologiques est déduit d'un théorème général de Vogan sur lequel nous revenons au chapitre suivant. Nous n'avons en fait besoin que de l'isolation dans le dual automorphe, or on montre dans [7] que celle-ci découle de la Conjecture de changement de base (version faible des Conjectures d'Arthur) formulée dans [7].

D'après [7] et compte tenu des Conjectures d'Arthur, la Conjecture 3.2 est principalement motivée par les calculs de cohomologie  $L^2$  que nous présentons dans les paragraphes suivants.

### 3.2. Un calcul de cohomologie $L^2$

Dans ce paragraphe, nous fixons  $G$  un groupe de Lie réductif **réel** connexe de type non compact et à centre compact. Soit  $\tau$  une involution sur  $G$  et soit  $H = G^\tau$  la composante connexe de l'identité du groupe des points fixes de  $\tau$ . Nous supposons que  $G$  est la forme réelle d'un groupe de Lie complexe et notons  $K$  un sous-groupe compact maximal  $\tau$ -stable de  $G$ . L'espace symétrique  $X_G = G/K$  est de courbure négative. Soit  $\Lambda$  un réseau cocompact de  $H$ . Nous nous intéressons à la cohomologie  $L^2$  du quotient  $\Lambda \backslash X_G$ . Nous notons  $M = \Lambda \backslash X_G$  et  $F = \Lambda \backslash X_H$ .

La variété  $M$  est riemannienne et complète. On note  $C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$  (respectivement  $L^2(\Lambda^k T^* M)$ , etc.) l'ensemble des  $k$ -formes lisses à support compact (respectivement de carré intégrable, etc.) dans  $M$ . Le  $k$ -ième espace de cohomologie  $L^2$  (réduite) de  $M$  est défini par

$$H_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) : d\alpha = 0\} / \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}^{L^2}.$$

Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de cohomologie  $L^2$  non réduite, qui, en degré  $k$ , est le quotient de  $\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) : d\alpha = 0\}$  par  $\{d\alpha : \alpha \in L^2(\Lambda^{k-1} T^* M), d\alpha \in L^2\}$ , sans prendre d'adhérence. En général, cohomologies  $L^2$  réduite et non réduite sont différentes. Il y a néanmoins égalité en degré  $k$  lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien  $\Delta$  sur les formes différentielles de degré  $k$ . Dans la suite, « cohomologie  $L^2$  » voudra dire « cohomologie  $L^2$  réduite ».

Il y a une interprétation de la cohomologie  $L^2$  en termes de formes harmoniques. En effet, notons  $\mathcal{H}_2^k$  l'espace des  $k$ -formes harmoniques  $L^2$  de  $M$  :

$$\mathcal{H}_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) : d\alpha = \delta\alpha = 0\}$$

où  $\delta$  est l'opérateur défini initialement sur les formes lisses à support compact comme l'adjoint de  $d$ . Comme  $M$  est complète,  $\mathcal{H}_2^k(M)$  est aussi le noyau  $L^2$  du laplacien

$\Delta = d\delta + \delta d$ . Un fait important est la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira :

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

et de plus,

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) : d\alpha = 0\} = \mathcal{H}_2^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \cong \mathcal{H}_2^k(M).$$

Nous noterons  $C_0^\infty(\Lambda \backslash G, \bigwedge^* \mathfrak{p}^*)$  l'image de  $C^\infty(M, \bigwedge^* T^* M)$  par l'application naturelle consistant à tirer en arrière les formes différentielles. Toute forme harmonique  $L^2$   $\varphi$  sur  $M$  définit donc un élément  $\tilde{\varphi}$  de

$$C_0^\infty(\Lambda \backslash G, \bigwedge^* \mathfrak{p}^*) \cong \text{Hom}_K\left(\bigwedge^* \mathfrak{p}, C^\infty(\Lambda \backslash G; \mathbb{C})\right).$$

La formule de Matsushima se généralise à ce cadre (cf. [9]). L'espace  $H_2^*(M)$  se décompose donc en somme directe :

$$(3.1) \quad H_2^*(M) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}_0} H_2^*(\pi : M),$$

où nous avons noté  $H_2^*(\pi : M)$  la  $\pi$ -composante de la cohomologie  $L^2$  de  $M$ . Si  $R$  est le degré fortement primitif d'une représentation  $\pi \in {}_0\widehat{G}$ , l'espace  $H_2^R(\pi : M)$  est aussi la partie de la cohomologie  $L^2$  de  $M$  qui est représentée par des formes harmoniques dans

$$(3.2) \quad C_0^\infty(\Lambda \backslash G, \bigwedge^* \mathfrak{p}^*)_\delta$$

(avec  $* = R$ ) le sous-ensemble de  $C_0^\infty(\Lambda \backslash G, \bigwedge^* \mathfrak{p}^*)$  constitué des éléments de la forme  $\tilde{\varphi} = \sum_i \tilde{\varphi}_i X_i$  avec  $\tilde{\varphi}_i$  dans la composante isotypique  $C^\infty(\Lambda \backslash G)_\delta$  de type  $\delta$ , l'unique  $K$ -type minimal de  $\pi$  (cf. chapitre 2). Plus généralement, nous notons  $H_2^*(M)_\delta$  la partie de la cohomologie  $L^2$  de  $M$  représentée par des formes harmoniques dans (3.2). Puisque le laplacien de Hodge-de Rham commute à la projection sur les  $K$ -types, on a alors la décomposition

$$(3.3) \quad H_2^*(M) = \bigoplus_{\delta} H_2^*(M)_\delta.$$

Nous notons  $\delta^*$  le  $K$ -type dual d'un  $K$ -type donné  $\delta$ . La dualité

$$(3.4) \quad H_2^*(M)_\delta \times H_2^*(M)_{\delta^*} \longrightarrow \mathbb{C}$$

est alors donnée par

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \int_M \varphi \wedge \psi.$$

D'un autre côté, l'opérateur  $*$  de Hodge induit un isomorphisme linéaire

$$(3.5) \quad H_2^*(M)_\delta \xrightarrow{*} H_2^{d_G - *}(M)_{\delta^*}.$$

On en déduit un produit scalaire sur  $H_2^*(M)_\delta$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto \int_M \varphi_1 \wedge * \varphi_2.$$

Notre but est de comprendre la cohomologie  $L^2$  de  $M$  en termes de la cohomologie (usuelle) de  $F = \Lambda \backslash X_H$ . Remarquons que  $F$  est naturellement plongée dans  $M$ , par dualité elle définit une classe «  $(L^2)$ -duale »  $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)$  (qui peut être nulle *a priori*). Le théorème principal de ce chapitre se déduit presque immédiatement des travaux de Tong et Wang [53].

**THÉORÈME 3.3.** — *La classe  $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)$  est non nulle si et seulement si  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$ .*

Nous l'avons dit, la démonstration du Théorème 3.3 repose sur des travaux de Tong et Wang [53]. Ceux-ci permettent de réaliser géométriquement certaines séries discrètes d'espaces symétriques (non nécessairement riemanniens). Nous commençons par des rappels sur les séries discrètes. Puis nous suivons Tong et Wang [53] en incluant les démonstrations de ceux de leurs lemmes et propositions que nous utilisons.

### 3.3. Rappels sur les séries discrètes de $G/H$

Commençons par rappeler qu'une représentation  $\pi$  de  $G$  est dite *membre de la série discrète de  $G/H$*  si elle est isomorphe à une sous-représentation irréductible de la représentation régulière gauche  $\mathcal{L}$  sur  $L^2(G/H)$ . Nous notons  $L_d^2(G/H)$  l'espace des séries discrètes de  $G/H$  i.e. le sous-espace linéaire fermé dans  $L^2(G/H)$  engendré par les sous-représentations irréductibles de  $\mathcal{L}$ .

Si  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/K \cap H)$  et d'après Flensted-Jensen [18], l'espace  $L_d^2(G/H)$  des séries discrètes est non nul. Les représentations de la série discrète sont classifiées dans [44] (cf. aussi [19]). Il s'avère que la condition  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/K \cap H)$  est en fait nécessaire à l'existence des séries discrètes. Nous supposons dorénavant  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/K \cap H)$  et extrayons de leurs résultats ceux dont nous aurons besoin.

Soit  $\mathfrak{q}_0$  le supplémentaire orthogonal (pour la forme de Killing) de  $\mathfrak{h}_0$  dans  $\mathfrak{g}_0$ , et soit  $\mathfrak{t}_0$  un sous-espace de Cartan compact de  $\mathfrak{q}_0$ . Soit  $\Sigma$  le système de racines de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\Sigma_c$  le sous-système des racines de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{k}$ . Soient  $W$  et  $W_c$  les groupes de Weyl correspondant. Fixons un sous-système positif  $\Sigma_c^+$  dans  $\Sigma_c$ . Le choix d'un sous-système positif  $\Sigma^+$  dans  $\Sigma$  compatible avec  $\Sigma_c^+$  détermine une bijection entre le quotient  $W_c \backslash W$  et l'ensemble des sous-systèmes positifs de  $\Sigma$  compatibles avec  $\Sigma_c^+$  : dans chaque classe de  $W_c \backslash W$ , il existe un unique représentant  $w \in W$  tel que

$$(3.6) \quad w(\Sigma^+) \cap \Sigma_c = \Sigma_c^+.$$

Nous notons  $W^c$  l'ensemble des  $w \in W$  vérifiant (3.6). Soient  $\rho$  et  $\rho_c$  les demi-sommes respectives des racines dans  $\Sigma^+$  et  $\Sigma_c^+$ , comptées avec multiplicités. Soit  $\Lambda \subset i\mathfrak{t}_0^*$  l'ensemble des paramètres  $\lambda \in i\mathfrak{t}_0^*$  tels que

1.  $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$  pour toute racine  $\alpha \in \Sigma^+$ ,
2.  $\lambda + \rho$  est un poids pour  $T_H$ , i.e.  $e^{\lambda+\rho}$  est bien défini sur  $T_H$  le tore dans  $G/H$  correspondant à  $\mathfrak{t}_0$ , et
3.  $\langle \lambda + \rho, \beta \rangle \geq 0$  pour toute racine simple compacte  $\beta \in \Sigma^+$ .

On étend  $\mathfrak{t}$  en une sous-algèbre de Cartan  $\tilde{\mathfrak{t}}$ ,  $\tau$  et  $\theta$ -invariante dans  $\mathfrak{g}$ . Notons

$$\Delta_c = \Delta(\tilde{\mathfrak{t}}, \mathfrak{k}) \text{ et } \Delta = \Delta(\tilde{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g})$$

les systèmes de racines correspondants et soient  $\Delta_c^+$  et  $\Delta^+$  deux choix fixés de sous-systèmes positifs compatibles avec  $\Sigma^+$ . Les représentations irréductibles de dimension finie de  $\mathfrak{k}$  sont classifiées par leur plus haut (resp. plus bas) poids par rapport au choix  $\Delta_c^+$ . Sauf mention du contraire nous identifierons dans la suite un  $K$ -type avec son plus haut poids par rapport à  $\Delta_c^+$ . Remarquons que si  $\delta$  est un  $K$ -type de plus haut poids  $\mu$  par rapport à  $\Delta_c^+$ , la représentation contragrédiente ou duale  $\delta^*$  a pour plus haut poids  $-\mu$  par rapport à  $\Delta_c^+$ .

On peut associer à chaque couple  $(w, \lambda) \in W^c \times \Lambda$  une sous-représentation  $\pi_{w\lambda}$  dans  $\mathcal{L}$  qui est soit irréductible soit nulle et dont les sous-espaces de  $L^2(G/H)$  correspondant sont deux à deux disjoints. Voici quelques propriétés de ces représentations.

1. Le caractère infinitésimal de  $\pi_{w\lambda}$  est  $\chi_\lambda$ .
2. Si

$$(3.7) \quad \langle w(\lambda + \rho) - 2\rho_c, \alpha \rangle \geq 0, \quad \alpha \in \Sigma_c^+,$$

alors  $\pi_{w\lambda}$  est non nulle et  $-w(\lambda + \rho) + 2\rho_c$  est (le plus haut poids par rapport à  $\Delta_c^+$  de) l'unique  $K$ -type minimal de  $\pi_{w\lambda}$ .

3. Si  $(w_0, \lambda_0)$  et  $(w_1, \lambda_1) \in W^c \times \Lambda$  vérifient (3.7), les représentations  $\pi_{w_0\lambda_0}$  et  $\pi_{w_1\lambda_1}$  sont isomorphes si et seulement si  $(w_0, \lambda_0) = (w_1, \lambda_1)$ .

Le résultat principal de [44] est alors que l'espace  $L_d^2(G/H)$  est engendré par les sous-représentations  $\pi_{w\lambda}$  pour  $(w, \lambda) \in W^c \times \Lambda$ .

Pour les « grands »  $\lambda$ , c'est à dire ceux vérifiant (3.7), la non trivialité de  $\pi_{w\lambda}$  provient de la construction explicite de la *fonction de Flensted-Jensen*  $\psi_{w,\lambda}$  qui est une fonction  $K$ -finie dans  $L^2(G/H) \cap C^\infty(G/H)$  telle que

1.  $\psi_{w,\lambda}$  engendre le  $K$ -type  $-w(\lambda + \rho) + 2\rho_c$ .
2.  $\psi_{w,\lambda}$  engendre la sous-représentation  $\pi_{w\lambda}$  de  $L^2(G/H)$ .

Étant donnés deux choix  $\Sigma^+$  et  $\Sigma_c^+$  de sous-systèmes positifs compatibles dans  $\Sigma$  et  $\Sigma_c$  respectivement, Flensted-Jensen associe à tout  $\lambda \in \Lambda$ , une fonction  $\psi_\lambda$ , la fonction notée  $\psi_{e,\lambda}$  ci-dessus. Si  $w \in W^c$ , les sous-ensembles de racines  $w(\Sigma^+)$  et  $\Sigma_c^+$  forment deux sous-systèmes positifs compatibles dans  $\Sigma$  et  $\Sigma_c$  respectivement.

L'ensemble  $\Lambda$  correspondant à ce nouveau choix est  $w\Lambda$  et la fonction de Flensted-Jensen  $\psi_{w\lambda} = \psi_{w,\lambda}$ . Dans la suite nous ne nous préoccupons que des fonctions  $\psi_\lambda$ .

Notons  $\delta_\mu$  la (classe d'équivalence d'une) représentation irréductible de dimension finie de  $\mathfrak{k}$  de plus haut poids  $\mu$  par rapport au sous-système positif  $\Delta_c^+$ . D'après un théorème d'Helgason [25, Chap. III, § 3] la représentation  $\delta_\mu$  a un vecteur non nul  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ -invariant si et seulement si

$$(3.8) \quad \mu \in \mathfrak{t}^* \text{ et } \frac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{N} \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma_c^+.$$

Dans ce cas le vecteur invariant est unique à un multiple scalaire près.

Soit maintenant  $\lambda \in i\mathfrak{t}_0^*$ . Supposons

- $\lambda + \rho$  est un poids pour  $T_H$ , i.e.  $e^{\lambda+\rho}$  est bien défini sur  $T_H$  le tore dans  $G/H$  correspondant à  $\mathfrak{t}_0$ , et
- $\langle \lambda + \rho - 2\rho_c, \alpha \rangle \geq 0$ , pour tout  $\alpha \in \Sigma_c^+$ ,

revient à supposer que  $\mu = \mu_\lambda := \lambda + \rho - 2\rho_c \in \mathfrak{t}^*$  (étendue trivialement à une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{k}$  contenant  $\mathfrak{t}_0$ ) est le plus haut poids d'une représentation de dimension finie de  $K$  avec un vecteur  $L$ -invariant. C'est en particulier le cas pour les « grands »  $\lambda \in \Lambda$ . Rappelons que la fonction  $\psi_\lambda \in C^\infty(G/H) \cap L^2(G/H)$  engendre alors le  $K$ -type  $\delta_\mu^*$  dual de  $\delta_\mu$  et de plus haut poids  $-\mu$  par rapport à  $\Delta_c^+$ .

**Un raffinement du Théorème 3.3.** — Nous allons maintenant pouvoir commencer la démonstration du Théorème 3.3. Celui-ci découlera du résultat plus général suivant.

THÉORÈME 3.4. — *Supposons  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$ . Si  $w \in W^c$ , vérifie*

$$(3.9) \quad \langle 2w\rho - 2\rho_c, \alpha \rangle \geq 0, \quad \alpha \in \Sigma_c^+,$$

*alors la projection de la classe  $[F]$  dans  $H_2^{d_G - d_H}(M)_{2w\rho - 2\rho_c}$  est non nulle.*

Commençons par déduire le Théorème 3.3 du Théorème 3.4. Supposons que  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$ . La condition (3.9) est toujours vérifiée pour  $w = e$  puisque  $\rho - \rho_c$  et  $\alpha$  sont tous deux dans une chambre de Weyl positive (au sens large). Le Théorème 3.4 implique donc l'implication réciproque dans l'énoncé du Théorème 3.3. Démontrons maintenant l'implication directe : la classe de cohomologie  $L^2, [F]$ , admet clairement un représentant  $H$ -invariant. Si  $[F] \neq 0$  il doit donc exister des séries discrètes dans  $L^2(G/H)$  et nous avons rappelé qu'alors on a nécessairement  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$ .  $\square$

Il nous reste donc à démontrer le Théorème 3.4. Il nous suffit de traiter le cas  $w = e$ . Remarquons que  $\rho$  appartient toujours à  $\Lambda$  et donc que la fonction de Flensted-Jensen  $\psi_\rho$  est bien définie.

### 3.4. Construction de la forme harmonique

En suivant Tong et Wang [53] nous allons maintenant associer à  $\psi_\rho$  une forme différentielle harmonique  $\tilde{\omega}$  sur  $G$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Les traduits à droite de (coefficients de)  $\tilde{\omega}$  réaliseront la représentation contragrédiente  $\pi_\rho^*$  de  $\pi_\rho$  et  $\tilde{\omega}$  sera invariante à gauche sous  $H$ , et sous l'action à droite de  $K$  elle se transformera selon le plus bas  $K$ -type  $\delta$  (de plus haut poids  $2(\rho - \rho_c)$ ) de  $\pi_\rho^*$ . La forme  $\tilde{\omega}$  sera tirée arrière d'une forme différentielle sur  $X_G$  dont nous vérifierons plus loin qu'elle définit une classe de cohomologie  $L^2$  non nulle dans  $H_2^{d_G - d_H}(M)_\delta$  et égale à un multiple du projeté de  $[F]$ .

Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{l}$  soit égale au centralisateur de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$ . Puisque les représentations  $\pi_\rho^*$  et  $A_{\mathfrak{q}}$  ont toutes deux le même caractère infinitésimal, égal à celui de la représentation triviale  $\chi_\rho$ , de telle manière que le casimir  $\Omega$  agit trivialement sur chacun de leurs  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules associées, et puisqu'elles contiennent toutes les deux le  $K$ -type  $\delta$  de plus haut poids  $2(\rho - \rho_c)$ , elles doivent être isomorphes d'après [57, Proposition 6.1].

Notons  $R = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  et  $\rho_n = \rho - \rho_c$ . Rappelons que le vecteur  $e(\mathfrak{q}) \in \bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  est alors un vecteur de plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) = 2\rho_n$  d'une représentation irréductible de  $K$ , isomorphe à  $\delta$ , contenue dans  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$  et qui apparaît avec multiplicité un.

La fonction  $\psi_\rho \in L^2(G/H)$  est  $K$ -finie et engendre le  $K$ -type  $\delta^*$ . Pour un choix convenable de  $k_i \in K$ , les fonctions

$$(3.10) \quad f_i(g) = \psi_\rho(k_i^{-1}g^{-1}) \in L^2(H \backslash G)$$

forment donc une base d'un  $K$ -type isomorphe à  $\delta^*$  et apparaissant dans (la représentation régulière droite dans)  $L^2(H \backslash G)$  de plus haut poids  $2\rho_n$ . Les fonctions  $\overline{f}_i$  forment alors une base d'un  $K$ -type isomorphe à  $\delta$ .

Nous venons de rappeler que la composante isotypique  $(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*)_{\delta^*}$  dans  $\bigwedge^R \mathfrak{p}^*$  apparaît avec multiplicité un. Choisissons alors une base  $\{X_i\}$  de  $(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*)_{\delta^*}$  duale à  $\{\overline{f}_i\}$  et posons

$$(3.11) \quad \tilde{\omega}(g) = \sum_i \overline{f}_i(g) X_i.$$

PROPOSITION 3.5 (Tong et Wang [53, Proposition 3.5])

1. La forme  $\tilde{\omega}$  appartient à  $C_0^\infty(G, \bigwedge^R \mathfrak{p}^*)$ .
2. La forme  $\tilde{\omega}$  est invariante à gauche sous l'action de  $H$ . En restriction à  $H$ ,  $\tilde{\omega}$  prend ses valeurs dans le sous-espace de dimension un invariant sous l'action de  $H \cap K : (\bigwedge^R \mathfrak{p}^*)_{\delta^*}^{H \cap K}$ .

*Démonstration.* — Il est immédiat par construction que  $\tilde{\omega} \in C^\infty(G, \bigwedge^R \mathfrak{p}^*)$ . L'invariance à gauche de  $\tilde{\omega}$  sous l'action de  $H$  découle immédiatement de l'invariance à droite de  $\psi_\rho$  sous l'action de  $H$ . L'application  $\tilde{\omega}|_H$  est donc constante égale à  $\tilde{\omega}(e)$ .



D'après le premier point, ce vecteur est invariant sous l'action de  $H \cap K$ . On conclut alors la démonstration de la Proposition 3.5 grâce au théorème d'Helgason (3.8).  $\square$

D'après la Proposition 3.5,  $\tilde{\omega}$  est tirée arrière d'une forme différentielle

$$(3.12) \quad \omega \in C^\infty\left(X_G, \bigwedge^R T^* X_G\right).$$

Celle-ci descend en une forme différentielle  $\omega \in C^\infty(M, \bigwedge^R T^* M)$ .

LEMME 3.6. — *La forme différentielle  $\omega$  est  $L^2$  et harmonique.*

*Démonstration.* — Puisque  $\psi_\rho \in L^2(G/H)$ ,  $\tilde{\omega} \in L^2(\Lambda \backslash G)$ . Les coefficients de  $\tilde{\omega}$  appartiennent donc à un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module unitaire et nous pouvons appliquer le lemme de Kuga [9]. Soit  $\Delta$  le laplacien sur  $C_0^\infty(G, \bigwedge^*(\mathfrak{p}^*))$ . Alors

$$\Delta \tilde{\omega} = -\pi_\rho^*(\Omega) \tilde{\omega} = 0.$$

Où la dernière égalité provient de ce que la représentation  $\pi_\rho$  a la même caractère infinitésimal que la représentation triviale. On en déduit immédiatement le Lemme 3.6.  $\square$

**Lien avec la sous-variété  $F$ .** — Soit  $\omega_H$  la forme volume invariante sur  $X_H$ . Nous voyons cette forme différentielle comme une forme différentielle sur  $X_H \subset X_G$  à valeurs dans  $(\bigwedge^* T^* X_G)|_{X_H}$ . Notons toujours  $*$  l'opérateur de Hodge-de Rham. Alors  $*\omega_H$  prend elle aussi ses valeurs dans  $(\bigwedge^* T^* X_G)|_{X_H}$ . Il est clair que  $*\omega_H$  prend plus précisément ses valeurs dans la puissance extérieure maximale de l'espace des vecteurs cotangents normaux à  $X_H$ . Notons  $\tilde{\omega}_H$  et  $*\tilde{\omega}_H$  les tirées arrière respectifs de  $\omega_H$  et  $*\omega_H$ . Il est immédiat que  $\tilde{\omega}_H$  (resp.  $*\tilde{\omega}_H$ ) n'est autre que le produit extérieur d'une base orthonormée de  $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})^*$  (resp.  $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^*$ ).

Soit

$$(3.13) \quad P_0 : \bigwedge^R \mathfrak{p}^* \longrightarrow \left(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*\right)_{\delta^*}$$

la projection orthogonale sur le  $K$ -type  $\delta^*$  de plus haut poids  $2\rho_n$ . Soit  $e(\mathfrak{q})^* \in \bigwedge^R \mathfrak{p}^*$  le vecteur dual à  $e(\mathfrak{q})$ , c'est un vecteur de plus haut poids  $-2\rho_n$ . Et, d'après le théorème d'Helgason (3.8),

$$\dim \left(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*\right)_{\delta^*}^{H \cap K} = 1.$$

PROPOSITION 3.7 (Tong et Wang [53, Proposition 4.6]). —  $P_0(*\tilde{\omega}_H)$  est un vecteur non nul dans  $(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*)_{\delta^*}^{H \cap K}$ .

*Démonstration.* — Puisque  $*\tilde{\omega}_H$  est tirée arrière d'une forme différentielle  $H$ -invariante sur  $X_H$ , elle est  $(H \cap K)$ -invariante. Le projeté  $P_0(*\tilde{\omega}_H)$  est donc  $(H \cap K)$ -invariant à droite et donc invariant sous  $\text{Ad}^*(H \cap K)$  :

$$P_0(*\tilde{\omega}_H) \in \left(\bigwedge^R \mathfrak{p}^*\right)_{\delta^*}^{H \cap K}.$$

Il nous reste à vérifier que ce vecteur est non nul. Remarquons que le produit extérieur maximal  $\bigwedge^{d_G} \mathfrak{p}^*$  est un module trivial et que l'opérateur  $*$  envoie un  $K$ -module sur son dual. Il suffit donc de montrer que

$$*\tilde{\omega}_H \wedge *e(\mathfrak{q})^* \neq 0$$

autrement dit que

$$\tilde{\omega}_H \wedge e(\mathfrak{q})^* \neq 0.$$

Ce dernier fait découle immédiatement du fait que  $\tilde{\omega}_H$  et  $e(\mathfrak{q})^*$  sont des vecteurs non nuls dans les puissances extérieures maximales respectives des espaces  $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})^*$  et  $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{u})^*$ .  $\square$

### 3.5. Démonstration du Théorème 3.4

Nous voulons montrer que la projection  $[F]_\delta$  de la classe de cohomologie  $[F] \in H_2^R(M)$  dans  $H_2^R(M)_\delta$  est non nulle. Pour ce faire nous allons montrer que

$$(3.14) \quad [\omega] = c[F]_\delta$$

dans  $H_2^R(M)_\delta$ , où  $c$  est une constante non nulle.

Si  $[\varphi] \in H_2^R(M)_\delta$ , son tiré en arrière  $\tilde{\varphi} = \sum_i \tilde{\varphi}_i X_i$  est harmonique et le  $K$ -espace engendré par  $\tilde{\varphi}_i(g)$  est soit nul soit irréductible isomorphe à  $\delta$ . Chaque fonction  $\overline{\tilde{\varphi}_i} \in L^2(\Lambda \backslash G)$  engendre alors, sous l'action à droite de  $K$ , soit le sous-espace nul soit un sous-espace irréductible isomorphe à  $\delta^*$ . D'après le lemme de Kuga [9], le casimir  $\Omega$  appliqué à  $\overline{\tilde{\varphi}_i}$  donne 0. D'après le lemme suivant, les fonctions  $\overline{\tilde{\varphi}_i(g)}$  engendrent un sous-module de  $L^2(\Lambda \backslash G)$  isomorphe à  $\pi_\rho$ .

LEMME 3.8 (Tong et Wang [53, Lemma 5.3]). — *Soit  $\pi$  une représentation unitaire de  $G$  dans un espace de Hilbert  $V$  et  $A$  un module cohomologique de  $K$ -type minimal  $\tau$ . Supposons que  $W$  soit un  $K$ -type de type  $\tau$  dans  $V$  et qu'en restriction à  $W$ , le casimir  $\pi(\Omega)$  soit nul. Alors, le  $G$ -sous-module fermé  $M$  engendré par  $W$  est isomorphe à  $A$ .*

*Démonstration.* — Considérons la restriction  $\pi|_M$  de la représentation unitaire  $\pi$  à  $M$ , celle-ci se décompose en une intégrale directe

$$\pi|_M = \int_{\hat{G}} \sigma d\mu(\sigma),$$

où  $\mu$  est une mesure sur  $\hat{G}$ . Puisque  $M$  est engendré par  $W$ , pour presque tout  $\sigma$ ,  $\sigma(C) = 0$  et  $\tau \subset \sigma|_K$ . Mais son  $K$ -type minimal  $\tau$  et son caractère infinitésimal détermine complètement le module cohomologique  $A$ . On en déduit donc que presque tout  $\sigma$  est isomorphe à  $A$  et donc que la restriction de  $\pi$  à  $M$  est un multiple de  $A$ . Mais puisque  $\tau$  intervient avec multiplicité 1 dans  $A$ , tout  $K$ -sous-module irréductible de type  $\tau$  engendre un  $G$ -sous-module irréductible. La multiplicité de  $A$  dans  $\pi|_M$  est donc égale à 1. Ce qui conclut la démonstration du Lemme.  $\square$

D'après (3.4) et (3.5), l'égalité (3.14) est équivalente à : étant donnée  $[\varphi] \in H_2^R(M)_\delta$  telle que son tiré en arrière  $\tilde{\varphi} = \sum_i \tilde{\varphi}_i X_i$  soit harmonique et  $\{\tilde{\varphi}_i\}$  engendre une composante isotypique de plus haut poids  $2\rho_n$ , alors

$$(3.15) \quad \int_M \omega \wedge * \varphi = c \int_F * \varphi.$$

Soient  $dg$ ,  $dh$  et  $dHg$  les mesures invariantes respectives sur  $G$ ,  $H$  et  $H \backslash G$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_M \omega \wedge * \varphi &= \int_{H \backslash G} \left\{ \int_{\Lambda \backslash H} \langle \tilde{\omega}(hg), \tilde{\varphi}(hg) \rangle dh \right\} dHg \\ &= \int_{H \backslash G} \left\langle \tilde{\omega}(g), \int_{\Lambda \backslash H} \tilde{\varphi}(hg) dh \right\rangle dHg, \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire standard sur  $\bigwedge^R \mathfrak{p}^*$  et où la dernière égalité découle de l'invariance à gauche de  $\tilde{\omega}$  sous l'action de  $H$ . Soit

$$(3.16) \quad \tilde{\Phi}_H(g) = \int_{\Lambda \backslash H} \tilde{\varphi}(hg) dh$$

et soit  $\tilde{\Phi}_H(g) = \sum_i \tilde{\Phi}_i X_i$  son développement.

LEMME 3.9

1. La forme  $\Phi_H$  est à valeurs complexes et harmonique sur  $G$ .
2. Sous l'action à droite de  $K$ ,  $\overline{\tilde{\Phi}_i(g)}$  engendre soit le sous-espace nul soit un sous-espace irréductible isomorphe à  $\delta^*$ .
3. Si  $\overline{\tilde{\Phi}_i(g)}$  est non nul, le casimir agit trivialement sur celui-ci :  $\Omega \cdot \overline{\tilde{\Phi}_i(g)} = 0$ .
4. La forme  $\tilde{\Phi}_H$  est invariante à gauche sous l'action de  $H$ .
5. La forme  $\tilde{\Phi}_H$  est bornée sur  $G$ .

*Démonstration.* — Les trois premiers points découlent des propriétés analogues pour  $\tilde{\varphi}$  décrites plus haut. Le point 4. découle de la définition (3.16) de  $\tilde{\Phi}_H$ . Il nous reste à montrer que la forme  $\tilde{\varphi}$  est bornée, ce qui découle du lemme suivant.

LEMME 3.10. — Soit  $\varphi$  une forme différentielle harmonique  $L^2$  sur une variété riemannienne à courbure partout négative (ou nulle) et uniformément minorée. Il existe alors une constante  $c > 0$  ne dépendant que de la borne sur la courbure de  $M$  telle que

$$(3.17) \quad \|\varphi\|_{L^\infty(M)} \leq c \|\varphi\|_{L^2(M)}.$$

*Démonstration.* — La démonstration repose sur le procédé classique d'itération à la Nash-Moser. L'énoncé ci-dessus et sa démonstration sont une légère modification d'un lemme de Yeung, cf. [61].

Soit  $\varphi$  un forme différentielle de degré  $i$ . Une formule de Bochner-Weitzenbock que l'on obtient par un calcul direct permet de comparer le laplacien usuel et le *laplacien brut*  $\Delta^b = -\nabla^*\nabla$  :

$$\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle = \langle \Delta^b\varphi, \varphi \rangle + i\langle \mathcal{R}\varphi, \varphi \rangle,$$

où  $\mathcal{R}$  est un opérateur ne dépendant que du tenseur de courbure tel que

$$\langle \mathcal{R}\varphi, \varphi \rangle \geq -k\langle \varphi, \varphi \rangle,$$

où  $k$  est une constante  $\geq 0$  ne dépendant que de la minoration sur la courbure. Supposons maintenant  $\varphi$  harmonique, alors  $\Delta\varphi = 0$  et puisque

$$\Delta^b|\varphi|^2 = \langle \Delta^b\varphi, \varphi \rangle + |\nabla\varphi|^2,$$

on obtient

$$(3.18) \quad \Delta^b|\varphi|^2 + k|\varphi|^2 \geq 0.$$

Nous allons maintenant pouvoir appliquer le procédé d'itération à la Nash-Moser. Soit  $f = |\varphi|^2$ .

Commençons par remarquer que puisque

$$\int g\Delta^b f = - \int \langle \nabla f, \nabla g \rangle,$$

en prenant  $g = \eta^2 f^\beta$  (où  $\eta$  est une fonction et  $\beta$  un réel  $\geq 1$ ), on obtient l'identité suivante :

$$\beta \int \eta^2 f^{\beta-1} |\nabla f|^2 = -2 \int_M \langle \eta f^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla f, f^{\frac{\beta+1}{2}} \nabla \eta \rangle - \int \eta^2 f^\beta \Delta^b f.$$

Or,

$$\begin{aligned} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)|^2 &= \int \langle \eta \nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}) + f^{\frac{\beta+1}{2}} \nabla \eta, \eta \nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}) + f^{\frac{\beta+1}{2}} \nabla \eta \rangle \\ &= \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2 \int \eta^2 f^{\beta-1} |\nabla f|^2 + \int f^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 \\ &\quad + (\beta+1) \int \langle \eta f^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla f, f^{\frac{\beta+1}{2}} \nabla \eta \rangle. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)|^2 &= 2\frac{\beta-1}{\beta+1} \int \langle \eta f^{\frac{\beta-1}{2}} \nabla f, f^{\frac{\beta+1}{2}} \nabla \eta \rangle \\ &\quad - \int \eta^2 f^\beta \Delta^b f + \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int f^{\beta+1} |\nabla \eta|^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier terme à droite, on obtient alors que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$(3.19) \quad \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)|^2 \leq \varepsilon \int \eta^2 f^{\beta-1} |\nabla f|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int f^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 - \int \eta^2 f^\beta \Delta^b f + \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int f^{\beta+1} |\nabla \eta|^2.$$

Soit  $C$  une constante de Sobolev valable pour toutes les boules isométriquement plongées dans  $M$  (une telle constante existe en vertu des restrictions faites sur la courbure). Le fait suivant traduit alors l'inégalité de Sobolev standard.

FAIT 1. — Pour toute boule  $B$  isométriquement plongée dans  $M$ , et toute fonction  $u \in H^1(B)$ ,

$$\|u^{\frac{n}{n-2}}\|_{L^2(B)}^2 \leq C \left[ \|\nabla u\|_{L^2(B)}^{\frac{2n}{n-2}} + \|u\|_{L^2(B)}^{\frac{2n}{n-2}} \right],$$

où  $n$  est la dimension de  $M$ .

Soient maintenant  $B_b \subset B_a$  deux boules de même centre et de rayons respectifs  $a$  et  $b$  dans  $M$  et soit  $\eta$  une fonction à support dans  $B_a$ , partout  $\leq 1$ , constante égale à 1 sur  $B_b$  et telle que  $|\nabla\eta| \leq 2/(a-b)$ . Les expressions (3.18) et (3.19) impliquent le fait suivant.

FAIT 2. — Il existe une constante  $k_1$  ne dépendant que de  $k$  et du rayon d'injectivité de  $M$  (mais ni de  $a$  ni de  $\beta$ ) telle que :

$$\|\nabla f^{\frac{\beta+1}{2}}\|_{L^2(B_b)}^2 \leq \frac{k_1(\beta+1)}{(a-b)^2} \|f^{\beta+1}\|_{L^2(B_a)}^2.$$

En effet, d'après (3.18) et (3.19),

$$\begin{aligned} \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}\eta)|^2 &\leq \varepsilon \int \eta^2 f^{\beta-1} |\nabla f|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int f^{\beta+1} |\nabla\eta|^2 \\ &\quad + k \int \eta^2 f^{\beta+1} + \frac{4\beta}{(\beta+1)^2} \int f^{\beta+1} |\nabla\eta|^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \eta^2 f^{\beta-1} |\nabla f|^2 &= \frac{4}{(\beta+1)^2} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}\eta) - f^{\frac{\beta+1}{2}}\nabla\eta|^2 \\ &\leq \frac{8}{(\beta+1)^2} \left[ \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}\eta)|^2 + \int f^{\beta+1} |\nabla\eta|^2 \right]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit, en prenant  $\varepsilon = \beta/4$ ,

$$\frac{2\beta}{(\beta+1)^2} \int |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}\eta)|^2 \leq \frac{6\beta^2 + 4(\beta+1)^2}{\beta(\beta+1)^2} \int f^{\beta+1} |\nabla\eta|^2 + k \int \eta^2 f^{\beta+1}.$$

Et, puisque  $\eta \leq 1$  et  $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{a-b}$ ,

$$\frac{2\beta}{(\beta+1)^2} \int_{B_a} |\nabla(f^{\frac{\beta+1}{2}}\eta)|^2 \leq \left( \frac{10}{\beta(a-b)^2} + k \right) \int_{B_a} f^{\beta+1}.$$

On conclut immédiatement la démonstration du fait 2 en utilisant que la fonction  $\eta$  est constante égale à 1 sur  $B_b$ .

Posons maintenant  $A(l, r) = (\int_{B_r} |f|^l)^{1/l}$  et  $\alpha = n/(n-2)$ . En prenant  $\beta = l-1$ , les faits 1 et 2 impliquent l'inégalité suivante :

$$(3.20) \quad A(\alpha l, b) \leq \frac{k_2^{1/l} l^{1/l}}{(a-b)^{2/l}} A(l, a),$$

pour tout  $l \geq 2$  et  $k_2$  une constante ne dépendant que de  $k$ , de  $C$  et du rayon d'injectivité de  $M$ .

Nous pouvons maintenant itérer l'inégalité (3.20). Soient donc  $r_0$  un réel strictement positif et inférieur au rayon d'injectivité de  $M$  et  $r_m = (r_0/2)(1 + 1/2^m)$  pour  $m = 0, 1, 2, \dots$ . L'inégalité (3.20) implique alors :

$$A(2\alpha^{m+1}, r_m) \leq cA(2, r_0),$$

où  $c$  est une constante ne dépendant que de  $k_2$  et  $n$  (et donc indépendante de  $m$ ). En passant à la limite  $m \rightarrow +\infty$ , ceci implique

$$\sup_{B_{r_0/2}} f \leq c \left( \int_{B_{r_0}} f^2 \right)^{1/2}.$$

Puisque

$$\int_{B_{r_0}} f^2 \leq (\sup_{B_{r_0}} f) \cdot \|\varphi\|_{L^2(M)}.$$

On en déduit que pour tout nombre réel  $r_0$  inférieur au rayon d'injectivité et pour toute paire de boules  $B_{r_0/2} \subset B_{r_0}$  dans  $M$  centrées en un même point et de rayons respectifs  $r_0/2$  et  $r_0$ ,

$$\sup_{B_{r_0/2}} f \leq c(\sup_{B_{r_0}} f)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(M)}.$$

En utilisant la continuité de  $f$ , on en déduit immédiatement que  $f$  est nécessairement bornée sur  $M$  tout entier par  $\sqrt{c} \|\varphi\|_{L^2(M)}^{1/2}$  ce qui conclut la démonstration du Lemme 3.10.  $\square$

PROPOSITION 3.11. — *Il existe une constante  $c_\varphi$  (dépendant de  $\varphi$ ) telle que*

$$\tilde{\Phi}_H = c_\varphi \tilde{\omega}.$$

*Démonstration.* — On peut supposer  $\tilde{\Phi}_H$  non nulle. D'après le troisième point du Lemme 3.9, le casimir agit trivialement sur  $\tilde{\Phi}_i(g)$  or d'après le cinquième point cette fonction est bornée et appartient donc à  $L^2(H \setminus G)$ . Enfin, puisque sous l'action à droite de  $K$  elle engendre le  $K$ -type  $\delta^*$ , la fonction  $\tilde{\Phi}_i(g)$  engendre un sous-module de  $L^2(H \setminus G)$  isomorphe au module  $\pi_\rho$ . Un tel module apparaît avec multiplicité un. La fonction  $\tilde{\Phi}_i(g)$  appartient donc au  $K$ -type  $\delta^*$  dans  $\pi_\rho$ , celui-ci est irréductible, la fonction  $\tilde{\Phi}_H$  est donc nécessairement égale à  $c_\varphi \tilde{\omega}$  pour une certaine constante  $c_\varphi$ .

Dans la suite, nous aurons à introduire de nombreuses constantes non nulles indépendantes de  $\varphi$  (et de  $\Lambda$ ). Nous les appellerons *constantes universelles* et nous

les noterons  $c_1, c_2, \dots$ . Le lemme suivant va nous permettre de mieux comprendre la constante  $c_\varphi$ .

LEMME 3.12. — *L'intégrale*

$$\int_{\Lambda \setminus H} \langle \tilde{\omega}(h), \tilde{\varphi}(h) \rangle dh = c_1 \int_F * \varphi$$

où  $c_1$  est une constante universelle.

*Démonstration.* — D'après les Propositions 3.5 et 3.7,

$$\tilde{\omega}(h) = c_1 P_0(*\tilde{\omega}_H).$$

Puisque  $\tilde{\varphi}(g) \in \left( \bigwedge^R \mathfrak{p}^* \right)_{\delta^*}$  on a :

$$(3.21) \quad \langle \tilde{\omega}(h), \tilde{\varphi}(h) \rangle = c_1 \langle *\tilde{\omega}_H, \tilde{\varphi}(h) \rangle.$$

Soit  $\psi = *\varphi$ . Alors,

$$(3.22) \quad \langle *\tilde{\omega}_H, \tilde{\varphi}(h) \rangle d\text{vol}_{X_G} = *\omega_H \wedge \psi(hK).$$

Soit  $i$  le plongement de  $F \rightarrow M$ , alors

$$(3.23) \quad *\omega_H \wedge \psi(hK) = *\omega_H \wedge (i^* \psi(hK)).$$

Cette dernière égalité résulte du fait que  $*\omega_H$  prend ses valeurs dans le produit extérieur maximal de l'espace des vecteurs cotangents normaux à  $X_H$  dans  $X_G$ . Les composantes de  $\psi(hK)$  selon des vecteurs cotangents normaux à  $X_H$  sont donc tuées par le produit extérieur avec  $*\omega_H$ .

Puisque  $(d\text{vol}_{X_G})|_{X_H} = \omega_H \wedge *\omega_H$  avec  $\omega_H$  et  $*\omega_H$  des sections inversibles d'un fibré en droites, on déduit de (3.21), (3.22) et (3.23) :

$$\langle \tilde{\omega}(h), \tilde{\varphi}(h) \rangle \omega_H = c_1 i^* \psi(hK).$$

Ce qui conclut la démonstration du Lemme 3.12.  $\square$

On peut maintenant déterminer la constante  $c_\varphi$ . D'après la Proposition 3.11 et le Lemme 3.12,

$$\begin{aligned} c_1 \int_F * \varphi &= \int_{\Lambda \setminus H} \langle \tilde{\omega}(h), \tilde{\varphi}(h) \rangle dh \\ &= \left\langle \tilde{\omega}(e), \int_{\Lambda \setminus H} \tilde{\varphi}(h) dh \right\rangle \\ &= c_\varphi \langle \tilde{\omega}(e), \tilde{\omega}(e) \rangle. \end{aligned}$$

On a finalement montré que

$$(3.24) \quad c_\varphi = c_2 \int_F * \varphi,$$

où  $c_2$  est une constante universelle. D'un autre côté et d'après la Proposition 3.11, on a :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \int_M \omega \wedge * \varphi &= c_\varphi \int_{H \backslash G} \langle \tilde{\omega}(g), \tilde{\omega}(g) \rangle dHg \\ &= c_\varphi c_3. \end{aligned}$$

Le Théorème 3.4 découle maintenant immédiatement de (3.24) et (3.25).  $\square$

### 3.6. Application aux groupes unitaires et orthogonaux

**Groupes unitaires.** — Dans ce paragraphe  $G$  est un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q + r)$ . On suppose fixée une donnée  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = U(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  et  $\Lambda$  un sous-groupe de congruence sans torsion de  $H$ . Notons enfin  $M = \Lambda \backslash X_G$  et  $F = \Lambda \backslash X_H$ .

Soient  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions  $\subset p \times (q + r)$ . Conformément aux notations des sections précédentes nous notons  $H_2^*(M)_{\lambda, \mu} = H_2^*(A(\lambda, \mu) : M)$  la  $A(\lambda, \mu)$ -composante de la cohomologie  $L^2$  de  $M$ , enfin nous notons  $H_2^{\lambda, \mu}(M)$  la partie *fortement primitive*  $H_2^{|\lambda|+|\mu|}(M)_{\lambda, \mu}$ .

Commençons par montrer que le Théorème 3.4 implique le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 3.13.** — *La classe  $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)_{(r^p), (q^r)}$  est non nulle si et seulement si  $d_H \geq d_G/2$  (i.e. si et seulement si  $q \geq r$ ).*

*Démonstration.* — Nous appliquons le Théorème 3.4 au groupe  $G = U(p, q + r)$  muni de l'involution  $\tau$  standard telle que  $H = G^\tau = U(p, q) \times U(r)$ . Commençons par remarquer que  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$  si et seulement si  $q \geq r$ . Et dans ce cas  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{t} = r$ .

Considérons maintenant la représentation  $\pi_\rho^*$ . Nous avons vu au cours de la démonstration du Théorème 3.4 que celle-ci est isomorphe à la représentation cohomologique de  $K$ -type minimal  $2\rho_n$ . Il nous suffit donc de calculer  $2\rho_n$ . Comme au § 2.1, nous considérons la sous-algèbre de Cartan  $\tilde{\mathfrak{t}}$  dans  $\mathfrak{g}$  constituée des matrices diagonales.

Nous pouvons prendre la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{q}$  telle que  $i\mathfrak{t}_0$  soit égale au sous-ensemble

$$\left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_p; \underbrace{(-u_r, \dots, -u_1, 0, \dots, 0, u_1, \dots, u_r)}_{q+r} : u_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1, \dots, r \right\}$$

de  $i\tilde{\mathfrak{t}}_0$ . Représentons les systèmes de racines respectifs de  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{g}$  comme  $\Delta_c = \{\pm(x_i - x_j) : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm(y_i - y_j) : 1 \leq i < j \leq q + r\}$  et  $\Delta = \Delta_c \cup \{\pm(x_i - y_j) : 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q + r\}$ . On peut alors considérer les systèmes positifs compatibles  $\Delta_c^+ = \{x_i - x_j : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{y_j - y_i : 1 \leq i < j \leq q + r\}$ ,  $\Sigma_c^+ = \{y_j - y_i : i < j \text{ et soit } 1 \leq i \leq r \text{ soit } q + 1 \leq j \leq q + r\}$  et  $\Sigma^+ = \Sigma_c^+ \cup \{x_i - y_j :$



$1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq r\} \cup \{y_j - x_i : 1 \leq i \leq p \text{ et } q+1 \leq j \leq q+r\}$ . Un calcul simple montre alors que

$$2\rho_n = p \sum_{j=1}^r (y_{q+j} - y_j),$$

*i.e.* le plus haut poids par rapport à  $\Delta_c^+$  de la représentation  $V((r^p), (q^p))$ . Ce qui conclut la démonstration du Corollaire 3.13.  $\square$

REMARQUE. — Dans [49] Schlichtkrull identifie les paramètres de Langlands des représentations de Flensted-Jensen. Avec ses notations les systèmes de racines respectifs de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{k}$  sont  $\Delta = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq p+q+r\}$  et  $\Delta_c = \{\pm(e_i - e_j) : 1 \leq i < j \leq p \text{ ou } p < i < j \leq p+q+r\}$ . Il fixe comme sous-système positif  $\Delta_c^+ = \{e_i - e_j : 1 \leq i < j \leq p \text{ ou } p < i < j \leq p+q+r\}$ . Par rapport à ce système positif, le  $K$ -type  $V_r = V((r^p), (q^p))$  a pour plus haut poids :

$$2\rho_r := 2\rho(\mathfrak{u}((r^p), (q^p)) \cap \mathfrak{p}) = -p \sum_{j=1}^r (e_{p+j} - e_{p+q+r+1-j})$$

égal à la somme des racines de  $\mathfrak{u}((r^p), (q^p)) \cap \mathfrak{p}$  par rapport à  $\mathfrak{k}$ . Soit  $P_r = MAN$  le parabolique cuspidal et  $\delta_r \in \hat{M}$  la représentation de la série discrète associés au  $K$ -type  $2\rho_r$  par Vogan [56]. Ceux-ci coïncident avec le parabolique et la représentation de la série discrète que l'on associe à une sous-algèbre parabolique, dans notre cas  $\mathfrak{q}((r^p), (q^p))$ , dans [7, § 5.2]. Le groupe  $A$  est alors la composante neutre d'un tore maximal déployé du sous-groupe de Levi  $L((r^p), (q^p)) \cong U(p, q-r)$ . Soit  $k = \min(p, q-r)$  la dimension de  $\mathfrak{a}$ . Dans [7, § 5.2], nous associons également à la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}((r^p), (q^p))$  un élément  $\nu \in \mathfrak{a}^*$ . Si l'on choisit une base  $(f_1, \dots, f_k)$  de  $\mathfrak{a}$  telle que les racines de  $\mathfrak{a}$  dans  $N$  soient

$$\left\{ \frac{1}{2}(f_i \pm f_j), \frac{1}{2}f_l, f_l : 1 \leq i < j \leq k, 1 \leq l \leq k \right\},$$

alors

$$\nu = \frac{1}{2}(p+q-r-1, \dots, p+q-r+1-2k) \in \mathfrak{a}^*.$$

Nous avons donc déterminé une représentation  $\delta_r \otimes \nu \otimes 1$  de  $P_r = MAN$ . Comme rappelé dans [7, § 5.2], il découle alors de [57] que la représentation unitairement induite

$$I(\delta_r, \nu) = \text{ind}_{P_r}^G (\delta_r \otimes \nu \otimes 1)$$

admet un unique quotient irréductible  $J(\delta_r, \nu)$  qui est isomorphe à la représentation cohomologique  $A((r^p), (q^p))$ . Enfin et puisque  $q \geq r$ , il découle de [49, Theorem 7.7] que la représentation  $J(\delta_r, \nu)^*$  peut-être réalisée sur un sous-espace fermé de  $L^2(G/H)$ .

La Conjecture 3.2 est principalement motivée par la conjecture suivante.

CONJECTURE 3.14. — (Sous les hypothèses du Corollaire 3.13.) Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \cdots * (p_m \times q_m)$ , alors l'application

$$H^{\lambda, \mu}(F) \longrightarrow H_{2, \text{prim}^+}^{|\lambda|+pr+|\hat{\mu}|}(M)$$

obtenue en composant l'application « cup-produit avec  $[F]$  » et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $M$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  (i.e. si  $p_1 + \cdots + p_m = p$  et  $r \leq q_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ ). Son image est alors contenue dans  $H_2^{\lambda+(r^p), \mu}(M)$ .

Le Corollaire 3.13 est un cas particulier de cette Conjecture (le cas  $\lambda = \emptyset$ ,  $\mu = p \times q$ ).

La combinatoire prédite par la Conjecture provient du Lemme suivant. Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$ . Le groupe  $K_{\mathbb{C}} = GL_p \times GL_{q+r}$ , il contient le groupe  $GL_p \times (GL_q \times GL_r)$ , où le groupe  $GL_q \times GL_r$  est plongé dans  $GL_{q+r}$  par

$$(A, B) \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Le groupe  $GL_p \times (GL_q \times GL_r)$  préserve la décomposition orthogonale  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ . Dans la suite de ce paragraphe, nous noterons  $V_H(\lambda, \mu)$  le sous- $(GL_p \times GL_q)$ -module de  $\bigwedge(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$  associé au couple compatible  $(\lambda, \mu)$  de partitions  $\subset p \times q$ . Remarquons que le  $GL_p \times (GL_q \times GL_r)$ -module  $V_H(\lambda, \mu) \otimes \bigwedge^R(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$  est un sous-module de  $\bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|}(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \otimes \bigwedge^R(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \subset \bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|+R} \mathfrak{p}$ .

LEMME 3.15. — Supposons que la partition  $(r^p)$  s'inscrive dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ . Alors, le  $K$ -module  $V(\lambda+(r^p), \mu)$ , vu comme  $GL_p \times (GL_q \times GL_r)$ -module, contient (avec multiplicité un) le module  $V_H(\lambda, \mu) \otimes \bigwedge^R(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ .

*Démonstration.* — Comme au § 2.1, notons  $v_H(\lambda) \otimes w_H(\hat{\mu})^*$  le vecteur de plus haut poids de  $V_H(\lambda, \mu)$ . Soit  $\xi$  un générateur de la droite  $\bigwedge^{r^p}(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{q})$ .

Le vecteur  $w_H(\hat{\mu}) \otimes \xi \in \bigwedge^{|\hat{\mu}|}(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{h}) \otimes \bigwedge^{r^p}(\mathfrak{p}^+ \cap \mathfrak{q}) \subset \bigwedge^{|\hat{\mu}|+r^p} \mathfrak{p}^+$  est alors un vecteur de plus bas poids qui engendre le sous- $K$ -module  $V(\hat{\mu})$  de  $\bigwedge^{|\hat{\mu}|+r^p} \mathfrak{p}^+$  puisqu'il est colinéaire au vecteur  $w(\hat{\mu})^{(1)}$ . On peut de plus facilement vérifier que le vecteur  $v(\lambda + (r^p))$  est dans l'orbite du vecteur  $v_H(\lambda) \otimes \xi$  sous l'action du sous-groupe de Borel de  $K_{\mathbb{C}}$  fixé au § 2.1.

Le vecteur  $w_H(\hat{\mu})^* \otimes \xi^* \in \bigwedge^{|\hat{\mu}|+r^p} \mathfrak{p}^-$  est un vecteur de plus haut poids, il engendre donc une droite sous l'action du sous-groupe de Borel de  $K_{\mathbb{C}}$ , le vecteur  $v(\lambda + (r^p)) \otimes w(\hat{\mu})^*$  appartient donc à l'orbite sous l'action de  $K$  du vecteur  $(v_H(\lambda) \otimes w_H(\hat{\mu})^*) \otimes$

<sup>(1)</sup>Ici  $\hat{\mu}$  désigne le complémentaire de  $\mu$  dans  $p \times (q+r)$  alors que plus haut (lorsque l'on se place dans  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ )  $\hat{\mu}$  désigne le complémentaire de  $\mu$  dans  $p \times q$ .

$(\xi \otimes \xi^*) \in V_H(\lambda, \mu) \otimes \bigwedge^R(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \subset \bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|+R} \mathfrak{p}$ . Puisque  $V(\lambda + (r^p), \mu)$  apparaît avec multiplicité un dans  $\bigwedge^{|\lambda|+|\hat{\mu}|+R} \mathfrak{p}$ , le Lemme 3.15 est démontré.  $\square$

À l'aide de ce Lemme et du Corollaire 3.13, il semble raisonnable de penser pouvoir construire une application

$$H^{\lambda, \mu}(F) \longrightarrow H_2^{\lambda + (r^p), \mu}(M)$$

qui coïncide avec celle considérée dans la Conjecture 3.14 et qui soit injective si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ . Malheureusement nous ne sommes parvenus à le vérifier que dans le cas  $p = 1$  (déjà traité par une autre méthode dans [7]).

Concluons ce paragraphe par quelques remarques et conséquences de la Conjecture 3.14.

L'application « cup-produit avec  $[F]$  »

$$H^{\lambda, \mu}(F) \longrightarrow H_2^{|\lambda|+|\hat{\mu}|+2pr}(M)$$

devrait être injective dès que  $(r^p)$  s'inscrit dans  $\mu/\lambda$ . Cette condition est-elle nécessaire ?

Si la Conjecture 3.14 est vraie, pour tout entier  $k \leq q - r$ , l'application « cup-produit avec  $[F]$  »

$$(3.26) \quad H^k(F) \longrightarrow H_2^{k+2pr}(M)$$

devrait être **injective**.

Il nous suffit en effet de démontrer que si  $(\lambda, \mu)$  est un couple compatible de partitions dans  $p \times q$  telles que  $|\lambda| + |\hat{\mu}| \leq q - r$  (si  $p \geq 2$  on peut en fait remplacer  $q - r$  par  $q$ ) alors la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ . Ce qui découle du fait suivant.

FAIT. — Soient  $p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$  des entiers  $\geq 1$ . Supposons soit que  $p_1 + \dots + p_m \leq p - 1$  soit que l'un des  $q_i$  soit  $< r$ , alors  $p_1 q_1 + \dots + p_m q_m < pq - q + r$ .

En effet,

$$p_1 q_1 + \dots + p_m q_m \leq \sum_i p_i (q_i - r) + r \sum_i p_i.$$

Donc si l'un des  $q_i$ , par exemple  $q_1$ , est  $< r$ ,

$$p_1 q_1 + \dots + p_m q_m < (q - r) \sum_{i \neq 1} p_i + r \sum_i p_i \leq (q - r - 1)(p - 1) + rp = pq - q - p + r.$$

Alors que si  $p_1 + \dots + p_m \leq p - 1$ ,

$$p_1 q_1 + \dots + p_m q_m \leq (q - r)(p - 1) + r(p - 1) = pq - q < pq - q + r.$$

Dans [7] l'injectivité de l'application « cup-produit » (3.26) est obtenue pour  $k < q - pr$ , et dans ce cas nous montrons [7, Théorème 4.0.6] que l'application est en fait un isomorphisme. Est-ce encore le cas pour tout  $k \leq q - r$  ?

**Groupes orthogonaux.** — Dans ce paragraphe  $G$  est un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q + r)$ . On suppose fixée une donnée  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  et  $\Lambda$  un sous-groupe de congruence sans torsion de  $H$ . Notons enfin  $M = \Lambda \backslash X_G$  et  $F = \Lambda \backslash X_H$ .

Soit  $\lambda$  une partition orthogonale  $\subset p \times (q + r)$ . Nous notons  $H_2^*(M)_\lambda^{\pm_1, \pm_2} = H_2^*(A(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2} : M)$  la  $A(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2}$ -composante de la cohomologie  $L^2$  de  $M$ , Nous notons plus généralement  $H_2^*(M)_\lambda$  la somme directe de tous les  $H_2^*(M)_\lambda^{\pm_1, \pm_2}$  lorsque les signes  $\pm_1$  et  $\pm_2$  varient.

Le Théorème 3.4 implique le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 3.16.** — *La classe de  $[F] \in H_2^{d_G - d_H}(M)_{(r,p)}$  est non nulle si et seulement si  $d_H \geq d_G/2$  (i.e. si et seulement si  $q \geq r$ ).*

*Démonstration.* — Nous appliquons le Théorème 3.4 au groupe  $G = O(p, q + r)$  muni de l'involution  $\tau$  standard telle que  $H = G^\tau = O(p, q) \times O(r)$ . Commençons par remarquer que  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H))$  si et seulement si  $q \geq r$ . Et dans ce cas  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{t} = r$ . Dans la suite de la démonstration nous supposons  $p$  et  $q + r$  pairs respectivement égaux à  $2\alpha$  et  $2\beta$ . (Les autres cas se traitent de manière similaire.)

Considérons maintenant la représentation  $\pi_\rho^*$ . Nous avons vu au cours de la démonstration du Théorème 3.4 que celle-ci est isomorphe à la représentation cohomologique de  $K$ -type minimal  $2\rho_n$ . Il nous suffit donc de calculer  $2\rho_n$ . Comme au § 2.2, nous considérons la sous-algèbre de Cartan  $\tilde{\mathfrak{t}}$  dans  $\mathfrak{g}$  constituée des matrices diagonales. Nous pouvons prendre la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{q}$  telle que

$$i\mathfrak{t}_0 = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_\alpha; \underbrace{0, \dots, 0, u_1, \dots, u_r}_\beta : u_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1, \dots, r \right\} \subset i\tilde{\mathfrak{t}}_0.$$

Représentons les systèmes de racines respectifs de  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{g}$  comme  $\Delta_c = \{\pm(x_i \pm x_j) : 1 \leq i < j \leq \alpha\} \cup \{\pm(y_i \pm y_j) : 1 \leq i < j \leq \beta\}$  et  $\Delta = \Delta_c \cup \{\pm(x_i \pm y_j) : 1 \leq i \leq \alpha \text{ et } 1 \leq j \leq \beta\}$ . On peut alors considérer les systèmes positifs compatibles  $\Delta_c^+ = \{x_i \pm x_j : 1 \leq i < j \leq \alpha\} \cup \{y_j \pm y_i : 1 \leq i < j \leq \beta\}$ ,  $\Sigma_c^+ = \{y_j \pm y_i : 1 \leq i < j \text{ et } \beta - r + 1 \leq j \leq \beta\}$  et  $\Sigma^+ = \Sigma_c^+ \cup \{y_j \pm x_i : 1 \leq i \leq \alpha \text{ et } \beta - r + 1 \leq j \leq \beta\}$ . Un calcul simple montre alors que

$$2\rho_n = p \sum_{j=0}^{r-1} y_{\beta-j},$$

*i.e.* le plus haut poids par rapport à  $\Delta_c^+$  de la représentation  $V((r^p))$ . Ce qui conclut la démonstration du Corollaire 3.13.  $\square$

REMARQUE. — Lorsque  $r = q$  la partition orthogonale  $(r^p) \subset p \times (q + r)$  est paire, il y a donc lieu de considérer les projections respectives  $[F]_{\pm}$  de la classe  $[F]$  dans les groupes  $H_2^{d_G - d_H}(M)_{(r^p)}^{\pm}$ . La démonstration du Corollaire 3.16 montre que ces deux projections sont non triviales. Ceci correspond au fait que l'on peut remplacer le sous-système positif  $\Sigma^+$  considéré dans la démonstration par celui où les éléments  $y_1 \pm x_i$  ( $1 \leq i \leq \alpha$ ) sont remplacés par leurs opposés.

De manière analogue à la Conjecture 3.14 nous conjecturons :

CONJECTURE 3.17. — *Si  $\lambda$  est une partition orthogonale incluse dans  $p \times q$ , alors l'application*

$$H^{\lambda}(F) \longrightarrow H_{2, \text{prim}^+}^{|\lambda|+pr}(M)$$

*obtenue en composant l'application « cup-produit avec  $[F]$  » et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $M$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Son image est alors contenue dans  $H_2^{\lambda+(r^p)}(M)$ .*

En particulier, pour tout entier  $k \leq (q - r)/2$ , l'application « cup-produit avec  $[F]$  »

$$(3.27) \quad H^k(F) \longrightarrow H_2^{k+pr}(M)$$

devrait être **injective**. Nous reviendrons sur cette application au § 7.



## CHAPITRE 4

### ISOLATION DES REPRÉSENTATIONS COHOMOLOGIQUES

#### 4.1. Isolation dans le dual unitaire

Dans cette section nous explicitons pour les groupes unitaires et orthogonaux un théorème de Vogan [55, Theorem A.10] caractérisant les représentations cohomologiques **isolées**. Le cas du groupe  $U(p, q)$  est déjà traité dans [7, § 5.4]. Dans les termes de ce texte, on obtient la Proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. — *Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$  avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \cdots * (p_m \times q_m)$ . Alors la représentation  $A(\lambda, \mu)$  est isolée dans le dual unitaire de  $SU(p, q)$  si et seulement si*

1.  $\min_i(p_i, q_i) \geq 2$ , et
2. *s'il existe un entier  $i \in [1, p]$  tel que  $\lambda_i = \mu_i > \lambda_{i+1}$  (resp.  $\mu_{i-1} > \mu_i = \lambda_{i+1}$ ), alors  $\mu_{i+1} = \mu_i$  (resp.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$ ) (où nous adoptons exceptionnellement ici la convention que  $\lambda_0 = \mu_0 = q + 1$  et  $\lambda_{p+1} = \mu_{p+1} = -1$ ).*

On peut visualiser le point 2. : il signifie que  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont pas tous les deux triviaux et n'ont aucun angle  $\lrcorner$  (resp.  $\ulcorner$ ) en commun. En particulier, les représentations  $A(\lambda, \mu)$  telles que  $\lambda = \mu$  (qui sont exactement les représentations cohomologique de la série discrète) ne sont **jamais isolées**.

Dans cette section nous prouvons la proposition analogue suivante pour les groupes orthogonaux  $SO_0(p, q)$ .

PROPOSITION 4.2. — *Soit  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale avec  $\hat{\lambda}/\lambda = (a_1 \times b_1) * \cdots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \cdots * (a_1 \times b_1)$ . Alors les différentes représentations  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  associées à  $\lambda$  sont soit toutes isolées dans le dual unitaire de  $SO_0(p, q)$  soit toutes non isolées. Elles sont effectivement isolées si et seulement si*

1.  $\min_i(a_i, b_i) \geq 2$ , et
2. soit  $p_0, q_0 \geq 2$  et  $p_0 + q_0 \geq 5$ , soit  $p_0 q_0 = 0$ , et
3.  $\lambda$  et  $\hat{\lambda}$  ne sont pas tous les deux triviaux et n'ont aucun angle  $\lrcorner$  en commun.

*Démonstration.* — Nous allons déduire la Proposition 4.2 des résultats de Vogan. D'après le Théorème A.10 de [55], une représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  est isolée si et seulement si  $\mathfrak{q}$  vérifie certaines conditions (0) – (3). Vogan montre que l'on peut toujours, quitte à changer de représentant pour la classe d'équivalence de  $A_{\mathfrak{q}}$ , choisir  $\mathfrak{q}$  de façon à ce que la condition (0) soit satisfaite. Lorsque  $\lambda \subset p \times q$  est une partition orthogonale et  $\pm_1, \pm_2$  deux signes éventuels, notre choix « canonique »  $\mathfrak{q}(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2}$  vérifie toujours la condition (0) ( $\mathfrak{l}(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2}$  n'a pas de facteur compact non abélien). La condition (1) (le centre du groupe  $L(\lambda)$  est compact) est automatiquement vérifiée si  $p$  ou  $q$  est pair, elle découle en toute généralité du fait que  $(p_0, q_0) \neq (1, 1)$  (d'après le point 3. de la Proposition). La condition (2) (le groupe  $L(\lambda)$  n'a pas de facteurs simples localement isomorphes à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ), ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ )) correspond exactement aux points 1. et 2. de la Proposition. Il nous reste à exprimer la condition (3).

La construction-classification de Vogan-Zuckerman [57] pour les  $A_{\mathfrak{q}}$  est la suivante. Tout d'abord on a  $A_{\mathfrak{q}} = R_{\mathfrak{q}}(\mathbb{C})$  où  $\mathbb{C}$  est la représentation triviale de  $\mathfrak{l}$  et le foncteur  $R_{\mathfrak{q}} = R_{\mathfrak{q}}^{\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{t})}$  est défini dans les références citées par [57]. Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{l}$  contenant  $\mathfrak{t}^{(1)}$ . Supposons donné un système de racines positives  $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  pour  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  tel que les racines de  $\mathfrak{u}$  soient positives. Alors, avec les notations usuelles :

$$\rho_{\mathfrak{g}} = \rho_{\mathfrak{u}} + \rho_{\mathfrak{t}}.$$

Le caractère infinitésimal de  $\mathbb{C}_{\mathfrak{l}}$  est  $\rho_{\mathfrak{t}}$  ;  $\lambda = \rho_{\mathfrak{g}}$  vérifie les hypothèses du Théorème A.10 de [55] pour  $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

Soit  $\Pi \subset \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  l'ensemble des racines simples et  $\Pi(\mathfrak{l})$  le sous-ensemble formé des racines simples de  $\mathfrak{l}$ . Alors la condition (3) de Vogan s'écrit :

$$(4.1) \quad \langle \beta^{\vee}, \lambda \rangle = \langle \beta^{\vee}, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle \neq 1$$

pour toute racine imaginaire non compacte  $\beta \in \Pi$  orthogonale à  $\Pi(\mathfrak{l})$ .

Il s'agit d'expliciter (4.1). Nous allons encore une fois distinguer trois cas suivant les parités des entiers  $p$  et  $q$ .

$p = 2r$  et  $q = 2s$ . — Dans ce cas  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ . Rappelons (§ 2.2) que nous considérons une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}(\lambda)_{\pm_1}^{\pm_2}$  associée à un élément  $X = (x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \in i\mathfrak{t}_0$  avec

$$x_1 \geq \dots \geq x_{r-1} \geq |x_r| \geq 0 \text{ et } y_s \geq \dots \geq y_2 \geq |y_1| \geq 0.$$

<sup>(1)</sup>La sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  est donc égale à  $\mathfrak{t}$  sauf si  $p$  et  $q$  sont tous les deux impairs respectivement égaux à  $2r + 1$  et  $2s + 1$ , auquel cas on peut ajouter à  $\mathfrak{t}$  l'algèbre  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$  dans le  $r + 1$ -ème bloc diagonal.



Nous rassemblons les valeurs  $x_1, \dots, x_{r-1}, |x_r|, y_s, \dots, y_2, |y_1|$  en une suite strictement décroissante

$$u_1 > u_2 > \dots > u_l \geq 0$$

et notons

$$u_{j_1} > u_{j_2} > \dots > u_{j_m}$$

les valeurs non nulles de multiplicité  $> 1$ . Alors,

$$(4.2) \quad (x_1, \dots, x_{r-1}, |x_r|) = (x_1 > x_2 > \dots > x_{\alpha_1} > \underbrace{u_{j_1}}_{a_1} > \dots > x_{\alpha_2} > \underbrace{u_{j_2}}_{a_2} > \dots)$$

et

$$(4.3) \quad (y_s, \dots, y_2, |y_1|) = (y_s > y_{s-1} > \dots > y_{\beta_1} > \underbrace{u_{j_1}}_{b_1} > \dots > y_{\alpha_2} > \underbrace{u_{j_2}}_{b_2} > \dots).$$

Si  $u_l = 0$  nous notons  $r_0$  (resp.  $s_0$ ) la multiplicité avec laquelle 0 intervient dans  $(x_1, \dots, x_{r-1}, |x_r|)$  (resp.  $(y_s, \dots, y_2, |y_1|)$ ).

Rappelons (cf. § 2.2) que nous avons supposé  $l(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  sans facteur compact non abélien. Alors pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $a_i$  et  $b_i$  sont tous deux  $> 0$  et si  $r_0$  (resp.  $s_0$ ) est nul alors  $s_0$  (resp.  $r_0$ ) est  $\leq 1$ .

Avec ces notations, le diagramme gauche

$$\hat{\lambda}/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \dots * (a_1 \times b_1),$$

où  $p_0 = 2r_0$ ,  $q_0 = 2s_0$  et le diagramme rectangulaire  $p_0 \times q_0$  peut être trivial (si  $x_r$  ou  $y_1$  est non nul).

Il s'agit maintenant de montrer que la condition (4.1) est équivalente au point 3. de la Proposition 4.2.

Soit  $W = W_G$  le groupe de Weyl de  $G$  (associé au système  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ). Le groupe  $W$  est isomorphe au groupe  $\Sigma_{r+s} \times \{-1\}^{r+s-1}$ ,  $\{-1\}^{r+s-1}$  étant le sous-groupe de  $\{-1\}^{r+s}$ , opérant diagonalement, défini par  $\prod s_i = 1$ .

Il existe un élément  $w \in W$  tel que

$$wX = (v_1, \dots, v_{r+s}),$$

où

$$(v_1, \dots, v_{r+s-1}, |v_{r+s}|) = (u_1 > u_2 > \dots > \underbrace{u_{j_1}}_{a_1+b_1} > \dots > \underbrace{u_{j_2}}_{a_2+b_2} > \dots > u_k)$$

et  $u_k$  apparaît avec multiplicité  $r_0 + s_0$  s'il est nul. Nous notons  $X' = wX$ .

La base  $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est une ensemble de racines positives  $\alpha$  telles que  $\langle \alpha, X \rangle \geq 0$ ;  $w$  l'envoie sur un ensemble de racines telles que  $\langle \alpha, X' \rangle \geq 0$ , que l'on prendra égal à l'ensemble usuel puisque  $X'$  est dominant. Alors

$$w\Pi = \{\epsilon_i^{\pm} = (0, \dots, 0, 1, \pm 1, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, r+s-1\}$$

$$w\Pi = \{\epsilon_i^{\pm} : X'_i = \mp X'_{i+1}\},$$

et  $w$  envoie l'orthogonal de  $\Pi(\mathfrak{l})$  sur l'ensemble des racines  $\epsilon_i$  telles que

$$(4.4) \quad \{i, i+1\} \subset \{1, \dots, r+s\} - \cup_{i=0}^m I_i,$$

$I_i$  ( $i \geq 1$ ) étant le support de  $u_{j_i}$  dans l'expression de  $X'$  et  $I_0$  étant le support de 0 dans  $X'$ .

Par ailleurs, le système de racines étant de type  $D_{r+s}$ ,  $\beta^\vee = \beta$  si  $\beta \in \Pi$  et donc  $\langle \beta^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle = 1$ . La condition (4.1) est donc équivalente à

$$(4.5) \quad \text{Il n'y a pas de racine imaginaire non compacte dans } \Pi \text{ orthogonale à } \Pi(\mathfrak{l}).$$

Soit donc  $\{i, i+1\}$  vérifiant (4.4). Ceci implique donc que  $i$  et  $i+1$  appartiennent à une composante connexe de cardinal  $\geq 2$  de  $\{1, \dots, r+s\} - \cup I_i$ . Supposons par exemple que  $\alpha_1$  ou  $\beta_1 > 1$  et que  $a_1 + b_1 \geq 2$ . Alors, dans l'expression de  $X'$ ,  $i$  et  $i+1$  sont deux indices associés à  $u_i > u_{i+1} > u_{j_1}$ . Alors  $w^{-1}\{i, i+1\}$  est associée dans les expressions (4.2) et (4.3) à deux couples de la forme  $(x_i, |x_{i+1}|)$ ,  $(x_j, |y_{j'}|)$  ou  $(y_j, |y_{j+1}|)$  à gauche de  $u_{j_1}$ . Dans le second cas, la racine de valeur  $x_j - |y_{j'}|$  est non compacte ce qui contredit (4.5).

Donc  $u_1$  et  $u_2$  sont tous deux (par exemple) de la forme  $(x_1, x_2)$ ; il en est de même pour  $x_2$  et  $x_3$ , etc. Ceci veut dire que pour tout  $j < j_1$  on a  $u_j = x_j$  et donc  $\alpha_1 = j_1 - 1$  et  $\beta_1 = 0$ . Le même argument s'applique à toute composante connexe, et il est clair que (4.5) (et donc (4.1)) est en fait équivalente au point 3. de la Proposition 4.2.

$p = 2r$  et  $q = 2s + 1$ . — Cette fois encore  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ . Nous considérons maintenant une sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}(\lambda)_\pm$  associée à un élément  $X = (x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) \in i\mathfrak{t}_0$  avec

$$x_1 \geq \dots \geq x_{r-1} \geq |x_r| \geq 0 \text{ et } y_s \geq \dots \geq y_2 \geq y_1 \geq 0.$$

Nous rassemblons là encore les valeurs  $x_1, \dots, x_{r-1}, |x_r|, y_s, \dots, y_2, y_1$  en une suite strictement décroissante

$$u_1 > u_2 > \dots > u_l \geq 0$$

et notons

$$u_{j_1} > u_{j_2} > \dots > u_{j_m}$$

les valeurs non nulles de multiplicité  $> 1$ . Les identités (4.2) et (4.3) sont encore vérifiées, nous conservons les mêmes notations  $r_0, s_0, \dots$

Il s'agit maintenant de montrer que la condition (4.1) est équivalente au point 3. de la Proposition 4.2.

Soit  $W = W_G$  le groupe de Weyl de  $G$  (associé au système  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ). Le groupe  $W$  est maintenant isomorphe au groupe  $\Sigma_{r+s} \times \{-1\}^{r+s}$ .

Il existe un élément  $w \in W$  tel que

$$wX = (v_1, \dots, v_{r+s}),$$

où

$$(v_1, \dots, v_{r+s-1}, v_{r+s}) = (u_1 > u_2 > \dots > \underbrace{u_{j_1}}_{a_1+b_1} > \dots > \underbrace{u_{j_2}}_{a_2+b_2} > \dots > u_k)$$

et  $u_k$  apparaît avec multiplicité  $r_0 + s_0$  s'il est nul. Nous notons  $X' = wX$ .

La base  $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  est une ensemble de racines positives  $\alpha$  telles que  $\langle \alpha, X \rangle \geq 0$ ;  $w$  l'envoie sur un ensemble de racines telles que  $\langle \alpha, X' \rangle \geq 0$ , que l'on prendra égal à l'ensemble usuel puisque  $X'$  est dominant. Alors

$$w\Pi = \{\epsilon_i = (0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0), i = 1, \dots, r+s-1\} \\ \cup \{\eta_{r+s} = (0, \dots, 0, 1)\},$$

et  $w$  envoie l'orthogonal de  $\Pi(\mathfrak{l})$  sur l'ensemble des racines  $\epsilon_i$  et  $\eta_j$  telles que

$$(4.6) \quad \{i, i+1\} \subset \{1, \dots, r+s\} - \cup_{i=0}^m I_i,$$

et

$$(4.7) \quad j \notin \cup_{i=0}^m I_i.$$

Par ailleurs, le système de racines étant de type  $B_{r+s}$ ,  $\epsilon_i^\vee = \epsilon_i$  et  $\eta_i^\vee = 2\eta_i$ . On a donc  $\langle \epsilon_i^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle = 1$  pour  $i = 1, \dots, r+s-1$  et  $\langle \eta_{r+s}^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle = 1$ . La condition (4.1) est donc équivalente à

$$(4.8) \quad \text{Il n'y a pas de racine imaginaire non compacte dans } \Pi \text{ orthogonale à } \Pi(\mathfrak{l}).$$

Soit donc  $\epsilon_i$  vérifiant (4.6). Ceci implique donc que  $i$  et  $i+1$  appartiennent à une composante connexe de cardinal  $\geq 2$  de  $\{1, \dots, r+s\} - \cup I_i$ . Supposons par exemple que  $\alpha_1$  ou  $\beta_1 > 1$  et que  $a_1 + b_1 \geq 2$ . Alors, dans l'expression de  $X'$   $i$  et  $i+1$  sont deux indices associés à  $u_i > u_{i+1} > u_{j_1}$ . Alors  $w^{-1}\epsilon_i$  est associée dans les expressions (4.2) et (4.3) à deux couples de la forme  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $(x_j, y_{j'})$  ou  $(y_j, y_{j+1})$  à gauche de  $u_{j_1}$ . Dans le second cas, la racine de valeur  $x_j - y_{j'}$  est non compacte.

Donc  $u_1$  et  $u_2$  sont tous deux (par exemple) de la forme  $(x_1, x_2)$ ; il en est de même pour  $x_2$  et  $x_3$ , etc. Ceci veut dire que pour tout  $j < j_1$  on a  $u_j = x_j$  et donc  $\alpha_1 = j_1 - 1$  et  $\beta_1 = 0$ . Le même argument s'applique à toute composante connexe, et il est clair que l'on obtient que (4.8) pour les racines  $\epsilon_i$  implique que  $\lambda$  et  $\hat{\lambda}$  ne sont pas tous les deux triviaux et n'ont aucun angle  $\perp$  en commun sauf peut-être celui correspondant à la case  $(r, s+1)$ . Ce dernier cas est équivalent à ce que  $v_{r+s} = x_r > 0$ , alors la racine de valeur  $x_r$  est non compacte ce qui contredit (4.8) pour la racine  $\eta_{r+s}$ . On obtient bien finalement que (4.8) (et donc (4.1)) est en fait équivalente au point 3. de la Proposition 4.2.

$p = 2r + 1$  et  $q = 2s + 1$ . — Ce cas se traite de la même manière que les deux précédents sans aucune difficulté supplémentaire. Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 4.2.  $\square$

Remarquons là encore que la condition 3. de la Proposition 4.2 est violée lorsque la représentation cohomologique est une série discrète : celles-ci ne sont pas isolées.

Rappelons (§ 2.1) que la cohomologie de  $A_{\mathfrak{q}}$  n'apparaît qu'en degrés  $\geq R = R(\mathfrak{q})$ .

**COROLLAIRE 4.3.** — *Lorsque  $G$  est de rang 1 aucune représentation cohomologique n'est isolée. Si  $G$  est de rang 2, il est du type  $SO_0(2, n)$  avec  $n \geq 3$  et si une représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  n'est pas isolée, la cohomologie de  $A_{\mathfrak{q}}$  n'apparaît qu'en degrés  $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Enfin si  $G$  est de rang  $\geq 3$ , il est du type  $SO_0(p, q)$  avec  $p, q \geq 3$  et si une représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  n'est pas isolée, la cohomologie de  $A_{\mathfrak{q}}$  n'apparaît qu'en degrés  $k \geq p + q - 3$ .*

*Démonstration.* — Tout d'abord un calcul simple montre que si  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$ ,

$$R = \frac{1}{2} \left( pq - 2 \sum_{j=1}^m a_j b_j - p_0 q_0 \right).$$

Pour simplifier nous ne vérifions le Corollaire 4.3 que dans le cas  $p = 2r$  et  $q = 2s$  (les deux autres cas sont plus facile à traiter). Nous distinguons différents cas.

– Supposons tout d'abord  $p_0 q_0 = 0$ .

Supposons que  $\mathfrak{q}$  viole le point 1. de la Proposition 4.2. Alors (à l'ordre près) on peut supposer  $a_1 = 1$ ,  $b_1 \geq 1$ . Alors

$$\sum_{j=2}^m a_j b_j \leq \left( \sum a_i \right) \left( \sum b_i \right) \leq (r-1)(s-b_1)$$

donc

$$\begin{aligned} R &\geq 2rs - b_1 - (r-1)(s-b_1) \\ &\geq rs + s + (r-2)b_1. \end{aligned}$$

Nous devons alors distinguer le cas  $r = 1$  du cas  $r \geq 2$ . Si  $r = 1$  et puisque  $b_1 \leq s$ ,

$$(4.9) \quad R \geq s = \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil.$$

Alors que si  $r \geq 2$  (et puisque  $b_1 \geq 1$ ),

$$(4.10) \quad R \geq rs + r + s - 2.$$

Supposons maintenant que  $\mathfrak{q}$  viole le point 3. de la Proposition 4.2. Alors, en particulier,  $\sum a_i \leq r-1$  et  $\sum b_i \leq s-1$  et dans ce cas

$$(4.11) \quad R \geq 2rs - (r-1)(s-1) = rs + r + s - 1.$$

– Supposons maintenant  $p_0$  et  $q_0 > 0$ . Nous continuons de noter  $p_0 = 2r_0$  et  $q_0 = 2s_0$ .

Supposons que  $\mathfrak{q}$  viole le point 2. de la Proposition 4.2. Alors  $p_0q_0 = 4r_0s_0 = 4$  et  $\sum a_i b_i \leq (r-1)(s-1)$  et dans ce cas

$$(4.12) \quad R \geq 2rs - (r-1)(s-1) - 2 = rs + r + s - 3.$$

Supposons que  $\mathfrak{q}$  viole le point 1. de la Proposition 4.2. Alors (à l'ordre près) on peut supposer  $a_1 = 1, b_1 \geq 1$ . Alors

$$\sum_{j=1}^m a_j b_j + 2r_0 s_0 \leq 2(r-1)(s-1) + 1$$

donc

$$(4.13) \quad R \geq 2rs - 2(r-1)(s-1) - 1 = 2r + 2s - 3.$$

Supposons maintenant que  $\mathfrak{q}$  viole le point 3. de la Proposition 4.2. Alors, en particulier,  $\sum a_i + r_0 \leq r-1$  et  $\sum b_i + s_0 \leq s-1$  et dans ce cas

$$(4.14) \quad R \geq 2rs - 2(r-1)(s-1) = 2r + 2s - 2.$$

Les différentes inégalités (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) et (4.14) impliquent le Corollaire 4.3.  $\square$

REMARQUE. — Du point de vue de la théorie des représentations de  $G$ , ce résultat ne peut être amélioré. Ainsi, lorsque  $p = 2$  la représentation  $A(\left(\left[\frac{q}{2}\right]\right))$  est cohomologique de degré  $R = \left[\frac{q}{2}\right]$  et n'est pas isolée d'après la Proposition 4.2. Et, lorsque  $p, q \geq 3$ , la représentation  $A((q-1, 1^{p-2}))$  est cohomologique de degré  $R = p + q - 3$  et n'est pas isolée d'après la Proposition 4.2.

#### 4.2. Isolation sous la condition $d = 0$

Soient  $G$  un groupe simple réel,  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $(\pi, V_\pi)$  une représentation irréductible unitaire de  $G$ . Soit  $V_\pi^K$  l'espace des vecteurs  $K$ -finis de la représentation  $\pi$  et considérons le complexe calculant la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie de  $\pi$  :

$$(4.15) \quad \dots \longrightarrow C^i(\pi) = \text{Hom}_K\left(\bigwedge^i \mathfrak{p}, V_\pi^K\right) \xrightarrow{d_i} C^{i+1}(\pi) \longrightarrow \dots$$

Nous dirons d'une représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  de  $G$  de degré primitif  $R = R(\mathfrak{q})$  qu'elle est *isolée sous la condition*  $d = 0$  si elle est isolée de l'ensemble des représentations irréductibles unitaires telles que  $\text{Im}(d_R) = 0$ .

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble de toutes les sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stables de  $\mathfrak{g}$  :  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l}(\mathfrak{q}) + \mathfrak{u}(\mathfrak{q})$ . Notons

$$(4.16) \quad r_G = \min\{\dim(\mathfrak{u}(\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{p}) : \mathfrak{q} \in \mathcal{P}\}.$$

D'après Parthasarathy [45], Kumaresan [35] et Vogan-Zuckerman [57], toute représentation cohomologique non triviale de  $G$  est de degré primitif  $\geq r_G$ .

Remarquons que  $r_G \geq \text{rang}_{\mathbb{R}}(G)$  et que les cas où l'inégalité est stricte sont rassemblés dans [9, § 10.3]. En ce qui concerne les groupes  $O(p, q)$  et  $U(p, q)$ ,  $r_G = \text{rang}_{\mathbb{R}}(G) = \min(p, q)$ .

Nous aurons besoin de la proposition suivante que nous déduisons facilement des travaux de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman.

PROPOSITION 4.4. — *Si  $G$  n'est localement isomorphe ni à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ), ni à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ), alors toute représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  de degré primitif  $R = r_G$  est isolée sous la condition  $d = 0$  dans  $\widehat{G}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$  une sous-algèbre de Cartan comme dans la première section. Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \in \mathcal{P}$  telle que  $A_{\mathfrak{q}}$  soit de degré primitif  $R = r_G$ . Fixons un sous-système positif  $\Delta^+(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k})$  du système de racines  $\Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . L'ensemble

$$\Delta^+(\mathfrak{k}) = \Delta^+(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}) \cup \Delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k})$$

est alors un système de racines positives de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{k}$ .

Rappelons que ( $\Delta^+(\mathfrak{k})$  étant fixé) les représentations irréductibles de groupe compact  $K$  peuvent être paramétrées par leurs plus hauts poids, qui sont des éléments de  $\mathfrak{t}^*$ . Notons

$$\mu(\mathfrak{q}) = \text{représentation de } K \text{ de plus haut poids } 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}).$$

C'est le  $K$ -type minimal de la représentation  $A_{\mathfrak{q}}$ .

Rappelons maintenant la célèbre inégalité de Dirac de Parthasarathy (cf. [45, (2.26)], [9, II.6.11], [57, Lemma 4.2]).

LEMME 4.5. — *Soit  $(\pi, V_{\pi})$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  et  $V_{\pi}^K$  son  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé. Fixons une représentation de  $\mathfrak{k}$  de plus haut poids  $\chi \in \mathfrak{t}^*$  et apparaissant dans  $V_{\pi}^K$ ; et un sous-système positif de racines  $\Delta^+(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\rho$  (resp.  $\rho_c, \rho_n$ ) dans  $\mathfrak{t}^*$  la demi-somme des racines dans  $\Delta^+(\mathfrak{g})$  (resp.  $\Delta^+(\mathfrak{k})$ ,  $\Delta^+(\mathfrak{p})$ ), de sorte que  $\rho = \rho_c + \rho_n$ . Soit  $w$  un élément du groupe de Weyl  $W_K = W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{k}$ , tel que  $w(\chi - \rho_n)$  soit dominant pour  $\Delta^+(\mathfrak{k})$ . Alors,*

$$-\pi(\Omega) \geq \|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2,$$

où  $\Omega$  désigne le casimir de  $\mathfrak{g}$  et la norme  $\|\cdot\|$  est déduite de la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ .

Pour toute représentation unitaire irréductible de  $G$  non triviale  $(\pi, V_{\pi})$ , le groupe  $H^{r_G-1}(\mathfrak{g}, K, V_{\pi}^K) = \{0\}$ . Il en est de même si  $\pi$  est triviale puisque,  $G$  n'étant localement isomorphe ni à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ni à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ),  $0 < r_G - 1$  et donc,  $\text{Hom}_K(\bigwedge^{r_G-1} \mathfrak{p}, \mathbb{C}) = \{0\}$ . La suite (4.15) est donc exacte en  $i = r_G - 1$ . Ceci reste vrai en  $i = r_G$  en dehors des représentations  $\pi$  telles que  $H^{r_G}(\mathfrak{g}, K, V_{\pi}^K) = 0$ . Ces différentes représentations ont des  $K$ -types différents et sont donc isolées les unes des autres.

Si  $A_{\mathfrak{q}}$  n'est pas isolée sous la condition  $d = 0$ , il existe donc une suite  $\{\pi_i\}$  de représentations unitaires irréductibles de  $G$  telle que

1.  $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}, V_{\pi_i}^K) \neq \{0\}$  et,
2. la suite  $\pi_i(\Omega)$  tend vers 0 lorsque  $i$  tend vers l'infini.

Mais, l'ensemble des  $K$ -types de  $\bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}$  est fini et d'après Kumaresan [35], si  $\chi \in \mathfrak{t}^*$  est le plus haut poids d'un tel  $K$ -type,

$$\|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2 > 0,$$

où  $w$  est comme dans le Lemme 4.5. (Kumaresan montre plus précisément qu'un  $K$ -type de  $\bigwedge^* \mathfrak{p}$  vérifie l'égalité

$$\|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2 = 0$$

est nécessairement de la forme  $\mu(\mathfrak{q})$  pour une certaine sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ .) D'après le Lemme 4.5, il existe donc une borne inférieure strictement positive uniforme de l'ensemble des nombres réels  $-\pi(\Omega)$  tels que  $\pi$  soit une représentation unitaire irréductible de  $G$  vérifiant  $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}, V_{\pi}^K) \neq \{0\}$ . Ce qui contredit l'existence de la suite  $\{\pi_i\}$  et conclut la démonstration de la Proposition 4.4.  $\square$

**COROLLAIRE 4.6.** — *La représentation cohomologique  $A((1^p))$  du groupe  $SO_0(p, q)$  ( $2 \leq p < q$ ) est isolée sous la condition  $d = 0$ .*

*Démonstration.* — Puisque si  $G = SO_0(p, q)$  ( $1 \leq p < q$ ), le degré  $r_G = p$ , le Corollaire 4.6 découle trivialement de la Proposition 4.4, tant que  $p > 1$ .  $\square$

### 4.3. Isolation dans le dual automorphe

Dans deux articles fondamentaux (cf. en particulier [1]), Arthur a donné une description conjecturale des représentations des groupes réductifs qui peuvent apparaître dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  pour un sous-groupe de congruence. Avec Clozel dans [7], nous avons déduit de la théorie d'Arthur **a minima** des limitations sévères sur les caractères infinitésimaux des représentations pouvant apparaître dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  lorsque  $G^{\mathrm{nc}} = U(n, 1)$  ou  $O(n, 1)$ .

Soit  $G$  un groupe algébrique semisimple et connexe sur  $\mathbb{Q}$ . Comme dans [10] nous notons

$$\sigma(\Gamma \backslash G) = \{\pi \in \widehat{G(\mathbb{R})} : \pi \propto L^2(\Gamma \backslash G(\mathbb{R}))\}$$

le *spectre de  $L^2(\Gamma \backslash G)$* , où  $\Gamma$  est un sous-groupe de congruence de  $G$  et  $\propto$  signifie « être faiblement contenue ». Nous notons de plus

$$\widehat{G}_{\mathrm{Aut}} = \bigcup_{\Gamma} \overline{\sigma(\Gamma \backslash G)}$$

la *dual automorphe de  $G$* , où la réunion est prise sur l'ensemble des sous-groupes de congruence de  $G$  et l'adhérence est prise dans le dual unitaire  $\widehat{G(\mathbb{R})}$  de  $G(\mathbb{R})$ .

Dans [7] avec Clozel nous avons montré comment déduire la conjecture suivante d'une Conjecture de changement de base pour les groupes unitaires, cas faible des Conjectures d'Arthur.

CONJECTURE 4.7. — *Supposons  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soit  $\pi$  une représentation cohomologique de  $G(\mathbb{R})$ , alors la représentation  $\pi$  est isolée dans*

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}.$$

Le cas du groupe  $O(p, q)$  est plus délicat. L'analogie de la Conjecture 4.7 est d'ailleurs faux en général pour le groupe  $O(p, q)$ .

La Conjecture suivante pourrait sûrement être déduite des conjectures générales d'Arthur (lorsque  $p = 1$  nous montrons dans [7] qu'elle découle d'une version faible des Conjectures d'Arthur).

CONJECTURE 4.8. — *Supposons  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Chaque représentation cohomologique  $A((1^i))$ , pour  $0 \leq i \leq q/2 - 1$  est isolée dans le dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  de  $G$ .*

On ne connaît que très peu de cas des Conjectures 4.7 et 4.8. Dans [13] Clozel démontre que la représentation triviale est toujours isolée dans le dual automorphe. Dans [7] avec Clozel, nous démontrons la Conjecture 4.7 pour  $p = 1$  et  $\pi$  de degré fortement primitif égal à 1. Dans les deux cas les démonstrations utilisent un argument de réduction dû à Burger et Sarnak [11].

De manière similaire au § 4.2 on peut évidemment étudier l'isolation d'une représentation cohomologique sous la condition  $d = 0$ . La démonstration de [7, Théorème 2.3.3] et les résultats mentionnés dans le paragraphe précédent impliquent alors les deux analogues automorphes suivants du Corollaire 4.6.

PROPOSITION 4.9. — *La représentation cohomologique  $A((1))$  du groupe  $SO_0(1, q)$  ( $2 \leq q$ ) est isolée dans le dual automorphe sous la condition  $d = 0$ .*

PROPOSITION 4.10. — *Les représentations cohomologiques de degré 2 du groupe  $SU(1, q)$  ( $1 \leq q$ ) sont toutes isolées dans le dual automorphe sous la condition  $d = 0$ .*



## CHAPITRE 5

### RESTRICTION DES REPRÉSENTATIONS COHOMOLOGIQUES

Dans ce chapitre nous étudions la possibilité pour la restriction d'une représentation cohomologique de  $G$  à un sous-groupe  $H$  de contenir (discrètement) une représentation cohomologique. Ce problème a été étudié par différents auteurs : citons notamment les travaux de Kobayashi [32], Harris et Li [24] et mon article [2]. Nous nous plaçons tout d'abord dans un cadre général.

#### 5.1. Restriction et séries discrètes

Soit  $G$  un groupe de Lie (réel) réductif connexe à centre compact et avec un sous-groupe de Cartan compact. Le groupe  $G$  possède alors une série discrète. Commençons par étudier le problème de la restriction des représentations de la série discrète de  $G$  à un sous-groupe de  $G$ . Soit donc  $H$  un sous-groupe réductif connexe fermé dans  $G$ . Supposons que l'intersection  $K^H = K \cap H$  d'un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$  soit un sous-groupe compact maximal dans  $H$ . Le théorème suivant se déduit immédiatement des travaux de Li [36] et de Harris et Li, en particulier de [24, Proposition 1.2.3].

**THÉORÈME 5.1.** — *Soit  $\rho$  une représentation unitaire irréductible de la série discrète de  $G$  de plus bas  $K$ -type  $\tau$ . Soit  $\pi$  une représentation de la série discrète de  $H$  de plus bas  $K^H$ -type  $\sigma$ . Supposons que le  $K^H$ -type  $\sigma$  intervienne dans la restriction de  $\tau$  à  $K^H$ . Alors, la représentation  $\pi$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de  $\rho|_H$ .*

*Démonstration.* — Il est bien connu, cf. [29], que la représentation  $\rho$  admet un unique plus bas  $K$ -type qui est donc  $\tau$ . Notons  $P_\tau$  la projection orthogonale sur la  $\tau$ -composante de  $\rho$  et posons

$$\psi_\rho(x) = \frac{1}{\dim(\tau)} \operatorname{tr}(P_\tau \rho(x) P_\tau), \quad x \in G.$$

Pour appliquer [24, Proposition 1.2.3] à la représentation  $\rho$ , il nous suffit donc de vérifier que

1. la restriction de  $\rho$  à  $H$  est fortement  $L^{2+\varepsilon}$  ;
2. la fonction  $\psi_\rho$  vérifie la formule de Flensted-Jensen.

Nous renvoyons à [36] ou [24] pour la définition de la formule de Flensted-Jensen. Il suffit ici de noter que Flensted-Jensen démontre précisément dans [18] que celle-ci est vérifiée par  $\psi_\rho$  dès que  $\rho$  appartient à la série discrète de  $G$ . Le point 2. est donc vérifié.

Rappelons maintenant qu'une représentation unitaire  $\rho$  de  $H$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\rho$  est fortement  $L^{2+\varepsilon}$  si elle est fortement  $L^p$  pour tout  $p > 2$ . Et qu'elle est fortement  $L^p$  si, pour un ensemble dense de vecteurs dans  $\mathcal{H}_\rho$ , les coefficients matriciels associés sont tous dans  $L^p(H)$ .

Ici la représentation  $\rho$  appartient à la série discrète de  $G$ , elle est en particulier tempérée. Notons  $\mathcal{H}_\rho^K$  l'espace des vecteurs  $K$ -finis dans  $\mathcal{H}_\rho$ . Soit  $\Xi_G$  la fonction sphérique d'Harish-Chandra [23] (dans [29], la fonction  $\Xi_G$  est appelée  $\varphi_0^G$ ). Puisque  $\rho$  est tempérée, pour tous  $u, v \in \mathcal{H}_\rho^K$  on a

$$(5.1) \quad |(\rho(g)u, v)| \leq C_{u,v} \Xi_G(g),$$

où  $C_{u,v}$  est une constante qui dépend de  $u$  et  $v$  mais pas de  $g$ . Fixons deux décompositions compatibles  $G = KAN$  et  $H = K^H A^H N^H$  et notons  $\rho$  (resp.  $\rho^H$ ) la demi-somme des racines de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  (resp.  $(\mathfrak{h}, \mathfrak{a}^H)$ ) positives pour  $N$  (resp.  $N^H$ ). Il est immédiat que  $\rho \geq \rho^H$ . La Proposition 7.15 de [29] implique alors

$$\Xi_G(a) \leq (\text{const}) e^{-\rho^H \log a} (1 + \|a\|)^d,$$

pour  $a \in A_+^H$  et où  $d$  est une certaine constante  $\geq 0$ . La démonstration de [29, (7.52)] implique alors immédiatement que la fonction  $\Xi_G$  restreinte à  $H$  est dans  $L^p(H)$  pour tout  $p > 2$ . Puisque le sous-espace  $\mathcal{H}_\rho^K$  est dense dans  $\mathcal{H}_\rho$  l'inégalité (5.1) implique finalement que la restriction de  $\rho$  à  $H$  est fortement  $L^{2+\varepsilon}$ . Ce qui permet de conclure la démonstration du Théorème 5.1 en appliquant [24, Proposition 1.2.3].  $\square$

Nous allons maintenant chercher à étudier un problème analogue dans le cas des représentations cohomologiques des groupe unitaires et orthogonaux. L'idée est de se ramener au Théorème 5.1 à l'aide de la correspondance thêta  $L^2$  locale. Commençons par quelques rappels à ce sujet.

Soit  $(G, G')$  une paire réductive duale irréductible de type I dans le groupe symplectique  $Sp = Sp_{2n}(\mathbb{R})$  (nous renvoyons à l'article [26] de Howe pour plus de précisions concernant cette terminologie). Soit  $\widetilde{Sp}$  le revêtement métaplectique à deux feuillets de  $Sp$ . Étant donné un sous-groupe  $E$  de  $Sp$  nous notons  $\widetilde{E}$  son image inverse dans  $\widetilde{Sp}$ . Dans [36], Li étudie la correspondance thêta locale entre les représentations de la série discrète de  $\widetilde{G}'$  et les représentations cohomologiques unitaires de  $\widetilde{G}$ . Nous exploitons

maintenant les résultats (et méthodes) de Li pour faire correspondre au Théorème 5.1 un théorème sur la restriction des représentations cohomologiques.

Rappelons (cf. [26]) qu'une paire duale irréductible de type I est construite comme suit. Soit  $D$  l'une des trois algèbres à division sur  $\mathbb{R}$  ( $D$  est donc égal à  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ , l'algèbre des quaternions), munie de son involution standard  $*$ . (L'involution  $*$  est donc triviale dans le premier cas et est la conjugaison complexe (resp. quaternionique) dans les deux derniers cas.) Soient  $V$  et  $V'$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur  $D$  équipés de deux formes  $*$ -sesquilineaires non dégénérées  $(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot, \cdot)'$ , l'une  $*$ -hermitienne et l'autre  $*$ -anti-hermitienne. Soient  $G$  et  $G'$  les groupes d'isométries respectifs de  $(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot, \cdot)'$ . Alors  $(G, G')$  est une paire duale irréductible dans  $Sp = Sp_{2n}(\mathbb{R})$ , où

$$2n = \dim_{\mathbb{R}}(D)(\dim_D V)(\dim_D V').$$

Nous supposons toujours que la « taille » de  $G'$  est inférieure à celle de  $G$ , à savoir que

$$(5.2) \quad \dim_D V \geq \dim_D V'.$$

Nous notons enfin

$$(5.3) \quad G_1 = \begin{cases} SO(p, q) & \text{si } G = O(p, q) \\ SU(p, q) & \text{si } G = U(p, q) \\ G & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons maintenant  $A_{\mathfrak{q}}$  une représentation cohomologique de  $G_1$  associée à une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  du complexifié  $\mathfrak{g}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_0$  de  $G_1$ . Posons  $\mathfrak{l}^0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_0$ . Nous considérons dans ce chapitre les représentations cohomologiques  $A_{\mathfrak{q}}$  vérifiant la condition

$$(5.4) \quad \mathfrak{l}^0 \cong \mathfrak{l}'_0 \oplus \mathfrak{g}_0^1,$$

où  $\mathfrak{l}'_0$  est une algèbre de Lie compacte et  $\mathfrak{g}_0^1$  est du « même type » que  $\mathfrak{g}_0$ , c'est à dire isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des isométries de  $(\cdot, \cdot)|_{V^1}$ , où  $V^1$  est un sous-espace non dégénéré de  $V$ .

D'après [36, Theorem 6.2], il existe une représentation  $\pi'$  de la série discrète de  $\tilde{G}'$  telle que  $\pi'$  admette un relevé thêta non trivial  $\pi$  au groupe  $\tilde{G}$  dont la restriction au sous-groupe  $G_1 \subset \tilde{G}$  soit précisément la représentation  $A_{\mathfrak{q}}$ .

Précisons un peu ce résultat en supposant  $G$  non compact. Soit  $(\omega, \mathcal{Y})$  la représentation de Weil du groupe  $\tilde{Sp}$  munie de sa structure unitaire. L'un des deux groupes  $G$ ,  $G'$  est de type hermitien nous supposons que c'est le cas de  $G'$ . Soient  $K$  et  $K'$  deux sous-groupes compacts maximaux respectifs de  $G$  et  $G'$  et  $M' \supset G'$  le centralisateur de  $K$  dans  $Sp$ . Puisque  $G$  n'est pas compact,  $M' \cong G' \times G'$  et  $(K, M')$  forme une paire duale dans  $Sp$ . Et puisque  $K$  est compact, il est bien connu que comme représentation unitaire dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{Y}$ , la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{K} \cdot \tilde{M}'$  se décompose en une somme directe  $\sum_i \sigma_i \otimes \rho_i$  de représentations unitaires irréductibles de  $\tilde{K} \cdot \tilde{M}'$ . La correspondance thêta est alors  $\sigma_i \leftrightarrow \rho_i$ . Cette correspondance est connue et explicitée

dans [36], chaque  $\rho_i$  ainsi obtenue est une représentation unitaire de plus haut poids de  $M'$ . Soit  $\sigma$  le plus bas  $\tilde{K}$ -type de la représentation  $\pi$ . La représentation  $\sigma$  intervient dans la correspondance duale avec  $M'$ . Notons  $\sigma \otimes \rho'$  le facteur direct correspondant dans la décomposition en irréductibles de la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{K} \cdot \tilde{M}'$ . Soit  $\tau'$  le plus bas  $\tilde{L}'$ -type de  $\rho'$ , vue comme représentation de  $\tilde{K}' \times \tilde{K}'$ ,  $\tau' = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ . La restriction de  $\tau'$  à la diagonale  $\tilde{K}' \subset \tilde{K}' \times \tilde{K}'$  contient un facteur irréductible  $\sigma'$  dont le plus haut poids est égal à la somme des plus hauts poids de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . La représentation  $\sigma'$  est précisément le plus bas  $\tilde{K}'$ -type de  $\pi'$ .

Suivant Kudla [34], nous dirons que deux paires réductives duales irréductibles et de type I  $(H, H')$  et  $(G, G')$  dans le groupe symplectique  $Sp$  sont en *balance* (« see-saw ») si  $H \subset G$  et (donc)  $G' \subset H'$ . Considérons donc deux telles paires en balance, ce que nous représentons par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & & H' \\ | & \times & | \\ H & & G' \end{array}$$

Mettons ici en balance la paire  $(G, G')$  et la paire  $(K, M')$ . Puisque  $K$  est compact, la correspondance de Howe  $L^2$  est classique pour la paire  $(K, M')$ , autrement dit la représentation  $\sigma \otimes \rho'$  de  $\tilde{K} \cdot \tilde{M}'$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{K} \cdot \tilde{M}'$ . En particulier la représentation  $\rho'$  de  $\tilde{M}'$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{M}'$ . Une généralisation due à Li [36, Theorem 4.1] du Théorème 5.1 implique (puisque 1)  $\rho'$  est une représentation unitaire de plus haut poids et 2) la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{G}'$  est fortement  $L^{2+\varepsilon}$ ) que la représentation  $\pi'$  de  $\tilde{G}'$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\rho'$  et donc de  $\omega$  à  $\tilde{G}'$ . La représentation  $\pi'$  intervient donc dans la correspondance de Howe  $L^2$ . D'après Howe [28, Theorem 6.1], la représentation  $\pi \otimes \pi'$  de  $\tilde{G} \cdot \tilde{G}'$  est alors équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\omega$  à  $\tilde{G} \cdot \tilde{G}'$  et elle intervient avec multiplicité un. La composante  $\pi$ -isotypique  $\mathcal{Y}(\pi)$  de la représentation unitaire  $(\omega, \mathcal{Y})$  est isomorphe à  $\pi \otimes \pi'$  et coïncide donc avec la composante  $\pi'$ -isotypique  $\mathcal{Y}(\pi')$ .

On peut alors appliquer dans ce contexte une idée due à Howe [27]. Étant données deux paires réductives duales irréductibles de type I  $(H, H')$  et  $(G, G')$  en balance dans le groupe symplectique  $Sp$  et  $\pi \leftrightarrow \pi'$  (resp.  $\sigma \leftrightarrow \sigma'$ ) des représentations intervenant dans la correspondance de Howe  $L^2$  pour la paire  $(G, G')$  (resp.  $(H, H')$ ). Supposons que la représentation  $\pi'$  de  $\tilde{G}'$  soit équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\sigma'$  à  $\tilde{G}'$ . La composante  $\pi'$ -isotypique de  $\mathcal{Y}(\sigma)$  est alors non triviale =  $\mathcal{Y}(\sigma \otimes \pi')$ . Mais  $G'$  et  $H$  commutent dans  $Sp$  et donc

$$\mathcal{Y}(\pi')(\sigma) = \mathcal{Y}(\sigma \otimes \pi') = \mathcal{Y}(\sigma)(\pi').$$

Puisqu'enfin  $\mathcal{Y}(\pi') = \pi \otimes \pi'$ , la représentation  $\sigma$  de  $\tilde{H}$  est nécessairement équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\pi$  à  $\tilde{H}$  et intervient avec la même multiplicité que  $\pi'$  dans  $\sigma'$ .

Dans la prochaine section nous appliquons ce principe pour déduire du Théorème 5.1 des résultats analogues pour les représentations cohomologiques des groupes unitaires et orthogonaux.

## 5.2. Restriction de représentations cohomologiques

Nous revenons maintenant au cas  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$  ou  $O(p, q)$  et supposons que  $G$  contient un sous-groupe  $H$  tel que  $H^{\text{nc}} = U(p, q-r)$  ou  $O(p, q-r)$ , plongé de manière usuelle (stable par l'involution de Cartan) et avec  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ .

Soient  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  et  $\pi'$  une représentation unitaire irréductible de  $H$ . Par définition la multiplicité de  $\pi'$  dans  $\pi|_H$  est le plus grand entier  $m$  tel que  $\pi|_H$  contienne  $m$  sous-espaces irréductibles 2 à 2 orthogonaux sur chacun desquels l'action de  $H$  est équivalente à la représentation  $\pi'$ . Soit  $V$  l'espace de la représentation  $\pi$  (c'est également l'espace de la représentation  $\pi|_H$ ). Soit  $V' \subset V$  le plus grand sous-espace sur lequel l'action de  $H$  est équivalente à un multiple de  $\pi'$ . Soit  $\beta : V \rightarrow V'$  la projection orthogonale correspondante. Soit  $K$  le sous-groupe compact maximal de  $G^{\text{nc}}$  et  $K^H = K \cap H^{\text{nc}}$ . Notons  $V_0$  (resp.  $V'_0$ ) le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module (( $\mathfrak{h}, K^H$ )-module) constitué des vecteurs  $K$ -finis de  $V$  (resp.  $K^H$ -finis de  $V'$ ). On a alors une application naturelle

$$(5.5) \quad H^*(\mathfrak{g}, K; V_0) \longrightarrow H^*(\mathfrak{h}, K^H; V'_0),$$

obtenue en composant

$$(5.6) \quad \begin{aligned} H^*(\mathfrak{g}, K; V_0) &\longrightarrow H^*(\mathfrak{h}, K^H; V_0) \\ &\longrightarrow H^*(\mathfrak{h}, K^H; V'_0) \end{aligned}$$

où la première application est obtenue en restreignant de  $(\mathfrak{g}, K)$  à  $(\mathfrak{h}, K^H)$  et la seconde est induite par la projection  $\beta : V_0 \rightarrow V'_0$ .

Nous démontrons maintenant les deux théorèmes suivants concernant la restriction de certaines représentations cohomologiques respectivement dans le cas unitaire et dans le cas orthogonal.

**THÉORÈME 5.2.** — *Soient  $H = U(p, q-r) \subset U(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Alors, pour tout couple d'entiers naturels  $(i, j)$  tel que  $i + j \leq q - r$ ,*

1. *la représentation cohomologique  $A((i^p), ((q-r-j)^p))_H$  de  $H$  apparaît avec multiplicité un dans la restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A((i^p), ((q-j)^p))$  de  $G$ , et*
2. *l'application naturelle en cohomologie*

$$(5.7) \quad H^{p_i, p_j}(\mathfrak{g}, K; A((i^p), ((q-j)^p))) \longrightarrow H^{p_i, p_j}(\mathfrak{h}, K^H; A((i^p), ((q-r-j)^p))_H)$$

*est un isomorphisme d'espaces de dimension un.*

THÉORÈME 5.3. — Soient  $H = SO_0(p, q - r) \subset SO_0(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Alors, pour tout entier naturel  $i \leq (q - r)/2$ ,

1. la représentation cohomologique  $A((i^p))_H^\pm$  de  $H$  apparaît avec multiplicité un dans la restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A((i^p))$  de  $G$ , et
2. l'application naturelle en cohomologie

$$(5.8) \quad H^{pi}(\mathfrak{g}, K; A((i^p))) \longrightarrow H^{pi}(\mathfrak{h}, K^H; A((i^p))_H^\pm)$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

*Démonstrations.* — Ces deux Théorèmes se démontrent de la même manière. Nous commençons par démontrer le point dans le cas des groupes orthogonaux. Nous allons travailler avec les groupes  $O(p, q)$  et  $O(p, q - r) \times O(r)$  et donc avec les représentations  $\overline{A((i^p))}$  et  $\overline{A((i^p))}_H$ ; cette dernière représentation étant triviale sur le facteur  $O(r)$  (nous la considérerons tour à tour comme une représentation de  $O(p, q - r) \times O(r)$  ou de  $O(p, q - r)$ ). En regardant les  $K$ -types, il est facile de vérifier que la restriction de  $\overline{A((i^p))}$  au groupe  $SO_0(p, q)$  reste irréductible et est égale à  $A((i^p))$ , tant que  $i < q/2$ . Quand  $q - r = 2i$ , la restriction de  $\overline{A((i^p))}_H$  au groupe  $SO_0(p, q - r) \times SO_0(r)$  est somme directe des deux représentations irréductibles  $A((i^p))_H^+$  et  $A((i^p))_H^-$  de  $SO_0(p, q - r)$ . Dans tous les cas la multiplicité de la représentation  $A((i^p))_H^\pm$  dans la restriction à  $H$  de la représentation  $A((i^p))$  de  $G$  est donc égale à la multiplicité de  $\overline{A((i^p))}_H$  dans  $\overline{A((i^p))}$ . C'est cette dernière multiplicité que nous calculons maintenant.

Ce calcul repose sur la correspondance thêta locale. Nous considérons les inclusions

$$O(r) \times O(p, q - r) \subset O(p, q)$$

et

$$Sp(2i, \mathbb{R}) \subset Sp(2i, \mathbb{R}) \times Sp(2i, \mathbb{R})$$

(plongement diagonal). Les paires  $(O(p, q), Sp(2i, \mathbb{R}))$  et  $(O(r) \times O(p, q - r), Sp(2i, \mathbb{R}) \times Sp(2i, \mathbb{R}))$  sont des paires réductives duales en balance dans  $Sp_{2i(p+q)}$  :

$$(5.9) \quad \begin{array}{ccc} O(p, q) & & Sp(2i, \mathbb{R}) \times Sp(2i, \mathbb{R}) \\ | & \times & | \\ O(r) \times O(p, q - r) & & Sp(2i, \mathbb{R}) \end{array}$$

Soient  $\pi$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les relevés respectifs au groupe  $\widetilde{Sp}(2i, \mathbb{R})$ , via la correspondance thêta locale, de la représentation  $\overline{A((i^p))}$  de  $O(p, q)$ , de la représentation triviale de  $O(r)$  et de la représentation  $\overline{A((i^p))}_H$  de  $O(p, q - r)$ . Dans [36], Li montre par la méthode que nous avons rappelé au paragraphe précédent que ces représentations interviennent dans la correspondance  $L^2$ , il décrit de plus explicitement les relevés thêta locaux de ces représentations cohomologiques. Sous l'hypothèse  $2i \leq q - r$ , Li montre que les trois représentations  $\pi$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont toutes des séries discrètes, de plus bas  $K$ -types (ayant pour plus haut poids) respectifs

$(-(p+q)/2, \dots, -(p+q)/2)$ ,  $(-r/2, \dots, -r/2)$  et  $(-(p+q-r)/2, \dots, -(p+q-r)/2)$ . Remarquons que la somme des deux derniers poids est égale au premier poids. Puisque  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des séries discrètes, elles contiennent leur plus bas  $K$ -type avec multiplicité un, le  $K$ -type  $(-(p+q)/2, \dots, -(p+q)/2)$  apparaît donc avec multiplicité exactement un dans la restriction du produit tensoriel  $\pi_1 \otimes \pi_2$ . Le Théorème 5.1 implique alors que la représentation  $\pi$  apparaît avec multiplicité exactement un dans le produit tensoriel  $\pi_1 \otimes \pi_2$ . Le résultat de Howe rappelé au précédent paragraphe implique alors que la multiplicité de la représentation  $A((i^p))_H^\pm$  dans la restriction à  $H$  de la représentation  $A((i^p))$  de  $G$  est exactement égale à 1. Ce qui conclut la démonstration du premier point dans le cas orthogonal.

La démonstration dans le cas unitaire est identique (elle est même un peu plus simple puisque les groupes sont connexes) en utilisant les groupes en balance suivants :

$$\begin{array}{ccc} U(p, q) & & U(i, j) \times U(i, j) \\ | & \times & | \\ U(r) \times U(p, q-r) & & U(i, j) \end{array}$$

Il nous reste à montrer les deuxièmes points des Théorèmes 5.2 et 5.3. Nous voulons donc démontrer que les applications naturelles (5.7) et (5.13) sont des isomorphismes entre espaces de dimension un. La démonstration est similaire dans les cas orthogonaux et unitaires. Pour changer nous allons maintenant traiter le cas unitaire.

Dans [57] Vogan et Zuckerman démontrent que les espaces des deux côtés de (5.7) sont de dimension un. Rappelons que  $V((i^p), ((q-j)^p))$  (resp.  $V((i^p), ((q-r-j)^p))_H$ ) est le plus bas  $K$ -type de la représentation  $A((i^p), ((q-j)^p))$  (resp.  $A((i^p), ((q-r-j)^p))_H$ ). Le membre de gauche (resp. droite) de (5.7) est isomorphe à

$$(5.10) \quad \begin{aligned} & \text{Hom}_K \left( \bigwedge^{p_i, p_j} \mathfrak{p}, V((i^p), ((q-j)^p)) \right) \\ & \text{(resp. } \text{Hom}_K \left( \bigwedge^{p_i, p_j} \mathfrak{p}_H, V((i^p), ((q-r-j)^p))_H \right)). \end{aligned}$$

La démonstration de la première partie du Théorème et le Lemme 2.3 (ce serait le Lemme 2.6 dans le cas orthogonal) impliquent que l'application composée

$$(5.11) \quad V((i^p), ((q-j)^p)) \longrightarrow A((i^p), ((q-r-j)^p))_H \longrightarrow V((i^p), ((q-r-j)^p))_H,$$

où la première application est la restriction de la projection orthogonale  $\beta$  et la deuxième application est la projection sur le plus bas  $K^H$ -type, est non nulle. Elle est donc surjective, puisque le membre de droite de (5.11) est irréductible.

De plus, le plus haut poids apparaît avec multiplicité un dans chacune des extrémités de (5.11). L'application (5.11) envoie donc un vecteur de plus haut poids non nul vers un vecteur de plus haut poids non nul. Compte tenu de (5.10) ceci implique que l'application (5.7) est bien un isomorphisme.  $\square$

Au vu des Lemmes 2.3 et 2.6, nous conjecturons plus généralement les énoncés suivants.

CONJECTURE 5.4. — Soient  $H = U(p, q - r) \subset U(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible.

1. La restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A(\lambda, \mu)$  de  $G$  contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif  $|\lambda| + |\hat{\mu}|$  si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ . Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique  $A(\lambda, \mu - (r^p))$  de  $H$  avec multiplicité exactement égale à 1.
2. Supposons que la partition  $(r^p)$  s'inscrive dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$ . Alors, l'application naturelle en cohomologie

$$H^{|\lambda|, |\hat{\mu}|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda, \mu)) \longrightarrow H^{|\lambda|, |\hat{\mu}|}(\mathfrak{h}, K^H; A(\lambda, \mu - (r^p))_H)$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

CONJECTURE 5.5. — Soient  $H = SO_0(p, q - r) \subset SO_0(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Soit  $\lambda$  une partition orthogonale dans  $p \times q$ .

1. La restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  de  $G$  contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif  $|\lambda|$  si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  de  $H$  avec multiplicité exactement égale à 1.
2. Supposons que la partition  $(r^p)$  s'inscrive dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Alors, l'application naturelle en cohomologie

$$H^{|\lambda|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}) \longrightarrow H^{|\lambda|}(\mathfrak{h}, K^H; A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2})$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

Remarquons enfin qu'en considérant les paires  $(U(p, q), U(i))$  et  $(O(p, q), Sp(2i, \mathbb{R}))$  en balance dans  $Sp_{2i(p+q)}$  :

$$\begin{array}{ccc} U(p, q) & & Sp(2i, \mathbb{R}) \\ | & \times & | \\ O(p, q) & & U(i), \end{array}$$

la démonstration des Théorèmes 5.2 et 5.3 implique le théorème suivant.



THÉORÈME 5.6. — Soient  $H = O(p, q) \subset U(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$ . Alors, pour tout entier naturel  $i \leq q/2$ ,

1. la représentation cohomologique  $\overline{A((i^p))}_H$  de  $H$  apparaît avec multiplicité un dans la restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A((i^p))$  de  $G$ , et
2. l'application naturelle en cohomologie

$$(5.12) \quad H^{pi,0}(\mathfrak{g}, K; A((i^p))) \longrightarrow H^{pi}(\mathfrak{h}, K^H; \overline{A((i^p))}_H)$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

Nous conjecturons plus généralement l'énoncé suivant.

CONJECTURE 5.7. — Soient  $H = O(p, q) \subset U(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible.

1. Si la restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A(\lambda, \mu)$  de  $G$  contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif  $|\lambda| + |\mu|$  alors  $\lambda = 0$  ou  $\mu = p \times q$ .
2. Supposons par exemple  $\mu = p \times q$ . Alors la restriction à  $H$  de la représentation cohomologique  $A(\lambda)$  de  $G$  contient (discrètement) une représentation de degré fortement primitif  $|\lambda|$  si et seulement si la diagramme est  $\lambda$  est orthogonal. Elle contient dans ce cas la représentation cohomologique  $\overline{A(\lambda)}_H$  de  $H$  avec multiplicité exactement égale à 1.
3. Supposons que la partition  $\lambda$  est orthogonale. Alors, l'application naturelle en cohomologie

$$(5.13) \quad H^{|\lambda|,0}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda)) \longrightarrow H^{|\lambda|}(\mathfrak{h}, K^H; \overline{A(\lambda)}_H)$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

### 5.3. Produits tensoriels de représentations cohomologiques

La démonstration des Théorèmes 5.2 et 5.3 peut également s'appliquer aux plongements diagonaux respectifs

$$U(p, q) \subset U(p, q) \times U(p, q)$$

et

$$SO_0(p, q) \subset SO_0(p, q) \times SO_0(p, q).$$

La considération des paires réductives duales en balance :

$$\begin{array}{ccc} U(p, q) \times U(p, q) & & U(i+k, j+l) \\ | & \times & | \\ U(p, q) & & U(i, j) \times U(k, l) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} O(p, q) \times O(p, q) & & Sp(2(k+l), \mathbb{R}) \\ | & \times & | \\ O(p, q) & & Sp(2k, \mathbb{R}) \times Sp(2l, \mathbb{R}) \end{array}$$

permet alors de démontrer les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 5.8. — Soit  $G = U(p, q)$ ,  $1 \leq p, q$ . Alors, pour tout quadruplet  $(i, j, k, l)$  d'entiers  $\geq 0$  de somme  $i + j + k + l \leq q$ ,

1. la représentation cohomologique  $A((i+k)^p, ((q-j-l)^p))$  de  $G$  apparaît avec multiplicité un dans le produit tensoriel des représentations cohomologiques  $A((i^p), ((q-j)^p))$  et  $A((k^p), ((q-l)^p))$  de  $G$ , et
2. l'application « cup-produit »

$$(5.14) \quad \begin{array}{c} H^{p_i, p_j}(\mathfrak{g}, K; A((i^p), ((q-j)^p))) \otimes H^{p_k, p_l}(\mathfrak{g}, K; A((k^p), ((q-l)^p))) \\ \longrightarrow H^{p^{(i+k)}, p^{(j+l)}}(\mathfrak{g}, K; A(((i+k)^p), ((q-j-l)^p))) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

THÉORÈME 5.9. — Soit  $G = SO_0(p, q)$ ,  $1 \leq p, q$ . Alors, pour tout couple d'entiers  $\geq 0$  de somme  $k + l \leq q/2$ ,

1. la représentation cohomologique  $A(((k+l)^p))^{\pm}$  de  $G$  apparaît avec multiplicité un dans le produit tensoriel des représentations cohomologiques  $A((k^p))^{\pm}$  et  $A((l^p))^{\pm}$  de  $G$ , et
2. l'application « cup-produit »

$$(5.15) \quad H^{p^k}(\mathfrak{g}, K; A((k^p))^{\pm}) \otimes H^{p^l}(\mathfrak{g}, K; A((l^p))^{\pm}) \longrightarrow H^{p^{(k+l)}}(\mathfrak{g}, K; A(((k+l)^p))^{\pm})$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

De manière similaire à la Conjecture 5.4, et au vu de [6] nous conjecturons de plus le résultat suivant.

CONJECTURE 5.10. — Soit  $G = U(p, q)$ ,  $1 \leq p, q$ . Soient  $(\lambda, \mu)$  et  $(\alpha, \beta)$  deux couples compatibles de partitions incluses dans  $p \times q$ .

1. Le produit tensoriel des représentations cohomologiques  $A(\lambda, \mu)$  et  $A(\alpha, \beta)$  de  $G$  contient (discrètement) une représentation cohomologique de degré fortement primitif  $|\lambda| + |\hat{\mu}| + |\alpha| + |\hat{\beta}|$  si et seulement si il existe une partition  $\nu \subset p \times q$  telle que  $\nu$  (resp.  $\hat{\nu}$ ) s'inscrive dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  (resp.  $\beta/\alpha$ ).
2. S'il existe une partition  $\nu \subset p \times q$  telle que  $\nu$  (resp.  $\hat{\nu}$ ) s'inscrive dans le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  (resp.  $\beta/\alpha$ ), on peut choisir  $\nu$  telle que  $|\nu| = |\alpha| + |\hat{\beta}|$  et telle que l'image de  $\nu$  dans  $\mu/\lambda$  réuni à  $\lambda$  définisse une partition  $\lambda \uplus \nu \subset \mu$  formant un couple compatible avec  $\mu$  <sup>(1)</sup>. Le produit tensoriel de  $A(\lambda, \mu)$

<sup>(1)</sup>On peut effectivement déduire cela dans le cas de [6] à l'aide de [3, Lemme 27] par récurrence et en distinguant les cas  $p_1 + \dots + p_m < \text{ou} = p$ .

et  $A(\alpha, \beta)$  de  $G$  contient alors (discrètement) la représentation cohomologique  $A(\lambda \uplus \nu, \mu)$ .

3. La représentation cohomologique  $A(\lambda \uplus \nu, \mu)$  intervient avec multiplicité exactement égale à 1, et l'application naturelle en cohomologie

$$H^{|\lambda|, |\hat{\mu}|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda, \mu)) \otimes H^{|\alpha|, |\hat{\beta}|}(\mathfrak{g}, K; A(\alpha, \beta)) \longrightarrow H^{|\lambda|+|\hat{\mu}|+|\alpha|+|\beta|}(\mathfrak{g}, K; A(\lambda \uplus \nu, \mu))$$

est un isomorphisme d'espaces de dimension un.

Finalement les Conjectures 5.7 et 5.10 impliquent des conjectures analogues dans le cas des groupes orthogonaux, nous laissons le soin au lecteur d'éventuellement les énoncer.

### 5.4. Représentations cohomologiques discrètement décomposables

Soit toujours  $G$  un groupe de Lie réel réductif et connexe. Considérons  $H$  un sous-groupe fermé réductif tel que l'intersection  $K^H = K \cap H$  du sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$  avec  $H$  soit un sous-groupe compact maximal de  $H$ . On dit (voir [32, Définition 1.1, 1.2]) qu'un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module unitarisable et irréductible est *discrètement décomposable* si, vu comme  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module, il est isomorphe à une somme directe de  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -modules irréductibles.

Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$ . Remarquons que si la restriction  $\pi|_{K^H}$  est  $K^H$ -admissible, autrement dit si chaque représentation irréductible de  $K^H$  n'intervient qu'avec une multiplicité finie (peut-être nulle) dans  $\pi|_{K^H}$ , alors le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé à  $\pi$  est discrètement décomposable comme  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module et chaque sous- $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module irréductible est de multiplicité finie (voir [32, Proposition 1.6(2)]).

Supposons maintenant que  $H$  soit un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes d'une involution  $\tau$  sur  $G$  qui commute à l'involution de Cartan de  $G$ . Nous notons  $\mathfrak{k}_{0\pm} = \{X \in \mathfrak{k}_0 : \tau(X) = \pm X\}$ . Fixons  $\mathfrak{t}_0$  une sous-algèbre de Cartan  $\tau$ -stable de  $\mathfrak{k}_0$  telle que  $\mathfrak{t}_{0-} = \mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{k}_{0-}$  soit un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{k}_{0-}$ . Soit  $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  (resp.  $\Sigma(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}_-)$ ) le système de racine (restreint) de  $\mathfrak{k}$  par rapport à  $\mathfrak{t}$  (resp.  $\mathfrak{t}_-$ ). Fixons alors deux sous-systèmes positifs  $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  et  $\Sigma^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}_-)$  compatibles.

Soit maintenant  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\lambda)$  une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$  définie par  $\lambda \in i\mathfrak{t}_0$  dominant par rapport à  $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . L'ensemble

$$\mathbb{R}^+ \langle \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \rangle = \left\{ \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}; \mathfrak{t})} n_\beta \beta : n_\beta \geq 0 \right\}$$

définit alors un cône fermé dans  $i\mathfrak{t}_0$ .

Le théorème suivant, dû à Kobayashi, se déduit alors de [31, Theorem 3.2] et [32, Theorem 4.2].

THÉORÈME 5.11. — *Conservons les notations ci-dessus. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mathbb{R}^+\langle \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \rangle \cap i\mathfrak{t}_{0-} = \{0\}$ .
2. la restriction  $A_{\mathfrak{q}}|_{K^H}$  de la représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  de  $G$  est  $K^H$ -admissible.
3. le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module  $A_{\mathfrak{q}}$  est discrètement décomposable comme  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module.

Nous allons maintenant vérifier le critère 1. du Théorème pour  $(G, H) = (U(p, q), U(p, q - r) \times U(r))$  (resp.  $= (SO_0(p, q), SO_0(p, q - r) \times SO(r))$ ). Nous en déduirons finalement de nouveaux cas de la Conjecture 5.4.

*Le cas unitaire.* — Nous supposons donc maintenant  $(G, H) = (U(p, q), U(p, q - r) \times U(r))$  avec  $2r \leq q$ , où le plongement  $U(p, q - r) \times U(r) \rightarrow U(p, q)$  est standard donné par :

$$(A, B) \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Après conjugaison par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1_p & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}1_r & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}}1_r \\ & 0 & 1_{q-2r} & 0 \\ & \frac{i}{\sqrt{2}}J_r & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}J_r \end{pmatrix} \in G$$

(ici  $1_r$  désigne la matrice identité de taille  $r$  et  $J_r$  désigne la matrice carrée  $r \times r$  avec que des 1 sur l'anti-diagonale), on obtient un plongement de  $H$  dans  $G$  pour lequel le sous-espace  $\mathfrak{t}_0$  de  $\mathfrak{g}_0$  constitué des matrices diagonales (à coefficients imaginaires purs) soit une sous-algèbre de Cartan  $\tau$ -stable de  $\mathfrak{k}_0$  telle que  $\mathfrak{t}_{0-} = \mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{k}_{0-}$  soit un sous-espace abélien maximal de  $\mathfrak{k}_{0-}$ . Si nous notons comme d'habitude  $(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$  les éléments de  $i\mathfrak{t}_0$ , le sous-espace  $i\mathfrak{t}_{0-}$  est constitué des éléments

$$(0, \dots, 0; -u_1, \dots, -u_r, 0, \dots, 0, u_r, \dots, u_1).$$

Considérons maintenant  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(\lambda, \mu)$  la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable associée à un couple compatible de partitions  $(\lambda, \mu)$ . Les racines de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}$  sont alors les  $x_i - y_j$  lorsque la case de coordonnées  $(i, j)$  dans  $p \times q$  appartient à  $\lambda$  et les  $y_j - x_i$  lorsque la case de coordonnées  $(i, j)$  n'appartient pas à  $\mu$ . Celles-ci correspondent respectivement aux vecteurs  $(e_i; -f_j)$  et  $(-e_i; f_j)$  dans  $i\mathfrak{t}_0$ . Le cône fermé  $\mathbb{R}^+\langle \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} \rangle$  intersecte donc non trivialement le sous-espace  $i\mathfrak{t}_{0-}$  si et seulement s'il existe un couple d'entiers  $(i, j)$  dans  $[1, p] \times [1, r]$  tel que

- la case de coordonnées  $(i, j)$  dans  $p \times q$  appartienne au diagramme  $\lambda$ , et
- la case de coordonnées  $(i, q - j + 1)$  dans  $p \times q$  n'appartienne pas au diagramme  $\mu$ .

Remarquons que si c'est le cas pour un couple  $(i, j)$ , c'est également le cas pour le couple  $(i, 1)$ . Finalement, le Théorème 5.11 implique le théorème suivant.



diagramme  $\lambda$ . Remarquons que si c'est le cas pour un couple  $(i, j)$ , c'est également le cas pour le couple  $(i, 1)$  et donc pour le couple  $(t, 1)$ . Finalement, le Théorème 5.11 implique le théorème suivant.

**THÉORÈME 5.13.** — *Soient  $p, q, r$  des entiers naturels avec  $2r \leq q$  et  $H = SO_0(p, q-r) \times SO(r)$  plongé de manière standard dans  $G = SO_0(p, q)$ . Soit  $\lambda$  une partition orthogonale dans  $p \times q$ . Alors, la restriction  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}|_{K^H}$  de la représentation cohomologique  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  de  $G$  au compact maximal  $K^H = SO(p) \times SO(q-r) \times SO(r)$  de  $H$  est  $K^H$ -admissible si et seulement si  $\lambda \subset [p/2] \times q$ .*

*Applications.* — Nous allons maintenant déduire du Théorème 5.12 le nouveau cas suivant de la Conjecture 5.4.

**THÉORÈME 5.14.** — *Soient  $H = U(p, q-r) \subset U(p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Alors, pour  $i, j$  entiers naturels  $\leq q-r$  tels que  $i+j \geq q$  et pour tout entier naturel  $k \leq p$ , la représentation cohomologique  $A(((i^k), ((q-r)^k, (q-r-j)^{p-k})))_H$  de  $H$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la représentation cohomologique  $A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))$  de  $G$ .*

*Démonstration.* — Fixons  $i, j, k$  comme dans l'énoncé du Théorème et considérons la représentation cohomologique  $A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))$  de  $G$ . D'après le Théorème 5.12, le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé (toujours noté)  $A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))$  est discrètement décomposable comme  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module. Écrivons donc

$$(5.16) \quad A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k}))) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{H}} \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{m(\pi)}$$

comme  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -module. Pour tout  $\pi \in \widehat{H}$  et tout entier  $l$  ( $1 \leq l \leq m(\pi)$ ), notons

$$\text{pr}_\pi^{(l)} : A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k}))) \longrightarrow \pi$$

la projection sur la  $l$ -ième composante de  $\pi$  dans la somme directe (5.16), et

$$e_\pi^{(l)} : \pi \longrightarrow A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))$$

l'injection dans la  $l$ -ième composante de  $\pi$ . Les applications  $\text{pr}_\pi^{(l)}$  et  $e_\pi^{(l)}$  sont toutes deux des  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -morphisms. Remarquons que si  $U \subset A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))$  est un sous-espace  $K$ -invariant de dimension finie, alors  $\text{pr}_\pi^{(l)}(U) = 0$  sauf peut-être pour un nombre fini de  $\pi \in \widehat{H}$  (voir [32, Proposition 1.6(1)]). En particulier, si  $\psi \in \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k}))))$ , alors le membre de droite de

$$\psi = \sum_{\pi \in \widehat{H}} \sum_{l=1}^{m(\pi)} e_\pi^{(l)} \circ \text{pr}_\pi^{(l)} \circ \psi$$

est une somme finie puisque  $\dim \bigwedge^* \mathfrak{p} < \infty$ . On a donc un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(\mathfrak{h}, K^H; A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))) \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{H}} m(\pi) H^*(\mathfrak{h}, K^H; \pi).$$

D'un autre côté les méthodes de [3] (notamment la démonstration de la Proposition 11) impliquent que l'application naturelle de restriction

$$H^*(\mathfrak{g}, K; A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k})))) \longrightarrow H^*(\mathfrak{h}, K^H; A(((i^k), (q^k, (q-j)^{p-k}))))$$

est injective. L'un des  $(\mathfrak{h}, K^H)$ -modules  $\pi$  de multiplicité  $m(\pi) \neq 0$  dans  $A(((i^k), ((q-r)^k, (q-r-j)^{p-k})))$  doit donc être cohomologique. Un examen des  $K$ -types montre finalement que  $\pi = A(((i^k), ((q-r)^k, (q-r-j)^{p-k})))_H$ .  $\square$

De la même manière on peut déduire du Théorème 5.13 le nouveau cas suivant de la Conjecture 5.5.

**THÉORÈME 5.15.** — *Soient  $H = SO_0(2p, q-r) \subset SO_0(2p, q) = G$  où l'inclusion est l'inclusion standard,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Alors, pour tout entier  $q/2 \leq i \leq q-r$ , la représentation cohomologique  $A((i^p))_H^\pm$  de  $H$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la représentation  $A((i^p))$  de  $G$ .*

Les résultats correspondants aux Théorèmes 5.13 et 5.12 pour le cup-produit pourraient évidemment être obtenus de la même manière.





## CHAPITRE 6

### GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE SYMÉTRIQUE ASSOCIÉ AU GROUPE $O(p, q)$

Dans ce chapitre nous étudions la géométrie de l'espace symétrique associé au groupe  $O(p, q)$ . Nous suivons essentiellement le même plan que dans [7] pour l'étude du cas du groupe  $U(p, q)$ . Nous avons grandement profité des travaux de Wang [59] sur des problèmes proches.

#### 6.1. Préliminaires

Soient  $p, q$  et  $r$  trois entiers strictement positifs. Dans ce chapitre  $G = O(q + r, p)$ ,  $K = O(q + r) \times O(p)$  et  $X_{p, q+r} = G/K$ , l'espace symétrique associé. Nous aurons besoin d'un modèle pour  $X_{p, q+r}$ . Posons donc

$$X_{p, q+r} = \{Z \in M_{q+r, p}(\mathbb{R}) : {}^t Z Z < 1_p\}.$$

Étant donné un élément  $g \in G$ , on peut écrire

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où  $A \in M_{q+r, q+r}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{q+r, p}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{p, q+r}(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{p, p}(\mathbb{R})$ . Remarquons que le fait que  $g \in G$  équivaut à ce que

$$(6.1) \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t A & -{}^t C \\ -{}^t B & {}^t D \end{pmatrix}.$$

L'action de  $g$  sur  $X_{p, q+r}$  est donnée par

$$(6.2) \quad gZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Le groupe  $G$  agit transitivement sur  $X_{p, q+r}$  et le groupe d'isotropie du point  $Z = 0$  est  $K$ . Sur  $X_{p, q+r}$  on a une métrique riemannienne  $G$ -invariante définie par

$$(6.3) \quad \text{tr} \left( (1_{q+r} - Z {}^t Z)^{-1} dZ (1_p - {}^t Z Z)^{-1} d {}^t Z \right).$$

Cette métrique est la métrique symétrique induite par la forme de Killing de  $G$ . Nous en donnons également la description suivante.

Notons toujours  $\mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{k}_0$  les algèbres de Lie respectives de  $G$  et  $K$  et  $\mathfrak{p}_0$  le supplémentaire orthogonal de  $\mathfrak{k}_0$  dans  $\mathfrak{g}_0$  par rapport à la forme de Killing. Étant donnée une matrice  $Z \in M_{q+r,p}(\mathbb{R})$ , notons

$$\xi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ {}^t Z & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons alors que  $\mathfrak{p}_0 = \{\xi(Z) : Z \in M_{q+r,p}(\mathbb{R})\}$ . La forme de Killing induit sur  $\mathfrak{p}_0$  le produit scalaire  $\text{tr}(Z^t W)$ .

Nous identifions  $\mathfrak{p}_0$  avec l'espace tangent  $T_0(X_{p,q+r})$  à  $X_{p,q+r}$  au point  $Z = 0$ . Pour  $Z \in M_{q+r,p}(\mathbb{R})$ , soit  $\tau_t$  la courbe  $\tau_t = (\exp t\xi(Z))0$ . L'image de  $\xi(Z)$  dans  $T_0(X_{p,q+r})$  est le vecteur tangent  $\dot{\tau}_0$  à la courbe  $\tau_t$  en  $t = 0$ . Sous cette identification, la métrique riemannienne  $g$  de  $X_{p,q+r}$  est induite par la forme de Killing :

$$g_0(\xi(Z), \xi(W)) = \text{tr}(Z^t W).$$

## 6.2. Sous-espaces totalement géodésiques

Si  $v \in \mathbb{R}^n$ , où  $n = p + q + r$ , nous décomposons  $v$  en

$$v = \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}, \quad v_+ \in \mathbb{R}^{q+r}, \quad v_- \in \mathbb{R}^p.$$

Soit  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$  et  $Z \in X_{p,q+r}$ , on introduit les facteurs d'automorphie :

$$(6.4) \quad J(g, Z) = \begin{pmatrix} l(g, Z) & 0 \\ 0 & j(g, Z) \end{pmatrix},$$

$$(6.5) \quad j(g, Z) = CZ + D,$$

$$(6.6) \quad l(g, Z) = A - (gZ)C.$$

L'action de  $g$  sur  $X_{p,q+r}$  peut alors prendre la forme suivante :

$$g \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gZ \\ 1_p \end{pmatrix} j(g, Z), \quad Z \in X_{p,q+r}.$$

Dans la suite,  $n = p + q + r$  et  $Q$  est la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$  de matrice (elle aussi notée  $Q$ ) :  $\begin{pmatrix} 1_{q+r} & 0 \\ 0 & -1_p \end{pmatrix}$ .

Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $r$  et positif par rapport à  $Q$ . On associe à un tel espace un sous-groupe  $G_V$  de  $G$  et une sous-variété  $X_V$  de  $X = X_{p,q+r}$  définis par :

$$G_V = \{g \in G : g \text{ laisse invariant le sous-espace } V\},$$

$$X_V = \{Z \in X : {}^t Z v_+ = v_- \text{ pour tout } v \in V\}.$$

LEMME 6.1. — *La sous-variété  $X_V$  et le sous-groupe  $G_V$  ont les propriétés suivantes.*

1. *Pour tout  $g \in G$ ,  $gX_V = X_{gV}$ .*
2. *Le groupe  $G_V$  agit transitivement sur  $X_V$ .*
3. *La sous-variété  $X_V$  est un sous-espace symétrique totalement géodésique de dimension  $pq$ . En tant qu'espace symétrique  $X_V$  est isomorphe à  $X_{p,q}$ .*

*Démonstration.* — Il découle facilement des définitions que

$$X_V = \left\{ Z \in X : {}^t v Q \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} = 0, \text{ pour tout } v \in V \right\}.$$

Alors si  $g \in G$ ,  $Z \in X_V$  et  $v \in V$ , on vérifie facilement que

$$0 = {}^t v Q \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} = {}^t v {}^t g Q g \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} = {}^t g v Q \begin{pmatrix} gZ \\ 1_p \end{pmatrix} j(g, Z).$$

Donc  ${}^t v {}^t g Q g \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} = {}^t g v Q \begin{pmatrix} gZ \\ 1_p \end{pmatrix} = 0$  et le premier point est démontré.

Puis, il découle du Théorème de Witt et du premier point que l'on peut supposer  $V = \mathbb{R}^r$ . Dans ce cas,

$$X_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ W \end{pmatrix} : W \in M_{q,p}(\mathbb{R}), {}^t W W < 1_p \right\}$$

et

$$G_V = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \in G : h \in O(q,p), u \in O(r) \right\}.$$

Et les points 2. et 3. du Lemme 6.1 s'en déduisent facilement.  $\square$

Soit  $e_1, \dots, e_n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Et soit  $V$  le sous-espace engendré par  $e_{q+1}, \dots, e_{q+r}$ . Nous étudions maintenant la fonction distance  $d(Z, X_V)$  d'un élément  $Z \in X$  à  $X_V$ . Étant donné  $Z \in X$ , nous décomposons  $Z$  en

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix},$$

où  $Z_1 \in M_{q,p}(\mathbb{R})$  et  $Z_2 \in M_{r,p}(\mathbb{R})$ . Le sous-espace  $X_V$  est alors donné par

$$X_V = \{Z \in X : Z_2 = 0\}.$$

Un élément  $g \in G_V$  s'écrit comme matrice par blocs

$$g = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & u & 0 \\ C_1 & 0 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Notons  $X_1$  l'espace

$$X_1 = \{W \in M_{q,p}(\mathbb{R}) : {}^t W W < 1_p\}.$$

Le groupe  $G_V$  agit transitivement sur  $X_1$  par :

$$gW = (A_1 W + B_1)(C_1 W + D_1)^{-1}, g \in G_V, W \in X_1.$$

L'action de  $G_V$  sur  $X$  s'écrit :

$$(6.7) \quad gZ = \begin{pmatrix} gZ_1 \\ uZ_2j(g, Z)^{-1} \end{pmatrix}, \quad g \in G_V, \quad Z \in X.$$

D'après (6.7), il existe un élément  $g \in G_V$  tel que  $gZ = Z'$  avec  $Z'_1 = 0$ . La métrique riemannienne de  $X$  étant  $G$ -invariante,  $d(Z, X_V) = d(Z', X_V) = d(0, Z')$ . Il nous suffit donc d'étudier la fonction distance  $d(0, Z)$  de 0 à  $Z$ .

LEMME 6.2. — Soit  $Z \in X$ ,  $d = d(0, Z)$  et  $m$  le rang de  $Z^tZ$ . Alors,

1. si  $m = 1$ ,  $\cosh^2 d = (\det(1_{q+r} - Z^tZ))^{-1}$ ,
2. et en général,

$$\frac{1}{2^m} e^d \leq (\det(1_{q+r} - Z^tZ))^{-1} \leq e^{\sqrt{m}d}.$$

Démonstration. — Il existe un unique  $Y \in M_{q+r,p}(\mathbb{R})$  vérifiant

$$(6.8) \quad \exp(\xi(Y))0 = Z.$$

La courbe  $\exp(t\xi(Y))0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , est une géodésique joignant 0 à  $Z$ . On a donc

$$d^2 = \text{tr}(Y^tY).$$

Soit  $A$  (resp.  $B$ ) une matrice hermitienne positive vérifiant

$$A^2 = Y^tY \quad (\text{resp. } B^2 = {}^tYY).$$

Il découle des définitions que

$$\exp(\xi(Y)) = \begin{pmatrix} \cosh A & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k+1)!} Y \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{2k}}{(2k+1)!} {}^tY & \cosh B \end{pmatrix}.$$

Puisque  $A^{2k}Y = YB^{2k}$ , on déduit de l'expression ci-dessus et de (6.8) que  $Z^tZ = \tanh^2(A)$  et donc que :

$$(6.9) \quad e^A = \frac{1_{q+r} + \sqrt{Z^tZ}}{(1_{q+r} - Z^tZ)^{1/2}}.$$

Il découle facilement du fait que  $A$  est de rang  $m$  que

$$d \leq \text{tr}(A) \leq \sqrt{m}d.$$

Puisque  $Z^tZ < 1_{q+r}$ , si l'on applique le déterminant à (6.9), on obtient le point 2. du Lemme. Si  $m = 1$ ,  $d = \text{tr}(A)$  et le point 1. découle encore de (6.9).  $\square$

LEMME 6.3. — Soient  $h_Z = (1_p - {}^tZ_1Z_1)^{-1}$  et  $\tilde{h}_Z = (1_p - {}^tZZ)^{-1}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{gZ} &= j(g, Z)\tilde{h}_Z{}^tj(g, Z), \quad \text{pour tout } g \in G, \\ h_{gZ} &= j(g, Z)h_Z{}^tj(g, Z), \quad \text{pour tout } g \in G_V. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soit  $l_Z = (1_p - {}^t Z Z)$ . On a :

$$\begin{aligned} l_Z &= -({}^t Z \ 1_p) Q \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} \\ &= -({}^t Z \ 1_p) {}^t g Q g \begin{pmatrix} Z \\ 1_p \end{pmatrix} \\ &= {}^t j(g, Z) l_{gZ} j(g, Z). \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{h}_Z = l_Z^{-1}$ , on obtient la première propriété annoncée. Mais  $h_Z = \tilde{h} \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et pour tout  $g \in G_V$ ,  $j(g, Z) = j(g, \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix})$ , d'où la seconde propriété annoncée.  $\square$

Pour  $Z \in X$ , on introduit les fonctions  $A$  et  $B$  sur  $X$  définies par

$$(6.10) \quad A = \det(1_p - {}^t Z Z)$$

$$(6.11) \quad B = \det(1_p - {}^t Z_1 Z_1).$$

La fonction  $B$  est obtenue en restreignant la fonction  $A$  à  $X_V$ , puis en l'étendant à  $X$  tout entier de façon constante dans la direction de  $Z_2$ .

LEMME 6.4. — *La fonction  $\frac{B}{A}$  est  $G_V$ -invariante.*

*Démonstration.* — Cela découle immédiatement du Lemme 6.3.  $\square$

Nous pouvons maintenant estimer la fonction  $d(Z, X_V)$ .

PROPOSITION 6.5. — *Soient  $Z \in X$  et  $m$  le rang de la matrice  $Z_2 {}^t Z_2$ .*

1. *Si  $m = 1$ ,  $(\cosh d(Z, X_V))^2 = \frac{B}{A}$ .*

2. *En général, on a :*

$$4^m \left( \frac{B}{A} \right) \geq e^{2d(Z, X_V)},$$

et

$$e^{2\sqrt{m}d(Z, X_V)} \geq \frac{B}{A}.$$

*Démonstration.* — Les fonctions  $\frac{B}{A}$  et  $d(\cdot, X_V)$  sont toutes deux  $G_V$ -invariantes. On a vu, cf. (6.7), que l'on pouvait se ramener à ce que  $Z_1 = 0$  et donc  $d(Z, X_V) = d(0, Z_2)$ . Mais alors,  $\frac{B}{A} = (\det(1_p - Z_2 {}^t Z_2))^{-1}$ . Et la Proposition découle alors du Lemme 6.2.  $\square$

Nous aurons également besoin dans la suite des expressions suivantes.

LEMME 6.6. — *On a l'égalité*

$$\frac{B}{A} = \det\{1_r + Z_2(1_p - {}^t Z Z)^{-1} {}^t Z_2\}$$

et l'inégalité

$$1 + r^{-1} \operatorname{tr} (Z_2(1_p - {}^t Z Z)^{-1} {}^t Z_2) \geq \left( \frac{B}{A} \right)^{1/r}.$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} 1_p - {}^t Z_1 Z_1 &= 1_p - {}^t Z Z + {}^t Z_2 Z_2 \\ &= (1_p - {}^t Z Z)^{1/2} \{1_p + (1_p - {}^t Z Z)^{-1/2} {}^t Z_2 Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1/2}\} (1_p - {}^t Z Z)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \det \{1_p + (1_p - {}^t Z Z)^{-1/2} {}^t Z_2 Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1/2}\} \\ &= \det \{1_r + Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1} Z_2\}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre la première partie du Lemme. Remarquons maintenant que la matrice  $Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1} Z_2$  est positive. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres (réelles positives). Alors,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{r} \operatorname{tr} (Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1} Z_2) &= \frac{(1 + \lambda_1) + \dots + (1 + \lambda_r)}{r} \\ &\geq \{(1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_r)\}^{1/r} \\ &= \det \{1_r + Z_2 (1_p - {}^t Z Z)^{-1} Z_2\}^{1/r} \\ &= \left(\frac{B}{A}\right)^{1/r}. \quad \square \end{aligned}$$

### 6.3. Croissance du volume

Examinons maintenant les champs de Jacobi émanant de  $X_V$ . (Une référence générale pour les champs de Jacobi est [48].)

LEMME 6.7. — Soient  $Z \in X_V$ ,  $T_Z(X_V)$  l'espace tangent à  $X_V$  en  $Z$  et  $T_Z(X_V)^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $T_Z(X_V)$  dans  $T_Z(X)$ . Soit  $Y$  un vecteur dans  $T_Z(X_V)^\perp$  avec  $g_Z(Y, Y) = 1$ . Alors,

1. les espaces  $T_Z(X_V)$  et  $T_Z(X_V)^\perp$  sont invariants sous l'application  $R(\cdot, Y)Y$  (où  $R$  désigne le tenseur de courbure de  $X$ ),

2. il existe  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ ,  $l = \max\{r, p\}$  tels que

- $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_l^2 = 1$ ,
- $\lambda_i = 0$ , si  $i > \min\{r, p\}$ ,
- l'opérateur  $R(\cdot, Y)Y|_{T_Z(X_V)}$  a pour valeurs propres

$$\underbrace{-\lambda_1^2, \dots, -\lambda_1^2}_q, \quad \underbrace{-\lambda_2^2, \dots, -\lambda_2^2}_q, \quad \dots, \quad \underbrace{-\lambda_p^2, \dots, -\lambda_p^2}_q,$$

- l'opérateur  $R(\cdot, Y)Y|_{T_Z(X_V)^\perp}$  a pour valeurs propres

$$-(\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq p.$$

*Démonstration.* — D'après (6.7), on peut supposer que  $Z = 0$  et  $Y = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}$ . D'après [30, Theorem 3.2, Chap. XI], étant donné  $X \in T_0(X)$ , le tenseur de courbure est donné par :

$$(6.12) \quad R(X, Y)Y = -[[X, Y], Y].$$

Si  $X = \xi \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix} \in T_0(X_V)$ , un calcul simple donne alors

$$(6.13) \quad R(X, Y)Y = \xi \begin{pmatrix} -N^t M M \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si maintenant  $X = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix} \in T_0(X_V)^\perp$ , un autre calcul simple à l'aide de (6.12) donne

$$(6.14) \quad R(X, Y)Y = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ -L^t M M + 2M^t L M - M^t M L \end{pmatrix}.$$

Il découle de (6.13) et (6.14) que les espaces  $T_0(X_V)$  et  $T_0(X_V)^\perp$  sont invariants sous l'application  $R(\cdot, Y)Y$ . Remarquons que l'on peut toujours supposer que  $M$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } r > p,$$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ si } r = p,$$

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_r & \end{pmatrix} \text{ si } r < p,$$

avec  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ ,  $l = \max\{r, p\}$  et  $\lambda_i = 0$  si  $i > \min\{r, p\}$ . Puisque  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_l^2 = \text{tr}(M^t M) = g_0(Y, Y) = 1$ , le deuxième point du Lemme 6.7 découle alors des formules (6.13) et (6.14).  $\square$

Soit  $\tau$  une géodésique perpendiculaire à  $X_V$ . Nous pouvons maintenant étudier les champs de Jacobi le long de  $\tau$ . Soit  $\tau = \tau_t$ , où  $t$  est la longueur d'arc de  $X_V$  à  $\tau_t$  et  $Y = \dot{\tau}_0$ . Dans la suite nous décrivons les champs de Jacobi  $X = X(t)$  le long de  $\tau$  vérifiant

$$(6.15) \quad X(0) \in T_{\tau_0}(X_V) \text{ et } \nabla_Y X \in T_{\tau_0}(X_V)^\perp.$$

L'équation de Jacobi est donnée par

$$\nabla_{\tau_t}^2 X + R(X, \dot{\tau}_t)\dot{\tau}_t = 0.$$

D'après le Lemme 6.7, les valeurs propres de  $R(\cdot, Y)Y$  sont négatives. Soit  $X_0 \in T_{\tau_0}(X_V)$  un vecteur propre de  $R(\cdot, Y)Y$  pour la valeur propre  $-\lambda^2$  ( $\lambda \geq 0$ ). Soit  $X_t$  le transport parallèle de  $X_0$  le long de  $\tau$ . On peut vérifier que

$$(6.16) \quad X(t) = (\cosh \lambda t)X_t$$

est un champ de Jacobi le long de  $\tau$  vérifiant (6.15). Soit  $L_0 \in T_{\tau_0}(X_V)^\perp$  un vecteur propre de  $R(\cdot, Y)Y$  pour la valeur propre  $-\lambda^2$  ( $\lambda \geq 0$ ). Soit  $L_t$  le transport parallèle de  $L_0$  le long de  $\tau$ . On peut vérifier que

$$(6.17) \quad L(t) = \begin{cases} (\sinh \lambda t)L_t & \text{si } \lambda \neq 0, \\ tL_t & \text{sinon} \end{cases}$$

est un champ de Jacobi le long de  $\tau$  vérifiant (6.15). L'espace des champs de Jacobi vérifiant (6.15) a pour dimension  $pq$ . Cet espace est engendré par les champs de Jacobi construits ci-dessus.

L'espace  $X - X_V$  se décompose en un produit :

$$\mathcal{F} \times ]0, +\infty[$$

où  $\mathcal{F}$  est l'hypersurface de  $X$  constituée des points à distance 1 de  $X_V$  et où nous identifions un point  $(W, t) \in \mathcal{F} \times ]0, +\infty[$  avec le point  $Z \in X$  à distance  $t$  de  $X_V$  et tel que la géodésique passant par  $Z$  et  $W$  soit perpendiculaire à  $X_V$ .

Si  $S$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathcal{F}$ , nous noterons  $\omega(t, S)$  le volume de  $\{Z \in \mathcal{F} \times \{t\} : Z_1 \in S\}$ . D'après (6.7),  $\omega(t, S) = \omega(t, gS)$  pour tout  $g \in G_V$ . On peut donc voir  $\omega(t, S)$ , pour chaque  $t$ , comme une mesure invariante sur  $X_V$ . Il existe alors une fonction  $f(t)$  telle que  $\omega(t, S) = f(t)\text{vol}(S)$ .

LEMME 6.8. — *Il existe une constante  $c$  telle que :*

1. si  $r = 1$ ,

$$\omega(t, S) = c\text{vol}(S)(\sinh t)^{p-1}(\cosh t)^q,$$

2. en général,

$$\omega(t, S) \leq c\text{vol}(S)(1 + t^{p(q+r)})e^{(p+q+r-1)\sqrt{mt}},$$

où  $m = \min\{r, p\}$ .

*Démonstration.* — Si l'on écrit  $\omega(t, S) = f(t)\text{vol}(S)$ , il nous faut estimer  $f(t)$ , par exemple en la comparant à la constante  $f(1)$ . Soit  $x_s$  une courbe dans  $\mathcal{F}$ . On note  $x_s^t$  le point  $(x_s, t)$ ,  $x_{(s)}^t$  la courbe à  $s$  fixé et  $x_s^{(t)}$  la courbe à  $t$  fixé. Les courbes  $x_{(s)}^t$  sont des géodésiques et  $\dot{x}_s^{(t)}$  est un champ de Jacobi le long de cette géodésique qui vérifie (6.15). Mais d'après le Lemme 6.7 et (6.16), (6.17), l'espace  $T_{x_s}(\mathcal{F})$  admet un base orthonormée réelle

$$X_1, \dots, X_q, X_{q+1}, \dots, X_{2q}, \dots, X_{qp}, \\ Y_1, \dots, Y_{rp-1}$$



et il existe des réels

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0, \quad l = \max\{r, p\}$$

vérifiant :

1.  $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_l^2 = 1$ ,
2.  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i > \min\{r, p\}$ ,
3. au point  $(x_s, t)$ ,

$$\begin{aligned} \|X_1\| &= \dots = \|X_q\| = \frac{\cosh \lambda_1 t}{\cosh \lambda_1}, \\ &\vdots \\ \|X_{q(p-1)+1}\| &= \dots = \|X_{qp}\| = \frac{\cosh \lambda_p t}{\cosh \lambda_p}, \end{aligned}$$

4. au point  $(x_s, t)$ , l'ensemble des  $\|Y_j\|$  pour  $1 \leq j \leq rp-1$  (comptées avec multiplicités) coïncide, à une permutation près, avec l'ensemble des  $a_{ij}$  pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq p$  et  $(i, j) \neq (1, 1)$  tels que

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{\sinh |\lambda_i - \lambda_j| t}{\sinh |\lambda_i - \lambda_j|}, & \text{si } \lambda_i \neq \lambda_j, \\ t, & \text{si } \lambda_i = \lambda_j. \end{cases}$$

On en déduit alors facilement que

$$f(t) = f(1) \frac{\sinh^{p-1} t \cosh^q t}{\sinh^{p-1} 1 \cosh^q 1} \quad \text{si } r = 1$$

et en général qu'il existe une constante  $c$  telle que

$$f(t) \leq c(1 + t^{p(q+r)})e^{(p+q+r-1)\sqrt{mt}},$$

où  $m = \min\{r, p\}$ . □

Il résulte du paragraphe précédent que la fonction  $\frac{B}{A}$  est fortement reliée à (et plus naturelle que) la fonction distance  $d(\cdot, X_V)$ . Nous étudions maintenant la croissance du volume à l'aide de la fonction  $\frac{B}{A}$ .

Notons d'abord que si  $g \in G$  et  $Z \in X$ ,

$$d(gZ) = l(g, Z)dZj(g, Z)^{-1}.$$

On sait que

$$\det(l(g, Z)) = \det(j(g, Z))^{-1}.$$

Donc si l'on pose

$$\{dZ\} = \prod_{i=1}^{q+r} \prod_{j=1}^p dZ_{ij}$$

et si  $g \in G$ ,

$$\{dgZ\} = \det(j(g, Z))^{-(p+q+r)} \{dZ\}.$$

Puis d'après le Lemme 6.3,

$$A(gZ) = \det(j(g, Z))^{-2} A(Z).$$

La forme volume invariante  $dv_X$  sur  $X$  s'écrit donc

$$(6.18) \quad dv_X = A^{-(p+q+r)/2} \{dZ\}.$$

Si  $\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in X_V$ , soit  $F_{Z_1}$  la fibre au-dessus de ce point dans le fibré  $X \rightarrow X_V$ . Autrement dit

$$F_{Z_1} = \{Z \in X : Z_1 \text{ fixé}\}.$$

Soit  $g \in G_V$  l'élément

$$g = \begin{pmatrix} (1_q - Z_1 {}^t Z_1)^{-1/2} & 0 & -(1_q - Z_1 {}^t Z_1)^{-1/2} Z_1 \\ 0 & 1_r & 0 \\ -(1_p - {}^t Z_1 Z_1)^{-1/2} Z_1 & 0 & (1_p - {}^t Z_1 Z_1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Alors  $g$  envoie  $F_{Z_1}$  isométriquement sur  $F_0$ , et

$$g \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_2 (1_p - {}^t Z_1 Z_1)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Sur  $F_0$ , l'élément de volume est  $\det(1_p - {}^t Z_2 Z_2)^{-(r+p)/2} \{dZ_2\}$ , l'élément de volume sur  $F_{Z_1}$  est donc

$$dv_F = A^{-r/2} \left(\frac{B}{A}\right)^{p/2} \{dZ_2\}.$$

D'où il découle que

$$(6.19) \quad dv_{\mathcal{D}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{q/2} dv_{X_V} dv_F,$$

où  $dv_{X_V} = B^{-(p+q)/2} \{dZ_1\}$  est la forme volume invariante sur  $X_V$ .

LEMME 6.9. — *On a les formules d'intégration :*

$$1. \quad \int_X A^{s/2} \{dZ\} = \pi^{p(q+r)/2} \prod_{i=1}^{q+r} \frac{\Gamma((s+i+1)/2)}{\Gamma((s+p+i+1)/2)},$$

dès que  $\operatorname{Re}(s) > -2$ ; et

2. si  $\Gamma_V$  est un sous-groupe discret sans torsion et cocompact dans  $G_V$ ,

$$\int_{\Gamma_V \backslash X} \left(\frac{A}{B}\right)^{s/2} dv_X = \pi^{rp/2} \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma((s-p-q-r+i+1)/2)}{\Gamma((s-q-r+i+1)/2)} \operatorname{vol}(\Gamma_V \backslash X_V),$$

dès que  $\operatorname{Re}(s) > p+q+r-2$ .

*Démonstration.* — On introduit tout d'abord  $f(s, q+r, p) = \int_X A^s \{dZ\}$ . On déduit de (6.19), avec  $r=1$ , la relation de récurrence

$$f(s, q+r, p) = f(s+1, q+r-1, p) f(s, 1, p).$$

Mais,

$$\begin{aligned} f(s, 1, p) &= \int_{\sum_i x_i^2 \leq 1} (1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2))^{s/2} dx_1 \dots dx_p \\ &= \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma(p/2)} \int_0^1 (1-t)^{s/2} t^{p/2-1} dt \\ &= \pi^{p/2} \frac{\Gamma(s/2 + 1)}{\Gamma(s/2 + p/2 + 1)} \quad \text{dès que } \operatorname{Re}(s) > -2. \end{aligned}$$

Alors le premier point du Lemme 6.9 découle d'une simple récurrence.

Concernant le deuxième point, il découle de (6.19) que l'intégrale vaut

$$\int_{\Gamma_V \setminus X} \left( \frac{A}{B} \right)^{(s-q)/2} dv_F dv_{X_V}.$$

Puisque  $\frac{A}{B}$  et  $dv_F$  sont  $G_V$ -invariants, l'intégrale

$$\int_{F_{Z_1}} \left( \frac{A}{B} \right)^{(s-q)/2} dv_F$$

est indépendante de  $Z_1$ . En  $Z_1 = 0$ , sa valeur est

$$\int_{X_2} \det(1_p - {}^t Z_2 Z_2)^{(s-p-q-r)/2} \{dZ_2\},$$

où  $X_2 = \{Z_2 : {}^t Z_2 Z_2 < 1_p\}$ . Le deuxième point du Lemme 6.9 découle donc directement du premier point.  $\square$

#### 6.4. Fonction distance à l'hypersurface

Dans l'optique de calculer la cohomologie  $L^2$  des quotients  $\Gamma_V \setminus X$  nous aurons besoin de déterminer le hessien de la fonction distance géodésique à la sous-variété  $X_V$  dans  $X$ . Rappelons que le *hessien* d'une fonction  $C^2$   $F$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  est la seconde dérivée covariante  $\nabla^2 F$  de  $F$ , *i.e.*

$$\nabla^2 F(U, V) = U(VF) - (\nabla_U V)F,$$

pour n'importe quels champs de vecteurs  $U, V$  sur  $X$  et où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita induite par la structure riemannienne de  $X$ . Le hessien  $\nabla^2 F$  définit donc un tenseur symétrique de type  $(0, 2)$ . Nous appelons *valeurs propres du hessien* les fonctions qui à chaque point  $Z$  de  $X$  associent les valeurs propres de la matrice associée dans n'importe quelle base orthonormée de l'espace tangent à  $X$  au point  $Z$ .

Soit  $F$  la fonction distance géodésique à la sous-variété  $X_V$ . La fonction  $Z \mapsto F(Z)$  est bien évidemment lisse pour  $Z \in X - X_V$ .

PROPOSITION 6.10. — *Supposons  $r = 1$ . Notons  $\{\gamma_i(Z)\}_{1 \leq i \leq p(q+1)}$  les valeurs propres du hessien  $\nabla^2 F$  en un point  $Z \in X$ . Alors, quitte à réordonner les  $\gamma_i(Z)$ ,*

$$\gamma_1(Z) = \tanh F(Z), \dots, \gamma_q(Z) = \tanh F(Z),$$

$$\gamma_j(Z) = 0 \text{ pour } j = q + 1, \dots, pq,$$

*et les  $\gamma_k(Z)$  pour  $pq < k \leq p(q + 1)$ , sont (à permutations près) 0 et  $\coth F(Z)$  avec multiplicité  $p - 1$ .*

*Démonstration.* — Soit toujours  $\tau$  une géodésique perpendiculaire à  $X_V$  avec  $\tau = \tau_t$  où  $t$  est la longueur d'arc de  $X_V$  à  $\tau_t$ . Soit  $Y = \dot{\tau}$ . D'après le Lemme 6.7 et puisque  $r = 1$ , il existe un champs de bases orthonormées le long de  $\tau : \{e_j, f_k : 1 \leq j \leq pq \text{ et } 1 \leq k \leq p\}$  tel que pour tout entier  $1 \leq j \leq pq$  le vecteur  $e_j(0) \in T_{\tau_0}(X_V)$  et soit un vecteur  $-1$ -propre si  $1 \leq j \leq q$  (resp.  $0$ -propre si  $q + 1 \leq j \leq pq$ ) de  $R(\cdot, Y)Y$  et que pour tout entier  $1 \leq k \leq p$  le vecteur  $f_k(0) \in T_{\tau_0}(X_V)^\perp$  et soit un vecteur  $0$ -propre si  $k = 1$  (resp.  $-1$ -propre si  $k \geq 2$ ) de  $R(\cdot, Y)Y$ . Nous supposons de plus (ce que l'on peut bien évidemment faire) que le vecteur  $Y$  est égal au vecteur  $f_1(0)$ .

Alors d'après (6.16) et pour tout entier  $1 \leq j \leq q$  (resp.  $q + 1 \leq j \leq pq$ ), les champs de vecteurs :

$$(6.20) \quad \begin{aligned} v_j(t) &= \cosh t e_j(t) \\ (\text{resp. } v_j(t) &= e_j(t).) \end{aligned}$$

sont des champs de Jacobi le long de  $\tau$  vérifiant (6.15). Puis, d'après (6.17) et pour tout entier  $1 \leq k \leq p$  les champs de vecteurs :

$$(6.21) \quad w_k(t) = \begin{cases} \sinh t f_k(t), & \text{si } k \geq 2 \\ t f_k(t), & \text{si } k = 1, \end{cases}$$

sont des champs de Jacobi le long de  $\tau$  vérifiant (6.15). De plus, nous avons vu que les champs de vecteurs (6.20) et (6.21) forment une base orthogonale de l'espace des champs de Jacobi le long de  $\tau$  vérifiant (6.15). La formule de la variation seconde [48] nous dit alors que le Hessien  $\nabla^2 t (= \nabla^2 F)$  se diagonalise dans la base  $\{e_j\}_{1 \leq j \leq pq} \cup \{f_k\}_{1 \leq k \leq p}$ . Et plus précisément permet de calculer par exemple

$$\nabla^2 t(y)(e_j, e_j) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\tau^s),$$

où si  $\tau$  va de  $x := \tau_0 \in X_V$  à  $y := \tau_{t(y)}$ ,  $\tau^s$  désigne la géodésique minimisante joignant  $X_V$  au point  $\exp_y(s e_j)$  et  $L(\tau^s)$  sa longueur. Or, si  $j$  est par exemple compris entre 1 et  $q$ , le champ de vecteur  $\hat{v}_j = \frac{v_j}{\sinh t(y)}$  est un champ de Jacobi le long de  $\tau$ , perpendiculaire à  $\dot{\tau}$  et vérifiant :  $\hat{v}_j(t(y)) = e_j(t(y))$  et (6.15). La formule de la variation seconde implique alors :

$$\begin{aligned} \nabla^2 t(y)(e_j, e_j) &= \langle \nabla \hat{v}_j(t(y)), \hat{v}_j(t(y)) \rangle, \\ &= \frac{\sinh t(y)}{\cosh t(y)}. \end{aligned}$$

De la même manière, si  $j$  est un entier vérifiant  $q + 1 \leq j \leq pq$ , on obtient :

$$\nabla^2 t(y)(e_j, e_j) = 0$$

et si  $k$  est un entier vérifiant  $1 \leq k \leq p$ ,

$$\nabla^2 t(y)(f_k, f_k) = \begin{cases} \frac{\cosh t(y)}{\sinh t(y)}, & \text{si } k \geq 2, \\ 0, & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 6.10.  $\square$

Lorsque  $r > 1$ , comme dans les paragraphes précédents, plutôt que la fonction distance géodésique à  $X_V$  il est plus naturel de considérer la fonction  $\log\left(\frac{B}{A}\right)$ .

**PROPOSITION 6.11.** — *Les valeurs propres du hessien  $\nabla^2 \log\left(\frac{B}{A}\right)$  en un point  $Z \in X$  sont toutes positives, inférieures (ou égales) à 1, et parmi celles-ci au moins  $q + pr - 1$  tendent vers 1 lorsque  $\frac{B}{A}(Z)$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Nous démontrons par récurrence sur un entier  $k \geq 1$  que si  $V$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ , les valeurs propres du hessien  $\nabla^2 \log\left(\frac{B}{A}\right)$  en un point  $Z \in X$  sont toutes positives, inférieures (ou égales) à 1, et parmi celles-ci au moins  $q + r - k + pk - 1$  tendent vers 1 lorsque  $\frac{B}{A}(Z)$  tend vers l'infini. La Proposition correspond donc au cas  $k = r$ . Lorsque  $k = 1$ , la fonction  $\log\left(\frac{A}{B}\right)$  coïncide avec la fonction distance à  $X_V$ , et la Proposition 6.11 découle de la Proposition 6.10. Supposons donc la Proposition démontrée au rang  $k \geq 1$ . Notons  $V' \subset V$  deux sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  de dimensions respectives 1 et  $k + 1$ . On a alors  $X_V \subset X_{V'} \subset X$ . Notons  $B$  et  $B'$  les fonctions correspondantes à la fonction  $B$  plus haut pour  $X_V$  et  $X_{V'}$  respectivement. D'après (6.7) la fonction  $\frac{B}{A}$  est  $G_V$ -invariante, il nous suffit donc de déterminer le hessien  $\nabla^2 \log\left(\frac{B}{A}\right)$  aux points  $Z$  tels que  $Z_1 = 0$ . Mais,  $\nabla^2 \log\left(\frac{B}{A}\right) = \nabla^2 \log\left(\frac{B'}{A}\right) + \nabla^2 \log\left(\frac{B}{B'}\right)$ , et la démonstration de la Proposition 6.10 montre que les valeurs propres sont toutes positives, inférieures (ou égales) à 1 et que parmi celles-ci, au moins

$$q + r - (k + 1) + p(k + 1) - 1 = (q + r - 1 - k + pk - 1) + p$$

tendent vers 1 lorsque  $\frac{B}{A}(Z)$  tend vers l'infini. Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 6.11.  $\square$

## 6.5. Séries de Poincaré

Soit  $\phi$  une forme différentielle de degré  $l$  sur  $X$ . Nous notons  $\|\phi\|$  (resp.  $\|\phi\|_0$ ) la norme ponctuelle induite par la métrique  $g$  (resp. la métrique euclidienne).

**LEMME 6.12.** — *On a les inégalités suivantes :*

$$\|\phi\|_0 \geq \|\phi\| \geq A^l \|\phi\|_0,$$

où  $A = \det(1_p - {}^t Z Z)$ .

*Démonstration.* — La métrique riemannienne de  $X$ , s'écrit  $ds^2 = \text{tr}((1_{q+r} - Z^t Z)^{-1} dZ(1_p - {}^t Z Z)^{-1} d^t Z)$ . Il est donc immédiat que

$$\text{tr}(dZ d^t Z) \leq ds^2 \leq A^{-2} \text{tr}(dZ d^t Z).$$

Le Lemme 6.12 découle trivialement de ces dernières inégalités. □

**COROLLAIRE 6.13.** — *Soit  $\phi$  une forme différentielle  $G_V$ -invariante de degré  $l$ . Supposons que chaque coefficient de  $\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_l$ , avec  $\theta_1, \dots, \theta_l \in \{dZ_{ij} : 1 \leq i \leq q+r, 1 \leq j \leq p\}$ , soit borné en  $\binom{0}{Z_2}$ . Il existe alors deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que*

$$C_1 \geq \|\phi\| \geq C_2 \left(\frac{A}{B}\right)^l.$$

*Démonstration.* — D'après (6.7), il suffit de le vérifier en  $\binom{0}{Z_2}$ . Mais en  $\binom{0}{Z_2}$ ,  $B = 1$  et le Corollaire 6.13 découle alors du Lemme 6.12. □

Soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret sans torsion de type fini. Alors  $M = \Gamma \backslash X$  est une variété riemannienne complète de dimension  $p(q+r)$  localement modelée sur  $X_{p,q+r}$ . Soit  $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V$ , et soit  $C_V = \Gamma_V \backslash X_V$ . On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_V & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_V = \Gamma_V \backslash X_V & \xrightarrow{i} & \Gamma \backslash X = M \end{array}$$

où l'application  $i$  est induite par l'inclusion de  $X_V$  dans  $X$ . En général, le groupe  $\Gamma_V$  est réduit à l'identité. Dans la suite nous supposons que  $C_V$  est de volume fini (plus loin nous supposerons même que  $C_V$  est compacte). Soit  $M_V = \Gamma_V \backslash X$ . Remarquons que la fibration naturelle

$$\pi : \begin{cases} X & \longrightarrow & X_V \\ Z & \longmapsto & \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

induit une fibration, nous la notons également  $\pi : M_V = \Gamma_V \backslash X \rightarrow \Gamma_V \backslash X_V = C_V$ .

La Proposition 3 de [40] (ou le Lemme principal de [4]) implique(nt) le lemme suivant.

**LEMME 6.14.** — *Il existe une suite  $\{\Gamma_m\}$  de sous-groupes d'indices finis dans  $\Gamma$ , décroissante pour l'inclusion, telle que*

$$\Gamma_V = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Gamma_m \text{ et } \Gamma_0 = \Gamma.$$

*Si de plus  $\Gamma$  est un sous-groupe de congruence, on peut choisir les  $\Gamma_m$  de congruence.*

Le Lemme 6.14 implique que lorsque  $\Gamma$  est de type fini, la variété  $M$  admet une suite croissante  $\{M_m\}$  de revêtements finis telle que la suite  $\{M_m\}$  converge uniformément sur tout compact vers la variété  $M_V$  (il suffit de poser  $M_m = \Gamma_m \backslash X$ ). Nous appelons une telle suite de revêtements finis, une *tour d'effeuillage autour de  $C_V$* . Dans la suite,

nous supposons que  $M$  possède une telle tour et notons  $\Gamma_m$  le groupe fondamental de  $M_m$ .

Nous allons travailler avec des formes différentielles sur  $X$ ,  $M_V$  ou  $M_m$ . Il sera plus commode de considérer toutes ces formes différentielles comme définies sur  $X$  et invariantes sous l'action des groupes  $\{e\}$ ,  $\Gamma_V$  ou  $\Gamma_m$ . Étant donné un entier  $m_0$ , un élément  $\gamma \in \Gamma_{m_0}$  et une forme différentielle  $\omega$  sur  $M_m$  (avec  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $m \geq m_0$ ), nous pourrions notamment parler de la forme différentielle  $\gamma^*\omega$ .

Passons donc à l'étude des séries de Poincaré.

Soient  $Z_1, Z_2 \in X$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ . On introduit :

$$(6.22) \quad \nu(Z_1, Z_2, t) := |\{\gamma \in \Gamma : d(Z_1, \gamma Z_2) \leq t\}|,$$

et

$$(6.23) \quad N(Z, t) := |\{\gamma \in \Gamma_V \setminus \Gamma : d(\gamma Z, X_V) \leq t\}|.$$

LEMME 6.15. — *Il existe une constante  $c_1(Z) > 0$  (qui dépend de  $\Gamma$ ) telle que pour tout  $t > 0$  on ait :*

$$N(Z, t) \leq c_1(Z) \int_0^{t+1} (1 + t^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{mt}} dt.$$

*De plus on peut choisir  $c_1(Z)$  de manière à ce qu'elle soit bornée sur les compacts de  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\varepsilon$  un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et suffisamment petit pour que

$$B(Z, \varepsilon) \cap B(\gamma Z, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma = e,$$

où  $B(Z, \varepsilon)$  désigne la boule de rayon  $\varepsilon$  autour du point  $Z$  et  $e$  désigne l'élément neutre du groupe  $\Gamma$ . Dans la suite étant donnée une sous-variété  $\mathcal{V}$  de  $X$ , nous noterons  $B(\mathcal{V}, \rho)$  l'ensemble des points de  $X$  à distance plus petite que  $\rho$  de  $\mathcal{V}$ . On a alors :

$$N(Z, t) \leq |\{[\gamma] \in \Gamma_V \setminus \Gamma : \gamma(B(Z, \varepsilon)) \subset B(X_V, t + \varepsilon)\}|.$$

Mais, d'après (6.7), si  $\gamma \in \Gamma$  vérifie que  $\gamma(B(Z, t + \varepsilon)) \subset B(X_V, t + \varepsilon)$  quitte à translater  $\gamma$  par un élément de  $\Gamma_V$ , on peut supposer que  $\gamma(B(Z, \varepsilon)) \subset B(S, \varepsilon)$ , où  $S$  est un domaine fondamental mesurable pour l'action de  $\Gamma_V$  sur  $X_V$ . On déduit alors du Lemme 6.8 :

$$\begin{aligned} N(Z, t) &\leq \frac{\text{vol}(B(S, t + \varepsilon))}{\text{vol}(B(Z, \varepsilon))} \\ &\leq \frac{c}{\text{vol}(B(P, \varepsilon))} \int_0^{t+\varepsilon} (1 + t^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{mt}} dt. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Lemme 6.15<sup>(1)</sup>. □

<sup>(1)</sup>Contrairement à ce que pourrait laisser croire la démonstration, le Lemme 6.15 reste valable lorsque  $C_V$  est de volume fini mais non compact, cf. [52].

Remarquons que pour  $q = 0$ , la démonstration du Lemme 6.15 permet d'estimer  $\nu(Z_1, Z_2, t)$  uniformément par rapport à  $Z_2$ . On obtient, en effet, que pour tout  $Z_2 \in X$  et pour  $t > 0$ ,

$$(6.24) \quad \nu(Z_1, Z_2, t) \leq c_1(Z_1) \int_0^{t+1} (1 + t^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{p}t} dt.$$

On en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 6.16. — *Soit  $K$  un compact de  $X$ . Alors il existe une constante  $c_2(K)$  (qui dépend de  $\Gamma$ ) telle que pour tout point  $Z_1 \in K$ , tout point  $Z_2 \in X$  et  $t \geq 0$ , on ait :*

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(Z_1, \gamma Z_2) \leq t}} e^{-(p+q+r-1+s)d(Z_1, Z_2)} \leq c_2(K) \left( 1 + \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{1}{s^{p(q+r)}} \right) \right),$$

pour tout  $s > 0$ .

*Démonstration.* — D'après (6.24), il existe une constante  $c_1(K)$  telle que

$$d\nu(Z_1, Z_2, t) \leq c_1(K) (1 + (t+1)^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{p}t} dt,$$

pour tout  $Z_1 \in K$ ,  $Z_2 \in X$  et  $t > 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(Z_1, \gamma Z_2) \leq t}} e^{-((p+q+r-1)\sqrt{p}+s)d(Z_1, Z_2)} &= \int_0^t e^{-((p+q+r-1)\sqrt{p}+s)t} d\nu(Z_1, Z_2, t) \\ &\leq c_1(K) \int_0^t (1 + (t+1)^{p(q+r)}) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Et la Proposition 6.16 découle d'un calcul simple et d'approximations grossières.  $\square$

De manière analogue on démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 6.17. — *Soit  $\phi$  une forme différentielle  $\Gamma_V$ -invariante de degré  $l$  sur  $X$ . Si  $\|\phi\| \leq c \left(\frac{A}{B}\right)^{(p+q+r-1)\sqrt{m}/2+\varepsilon}$ ,  $m = \min\{r, p\}$  pour un réel strictement positif  $\varepsilon > 0$ , alors la série*

$$\sum_{\Gamma_V \backslash \Gamma} \gamma^* \phi$$

*converge uniformément sur les compacts de  $X$ .*

*Démonstration.* — Commençons par remarquer que la norme  $\|\gamma^* \phi\|$  au point  $Z$  est égale à la norme  $\|\phi\|$  au point  $\gamma Z$ . D'après l'hypothèse faite sur la norme de  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\Gamma_V \backslash \Gamma} \|\gamma^* \phi\| &\leq c \sum_{\Gamma_V \backslash \Gamma} \left(\frac{A}{B}(\gamma Z)\right)^{(p+q+r-1)\sqrt{m}/2+\varepsilon} \\ &\leq \frac{c}{4^m} \sum_{\Gamma_V \backslash \Gamma} e^{-((p+q+r-1)\sqrt{m}+\varepsilon)d(\gamma Z, X_V)}, \end{aligned}$$

d'après la Proposition 6.5. On conclut alors facilement comme pour la Proposition 6.16.  $\square$



### 6.6. Tours de revêtements finis

Dans [59] Wang définit une famille de formes lisses, fermées et  $G_V$ -invariantes  $\omega_s$  pour  $s \in \mathbb{C}$  telles que

$$(6.25) \quad \|\omega_s\| \prec \left(\frac{B}{A}\right)^{r/2+rp-(\operatorname{Re}(s)-qr/2)},$$

(où le signe  $\prec$  signifie que l'on a une inégalité  $\leq$  à une constante positive près) et qui, pour  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ , peut se voir comme la forme duale à  $\Gamma_V \backslash X_V$  dans  $\Gamma_V \backslash X$ . Plus précisément, considérons une forme  $\phi$  sur  $C_V$  de degré  $pq$ . Supposons

$$(6.26) \quad \|\phi\| \prec \left(\frac{A}{B}\right)^N$$

pour un certain entier  $N$ . Remarquons que la condition (6.26) est vérifiée par toute forme bornée pour  $N = 0$ . D'après (6.25) et le Lemme 6.9, l'intégrale  $\int_{C_V} \omega_s \wedge \phi$  est absolument convergente pour  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ , la constante ne dépendant que de  $N$ . Wang démontre alors le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.18.** — *Soit  $\phi$  une forme fermée, lisse, de degré  $pq$  sur  $\Gamma_V \backslash X$  et vérifiant la condition (6.26). Alors,*

$$\int_{\Gamma_V \backslash X} \omega_s \wedge \phi = \int_{C_V} \phi \quad (\operatorname{Re}(s) \gg 0).$$

Considérons maintenant  $\mu$  une  $k$ -forme **harmonique** sur  $C_V = \Gamma_V \backslash X_V$ . Nous notons :

$$(6.27) \quad \Omega_\mu(s) = \omega_s \wedge \pi^* \mu.$$

D'après la Proposition 6.17 et (6.25), et pour  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ , la série

$$(6.28) \quad \Omega_\mu^m(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_V \backslash \Gamma_m} \gamma^* \Omega_\mu(s)$$

converge uniformément sur tout compact de  $X$  et définit une  $(k + pr)$ -forme fermée sur  $M_m$ . Le Théorème 6.18 implique que pour toute  $(pq - k)$ -forme fermée  $\eta$  sur  $M_m$  on a :

$$\int_{M_m} \Omega_\mu^m(s) \wedge \eta = \int_{M_V} \Omega_\mu(s) \wedge \eta = \int_{C_V} \mu \wedge \eta.$$

On obtient donc le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.19.** — *L'application  $\mu \mapsto \Omega_\mu^m(s)$  (pour  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ ) induit en cohomologie, l'application naturelle*

$$H^k(C_V) \longrightarrow H^k(M_m)$$

« cup-produit avec  $[C_V]$  ».

Nous cherchons dans ce paragraphe à comprendre comment évolue cette application lorsque  $m$  tend vers l'infini.

Soit  $\Delta = \delta d + d\delta$ , où  $\delta$  est l'adjoint de  $d$ , l'opérateur laplacien que l'on étend en un opérateur, toujours noté  $\Delta$ , agissant sur l'espace  $L^2\Omega^k(X)$  des  $k$ -formes de carré intégrable sur  $X$  de façon essentiellement auto-adjointe. Alors le Théorème spectral s'applique et il existe une famille spectrale  $\{P_\lambda : \lambda \in [0, +\infty[ ]\}$  associée à  $\Delta$ .

Notons  $P_\lambda(x, y)$  le noyau de Schwartz de  $P_\lambda$ . On a  $\Delta = \int_0^{+\infty} \lambda dP_\lambda$ . À toute fonction  $f \in C_0([0, +\infty[ ])$ , on associe l'opérateur

$$f(\Delta) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) dP_\lambda.$$

Le laplacien est un opérateur elliptique. Soit  $\omega \in L^2\Omega^{n-p}(X)$ . On a :

$$\Delta(f(\Delta)\omega) = F(\Delta)\omega$$

où  $F$  est la fonction qui à  $x$  associe  $xf(x)$ . D'après le Théorème de régularité sur les opérateurs elliptiques, la forme  $f(\Delta)\omega$  est lisse. De plus, pour tout  $x \in X$ , il existe une constante  $C(x, f, X)$  telle que :

$$|f(\Delta)\omega|(x) \leq C(x, f, X)\|\omega\|_{L^2(X)}.$$

En particulier, l'application

$$\begin{cases} L^2\Omega^k(X) & \longrightarrow & L^2\Omega_x^k(X) \\ \omega & \longmapsto & f(\Delta)\omega(x) \end{cases}$$

est continue. D'après le Théorème de Riesz, il existe donc  $f(\Delta)(x, \cdot) \in L^2\Omega^k(X)$  tel que

$$f(\Delta)\omega(x) = \int_X f(\Delta)(x, y)\omega(y) dy.$$

De plus, pour tout compact  $K$  de  $X$ ,  $\int_{K \times X} \|f(\Delta)(x, y)\|^2 dx dy \leq \int_K C(x, f, X)^2 dx$ . Donc  $f(\Delta)(\cdot, \cdot) \in L^2_{loc}(X \times X)$ . Or

$$(\Delta_x + \Delta_y)f(\Delta)(x, y) = 2F(\Delta)(x, y)$$

et l'opérateur  $\Delta_x + \Delta_y$  est elliptique. Le Théorème de régularité elliptique implique donc que  $f(\Delta)(x, y)$  est une fonction  $C^\infty$  en  $x$  et  $y$ .

Sur les variétés  $M_m$  et  $M_V$ , nous notons le laplacien respectivement  $\Delta_m$  et  $\Delta_\infty$  ; de même nous notons respectivement  $P_\lambda^m$  et  $P_\lambda^\infty$  les familles spectrales associées. Si l'on désigne, de manière cohérente avec les notations précédentes, le noyau de la chaleur sur les  $k$ -formes de  $X$  par  $e^{-t\Delta}(x, y)$ , il est connu [16] que pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $\alpha > 0$  et une constante  $C_T$  (dépendante de  $T$ ) telles que :

$$(6.29) \quad |e^{-t\Delta}(x, y)| \leq C_T e^{-\alpha d(x, y)^2/t},$$

pour tout  $t \in ]0, T]$ .

LEMME 6.20. — Pour  $t > 0$  fixé, la série

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |e^{-t\Delta}(x, \gamma y)|$$

converge uniformément pour  $x \in X$  et  $y$  dans un compact.

*Démonstration.* — Soit  $K$  un compact de  $X$  et soit  $t$  un réel strictement positif. D'après le Lemme 6.15, il existe une constante  $c_1(K)$  telle que

$$\nu(x, y, R) := |\{\gamma \in \Gamma : d(x, \gamma y) \leq R\}| \leq c_1(K) \int_0^{R+1} (1 + u^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{p}u} du$$

pour tout  $x \in X$  et  $y \in K$ .

Soient  $C = C_t$  et  $\beta = \alpha/t$ . Alors, d'après l'inégalité (6.29), pour  $x \in X$  et  $y \in K$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(x, \gamma y) \leq R}} |e^{-t\Delta}(x, \gamma y)| &\leq C \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(x, \gamma y) \leq R}} e^{-\beta d(x, \gamma y)^2} \\ &\leq C \left( \int_0^R e^{-\beta r^2} d\nu(x, y, r) \right) \\ &\leq C \left( [e^{-\beta r^2} \nu(x, y, r)]_0^R + 2\beta \int_0^R r e^{-\beta r^2} \nu(x, y, r) dr \right) \\ &\leq C c_2(K) \left( e^{-\beta R^2} \int_0^{R+1} (1 + u^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{p}u} du \right. \\ &\quad \left. + 2\beta \int_0^R r e^{-\beta r^2} \int_0^{r+1} (1 + u^{p(q+r)}) e^{(p+q+r-1)\sqrt{p}u} du dr \right). \end{aligned}$$

Le Lemme découle de ces inégalités en faisant tendre  $R$  vers l'infini.  $\square$

On obtient alors que pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta_m}(x, y) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_m} (\gamma y)^* e^{-t\Delta}(x, y) \\ e^{-t\Delta_\infty}(x, y) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_V} (\gamma y)^* e^{-t\Delta}(x, y). \end{aligned}$$

Et la convergence est absolue et uniforme pour  $x, y$  dans un compact. En particulier, le noyau de la chaleur  $e^{-t\Delta_m}(x, y)$  est  $\Gamma_m$ -invariant. De plus, puisque d'après le Lemme 6.14,  $\cap_m \Gamma_m = \Gamma_V$  et  $\Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m$ , on en déduit que si  $t > 0$  est fixé,

$$e^{-t\Delta_\infty}(x, y) = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{-t\Delta_m}(x, y)$$

uniformément pour  $x$  et  $y$  dans un compact de  $X$ .

Le lemme suivant est une conséquence du Théorème d'approximation de Weierstrass.

LEMME 6.21 (cf. [15]). — Soit  $f \in C_0([0, +\infty[)$ . Alors  $f$  peut être uniformément approchée sur  $[0, +\infty[$  par une combinaison linéaire finie d'exponentielles  $e^{-tx}$ ,  $t > 0$ .

Comme Donnelly dans [16] (cf. aussi [7]) on peut déduire du Lemme 6.21 le lemme suivant<sup>(2)</sup>.

LEMME 6.22. — *Pour tout  $f \in C_0([0, +\infty[)$ , la suite  $f(\Delta_m)(x, y)$  converge vers  $f(\Delta_\infty)(x, y)$  uniformément pour  $x$  et  $y$  dans un compact. Et l'expression*

$$|f(\Delta_m)(x, y) - f(\Delta_\infty)(x, y)|$$

*est uniformément bornée (indépendamment de  $m$ ) pour  $x \in X$  et  $y$  dans un compact.*

Remarquons que le noyau  $f(\Delta_m)(\cdot, \cdot)$  est  $\Gamma_m$ -bi-invariant.

PROPOSITION 6.23. — *Soient  $f \in C_0([0, +\infty[)$  et  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ . Alors, la suite  $f(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)$  converge vers  $f(\Delta_\infty)\Omega_\mu(s)$  uniformément sur les compacts.*

*Démonstration.* — Soit  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ . Si  $\mathcal{F}_m$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma_m$  sur  $X$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)(\cdot) &= \int_{M_m} \Omega_\mu^m(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx \\ &= \int_{M_m} \left( \sum_{\gamma \in \Gamma_V \setminus \Gamma_m} \gamma^* \Omega_\mu(s)(x) \right) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_V \setminus \Gamma_m} \int_{\mathcal{F}_m} \gamma^* \Omega_\mu(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_V \setminus \Gamma_m} \int_{\gamma \mathcal{F}_m} \Omega_\mu(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx \\ &\quad (\text{car } f(\Delta_m)(\cdot, \cdot) \text{ est } \Gamma_m\text{-bi-invariant}) \\ &= \int_{M_V} \Omega_\mu(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx. \end{aligned}$$

On obtient donc sur  $X$  :

$$\begin{aligned} f(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)(\cdot) - f(\Delta_\infty)\Omega_\mu(s)(\cdot) &= \int_{M_V} \Omega_\mu(s)(x) \wedge *f(\Delta_m)(x, \cdot) dx \\ &\quad - \int_{M_V} \Omega_\mu(s)(x) \wedge *f(\Delta_\infty)(x, \cdot) dx \\ &= \int_{M_V} \Omega_\mu(s)(x) \wedge *(f(\Delta_m)(x, \cdot) - f(\Delta_\infty)(x, \cdot)) dx. \end{aligned}$$

De plus d'après le Lemme 6.22, l'expression

$$|f(\Delta_m)(x, y) - f(\Delta_\infty)(x, y)|$$

---

<sup>(2)</sup>Ici l'hypothèse de compacité sur  $M$  peut sembler nécessaire, il n'en est rien le finitude du volume est suffisante à condition de considérer une fonction  $f$  dont le support évite le spectre continue de  $M$ .

est uniformément bornée (indépendamment de  $m$ ) pour  $x \in M_V$  et  $y$  dans un compact. Puisque la forme  $\Omega_\mu(s)$  est dans  $L^1$ , le Théorème de convergence dominée et le Lemme 6.22 impliquent que pour tout réel  $\varepsilon > 0$  et pour tout compact  $K$ , il existe un entier  $m_0$  tel que pour tout  $m \geq m_0$ , les applications  $f(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)$  et  $f(\Delta_\infty)\Omega_\mu(s)$  sont  $\varepsilon$ -proches sur  $K$ . Ce qui achève la démonstration de la Proposition 6.23.  $\square$



## CHAPITRE 7

### CALCUL DE LA COHOMOLOGIE $L^2$

Nous conservons dans ce chapitre les notations précédentes. Soient donc toujours  $G = O(p, q + r)$  ( $p \leq q + r$ ),  $X$  l'espace symétrique associé,  $X_V$  le sous-espace totalement géodésique de  $X$  associé à un sous-espace vectoriel de dimension  $r$  de  $\mathbb{R}^{p+q+r}$ ,  $G_V$  le sous-groupe de  $G$  préservant  $X_V$  et  $\Gamma_V$  un sous-groupe discret sans torsion et cocompact dans  $G_V$ . Nous notons  $C_V = \Gamma_V \backslash X_V$  et  $(M =)M_V = \Gamma_V \backslash X$ . Dans la suite  $H_2^k(M_V)$  désigne toujours le groupe de cohomologie  $L^2$  réduite de degré  $k$  de  $M_V$ . Le but de ce chapitre est la démonstration du théorème suivant.

**THÉORÈME 7.1.** — *Pour tout entier,  $k < (q + pr - 1)/2$ , l'application naturelle « cup-produit avec  $[C_V]$  »*

$$H^{k-pr}(C_V) \longrightarrow H_2^k(M_V)$$

*est un isomorphisme. Si de plus,  $p = 1$  et  $q + r$  est pair, l'espace  $H_2^{(q+r)/2}(M_V)$  est de dimension infinie et l'application ci-dessus reste **injective** pour  $k = (q + r)/2$ .*

Remarquons que le cas  $p = 1$  découle d'un Théorème de Mazzeo et Philips [42].

Avec les notations du § 3.6 (Groupes orthogonaux), le Théorème 7.1 implique que, pour tout entier  $k \leq (q - pr - 1)/2$ , l'application « cup-produit avec  $[F]$  »

$$(7.1) \quad H^k(F) \longrightarrow H_2^{k+pr}(M)$$

est **injective**. Ce qui est un cas particulier de la Conjecture 3.17.

#### 7.1. Une proposition de Donnelly et Xavier

L'ingrédient principal de la démonstration du Théorème 7.1 est la proposition suivante due à Donnelly et Xavier [17].

PROPOSITION 7.2. — Soit  $\phi$  une forme différentielle dans  $C_0^\infty(\wedge^k T^*M)$ . Soient  $F$  une fonction réelle  $C^2$  sur le support de  $\phi$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_{p(q+r)}$  les valeurs propres réelles du hessien de  $F$ . Si  $|dF| \leq 1$ , alors :

$$[\|d\phi\|_2 + \|\delta\phi\|_2]\|\phi\|_2 \geq \frac{1}{2} \int_M \left[ \sum \gamma_i - 2k \max_i(\gamma_i) \right] |\phi|^2.$$

La vertu essentielle de la Proposition 7.2 est de contrôler le spectre essentiel de  $M_V$ . Soit  $\psi$  la fonction réelle sur  $X$  définie par

$$\psi(Z) = \log \left( \frac{B}{A} \right).$$

D'après la Proposition 6.11, le hessien  $\nabla^2\psi$  de  $\psi$  a pour valeurs propres des réels  $\gamma_1(Z), \dots, \gamma_{p(q+r)}(Z)$  tels qu'il existe une constante  $c_0 > 0$  telle que pour tout  $Z$  tel que  $\psi(Z) > c_0$ ,

$$(7.2) \quad \sum_i \gamma_i(Z) - 2k \max_i(\gamma_i(Z)) \geq 1/10,$$

pour  $k < (p + qr - 1)/2$ .

Remarquons que la fonction  $\psi$  est  $G_V$ -invariante et descend donc en une fonction sur  $M_V = \Gamma_V \backslash X$ . Dans la suite,  $M = M_V$  et  $M_c = \{Z \in M : \psi(Z) \leq c\}$  pour tout réel  $c > 0$ .

LEMME 7.3. — Pour tout degré  $k$  tel que  $k < (p + qr - 1)/2$ , 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien sur les formes de degré  $k$  sur  $M$ .

*Démonstration.* — Il est bien connu que le spectre essentiel du laplacien ne dépend que de la géométrie à l'infini. Or, la Proposition 7.2 et l'inégalité (7.2) impliquent que si  $\omega$  est une forme différentielle de degré  $k$ ,  $k < (p + qr - 1)/2$ , à support dans le complémentaire de  $M_{c_0}$  alors :

$$\begin{aligned} [\|d\omega\|_2 + \|\delta\omega\|_2]\|\omega\|_2 &\geq \int_M \left[ \sum \gamma_i - k \max_i(\gamma_i) \right] |\omega|^2 \\ &\geq \frac{1}{10} \|\omega\|_2^2. \end{aligned}$$

Le spectre du laplacien à l'infini (et donc le spectre essentiel) est donc isolé de 0. Le Lemme 7.3 est démontré.  $\square$

Il est naturel de se demander (comme au § 3.6) si dans l'énoncé du Théorème 7.1 ou du Lemme 7.3 le nombre  $(p + qr - 1)/2$  est optimal. En général on ne sait pas répondre à cette question. Peut-être la formule de Plancherel pour les espaces symétriques pseudoriemannien  $G/H$  peut-elle apporter une réponse. Remarquons néanmoins le lemme suivant (qui explique la deuxième partie du Théorème 7.1).

LEMME 7.4. — Si  $p = 1$  et  $q + r$  est pair, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien sur les formes de degré  $(q + r)/2$  sur  $M$ .



*Démonstration.* — C'est évident puisque, le laplacien commutant aux opérateurs  $d$  et  $\delta$ , son spectre sur les formes de degré  $k$  est contenu dans la réunion du spectre du laplacien sur les formes de degré  $k - 1$ , du spectre du laplacien sur les formes de degré  $k + 1$  (éventuellement) de la valeur propre 0. Mais par dualité de Hodge le spectre du laplacien sur les formes de degré  $k + 1$  coïncide avec le spectre du laplacien sur les formes de degré  $k - 1$ . Le Lemme 7.4 découle donc du Lemme 7.3.  $\square$

Nous aurons besoin d'une version à bord de la Proposition 7.2. Soit  $D$  une sous-variété compacte à bord contenu dans  $M$  et soit  $M_0 = M - D$ . Alors  $M_0$  est une variété riemannienne à bord compact. Nous cherchons à étudier le cas où la fonction  $F$  n'est définie que dans un voisinage de  $M_0$  dans  $M$ .

Soit  $\phi$  une forme différentielle définie sur  $M_0$ . Le long du bord  $\partial M_0$  de  $M_0$  on peut écrire  $\phi = \phi_{\text{tan}} + \phi_{\text{norm}} \wedge \nu$  où  $\nu$  est un vecteur normal pointant vers l'intérieur de  $M_0$ .

**PROPOSITION 7.5.** — *Soit  $\phi$  une  $k$ -forme différentielle à support compact dans  $M_0$  et vérifiant la condition au bord  $\phi_{\text{norm}} = 0$  le long de  $\partial M_0$ . Soit  $F$  une fonction réelle comme dans la Proposition 7.2. Supposons de plus que  $dF|_{\partial M_0} = 0$  et  $dF(\nu) \geq 0$  le long de  $\partial M_0$ . Si  $|dF| \leq 1$ , alors :*

$$[\|d\phi\|_2 + \|\delta\phi\|_2]\|\phi\|_2 \geq \frac{1}{2} \int_M \left[ \sum \gamma_i - 2k \max_i(\gamma_i) \right] |\phi|^2.$$

*Démonstration.* — La Proposition 7.5 découle essentiellement de la démonstration de [17, Theorem 2.2]. L'étape initiale de celle-ci consiste en effet en une intégration par parties, il s'agit ici d'utiliser les hypothèses  $\phi_{\text{norm}} = 0$  et  $dF(\nu) \geq 0$  pour s'assurer de la positivité de l'intégrale le long du bord  $\partial M_0$ . La suite de la démonstration est identique.  $\square$

## 7.2. Cohomologie $L^2$ relative

Si  $M_0$  est une variété riemannienne à bord compacte et métriquement complète, on peut définir des espaces de cohomologie  $L^2$  absolue et relative. Notons  $C_b^\infty(\bigwedge^k T^*M_0)$  l'espace des  $k$ -formes lisses à support borné dans  $M_0$ , le support pouvant rencontrer le bord (contrairement à ce qui se passe pour les éléments de  $C_0^\infty$ ). L'espace de cohomologie  $L^2$  absolue est alors définie par :

$$H_2^k(M_0) = \left( \delta C_0^\infty \left( \bigwedge^{k+1} T^*M_0 \right) \right)^\perp / \overline{dC_b^\infty \left( \bigwedge^{k-1} T^*M_0 \right)}.$$

(L'orthogonal et l'adhérence sont, ici encore, pris dans l'espace  $L^2(\bigwedge^k T^*M_0)$ .) Cet espace est isomorphe à un espace de formes harmoniques vérifiant la condition absolue sur le bord  $\partial M_0$  :

$$H_2^k(M_0) \cong \mathcal{H}_A^k(M_0) := \left\{ \alpha \in L^2 \left( \bigwedge^k T^*M_0 \right) : d\alpha = \delta\alpha = 0, \alpha_{\text{norm}} = 0 \right\}.$$

La cohomologie  $L^2$  relative, quant à elle, est définie par

$$H_2^k(M_0, \partial M_0) = \left( \delta C_b^\infty \left( \bigwedge^{k+1} T^* M_0 \right) \right)^\perp / \overline{dC_0^\infty \left( \bigwedge^{k-1} T^* M_0 \right)}.$$

Elle est isomorphe à un espace de formes harmoniques vérifiant la condition relative au bord :

$$H_2^k(M_0, \partial M_0) \cong \mathcal{H}_R^k(M_0) := \left\{ \alpha \in L^2 \left( \bigwedge^k T^* M_0 \right) : d\alpha = \delta\alpha = 0, \alpha_{\tan} = 0 \right\}.$$

Bien que la démonstration du Théorème 7.1 ne nécessite que des résultats plus anciens de Cheeger, nous utiliserons le résultat de suite exacte commode suivant dû à Yeganefar [60].

**THÉORÈME 7.6.** — *Soient  $M$  une variété riemannienne complète,  $D$  une sous-variété à bord compact et régulier de  $M$  et  $M_0 = M - D$ . On suppose que pour un certain entier  $k$ , 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien sur les  $k$ -formes. Alors nous avons la suite exacte*

$$\begin{array}{ccccccccc} H_2^{k-1}(M) & \xrightarrow{r} & H_2^{k-1}(M_0) & \xrightarrow{b} & H_2^k(D, \partial D) & \xrightarrow{e} & H_2^k(M) & & \\ & & & & & & & \xrightarrow{r} & H_2^{k+1}(M_0). \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & \xrightarrow{r} & H_2^{k+1}(M) & \xrightarrow{r} & H_2^{k+1}(M_0). \end{array}$$

Précisons les applications  $r$ ,  $e$  et  $b$  qui interviennent dans la suite exacte.

- $r : H_2^*(M) \rightarrow H_2^*(M_0)$  est l'application de restriction induite en cohomologie  $L^2$  par l'inclusion  $M_0 \hookrightarrow M$ .
- $e$  est l'extension par zéro : si  $[\alpha] \in H_2^*(D, \partial D)$ , de représentant  $\alpha$ , on définit  $\tilde{\alpha}$  sur  $M$  par  $\tilde{\alpha} = \alpha$  sur  $D$  et  $\tilde{\alpha} = 0$  sur  $M_0$ . On vérifie que  $\tilde{\alpha}$  est faiblement fermée et on pose  $e([\alpha]) = [\tilde{\alpha}]$ . Ceci est indépendant du représentant choisi.
- $b$  se définit comme l'homomorphisme cobord ordinaire en cohomologie de de Rham : si  $[\alpha]$  est une classe dans  $H_2^k(M_0)$ , on peut choisir un représentant  $\alpha$  qui soit fermé et lisse. Il existe alors une  $k$ -forme  $\bar{\alpha}$  sur  $M$  qui coïncide avec  $\alpha$  sur  $M_0$  et qui vérifie  $d\bar{\alpha} = 0$  sur un voisinage de  $M_0$ . On impose de plus que  $\bar{\alpha}$  et  $d\bar{\alpha}$  soient de carré intégrable (c'est toujours possible car le bord  $\partial D$  étant compact, on peut choisir  $\bar{\alpha}$  telle que  $\bar{\alpha}|_D$  soit à support borné). On vérifie que la classe de  $d\bar{\alpha}$  dans  $H_2^{k+1}(D, \partial D)$  est indépendante du représentant lisse  $\alpha$  choisi, ainsi que du prolongement  $\bar{\alpha}$ , et on pose  $b([\alpha]) = [d\bar{\alpha}]$ .

Remarquons maintenant qu'en utilisant la Proposition 7.5 plutôt que la Proposition 7.2, la démonstration du Lemme 7.3 implique le lemme suivant.

**LEMME 7.7.** — *Soit  $c$  un réel strictement positif suffisamment grand ( $\geq c_0$ ). Alors, pour tout entier  $k < (p + qr - 1)/2$ , l'espace*

$$H_2^k(M - M_c) \cong \mathcal{H}_A^k(M - M_c) = \{0\}.$$

### 7.3. Démonstration du Théorème 7.1

Fixons  $c$  comme dans le Lemme 7.7 et notons  $D = M_c$  et  $M_0 = M - D$ . Fixons enfin un entier  $k < (p + qr - 1)/2$ . D'après le Lemme 7.3, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien sur les formes de degré  $k$  sur  $M$ . Nous pouvons donc appliquer le Théorème 7.6, on a en particulier la suite exacte

$$(7.3) \quad H_2^{k-1}(M_0) \longrightarrow H_2^k(D, \partial D) \longrightarrow H_2^k(M) \longrightarrow H_2^k(M_0).$$

Remarquons maintenant que puisque  $k - 1 < k < (p + qr - 1)/2$ , le Lemme 7.7 implique que

$$H_2^{k-1}(M_0) \cong H_2^k(M_0) \cong \{0\}.$$

La suite exacte (7.3) se réduit donc à l'isomorphisme

$$H_2^k(M) \cong H_2^k(D, \partial D).$$

Mais le domaine  $D$  est compact, on a donc

$$H_2^k(D, \partial D) \cong H^k(D, \partial D) \cong H_c^k(M).$$

La variété  $M$  étant par ailleurs homéomorphe au produit  $C_V \times \mathbb{R}^{qr}$ , la formule de Künneth implique que

$$H^{k-pr}(C_V) \cong H_c^k(M).$$

Et la première partie du Théorème 7.1 est démontrée.

Supposons maintenant  $p = 1$  et  $q + r$  pair. On a bien sûr toujours l'isomorphisme  $H_2^{(q+r)/2}(M) \cong \mathcal{H}_2^{(q+r)/2}(M)$ . Le groupe  $\mathcal{H}_2^{(q+r)/2}(M)$  ( $(q + r)/2$  est ici la dimension réelle moitié de  $M$ ) ne dépend que de la structure conforme de  $M$ . Il est donc facile de vérifier que l'espace  $\mathcal{H}_2^{(q+r)/2}(M)$  est de dimension infinie.

Enfin d'après le Lemme 7.3, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien sur les formes de degré  $(q + r)/2 - 1$  sur  $M$ . Nous pouvons donc appliquer le Théorème 7.6 pour  $k = (q + r)/2 - 1$ , on a en particulier la suite exacte

$$(7.4) \quad H_2^{(q+r)/2-1}(M_0) \longrightarrow H_2^{(q+r)/2}(D, \partial D) \longrightarrow H_2^{(q+r)/2}(M).$$

Mais puisque  $(q+r)/2-1 < (q+r-1)/2$  le Lemme 7.7 implique que  $H_2^{(q+r)/2-1}(M_0) \cong \{0\}$  et la suite exacte (7.4) se réduit à l'injection de  $H_2^{(q+r)/2}(D, \partial D)$  dans  $H_2^{(q+r)/2}(M)$ . La démonstration de la dernière partie du Théorème 7.1 suit alors celle de la première partie.  $\square$



## CHAPITRE 8

### DÉMONSTRATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

#### 8.1. Autour d'un Théorème de Burger et Sarnak

Soient  $G$  un groupe réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  et  $H$  un sous-groupe rationnel de  $G$ , réductif et connexe. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de congruence de  $G$ . D'après la formule de Matsushima, si  $\pi \in \widehat{G}_0^{\text{nc}}$  intervient discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}})$  avec multiplicité  $n_\Gamma(\pi)$  alors

$$H^*(\pi : \Gamma) \simeq n_\Gamma(\pi) H^*(\mathfrak{g}, K; \pi).$$

Fixons  $\pi$  est une représentation cohomologique de  $G_0^{\text{nc}}$  de degré fortement primitif  $R$ ,  $\varphi$  un morphisme non triviale dans  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, C^\infty(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}))$  et  $\omega : \bigwedge^R \mathfrak{p} \rightarrow \pi$  une  $K$ -application non nulle. Ceci définit une classe  $\omega_\varphi \in H^R(\pi : \Gamma)$ . Démontrer l'injectivité de la restriction à  $H^R(\pi : \Gamma)$  de l'application de restriction virtuelle  $\text{Res}_H^G$  revient à démontrer qu'il existe un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que la classe  $j_g^* \omega_\varphi \in H^R((H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H)$  soit non nulle.

Harris et Li ont remarqué dans [24] que pour démontrer ceci il suffit de démontrer que

1. il existe une représentation cohomologique  $\sigma$  de degré (fortement primitif)  $R$  de  $H_0^{\text{nc}}$  qui intervient discrètement dans la restriction de  $\pi$  à  $H_0^{\text{nc}}$  ;
2. l'application de restriction naturelle

$$(8.1) \quad H^R(\mathfrak{g}, K; \pi) \longrightarrow H^R(\mathfrak{h}, K^H; \sigma)$$

est injective ;

3. il existe un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que l'application  $H_0^{\text{nc}}$ -équivariante

$$(8.2) \quad \psi_g : \begin{cases} \pi & \longrightarrow C^\infty((H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H), \\ \nu & \longmapsto \varphi(\nu)(g \cdot) \end{cases}$$

soit non nulle.

On peut penser aux deux premiers points ci-dessus comme à un analogue local (réduit à de l'algèbre linéaire) de la conclusion.

Harris et Li ont montré comment paraphraser un Théorème de Burger et Sarnak [11] pour obtenir un critère de non nullité de (8.2). La très légère modification suivante de ce critère est démontrée dans [2].

PROPOSITION 8.1. — *Soit  $\pi$  (resp.  $\sigma$ ) une représentation cohomologique, de degré fortement primitif  $R$ , du groupe  $G_0^{\text{nc}}$  (resp.  $H_0^{\text{nc}}$ ). Supposons que*

1. *la représentation  $\sigma$  apparaît discrètement dans la restriction de  $\pi$  à  $H_0^{\text{nc}}$  ;*
2. *la représentation  $\sigma$  est isolée dans le dual automorphe de  $H$  sous la condition  $d = 0$ .*

*Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que l'application  $\psi_g$  (8.2) est non nulle.*

Considérons maintenant deux représentations cohomologiques  $\pi_1$  et  $\pi_2$  de  $G_0^{\text{nc}}$  de degrés fortement primitifs respectifs  $R_1$  et  $R_2$  et deux classes de cohomologie  $\alpha_{\varphi_1} \in H^{R_1}(\pi : \Gamma)$  et  $\beta_{\varphi_2} \in H^{R_2}(\pi : \Gamma)$  avec comme au-dessus  $\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\pi_i, C^\infty(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}))$  non nul ( $i = 1, 2$ ) et  $\alpha : \bigwedge^R \mathfrak{p} \rightarrow \pi_1$  (resp.  $\beta : \bigwedge^R \mathfrak{p} \rightarrow \pi_2$ ) une  $K$ -application non nulle.

De la même manière que pour la restriction, remarquons que si  $g$  est un élément de  $G(\mathbb{Q})$ , pour démontrer que le cup-produit  $g(\alpha_{\varphi_1}) \wedge \beta_{\varphi_2}$  est non nul il suffit de démontrer que

1. *il existe une représentation cohomologique  $\sigma$  de degré (fortement primitif)  $R = R_1 + R_2$  de  $G_0^{\text{nc}}$  qui intervient discrètement dans la restriction de  $\pi_1 \otimes \pi_2$  à  $G_0^{\text{nc}}$  ;*
2. *l'application de restriction naturelle*

$$(8.3) \quad H^{R_1}(\mathfrak{g}, K; \pi_1) \otimes H^{R_2}(\mathfrak{g}, K; \pi_2) \longrightarrow H^R(\mathfrak{g}, K; \sigma)$$

*est injective ;*

3. *l'application  $G_0^{\text{nc}}$ -équivariante*

$$(8.4) \quad \psi_g : \begin{cases} \pi_1 \otimes \pi_2 & \longrightarrow C^\infty((\Gamma \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_G), \\ \nu_1 \otimes \nu_2 & \longmapsto \varphi_1(\nu_1)(g \cdot) \varphi_2(\nu_2)(\cdot) \end{cases}$$

*est non nulle.*

PROPOSITION 8.2. — *Soient  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\sigma$  trois représentations cohomologiques, de degrés fortement primitifs respectifs  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R = R_1 + R_2$ , du groupe  $G_0^{\text{nc}}$ . Supposons que*

1. *la représentation  $\sigma$  apparaît discrètement dans la restriction de  $\pi_1 \otimes \pi_2$  à  $G_0^{\text{nc}}$  ;*
2. *la représentation  $\sigma$  est isolée dans le dual automorphe de  $G$  sous la condition  $d = 0$ .*

*Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que l'application  $\psi_g$  (8.4) est non nulle.*

*Démonstration.* — Fixons  $f_1$  et  $f_2 \in C^\infty(\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}})$  dans les images respectives de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  et telles que la fonction  $f_1 \otimes f_2$  engendre la représentation  $\sigma$  de  $G_0^{\text{nc}}$  (c'est possible d'après notre première hypothèse). Le coefficient matriciel de  $\sigma$  associé à ce vecteur est égal à

$$(8.5) \quad \psi(g) = \int_{\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}} \int_{\Gamma \backslash G_0^{\text{nc}}} f_1(g_1) f_2(g_2) \overline{f_1(g_1 g) f_2(g_2 g)} dg_1 dg_2 \quad (g \in G_0^{\text{nc}}).$$

Dans [11], Burger et Sarnak montrent que  $\psi$  est la limite, uniforme sur les compacts, de sommes finies de coefficients matriciels de la forme

$$(8.6) \quad \int_{(\Gamma \cap \delta^{-1} \Gamma \delta) \backslash G_0^{\text{nc}}} f_1(\delta g') f_2(g') \overline{f_1(\delta g' g) f_2(g' g)} dg',$$

où  $\delta \in G(\mathbb{Q})^{(1)}$ .

Le coefficient (8.6) est un coefficient matriciel associé à un vecteur de l'espace  $\bigoplus_{g \in G(\mathbb{Q})} L^2((\Gamma \cap g^{-1} \Gamma g) \backslash G_0^{\text{nc}})$ . La représentation  $\sigma$  est donc faiblement contenue dans le  $G_0^{\text{nc}}$ -spectre de  $\bigoplus_{g \in G(\mathbb{Q})} L^2((\Gamma \cap g^{-1} \Gamma g) \backslash G_0^{\text{nc}})$ , elle appartient donc au dual automorphe de  $G$ .

La démonstration de [2, Fact 3.3] montre plus précisément que  $\sigma$  est faiblement contenue dans  $\{\rho \in \widehat{G}_{\text{Aut}} : d(C^R(\rho)) = 0\}$ . Puisque nous avons supposé  $\sigma$  isolée dans le dual automorphe de  $G$  sous la condition  $d = 0$ , la Proposition 8.2 est finalement démontrée.  $\square$

## 8.2. Restriction et cup-produit virtuels

Dans le cas des groupes orthogonaux et de l'application de restriction nous déduisons de tout ceci le théorème suivant.

**THÉORÈME 8.3.** — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Soit  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q - r)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q \geq 2$ . Soit  $i$  un entier  $\leq (q - r - 2)/2$  tel que  $p + q - r - 2i \geq 5$ . Alors, l'application*

$$H^{(i^p)}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{prim}^+}^*(Sh^0 H)$$

*obtenue en composant l'application  $\text{Res}_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 H$  est **injective**. Son image est contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^{(i^p)}(Sh^0 H)$ .*

*Démonstration.* — D'après le Théorème 5.3 et la Proposition 8.1, il suffit de vérifier que la représentation  $A((i^p))_H$  est isolée dans le dual automorphe de  $H$ , mais d'après la Proposition 4.2 et pour  $i$  vérifiant les conditions du Théorème, on a beaucoup plus

<sup>(1)</sup>Dans le cas isotrope, le Théorème de Burger et Sarnak cité ci-dessus est encore vrai tant que  $f$  est uniformément continue.

puisque la représentation  $A((i^p))_H$  est en fait isolée dans le dual unitaire de  $H_0^{\text{nc}}$ . Enfin la partie sur la composante fortement primitive de la cohomologie résulte de la Remarque qui suit le Lemme 2.6.  $\square$

REMARQUES. — Le Théorème 8.3 (et sa démonstration) implique(nt) le premier point du Théorème 1.4 : il est immédiat (cf. par exemple [3, Fait 32]) qu'une telle classe de cohomologie de degré  $\leq p + q - 4$  appartient à  $H^*(A((i^p)) : Sh^0G)$  ou à  $H^*(A((q^j)) : Sh^0G)$  (avec  $i, j$  entiers). On peut donc restreindre l'étude de  $\text{Res}_H^G$  au sous-espace  $H^*(A((i^p)) : Sh^0G)$ , puis (comme dans la démonstration du Théorème 1.3), au sous-espace (fortement primitif)  $H^{(i^p)}(Sh^0G)$ . Enfin le Corollaire 4.3 implique que toute représentation cohomologique de  $SO_0(p, q - 1)$  de degré fortement primitif  $< p + q - 4$  est isolée dans le dual unitaire de  $SO_0(p, q - 1)$ , ce qui implique immédiatement que toute représentation cohomologique de  $SO_0(p, q - 1)$  de degré fortement primitif  $\leq p + q - 4$  est isolée dans le dual unitaire sous la condition  $d = 0$ . Le Théorème 8.3 (et sa démonstration) implique(nt) alors (avec  $r = 1$ ) que la restriction de  $\text{Res}_H^G$  au sous-espace  $H^{(i^p)}(Sh^0G)$  est injective. Ce qui démontre le premier point du Théorème 1.4. Le Théorème 8.3 n'implique qu'une version plus faible du premier point du Théorème 1.5. Celui-ci est néanmoins complètement démontré par Venkataramana [54].

Le Théorème 8.3 est un analogue (bien que sa démonstration soit complètement différente) du Théorème 3.1. Plus généralement et au vu de la Conjecture 5.5 nous conjecturons le résultat suivant.

CONJECTURE 8.4. — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Soit  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q - r)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$ ,  $1 \leq p, q$  et  $1 \leq r < q$ . Soit  $\lambda$  une partition orthogonale dans  $p \times q$ . Alors, l'application*

$$H^\lambda(Sh^0G)_{\pm 1}^{\pm 2} \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{prim}^+}^{|\lambda|}(Sh^0H)$$

*obtenue en composant l'application  $\text{Res}_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0H$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Son image est alors contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^\lambda(Sh^0H)_{\pm 1}^{\pm 2}$ .*

Concernant la restriction des groupes unitaires vers les groupes orthogonaux nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 8.5. — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soit  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q \geq 2$ . Soit  $i$  un entier  $\leq (q - 2)/2$  tel que  $p + q - 2i \geq 5$ .*



Alors, l'application

$$H^{(i^p)}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{prim}^+}^*(Sh^0 H)$$

obtenue en composant l'application  $\text{Res}_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 H$  est **injective**. Son image est contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^{(i^p)}(Sh^0 H)$ .

*Démonstration.* — Elle est identique à celle du Théorème 8.3 à condition de remplacer le Théorème 5.3 par le Théorème 5.6 et la Remarque suivant le Lemme 2.6 par la Remarque qui suit le Lemme 2.4.  $\square$

REMARQUES. — Le Théorème 8.5 (et sa démonstration) implique(nt) les premiers points des Théorèmes 1.7 et 1.8. Les deuxièmes points de ces Théorèmes proviennent de ce qu'à un niveau fini on a un plongement totalement réel d'une variété réelle de dimension paire dans une variété complexe. La multiplication par la structure complexe  $J$  de la variété ambiante, échange donc le fibré tangent et le fibré normal de la sous-variété totalement réelle. Le nombre d'Euler de son fibré normal dans la variété complexe ambiante est donc égal à sa caractéristique d'Euler qui est non nulle.

Le Théorème 8.5 (et sa démonstration) implique(nt) le Corollaire 1.9 de l'Introduction, il faut juste remplacer la Proposition 4.2 par le Corollaire 4.6, lorsque  $p = 2$  et  $q = 3$ , par la Proposition 4.9, lorsque  $p = 1$ , et utiliser [5, Théorème 5.1] lorsque  $p = q = 2$ .

Plus généralement et au vu de la Conjecture 5.5 nous conjecturons le résultat suivant.

CONJECTURE 8.6. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soit  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$ ,  $1 \leq p, q$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions incluses dans  $p \times q$  formant un couple compatible. Si l'application

$$(8.7) \quad H^{\lambda, \mu}(Sh^0 G)_{\pm 1}^{\pm 2} \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{prim}^+}^{|\lambda|}(Sh^0 H)$$

obtenue en composant l'application  $\text{Res}_H^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 H$  est non nulle alors  $\lambda = 0$  ou  $\mu = p \times q$ . Supposons par exemple  $\mu = p \times q$ . Alors, l'application (8.7) est **injective** si et seulement si la partition  $\lambda$  est orthogonale. Son image est alors contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^\lambda(Sh^0 H)_{\pm 1}^{\pm 2}$ .

Concernant le cup-produit nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 8.7. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ , avec  $p, q \geq 2$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie

appartenant respectivement à  $H^{(k^p)}(Sh^0G)$  et  $H^{(l^p)}(Sh^0G)$  avec  $k + l \leq (q - 2)/2$  et  $p + q - 2(k + l) \geq 5$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que le projeté de

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans  $H^{((k+l)^p)}(Sh^0G)$  soit non nul.

*Démonstration.* — D'après le Théorème 5.9 et la Proposition 8.2, il suffit de vérifier que la représentation  $A(((k + l)^p))$  est isolée dans le dual automorphe de  $H$ , mais d'après la Proposition 4.2 et pour  $k, l$  vérifiant les conditions du Théorème, on a beaucoup plus puisque la représentation  $A(((k + l)^p))_H$  est en fait isolée dans le dual unitaire de  $G_0^{\text{nc}}$ .  $\square$

REMARQUES. — Là encore, le Théorème 8.7 implique le Théorème 1.12, lorsque  $p \geq 3$ . Dans le cas  $p = 2$ , il n'implique qu'une version plus faible. Le reste du Théorème 1.12 est néanmoins démontré par Venkataramana [54].

Le Théorème 8.7 est un analogue (bien que la démonstration soit complètement différente) du Théorème 1.11. Plus généralement et au vu du Théorème 5.9 nous conjecturons le résultat suivant (qui généralise la Conjecture 1.13).

CONJECTURE 8.8. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ , avec  $p, q \geq 1$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie appartenant respectivement à  $H^{(k^p)}(Sh^0G)$  et  $H^{(l^p)}(Sh^0G)$ . Alors, il existe un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que le projeté de

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans la partie fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0G$  soit non nul si et seulement si  $k + l \leq q/2$ . Le projeté appartient alors à  $H^{(k+l)^p}(Sh^0G)$ .

### 8.3. L'application « cup-produit avec $[Sh^0H]$ »

Concernant l'application « cup-produit avec  $[Sh^0H]$  » nous commençons par démontrer le résultat général suivant.

THÉORÈME 8.9. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif, connexe et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q + r)$ . Soit  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q, r \geq 1$ . Soit  $\lambda$  une partition orthogonale dans  $p \times q$  telle que la partition  $(r^p)$  s'inscrive dans le diagramme  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Supposons :

1. que  $\lambda$  vérifie la Conjecture 3.17, et
2. que  $A(\lambda + (r^p))_{\pm 1}^{\pm 2}$  est isolée dans le dual automorphe de  $G$  sous la condition  $d = 0$ .

Alors, l'application

$$H^\lambda(Sh^0H) \longrightarrow H^{\lambda+(r^p)}(Sh^0G),$$

obtenue en composant l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  » et la projection sur la composante  $H^{\lambda+(r^p)}(Sh^0 G) \subset H^*(Sh^0 G)$ , est **injective**.

Si de plus  $\alpha$  est une classe non triviale dans  $H^\lambda(Sh^0 H)$ , l'espace vectoriel engendré par les translatés de Hecke de l'image de  $\alpha$  dans  $H^{\lambda+(r^p)}(Sh^0 G)$  est de dimension infinie.

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  une classe non triviale dans  $H^\lambda(Sh^0 H)$ . La classe  $\alpha$  est représentée par un classe non triviale (que nous notons toujours  $\alpha$ ) définie sur un niveau fini. On peut donc supposer qu'il existe un sous-groupe de congruence  $\Gamma$  dans  $G$  et un sous-espace  $V$  de dimension  $r$  dans  $\mathbb{R}^{p+q+r}$  tels que  $H^{nc} = G_V^{nc}$  et  $\alpha \in H^\lambda(\Gamma_V \backslash X_V)$ , où  $\Gamma_V = \Gamma \cap G_V^{nc}$ . Représentons la classe  $\alpha$  par une forme harmonique que nous notons  $\mu$ . (Nous utiliserons tout au long de la démonstration les notations du chapitre 6.)

Notons  $M = \Gamma \backslash X$  et fixons  $\{M_m = \Gamma_m \backslash X\}$  une tour d'effeuillage (fournie par le Lemme 6.14) constituée de revêtements de congruence.

Notons  $\delta$  l'unique  $K$ -type minimal de la représentation  $A(\lambda + (r^p))$  de  $G$  et  $P_0^{m,\delta}$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) l'application obtenue en composant la projection  $P_0^m$  (sur les formes harmoniques) par la projection sur le sous-espace  $\delta$ -isotypique  $H^*(M_m)_\delta$  de la cohomologie (éventuellement  $L^2$ ).

LEMME 8.10. — Soit  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) \gg 0$ . Alors, la suite  $P_0^{m,\delta} \Omega_\mu^m(s)$  converge uniformément sur tout compact de  $X$  vers  $P_0^{\infty,\delta} \Omega_\mu(s)$ .

*Démonstration.* — Puisque par hypothèse la représentation  $A(\lambda + (r^p))_{\pm 1}^{\pm 2}$  est isolée dans le dual automorphe de  $G$  sous la condition  $d = 0$ , il existe un réel  $\nu$  strictement positif tel que la première valeur propre non nulle du laplacien sur les  $(k + pr)$ -formes fermées de  $M_m$  (resp.  $M_\infty$ ) engendrant le  $K$ -type  $\delta$  soit strictement supérieure à  $\nu$ . Notons alors  $h_\nu$  la fonction  $\in C_0([0, +\infty[)$  qui vaut 1 sur l'intervalle  $[0, \frac{\nu}{2}]$ , 0 sur l'intervalle  $[\nu, +\infty[$  et qui décroît linéairement sur  $[\frac{\nu}{2}, \nu]$ . Puisque :

1. la seule valeur propre du laplacien sur les  $(k + pr)$ -formes fermées de  $M_m$  (resp.  $M_\infty$ ) engendrant le  $K$ -type  $\delta$  et strictement inférieure à  $\nu$  est 0,
2. l'espace des formes fermées engendrant le  $K$ -type  $\delta$  est fermé, et
3. les formes  $\Omega_\mu^m(s)$  et  $\Omega_\mu(s)$  sont fermées,

la projection sur la composante  $\delta$ -isotypique de  $h_\nu(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)$  (resp.  $h_\nu(\Delta_\infty)\Omega_\mu(s)$ ) est égale à  $P_0^{m,\delta}\Omega_\mu^m(s)$  (resp.  $P_0^{\infty,\delta}\Omega_\mu(s)$ ).

Or, d'après la Proposition 6.23 et pour  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) \gg 0$ , la suite  $h_\nu(\Delta_m)\Omega_\mu^m(s)$  converge vers  $h_\nu(\Delta_\infty)\Omega_\mu(s)$  uniformément sur les compacts. Ce qui conclut la démonstration du Lemme 8.10.  $\square$

D'après le Théorème 6.18, l'application  $\mu \mapsto \Omega_\mu(s)$  (pour  $\text{Re}(s) \gg 0$ ) induit l'application naturelle

$$H^k(C_V) \mapsto H_2^{k+pr}(M_V)$$

« cup-produit avec  $[C_V]$  ». Puisque par hypothèse  $\lambda$  vérifie la Conjecture 3.17, la projection  $P_0^{\infty, \delta} \Omega_\mu(s)$  doit être non nulle (et indépendante de  $s$ ,  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ ).

On peut maintenant démontrer la première partie du Théorème 8.9. L'application  $H^\lambda(C_V) \rightarrow H^{\lambda+(r^p)}(M_m)$  correspond en effet à l'application  $\mu \mapsto P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$ . Mais, d'après le Lemme 8.10, cette dernière converge simplement vers l'application

$$H^\lambda(C_V) \longrightarrow H_2^{\lambda+(r^p)}(M_V),$$

injective par hypothèse. Or  $H^\lambda(C_V)$  est de dimension finie donc la convergence est uniforme et pour  $m$  grand, l'application  $H^\lambda(C_V) \rightarrow H^{\lambda+(r^p)}(M_m)$  est injective. Comme  $M_m$  est un revêtement de congruence de  $M$ , la première partie du Théorème 8.9 est démontrée.

Pour démontrer la deuxième partie du Théorème 8.9, nous allons d'abord déduire des faits précédents la proposition suivante.

**PROPOSITION 8.11.** — *On se place sous les hypothèses du Théorème 8.9. Soient  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ , et  $\mu$  une forme harmonique représentant une classe non nulle dans  $H^\lambda(C_V)$ . Supposons  $P_0^{0, \delta} \Omega_\mu^0(s) \neq 0$ . Il existe alors un entier  $m \geq 0$  et un élément  $\gamma \in \Gamma$  tels que les formes harmoniques  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  et  $\gamma^* P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  soient linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* — Nous montrons d'abord par l'absurde qu'il existe un entier  $m \geq 0$  tel que la forme  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m$  ne soit pas invariante sous l'action de  $\Gamma$ . Soit  $m$  un entier  $\geq 0$ . Supposons que la forme  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  soit invariante sous l'action de  $\Gamma$ . Alors,

$$P_0^{0, \delta} \Omega_\mu^0(s) = [\Gamma : \Gamma_m] P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s).$$

Or  $[\Gamma : \Gamma_m]$  tend vers l'infini avec  $m$ , donc  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  tend vers 0 avec  $m$  ce qui contredit la première partie du Théorème 8.9 démontré ci-dessus. Il existe donc un entier  $m \geq 0$  et un élément  $\gamma \in \Gamma$  tels que les formes  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  et  $\gamma^* P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  soient distinctes. Puisque

$$\sum_{g \in \Gamma_m \setminus \Gamma} g^* P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s) = \sum_{g \in \Gamma_m \setminus \Gamma} g^*(\gamma^* P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)) = P_0^{0, \delta} \Omega_\mu^0(s) \neq 0,$$

les formes  $P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  et  $\gamma^* P_0^{m, \delta} \Omega_\mu^m(s)$  sont en fait nécessairement linéairement indépendantes. Ce qui achève la démonstration de la Proposition 8.11.  $\square$

À l'aide de la Proposition 8.11, nous pouvons maintenant conclure la démonstration du Théorème 8.9.

Soit  $\mu$  une forme harmonique sur  $C_V$  représentant une classe non nulle dans  $H^\lambda(C_V)$ . Nous allons montrer par récurrence sur  $N \geq 1$  qu'il existe un revêtement fini de congruence  $M_N$  de  $M$  et  $N$  translatés par  $\Gamma$  de l'image de  $\mu$  dans  $H^{\lambda+(r^p)}(M_N)$  qui soient linéairement indépendants. Le Théorème 8.9 en découle immédiatement.

Supposons qu'il existe un tel revêtement  $M_N$  pour un certain  $N \geq 1$ . Notons  $\omega_1, \dots, \omega_N$  les  $N$  formes harmoniques indépendantes obtenues. On peut supposer que

la forme  $\omega_1$  est la forme harmonique associée à  $\mu$  (qui est une forme harmonique sur une préimage de  $C_V$  dans  $M_N$ ). La Proposition 8.11 implique qu'il existe un revêtement fini  $M_{N+1}$  de  $M_N$ , une forme harmonique  $\hat{\omega}_1$  sur  $M_{N+1}$  et un élément  $\gamma \in \pi_1 M_N$  tels que les formes harmoniques  $\hat{\omega}_1$  et  $\gamma^* \hat{\omega}_1$  soient linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe  $N + 1$  réels  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$  tels que

$$\alpha_0 \hat{\omega}_1 + \alpha_1 \gamma^* \hat{\omega}_1 + \alpha_2 \omega_2 + \dots + \alpha_N \omega_N = 0.$$

Alors en moyennant par  $\pi_1 M_{N+1} \setminus \pi_1 M_N$ , on obtient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \omega_1 + [\pi_1 M_N : \pi_1 M_{N+1}] \{ \alpha_2 \omega_2 + \dots + \alpha_N \omega_N \} = 0.$$

L'hypothèse de récurrence implique donc :

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0.$$

Et puisque les formes harmoniques  $\hat{\omega}_1$  et  $\gamma^* \hat{\omega}_1$  sont linéairement indépendantes, on obtient finalement que :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0.$$

Enfin puisque le revêtement de  $M_{N+1}$  sur  $M$  est fini, on peut le supposer galoisien, la forme  $\gamma^* \hat{\omega}_1$  est alors définie sur  $M_{N+1}$ . Ce qui achève la récurrence et la démonstration du Théorème 8.9.  $\square$

Remarquons maintenant qu'en vertu de la Proposition 4.2 la deuxième hypothèse du Théorème 8.9 est vérifiée par tout diagramme orthogonal  $\lambda$  de poids  $|\lambda| \leq p + q + r - rp - 3$ , si  $p, q \geq 3$  et de poids  $|\lambda| \leq [(q + r)/2] - 2r$ , si  $p = 2 \leq q + r$ . Il découle par ailleurs du Théorème 7.1 que la première hypothèse du Théorème 8.9 est vérifiée pour tout diagramme orthogonal  $\lambda$  de poids  $|\lambda| \leq (q - pr)/2 - 1$ . Le Théorème 8.9 implique donc le théorème suivant qui à son tour implique immédiatement les deuxièmes points des Théorèmes 1.4 et 1.5.

**THÉORÈME 8.12.** — *Supposons fixée une donnée  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{nc} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{nc} = O(p, q + r)$ , avec  $p, q \geq 2$ . Alors, pour tout degré  $k \leq \min(p + q + r - rp - 3, (q - pr)/2 - 1)$ , l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  »*

$$\bigwedge_H^G : H^k(Sh^0 H) \longrightarrow H^{k+rp}(Sh^0 G)$$

est **injective**.

Plus généralement, et au vu de la Conjecture 3.17, nous conjecturons le résultat suivant.

**CONJECTURE 8.13.** — *Supposons fixée une donnée  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{nc} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{nc} = O(p, q + r)$ . Si  $\lambda$  est une partition incluse dans  $p \times q$ , alors l'application*

$$H^\lambda(Sh^0 H) \longrightarrow H_{\text{prim}^+}^{|\lambda|+rp}(Sh^0 G)$$

obtenue en composant l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  » et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0 G$  est **injective** si et seulement si la partition  $(r^p)$  s'inscrit dans le diagramme  $\hat{\lambda}/\lambda$ . Son image est alors contenue dans  $H^{\lambda+(r^p)}(Sh^0 G)$ .

REMARQUE. — L'analogie de la partie de l'énoncé de la Conjecture 8.13 concernant la composante fortement primitive devrait pouvoir être démontré sous les hypothèses du Théorème 8.9. Nous nous contenterons de traiter (plus loin) le cas des symboles modulaires.

#### 8.4. Applications

Commençons par déduire des Théorèmes 1.4 et 1.5 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8.14. — Soit  $G$  un groupe algébrique et anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe orthogonal sur un corps de nombres totalement réel et tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$  avec  $q \geq p \geq 2$ . Alors ,

$$H^p(Sh^0 G) \neq 0.$$

REMARQUES. — Le Corollaire 8.14 reste vrai pour  $p, q \geq 1$ , cela découle en particulier du Corollaire 1.6 sur lequel nous revenons au paragraphe suivant. Ce résultat est un Théorème de Millson et Raghunathan qui montrent plus généralement que tous les groupes  $H^{kp}(Sh^0 G)$ ,  $k = 0, \dots, q$ , sont non triviaux. Nous déduisons ici directement le Corollaire 8.14 des Théorèmes 1.4 et 1.5 pour illustrer comment ceux-ci s'appliquent dans un cas relativement simple.

*Démonstration du Corollaire 8.14.* — Puisque le groupe  $G$  provient d'un groupe orthogonal sur un corps de nombre, il est immédiat qu'il existe une donnée  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q - 1)$ . Remarquons d'abord que pour  $q$  grand par rapport à  $p$  (plus précisément pour  $q \geq p + 3$ ), les points 2. (avec  $k = 0$ ) des Théorèmes 1.4 et 1.5 impliquent la conclusion du Corollaire 8.14. Il nous reste à montrer comment faire diminuer  $q$ , autrement dit déduire du résultat pour  $O(p, q + 1)$  le résultat pour  $O(p, q)$ , pour tout  $q \geq p \geq 2$ .

Mais, et toujours puisque le groupe  $G$  provient d'un groupe orthogonal sur un corps de nombre, il existe une donnée  $Sh^0 G \subset Sh^0 G_1$  avec  $G_1^{\text{nc}} = O(p, q + 1)$ . Remarquons maintenant que si  $q \geq p \geq 3$ , alors  $p \leq p + (q + 1) - 4$  et que si  $p = 2$ , alors  $2 \leq (q + 1) - 1$ . On peut donc appliquer les points 1., avec  $k = p$ , des Théorèmes 1.4 et 1.5 tant que  $q \geq p \geq 2$ . D'où l'on déduit que si  $H^p(Sh^0 G_1)$  est non nul alors  $H^p(Sh^0 G) \neq 0$ . Et le Corollaire 8.14 découle d'un simple argument de descente.  $\square$

Les Théorèmes 1.4 et 1.5 sont bien sûr bien plus généraux et deviennent plus surprenant lorsqu'on les applique à des classes de cohomologie plus profondes. Dans les variétés kaehlériennes le Théorème de Lefschetz fort implique que la multiplication

par la forme de Kaehler propage injectivement les classes de cohomologie. De manière surprenante un phénomène analogue à lieu dans la cohomologie  $H^*(Sh^0O(p, q))$ . Explicitons par exemple ce qu'il se passe à partir d'une classe de degré  $p$ .

COROLLAIRE 8.15. — *Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{nc} = O(p, q - 1)$ ,  $G^{nc} = O(p, q)$  et  $p, q \geq 2$ . Alors, pour tout  $k \leq q/4$ , l'application « cup-produit avec  $[Sh^0H]^k$  »*

$$H^p(Sh^0G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H^{p(k+1)}(Sh^0G)$$

est **injective**.

Le Corollaire 1.9 permet de démontrer un résultat bien plus général que le Corollaire 8.14 à savoir, le Corollaire 1.10 de l'Introduction. Raghunathan et Venkataramana [46] montrent en effet que si  $G$  est un groupe algébrique obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe de type  $D_n$ ,  $\neq {}^{3,6}D_4$  et  $n > 2$ , sur un corps de nombres totalement réel de telle manière que  $G^{nc} = O(p, q)$ , avec  $1 \leq p \leq q$ , il existe alors un groupe  $G_1$  obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombres totalement réel et tel que  $G_1^{nc} = U(p, q)$  et  $Sh^0G \subset Sh^0G_1$ . Mais dans [58] Wallach montre (à l'aide de la correspondance thêta globale) que  $H^p(Sh^0G_1) \neq 0$ . Le Corollaire 1.9 implique donc immédiatement le Corollaire 1.10 de l'introduction.

## 8.5. Sur la classe de cohomologie des symboles modulaires

Concernant la classe de cohomologie des symboles modulaires, nos méthodes permettent de démontrer le Théorème suivant.

THÉORÈME 8.16. — *Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $G$  anisotrope,  $H^{nc} = O(p, q)$ ,  $G^{nc} = O(p, q + r)$  et  $p, q \geq 2$ . Supposons  $\mathbf{q} \geq \mathbf{r} + 2$  et  $\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r} \geq 5$ . Alors, la classe de  $[Sh^0H]$  est non triviale dans  $H^*(Sh^0G)$ . Plus précisément, la projection de  $[Sh^0H]$  dans la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0G$  est non triviale et appartient à  $H^{(r^p)}(Sh^0G)$ .*

*Démonstration.* — Le Corollaire 3.16 implique l'hypothèse 1. du Théorème 8.9 pour la partition nulle. La Proposition 4.2 implique que sous les conditions  $q \geq r + 2$  et  $p + q - r \geq 5$ , l'hypothèse 2. du Théorème 8.9 est vérifiée par la partition nulle. Le Théorème 8.9 implique alors que la projection de  $[Sh^0H]$  dans  $H^{(r^p)}(Sh^0G)$  est non triviale. Ce qui implique le premier point du Théorème 8.16. La trivialité de la projection de  $[Sh^0H]$  dans les autres composantes fortement primitives de la cohomologie de  $Sh^0G$ , provient de ce que parmi les représentations cohomologiques appartenant à la série discrète de  $G^{nc}/H^{nc}$  (qui sont connues, cf. § 3.6),  $A((r^p))$  est la seule de degré fortement primitif  $pr$ .  $\square$

REMARQUE. — Dans ce cas on peut également obtenir des résultats sur la composante non fortement primitive de la cohomologie de  $[Sh^0H]$  : la projection de la classe  $[Sh^0H]$  dans  $H^{pr}(A(\lambda) : Sh^0G)$  est triviale pour toute partition non nulle  $\lambda \subset [p/2] \times (q+r)$ . Cela découle en effet d'un critère [33, Theorem 2.8] de Kobayashi et Oda, et du Théorème 5.13.

Enfin, remarquons que le Corollaire 4.6, la Proposition 4.9 et la démonstration du Théorème 8.16 impliquent le Corollaire 1.6 de l'Introduction,

Dans le cas unitaire, l'analogie du premier point du Théorème 8.16 est bien sûr immédiat (puisque les symboles modulaires sont alors des sous-variétés complexes d'une variété kaehlérienne). Il n'est néanmoins pas clair que la classe de cohomologie d'un symbole modulaire ne se projette pas trivialement sur la composante fortement primitive (ou même non triviale) de la cohomologie. Le théorème suivant se démontre exactement de la même manière que dans le cas orthogonal.

THÉORÈME 8.17. — *Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $G$  anisotrope,  $H^{nc} = U(p, q)$ ,  $G^{nc} = U(p, q+r)$  et  $p, q \geq 2$ . Supposons  $\mathbf{q} \geq \mathbf{r} + \mathbf{2}$ . Alors, la projection de  $[Sh^0H]$  dans la composante fortement primitive de la cohomologie de  $Sh^0G$  est non triviale et appartient à  $H^{(r^p), (q^p)}(Sh^0G)$ .*

REMARQUE. — Dans ce cas le critère de Kobayashi et Oda montre (d'après le Théorème 5.12) que la projection de  $[Sh^0H]$  dans  $H^{2pr}(A(\lambda, \mu) : Sh^0G)$  est triviale pour tout couple  $(\lambda, \mu) \neq (0, p \times (q+r))$  de partitions telles que deux éléments de  $\lambda$  et  $\hat{\mu}$  ne soient jamais alignés. On retrouve en particulier que la classe de cohomologie  $[Sh^0H]$  n'a pas de composante holomorphe.



## CHAPITRE 9

### GÉNÉRALISATIONS ET PERSPECTIVES

#### 9.1. Généralisations

Les résultats du chapitre précédent se généralisent de façon assez naturelle dans deux directions : (1) lorsque les systèmes de coefficients (de la cohomologie) sont non triviaux, et (2) lorsque les groupes sont isotropes.

Le cas (1) est relativement immédiat. Soit  $E$  une représentation de dimension finie de  $G$ . La représentation  $E$  définit un système local  $\mathcal{E}$  sur tous les quotients  $\Gamma \backslash X_G$  considérés dans cet article. Supposons pour simplifier  $E$  irréductible. Toujours d'après la théorie de Vogan et Zuckerman, l'algèbre graduée  $H^*(Sh^0 G, \mathcal{E})$  peut être décomposée selon des représentations  $A_{\mathfrak{q}}(E)$  associées aux sous-algèbres paraboliques de  $\mathfrak{g}$  (voir [57]). Les résultats des chapitres précédents se traduisent alors mot à mot. Dans le cas de l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  » il faut quand même penser à tordre la classe fondamentale  $[Sh^0 H]$ . Plus précisément et en se plaçant à un niveau fini  $\Gamma$ , on considère toujours la sous-variété  $(\Gamma \cap H) \backslash X_H \rightarrow \Gamma \backslash X_G$ , que l'on note  $C_{\Gamma}^H$ . Il s'agit alors de construire une section  $s$  du fibré  $\mathcal{E}|_{C_{\Gamma}^H}$ . Ceci est fait par Tong et Wang dans [53], dont on peut également extraire (comme au § 3.4) la construction de la classe duale à  $(C_{\Gamma}^H, s)$  dans  $H_2^{d_G - d_H}(\Gamma \backslash X_G, \mathcal{E})$ . La reste se généralise immédiatement. Notons même que concernant les symboles modulaires les démonstrations se simplifient dans nombre de cas où la forme duale construite par Tong et Wang est  $L^1$ . On peut en effet alors former directement une série de Poincaré convergente (sans avoir recours à un poids et donc au paramètre  $s$  du § 5.6) et se passer de l'hypothèse 2. dans le Théorème 8.9. Ceci explique les constructions par Tong et Wang de classes de cohomologie non triviales (pour des systèmes de coefficients non triviaux). Nous avons préféré négliger ici les systèmes de coefficients, ils nous paraissent en effet un peu hors sujet en ce qui concerne les propriétés de Lefschetz.

Le cas (2) est plus délicat et très intéressant. Considérons donc maintenant un groupe  $G$  isotrope sur  $\mathbb{Q}$ . La cohomologie de  $Sh^0 G$  n'est plus naturellement reliée à

la théorie des représentations, il n'y a plus de décomposition de Hodge ou de Vogan-Zuckerman. Il est dans ce contexte plus naturel de considérer la cohomologie  $L^2$ ,  $H_2^*(Sh^0G)$ , ou encore la cohomologie cuspidale  $H_{\text{cusp}}^*(Sh^0G)$ . L'espace  $H_{\text{cusp}}^*(Sh^0G)$  est un sous-espace de  $H^*(Sh^0G)$  comme de  $H_2^*(Sh^0G)$ , celui des classes représentées par des formes cuspidales (qui sont bornées et donc  $L^2$ ). Les théories de Matsushima et de Vogan-Zuckerman s'appliquent à l'espace  $H_2^*(Sh^0G)$ . Le sous-espace  $H_{\text{cusp}}^*(Sh^0G)$  hérite alors de la décomposition de Vogan-Zuckerman.

Commençons par considérer l'application de restriction stable de  $G$  à  $H$  et adoptons les notations du § 8.1. Soit donc  $\omega_\varphi \in H_2^R(\pi : \Gamma)$ . Remarquons que d'après le Lemme 3.10 la forme harmonique  $\omega_\varphi$  est bornée sur  $\Gamma \backslash X_G$ . La restriction de la forme  $\omega_\varphi$ , via les applications  $j_g$  ( $g \in G(\mathbb{Q})$ ), aux sous-variétés  $(H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H$  sont bornées et donc dans  $L^2$ . L'application

$$\text{Res}_{2,H}^G : H_2^*(Sh^0G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_2^*(Sh^0H)$$

est bien définie. Si de plus  $\omega_\varphi \in H_{\text{cusp}}^R(\pi : \Gamma)$ , Clozel et Venkataramana [12, Lemma 2.9] montrent que la forme  $j_g^* \omega_\varphi$  est rapidement décroissante le long de  $(H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H$ . L'image de  $\text{Res}_{2,H}^G(H_{\text{cusp}}^*(Sh^0G))$  est-elle contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{\text{cusp}}^*(Sh^0H)$  ?

La question de l'injectivité de  $\text{Res}_{2,H}^G$  est donc bien posée. Les techniques de [3] ne se généralisent pas au cas isotrope (non-compact), le Théorème 3.1 avec  $\text{Res}_H^G$  remplacé par  $\text{Res}_{2,H}^G$  est ouvert. Suivons donc la même approche (à savoir la démonstration du Théorème 8.3) pour les groupes orthogonaux et unitaires dans le cas isotrope. La seule étape de la démonstration du Théorème 8.3 qui utilise l'hypothèse  $G$  anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  est la Proposition 8.1, c'est à dire de [2, Proposition 3.2]. Comme le remarquent Harris et Li dans [24] la démonstration de la Proposition 8.1 reste valable dans le cas isotrope à condition de vérifier que chaque forme  $f$  dans l'image de  $\varphi$  est uniformément continue (cf. la note de bas page no. 12 pour une remarque analogue). Mais ceci (et même  $f$  uniformément Hölder) peut être déduit du Lemme 3.10 en utilisant une « inégalité de Harnak » comme dans [51, Proposition 9.4 (Chapitre 14)]. (Le cas cuspidal est évidemment plus facile à traiter puisque les formes  $j_g^* \omega_\varphi$  sont rapidement décroissantes le long de  $(H \cap g^{-1}\Gamma g) \backslash X_H$ .)

La démonstration du Théorème 8.3 implique alors les théorèmes suivants dans le cas isotrope.

**THÉORÈME 9.1.** — *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Soit  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q-r)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q \geq 2$ . Soit  $i$  un entier  $\leq (q-r-2)/2$  tel que  $p+q-r-2i \geq 5$ . Alors, l'application*

$$H_2^{(i,p)}(Sh^0G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{2, \text{prim}+}^*(Sh^0H)$$

obtenue en composant l'application  $\text{Res}_{2,H}^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0 H$  est **injective**. Son image est contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_2^{(i^p)}(Sh^0 H)$ .

THÉORÈME 9.2. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ . Soit  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = U(p, q-r)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q \geq 2$ . Soient  $i$  et  $j$  deux entiers naturels de somme  $i + j \leq q - r - 2$ . Alors, l'application

$$H_2^{(i^p), ((q-j)^p)}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{2, \text{prim}^+}^*(Sh^0 H)$$

obtenue en composant l'application  $\text{Res}_{2,H}^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0 H$  est **injective**. Son image est contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_2^{(i^p), ((q-r-j)^p)}(Sh^0 H)$ .

REMARQUE. — Dans le cas unitaire, et en ce qui concerne la cohomologie holomorphe l'application  $\text{Res}_{2,H}^G$  est bien comprise, d'après les travaux de Clozel et Venkataramana [12].

Concernant la restriction des groupes unitaires vers les groupes orthogonaux nous obtenons de la même manière le résultat suivant.

THÉORÈME 9.3. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ . Soit  $Sh^0 H \subset Sh^0 G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$  plongé de manière standard dans  $G^{\text{nc}}$  avec  $p, q \geq 2$ . Soit  $i$  un entier  $\leq (q - 2)/2$  tel que  $p + q - 2i \geq 5$ . Alors, l'application

$$H_2^{(i^p)}(Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{2, \text{prim}^+}^*(Sh^0 H)$$

obtenue en composant l'application  $\text{Res}_{2,H}^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0 H$  est **injective**. Son image est contenue dans  $\prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_2^{(i^p)}(Sh^0 H)$ .

REMARQUE. — Le Théorème 9.3 (et sa démonstration) implique(nt), comme annoncée dans l'Introduction, que le Corollaire 1.10 reste vrai dans le cas isotrope avec la même démonstration.

Concernant le cup-produit nous obtenons de manière analogue les résultats suivants.

THÉORÈME 9.4. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)$ , avec  $p, q \geq 2$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie  $L^2$  appartenant respectivement à  $H_2^{(k^p)}(Sh^0 G)$  et  $H_2^{(l^p)}(Sh^0 G)$  avec  $k + l \leq (q - 2)/2$  et  $p + q - 2(k + l) \geq 5$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que le projeté de

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans  $H_2^{((k+l)^p)}(Sh^0 G)$  soit non nul.

THÉORÈME 9.5. — Soit  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = U(p, q)$ , avec  $p, q \geq 2$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux classes de cohomologie  $L^2$  appartenant respectivement à  $H_2^{(i^p), (q-j)^p}(Sh^0G)$  et  $H_2^{(k^p), (q-l)^p}(Sh^0G)$  avec  $i + j + k + l \leq q - 2$ . Il existe alors un élément  $g \in G(\mathbb{Q})$  tel que le projeté de

$$g(\alpha) \wedge \beta \neq 0$$

dans  $H_2^{((i+k)^p), ((q-j-l)^p)}(Sh^0G)$  soit non nul.

Considérons maintenant l'application « cup-produit avec  $[Sh^0H]$  ». La seule étape de la démonstration du Théorème 8.9 qui utilise de manière essentielle le fait que  $G$  est anisotrope est la démonstration du Théorème 7.1. La généralisation de ce résultat au cas isotrope semble nécessiter des idées nouvelles ou à tout le moins une description plus fine de la géométrie à l'infini de  $M_V$ , où  $\Lambda$  est un réseau non cocompact de  $H$ . Néanmoins il est facile de vérifier que la non isotropie de  $G$  n'est pas nécessaire dans les démonstrations des Corollaires 3.14 et 3.17, ni dans dans le § 6.6 (la construction de Wang est valable pour  $\Gamma_V \backslash X_V$  de volume fini). On peut donc au moins appliquer notre méthode aux symboles modulaires pour obtenir les Théorèmes suivants.

THÉORÈME 9.6. — Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(p, q)$ ,  $G^{\text{nc}} = O(p, q + r)$  et  $p, q \geq 2$ . Supposons  $\mathbf{q} \geq \mathbf{r} + \mathbf{2}$  et  $\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r} \geq \mathbf{5}$ . Alors, la classe  $[Sh^0H]$  est non triviale dans  $H_2^*(Sh^0G)$ . Plus précisément, la projection de  $[Sh^0H]$  dans la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0G$  est non triviale et appartient à  $H_2^{(r^p), (q^p)}(Sh^0G)$ .

THÉORÈME 9.7. — Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = U(p, q)$ ,  $G^{\text{nc}} = U(p, q + r)$  et  $p, q \geq 2$ . Supposons  $\mathbf{q} \geq \mathbf{r} + \mathbf{2}$ . Alors, la classe  $[Sh^0H]$  est non triviale dans  $H_2^*(Sh^0G)$ . Plus précisément, la projection de  $[Sh^0H]$  dans la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0G$  est non triviale et appartient à  $H_2^{(r^p), (q^p)}(Sh^0G)$ .

Dans un preprint récent [50], Speth et Venkataramana démontrent que si  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = U(1, q)$ ,  $G^{\text{nc}} = U(1, q + r)$  et  $r = 1$  ou  $2$ , alors la classe  $[Sh^0H]$  est non triviale dans  $H^*(Sh^0G)$  et engendre sous l'action des opérateurs de Hecke un espace de dimension infinie. Ils montrent en fait la non trivialité de la projection de la classe  $[Sh^0H]$  dans la cohomologie triviale. De manière complémentaire notre méthode permet de démontrer (au moins lorsque  $r = 1$ ) la non trivialité de la projection de  $[Sh^0H]$  dans la cohomologie fortement primitive. Nous montrons plus précisément le théorème suivant.

THÉORÈME 9.8. — Supposons fixées des données  $Sh^0H \subset Sh^0G$  avec  $H^{\text{nc}} = O(1, q)$  (resp.  $= U(1, q)$ ),  $G^{\text{nc}} = O(1, q + 1)$  (resp.  $= U(1, q + 1)$ ) et  $q \geq 2$  (resp.  $q \geq 1$ ). Alors, la projection de la classe  $[Sh^0H]$  dans la composante fortement primitive de  $H_2^*(Sh^0G)$  est non triviale et le sous-espace engendré par ses translatés de Hecke est de dimension

*infinie. En particulier, la classe  $[Sh^0 H]$  est non triviale dans  $H^*(Sh^0 G)$  et engendre sous l'action des opérateurs de Hecke un espace de dimension infinie.*

*Démonstration.* — La démonstration est identique à celles des Théorèmes 9.6 et 9.7, sauf que l'on ne peut plus appliquer les Propositions 4.2 et 4.1. Celles-ci peuvent néanmoins être respectivement remplacées par les Propositions 4.9 et 4.10. L'assertion sur les translatés de Hecke découle de la démonstration du Théorème 8.9. On passe finalement de la cohomologie  $L^2$  à la cohomologie usuelle à l'aide d'un Théorème de Zucker [62].  $\square$

## 9.2. Perspectives

Il n'y a évidemment aucune raison autre que technique pour restreindre l'étude des propriétés de Lefschetz automorphes au cas des groupes unitaires ou orthogonaux. Concluons alors cet article par deux conjectures (peut-être un peu optimistes et ambitieuses) qui décrivent les propriétés de Lefschetz automorphes auxquelles on s'attend pour des groupes généraux.

La première conjecture concerne l'application de restriction stable. Elle est motivée par les Théorèmes 3.1 et 8.3, l'article [3] et (surtout) par un résultat général de Venkataramana [54, Theorem 6] dans le cas hermitien. Nous avons besoin de quelques préliminaires pour énoncer cette conjecture.

Considérons  $G$  un groupe algébrique réductif et connexe sur  $\mathbb{Q}$ , presque simple sur  $\mathbb{Q}$  modulo son centre. Nous supposons de plus que le groupe  $G(\mathbb{R})$  de ses points réels est semi-simple et non compact modulo un centre compact. Soit  $H \subset G$  un sous-groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}$  dont le groupe  $H(\mathbb{R})$  intersecte un compact maximal  $K$  de  $G(\mathbb{R})$  selon un sous-groupe compact maximal de  $H(\mathbb{R})$ . Soient  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de Cartan du complexifié de l'algèbre de Lie de  $G(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{k}_H \oplus \mathfrak{p}_H$  la décomposition correspondante pour  $H$ . Notons  $\mathfrak{s}$  le supplémentaire orthogonal (pour la forme de Killing) de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Soit maintenant  $T \subset K$  un tore maximal,  $\mathfrak{t}_0 = \text{Lie}(T)$  et  $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$ . Fixons  $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  un système positif de racines dans  $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ . Posons alors

$$(9.1) \quad e_H = \bigwedge^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p})} (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{p})$$

et considérons  $V_H$  le plus petit sous-espace  $K$ -stable de  $\bigwedge \mathfrak{p}$  (cet espace n'est en général par irréductible).

Étant donné un élément  $X \in i\mathfrak{t}_0$  tel que  $\alpha(X) \geq 0$  pour toute racine  $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ , on pose

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(X) = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{g}^X, \quad \mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha(X) > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

L'algèbre  $\mathfrak{q}$  est une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Notons  $E(G, L)$  le sous-espace de  $\bigwedge \mathfrak{p}$  engendré par les translatés par  $K$  du sous-espace  $\bigwedge(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{l})$  et toujours  $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ .

CONJECTURE 9.9. — *L'application*

$$H_2^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 G) \longrightarrow \prod_{g \in G(\mathbb{Q})} H_{2, \text{prim}^+}^R(Sh^0 H)$$

*obtenue en composant l'application  $\text{Res}_{2, H}^G$  et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0 H$  est **injective** si et seulement si l'intersection*

$$V_H \cap E(G, L) \neq 0.$$

Considérons maintenant une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{h}$ , que nous notons toujours  $\mathfrak{q}$ . La sous-algèbre  $\mathfrak{l}$  de  $\mathfrak{h}$  définit bien évidemment une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . On peut donc toujours parler de  $E(G, L)$ .

CONJECTURE 9.10. — *La projection de la classe  $[Sh^0 H]$  dans la cohomologie  $L^2$  fortement primitive  $H_{2, \text{prim}^+}^*(Sh^0 G)$  est non nulle si et seulement si*

$$\text{rang}_{\mathbb{C}}(G/H) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K/(K \cap H)).$$

*Dans ce cas, l'application*

$$H_2^R(A_{\mathfrak{q}} : Sh^0 H) \longrightarrow H_{2, \text{prim}^+}^{R+d}(Sh^0 G)$$

*obtenue en composant l'application « cup-produit avec  $[Sh^0 H]$  » et la projection sur la composante fortement primitive de la cohomologie  $L^2$  de  $Sh^0 G$  est **injective** si et seulement si l'intersection*

$$V_H \cap E(G, L) \neq 0.$$

REMARQUES. — Il n'est même pas évident que les Conjectures 9.9 et 9.10 impliquent les résultats et conjectures énoncés plus haut dans le cas des groupes unitaires et orthogonaux. Cela semble néanmoins raisonnable au vu de [3]. Enfin on peut évidemment formuler une conjecture générale analogue concernant l'application de cup-produit.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ARTHUR – « Unipotent automorphic representations : conjectures », *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.
- [2] N. BERGERON – « Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds », *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 20, p. 1089–1122.
- [3] N. BERGERON – « Tentative d'épuisement de la cohomologie d'une variété de shimura par restriction à ses sous-variétés », arXiv :math.NT/0403407 v1 24 Mar 2004.
- [4] ———, « Premier nombre de Betti et spectre du laplacien de certaines variétés hyperboliques », *Enseign. Math. (2)* **46** (2000), no. 1-2, p. 109–137.
- [5] ———, « Propriétés de Lefschetz dans la cohomologie de certaines variétés arithmétiques : le cas des surfaces modulaires de Hilbert », in *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 21. Année 2002–2003*, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 21, Univ. Grenoble I, Saint, 2003, p. 75–101.
- [6] ———, « Produits dans la cohomologie des variétés de shimura : quelques calculs », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 11, p. 751–756.
- [7] N. BERGERON & L. CLOZEL – *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques*, Astérisque, vol. 303, Société Mathématique de France, 2005.
- [8] A. BOREL & HARISH-CHANDRA – « Arithmetic subgroups of algebraic groups », *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), p. 485–535.
- [9] A. BOREL & N. R. WALLACH – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [10] M. BURGER, J.-S. LI & P. SARNAK – « Ramanujan duals and automorphic spectrum », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **26** (1992), no. 2, p. 253–257.

- [11] M. BURGER & P. SARNAK – « Ramanujan duals. II », *Invent. Math.* **106** (1991), no. 1, p. 1–11.
- [12] L. CLOZEL & T. N. VENKATARAMANA – « Restriction of the holomorphic cohomology of a Shimura variety to a smaller Shimura variety », *Duke Math. J.* **95** (1998), no. 1, p. 51–106.
- [13] L. CLOZEL – « Démonstration de la conjecture  $\tau$  », *Invent. Math.* **151** (2003), no. 2, p. 297–328.
- [14] P. DELIGNE – « Travaux de Shimura », in *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389*, Springer, Berlin, 1971, p. 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244.
- [15] H. DONNELLY – « On the spectrum of towers », *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), no. 2, p. 322–329.
- [16] ———, « Elliptic operators and covers of Riemannian manifolds », *Math. Z.* **223** (1996), no. 2, p. 303–308.
- [17] H. DONNELLY & F. XAVIER – « On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds », *Amer. J. Math.* **106** (1984), no. 1, p. 169–185.
- [18] M. FLENSTED-JENSEN – « Discrete series for semisimple symmetric spaces », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 253–311.
- [19] ———, *Analysis on non-Riemannian symmetric spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 61, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.
- [20] W. FULTON – *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.
- [21] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.
- [22] I. M. GEL'FAND, M. I. GRAEV & I. I. PYATETSKII-SHAPIRO – *Representation theory and automorphic functions*, Generalized Functions, vol. 6, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990, Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Reprint of the 1969 edition.
- [23] HARISH-CHANDRA – « Representations of a semisimple Lie group on a Banach space. I », *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), p. 185–243.
- [24] M. HARRIS & J.-S. LI – « A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 1, p. 77–122.
- [25] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.



- [26] R. HOWE – «  $\theta$ -series and invariant theory », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 275–285.
- [27] R. HOWE – « Reciprocity laws in the theory of dual pairs », in *Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982)*, Progr. Math., vol. 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 159–175.
- [28] ———, « Transcending classical invariant theory », *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 3, p. 535–552.
- [29] A. W. KNAPP – *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.
- [30] S. KOBAYASHI & K. NOMIZU – *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996, Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [31] T. KOBAYASHI – « Discrete decomposability of the restriction of  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$  with respect to reductive subgroups and its applications », *Invent. Math.* **117** (1994), no. 2, p. 181–205.
- [32] ———, « Discrete decomposability of the restriction of  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$  with respect to reductive subgroups. III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties », *Invent. Math.* **131** (1998), no. 2, p. 229–256.
- [33] T. KOBAYASHI & T. ODA – « A vanishing theorem for modular symbols on locally symmetric spaces », *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 1, p. 45–70.
- [34] S. S. KUDLA – « Seesaw dual reductive pairs », in *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983)*, Progr. Math., vol. 46, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, p. 244–268.
- [35] S. KUMARESAN – « On the canonical  $k$ -types in the irreducible unitary  $g$ -modules with nonzero relative cohomology », *Invent. Math.* **59** (1980), no. 1, p. 1–11.
- [36] J.-S. LI – « Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology », *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 3, p. 913–937.
- [37] ———, « Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients », *J. Reine Angew. Math.* **428** (1992), p. 177–217.
- [38] J.-S. LI & J. J. MILLSON – « On the first Betti number of a hyperbolic manifold with an arithmetic fundamental group », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 2, p. 365–401.
- [39] D. E. LITTLEWOOD – « Invariant theory, tensors and group characters », *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* **239** (1944), p. 305–365.

- [40] G. A. MARGULIS & G. A. SOĬFER – « Maximal subgroups of infinite index in finitely generated linear groups », *J. Algebra* **69** (1981), no. 1, p. 1–23.
- [41] Y. MATSUSHIMA – « A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds », *J. Differential Geometry* **1** (1967), p. 99–109.
- [42] R. MAZZEO & R. S. PHILLIPS – « Hodge theory on hyperbolic manifolds », *Duke Math. J.* **60** (1990), no. 2, p. 509–559.
- [43] J. J. MILLSON & M. S. RAGHUNATHAN – « Geometric construction of cohomology for arithmetic groups. I », in *Geometry and analysis*, Indian Acad. Sci., Bangalore, 1980, p. 103–123.
- [44] T. ŌSHIMA & T. MATSUKI – « A description of discrete series for semisimple symmetric spaces », in *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1984, p. 331–390.
- [45] R. PARTHASARATHY – « Criteria for the unitarizability of some highest weight modules », *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci.* **89** (1980), no. 1, p. 1–24.
- [46] M. S. RAGHUNATHAN & T. N. VENKATARAMANA – « The first Betti number of arithmetic groups and the congruence subgroup problem », in *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, Contemp. Math., vol. 153, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 95–107.
- [47] J. ROHLFS – « Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology », *J. Reine Angew. Math.* **479** (1996), p. 149–182.
- [48] T. SAKAI – *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 149, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Translated from the 1992 Japanese original by the author.
- [49] H. SCHLICHTKRULL – « The Langlands parameters of Flensted-Jensen’s discrete series for semisimple symmetric spaces », *J. Funct. Anal.* **50** (1983), no. 2, p. 133–150.
- [50] B. SPEH & T. VENKATARAMANA – « Construction of some generalised modular symbols », arXiv :math.GR/0409376 v1 21 sept 2004.
- [51] M. E. TAYLOR – *Partial differential equations. III*, Applied Mathematical Sciences, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1997, Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original.
- [52] Y. L. TONG & S. P. WANG – « Harmonic forms dual to geodesic cycles in quotients of  $SU(p, 1)$  », *Math. Ann.* **258** (1981/82), no. 3, p. 289–318.
- [53] ———, « Geometric realization of discrete series for semisimple symmetric spaces », *Invent. Math.* **96** (1989), no. 2, p. 425–458.
- [54] T. N. VENKATARAMANA – « Cohomology of compact locally symmetric spaces », *Compositio Math.* **125** (2001), no. 2, p. 221–253.

- [55] D. A. VOGAN – « Isolated unitary representations », to appear in the 2002 Park City summer school volume.
- [56] D. A. VOGAN, JR. – « The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I », *Ann. of Math. (2)* **109** (1979), no. 1, p. 1–60.
- [57] D. A. VOGAN, JR. & G. J. ZUCKERMAN – « Unitary representations with nonzero cohomology », *Compositio Math.* **53** (1984), no. 1, p. 51–90.
- [58] N. R. WALLACH – « Square integrable automorphic forms and cohomology of arithmetic quotients of  $SU(p, q)$  », *Math. Ann.* **266** (1984), no. 3, p. 261–278.
- [59] S. P. WANG – « Correspondence of modular forms to cycles associated to  $O(p, q)$  », *J. Differential Geom.* **22** (1985), no. 2, p. 151–213.
- [60] N. YEGANEFAR – « Sur la  $L^2$ -cohomologie des variétés à courbure négative », *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 1, p. 145–180.
- [61] S.-K. YEUNG – « Betti numbers on a tower of coverings », *Duke Math. J.* **73** (1994), no. 1, p. 201–226.
- [62] S. ZUCKER – «  $L_2$  cohomology of warped products and arithmetic groups », *Invent. Math.* **70** (1982/83), no. 2, p. 169–218.