MÉMOIRES DE LA S. M. F.

YVES BENOIST

Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__1_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 1-37

MULTIPLICITÉ UN POUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

YVES BENOIST (*)

Résumé :

On donne une condition suffisante de non multiplicité pour certaines représentations cycliques liées à des espaces symétriques. On en déduit que si (G,H) est un espace symétrique exponentiel la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité.

A sufficient non multiplicity condition is given for certain cyclic representations which are related to symmetric spaces. In particular, it is proved that if (G,H) is an exponential symmetric space the induced representation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ has no multiplicity.

(*) ERA 1020 du C.N.R.S.,
UER de Mathématiques
2, Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

ESPACES SYMÉTRIQUES EXPONENTIELS

INTRODUCTION :

Soient G un groupe de Lie connexe, σ une involution de G, H l'ensemble des points fixes de σ , H_o sa composante neutre et K un sous-groupe de G tel que $H_o \subset K \subset H$. Un couple (G,K) est appelé un espace symétrique. Il est connu que, dans les deux cas suivants :

i) (G,K) espace symétrique riemannien (i.e. Ad K compact)
ii) $(G_1 \times G_1, \Delta)$ où Δ est la diagonale de $G_1 \times G_1$ (cf. [Ma 1] §.3),

la représentation du groupe G dans l'espace $L^2(G/K)$ est sans multiplicité (i.e. le commutant de cette représentation est commutatif).

Nous nous plaçons dans le cadre des groupes de Lie résolubles. Nous montrons que ce résultat est encore vrai si G a une algèbre de Lie exponentielle (corol. 3.2.1), mais peut être mis en défaut pour un groupe résoluble quelconque (exemple 3.3.2).

Voici la méthode suivie : nous montrons tout d'abord une égalité du type G = HP "décomposition de Cartan" où $P = \{g \in G/g^{-1} = g^\sigma\}$ (prop. 2.1). Nous associons ensuite à chaque élément du commutant une fonction généralisée sur G (l'idée d'une telle association est due à F. Bruhat : [Br] Chap. 6). Cette dernière est "H-semibiinvariante". Nous montrons auparavant une propriété des fonctions généralisées "H-semibiinvariantes" (prop. 2.3). Ceci nous permet de montrer qu'un automorphisme et un antiautomorphisme du commutant coïncident (th. 3.1).

En outre, nous précisons la désintégration de cette représentation sur $\hat{G}$: les représentations unitaires irréductibles qui y interviennent vérifient $\bar{\pi} = \pi^\sigma$ (th. 4.1.2). Nous interprétons ceci en termes de méthode des orbites (th. 4.3.2). Nous terminons par une propriété de ces représentations irréductibles (corol. 4.4.2) liée à notre problème par une dualité de Frobenius.

Nous donnons à nos résultats une certaine généralité de façon à retrouver le cas $(G_1 \times G_1, \Delta)$ ainsi que quelques autres. Ceci a tendance à alourdir les énoncés, mais n'entraîne aucune modification essentielle dans les démonstrations. On peut donc, en première lecture, supposer que G est un groupe exponentiel et que la représentation dont on cherche la désintégration est la représentation de G dans $L^2(G/H)$.

Ces résultats sont annoncés dans [B2], et développés dans la première partie de [B1] où les exemples sont traités de façon plus détaillée.

I. GÉNÉRALITÉS, RAPPELS :

1.1. Notations

1.1.1 Soit M une variété (paracompacte), on note $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) l'espace des fonctions continues (resp. de classe C^∞) de M à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\mathcal{D}(M)$) le sous-espace de $\mathcal{C}(M)$ (resp. $\mathcal{E}(M)$) formé des fonctions à support compact. On note $\mathcal{M}^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ sur M et $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ le sous-espace des densités C^∞ à support compact. On munit ces ensembles de leur topologie usuelle.

Soient M et N deux variétés, ϕ et ψ des éléments de $\mathcal{C}(M)$ et $\mathcal{C}(N)$. On note $\phi \otimes \psi$ l'élément de $\mathcal{C}(M \times N)$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$, $(\phi \otimes \psi)(m,n) = \phi(m)\psi(n)$. De même, si f et g sont des difféomorphismes de M et N, on note $f \otimes g$ le difféomorphisme de $M \times N$ donné par, pour (m,n) dans $M \times N$ $(f \otimes g)(m,n) = (f(m),g(n))$. On notera souvent de la même façon une fonction et sa restriction à un sous-ensemble.

Soit $\mathcal{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M et $\mathcal{E}'(M)$ l'espace des distributions à support compact. Soient ξ dans $\mathcal{D}'(M)$ et ϕ dans $\mathcal{D}(M)$, on note (ξ,ϕ) ou $(\xi(x),\phi(x))$, avec une lettre muette (notation abusive), l'image de ϕ par ξ . La distribution conjuguée de ξ est notée $\bar{\xi}$. On a donc, par définition $(\bar{\xi},\bar{\phi}) = \overline{(\xi,\phi)}$. Soit $\mathcal{F}(M)$ l'espace des fonctions généralisées sur M (i.e. le dual de $\mathcal{M}_c^\infty(M)$) ; pour T dans $\mathcal{F}(M)$ et μ dans $\mathcal{M}_c^\infty(M)$, on note de même (T,μ) ou $(T(x),\mu(x))$ l'image de μ par T et $\bar{T}$ la fonction généralisée conjuguée de T. Soit f un difféomorphisme de M, on note $f_*(\xi)$ la distribution image de ξ par f : $\forall \phi \in \mathcal{D}(M)$ $(f_*(\xi),\phi) = (\xi,\phi \circ f)$; et on note $T \circ f$ la fonction généralisée image réciproque de T par f : $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$ $(T \circ f,\mu) = (T,f_*(\mu))$.

1.1.2 Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, pour tout élément g de G, on note $\lambda(g)$, $\rho(g)$, $\gamma(g)$ et J les difféomorphismes de G donnés, pour x dans G, par : $\lambda(g)x = gx$, $\rho(g)x = xg^{-1}$, $\gamma(g)x = gxg^{-1}$ et $J(x) = x^{-1}$.
Notons exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G et m la multiplication de G.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite exponentielle si pour tout X dans $\mathfrak{g}$, le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$ n'est pas valeur propre de ad X. Celle-ci est alors résoluble. Un groupe de Lie est dit exponentiel s'il est connexe, simplement connexe et si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est exponentielle. Il est équivalent de dire que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G.

Soit σ un automorphisme de G, on note encore σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ dérivé de σ. Pour X dans $\mathfrak{g}$ (resp. g dans G), on notera parfois X^σ (resp. g^σ) l'image de X (resp. g) par σ. On dit que σ est une involution s'il vérifie $\sigma^2 = 1$. On note alors H ou G_σ l'ensemble des points fixes de cette involution :

$$H = G_\sigma = \{g \in G/g^\sigma = g\}$$, on note aussi

$P = \{g \in G/g^\sigma = g^{-1}\}$, $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = X\}$ et $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}/X^\sigma = -X\}$. Soit p la projection canonique de G sur G/H et $\dot{\exp}$ l'application de $\mathfrak{p}$ dans G/H donnée par :

$$\forall X \in \mathfrak{p} \qquad \dot{\exp}\, X = p(\exp X).$$

On a l'égalité $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ et les inclusions :

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \quad ,[\mathfrak{h},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \quad \text{et } [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}.$$

1.1.3 Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert (séparable) et Π une représentation (continue) de G d'espace $\mathcal{H}$. On note $\bar{\mathcal{H}}$ le Hilbert conjugué de $\mathcal{H}$, $\bar{\Pi}$ la représentation conjuguée de Π et Π^σ la représentation $\Pi \circ \sigma$. Rappelons que l'on appelle commutant de la représentation Π l'ensemble

$$\mathcal{C}(\Pi) = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})/\forall g \in G \quad \Pi(g)A = A\,\Pi(g)\}.$$

Le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ est une algèbre de Von Neumann. La représentation Π est dite sans multiplicité si et seulement si $\mathcal{C}(\Pi)$ est commutatif.

1.2. Vecteurs C^{∞} et $C^{-\infty}$ d'une représentation :

1.2.1 Soit G un groupe de Lie et $\Pi : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{H}^{\infty}$ l'espace des vecteurs C^{∞} de la représentation Π : $\mathcal{H}^{\infty} = \{v \in \mathcal{H}$/l'application de G dans $\mathcal{H} : g \to \Pi(g).v$ est $C^{\infty}\}$ muni de sa topologie habituelle et $\mathcal{H}^{-\infty}$ l'antidual de $\mathcal{H}^{\infty}$ (i.e. l'espace vectoriel des formes antilinéaires continues de $\mathcal{H}^{\infty}$ dans $\mathbb{C}$) muni de la topologie de dual fort. Ces espaces sont réflexifs ; l'antidual de $\mathcal{H}^{-\infty}$ s'identifie à $\mathcal{H}^{\infty}$; soient a dans $\mathcal{H}^{\pm\infty}$ et b dans $\mathcal{H}^{\mp\infty}$. On note $\langle a,b\rangle$ l'image de b par a ; on a $\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}$. L'espace $\mathcal{H}^{\infty}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}^{-\infty}$.

Pour g dans G, A dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et μ dans $\mathcal{M}_c(G)$ les opérateurs $\Pi(g)$, A, $\Pi(\mu)$ laissent stable $\mathcal{H}^{\infty}$ (on note $\Pi_{\infty}(g)$, A_{∞} et $\Pi_{\infty}(\mu)$ les restrictions) et se prolongent de façon unique en des opérateurs continus de $\mathcal{H}^{-\infty}$ notés $\Pi_{-\infty}(g)$, $A_{-\infty}$ et $\Pi_{-\infty}(\mu)$; nous oterons parfois les indices $\pm\infty$ (c.f. [Ca]).

1.2.2 Soit L un sous-groupe fermé de G, μ_G une mesure de Haar sur G, Δ_G et Δ_L les fonctions modules de G et L. On note χ le caractère de L donné par, pour l dans L :

$$\chi(l) = \frac{\Delta_L(l)}{\Delta_G(l)} .$$

Soit c un caractère unitaire de L, la représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$: "induite de L à G du caractère c" se réalise naturellement dans le quotient $L^2(G/L,c)$ de l'espace des fonctions mesurables f de G dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\text{i) } \forall g \in G \quad \forall l \in L \quad f(gl) = \chi(l)^{\frac{1}{2}} c(l)^{-1} f(g)$$

ii) $\int_{G/L} |f|^2 \, d\mu_{G,L} < \infty$ (c.f.[Be] pour la définition de cette intégrale) par le sous-espace des fonctions μ_G - presque partout nulles ; si c = 1, on note $L^2(G/L)$ pour $L^2(G/L,1)$. L'action de G est donnée par $\forall g,x \in G$ $(\Pi(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ (c.f.[Be] Chap V 2.2).

La description des vecteurs C^{∞} des représentations induites est due à N. S. Poulsen. Celle-ci prouve en particulier que $(L^2(G/L,c))^{\infty}$ est inclus dans $\mathcal{C}(G)$; cette inclusion est une application continue (c.f. [Po] th. 5.1 ou [Ca] th. 3.1).

1.2.3 Soit Π une représentation unitaire de G. On dit qu'un élément a de $\mathcal{H}_\Pi^{-\infty}$ est cyclique, s'il n'existe pas d'éléments non nuls v de $\mathcal{H}_\Pi^\infty$ tels que, pour tout g dans G, on ait $\langle a,\Pi(g)v\rangle = 0$. Un tel couple (Π,a) est appelé une représentation cyclique (généralisée). On dit que deux représentations cycliques (Π,a) et (Π',a') sont projectivement équivalentes, s'il existe un isomorphisme U qui entrelace Π et Π' et tel que $U_{-\infty}(a) = \lambda a'$ avec λ dans $\mathbb{C}^*$, et équivalentes si on peut choisir $\lambda = 1$.

Exemple 1 : Soient L un sous-groupe de Lie de G, c un caractère unitaire de L et $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c)$. On sait que $\mathcal{H}_\Pi^\infty$ est inclus dans $\mathcal{E}(G)$ (cf. 1.2.2), dont l'application $\delta : \mathcal{H}_\Pi^\infty \to \mathbb{C}$ donnée par $\delta(f) = \overline{f(e)}$ est un élément de $\mathcal{H}_\Pi^{-\infty}$; cet élément est cyclique : en effet, soit f dans $\mathcal{H}_\Pi^\infty$ tel que, pour tout g dans G, on ait $\langle\delta,\Pi(g)f\rangle = 0$, alors $f(g^{-1}) = 0$ et $f = 0$. Le couple (Π,δ) est une représentation cyclique.

Exemple 2 : Soient π une représentation unitaire irréductible de G et a un vecteur non nul de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, alors le couple (π,a) est une représentation cyclique : en effet, soit v non nul dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, l'ensemble $\{\pi(g)v/g \in G\}$ est un sous-ensemble G-invariant de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ total dans $\mathcal{H}_\pi$; il est donc total dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$ (cf. [Po] Corol. 3.4).

1.3. Coefficients des représentations :

1.3.1 Soient G un groupe de Lie et π une représentation unitaire de G dans un Hilbert $\mathcal{H}_\pi$.

Définition : A tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, on associe une fonction généralisée sur G, appelée coefficient de π en (a,b), notée $T_{a,b}^\pi$ et définie par $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$ $(T_{a,b}^\pi,\mu) = \langle\pi(\mu)a,b\rangle$.

Rappelons que l'application : $(\mu,a,b) \mapsto \langle\pi(\mu)a,b\rangle$ est bien définie de $\mathcal{M}_c^\infty(G) \times \mathcal{H}_\pi^{-\infty} \times \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ dans $\mathbb{C}$ car $\pi(\mu)a$ est dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$; elle est séparément continue par rapport à μ, a et b ; le coefficient $T_{a,b}^\pi$ dépend linéairement de a et antilinéairement de b.

Lemme 1.3.1 : Avec les notations précédentes ainsi que celles de 1.1, soient a et b dans $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ et σ une involution de G ; on a, pour g dans G

a) $T^{\pi}_{a,b} \circ \lambda(g^{-1}) = T^{\pi}_{a,\pi(g)b}$

b) $T^{\pi}_{a,b} \circ \rho(g^{-1}) = T^{\pi}_{\pi(g)a,b}$

c) $T^{\pi}_{a,b} \circ J = T^{\bar{\pi}}_{b,a}$

d) $T^{\pi}_{a,b} \circ \sigma = T^{\pi^{\sigma}}_{a,b}$

<u>Démonstration</u> : Comme l'application : $(\mu,a,b) \to \langle\pi(\mu)a,b\rangle$ est séparément continue et que $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$, il suffit de vérifier ces égalités pour a et b dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas, les fonctions généralisées sont de "vraies" fonctions et les égalités sont claires.

1.3.2 Dans le cas de représentations unitaires irréductibles d'un groupe compact, les coefficients vérifient les relations d'orthogonalité de Schur. Voici un résultat qui permet, dans certains cas, de suppléer à l'absence de telles relations pour un groupe de Lie quelconque.

<u>Lemme 1.3.2</u> : Soient G un groupe de Lie, π et π' deux représentations unitaires irréductibles de G, a et b deux éléments de $\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$ et a' et b' deux éléments de $\mathcal{H}_{\pi'}^{-\infty}$;

a) Si les coefficients $T^{\pi}_{a,b}$ et $T^{\pi'}_{a',b'}$ sont égaux, alors π est équivalente à π'.

b) Dans ce cas, si U est une équivalence unitaire entre π et π' (en particulier, $U(\mathcal{H}_{\pi}^{\infty}) = \mathcal{H}_{\pi'}^{\infty}$, et U se prolonge en un isomorphisme $U_{-\infty}$ de $\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$ dans $\mathcal{H}_{\pi'}^{-\infty}$) alors il existe un nombre complexe λ non nul tel que $U_{-\infty}(a) = \bar{\lambda}\, a'$ et $U_{-\infty}(b) = \lambda^{-1}b'$.

<u>Démonstration</u> : Comme a et b sont non nuls, on peut trouver μ_1 et μ_2 dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(G)$ tels que $c = \pi(\mu_1)a$ et $d = \pi(\mu_2)b$ soient tous deux non nuls. Notons alors $c' = \pi'(\mu_1)a'$ et $d' = \pi'(\mu_2)b'$. On a alors $T^{\pi}_{c,d} = T^{\pi'}_{c',d'}$; en effet, pour μ dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(G)$,

$$(T^{\pi}_{c,d},\mu) = \langle\pi(\mu)\pi(\mu_1)a,\pi(\mu_2)b\rangle = \langle\pi(\mu_2^{*} * \mu * \mu_1)a,b\rangle$$

ce qui, par un calcul analogue égale $(T^{\pi'}_{c',d'},\mu)$. Mais c et d sont dans $\mathcal{H}_{\pi}$ et c' et d' sont dans $\mathcal{H}_{\pi'}$; $T^{\pi}_{c,d}$ et $T^{\pi'}_{c',d'}$ s'identifient à des fonctions continues sur G ;

donc on a, pour tout g dans G $\langle\pi(g)c,d\rangle = \langle\pi'(g)c',d'\rangle$.

Considérons alors la somme directe $\pi \oplus \pi'$, représentation de G d'espace $\mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_{\pi'}$. Si π et π' ne sont pas équivalentes, le commutant $\mathcal{C}(\pi \oplus \pi')$ est de dimension 2 : une base en est donnée par les projecteurs orthogonaux sur $\mathcal{H}_\pi$ et $\mathcal{H}_{\pi'}$. Donc l'algèbre de Von Neumann engendrée par $(\pi \oplus \pi')(G)$ est $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\pi'})$. Or, pour tout g dans G, on a l'égalité :

$$\langle(\pi \oplus \pi')(g)(c \oplus (-c')),d \oplus d'\rangle = 0$$

Cette égalité reste vraie sur l'algèbre de Von Neumann engendrée par $(\pi \oplus \pi')(G)$ ([Dil] Chap. 1 §3 Corol. 1 p. 44) ; donc, pour A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ et B dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\pi'})$, on a $\langle(A \oplus B)(c \oplus (-c')), d \oplus d'\rangle = 0$ soit :

$$\langle A(c),d\rangle = \langle B(c'),d'\rangle$$

ce qui mène à une contradiction si on choisit A tel que $A(c) = d$ et B tel que $B(c') = 0$. Donc π et π' sont équivalentes.

b) Quitte à remplacer a par $U_{-\infty}(a)$ et b par $U_{-\infty}(b)$, on se ramène au cas où $\pi = \pi'$. Choisissons encore $c = \pi(\mu_1)a$ et $d = \pi(\mu_2)b$ non nuls ; on a, pour tout g dans G $\langle\pi(g)c,d\rangle = \langle\pi(g)c',d'\rangle$. Or l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\pi(G)$ est $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$. Comme en a), l'égalité se prolonge à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ et on a pour tout A dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ $\langle Ac,d\rangle = \langle Ac',d'\rangle$. Si c' n'est pas colinéaire à c, on peut choisir A de sorte que $Ac = d$ et $Ac' = 0$; ceci mène à une contradiction. Donc il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $c' = \bar{\lambda}^{-1}c$ et $d' = \lambda d$.

Supposons que l'on ait $a \neq \bar{\lambda}a'$, soit alors μ_1' dans $\mathcal{M}_c^\infty(G)$ tel que, d'une part $\pi(\mu_1')a \neq 0$, et d'autre part $\pi(\mu_1')(a-\bar{\lambda}a') \neq 0$. Le raisonnement précédent prouve qu'il existe λ' dans $\mathbb{C}$ tel que $\pi(\mu_1')a = \bar{\lambda}'\pi(\mu_1')a'$ et $\pi(\mu_2)b' = \lambda'\pi(\mu_2)b$. Cette dernière égalité, comparée à $d' = \lambda d$ et $d \neq 0$, donne $\lambda' = \lambda$ d'où $\pi(\mu_1')(a - \bar{\lambda}a') = 0$. Contradiction. Donc $a = \bar{\lambda}a'$ et de même $b = \lambda^{-1}b'$.

II. FONCTIONS GÉNÉRALISÉES L-SEMIBIINVARIANTES :

2.1. Involutions dans un groupe exponentiel

Voici un résultat tout à fait analogue à la décomposition de Cartan des groupes de Lie semi-simples.

Proposition 2.1 : Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni d'une involution σ, alors

1) l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ sur H ;
2) l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur P ;
3) la multiplication m est un difféomorphisme de $H \times P$ sur G.

Démonstration :

1) et 2) :

L'égalité $\sigma \circ \exp = \exp \circ \sigma$ donne immédiatement les inclusions $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ et $\exp(\mathfrak{p}) \subset P$. Réciproquement, si g est dans H (resp. P), on peut trouver X dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp X = g$ et l'égalité $g^\sigma = g$ (resp. $g^\sigma = g^{-1}$) se réécrit $\exp(X^\sigma) = \exp(X)$ (resp. $\exp(X^\sigma) = \exp(-X)$). Par injectivité de l'application exponentielle, on en déduit $X \in \mathfrak{h}$ (resp. $X \in \mathfrak{p}$). Donc $\exp(\mathfrak{h}) = H$ et $\exp(\mathfrak{p}) = P$. L'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G, donc par restriction, exp est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{p}$) sur H (resp. P).

3) :

L'application $X \to 2X$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{p}$ est bijective ; donc l'application C de P sur P donnée par $C(p) = p^2$ est un difféomorphisme.

Si g dans G s'écrit $g = hp$ avec h dans H et p dans P, on a nécessairement $p^2 = (g^\sigma)^{-1}g$ donc $p = C^{-1}((g^\sigma)^{-1}g)$ et $h = gp^{-1}$. Donc m est injective.

Réciproquement, soit g dans G, il est clair que $(g^\sigma)^{-1}g$ est dans P. Posons alors $p = C^{-1}((g^\sigma)^{-1}g)$ et $h = gp^{-1}$; p est dans P et h est dans H, en effet :

$$h(h^\sigma)^{-1} = gp^{-2}(g^\sigma)^{-1} = g((g^\sigma)^{-1}g)^{-1}(g^\sigma)^{-1} = e.$$

On a $g = hp$. Donc m est surjective.

Les formules donnant m et m^{-1} sont C^∞ donc m est un difféomorphisme.

Remarques : On montrerait de même que la multiplication m est un difféomorphisme de $P \times H$ sur G.

On en déduit que (lorsque G est exponentiel) l'application exp est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur G/H.

2.2. Exemples

La proposition 2.1 peut être mise en défaut si on ne suppose pas que G est exponentiel. Donnons deux exemples :

2.2.1 Soit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ le revêtement universel du groupe des déplacements du plan. Les éléments du groupe sont donnés par un triplet de réels (θ,a,b) : $\widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$. Le réel θ est "l'angle" de la "rotation" et le couple (a,b) est "l'image du point $(0,0)$" par cette "rotation" ; si $\theta = 0$, on dit que la "rotation" est une "translation". La loi de multiplication est :

$$(\theta,a,b)(\theta',a',b') = (\theta+\theta',\ a+ a'\cos\theta - b' \sin\theta,\ b+ a'\sin\theta + b' \cos\theta).$$

L'algèbre de Lie de ce groupe $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ est de dimension 3, elle a pour base $\{T,X,Y\}$ avec $[T,X] = Y$, $[T,Y] = -X$ et $[X,Y] = 0$. Elle est résoluble mais pas exponentielle.

On peut voir qu'il n'existe dans $\widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ que deux automorphismes d'ordre 2 (à conjugaison près) qui sont :

1) $\sigma_1 : (\theta,a,b) \to (\theta,-a,-b)$, σ_1 est un automorphisme intérieur, conjugaison avec $(\pi,0,0)$ qui est la "rotation d'angle π autour de $(0,0)$". L'automorphisme dérivé est l'application

$$\sigma_1 : tT + xX + yY \to tT - xX - yY.$$

2) $\sigma_2 : (\theta,a,b) \to (-\theta,a,-b)$, σ_2 n'est pas un automorphisme intérieur, c'est la "conjugaison avec la symétrie d'axe Oa". L'auto-

morphisme dérivé est l'application

$$\sigma_2 : tT + xX + yY \to -tT + xX - yY.$$

Les conclusions de la proposition 1.2 sont vérifiées pour σ_1, mais pas pour $\sigma = \sigma_2$.

Si on avait eu l'égalité G = HP, la condition plus faible suivante aurait été vraie : $\forall g \in G \quad (g^\sigma)^{-1} \in HgH$. Cette dernière n'est même pas vérifiée dans notre exemple ; pour $g = (\pi,0,1)$, $(g^\sigma)^{-1}$ n'est pas dans HgH.

2.2.2 Soit G le groupe de Lie simple $SL(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1 ; soit σ_0 l'involution de G définie par $\sigma_0(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$; σ_0 n'est pas un automorphisme intérieur, c'est la conjugaison par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'élément $(g^{\sigma_0})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans HgH. Donc G n'est pas égal à HP.

2.3. Une propriété des fonctions généralisées L-semibiinvariantes

Définition : Soient G un groupe de Lie, L un sous-groupe de Lie de G, c et c' deux caractères de L. Une fonction généralisée T sur G est dite (L,c,c')-semibiinvariante ((c,c')-semibiinvariante, si la référence au groupe L n'est pas ambigüe) si elle vérifie :

$$\forall (l,l') \in L^2 \quad T \circ \lambda(l^{-1}) \circ \rho(l'^{-1}) = c(l)c'(l')T.$$

Définition : Soient G un groupe de Lie muni d'une involution σ, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ . On dit que L vérifie la propriété $\mathcal{P}$, s'il existe une sous-variété Q de G telle que :

i) la multiplication m de $L \times Q$ dans G soit une submersion surjective ;

ii) et iii) pour tout q dans Q on ait $q^{-1} \in Q$ et $q^\sigma q \in L$;

iv) pour tout l dans L on ait $lQl^{-1} = Q$.

On peut maintenant énoncer :

Proposition 2.3 : Soient G un groupe de Lie muni d'une involution σ , L un sous-groupe de Lie de G stable par c vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q, c et c' deux caractères de L. Alors

1) il existe une fonction f C^∞ sur G, ne s'annulant pas, telle que pour toute fonction généralisée T sur G (c,c')-semibiinvariante, on ait

$$T \circ J = f.(T \circ \sigma).$$

2) Si en outre, on a l'égalité $c' = c \circ \sigma$ et si c vérifie la propriété (p)

$$\forall q \in Q \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}^+$$

alors on a l'égalité

$$T \circ J = T \circ \sigma .$$

La démonstration est donnée en 2.5 ; cette proposition est un point clef dans la démonstration des théorème 3.1 et proposition 4.4.1.

Remarque 1 : La propriété (p) est vérifiée dans les trois cas suivants :

(p_1) pour tout q dans Q, $q^\sigma.q = e$;

(p_2) c est à valeur dans $\mathbb{R}^+$;

(p_3) c est la restriction d'un caractère de G, encore noté c, vérifiant $\bar{c} = c \circ \sigma$.

Remarque 2 : Si on affaiblit les hypothèses de la proposition 2.3 en ne supposant pas que la multiplication m de L × Q dans G est surjective, l'ouvert $\mathcal{U} = m(L \times Q)$ est alors stable par les difféomorphismes J, σ, $\lambda(l)$ et $\rho(l)$ $(l \in L)$ et les résultats de la proposition 2.3 restent vrais si on remplace le groupe G par l'ouvert $\mathcal{U}$ (c.f. la démonstration en 2.5).

2.4. Exemples

2.4.1 Soit (G,H) un espace symétrique, avec G exponentiel, alors H vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec Q = P (c.f. 2.1) ; dans ce cas la propriété (p) est toujours vérifiée.

2.4.2 Pour un groupe de Lie G, considérons l'espace symétrique $(G \times G, \Delta)$ où Δ est la diagonale de $G \times G$, ensemble des points fixes de l'involution σ : $\sigma(x,y) = (y,x)$ pour x et y dans G ; alors Δ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec $Q = G \times \{e\}$.

2.4.3 G groupe fini.

<u>Lemme 2.4.3</u> : Soient G un groupe fini, σ une involution de G et K un sous-groupe de G_σ ; on a l'équivalence :

$$K \text{ vérifie } \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall g \in G \quad (g^\sigma)^{-1} \in K\,gK.$$

<u>Démonstration</u> : Si K vérifie $\mathcal{P}$ pour un sous-ensemble Q, on peut alors écrire, pour g dans G, $g = k.q$, avec k dans K et q dans Q (d'après i)) ; donc

$$(g^\sigma)^{-1} = (q^\sigma)^{-1}(k^\sigma)^{-1} = k^{-1}g((q^\sigma q)^{-1}(k^\sigma)^{-1}) \in KgK \text{ d'après iii).}$$

Réciproquement, supposons que tout g de G vérifie $(g^\sigma)^{-1} \in KgK$; posons $Q = \{q \in G \quad q^\sigma q \in K\}$. Soit g dans G, on peut écrire $g = k_1(g^\sigma)^{-1}k_2$; avec k_1 et k_2 dans k, donc $q = k_1^{-1}g = (g^\sigma)^{-1}k_2$ vérifie $q^\sigma q = (k_1^\sigma)^{-1}k_2 \in K$; on a donc $g = k_1q$ avec k_1 dans K et q dans Q ; ceci prouve i). Soit q dans Q, on a l'égalité $(q^{-1})^\sigma q^{-1} = (\sigma(q^\sigma q))^{-1} \in K$ donc $q^{-1} \in Q$; ceci prouve ii). Le iii) est évident et le iv) résulte de ce que tout élément de K est invariant par σ . Donc K vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

2.4.4 Soit (G,K) un espace symétrique riemannien de type non compact (i.e. G est semi-simple connexe et σ est une involution de Cartan). La décomposition de Cartan prouve que $Q = \exp \mathfrak{p}$ est une sous-variété de G et que la multiplication m de $H \times Q$ sur G est un difféomorphisme. Donc K vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (c.f. [He] Chap. VI Th. 1.1).

2.4.5 Soient (G,K) un espace symétrique et P comme en 1.1. P est une sous-variété de G ; en outre, P vérifie ii), iii) et iv) ; P est donc a priori un bon candidat pour être la sous-variété Q de 2.3 (par exemple, pour $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_1$ (c.f. 2.2.1), H_1 vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour la sous-variété $Q = P_1$). Cependant, dans le cas général, la multiplication m de $K \times P$ dans G n'est pas surjective (par exemple $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $K = G_{\sigma_2}$ ou $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $K = G_{\sigma_0}$; c.f. 2.2; dans ces deux cas les conclusions de la proposition 2.3 ne sont pas vérifiées : nous le verrons en 3.3).

2.4.6 Si G est compact, la multiplication m de $K \times P$ dans G est bien surjective mais pas nécessairement une submersion, comme on peut s'en convaincre avec l'exemple suivant : $G = SU(2)$, σ est la conjugaison avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = G_\sigma$. Notre démonstration ne s'adapte pas à ce cas bien que les résultats des th. 3.1 et proposition 4.4.1 restent vrais.

2.4.7 Lorsque P ne convient pas, un autre candidat pour Q est l'ensemble $P' = \{p \in P_0$ tels que $(\mathrm{Ad}p + \mathrm{Id})|\mathfrak{h}$ est injective$\}$. Par exemple :

a) Soient $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$, $\sigma = \sigma_2$ (cf. 2.2.1) et $L = \{(k\pi,a,0) \;/\; k \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{R}\}$ L est stable par σ et vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour la sous-variété

$$Q = \{(\theta, -r\sin\tfrac{\theta}{2}, r\cos\tfrac{\theta}{2}) \;/\; r \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}, \tfrac{\theta-\pi}{2\pi} \notin \mathbb{Z}\} .$$

b) Soient $G = SL(2,\mathbb{R})$, $\sigma = \sigma_0$ (c.f. 2.2.2), $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = G_{\sigma_0} \cup wG_{\sigma_0}$:

$$L = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \;/\; a \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \;/\; a \in \mathbb{R}^*\} .$$

Alors L est stable par σ et vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour

$$Q = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \;/\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ a \neq 0 \text{ et } a^2 - bc = 1\}.$$

2.5 <u>Démonstration de la proposition 2.3</u>

Principe de la démonstration : on utilise la propriété d'invariance à gauche de la fonction généralisée T pour la restreindre à Q; on compare alors les restrictions de $T \circ \sigma$ et $T \circ J$.

2.5.1 Nous avons besoin d'un résultat général :

<u>Lemme 2.5</u> : Soient M et N deux variétés et $p : M \to N$ une submersion. Alors :

a) Pour toute densité μ C^∞ à support compact sur M, la mesure image $p_*(\mu)$ est une densité C^∞ à support compact sur N.

b) Soit F une fonction généralisée sur N, on note $\tilde{F} = F \circ p$ la fonction généralisée définie par $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$ $(F \circ p,\mu) = (F,p_*(\mu))$.

c) Si $(\tilde{f},f)$ est un couple de difféomorphismes de M et N, respectivement, qui vérifie $p \circ \tilde{f} = f \circ p$; alors $\tilde{F} \circ \tilde{f} = \widetilde{F \circ f}$.

d) Soit ϕ dans $C^\infty(N)$ alors $\widetilde{\phi F} = (\phi \circ p)\tilde{F}$.

e) Supposons désormais p surjective, l'application $F \to \tilde{F}$ est alors injective de $\mathcal{F}(N)$ dans $\mathcal{F}(M)$.

f) (p surjective) Soit α dans $C^\infty(M)$, alors il existe β dans $C^\infty(N)$ tel que tous les couples de fonctions généralisées (F,G) de $\mathcal{F}(N)$ qui vérifient $\tilde{F} = \alpha\tilde{G}$ vérifient $F = \beta G$.

La démonstration se fait sans difficulté : le a) est une conséquence du théorème du rang constant. Pour f), on choisit une partition de l'unité γ_U associée à un recouvrement de N par des ouverts U sur lesquels il existe une section différentiable s_U de p et on pose $\beta = \sum_U \gamma_U\, \alpha \circ s_U$.

2.5.2 Soit $m : L \times Q \to G$ la multiplication qui, par hypothèse est une submersion surjective ; on peut donc, grâce au lemme 2.5.1, "relever" toute fonction généralisée T sur G en une fonction généralisée $\tilde{T}$ sur $L \times Q$.

Notons $\tilde{\jmath}$ et $\tilde{\sigma}$ les difféomorphismes de $L \times Q$ donnés par

$$\forall (l,q) \in L \times Q \qquad \tilde{\jmath}(l,q) = (l^{-1}, lq^{-1}l^{-1})$$

$$\text{et} \qquad \tilde{\sigma}(l,q) = (l^\sigma(q^\sigma q), q^{-1})$$

qui sont bien définis grâce à ii), iii), iv) et à l'invariance de H par σ . Conformément à nos notations (cf. 1.1), pour l dans L, $\lambda(l) \otimes 1$ et $\rho(l) \otimes \gamma(l)$ sont les difféomorphismes de $L \times Q$ donnés par

$$(k,q) \in L \times Q \qquad (\lambda(l) \otimes 1)(k,q) = (lk,q)$$

$$\text{et} \qquad (\rho(l) \otimes \gamma(l))(k,q) = (kl^{-1}, lql^{-1}).$$

<u>Lemme 2.5.2</u> :

a) L'application $T \to \tilde{T}$ de $\mathcal{F}(G)$ dans $\mathcal{F}(L \times Q)$ est injective.

b) Pour toute fonction généralisée T sur G et l dans L, on a

$$
\begin{array}{ll}
\text{b1)} & \tilde{T} \circ (\lambda(l) \otimes 1) = \widetilde{T \circ \lambda(l)} \\
\text{b2)} & \tilde{T} \circ (\rho(l) \otimes \gamma(l)) = \widetilde{T \circ \rho(l)} \\
\text{b3)} & \tilde{T} \circ \tilde{J} = \widetilde{T \circ J} \\
\text{b4)} & \tilde{T} \circ \tilde{\sigma} = \widetilde{T \circ \sigma}
\end{array}
$$

c) En particulier, si T est (c,c') - semibiinvariante, on a

$$
\begin{array}{ll}
\text{c1)} & \tilde{T} \circ (\lambda(l^{-1}) \otimes 1) = c(l)\tilde{T} \\
\text{c2)} & \tilde{T} \circ (\rho(l^{-1}) \otimes \gamma(l^{-1})) = c'(l)\tilde{T}
\end{array}
$$

Le a) résulte du lemme 2.5.1 e). Par construction, on peut appliquer aux couples $(\lambda(l) \otimes 1, \lambda(l))$, $(\rho(l) \otimes \gamma(l), \rho(l))$, $(\tilde{J}, J)$ et $(\tilde{\sigma}, \sigma)$ les résultats du lemme 2.5.1 c), on obtient alors les égalités du b). Le c) résulte du b) et de la semibiinvariance de T.

2.5.3 Nous voulons utiliser les propriétés d'invariance c1) de la fonction généralisée $\tilde{T}$ pour la restreindre en une fonction généralisée S de Q. Pour cela nous avons besoin des résultats bien connus:

<u>Lemme 2.5.3</u> :

a) Soit G un groupe de Lie et F une fonction généralisée sur G invariante par translation à gauche (i.e. $\forall g \in G \quad F \circ \lambda(g) = F$). Alors F est une fonction constante.

b) Soient M une variété et F une fonction généralisée sur $G \times M$ qui vérifie $\forall g \in G \quad F \circ (\lambda(g) \otimes 1) = F$, alors il existe une unique fonction généralisée E sur M telle que $F = 1 \otimes E$.

2.5.4 Calculons maintenant, pour l dans L, en utilisant l'égalité 2.5.2 c2) :

$$((c \otimes 1)T) \circ (\lambda(l) \otimes 1) = (c \circ \lambda(l) \otimes 1)(\tilde{T} \circ (\lambda(l) \otimes 1)) = (c \otimes 1)\tilde{T}.$$

Donc (lemme 2.5.3), il existe une unique fonction généralisée S sur Q vérifiant $(c \otimes 1)\tilde{T} = 1 \otimes S$ soit $\tilde{T} = c^{-1} \otimes S$.

Puisque T est (c,c')-semibiinvariante, T o J est (c',c)-semi-biinvariante et T o σ est (c o σ, c' o σ)-semibiinvariante ; en effet, pour l dans L

$$(T \circ J) \circ (\lambda(l)) = (T \circ \rho(l)) \circ J = (c'(l^{-1})T) \circ J = c'(l^{-1})(T \circ J)$$

et

$$(T \circ \sigma) \circ (\lambda(l)) = (T \circ \lambda(l^{\sigma})) \circ \sigma = (c(\sigma(l)^{-1})T) \circ \sigma = (c \circ \sigma(l^{-1}))(T \circ \sigma)$$

de même

$$(T \circ J) \circ \rho(l) = c(l^{-1})(T \circ J) \text{ et } (T \circ \sigma) \circ \rho(l) = (c' \circ \sigma(l^{-1}))(T \circ \sigma)$$

On en déduit qu'il existe des fonctions généralisées S' et S" sur Q telles que

$$\widetilde{T \circ J} = c'^{-1} \otimes S' \quad \text{et} \quad \widetilde{T \circ \sigma} = (c^{\sigma})^{-1} \otimes S''$$

Lemme 2.5.4 : Notons ϕ l'application de Q dans L donnée par $\phi(q) = q^{\sigma} q$. S, S' et S" sont les fonctions généralisées sur Q définies ci-dessus. On a

a) $\forall l \in L \quad S \circ \gamma(l) = c(l^{-1})c'(l^{-1})S$
b) $S' = S \circ J$ (J désigne ici la restriction de J à Q)
c) $S'' = (c^{-1} \circ \Phi)S \circ J$.

Démonstration : Soient μ dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(L)$ et ν dans $\mathcal{M}_c^{\infty}(Q)$.

a) Calculons : $\widetilde{T \circ \rho(l)} = c'(l^{-1})\tilde{T} = c'(l^{-1})(c^{-1} \otimes S)$ (lemme 2.5.2 c2)) ;

d'autre part $\widetilde{T \circ \rho(l)} = \tilde{T} \circ (\rho(l) \otimes \gamma(l)) = (c^{-1} \circ \rho(l)) \otimes (S \circ \gamma(l))$
$= c(l)(c^{-1} \otimes S \circ \gamma(l))$

on en déduit $S \circ \gamma(l) = c(l^{-1})c'(l^{-1})S$.

b) Calculons : $(\tilde{T} \circ \tilde{J}, \mu \otimes \nu) = ((c^{-1} \otimes S) \circ \tilde{J}, \mu \otimes \nu)$ ce qui en utilisant la définition de $\tilde{J}$ et la notation des fonctions généralisées avec une lettre muette s'écrit :

$$(\widetilde{T \circ J}, \mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \circ J)(l),(S \circ \gamma(l) \circ J, \nu)\mu(l))$$
$$= (c(l),c(l^{-1})c'(l^{-1})(S \circ J, \nu)\mu(l)) \text{ (d'après a))}$$
$$= (c'(l^{-1}),\mu(l))(S \circ J,\nu) \qquad \text{donc}$$

$(c'^{-1} \bullet S',\mu\bullet\nu) = (c'^{-1} \bullet S \circ J,\mu \bullet \nu)$ on en déduit que $S' = S \circ J$.

c) Calculons $(T \circ \sigma, \mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \bullet S) \circ \sigma,\mu \bullet \nu)$ ce qui par définition de σ donne

$$(\widetilde{T \circ \sigma}, u \bullet \nu) = (S \circ J(q),(c^{-1} \circ \rho((q^\sigma q)^{-1}) \circ \sigma,\mu)\nu(q))$$
$$= (S \circ J(q),(c^{-1} \circ \sigma,\mu)c^{-1}(q^\sigma q)\nu(q))$$
$$= (c^{-1} \circ \sigma,\mu)((c^{-1} \circ \phi) \, SoJ \,,\nu) \qquad \text{donc}$$

$((c^{-1} \circ \sigma) \bullet S'',\mu \bullet \nu) = ((c^{-1} \circ \sigma)\bullet((c^{-1} \circ \phi) \, SoJ \,),\mu \bullet \nu)$ on en déduit que

$$S'' = (c^{-1} \circ \phi) \, SoJ$$

2.5.5 Le lemme 2.5.4 prouve les égalités $\widetilde{T \circ J} = c'^{-1} \bullet (S \circ J)$ et $\widetilde{T \circ \sigma} = (c^{-1} \circ \sigma)\bullet((c^{-1} \circ \phi) \, SoJ)$ on en déduit que $\widetilde{T \circ J} = \alpha\widetilde{T \circ \sigma}$ où α est la fonction C^∞ sur $L \times Q$ donnée par

$$\alpha(l,q) = c'^{-1}(l)c^\sigma(l)c(q^\sigma q) \;;$$

cette fonction ne dépend que de c et c' ; donc le lemme 2.5.1 f) prouve que l'on peut trouver une fonction f C^∞ sur G ne dépend- que des caractères c et c' telle que toute fonction généralisée T(c,c')-semibiinvariante sur G vérifie $T \circ J = f(T \circ \sigma)$. Ceci prouve la première partie de la proposition 2.3.

2.5.6 Supposons maintenant que $c' = c \circ \sigma$, on a alors $\alpha(l,q) = c(q^\sigma q)$. La fonction α prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$; on peut donc choisir f à valeurs réelles positives. On a vu que $T' = T\circ\sigma\circ J$ est $(c' \circ \sigma, c \circ \sigma)$-semibiinvariante (2.5.4), donc T' est (c,c')-semibiinvariante. D'après 1), on a simultanément

$T \circ J = f(T \circ \sigma)$ et $T' \circ J = f(T' \circ \sigma)$; cette deuxième égalité s'écrit $T \circ \sigma = f(T \circ J)$ d'où $T \circ \sigma = f^2(T \circ \sigma)$ et $(1-f^2)(T\circ\sigma) = 0$; on peut multiplier cette dernière égalité par la fonction C^∞ sur G : $(1+f)^{-1}$; on trouve $(1-f)(T\circ\sigma) = 0$ d'où $T \circ \sigma = f(T \circ \sigma)$ et $T \circ J = T \circ \sigma$; ceci achève la démonstration de la proposition 2.3.

III. MULTIPLICITÉ DE $IND_K^G(1)$:

3.1 Non multiplicité de certaines représentations

Les outils introduits en 1.4 et 2.3 permettent de démontrer :

Théorème 3.1 : Soient G un groupe de Lie, σ une involution de G, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q de G (cf. 2.3) et c un caractère de G vérifiant l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$ et la propriété (p) : $\forall q \in Q \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit Π une représentation de G, admettant un vecteur cyclique a tel que $a \in (\mathcal{H}_\Pi^{-\infty})^{L,c}$ (par exemple, soit c' un caractère unitaire de L vérifiant l'égalité $\bar{c}' = c' \circ \sigma$ ainsi que la propriété (p), la représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c')$ a un tel vecteur cyclique), alors Π est sans multiplicité.

Remarque : La représentation $\Pi = \mathrm{Ind}_L^G(c')$ vérifie bien les hypothèses de ce théorème : soit $a = \delta$ le vecteur cyclique de cette représentation introduit en 1.2.3 exemple 1 ; on a $\delta \in (\mathcal{H}_\Pi^{-\infty})^{L,c}$ pour $c = c'^{-1}\chi^{1/2}$: en effet, soit v un vecteur C^∞ de cette représentation calculons, pour l dans L

$$<\Pi(l)\delta,v> = <\delta,\Pi(l^{-1})v> = v(l) = c'(l^{-1})\chi(l)^{1/2}<\delta,v> \quad ;$$

ceci prouve que $\Pi(l)\delta = c(l)\delta$. Il est clair que, puisque c' vérifient l'égalité $\bar{c}' = c' \circ \sigma$ et la propriété (p), le caractère c vérifie aussi l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$ et la propriété (p).

Démonstration : Pour A dans le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$, notons T_A la fonction généralisée coefficient du couple (a,Aa) : $T_A = T^\Pi_{a,Aa}$.
Le lemme 1.3.1 donne les égalités, pour l dans L :

$$T_A \circ \lambda(l^{-1}) = T^\Pi_{a,\Pi(l)Aa} = \overline{c(l)}T_{a,Aa} = (c \circ \sigma)(l)T_A$$

et $$T_A \circ \rho(l^{-1}) = T^\Pi_{\Pi(l)a,Aa} = c(l)T_A$$

On est dans les conditions de la proposition 2.3 avec $T = T_A$: en effet, $c \circ \sigma$ vérifie la propriété (p) car, pour q dans Q, on a $c \circ \sigma(q^\sigma q) = (c((q^{-1})^\sigma q^{-1}))^{-1}$ est dans $\mathbb{R}_+^*$). On a donc l'égalité :

$$T_A \circ J = T_A \circ \sigma$$

Pour $A = Id$, le lemme 1.3.1 donne alors l'égalité $T^{\Pi^\sigma}_{a,a} = T^{\bar{\Pi}}_{a,a}$; (Π^σ, a) et $(\bar{\Pi}, a)$ sont des représentations cycliques dont les coefficients sont égaux, elles sont donc équivalentes. Donc il existe un opérateur antiunitaire S de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $S_{-\infty}(a) = a$ et tel que, pour g dans G, on ait

$$\Pi(g) \circ S = S \circ \Pi(g^\sigma).$$

Pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, notons $A^S = S \circ A \circ S^{-1}$; A^S est dans $\mathcal{C}(\Pi)$ car, pour g dans G :

$$A^S \circ \Pi(g) = S \circ A \circ \Pi(g^\sigma) \circ S^{-1} = S \circ \Pi(g^\sigma) \circ A \circ S^{-1} = \Pi(g) \circ A^S.$$

L'application $A \to A^S$ est un automorphisme antilinéaire de $\mathcal{C}(\Pi)$: en effet, soient A et B dans $\mathcal{C}(\Pi)$ et λ dans $\mathbb{C}$, on a

$$(\lambda A)^S = S \circ \lambda A \circ S^{-1} = \bar{\lambda} S \circ A \circ S^{-1} = \bar{\lambda} A^S \text{ et } (AB)^S = A^S B^S.$$

Pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, notons A^* l'adjoint de A ; l'application $A \to A^*$ est un antiautomorphisme antilinéaire de $\mathcal{C}(\Pi)$. Montrons que $T_{A^*} = T_{A^S}$; ceci résulte de l'égalité $T_A \circ J = T_A \circ \sigma$ et du lemme suivant appliqué à $b = a$.

<u>Lemme</u> : Pour tout b dans $\mathcal{H}^{-\infty}_\Pi$ et A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, on a les égalités

$$T^\Pi_{b,Ab} \circ J = \overline{T^\Pi_{b,A^*b}} \quad \text{et} \quad T^\Pi_{b,Ab} \circ \sigma = \overline{T^\Pi_{Sb,A^S(Sb)}}$$

<u>Démonstration</u> : Comme dans le lemme 1.3.1, il suffit de vérifier ces égalités lorsque b est dans $\mathcal{H}$; elles sont alors claires : pour g dans G, on a

$$(T^\Pi_{b,Ab} \circ J)(g) = \langle \Pi(g^{-1})b, Ab \rangle = \langle A^*b, \Pi(g)b \rangle = \overline{T^\Pi_{b,A^*b}(g)} \text{ et}$$

$$(T^\Pi_{b,Ab} \circ \sigma)(g) = \langle \Pi(g^\sigma)b, Ab \rangle = \overline{\langle S\Pi(g^\sigma)b, SAb \rangle} \text{ (car } S \text{ est antiunitaire).}$$

$$= \overline{\langle \Pi(g)Sb, A^S Sb \rangle} = \overline{T^\Pi_{Sb,A^S(Sb)}}(g).$$

Pour finir la démonstration du théorème 3.1, il suffit de montrer que l'application de $\mathcal{C}(\Pi)$ dans $\mathcal{F}(G)$ qui à A associe T_A est injective : l'égalité $T_{A^*} = T_{A^S}$ prouvera que $A^* = A^S$; l'automorphisme

$A \to A^S$ et l'antiautomorphisme $A \to A^*$ coïncideront ; $\mathcal{C}(\Pi)$ sera commutatif.

Pour montrer cette injectivité, supposons que A dans $\mathcal{C}(\Pi)$ vérifie $T_A = 0$. Donc $\forall \mu \in \mathcal{M}_c^\infty(g)$ $\langle \Pi(\mu)a, Aa\rangle = 0$; on en déduit que pour g dans G et ν dans $\mathcal{M}_c^\infty(G)$ on a $\langle a, \Pi(g)\Pi(\nu)Aa\rangle = 0$; comme a est cyclique, on en déduit $\Pi(\nu)Aa = 0$ puis $Aa = 0$. Soit alors v dans $\mathcal{H}^\infty$, on a pour g dans G, $\langle a, \Pi(g)A^*v\rangle = \langle Aa, \Pi(g)v\rangle = 0$. Donc comme a est cyclique, on obtient $A^*v = 0$: A^* est nul sur $\mathcal{K}^\infty$ qui est dense dans $\mathcal{K}$, donc $A^* = 0$ et $A = 0$. Ceci prouve l'injectivité et achève la démonstration du théorème 3.1.

3.2 Applications

Nous pouvons appliquer ce résultat aux diverses situations étudiées en 2.4.

3.2.1 Voici la principale application du théorème 3.1.

Corollaire 3.2.1 : Soit G un groupe de Lie exponentiel et H l'ensemble des points fixes d'une involution de G;alors la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité (1 désigne le caractère trivial de H).

Démonstration : Cette situation décrite en 2.4.1 permet d'appliquer le théorème 3.1 avec L = K.

Pour le cas $(G \times G, \Delta)$, voir en 4.2.

3.2.2 Soient G un groupe fini, σ une involution de G et K un sous-groupe de G_σ ; si, pour tout g dans G, $(g^\sigma)^{-1}$ est dans la double classe KgK (cf. 2.4.3), alors $\mathrm{Ind}_K^G(1)$ est sans multiplicité : on retrouve, à grand frais, un résultat bien connu ; celui-ci est encore vrai si G est seulement supposé compact.

3.2.3 Voici un autre résultat connu que l'on retrouve par cette méthode : Soit (G,K) un espace symétrique riemannien de type non compact (cf. 2.4.4), alors la représentation $\mathrm{Ind}_K^G(1)$ est sans multiplicité.

3.3 Exemples et contre-exemples

Il se peut que certaines hypothèses du théorème 3.1 soient superflues (par exemple, le fait que la multiplication $m : L \times Q \to G$ soit une submersion). Il faut cependant tenir compte des exemples suivants qui justifient, en partie, la lourdeur de ce théorème.

3.3.1 Soient G un groupe fini muni d'une involution σ, $H = G_\sigma$. Il se peut que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ ait de la multiplicité. Ainsi, si $G = SL(2,\mathbb{F}_5)$ est le groupe des matrices 2×2 à coefficients dans le corps à 5 éléments $\mathbb{F}_5$ et de déterminant 1, et si σ est l'involution qui, à une matrice, associe l'inverse de la transposée de celle-ci, alors il existe une représentation irréductible de G qui intervient dans $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ avec multiplicité 3.

3.3.2 Voici un contre-exemple au corollaire 3.2.1 si on ne suppose pas que G a une algèbre de Lie exponentielle.

Prenons les notations de 2.2.1, et montrons que si on munit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ de l'involution σ_2, et si $H = G_{\sigma_2}$, alors $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ a de la multiplicité : on peut, pour le montrer, opérer la désintégration de cette représentation en représentations unitaires irréductibles. Il apparait alors de la multiplicité 2. On peut aussi montrer directement que le commutant de cette représentation n'est pas commutatif.

Si on identifie $H\backslash G$ à P (c.f. 2.1) et P à $\mathbb{R}^2$ (grâce à $(t,0,y) \longleftrightarrow (t,y)$, on obtient une réalisation de la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'action de G est donnée par : pour $g = (\theta,a,b)$ et f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(g.f)(t,y) = f(t + \theta, y + a \sin t + b \cos t)$$

En appliquant une transformation de Fourier $\mathcal{F}_y$ par rapport à la seconde variable y, on obtient une nouvelle réalisation de cette représentation dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ avec, pour F dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$(g.F)(t,\eta) = e^{i\eta(a \sin t + b \cos t)} F(t + \theta, \eta).$$

Avec pour convention : si f est dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$

$$(\mathcal{F}_y(f))(t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\eta} f(t,y)dy.$$

Considérons alors les deux opérateurs ϕ_1 et ϕ_2 de $L^2(\mathbb{R}^2)$ donnés par $\phi_1(F)(t,\eta) = F(t,\eta)1_{\{\eta > 0\}}(\eta)$ et $\phi_2(F)(t,\eta) = F(t+\pi,-\eta)$. On a $\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1$. ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent au commutant de Π mais ϕ_1 et ϕ_2 ne commutent pas. $\mathcal{C}(\Pi)$ n'est pas commutatif.

3.3.3 Par contre, en prenant encore $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_2$ mais $L = \{(k\pi,a,0)/a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\}$ et c un caractère de L constant sur la composante neutre H de L, on peut appliquer, grâce à 2.4.7 a), le théorème 3.1 et en déduire que $\mathrm{Ind}_L^G(c)$ est sans multiplicité.

Pour $\sigma = \sigma_1$ et $H = G_{\sigma_1}$, on peut, grâce à 2.4.5, déduire du théorème 3.1 que $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est sans multiplicité.

3.3.4 Une étude analogue à la précédente, basée sur les exemples 2.2.2 et 2.4.7 b) prouverait que, pour $G = SL(2,\mathbb{R})$ et $\sigma = \sigma_0$, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ a de la multiplicité, tandis que, pour $L = H \cup wH$ et c caractère de L égal à 1 sur la représentation H, la représentation $\mathrm{Ind}_L^G(c)$ est sans multiplicité.

3.3.5 Nous avons vu, dans les exemples précédents, le rôle joué par la propriété $\mathcal{P}$ dans le théorème 3.1. Mettons maintenant en évidence l'importance de l'égalité $\bar{c} = c \circ \sigma$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3$ l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 : c'est l'algèbre de Lie nilpotente de base X, Y, Z avec $[X,Z] = [Y,Z] = 0$ et $[X,Y] = Z$. Soit $G = H_3$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé. On peut identifier G à $\mathfrak{g}$ grâce à l'application exponentielle. On a alors :

$$G = \{(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \quad \text{et}$$

$$\exp(xX + yY + zZ) = (x,y,z).$$

La loi de groupe est donnée par

$$(x,y,z)(x',y',z') = (x+x',\ y+y',\ z+z'+1/2(xy'-yx')).$$

Soit $\sigma = \sigma_3$ l'involution de G donnée par $\sigma_3(x,y,z) = (-x,-y,z)$; l'ensemble des points fixes de σ est le centre de G : $H_3 = \{(0,0,z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$. Soit c_λ le caractère donné par

$c_\lambda((0,0,z)) = e^{i\lambda z}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). On n'a l'égalité $\overline{c_\lambda} = c_\lambda \circ \sigma$ que si $\lambda = 0$. On vérifie que $\mathrm{Ind}_H^G(c_\lambda)$ est de multiplicité infinie lorsque λ est non nul.

IV. DÉSINTÉGRATION DE $\mathrm{IND}_K^G(1)$:

4.1. Désintégration de certaines représentations

4.1.1 Nous nous proposons de donner des précisions sur la désintégration des représentations qui interviennent dans le théorème 3.1 ; pour cela, nous avons besoin d'un résultat de théorie de la mesure :

Lemme 4.1.1 : Soit $(X,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré où $\mathcal{B}$ est une tribu à base dénombrable telle que tous les points de X sont mesurables et μ une mesure positive sur $(x,\mathcal{B})$. Supposons que $f : X \to X$ soit une application mesurable telle que, pour toute fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on ait

$$(\phi \circ f)(x) = \phi(x) \quad \mu\text{-presque partout,}$$

alors on a
$$f(x) = x \quad \mu\text{-presque partout.}$$

Démonstration : Pour x dans X, notons $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}$ tels que $\{x,f(x)\} \cap B = \emptyset$ ou tels que $\{x,f(x)\} \subset B\}$. $\mathcal{B}_x$ est une tribu. Pour B dans $\mathcal{B}$, notons $X_B = (B \cap f^{-1}(B)) \cup (B^c \cap f^{-1}(B^c))$. En appliquant l'hypothèse à la fonction $\phi = 1_B$ caractéristique de B, on trouve que $1_{f^{-1}(B)}(x) = 1_B(x)$ μ-presque partout. Donc $\mu(X_B^c) = 0$.

Soient $(B_1,\ldots,B_n,\ldots)$ une base dénombrable de $\mathcal{B}$ et $X' = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{B_i}$, d'une part on a $\mu(X'^c) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_{B_i}^c) = 0$, d'autre part, si x est dans X', on a $\mathcal{B}_x \supset \{B_1,\ldots,B_n,\ldots\}$ et comme $\mathcal{B}_x$ est une tribu, on a $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$. Puisque $\{x\}$ est mesurable, on a $\{x\} \subset \mathcal{B}_x$. On en déduit $\{x,f(x)\} \subset \{x\}$ et $\forall x \in X'$, $x = f(x)$. On obtient bien que $x = f(x)$ μ-presque partout.

4.1.2 Introduisons un ensemble dont la dimension est liée, au moins dans certains cas (c.f. [Ca] 3.4 et [Pe] IV), à la multiplicité de nos représentations induites par un principe de dualité dit de Frobenius.

Définition : Soient G un groupe de Lie, Π une représentation unitaire de G,L un sous-groupe de Lie de G et c un caractère de L ; on note $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi})^{L,c}$ le sous-espace vectoriel des éléments a de $\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi}$ qui vérifient, pour tout l dans L, $\Pi(l)a = c(l)a$. Pour c = 1, caractère trivial de L, on note $(\mathcal{H}^{-\infty}_{\Pi})^{L}$ pour $(\mathcal{H}^{-\infty})^{L,1}_{\Pi}$. Notons $\hat{G}$ le dual unitaire de G ; rappelons qu'une mesure sur $\hat{G}$ est dite standard, si elle est portée par un ensemble standard (i.e. un ensemble dont la structure borélienne est sous-jacente à une structure topologique d'espace polonais ; cf. [Ma 2] p. 138). On peut maintenant énoncer :

Théorème 4.1.2 : Reprenons les hypothèses du théorème 3.1 et supposons G séparable.

a) Il existe une mesure positive bornée m sur $\hat{G}$ portée par un ensemble standard E, un champ mesurable sur E $\zeta \to \rho(\zeta)$ de représentations irréductibles de G $(\rho(\zeta) \in \zeta)$ d'espace H_ζ et un isomorphisme ϕ de $\mathcal{H}_\Pi$ sur $\int_E^\oplus H_\zeta \, dm(\zeta)$ qui transforme Π en $\int_E^\oplus \rho(\zeta) dm(\zeta)$. La classe de cette mesure m ne dépend que de Π. Cet isomorphisme transforme le commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ en l'algèbre des opérateurs diagonaux.

b) $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout.

c) Si on écrit $\phi_{-\infty}(a) = \int_E^\oplus a^\zeta \, dm(\zeta)$ (cf. [Pe] th. C et corol. C.1) $a^\zeta \in (H^{-\infty}_\zeta)^{L,c}$ m-presque partout.

Démonstration :

Le a) est une conséquence directe de notre théorème 3.1 et du théorème 8.5.2 de [Di 2].

b) L'idée de la démonstration est d'utiliser pleinement l'égalité $A^* = A^S$, pour A dans $\mathcal{C}(\Pi)$, qui nous a servi à démontrer le théorème de non multiplicité (cf. 3.1).

Soit f la bijection de $\hat{G}$ donnée par $f(\zeta) = \overline{\zeta^\sigma}$; f est un isomorphisme borélien. Quitte à remplacer E par $E \cup f(E)$ qui est standard, on peut supposer que $E = f(E)$. Pour simplifier l'écriture, identifions $\mathcal{H}_\Pi$ et $\int_E^\oplus H_\zeta \, dm(\zeta)$. Notons I_ζ l'identité de H_ζ, alors

(d'après a)) tout élément A du commutant $\mathcal{C}(\Pi)$ s'écrit
$A = \int_E^\oplus a(\zeta) I_\zeta \, dm(\zeta)$ où a est bien déterminé comme élément de $L^\infty(E,m)$.
Réciproquement, toute fonction a de $L^\infty(E,m)$ définit un élément A de $\mathcal{C}(\Pi)$. Pour un tel élément A, on a

$$A^* = \int_E^\oplus \overline{a(\zeta)} I_\zeta dm(\zeta) \quad \text{([Di 1] p. 161 Prop. 3)}$$

Calculons A^S : rappelons que S est un isomorphisme anti-unitaire de $\mathcal{H}_\Pi$ qui vérifie $\forall g \in G \quad \Pi(g^\sigma) \circ S = S \circ \Pi(g)$ (cf. 3.1). Soit $j_\zeta : H_\zeta \to H_{\overline{\zeta\sigma}}$ un champ mesurable sur E d'antiisomorphisme qui vérifient, pour g dans G, $(\rho(\overline{\zeta\sigma})(g^\sigma)) \circ j_\zeta = j_\zeta \circ (\rho(\zeta)(g))$. Définissons S' isomorphisme antilinéaire de $\int_E^\oplus H_\zeta dm(\zeta)$ par

$$S'\left(\int_E^\oplus v(\zeta) dm(\zeta)\right) = \int_E^\oplus j_{\overline{\zeta\sigma}}(v(\overline{\zeta\sigma})) dm(\zeta).$$

S' vérifie alors $\forall g \in G \quad \Pi(g^\sigma) \circ S' = S' \circ \Pi(g)$.

En effet
$$\begin{aligned}(\Pi(g^\sigma) \circ S')\left(\int_E^\oplus v(\zeta) dm(\zeta)\right) &= \int_E^\oplus (\rho(\zeta)(g^\sigma))(j_{\overline{\zeta\sigma}}(v(\overline{\zeta\sigma}))) dm(\zeta) \\ &= \int_E^\oplus j_{\overline{\zeta\sigma}}(\rho(\overline{\zeta\sigma})(g) v(\overline{\zeta\sigma})) dm(\zeta) \\ &= (S' \circ \Pi(g))\left(\int_E^\oplus v(\zeta) dm(\zeta)\right)\end{aligned}$$

Donc l'application $S^{-1} \circ S'$ est linéaire et commute à Π. Comme le commutant de Π est commutatif, on a

$$A \circ (S^{-1} \circ S') = (S^{-1} \circ S') \circ A ,$$

on en déduit que $\qquad A^S = S \circ A \circ S^{-1} = S' \circ A \circ S'^{-1}$.

Remarquons que

$$S'^{-1}\left(\int_E^\oplus v(\zeta) dm(\zeta)\right) = \int_E^\oplus j_\zeta^{-1}(v(\overline{\zeta\sigma})) dm(\zeta) \ ;$$

Donc
$$\begin{aligned}A^S\left(\int_E^\oplus v(\zeta) dm(\zeta)\right) &= \int_E^\oplus j_{\overline{\zeta\sigma}}(a(\overline{\zeta\sigma})(j_{\overline{\zeta\sigma}})^{-1}(v(\zeta))) dm(\zeta) \\ &= \int_E^\oplus \overline{a(\overline{\zeta\sigma})} v(\zeta) dm(\zeta) \quad (j_{\overline{\zeta\sigma}} \text{ est antilinéaire}).\end{aligned}$$

ceci prouve que $\qquad A^S = \int_E^\oplus \overline{a(\overline{\zeta\sigma})} \, I_\zeta \, dm(\zeta).$

L'égalité $A^* = A^S$ et les formules obtenues pour ces deux opérateurs permettent d'affirmer que, pour a dans $L^\infty(E,m)$, on a $a(\zeta) = a(\overline{\zeta^\sigma})$ m-presque partout. Soit $\mathfrak{B}$ la trace sur E de la tribu de Mackey ; $(E,\mathfrak{B})$ est standard donc à base dénombrable ; tout point de E est mesurable (cf. [Di 2] Prop. 3.8.4.). On peut donc appliquer le lemme 4.1.1 à cette situation. On en déduit que $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout dans E, et comme $m(E^c) = 0$ on a $\zeta = \overline{\zeta^\sigma}$ m-presque partout.

c) D'après [Pe] Corol. C1, a se désintègre de façon "unique" sous la forme $a = \int_E^\oplus a^\zeta dm(\zeta)$. Soit l dans L, l'égalité $\Pi(l)a = c(l)a$ implique que $(\rho(\zeta))(l)a^\zeta = c(l)a^\zeta$ m-presque partout. Soit alors $l_1,\ldots,l_n,\ldots$ une suite dense dans L et $N_1,\ldots,N_n,\ldots$ des ensembles m-négligeables en dehors desquels on a l'égalité $(\rho(\zeta))(l_n)a^\zeta = c(l_n)a^\zeta$; soit $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, N est m-négligeable et, pour ζ en dehors de N, on a, pour tout entier n $(\rho(\zeta))(l_n)a^\zeta = c(l_n)a^\zeta$; par densité, on en déduit que a^ζ est dans $(H_\zeta^{-\infty})^{L,c}$.

4.2 Applications

Le théorème 4.1.2 s'applique bien sûr à tous les exemples étudiés en 3.2. Nous ne les reprenons pas tous en détail. Voici un résultat bien connu, dû à I.E. Segal et R. Godement (cf. [Di 2] § 18.7.7 et [Du] §2) que notre théorème permet de retrouver :

Soient G un groupe de Lie séparable, Z un sous-groupe fermé du centre de G,c un caractère unitaire de Z et $\mu_{G,Z}$ une mesure G-invariante sur G/Z (i.e. une mesure de Haar sur G/Z). On définit les représentations régulières gauche et droite λ_c et ρ_c de G dans $L^2(G,Z,c)$ de la manière suivante : Pour ϕ dans $L^2(G,Z,c)$ et x et g dans G

$$(\lambda_c(x)\phi)(g) = \phi(x^{-1}g) \quad \text{et} \quad (\rho_c(x)\phi)(g) = \Delta_G(x)^{1/2}\phi(gx).$$

Considérons la représentation $\lambda_c \otimes \rho_c$ du groupe $G \times G$ dans $L^2(G,Z,c)$: pour x et y dans G on a $(\lambda_c \otimes \rho_c)(x,y) = \lambda_c(x)\rho_c(y)$. Soit σ l'involution de $G \times G$ donnée par $\sigma((x,y)) = (y,x)$.

Corollaire 4.2 :

a) $\lambda_c \bullet \rho_c$ est une représentation de $G \times G$ sans multiplicité.

b) Il existe une mesure positive bornée standard μ sur $\widehat{G \times G}$ telle que $\lambda_c \bullet \rho_c$ soit dans la classe $\int^{\bullet}_{\widehat{G\times G}} \zeta \, d\mu(\zeta)$. La classe de la mesure μ est déterminée de façon unique par cette propriété. On a $\zeta = \overline{\zeta^{\sigma}}$ μ-presque partout.

c) Si G est de type I, il existe une mesure positive bornée (standard) ν sur $\hat{G}$ telle que $\lambda_c \bullet \rho_c$ soit dans la classe $\int^{\bullet}_{\hat{G}} \xi \bullet \bar{\xi} \, d\nu(\xi)$. La classe de la mesure ν est déterminée de façon unique par cette propriété.

Démonstration :

Soient Δ la diagonale de $G \times G$ et c' le caractère de $L = \Delta(Z \times Z)$ donné par $c'((x,y)) = c(xy^{-1})$; on vérifie que les représentations de $G \times G$ $\lambda_c \bullet \rho_c$ et $\mathrm{Ind}_L^{G\times G}(c')$sont équivalentes.Le sous-groupe L vérifie la propriété $\mathcal{P}$ avec la sous-variété $Q = G \times \{e\}$; le caractère c' restreint à L vérifie la propriété (p) du théorème 3.1 car $c'|_{\Delta} \equiv 1$; on est donc dans les conditions d'application des théorèmes 3.1 et 4.1.2. On en déduit les affirmations a) et b).

Si G est de type I, on a un isomorphisme borélien de $\hat{G} \times \hat{G}$ sur $\widehat{G \times G}$ donné par $(\xi,\eta) \to \xi \bullet \eta$ pour ξ et η dans $\hat{G}$. On a $(\xi \bullet \eta)^{\sigma} = \eta \bullet \xi$ et $\overline{\xi \bullet \eta} = \bar{\xi} \bullet \bar{\eta}$. Donc si $\zeta = \xi \bullet \eta$ est dans $\widehat{G \times G}$ et vérifie $\zeta^{\sigma} = \bar{\zeta}$, on a $\zeta = \xi \bullet \bar{\xi}$. Le c) est une conséquence du b) et cette remarque.

4.3 Espaces symétriques exponentiels

Dans ce paragraphe G désigne un groupe de Lie exponentiel (donc connexe et simplement connexe), σ une involution de G. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{p}$, H, P sont comme en 1.1. Notons 1 le caractère trivial de H.

4.3.1 Rappelons dans ce cas la description du dual unitaire $\hat{G}$ de G : le groupe G agit dans $\mathfrak{g}$, dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, par l'action coadjointe. Soit f dans $\mathfrak{g}$, on choisit $\mathfrak{b}^*$ polarisation réelle en f vérifiant la condition de Pukanszky. Soient B le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et ρ le caractère de B tel que $d\rho = if|_{\mathfrak{b}}$, alors la représentation unitaire $\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$ est irréductible; sa classe dans $\hat{G}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$, elle ne dépend que de l'orbite $\Omega = Gf$ de f dans $\mathfrak{g}^*$. On construit donc ainsi une application $\theta : G\backslash\mathfrak{g}^* \to \hat{G}$. Cette application est une bijection qui respecte les structures boréliennes (cf. [Be] Chap. 6).

Notons ${}^t\sigma$ l'involution de $\mathfrak{g}^*$ transposée de l'involution σ de $\mathfrak{g}$. On vérifie alors aisément que, si Ω est une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, alors $\Omega^\sigma = {}^t\sigma(\Omega)$ et $-\Omega$ sont des G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$ et que $\theta(\Omega^\sigma) = (\theta(\Omega))^\sigma$ et $\theta(-\Omega) = \overline{\theta(\Omega)}$. On déduit du théorème 4.1.2 qu'il existe une mesure positive m' sur $G\backslash\mathfrak{g}^*$ telle que $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ soit dans la classe $\int_{G\backslash\mathfrak{g}^*}^{\oplus} \theta(\Omega)dm'(\Omega)$ et on a m'-presque partout $\Omega = -{}^t\sigma(\Omega)$. Nous nous intéressons donc aux orbites stables par $-{}^t\sigma$. Rappelons que l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$ s'identifie à $\mathfrak{p}^*$ car $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. La restriction de l'action coadjointe à H laisse stable $\mathfrak{h}^\perp$ et s'identifie alors à l'action contragrédiente de l'action de H dans $\mathfrak{p}$.

<u>Lemme 4.3.1</u> : Avec les notations précédentes (en particulier G est exponentiel),

a) si Ω est une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$, on a équivalence entre i) $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$ et ii) $\Omega^\sigma = -\Omega$;

b) pour f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a $Gf \cap \mathfrak{h}^\perp = Hf$;

c) par passage au quotient de l'injection de $\mathfrak{h}^\perp$ dans $\mathfrak{g}^*$, on obtient une application $j : H\backslash\mathfrak{h}^\perp \to G\backslash\mathfrak{g}^*$; l'image de j est l'ensemble des orbites de $\mathfrak{g}^*$ vérifiant ii) ;

d) notons $(\hat{G})_\sigma = \{\zeta \in \hat{G}/\zeta^\sigma = \zeta\}$ et pour ω dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$, notons $\zeta_\omega = \theta(j(\omega))$; l'application $\omega \mapsto \zeta_\omega$ est une bijection de $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ sur $(\hat{G})_\sigma$ qui respecte les structures boréliennes.

<u>Démonstration</u> :

a) Si f est dans $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp$ alors on a $f = -{}^t\sigma(f)$ donc Ω et $-\Omega^\sigma$ sont deux orbites qui ont un point commun : elles sont égales.

Réciproquement, si Ω est une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ qui vérifie $\Omega = -\Omega^\sigma$, $(-{}^t\sigma)$ est un difféomorphisme d'ordre deux de Ω. Or Ω est difféomorphe à $\mathbb{R}^p$, pour un certain p([Be] Chap. 1.3.5). On peut alors appliquer le résultat suivant : "Soit s un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p$ tel que $s^2 = Id$, alors il existe un point m de $\mathbb{R}^p$ tel que $s(m) = m$ ([Se] p.10)".

Donc il existe f dans Ω tel que $f = -{}^t\sigma(f)$ et on a $\Omega \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$.

b) Il est clair que, pour f dans $\mathfrak{h}^\perp$, on a $Hf \subset Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$. Soit f' dans $Gf \cap \mathfrak{h}^\perp$, on a $f' = g.f$ ($g \in G$), $-{}^t\sigma(f) = f$ et $-{}^t\sigma(f') = f'$. Donc ${}^t\sigma(f') = g.{}^t\sigma(f)$ et on a $f' = g^\sigma.f$. Ecrivons grâce à la proposition 1.2 $g = h \exp X$ avec h dans H et X dans $\mathfrak{p}$, on obtient alors les égalités $f' = h \exp X.f = h \exp(-X).f$ puis $\exp(2X).f = f$. Donc, $\exp(2X)$ est dans le stabilisateur $G(f)$ de f. On en déduit que 2X est dans le stabilisateur $\mathfrak{g}(f)$ de f dans $\mathfrak{g}$, car $G(f) = \exp(\mathfrak{g}(f))$ ([Be] Chap. 1.3.3). Donc X est dans $\mathfrak{g}(f)$ et $\exp(X)$ est dans $G(f)$: $\exp X.f = f$. On en déduit que $f' = h.f \in Hf$.

c) La partie b) de ce lemme exprime l'injectivité de l'application j. La partie a) décrit l'image de j.

d) C'est une conséquence de c) et du début de ce paragraphe.

<u>Corollaire</u> : Soit ρ une représentation unitaire irréductible d'un groupe exponentiel G , alors ρ est équivalente à $\bar{\rho}$ si et seulement si ρ est le caractère trivial de G.

<u>Démonstration</u> : La représentation ρ est l'image par θ d'une orbite Ω qui vérifie $\Omega = -\Omega$; on applique le a) du lemme pour $\sigma = \mathrm{Id}$ et on trouve que 0 est dans Ω. Donc $\Omega = \{0\}$.

<u>Remarque</u> : L'hypothèse "G exponentiel" n'est pas superflue pour ce lemme :

Pour $G = SU(2)$ et $\sigma = \mathrm{Id}$, toutes les orbites de la représentation co-adjointe (qui en général sont des sphères) vérifient ii), mais seule l'orbite {0} vérifie i).

Pour $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ et $\sigma = \sigma_2$ comme en 2.2.1, le b) n'est pas vrai. En effet, soit T^*, X^*, Y^* la base duale dans $\mathfrak{g}^*$ de la base T, X, Y de $\mathfrak{g}$ (cf. 2.2.1). Un petit calcul donne pour l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ la formule :

$$\forall g = (\theta, a, b) \in G \qquad \forall f = tT^* + xX^* + yY^* \in \mathfrak{g}$$

$$Ad^*(g^{-1})(f) = (t+xb-ya)T^* + (x\cos\theta + y\sin\theta)X^* + (-x\sin\theta + y\cos\theta)Y\ .$$

Donc les orbites de la représentation coadjointe sont, d'une part les points de la droite $(0,T^*)$, d'autre part les cylindres d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$. L'orthogonal de $\mathfrak{h}$ est le plan engendré par T^* et Y^*. Si l'orbite Ω est un cylindre, son intersection avec $\mathfrak{h}^\perp$ a deux composantes connexes alors que H est connexe. On ne peut avoir b).

4.3.2 Nous pouvons maintenant énoncer

<u>Théorème 4.3.2</u> : (Avec les notations de 4.3.1 ; G est un groupe exponentiel et σ une involution de G) Il existe une mesure positive ν sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ telle que la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ soit équivalente à $\int^\oplus_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \zeta_\omega d\nu(\omega)$. La classe de la mesure ν est bien déterminée par cette propriété.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence directe de 4.3.1 : ν est l'image réciproque de m' par l'application j.

<u>Remarques</u> : On pourra rapprocher ce résultat de [Gr] et de [Bu] ; ce qui est nouveau est l'absence de multiplicité.

Si G est nilpotent, la classe de la mesure ν est l'image par la projection de $\mathfrak{h}^\perp$ sur $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ de la classe de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$. En effet, la proposition 2 de [Gr] est valable quand G est nilpotent même si H n'est pas distingué : si ν' est l'image dans $H\backslash\mathfrak{h}^\perp$ d'une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$, la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1)$ est quasi-équivalente à $\int^\oplus_{H\backslash\mathfrak{h}^\perp} \zeta_\omega \, d\nu'(\omega)$. Or ces deux représentations sont sans multiplicité (Théorème 3.1). Elles sont donc équivalentes ([Di 2] Prop. 5.4.6).

4.4 <u>L'ESPACE</u> $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}$

<u>Proposition 4.4.1</u> : Soient G un groupe de Lie, σ une involution de G, L un sous-groupe de Lie de G stable par σ , vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ pour une sous-variété Q (cf. 2.3) et c un caractère de L vérifiant : $\forall q \in Q \quad c(q^\sigma q) \in \mathbb{R}_+^*$ (p). Soit π une représentation unitaire irréductible de G d'espace $\mathcal{H}_\pi$; alors

a) $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c})\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}) \leq 1$ (avec la convention $0\infty = 0$) et si on a égalité, $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

b) Si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ, alors $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$.

Démonstration : On peut supposer qu'il existe des éléments non nuls a et b dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$ et $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$, sinon il n'y a rien à démontrer. Soit alors $T^\pi_{a,b}$ le coefficient du couple (a,b) ; le lemme 1.3.1 donne les égalités, pour l dans L,

$$T^\pi_{a,b} \circ \lambda(l^{-1}) = T^\pi_{a,\pi(l)b} = c(l^\sigma)T_{a,b}$$

et

$$T^\pi_{a,b} \circ \rho(l^{-1}) = T^\pi_{\pi(l)a,b} = c(l)T^\pi_{a,b}.$$

On est exactement dans les conditions de la proposition 2.3 avec $T = T^\pi_{a,b}$. Donc

$$T^\pi_{a,b} \circ \sigma = T^\pi_{a,b} \circ J.$$

On applique de nouveau le lemme 1.3.1 qui donne

$$T^{\pi^\sigma}_{a,b} = T^{\bar{\pi}}_{b,a} .$$

Le lemme 1.3.2 prouve alors que $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes. En outre, si A est un opérateur d'entrelacement de $\bar{\pi}$ et π^σ, a est colinéaire à $A_{-\infty}(b)$; ceci prouve que $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$. De même $\dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}) \leq 1$.

b) Si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ, on peut trouver une application antiunitaire A de $\mathcal{H}_\pi$ dans lui-même telle que, pour tout g dans G, on a $\pi(g) \circ A = A \circ \pi(g^\sigma)$. Elle se prolonge en un opérateur $A_{-\infty}$ de $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Montrons que $A_{-\infty}$ induit une bijection de $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$ sur $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$: en effet, si a est dans $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}$, on a, pour tout l dans L,

$$\pi(l)A_{-\infty}(a) = A_{-\infty}(\pi(l^\sigma)a) = A_{-\infty}(c^\sigma(l)a) = \bar{c}^\sigma(l)A_{-\infty}(a) ;$$

d'où $A_{-\infty}(a) \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$; on a donc

$A_{-\infty}((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \subset (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma}$; la propriété cherchée s'en déduit, en utilisant l'opérateur $(A_{-\infty})^{-1} = (A^{-1})_{-\infty}$. Donc

$\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) = \dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,\bar{c}^\sigma})$ et, avec a), on conclut

$$\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1.$$

Corollaire 4.4.2. : Soient G un groupe de Lie exponentiel, σ une involution de G, $H = G_\sigma$ l'ensemble des points fixes de σ et c un caractère de H à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit π une représentation unitaire irréductible de G. Alors

a) $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) = 0$ ou 1.

b) Si $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) = 1$, alors $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

Démonstration : D'après 2.4.1, le sous-groupe H vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et le caractère c la propriété (p). On peut donc appliquer la proposition 4.4.1 (a)) ; or, $c = \bar{c}^\sigma$, on a donc $(\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}))^2 \leq 1$ on en déduit $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H,c}) \leq 1$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\bar{\pi}$ et π^σ sont équivalentes.

4.5 EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

4.5.1 Si c n'est pas un caractère à valeurs réelles, mais si $\bar{\pi}$ est équivalente à π^σ , on a encore l'inégalité $\dim((\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{L,c}) \leq 1$ (cf. b) de la proposition 4.4.1).

Par contre, si c n'est pas à valeurs réelles et si $\bar{\pi}$ n'est pas équivalente à π^σ, cette inégalité peut être mise en défaut comme le prouve l'exemple suivant :

Reprenons les notations de 3.3.5 : $G = H_3$ est muni de l'involution σ_3. Rappelons la description du dual unitaire $\hat{G}$ de G. D'un point de vue ensembliste, on a :

$\hat{G} = \{\pi_\lambda \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^*\} \cup \{\pi_{\alpha,\beta} \ / \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Chacune des classes est donnée par un représentant :

1) π_λ est la représentation dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ dont l'action est donnée par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad ((\pi_\lambda(x,y,z))f)(t) = e^{i\lambda(z-yt+ xy/2)}f(t-x)$$

2) $\pi_{\alpha,\beta}$ est la représentation d'espace $\mathbb{C}$:

$$\pi_{\alpha,\beta}(x,y,z) = e^{i\alpha x + i\beta y}.$$

On vérifie que, pour h dans H_3, on a $\pi_\lambda(h) = c_\lambda(h)\mathrm{Id}$; donc, pour tout λ dans $\mathbb{R}^*$,

$$(\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda})^{H_3,c_\lambda} = \mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda} \text{ est de dimension infinie.}$$

4.5.2 Si G n'est pas un groupe exponentiel, la conclusion du corollaire peut être fausse. En voici un exemple : reprenons les notations de 2.2.1 ; soit $G = \widetilde{E(\mathbb{R}^2)}$ muni de l'involution σ_2 pour laquelle $H = H_2 = \{(0,a,0)/a \in \mathbb{R}\}$. La théorie de Mackey, appliquée au sous-groupe distingué $N = \{(0,a,b)/a,b \in \mathbb{R}\}$ des translations, permet de décrire le dual unitaire $\hat{G}$ de G.

D'un point de vue ensembliste on a

$$\hat{G} = \{\dot{\pi}_\lambda \ /\lambda \in \mathbb{R}\} \cup \ \{\dot{\pi}_{R,\alpha} \ / \ \alpha \in [0,1[\ \text{ et } R \in]0,\infty[\ \}.$$

Chacune des classes est donnée par un représentant :

1) π_λ est la représentation d'espace $\mathbb{C}$: $\pi_\lambda((\theta,a,b)) = e^{i\lambda\theta}$.

2) $\pi_{R,\alpha}$ est une représentation d'espace $L^2(T)$, où $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est muni de la mesure $\frac{dt}{2\pi}$. L'action est donnée par, pour ϕ dans $L^2(T)$ et t dans T,

$$(\pi_{R,\alpha}((\theta,a,b))(\phi))(t) = e^{-i(a\cos t + b\sin t)R}\ e^{-i\alpha\theta}\ (t+\dot{\theta}).$$

On a bien $\dim((\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_\lambda})^H) = 1$ mais $\dim((\mathcal{H}^{-\infty}_{\pi_{R,\alpha}})^H) = 2$.

Par contre, pour $\sigma = \sigma_1$ et $H = H_1$, les conclusions de ce corollaire sont vraies (cf. 2.4.5).

BIBLIOGRAPHIE

[B1] Y. BENOIST - Espaces symétriques exponentiels, Thèse de 3ème cycle Paris VII (1983).

[B2] Y. BENOIST - Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, C.R.A.S. Paris. 296 Série A (1983), p. 489-492.

[Be] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHAS, M. RAIS, P. RENOUARD, M. VERGNE - Représentations des groupes de Lie résolubles, Mono. Soc. Math. Fr. n° 4, Dunod, Paris (1972).

[Br] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. Fr. 84 (1956), p. 97-205.

[Bu] I.K. BUSYATSKAYA - Représentations of exponential Lie groups, Funct. Anal. & Applic. 7 (1975), p. 151-152.

[Ca] P. CARTIER - Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, Lect. Notes in Math. 514, Springer (1975), p. 20-34.

[Di 1] J. DIXMIER - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[Di 2] J. DIXMIER - Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris (1964).

[Du] M. DUFLO, M. RAIS - Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 9, 4e série, (1976), p. 107-144.

[Gr] G. GRELEAU - Désintégration de représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, C.R.A.S. Paris 277 série A (1973), p. 327-330.

[He] S. HELGASON - Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York (1978).

[Ma 1] G. W. MACKEY - Induced representations of locally compact groups II, Ann. Math. 58 (1953), p. 193-221.

[Ma 2] G. W. MACKEY - Borel structure on groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), p. 134-165.

[Lo] O. LOOS - Symmetric spaces I, Benjamin, New York (1969).

[Pe] R. PENNEY - Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, Journ. Funct. Anal. 18 (1975), p. 177-190.

[Po] N.S. POULSEN - On C^{∞}-vectors and intertwinning bilinear forms for representations of Lie groups, Journ. Funct. Anal. 9 (1972), p. 87-120.

[Sc] L.SCHWARTZ - Sous-espaces hibertiens et noyaux associés ; applications aux représentations des groupes de Lie, 2e coll. sur l'analyse fonctionnelle, Liège (1964), p. 153-163.

[Se] J.P. SERRE - Espaces avec groupe d'opérateurs, Sémin. H. Cartan, 3e année (1950-51), exposé n° 13.

L. CLOZEL

Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés $\mathfrak{p}$-adiques et caractères des groupes réductifs

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 15 (1984), p. 39-64
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__39_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 39-64

THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT POUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES ET CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS

L. CLOZEL (*)

(*) CNRS, PARIS
Institute for Advanced Study, Princeton, USA (1983-84)

Partially supported by NSF grant MCS-82 11 506.

L. CLOZEL

1. INTRODUCTION.

Soit F un corps $\mathfrak{p}$-adique. (Nous ne faisons pas d'hypothèse sur la caractéristique de F). Si X est une variété analytique sur F, et C un corps de caractéristique nulle, par exemple le corps des complexes, on peut étudier les distributions sur X à valeurs dans C : ce sont les formes linéaires sur l'espace $C_c^\infty(X,C)$ des fonctions localement constantes de X dans C.

Comme Daniel Heifetz l'a montré dans sa thèse [9], les propriétés élémentaires des distributions décrites par exemple dans [11] - comportement par image directe et inverse, front d'onde, principe de la phase stationnaire - s'étendent à de telles distributions sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques. D. Heifetz s'en sert alors pour étendre aux groupes $\mathfrak{p}$-adiques la notion, due à Howe, de front d'onde d'une représentation.

Le but de cette note est de remarquer qu'une autre propriété élémentaire des distributions, le théorème d'Atiyah-Bott, s'étend sans changement notable aux fibrés sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques qui interviennent dans la théorie des représentations ("fibrés admissibles").

Nous démontrons en fait deux "théorèmes d'Atiyah-Bott". Le premier (Prop. 1) ne s'applique qu'aux fibrés de dimension finie et est l'exact analogue du théorème réel ; nous ne faisons qu'esquisser sa démonstration, puisqu'il suffit d'imiter celle de [11]. Dans le § 4, nous démontrons une extension du théorème aux fibrés admissibles de dimension infinie (Prop. 2) : ce sont de tels fibrés qui interviennent, en général, dans la théorie des représentations des groupes réductifs. Dans les § 5-6, nous appliquons ceci aux représentations admissibles des groupes réductifs. Nous obtenons ainsi une démonstration très simple des formules obtenues par van Dijk pour les caractères des représentations induites [6], ainsi que les formules analogues pour les caractères tordus qui interviennent dans la théorie du changement de base [13]. Ceci donne une preuve très facile du résultat d'induction dans la démonstration des identités de Shintani (Théor. 2), au moins pour GL(n). Pour donner un sens à ce théorème, nous avons été amené à étendre aux caractères tordus le théorème d'Harish-Chandra assurant que les caractères admissibles sont lisses sur l'ensemble régulier (Théor. 1).

L'essentiel de ce travail a été fait au printemps 1981, lors d'un séjour au Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik" de Bonn. Je suis heureux de remercier l'Université de Bonn, et tout particulièrement G. Harder, de leur hospitalité. Les résultats ont été annoncés lors d'un colloque organisé à Vancouver en août 1981 par W. Casselman.

2. FIBRÉS LISSES ET ADMISSIBLES SUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES.

2.1. Dans la suite de l'article, F est un corps $\mathfrak{p}$-adique (un corps localement compact non-archimédien) et C un corps de caractéristique nulle. On note $|x|$ la valeur absolue normalisée de $x \in F$: on a donc $|x| \in \mathbb{Q} \subset C$. On considère des variétés *analytiques* X,Y,... sur F ; les morphismes de variétés sont supposés *localement analytiques*.

Soit X une variété analytique sur F. Un *fibré vectoriel lisse* sur X, $\mathcal{E}$, est défini de la façon suivante : localement (sur tout ouvert-fermé assez petit U de X) on a

$$(*) \qquad \mathcal{E}|_U \cong U \times E,$$

E étant un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) sur C ; E n'est muni d'aucune topologie. Si U,V sont deux ouverts-fermés de X, les trivialisations locales de $\mathcal{E}|_U$ et $\mathcal{E}|_V$ donnent de la façon habituelle un cocycle

$$C_{U,V} : U \cap V \to GL(E).$$

On suppose que pour tous vecteurs $v,w \in E$, l'ensemble $\{y \in U \cap V : C_{U,V}(y)v = w\}$ est ouvert dans $U \cap V$.

Une *section lisse* du fibré $\mathcal{E}$ est une section de $\mathcal{E}$ comme fibré vectoriel donnée, dans les trivialisations locales $(*)$, par des applications $x \to (x,s(x))$ où $s(x)$ est une application localement constante $U \to E$. On vérifie que cette définition, pour un fibré lisse, est indépendante de la trivialisation. On note $C_c^\infty(X,\mathcal{E})$ l'espace des sections lisses à support compact de $\mathcal{E}$. Un fibré lisse sur X peut être aussi défini par la donnée de ses cocycles $C_{U,V} : U \cap V \to GL(E)$ satisfaisant la condition de différentiabilité, ainsi que la relation de cocycle habituelle (cf. e.g. [16, ch. 1]).

Remarque : Cette notion de fibrés est analogue à la notion de "ℓ-faisceaux" de Bernstein-Zelevinskii [2]. En particulier, le faisceau des sections lisses de $\mathcal{E}$ est un ℓ-faisceau.

Exemples. 1. Soit X = G/H, où G est un groupe de Lie sur F et H un sous-groupe fermé de G. Si π_H est une représentation lisse ([15] : ce sont les représentations "algébriques" de [2]) de H sur un espace vectoriel E sur C, elle définit un fibré homogène lisse $\mathcal{E}$ sur X. La représentation induite (resp. induite à support compact) agit sur les sections lisses (resp. lisses à support compact) de $\mathcal{E}$.

2. Soit X une variété analytique, $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts-fermés locaux ; on suppose que pour $U \in \mathcal{U}$, on a un isomorphisme analytique j_U de U sur un ouvert de F^n, où $n = \dim(X)$.

On définit un cocycle à valeurs dans C^X de la façon suivante : si $U,V \in \mathcal{U}$, on a une application $j_U j_V^{-1}$ de $j_V(U \cap V) \subset F^n$ dans $j_U(U \cap V)$. On peut considérer sa différentielle $d(j_U j_V^{-1})$; on définit alors $c_{U,V}(x) = |\det(d(j_U j_V^{-1})_x)|$. Ceci définit un fibré sur X, noté $|\Lambda|(X)$, le fibré des *densités* sur X. Si ϕ est un section à support compact de $|\Lambda|(X)$, l'intégrale $\int_X \phi$ est bien définie, comme le montre la formule de changement de variables ([6, Théor. 1]). Une telle section sera appelée densité sur X.

Les opérations fonctorielles bien connues sur les fibrés différentiables s'étendent aux fibrés lisses ; nous ne donnons pas de détails. Si $f : X \to Y$ est localement analytique et si $\mathcal{E}$ est un fibré lisse sur Y, on peut ainsi définir son image réciproque $f^{\#}\mathcal{E}$ sur X. La fibre de $\mathcal{F} = f^{\#}\mathcal{E}$ au point $x \in X$ s'identifie canoniquement à la fibre $\mathcal{E}_{f(x)}$ de $\mathcal{E}$ au point f(x). Soit $\mathcal{E} \to X$, $\mathcal{F} \to Y$ deux fibrés lisses. Un *morphisme de fibrés* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (Atiyah-Bott [1]) est la donnée d'un couple (f,r) où f est un morphisme : $X \to Y$, et r une section lisse du fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(f^{\#}\mathcal{F}, \mathcal{E})$.

Plutôt que de définir le fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{G}, \mathcal{E}$ sont de dimension infinie, précisons les conditions que nous imposons à r. Tout d'abord, r est la donnée d'une famille d'homomorphismes $r(x) : (f^{\#}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_{f(x)} \to \mathcal{E}_x$. La condition de différentiabilité est la suivante : fixons des trivialisations locales $\mathcal{F} \cong U \times F$, $\mathcal{E} \cong V \times E$, U étant un voisinage de f(x) et $V \subset f^{-1}(U)$ un voisinage de x. On peut alors identifier r(y), pour $y \in V$, à un homomorphisme $F \to E$; on impose que pour tout $u \in F$, $v \in E$, l'ensemble $\{y \in V \mid r(y)u = v\}$ soit ouvert dans V.

Si (f,r) est un tel morphisme de fibrés, il définit une application entre les espaces de sections $C^\infty(Y, \mathcal{F}) \to C^\infty(X, \mathcal{E})$ qui à s(y) associe $t(x) = r(x)s(f(x))$.

2.2. Soit X une variété analytique, que nous supposons dorénavant *compacte*. Si Y est une variété, une *action* de Y sur X est une application *localement* analytique $f : Y \times X \to X$. Elle est *localement transitive* ([11, p. 312]) si pour tout (y,x), la différentielle : $T_y(Y) \to T_{f(y,x)}(X)$ est surjective.

Lemme 1. Soit $f_0 : X \to X$ un morphisme. Il existe alors une variété Y munie d'un point y_0 et une action localement transitive $f : Y \times X \to X$ telle que $f(y_0,.) = f_0$.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où f_0 est l'identité : en effet, si $g : Y \times X \to X$ résout le problème avec $g_0 = g(y_0,.)$ égale à l'identité, on peut considérer $f_y = g_y \circ f$; le diagramme $X \times Y \xrightarrow[(f,1)]{} X \times Y \xrightarrow[g]{} X$ montre que (f_y) est localement submersive.

Soit alors $f_0 = 1$. Le problème est évidemment local, donc on peut supposer que $X = (\mathcal{O}_F)^n$, $n = \dim(X)$, $\mathcal{O}_F$ étant l'anneau des entiers de F ; on peut même supposer que $n=1$. Prenant $Y = \mathcal{O}_F$, l'application $f(y,x) = y + x$ (avec $y_0 = 0$) donne une déformation localement transitive de l'identité. □

Lemme 2. Soit $\mathcal{E}$ un fibré lisse de dimension finie sur X, (f,r) un endomorphisme de $\mathcal{E}$. Soit $(f_y)_{y\in Y}$ une action localement transitive de Y sur X prolongement $f = f_{y_0}$. Alors on peut, au moins pour y dans un voisinage de y_0, compléter f_y en un morphisme de fibrés (f_y,r_y) de $\mathcal{E}$, dépendant différentiablement de y, et tel que $r_{y_0} = r$.

Remarque 1. La différentiabilité en y se traduit par la condition suivante : localement (cf. avant le lemme 1), r_y est donné par des endomorphismes de la fibre $r_y(x) : E \to E$ où $x \in V \subset X$. On impose alors que l'ensemble $\{(y,x) \in Y \times V : r_y(x)u = v\}$ soit ouvert dans $Y \times V$ pour tous vecteurs $u,v \in E$.

Remarque 2. D'après Guillemin-Sternberg ([11, p. 320]), ceci est en général faux pour les variétés réelles.

Démonstration. On peut écrire X comme réunion disjointe d'ouverts-compacts qui trivialisent $\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est isomorphe au fibré trivial $X \times E$, $\dim E < \infty$. On se fixe un tel isomorphisme : r est alors donné par une application $x \to r(x) \in \mathrm{Hom}(E,E)$, localement constante. Pour prolonger $r = r_{y_0}$ en r_y $(y \in Y)$, il suffit d'étendre cette application en une application localement constante de $X \times Y$ dans $\mathrm{Hom}(E,E)$, ce qui est évidemment possible. □

2.3. Dans le cas où les fibrés considérés sont de dimension infinie, nous allons introduire une dernière définition. Supposons d'abord que $\mathcal{E} \to X$ est de dimension finie. Soit $f = (f_y) : Y \times X \to X$ une action localement transitive de Y sur X, relevée par des morphismes de fibrés r_y. Pour tout y, et toute section ψ de $\mathcal{E}$, on notera pour simplifier $f_y^*\psi$ la section donnée par $f_y^*\psi(x) = r_y\psi(f(y,x))$. Si ϕ est une densité sur Y, l'opérateur

$$A_\phi : (A_\phi\psi)(x) = \int_Y \phi(y) r_y \psi(f(y,x))dy$$

est un endomorphisme de $C_c^\infty(X, \mathcal{E})$. En utilisant la propriété de submersivité de f, on vérifie facilement qu'il est de rang fini. (Si par exemple $\mathcal{E}$ est trivial de fibre C, A_ϕ est donné par le noyau $k(x_1,x_2) \in C_c^\infty(X \times X)$, où $k(x_1,x_2) = \int_{Y_{x_1,x_2}} \phi(y)dy/_{dx}$ est donné par "intégration sur les fibres" ; $Y_{x_1,x_2} = \{y \mid f(y,x_1) = x_2\}$ est lisse par transitivité. Il est bien connu qu'un tel opérateur à noyau lisse est de rang fini).

Supposons maintenant que $\mathcal{E} \to X$ est de dimension infinie. On dira alors que la donnée (f_y,r_y), où f_y est une action localement transitive sur la base relevée par r_y au fibré, est *admissible* si, pour toute densité ϕ (localement constante à support compact) sur Y, l'opérateur A_ϕ est de rang fini.

Exemple. Supposons que G est un groupe de Lie sur F, et H un sous-groupe fermé. L'action de G sur X = G/H est localement transitive, et se relève canoniquement au fibré défini par une représentation (π_H,E) de H. ([11, p. 312-313]). Supposons X compact. La donnée canonique (g,r_g) est alors admissible si la représention π_H est admissible.

2.4. Soit f : X → X. On rappelle que f est *transverse à l'identité* si, en tout point fixe x de f, on a $\det(1-df_x) \neq 0$. Ceci implique en particulier que les points fixes de f sont isolés, et donc en nombre fini si X est compacte.

2.5. Nous utiliserons sans commentaires les notions de distributions et de fonctions généralisées [11], qui s'étendent immédiatement aux variétés $\mathfrak{p}$-adiques.

3. LE THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT.

Proposition 1.

Soit $\mathcal{E} \to X$ un fibré lisse de dimension finie sur la variété compacte X. Soit f : X → X un endomorphisme de X transverse à l'identité, relevé au fibré $\mathcal{E}$ par r. Soit (f_y,r_y) une famille différentiable d'endomorphismes de $\mathcal{E}$ étendant $(f,r) = (f_{y_0},r_{y_0})$, l'action (f_y) de Y sur X étant localement transitive.

(i) Pour toute densité lisse à support compact $\phi(y)dy$ sur Y, l'opérateur $A_\phi = \int_Y \phi(y) f_y^* \, dy$ est de rang fini. Soit trace (A_ϕ) sa trace : l'application

$\phi\, dy \to \mathrm{trace}(A_\phi)$ définit donc une fonction généralisée sur Y.

(ii) Au point y_0, cette fonction généralisée est en fait une fonction lisse, de valeur

$$\mathrm{trace}(f^*) = \sum_{x\in X\,:\,f(x)=x} \frac{\mathrm{trace}\ r(x)}{|\det(1-df_x)|}.$$

Remarque. Dans la formule donnant $\mathrm{trace}(f^*)$, df_x est un endomorphisme de l'espace tangent $T_x(X)$, et $r(x) : \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{f(x)} \to \mathcal{E}_x$ puisque $f(x) = x$.

Ce théorème est l'analogue exact du théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés réelles, tel qu'il est énoncé par Guillemin-Sternberg [11, ch. VI, Prop. 2.1]. On a déjà esquissé la démonstration de la partie (i). Il reste à démontrer que la distribution obtenue est une fonction au point y_0, et à obtenir la formule de Lefschetz. Répétons la démonstration bien connue.

En localisant, on voit aisément qu'on peut faire les hypothèses simplificatrices suivantes : $X = (\mathcal{O}_F)^n$, et $\mathcal{E}$ trivial égal à $X \times C^\ell$. Le morphisme de fibrés est alors défini par une fonction lisse $r(y,x) \in \mathrm{Hom}(C^\ell,C^\ell)$. Localisant de nouveau, on peut supposer $r(y,x)$ constant. On va traiter le cas où $\mathcal{E} = X \times C$ ($\ell=1$) et où r est l'identité ; le cas général n'en diffère que par les notations. Munissons X de la mesure de Haar normalisée sur $(\mathcal{O}_F)^n$. On écrira $y.x$ pour $f(y,x)$; posons $f(y,x) = x + g(x,y)$, $g(y,x) \in (\mathcal{O}_F)^n$. On peut supposer de plus que tout $y \in Y$ a un unique point fixe dans X (s'il n'y a pas de point fixe, la Prop. 1 est trivialement vérifiée). Ce point fixe est donc l'unique solution de $g(y,x) = 0$. On utilisera sans commentaire les différentes propriétés déduite de la locale transitivité dans [11, Ch. VI].

Si ψ est une fonction sur X, on a

$$\begin{aligned}(A_\phi\psi)(x) &= \int_Y \phi(y)\psi(y.x)dy \\ &= \int_X \{\int_{Y_{xx'}} \phi(y)\psi(x')dy/_{dx'}\}dx',\end{aligned}$$

$dy/_{dx'}$ étant la mesure quotient sur la fibre (lisse) $Y_{xx'} = \{y \in Y : y.x = x'\}$. On peut encore écrire ceci :

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_X \{\int_{g(y,x)=x'-x} \phi(y)\psi(x')dy/_{dx'}\}dx'$$

$$= \int_X \{\int_{g(y,x)=x'-x} \phi(y)\psi(x')dy/_{dg}\}dx'$$

puisque dg = dx' ; ici $dg = g^*(dx)$, où dx est la mesure de Haar sur l'image $(\mathcal{O}_F)^n$ de g ; dg définit, de la façon habituelle, une mesure transverse à la mesure sur la fibre d'équation g(y,x) = Cste : donc $dy/_{dg}$ est une mesure sur la fibre. Par intégration sur la diagonale, on obtient alors :

$$\text{trace } A_\phi = \int_X \{\int_{g(y,x)=0} \phi(y)dy/_{dg}\}dx.$$

Revenant à la notation originale :

$$g(y,x) = f(y,x) - x,$$

on voit que $dg = |\det(1-(df_y)_x)|dx$

au point (x,y) tel que $f(y,x) = f_y(x) = x$, ce qui équivaut à g(y,x) = 0. On peut donc réécrire [1]

$$(**) \quad \text{trace } A_\phi = \int_X \int_{y.x=x} \phi(y) \; |\det(1-(df_y)_x)|^{-1}(dy/_{dx})dx$$

c'est-à-dire :

$$\text{trace } A_\phi = \int_Y \phi(y)\{\sum_{y.x=x} |\det(1-(df_y)_x)|^{-1}\}dy.$$

Ceci démontre la Prop. 1 (ii). □

4. THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT EN DIMENSION INFINIE.

X est toujours une variété compacte, $\mathcal{E} \to X$ un fibré vectoriel lisse (de dimension finie ou infinie), et (f,r) un endomorphisme de fibré de $\mathcal{E}$, avec $f : X \to X$ transverse à l'identité. Nous voulons généraliser à cette situation la formule (ii) de la Prop. 1. Cependant, les traces des endomorphismes r(x), qui apparaissent dans cette formule, ne sont plus définies ; il semble impossible d'associer une trace à f^* sans introduire d'autres données.

---

[1] Dans les formules qui suivent, $(df_y)_x$ est la différentielle de f_y au point fixe x.

Supposons maintenant que $f = f_{y_0}$ a été plongée dans une action localement transitive $(f_y)_{y\in Y}$ complétée par des morphismes de fibrés $(r_y)_{y\in Y}$, comme dans le lemme 2. On suppose la donnée (f_y,r_y) admissible (§. 2.4). Donc, si ϕ est une densité sur Y, l'opérateur A_ϕ défini dans le §.2 est de rang fini.

Soit E un espace vectoriel, π une action de la variété Y sur E, i.e. une application $Y \times E \to E$, $(y,v) \to \pi(y)v$. On dit que π est *lisse* si, pour $u,v \in E$, $\{y \mid \pi(y)u = v\}$ est ouvert, et *admissible* si, pour toute densité ϕ à support compact sur Y, $\pi(\phi) = \int_Y \pi(y)\phi(y)dy$ (qui a un sens parce que π est lisse) est de rang fini. Une action admissible a un caractère, qui est la fonction généralisée sur Y définie par $\phi \to \operatorname{trace} \pi(\phi)$.

Revenons au cas qui nous intéresse. Soit $x \in X$, et $Y_{xx} = \{y \in Y : f_y(x) = x\}$: c'est une variété lisse par submersivité.

Supposons le fibré $\mathcal{E}$ trivial. On peut écrire

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_Y \phi(y)\ r_y\psi(y.x)dy$$

avec $y.x = f(y,x)$ et $r_y : E \to E$, ψ à valeurs dans E. Donc

$$(A_\phi\psi)(x) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)\ r_y\psi(x')dy/_{dx'}\}dx'.$$

Il est donc clair (comme on le voit en décomposant $\phi(y)$ comme produit tensoriel suivant la fibration de Y sur X donnée par $y \to y.x$) que pour tous x,x', l'opérateur $\int_{y.x=x'} \phi(y)r_y$ doit être de rang fini. En particulier, *l'action de* Y_{xx} *sur* $\mathcal{E}_x$ *est admissible.*

Si $\psi(u)du$ est une densité sur la fibre Y_{xx}, $\operatorname{trace}(\psi du)$ est donc bien défini. On le notera $\int_{Y_{xx}} \operatorname{trace}(u|\mathcal{E}_x)\psi(u)du$; $\operatorname{trace}(u|\mathcal{E}_x)$ est donc une fonction généralisée sur Y_{xx}.

<u>Proposition 2</u>. Soit $\mathcal{E} \to X$ un fibré vectoriel lisse sur X compacte, (f,r) un endomorphisme de $\mathcal{E}$ prolongée par une donnée admissible $(f_y,r_y)_{y\in Y}$. On suppose que, pour tout $y \in Y$, f_y est transverse à l'identité. Si $\phi(y)dy$ est une densité sur Y, elle définit un opérateur de rang fini $A_\phi : C_c^\infty(X, \mathcal{E}) \to C_c^\infty(X, \mathcal{E})$. Soit dx une densité lisse strictement positive sur X. Alors :

$$\text{trace } A_\phi = \int_X \{\int_{Y_{xx}} \frac{\text{trace}(y|\mathcal{E}_x)\phi(y)dy/_{dx}}{|\det(1-df_y)_x|}\}dx$$

L'expression entre accolades a le sens suivant : puisque $\phi(y)dy$ est une densité sur Y, $\phi(y)dy/_{dx}$ définit une densité sur la fibre Y_{xx} ; on évalue alors la fonction généralisée trace$(y|\mathcal{E}_x)$ contre la densité $|\det(1-df_y)_x|^{-1}\phi(y)dy/_{dx}$.

La proposition a pour conséquence immédiate :

<u>Corollaire</u>. Supposons que pour tout y dans un voisinage de y_0, la fonction généralisée trace$(y|\mathcal{E}_x)$ soit une fonction lisse pour tout point fixe x de f_y sur X. Alors la fonction généralisée $\phi dy \to$ trace A sur Y est une fonction lisse en y_0, et sa valeur est donnée par

$$\text{trace}(f^*) = \sum_{y_0.x=x} \frac{\text{trace}(y_0|\mathcal{E}_x)}{|\det(1-df_{y_0})_x|}$$

Il suffit en effet de réécrire, dans ce cas, trace A_ϕ comme une fonction (lisse) sur Y intégrée contre ϕ. □

<u>Démonstration de la Proposition 2</u>. Le résultat est local sur Y et sur X. On peut donc supposer que $\mathcal{E} = X \times E$ (avec dim(E) peut-être infinie). L'endomorphisme de fibré est donné par $r(y,x) : E \to E$; pour tous $u,v \in E$, l'ensemble $\{r(y,x)u = v\}$ est ouvert dans $Y \times X$, mais $r(y,x)$ *n'est pas* nécessairement localement constant en dimension infinie. Ecrivons comme d'habitude :

$$A_\phi\psi(x) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx'}\}\psi(x')dx'.$$

D'après l'hypothèse d'admissibilité, A_ϕ est de rang fini comme opérateur dans $C_c^\infty(X) \otimes E = C_c^\infty(X,\mathcal{E})$. Il existe donc un sous-espace de dimension finie E' de E tel que l'image de A_ϕ soit contenue dans $C_c^\infty(X) \otimes E'$. La trace de A_ϕ est donc égale à la trace de sa restriction à $C_c^\infty(X) \otimes E'$. Soit E" un supplémentaire de E' dans E, $p : E \to E'$ la projection associée. Puisque "l'intégrale" définissant A n'est qu'une somme finie, on a

$$A_\phi\psi(x) = p(A_\phi\psi(x)) = \int_X \{\int_{y.x=x'} \phi(y)p.r(x,y)dy/_{dx'}\}\psi(x')dx'.$$

Autrement dit, comme endomorphisme de $C_c^\infty(X,E')$, A_ϕ est donné par le noyau $\phi(y)pr(x,y)$: c'est donc l'opérateur A'_ϕ associé à ϕ et à l'endomorphisme de fibré $p.r(x;y)$ du fibré vectoriel $X \times E'$. (Notons que $p.r(x,y)$ est maintenant localement constant d'après l'hypothèse sur r). On peut alors appliquer le théorème d'Atiyah-Bott pour les fibrés de dimension finie : plus précisément, la formule (**), à la fin du §.3 (étendue à un fibré de dimension supérieure à 1) donne :

$$\operatorname{trace} A_\phi = \int_X \{\int_{Y_{xx}} \frac{\operatorname{trace}(pr(y,x))\phi(y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx}\}dx$$

$$= \int_X \{\operatorname{trace} \int_{Y_{xx}} \frac{pr(y,x)\phi(y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx}\}dx$$

Par construction, $\int_X \{\int_{Y_{xx'}} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx'}\}\psi(x')dx'$ est dans E' pour tout $\psi \in C_c^\infty(X,E)$. Il est donc clair que $\int_{Y_{xx'}} .\phi(y)r(y,x)dy/_{dx'}$ envoie E dans E'. Par ailleurs, $|\det(1-df_y)_x|$ est une fonction localement constante sur la variété de (x,y) tels que $y.x = x$. En prenant Y et X assez petits, on peut donc la supposer constante (cela dès avant le choix de ϕ). On a alors :

$$\operatorname{trace} A_\phi = \int_X \operatorname{trace}(|\det(1-df_y)_x|^{-1} \int_{Y_{xx}} \phi(y)pr(y,x)dy/_{dx})dx$$

$$= \int_X \operatorname{trace}(|\det(1-df_y)_x|^{-1} \int_{Y_{xx}} \phi(y)r(y,x)dy/_{dx})dx$$

- puisque le terme $\int \phi(y)r(y,x)dy/_{dx}$ envoie E dans E' -

$$= \int_X \{\operatorname{trace} \int_{Y_{xx}} \frac{r(y,x)\ (y)}{|\det(1-df_y)_x|} dy/_{dx}\}dx.$$

Mais ceci est précisément l'énoncé de la Proposition 2. □

Il est clair - par exemple à cause des exemples apparaissant en théorie des représentations (§.5) que la Proposition 2 et son corollaire ont un analogue pour certains fibrés vectoriels de dimension infinie sur des variétés *réelles*. Nous n'avons essayé ni de les formuler précisément ni de les démontrer. (On ne peut espérer étendre la démonstration ici donnée de la Proposition 2 au cas réel...).

5. CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS.

5.1. Soit maintenant $G = \underline{G}(F)$, où $\underline{G}$ est un groupe réductif connexe sur F. Soit $\underline{P}$ un parabolique de $\underline{G}$ défini sur F, $P = \underline{P}(F)$; soit $P = MN$ une décomposition de Levi de P. Soit π_M une représentation admissible de longueur finie de M. Son caractère est alors une distribution Θ_M ; on sait que, sur l'ensemble M_{reg} des éléments réguliers, Θ_M est donné par une fonction localement constante ([7]).

En faisant agir N trivialement, on peut étendre π_M en une représentation π_p de P. Soit π_G l'induite "*non-unitaire*" de π_p de G (c'est la représentation notée $\mathrm{Ind}(G,P,\pi_p)$ dans [2, §.2.21]) : elle est donnée par l'action à gauche de G sur les fonctions C^∞ de G dans l'espace de π_M qui sont localement constantes et satisfont :

$$f(hg) = \pi_P(h)f(g),\ h \in P.$$

La représentation π_G est encore admissible de longueur finie ([3,4]). Son caractère Θ_G est donc une fonction sur G_{reg}, l'ensemble des éléments réguliers de G. Nous allons montrer comment le théorème d'Atiyah-Bott (Corollaire de la Prop. 2) redémontre, sous une forme un peu différente, un théorème de van Dijk [6] donnant Θ_G en fonction de Θ_M.

La représentation π_P (dans un espace V) définit un fibré vectoriel homogène lisse sur $X = G/P$. L'action de G sur X est (localement) transitive, et se relève canoniquement en morphisme de fibrés ([11, p.313]). Ce morphisme de fibrés est admissible (cf. e.g. [6, Lemma 4]). Si $\phi \in C_c^\infty(G)$, la trace de l'opérateur A_ϕ (§.2.4) n'est autre que le caractère de Harish-Chandra trace $\pi_G(\phi) = \Theta_G(\phi)$. Supposons $g \in G$ *régulier*. Alors g définit un automorphisme transverse à l'identité de G/P. Pour le vérifier, il suffit en effet de vérifier que si $g.x = x$ $(x \in X)$ on a $\det((1-dg_x)|_{T_x(X)}) \neq 0$. Dire que $g.x = x$ revient à supposer que g appartient au parabolique P_x conjugué à P associé à x ; supposons, à conjugaison près, $P_x = P$. On a alors $g \in P$; l'espace tangent à X en x s'identifie à $\underline{n}^-$, où $\underline{g} = \underline{m} + \underline{n} + \underline{n}^-$ est une décomposition triangulaire de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, avec $\underline{m} = \mathrm{Lie}(M)$ et $\underline{n} = \mathrm{Lie}(N)$. On peut encore supposer (toujours modulo conjugaison) que $g \in M$. On a alors

$$\det((1-dg_x)|_{T_x(X)}) = \det((1-\mathrm{Ad}g)|_{\underline{n}^-}).$$

Il est bien connu que ce déterminant est non nul pour g régulier. Enfin, si $g.x = x$ et si on choisit un représentant y de x dans G, $y^{-1}gy$ appartient à P ; si $y^{-1}gy = mn$, m est régulier et donc trace $\pi_P(y^{-1}gy)$ = trace $\pi_M(m)$ est bien défini. Il ne dépend pas du choix de y, et on le notera $\Theta_M(x^{-1}gx)$.

Toutes les hypothèses du Corollaire à la Prop. 2 sont alors vérifiées ; la trace associée par le Corollaire à l'endomorphisme g s'identifie évidemment au caractère d'Harish-Chandra $\Theta_G(g)$, et l'on obtient :

<u>Proposition 3</u>. (cf. [6]). Soit $g \in G$ régulier. Alors

$$\Theta_G(g) = \sum_{\substack{x \in G/P \\ g.x=x}} \frac{\Theta_M(x^{-1}gx)}{|\det(1-dg_x)|_F}$$

<u>Remarque</u>. La formule donnée par van Dijk ([6, Théor. 3]) est un peu différente ([2]). Pour l'obtenir à partir de la formule de Lefschetz, il suffit d'utiliser les remarques suivantes : (1) Nous avons considéré une induite *non-normalisée*, à la différence de [6]. Il faut donc, pour passer à l'induite "unitaire", remplacer π_M par $\pi_M \otimes \delta_P^{1/2}$, où δ_P est le module de P. (2) Il y a une identité standard liant $|\det(1-\mathrm{ad}g|_{\underline{n}^-})|$, δ_P et le facteur $\frac{|D_M|^{1/2}}{|D_G|^{1/2}}$ de [6]. (3) Les points fixes de g sur G/P peuvent être paramétrés par un groupe de Weyl. Nous ne donnons par les détails.

Si la caractéristique de F est nulle, et si C est le corps C des nombres complexes, Harish-Chandra [8] a montré que le caractère d'une représentation admissible de longueur finie est une fonction localement intégrable. Dans ce cas, la Prop. 3 suffit donc à déterminer le caractère Θ_G (considéré comme distribution sur G tout entier) à partir de Θ_M. En caractéristique finie, les méthodes de cet article devraient permettre de prouver directement que Θ_G est localement intégrable si Θ_M l'est (cf. [11, Prop. 2.2] dans le cas réel, quand π_M est de dimension finie).

Dans le cas réel, si l'on disposait de l'analogue de la Prop. 2, cette méthode permettrait aussi d'obtenir, à l'aide de la formule de Lefschetz, les formules de caractères démontrées par Hiraï [10].

([2]) Pour la formule de van Dijk, il faut supposer que C contient $|\omega_F|^{1/2}$, où ω_F est une uniformisante de F.

6. CARACTÈRES TORDUS.

6.1. Dans ce qui suit, nous supposerons pour simplifier que F *est de caractéristique nulle*. Remarquons toutefois que la Prop. 4 et le Théor. 1 doivent être indépendants de cette hypothèse (cf. [7]).

Soit $G = \underline{G}(F)$, où $\underline{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur F. Soit σ un automorphisme de G d'ordre $\ell > 1$ (on ne suppose pas ℓ premier). On note x^σ l'image de $x \in G$ par σ.

Pour $g \in G$, soit $Ng = gg^\sigma \dots g^{\sigma^{\ell-1}} \in G$. On dit que $g \in G$ est *σ-régulier* si Ng est un élément régulier de G. Soit $G_{\sigma\text{-reg}}$ l'ensemble des éléments σ-réguliers de G.

Soit $P = \underline{P}(F)$ un sous-groupe parabolique de G (globalement) invariant par σ. Soit $X = G/P$; si $g \in G$, soit g^* son image dans X. La Prop. 5 et le Théor. 1 qui suivent imitent des résultats de Harish-Chandra [7], ainsi que leurs démonstrations.

Proposition 4. (i) Soit $\gamma \in G_{\sigma\text{-reg}}$. Alors l'application

$$x \to (x\gamma x^{-\sigma})^*$$

est une submersion $G \to X$.

(ii) L'application $(x,p) \to x\gamma x^{-\sigma}p$ est une submersion $G \times P \to G$.

Démonstration. (cf. [7]). En remplaçant γ par $\gamma' = x\gamma x^{-\sigma}$, on vérifie aisément qu'on peut se placer en x=1 et qu'alors (i) et (ii) sont équivalents à l'assertion :

$$\underline{g} = (\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})^{-\sigma})\underline{g} + \underline{p}$$

où $\underline{g}$, $\underline{p}$ sont les algèbres de Lie sur F de G et P. Ceci se démontre comme dans [7]. Soit $\underline{p} = \underline{m} \oplus \underline{n}$, $\underline{g} = \underline{n}^- \oplus \underline{m} \oplus \underline{n}$ une décomposition triangulaire de $\underline{g}$. Soit B une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée G-invariante sur $\underline{g}$, qu'on peut même supposer σ-invariante. Soit $\underline{c} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}(\gamma)-\sigma^{-1})$. Si $X \in \underline{c}$, on a $\mathrm{Ad}(\gamma)X = \sigma^{-1}X$ d'où $\mathrm{Ad}(\gamma^\sigma\gamma^{\sigma^2}\dots\gamma^{\sigma^{\ell-1}}\gamma)X = X$, soit $\mathrm{Ad}(\gamma^{-1}N g\gamma)X = X$; puisque Ng est semi-simple régulier, on voit que $\underline{c}$ est formé d'éléments semi-simples.

Il est bien connu que l'orthogonal de $\underline{p}$ pour B est $\underline{n}$; l'orthogonal de $(\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})-\sigma)\underline{g}$ est égal au noyau de l'adjoint $(\mathrm{Ad}(\gamma)-\sigma^{-1})$, donc à $\underline{c}$. Puisque $\underline{c} \cap \underline{n} = \{0\}$, on voit que $\underline{g} = (\mathrm{Ad}(\gamma^{-1})-\sigma)\underline{g} + \underline{p}$. □

Comme dans [7, Lemma 1], la Prop. 5 a le Corollaire suivant : puisque l'application $G \times P \to G$ donnée par $(x,p) \to x\gamma x^{-\sigma}p$ est submersive, on obtient par intégration sur les fibres (une fois que des mesures de Haar dg sur G et dp, invariante à gauche sur P, sont fixées) une application $\alpha \to f_{\alpha,\gamma}$ de $C_c^\infty(G \times P)$ dans $C_c^\infty(G)$; cette application est caractérisée par le fait que, si $F \in C_c^\infty(G)$:

$$\int_{G\times P} \alpha(x,p)F(x\gamma x^{-\sigma}p)dx\, dp = \int_G F(x)f_{\alpha,\gamma}(x)dx.$$

<u>Corollaire de la Proposition 4</u>. Soit $\alpha \in C_c^\infty(G \times P)$. Alors l'application $\gamma \to f_{\alpha,\gamma}$ de $G_{\sigma\text{-reg}}$ dans $C_c^\infty(G)$ est localement constante.

<u>Démonstration</u>. (cf. [7, Lemma 1 (démonstration)]). □

Soit maintenant $P = MN$ un parabolique minimal de G, et A la composante déployée de M. Nous supposerons de plus qu'il existe un sous-groupe compact de Bruhat-Tits K de G ([5, §.3.5]) relatif à A tel que $\sigma(K) = K$. Nous ne savons pas si cette hypothèse est toujours vérifiée : elle l'est, par exemple, quand σ est un automorphisme de changement de base pour un groupe de Chevalley.

Soit π une représentation admissible irréductible de G. On dit que π est *σ-stable* si π est équivalente à $\pi \circ \sigma$. Dans ce cas, il existe un opérateur I_σ de l'espace de π dans lui-même tel que $\pi(g)I_\sigma = I_\sigma\pi(g^\sigma)$ pour $g \in G$; le lemme de Schu-permet de supposer que $(I_\sigma)^\ell = 1$ (cf. [13]) après multiplication de I_σ par un scalaire. Dans ce cas, on peut définir une représentation du produit semi-direct $G \times \Sigma$, où $\Sigma = \{1,\sigma,\ldots, \sigma^{\ell-1}\}$, par $\pi(g,\sigma^k) = \pi(g)(I_\sigma)^k$.

Si $f \in C_c^\infty(G)$, $\pi(f)$ est de rang fini. L'application $f \to \mathrm{trace}(\pi(f)I_\sigma)$ définit une distribution sur G. On l'appelle le *caractère tordu* de π associé au choix de I_σ. Cette distribution sera notée $\Theta_{\pi,\sigma}$, le choix de I_σ étant sous-entendu.

Plus généralement, nous pouvons considérer une représentation π, admissible de longueur finie, de G telle que $\pi \cong \pi \circ \sigma$ et que π s'étende à $G \times \Sigma$. Une telle extension étant choisie, son caractère tordu est défini de la même façon.

Si V est l'espace de π, on désigne par $\mathrm{End}^\circ(V)$ l'espace des endomorphismes $u : V \to V$ tels que $x \to \pi(x)u$ et $x \to u\pi(x)$ soient des fonctions lisses de G dans $\mathrm{End}(V)$; on a $\mathrm{End}^\circ(V) = \tilde{V} \otimes V$, où $\tilde{V}$ est le dual admissible de V.

<u>Proposition 5</u>. Soit π une représentation admissible de longueur finie de G, σ-stable, étendue à $G \times \Sigma$. Si $y \in G_{\sigma\text{-reg}}$, soit

$$T_{y,\sigma} = \int_K \pi(k(y,\sigma)k^{-1})dk$$

Alors $T_{y,\sigma} \in \mathrm{End}^\circ(V)$, et $y \to T_{y,\sigma}$ est une application localement constante de $G_{\sigma\text{-reg}}$ dans $\mathrm{End}^\circ(V)$.

L'intégration est par rapport à la mesure normalisée dk sur K.

<u>Démonstration</u>. Il existe une base de voisinages de l'unité dans G formée de sous-groupes ouverts distingués de K globalement stables par σ. Si K_0 est un tel sous-groupe, assez petit, l'espace V de π est engendré sous G par l'espace V_0 des vecteurs fixés par K_0 ; V_0 est stable par K et par σ.

On a la décomposition de Cartan $G = K M^+ K$, où M^+ est l'ensemble des $m \in M$ tels que $\langle\alpha, H_M(m)\rangle \geq 0$ pour toute racine α de N par rapport à A ([7, p.99] ; [5, §.3.5]). Si $m \in M^+$, l'application $p \to m^{-1}pm$ contracte P ; il existe donc un sous-groupe ouvert-compact P_0 de P tel que $m^{-1}P_0 m \subset K_0$ pour $m \in M^+$ ([7]). Soit α la fonction caractéristique de $K \times P_0$. Considérons l'application submersive

$$G \times P \to G \times \sigma \cong G$$

$$(x,p) \to x(y,\sigma)x^{-1}.p$$

où $y \in G_{\sigma\text{-reg}}$ (Prop. 4). Par intégration le long des fibres, α définit une fonction $f_{\alpha,y} = f_y$ sur $G \times \sigma$, identifié à G par $(g,\sigma) \to g$. Par définition,

$$\int_{K \times P_0} F(k(y,\sigma)k^{-1}.p)dk\, dp = \int_G f_y(x)F(x,\sigma)dx$$

pour toute fonction $F \in C_c^\infty(G \times \sigma)$. Appliquant ceci aux coefficients de π, on obtient:

$$\int_{K \times P_0} \pi(k(y,\sigma)k^{-1})\pi(p)dk\, dp = \int_G f_y(x)\pi(x,\sigma)dx.$$

On sait que V est engendré par les vecteurs de la forme $\pi(g)v = \pi(k_1 m k_2)v$, $v \in V_0$, $k_i \in K$, $m \in M^+$; puisque $KV_0 = V_0$, il est donc engendré par $\pi(KM^+)V_0$.

Pour $v \in V_0$, $k \in K$, $m \in M^+$, on a :

$$T_{y,\sigma}\pi(km)v = \int_K \pi(u(y,\sigma)u^{-1})\pi(k)\pi(m)v\, du,$$

donc par changement de variable :

$$T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})T_{y,\sigma}\pi(m)v.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v &= \int_{K\times P_0} \pi(k(y,\sigma)k^{-1})\pi(p)\pi(m)v\, dk\, dp \\ &= \int_K \pi(k(y,\sigma)k^{-1}dk.\int_{P_0} \pi(m)\pi(m^{-1}pm)v\, dp \\ &= T_{y,\sigma}\pi(m)v\end{aligned}$$

puisque $m^{-1}p\, m \in K_0$ pour $p \in P_0$, $m \in M^+$ et $\pi(K_0)v = v$. Les deux identités obtenues donnent :

$$(*)\ T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v.$$

Soit alors V_y l'espace engendré par les K-translatés de $\pi(f_y)V$. Puisque π est admissible, $\dim(V_y) < \infty$. L'identité $(*)$, jointe au fait que les $\pi(km)v$ engendrent V, montre que $T_{y,\sigma}$ applique V dans V_y. Comme de plus $T_{y,\sigma}.k = k^\sigma T_{y,\sigma}$ pour tout $k \in K$, ceci implique en fait que $T_{y,\sigma} \in \mathrm{End}°(V)$. Comme de plus la fonction $f \to f_y$ est localement constante, on peut prendre $V_y = V_{y_0}$ pour y au voisinage de $y_0 \in G_{\sigma\text{-reg}}$. Mais alors on voit que pour un tel y, $T_{y,\sigma}$ reste dans un espace fixe, de dimension finie, de $\mathrm{End}°(V)$; pour tout $v \in V_0$, l'application

$$y \to T_{y,\sigma}\pi(km)v = \pi(k^{-\sigma})\pi(f_y)I_\sigma\pi(m)v$$

est localement constante, donc $y \to T_{y,\sigma}w$ ($w \in V$) est localement constante. Ceci démontre la Prop. 5. □

Comme corollaire immédiat, nous avons :

<u>Théorème 1</u>. Soit σ un automorphisme d'ordre ℓ du groupe réductif G sur F ; on suppose que σ stabilise un sous-groupe de Bruhat-Tits K de G.

Soit π une représentation admissible de longueur finie, σ-stable, de G étendue par I_σ à $G \times \Sigma$.

Alors le caractère tordu $\Theta_{\pi,\sigma}$ de π est localement constant sur $G_{\sigma\text{-reg}}$, et égal à la fonction trace $T_{y,\sigma}$.

<u>Démonstration</u>. Le caractère tordu est évidemment invariant par $g \to xgx^{-\sigma}$ $(x \in G)$; on en déduit facilement que, pour $f \in C_c^\infty(G)$, $\Theta_{\pi,\sigma}(f) = \mathrm{trace}(\int_G f(y)T_{y,\sigma}dy)$.

Si de plus le support de f est dans $G_{\sigma\text{-reg}}$, l'application $y \to f(y)T_{y,\sigma}$ $(y \in \mathrm{Supp}\, f)$ est, d'après la Prop. 5, localement constante à valeurs dans End°(V). On en déduit :

$$\Theta_{\pi,\sigma}(f) = \int_G f(y)\ \mathrm{trace}\ T_{y,\sigma}dy$$

Ceci démontre le théor. 1, ainsi que la valeur du caractère :

$$\Theta_{\pi,\sigma}(y) = \mathrm{trace}\ T_{y,\sigma}. \qquad \square$$

6.2. Le Théorème 1 va maintenant nous permettre d'appliquer la Prop. 2 aux caractères tordus.

Soit donc $G = \underline{G}(F)$, $\underline{G}$ réductif connexe sur F de caractéristique 0. Soit $P = MN$ un parabolique de G stabilisé par σ ; on supposera la décomposition de Levi choisie de façon que $\sigma(M) = M$ ([3]) ; on suppose de plus que σ stabilise des sous-groupes de Bruhat-Tits de G et M.

Soit π_M une représentation admissible de longueur finie σ-stable de M, supposée étendue à $M \times \Sigma$. Elle a donc un caractère tordu $\Theta_{M,\sigma}$. Soit π_G la représentation induite (non normalisée) $\mathrm{ind}_{MN}^G (\pi_M \otimes 1)$.

La représentation π_G est σ-stable. Elle admet une extension canonique à $G \rtimes \Sigma$: si l'on réalise π_G par translation à droite dans l'espace des fonctions $G \xrightarrow[f]{} V_M$ (V_M l'espace de π_M) telles que $f(hg) = \pi_P(h)f(g)$ pour $h \in P$, et si I_σ^M est l'opérateur d'entrelacement tel que $\pi(m)I_\sigma^M = I_\sigma^M(m^\sigma)$ pour $m \in M$, l'opérateur d'entrelacement I_σ^G associe à la fonction f la fonction $g = I_\sigma^G f$ sur G définie par

([3]) C'est possible : voir §.7.

$$g(x) = I_\sigma^M f(x^\sigma) \qquad (x \in G).$$

Nous pouvons voir la représentation π_G étendue à $G \rtimes \Sigma$ comme induite à partir de la représentation π_P étendue à $P \rtimes \Sigma$; comme telle, elle est réalisée par des automorphismes du fibré $\mathcal{V} = G \underset{P}{\times} V_M \cong (G \rtimes \Sigma) \underset{P \rtimes \Sigma}{\times} V_M$ sur $X = G/P$. La variété $G \times \sigma$ agit localement transitivement sur X par $(g,\sigma).x = g.\sigma x$; de plus :

<u>Lemme 3</u>. Si $g \in G_{\sigma\text{-reg}}$, l'action de (g,σ) sur X est transverse à l'identité.

<u>Démonstration</u>. Rappelons que $Ng = gg^\sigma \ldots g^{\sigma^{\ell-1}}$.

Si $x \in X$, on a $(g\sigma)^\ell x = (Ng)x$. En particulier, si x est un point fixe de $g\sigma$, il est fixé par Ng ; de plus, prenant les différentielles, on voit que $d(g\sigma)_x^\ell = d(Ng)_x$ comme endomorphisme de $T_x(X)$. Si $d(g\sigma)_x$ fixe $\xi \neq 0$, on voit donc que $d(Ng)_x$ fixe ξ. Si g est σ-régulier, donc Ng régulier, c'est impossible (cf. §.5). Donc $g\sigma$ est transverse à l'identité. □

Soit $x \in X$ tel que $g\, x = x$. Soit y un représentant de x dans G. On a alors $g\, y\, P = y\, P$, soit $y^{-1}gy^\sigma \in P$. On peut poser $y^{-1}gy^\sigma = mn$, $m \in M$, $n \in N$. On vérifie que m est indépendant, à σ-conjugaison près, du choix de y ($u,v \in G$ sont σ-conjugués si $u = x^{-1}vx^\sigma$ pour un $x \in G$). Par conséquent, $\Theta_{P,\sigma}(y^{-1}gy^\sigma) = \Theta_{M,\sigma}(m)$ est bien défini et ne dépend que de x : on le notera $\Theta_{M,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)$.

Toutes les conditions sont maintenant réunies pour appliquer le corollaire de la proposition 2 : la variété $G \times \sigma$ agit localement transitivement sur X, et $g \times \sigma$ agit de façon transverse à l'identité. A tout point fixe x de (y,σ), la fibre de $\mathcal{V}$ s'identifie à V_M, et le stabilisateur est égal à $yPy^{-\sigma}$ où y représente x ; la fonction généralisée $\mathrm{trace}((p,\sigma)|\mathcal{V}_x)$ s'identifie canoniquement au caractère tordu $\Theta_{p,\sigma}(y^{-1}py^\sigma)$, fonction généralisée sur $yPy^{-\sigma}$. Celui-ci est bien défini en g. On obtient donc :

<u>Proposition 6</u>. Soit g un élément σ-régulier de G. Alors, si $\Theta_{G,\sigma}$ est le caractère tordu associé à $\pi_G = \mathrm{ind}(\pi_M \otimes 1)$ et au choix canonique de I_G^σ, on a :

$$\Theta_{G,\sigma}(g) = \sum_{\substack{x \in X \\ g\sigma x = x}} \frac{\Theta_{M,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)}{|\det(1-d(g\sigma)_x)|_F}$$

6.3. Nous appliquons maintenant les considérations précédentes aux identités de Shintani qui apparaissent dans le changement de base. Nous traitons seulement le cas de GL(n) ; bien que l'application norme ait été définie en toute généralité par Kottwitz ([12]) nous n'avons pu étendre la démonstration suivante au cas général.

Soit donc F un corps local de caractéristique 0, E/F une extension de corps, cyclique de degré ℓ. On note σ un générateur de $\Sigma = \mathrm{Gal}(E/F)$. Soit $G = GL(n)$; σ définit un automorphisme d'ordre ℓ (encore noté σ) de G(E), ayant G(F) comme groupe des points fixes.

Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F contenant E. Le groupe GL(n) jouit des deux propriétés suivantes (cf. [12]) :

i) Deux éléments de G(F) conjugués dans $G(\bar{F})$ le sont dans G(F).

ii) Une classe de congugaison dans $G(\bar{F})$, qui est rationnelle sur F, contient un élément de G(F).

A l'aide des propriétés (i)-(ii), on peut définir une application $\mathcal{N}$, de G(E) dans les classes de conjugaison de G(F), de la façon suivante : si $g \in G(E)$, soit $Ng = gg^{\sigma} \dots g^{\sigma^{\ell-1}}$. On a $(Ng)^{\sigma} = g^{-1}(Ng)g$, donc la classe de conjugaison de Ng est rationnelle sur F. D'après (ii), elle rencontre G(F), en une classe de conjugaison unique d'après (i). Cette classe de conjugaison est notée $\mathcal{N}g$.

Les conditions du théorème 1 sont vérifiées par G(E) muni de l'automorphisme σ- prendre $K = G(\mathcal{O}_E)$! - donc les caractères tordus des représentations σ-stables de G(E) sont lisses sur $G(E)_{\sigma\text{-reg}}$ ([4]). Soit π une représentation irréductible admissible de G(F). On dit que la représentation σ-stable Π de G(E) (ou plutôt le couple (Π, I_σ), où I_σ entrelace Π et $\Pi \circ \sigma$ et $I_\sigma^\ell = 1$) *relève* π si l'on a l'identité de Shintani :

$$\mathrm{trace}\ \Pi(g)I_\sigma = \mathrm{trace}\ \pi(\mathcal{N}g)$$

pour tout g σ-régulier dans G(E). (On a utilisé, par abus de notation, l'expression trace $\pi(g)$ pour la valeur du caractère π en g, et de même dans le cas tordu). Cette définition s'étend immédiatement au cas où π, Π ne sont pas nécessairement irréductibles.

Dans la démonstration des identités de Shintani, il y a essentiellement deux étapes ; l'une, fondamentalement arithmétique, consiste à relever des π appartenant à la série discrète de G(F). L'autre, de nature géométrique, consiste à vérifier que

([4]) Il est très vraisemblable que les caractères tordus sont en fait donnés par des fonctions localement intégrables (cf. [13] pour GL(2)).

le changement de base commute à l'induction. Cette deuxième étape relève de la formule de Lefschetz.

Soit donc $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Soit π_M une représentation (admissible de longueur finie) de M(F), $(\Pi_M, I_\sigma^M : (I_\sigma^M)^\ell = 1)$ une représentation (admissible de longueur finie) σ-stable de M(E), munie d'un opérateur d'entrelacement involutif. Par induction, on définit, comme dans les §.5 et 6.2, une représentation π_G de G(F) et une représentation σ-stable Π_G de G(E) munie d'un opérateur d'entrelacement canonique I_σ^G, défini par I_σ^M.

<u>Théorème 2</u>. Supposons que (Π_M, I_σ^M) relève π_M. Alors (Π_G, I_σ^G) relève π_G.

<u>Démonstration</u>. Soit $g \in G(E)$. Si $Ng = g.g^\sigma \ldots g^{\sigma^{\ell-1}}$, on a vu qu'on pouvait écrire $Ng = x(\mathcal{N}g)x^{-1}$, avec $x \in G(\bar{F})$ et $g \in G(F)$. Donc les éléments Ng et $\mathcal{N}g$ de G(E) sont conjugués dans $G(\bar{F})$; appliquant derechef la remarque (i) ci-dessus, on a donc $Ng = y(\mathcal{N}g)y^{-1}$ pour un $y \in G(E)$. Si $h = ygy^{-\sigma}$, on a donc $Nh = \mathcal{N}g$. Autrement dit, modulo σ-conjugaison, on peut supposer que $Ng \in G(F)$; la norme "concrète" Ng est alors un représentant de la classe $\mathcal{N}g$. Puisque l'assertion du Théorème 2 est inchangée lorsqu'on remplace g par un σ-conjugué, on supposera donc que $Ng \in G(F)$.

Notons Θ_π^M le caractère de π_M et $\Theta_{\Pi,\sigma}^M$ le caractère tordu de Π_M associé à I_σ^M. D'après la Prop. 3 et la Prop. 6, si l'on indexe par G les objets analogues pour G, on a, si $g \in G_{\sigma\text{-reg}}$ est tel que $Ng \in G(F)_{reg}$:

$$\Theta_\pi^G(Ng) = \sum_{\substack{Ng.x=x \\ x\in X(F)}} \frac{\Theta_\pi^M(x^{-1}Ng\ x)}{|\det(1-d(Ng))_{T_xX(F)}|_F}$$

$$\Theta_{\Pi,\sigma}^G(g) = \sum_{\substack{g\sigma x=x \\ x\in X(E)}} \frac{\Theta_{\Pi,\sigma}^M(x^{-1}gx^\sigma)}{|\det(1-d(g\sigma))_{T_xX(E)}|_F}$$

On a noté X la variété algébrique G/P. Les expressions $\Theta_\pi(x^{-1}Ng\ x)$, $\Theta_{\Pi,\sigma}(x^{-1}gx^\sigma)$ sont définies comme avant la Prop. 3 et la Prop. 6. Remarquer que l'automorphisme $d(g\sigma)$ de l'espace $T_xX(E)$ est F-linéaire, mais non E-linéaire ; son déterminant est donc pris comme automorphisme de $T_xX(E)$ considéré comme F-espace vectoriel par restriction des scalaires.

Il s'agit tout d'abord de vérifier que les sommations portent sur les mêmes ensembles. Dans GL(n), le centralisateur d'un élément régulier est un tore. Remarquons que, puisque $Ng \in G(F)$, on a

$$g\,Ng = g(Ng)^{\sigma} = gg^{\sigma} \ldots g^{\sigma^{\ell-1}} g = (Ng)g.$$

Autrement dit, $g \in T(E)$ où T, le centralisateur de Ng, est un tore défini sur F. Supposons alors que Ng fixe $x \in X(F)$. Ceci veut dire que $Ng \in P_x$, où P_x est un parabolique (conjugué à P) défini sur F. Il est facile alors de voir que tout $h \in G(E)$ qui centralise Ng appartient à $P_x(E)$; en fait, si h commute à l'élément régulier Ng, il appartient à tout sous-groupe de Levi de P_x contenant Ng, et Ng étant semi-simple peut être inclus dans un sous-groupe de Levi. Donc, si h commute à Ng, h fixe x.

<u>Lemme 4</u>. On a

$$\{x \in X(F) : Ng\, x = x\} = \{x \in X(E) : g\sigma x = x\}$$

<u>Démonstration</u>. Supposons que $\sigma x = x$ $(x \in X(F))$ et $Ng\, x = x$. D'après ce qui précède, puisque g commute à Ng, on a $gx = x$, d'où $g\sigma x = x$.

Réciproquement, soit $x \in X(E)$ tel que $g\sigma x = x$. En appliquant $(g\sigma)^{\ell}$, on trouve $(Ng)x = x$. Puisque g commute à Ng, on a $gx = x$, d'où $\sigma x = x$. □

Il suffit donc de comparer les deux expressions pour Θ_{π}^{G} et $\Theta_{\pi,\sigma}^{G}$ terme à terme. Pour x fixé, les deux numérateurs sont égaux puisque (Π_M, I_{σ}^{M}) relève π_M.

<u>Lemme 5</u>. Si $Ng \in G(F)_{reg}$ fixe $x \in X(F)$,

$$|\det(1-d(g\sigma)|_{T_xX(E)})|_F = |\det(1-d(Ng)|_{T_xX(F)})|_F$$

<u>Démonstration</u>. Soit $V = T_xX$: c'est un espace vectoriel défini sur F. Posant $h = (dg)_x \in GL(V,E)$, d'où $Nh = hh^{\sigma} \ldots h^{\sigma^{\ell-1}} = d(Ng)_x \in GL(V,F)$, on voit que le Lemme se réduit à la propriété suivante :

Soit V *un espace vectoriel défini sur* F, $h \in GL(V,E)$ *tel que* $Nh \in GL(V,F)$. *Alors*

$$|\det_{\mathrm{Res}_{E/F}V(E)}(1-h \circ \sigma)|_F = |\det_{V(F)}(1-Nh)|_F .$$

Nous allons montrer qu'il y a en fait égalité sans prendre les valeurs absolues. Tout d'abord, le membre de droite est égal à $\det_{V(E)}(1-Nh)$. (Le déterminant ne change pas par extension des scalaires) et est alors défini pour tout $h \in GL(V,E)$. (Il appartient à F puisque Nh est une classe rationnelle). Il s'agit donc de montrer :

$$\det{}_{\mathrm{Res}_{E/F}V(E)}(1-h\circ\sigma) = \det{}_{V(E)}(1-Nh)$$

pour $h \in GL(V,E)$. Les deux membres sont des fonctions algébriques sur $GL(V,E)$ considéré par restriction des scalaires comme F-groupe. Il suffit donc de les évaluer sur un ensemble Zariski-dense. De plus, ils sont tous deux invariants par σ-conjugaison. En considérant la différentielle de l'application $(x,g) \to xgx^{-\sigma}$ de $G(E) \times G(F)$ dans $G(E)$, on vérifie facilement que l'ensemble des éléments σ-conjugués à $GL(V,F)$ est Zariski-dense. Le même type d'argument permet de se restreindre aux éléments σ-conjugués au tore déployé de $GL(V,F)$.

Supposons un instant que V soit de dimension 1. Soit $h \in GL(V,F) \cong F^{\times}$. L'automorphisme σ de $\mathrm{Res}_{E/F}E \cong F^{\ell}$ satisfait $\sigma^{\ell} = 1$; c'est son équation caractéristique puisque $1,\sigma,\ldots\sigma^{\ell-1}$ sont indépendants. Sur une clôture algébrique de $\bar{F}$, $1-h\sigma$ se diagonalise donc sous la forme :

$$1-h\sigma = \begin{pmatrix} 1-h & & & \\ & 1-h\varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-h\varepsilon^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

où ε est une racine primitive ℓ-ième de l'unité. On a donc

$$\det{}_{\mathrm{Res}_{E/F}E}(1-h\sigma) = 1-h^{\ell} = \det{}_F(1-h^{\ell}).$$

En général, si h appartient à un tore déployé de $GL(V,F)$, on peut décomposer V en somme de droites et appliquer le même argument. Ceci démontre le lemme 5. □

Avec cela, on a identifié tous les termes qui apparaissent dans l'expression du caractère et du caractère tordu : le Théorème 2 est démontré. □

Terminons en indiquant que, dans le cas réel (pour l'extension $E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$), l'analogue du Théorème 2 a été démontré, pour tout G, par J. Repka [14]. Par ailleurs, le Théorème 2 est formulé pour des induites *non-normalisées*. Si K = E ou F, et si $\pi_G = \mathrm{ind}(\pi_M)$ est une induite non normalisée, l'induite *normalisée* $\pi'_G = \mathrm{Ind}(\pi_M)$ est égale à $\mathrm{ind}(\pi_M\, \delta_{P,K}^{1/2})$, où $\delta_{P,K}$ est le module du parabolique $P(K)$. Il est facile de vérifier que $\delta_{P,E}(m) = \delta_{P,F}(Nm)$. On en déduit immédiatement que, si $\mathbb{C}$ est le corps des complexes, le Théorème 2 s'étend sans changement pour les induites normalisées. C'est la forme sous laquelle on l'utilisera en général.

7. AUTOMORPHISMES DE G ET COMPOSANTES DE LÉVI.

On a rejeté dans ce paragraphe la démonstration du résultat suivant, utilisé dans le §.6.2. Soit F un corps de caractéristique nulle.

Proposition 7. Soit $\underline{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F, σ un F-automorphisme d'ordre fini ℓ de $\underline{G}$, et $\underline{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ (globalement) stable par σ. Il existe alors un sous-groupe de Levi $\underline{M}$ de $\underline{P}$, défini sur F et (globalement) stable par σ.

Démonstration. Il est bien connu (Borel-Tits, IHES Publ. Math. 27) que les F-sous-groupes de Levi de $\underline{P}$ sont conjugués par $N = \underline{N}(F)$. On a donc, si $\underline{M}$ est un sous-groupe de Levi quelconque, défini sur F, de $\underline{P}$: $\sigma(M) = \mathrm{Ad}(n)\,\underline{M}$ pour un $n \in N$. Soit $u = n^{\sigma^{\ell-1}} n^{\sigma^{\ell-2}} \ldots n^{\sigma} n \in N$. On en déduit que $\mathrm{Ad}(u)\underline{M} = \underline{M}$. Par conséquent, $u \in N_G(M)$. Si $\underline{H}$ est le normalisateur de $\underline{M}$ dans $\underline{G}$, il est bien connu que la composante neutre (pour la topologie de Zariski) de $\underline{H}$ est égale à $\underline{M}$. Par ailleurs, si $u \in N$ normalise M, c'est encore vrai pour u^x si $x \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ est dense (pour la topologie de Zariski) dans le groupe à un paramètre, additif, $\underline{U}$ engendré par u on voit que $\underline{U} \subset \underline{H}$; puisque $\underline{U}$ est connexe, $\underline{U} \subset \underline{M}$; on en déduit, $\underline{U}$ étant un sous-groupe de $\underline{N}$, que $\underline{U} = \{1\}$.

On a donc montré que $\sigma(\underline{M}) = \mathrm{Ad}(n)\underline{M}$ pour un $n \in N$ tel que $n^{\sigma^{\ell-1}} n^{\sigma^{\ell-2}} \ldots n^{\sigma} n = 1$. Soit $\Gamma = \{1, \sigma, \ldots \sigma^{\ell-1}\}$ le groupe fini d'endomorphismes de N engendré par σ. Le groupe de cohomologie non-abélienne $H^1(\Gamma, N)$ (cf. Serre, *Corps locaux,* Annexe au Chap. VII) est représenté par les cocycles $\gamma \to Z_\gamma \in N$ ($\gamma \in \Gamma$) tels que $Z_{\gamma\gamma'} = Z_\gamma . (Z_{\gamma'})^{\gamma}$. Soit $x = n^{-1}$: le cocycle $Z_{\sigma^k} = x x^{\sigma} \ldots x^{\sigma^{k-1}}$ ($k \geq 0$) ne dépend que de k modulo ℓ, et définit un élément de $H^1(\Gamma, N)$. On va montrer (rappelons que $H^1(\Gamma, N)$ est muni d'un élément distingué, qu'on notera 0).

Lemme 6. On a

$$H^1(\Gamma, N) = \{0\}.$$

On en déduit que $Z_\gamma = y^{-1}y^\gamma$ pour un $y \in N$. En particulier, $n = y^{-\sigma}y$. Puisque $\sigma(\underline{M}) = \mathrm{Ad}(n)\underline{M}$, on voit que $\mathrm{Ad}(y)\underline{M}$ est σ-stable, d'où la Proposition 7. □

Démonstration du lemme 6. Soit $Z = \underline{Z}(F)$ le centre de N, $\underline{N}' = \underline{N}/_{\underline{Z}}$ le groupe algébrique quotient, $N' = \underline{N}'(F)$. Puisque la cohomologie *galoisienne* de Z est triviale, on a la suite exacte des points à valeurs dans F :

$$1 \to Z \to N \to N' \to 1.$$

Le groupe Γ agit par F-automorphismes sur $\underline{N}'$, et on peut supposer par récurrence le lemme 6 vrai pour N' ; comme Z est un groupe additif, donc divisible, on a aussi $H^1(\Gamma,Z) = 0$. La suite exacte en cohomologie non-abélienne (Serre, loc.cit., Proposition 2) donne alors

$$H^1(\Gamma,Z) \to H^1(\Gamma,N) \to H^1(\Gamma,N')$$

d'où $H^1(\Gamma,N) = \{0\}$. □

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.F. Atiyah, R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes, I, Ann. of Math. 86, 1967, 374-407.

[2] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, Representations of the group GL(n,F) where F is a non-archimedian local field, Russian Math. Surveys 31 (3), 1976, 1-68.

[3] I.N. Bernstein, A.V. Zelevinskii, Induced representations of reductive p-adic groups I, Ann. Sc. E.N.S., 4e série, 10, 1977, 441-472.

[4] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of $\mathfrak{p}$-adic reductive groups, preprint.

[5] P. Cartier, Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1979, part I, 111-155.

[6] G. van Dijk, Computation of Certain Induced Characters of $\mathfrak{p}$-adic Groups, Math. Ann. 199, 1972, 229-240.

[7] Harish-Chandra, A submersion principle and its applications, Proc. Indian Acad. Sc. (Math. Sci.) 90 (2), April 1981, 95-102.

[8] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, Queen's papers in pure and applied mathematics 48, 1978, 281-347.

[9] D. Heifetz, p-Adic Oscillatory Integrals and Wave Front Sets, thèse, Columbia University, 1982.

[10] T. Hirai, The Characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 8 (3), 1968, 313-363.

[11] V. Guillemin, S. Sternberg, Geometric Asymptotics, Math. Surveys 14, AMS, Providence 1977.

[12] R.E. Kottwitz, Rational Conjugary classes in Reductive groups, Duke Math. J. 49 (4), 1982, 785-806.

[13] R.P. Langlands, Base Change for GL(2), Annals of Math. Study 96, 1980.

[14] J. Repka, Base Change and Induced Representations of Real Reductive groups, preprint.

[15] F. Rodier, Décomposition spectrale des représentations lisses, in Springer Lecture Notes 587, 1977.

[16] N. Wallach, Harmonic Analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, 1973.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL DUFLO
GERRIT HECKMAN
MICHELE VERGNE

Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 65-128
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__65_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 65-128

PROJECTION D'ORBITES, FORMULE DE KIRILLOV ET FORMULE DE BLATTNER

Michel DUFLO, *Gerrit* HECKMAN *et Michèle* VERGNE

Michel DUFLO,
UER de Mathématiques,
2, place Jussieu, PARIS VII
75251 PARIS Cédex 05, FRANCE

Gerrit HECKMAN (*)
Department of Mathematics
University of Leiden
Wassernaarseweg 80, Postbus 9512
2300 RA Leiden
The Netherlands

Michèle VERGNE
Department of Mathematics
MIT Cambridge
MA 02139 U.S.A.

(*) Partially supported by NSF Grant MCS - 8203769.

M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE

RÉSUMÉ

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe, K l'image réciproque d'un sous-groupe compact maximal de AdG. Soit Ω une orbite de G dans le dual $\underline{g}^*$ de son algèbre de Lie $\underline{g}$, munie de sa mesure de Liouville β_Ω. L'image directe de β_Ω sur $\underline{k}^*$ par la projection orthogonale est une mesure tempérée sur $\underline{k}^*$. Nous la calculons lorsque Ω est régulière et elliptique. Supposons de plus Ω admissible et soit T_Ω la représentation unitaire irréductible de G associée par Harish-Chandra. Nous démontrons une formule, dans le style de celle de Kirillov, permettant de calculer le caractère de T_Ω en fonction de transformées de Fourier d'orbites, dans G tout entier. Comme application, nous donnons une nouvelle démonstration de la formule de Blattner décrivant la restriction de T_Ω à K.

SUMMARY

Let G be a connected semi-simple Lie group and let K be the inverse image of a maximal compact subgroup of AdG. Let Ω be an orbit of G in the dual $\underline{g}^*$ on the Lie algebra $\underline{g}$ of G. Let β_Ω be its Liouville measure. The push-forward of β_Ω by the orthogonal projection on $\underline{k}^*$ is a tempered measure on $\underline{k}^*$. We compute this measure when Ω is regular and elliptic. Suppose moreover that Ω is admissible, and let T_Ω be the unitary irreducible representation of G associated to Ω by Harish-Chandra. We prove a Kirillov type formula which gives the character of T in term of Fourier transform of orbits, everywhere in G. As an application, we give a new proof of Blattner's formula, which describes the restriction of T_Ω to K.

TABLE DES MATIÈRES

PROJECTION D'ORBITES

A la mémoire d'Harish-Chandra

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soient $\underline{g}$ son algèbre de Lie et $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ une décomposition de Cartan de $\underline{g}$. Nous supposons que $\underline{g}$ et $\underline{k}$ ont le même rang. Dans le dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ nous choisissons une orbite Ω de G, régulière et elliptique. Comme il est bien connu, c'est une variété symplectique (cf. [Ki]), et sa mesure de Liouville β_Ω, considérée comme mesure sur $\underline{g}^*$, est tempérée.

Dans le premier chapitre de cet article, nous étudions la mesure $J_*(\beta_\Omega)$ sur $\underline{k}^*$, image directe de la mesure β_Ω par la restriction J de la projection de $\underline{g}^*$ sur $\underline{k}^*$ parallèlement à $\underline{p}^*$. Soit K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$. L'action de K sur Ω est hamiltonienne, et l'application J est précisément l'application moment correspondante. La description de $J_*(\beta_\Omega)$ nécessite quelques notations.

Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$.

Soient $\Delta \subset i\underline{t}^*$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_c \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_n \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$.

On note W le groupe de Weyl de Δ_c. On identifie $\underline{t}^*$ à l'orthogonal de $[\underline{t},\underline{g}]$ dans $\underline{g}^*$. Alors $\Omega \cap \underline{t}^*$ est une orbite de W. Notons λ un point de cette orbite. Nous notons Δ^+ le système de racines positives pour lequel $\Lambda = i\lambda$ est dominant.

Si $\xi \in \underline{t}^*$ est un élément non nul, nous notons H_ξ la mesure d'Heaviside sur $\underline{t}^*$:

$$(1) \qquad H_\xi(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t\xi)dt.$$

Nous posons, si $\Delta^+ \cap \Delta_n = \{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$,

$$(2) \qquad Y^+ = H_{-i\alpha_1} * \dots * H_{-i\alpha_p}$$

(Y^+ est une mesure tempérée, homogène, localement polynômiale, ne dépendant que de la chambre déterminée par Λ),

$$(3) \qquad B_\lambda = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\ w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)$$

(B_λ est une mesure W-anti-invariante sur $\underline{t}^*$).

Pour tout élément $\xi \in \underline{t}^*$, régulier dans $\underline{k}^*$, nous posons

$s_+(\xi) = \varepsilon(\sigma)$, où $\sigma \in W$ est l'élément tel que $i\sigma\xi$ soit Δ_c^+-dominant.

De plus, si φ est une fonction C^∞ sur $\underline{k}^*$, nous posons

(4) $$A^+(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\# W}\, s_+(\xi) \int_{K\xi} \varphi(f)\,d\beta_{K\xi}(f)$$

où $\beta_{K\xi}$ est la mesure de Liouville sur l'orbite $K\xi$ de ξ dans $\underline{k}^*$.

En fait, $A^+(\varphi)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\underline{t}^*$, W-anti-invariante, et A^+ ne dépend que de la chambre déterminée par Λ.

Le résultat principal du chapitre I est le suivant, qui calcule $J_*(\beta_\Omega)$.

<u>THÉORÈME A</u>.- Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\underline{k}^*)$. On a

(5) $$\int_\Omega \varphi(Jf)\,d\beta_\Omega(f) = \int_{\underline{t}^*} A^+(\varphi)(\xi)\,dB_\lambda(\xi).$$

Du théorème A, on déduit facilement une formule pour la transformée de Fourier (sur $\underline{k}$) de $J_*(\beta_\Omega)$, qui n'est autre que la restriction à $\underline{k}$ de la transformée de Fourier $\hat{\beta}_\Omega$ (sur $\underline{g}$) de β_Ω (*). Comme corollaire, on obtient une nouvelle démonstration de la formule de Rossmann [R] qui calcule la restriction de $\hat{\beta}_\Omega$ à l'ouvert $\underline{k} \cap \underline{g}'$ de $\underline{k}$ formé des éléments de $\underline{k}$ réguliers dans $\underline{g}$. Rappelons quelle est cette formule. Dans $\underline{g}'$, $\hat{\beta}_\Omega$ est une fonction C^∞ G-invariante. Pour la calculer dans $\underline{g}' \cap \underline{k}$, il suffit donc de la calculer sur $\underline{t} \cap \underline{g}'$.

Si $X \in \underline{t} \cap \underline{g}'$, on a

(6) $$\hat{\beta}_\Omega(X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}}\ \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\Lambda(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(X)}$$

Outre celle de Rossmann [R], on trouvera des démonstrations de la formule

---

(*) La transformée de Fourier de β_Ω est la fonction généralisée sur $\underline{g}$ définie par la formule

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = \int_{\underline{g}^*} e^{if(X)}\,d\beta_\Omega(f)$$

Les notions de fonction généralisée et de restriction de fonctions généralisées à des sous-variétés sont rappelées dans l'appendice.

(6) dans [Ve], [B.Vo][Be-Ve.1] .

Le <u>deuxième chapitre</u> est indépendant du premier (à l'utilisation près de la formule de Rossmann). On suppose que l'orbite Ω est admissible, et on note θ la fonction généralisée sur G associée par Harish-Chandra à Ω [H-C.3] . C'est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de G, de carré intégrable modulo le centre de G [H-C. 4], mais nous n'aurons pas à nous servir de ce fait.

Si $X \in \underline{g}$, on pose

$$(8) \qquad j_{\underline{g}}(X) = \det\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\operatorname{ad} X} - e^{-\frac{1}{2}\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\right) .$$

La formule de Kirillov, dans le cas considéré ici, est l'identité suivante entre fonctions généralisées dans un voisinage de 0 dans $\underline{g}$:

$$(9) \qquad j_{\underline{g}}^{\frac{1}{2}}(X)\,\theta(e^X) = \hat{\beta}_\Omega(X) .$$

Elle résulte de la définition de θ et de la formule de Rossmann (6). Le défaut principal de (9) est de ne donner de renseignements sur θ que dans un voisinage de 1 dans G. Pour y remédier, Harish-Chandra a introduit la méthode de descente. Soit s un élément de K. On pose $\underline{z} = \ker(1-\operatorname{ads})$, $\underline{q} = \operatorname{Im}(1-\operatorname{ads})$. Dans un voisinage de 0 dans $\underline{z}$, on peut définir une fonction généralisée par la formule :

$$(10) \qquad \tilde{\theta}_s(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}} \mid \det(1-\operatorname{ad}(se^X)) \mid \underline{q}|^{\frac{1}{2}} |\det(1-\operatorname{ads})|\underline{q}|^{-\frac{1}{2}}\,\theta(se^X) .$$

Soit Z le centralisateur de s dans G. Par construction (voir [H-C.3]) $\tilde{\theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Nous calculons cette combinaison linéaire.

Posons $\Omega_s = \Omega \cap \underline{z}^*$: c'est l'ensemble des points fixes de s dans Ω, et c'est une sous-variété symplectique de Ω, réunion d'un nombre fini d'orbites de Z^o. Sur Ω_s, nous définissons une fonction φ_s, localement constante. Le résultat principal du second chapitre généralise la formule (9) :

<u>THÉORÈME B</u>.- Dans un voisinage de 0 dans $\underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées

$$(11) \qquad \tilde{\theta}_s(X) = \int_{\Omega_s} \varphi_s(f) e^{if(X)} d\beta_{\Omega_s}(f) .$$

Nous pensons que la formule (11) est "universelle" au même titre que la formule de Kirillov (9) : elle devrait se généraliser à toutes les représentations unitaires irréductibles suffisamment génériques de tous les groupes de Lie.

Dans le troisième chapitre, nous calculons la restriction de θ à K. Le résultat est donné par une formule conjecturée de Blattner, démontrée pour la première fois par Hecht et Schmid [He-S.1] Une autre démonstration est due à Enright [E]. Contrairement aux deux démonstrations citées ci-dessus, la nôtre n'utilise pas le fait que θ est le caractère d'une représentation, et, a fortiori, pas non plus de réalisation de la représentation en question (*).

Résumons brièvement notre démonstration : au voisinage de 1 dans G, la formule (9) montre que l'on peut remplacer le calcul de la restriction de θ à K par celui de $\widehat{\beta_\Omega}$ à $\underline{k}$. On utilise alors le théorème A. Le théorème B permet de procéder de même au voisinage de chaque point s de K.

(*) Notons qu'inversement la connaissance de la formule de Blattner facilite notablement la démonstration des théorèmes de réalisation.

I.- APPLICATION MOMENT ET PROJECTION DE MESURES DE LIOUVILLE

I.1.- APPLICATION MOMENT D'UN GROUPE COMPACT K

Soit Ω une variété C^∞. Soit $\mathfrak{A}(\Omega)$ l'algèbre des formes différentielles sur Ω. Si ξ est un champ de vecteurs sur Ω, on note $c(\xi)$ la contraction par ξ et d la différentielle extérieure. Les opérations d et $c(\xi)$ sont des antidérivations de $\mathfrak{A}(\Omega)$. Si $\mathcal{L}(\xi)$ est la dérivation de Lie, on a :

(1) $\qquad \mathcal{L}(\xi) = d \circ c(\xi) + c(\xi) \circ d \quad .$

Soit K un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\underline{k}$ agissant sur Ω. Si $X \in \underline{k}$, on note X_Ω le champ de vecteurs sur Ω défini par

$$(X_\Omega \cdot \varphi)(f) = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi(\exp - \varepsilon X . f)_{|\varepsilon = o} \quad .$$

Si $\underline{r}$ est un sous-espace de $\underline{k}$, on note $(\underline{r}_\Omega)_f$ (ou simplement $\underline{r}_\Omega$) le sous-espace de $T_f(\Omega)$ engendré par les X_Ω pour $X \in \underline{r}$.

Soit Ω une variété symplectique de dimension 2n. Notons σ_Ω (ou simplement σ) la 2-forme symplectique de Ω. Supposons que l'action de K sur Ω soit hamiltonienne. On choisit une structure hamiltonienne, et on note $J_{\underline{k}}$ (ou simplement J) l'application moment correspondante. Par définition J est une application de Ω dans $\underline{k}^*$, commute à l'action de K, et vérifie

(2) $\qquad$ Si $J_X(f) = (J(f), X)$ $\quad$ pour $X \in \underline{k}$,

$$dJ_X = c(X_\Omega) . \sigma \ .$$

Remarquons que si $f \in \Omega$ et si $J(f) = \mu$

$$\sigma_f(X_\Omega, Y_\Omega) = dJ_X(Y_\Omega) = \frac{d}{d\varepsilon}(J(\exp - \varepsilon Y . f), X)_{|\varepsilon = o}$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}(\exp - \varepsilon Y . \mu, X)_{|\varepsilon = o}$$

donc

(3) $\qquad \sigma_f(X_\Omega,Y_\Omega) = -(\mu,[X,Y])$

La forme $\dfrac{\sigma^n}{(2\pi)^n n!}$ est de degré maximal et partout non nulle. Elle détermine donc une orientation et la mesure de Liouville β_Ω sur Ω. (On note parfois β_Ω simplement β). La mesure $J_*(\beta_\Omega)$ image directe est définie par :

(4) $\qquad \displaystyle\int_{\underline{k}^*} \varphi\, dJ_*(\beta_\Omega) = \int_\Omega (\varphi \circ J)\, d\beta_\Omega$

pour toute fonction φ borélienne positive sur $\underline{k}^*$. Si J est propre, c'est une mesure de Radon.

Si, de plus, J est une submersion au-dessus d'un ouvert U de $\underline{k}^*$, alors sur U, $J_*(\beta)$ est une densité C^∞ $f(\xi)d\xi$. On calcule $f(\xi)$ de la façon suivante. Soit $\xi \in U$ et $\Omega_\xi = J^{-1}(\xi)$. En un point y de Ω_ξ, l'application dJ induit un isomorphisme entre $T_y(\Omega)/T_y(\Omega_\xi)$ et $\underline{k}^*$. Soit μ_ξ la densité sur Ω_ξ telle que $d\beta/\mu_\xi = d\xi$. Alors $f(\xi) = \displaystyle\int_{\Omega_\xi} \mu_\xi$.

Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$. Soit $T \subset K$ le groupe de Cartan correspondant, N(T) le normalisateur de $\underline{t}$ dans K, $W = N(T)/T$ le groupe de Weyl. On écrit :

$$\underline{k} = \underline{t} \oplus \underline{r}$$

$$\underline{k}^* = \underline{t}^* \oplus \underline{r}^*$$

où $\underline{r}$ est le supplémentaire T-invariant de $\underline{t}$. La dimension de $\underline{r}$ est paire. On la note 2r. Si $\mu \in \underline{t}^*$, on note $K_\mu^{\underline{r}}$ (ou simplement K_μ) la 2.forme $(X,Y) \longmapsto (\mu,[X,Y])$ sur $\underline{r}$. On note $\underline{t}^*_r$ l'ensemble des éléments réguliers de $\underline{t}^*$ pour l'action de W. Si $\mu \in \underline{t}^*_r$, la forme K_μ est non dégénérée. Soit η une forme différentielle de degré maximum sur $\underline{r}$ non nulle. On définit alors la fonction polynômiale $\pi(\mu)$ sur $\underline{t}^*$ par la formule

(5) $\qquad K_\mu^r = \pi(\mu) r!\, \eta$.

La fonction π est une fonction polynômiale W anti-invariante sur $\underline{t}^*$, dépendant de η.

Soit Ω un espace K-Hamiltonien. On définit $M = J_{\underline{k}}^{-1}(\underline{t}^*_r)$. Il est clair que l'ensemble M (qui peut-être est vide) est stable sous N(T).

(6) LEMME [G-St.2] .

a) M est une sous-variété de Ω d'espace tangent au point m donné par
$T_m(M) = \{v \in T_m(\Omega)\ ;\ dJ(v) \in \underline{t}^*\}$.

b) Soit σ_M la restriction de σ_Ω à M. Si $m \in M$ et si $J(m) = \nu$, l'espace vectoriel symplectique $(T_m(\Omega),\sigma_\Omega)$ est isomorphe à la somme directe orthogonale des espaces symplectiques $(\underline{r},-K_\mu)$ et $(T_m(M),\sigma_M)$ par l'application $(X,v) \longmapsto X_\Omega + v$.

DÉMONSTRATION.- Soit $\underline{k}^* = \underline{t}^* \oplus \underline{r}^*$. Ecrivons $J = (J_1,J_2)$ suivant cette décomposition. Au voisinage d'un point m de M, M est l'intersection de Ω avec $J_2^{-1}(0)$. Or, en tout point m de M, la différentielle de l'application J_2 est surjective. En effet si $\mu = J(m)$ et si $X \in \underline{r}$, $dJ_2(X_\Omega) = X\,.\,\mu$. Puisque $\mu \in \underline{t}^*_r$, l'application de $\underline{r}$ dans $\underline{r}^*$ donnée par $X \longmapsto X\,.\,\mu$ est bijective. Ceci montre que M est une sous-variété de Ω, que son espace tangent est donné par (a), et qu'on a une décomposition en somme directe $T_m(\Omega) = \underline{r}_\Omega \oplus T_m(M)$. Si $X \in \underline{r}$ et si $v \in T_m(M)$, on a

$$\sigma(X_M,v) = (dJ(v),X) = 0.$$

Enfin, comme pour $X,Y \in \underline{r}$, $\sigma(X_\Omega,Y_\Omega) = -(\mu,[X,Y])$, on a prouvé (b).

Le lemme (6) montre en particulier que M est une sous-variété symplectique de Ω et que la restriction $J_{\underline{t}}$ de J à M est l'application moment pour l'action de T. On la notera encore J, s'il n'y a pas de confusion. Elle est $N(T)$-équivariante.

On note $\underline{k}^*_r$ l'ensemble des éléments réguliers de $\underline{k}^*$. Le complémentaire de $\underline{k}^*_r$ est une sous-variété algébrique fermée de $\underline{k}^*$. On note $\Omega_r = \Omega \cap J^{-1}(\underline{k}^*_r)$. C'est un ouvert (peut-être vide) de Ω. Il est clair que $K\,.\,M = \Omega_r$.

(7) Choisissons une mesure de Lebesgue dK sur $\underline{k}$, une mesure de Lebesgue dT sur $\underline{t}$. Lorsqu'une mesure de Lebesgue a été choisie sur l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, nous employons sur le groupe la mesure de Haar invariante à gauche telle que $d(\exp X)/dX$ vaut 1 pour $X = 0$. Nous notons $\mathrm{vol}(T) = \int_T dt$. Nous choisissons une forme différentielle de degré maximum η sur $\underline{r}$ telle que $dK = dT\,|\eta|$. On a alors la formule d'intégration suivante :

$$(8) \qquad \int_{\Omega_r} \varphi\, d\beta_\Omega = \frac{1}{\#W(\mathrm{vol}\,T)}\,\frac{1}{(2\pi)^r}\int_{K\times M} \varphi\,(k\,.\,m)\;|\pi(J(m))|\;dk\;d\beta_M(m) \quad .$$

(Remarquons que la mesure $\frac{1}{\mathrm{vol}\,T}\,|\pi(J(m))|\,dk\,dm$ ne dépend pas des choix faits).

Démontrons (8). L'application $p : K \times M \to \Omega_r$ est une submersion. La fibre de p est une orbite de $N(T)$ par l'action libre $(k,m) \cdot u = (ku, u^{-1}m)$ de $N(T)$ sur $K \times M$. Le groupe $N(T)$ a comme algèbre de Lie $\underline{t}$ et il a $\#W$ composantes connexes. La mesure $(\mathrm{vol}\, T)^{-1} \#W^{-1}\, dt$ donne donc masse 1 à la fibre de p. Il s'agit alors de prouver l'égalité des densités sur l'espace tangent

$$T_{k.m}(\Omega) = T_k(K) \oplus T_m(M)/(\underline{t})_{K\times M}$$

données par $d\beta_\Omega$ et $\frac{1}{(2\pi)^r}|\pi(J(m))|\; dk\; d\beta_M/dt$. Par K-invariance, il suffit de le faire en un point (e,m), où e est l'identité de K. D'après (6), on a si $J(m) = \mu$

$$\sigma_\Omega = - K_\mu \oplus \sigma_M. \quad \text{D'où} \quad \frac{\sigma_\Omega^d}{d!} = \frac{|K_\mu|^r}{r!}\,\frac{\sigma_M^n}{n!}$$

si $\frac{1}{2}\dim\Omega = d = n + r$.

D'où $d\beta_\Omega = \frac{1}{(2\pi)^r}\, |\pi(\mu)|\; |\eta|\; d\beta_M$, ce qui prouve (8).

Si la variété $\Omega - \Omega_r$ est de mesure nulle pour β_Ω, la formule d'intégration (8) nous permettra donc de remplacer l'étude de $J_*(\beta_\Omega)$ par celle de $J_*(\beta_M)$.

I.2.- ORBITES ELLIPTIQUES RÉGULIÈRES D'UN GROUPE DE LIE RÉDUCTIF

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie réductive. Nous fixons une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ de $\underline{g}$. Nous supposons que le rang de $\underline{g}$ est égal au rang de $\underline{k}$. Soit G un groupe de Lie connexe à centre compact d'algèbre de Lie $\underline{g}$. Soit K le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$. Le sous-groupe K est un sous-groupe compact maximal de G. Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$, c'est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\underline{g}$. On identifie comme d'habitude $\underline{t}^*$ à l'orthogonal de $[\underline{t}, \underline{g}]$ dans $\underline{g}^*$.

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier dans $\underline{t}^*$. On considère $\Omega = G\cdot\lambda$ l'orbite de λ dans $\underline{g}^*$ et la forme symplectique σ sur Ω donnée par $\sigma_f(X\cdot f, Y\cdot f) = -f([X,Y])$, si $f \in \Omega$. La variété Ω est une variété hamiltonienne sous l'action de G, donc a fortiori sous l'action de K. L'application moment $J_{\underline{k}} : \Omega \to \underline{k}^*$ est la restriction à Ω de la projection $p : \underline{g}^* \to \underline{k}^*$. Nous choisissons des normes K-invariantes $\|\xi_o\|$ et $\|\xi_1\|$ sur $\underline{k}^*$, $\underline{p}^*$ telles que $<\xi,\xi> = \|\xi_o\|^2 - \|\xi_1\|^2$ soit une fonction G-invariante sur $\underline{g}^*$. Si $\xi \in \Omega$, on a donc $\|\xi_o\|^2 - \|\xi_1\|^2 = \|\lambda\|^2$. L'image réciproque d'un ensemble borné de $\underline{k}^*$ est donc un ensemble borné de Ω. Comme Ω est fermée dans $\underline{g}^*$, l'application $J_{\underline{k}}$ est propre. De plus on a

(1) LEMME.- L'image $J_{\underline{k}}(\Omega)$ est contenue dans l'ensemble $\{\xi \in \underline{k}^* \; ; \|\xi\| \geq \|\lambda\|\}$.

Si $\mu \in \underline{t}^*$, on note δ_μ la mesure de Dirac au point μ, D_μ l'opérateur différentiel $(D_\mu\varphi)(v) = \frac{d}{d\varepsilon}\varphi(v+\varepsilon\mu)_{|\varepsilon=0}$, et si μ est non nul, H_μ la mesure d'Heaviside $(H_\mu,\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t\mu)dt$. On a

$$D_\mu \cdot H_\mu = \delta(0).$$

Soit $\Delta \subset i\underline{t}^*$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$. Pour chaque $\alpha \in \Delta$, soit $h_\alpha \in i\underline{t}$ la coracine correspondante. On pose :

(2) $$\Delta^+(\lambda) = \{\alpha \in \Delta \ ; \ (i\lambda, h_\alpha) > 0\}$$

ou simplement Δ^+ si λ est fixé.

On note

Δ_c l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$

Δ_n l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$

$\Delta_n^+ = \Delta^+ \cap \Delta_n = \{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p\}$

(3) $$Y^+ = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \dots * H_{-i\alpha_p}$$

la convolution des mesures d'Heaviside associées aux racines non compactes positives. On définit avec les conventions de I.1.7 une application A^η des fonctions continues à support compact sur $\underline{k}^*$ dans les fonctions continues à support compact sur $\underline{t}^*$ par

$$(A^\eta\varphi)(\xi) = \frac{1}{\#W(\mathrm{vol}\ T)}\frac{1}{(2\pi)^r}\pi(\xi)\int_K \varphi(k\cdot\xi)\,dk \ .$$

(4) On voit que A^η ne dépend que de l'orientation $\underline{r}^+$ donnée à $\underline{r}$ par η. On choisit η^+ telle que $\pi^+(\lambda) > 0$. On note A^+ l'opérateur correspondant.

Le but de la section I est de prouver le

(5) <u>THÉORÈME</u>.- Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$. Soit $\Omega = G\cdot\lambda$ l'orbite de λ dans $\underline{g}^*$ avec sa mesure de Liouville β_Ω. Alors :

$$\int_{\underline{k}^*}\varphi\, dJ_*(\beta_\Omega) = \Big(\sum_{w\in W}\varepsilon(w)w\cdot(\delta_\lambda * Y^+), A^+\varphi\Big)$$

où A^+ est déterminée par la convention (4).

Soit $M = \Omega \cap p^{-1}(\underline{t}_r^*)$. C'est un espace T-hamiltonien. Pour démontrer le théorème (5), nous pouvons nous ramener à l'étude de $J_*(\beta_M)$. En effet Ω_r est non vide, puisque $\lambda \in J(\Omega)$ est $\underline{g}$-régulier, donc a fortiori $\underline{k}$-régulier. Le complémentaire $\Omega - \Omega_r$ est une sous-variété algébrique fermée de Ω non égale à Ω, donc de mesure nulle pour $d\beta_\Omega$. D'après I.1.8, il suffira de démontrer le

(6) THÉORÈME.- $J_*(\beta_M) = \frac{\pi^+}{|\pi^+|} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w.(\delta_\lambda * Y^+)$.

La méthode suivie sera de montrer en I.3 que $J_*(\beta_M)$ satisfait un système d'équations différentielles à coefficients constants.

Notons quelques propriétés géométriques de Ω et de M utiles au paragraphe suivant. On note $V = \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$ de sorte que M est une sous-variété de V. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$. Nous allons décrire les variétés Ω_o, M_o des zéros du champ de vecteurs associé à X sur Ω, M.

Soit $\underline{z}$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$, Z le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\underline{z}$. Il est connexe. On écrit $\underline{g} = \underline{z} \oplus \underline{q}$, où $\underline{q}$ est le complément Z-invariant de $\underline{z}$. Ceci permet d'écrire $\underline{g}^* = \underline{z}^* \oplus \underline{q}^*$. Si f est un point $\underline{g}$-régulier de $\underline{g}^*$ appartenant à $\underline{z}^*$, on a $\underline{q}.\,f = \underline{q}^*$.

La décomposition de Cartan de $\underline{g}$ induit une décomposition de Cartan

$$\underline{z} = \underline{z} \cap \underline{k} \oplus \underline{z} \cap \underline{p} = \underline{k}_o \oplus \underline{p}_o$$

de $\underline{z}$.

Il est clair que $\underline{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{z}$. On a encore rang de $\underline{z}$ = rang de $\underline{k}_o$.

On écrit : $\underline{k}_o = \underline{t} \oplus \underline{r}_o$,

$V_o = \underline{t}^* \oplus \underline{p}_o^*$,

$\underline{r} = \underline{r}_o \oplus \underline{r}_1$,

$\underline{p} = \underline{p}_o \oplus \underline{p}_1$,

de sorte que $\underline{q} = \underline{r}_1 \oplus \underline{p}_1$,

$V = V_o \oplus V_1$, avec $V_1 = \underline{p}_1^*$.

PROJECTION D'ORBITES

On note W le normalisateur de T dans G mod T

W_o le normalisateur de T dans Z mod T.

Le groupe W_o est un sous-groupe de W. L'ensemble des éléments W-réguliers de $\underline{t}^*$ est $\underline{t}^*_r$. On note $\underline{t}^*_{r_o}$ l'ensemble des éléments W_o-réguliers de $\underline{t}^*$. Il est clair que $\underline{t}^*_r$ est un ouvert de $\underline{t}^*_{r_o}$. L'élément λ détermine une composante connexe C^+ de $\underline{t}^*_r$ et une composante connexe C^+_o de $\underline{t}^*_{r_o}$. Soit $W^1 = \{w \in W$ tel que $w.\lambda \in C^+_o\}$. Alors W^1 est un système de représentants de $W_o \backslash W$.

Comme $\underline{z}^*$ est la variété des zéros pour l'action de X sur $\underline{g}^*$, la variété Ω_o des zéros de X sur Ω est $\Omega_o = \Omega \cap \underline{z}^*$. Comme V_o est la variété des zéros pour l'action de X sur V, on a $M_o = M \cap V_o = \Omega_o \cap p^{-1}(\underline{t}^*_r)$.

(7) <u>LEMME</u>.- $\Omega_o = \bigcup_{w \in W^1} Zw\lambda$, où l'union est disjointe.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit $m = g.\lambda \in \underline{z}^*$. Comme $g.\lambda$ est un élément elliptique de $\underline{z}^*$, il existe un élément u de Z tel que $ug\lambda \in \underline{t}^*$. Comme $G.\lambda \cap \underline{t}^* = W.\lambda$, on obtient le lemme.

La méthode de démonstration du théorème (5) se fera par récurrence sur la dimension de G. On écrit aussi $\Omega = G.\lambda = \Omega(G,\lambda)$ pour préciser sous quel groupe on considère l'orbite de λ. Avec cette notation

$$\Omega_o = \bigcup_{w \in W^1} (Z, w.\lambda) \quad .$$

De même on considère les variétés $M(Z,w.\lambda) = Zw\lambda \cap p_o^{-1}(\underline{t}^*_{r_o})$, où $p_o : \underline{z}^* \to \underline{k}^*_o$.
Il est clair que $Zw\lambda \cap p_o^{-1}(\underline{t}^*_r)$ est une sous-variété ouverte de $M(Z,w.\lambda)$ et que :

$$M_o = \bigcup_{w \in W^1} M(Z,w.\lambda) \cap p_o^{-1}(\underline{t}^*_r) \quad . \tag{8}$$

Nous analysons les fibrés normaux de Ω_o dans Ω et de M_o dans M.

(9) <u>LEMME</u> .-Soit $f \in \Omega_o$, alors $T_f(\Omega) = T_f(\Omega_o) \oplus \underline{q}^*$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Ceci est clair puisque $\underline{g}.f = T_f(\Omega) = \underline{z}.f \oplus \underline{q}.f$
$= T_f(\Omega_o) \oplus \underline{q}^*$

car f est un élément régulier de $\underline{g}^*$, appartenant à $\underline{z}^*$.

Le fibré normal à Ω_o dans Ω est donc trivial et isomorphe à $\Omega_o \times \underline{q}^*$.

Considérons un point $m \in M$. D'après I.1.6, on a $T_m(M) = T_m(\Omega) \cap V$. Comme M_o est l'espace des points fixes du groupe à un paramètre relativement compact $(\exp tX)$, on a, en un point m de M_o, $T_m(M_o) = T_m(M) \cap V_o$. D'autre part, $T_m(\Omega) \cap V_1 = V_1 = \underline{p}_1^*$ d'après (9). On a donc, puisque m est fixé par X,

$$T_m(M) = T_m(M) \cap V_o \oplus T_m(M) \cap V_1$$

et le :

(10) <u>LEMME</u>.- Soit $m \in M_o$, alors

$$T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1 .$$

Le fibré normal de M_o dans M est donc trivial et isomorphe à $M_o \times V_1$.

(11) Analysons maintenant les orientations. Si μ est un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, la forme $-K_\mu^{\underline{p}_1}(X,Y) = -(\mu,[X,Y])$ est non dégénérée sur $\underline{p}_1$. Elle définit donc une orientation $\underline{p}_1^+(\mu)$ sur $\underline{p}_1$. On identifie $\underline{p}_1$ à V_1 par l'application $X \longrightarrow X.\mu$ et on note $V_1^+(\mu)$ l'orientation ainsi définie sur V_1. Si μ et μ' sont deux éléments $\underline{g}$-réguliers de $\underline{t}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{V_1}(\mu,\mu') &= 1 \quad \text{si les orientations } V_1^+(\mu) \text{ et } V_1^+(\mu') \text{ coïncident} \\ &= -1 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

(12) <u>LEMME</u>.- Si $w_o \in W_o$, $\varepsilon_{V_1}(w_o\mu,\mu') = \varepsilon_{V_1}(\mu,\mu')$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Comme $V_1^+(w_o\mu) = w_o \cdot V_1^+(\mu)$, il suffit de montrer qu'il existe une (donc toutes) orientation W_o-invariante sur V_1. Comme X a des valeurs propres imaginaires pures non nulles sur $(V_1)_{\mathbb{C}}$, on peut écrire $(V_1)_{\mathbb{C}} = V_1^+ \oplus V_1^-$, où V_1^+ est la somme des sous-espaces propres de X de valeur propre μ_j avec $\mathrm{Im}\,\mu_j > 0$, et $V_1^- = \overline{V_1^+}$. Ceci définit une structure complexe sur V_1 et donc une orientation. Comme X est fixé par W_o, cette orientation est W_o-invariante.

Considérons la décomposition (10) $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$ en tout point m de M_o. Les espaces $T_m(M)$ et $T_m(M_o)$ sont des espaces symplectiques et ont donc une orientation canonique. On en déduit une orientation $V_1^+(m)$ sur V_1 dépendant de la composante connexe de m dans M_o. Remarquons que pour $m = \lambda$, l'orientation $V_1^+(\lambda)$ est bien celle définie précédemment. On pose

$$\varepsilon(m) = 1 \qquad \text{si } V_1^+(m) = V_1^+(\lambda)$$
$$= -1 \qquad \text{sinon .}$$

(13) LEMME.- Soit $m \in Z w \lambda \cap p^{-1}(C^+)$, avec $w \in W^1$. Alors $\varepsilon(m) = \varepsilon(w)\ \varepsilon_{V_1}(w\lambda,\lambda)$.

DÉMONSTRATION.- Considérons les décompositions (9) et (10) d'espaces symplectiques. On a $\underline{q}^* = \underline{q}\ .\ m$ et la forme σ_Ω sur $\underline{q}^*$ est définie par

$$\sigma_\Omega(X\ .\ m, Y\ .\ m) = -(m,[X,Y]) = -(Y\ .\ m, X)\ .$$

Remarquons qu'on a une décomposition

$$\underline{q}\cdot m = \underline{r}_1\cdot m \oplus \underline{p}_1^* = \underline{r}_1\cdot m \oplus V_1$$

en somme de sous-espaces orthogonaux pour σ_Ω. Notons $O_m^{\underline{q}}$ (resp. $O_m^{\underline{r}_1}$) l'orientation de $\underline{q}$ définie par la forme $-K_m^{\underline{q}}(X,Y) = -(m,[X,Y])$, par $X,Y \in \underline{q}$

$$(\text{resp. } -K_m^{\underline{r}_1}(X,Y) = -(m,[X,Y]),\ \text{pour } X,Y \in \underline{r}_1).$$

On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels orientés entre $V_1^+(m)$ et $(\underline{q}/\underline{r}_1, O_m)$, où O_m est l'orientation sur $\underline{q}/\underline{r}_1$ déduite des orientations $O_m^{\underline{q}}$ et $O_m^{\underline{r}_1}$.

Lorsque m varie dans $Z\ .\ w\ .\ \lambda$, la forme $K_m^{\underline{q}}$ sur $\underline{q}$ reste non dégénérée, car m reste $\underline{g}$-régulier et $\underline{q}$ est stable par Z. On a donc $O_m^{\underline{q}} = O_{w.\lambda}^{\underline{q}}$.

Comme $m \in \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$ et que $[\underline{r}_1,\underline{r}_1] \subset \underline{k}$, la forme $K_m^{\underline{r}_1}$ ne dépend que de la projection $p(m)$ de m sur $\underline{t}_r^*$, et l'orientation donnée à $\underline{r}_1$ reste constante lorsque $p(m)$ varie dans une composante connexe de t_r^*. On a donc $O_m^{\underline{r}_1} = O_\lambda^{\underline{r}_1}$. Donc $O_m = O_{w.\lambda}^{\underline{q}}/O_\lambda^{\underline{r}_1}$. Comme par définition $\varepsilon_{V_1}(w\lambda,\lambda)\ O_{w.\lambda}^{\underline{q}}/O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = O_\lambda^{\underline{q}}/O_\lambda^{\underline{r}_1}$, il s'agit de montrer que $O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = \varepsilon(w) O_\lambda^{\underline{r}_1}$, pour $w \in W^1$.

Soit $\mu \in \underline{t}_r^*$. Considérons $\underline{r}$ munie de la forme symplectique non dégénérée $-K_\mu^{\underline{r}}$. La décomposition $\underline{r} = \underline{r}_o \oplus \underline{r}_1$ est en sous-espaces orthogonaux pour $-K_\mu^{\underline{r}}$. On note $O_\mu^{\underline{r}}$ (resp. $O_\mu^{\underline{r}_o}$) l'orientation donnée à $\underline{r}$ (resp. $\underline{r}_o$) par la forme $-K_\mu^{\underline{r}}$ (resp. $-K_\mu^{\underline{r}_o}$). On a $O_{w.\mu}^{\underline{r}} = \varepsilon(w)\ O_\mu^{\underline{r}}$, pour tout $w \in W$. L'orientation $O_\mu^{\underline{r}_o}$ ne dépend que de

la composante connexe de μ dans $\underline{t}^*_{r_o}$. Puisque $w.\lambda \in C_o^+$, on a donc $O_\lambda^{\underline{r}_o} = O_{w.\lambda}^{\underline{r}_o}$
$O_{w.\lambda}^{\underline{r}_1} = O_{w.\lambda}^{\underline{r}}/O_{w.\lambda}^{\underline{r}_o} = \varepsilon(w)\ O_\lambda^{\underline{r}}/O_\lambda^{\underline{r}_o} = \varepsilon(w)\ O_\lambda^{\underline{r}_1}$, Q.E.D

I .3.- IMAGE DE LA MESURE DE LIOUVILLE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit T un tore compact. Soit V un espace vectoriel muni d'une représentation linéaire de T. Soit M une sous-variété de V stable par T de dimension paire 2n. Supposons M munie d'une forme symplectique σ pour laquelle l'action de T sur M est hamiltonienne. Soit $J : M \to \underline{t}^*$ l'application moment. Supposons J propre (ou, pour l'application en vue, J propre au-dessus d'un ouvert de $\underline{t}^*$). Nous montrons dans cette section que $J_*(\beta_M)$ satisfait un système d'équations différentielles à coefficients constants, que nous allons définir.

L'ensemble des poids non nuls de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$ est un ensemble $\Sigma = \{\pm\, i\mu_j\}$. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$. On écrit alors $V = V_o(X) \oplus V_1(X)$ (ou simplement $V = V_o \oplus V_1$ si X est fixé), où V_o est le sous-espace des zéros de X sur V et V_1 le complément T-invariant de V_o.

Choisissons une orientation V_1^+ sur V_1. On peut choisir une base orientée $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_q, f_q$ de V_1 telle que :

$$H . e_k = - \mu_k(H) f_k$$

$$H . f_k = \mu_k(H) e_k, \qquad \text{pour tout } H \in \underline{t},$$

avec $\pm\, i\mu_k \in \Sigma$, $\mu_k(X) \neq 0$.

On note I l'ensemble $\{1,2,\ldots,q\}$

$$\omega_X^+ = \prod_{j\in I} \mu_j ,$$

$$D_X^+ = D_{\mu_1} . D_{\mu_2} . \ldots . D_{\mu_q} .$$

(ω_X^+ et D_X^+ ne dépendent que de l'orientation choisie sur V_1).

Soit $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ l'algèbre des polynômes sur $\underline{t}_{\mathbb{C}}$, I_V l'idéal engendré dans $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ par les fonctions polynômes homogènes ω_X^+, pour $X \in \underline{t} - \{0\}$.

(1) LEMME.- L'ensemble des zéros communs des éléments de I_V est réduit à $\{0\}$.

DÉMONSTRATION.- Soit $X = X_1 + iX_2$, avec $X_1 \neq 0$. Il est clair que $\omega^+_{X_1}(X) \neq 0$ puisque toutes les formes linéaires $\mu_j \in \underline{t}^*$ non nulles sur X_1 sont a fortiori non nulles sur $X_1 + iX_2$. Si $X_1 = 0$ et $X_2 \neq 0$, alors $\omega^+_{X_2}(X) \neq 0$.

On identifie aussi $S(\underline{t}^*_{\mathbb{C}})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\underline{t}^*$.

(2). PROPOSITION.- Soit b une distribution sur un ouvert V de $\underline{t}^*$ vérifiant $D^+_X b = 0$, pour tout $X \in \underline{t} - \{0\}$. Alors b est polynômiale sur U.

DÉMONSTRATION.- D'après le théorème des zéros de Hilbert et le lemme (1), si ξ_i est un système de coordonnées linéaires sur $\underline{t}^*$, il existe un entier N tel que $\xi_i^N \in I_V$ pour tout i. La distribution b satisfait donc le système d'équations $(\frac{\partial}{\partial \xi_i})^N b = 0$, quel que soit i. Donc b est polynômiale, i.e. est de la forme $P(\xi)d\xi$ où P est un polynôme et $d\xi$ est une mesure de Lebesgue sur $\underline{t}^*$.

(3) Nous notons l'opérateur D^+_X simplement par D^+ lorsque X est fixé. Soit $M_o(X) = M \cap V_o(X)$ (ou simplement M_o) la variété des zéros de X_M. Nous montrons que $D^+(J_*(\beta_M))$ est à support dans $J(M_o)$ en suivant une méthode similaire à [Be.Ve.1] qui s'inspirait d'un calcul de R. Bott [Bc].

Si $v \in V$, écrivons $v = v_o + \sum_{j\in I} (x_j e_j + y_j f_j)$, avec $v_o \in V_o$. Notons $q_1(v)$ la fonction $\sum_j (x_j^2 + y_j^2)$. La fonction q_1 ne s'annule que sur V_o.

On note θ_j la 1-forme sur V définie par

$$\theta_j = x_j dy_j - y_j dx_j \quad .$$

On a $\quad d\theta_j = 2\, dx_j \wedge dy_j$.

Soit X_V le champ de vecteurs associé à la tranformation infinitésimale de X sur V, i.e. $X_V = \sum \mu_j(X)(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j})$. On a

$$\theta_j(X_V) = \mu_j(X)\ (x_j^2 + y_j^2).$$

Soit A un sous-ensemble de I. On définit

$$\omega_A = \prod_{j\in A} \mu_j \quad ,$$

$$D_A = \prod_{j\in A} D_{\mu_j} \qquad \text{(en particulier } D_I = D^+\text{)} \quad ,$$

$$\eta_A = \sum_{i\in A} \theta_i \prod_{j\in A-\{i\}} (d\theta_j) \quad ,$$

$$A' = I - A \quad .$$

Si φ est une fonction C^∞ sur $\underline{t}^*$, $(D^+\varphi)\circ J \frac{\sigma^n}{n!}$ est une forme de degré maximal sur M. Le lemme suivant montre que cette forme est exacte en dehors de M_o. Plus précisément, nous l'écrivons explicitement $-d(\omega_\varphi)$ où ω_φ est une (2n-1)-forme définie sur $M - M_o$.

(4) <u>LEMME</u>.- $(D^+\varphi)\circ J \frac{\sigma^n}{n!} = - d(\sum_k (k-1)! \sum_{\substack{A\subset I\\ \#A=k}} (D_{A'}\varphi)\circ J \frac{\eta_A}{q_1^k} \frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!})$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Il suffit de montrer ceci lorsque $\varphi(\xi) = e^{<H,\xi>}$ avec $H \in \underline{t}$. Le membre de gauche est alors égal à

$$\omega_I(H)\, e^{J_H} \frac{\sigma^n}{n!} \quad .$$

Considérons la 1-forme $\Theta_H = \sum_{j\in I} \frac{\mu_j(H)^{-1}\theta_j}{q_1}$. Elle vérifie

$$\Theta_H(H_V) = 1$$

$$\mathcal{L}(H) . \Theta_H = 0$$

On a donc : $c(H_V)\Theta_H = 1$, $c(H_V)d\Theta_H = 0$.

La forme non homogène $(J_H + \sigma)$ vérifie l'équation $(c(H_M) - d)(J_H + \sigma) = 0$, puisque $d\sigma = 0$. Puisque $(c(H_M) - d)$ est une anti-dérivation de $\mathcal{A}(M)$, la forme $\mu_H = e^{(J_H+\sigma)} = e^{J_H}(\Sigma \frac{\sigma^n}{n!})$ vérifie aussi l'équation $(c(H_M) - d) . \mu_H = 0$. (C'est une forme fermée pour la cohomologie T-équivariante [Be-Ve.1]). La forme $d\Theta_H$ est annulée par d et $c(H_V)$. On a donc

$$\mu_H = (c(H_M) - d)(\Theta_H(1 - d\Theta_H)^{-1}\, \mu_H)$$

On a noté encore par Θ_H la restriction de Θ_H à M. Donc
$\omega_I(H)\mu_H = (c(H_M) - d)(\sum_k \omega_I(H)\Theta_H(d\Theta_H)^{k-1}\mu_H)$.

Identifiant le terme de degré maximum des deux membres, on obtient :

$$\omega_I(H)e^{J_H}\frac{\sigma^n}{n!} = -\,d\left(\sum_k \omega_I(H)\theta_H(d\theta_H)^{k-1}\, e^{J_H}\,\frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!}\right) .$$

Le lemme (4) découlera de la formule :

$$(5) \qquad \omega_I(H)\theta_H(d\theta_H)^{k-1} = (k-1)!\sum_{\substack{A\\ \# A=k}} \omega_{A'}(H)\,\frac{\eta_A}{q_1^k} ,$$

et du fait que, si $\varphi(\xi) = e^{<\xi,H>}$, $\omega_{A'}(H)e^{J_H} = (D_{A'}\varphi)\circ J$.

Nous montrons (5)

Soit $\nu_H = \sum_j \mu_j(H)^{-1}\theta_j$. Comme ν_H est une 1-forme, $\nu_H^2 = 0$.

On a $\qquad d\nu_H = \sum_j \mu_j(H)^{-1}d\theta_j,$

$$\theta_H = q_1^{-1}\nu_H \quad .$$

On calcule :

$$\theta_H(d\theta_H)^{k-1} = q_1^{-k}\,\nu_H(d\nu_H)^{k-1} \quad , \text{ car } \nu_H^2 = 0$$

$$(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)!\sum_{\substack{S\subset I\\ \# S=k-1}} \omega_S(H)^{-1}\prod_{j\in S} d\theta_j \quad , \text{ car } (d\theta_j)^2 = 0 \quad ,$$

$$\nu_H(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)!\sum_{\substack{A\subset I\\ \# A=k}} \omega_A(H)^{-1}\eta_A \quad , \qquad \text{car } \theta_j d\theta_j = 0$$

$$\omega_I(H)\nu_H(d\nu_H)^{k-1} = (k-1)!\sum_{\substack{A\subset I\\ \# A=k}} \omega_{A'}(H)\eta_A \quad , \text{ ce qui démontre (5).}$$

(6) <u>COROLLAIRE</u>.- $D^+(J_*(\beta_M))$ est supportée sur $J(M_o)$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Si φ a son support dans $t^* - \overline{J(M_o)}$, on a d'après (4)

$$\int (D^+\varphi)J_*(dm) = \int_M -\,d(\omega_\varphi)$$

où ω_φ est une forme C^∞ à support compact sur M. Donc $\int_M d(\omega_\varphi) = 0$.

Nous allons maintenant préciser le corollaire (6) dans une situation particulière.

(7) Nous fixons de nouveau $X \in \underline{t} - \{0\}$. Soit $V = V_o \oplus V_1$, $M_o = M \cap V_o$ la variété des zéros de X_M.

Nous faisons l'hypothèse

(8) Nous supposons que en tout point m de M, $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$. [Elle est vérifiée pour les variétés M introduites en I.2].

Sous l'hypothèse (8), le fibré normal à M_o dans M est donc trivial et identifié à $M_o \times V_1$.

Rappelons que nous avons choisi une orientation V_1^+ sur V_1.

D'autre part, les variétés $T_m(M)$ et $T_m(M_o)$ étant symplectiques, la décomposition $T_m(M) = T_m(M_o) \oplus V_1$ fournit une orientation $V_1^+(m)$ à V_1 dépendant de la composante connexe M_o^α de m dans M_o. On pose

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= +1 \text{ si les orientations } V_1^+(m) \text{ et } V_1^+ \text{ coïncident },\\ &= -1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On note β_o^α la mesure de Liouville de M_o^α. On note $\dim V_1 = 2q$.

(9) <u>PROPOSITION</u>.- Sous l'hypothèse (8), on a

$$(-1)^q D^+(J_* \beta_M) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \, (J_o^\alpha)_* (\beta_o^\alpha) \quad .$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.- On a

$$(-1)^q (D^+(J_* \beta_M), \varphi) = (J_*(\beta_M) \ , \ D^+\varphi) = \int (D^+\varphi) \circ J \frac{\sigma^n}{(2\pi)^n n!}$$

Considérons un produit scalaire T-invariant sur $V_o \oplus V_1$ coïncidant sur V_1 avec le produit scalaire q_1 choisi précédemment. Considérons la métrique Riemannienne T-invariante induite sur M. Soient deux voisinages $U_1 \subset U_2$ relativement compacts de Supp φ et travaillons au-dessus de U_2. Soient

$$V_1(\varepsilon) = \{v \in V_1 \ ; \ \|v\| < \varepsilon\} \quad , \quad M_o^i = M_o \cap J^{-1}(U_i).$$

On peut trouver $\varepsilon > 0$, tel que l'application exponentielle $(m,v) \longmapsto \exp_m v$ soit un difféomorphisme entre $M_o^2 \times V_1(\varepsilon)$ et un ouvert U_ε de M. On note U_ε^1 l'image de $M_o^1 \times V_1(\varepsilon)$, par l'application exponentielle.

On a :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_M (D^+\varphi) \circ J \frac{\sigma^n}{n!} = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{M-U_\varepsilon^1} (D^+\varphi) \circ J \frac{\sigma^n}{n!} .$$

Sur $M - U_\varepsilon^1$, on a $(D^+\varphi) \circ J \frac{\sigma^n}{n!} = - d(\omega_\varphi)$, où

$$\omega_\varphi = \sum_k \Big(\sum_{\substack{A \\ \#A=k}} (k-1)! \, (D_A,\varphi) \circ J \frac{\eta_A}{q_1^k} \frac{\sigma^{n-k}}{(n-k)!}\Big)$$

est C^∞ sur $M - U_\varepsilon^1$.

On a donc

$$\int_M (D^+\varphi) d(J_* \beta_M) = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\partial(U_\varepsilon^1)} \omega_\varphi .$$

On a $\partial(V_\varepsilon^1) \simeq M_o^1 \times S_\varepsilon \cup (\overline{M_o^1} - M_o^1) \times V_1(\varepsilon)$ avec $S_\varepsilon = \{v \in V_1 \ ; \ \|v\| = \varepsilon\}$. On peut supposer ε choisi de telle sorte que ω_φ soit nulle sur $(\overline{M_o^1} - M_o^1) \times V_1(\varepsilon)$. Si donc on note I_ε l'application de $M_o^1 \times S_1$ dans $\partial(U_\varepsilon)$ donnée par $(m_o,v) \to \exp m_o(\varepsilon v)$, on a

$$\int_M (D^+\varphi) d(J_* \beta_M) = \int_{M_o^1 \times S_1} \lim_{\varepsilon \to o} (I_\varepsilon)_* (\omega_\varphi) .$$

Ici l'orientation de $M_o \times V_1$ est celle compatible avec l'orientation de M.

Nous calculons $\lim_{\varepsilon \to o} (I_\varepsilon)_* (\omega_\varphi)$. On a $I_\varepsilon(m_o,v) = m_o + \varepsilon v \bmod \varepsilon^2$. Les formes $\frac{\eta_A}{q_1^k}$ sont invariantes par la transformation $(v_o,v_1) \to v_o + \varepsilon v_1$. On a donc

$$\lim_{\varepsilon \to o} (I_\varepsilon)_* \Big(\frac{\eta_A}{q_1^k}\Big) = \eta_A \mid M_o \times S_1.$$

Comme σ est continue sur M, on a $\lim \varepsilon \to 0 \ (I_\varepsilon)_*(\sigma) = (I_o)_*(\sigma) = \sigma_o$. Comme $\sigma_o^{n-k} = 0$ si $k < q$, on obtient :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{M_o^1 \times S_1} (I_\varepsilon)_* (\omega_\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^q} (q-1)! \int_{S_1} \eta_I \cdot \int_{M_o} (\varphi \circ J) \frac{\sigma_o^{n-q}}{(2\pi)^{n-q} (n-q)!}$$

La proposition (9) sera prouvée si

$$(10) \qquad \frac{1}{(2\pi)^q}(q-1)! \int_{S_1^+} \eta_I = 1$$

où ici l'orientation S_1^+ de S_1 est celle naturelle de la sphère S_1^+ dans l'espace $V_1^+ \simeq \mathbb{R}^{2q}$. Or $\eta_I = 2^{(q-1)}\mu$ où μ est la forme volume de la sphère et $\mathrm{vol}\, S^{(2q-1)} = (2q)\ \dfrac{\pi^q}{q!}$. Q.E.D.

I.4.- PROJECTION DE LA MESURE DE LIOUVILLE D'UNE ORBITE ELLIPTIQUE RÉGULIÈRE

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, $M = G.\lambda \cap p^{-1}(\underline{t}_r^*)$. Nous considérons M comme plongée dans $V = \underline{t}^* \oplus \underline{p}^*$. Nous allons montrer dans cette section le théorème I.2.6 que nous rappelons ici

(1) THÉORÈME.- $J_*(\beta_M) = \dfrac{\pi}{|\pi^+|} \displaystyle\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\ w.(\delta_\lambda * Y^+)$.

Nous démontrons ce théorème par induction sur la dimension de G.

Nous supposons la formule (1) valable pour toutes les orbites elliptiques régulières de groupes de dimension strictement inférieure à G.

Considérons le système d'équations différentielles D_X^+ de la section I.3.

(2) PROPOSITION.- Pour tout $X \in \underline{t} - \{0\}$, on a, sur C^+, l'égalité des distributions

$$D_X^+(J_*\beta_M) = \nu_X^+\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, w.(\delta_\lambda * Y^+)\Big).$$

DÉMONSTRATION.- Reprenons les notations de I.2. Soit $X \in \underline{t} - \{0\}$ fixé. Soit $\underline{z} = \underline{k}_o \oplus \underline{p}_o$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$. On note Δ_n^o les racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_o^{\mathbb{C}}$, $\Delta_n^1 = \Delta_n - \Delta_n^o$.

Si μ est un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, μ définit un ordre $\Delta^+(\mu)$ sur Δ en posant

$$\Delta^+(\mu) = \{\alpha;\ (i\mu, h_\alpha) > 0\}.$$

On pose : $\Delta_n^+(\mu) = \Delta_n \cap \Delta^+(\mu)$, $(\Delta_n^o)^+(\mu) = \Delta_n^o \cap \Delta^+(\mu)$.

Notons $Y_{\mu}^{\mathfrak{g}} = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \ldots * H_{-i\alpha_p}$ si $\Delta_n^+(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$,
(de sorte que $Y_{\lambda}^{\mathfrak{g}} = Y^+$)

$$Y_{\mu}^{\underline{z}} = H_{-i\alpha_1} * H_{-i\alpha_2} * \ldots * H_{-i\alpha_{p_o}} \quad \text{si} \quad (\Delta_n^o)^+(\mu) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p_o}\} \ .$$

Considérons l'orientation $V_1^+(\mu)$ de V_1 défini en I.2.11. Cette orientation définit donc un opérateur $D_X^+(\mu)$ que nous notons D_{μ}^+. Soit dim $V_1 = 2q$.

(3) <u>LEMME</u>.- $(-1)^q \; D_{\mu}^+ \, . \, Y_{\mu}^{\mathfrak{g}} = Y_{\mu}^{\underline{z}}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Considérons la forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\underline{p}_1$ définie par $- B_{\mu}(Y,Z) = -(\mu, [Y,Z])$. Elle définit une orientation $\underline{p}_1^+(\mu)$ sur $\underline{p}_1$. Posons, pour $\beta \in (\Delta_n^1)^+(\mu)$

$$e_{\beta} = X_{\beta} + X_{-\beta} \quad , \quad f_{\beta} = i\, X_{\beta} - i\, X_{-\beta} \ ,$$

avec $X_{-\beta} = \overline{X}_{\beta}$.

L'orientation de $\underline{p}_1^+(\mu)$ est alors donnée par $\prod_{\beta \in (\Delta_n^1)^+(\mu)} e_{\beta} \wedge f_{\beta}$. L'isomorphisme $\underline{p}_1^+(\mu) \to V_1^+(\mu)$ défini par $Y \longmapsto Y \, . \, \mu$ commute à l'action de X.

Si $(\Delta_n^1)^+(\mu) = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\}$, l'opérateur D_{μ}^+ est égal à $D_{i\beta_1} \circ D_{i\beta_2} \circ \ldots \circ D_{i\beta_q}$. On obtient donc le lemme (3) car $\Delta_n^+(\mu) = (\Delta_n^1)^+(\mu) \cup (\Delta_n^o)^+(\mu)$.

Démontrons la proposition (2). Fixons comme orientation V_1^+ de V_1 l'orientation $V_1^+(\lambda)$ et notons D^+ l'opérateur D_X^+ correspondant. On a d'après (3)

$$(-1)^q \; D^+ \Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \; w. \; (\delta_{\lambda} * Y^+) \Big) = (-1)^q \; D^+ \Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \; \delta_{w.\lambda} * Y_{w\lambda}^{\mathfrak{g}} \Big)$$

$$= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \; \varepsilon_{V_1}(w\lambda, \lambda) \; \delta_{w.\lambda} * Y_{w\lambda}^{\underline{z}} \ .$$

Calculons le premier membre de (2). Soit M_o la variété des zéros de X sur M. On a $M_o \cap p^{-1}(C^+) = \bigcup_{w.{}_1 \in W^1} M(Z, w.\lambda) \cap p_o^{-1}(C^+)$ (I.2.8).

Notons $\beta_{w.\lambda}^Z$ la mesure de Liouville de $M(Z, w.\lambda)$. On a donc d'après I.3.9 et

I.2.14

$$(-1)^q D^+(J_*(\beta_M)) = \sum_{w_1\in W^1} \varepsilon(w_1)\ \varepsilon(\lambda, w_1\lambda)\ J_*(\beta^Z_{w_1.\lambda})$$

au-dessus de C^+.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$J_*(\beta^Z_{w_1.\lambda}) = \sum_{w_o\in W_o} \varepsilon(w_o)\ \delta_{w_o w_1\lambda} * Y^Z_{w_o w_1\lambda} \quad , \text{ car } w_1\lambda \in C^+_o,$$

et donc, sur C^+, on a :

$$(-1)^q D^+(J_*(\beta_M)) = \sum_{\substack{w_1\in W^1\\ w_o\in W_o}} \varepsilon(w_1)\ \varepsilon(w_o)\ \varepsilon(\lambda, w_1\lambda)\ \delta_{w_o w_1\lambda} * Y^Z_{w_o w_1\lambda} \quad .$$

Comme W^1 est un système de représentants de $W_o\backslash W$, il suffit de vérifier que si $w = w_o . w_1$, on a l'égalité :

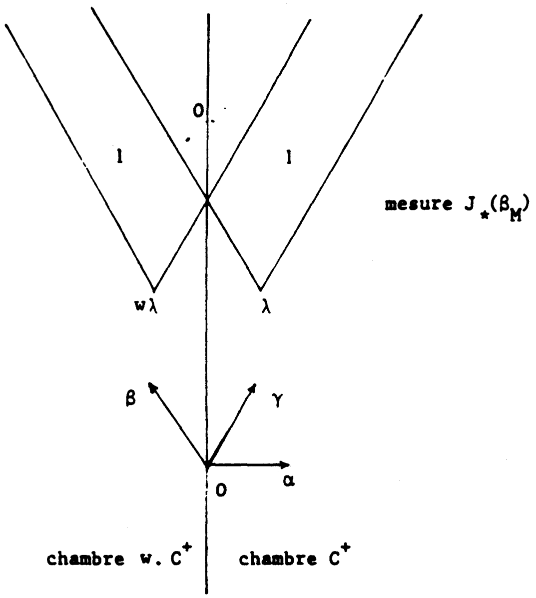
$$\varepsilon(w)\ \varepsilon(w.\lambda, \lambda) = \varepsilon(w_o)\ \varepsilon(w_1)\ \varepsilon(w_1\lambda, \lambda) \quad \text{qui résulte de I.2.(12).}$$

Q.E.D.

Il résulte de la proposition (2) et de I.3.2 que $J_*(\beta_\Omega) - \sum_{w\in W} \varepsilon(w) w.(\delta_\lambda * Y^+)$ est donnée sur C^+ par une mesure de la forme $P(\xi)d\xi$, où $P(\xi)$ est un polynôme sur $\underline{t}^*$. Comme la mesure $J_*(dm)$ (ainsi que la mesure $\sum_{w\in W} \varepsilon(w) w.(\delta_\lambda * Y^+)$) est supportée dans l'ensemble $\|\xi\| \geq \|\lambda\| > 0$; (lemme I.2.1), on en déduit que $P = 0$. On a donc prouvé l'égalité du théorème (1) sur C^+ et par W-invariance sur $\underline{t}^*_r$.

Faisons ici quelques remarques sur l'image de M par J.

<u>REMARQUE</u> 1. Soit C^+_n le cône convexe engendré par $-i\,\Delta^+_n(\lambda)$. Il est clair que $J(M) \subset \bigcup_{w\in W} w.(\lambda + C^+_n)$. L'inclusion est cependant quelquefois stricte comme le montre l'exemple suivant de $\underline{su}(1,2)$, où les racines $\pm\alpha$ sont compactes $\pm(\beta,\gamma)$ sont non compactes.



<u>REMARQUE 2</u>.- On peut considérer $\Omega = G . \lambda$ comme un espace T-Hamiltonien. L'application moment $J_T : \Omega \to \underline{t}^*$ est la projection $p : \underline{g}^* \to \underline{t}^*$. D'après le théorème de Kostant (cf. [G . St.2]), on a

$$J_{\underline{t}}(\Omega) = \bigcup_{\xi \in J(M)} \text{enveloppe convexe des } W . \xi .$$

Si G/K est Hermitien symétrique et si λ est dominant par rapport au système Δ_n^+ déterminant la structure complexe de G/K, l'ensemble $J_{\underline{t}}(G . \lambda)$ a été déterminée par S. Paneitz. On a $J_{\underline{t}}(G . \lambda)$ = enveloppe convexe de $\{w.(\lambda + C_+^n)\}$ pour $w \in W$ [P].

I.5.- <u>TRANSFORMÉES DE FOURIER</u>

Le théorème I.2.5 a un énoncé dual par transformée de Fourier sur $\underline{k}$ qui s'exprime en termes analogues à la conjecture de Blattner. Notons tout d'abord quelques formules utiles pour les transformées de Fourier de fonction d'Heaviside.

Soit V un espace vectoriel réel, V^* son dual. Pour $\xi \in V^*$, non nul, notons

$$(H_\xi,\varphi) = \int_o^\infty \varphi(t\xi)dt$$

$$(I_\xi,\varphi) = \int_o^1 \varphi(t\xi)dt$$

On a : $H_\xi = \sum_{n=o}^{\infty} \delta_{n\xi} * I_\xi$.

Si dv est une mesure de Lebesgue sur V, on définit

$$(F_V\beta)(f) = \int_V e^{i(f,v)}\ \beta(v)dv \quad .$$

La transformée de Fourier de I_ξ est la fonction analytique sur V définie par :

$$\int \hat{I}_\xi(v)\ f(v)dv = (I_\xi,F_V\beta) \quad .$$

La transformée de Fourier de H_ξ est la fonction généralisée sur V définie par

$$\int \hat{H}_\xi(v)\ f(v)dv = (H_\xi,F_V\beta) \quad .$$

On a évidemment :

$$\hat{I}_\xi(v) = \frac{e^{i(\xi,v)} - 1}{i(\xi,v)}$$

i.e. (1) $\hat{I}_\xi = \dfrac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}$

(2) $\hat{H}_\xi = \sum_{n=o}^{\infty} e^{in\xi}\ (\dfrac{e^{i\xi} - 1}{i\xi})$.

Soit $\Sigma \subset V^*$ un ensemble fini de points de V^* strictement contenus dans un demi-espace. On définit :

$$Y_\Sigma = H_{\xi_1} * H_{\xi_2} * \dots * H_{\xi_r}$$

si $\Sigma = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$ est non vide, $Y_\emptyset = \delta_o$

$$\prod_{\xi_i\in\Sigma} (\sum_{n\geq o} e^{n\xi_i}) = \Sigma\, Q_\Sigma(\mu)e^\mu$$

($Q_\Sigma(\mu)$ est nulle en dehors de $\sum_{\xi_i\in\Sigma} \mathbb{N}\ \xi_i$).

On a donc $Y_\Sigma = \sum_\mu Q_\Sigma(\mu)\ \delta_\mu * I_\Sigma$.

On considère la fonction analytique J_Σ sur V

$$J_\Sigma = \prod_{\xi_j\in\Sigma} \frac{e^{i\xi_j} - 1}{i\xi_j} .$$

On a alors

$$\text{(3)} \qquad \hat{Y}_\Sigma = \sum_\mu Q_\Sigma(\mu)\ e^{i\mu}\ J_\Sigma .$$

Revenons au calcul de la transformée de Fourier $J_*(\beta_\Omega)$, où $\Omega = G\,.\,\lambda$ est une orbite elliptique régulière d'un groupe de Lie réductif G.

Soit λ un élément $\underline{g}$-régulier de $\underline{t}^*$, Δ^+ l'ordre sur $\Delta(\underline{g}_{\mathbb{C}},\underline{t}_{\mathbb{C}})$ défini en I.2.2, $\Delta_c^+ = \Delta^+ \cap \Delta_c$, $\Delta_n^+ = \Delta^+ \cap \Delta_n$. On considère la fonction de partition par rapport aux racines non compactes positives définie par

$$\text{(4)} \qquad \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} \left(\sum_{n\geq o} e^{n\alpha}\right) = \sum Q(\mu)e^\mu \quad ,$$

(la fonction $Q(\mu)$ est donc nulle si $\mu \notin \sum_{\alpha_i\in\Delta_n^+} \mathbb{N}\ \alpha_i$) .

On note $\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \alpha$

$$\Lambda = i\lambda$$

La transformée de Fourier de la mesure $J_*(\beta_\Omega)$ est la fonction généralisée ψ_λ sur $\underline{k}$ définie par la formule :

$$\int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\ f(X)dX = \int_{\underline{k}^*} \left(\int_{\underline{k}} e^{i(\xi,X)}\ f(X)dX\right)\ J_*(d\beta_\Omega)(\xi)$$

pour toute fonction f, C^∞ à support compact sur $\underline{k}$.

On définit, si $\mu \in i\underline{t}^*$, la fonction analytique $\Theta_\mu^{\underline{k}}$ K-invariante sur $\underline{k}$ par

$$\text{(5)} \qquad \Theta_\mu^{\underline{k}}(H) = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\ \frac{e^{(w.\mu,H)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^+} (\alpha,H)}$$

On a $\theta^{\underline{k}}_{w.\mu} = \varepsilon(w)\theta^{\underline{k}}_{\mu}$, pour $w \in W$. Si μ n'est pas régulier, $\theta^{\underline{k}}_{\mu} = 0$.

Notons π_c la fonction donnée en I.1.5. (Elle dépend du choix de η et est proportionnelle à $\prod_{\alpha\in\Delta_c^+} h_\alpha$). On peut exprimer, si $\xi \in \underline{t}_r^*$, la mesure de Liouville β_ξ sur l'orbite $K.\xi$ en fonction de la mesure de Haar sur K par :

(6) $$\int_{K.\xi} \varphi \, d\beta_\xi = \frac{1}{(\mathrm{vol}\ T)} \frac{|\pi_c(\xi)|}{(2\pi)^r} \int_K \varphi(k.\xi)dk$$

(avec les conventions de I.2.7).

Si ξ est régulier dominant par rapport à Δ_c^+, on a

(7) $$\int_{K.\xi} e^{i\langle f,X\rangle} d\beta_\xi(f) = \theta^{\underline{k}}_{i\xi}(X) \quad , \text{ pour tout } X \in \underline{k}$$

Ceci est la formule d'Harish-Chandra (voir e.g. [Be-Ve.1] ou [D-H]).

(8) On note $j_{\underline{g}}$ la fonction analytique G-invariante sur $\underline{g}$ définie par

$$j_{\underline{g}}(X) = \det_{\underline{g}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right) .$$

On note j_n, $j_{\underline{k}}$ les fonctions analytiques K-invariantes sur $\underline{k}$ définie par :

$$j_{\underline{k}}(X) = \det_{\underline{k}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right)$$

$$j_n(X) = \det_{\underline{p}}\left(\frac{e^{\frac{adX}{2}} - e^{-\frac{adX}{2}}}{adX}\right) .$$

Les fonctions $j_{\underline{g}}$, (resp. $j_{\underline{k}}$, j_n) ont des racines carrées analytiques sur $\underline{g}$ (resp. $\underline{k}$).

On a :

$$j_{\underline{g}}^{1/2}(X) = j_{\underline{k}}^{1/2}(X)\, j_n^{1/2}(X) \quad , \text{ si } X \in \underline{k}$$

$$j_{\underline{g}}^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} ,$$

$$j_n^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} ,$$

$$j_{\underline{k}}^{1/2}(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_c^+} \frac{e^{(\frac{\alpha,H}{2})} - e^{-(\frac{\alpha,H}{2})}}{(\alpha,H)} \quad , \text{ pour } H \in \underline{t} \ .$$

On pose $\omega_c^+(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_c^+} (\alpha,H)$, $\omega_n^+(H) = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} (\alpha,H)$

$$D_n^+ = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} D_\alpha \ .$$

(9) THÉORÈME.-

$$\psi_\lambda(X) = \sum_\mu Q(\mu - (\Lambda + \rho_n))\ \theta_\mu^{\underline{k}}(X)\ j_n^{1/2}(X).$$

DÉMONSTRATION.- Soit A^+ l'application des fonctions sur $\underline{k}^*$ sur les fonctions sur $\underline{t}^*$ définie en (I.2.4) (Rappelons que les choix faits de dX, dH, η^+ vérifient $dX/dH = |\eta^+|$, $\pi_c^+(\lambda) > 0$) .

Notons $(F_{\underline{k}}\beta)(f) = \int_{\underline{k}} e^{i(f,X)}\ \beta(X)dX$, pour β une fonction C^∞ à support compact sur $\underline{k}$

$(F_{\underline{t}}\beta)(\xi) = \int_{\underline{t}} e^{i(\xi,H)}\ \beta(H)dH$, pour β une fonction C^∞ à support compact sur $\underline{t}$

$$(M^+\beta)(H) = \omega_c^+(H) \int_K \beta(k\cdot H)\ \frac{dk}{\#W(\mathrm{vol}\ T)}$$

L'application M^+ envoie les fonctions sur $\underline{k}$ dans les fonctions W-anti-invariantes sur $\underline{t}$. C'est l'intégrale invariante d'Harish-Chandra. Dans une identification de $\underline{k}$ avec $\underline{k}^*$ par un produit scalaire K-invariant, M^+ et A^+ sont proportionnelles. Comme $\det_{\underline{r}}(H) = |\omega_c^+(H)|^2 = (-1)^{\#\Delta_c^+}(\omega_c^+(H))^2$, on a la formule d'intégration suivante

(10) $$\int_{\underline{k}} \varphi(X)dX = (-1)^{\#\Delta_c^+} \int_{\underline{t}} \omega_c^+(H)(M^+\beta)(H)dH \ .$$

On a aussi la formule d'Harish-Chandra

(11) $$(F_{\underline{t}}M^+\beta) = (-1)^{\#\Delta_c^+}(A^+F_{\underline{k}}\beta)$$, qui résulte de (7)

Démontrons maintenant I.5.9. On a :

$$\int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\beta(X)dX = (J_*(d\beta_\Omega),\ F_{\underline{k}}\beta) \quad , \text{ par définition,}$$

$$= (\sum_{w\in W} \varepsilon(w)w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+), A^+F_{\underline{k}}\beta) \quad , \text{ par I.2.5,}$$

$$= \#W(\delta_\lambda * Y^+, A^+F_{\underline{k}}\beta) \quad ,$$

car $A^+F_{\underline{k}}\beta$ est une fonction W -anti-invariante sur $\underline{t}^*$,

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+} \#W(\delta_\lambda * Y^+, F_{\underline{t}}M^+\beta) \quad , \text{ d'après (11).}$$

Soit $\Sigma = -i\ \Delta_n^+ \subset \underline{t}^*$. On a :

$$Y^+ = Y_\Sigma$$

$$J_\Sigma = \prod_{\alpha_j\in\Delta_n^+} \frac{e^{\alpha_j} - 1}{\alpha_j} = e^{\rho_n} j_n^{1/2}$$

D'après (3), on a donc

$$(12) \quad \int_{\underline{k}} \psi_\lambda(X)\beta(X)dX = (-1)^{\#\Delta_c^+} \# W \sum_\mu Q(\mu) \int_{\underline{t}} e^{(\mu+\rho_n+\Lambda,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH \ ,$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+} \# W \sum_\mu Q(\mu - (\Lambda+\rho_n)) \int_{\underline{t}} e^{(\mu,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH \ .$$

Calculons le second membre de I.5.9 intégré contre $\beta(X)dX$. On a :

$$\sum_\mu Q(\mu - (\Lambda+\rho_n)) \int_{\underline{k}} \theta_\mu^{\underline{k}}(X) j_n^{1/2}(X)\beta(X)dX$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+} \sum_\mu Q(\mu - (\Lambda+\rho_n)) \int_{\underline{t}} \Sigma\, \varepsilon(w)e^{(w\cdot\mu,H)}(M^+(j_n^{1/2}\beta))(H)dH, \quad \text{par (10)}$$

$$= (-1)^{\#\Delta_c^+} \#W \sum_\mu Q(\mu - (\Lambda+\rho_n)) \int_{\underline{t}} e^{(\mu,H)} j_n^{\frac{1}{2}}(H)(M^+\beta)(H)dH$$

car $j_n^{\frac{1}{2}}$ est K-invariante, $M^+\beta$ W -anti-invariante.

On a donc prouvé l'égalité énoncée au théorème (9).

<u>REMARQUE</u> - Il y a bien d'autres manières d'écrire ψ_λ. Nous avons choisi celle

ci pour son analogie avec la formule de Blattner.

Formellement l'expression $\psi_\lambda(H)$ se simplifie beaucoup puisque "$\Sigma\, Q(\mu)e^{\mu} = \pi \dfrac{1}{1-e^{\alpha}}$". Nous indiquons un cas où cette simplification est légitime.

Introduisons quelques notations. La fonction polynômiale ω_n^+ est W -invariante, ω_n^+ se prolonge donc en une fonction polynôme K-invariante sur $\underline{k}$ que nous notons encore ω_n^+. Notons $\omega_n^+(\partial)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\underline{k}^*$ correspondant. On a $A^+\,\omega_n^+(\partial) = D_n^+ \circ A^+$.
On a : $\omega_n^+(X)^2 = \det(\mathrm{ad}X \mid \underline{p})(-1)^{1/2\,\dim \underline{p}}$.

(10) <u>PROPOSITION</u>.- La fonction généralisée $\omega_n^+(X)\psi_\lambda(X)$ est analytique. On a :

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\dim \underline{p})}\ \omega_n^+(X)\ \psi_\lambda(X) = \theta_\Lambda^{\underline{k}}(X)$$

<u>REMARQUE</u>.- L'analyticité de $\omega_n^+(X)\ \psi_\lambda(X)$ est l'analogue d'un résultat de W. Schmid [S] sur les K-caractères des représentations irréductibles de G.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Il suffit de reprendre les calculs de (9) pour $\int \psi_\lambda(X)\ \omega_n^+(X)\beta(X)dX$ et de noter que :

$$\begin{aligned} A^+F_{\underline{k}}\ \omega_n^+\beta &= (-i)^{\#\Delta_n^+}\ A^+\ \omega_n^+(\partial)\ F_{\underline{k}}\beta \\ &= (-i)^{\#\Delta_n^+}\ D_n^+\ A^+\ F_{\underline{k}}\beta\ , \end{aligned}$$

et que $D_n^+(\Sigma\ \varepsilon(w)\ w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)) = (i)^{\#\Delta_n^+}(\Sigma\ \varepsilon(w)\delta_{w.\lambda})$.

Notons ν la fonction généralisée sur $\underline{g}$ transformée de Fourier de β_Ω. D'après un résultat d'Harish-Chandra rappelé en A.6, ν est C^∞ au voisinage de tout point $X \in \underline{k}$ tel que $\omega_n^+(X) \neq 0$. De (A.6.3) et (10), on déduit une nouvelle démonstration de la formule de Rossmann [R] :

(11) <u>COROLLAIRE</u>.- Soit $X \in \underline{k}$ un élément tel que $\omega_n^+(X)$ soit non nul. On a :

$$\nu(X) = \frac{(-1)^{\#\Delta_n^+}}{\omega_n^+(X)}\ \theta_\Lambda^{\underline{k}}\ (X)\ .$$

Si $X \in \underline{t}$ est régulier dans $\underline{g}$, cette formule se lit :

$$\nu(X) = (-1)^{\#\Delta_n^+} \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\Lambda(X)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(X)} \tag{12}$$

II.- UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DU CARACTÈRE DE KIRILLOV

II.1.- LA METHODE DE DESCENTE D'HARISH-CHANDRA (cf. [H-C. 2])

Soient G un groupe de Lie, $\underline{g}$ son algèbre de Lie, x un automorphisme de G dont la différentielle, notée encore x, soit un automorphisme semi-simple de $\underline{g}$. On note Z le groupe des points fixes de x dans G, $\underline{z}$ son algèbre de Lie. On pose $\underline{q} = (1 - x)\underline{g}$. Comme x est semi-simple, on a

(1) $\qquad \underline{g} = \underline{z} \oplus \underline{q}$.

Considérons l'action de G sur lui-même donnée par la formule :

(2) $\qquad g \cdot h = g\,h\,x(g^{-1})$.

Soient $g_o \in G$, $z_o \in Z$. La différentielle de l'application $(g,z) \to g \cdot z$ de $G \times Z$ dans G est surjective en (g_o, z_o) si et seulement si l'on a :

(3) $\qquad \det((1 - \mathrm{ad}Z_o \cdot x) \mid \underline{q}) \neq 0$.

On note ${}^1Z$ l'ensemble des $z_o \in Z$ vérifiant (3). L'application $(g,z) \to g \cdot z$ de $G \times {}^1Z$ dans G est donc submersive.

Soit ψ une fonction généralisée sur G, invariante par l'action (2) :

(4) $\qquad \psi(h) = \psi(g\,h\,x(g^{-1}))$ $\qquad$ pour $h \in G$, $g \in G$.

Alors, d'après (A.4.3), ψ admet une restriction ψ_x à ${}^1Z$, ψ_x détermine ψ dans l'ouvert $G \cdot {}^1Z$ de G, et ψ_x est invariante par les automorphismes intérieurs de Z.

1er EXEMPLE.- Soit T une représentation traçable de G. Soit S(x) un opérateur borné dans l'espace de la représentation T tel que l'on ait :

$$T(x(g)) = S(x)T(g)S(x)^{-1} \qquad \text{pour tout } g \in G.$$

La fonction généralisée ψ sur G définie par

$$\psi(\alpha) = \mathrm{tr}(T(\alpha)S(x)) \qquad (\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G))$$

vérifie (4).

2° EXEMPLE.- Soit Θ une fonction généralisée sur G invariante par les automorphismes intérieurs. Soit s un élément de G tel que ad s soit semi-simple dans $\underline{g}$, et posons x = Ad s . La fonction $\Psi(s) = \Theta(gs)$ vérifie (4), et la distribution ψ_x détermine Θ dans un voisinage de s.

Définissons la fonction $j_{\underline{z}}$ sur $\underline{z}$ comme dans l'introduction, formule (8). Soit W un voisinage de 0 dans $\underline{z}$ dans lequel $j_{\underline{z}}$ est à valeurs > 0 et tel que exp(W) soit contenu dans ${}^1Z$. Suivant Harish-Chandra, on définit une fonction généralisée $\check{\Psi}_x$ dans W en posant :

$$(5) \qquad \check{\Psi}_x(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - e^{adX}x) \mid \underline{q})|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - x) \mid \underline{q})|^{1/2}} \Psi(e^X) \quad .$$

($X \in W$. On a écrit, par abus de notation $\Psi_x(e^X) = \Psi(e^X)$).

Lorsque ψ est obtenu par le procédé de l'exemple 2, nous la noterons $\tilde{\Theta}_s$:

$$(6) \qquad \tilde{\Theta}_s(X) = j_{\underline{z}}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - ad(e^X s) \mid \underline{q})|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - ad\, s) \mid \underline{q})|^{1/2}} \Theta(e^X s) \qquad (X \in W) \; .$$

* * *

Soit T une représentation unitaire irréductible traçable de G. Soit Θ son caractère, c'est-à-dire la fonction généralisée $\Theta(\alpha) = \mathrm{tr}\, T(\alpha)$ ($\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$). Si Ω est une orbite de G dans $\underline{g}^*$, nous dirons que Ω est tempérée si sa mesure de Liouville β_Ω, considérée comme mesure sur $\underline{g}^*$ concentrée dans Ω, est tempérée. Sa transformée de Fourier

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = \int_{\underline{g}^*} e^{if(X)} \, d\beta_\Omega(f)$$

est une fonction généralisée dans $\underline{g}$ que nous appellerons la transformée de Fourier de Ω. La formule du caractère de Kirillov postule l'existence, si T est suffisamment générique, d'une orbite Ω tempérée et d'une constante $c \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$(7) \qquad c\,\hat{\beta}_\Omega = \tilde{\Theta}_1 \qquad \text{dans } W.$$

Cette formule a été démontrée dans de nombreux cas (cf. en particulier [Ki], [Kh], [R]).

Supposons maintenant G réductif et connexe. Supposons que Θ soit le caractère d'une représentation de carré intégrable (modulo le centre) T de G, unitaire et irréductible. Soit s un élément de G tel que ad s soit elliptique (i.e. semi-simple à valeurs propres imaginaires pures). Alors, par construction même de Θ dans [H.C, 3], $\tilde{\Theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Nous calculons dans le parag. 3 de quelle combinaison linéaire il s'agit. Soit Ω l'orbite de G dans $\underline{g}^*$ associée à T par Harish-Chandra. D'après [R], (7) est valable avec $c = 1$. Remarquons que (1) permet d'identifier $\underline{z}^*$ à un sous-espace de $\underline{g}^*$. Alors $\Omega \cap \underline{z}^*$ est l'ensemble des points fixes de s dans Ω, et égal à une réunion finie d'orbites de Z.

Nous définissons sur $\underline{z}^* \cap \Omega$ une fonction φ_s constante sur chaque orbite de Z, et telle que l'on ait dans W l'égalité de fonctions généralisées :

$$(8) \qquad \tilde{\Theta}_s(X) = \int_{\underline{z}^*} e^{if(X)} \varphi_s(f)\, d\beta_{\Omega\cap\underline{z}^*}(f)$$

Pour $s = 1$, c'est la formule (7). Nous pensons que (8) est "universelle" au même titre que la formule de Kirillov (7). C'est pourquoi nous décrivons la fonction φ_s en terme de la structure symplectique de Ω, en mettant en évidence son rapport avec la représentation métaplectique.

II.2.- UNE FONCTION SUR LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE

Soit V un espace vectoriel symplectique réel, et soit B sa structure symplectique. On note SP(V) le groupe symplectique, et MP(V) le groupe métaplectique. C'est donc une extension centrale

$$(9) \qquad 1 \to \{1,e\} \to Mp(V) \to Sp(V) \to 1 \quad .$$

Nous notons en général $\tilde{x}$ un élément de MP(V) et x son image dans Sp(V).

Rappelons - pour fixer les conventions - la construction de la représentation métaplectique. Posons $\underline{n} = V \oplus \mathbb{R}E$. On munit $\underline{n}$ de la structure d'algèbre de Lie pour laquelle E est central et

$$(10) \qquad [v,v'] = B(v,v')E \quad , \quad \text{pour } v,v' \in V.$$

On note N le groupe simplement connexe correspondant.Sp(V) opère dans $\underline{n}$

par la formule $x(v \oplus t E) = x(v) \oplus t E$, et donc dans N.

On sait (théorème de Stone - Von-Neumann) qu'il existe une représentation unitaire irréductible T de N, et une seule à équivalence près, telle que

$$(11) \qquad T(e^{tE}) = e^{it}\,Id.$$

Notons $\mathcal{H}$ l'espace de T. On sait (Ségal, Shale , Weil) qu'il existe une représentation unitaire unique S de Mp(V) dans $\mathcal{H}$ telle que :

$$(12) \qquad S(\tilde{x})T(n)S(\tilde{x})^{-1} = T(x(n))$$

pour tout $\tilde{x} \in Mp(V)$ et $n \in N$, et

$$(13) \qquad S(e) = -\,Id \quad .$$

Soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien du complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V. C'est une sous-algèbre de Lie de $\underline{n}_{\mathbb{C}}$, et donc $\underline{\ell}$ opère dans l'espace $\mathcal{H}^{\infty}$ des vecteurs différentiables de la représentation T. On note $q(\underline{\ell})$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice associée à la forme hermitienne $v \to iB(v,\bar{v})$ sur $\underline{\ell}$. On sait (cf. [Du] ch. I) que

$$(14) \qquad H_j(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty}) = \{0\} \qquad \text{si } j \neq q(\underline{\ell})$$

$$(15) \qquad \dim H_{q(\underline{\ell})}(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty}) = 1 \quad .$$

Soit $\tilde{x}$ un élément de Mp(V) stabilisant $\underline{\ell}$. Il opère dans $H_{q(\underline{\ell})}(\underline{\ell},\mathcal{H}^{\infty})$. On note $\rho_{\ell}(\tilde{x})$ le scalaire obtenu. On a ([Du], ch. I)

$$(16) \qquad \rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})^2 = \det(x \mid \underline{\ell})$$

$$(17) \qquad \rho_{\underline{\ell}}(e) = -1 \quad .$$

Posons $V' = (1 - x)V$. Notons $n_{\underline{\ell}}(x)$ le nombre, compté avec multiplicité, de valeurs propres de x dans $\underline{\ell} \cap \overline{V}$ qui sont dans l'intervalle $]1,\infty[$. Notons $q_{\underline{\ell}}(x) = q(\underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})$. Posons

$$(18) \qquad \phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = (-1)^{n_{\underline{\ell}}(x)+q_{\underline{\ell}}(x)}\,\rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})\det((1 - x) \mid \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})^{-1} \quad .$$

(19) LEMME.- Soient $\underline{\ell}$ et $\underline{\ell}'$ deux sous-espaces lagrangiens de $V_{\mathbb{C}}$, et $\tilde{x} \in Mp(V)$ stabilisant $\underline{\ell}$ et $\underline{\ell}'$. On a

$$\Phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = \Phi_{\underline{\ell}'}(\tilde{x}) \quad .$$

DÉMONSTRATION.- Posons

(20) $$\underline{m} = \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}} \ , \quad \underline{m}' = \underline{\ell}' \cap V'_{\mathbb{C}}.$$

Les espaces $\underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}'$ et $\underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}'$ sont en dualité non dégénérée x-invariante. On a donc :

(21) $$\det((1 - x) \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') = \det((1 - x^{-1}) \mid \underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}')$$
$$= (-1)^{\dim \underline{m}'/\underline{m}\cap\underline{m}'} \det(x \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') \det((1 - x) \mid \underline{m}'/\underline{m} \cap \underline{m}') \quad .$$

De manière évidente on a :

(22) $$\det(x \mid \underline{m}/\underline{m} \cap \underline{m}') = \det(x \mid \underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}').$$

Dans [Du], ch I, il est montré qu'il existe un nombre $\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) \in \{\pm 1\}$ tel que

(23) $$\rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x})/\rho_{\underline{\ell}'}(\tilde{x}) = \det(x \mid \underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \ \varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) \quad .$$

Le lemme (19) résulte donc du lemme suivant.

(24) LEMME.- Les notations étant comme en (20) et (23), on a :

$$\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) = (-1)^{n_{\underline{\ell}}(x)+n_{\underline{\ell}'}(x)+q_{\underline{\ell}}(x)+q_{\underline{\ell}'}(x)+\dim \underline{m}/\underline{m}\cap\underline{m}'} \quad .$$

DÉMONSTRATION.- Si V est somme directe de deux sous-espaces symplectiques V_1 et V_2, stables par x, et tels que $\underline{\ell} = (\underline{\ell} \cap V_{1,\mathbb{C}}) \oplus (\underline{\ell} \cap V_{2,\mathbb{C}})$ et de même pour $\underline{\ell}'$, on voit facilement qu'il suffit de démontrer les assertions correspondantes pour les restrictions de x à V_1 et V_2. Nous sommes ramenés à démontrer (24) dans les trois cas suivants :

1er cas : x = 1. C'est clair.

2ème cas : Les valeurs propres de x ne sont pas positives. Dans ce cas

$n_{\underline{\ell}}(x) = n_{\underline{\ell}'}(x) = 0$, et (24) est la formule donnée dans [Du], I,10.

$3^{\text{ème}}$ cas : Les valeurs propres de x sont positives et différentes de 1. Dans ce cas on sait ([Du], I.10) que $\varepsilon_{\underline{\ell},\underline{\ell}'}(x) = 1$. Il faut donc montrer que l'exposant de (-1) dans (24) est pair.

Posons $\underline{r} = \underline{\ell}/(\underline{\ell} \cap V_{\mathbb{C}})$, $U = \underline{\ell} \cap V$, $S =$ (orthogonal de U dans V), $W = S/U$. Alors $\underline{r}$ est un sous-espace lagrangien de W, totalement complexe. Soit λ une valeur propre de x dans $\underline{r}$. Comme λ est réel, λ est valeur propre dans $\bar{\underline{r}}$ (le conjugué de $\underline{r}$) avec la même multiplicité. Par dualité, λ^{-1} est valeur propre dans $\underline{r}$ avec la même multiplicité. Les espaces propres correspondants sont totalement isotropes pour la forme $v \to iB(v,\bar{v})$. On voit que la dimension de $\underline{r}$ est paire et égale à $2q_{\underline{\ell}}(x)$. Si $\underline{s}$ est un espace x-stable, on note $m(\underline{s})$ le nombre de valeurs propres de x dans $\underline{s}$ qui sont dans l'intervalle $]1,\infty[$, comptées avec multiplicité. On a $q_{\underline{\ell}}(x) = m(\underline{r})$, et donc $q_{\underline{\ell}}(x) + n_{\underline{\ell}}(x) = m(\underline{\ell})$. De même $q_{\underline{\ell}'}(x) + n_{\underline{\ell}'}(x) = m(\underline{\ell}')$.

Les espaces $\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}'$ et $\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}'$ étant en dualité non dégénérée x-invariante, on a $m(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + m(\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') = \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}')$.
Soit e l'exposant de (-1) dans (18). On a

$$\begin{aligned} e &= m(\underline{\ell}) + m(\underline{\ell}') + \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= m(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + m(\underline{\ell}'/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + 2m(\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + \dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= 2\dim(\underline{\ell}/\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') + 2m(\underline{\ell} \cap \underline{\ell}') \\ &= 0 \bmod(2). \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Soit $\tilde{x} \in M_p(V)$. Il existe un sous-espace lagrangien $\underline{\ell}$ de $V_{\mathbb{C}}$ stable par x. On pose :

$$(25) \qquad \Phi(\tilde{x}) = \Phi_{\underline{\ell}}(\tilde{x}).$$

La définition (25) est légitime à cause du lemme (19). De (17), on déduit

$$(26) \qquad \Phi(\tilde{x}) = -\Phi(e\tilde{x}).$$

En vue du paragraphe 3, nous calculons Φ dans un cas particulier. Soit

$X \in \underline{sp}(V)$ un élément elliptique (i.e. semi-simple à valeurs propres imaginaires pures). Posons $\tilde{x} = \exp(X) \in Mp(V)$. Soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien de $V_{\mathbb{C}}$ stable par X. On pose $\rho_{\underline{\ell}}(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X \mid \underline{\ell})$. On a

$$(27) \qquad \Phi(\tilde{x}) = (-1)^{q_{\underline{\ell}}(x)}\, e^{\rho_{\underline{\ell}}(X)} \det((1 - x) \mid \underline{\ell} \cap V'_{\mathbb{C}})^{-1}$$

En effet, considérons le stabilisateur de $\underline{\ell}$ dans Mp(V). Alors $\rho_{\underline{\ell}}$ est un caractère de ce sous-groupe, et donc $\rho_{\underline{\ell}}(\tilde{x}) = e^{\rho_{\underline{\ell}}(X)}$. D'autre part, $n_{\underline{\ell}}(x) = 0$.

La fonction Φ est essentiellement le caractère de la représentation métaplectique S. Considérons d'abord un élément $\tilde{x} \in Mp(V)$, régulier dans Mp(V), c'est-à-dire dont le centralisateur dans sp(V) est une sous-algèbre de Cartan. On sait que S est une représentation traçable de Mp(V), et (d'après Harish-Chandra) que son caractère est différentiable au voisinage de $\tilde{x}$. Nous noterons tr $S(\tilde{x})$ sa valeur en $\tilde{x}$. D'après [T], on a

$$(28) \qquad \Phi(\tilde{x}) = \mathrm{tr}\, S(\tilde{x}).$$

<u>REMARQUE</u>.- On peut interpréter (28) comme une formule d'Euler-Poincaré. Soit $\tilde{x} \in Mp(V)$ un élément régulier, et soit $\underline{\ell}$ un sous-espace lagrangien stable par x de $V_{\mathbb{C}}$. Remarquant que $(1 - x)V = V$, tenant compte de (28), (18), (15), (14), et supposant $n_{\underline{\ell}}(x) = 0$, on a :

$$(29) \qquad \det((1 - x) \mid \underline{\ell})\ \mathrm{tr}\, S(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathrm{tr}(\tilde{x} \mid H_i(\underline{\ell}, \mathcal{H}^{\infty})).$$

Cette formule "formellement évidente" est donc valable avec des restrictions analogues ($n_{\underline{\ell}}(x) = 0$) à celles que l'on rencontre dans la conjecture d'Osborne (cf. [He - S. 2]).

Nous généralisons (28) à tous les éléments $\tilde{x} \in Mp(V)$ tels que x soit semi-simple, en utilisant la méthode de descente. Soit Ω l'ensemble des $f \in \underline{n}^*$ tels que $f(E) = 1$. On sait que c'est une orbite de N dans $\underline{n}^*$, et que la formule de Kirillov est valable : dans $\underline{n}$ on a l'identité de fonctions généralisées

$$(30) \qquad \mathrm{tr}\, T(e^X) = \int_\Omega e^{if(X)}\, d\beta_\Omega(f) \quad .$$

Comme dans l'exemple 1 du § 1, on définit une fonction généralisée $tr(T(n)S(\tilde{x}))$ sur N, le sous-groupe Z des points fixes de x dans N, et la décomposition (1) de $\underline{n}$. Sur $\underline{z}$ la fonction généralisée donnée par la formule (5) devient $tr(T(e^X)S(\tilde{x}))$.

(31) <u>THÉORÈME</u>.- Dans $\underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées :

$$tr(T(e^X)S(\tilde{x})) = \phi(\tilde{x}) \int_{\Omega\cap\underline{z}^*} e^{if(X)}\, d\beta_{\Omega\cap\underline{z}^*}(f) \quad .$$

La démonstration se fait comme celle de (28) dans [T]. Nous n'en disons pas plus, car nous n'utiliserons pas le théorème. Son intérêt pour nous est de justifier la définition (25). Remarquons que, pour $\tilde{x} = 1$, (31) est la formule de Kirillov (30) et pour $\tilde{x}$ régulier, la formule (28).

II.3.- <u>LE CAS DE LA SÉRIE DISCRÈTE DES GROUPES SEMI-SIMPLES CONNEXES</u>

Dans ce paragraphe, G est un groupe de Lie semi-simple connexe. On fixe une décomposition de Cartan $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ de $\underline{g}$, on note K le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\underline{k}$. On sait que K contient le centre Γ de G et que K/Γ est compact. On suppose que $\underline{k}$ et $\underline{g}$ ont le même rang. Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$. On choisit un élément $\lambda \in \underline{t}^*$, régulier dans $\underline{g}^*$. On note $\Omega = G\lambda$. On emploie les notations du paragraphe I.2. On pose :

(1) $$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \quad .$$

On dit que λ est admissible si $\Lambda + \rho$ est différentielle d'un caractère de T. Dans la suite, nous supposons λ admissible.

A λ, Harish-Chandra associe dans [H-C. 3] une fonction généralisée Θ_λ sur G. Rappelons-en la définition. Soit $\ell = \dim \underline{t}$. Soit, pour $g \in G$, $D(g)$ le coefficient de t^ℓ dans $\det(t + 1 - ad(g))$. Soit G' l'ensemble des éléments réguliers de G. Si Θ est une fonction généralisée sur G invariante par automorphismes intérieurs, et vecteur propre pour l'action de $Z(\underline{g})$, Θ est C^∞ dans G'.

D'après [H-C . 3], il existe une et une seule fonction généralisée, notée Θ_λ sur G, invariante par automorphismes intérieurs, vecteur propre pour $Z(\underline{g})$, telle que $|D|^{1/2}|\Theta_\lambda|$ soit bornée sur G', et telle que, pour tout

$X \in \underline{t}$ tel que $e^X \in G'$, on ait :

(2) $$\Theta_\lambda(e^X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{i\, w\lambda(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} (e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)})}$$

(Harish-Chandra suppose Γ fini, mais cela n'est pas nécessaire). Dans [H-C. 4], Harish-Chandra montre que Θ_λ est le caractère d'une représentation unitaire irréductible de G, que nous noterons T_λ. Nous poserons $\Theta = \Theta_\lambda$.

Soit s un élément de T. L'automorphisme ads de $\underline{g}$ est elliptique. Nous employons les notations $\underline{z}$ et $\underline{q}$ du paragraphe 1. Nous posons $\Omega_s = \underline{z}^* \cap \Omega$. C'est l'ensemble des points fixes de s dans Ω. L'ensemble Ω_s est une sous-variété symplectique de Ω. Il est réunion d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$ et la seconde structure symplectique dont il est muni coïncide avec la première.

Soit $f \in \Omega$. On note G(f) le centralisateur de f dans G et $\underline{g}(f)$ son algèbre de Lie. On munit $\underline{g}/\underline{g}(f)$ de la structure symplectique déduite de $X,Y \to f[X,Y]$ par passage au quotient. On note $\widetilde{G(f)}$ l'ensemble des couples (g,m) où $g \in G(f)$, $m \in Mp(\underline{g}/\underline{g}(f))$ ont même image dans $Sp(\underline{g}/\underline{g}(f))$. On note encore e l'élément (1,e) de $\widetilde{G(f)}$. Comme G(f) est connexe (car conjugué de $G(\lambda) = T$) et comme λ est admissible, il existe un caractère χ_f et un seul de $\widetilde{G(f)}$ tel que l'on ait :

(3) $$\chi_f(e) = -1$$

(4) $$\chi_f(e^X) = e^{if(X)} \qquad X \in \underline{g}(f) \quad .$$

Soit $(g,m) \in \widetilde{G(f)}$. Rappelons la définition (2.25) de la fonction Φ sur $Mp(\underline{g}/\underline{g}(f))$. On pose

(5) $$\varphi_g(f) = \chi_f((g,m)^{\cdot})\Phi(m) \quad .$$

A cause de (3) et (2.26), $\varphi_g(f)$ ne dépend pas du choix de $(g,m) \in \widetilde{G(f)}$ représentant g. Par transport de structure, on a, pour tout $h \in G$, $f \in \Omega$, $g \in G(f)$:

(6) $$\varphi_{hgh^{-1}}(hf) = \varphi_g(f)$$

Si $f \in \Omega_s$, on a évidemment $s \in G(f)$, de sorte que φ_s est une fonction bien définie sur Ω_s, et la formule (1.19) montre qu'elle est constante sur les orbites de Z dans Ω_s, et en particulier localement constante.

Soit $\varepsilon > 0$. On note $\mathcal{V}_\varepsilon$ l'ensemble des $X \in \underline{g}$ tels que les valeurs propres ζ de $\mathrm{ad}X$ vérifient $|\mathrm{Im}(\zeta)| < \varepsilon$ ($\mathrm{Im}(\zeta)$ est la partie imaginaire de ζ). Comme $\mathrm{ad}s$ est elliptique, si ε est assez petit (dépendant de s), l'ouvert $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$ vérifie les conditions de l'ouvert $\mathcal{W}$ du paragraphe 1. Dans $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$, on définit la fonction généralisée Θ_s par la formule (1.6).

(7) THÉORÈME.- Dans $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$, on a l'identité de fonctions généralisées

$$\tilde{\Theta}_s(X) = \int_{\Omega_s} e^{if(X)}\, \varphi_s(f)\,d\beta_{\Omega_s}(f) \quad .$$

REMARQUES.- 1) Pour $s = 1$, (7) est la formule de Kirillov, démontrée dans ce cas par Rossmann.

2) On notera l'analogie de (7) et (2.31).

3) Par construction même de Θ dans [H-C. 3], $\tilde{\Theta}_s$ est une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z dans $\underline{z}^*$. Le théorème (7) décrit cette combinaison linéaire.

DÉMONSTRATION.- Définissons une fonction généralisée sur $\underline{z}$ par la formule :

$$\nu_s(X) = \int_{\Omega_s} e^{if(X)}\, \varphi_s(f)\,d\beta_{\Omega_s}(f) \quad . \tag{8}$$

D'après [H-C .3], $\tilde{\Theta}_s$ est une restriction à $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{z}$ d'une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de la forme $Z\,\lambda_i$, où les λ_i sont des éléments de $\underline{t}^*$ réguliers dans $\underline{g}^*$. Il en est de même de ν_s. Donc $\tilde{\Theta}_s$ et ν_s sont différentiables en tout point X de $\underline{t}$ régulier dans $\underline{z}$. Le théorème d'unicité ([H-C. 3], corollaire du lemme 28) montre qu'il suffit, pour démontrer (7), de démontrer que pour tout X d'un ouvert dense de $\mathcal{V}_\varepsilon \cap \underline{t}$ formé d'éléments réguliers, on a :

$$\tilde{\Theta}_s(X) = \nu_s(X) \quad . \tag{9}$$

Or ceci est en principe facile : $\tilde{\Theta}_s(X)$ est donné par la formule (2), et $\nu_s(X)$ par la formule de Rossmann (I.5.12), appliquée à chacune de orbites de la composante neutre Z^o de Z dans Ω_s. (On pourrait, mais sans doute au détriment de la clarté, abréger les calculs ci-dessous en s'appuyant encore plus ceux de [H-C. 3], qui donne des formules pour $\tilde{\Theta}_s$. (Inversement, la formule (7) permettrait de simplifier l'exposé de [H-C. 3] de l'existence de Θ).

Nous procédons au calcul de $\nu_s(X)$, pour $X \in \underline{t}$.

Rappelons que W est le normalisateur de T dans G, modulo T. Comme en (I.2), on note W_o le normalisateur de T dans Z^o, modulo T, et on choisit le même système de représentant W^1 des classes $W_o \backslash W$. Comme dans le lemme (I.2.7), on a :

(10) $$\Omega_s = \bigcup_{\sigma \in W^1} Z^o \sigma\lambda \qquad \text{(réunion disjointe).}$$

Notons ν_σ la fonction généralisée sur $\underline{z}$ transformée de Fourier de l'orbite $Z^o\sigma\lambda$:

(11) $$\nu_\sigma(X) = \int_{Z^o\sigma\lambda} e^{if(X)} d\beta_{Z^o\sigma\lambda}(f) \quad .$$

Comme en (I.4), nous notons Δ^o l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{z}_{\mathbb{C}}$, Δ^1 l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{q}_{\mathbb{C}}$, de sorte que

(12) $$\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^o \qquad \text{(réunion disjointe).}$$

On pose $\Delta^1_n = \Delta^1 \cap \Delta_n$, $\Delta^{1,+} = \Delta^1 \cap \Delta^+$, $\underline{p}_o = \underline{p} \cap \underline{z}$, $\underline{p}_1 = \underline{p} \cap \underline{q}$, $\underline{k}_1 = \underline{k} \cap \underline{z}$, $\underline{k}_o = \underline{k} \cap \underline{q}$, $\rho = \rho_o + \rho_1$, etc... On pose

(13) $$m_\sigma = \# \{\alpha \in \Delta^{o,+},\ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\} \quad .$$

D'après la formule de Rossmann (I.5.12), on a

(14) $$\nu_\sigma(X) = (-1)^{m_\sigma + \frac{1}{2}\dim \underline{p}_o} \frac{\sum_{w \in W_o} \varepsilon(w)\, e^{iw\sigma\lambda(X)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^{o,+}} \alpha(X)} \quad .$$

Calculons $\varphi_s(\sigma\lambda)$. On a $G(\sigma\lambda) = T$. Soit $Y \in \underline{t}$ tel que $e^Y = s$. Posons $\underline{\ell} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \underline{g}_\alpha$, où $\underline{g}_\alpha$ est le sous-espace radiciel correspondant à α. Alors $\underline{\ell}$, identifié à un sous-espace de $(\underline{g}/\underline{g}(\sigma\lambda))_{\mathbb{C}}$, est lagrangien et stable par

$G(\sigma\lambda)$.

Notons $q(\sigma)$ le nombre de valeurs propres < 0 de la matrice représentant la forme hermitienne $i\sigma\lambda[X,\bar{X}]$ sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{l}$. Il résulte de (2.27) et (5) que l'on a

(15) $$\varphi_s(\sigma\lambda) = (-1)^{q(\sigma)} \frac{e^{(i\sigma\lambda+\rho)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} (1-e^{\alpha(Y)})}$$

Comme $e^Y = s$ appartient à Z, il est facile de voir que l'on a :

(16) $$e^{iw\sigma\lambda(Y)} = e^{i\sigma\lambda(Y)} \quad \text{pour } w \in W_o \ .$$

On peut donc écrire :

(17) $$\varphi_s(\sigma\lambda)\nu_G(X) = \frac{e^{\rho_o(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} \left(e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)}\right)} \times \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \alpha(X)} \times$$

$$\times \sum_{w\in W_1} \tau(\sigma)\ \varepsilon(w\sigma)\ e^{iw\sigma\lambda(X+Y)}$$

où l'on a posé

(18) $$\tau(\sigma) = (-1)^{m_\sigma + \frac{1}{2}\dim \mathfrak{p}_o + \#\Delta^{1,+} + q(\sigma)}\ \varepsilon(\sigma) \ .$$

Calculons $\tau(\sigma)$. Posons

(19) $$n_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_n^{1,+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\}$$

$$p_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_n^{1,+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in \Delta^+\}$$

$$\ell_\sigma = \#\{\alpha \in \Delta_c^{+} \ , \ \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\} \ .$$

On sait que l'on a :

(20) $$q(\sigma) = n_\sigma + p_\sigma \ .$$

Par hypothèse, σ permute $\Delta_c^{o,+}$ (car $\sigma \in W^1$). Donc

(21) $$\ell_\sigma + p_\sigma + \# \Delta_c^{o,+} = \# \Delta_c^+ \ .$$

On calcule $\varepsilon(\sigma) = \det(\sigma \mid \underline{t})$ de deux manières, suivant que σ est considéré comme élément du groupe de Weyl de Δ_c ou de Δ. On a :

(22) $$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell_\sigma}$$

et posant $t_\sigma = \# \{\alpha \in \Delta^+, \sigma^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\}$

(23) $$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{t_\sigma} \ .$$

On voit donc que

(24) $$n_\sigma = m_\sigma \bmod(2).$$

De (18), (20), (21), (22) et (24), on déduit que $\tau(\sigma)$ est indépendant de σ ; plus précisément :

(25) $$\tau(\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \ .$$

Par définition de ν_s, et compte tenu de (10), on a

(26) $$\nu_s(X) = \sum_{\sigma \in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\, \nu_\sigma(X) \ .$$

On trouve :

(27) $$\nu_s(X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}} \frac{e^{\rho_o(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} (e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)})} \times \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \alpha(X)} \times \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{iw\lambda(X+Y)}$$

Calculons $\tilde{\Theta}_s(X)$. On a :

$$(28)\qquad j_{\underline{z}}(X) = \prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}}{\alpha(X)} ,$$

$$(29)\qquad \frac{|\det(1 - \mathrm{ad}(se^X) \mid \underline{q}|^{\frac{1}{2}}}{|\det(1 - \mathrm{ad}s) \mid \underline{q})|^{\frac{1}{2}}} = \prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X+Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X+Y)}}{e^{\frac{\alpha}{2}(Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(Y)}}$$

(C'est évident à un facteur près ne dépendant pas de X. On fixe la constante en faisant $X = 0$).

$$(30)\qquad \prod_{\alpha\in\Delta^{o,+}} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(X+Y)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X+Y)}}{e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}} = e^{\rho_o(Y)} ,$$

En rassemblant (1.6), (2), (28), (29), (30) et (27), on obtient $\tilde{\Theta}_s(X) = \nu_s(X)$.

C.Q.F.D.

III.- UNE DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE BLATTNER

III.1.- ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Les notations sont celles de II.3. En particulier Θ est la fonction généralisée sur G associée à l'élément $\lambda \in \underline{t}^*$.

Notons $P \subset i\underline{t}^*$ le sous-groupe formé des éléments qui sont différentielles d'un élément de T. Notons

$$\rho_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_c^+} \alpha, \quad \rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \alpha ,$$

de sorte que $\rho = \rho_c + \rho_n$.

Pour tout élément $\mu \in i\underline{t}^*$, et tel que $\mu + \rho_c$ soit dans P, nous notons Ψ_μ la fonction analytique sur K invariante par automorphismes intérieurs, dont la restriction à T est donnée par la formule

$$(1) \qquad \Psi_\mu(e^X) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\mu(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^+} \left(e^{\frac{\alpha}{2}(X)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(X)}\right)}$$

Si μ est dominant et régulier, Ψ_μ est le caractère de la représentation unitaire irréductible de K de poids dominant $\mu - \rho_c$, d'après la formule de Weyl. De plus, $\Psi_{\sigma\mu} = \varepsilon(\sigma)\Psi_\mu$ pour tout $\sigma \in W$ et $\Psi_\mu = 0$ si μ n'est pas régulier.

Rappelons la définition de la fonction de partition Q sur $\sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \mathbb{N}\alpha$ (I.5.4), et de la restriction Θ^K de Θ à K (A.5.2).

(2) THÉORÈME (Hecht - Schmid [He-S. 1]). On a

$$(3) \qquad \Theta^K = \sum_{\mu\in\sum_{\alpha\in\Delta_n^+} \mathbb{N}\alpha} Q(\mu)\, \Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu} ,$$

la série convergeant faiblement dans l'espace des fonctions généralisées sur K.

La formule (3) est appelée formule de Blattner. Compte tenu de (A.5.3) Θ^K est le caractère de la représentation T_λ^K , restriction de T_λ à K. La formule (3) permet de calculer la décomposition de T_λ^K en facteurs irréductibles (cf. [He-S. 1]).

Nous donnons dans ce chapitre une nouvelle démonstration de (2), comme application des résultats des chapitres précédents. Nous n'utilisons pas le fait que Θ est le caractère d'une représentation unitaire irréductible, et nous n'utilisons pas non plus le principe de continuation cohérente. Notre démonstration est donc différente de celle de Hecht et Schmid [He-S. 1], et de celle de Enright [E]. En fait, puisque nous avons même redémontré la formule de Rossmann, notre démonstration de (2) n'utilise "que" les articles d'Harish-Chandra jusqu'à [H-C. 3].

III.2.- DÉMONSTRATION DU THÉORÈME : RÉDUCTION AU LEMME (III.3.1)

Démontrons la convergence de (3). Elle résulte des deux lemmes bien connus ci-dessous.

(1) LEMME.- (cf. e.g. [C-R]). Soit $\mathcal{P}$ un réseau contenu dans P, et a une fonction sur $\mathcal{P}$. On suppose qu'il existe une norme $\| \cdot \|$ sur it^* et des constantes $b > 0$, $c > 0$ telles que $|a(\mu)| \leq b(\|\mu\| + 1)^c$. Alors la série $\sum_{\mu \in \mathcal{P}} a(\mu)\Psi_{\mu+\rho_c}$ converge faiblement dans l'espace des fonctions généralisées sur K.

(L'introduction de $\mathcal{P}$ n'est utile que lorsque le centre Γ de G est infini).

(2) LEMME.- La fonction $Q(\mu)$ vérifie une inégalité de la forme

$$|Q(\mu)| \leq b(\|\mu\| + 1)^{\#\Delta_n^+}$$

(Le lemme n'a rien à voir avec le fait que Δ_n^+ provient d'un système de racine et se démontre facilement par récurrence sur $\#\Delta_n^+$).

Nous posons $C = \Theta^K$, et

(3) $$B = \sum_{\mu} Q(\mu)\, \Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu}$$

Les fonctions généralisées B et C sont invariantes par automorphismes intérieurs. Pour démontrer qu'elles sont égales, il suffit de vérifier qu'elles coïncident dans un voisinage de chaque point $s \in T$.

Fixons $s \in T$. Nous employons les notations Z, Z^o, $\underline{z}$, $\underline{q}$, $\underline{k}_o = \underline{z} \cap \underline{k}$, $\underline{p}_o = \underline{z} \cap \underline{p}$, $\underline{p}_1 = \underline{p} \cap \underline{q}$, $\underline{k}_1 = \underline{k} \cap \underline{q}$. La méthode de descente, appliquée à K, nous amène à considérer, pour toute fonction généralisée D sur K invariante par automorphismes intérieurs, la fonction généralisée $\widetilde{D}_s$ définie dans $\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$ par la formule (cf. II.1.5) :

(4) $$\widetilde{D}_s(X) = j_{\underline{k}_o}(X)^{\frac{1}{2}} \frac{|\det((1 - se^X) \mid \underline{k}_1)|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - s) \mid \underline{k}_1)|^{\frac{1}{2}}} \widetilde{D}(e^X s)$$

(On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que tout ce qui suit soit exact). D'après (II.1), pour démontrer l'égalité de B et C dans un voisinage de s, il suffit de montrer

(5) $$\widetilde{B}_s = \widetilde{C}_s \quad \text{dans} \quad \underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$$

D'après (A.4.4), on a :

(6) $$\widetilde{B}_s = \sum_{\mu} Q(\mu)(\Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu})^{\sim}_s \quad .$$

Considérons d'autre part la fonction généralisée $\widetilde{\Theta}_s$ dans $\underline{z} \cap \mathcal{V}_\varepsilon$. C'est, d'après le théorème (II.3.7), une combinaison linéaire de transformées de Fourier d'orbites de Z^o dans $\underline{z}^*$. D'après (A.6.3), elle admet une restriction $\widetilde{\Theta}_s^{\cdot\underline{k}_o}$ à $\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon$. La propriété de transitivité d'image réciproque de fonctions généralisées (A.3.5), appliquée aux injections :

(7) $$\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{z} \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{g}$$

(9) $$\underline{k}_o \cap \mathcal{V}_\varepsilon \subset \underline{k} \subset \underline{g}$$

(et à l'image de ces ensembles dans G) permet de comparer $\tilde{C}_s$ et $\tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o}$. Posons pour $X \in \underline{z} \cap \underline{k} \cap \mathcal{V}_\varepsilon$:

$$(10) \qquad j_{\underline{p}_o}(X) = \det\left(\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\mathrm{ad}X} - e^{-\frac{1}{2}\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}X}\right) \Big| \underline{p}_o\right), \quad \eta(X) = \frac{|\det((1 - se^X) \mid \underline{p}_1)|^{\frac{1}{2}}}{|\det((1 - s) \mid \underline{p}_1)|^{\frac{1}{2}}}.$$

Ce sont des fonctions analytiques invariantes par $Z^o \cap K$, partout > 0, On a :

$$(11) \qquad \tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}} \eta\, \tilde{C}_s .$$

Finalement, nous devons démontrer que l'on a :

$$(12) \qquad \tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}} \eta \sum_\mu Q(\mu)(\Psi_{i\lambda+\rho_n+\mu})_s^{\sim} .$$

Nous employons les notations W^1, et pour $\sigma \in W^1$, ν_σ du paragraphe II.3 (cf. (II.3.11)). On a, d'après (II.3.10 et II.3.7), $\tilde{\Theta}_s = \sum_{\sigma\in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\nu_\sigma$, et donc :

$$(13) \qquad \tilde{\Theta}_s^{\underline{k}_o} = \sum_{\sigma\in W^1} \varphi_s(\sigma\lambda)\nu_\sigma^{\underline{k}_o}$$

où $\nu_\sigma^{\underline{k}_o}$ est la restriction de ν_σ à $\underline{k}_o$.

Les résultats du paragraphe II.3 s'appliquent dans le cas particulier des groupes compacts et permettent de calculer $(\Psi_\mu)_s^{\sim}$. Nous notons $\theta_\mu^{\underline{k}_o}$ la fonction analytique sur $\underline{k}_o$, invariante par le groupe K_o, dont la restriction à $\underline{t}$ est donnée par la formule

$$(14) \qquad \theta_\mu^{\underline{k}_o}(X) = \frac{\sum_{w\in W_o} \varepsilon(w)\, e^{iw\mu(X)}}{\prod_{\Delta_c^{o,+}} \alpha(X)} .$$

Soit $Y \in \underline{t}$ tel que $e^Y = s$. Posons

$$(15) \qquad a(\sigma,\mu) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}} \varepsilon(\sigma) \frac{e^{(\sigma\mu+\rho_c)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

On trouve :

(16) $$(\Psi_\mu)^{\sim}_s = \sum_{\sigma \in W^1} \alpha(\sigma,\mu)\, \theta^{\underline{k}_o}_{\sigma\mu} \quad .$$

Il nous suffit donc de démontrer que, pour chaque $\sigma \in W^1$, on a

(17) $$\nu^{\underline{k}_o}_\sigma = \varphi_s(\sigma\lambda)^{-1}\, j^{\frac{1}{2}}_{\underline{p}_o}\, \eta \sum_\mu Q(\mu)\, \alpha(\sigma, i\lambda+\rho_n+\mu)\, \theta^{\underline{k}_o}_{\sigma(i\lambda+\rho_n+\mu)} \quad .$$

Notons $\Delta^+(\sigma)$ le système des racines positives rendant $i\sigma\lambda$ dominant. On note $\Delta^{1,+}(\sigma) = \Delta^1 \cap \Delta^+(\sigma)$, etc... Avec les notations du (II.3), et compte tenu de (II.3.15, 20 et 21), on a :

(18) $$\alpha(\sigma,\mu) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}} \frac{e^{\sigma(\mu+\rho_c)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_c^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

(19) $$\varphi_s(\sigma\lambda) = (-1)^{\#\Delta_c^{1,+}} \frac{e^{\sigma(i\lambda+\rho)(Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})}$$

(20) $$\alpha(\sigma,i\lambda+\rho_n+\mu)\, \varphi_s(\sigma\lambda)^{-1} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})\, e^{\sigma\mu(Y)}$$

Nous devons donc démontrer

(21) $$\nu^{\underline{k}_o}_c = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}(\sigma)} (1 - e^{\alpha(Y)})\, j^{\frac{1}{2}}_{\underline{p}_o}\, \eta \sum_\mu Q(\mu)\, e^{\sigma\mu(X)}\, \theta^{\underline{k}_o}_{\sigma(i\lambda+\rho_n+\mu)} \quad .$$

Remplaçant λ par $\sigma\lambda$, on voit qu'il suffit de le faire pour $\sigma = 1$. C'est l'objet du paragraphe suivant

III.3.- FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Rappelons que Y est un élément de $\underline{t}$, $s = e^Y$. Nous considérons l'orbite $\omega = Z^o\lambda$ de λ dans $\underline{z}^*$, et la transformée de Fourier ν de β_ω sur $\underline{z}$.

(1) $$\nu(X) = \int_{\underline{z}^*} e^{if(X)}\, d\beta_\omega(f) \quad .$$

Nous notons $\nu^{\underline{k}_o}$ la restriction de ν à $\underline{k}_o = \underline{k} \cap \underline{z}$. (A.6)

(2) <u>LEMME</u>.- On a :

$$\nu^{\underline{k}_o} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)}) \, j_{\underline{p}_o}^{\frac{1}{2}} \, \eta \sum_\mu Q(\mu) \, e^{\mu(Y)} \, \theta^{\underline{k}_o}_{i\lambda+\rho_n+\mu}$$

<u>DÉMONSTRATION</u>.- D'après (A.6.3), $\nu^{\underline{k}_o}$ est la transformée de Fourier de la mesure $J_*(\beta_\omega)$, image sur $\underline{k}_o^*$ de la mesure β . Pour $s = 1$, le lemme (2) est précisément le théorème I.5.9.

Considérons la distribution d sur $\underline{t}^*$ dont la transformée de Fourier est la restriction de $j^{1/2}$ à $\underline{t}$. Nous employons les notations δ_ξ, H_ξ, I_ξ du paragraphe I.5, nous posons $\rho_n^o = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} \alpha$, $\rho_n^1 = \rho_n - \rho_n^o$. On a :

$$(3) \qquad d = \delta_{i\rho_n^o} * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} I_{-i\alpha}$$

On considère de même la distribution e dont la transformée de Fourier est la restriction de $\prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (1 - e^{\alpha(Y)}) \, \eta$ à $\underline{t}$. On a par un calcul facile :

$$(4) \qquad e = \delta_{i\rho_n^1} * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{1,+}} (\delta_o - e^{\alpha(Y)} \, \delta_{-i\alpha})$$

Compte tenu du théorème (I.2.5) (appliqué à Z^o), la méthode de la démontration du théorème (I.5.9) montre que le lemme (2) est équivalent à l'égalité suivante entre distributions sur $\underline{t}^*$:

$$(5) \qquad \delta_\lambda * \prod_{\alpha\in\Delta_n^{o,+}} H_{-i\alpha} = e * d * \sum_\mu Q(\mu) \, e^{\mu(X)} \delta_{\lambda - i\rho_n - \mu}$$

On a, par définition de $Q(\mu)$

$$(6) \qquad \sum_\mu Q(\mu) \, e^{\mu(Y)} \, \delta_{-\mu} = \prod_{\alpha\in\Delta_n^+} \left(\sum_{j=o}^{\infty} e^{j\mu(Y)} \, \delta_{-ij\alpha}\right)$$

Si $\alpha \in \Delta_n^{1,+}$, on a

(7) $$(\delta_o - e^{\alpha(Y)}\,\delta_{-i\alpha}) * (\sum_{j=o}^{\infty} e^{j\alpha(Y)}\,\delta_{-ij\alpha}) = \delta_o$$

Si $\alpha \in \Delta_n^{o,+}$, on a : $e^{\alpha(Y)} = 1$, et donc

(8) $$I_{-i\alpha} * (\sum_{j=o} e^{j\alpha(Y)}\,\delta_{-ij\alpha}) = H_{-i\alpha}$$

La formule (5) en résulte immédiatement. C.Q.F.D.

APPENDICE

RAPPELS SUR LES FONCTIONS GÉNÉRALISÉES

A.1.- INTRODUCTION

Pour la commodité du lecteur, nous rassemblons ici quelques résultats sur les fonctions généralisées, leurs fronts d'onde, et leurs images réciproques. Nous renvoyons au chapitre "géométric aspects of distributions" du livre de Guillemin et Sternberg [G-St. 1], ou à [Dui] pour un traitement complet.

A.2.- FRONT D'ONDE

Soit M une variété différentiable. On note $\mathcal{M}_c^\infty(M)$ l'espace des densités C^∞ à support compact. Une fonction généralisée est une forme linéaire, continue pour la topologie usuelle, sur $\mathcal{M}_c^\infty(M)$. Notons $\mathcal{F}(M)$ l'espace de ces fonctions. Il contient $C^\infty(M)$ de manière canonique.

Une fonction généralisée $\theta \in \mathcal{F}(M)$ a un front d'onde, noté $WF(\theta)$. C'est un cône fermé de $T^*(M)\backslash 0$ (l'espace cotangent privé de la section nulle). Si $m \in M$, on pose $WF_m(\theta) = WF(\theta) \cap T_m^*(M)$.

Soit D un opérateur différentiel linéaire à coefficient C^∞ sur M. Il opère dans $C^\infty(M)$, et il a une extension canonique à $\mathcal{F}(M)$. Notons $\sigma(D)$ le symbole de D : c'est une fonction différentiable homogène sur $T^*(M)\backslash 0$.
Pour évaluer $WF(\theta)$ nous emploierons exclusivement le lemme suivant (cf. [G.5], ch. II, prop. 6.7).

(1) LEMME.- Soient θ et D comme ci-dessus. On suppose que $D\theta$ est nulle. On a alors :

$$WF(\theta) \subset \{\xi \in T^*(M)\backslash 0,\ \sigma(D)(\xi) = 0\} .$$

A.3.- IMAGE RÉCIPROQUE

Soit N une variété différentiable et soit $f : N \to M$ une application différentiable. Soit Γ un cône fermé de $T^*(M)\setminus 0$. On dit que f est transverse à Γ si, pour tout $n \in N$, et pour tout $\xi \in \Gamma \cap T^*_{f(n)}(M)$, on a :

(1) $\xi(df_n(T_n(N))) \neq \{0\}$.

Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ et supposons f transverse à $WF(\theta)$. Il y a alors une manière naturelle de définir $f_*(\theta) \in \mathcal{F}(N)$. Nous renvoyons à [G-S] , ch. VI pour la définition . Nous allons juste donner une liste des règles de calcul que nous utiliserons.

(2) Règle.- Soit $\theta \in C^\infty(M)$ (i.e. $WF(\theta) = \emptyset$). On a $f^*(\theta) = \theta \circ f$.

(3) Règle.- Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ et $\varphi \in C^\infty(M)$. On suppose f transverse à $WF(\theta)$. Comme $WF(\varphi\theta)$ est contenu dans $WF(\theta)$, f est transverse à $WF(\varphi\theta)$. On a :

$$f^*(\varphi\theta) = (\varphi \circ f)\, f^*(\theta) \quad .$$

(4) Règle.- Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$. On suppose f transverse à $WF(\theta)$.Soit $n \in N$. Posons $m = f(n)$. Alors $WF_n(f^*(\theta))$ est contenu dans l'image réciproque de $WF_m(\theta)$ par l'application ${}^t(df_n)$.

(5) Règle.- Soit Z une variété différentiable et $g : Z \to N$ une application différentiable. Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$. On suppose f et $f \circ g$ transverses à $WF(\theta)$. Alors g est transverse à $f^*(\theta)$ et l'on a

$$g^*(f^*(\theta)) = (f \circ g)^*(\theta) \quad .$$

(6) Règle.- Supposons f submersive. Alors $f^*(\theta)$ est définie pour tout $\theta \in \mathcal{F}(M)$, et l'application $\theta \to f^*(\theta)$ est continue pour les topologies faibles de $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{F}(N)$.
(Les règles 2 à 6 sont des conséquences immédiates de [Dui] , prop. 1.3.3).

(7) Règle.- Soient n et p deux entiers $0 \le p \le n$. On suppose que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que N est la sous-variété définie par les équations $x_{p+1} = 0,\dots, x_n = 0$ ($x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées).Notons f l'injection de

N dans M. Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ telle que f soit transverse à $WF(\theta)$. Cela veut dire dans notre situation que pour tout $x \in N$, $dx_{p+1},\dots,dx_n$ ne s'annulent pas sur $WF_x(\theta)$. Soit Z le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ défini par les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0,\dots,x_p = 0$. Soit $\beta_j \in \mathcal{M}_c^\infty(Z)$, $j_n = 1,2,\dots$, une suite d'éléments positifs d'intégrale 1, dont les supports tendent en décroissant vers $\{0\}$. Soit $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$. On a :

$$(8)\qquad f^*(\theta)(\alpha) = \lim_{j\to\infty} \theta(\alpha \circledast \beta_j)$$

(remarquez que si j est assez grand, le support de $\alpha \circledast \beta_j$ est contenu dans M, de sorte que $\theta(\alpha \circledast \beta_j)$ est bien défini).

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Si γ est une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$, on pose pour tout $v \in (\mathbb{R}^n)^*$:

$$\hat{\gamma}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iv(x)} d\gamma(x)$$

Si $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, on pose

$$\tilde{\psi}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iv(x)}\psi(x)dx ,$$

où $dx = dx_1 \dots dx_n$. Si $v_1,\dots,v_n$ sont les coordonnées duales, et $dv = dv_1 \dots dv_n$, si $\gamma \in \mathcal{M}_c^\infty(M)$, on a :

$$(9)\qquad \psi(\gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\gamma}(v)\, \tilde{\psi}(v)dv .$$

Soit $x_o \in N$, $a \in (\mathbb{R}^n)^*$. On suppose $a \neq 0$, et $a \notin WF_{x_o}(\theta)$. Par définition de $WF(\theta)$ il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_o}$ de x_o dans M et un voisinage $\mathcal{U}_a$ de a dans $(\mathbb{R}^n)^*$ tels que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_{x_o})$ et tout $A > 0$ il existe $B > 0$ tel que

$$(10)\qquad |(\varphi\theta)^\sim(tv)| \leq Bt^{-A}$$

pour tout $v \in \mathcal{U}_a$, $t \geq 1$.

Si $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$, on considère α comme distribution sur $\mathbb{R}^n$, de support contenu dans N. Appliquant les inégalités (10) à un voisinage $\mathcal{U}$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$ de la sphère unité de l'orthogonal de $\mathbb{R}^p$ dans $(\mathbb{R}^n)$, réunion finie d'ouverts de la forme $\mathcal{U}_{a}$,, on voit qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}_{x_o}$ de x_o dans M tel que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_{x_o})$, l'intégrale :

$$(12) \qquad \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\alpha}(v)\,(\varphi\theta)^{\sim}(v)\,dv$$

converge absolument pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(N)$. Elle définit donc une fonction généralisée sur N, qui, par définition (cf. [Dui], démonstration de 1.3.3) est $f^*(\varphi\theta)$. D'autre part, on a, d'après (9)

$$(\varphi\theta)(\alpha * \beta_j) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} \hat{\alpha}(v)\ \hat{\beta}_j(v)\,(\varphi\theta)^{\sim}(v)\,dv\ .$$

Comme $|\hat{\beta}_j(v)|$ est majoré par 1 et comme $\beta_j(v)$ tend vers 1, le théorème de convergence dominée montre que l'on a :

$$(13) \qquad \lim(\varphi\theta)(\alpha * \beta_j) = f^*(\varphi\theta)(\alpha)\ .$$

La règle (7) se déduit alors, par un argument de partition de l'unité des règles (3) et (5) .

REMARQUE.- L'ensemble des règles (2) à (7) permet de calculer $f^*(\theta)$ pour toute application f de rang constant.

A.4.- FONCTIONS GÉNÉRALISÉES INVARIANTES PAR UN GROUPE

Soit G un groupe de Lie opérant de manière différentiable dans une variété différentiable M. Soit N une sous-variété localement fermée de M. On note f l'injection de N dans M. Nous supposons que l'application $P : (g,x) \to gx$ de $G \times N$ dans M est submersive. Dans ce cas l'ensemble $G_N = \{gx,\ g \in G,\ x \in N\}$ est ouvert et G-invariant dans M.

Soit $\theta \in \mathcal{F}(M)$ une fonction généralisée G-invariante (i.e. $L_g^*(\theta) = \theta$ pour toute les translations $L_g : x \to gx$).

(2) LEMME.- f est transverse à $WF(\theta)$.

DÉMONSTRATION.- On note, pour tout X dans l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, X_M le champ de vecteurs sur M :

$$X_M(\varphi)(y) = \frac{d}{dt}\ \varphi(e^{-tX}y)\Big|_{t=o}$$

On a $X_M(\theta) = 0$. On applique alors le lemme 1.

On peut donc définir $f^*(\theta) \in \mathcal{F}(N)$, $1 \otimes f^*(\theta) \in \mathcal{F}(G \times N)$, et $p^*(\theta) \in \mathcal{F}(G \times N)$.

(3) LEMME.- On a $1 \otimes f^*(\theta) = p^*(\theta)$.

DÉMONSTRATION.- Le lemme précédent appliqué à $p^*(\theta)$ et $G \times N$, montre que $p^*(\theta)$ admet une restriction a $\{1\} \times N$. La règle (3.5) montre que cette restriction est égale à $f^*(\theta)$. Nous sommes ramenés à démontrer le lemme dans le cas de la variété $M = G \times N$, ce qui est bien connu et facile.

REMARQUE.- Le lemme (3) est une manière d'énoncer des résultats classiques d'Harish-Chandra, utilisés par exemple dans [H-C. 2].

(4) LEMME.- Supposons qu'une suite θ_j, $j = 1,2,\ldots$ de fonctions généralisées G-invariantes de $\mathcal{F}(M)$ converge faiblement vers une fonction généralisée $\theta \in \mathcal{F}(M)$. Alors la suite $f^*(\theta_j)$ converge faiblement vers $f^*(\theta)$.

DÉMONSTRATION.- La règle (3.6) montre qu'il suffit de le faire lorsque M est égal à $G \times N$. Dans ce cas, on a $\theta = 1 \otimes f^*(\theta)$, et le résultat est clair.

A.5.- RESTRICTION A K DE FONCTIONS GÉNÉRALISÉES $Z(\underline{g})$-FINIES SUR UN GROUPE RÉDUCTIF

Soit G un groupe de Lie réductif connexe. On note $Z(\underline{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U(\underline{g})$ du complexifié $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{g}$. On identifie de la manière usuelle un élément $u \in U(\underline{g})$ à un opérateur différentiel D_u invariant à gauche sur G. Une fonction généralisée θ est dite $Z(\underline{g})$-finie si l'espace $Z(\underline{g})\theta$ est de dimension finie.

Si $g \in G$, nous identifierons $T_1(G)$ à l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G, et $T_g(G)$ à $\underline{g}$ au moyen de la translation $h \to hg$.De même nous identifierons $\underline{g}^*$ et $T^*_g(G)$

On note $I(\underline{g})$ l'ensemble des éléments G-invariants de l'algèbre symétrique $S(\underline{g})$ de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$, et $I^{+}(\underline{g})$ l'ensemble des éléments sans terme constant. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de $I^{+}(\underline{g})$ dans $\underline{g}^{*}$.

Ecrivons $\underline{g} = \underline{s} \oplus \underline{a}$, où $\underline{s}$ est semi-simple, et $\underline{a}$ centrale. Identifions $\underline{s}^{*}$ à l'orthogonal de $\underline{a}$ dans $\underline{g}^{*}$, et $\underline{s}^{*}$ à $\underline{s}$ au moyen de la forme de Killing de $\underline{s}$. Alors $\mathcal{N}$ est contenu dans $\underline{s}^{*}$ et est l'ensemble des éléments X de $\underline{s}$ tels que adX soit nilpotent.

(1) LEMME.- Soit θ une fonction généralisée $Z(\underline{g})$-finie sur G. Pour tout $g \in G$, on a :

$$WF_{g}(\theta) \subset \mathcal{N}$$

DÉMONSTRATION.- Soit $p \in I^{+}(\underline{g})$, un élément homogène. Il existe un élément $u \in Z(\underline{g})$ tel que, pour tout $g \in G$, la restriction de $\sigma(D_{u})$ a $T^{*}_{g}(G) \simeq \underline{g}^{*}$ soit égale à p (on prend par exemple pour u le symétrisé de p). Alors θ est annulée par un opérateur de la forme D_{v}, avec $v = u^{k} + a_{1}u^{k-1} + \ldots + a_{k}$. Donc $WF_{g}(\theta)$ est contenu dans l'ensemble des zéros de p^{k}, et donc dans l'ensemble des zéros de p. C.Q.F.D.

Soit $\underline{k}_{1} \oplus \underline{p}_{1}$ une décomposition de Cartan de $\underline{s}$, et soit K un sous-groupe fermé connexe de G dont l'algèbre de Lie $\underline{k}$ contient $\underline{k}_{1}$.

(2) LEMME.- Soit θ une fonction généralisée sur G, $Z(\underline{g})$-finie. Alors l'injection de K dans G est transverse à $WF(\theta)$.

DÉMONSTRATION.- Soit $k \in K$. Dans l'identification de $T_{k}(G)$ avec $\underline{g}$, $T_{k}(K)$ s'identifie au sous-espace $\underline{k}$. Il s'agit donc de voir que l'orthogonal $\underline{k}^{\perp}$ de $\underline{k}$ dans $\underline{g}$ vérifie

$$\underline{k}^{\perp} \cap \mathcal{N} = 0.$$

Comme $\mathcal{N}$ est contenu dans $\underline{s}^{*}$, et que $\underline{k}^{\perp} \cap \underline{s}^{*}$ s'identifie à $\underline{p}_{1}^{*}$, il suffit de vérifier que le seul élément $X \in \underline{p}_{1}$ tel que adX soit nilpotent est $X = 0$. Cela vient de ce que tous les éléments $X \in \underline{p}$ sont semi-simples.

C.Q.F.D

Si θ est une fonction généralisée $Z(\underline{g})$-finie, nous noterons θ^K sa restriction à K (c'est-à-dire $f^*(\theta)$, où f est l'injection canonique de K dans G). Elle existe d'après le lemme ci-dessus.

Soit T une représentation continue irréductible quasi-simple de G dans un espace de Banach. Harish-Chandra [H-C. 1] a montré que T est traçable. Rappelons que cela veut dire que pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$, l'opérateur $T(\alpha) = \int_G T(g)\, d\alpha(g)$ est traçable. Le caractère θ de T est la fonction généralisée θ telle que $\theta(\alpha) = \operatorname{tr} T(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(G)$. Elle est G-invariante et $Z(\underline{g})$-finie. En particulier, sa restriction θ^K à K est définie. Soit T^K la restriction de T à K. La représentation T^K est aussi traçable [H-C. 1]. Notons ${}^K\theta$ son caractère, qui est une fonction généralisée sur K.

(3) LEMME.- On a : ${}^K\theta = \theta^K$.

DÉMONSTRATION.- Quitte à passer à un revêtement de G, nous pouvons supposer qu'il existe un sous-groupe B fermé dans G tel que l'application $k \times b \to kb$ réalise un difféomorphisme de $K \times B$ sur G. Il nous suffit de démontrer que pour un ensemble dense d'éléments $\alpha \in \mathcal{M}_c^\infty(K)$, on a ${}^K\theta(\alpha) = \theta^K(\alpha)$.

Nous choisissons α tel que $T^K(\alpha) = T(\alpha)$ soit un opérateur de rang fini. Soit $\beta_j \in \mathcal{M}_c^\infty(B)$ une suite d'éléments positifs, d'intégrale 1, dont le support tend en décroissant vers 1. D'après la règle (6), on a :

$$\theta^K(\alpha) = \lim_j \theta(\alpha \bullet \beta_j) \quad .$$

D'autre part :

$$\theta(\alpha \bullet \beta_j) = \operatorname{tr} T(\alpha \bullet \beta_j) = \operatorname{tr}(T(\alpha)T(\beta_j))$$

comme $T(\alpha)$ est de rang fini, et comme $T(\beta_j)$ tend fortement vers 1, on a :

$$\lim \operatorname{tr}(T(\alpha)T(\beta_j)) = \operatorname{tr} T(\alpha) = {}^K\theta(\alpha) \ .$$

C.Q.F.D.

(4) COROLLAIRE.- ([H-C. 1]). Soit $k \in K$ un point au voisinage duquel θ est différentiable. Alors ${}^K\theta$ est différentiable au voisinage de k, et l'on a $\theta(k) = {}^K\theta(k)$.

DÉMONSTRATION.- Cela résulte du lemme (3) et des règles (3.2) et (3.3).

A.6.- RESTRICTION À $\underline{k}$ DE FONCTIONS GÉNÉRALISÉES $I(\underline{g})$-FINIES SUR UNE ALGÈBRE DE LIE RÉDUCTIVE

Les notations sont celles du paragraphe A.5. Nous identifions de la manière usuelle $S(\underline{g})$ et l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants. Le lemme suivant est analogue au lemme (18) et se démontre de la même manière.

(1) LEMME.- Soit ψ une fonction généralisée dans un ouvert $\mathcal{V}$ de $\underline{g}$, $I(\underline{g})$-finie. L'injection de $\underline{k} \cap \mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est transverse à $WF(\psi)$.

On peut définir la fonction généralisée $\psi^{\underline{k}}$, restriction de ψ à $\underline{k} \cap \mathcal{V}$.

Soit Ω une orbite de G dans $\underline{g}^*$. On sait qu'il existe un entier N tel que

$$\int_{\Omega} (1 + \|f\|)^{-N} \, d\beta_{\Omega}(f) < \infty$$

Soit $\underline{P}$ un supplémentaire K-invariant de $\underline{k}$ dans $\underline{g}$. Identifions comme d'habitude $\underline{g}^*$ à $\underline{k}^* \oplus \underline{p}^*$, et soit J la projection de $\underline{g}^*$ sur $\underline{k}^*$ parallèlement à $\underline{p}^*$. L'argument du chapitre I.1 montre que l'on a

$$(2) \qquad \int_{\Omega} (1 + \|J(f)\|)^{-N} \, d\beta_{\Omega}(f) < \infty$$

L'image $J^*(\beta_{\Omega})$ de β_{Ω} sur $\underline{k}^*$ est donc tempérée. On pose $\psi_{\Omega} = \hat{\beta}_{\Omega}$. C'est une fonction généralisée sur $\underline{g}$, G-invariante et vecteur propre de $I(\underline{g})$. Sa restriction à $\underline{k}$ est donc définie et sera notée $\psi_{\Omega}^{\underline{k}}$.

On pose : ${}^{\underline{k}}\psi_{\Omega}(X) = \int_{\underline{k}^*} e^{if(X)} \, dJ^*(\beta_{\Omega})(f)$. C'est la fonction généralisée sur $\underline{k}$, transformée de Fourier de $J^*(\beta_{\Omega})$. Voici l'analogue du lemme (6.3)

(3) LEMME.- On a $\psi_{\Omega}^{\underline{k}} = {}^{\underline{k}}\psi_{\Omega}$.

DÉMONSTRATION.- Soit β_n, $n = 1,2,\ldots$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_c^{\infty}(\underline{p})$ positifs d'intégrale 1, dont le support tend vers $\{0\}$ en décroissant. Soit $\alpha \in \mathcal{D}_c^{\infty}(\underline{k})$. Le théorème de convergence dominée montre que l'on a :

$$\lim \psi_\Omega(\alpha * \beta_n) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(\alpha)$$

et donc ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega(\alpha) = \psi_\Omega^{\underline{k}}(\alpha)$, d'après la règle (3.7).

De manière analogue au corollaire du paragraphe précédent, on obtient

(4) COROLLAIRE.- Soit X un point de $\underline{k}$ au voisinage duquel ψ_Ω est C^∞. Alors ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega$ est C^∞ au voisinage de X et l'on a $\psi_\Omega(X) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(X)$.

Rappelons que, d'après Harish-Chandra, toute fonction généralisée G-invariante $Z(\underline{g})$-finie est C^∞ au voisinage de tout point $X \in \underline{g}$ tel que adX soit semi-simple et tel que le centralisateur $\underline{z}$ de X dans $\underline{g}$ ne contienne pas d'élément nilpotent (En effet, son front d'onde en X est contenu dans $\mathcal{N} \cap \underline{z}^* = \emptyset$). On obtient donc :

(5) COROLLAIRE.- Soit X un point de $\underline{k}$. Soit $\underline{z}$ le centralisateur de X dans $\underline{g}$. On suppose que $\underline{z} \cap \underline{p}$ est contenu dans le centre de $\underline{z}$. Alors ψ_Ω et ${}^{\underline{k}}\psi_\Omega$ sont C^∞ au voisinage de X, et l'on a $\psi_\Omega(X) = {}^{\underline{k}}\psi_\Omega(X)$.

RÉFÉRENCES

[B-V] D. BARBASCH, D.A. VOGAN : Sketch of proof of Rossmann's character formula (Non publié).

[Be-Ve.1] N. BERLINE et M. VERGNE : Fourier transform of orbits of the coadjoint representation. Representation theory of reductive groups, Birkhauser, Boston, 1983.

[Be-Ve.2] N. BERLINE et M. VERGNE : The equivariant index and Kirillov's character formula, à paraître dans American Journal of Mathematics.

[Be-Ve.3] N. BERLINE et M. VERGNE : Classes caractéristiques équivariantes, Formule de localisation en cohomologie équivariante, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 295 (1982), pp. 539-541.

[Bo] R. BOTT : Vector fields and characteristic numbers , Mich. Math. Journal, 14 (1967), pp. 231-244.

[C-R] A. CEREZO et F. ROUVIERE : Solution élémentaire d'un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie compact. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 2 (1969), pp. 561-581.

[D] M. DUFLO : Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. In "Harmonic analysis and group representations. "C.I.M.E. 1980, ed. Liguori, Naples 1982.

[Dui] J.J. DUISTERMAAT : Fourier integral operators. Courant Institute, New-York (1973).

[D-H] J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMAN : On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space. Inventiones Math. 69 (1982), pp. 259-268.

[E] T.J. ENRIGHT : On the fundamental series of a real semi-simple Lie algebra : their irreducibility, resolutions and multiplicity formulae. Annals of Math. 110 (1979), pp. 1-82.

[G-St.1] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG : Geometric asymptotics. Maths Surveys n°14, A.M.S. Rhode Island (1977).

[G-St.2] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG : Convexity properties of the moment mapping. Inventiones Math. 67(1982) , pp. 491-513.

[H-C.1] HARISH-CHANDRA : The characters of semi-simple Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), pp. 98-163.

[H-C.2] HARISH-CHANDRA : Invariant eigen-distributions on a semi-simple Lie group. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), pp. 457-508.

[H-C.3] HARISH-CHANDRA : Discrete series for semi-simple Lie groups I. Construction of invariant eigendistributions.Acta Mathematica, 113 (1965), pp. 242-318.

[H-C.4] HARISH-CHANDRA : Discrete series for semi-simple Lie groups II Acta Mathematica, 116 (1966), pp. 1-111.

[He-S.1] H. HECHT et W. SCHMID : A proof of Blattner's conjecture.Inventiones math., 31 (1975), pp. 129-154.

[He-S.2] H. HECHT et W. SCHMID : Characters, asymptotic and $\underline{n}$-homology of Harish-Chandra modules. Acta Mathematica, 151 (1983), pp. 49-151.

[He] G.J. HECKMAN : Projections of orbits and asymptotic behaviour of multiplicities for compact connected Lie groups. Inventiones math. 67 (1982), pp. 333-356.

[Kh] M.S. KHALGUI : Caractères des groupes de Lie. Journal of functional analysis, 47 (1982), pp. 64-77.

[Ki] A.A. KIRILLOV : Eléments de la théorie des représentations. Ed. M.I.R Moscou, (1974).

[L-Ve] G. LION et M. VERGNE : The Weil representation, Maslov index and theta series. Birkhäuser, Boston (1980).

[P] S. PANEITZ : Communication personnelle (1983).

[R] W. ROSSMANN : Kirillov's character formula for reductive Lie groups. Inventiones math., 48 (1978), pp. 207-220.

[S] W. SCHMID : On the characters of discrete series (the Hermitian symmetric case). Inventiones math., 30 (1975), pp. 47-144.

[T] P. TORASSO : Sur le caractère de la représentation de Shale-Weil de $Mp(n, \mathbb{R})$ et $Sp(n,\mathbb{C})$. Math. Ann., 252 (1980), pp. 53-86.

[Ve] M. VERGNE : On Rossmann's character formula for discrete series. Inventiones Math., 54 (1979), pp. 11-14.

J. J. DUISTERMAAT

On the similarity between the Iwasawa projection and the diagonal part

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 129-138
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__129_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 129-138

ON THE SIMILARITY BETWEEN THE IWASAWA PROJECTION AND THE DIAGONAL PART

by

J.J. Duistermaat

1. Statement of the result.

Let G be a real connected semisimple Lie group with finite center and $G = KAN$ its Iwasawa decomposition. Via the adjoint representation, and with respect to a suitable basis in $\mathfrak{g}$, K, resp. A, resp. N are the set of matrices in G which are orthogonal, resp. diagonal with positive entries, resp. upper triangular.

The Iwasawa projection H from G onto the Lie algebra $\mathfrak{a}$ of A is defined by

$$(1.1) \qquad x \in K.\exp H(x).N, \quad x \in G.$$

Obviously H factorizes through the projection from G onto the (non-compact Riemannian) symmetric space $K\backslash G$. If $\mathfrak{s}$ (called $\mathfrak{p}$ by everybody else) denotes the orthogonal complement of $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$ with respect to the killing form, then the Cartan decomposition $G = K.\exp \mathfrak{s}$ yields that

$$(1.2) \qquad \mathfrak{s} \overset{\exp}{\to} G \to K\backslash G$$

is a diffeomorphism from $\mathfrak{s}$ onto $K\backslash G$. So the Iwasawa projection can be studied by looking at the mapping

$$(1.3) \qquad \gamma = H \circ \exp : \mathfrak{s} \to \mathfrak{a}.$$

On the other hand we have the orthogonal projection

(1.4) $\pi : \mathfrak{s} \to \mathfrak{a}$

with respect to the Killing form. In the above matrix terminology, $\mathfrak{s}$ is the space of symmetric matrices in $\mathfrak{g}$ and π is the operation of taking the diagonal part of the symmetric matrix. So this projection has a very simple minded interpretation, whereas the Iwasawa projection is a rather more mysterious object.

Theorem 1.1. There is a real analytic map $\Psi : \mathfrak{s} \to K$ such that

i) $\Phi_X : k \to k.\Psi(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X))$ is a diffeomorphism from K onto K, for each $X \in \mathfrak{s}$.

ii) $\gamma(\mathrm{Ad}\, \Psi(X)^{-1}(X)) = \pi(X)$ for all $X \in \mathfrak{s}$.

That is, we can turn the Iwasawa projection into the orthogonal projection by an action of Ad K, the element of K depending analytically on $X \in \mathfrak{s}$.

It also follows from the theorem that the images of an Ad K-orbit in $\mathfrak{s}$ under γ and π are the same. This was obtained before by Kostant [4] who showed separately that both images are equal to the convex hull of the intersection of the Ad K-orbit in $\mathfrak{s}$ with $\mathfrak{a}$. Since this intersection is equal to a Weyl group orbit in $\mathfrak{a}$, which is finite, this image is a convex polytope. Very remarkable because an Ad K-orbit is such a roundish object!

Later Heckman [3] reduced the convexity theorem for the Iwasawa projection to the convexity theorem for the diagonal part, for which the proof is much simpler, using a homotopy argument. This homotopy argument actually is one of the elements in the proof of Theorem 1.1.

For me the major motivation for wanting the theorem was the study in [2], together with Kolk and Varadarajan, of the asymptotic behaviour of integrals of the form

(1.5) $$I_a(X,\xi) = \int_K e^{i\langle\gamma(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)),\xi\rangle}.a(X,k)dk$$

as $\|\xi\| \to \infty$, $\xi \in \mathfrak{a}^*$. The matrix coefficients of the principal series representations of G are given by such integrals, the simplest case being the elementary spherical functions where

(1.6) $$a(X,k) = e^{-\langle\gamma(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)),\rho\rangle}.$$

The idea in [2] was to consider (1.5) as an oscillatory integral, for which the asymptotics is concentrated at the stationary points of the "phase function".

(1.7) $$F_{X,\xi} : k \to \langle\gamma(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)),\xi\rangle$$

on K. We then observed that $F_{X,\xi}$ had exactly the same critical points and critical values as its "infinitesimal counterpart"

$$(1.8)\qquad f_{X,\xi} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} F_{tX,\xi} : k \to \langle \pi(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)), \xi\rangle.$$

These critical points in turn had such a special, rigid structure that the asymptotics of (1.5) could be obtained by a repeated application of the method of stationary phase.

It had already been observed in [2] that the equality of critical points and critical values of $F_{X,\xi}$ and $f_{X,\xi}$ leads to the existence of a diffeomorphism $\Phi_{X,\xi} : K \to K$ such that $F_{X,\xi} \circ \Phi_{X,\xi} = f_{X,\xi}$.

However, the diffeomorphism is not unique and at that time I could not find $\Phi_{X,\xi}$ depending smoothly on X and ξ. Already continuous dependence on ξ would imply, replacing ξ by $t\xi$, dividing by t, and letting $t \to 0$, that $F_{X,\xi} \circ \Phi_{X,0} = f_{X,\xi}$. That is, one could find a diffeomorphism Φ_X not depending on ξ. Then, using the substitution of variables

$$(1.9)\qquad k = \Phi_X(l), \quad l \in K,$$

the integral (1.5) can be rewritten as ($X \in \mathfrak{s}$, $\xi \in \mathfrak{a}^*$)

$$(1.10)\qquad I_a(X,\xi) = \int_K e^{i\langle \pi(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)),\xi\rangle} a(X,\Phi_X(k)).\left|\det \frac{\partial \Phi_X}{\partial k}(k)\right| dk.$$

In this way the study of the asymptotic behaviour would be reduced to doing stationary phase with the simpler $f_{X,\xi}$ as the phase function, rather than $F_{X,\xi}$. (Such asymptotics has been done before by Clerc and Barlet [1].)

It is one of the applications of Theorem 1.1, that the integral representation (1.10) actually holds with a $\Phi_X(k)$ which depends analytically on X and k simultaneously. For instance, for the elementary spherical functions this leads to an integral formula of the form

$$(1.11)\qquad \phi_\xi(\exp X) = \int_K e^{i\langle \pi(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)),\xi\rangle} b(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X))dk,$$

for some analytic function $b : \mathfrak{s} \to \mathbb{R}$. As an application of the analyticity of b, one can note that replacing ξ, resp. X by $i\xi$, resp. iX, one obtains the elementary spherical functions for the *compact* symmetric space which is dual to $K\backslash G$. (In this case ξ has to be taken in a weight lattice.) So also for these functions an integral formula like (1.10) holds, at least for small $\|X\|$. I owe this observation to Richard van den Dries (T.H. Delft), who is using this integral formula in his characterization of invariant pseudo-differential operators on compact symmetric spaces in terms of their eigenvalues.

2. SL(2,ℝ).

For $G = SL(2,\mathbb{R})$, $\dim K = \dim \mathfrak{a}$ (= 1), so the substitution of variables is unique up to a flip. In order to determine it explicitly, write the elements of K as

$$k = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

and the elements of $\mathfrak{a}$ as

$$X = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Then $Y = \mathrm{Ad}\, k^{-1}(X) = k^{-1}Xk$ is the general element of $\mathfrak{s}$, and $\Phi_X(k)$ is the element of K with the coordinate μ given implicitly by

$$e^{2t}\cos^2\mu + e^{-2t}\sin^2\mu = e^{2t\cos 2\theta}. \tag{2.3}$$

From this one can determine $\Psi(Y) = k^{-1}.\Phi_X(k)$. It is not entirely trivial to verify that this defines a real analytic mapping $\Psi : \mathfrak{s} \to \mathfrak{a}$!

The Jacobian of Φ_X is equal to

$$\frac{2|t\sin 2\theta|.e^{t\cos 2\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{\cosh(2t) - \cosh(2t\cos 2\theta)}}, \tag{2.4}$$

leading to the following formula for the elementary spherical function:

$$\phi_\xi(\exp X) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} e^{it\tau\cos 2\theta} \frac{|t\sin 2\theta|}{\sqrt{\frac{\cosh(2t) - \cosh(2t\cos 2\theta)}{2}}}\, d\theta. \tag{2.5}$$

Here we have written $\langle X,\xi\rangle = t\tau$. This can also be written as

$$\phi_\xi(\exp X) = \frac{4}{\pi}\int_0^t \cos\tau s.\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh(2t) - \cosh(2s))}}. \tag{2.6}$$

A similar formula for all rank one symmetric spaces can be found in Koornwinder [8], formula (2.16) and (2.18).

I prefer (2.5) over (2.6), because there are no boundary points nor singularities for the integrand as in (2.6). To see the analyticity of the integrand in (2.5) we write

On the similarity between the Iwasawa projection and the diagonal part

$$\cosh(2t) - \cos(2t \cos 2\theta) = (2t \sin 2\theta)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2t)^{2n-2}}{(2n!)} \sum_{k=0}^{n-1} (\cos 2\theta)^{2k}, \tag{2.7}$$

from which

$$\phi_\xi(\exp X) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} e^{it\tau\cos 2\theta} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2.(2t)^{2(n-k)}}{(2n+2)!}(t \cos 2\theta)^{2k}\Big]^{-\frac{1}{2}} d\theta. \tag{2.8}$$

In turn this allows us to write

$$\phi_\xi(\exp X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t^2).\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{2k} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} e^{it\tau \cos 2\theta} d\theta, \tag{2.9}$$

where the c_k are suitable power series in t^2 with some positive radius of convergence. So the elementary spherical function, which is a hypergeometric function, can be obtained from the Bessel function

$$\psi_\xi(\exp X) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} e^{it\tau\cos 2\theta} d\theta, \tag{2.10}$$

which is the elementary spherical function for the Cartan motion group, by applying an infinite order differential operator with respect to the eigenvalue (= character) parameter τ, with coefficients which are Ad K-invariant functions on $\mathfrak{s}$. This is the strategy in Stanton and Tomas [7]. That such a description is possible for all real rank one spaces can be derived from the previously mentioned explicit formulae of Koornwinder [8], but can also be read of from (1.11).

This description would generalize to arbitrary symmetric spaces if the amplitude $b(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X))$ in (1.11) could be written as

$$b(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X)) = \sum_m c_m(X).\pi(\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X))^m \tag{2.11}$$

($m = (m_1,\dots,m_{\dim \mathfrak{a}})$ a multi-index), where the c_m are Ad k-invariant functions on $\mathfrak{s}$. This however is one of the open questions which I have on this subject.

3. Proof of the theorem.

We begin by recalling some facts about the functions $F_{X,\xi}$, $f_{X,\xi}$ from [2].

Lemma 3.1. ([2], Lemma 5.9). For $x \in G$, write

$$x \in \kappa(x).AN,\ \kappa(x) \in K. \tag{3.1}$$

Then, for every $X \in \mathfrak{s}$, $\xi \in \mathfrak{a}^*$:

$$dF_{X,\xi}(1) = df_{\tilde{X},\xi}(1) \circ L_X, \text{ where} \tag{3.2}$$

(3.3) $\tilde{X} = \operatorname{Ad} \kappa(\exp X)^{-1}(X)$

and L_X is the linear isomorphism: $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$ given by

(3.4) $L_X = \dfrac{\sinh \operatorname{ad} \tilde{X}}{\operatorname{ad} \tilde{X}} \circ \operatorname{Ad} \kappa(\exp X)^{-1}.$

Lemma 3.2. ([2], Lemma 1.1). Let $X \in \mathfrak{s}$ and let $\xi \in \mathfrak{a}^*$ correspond to $H = H_\xi \in \mathfrak{a}$ via the Killing form. Then

(3.5) $df_{X,\xi}(1) = 0 \Leftrightarrow [X,H] = 0.$

If $[X,H] = 0$ then $\exp X \in G_H^0$, a connected reductive subgroup with an Iwasawa decomposition, the components of which are contained in K, resp. A, resp. N. So $\kappa(\exp X) \in G_H^0$ and $[\tilde{X},H] = 0$ if $\tilde{X}$ is as in (3.3). Using Lemma 3.1 we conclude that $dF_{X,\xi}(1) = 0 \Leftrightarrow df_{X,\xi}(1) = 0$. Using that

(3.6) $\frac{d}{dt} F_{X,\xi}(k.\exp tY)_{t=0} = dF_{\operatorname{Ad} k^{-1}X,\xi}(1)(Y),\ k \in K,\ Y \in \mathfrak{k},$

and the same formula with F replaced by f, it follows that $F_{X,\xi}$ and $f_{X,\xi}$ have the same set of critical points.

Lemma 3.3. ([2], Cor. 5.2). If $X \in \mathfrak{s}$, $\xi \in \mathfrak{a}^*$, then

(3.7) $\frac{d}{dt} F_{tX,\xi}(1) = f_{X,\xi}(\kappa(\exp tX)).$

Now we look at the 1-parameter family of functions

(3.8) $F^{(t)}_{X,\xi} = \frac{1}{t} F_{tX,\xi},\ F^{(0)}_{X,\xi} = f_{X,\xi},\ F^{(1)}_{X,\xi} = F_{X,\xi}.$

We see that the set of critical points of $F^{(t)}_{X,\xi}$ is equal to the set of critical points of $\frac{1}{t}f_{tX,\xi} = f_{X,\xi}$ so to the set of critical points of $f_{X,\xi}$, for all $t \in \mathbb{R}$. Moreover

(3.9) $F^{(t)}_{X,\xi}(1) = \frac{1}{t} \int_0^t f_{X,\xi}(\kappa(\exp sX))ds,$

If $dF^{(t)}_{X,\xi}(1) = 0$ then $\kappa(\exp sX)$ is a critical point for $f_{X,\xi}$ for all $s \in [0,t]$, so $f_{X,\xi}(\kappa(\exp sX)) = f_{X,\xi}(1)$, that is

(3.10) $F^{(t)}_{X,\xi}(1) = f_{X,\xi}(1)$ if $dF^{(t)}_{X,\xi}(1) = 0.$

Using that $F^{(t)}_{X,\xi}(k) = F^{(t)}_{\operatorname{Ad} k^{-1}X,\xi}(1)$, we get that $F^{(t)}_{X,\xi}$ and $f_{X,\xi}$ have the same values at the critical points. Now we try to find a diffeomorphism $\Phi^{(t)}_{X,\xi} : K \to K$ depending smoothly on t, such that $\Phi^{(0)}_{X,\xi}$ = identity and

On the similarity between the Iwasawa projection and the diagonal part

(3.11) $\quad F^{(t)}_{X,\xi}(\Phi^{(t)}_{X,\xi}(k)) = f_{X,\xi}(k)$ for all $t \in [0,1]$.

Differentiating (3.11) with respect to t gives

(3.12) $\quad \frac{\partial}{\partial t} F^{(t)}_{X,}(\Phi^{(t)}_{X,\xi}(k)) + dF^{(t)}_{X,\xi}(\Phi^{(t)}_{X,\xi}(k)) \circ \frac{\partial \Phi^{(t)}_{X,\xi}}{\partial t}(k) = 0$, which

in fact is equivalent to (3.11) in view of the initial condition $\Phi^{(0)}_{X,\xi}$ = identity. The idea is now to find a vector field $v^{(t)}_{X,\xi}$ on K depending analytically on t, X, ξ such that

(3.13) $\quad \frac{\partial}{\partial t} F^{(t)}_{X,\xi}(k) + dF^{(t)}_{X,\xi}(k) \circ v^{(t)}_{X,\xi}(k) = 0$

and then obtain $\Phi^{(t)}_{X,\xi}$ by solving the ordinary differential equation

(3.14) $\quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi^{(t)}_{X,\xi}(k) = v^{(t)}_{X,\xi}(\Phi^{(t)}_{X,\xi}(k)),\ \Phi^{(0)}_{X,\xi}(k) = k.$

I learned this idea from Moser [6] and Mather [5], but it might have a much older history.

In any case, for (3.13) it is a necessary condition that $\frac{\partial}{\partial t} F^{(t)}_{X,\xi}(k) = 0$ if $dF^{(t)}_{X,\xi}(k) = 0$, but this follows from $dF^{(t)}_{X,\xi}(k) = 0 \Leftrightarrow df_{X,\xi}(k) = 0$, in which case $F^{(t)}_{X,\xi}(k) = f_{X,\xi}(k)$, constant in t, as observed above. In Lemma 3.1, 3.2 we have seen that $dF^{(t)}_{X,\xi}(k)$ is proportional to $[\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X), H_\xi]$ by a linear isomorphism depending analytically on t, X, H_ξ. In view of these observations the existence of $v^{(t)}_{X,\xi}$ with the desired properties is ensured by the following

<u>Lemma</u> 3.4. Let $\psi : \mathfrak{s}\times\mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ be analytic such that $\psi(X,H) = 0$ whenever $[X,H] = 0$. Then there exists an analytic map $\chi : \mathfrak{s}\times\mathfrak{a} \to \mathfrak{k}$ such that

(3.15) $\quad \psi(X,H) = \langle [X,H], \chi(X,H)\rangle$ for all $X, \in \mathfrak{s}$, $H \in \mathfrak{a}$.

If ψ is linear in H for each X then χ can be chosen not depending on H and if ψ depends smoothly on additional parameters then ψ can be chosen to do the same.

Actually χ is obtained by an explicit formula from ψ, from which these properties can be read off. The construction is based on the observation that in $\mathfrak{s}\times\mathfrak{a}$ the relation $[X,H] = 0$ has a reasonably simple description. For $X \in \mathfrak{s}$ write

(3.16) $\quad X = X_0 + \sum_{\alpha\in\Delta^+} X_\alpha,\ X_0 \in \mathfrak{a},\ X_\alpha \in \mathfrak{s} \cap (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}).$

Then

$$(3.17) \qquad [X,H] = - \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(H).JX_\alpha$$

where J is the linear isomorphism: $\mathfrak{s} \ominus \mathfrak{a} \to \mathfrak{k} \ominus \mathfrak{m}$ which sends $Y - \theta Y$ to $Y + \theta Y$ (for $Y \in \mathfrak{n}$). It follows that $[X,H] = 0$ if and only if for each $\alpha \in \Delta^+$ either $X_\alpha = 0$ or $\alpha(H) = 0$.

For $I \subset \Delta^+$, write now

$$(3.18) \qquad \Pi_I(X) = X_0 + \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus I} X_\alpha .$$

Then, based on Newton's binomial formula, we can write

$$(3.19) \qquad \psi(X,H) = \sum_{I \subset \Delta^+} \ \sum_{J \subset \Delta^+ \setminus I} (-1)^{|J|} \psi(\Pi_{I \cup J}(X),H).$$

Observing that $\psi(X_0,H) = 0$ by assumption, we concentrate our attention on the term

$$(3.20) \qquad \psi_I(X,H) = \sum_{J \subset \Delta^+ \setminus I} (-1)^{|J|} \psi(\Pi_{I \cup J}(X),H).$$

Every term in the right hand side is equal to zero if $\alpha(H) = 0$ for all $\alpha \in \Delta^+ \setminus I$. Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Delta^+ \setminus I$ be a basis of $\sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus I} \mathbb{R}.\alpha$. Write

$$(3.21) \qquad \mathfrak{a}_j = \{H \in \mathfrak{a};\ \alpha_i(H) = 0 \text{ for } i \leq j\}, \quad \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a},$$

and let π_i be a linear projection from $\mathfrak{a}_{j-1}$ to $\mathfrak{a}_j$. Write

$$(3.22) \qquad \pi_j = \tilde{\pi}_j \circ \ldots \circ \tilde{\pi}_1 : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_j ,$$

$$(3.23) \qquad \psi_I(X,H) = \sum_{j=1}^{p} \psi_I(X,\pi_{j-1}(H)) - \psi_I(X,\pi_j(H)),$$

and finally

$$(3.24) \qquad \begin{aligned} &\psi_I(X,\pi_{j-1}(H)) - \psi_I(X,\pi_j(H)) \\ &= \sum_{J \subset \Delta^+ \setminus I} (-1)^{|J|} [\psi(\pi_{I \cup J}(X),\pi_{j-1}(H)) - \psi(\pi_{I \cup J}(X),\pi_j(H))] \\ &= \sum_{J \subset \Delta^+ \setminus I \cup \{\alpha_j\}} (-1)^{|J|} [\psi(\pi_{I \cup J}(X),\pi_{j-1}(H)) - \psi(\pi_{I \cup J \cup \{\alpha_j\}}(X,\pi_{j-1}(H)) \\ &\quad - \psi(\pi_{I \cup J}(X),\pi_j(H)) + \psi(\pi_{I \cup J \cup \{\alpha_j\}}(X),\pi_j(H))] . \end{aligned}$$

The last expression between square brackets is equal to zero if $X_{\alpha_j} = 0$ or $\alpha_j(H) = 0$. So this expression is of the form

On the similarity between the Iwasawa projection and the diagonal part

$$\alpha_j(H).\langle JX_{\alpha_j}, \chi_{I,j}(X,H)\rangle$$

for some analytic mapping $\chi_{I,j} : \mathfrak{s}\times\mathfrak{a} \to \mathfrak{k}_{\alpha_j} = \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_{\alpha_j} + \mathfrak{g}_{-\alpha_j})$. Summing all the terms gives the desired mapping χ.

From χ we get an analytic vector field $v^{(t)}_{X,\xi}$ on K, depending analytically on t, X, ξ satisfying (3.13). Now, observing that

$$F^{(t)}_{\mathrm{Ad}\, l^{-1}(X),\xi}(k) = F^{(t)}_{X,\xi}(lk),\quad k \in K, \tag{3.25}$$

it follows that $\lambda_l^* v^{(t)}_{\mathrm{Ad}\, l(X),\xi}$ satisfies (3.13) as well, here $\lambda_l : k \to l.k$ denotes left multiplication by l. Because the equation (3.13) is linear in v, also

$$\bar{v}^{(t)}_{X,\xi} = \int_K \lambda_l^* v^{(t)}_{\mathrm{Ad}\, l(X),\xi}\, dl \tag{3.26}$$

will satisfy (3.13). This vectorfield has the additional symmetry

$$\bar{v}^{(t)}_{\mathrm{Ad}\, k^{-1}(X),\xi} = \lambda_k^* \bar{v}^{(t)}_{X,\xi}, \tag{3.27}$$

which for the solution $\Phi^{(t)}_{X,\xi}$ of (3.14), with v replaced by $\bar{v}$, will lead to

$$\Phi_X(lk) = l.\Phi_{\mathrm{Ad}\, l^{-1}(X)}(k),\quad k,l \in K. \tag{3.28}$$

This proves Theorem 1.1, with $\Psi(X) = \Phi_X(1)$, $X \in \mathfrak{s}$.

I would like to thank Joop Kolk and Richard van den Dries for several stimulating discussions on this subject. Also Michel Duflo for inviting me to the meeting in Le Kleebach, thereby giving me the opportunity to present this result.

References

[1] J.-L. Clerc, On the asymptotic behaviour of generalized Bessel functions, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 1981, Supp. No. 1, pp. 145-147.

[2] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk and V.S. Varadarajan, Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups, Comp. Math. 49 (1983), 309-398.

[3] G.J. Heckman, Projections of Orbits and Asymptotic Behaviour of Multiplicities for Compact Lie Groups, Thesis, Rijksuniversiteit Leiden, 1980.

[4] B. Kostant, On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition, Ann. Sci. École Norm. Sup. 6 (1973), 413-455.

[5] J.N. Mather, Infinitesimal stability implies stability, Ann. of Math. 89 (1969), 254-291.

[6] J. Moser, On the volume elements on a manifold, Trans. A.M.S. 120 (1965), 286-294.

[7] R.J. Stanton and P.A. Tomas, Expansions for spherical functions on noncompact symmetric spaces, Acta Math. 140 (1978), 251-276.

[8] T. Koornwinder, A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform, Arkiv för Matematik, 13 (1975), 145-159.

J.J. Duistermaat
Rijksuniversiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Budapestlaan 6
Post bus 80.010
3508 TA UTRECHT
(Pays-Bas)

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

THOMAS J. ENRIGHT
JOSEPH A. WOLF

Continuation of unitary derived functor modules out of the canonical chamber

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 139-156
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__139_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 139-156

CONTINUATION OF UNITARY DERIVED FUNCTOR MODULES OUT OF THE CANONICAL CHAMBER

Thomas J. Enright[1] and Joseph A. Wolf[2]

Résumé

On décrit une méthode qui permet de suivre l'unitarité lors de la continuation cohérente des représentations des séries discretes quand le parametre sort de la chambre de Weyl de Borel-de Siebenthal. Au cas où les modules de représentations des séries discretes sont obtenus en appliquant le foncteur dérivé de Zuckerman à un module de Verma généralisé qui est construit à partir d'une représentation unidimensionelle, la methode est décrite explicitement. Des programmes d'ordinateurs traitant les cas E_6, E_7, E_8 sont présentés en appendix. Un certain nombre de nouvelles représensations singulières unitaires résultent de cette méthode.

Abstract

A method is described for following unitarity during coherent continuation of discrete series representations as the parameter passes out of the Borel-de Siebenthal Weyl chamber. In the case where the discrete series representations are derived functor modules, obtained from generalized Verma modules which in turn are induced from one-dimensional representations, the computation is carried out explicitly, and computer programs are appended which treat the E_6, E_7 and E_8 cases. A number of new singular unitary representations are produced.

1) Partially supported by National Science Foundation grant MCS-8300793

2) Partially supported by National Science Foundation grant MCS-8200235 and the Miller Institute for Basic Research in Science.

Let G be a real semisimple Lie group, let θ be a Cartan involution of G, and let K denote the maximal compactly embedded subgroup of G which is the fixed point set of θ. We write $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$ for the real Lie algebras, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ for their complexifications, and θ for the automorphisms induced on $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}$. In the work of Wallach [7] and Enright-Howe-Wallach [3], G is a simple group of hermitian type and one varies a character on the center of K in order to continue the holomorphic discrete series. In [4,5], using the Zuckerman derived functors, these results were extended to cover certain non highest weight modules. Among other results is a proof of unitarity for certain coherent continuations of discrete series representations out of the Borel-de Siebenthal [1] Weyl chamber. These results are tabulated in Appendix 1. They are based on

THEOREM. Let $\mathfrak{q}$ be a θ-stable parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}$, say $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ where $\mathfrak{n}$ is the nilradical and $\mathfrak{m}$ is a θ-stable Levi component, such that $[\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}, \mathfrak{n}] = 0$ and $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ where $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_0$. Fix a Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{m}_0$ of $\mathfrak{g}_0$ and $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ such that the irreducible $\mathfrak{m}$-modules $F(\lambda)$ of highest weight λ is finite dimensional and unitarizable. Choose $\zeta \in \mathfrak{h}^*$ corresponding to a central element of $\mathfrak{m}$ and normalized so that (i) the one-dimensional $\mathfrak{m}$-module $F(\zeta)$ is unitarizable, and (ii) $\langle \zeta, \alpha \rangle > 0$ for all roots $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})$. Assume that the relative Verma module

$$N(\lambda + z\zeta) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} F(\lambda + z\zeta)$$

is irreducible for $z \leqq c$. Let

$$\Gamma^i : \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$$

denote the i^{th} right derived functor, of the $\mathfrak{k}$-finite submodule functor, from the category of $\mathfrak{g}$-modules that are completely reducible and locally finite for $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}$. Let $s = \dim \mathfrak{k}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}$. Then $\Gamma^s N(\lambda + c\zeta)$ is zero or unitarizable.

See [5] for the proof of this theorem.

This situation arises when rank K = rank G, the root ordering is such that there is just one noncompact simple root (say α_0), necessarily of coefficient 1 or 2 in the maximal root, and $\mathfrak{q}$ is the maximal parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}$ defined by α_0. The hermitian case, coefficient 1, is the case of Enright-Howe-Wallach [3]. Now suppose that α_0 has coefficient 2 in the maximal root and denote

$$\Delta(i) = \{\text{roots } \beta : \alpha_0 \text{ has coefficient } i \text{ in } \beta\}$$

so the full root system $\Delta = \Delta(-2) \cup \Delta(-1) \cup \Delta(0) \cup \Delta(1) \cup \Delta(2)$. Then, if

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ as usual under θ,

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h} + \sum_{\Delta(0)} \mathfrak{g}_\beta \quad , \quad \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \sum_{\Delta(1)} \mathfrak{g}_\beta \quad \text{and} \quad \mathfrak{u} \cap \mathfrak{k} = \sum_{\Delta(2)} \mathfrak{g}_\beta$$

$\zeta \in \mathfrak{h}^*$ is normalized by

$$2\langle \zeta, \alpha_0 \rangle / \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle = 1 \quad \text{and} \quad \langle \zeta, \beta \rangle = 0 \ \text{ for all simple } \beta \neq \alpha_0 \ .$$

Given λ, we normalize it on the line $\ell = \mathbb{R}\zeta$ by adding a multiple of ζ, so that

$$\lambda + z\zeta + \rho \in C \iff z < 0$$

where C is the $\mathfrak{q}$-antidominant Weyl chamber and ρ as usual is half the sum of the positive roots. The question, now, for applying the theorem is to find the first reduction point, i.e. the smallest number $a = a(\lambda)$ such that $N(\lambda + a\zeta)$ is reducible. Then the theorem says that

> $\Gamma^s N(\lambda + z\zeta)$ is a unitarizable $(\mathfrak{g},K)$-module whenever $z < a$ and $\lambda + z\zeta$ is a $\Delta(\mathfrak{k})$-integral.

That gives quite a number of new irreducible unitary representations, as one sees from the tabulation in Appendix 1, for the case $\dim F(\lambda) = 1$. There, for example, it gives 30 new unitary representations of E_{8,E_7A_1} with singular infinitesimal character, it gives 17 for E_{7,D_6A_1}, and it gives 11 for E_{6,D_5A_1}.

The key to finding the first reduction point is, of course, Jantzen's irreducibility criterion [6] for relative Verma modules. Jantzen's contravariant form — or, equivalently, its hermitian analog — has formal determinant on $N(\lambda')$ given by

$$\prod_{\substack{\text{weights} \\ \text{of } M(\lambda')}} (\text{nonzero}) \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})} \prod_{\substack{n \text{ positive} \\ \text{integer}}} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{2\langle \lambda' + \rho, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} - n \right) \right\}^{\chi'(\lambda' - n\alpha)}$$

where $M(\lambda')$ is the ordinary Verma module and where

$$\chi'(\nu) = \sum_{w \in W(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} \det(w)\, e^{w(\nu + \rho)} \ .$$

Here $N(\lambda')$ is irreducible if and only if the determinant is nonzero. In other words, if we define

$$\chi(\lambda', \alpha) = \sum_{w \in W(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} \det(w)\, e^{w(s_\alpha(\lambda' + \rho))}$$

then $N(\lambda')$ can only reduce when

a) there is at least one root $\alpha \in \Delta(u)$ such that $2\langle \lambda' + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ is a positive integer, and

b) the sum over all such roots α, of the $\chi(\lambda', \alpha)$, does not vanish.

Thus we can test $N(\lambda + z\zeta)$ for reduction in a systematic manner, as follows:

1. Compute $2\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ for every $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})$. Note that $2\langle \lambda + z\zeta + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ is obtained from it by adding $z \times$ (coefficient of α_0 in α). Note that z must be an integer or half-integer in order for $\lambda + z\zeta + \rho$ to be $\Delta(\mathfrak{k})$-integral, thus in order for $\Gamma^s N(\lambda + z\zeta)$ to be nonzero. Start with z the smallest integer or half-integer such that some $\langle \lambda + z\zeta + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})$, is a positive integer.

2. Let $A = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}) : 2\langle \lambda + z\zeta + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ is a positive integer}\}$. If A is empty then $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible.

3. Suppose A is not empty. Given $\alpha \in A$, suppose there is some $\beta \in \Delta(\mathfrak{n})$ with $\langle \lambda + z\zeta + \rho, \beta \rangle = 0$ and with $s_\alpha(\beta) \in \Delta(\mathfrak{m})$, i.e. with $\langle s_\alpha(\beta), \zeta \rangle = 0$. Then $\langle s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho), s_\alpha(\beta) \rangle = \langle \lambda + z\zeta + \rho, \beta \rangle = 0$ shows $s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho)$ to be $\Delta(\mathfrak{m})$-singular, so $\chi(\lambda + z\zeta, \alpha) = 0$.

4. Let $B = \{\alpha \in A : \text{there is no } \beta \text{ as in (3) above}\}$. If B is empty then $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible.

5. Suppose B is not empty. If $\alpha \in B$ then $\chi(\lambda + z\zeta, \alpha) \neq 0$. Thus the only way that we can have $\sum_{\alpha \in \beta} \chi(\lambda + z\zeta, \alpha) = 0$ is if the set B decomposes into pairs $\{\alpha, \alpha'\}$ such that $s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho)$ and $s_{\alpha'}(\lambda + z\zeta + \rho)$ differ by an element $w \in W(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ which has $\det(w) = -1$. Note that, for such a pair, $\langle s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho), \zeta \rangle = \langle w s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho), \zeta \rangle = \langle s_{\alpha'}(\lambda + z\zeta + \rho), \zeta \rangle$, so we need only try to pair off elements $\alpha, \alpha' \in B$ for which $\langle s_\alpha(\lambda + z\zeta + \rho), \zeta \rangle = \langle s_{\alpha'}(\lambda + z\zeta + \rho), \zeta \rangle$.

6. Let $C = \{\alpha \in B : \text{there is no } \alpha' \in B \text{ forming a pair } \{\alpha, \alpha'\} \text{ as in (5) above}\}$. Then $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible if and only if C is empty.

7. If $N(\lambda + z\zeta)$ is reducible then $\lambda + z\zeta$ is the first reduction point. If $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible, increase z by $\frac{1}{2}$ and start over again at (2).

In the case $\dim F(\lambda) = 1$, we recently carried out this computational program by hand for the classical simple groups G with rank K = rank G, by arranging the "matrix" $(2\langle \lambda + z\zeta + \rho, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle)_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n})}$ in a way that made the various tests relatively straightforward and that made induction arguments convenient. This doesn't work for the exceptional groups, but the structures of types G_2 and F_4 are sufficiently small so that hand calculation was not difficult.

We illustrate the test for reduction by doing the case $G = Sp(1,n-1)$. Let α_i, $1 \leq i \leq n$, be the simple roots with $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $1 \leq i < n$, and $\alpha_n = 2\varepsilon_n$. For our example let $\alpha_0 = \alpha_1$. Then $\Delta(\mathfrak{u}) = \{2\varepsilon_1\} \cup \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i \mid 2 \le i \le n\}$. Our normalizations give $\zeta = \varepsilon_1$, $\lambda = (-2n+1)\varepsilon_1$ and $\rho = (n, n-1, \ldots, 1)$. So

$$\lambda + z\zeta + \rho = (z-n+1, n-1, n-2, \ldots, 1) .$$

Consider the array

$$\begin{array}{ccccc} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ c & & & & \\ & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{array}$$

with $c = 2\langle\lambda + z\zeta + \rho, \alpha\rangle / \langle\alpha, \alpha\rangle$ with $\alpha = 2\varepsilon_1$, and a_i and b_i given by the same formula for $\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_i$ and $\varepsilon_1 - \varepsilon_i$ respectively $2 \le i \le n$. Evaluating these inner products gives:

$$\begin{array}{ccccc} & z & z-1 & \cdots & z-n+2 \\ z-n+1 & & & & \\ & z-2n+2 & z-2n+3 & \cdots & z-n \end{array}$$

Now $N(\lambda + 2\zeta)$ is irreducible if $z \notin \mathbb{N}$. For $z \in \mathbb{N}$, $0 \le z \le n-1$, the set A is not empty. But B is empty and so $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible. For $n \le z \le 2n-2$ the array has a positive integer value for c, positive integer values in the top row and to the right of the $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$ entry which is a zero, $j = 2n-z$. In this case $A = \{2\varepsilon_1\} \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_\ell \mid 2 \le \ell \le n\} \cup \{\varepsilon_1 - \varepsilon_k \mid 2n-z+1 \le k \le n\}$. However, $B = \{2\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_j\}$. Then $\lambda + z\zeta + \rho = (n-j+1, n-1, \ldots, 1)$ where $n-j+1$ occurs both as the first and j^{th} coordinate. Therefore, as described in (5) above, the two elements of B form a pair. Thus C is empty and $N(\lambda + z\zeta)$ is irreducible. Finally, at $z = 2n-1$, the highest weight is zero; and so, $N(\lambda + z\zeta)$ reduces with the trivial representation as quotient. This proves that the first reduction point is $z = 2n-1$.

As a second example we consider the case of the split real form of G. Let α_1 and α_2 be the two simple roots with α_2 long. Assume α_1 is compact and α_2 is noncompact. So in the notation above $\alpha_0 = \alpha_2$. Following Bourbaki we write these vectors in coordinates:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 , \qquad \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$

Now

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

$$\Delta(\mathfrak{u}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha_1\}$$

Our normalizations give

$$\zeta = (-1,-1,2) , \qquad \lambda = -2\zeta = (2,2,-4) , \qquad \rho = (-1,-2,3)$$

$$\lambda + z\zeta + \rho = (-z+1, -z, 2z-1) .$$

Now consider the array of numbers $2\langle\lambda+z\zeta+\rho,\alpha\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ where α runs through $\Delta(\mathfrak{u})$ in order

$$\begin{pmatrix} & \alpha_1+\alpha_2 = (-1,0,1) & 2\alpha_1+\alpha_2 = (0,-1,1) \\ \alpha_2 = (-2,1,1) & 3\alpha_1+\alpha_2 = (1,-2,1) & 3\alpha_1+2\alpha_2 = (-1,-1,2) \end{pmatrix}$$

The roots in the first row are short while those in the second row are long. Evaluating we obtain:

$$\begin{pmatrix} & 3z-2 & 3z-1 \\ z-1 & z & 2z-1 \end{pmatrix}$$

The element $\lambda+z\zeta$ is $\Delta(\mathfrak{k})$ integral precisely when $2z$ is an integer. Also $z=2$ corresponds to the trivial representation. $N(\lambda+z\zeta)$ is irreducible unless either $3z$ or $2z$ is an integer.

In the cases $z={}^1/_3$ and $z={}^1/_2$, the set A is empty. So $N(\lambda+z\zeta)$ is irreducible. For $z={}^2/_3$, $A=\{2\alpha_1+\alpha_2\}$, $\alpha_1+\alpha_2$ is singular at $\lambda+z\zeta+\rho$ and $s_{2\alpha_1+\alpha_2}(\alpha_1+\alpha_2) = -\alpha_1 \in \Delta(\mathfrak{m})$. So B is empty and $N(\lambda+z\zeta)$ is irreducible.

The next value is $z=1$, with array

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

The singular root α_2 is long so $s_\beta(\alpha_2) \notin \Delta(\mathfrak{m})$ for any β. So $B=\{\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+2\alpha_2\}$. Here $\lambda+z\zeta+\rho = (0,-1,-1)$. Let $\nu=\lambda+z\zeta+\rho$. Then

$$s_{\alpha_1+\alpha_2}(\nu) = (1,-1,0) , \qquad s_{3\alpha_1+\alpha_2}(\nu) = (-1,1,0) ,$$

$$s_{2\alpha_1+\alpha_2}(\nu) = (0,1,-1) , \qquad s_{3\alpha_1+2\alpha_2}(\nu) = (1,0,-1) .$$

But these cancel in pairs as in (5) so C is empty and $N(\lambda+z\zeta)$ is irreducible.

The next possible value for $N(\lambda+z\zeta)$ to reduce is $z={}^4/_3$. Here the array is

$$\begin{pmatrix} & 2 & 3 \\ {}^1/_3 & {}^4/_3 & {}^5/_3 \end{pmatrix} .$$

So $\lambda+z\zeta+\rho$ is regular and A is not empty. This implies directly that $N(\lambda+z\zeta)$ is reducible. Thus the first reduction point is $z={}^4/_3$.

We did the calculation for E_6, E_7 and E_8 using a simple BASIC program, listed in Appendix 2, on a home computer. As is clear from the listing, efficiency was not a consideration because it only had to be run once. In particular it left the search through $W(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$, in (5) above, to be done by hand. Since there is no essential change, we wrote the program for $\dim F(\lambda) < \infty$ rather than just $\dim F(\lambda) = 1$.

The results above hold in a more general setting, if we add a hypothesis of $\mathfrak{k}$-semisimplicity for the $N(\lambda + z\zeta)$.

PROPOSITION. Let $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ be a maximal θ-stable parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}$, whose complementary simple root α_0 has coefficient 2 in the maximal root (as above). Suppose that $\mathfrak{q}$ is quasi-abelian, i.e. that $\langle\alpha,\beta\rangle \geq 0$ for $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k})$ and $\beta \in \Delta(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p})$. Let $F(\zeta)$ and $F(\lambda)$ be unitarizable $\mathfrak{m}_0$-modules, $\dim F(\zeta) = 1$ and $\dim F(\lambda) < \infty$, normalized by

$$2\langle \zeta,\alpha_0\rangle / \langle \alpha_0,\alpha_0 \rangle = 1 \qquad \text{and} \qquad \lambda + z\zeta + \rho \in C \Longleftrightarrow z < 0 \ .$$

Let $a = a(\lambda)$ be the first reduction point for $N(\lambda + z\zeta)$ and suppose that $N(\lambda + z\zeta)$ is semisimple as a $\mathfrak{k}$-module whenever $z < a$. Then $\Gamma^S N(\lambda + z\zeta)$ is zero or unitarizable for $z < a$.

In the case $\dim F(\lambda) = 1$ of the more general setting, the last two columns of the chart in Appendix 1 need not apply, for $\Gamma^S N(\lambda + z\zeta) = 0$ is a real possibility. So it is essential to have some *à priori* information on the $\mathfrak{k}$-spectrum of $\Gamma^S N(\lambda + z\zeta)$.

<u>References</u>

[1] A.Borel and J. de Siebenthal, "Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos," Comment. Math. Helv. 23 (1949), 200-221.

[2] T.J.Enright, "Unitary representations for two real forms of a semisimple Lie algebra: a theory of comparison," Proceedings of the College Park Conference, 1982, to appear.

[3] T.J.Enright, R.Howe and N.R.Wallach, "A classification of unitary highest weight modules," Proceedings of the Park City Conference on Representations of Reductive Groups, 1982, to appear.

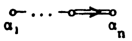
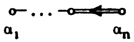
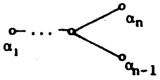
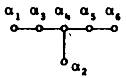
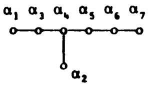
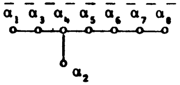
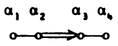
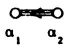
[4] T.J.Enright, R.Parthasarathy, N.R.Wallach and J.A.Wolf, "Classes of unitarizable derived functor modules," Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1983, to appear.

[5] T.J.Enright, R.Parthasarathy, N.R.Wallach and J.A.Wolf, "Unitary derived functor modules with small spectrum," to appear.

[6] J.C.Jantzen, "Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren," Math. Ann. 226 (1977), 53-65.

[7] N.R.Wallach, "The analytic continuation of the discrete series, I, II," Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 1-17 and 19-37.

Appendix 1

Root system	Diagram	Complementary simple root	First reduction point $z=a$	Condition for $\Delta(\mathfrak{k})$ integrality	Number of unitary $\Gamma^S N(\lambda)$, $0 \le z < a$	Unitarity of $\Gamma^S L(\lambda)$ at $z=a$
B_n		$2 \le \ell \le n-1$	$n-\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}$ if ℓ is odd and $n-\ell \le \frac{(\ell-1)}{2}$; $n-\frac{\ell}{2}$ otherwise	$2z \in \mathbb{Z}$	$2n-\ell-1$; $2n-\ell$	In both cases, yes if $a \le 2n-2\ell$; ? otherwise
		$\ell = n$	$2\left[\frac{n}{2}\right]+1$	$z \in \mathbb{Z}$	$2\left[\frac{n}{2}\right]+1$	?
C_n		$2 \le \ell \le n-1$	$n-\frac{\ell}{2}$ if ℓ is even and $n-\ell \ge \frac{\ell}{2}$; $n-\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}$ otherwise	$z \in \mathbb{Z}$	$n-\frac{\ell}{2}$ if ℓ is even and $n-\ell \ge \frac{\ell}{2}$; $n-[(\ell-1)/2]$ otherwise	If $a \notin \mathbb{Z}$ then $\Gamma^S L(a) = 0$. $\Gamma^S L(a)$ is unitary if $a \in \mathbb{Z}$ and $a < 2n-2\ell$; ? otherwise
		$\ell = 1$	$2n-1$	$z \in \mathbb{Z}$	$2n-1$	$\Gamma^S L(a) = 0$
D_n		$2 \le \ell \le n-2$	$n-\frac{\ell}{2}-1$ if ℓ is even and $n-\ell \le \frac{\ell}{2}$; $n-\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}$ otherwise	$2z \in \mathbb{Z}$	$2n-2-\ell$; $2n-1-\ell$	In both cases, yes if $a \le 2n-2\ell-1$; ? otherwise
E_6		3 or 5	5	$2z \in \mathbb{Z}$	10	yes
		2	11/2		11	
E_7		1	17/2	$2z \in \mathbb{Z}$	17	yes
		2	7		14	
		6	6		12	
E_8		1	23/2	$2z \in \mathbb{Z}$	23	yes
		8	29/2		29	
F_4		1	4	$2z \in \mathbb{Z}$	8	yes
		4	5	$z \in \mathbb{Z}$	5	?
G_2		2	4/3	$2z \in \mathbb{Z}$	3	$\Gamma^S L(a) = 0$

Appendix 2

__These programs are written in Microsoft Basic (MBASIC), Revision 5.21, for CP/M__

__Run this program to create Cartan matrix and inverse Cartan matrix data files:__

```
10 '******************************************************************
20 'Program to write the Cartan matrices and their inverses for E6, E7, E8
30 'as sequential MBASIC files. Shortens data programs from March 1983. Uses
40 'Bourbaki order (1)-(3)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)      E6: (1) thru (6)
50 '                         :                      E7: (1) thru (7)
60 '                        (2)                     E8: (1) thru (8)
70 'for the simple roots.              Joseph Wolf, 30 September, 1983
80 '******************************************************************
90 DIM Z(8,8): FOR I=1 TO 8: FOR J=1 TO 8: READ Z(I,J): NEXT J: NEXT I
100 OPEN "o", #1, "CARTE6.DAT": OPEN "o", #2, "CARTE7.DAT"
110 OPEN "o", #3, "CARTE8.DAT"
120 FOR I=1 TO 6: FOR J=1 TO 6: WRITE #1, Z(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #1
130 FOR I=1 TO 7: FOR J=1 TO 7: WRITE #2, Z(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #2
140 FOR I=1 TO 8: FOR J=1 TO 8: WRITE #3, Z(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #3
150 DATA 2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, -1, 0, 0, 0, 0
160 DATA -1, 0, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 2, -1, 0, 0, 0
170 DATA 0, 0, 0, -1, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 2, -1, 0
180 DATA 0, 0, 0, 0, 0, -1, 2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 2
190 '
200 DIM C(6,6): FOR I=1 TO 6: FOR J=1 TO 6: READ C(I,J): NEXT J: NEXT I
210 OPEN "o", #1, "INVCART6.DAT"
220 FOR I=1 TO 6: FOR J=1 TO 6: WRITE #1, C(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #1
230 DATA 1.33333, 1, 1.66667, 2, 1.33333, 0.666667, 1, 2, 2, 3, 2, 1, 1.66667
240 DATA 2, 3.33333, 4, 2.66667, 1.33333, 2, 3, 4, 6, 4, 2, 1.33333, 2, 2.66667
250 DATA 4, 3.33333, 1.66667, 0.666667, 1, 1.33333, 2, 1.66667, 1.33333
260 '
270 DIM D(7,7): FOR I=1 TO 7: FOR J=1 TO 7: READ D(I,J): NEXT J: NEXT I
280 OPEN "o", #2, "INVCART7.DAT"
290 FOR I=1 TO 7: FOR J=1 TO 7: WRITE #2, D(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #2
300 DATA 2, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3.5, 4, 6, 4.5, 3, 1.5, 3, 4, 6, 8, 6, 4, 2
310 DATA 4, 6, 8, 12, 9, 6, 3, 3, 4.5, 6, 9, 7.5, 5, 2.5
320 DATA 2, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 1.5, 2, 3, 2.5, 2, 1.5
330 '
340 DIM E(8,8): FOR I=1 TO 8: FOR J=1 TO 8: READ E(I,J): NEXT J: NEXT I
350 OPEN "o", #3, "INVCART8.DAT"
360 FOR I=1 TO 8: FOR J=1 TO 8: WRITE #3, E(I,J): NEXT J: NEXT I: CLOSE #3
370 DATA 4, 5, 7, 10, 8, 6, 4, 2, 5, 8, 10, 15, 12, 9, 6, 3
380 DATA 7, 10, 14, 20, 16, 12, 8, 4, 10, 15, 20, 30, 24, 18, 12, 6
390 DATA 8, 12, 16, 24, 20, 15, 10, 5, 6, 9, 12, 18, 15, 12, 8, 4
400 DATA 4, 6, 8, 12, 10, 8, 6, 3, 2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2
410 END
```

__Run this program to create root matrix data files. It uses the Cartan matrices.__

```
10 ' ************************************************************
20 '      program to write roots of e6, e7 and e8 in bourbaki order
30 '      (1)--(3)--(4)--(5)--(6)--(7)--(8)      e6: (1) thru (6)
40 '                 :                           e7: (1) thru (7)
50 '                (2)                          e8: (1) thru (8)
60 '      onto files ROOTSE6.DAT, ROOTSE7.DAT AND ROOTSE8.DAT
70 '
80 '      Joseph Wolf  12 March 1983
90 ' ************************************************************
```

```
100 DIM C(8,8)
110 OPEN "i", #1, "CARTE8.DAT"
120 FOR I = 1 TO 8: FOR J = 1 TO 8: INPUT #1, C(I,J): NEXT J: NEXT I
130 CLOSE #1
140 '
150 DIM R(120,8)        'matrix of roots, not sorted
160 DIM S(8,8)          'matrix of simple roots
170 FOR I = 1 TO 8: FOR J = 1 TO 8
180 IF I = J THEN R(I,J) = 1 ELSE R(I,J) = 0
190 S(I,J) = R(I,J)    'simple roots set up here for reference
200 NEXT J: NEXT I
210 '
220 DIM P(120,8)       'r(i,*)-p(i,j)s(j,*) thru r(i,*)+q(i,j)s(j,*)
230 DIM Q(120,8)       'is the maximal s(j,*)-root-string thru r(i,*)
240 FOR I = 1 TO 120: FOR J = 1 TO 8
250 P(I,J) = 0: Q(I,J) = 0
260 NEXT J: NEXT I
270 FOR I = 1 TO 8: P(I,I) = 2
280 FOR J = 1 TO 8: IF I <> J THEN Q(I,J) = -C(I,J)
290 NEXT J: NEXT I
300 '
310 DIM STARTLEV(30) 'the roots of level l are r(startlev(l),*)
320 DIM STOPLEV(30)  'through r(stoplev(l),*)
330 STARTLEV(1) = 1: STOPLEV(1) = 8
340 B = 9              'pointer for next root to go into r(*,*)
350 LEV = 1            'current level
360 '
370 LEV = LEV + 1      'next level
380 PRINT "Starting level "; LEV; ":"
390 STARTLEV(LEV) = B
400 '
410 U = STARTLEV(LEV - 1): V = STOPLEV(LEV - 1)
420 FOR I = U TO V: FOR J = 1 TO 8
430 IF Q(I,J) = 0 THEN GOTO 890
440 '
450 FOR N = 1 TO 8
460 IF N = J THEN T(N) = R(I,N) + 1 ELSE T(N) = R(I,N)
470 NEXT N
480 '
490 IF STARTLEV(LEV) = B GOTO 580
500 FOR N = STARTLEV(LEV) TO B-1
510 DUPETEST = 0
520 FOR M = 1 TO 8
530 DUPETEST = DUPETEST + (T(M) - R(N,M))^2
540 NEXT M
550 IF DUPETEST = 0 GOTO 890     't(*) already on list of roots
560 NEXT N
570 '
580 FOR N = 1 TO 8
590 R(B,N) = T(N)     'add t(*) to the list of roots
600 NEXT N
610 PRINT "Just added root";B ;": (";T(1);T(2);T(3);T(4);T(5);T(6);T(7);T(8);")"
620 '
630 FOR M = 1 TO 8                        'simple root s(m,*)
640 HITFLAG = 0                  'see whether r(b,*) - s(m,*) is root
650 FOR N = U TO V                        'r(n,*) of previous level
```

```
660 DIFFLAG = 0
670 FOR L = 1 TO 8
680 DIFFLAG = DIFFLAG + (R(B,L) - S(M,L) - R(N,L))^2
690 NEXT L
700 '   if difflag =  0 then r(b,*) - s(m,*) =  r(n,*)
710 '   if difflag <> 0 then r(b,*) - s(m,*) <> r(n,*)
720 IF DIFFLAG <> 0 GOTO 770                'next n
730 HITFLAG = 1
740 P(B,M) = P(N,M) + 1
750 Q(B,M) = Q(N,M) - 1
760 GOTO 860                                'next m
770 NEXT N
780 '   if hitflag = 0 then r(b,*) - s(m,*) not a root so
790 '           R(B,*) AT BOTTOM OF THE S(M,*)-STRING THROUGH IT
800 '   if hitflag <> 0 then p(b,m), q(b,m) have already been set
810 IF HITFLAG <> 0 GOTO 860                'next m
820 INNER = 0                               '<r(b,*),s(m,*)>
830 FOR L = 1 TO 8: INNER = INNER + R(B,L)*C(L,M): NEXT L
840 Q(B,M) = -INNER
850 P(B,M) = 0
860 NEXT M
870 '   analysis of r(b,*) complete now
880 B = B+1
890 NEXT J: NEXT I
900 '   stop when no new roots produced on current level
910 IF B = STARTLEV(LEV) GOTO 950
920 STOPLEV(LEV) = B-1
930 GOTO 370
940 '
950 PRINT "Number of roots calculated"; B-1
960 '
970 '   WRITE ROOTS TO FILES ROOTSE6.DAT, ROOTSE7.DAT AND ROOTSE8.DAT
980 '
990 OPEN "o", #1, "ROOTSE6.DAT"
1000 OPEN "o", #2, "ROOTSE7.DAT"
1010 OPEN "o", #3, "ROOTSE8.DAT"
1020 FOR I = 1 TO 120                               'run through roots r(i,*)
1030 IF R(I,8) <> 0 GOTO 1080
1040 IF R(I,7) <> 0 GOTO 1080
1050 FOR J=1 TO 6: PRINT #1, R(I,J): NEXT J      'roots of E6
1060 FOR J=1 TO 7: PRINT #2, R(I,J): NEXT J
1070 FOR J=1 TO 8: PRINT #3, R(I,J): NEXT J
1080 NEXT I
1090 FOR I = 1 TO 120                               'run through roots again
1100 IF R(I,8) <> 0 GOTO 1140
1110 IF R(I,7) =  0 GOTO 1140
1120 FOR J=1 TO 7: PRINT #2, R(I,J): NEXT J      'roots of E7 which are
1130 FOR J=1 TO 8: PRINT #3, R(I,J): NEXT J      'not roots of E6
1140 NEXT I
1150 FOR I = 1 TO 120                               'final run through roots
1160 IF R(I,8) =  0 GOTO 1180
1170 FOR J = 1 TO 8: PRINT #3, R(I,J): NEXT J    'roots of E8 but not E6 or E7
1180 NEXT I
1190 CLOSE #1: CLOSE #2: CLOSE #3
1200 END
```

Main reducibility program. It uses all data files written by programs above.

```
10 ' ************************************************************
20 ' Generalized Verma Module Reducibility Program  23 March 1983
30 '          Joseph A. Wolf and Thomas J. Enright
40 '
50 ' A maximal parabolic P is chosen in E6, E7 or E8 by means of the
60 ' choice of the complementary simple root (NONC), which is assumed
70 ' to have coefficient 2 in the expression of the maximal root in
80 ' terms of simple roots.  A real form is envisioned in which (NONC)
90 ' is the noncompact simple root in Borel-DeSiebenthal root ordering.
100 '
110 ' This program finds the first reduction point for the generalized
120 ' Verma modules associated to a finite dimensional representation of
130 ' the reductive part M of the parabolic P = MN.
140 ' ***********************************************************
150 ' INITIALIZATION:
160 '   Choose algebra and noncompact simple root.
170 '    Set up Cartan matrix, RHO and ZETA.
180 '   Read in the root system.
190 ' ************************************************************
200 PRINT "ROOTS IN BOURBAKI ORDER (1)--(3)--(4)--(5)--(6)--(7)--(8)"
210 PRINT "WHERE E6 INVOLVES 1-6 ONLY          ¦"
220 PRINT "E7 INVOLVES 1-7, ETC.              (2)"
230 PRINT
240 INPUT "Which algebra E?  Enter 6, 7 or 8. ", RANK
250 IF RANK <> 6 AND RANK <> 7 AND RANK <> 8 THEN 310
260 DIM C(RANK, RANK)           'Cartan matrix
270 DIM CINV(RANK, RANK)        'inverse of Cartan matrix
280 DIM ZETA(RANK)              'relevant row of cinv
290 DIM RHO(RANK)
300 ON RANK - 5 GOTO 330, 440, 550
310 PRINT "Rank";RANK;"not valid here; must be 6, 7 or 8."
320 GOTO 230
330 PRINT
340 PRINT "Coefficients of the simple roots in the   1    2    3    2    1"
350 PRINT "maximal root are indicated here.  Enter  (1)--(3)--(4)--(5)--(6)"
360 PRINT "the number of a root of coefficient 2              ¦"
370 PRINT "which will be the noncompact simple root.         (2) 2"
380 PRINT
390 INPUT NONC: IF NONC = 2 OR NONC = 3 OR NONC = 5 THEN 410
400 PRINT "Root";NONC;"not appropriate here; check instructions.": GOTO 330
410 OPEN "i", #1, "CARTE6.DAT": OPEN "i", #2, "INVCART6.DAT"
420 RHO(1)=8:RHO(2)=11:RHO(3)=15:RHO(4)=21:RHO(5)=15:RHO(6)=8
430 GOTO 680
440 PRINT
450 PRINT "Coefficients of the simple roots in   2    3    4    3    2    1"
460 PRINT "the maximal root are indicated here. (1)--(3)--(4)--(5)--(6)--(7)"
470 PRINT "Enter the number of a root of coef.            ¦"
480 PRINT "2, for the noncompact simple root.            (2) 2"
490 INPUT NONC
500 IF NONC = 1 OR NONC = 2 OR NONC = 6 THEN 520
510 PRINT "Root";NONC;"not appropriate here; check instructions.": GOTO 440
520 OPEN "i", #1, "CARTE7.DAT": OPEN "i", #2, "INVCART7.DAT"
530 RHO(1)=17:RHO(2)=49/2:RHO(3)=33:RHO(4)=48:RHO(5)=75/2:RHO(6)=26:RHO(7)=27/2
540 GOTO 680
```

```
550 PRINT
560 PRINT "Coefficients of the simple roots  2    4    6    5    4    3    2"
570 PRINT "in the maximal root indicated.   (1)--(3)--(4)--(5)--(6)--(7)--(8)"
580 PRINT "Enter number of a root of coef.             !"
590 PRINT "2, for noncompact simple root.             (2) 3"
600 PRINT
610 INPUT NONC
620 IF NONC = 1 OR NONC = 8 THEN 640
630 PRINT "Root";NONC;"not appropriate here; check instructions.": GOTO 550
640 OPEN "i", #1, "CARTE8.DAT": OPEN "i", #2, "INVCARTB.DAT"
650 RHO(1)=46: RHO(2)=68: RHO(3)=91: RHO(4)=135
660 RHO(5)=110: RHO(6)=84: RHO(7)=57: RHO(8)=29
670 '
680 FOR I=1 TO RANK: FOR J=1 TO RANK
690 INPUT #1, C(I,J): INPUT #2, CINV(I,J): NEXT J: NEXT I
700 CLOSE #1: CLOSE #2
710 FOR J=1 TO RANK: ZETA(J) = CINV(NONC,J): NEXT J
720 ON RANK - 6 GOTO 740, 750
730 DIM ROOTS(36,6) : ROOTNUM = 36: OPEN "i", #1, "ROOTSE6.DAT": GOTO 760
740 DIM ROOTS(63,7) : ROOTNUM = 63: OPEN "i", #1, "ROOTSE7.DAT": GOTO 760
750 DIM ROOTS(120,8): ROOTNUM = 120: OPEN "i", #1, "ROOTSE8.DAT"
760 FOR I=1 TO ROOTNUM: FOR J=1 TO RANK: INPUT #1, ROOTS(I,J): NEXT J: NEXT I
770 CLOSE #1
780 ' ************************************************************
790 ' Count and arrange roots of reductive part M, nilradical N, of the
800 ' maximal parabolic subalgebra of E6, E7 or E8, whose complementary
810 ' root is the noncompact simple root (NONC).  Then print out the
820 ' groups of roots to verify that the last one is the highest one
830 ' (needed later) in the groups for coef 1 and coef 2 on (NONC).
840 ' ************************************************************
850 NUM0 = 0: NUM1 = 0: NUM2 = 0:                        'counters
860 FOR I = 1 TO ROOTNUM
870 IF ROOTS(I,NONC) = 0 THEN NUM0 = NUM0 + 1
880 IF ROOTS(I,NONC) = 1 THEN NUM1 = NUM1 + 1
890 IF ROOTS(I,NONC) = 2 THEN NUM2 = NUM2 + 1
900 NEXT I
910 NUM12 = NUM1 + NUM2                     'counter
920 DIM R0(NUM0 ,RANK)                      'roots of M (all are compact)
930 DIM R1(NUM1 ,RANK)                      'noncompact roots of N
940 DIM R2(NUM2 ,RANK)                      'compact    roots of N
950 DIM R12(NUM12 ,RANK)
960 S0 = 1: S1 = 1: S2 = 1: S12 = 1         'pointers for R0, R1, R2, R12
970 FOR I = 1 TO ROOTNUM
980 ON ROOTS(I,NONC) + 1 GOTO 990, 1020, 1050
990 FOR J=1 TO RANK: R0(S0,J) = ROOTS(I,J): NEXT J
1000 FOR J=1 TO RANK: R0(S0,0) = R0(S0,0) + R0(S0,J): NEXT J
1010 S0 = S0 + 1: GOTO 1080
1020 FOR J=1 TO RANK: R1(S1,J) = ROOTS(I,J): R12(S12,J) = ROOTS(I,J):NEXT J
1030 FOR J=1 TO RANK: R1(S1,0) = R1(S1,0) + R1(S1,J): NEXT J
1040 S1 = S1 + 1: S12 = S12 + 1: GOTO 1080
1050 FOR J=1 TO RANK: R2(S2,J) = ROOTS(I,J): R12(S12,J) = ROOTS(I,J):NEXT J
1060 FOR J=1 TO RANK: R2(S2,0) = R2(S2,0) + R2(S2,J): NEXT J
1070 S2 = S2 + 1: S12 = S12 + 1
1080 NEXT I
1090 ERASE ROOTS
1100 PRINT
```

```
1110 PRINT "root matrix R0 (coef 0 for (NONC)):":PRINT
1120 PRINT "level:      ","root:":PRINT
1130 FOR I=1 TO NUM0
1140 PRINT R0(I,0),
1150 FOR J=1 TO RANK: PRINT "     ";R0(I,J);:NEXT J:PRINT
1160 NEXT I
1170 PRINT: PRINT
1180 PRINT "root matrix R1 (coef 1 for (NONC)):":PRINT
1190 PRINT "level:      ","root:":PRINT
1200 FOR I=1 TO NUM1
1210 PRINT R1(I,0),
1220 FOR J=1 TO RANK: PRINT "     ";R1(I,J);:NEXT J:PRINT
1230 NEXT I
1240 PRINT: PRINT
1250 PRINT "root matrix R2 (coef 2 for (NONC)):":PRINT
1260 PRINT "level:      ","root:":PRINT
1270 FOR I=1 TO NUM2
1280 PRINT R2(I,0),
1290 FOR J=1 TO RANK: PRINT "     ";R2(I,J);:NEXT J:PRINT
1300 NEXT I
1310 PRINT
1320 ' ***********************************************************
1330 ' Compute RHOM (RHO for M) and RHOK (RHO for K)
1340 ' Print out RHO, ZETA, RHOM and RHOK to verify plausibility.
1350 ' *********************************************************
1360 DIM RHOM(RANK): DIM RHOK(RANK): DIM TEMP(RANK)
1370 FOR I=1 TO NUM0
1380 FOR J=1 TO RANK: TEMP(J) = TEMP(J) + R0(I,J): NEXT J
1390 NEXT I
1400 FOR J=1 TO RANK: RHOM(J) = TEMP(J)/2: NEXT J
1410 FOR I=1 TO NUM2
1420 FOR J=1 TO RANK: TEMP(J) = TEMP(J) + R2(I,J): NEXT J
1430 NEXT I
1440 FOR J=1 TO RANK: RHOK(J) = TEMP(J)/2: NEXT J
1450 PRINT: PRINT
1460 PRINT "ZETA: ";:FOR J=1 TO RANK:PRINT USING "###.##";ZETA(J);:
                    PRINT "  ";:NEXT J:PRINT
1470 PRINT "RHO : ";:FOR J=1 TO RANK:PRINT USING "###.##";RHO(J) ;:
                    PRINT "  ";:NEXT J:PRINT
1480 PRINT "RHOM: ";:FOR J=1 TO RANK:PRINT USING "###.##";RHOM(J);:
                    PRINT "  ";:NEXT J:PRINT
1490 PRINT "RHOK: ";:FOR J=1 TO RANK:PRINT USING "###.##";RHOK(J);:
                    PRINT "  ";:NEXT J:PRINT
1500 PRINT: PRINT
1510 ' **********************************************************
1520 '  Input LAMBDA, compute LAMBDA0 on line LAMBDA + (Reals)*ZETA
1530 ' **********************************************************
1540 PRINT "Now about to start with a finite dimensional M-module and continue"
1550 PRINT "it along the line (highest weight) + (Real numbers)*ZETA.  Enter"
1560 PRINT "the L's where the highest weight is SUM( L(I)*(I'th basic weight) )"
1570 PRINT
1580 DIM ELL(RANK): DIM LAMBDA(RANK): DIM LAMBDA0(RANK)
1590 FOR J=1 TO RANK: INPUT ELL(J): NEXT J
1600 PRINT: PRINT "The highest M-weight entered was"
1610 PRINT "(";:FOR J=1 TO RANK: PRINT ELL(J);: NEXT J: PRINT ")";
1620 PRINT "   as linear combination of the fundamental weights;"
```

```
1630 T = 0
1640 FOR J=1 TO RANK: FOR K=1 TO RANK
1650 T = T + ZETA(J)*C(J,K)*R1(NUM1,K)
1660 NEXT K: NEXT J
1670 U = 0
1680 FOR J=1 TO RANK: FOR K=1 TO RANK
1690 U = U + RHO(J)*C(J,K)*R1(NUM1,K)
1700 NEXT K: NEXT J
1710 FOR J=1 TO RANK: LAMBDA(J) = 0
1720 FOR K=1 TO RANK: LAMBDA(J) = LAMBDA(J) + ELL(K)*CINV(K,J): NEXT K
1730 NEXT J
1740 PRINT "(";:FOR J=1 TO RANK: PRINT LAMBDA(J);: NEXT J: PRINT ")";
1750 PRINT "   as linear combination of the simple roots."
1760 PRINT
1770 V = 0
1780 FOR J=1 TO RANK: V = V + ELL(J)*R1(NUM1,J): NEXT J
1790 FOR J=1 TO RANK: LAMBDA0(J) = LAMBDA(J) - ((U+V)/T)*ZETA(J): NEXT J
1800 PRINT "<ZETA  , w0(NONC)> ="; T
1810 PRINT "<RHO   , w0(NONC)> ="; U
1820 PRINT "<LAMBDA, w0(NONC)> ="; V
1830 PRINT "LAMBDA0 = (";:FOR J=1 TO RANK: PRINT LAMBDA0(J);:NEXT J: PRINT ")"
1840 PRINT
1850 ' ***************************************************************
1860 '           Calculate and display reduction matrix
1870 ' ***************************************************************
1880 DIM LAMBDA0RHO(RANK): DIM LAMBDARHO(RANK)
1890 DIM REDUCT0(NUM12): DIM REDUCT(NUM12)
1900 FOR J=1 TO RANK: LAMBDA0RHO(J) = LAMBDA0(J) + RHO(J): NEXT J
1910 FOR I=1 TO NUM12: REDUCT0(I) = 0
1920 FOR J=1 TO RANK: FOR K=1 TO RANK
1930 REDUCT0(I) = REDUCT0(I) + LAMBDA0RHO(J)*C(J,K)*R12(I,K)
1940 NEXT K: NEXT J: REDUCT0(I) = CSNG(CINT(REDUCT0(I))): NEXT I
1950 '
1960 PRINT
1970 PRINT "Next value of Z (the critical increment is 0.5 )";: INPUT Z
1980 '
1990 FOR I=1 TO NUM12: REDUCT(I) = REDUCT0(I) + Z*R12(I,NONC): NEXT I
2000 FOR J=1 TO RANK: LAMBDARHO(J) = LAMBDA0RHO(J) + Z*ZETA(J): NEXT J
2010 '
2020 PRINT
2030 PRINT "Reduction matrix for E";RANK;" and root";NONC;" at Z = ";Z;
2040 PRINT "with LAMBDA0 = (";:FOR J=1 TO RANK:PRINT LAMBDA0(J);:NEXT J:PRINT ")"
2050 PRINT
2060 PRINT "value",, "root"
2070 PRINT
2080 FOR I=1 TO NUM12: PRINT REDUCT(I),
2090 FOR J=1 TO RANK: PRINT R12(I,J);: NEXT J: PRINT: NEXT I
2100 ' ***********************************************************
2110 '    A root A(I) = R12(I,*) of N causes reduction iff
2120 '   (1)  REDUCT(I) = 2<LAMBDA0+Z*ZETA+RHO,A(I)>/<A(I),A(I)>
2130 '        is an integer > 0, and
2140 '   (2)  SUM <> 0 where SUM is the sum over the Weyl group of
2150 '        M of det(s)*exp( s( sA(I)(LAMBDA0+Z*ZETA+RHO) ) ).
2160 '
2170 '  TEST 1: If there is a root B(J) = R12(J,*) such that the Weyl
2180 '    reflection sA(I)( B(J) ) is a root of M, then SUM = 0.
```

```
2190 '     To do this, we calculate <sA(I)(B(J)) , ZETA>, since
2200 '     a root C is a root of M iff <C,ZETA> = 0.
2210 '
2220 '   TEST 2: We collect all the A(I) that satisfy (1), but are not
2230 '     shown by Test 1 to satisfy (2), and print out the
2240 '     corresponding sA(I)(LAMBDA0+Z*ZETA+RHO) to see whether
2250 '     their sum, summed over the Weyl group of M, = 0.  The
2260 '     result is not definitive: this part has to be done by
2270 '     hand.  But we do compute each
2280 '           <sA(I)(LAMBDA0 + Z*ZETA + RHO) , ZETA>
2290 '     since those are invariant under the action of the Weyl
2300 '     group of M on the left hand term of <,>, just in case
2310 '     lack of cancellation is forced by those numbers, and
2320 '     if those numbers don't pair off we conclude reduction.
2330 '
2340 '   REDUCTION CRITERION: If Test 2 is reached and does not produce
2350 '     0 then we are at a reduction point
2360 ' ************************************************************
2370 '    Collect the A's and the B's
2380 '
2390 SA = 1: SB = 1                'pointers
2400 NUMA = 0: NUMB = 0            'number of A's, B's
2410 FOR I=1 TO NUM12
2420 IF REDUCT(I) > .99 AND REDUCT(I) - INT(REDUCT(I)) < .01 THEN NUMA = NUMA + 1
2430 IF ABS(REDUCT(I)) < .01 THEN NUMB = NUMB + 1
2440 NEXT I
2450 DIM A(NUMA,RANK): DIM B(NUMB,RANK)
2460 DIM TEST2(NUMA)               'flags for proceeding from Test 1 to Test 2
2470 IF NUMA > 0 THEN 2500
2480 DIM LASTHOPE(1,RANK)          'fake - to prevent error on array erasure
2490 GOTO 3470
2500 FOR I=1 TO NUM12
2510 IF REDUCT(I) > .99 AND REDUCT(I) - INT(REDUCT(I)) < .01 THEN 2540
2520 IF ABS(REDUCT(I)) < .01 THEN 2590
2530 GOTO 2620
2540 '
2550 FOR J=1 TO RANK: A(SA,J) = R12(I,J): NEXT J
2560 A(SA,0) = REDUCT(I)                    'used in Test 2
2570 SA = SA + 1
2580 GOTO 2620
2590 '
2600 FOR J=1 TO RANK: B(SB,J) = R12(I,J): NEXT J
2610 SB = SB + 1
2620 NEXT I
2630 '
2640 IF NUMB = 0 THEN 3150
2650 '
2660 '    Compute sA(I)(B(J))
2670 '
2680 FOR I=1 TO NUMA
2690 FOR J=1 TO NUMB
2700 '
2710 INNERAB = 0
2720 FOR K=1 TO RANK: FOR L=1 TO RANK
2730 INNERAB = INNERAB + A(I,K)*C(K,L)*B(J,L)
2740 NEXT L: NEXT K
```

```
2750 '
2760 FOR K=1 TO RANK: SAB(K) = B(J,K) - INNERAB*A(I,K): NEXT K
2770 '
2780 ' Compute <sA(I)(B(J)),ZETA> and eliminate floating point error
2790 '
2800 MROOTFLAG = 0
2810 FOR K=1 TO RANK: FOR L=1 TO RANK
2820 MROOTFLAG = MROOTFLAG + SAB(K)*C(K,L)*ZETA(L)
2830 NEXT L: NEXT K
2840 MROOTFLAG = (CSNG(CINT(100*MROOTFLAG)))/100
2850 '
2860 IF MROOTFLAG <> 0 THEN 2950                'A(I) not cancelled by this B(J)
2870 '
2880 ' Arrival here means that A(I) is eliminated before Test 2
2890 TEST2(I) = 0                               'A(I) can skip Test 2
2900 PRINT
2910 PRINT "A(";I;") = (";:FOR K=1 TO RANK: PRINT A(I,K);: NEXT K: PRINT ") ";
2920 PRINT "cancelled by B(";J;") = (";:FOR K=1 TO RANK: PRINT B(J,K);: NEXT K
2930 PRINT ")": PRINT
2940 GOTO 3040
2950 NEXT J
2960 '
2970 ' Arrival here means that no B(J) cancelled A(I) using Test 1
2980 TEST2(I) = 1                               'A(I) survives to Test 2
2990 PRINT
3000 PRINT "A(";I;") = (";: FOR K=1 TO RANK: PRINT A(I,K);: NEXT K: PRINT ") ";
3010 PRINT "not cancelled by any B(J), survives to second test."
3020 PRINT
3030 '
3040 NEXT I
3050 '
3060 '   See whether all A(I) were eliminated in Test 1
3070 NUMTEST2 = 0
3080 FOR I=1 TO NUMA: NUMTEST2 = NUMTEST2 + TEST2(I): NEXT I
3090 IF NUMTEST2 > 0 THEN 3150
3100 DIM LASTHOPE(2,2)
3110 GOTO 3470
3120 '
3130 '  Test 2
3140 '
3150 IF NUMB = 0 THEN NUMTEST2 = NUMA
3160 DIM LASTHOPE(NUMTEST2,RANK)
3170 SL = 1                    'pointer
3180 FOR I=1 TO NUMA
3190 IF NUMB > 0 AND TEST2(I) = 0 THEN 3320
3200 '
3210 ' Recall that A(L,0) = REDUCT(I) where A(L) = R12(I),
3220 ' so A(I,0) = <A(I),LAMBDARHO = LAMBDA0 + Z*ZETA + RHO>,
3230 ' so sA(I)(LAMBDA+Z*ZETA+RHO) = LAMBDARHO - A(I,0)*A(I).
3240 '
3250 FOR J=1 TO RANK: LASTHOPE(SL,J) = LAMBDARHO(J) - A(I,0)*A(I,J): NEXT J
3260 LASTHOPE(SL,0) = 0
3270 FOR J=1 TO RANK: FOR K=1 TO RANK
3280 LASTHOPE(SL,0) = LASTHOPE(SL,0) + LASTHOPE(SL,J)*C(J,K)*ZETA(K)
3290 NEXT K: NEXT J
3300 LASTHOPE(SL,0) = (CSNG(CINT(100*LASTHOPE(SL,0))))/100  'correct f.p. error
```

```
3310 SL = SL + 1
3320 NEXT I
3330 PRINT
3340 PRINT "There is reduction for E";RANK;"at root";NONC;"and Z =";Z
3350 PRINT "UNLESS the alternating sum over the Weyl group of M, of the "
3360 PRINT "following weights, is zero.  Have fun trying to check that."
3370 PRINT "NOTE: If weights U(I) cancel that way the <U(I),ZETA> are equal."
3380 PRINT
3390 FOR I=1 TO NUMTEST2
3400 PRINT"      (";
3410 FOR J=1 TO RANK:PRINT USING "###.##";LASTHOPE(I,J);
3420 IF J < RANK THEN PRINT ",";: NEXT J
3430 PRINT ")","< ,ZETA> =";LASTHOPE(I,0): PRINT
3440 NEXT I
3450 GOTO 3540
3460 '
3470 PRINT
3480 PRINT "There was no reduction at z = ";Z
3490 PRINT
3500 GOTO 3540
3510 ' ****************************************************************
3520 '                  Keep trucking?
3530 ' ****************************************************************
3540 PRINT
3550 ERASE A: ERASE B: ERASE TEST2: ERASE LASTHOPE
3560 INPUT "Try another value of Z [yes/break/quit]"; S$
3570 IF LEFT$(S$,1) = "y" THEN 1960
3580 IF LEFT$(S$,1) = "q" THEN END
3590 IF LEFT$(S$,1) = "b" THEN 3620
3600 PRINT: PRINT "What?": GOTO 3560
3610 PRINT
3620 PRINT "Pause.  All parameter values preserved.  Type CONT to continue."
3630 PRINT
3640 STOP
3650 GOTO 3560
3660 END
```

T.J. ENRIGHT
University of California
Dept of Maths
LA JOLLA
CAL 92093
USA

Joseph A. WOLF
University of California
Berkeley
CA 94720
USA

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MOGENS FLENSTED-JENSEN
KIYOSATO OKAMOTO

An explicit construction of the K-finite vectors in the discrete series for an isotropic semisimple symmetric space

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 157-199
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__157_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 157-199

AN EXPLICIT CONSTRUCTION OF THE K - FINITE VECTORS IN THE DISCRETE SERIES FOR AN ISOTROPIC SEMISIMPLE SYMMETRIC SPACE.

BY

MOGENS FLENSTED - JENSEN* AND KIYOSATO OKAMOTO*

* Both authors partially supported by the
Danish Natural Science Research Council.

§ 1. Introduction.

In [18] Strichartz stated an explicit formula describing all $O(n)\times O(N)$ - finite functions in any $O(n,N)$ - invariant, closed and irreducible subspace of $L^2(O(n,N)/O(n,N-1))$. From a grouptheoretical point of view the formula is not so transparent since its formulation uses an explicit realization of $O(n,N)/O(n,N-1)$ as a hyperbolic space in $\mathbb{R}^{n+N}$.

In this paper we suggest a formula, which may do the same for the general semisimple symmetric space G/H , i.e. describe the K-finite functions in the irreducible representations of G in $L^2(G/H)$. The socalled discrete series for G/H . For the general case we can only state a few necessary and a few sufficient conditions for our formula to give a K-finite function in a discrete series for G/H . However for the isotropic spaces G/H the formula suffices to describe all the K-types of all the discrete series for G/H .

By the classification, cf. Wolf [22] and Berger [1]. The PseudoRiemannian, nonRiemannian isotropic spaces are all symmetric. Up to coverings they are the classical real-, complex- and quarternionic projective hyperbolic spaces.

$$SO_e(p,q+1)/S(O(p,q)\times O(1))$$
$$SU(p,q+1)/S(U(p,q)\times U(1))$$
$$Sp(p,q+1)/Sp(p,q)\times Sp(1)$$

for $p \geq 1$ and $q \geq 1$, and one exceptional case

$$F_{4(-20)}/Spin(1,8) \ .$$

This last space may in some sense be thought of as the projective hyperbolic space over the Cayley numbers with $p = q = 1$. We are not interested in the Riemannian isotropic spaces, since they have no discrete series.

Our formula, when explicitly computed for a real hyperbolic space, gives a formula very similar to Strichartz' ,but not completely identical to it. This difference between the two formulas may contain some nontrivial relations between formulas for special functions.

Our interest in the problem came from a discussion of the paper Flensted-Jensen [3]. In that paper it is shown that if rank G/H = rank $K/K\cap H$ then discrete series do exist. The existence is shown by construction of K-finite elements in the corresponding subspaces of $L^2(G/H)$. In Section 8 of [loc. cit.] it was shown by looking at the nonRiemannian isotropic spaces that the construction did not exhaust the discrete series for these spaces, at least for q large compared to p . It is our hope that the present study of these exceptional discrete series for the isotropic spaces may give some hints of how to solve the general problem of construction of all discrete series for G/H .

A recent preprint of Oshima-Matsuki [14] contains very much information on "where to expect" these exceptionel discrete series in general. However the general problem of actual construction of K-finite elements in each representation space seems still open.

We get two offspins of our result: In Section 3 we find a new proof of the minimality of the K-types used in [3] to construct the discrete series for G/H . This proof is simpler than the proof by Schlichtkrull [16] and is also valid for the universal covering space $\tilde{G}/H$, which was not covered by [16], because of the use of results from Vogan-Speh [21]. In Eksample 4.8 the computations show that there are examples where a minimal K-type of a discrete series for G/H does not have a $K\cap H$-fixed vector. In contrast to what for a long time was the belief of the first auther, cf. [4]. Also non-uniqueness of minimal K-types occurs.

The content of the present paper is as follows: In Section 2 we introduce the necessary notation and prerequisits. In Section 3 we introduce and discuss our proposed integral formula. In Section 4 we turn to the case of rank one and in particular to the isotropic spaces. For these our formula gives the complete answer. In Section 5 we compute explicitly the formulas optained in Section 4.

We want to thank Plesner Jakobsen and Schlichtkrull for many fruitfull discussions concerning the content of the present paper.

§ 2. Notation and preliminaries.

Let G be a connected, linear semisimple Lie group contained as a real form in a complex, simply connected Lie Group $G_{\mathbb{C}}$. Let τ be an involution of G and let $H = G_e^{\tau}$ be the identity component of the fixpoints for τ. Let $X^{\sim} = G^{\sim}/H$ be the universal covering space of $X = G/H$ 1). Every connected, simply connected semisimple symmetric space is of the form $X^{\sim} = G^{\sim}/H$. For more detailes see Berger [1], Loos [12] or Flensted-Jensen [4].

If $X^{\sim}$ is irreducible, then X is one of the following three types

(I) The compact type if G is compact.

(II) The noncompact type if H is compact and G is noncompact.

(III) The nonRiemannian type if H in noncompact.

The Killing form induces an invariant metric on X and on $X^{\sim}$. In case (I) and (II) the metric is Riemannian. In case (III) it is pseudoRiemanninan.

Up to H-conjugacy there is a unique maximal compact subgroup K of G, such that $\tau(K) = K$. Let σ be the Cartan involution related to K. Then $\sigma\tau = \tau\sigma$. Notice that for $X^{\sim}$ irreducible the three types can be characterized by: (I) $G = K$,, (II) $H = K$ and (III) $G \neq K$ and $H \neq K$.

Examples. (a). A connected semisimple Lie group G_1 may be considered as a symmetric space. Let $d(G_1)$ be the diagonal subgroup in $G_1 \times G_1$, then $G_1 \times G_1/d(G_1)$ is a symmetric space, which as a manifold is isomorphic to G_1. It is of type (I) if G_1 is compact. Otherwise it is of type (III).
(b). The hyperbolic spaces mentioned in Section 1 is of type (I) if $p = 0$, type (II) if $p \geq 1$ and $q = 0$ and type (III) if $p \geq 1$ and $q \geq 1$. □

The Riemannian symmetric spaces are well studied, cf. f.ex. Helgason [6], [8] and [9]. Our main concern in this paper is the nonRiemannian spaces. However as described below we shall make extensive use of a Riemannian symmetric space G^o/H^o "dual" to the nonRiemannian space G/H.

---

1) $G^{\sim}$ is chosen such that the covering map of $G^{\sim}$ onto G is an isomorphism between the analytic subgroups corresponding to $\mathfrak{h}$, the Lie algebra of H.

Discrete series

Definitions. (i) A discrete series representation π for $X = G/H$ is (the unitary equivalence class of) the representation of G on an invariant, irreducible subspace $V \neq 0$ of $L^2(X)$.

(ii) V_K is the subset of V consisting of the K-finite vectors in V . Then $V_K \subset L^2(X) \cap C^\infty(X)$.

(iii) V_{min} is the union of the isotypic components of the minimal K-types in V_K , (in the sense of Vogan [20]). Any $\psi \in V_{Min}$, $\psi \neq 0$ is called a minimal spherical function [1] for π .

(iv) For $\tilde{X} = \tilde{G}/H$ a discrete series (or more precisely a relative discrete series) is defined as under (i), but modulo a unitary action of the center of $\tilde{G}$. (The modifications needed in this connection are rather obvious. We shall not in the following be completely consistent in always pointing out the necessary reformulations in order to incorporate $\tilde{G}/H$ into the treatment.) □

Let $g_{\mathbb{C}}$ be the complex Lie algebra of $G_{\mathbb{C}}$. Let g, h and k be the real subalgebras corresponding to G, H and K . We denote again by τ and σ the differentials of τ and σ and their holomorphic extensions to $g_{\mathbb{C}}$. Since τ and σ commute we may decompose g according to $+1$ and -1 eigenspaces for τ and σ in the following way:

$$g = h + q = k + p = h \cap k + h \cap p + q \cap k + q \cap p .$$

Inside $g_{\mathbb{C}}$ we now define the real subalgebras g° , h° and k° "dual" to g , h and k by

$$g^\circ = h \cap k + i(h \cap p + q \cap k) + q \cap p ,$$

$$h^\circ = h_{\mathbb{C}} \cap g^\circ \quad \text{and} \quad k^\circ = k_{\mathbb{C}} \cap g^\circ ,$$

where $i = \sqrt{-1}$

Let G° , H° and K° be the corresponding analytic subgroups of $G_{\mathbb{C}}$. Notice that H° is maximal compact in G° , whereas K° is (in general) noncompact.

Definition. We shall call the Riemannian symmetric space G°/H° with the associated symmetric subgroup K° for the dual to G/H .

Notice that $(G/K, H)$ is dual to G°/K° .

---

1) This definition is slightly more general than the one used in [4].

Examples. (a). Let G_1 be a connected, semisimple Lie group (with finite center) and K_1 a maximal compact subgroup. Let $G_{1\mathbb{C}}$ and $K_{1\mathbb{C}}$ be the corresponding complex groups and let U_1 be a compact real form of $G_{1\mathbb{C}}$. The dual of G_1, i.e. of $G_1 \times G_1/d(G_1)$ is then $(G_{1\mathbb{C}}/U_1, K_{1\mathbb{C}})$.
(b). The dual of a hyperbolic space is obtained by exchanging the index pair (p,q) with $(p+q,0)$, and the corresponding subgroup K^o is in the respective cases given by $SO(p)\times SO_e(q,1)$, $S(U(p)\times U(q,1))$, $Sp(p)\times Sp(q,1)$ and $Spin(8,1)$. □

Let $C_K^\infty(G/H)$, $C_{K^\sim}^\infty(G^\sim/H)$ and $C_{K^o}^\infty(G^o/H^o)$ denote respectively the K-, $K^\sim$- and K^o- finite functions in $C^\infty(G/H)$, $C^\infty(G^\sim/H)$ and $C^\infty(G^o/H^o)$. Let $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ denote the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ and let $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}}$ and $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{k}}$ denote the centralizer of respectively $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ and $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$. Then $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ is naturally identified with the algebra of right invariant differential operators on G, $G^\sim$ or G^o, and thus also defines differential operators on G/H, $G^\sim/H$ or G^o/H^o. Clearly $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ leaves $C_K^\infty/G/H)$, $C_{K^\sim}^\infty(G^\sim/H)$ and $C_{K^o}(G^o/H^o)$ invariant. Similarly $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}}$ is, modulo a certain kernel, naturally identified with the algebra of invariant differential operators on G/H, $G^\sim/H$ or G^o/H^o.

Duality Theorem. ([3]). There is a unique isomorphism $\eta: f \to f^o$ between the $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\times\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}}$ - modules $C_{K^\sim}^\infty(G\ /H)$ and $C_{K^o}^\infty(G^o/H^o)$ such that

$$f(xH) = f^o(xH^o)$$

for each x in the identity component [1)] G_o of $G\cap G^o$.

Definition. A Cartan subspace $\mathfrak{a}$ for G/H is a maximal Abelian subspace of $\mathfrak{q}$, consisting of semisimple elements. Every Cartan subspace is H-conjugate to a σ-invariant one. A σ-invariant Cartan subspace is called fundamental, respectively compact, if $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k}$ is maximal Abelian in $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$, respectively if $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}$.
The rank of G/H is the dimension of any Cartan subspace for G/H.

---

1) Here is a slight abuse of notation. It is used that the covering map of $G^\sim$ onto G is an isomorphism between the analytic subgroups corresponding to $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}^o$.

Discrete series

Theorem 2.1. There exist discrete series for G/H if and only if G/H has a compact Cartan subspaces or equivalently if and only if

$$\text{rank}(G/H) = \text{rank}(K/K\cap H). \tag{2.1}$$

The sufficiency of (2.1) is proved in [3] by a simple construction of elements in $C_K^\infty(G/H)\cap L^2(G/H)$ generating irreducible subspaces of $L^2(G/H)$. We shall return to this below. The necessity of (2.1) is one of the results in Oshima-Matsuki [14].

From now on we assume the rank condition (2.1) to be satisfied. Fix a compact Cartan subspace $\mathfrak{a} = i\mathfrak{t}$ and a positive system Δ_c^+ of restricted [1)] roots for $\Delta_c = \Delta(\mathfrak{k}^o,\mathfrak{t})$. Let $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}^o,\mathfrak{t})$ and let W_c and W denote the respective Weyl-groups.

Let $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ be such that

$$\langle\lambda,\alpha\rangle > 0 \qquad \text{for each } \alpha\in\Delta_c^+ \text{ and} \tag{2.2}$$

$$\langle\lambda,\alpha\rangle \neq 0 \qquad \text{for each } \alpha\in\Delta . \tag{2.3}$$

We can then choose [2)] a positive system $\Delta^+ = \Delta_\lambda^+$ such that

$$\langle\lambda,\alpha\rangle > 0 \qquad \text{for each } \alpha\in\Delta^+ . \tag{2.4}$$

Let $\rho = \rho_\lambda$, respectively ρ_c , be half the sum counted with multiplicity of the roots in Δ^+ and Δ_c^+ .

---

1) Henceforth we shall leave out the word "restricted" .

2) The number of such choices as λ varies is the same as the number of cosets in $W_c\backslash W$.

The choice of Δ^+ defines compatible Iwasawa decompositions:

$$\mathfrak{g}^o = \mathfrak{h}^o + \mathfrak{t} + \mathfrak{n}^o \quad \text{and} \quad \mathfrak{k}^o = (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}) + \mathfrak{t} + \mathfrak{n}_c$$

where $\mathfrak{n}_c = \mathfrak{n}^o \cap \mathfrak{k}^o$, and

$$G^o = H^o T N^o \quad \text{and} \quad K^o = (K\cap H) T N_c \ .$$

For $x \in G^o$ we write correspondingly

$$x = k(x)a(x)n(x) \ .$$

Define also the Iwasawa projection $H: G^o \to \mathfrak{t}$ by $H(x) = \log(a(x))$ or

$$x \in H^o \exp(H(x)) N^o \ , \quad x \in G^o \ .$$

We use this to define

$$\psi^o_\lambda(x) = \int_{K\cap H} e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}k)\rangle} dk, \quad x \in G^o \ . \tag{2.5}$$

The function ψ^o_λ is an eigenfunction of each $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{\mathfrak{h}}$, cf. Helgason [6] page 94. Let χ_λ denote the corresponding eigenvalue homomorphism.

Choose a maximal Abelian subspace $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ and define the following centralizers:

$$M^o = (H^o)^{\mathfrak{t}} \ , \ M_t = (K\cap H)^{\mathfrak{t}} \ \text{and} \ M_b = (K\cap H)^{\mathfrak{b}} \ .$$

Furthermore define $\Delta^-_c = -\Delta^+_c$, $\Delta^- = -\Delta^+$, $\bar{\mathfrak{n}}^o = \tau(\mathfrak{n}^o)$, $\bar{\mathfrak{n}}_c = \tau(\mathfrak{n}_c)$ and $\bar{\mathfrak{n}}_n = \tau(\mathfrak{n}^o \cap \mathfrak{p}^o)$, and notice that $\bar{\mathfrak{n}}_n$ is not necessarily a subalgebra.

Let $\mathfrak{m}^o$, $\mathfrak{m}_t$ and $\mathfrak{m}_b$ be the Lie algebras of respectively M^o , M_t and M_b . Extend $\mathfrak{t}$ to a Cartan subalgebra $\tilde{\mathfrak{t}}$ of $\mathfrak{k}^o$ such that $\tilde{\mathfrak{t}} = i\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}$, where $i\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{m}_t$. Let $\tilde{\Delta}_c = \Delta(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}})$ and $\tilde{\Delta} = \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}})$ and choose compatible systems $\tilde{\Delta}^+_c$ and $\tilde{\Delta}^+$ compatible with Δ^+_c and Δ^+ . Let Δ^+_m be the corresponding positive roots for $\mathfrak{t}_1$ in $(\mathfrak{m}_t)_{\mathbb{C}}$. Let as usual $\tilde{\Delta}^-_c = -\tilde{\Delta}^+_c$, $\tilde{\Delta}^- = -\tilde{\Delta}^+$ and $\Delta^-_m = -\Delta^+_m$. We embed $\mathfrak{t}^*$ into $(\tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}})^*$ in the canonical way, i.e. such that $\langle \mathfrak{t}^*, \mathfrak{t}_1 \rangle = 0$.

Discrete series

The irreducible finite dimensional representations of $k_{\mathbb{C}}$, and thus of the universal covering groups of $K^{\sim}$ or K^{O}, are parametrized by the dominant weights. We shall always when nothing else is mentioned mean dominant w.r.t. $\tilde{\Delta}_c^{\sim}$. So in particular the representation $E_{-\mu}$ with dominant weight $-\mu$ is the contragredient representation $E_\mu^\vee$ to the representation E_μ of $\Delta_c^{\sim+}$ - dominant weight μ. Notice, cf. Helgason [6], that if $\mu \in (t_{\mathbb{C}}^{\sim})^*$ then $-\mu$ is a dominant weight for a representation having a nontrivial $K \cap H$-fixed vector if and only if $\mu \in t_{\mathbb{C}}^*$ and

$$\frac{\langle \mu,\alpha\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{for each} \quad \alpha \in \Delta_c^+ .$$

Let $n^{\sim}$ and $\bar{n}^{\sim}$ be the sum of the rootspaces [1)] in $g_{\mathbb{C}}$ for respectively $\Delta^{\sim+}$ and $\Delta^{\sim-}$. Then we have $n^{\sim} \cap g^{O} = n^{O}$ and similarly for $\bar{n}^{\sim}$. Let $n_c^{\sim}$ and $\bar{n}_c^{\sim}$ be the sum of the rootspaces in $k_{\mathbb{C}}$ for respectively $\Delta_c^{\sim+}$ and $\Delta_c^{\sim-}$. Again we have $n_c^{\sim} \cap k^{O} = n_c$ and similarly for $\bar{n}_c^{\sim}$.

Let ρ_m, $\rho_c^{\sim}$ and $\rho^{\sim}$ be half the sum of the roots [1)] respectively in Δ_m^+, $\Delta_c^{\sim+}$ and $\Delta^{\sim+}$ counted with multiplicity.

Let E_λ^O, E_λ and $E_\lambda^{\sim}$ denote the eigenspaces of $U(g_{\mathbb{C}})^h$ respectively in $C^\infty(G^O/H^O)$, $C^\infty(G/H)$ and $C^\infty(G^{\sim}/H)$ corresponding to χ_λ. By the Duality Theorem the K^O-finite elements in E_λ^O is identified with the $K^{\sim}$-finite elements in $E_\lambda^{\sim}$. Let $L_\lambda^2(G/H)$ denote the intersection of $E_\lambda^{\sim}$ with the relevant L^2-space, (cf. the definition of relative discrete series).

<u>Theorem 2.2</u>. Let the notation be as above and let $\mu_\lambda = \lambda+\rho-2\rho_c$. The function ψ_λ^O is K^O-finite and generates an irreducible representation of K^O with dominant weight $-\mu_\lambda$ if

$$(2.6) \qquad \frac{\langle \mu_\lambda,\alpha\rangle}{\langle \lambda,\lambda\rangle} \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{for each} \quad \alpha \in \Delta_c^+ .$$

Furthermore, assuming (2.6), the dual function $\psi_\lambda = \eta^{-1}(\psi_\lambda^O)$ belongs to $L_\lambda^2(G/H)$. It is the (up to scalars) unique $K \cap H$-fixed minimal spherical function for a discrete series representation T_λ for $G^{\sim}/H$. (T_λ is a discrete series for G/H if $-\mu_\lambda$ is a dominant weight for K and not only for $K^{\sim}$.)

---

1) Notice that $\Delta^{\sim}$ is not necessarily a rootsystem in the usual sense, but only the set of non-zero restrictions to $t^{\sim}$ of a rootsystem for a Cartan subalgebra in $g_{\mathbb{C}}$.

The K^o-finiteness and the fact that for sufficiently large λ's ψ_λ generates a discrete series for $\tilde{G}/H$ was proved in [3]. That this holds for each λ satisfying (2.2), (2.3) and (2.6) is a result of Oshima's, see Oshima-Matsuki [14] and Schlichtkrull [17]. That the representation of $\tilde{K}$ generated by ψ_λ is the unique minimal $\tilde{K}$-type was first proved by Schlichtkrull [16] for the linear case, i.e. provided $-\mu_\lambda$ is a dominant weight for K and not only for $\tilde{K}$. In Corollary 3.6 we give another proof which holds in general.

Let now $\lambda' \in \mathfrak{t}^*$. Oshima and Matsuki show in [14][1)], that if λ' is "sufficiently regular", then $L^2_{\lambda'}(G/H)$ is the direct sum of the discrete series T_λ, where λ runs through the set of all W-translates of λ', which satisfies (2.2), (2.3) and (2.6)[1)]. Conversely they show that if $L^2_{\lambda'}(G/H) \neq \{0\}$ then at least one W-translate λ of λ' satisfies (2.2), (2.3) and the following two conditions weaker than (2.6):

(2.7) $\qquad \dfrac{\langle \mu_\lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ for each $\alpha \in \Delta_c^+$

(2.8) $\qquad \langle \lambda - \rho, \beta \rangle \geq 0$ for each simple $\beta \in \Delta^+$ satisfying $\mathfrak{g}^o_\beta \subset \mathfrak{k}^o$.

In many cases the results of Oshima and Matsuki leads to the conclusion, that the T_λ's constructed in Theorem 2.2 exhaust the discrete series for G/H. However in general there are two questions left open:

1^o. Construct for each λ satisfying (2.2), (2.3), (2.7) and (2.8) but not (2.6) a discrete series representation T_λ for $\tilde{G}/H$.

2^o. Does the T_λ's corresponding to all λ's satisfying (2.2), (2.3), (2.7) and (2.8) exhaust the discrete series for $\tilde{G}/H$.

The main problem in 1^o is that the function ψ^o_λ is not K^o-finite. The main problem in 2^o besides the extension of the results in [14] to the nonlinear case is, when λ' is not "sufficiently regular", whether $L^2_{\lambda'}(G/H)$ could contain other irreducible invariant subspaces than those coming from the T_λ's, with $\lambda \in W \cdot \lambda'$.

1) Only the linear case is treated in [14]. Probably the results are true also for $\tilde{G}/H$.

Discrete series

Our primary concern in this paper is Question 1^o. We should like to solve it by a simple formula similar to (2.5) giving a minimal spherical function for the unknown T_λ. In Section 3 we shall discuss a formula similar to (2.5), which may give the answer to 1^o. However we can only prove rather little in general. Therefore we turn in Section 4 to the case of $\operatorname{rank}(G/H) = 1$. In which case we can solve question 1^o completely. Actually for the isotropic spaces the solution of question 2^o also follows and furthermore every $\tilde{K}$-type of every discrete series for $\tilde{G}/H$ is constructed.

The results from Oshima-Matsuki [14] are mentioned here mostly to describe the motivation for our study, and to place our results in proper perspective. In fact the only places where our results are based on [14] are in the statements that the $\tilde{K}$-finite functions we construct in $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$ are actually in $L^2_\lambda(G/H)$. This result from [14] does not depend on the linearity of G. The use we make of [14] is parallelle to what is mentioned above regarding the proof of Theorem 2.2. In the applications in Section 4 to the rank one case we can instead of [14] use the explicit computations in Section 5 to prove that the functions are square integrable.

§ 3. Integral formulas and dominant weight vectors for the K-types.

Let the notation be as in Section 2. When λ satisfies the conditions of Theorem 2.2 then ψ_λ is the $K \cap H$-fixed vector in the $\tilde{K}$-type with dominant weight $-\mu_\lambda$ of T_λ. The following formula is giving to us the corresponding dominant weight vector

$$(3.1) \qquad \xi^o_\lambda(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}\bar{n})\rangle} d\bar{n}, \qquad x \in G^o .$$

Definition. We shall often use the following short, convenient notation: Let $f \in C^\infty(G)$, $x, y \in G$ and $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ then we write

$$(3.2) \qquad f(xuy) = (uf^y)(x),$$

where u is used as a left-invariant differential operator on G and f^y is defined by $f^y(g) = f(gy)$.

For example if $X \in \mathfrak{g}$ we get

$$f(xXy) = \frac{d}{dt} f(x\exp(tX)y) \Big|_{t=0} ,$$

or if $u \to u^{\vee}$ is the canonical antiautomorphism of $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, then u as a right-invariant operator applied to f i given by $uf(x) = f(u^{\vee}x)$. As a last example let $s\in\mathbb{C}$ then $f(x(su)y) = sf(xuy)$.

<u>Proposition 3.1.</u> (i) The integral (3.1) converges absolutely, uniformly over compact subsets of

$$\{(\lambda,x)\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}} \times G^{o} \mid \operatorname{Re}\langle\lambda+\rho-\rho_c,\alpha\rangle > 0 \quad \text{for each} \quad \lambda\in\Delta_c^+\} .$$

(ii) Furthermore any $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ can be applied to ξ^{o}_{λ} by applying it to the integrand before the integration. Using the above definition this can be written

$$\xi^{o}_{\lambda}(u^{\vee}x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle-\lambda-\rho,H(x^{-1}u\bar{n})\rangle} d\bar{n} \;,\; x\in G^{o} .$$

(iii) Whenever well defined using (i) we have [1)]

$$\xi^{o}_{\lambda}(eH) = c(-i(\lambda+\rho-\rho_c)) ,$$

where $c(\cdot)$ is Harish-Chandras c-function corresponding to the Riemannian symmetric space $K^{o}/K\cap H$.

<u>Proof</u>: For $\bar{n}\in\bar{N}_c$ we write, cf. Section 2,

$$(3.3) \qquad \bar{n} = k(\bar{n})\exp(H(\bar{n}))n(\bar{n})\in(K\cap H)TN_c$$

and find for $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$

$$\int_{\bar{N}_c} |e^{\langle-\lambda-\rho,H(x^{-1}u\bar{n})\rangle}| d\bar{n} =$$
$$\int_{\bar{N}_c} |e^{\langle-\lambda-\rho,H(x^{-1}uk(\bar{n}))\rangle}| e^{\operatorname{Re}\langle-\lambda-\rho,H(\bar{n})\rangle} d\bar{n} .$$

---

1) The measure on $\bar{N}_c$ is normalized by

$$\int_{\bar{N}_c} e^{\langle-2\rho_c, H(\bar{n})\rangle} d\bar{n} = 1 .$$

Now $(\lambda,x,k) \to e^{<-\lambda-\rho,H(x^{-1}uk)>}$ is a continuous function on $t^*_{\mathbb{C}}\times G^o\times K\cap H$. Harish-Chandras c-function for $K^o/K\cap H$ is given by, see [5],

$$c(-i(\lambda+\rho-\rho_c)) = \int_{\bar{N}_c} e^{<-(\lambda+\rho-\rho_c)-\rho_c,H(\bar{n})>}d\bar{n} ,$$

with absolute and uniform convergence for λ satisfying

$$\mathrm{Re}<\lambda+\rho-\rho_c,\alpha> > 0 \quad \text{for each} \quad \lambda\in\Delta_c^+ .$$

From this the proposition follows easily. □

<u>Theorem 3.2.</u> Let $\lambda\in t^*$ satisfy (2.2), (2.3) and (2.6), then

(i) ξ_λ^o is well defined, nonzero and K^o-finite of irreducible K^o-type $-\mu_\lambda$.

(ii) $\xi_\lambda = \eta^{-1}(\xi_\lambda^o)$ is the minimal spherical function for T_λ corresponding to the dominant weight vector.

(iii) $\int_{K\cap H} \xi_\lambda(kx)dk = c(-i(\lambda+\rho-\rho_c))\psi_\lambda(x), \quad x\in\tilde{G}$.

<u>Proof:</u> Let λ satisfy the conditions in Proposition 3.1 (i). Using the notation from the proof of that proposition we find

$$\begin{aligned}\int_{K\cap H}\xi_\lambda^o(kx)dk &= \int_{\bar{N}_c}\int_{K\cap H} e^{<-\lambda-\rho,H(x^{-1}k\bar{n})>}dkd\bar{n}\\
&= \int_{\bar{N}_c}\int_{K\cap H}e^{<-\lambda-\rho,H(x^{-1}kk(\bar{n})\exp(H(\bar{n}))n(\bar{n}))>}dkd\bar{n}\\
&= \int_{\bar{N}_c} e^{<-\lambda-\rho,H(\bar{n})>}dn \int_{K\cap H} e^{<-\lambda-\rho,H(x^{-1}k)>}dk\\
&= c(-i(\lambda+\rho-\rho_c))\psi_\lambda(x) \quad , \quad x\in G^o .\end{aligned}$$

This proves (iii) whenever ξ_λ^o is K^o-finite, and also that $\xi_\lambda^o \neq 0$.
In order to ensure using Proposition 3.1 (i), the convergence in (3.1) for λ satisfying (2.2),(2.3) and (2.6) we need to know that

$$\langle \rho-\rho_c, \alpha\rangle \geq 0 \quad \text{for each} \quad \alpha \in \Delta_c^+ .$$

To prove this notice that the restriction of $\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_c$ to $\mathfrak{t}$ equals $\rho-\rho_c$, and that $2(\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_c)$ is a dominant weight of a finite dimensional subrepresentation of $k_{\mathbb{C}}$ in $\Lambda^l p_{\mathbb{C}}$, with $l = \dim_{\mathbb{C}}(n^{\sim} \cap p_{\mathbb{C}})$. Therefore we have

$$\langle \tilde{\rho}-\tilde{\rho}_c, \beta\rangle \geq 0 \quad \text{for each} \quad \beta \in \tilde{\Delta}_c^+ .$$

Let now $\alpha \in \Delta_c^+$, then α is the restriction to $\mathfrak{t}$ of an element $\beta = \alpha+\alpha' \in \tilde{\Delta}_c^+$, where $\langle \alpha', \mathfrak{t}\rangle = 0$. Since $-\beta^\tau = -\beta\circ\tau = \alpha-\alpha' \in \tilde{\Delta}_c^+$ we have

$$\langle \rho-\rho_c, \alpha\rangle = \langle \tilde{\rho}-\tilde{\rho}_c, \alpha\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\langle \tilde{\rho}-\tilde{\rho}_c, \beta-\beta^\tau\rangle \geq 0 ,$$

which is what we need. Thus ξ_λ^o is well defined and non-zero.

To prove that ξ_λ^o is K^o-finite, we fix any x from G^o and look at the function on K^o:

$$y \to e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}y)\rangle} .$$

It belongs to the space $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_1}(K^o/M_tTN_c)$, where $\lambda_1 = \lambda+\rho-\rho_c$, given by

$$C_{\lambda_1} = \left\{ \varphi \in C^\infty(K^o) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(yman) = e^{\langle -\lambda-\rho, H(a)\rangle}\varphi(y) \\ \text{for each } y\in K^o, m\in M_t, a\in T \\ \text{and } n\in N_c \end{array} \right\} .$$

The integration over $\bar{N}_c$ is an intertwining operator taking C_{λ_1} into $\mathcal{C}_{\lambda_1} = \mathcal{C}_{\lambda_1}(K^o/M_tT\bar{N}_c)$, which is defined like C_{λ_1} but with the condition

$$\varphi(yma\bar{n}) = e^{\langle -\lambda-\rho+2\rho_c, H(a)\rangle}\varphi(y) .$$

Since $\mu_\lambda = (\lambda+\rho-2\rho_c)$ satisfies (2.6) the image of this intertwining operator is an irreducible finite dimensional representation of K^o with dominant weight $-\mu_\lambda$. This finishes the proof of (i) and (iii). It follows now that ξ_λ is well defined, that it is the dominant weight vector of the representation of K^o generated by ψ_λ. Therefore (ii) is a consequence of Theorem 2.2. □

Remark. Assume λ as in Theorem 3.2. Then we know that T_λ is irreducible, and it follows that any $K^\sim$-finite vector for T_λ is of the form $u\xi_\lambda$, for same $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. By proposition 3.1 (ii) we have

$$(u\xi_\lambda)^\circ(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle-\lambda-\rho,H(x^{-1}u\bar{n})\rangle}d\bar{n}\ ,\ x\in G^\circ .$$

In particular if u commutes with $\mathrm{Ad}(\bar{N}_c)$ then

$$(u\xi_\lambda)^\circ(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle-\lambda-\rho,H(x^{-1}\bar{n}u)\rangle}d\bar{n},\ x\in G^\circ . \qquad \square$$

This is the type of integral we want to study. So whenever there is absolute convergence, uniformly over a compact neighbourhood of λ and over any compact subset of G° we define

$$(3.4) \qquad \xi^\circ_{\lambda,u}(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle-\lambda-\rho,H(x)^{-1}\bar{n}u)\rangle}d\bar{n}\ ,\ x\in G^\circ .$$

Since $\mathfrak{g}^\circ = \bar{\mathfrak{n}}^\circ+\mathfrak{m}^\circ+\mathfrak{t}+\mathfrak{n}^\circ$ and $\bar{\mathfrak{n}}^\circ = \bar{\mathfrak{n}}_c+\bar{\mathfrak{n}}_n$ we may actually assume that $u\in\mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^\circ_{\mathbb{C}})$ and that u is non-zero modulo $(\bar{\mathfrak{n}}_c)_{\mathbb{C}}\mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^\circ_{\mathbb{C}})$. In other words we can express u using only elements from a basis of $\bar{\mathfrak{n}}_n$.

Let $S(\bar{\mathfrak{n}}_{n\mathbb{C}})$ be the complex symmetric algebra over $\bar{\mathfrak{n}}_n$. Let $\gamma : S(\bar{\mathfrak{n}}_{n\mathbb{C}}) \to \mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^\circ_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ be the symmetrization map. Then γ is an $\mathrm{Ad}(M_tT\bar{N}_c)$- equivariant bijection between $S(\bar{\mathfrak{n}}_{n\mathbb{C}})$ and its image $\bar{\mathcal{U}}_n$, which is a cross section for $\mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^\circ_{\mathbb{C}})$ modulo $(\bar{\mathfrak{n}}_c)_{\mathbb{C}}\mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^\circ_{\mathbb{C}})$.

Proposition 3.3. Let $u\in\bar{\mathcal{U}}_n$ and $u \neq 0$.

(i) There is a constant $C \geq 0$ such that $\xi^\circ_{\lambda,u}$ is defined provided $\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$ satisfies

$$\mathrm{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle > C \text{ for each } \alpha\in\Delta^+_c .$$

(ii) Whenever well defined by (i) we have that $\xi^\circ_{\lambda,u} \neq 0$, that $\xi^\circ_{\lambda,u}\in\mathcal{E}^\circ_\lambda$ and that $\xi^\circ_{\lambda,u}$ is $\bar{N}_c$-invariant.

(iii) If u is $\mathrm{Ad}(\bar{N}_c)$-invariant, then we can take $C = 0$.

Proof: (i). Let V be the finite dimensional, unipotent representation of $\bar{N}_c$ generated by u in $\bar{\mathcal{U}}_n$ using $\mathrm{Ad}(\bar{N}_c)$.

Choose a basis $u_1, \ldots, u_s$ for V, then

$$\mathrm{Ad}(\bar{n})u = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(\bar{n})u_i \ , \ \bar{n} \in \bar{N}_c \ ,$$

where φ_i, $i = 1,\ldots,s$ are polynomial functions on $\bar{N}_c$.

Notice that the function $y \to e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}y)\rangle}$ for each fixed $x \in G^o$ belongs to $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda(G^o/M^oTN^o)$, where

$$(3.5) \qquad \mathcal{C}_\lambda = \left\{ \varphi \in C^\infty(G^o) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(yman) = e^{\langle -\lambda-\rho, H(a)\rangle}\varphi(y) \ , \\ \text{for each } y\in G^o,\ m\in M^o,\ a\in T \text{ and } n\in N^o \end{array} \right\}.$$

We now try to define a linear functional T_u on $\mathcal{C}_\lambda$ by

$$(3.6) \qquad \langle T_u, \varphi\rangle = \int_{\bar{N}_c} \varphi(\bar{n}u)d\bar{n} \ , \varphi\in\mathcal{C}_\lambda \ .$$

We have using (3.3)

$$\int_{\bar{N}_c} |\varphi(\bar{n}u)|d\bar{n} \leq$$
$$\int_{\bar{N}_c} \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(\bar{n})\varphi(u_i k(\bar{n})| \ e^{\mathrm{Re}\langle -\lambda-\rho, H(\bar{n})\rangle} d\bar{n} \ .$$

The proof of convergence of the integral defining the $\bar{c}$-function, cf. the proof of Proposition 3.1, shows that the factor $e^{\mathrm{Re}\langle -\lambda-\rho, H(\bar{n})\rangle}$ will dominate the φ_i's, when λ satisfies the condition $\mathrm{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle > C$ for each $\alpha\in\Delta_c^+$ for a suitably large C. This proves in particular that (i) holds.
By restricting functions in $\mathcal{C}_\lambda$ to H^o we get a bijection $\varphi \to \varphi'$ between $\mathcal{C}_\lambda$ and $C^\infty(H^o/M^o)$. The converse mapping is given by

$$\varphi(x) = \varphi'(k(x))e^{\langle -\lambda-\rho, H(x)\rangle}, \ x\in G^o \ .$$

From this and the estimates above it is clear, when the condition in (i) is satisfied, that T_u defines a distribution $T_{\lambda,u}$ on $H^o/M^o = G^o/M^oTN^o$ by

$$(3.7) \qquad \langle T_{\lambda,u} \ , \varphi'\rangle = \langle T_u \ , \varphi\rangle \ .$$

Notice that the support of $T_{\lambda,u}$ is contained in the K^o-orbit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\lambda$ [1] in G^o/M^oTN^o, where

$$(3.8) \qquad \mathcal{O} = K^oM^oTN^o/M^oTN^o \simeq K^o/M_tTN_c \simeq K\cap H/M_t .$$

The λ-Poisson transform, P_λ, of a distribution T on H^o/M^o is defined by

$$(3.9) \qquad P_\lambda(T)(x) = \langle T, f'_{\lambda,x}\rangle , \qquad x\in G^o ,$$

where $f'_{\lambda,x}$ is the restriction to H^o/M^o of the function $f_{\lambda,x} \in \mathcal{C}_\lambda$ given by

$$f_{\lambda,x}(y) = e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}y)\rangle} , \qquad y\in G^o .$$

It is now clear from (3.4), (3.6), (3.7) and (3.9) that ξ^o_λ is equal to $P_\lambda(T_{\lambda,u})$. Thus ξ^o_λ belongs to $\mathcal{E}^o_\lambda$. Since by our assumptions

$$\mathrm{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle > 0 \quad \text{for each } \alpha\in\Delta^+ ,$$

it follows from Helgason [7], page 198, that P_λ is injective. In order to finish the proof of (ii) we just have to show that $T_{\lambda,u} \neq 0$. But this follows easily from (3.6), (3.7) and the facts that $\bar{N}^o = \bar{N}_c \exp(\bar{\mathfrak{n}}_n)$ and that the map $\bar{n} \to \bar{n}M^oTN^o$ of $\bar{N}^o$ into G^o/M^oTN^o is injective. This proves (ii). Property (iii) follows directly from Proposition 3.1. □

We now turn to the question of K^o-finiteness of $\xi^o_{\lambda,u}$. From the remark before Proposition 3.3 it follows that if ξ^o_λ is K^o-finite and $u \in \mathcal{U}(\bar{\mathfrak{n}}^o)^{\bar{N}_c}$ then $\xi^o_{\lambda,u} = u\xi^o_\lambda$, and ξ^o_λ is thus K^o-finite.
If either ξ^o_λ is not K^o-finite (for example if (2.6) is not satisfied) or if u is not $\bar{N}_c$-invariant, then we don't know whether or not $\xi^o_{\lambda,u}$ is K^o-finite. However we can derive some necessary conditions on λ and u. We retain the notation from the proof of Proposition 3.3, and recall the definition (3.8) of $\mathcal{O}_\lambda$ and that $\xi^o_{\lambda,u}$ is the Poisson transform of the distribution $T_{\lambda,u}$ which is supported on $\mathcal{O}_\lambda$.

---

1) Recall that the Iwasawa decomposition depends on the choice of $\Delta^+ = \Delta^+_{\mathrm{Re}\lambda}$ which again depends on λ. There are as many different orbits $\mathcal{O}_\lambda$ as there are cosets in $W_c\backslash W$. These orbits are compact and minimal as K^o-orbits, cf. Matsuki [13].

Theorem 3.4. Let $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ satisfy (2.2) and (2.3). Let E_λ^{∞} denote the set of K^o-finite functions in E_λ^o, which are Poisson transforms of distributions on G^o/M^oTN^o with support contained in $\mathcal{O}_\lambda$. Then the following hold: (i) If $E_\lambda^{\infty}\neq\{0\}$ then

$$\frac{\langle\mu_\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha\ ,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}\qquad\text{for each}\qquad\alpha\in\Delta_c^+$$

where $\mu_\lambda = \lambda+\rho-2\rho_c$

(ii) If $-\mu^\sim$ is the dominant weight of a $K^\sim$-type occurringin E_λ^{∞}, then $\nu = \mu^\sim - \mu_\lambda$ is a linear combination of noncompact roots, i.e. roots from $\Delta(\mathfrak{n}_n,\mathfrak{t})$ with nonnegative, integral coefficients.

Before we go tothe proof, we establish the following lemma.

Lemma 3.5. Let G be a semisimple Lie group with Iwasawa decomposition $G = KAN$. Let M be the centralizer of A in K. Let V be a finite dimensional representation of G. Let $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{a}$ be the Lie algebras of G and A. Let $v\in V$, $v\neq 0$ satisfy the following, where $\nu\in\mathfrak{a}^*$:

$$\exp(H)\cdot v = e^{\langle\nu,H\rangle}v\qquad\text{for each}\qquad H\in\mathfrak{a}$$

$$m\cdot v = v\qquad\qquad\text{for each}\qquad m\in M\ ,$$

then

$$\frac{\langle\nu,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}\qquad\text{for each}\quad\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})\ .$$

Proof: Let $\alpha\in\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. We can construct a subgroup G^α locally isomorphic to $SL(2,\mathbb{R})$ related to α such that $G^\alpha = K^\alpha A^\alpha N^\alpha$, where $K^\alpha = K\cap G^\alpha$, $A^\alpha = A\cap G^\alpha$ and $N^\alpha = N\cap G^\alpha$, and such that $M^\alpha = M\cap G^\alpha$ is the centralizer of A^α in K^α, cf. Helgason [6]page 75.

Let V^α be the finite dimensional representation of G^α generated by v. G^α being isomorphic to $SL(2,\mathbb{R})$, it follows that M^α is equal to the center of G^α. Since v is M^α-fixed, it follows that M^α acts trivially on V^α. Let $\mathfrak{g}^\alpha$ and $\mathfrak{a}^\alpha$ be the Lie algebras of G^α and A^α, and let $\langle\ ,\ \rangle_\alpha$ denote the killing form on $\mathfrak{g}^\alpha$. A simple computation with $SL(2,\mathbb{R})$ shows that, if $\bar\nu$ and $\bar\alpha$ denote restriction to $\mathfrak{a}^\alpha$, then

$$\frac{\langle\bar\nu,\bar\alpha\rangle_\alpha}{\langle\bar\alpha,\bar\alpha\rangle_\alpha}\in\mathbb{Z}$$

but ([loc.cit.]page 75 (5))

$$\frac{\langle\nu,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{\langle\bar{\nu},\bar{\alpha}\rangle_\alpha}{\langle\bar{\alpha},\bar{\alpha}\rangle_\alpha} \in \mathbb{Z} \ . \qquad \square$$

Proof of Theorem 3.4: We start by proving (ii). So let $E_{-\mu^\sim}$ be a K^o-irreducible subspace of E_λ^∞ corresponding to the given K^o-type. Let $V_{-\mu^\sim}$ be the set of distributions supported on $\mathcal{O}_\lambda$ such that $E_{-\mu^\sim} = P_\lambda(V_{-\mu^\sim})$. Let furthermore $f = P_\lambda(T)$ be a dominant weight vector for $E_{-\mu^\sim}$. We are going to study T in some details:

T is a linear functional on $C^\infty(G^o/M^oTN^o)$, which is, cf. (3.4), identified with $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C}_\lambda(G^o/M^oTN^o)$. As a linear functional on $\mathcal{C}_\lambda$ T satisfies:

(i) T is $\bar{N}_c$-invariant, i.e. $\langle T,\varphi^{\bar{n}}\rangle = \langle T,\varphi\rangle$ for any $\varphi\in\mathcal{C}_\lambda$ and any $\bar{n}\in\bar{N}_c$, where $\varphi^{\bar{n}}(\cdot) = \varphi(\bar{n}\cdot)$.

(ii) T has $\mathfrak{t}^\sim$-weight $-\mu^\sim$, i.e.
$\langle T,\varphi^H\rangle = \langle -\mu^\sim,H\rangle\langle T,\varphi\rangle$ for any $\varphi\in\mathcal{C}_\lambda$ and any $H\in\mathfrak{t}^\sim$, where $\varphi^H(\cdot) = \varphi(H\cdot)$.

We now look at the restriction of T to the open dense $\bar{N}^o$-orbit $\mathcal{O}_1$ of $\bar{N}^o$ in G^o/M^oTN . We parametrize $\mathcal{O}_1$ by $\bar{N}^o$ via the bijective mapping

$$\bar{n} \to \bar{n}M^oTN^o \ .$$

Notice that $\bar{N}_c$ parametrizes the open orbit $\mathcal{O}_o$ of $\bar{N}_c$ in $\mathcal{O}_\lambda$, or in other words $\mathcal{O}_o = \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_\lambda$.
We now consider the distribution T_1 on $\bar{N}^o$ defined in the following way: Let $\varphi\in C^\infty(G^o/M^oTN^o)$ and $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\mathcal{O}_1$. Define $\varphi_1\in C_c^\infty(\bar{N}^o)$ by

$$\varphi_1(\bar{n}) = \varphi(k(\bar{n}))e^{\langle-\lambda-\rho,H(\bar{n})\rangle} \ ,$$

then let $\langle T_1,\varphi_1\rangle = \langle T,\varphi\rangle$. By the assumptions on T we have that T_1 is $\bar{N}_c$-invariant and that $\operatorname{supp}(T_1)\subset\bar{N}_c$. But then T_1 must have the following form

$$\langle T_1,\varphi_1\rangle = \int_{\bar{N}_c}\varphi_1(\bar{n}u)d\bar{n} \ , \quad \varphi_1\in C_c^\infty(\bar{N}^o)$$

where $u\in U(\bar{\mathfrak{n}}^o)$ and u can be expressed as a (noncommutative) polynomial in a basis for $\bar{\mathfrak{n}}_n$, (recall that $\bar{\mathfrak{n}}^o = \bar{\mathfrak{n}}_c+\bar{\mathfrak{n}}_n$) . Notice that if $\varphi\in\mathcal{C}_\lambda$ and $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\mathcal{O}_1$, then $\langle T,\varphi\rangle = \langle T_1,\varphi_1\rangle$ where φ_1 is the restriction of φ to $\bar{N}^o$. We conclude that

(3.10) $\qquad \langle T,\varphi\rangle = \int_{\bar{N}_c} \varphi(\bar{n}u)\,d\bar{n} = \langle T_u,\varphi\rangle ,$

for each $\varphi\in C_\lambda$ with $\mathrm{supp}(\varphi)\subset \mathcal{O}_1$. Notice that T is an extension of the distribution T_u defined by the integral formula (3.10) on $\mathcal{O}_1$. Also T_u can at most have one K^o-finite extension with support contained in $\mathcal{O}_\lambda$, since the difference between two extensions is again K^o-finite and has support contained in $\mathcal{O}_\lambda\setminus\mathcal{O}_o$, but since the support must be a union of K^o-orbits it is empty by the minimality of $\mathcal{O}_\lambda$.

Combining (3.10) with property (ii) of T above we get for $\mathrm{supp}(\varphi)\subset\mathcal{O}_1$ and $H\in\tilde{t}$:

$$\begin{aligned}\langle -\tilde{\mu},H\rangle\,\langle T_u,\varphi\rangle &= \int_{\bar{N}_c} \varphi(H\bar{n}u)\,d\bar{n}\\ &= \int_{\bar{N}_c} (\varphi(\bar{n}(\mathrm{ad}H)(u))+\langle 2\rho_c,H\rangle\varphi(\bar{n}u)+\varphi(\bar{n}uH))\,d\bar{n}\\ &= \langle T_{(\mathrm{ad}H)(u)},\varphi\rangle+\langle 2\rho_c-\lambda-\rho,H\rangle\langle T_u,\varphi\rangle\end{aligned}$$

or in other words

$$\langle T_{(\mathrm{ad}H)(u)},\varphi\rangle = \langle \mu_\lambda-\tilde{\mu},H\rangle\langle T_u,\varphi\rangle .$$

If we assume $u\in\mathcal{U}_n$, which we may, we conclude that

$$\mathrm{ad}(H)u = \langle -\nu,H\rangle u ,$$

where $\nu = \tilde{\mu}-\mu_\lambda$. This proves (ii).

To prove (i) first notice that $\mathcal{E}_\lambda^{oo}$ being nontrivial must contain a K^o-type with a $K\cap H$-fixed vector. (This follows since $\eta^{-1}(\mathcal{E}_\lambda^{oo})$ is a $\mathcal{U}(g_{\mathbb{C}})$-submodule of $\mathcal{E}_\lambda$, and as such it must contain a function, which is non-zero at the point eH). Returning again to the proof of (ii) we may assume that $E_{-\tilde{\mu}}$ is such a K^o-type. But then $\tilde{\mu}\mid_{it_1} = 0$, such that $\tilde{\mu}\in t^*$, also

(3.11) $\qquad \dfrac{\langle\tilde{\mu},\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\in\mathbb{Z}^+$ for each $\alpha\in\Delta_c^+$.

Furthermore the dominant weight vector T , and thus T_u , is M_t-invariant .From this we conclude,cf.(3.10), that u is $\mathrm{Ad}(M_t)$-invariant. Using Lemma 3.5 for

$K^{o} = K \cap HTN_{c}$ we conclude that also

$$(3.12) \qquad \frac{<-\nu,\alpha>}{<\alpha,\alpha>} \in \mathbb{Z} \quad \text{for each} \quad \alpha \in \Delta_{c}^{+} .$$

combining (3.11) and (3.12) with $\mu_{\lambda} = \tilde{\mu} - \nu$, we have proved (i). □

Corollary 3.6. Let $\lambda \in \mathfrak{t}^{*}$ satisfy (2.2), (2.3) and (2.6). Then T_{λ} , the discrete series for $\tilde{G}/H$ generated by ψ_{λ} or by ξ_{λ} , has a unique minimal $\tilde{K}$-type with Δ_{c}^{-} dominant weight $-\mu_{\lambda}$.

Proof: The proof is exactly as in Schlichtkrull [16], page 141, except that we can refer to our Theorem 3.4 instead of the reference to Vogan-Speh [21]. In short: Let $-\tilde{\mu}$ be a dominant weight of a $\tilde{K}$-type in T_{λ} , then

$$\| \tilde{\mu} + 2\tilde{\rho}_{c} \|^{2} = \| \mu_{\lambda} + 2\tilde{\rho}_{c} + \nu \|^{2}$$

$$= \| \mu_{\lambda} + 2\tilde{\rho}_{c} \|^{2} + \| \nu \|^{2} + 2\mathrm{Re}<\lambda+\rho, \nu_{|\mathfrak{t}}> +$$

$$+ 2\mathrm{Re}<2\rho_{m}, \nu_{|\mathfrak{t}_{1}}> \geq \| \mu_{\lambda} + 2\tilde{\rho}_{c} \|^{2} ,$$

and equality only holds for $\nu = 0$. □

From the proof of Theorem 3.4 we get the following

Corollary 3.7. Let $\lambda \in \mathfrak{t}^{*}$ and $u \in \bar{\mathcal{U}}_{n}$ and assume that

$$(3.13) \qquad \xi^{o}_{\lambda,u}(x) = \int_{\bar{N}_{c}} e^{<-\lambda-\rho, H(x^{-1}\bar{n}u)>} d\bar{n} \ , \quad x \in G^{o} ,$$

converges absolutely uniformly as in Proposition 3.3 (i). If $\xi^{o}_{\lambda,u}$ is K^{o}-finite giving rize to an irreducible representation of K^{o} of dominant weight $-\tilde{\mu}$, then (i) and (ii) of Theorem 3.4 are satisfied and u satisfies

(i) $\quad \mathrm{Ad}(a)u = e^{<\mu_{\lambda}-\tilde{\mu}, H(a)>} u$, for each $a \in T$

(ii) $\quad \{\mathrm{Ad}(m)u \mid m \in M_{t}\}$ generates an irreducible representation $\delta_{-\mu_{m}}$ of M_{t} in $\bar{\mathcal{U}}_{n}$ of Δ_{m}^{-}-dominant weight $-\mu_{m} = -\tilde{\mu}_{|\mathfrak{t}_{1}}$.

Remarks. (a). The problem of the converse of Corollary 3.7 is the following: Assume that $u\in\bar{\mathcal{U}}_n$ generates an irreducible representation $E_{-\nu}$ in $\bar{\mathcal{U}}_n$ under $Ad(M_tT)$ of weight $-\nu$. Let $\nu_1 = \nu_{|\mathfrak{t}}$ and $\mu_m = \nu_{|\mathfrak{t}_1}$ such that u is of $\mathfrak{t}$-weight $-\nu_1$ and generates an irreducible representation δ of M_t with Δ_m^--dominant weight $-\mu_m$. Assume furthermore that $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ satisfies (2.2) and (2.3) and that $-\tilde{\mu} = -(\mu_\lambda+\nu)$ is a dominant weight for $\mathfrak{k}^\circ$.

The first question is whether $\xi^\circ_{\lambda,u}$ is at all defined, cf. (3.13) and Proposition 3.3? If so then notice that

$$(3.14) \qquad \Phi_x : y \to \int_{\bar{N}_c} e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}y\bar{n}u)\rangle} d\bar{n}$$

for each $x\in G^\circ$ as a function on K° may be considered as belonging to the space of functions

$$\left\{ \varphi\in C^\infty(K^\circ, E_{-\nu}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(yma\bar{n}) = \delta^\vee(m^{-1})e^{\langle -\mu\ ,H(a)\rangle}\varphi(y)\ , \\ \text{for each } y\in K^\circ, m\in M_t\ , \\ a\in T \text{ and } \bar{n}\in\bar{N}_c \end{array} \right\}.$$

This space, defining a non-unitary principal series for K°, contains an irreducible finite dimensional subrepresentation with dominant weight $-\tilde{\mu}$. The second question is, whether Φ_x belongs to this finite dimensional subspace for each $x\in G^\circ$?

(b). Assume that $\lambda\in\mathfrak{t}^*$ satisfies (2.2), (2.3), (2.7) and (2.8) but not (2.6). One might think that a minimal K°-type in $\mathcal{E}^{\circ\circ}_\lambda$ could be constructed in the following way: choose ν as under (a) in such a way that $\|\mu_\lambda+\nu+2\tilde{\rho}_c\|$ is minimal. Then prove that $\xi^\circ_{\lambda,u}$ is defined and K°-finite.

(c). Theorem 3.4 is, at least for the linear case, contained in Theorem 3 of Oshima-Matsuki [14], and our proof is much in the same spirit as the proof in [14].

(d). Corollary 3.7 clearly gives an upper bound on the multiplicity of any $\tilde{K}$-type $-\tilde{\mu}$ in any discrete series representations for $\tilde{G}/H$ contained in $\eta^{-1}(\mathcal{E}^{\circ\circ}_\lambda)$.

(e). Let $\mathcal{E}^{\circ\circ\circ}_\lambda$ denote the set of K°-finite functions in $\mathcal{E}^\circ_\lambda$, which are Poisson transforms of hyperfunctions supported on $\mathcal{O}_\lambda$. It follows from [14] that

$$\eta^{-1}(\mathcal{E}^{\circ\circ}_\lambda) \subset \eta^{-1}(\mathcal{E}^{\circ\circ\circ}_\lambda) \subset L^2_\lambda(G/H)\ .$$

As stated in [14] the square integrability holds for those λ's for which the functions are K-finite and not just $\tilde{K}$-finite. But the asymptotic estimates needed does not seem to depend on the linearity of G at all.

(f). From Oshima-Sekiguchi [15] and Oshima-Matsuki[14] it may very well follow, that for any $\tilde{K}$-finite and square integrabel function f in $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda$, the asymptotic behaviour of $f^o = \eta(f)$ on G^o/H^o is such, that f^o is the Poisson transform of a distribution. If this is the case then $\mathcal{E}_\lambda^{oo} = \mathcal{E}_\lambda^{ooo}$.

(g). It is also proved in [14] that for any $\lambda \in \mathfrak{t}^*$, we have

$$L^2_\lambda\,(G/H)^K = \bigoplus_w \eta^{-1}(\mathcal{E}_\lambda^{ooo}) \;,$$

where w runs over the elements in W, such that $w \cdot \lambda$ satisfies (2.2),(2.3),(2.8) and a condition stronger than (2.7) which ensures that the occuring $\tilde{K}$-finite functions are actually K-finite.

§ 4. The nonRiemannian isotropic spaces.

In this section we turn to the semisimple symmetric spaces of rank one. The Riemannian cases, i.e. the spaces of compact type (I) or the spaces of noncompact type (II), are from our point of view completely solved even for general rank. By this we mean that for case (I) $L^2(G/H)$ has a purly discrete spectrum, which is explicitly known. (See [4] Example 2.7 for an interpretation of this case in our framework). For case (II) Harish-Chandras spherical Plancherel formula shows that there are no discrete series. This also follows from Theorem 2.1, since $K = H \neq G$ in this case and thus $\mathrm{rank}\,(G/H) > \mathrm{rank}(K/K \cap H) = 0$.

In Table 1 we give a list of the nonRiemannian semisimple symmetric spaces of rank one. We have also included some more information about these spaces. It follows in particular that Question 1° of Section 2 is relevant only for some of the isotropic spaces. For this reason we now turn to the isotropic spaces.

The isotropic spaces are well studied, see for example Strichartz [18] for the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces, Faraut [2] for the $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$- hyperbolic spaces and Kosters [11] for the exceptional case. The only cases wich are not covered by these references are the simply connected covering spaces $\tilde{G}/H$ for the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces with $q = 1$.

In Table 2 we describe for the isotropic spaces G/H the values of $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ for which our discussion in Section 3 allow for the possibilityof having a discrete series for G/H. These parametervalues are easily related to the parametrization of the discrete series in the above references by comparring eigenvalues of the Casimir operator. This is also contained in Table 2. It follows in particular that there exists exactly one discrete series representation for each possible value of λ. Looking more carefully at [18], [2] and [11] one can also sort out all the K-types occurring in each T_λ. This means that as soon as we have answered Question 1° of Section 2, we have also answered Question 2°. Strictly speaking this is only true when we consider the spaces G/H. For the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces with $q = 1$ we see no serious difficulties in generalizing either Strichartz methods or Faraut's methods to give also the discrete series for $\tilde{G}/H$. But since we have not done this in any detail, we cannot claim to have answered Question 2° for these simply connected covering spaces.

We now turn to our discussion in Section 3. Elaborating on the results from Section 3 we want to answer Question 1^{o} of Section 2, and at the same time we want to construct all $\tilde{K}$-types of the representations T_{λ}, where λ may be arbitrary subject to conditions (2.2), (2.3) and (2.7), cf. Table 2. In order to make our construction as simple and direct as possible, we want to do this without relying on the very explicit computations in [18],[2] and [11] or on the very deep results in Oshima-Matsuki [14].

Before coming to our main theorem we need some remarks and some lemmaes. Recall that M_t and M_b are the centralizers respectively of $\mathfrak{t}$ in $K\cap H$ and of $\mathfrak{b}$ in $K\cap H$, where $\mathfrak{b}$ is maximal Abelian in $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$. If $B = \exp(\mathfrak{b})$ then we have, cf. [3], that

$$(4.1) \qquad G = KBH\ , \quad \tilde{G} = \tilde{K}BH \ \text{ and } \ G^{o} = K^{o}BH\ .$$

<u>Lemma 4.1.</u> Every $\tilde{K}$-type occurring in $C^{\infty}_{\tilde{K}}(\tilde{G}/H)$ has a nontrivial M_b-fixed vector.

<u>Proof:</u> Let $f \in C^{\infty}(\tilde{G}/H)$ and let $x \in \tilde{G}$ be such that $f(x) \neq 0$. According to (4.1) write $x = kbh$, let ${}^{k}f\,(g) = f(kg)$ and define $f_1 \in C^{\infty}(\tilde{G}/H)$ by

$$f_1(g) = \int_{M_b} {}^{k}f\,(mg)\,dm\ .$$

Then f_1 is M_b-invariant and belongs to the $\tilde{K}$-invariant subspace of $C^{\infty}(\tilde{G}/H)$ generated by f. f_1 is nonzero since

$$f_1(b) = \int_{M_b} f(kmb)\,dm = f(kb) \neq 0\ .$$

This proves that any nontrivial $\tilde{K}$-invariant subspace of $C^{\infty}(\tilde{G}/H)$ contains a nonzero M_b-invariant function, and the lemma follows. □

<u>Lemma 4.2.</u> Let G/H be nonRiemannian and isotropic, then

$$K\cap H = M_b M_t\ ,$$

i.e. every $K \in K\cap H$ can be written $k = m_1 m_2$, where $M_1 \in M_b$ and $m_2 \in M_t$.

Proof: For the $\mathbb{R}$- , $\mathbb{C}$- and $\mathbb{H}$-hyperbolic spaces this lemma follows easily from Table 3. For the exceptional space $F_{4(-20)}/\mathrm{Spin}(1,8)$ one can for example use the description of $F_{4(-20)}$ in Takahashi [19] and with a few computations see that M_b and M_t are both isomorphic to Spin(7) , but with two different embeddings. It follows then from Lemma 1, page 534 of [19], that $M_b \simeq \mathrm{Spin}(7)$ acts transitively on $K\cap H/M_t \simeq \mathrm{Spin}(8)/\mathrm{Spin}(7) \simeq S^7$. This is the same as saying that $M_bM_t = K\cap H$. □

Lemma 4.3. Let G/H be nonRiemannian and isotropic, then $\bar{n}_c$ and $\bar{n}_n$ commute with each other. In particular every element u from $\mathcal{U}_n$ is $\mathrm{Ad}(\bar{N}_c)$-invariant, and $\xi^o_{\lambda,u}$ is well defined for all λ such that $\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$.

Proof. The possible roots in Δ^+ are α and 2α . Therefore $[\bar{n}^o,\bar{n}^o] \subset g^o_{-2\alpha}$, but from Table 1 it follows that $g^o_{-2\alpha} \subset k^o$. From this we conclude that

$$[\bar{n}_c,\bar{n}_n] \subset k^o \cap [\,k^o,p^o] \subset k^o \cap p^o = \{0\} .$$

The rest of the lemma now follows from Proposition 3.3. □

Lemma 4.4. Let G/H be nonRiemannian and isotropic. Every $\mathrm{Ad}(M_t)$-invariant non-trivial subspace of $\mathcal{U}_n$ contains a nonzero $\mathrm{Ad}(M_t \cap M_b)$-fixed element.

Proof: Let $\lambda \in t^*$ be an arbitrary element satisfying $\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$ for each $\alpha \in \Delta^+$. Let $u \in \mathcal{U}_n$, $u \neq 0$. We want to prove that the subspace generated by u contains a nonzero $M_t \cap M_b$-fixed element. Without loss of generality we may assume that u is homogeneous under T , i.e. $\mathrm{Ad}(a)u = e^{\langle -\nu, H(a)\rangle}u$ for each $a \in T$ and some $\nu \in t^*$. It follows from Lemma 4.3 and Proposition 3.3 that

$$\xi^o_{\lambda,u}(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}\bar{n}u)\rangle} d\bar{n} \quad , \quad x \in G^o \quad ,$$

is well defined and nonzero. Choose $x \in G^o$ such that $\xi^o_{\lambda,u}(x) \neq 0$. Using (4.1) we can write $x = y^{-1}bh$, where $y \in K^o$. Furthermore using Lemma 4.2 write $y = m_1m_2a\bar{n}$, where $m_1 \in M_b$, $m_2 \in M_t$, $a \in T$ and $\bar{n} \in \bar{N}_c$. It is then easily seen that we have for every $m \in M_t \cap M_b$

$$0 \neq \xi^o_{\lambda,u}(x) = e^{\langle -\lambda-\rho+2\rho_c-\nu,\ H(a)\rangle}\xi^o_{\lambda,u_m}(b) \quad ,$$

where $u_m = \mathrm{Ad}(mm_2)u$. Now

$$U_1 = \int_{M_t \cap M_b} u_m \, dm$$

is $M_t \cap M_b$-invariant, nonzero and contained in the subspace of $\bar{\mathcal{U}}_n$ generated under $Ad(M_t)$ by u . □

Recall that a pair (M,L) , where M is a locally compact group and L a compact subgroup, is called a Gelfand pair if the convolution algebra of continuous L-bi-invariant functions is commutative, or equivalently if every irreducible, unitary representation of M has at most a one dimensional subspace consisting of L-fixed vectors.

Lemma 4.5. Let G/H be nonRiemannian and isotropic. The pair $(M_t, M_t \cap M_b)$ is a Gelfand pair.

Proof: From Table 3 it follows, when disregarding some trivial factors, that $(M_t, M_t \cap M_b)$ for the $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$- and $\mathbb{H}$-hyperbolic spaces are respectively

$$(SO(p),\ SO(p-1)),\ (S(U(p) \times U(1)),\ S(U(p-1) \times U(1)^* \times U(1)^*))$$

$$\text{and} \quad (sp(p) \times Sp(1),\ Sp(p-1) \times Sp(1)^* \times Sp(1)^*) .$$

These pairs are all known to be Gelfand pairs, since they occur as "K/M" for the following rank one Riemannian symmetric space:

$$SO_e(p,1)/SO(p),\ SU(p,1)/S(U(p) \times U(1))$$

$$\text{and} \quad Sp(p,1)/Sp(p) \times Sp(1)$$

For the exceptional case we look at $(Spin(7), G_2)$. As used before $Spin(7)/G_2 \simeq S^7$. But $SU(4)$ is contained in $Spin(7)$ in such a way that already $SU(4)$ acts transitively on S^7 with stabalizer $SU(3)$. Therefore considering the G_2-bi-invariante continuous functions on $Spin(7)$ as G_2-invariant functions on S^7 , these form a subset of the $SU(3)$-invariant functions on S^7 . Since $(SU(4), SU(3))$ is known to be a Gelfand pair it follows that so is $(Spin(7), G_2)$. □

Table 1. The nonRiemannian semisimple symmetric spaces of rank one.

Isotropic spaces	G/H		K	Remarks
$\mathbb{R}$-hyperbolic	$SO_e(p,q+1)/SO_e(p,q)$	$p,q \geq 1$	$SO(p) \times SO(q+1)$	1) 2) 3)
$\mathbb{C}$-hyperbolic	$SU(p,q+1)/S(U(p,q) \times U(1))$	$p,q \geq 1$	$S(U(p) \times U(q+1)$	
$\mathbb{H}$-hyperbolic	$Sp(p,q+1)/Sp(p,q) \times Sp(1)$	$p,q \geq 1$	$Sp(p) \times Sp(q+1)$	
"$\mathbb{O}$-hyperbolic"	$F_{4(-20)}/Spin(1,8)$	"$p = q = 1$"	$Spin(9)$	
Nonisotropic spaces				
	$SL(n+1,\mathbb{R})/S(GL_+(n,\mathbb{R}) \times GL_+(1,\mathbb{R}))$	$n \geq 2$	$SO(n+1)$	2)
	$Sp(n+1,\mathbb{R})/Sp(n,\mathbb{R}) \times Sp(1,\mathbb{R})$	$n \geq 2$	$U(n+1)$	
	$F_{4(4)}/Spin(4,5)$		$Sp(3)XSU/2)$	

1) All spaces G/H are simply connected except the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces with $q = 1$. For these spaces $\tilde{G}/H$ is an infinite covering of G/H.

2) For all cases except those marked with 2) the fixed-point group G^τ is connected. For these cases G^τ has two connected component. This means that G/H is a double covering of the symmetric space G/G^τ.

3) It would have been more consistent here to write $Spin(p,q+1)/Spin(p,q)$ since we generally assume that $G \subset G_{\mathbb{C}}$ and that $G_{\mathbb{C}}$ is simply connected, anyway the two spaces are isomorphic.

Table 1, continued.

	dim $\mathfrak{g}^o_\alpha$	dim $\mathfrak{g}^o_{2\alpha}$	dim $\mathfrak{k}^o_\alpha$	dim $\mathfrak{k}^o_{2\alpha}$	ρ [1)]	ρ_c [1)]	$\rho-2\rho_c$ [1)]	K-types [1),2)]	Exceptional points [3)]
$\mathbb{R}$-	p+q-1	0 [4)]	q-1 [4)]	0	$\frac{1}{2}$(p+q-1)	$\frac{1}{2}$(q-1)	$\frac{1}{2}$(p-q+1)	$\mu \in \mathbb{Z}^+$ [5), 6)]	$[\frac{1}{2}(q-p)]-1$, $q-p \geq 4$
$\mathbb{C}$-	2(p+q-1)	1	2(q-1)	1	p+q	q	p-q	$\mu \in 2\mathbb{Z}^+$	$[\frac{1}{2}(q-p-1)]$, $q-p \geq 3$
$\mathbb{H}$	4(p+q-1)	3	4(q-1)	3	2(p+q)+1	2q+1	2(p-q)-1	$\mu \in 2\mathbb{Z}^+$	q-p , $q-p \geq 1$
$\mathbb{O}$-	8	7	0	7	11	7	-3	$\mu \in 2\mathbb{Z}^+$	1 $(\lambda = 1)$ [1)]
	2(n-1)	1	n-1	0	n	$\frac{1}{2}$(n-1)	1	$\mu \quad \mathbb{Z}^+$ [6)]	0
	4(n-1)	3	2(n-1)	1	2n+1	n	1	$\mu \in 2\mathbb{Z}^+$	0
	8	7	4	3	11	5	1	$\mu \in 2\mathbb{Z}^+$	0

1) ρ , ρ_c , μ and λ are expressed as multiples of the shortest root $\alpha \in \Delta^+$.

2) This column gives the Δ^+_c -dominant weight $\mu \in \mathfrak{t}^*$ of K-types with a $K \cap H$-fixed vector.

3) This column gives the number of λ's in $\mathfrak{t}^*$, such that (2.2),(2.3),(2.7) but not (2.6) are satisfied. (Since there is no compact simple root condition (2.8) is always satisfied).

4) Δ_c is empty for $q = 1$. These are the only cases, where there are two and not only one orbit $\mathcal{O}_\lambda$.

5) For $q = 1$ the condition for $\tilde{G}/H$ is $\mu \in \mathbb{C}$. These K -types are unitary for $\mu \in \mathbb{R}$.

6) For G/G^τ the condition is $\mu \in 2\mathbb{Z}^+$.

Table 2. Parametrization of the discrete series for the isotropic spaces

	ρ	(2.2) (2.3)	(2.7)	Strichartz [1)] $d \in \mathbb{Z}$	Faraut [2)] - Kosters [3)] $r \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$-hyperbolic $q = 1$	$\frac{1}{2}p$	$\lambda \neq 0$	$\lvert\lambda\rvert + \frac{1}{2}p \in \mathbb{Z}$ [4)]	$d = \lvert\lambda\rvert-\rho$, $d > -\rho$	p odd $\lvert\lambda\rvert = \rho+2r+1 > 0$
$\mathbb{R}$- " $q > 1$	$\frac{1}{2}(p+q-1)$	$\lambda > 0$	$\lambda+\frac{1}{2}(p-q+1) \in \mathbb{Z}$	$d = \lvert\lambda\rvert-\rho$, $d > -\rho$	p even $\lvert\lambda\rvert = \rho+2r > 0$
$\mathbb{C}$ - "	$p+q$	$\lambda > 0$	$\lambda+p-q \in 2\mathbb{Z}$		
$\mathbb{H}$ - "	$2(p+q)+1$	$\lambda > 0$	$\lambda+2(p-q)-1 \in 2\mathbb{Z}$		$\lambda = \rho+2r > 0$
Φ - "	11	$\lambda > 0$	$\lambda-3 \in 2\mathbb{Z}$		

1) Strichartz considers the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces as $O(p,q+1)/O(p,q)$. His representation E_d, when restricted to $SO_e(p,q+1)$ is irreducible if $q > 1$, but is the direct sum of T_λ and $T_{-\lambda}$ for $q = 1$.

2) Faraut considers only the projective hyperbolic spaces G/G^τ . This means for the real spaces that the condition is $\mu_\lambda \in 2\mathbb{Z}$, (cf. Table 1. Note 6). Therfore he only gets "every second" discrete series. He also works with the groups as $O(p,q+1)$, $U(p,q+1)$. (He uses p and q differently!). As under 1) the restriction to $SO_e(p,2)$ break up in two, whereas all other restrictions are irreducible.

3) In Kosters [11], page 85, there is a misprint in the Plancerelformula , Θ_r should also occur for $r = 0$.

4) This condition means that μ_λ is a K-type with a $K \cap H$-fixed vector. If we consider $\tilde{K}$-types with a $K \cap H$-fixed vector, then the condition is $\lvert\lambda\rvert+\frac{1}{2}d \in \mathbb{R}$, cf. Table 1, Note 5).

Table 3. Some subgroups in the isotropic cases.

G/H	M_t	M_b	$M_t \cap M_b$
$\mathbb{R}$-	$SO(p) \times SO(q-1)$	$SO(p-1) \times SO(q)$	$SO(p-1) \times SO(q-1)$
$\mathbb{C}$-	$S(U(p)\times U(q-1)\times U(1)^{*}\times U(1)^{*})$	$S(U(1)^{*}\times U(p-1)\times U(q)\times U(1)^{*})$	$S(U(1)^{*}\times U(p-1)\times U(q-1)\times U(1)^{*}\times U(1)^{*})$
$\mathbb{H}$-	$Sp(p)\times Sp(q-1)\times Sp(1)^{*}\times Sp(1)^{*}$	$Sp(1)^{*}\times Sp(p-1)\times Sp(q)\times Sp(1)^{*}$	$Sp(1)^{*}\times Sp(p-1)\times Sp(q-1)\times Sp(1)^{*}\times Sp(1)^{*}$
$\mathbb{O}$-	$Spin(7)$	$Spin(7)$	G_2

The following notation is used $G^{*} \times G^{*} = \{(x,x) \mid x \in G\}$ and similarly for $G^{*}\times G^{*}\times G^{*}$.

Definition. Let $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ satisfy $\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$ for each $\alpha \in \Delta^+$. Define V_λ to be the set of weights $\nu \in (\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})^*$ which are Δ_m^+-dominant, and for which

(i) $-\nu$ is a weight for $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^{\sim}$ in $\mathcal{U}_n$.

(ii) $-\mu^{\sim} = -(\mu_\lambda+\nu)$ is a dominant weight for a finite dimensional representation of K^0 having a nontrivial M_b-fixed vector. □

Remark. (a). If λ satisfies (2.2), (2.3) and (2.7), then V_λ is nontrivial. To see this let $-\nu$ be the weight of any M_t-invariant element in $\mathcal{U}_n$. Then by Lemma 3.5 we have that also $\mu^{\sim} = \mu_\lambda+\nu$ satisfies (2.7). Now taking ν sufficiently large we can obtain that $\mu^{\sim}$ satisfies (2.6), which implies that $\nu \in V_\lambda$.
(b). For $-\mu^{\sim}$ to be of $K^{\sim}$-type contained in $\mathcal{E}_\lambda^{oo}$ it follows from Theorem 3.4 and Lemma 4.1 that it is necessary that $\mu^{\sim}-\mu_\lambda \in V_\lambda$. □

We are now ready to state the main theorem of this section. We state it in a rather general formulation in order to indicate what kind of more general results one might hope for. In Section 5 we shall do some more explicit computations of the functions involved.

Theorem 4.6. Let G/H be a nonRiemannian, isotropic semisimple symmetric space. Let $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ satisfy the conditions (2.2), (2.3) and (2.7). Let $\mu_\lambda = \lambda+\rho-2\rho_c$.

(i) If $\langle\mu_\lambda,\alpha\rangle \geq 0$ for each $\lambda \in \Delta_c^+$ then

$$\xi_\lambda^o(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}\bar{n})\rangle} d\bar{n}, \quad x \in G^o,$$

is well defined, K^o-finite and the dual function ξ_λ is the dominant weight vector of weight $-\mu_\lambda$ of the unique minimal $K^{\sim}$-type of the discrete series representation T_λ generated by ξ_λ.

(ii) If $\langle\mu_\lambda,\alpha\rangle < 0$ for some $\alpha \in \Delta_c^+$, then choose $\nu \in V_\lambda$ such that

$$\| \mu_\lambda+\nu+2\rho_c^{\sim} \| = \mathrm{Min}\,\{ \| \mu_\lambda+\nu'+2\rho_c^{\sim} \| \mid \nu' \in V_\lambda \}.$$

Let $u \in \mathcal{U}_n$ be a Δ_m^--dominant weight vector corresponding to the weight $-\nu$, then

(4.2) $\qquad \xi^{o}_{\lambda,u}(x) = \int_{\bar{N}_c} e^{<-\lambda-\rho, H(x^{-1}\bar{n}u)>} d\bar{n} \; , \qquad x \in G^{o} \; ,$

is well defined, K^{o}-finite and the dual function $\xi_{\lambda,u}$ is the dominant weight vector of weight $-\mu^{\sim} = -(\mu_{\lambda}+\nu)$ of a minimal $K^{\sim}$-type of the discrete series T_{λ} generated by $\xi_{\lambda,u}$.

(iii) The $K^{\sim}$-type decomposition of T_{λ} is as follows: $-\mu^{\sim}$ occurs in T_{λ} if and only if $\mu^{\sim}-\mu_{\lambda} \in V_{\lambda}$.

(iv) If $-\mu^{\sim}$ occurs in T_{λ}, then the dominant weight vectors for this $K^{\sim}$-type is given by $\xi_{\lambda,u}$, where u is any Δ^{-}_{m}-dominant weight vector for M_tT in $\mathcal{U}_n$ of weight $\mu_{\lambda}-\mu^{\sim}$.

<u>Proof:</u> Part (i) is just a special case of Theorem 3.2 and Corollary 3.6. For Part (ii) it follows from Lemma 4.3 that $\xi^{o}_{\lambda,u}$ is well defined. Taking into account Theorem 3.4 and its proof the two things left to prove are that (a) $\xi^{o}_{\lambda,u}$ is K^{o}-finite and that (b) $\xi_{\lambda,u}$ belongs to $L^{2}(G/H)$.

Proof of (a): Let E be a Hilbert space for an irreducible finite dimensional representation π of K^{o} with dominant weight $-\mu^{\sim}$. Chosen such that π is unitary when holomorphically extended to $K^{\sim}$. E contains a unique subspace F on which M_tT acts as an irreducible representation δ of Δ^{-}_{m}-dominant weight $-\mu^{\sim}$. F is isomorphic as a M_tT-module to the subspace of $\bar{\mathcal{U}}_n$ generated by u and therefore by Lemma 4.4 there is a nonzero $M_t \cap M_b$-fixed vector $f_o \in F$, unique up to scalars. By assumption, cf. definition of V_{λ}, E has a nontrivial M_b-fixed vector e_o. Now let $y \in K^{o}$ be written $y = m_1 m_2 a\bar{n}$, where $m_1 \in M_b$, $m_2 \in M_t$, $a \in T$ and $\bar{n} \in \bar{N}_c$. We have

$$(e_o, \pi(y) f_o) = (e_o, \pi(m_1 m_2 a\bar{n}) f_o)$$

$$= e^{<-\mu^{\sim}, H(a)>} (e_o, \pi(m_2) f_o) = e^{<-\mu^{\sim}, H(a)>} (e'_o, \pi(m_2) f_o) \; ,$$

where e'_o is the orthogonal projection of e_o onto F. The matrix coefficient $y \to (e_o, \pi(y) f_o)$ is nontrivial, so we conclude that e'_o is nontrivial. Clearly e'_o is $M_t \cap M_b$-invariant. So by the uniqueness of f_o we have that e'_o is a scalar multiple of f_o. Without loss of generality we can assume that $e'_o = f_o$ and that $(e_o, f_o) = \| f_o \|^{2} = 1$, or in other words we have

(4.3) $\qquad (e_o, \pi(y) f_o) = e^{<-\mu^{\sim}, H(y)>} (f_o, \delta(m_2) f_o) \; ,$

for each $y \in K^o$, where $y = m_1 m_2 \exp(H(y))\bar{n}$ as above. (Notice that (4.3) shows that e_o is uniquely determined, such that for E the M_b-fixed vector is unique up to a scalar).

Let u_o be the element in $\mathcal{U}_n$ corresponding to f_o. From Lemma 4.4 and its proof it follows that it is enough to show that ξ^o_{λ,u_o} is K^o-finite. It also follows that

$$(4.4) \qquad \int_{M_t \cap M_b} \mathrm{Ad}(mm_2)u_o dm = (f_o, \delta(m_2)f_o)u_o .$$

Let now $y \in K^o$ and $b \in B$ then we have (using same argument as in the proof of Lemma 4.4) that

$$(4.5) \qquad \xi^o_{\lambda,u_o}(y^{-1}b) = e^{<-\tilde{\mu}, H(y)>}(f_o, \delta(m_2)f_o)\xi^o_{\lambda,u_o}(b) ,$$

where as before $y = m_1 m_2 \exp(H(y))\bar{n}$. Combining (4.5) and (4.3) we get

$$(4.6) \qquad \xi^o_{\lambda,u_o}(y^{-1}b) = (e_o, \pi(y)f_o)\xi^o_{\lambda,u_o}(b) ,$$

for every $y \in K^o$ and $b \in B$. This finishes the proof of (ii) Part (a) since by (4.1) every $x \in G^o/H^o$ can be written $x = y^{-1}bH^o$, with $y \in K^o$ and $b \in B$.

Proof of (b): This follows from Oshima-Matsuki [14], cf. Remark (e) at the end of our Section 3. Another and more direct proof of Part (b) is obtained by simple inspection of the asymptotic behaviour of $b \to \xi^o_{\lambda,u_o}(b)$ from our explicit formulas in Section 5. This finishes the proof of Part (ii).

For the proof of Part (iii) and (iv) notice that our proof of (ii) did not use the minimality of ν in the proof of the K^o-finiteness of $\xi^o_{\lambda,u}$. This means that $\xi^o_{\lambda,u}$ is K^o-finite if and only if $\tilde{\mu}-\mu_\lambda \in V_\lambda$. So what is left to prove is that T_λ contains all the functions $\xi_{\lambda,u}$ constructed in this way. Using Theorem 3.4 this is equivalente to saying that E^∞_λ is an irreducible $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-module.

As noted before every $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-submodule of $C^\infty_{K^o}(G^o/H^o)$ contains K^o-types with a nontrivial $K \cap H$-fixed vector. From the next Lemma 4.7 it follows that any $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-submodule of E^∞_λ contains every $K \cap H$-fixed vector of every K^o-type occurring. Therefore E^∞_λ is irreducible. $\square$

Lemma 4.7. Let G/H be nonRiemannian and isotropic. Let $\bar{\mathfrak{n}}_n$ be equipped with an M_t-invariant inner product and let $X_1,\ldots X_s$ be an orthonormal basis of $\bar{\mathfrak{n}}_n$. Define ω_o in $\bar{\mathfrak{U}}_n$ by

$$\omega_o = X_1 \quad \text{if} \quad s = 1$$

and

$$\omega_o = X_1^2+\ldots+X_s^2 \ , \ \text{if} \quad s>1 \ .$$

Then ω_o is M_t-invariant, and every M_t-invariant element in $\bar{\mathfrak{U}}_n$ is a polynomial in ω_o.

Furthermore let for $r\in\mathbb{Z}^+$ $u_r = (\omega_o)^r$. Then the set of $K\cap H$-fixed vectors in the different K^o-types in $\mathcal{E}_\lambda^{oo}$ is up to scalars given by

(4.7) $\qquad \{\xi^o_{\lambda,u_r} \mid r\in\mathbb{Z}^+ \text{ and } \mu_\lambda+cr\alpha\geq 0\},$

where $c = 1$ if $s = 1$ and $c = 2$ if $s > 1$. For any $r\in\mathbb{Z}$ we have

$$\omega_o\xi^o_{\lambda,u_r} = \xi^o_{\lambda,u_{r+1}} \ .$$

(α is the shortest root in Δ^+).

Proof: Since $\mathfrak{b}$ is one dimensional we can assume that $\mathfrak{b} = \mathbb{R}(X_1-\tau(X_1))$. From this we easily conclude that the stabilizer of X_1 in M_t is $M_t\cap M_b$. From Table 3, cf. also the proof of Lemma 4.5, it follows that $M_t/M_t\cap M_b$ is a sphere.

Now a checking of dimensions shows that $Ad(M_t)(X_1)$ must be the connected component of the unit sphere in $\bar{\mathfrak{n}}_n$. From this follows that every M_t-invariant element in $\bar{\mathfrak{n}}_n$ is a polynomial in ω_o.

Notice that the weight of ω_o is $-c\alpha$, where $c = 1$ if $s = 1$ and $c = 2$ if $s > 1$. From the proof of Theorem 3.4 (i) it follows, cf. (3.11) and (3.12), that the $K^\sim$-type with weight $-\mu^\sim = -(\mu_\lambda+\nu)$ has a $K\cap H$-fixed vector if and only if the u corresponding to ν is M_t-invariant and

$$\frac{\langle\nu,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}\in\mathbb{Z} \quad \text{for each} \quad \alpha_1\in\Delta_c^+ \ .$$

Now this condition with $\nu = c\alpha$ is always satisfied. (If $c = 1$, then we are in the case of the $\mathbb{R}$-hyperbolic space with $p = 1$, and $\alpha_1 = 2\alpha$ is not a root. In all other cases $c = 2$, and the condition is satisfied even with $\alpha_1 = 2\alpha$). This proves that the K°-types with a $K\cap H$-fixed vector occuring in E_{λ}^{∞} are given by the functions $\xi^{\circ}_{\lambda,u_r}$, for which $\mu_\lambda + cr\alpha \geq 0$. The last statement in the Lemma follows from Proposition 3.1 (ii) and the fact that ω_o is $\mathrm{Ad}(\bar{N}_c)$-invariant, cf. Lemma 4.3. □

Remark. (a). We have already mentioned that Table 2 shows that it can be concluded from the work of Strichartz [18], Faraut [2] and Kosters [11], that the T_λ's of Theorem 4.6 exhaust the discrete series for G/H. It follows from Table 1 that $G^{\sim}/H = G/H$ for all cases except for the $\mathbb{R}$-hyperbolic spaces with $q = 1$. The same conclusion for G/H can be drawn from Oshima-Matsuki [14], cf. Remarks (e), (f) and (g) at the end of Section 3, provided one can show that $\dot{E}_\lambda^{\infty\infty} = E_\lambda^{\infty}$. But this last fact should be particularly easy to show in these cases, where $\dim(\mathfrak{b}) = 1$.

(b). The minimal K-types. If $\mu_\lambda \geq 0$ the minimal $K^{\sim}$-type is $-\mu_\lambda$. If $\mu_\lambda < 0$ and μ_λ is even say $\mu_\lambda = -2r$, $r \in \mathbb{N}$, then by Lemma 4.7 we have that $0 = \mu_\lambda + 2r\alpha$ is a K-type of T_λ. This means that the trivial K-type is contained in T_λ. Clearly the trivial K-type is minimal. So far all these minimal $K^{\sim}$-types have a $K\cap H$-fixed vector. Now assume that $\mu_\lambda = -2r+1<0$ with $r \in \mathbb{N}$. This is only possible, cf. Table 1 and 2, if G/H is $\mathbb{R}$-hyperbolic and if $q \geq p+4$. Now if also $p > 1$, then Lemma 4.7 shows that the trivial K-type is not contained in T_λ. The minimal of the K-types having a $K\cap H$-fixed vector has weight $-\mu = -1 = -(\mu_\lambda + 2r\alpha)$. □

Example 4.8. Let $G/H = SO_e(2,7)/SO_e(2,6)$. Let $\lambda = \frac{1}{2}\alpha$, then $\mu_\lambda = -\alpha$. Let $\beta \in \Delta^{\sim}$ be chosen such that $\beta_{|\mathfrak{t}} = \alpha$ and $X_{-\beta} \in \mathfrak{n}_n$, (there are two possible choices of β). It is easily seen that, with $u = X_{-\beta} \in \mathfrak{U}_n$, we have that u is $M_b \cap M_t$-fixed. Now $-\mu^{\sim} = -(\mu_\lambda + \nu) = \alpha - \beta$, which is the weight of the following one dimensional representation $\pi^{\pm} \otimes 1$ of $K = SO(2) \times SO(7)$, where $+$ or $-$ is chosen according to the choice of β,

$$\pi^{\pm}\begin{Bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} = e^{\pm i\theta} .$$

Since $M_b = SO(5)$ we have that $\pi^{\pm} \otimes 1$ has a M_b-fixed vector. Thus $\pi^{\pm} \otimes 1$ are K-types of T_λ. Finally a simple computation shows that

$$\| \tilde{\mu}+2\tilde{\rho}_c \|^2 = 1+\| 2\rho_m \|^2 + \| 2\rho_c \|^2$$

and

$$\| \mu + 2\tilde{\rho}_c \|^2 = \| 2\rho_m \|^2 + \| 1 + 2\rho_c \|^2 ,$$

where $-\mu = -1$ is the minimal among the K-types with a $K \cap H$-fixed vector. (We have normalized such that $\alpha = 1$). From Table 1 we get that $\rho_c = 5/2$ and thus

$$\| \tilde{\mu} + 2\tilde{\rho}_c \|^2 = 26 + \| 2\rho_m \|^2 <$$

$$< 36 + \| 2\rho_m \|^2 = \| \mu + 2\tilde{\rho}_c \|^2 .$$

This means that $\pi^+ \otimes 1$ and $\pi^- \otimes 1$ are <u>two different minimal K-types</u>, and <u>neither of them have a $K \cap H$-fixed vector</u>. □

<u>Remark.</u> (c). Continuing the Remark (b) above it is easy to generalize Eksample 4.8 to show that if μ_λ is an odd negative integer and $p > 1$, then no minimal K-type of T_λ has a $K \cap H$-fixed vector. Furthermore if $p = 2$ then T_λ has two different minimal K-types. □

§ 5. Explicit formulas for the isotropic spaces.

The purpose of this section is to give an explicit evaluation of the integral (4.2) defining $\xi^{o}_{\lambda,u}$. We assume that u is $M_t \cap M_b$-invariant and belongs to an $M_t T$-irreducible subspace of $\mathcal{U}_n$ with Δ_m^--dominant weight $\nu \in V_\lambda$. This means that $\xi^{o}_{\lambda,u}$ is K^{o}-finite of irreducible type $-\mu^{\sim} = -(\mu_\lambda+\nu)$. By the help of (4.6), (4.3) and (4.1) we have an explicit formula for $\xi^{o}_{\lambda,u}$ as soon as we know it on B . However on B $\xi^{o}_{\lambda,u}$ agrees with $\xi_{\lambda,u}$, cf. the Duality Theorem. Actually formula (4.6) is very convenient for the point of view of duality, since it shows that

$$\xi_{\lambda,u}(k^{-1}b) = (e_o,\pi(k)f_o)\xi^{o}_{\lambda,u}(b) \tag{5.1}$$

for $k \in K^{\sim}$ and $b \in B$.

We shall not go into the explicit parametrization and description of the special functions on the groups $K^{\sim}$ and M_t , which are involved in evaluating $(e_o,\pi(k)f_o)$.

Let in the following $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ or $\mathbb{\Phi}$ respectively according to whether we treat the $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$- or $\mathbb{H}$-hyperbolic spaces or the exceptional space. Because of the non-associativity of the Cayley numbers $\mathbb{\Phi}$, what we write in the following for $\mathbb{F} = \mathbb{\Phi}$ is not really correct. One should use the model for the exceptional space used in Takahashi [19] and Kosters [11]. However the formulas obtained, at least formula (5.7), also hold for this case.

We take our group G^{o} , which is respectively $SO_e(p+q,1)$, $SU(p+q,1)$, $Sp(p+q,1)$ and $F_{4(-20)}$, to be an $(p+q+1) \times (p+q+1)$ matrix group over the field $\mathbb{F}$. The involution τ is given by conjugation with the matrix

$$I_{p+q,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \cdot \\ \vdots & & \cdot & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

and σ is given by conjugation with the matrix

$$I_{p,q+1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{q+1} \end{pmatrix}.$$

Discrete series

We shall need the following subgroups

$$T : \qquad \left\{ \begin{matrix} I_{p+q-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}s & \mathrm{sh}s \\ 0 & \mathrm{sh}s & \mathrm{ch}s \end{matrix} \right\} , \qquad s \in \mathbb{R}$$

$$B : \qquad b_t = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{ch}t & 0 & \mathrm{sh}t \\ 0 & I_{p+q-1} & 0 \\ \mathrm{sh}t & 0 & \mathrm{ch}t \end{matrix} \right\} , \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\bar{N}^o : \bar{n}(x,y,z) = \left\{ \begin{matrix} I_p & 0 & x & x \\ 0 & I_{q-1} & y & y \\ -\bar{x}^t & -\bar{y}^t & 1-\gamma & -\gamma \\ \bar{x}^t & \bar{y}^t & \gamma & 1+\gamma \end{matrix} \right\} , \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{F}^p \\ y \in \mathbb{F}^{q-1} \\ z \in \mathrm{Im}(\mathbb{F}) \end{matrix}$$

where

$$\gamma = \gamma_{x,y,z} = \tfrac{1}{2}(|x|^2+|y|^2+2z) .$$

Notice that $\bar{N}_c$ is the subgroup obtained with $x = 0$, and that $\exp(\bar{n}_n)$ is obtained by taking $y = z = 0$.

Let $v_o = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{F}^{p+q+1}$ and let $v_1 = (0,\dots,0,1,1) \in \mathbb{F}^{p+q+1}$. If we as in Section 4 identify $t_{\mathbb{C}}^*$ with $\mathbb{C}$ in such a way that the shortest root α in Δ^+ is identified with 1 we get for any element $g \in G^o$ and any $\lambda \in t_{\mathbb{C}}^*$ that

$$e^{\langle -\lambda-\rho, H(g)\rangle} = |\langle v_o, g\, v_1\rangle|^{-\lambda-\rho} .$$

Let now $g \in G^o$ be arbitrary. We write g^{-1} in the following form

$$(5.2) \qquad g^{-1} = \left\{ \begin{matrix} \ast \\ a\ b\ c\ d \end{matrix} \right\} ,$$

where $a \in \mathbb{F}^p$, $b \in \mathbb{F}^{q-1}$, $c,d \in \mathbb{F}$ and furthermore

$$|a|^2+|b|^2+|c|^2-|d|^2 = -1 .$$

We now take

$$\Phi = \Phi(x,y,z,a,b,c,d) = \langle v_o, g^{-1}\bar{n}(x,y,z)v_1\rangle \quad ,$$

such that $e^{\langle -\lambda-\rho, H(g^{-1}\bar{n})\rangle} = |\Phi|^{-\lambda-\rho}$.

A straight forward computation shows that

$$\Phi = 2a\cdot x + 2b\cdot y + (d+c) + (d-c)(|x|^2+|y|^2+2z)$$

A few tedious computations show that

$$\Phi = (d-c)(|x+\bar{a}'|^2 + |y+\bar{b}'|^2 + |d-c|^{-2} +$$
$$+ 2\ \mathrm{Im}(a'\cdot x + b'\cdot y + |d-c|^{-2}\bar{d}c) + 2z).$$

where $a' = (d-c)^{-1}a$ and $b' = (d-c)^{-1}b$, and therefore

$$(5.3) \qquad |\Phi|^2 = |d-c|^2[(|x+\bar{a}'|^2 + |y+\bar{b}'|^2 + |d-c|^{-2})^2 + |z'|^2] \ ,$$

where

$$z' = 2(z + \mathrm{Im}(a'\cdot x + b'\cdot y + |d-c|^{-2}\bar{d}c)) \ .$$

We now compute for fixed $g\in G^o$ and $x\in\mathbb{F}^p$

$$I(\lambda,g,x) = \int_{\bar{N}_c} e^{\langle -\lambda-\rho, H(g^{-1}\bar{n}\bar{n}(x,o,o))\rangle} d\bar{n} \ .$$

As the measure on $\bar{N}_c$ we take $dyd(2z)$ (which is normalized differently from $d\bar{n}$ in Proposition 3.1). Notice that $dz' = d(2z)$ and that $dy = d(y+\bar{b}')$. Let

$$\omega^2 = (|x+\bar{a}'|^2 + |d-c|^{-2}) \ ,\omega > 0 \ .$$

We find

$$I(\lambda,g,x) = |d-c|^{-(\lambda+\rho)} \int_{\mathbb{F}^{q-1}} \int_{\mathrm{Im}(\mathbb{F})} ((\omega^2 + y^2)^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda+\rho)} dzdy$$

$$= \gamma_\lambda |d-c|^{-(\lambda+\rho)} \omega^{(-2(\lambda+\rho)-2+(q+1)\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F}))} \quad ,$$

where

$$(5.4)\qquad \begin{aligned}\gamma_\lambda &= \int_{\mathbb{F}^{q-1}}\int_{\mathrm{Im}(\mathbb{F})} ((1+|y|^2)^2 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda+\rho)} dz dy \\ &= I(\lambda,e,o) = \mathrm{const}\cdot c(-i(\lambda+\rho-\rho_c)) .\end{aligned}$$

The last equality follows from Proposition 3.1 (iii). From Table 1 we find that $(q+1)\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{F})-2 = 2\rho_c$. Combining all this we have

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} I(\lambda,g,x) &= \gamma_\lambda |d-c|^{-(\lambda+\rho)}\, \omega^{-2(\lambda+\rho-\rho_c)} \\ &= \gamma_\lambda\, |d-c|^{\mu_\lambda} (1+|(\bar d-\bar c)x+\bar a|^2)^{-(\lambda+\rho-\rho_c)} . \end{aligned}$$

Let now $u\in\mathfrak{U}_n$ be expressed in terms of x as $u = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, then we get

$$(5.6)\qquad \begin{aligned} \xi^o_{\lambda,u}(g) &= c(-i(\lambda+\rho-\rho_c))\,|d-c|^{\mu_\lambda} P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot \\ &\cdot (1+|(\bar d-\bar c)x+\bar a|^2)^{-(\lambda+\rho-\rho_c)}\Big|_{x=0} \end{aligned}$$

<u>Theorem 5.1.</u> Let G/H be a nonRiemannian, isotropic semisimple symmetric space. Let $\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$ satisfy $\mathrm{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$, where α is the shortest root in Δ^+ . Let $u\in\mathfrak{U}_n$ be homogeneous of degre m , and let u expressed in the variables x be $u = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. We have

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} \xi^o_{\lambda,u}(b_t) &= c(-i(\lambda+\rho-\rho_c))\ (\cosh t)^{(\mu_\lambda+m)}\cdot \\ &\cdot P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(1+|x|^2)^{-(\lambda+\rho-\rho_c)}\Big|_{x=(-\sinh t,\, 0,\dots,0)} . \end{aligned}$$

<u>Proof:</u> This follows from formula (5.6) taking $g = b_t$, which means that $a = (-\mathrm{sh}t,0,\dots,0)$, $b = 0$, $c = 0$ and $d = \mathrm{ch}t$. □

REFERENCES

[1] Berger,M., Les espaces symétriques non compacts.
Ann. Sci. École Norm. Sup., 74 (1957), 85-177.

[2] Faraut, J., Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques.
J. Math. pures et appl. 58 (1979), 369-444.

[3] Flensted-Jensen, M., Discrete series for semisimple symmetric spaces.
Ann. of Math. 111 (1980), 253-311.

[4] Flensted-Jensen, M., Harmonic analysis on semisimple symmetric spaces.
A method of duality.
To appear in the proceedings of the Special Year in Lie Groups.
University of Maryland, 1982-83. (Springer Lecture Notes in Mathematics).

[5] Harish-Chandra Spherical functions on a semisimple Lie group I and II.
Amer. J. Math. 80 (1958), 241-310 and 553-613.

[6] Helgason, S., A duality for symmetric spaces with applications to group representations.
Adv. Math. 5 (1970), 1-154.

[7] Helgason, S., A duality for symmetric spaces with applications to group representations II. Differential equations and eigenspace representations.
Adv. Math. 22 (1976), 187-219.

[8] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.
Academic Press, New York-San Francisco-London 1978.

[9] Helgason, S., Groups and geometric analysis I.
To appear Academic Press.

[10] Kashiwara, M., Kowata, A., Minemura, K., Okamoto, K., Oshima, T. and Tanaka, M., Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space.
Ann. of Math., 107 (1978), 1-39.

[11] Kosters,M.T., Spherical distributions on rank one symmetric spaces.
Thesis, University of Leiden, 1983.

[12] Loos, O., Symmetric spaces. I, II.
New York-Amsterdam, W.A. Benjamin, Inc., 1969.

[13] Matsuki, T., The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan 31 (1979), 331-357.

[14] Oshima, T. and Matsuki, T., A description of discrete series for semisimple symmetric spaces.Preprint 1983.

[15] Oshima, T. and Sekiguchi, J.: Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space, Inventiones Math. 57 (1980), 1-81.

[16] Schlichtkrull, H., The Langlands parameters of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetrics spaces, J. Func. Anal. 50 (1983), 133-150.

[17] Schlichtkrull, H., Applications of hyperfunction Theory to representations of semisimple Lie groups. Rapport 2 a-b, Dept. of Math., University of Copenhagen, April 1983.

[18] Strichartz, R.S., Harmonic analysis on hyperboloids. J. Funct. Anal. 12 (1973), 341-383.

[19] Takahashi, R., Quelques résultats sur l'Analyse Harmonique dans l'espace symétrique non compact de rang 1 du type exceptionnel. In: Lecture notes in Mathematics vol. 793, 511-567. Springer Verlag, Berlin, 1979.

[20] Vogan, D., Algebraic structure of irreducible representations of semisimple Lie groups. Ann. of Math. 109 (1979), 1-60.

[21] Speh, B. and Vogan, D., Reducibility of generalized principal series representations. Acta Math. 145 (1980), 227-299.

[22] Wolf, J.A., Spaces of constant curvature. McGraw-Hill, New York, 1967.

Mogens Flensted-Jensen
Dept. Math. & Stat.
The Royal Veterinary
and Agricultural University
DK-1871 Copenhagen V
Denmark

Kiyosato Okamoto
Dept. of Mathematics
Hiroshima University
Hiroshima
Japan

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

REBECCA A. HERB

Weighted orbital integrals on $SL(2,\mathbb{R})$

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 201-217
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__201_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 201-217

WEIGHTED ORBITAL INTEGRALS ON SL(2,ℝ)

Rebecca A. Herb

Weighted orbital integrals appear in the adelic version of the Selberg trace formula. They give tempered, but non-invariant, distributions on the local groups. In this paper the general notion of Fourier transform for a non-invariant distribution is discussed. In the case when the local group is SL(2,ℝ) the full Fourier transform of the weighted orbital integral is given. The formula is then interpreted in terms of known properties of weighted orbital integrals.

Les intégrales orbitales à poids figurent dans la formula des traces de Selberg au cas global. Ils donnent des distributions tempérées, mais non invariantes, des groupes locals. L'objet du ce travail est de donner des formules explicites pour la transformée de Fourier des integrales orbitales à poids lorsque le groupe local est SL(2,ℝ). Il faut d'abord préciser la notion de transformée de Fourier d'une distribution non invariante. Enfin on démontre que la formule vérifie les propiétés connues des integrales orbitales à poids.

§1. Introduction.

The adelic version of the Selberg trace formula for rank one groups involves a variety of terms which yield interesting tempered distributions on the various local groups, in particular, on real reductive Lie groups. The calculation of the Fourier transforms of these distributions is an important aspect of the use of the trace formula in the theory of automorphic forms.

There are two main types of distributions which must be studied. The Fourier transforms of the first type, ordinary orbital integrals, were calculated for semisimple Lie groups of real rank one by Sally and Warner [6], and for groups of arbitrary rank by the author [5b]. The second, and less understood, type of distributions are the so-called weighted orbital integrals. For real groups, Arthur computed the Fourier transforms of these weighted orbital integrals restricted to the space of cusp forms [1b,c]. His methods can be generalized to include a larger class of functions in the case that the weighting is not as severe as possible [5a]. Finally, in the real rank one case, Warner has computed the Fourier transform on K-biinvariant functions for a certain limit of weighted orbital integrals [7].

The results presented in this paper give the complete Fourier transform of the weighted orbital integral and its associated singular counterpart for the case of $SL(2,\mathbb{R})$ and represent joint work with J. Arthur and P. Sally. In §2 notation and background information are given and the Fourier inversion formula is stated for regular elements. A sketch of the proof is given, but details will appear elsewhere. In §3 the inversion formula is interpreted in terms of the general properties of weighted orbital integrals proved by Arthur. Also, the Fourier transform of the associated singular distribution is given.

§2. The Fourier Inversion Formula.

Let $G = SL(2,\mathbb{R})$, the group of two-by-two matrices with real entries and determinant one. We will need to consider the following subgroups of G :

$$K = \{ t_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \} ;$$

$$A = \{ h_t = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \} ;$$

$$A_I = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \} ;$$

$$N = \{ n_y = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \} ;$$

$$\bar{N} = \{ \bar{n}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \}.$$

If $x \in G$ is decomposed according to the Iwasawa decomposition as $x = k\bar{n}a$ where $k \in K$, $\bar{n} \in \bar{N}$, and $a \in A$, define $v(x) = v(\bar{n}) = \frac{1}{2}\log(1+y^2)$ if $\bar{n} = \bar{n}_y$ as above. Then v is left K and right A-invariant and is the weighting function used to define the weighted orbital integral which occurs in the Selberg trace formula for $SL(2,\mathbb{R})$. Thus for $f \in C_c^\infty(G)$, the weighted orbital integral of f is the function on the Cartan subgroup $H = A_IA$ defined by

$$(2.1) \quad T_f(\gamma h_t) = |e^t - e^{-t}| \int_{G/A} f(x\gamma h_t x^{-1})v(x)d\dot{x}, \quad \gamma \in A_I,\ t \neq 0 .$$

Here $d\dot{x}$ is a suitably normalized G-invariant measure on the quotient space G/A. It will be useful also to consider the (unweighted) orbital integral or "invariant integral"

$$(2.2) \quad F_f(\gamma h_t) = |e^t - e^{-t}| \int_{G/A} f(x\gamma h_t x^{-1})d\dot{x}, \quad f \in C_c^\infty(G),\ \gamma \in A_I \quad t \neq 0.$$

The invariant integral was studied by Harish-Chandra and shown to have the following properties [4a,b,c].

(I-1) For fixed $h \in H' = \{\gamma h_t : \gamma \in A_I, t \neq 0\}$, the distribution $F(h)$: $f \longrightarrow \langle F(h),f\rangle = F_f(h)$, $f \in C_c^\infty(G)$, is tempered. That is, it extends continuously to the Schwartz space $\mathcal{C}(G)$.

(I-2) The distributions $F(h)$, $h \in H'$, are invariant. That is, for any $f \in \mathcal{C}(G)$ and $y \in G$, define $f^y \in \mathcal{C}(G)$ by $f^y(x) = f(y\,x\,y^{-1})$, $x \in G$. Then $\langle F(h),f\rangle = \langle F(h),f^y\rangle$.

(I-3) For fixed $f \in \mathcal{C}(G)$, $\gamma \in A_I$, consider the function on $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ defined by $t \longmapsto F_f(\gamma:t) = F_f(\gamma h_t)$. It is an even function and tends to zero as $|t| \longrightarrow \infty$. Although initially defined only for $t \neq 0$, it extends to a smooth function on all of $\mathbb{R}$.

(I-4) There is a left and right invariant differential operator z on G so that

$$\frac{d^2}{dt^2} F_f(\gamma h_t) = F_{zf}(\gamma h_t).$$

Arthur has established the following properties of the weighted orbital integral which are similar to those of the invariant integral [1a,b,c,d].

(W-1) For fixed $h \in H'$, the distribution $T(h)$: $f \longrightarrow \langle T(h),f\rangle = T_f(h)$ is tempered.

(W-2) The distributions $T(h)$, $h \in H'$, are <u>not</u> invariant. However, they are K-central. That is, for $k \in K$, $\langle T(h),f\rangle = \langle T(h),f^k\rangle$ for all $f \in \mathcal{C}(G)$. Further, there is a specific non-invariant distribution $T_N(h)$, defined in terms of its Fourier transform, such that $T(h) - T_N(h)$ is invariant.

(W-3) For fixed $f \in \mathcal{C}(G)$, $\gamma \in A_I$, $t \longmapsto T_f(\gamma:t) = T_f(\gamma h_t)$ is an even function, tending to zero at infinity. Although smooth for $t \neq 0$, it is badly behaved at $t = 0$. To describe more exactly its behavior at zero, define $S_f(\gamma:t) = T_f(\gamma:t) + \log(1-e^{-2t})F_f(\gamma:t)$. Then $S_f(\gamma:t)$ is continuous at $t = 0$ and its first derivative has well-defined one-sided limits at zero satisfying $\lim_{t\downarrow 0} \frac{d}{dt} S_f(\gamma:t) - \lim_{t\uparrow 0} \frac{d}{dt} S_f(\gamma:t) = cf(\gamma)$ where c is a constant. The singular weighted orbital integral associated to $T_f(\gamma h_t)$ is defined by

(2.3) $$T_f(\gamma) = \lim_{t\to 0} S_f(\gamma:t).$$

(W-4) $\frac{d^2}{dt^2} T_f(\gamma:t) = T_{zf}(\gamma:t) + (\sinh t)^{-2} F_f(\gamma:t)$ where z is the differential operator on G appearing in (I-4).

For $f \in C_c^\infty(G)$, there are two possible definitions of the Fourier transform of f, namely the operator-valued and scalar-valued Fourier transforms. Let $\hat{G}$ denote the set of equivalence classes of irreducible unitary representations of G. (We will make no distinction between an equivalence class and a representation of that class.) For $\pi \in \hat{G}$, $f \in C_c^\infty(G)$, define $\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx$. Then $\pi(f)$ is a trace class operator on $\mathcal{H}_\pi$, the Hilbert space of the representation π. The operator-valued Fourier transform of f is the operator-valued function on $\hat{G}$ defined by $\mathcal{F}f(\pi) = \pi(f)$. The scalar-valued Fourier transform is the complex-valued function on $\hat{G}$ given by $\hat{f}(\pi) = \operatorname{tr}\pi(f)$.

Now if Λ is an invariant distribution on G, by the Fourier transform $\hat{\Lambda}$ of Λ we mean a "distribution" on $\hat{G}$ satisfying $\hat{\Lambda}(\hat{f}) = \Lambda(f)$, $f \in C_c^\infty(G)$. A formula describing the Fourier transform $\hat{\Lambda}$ is a Fourier inversion formula for $\Lambda(f)$, that is an expansion of $\Lambda(f)$ in terms of the distributional characters $f \longrightarrow \operatorname{tr}\pi(f)$. It typically would have the form $\Lambda(f) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}\pi(f)\, d_\Lambda(\pi)$ where d_Λ is some measure on $\hat{G}$. If Λ is a tempered distribution, then d_Λ should be supported on the tempered spectrum of G.

For example, consider the tempered invariant distribution given by the invariant integral $F(h)$, $h \in H'$. Then the Fourier transform of $F(h)$ is supported on the unitary principal series of representations induced from the parabolic subgroup $P = A_I AN$. For $\chi \in \hat{A}_I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, define $\pi^{\chi,\lambda} = \operatorname{Ind}_P^G(\chi \otimes e^{i\lambda} \otimes 1)$. Then

(2.4) $$F_f(\gamma h_t) = \sum_{\chi \in \hat{A}_I} \chi(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}\pi^{\chi,\lambda}(f) \cos \lambda t \, d\lambda.$$

(See [6] for details.)

On the other hand, if Λ is a non-invariant distribution, it is no longer possible to expand $\Lambda(f)$ in terms of the invariant distributions $\mathrm{tr}\,\pi(f)$, $\pi \in \hat{G}$. Thus we must work with the operator-valued Fourier transform of f and look for a "distribution" on $\hat{G}$ so that $\mathcal{F}\Lambda(\mathcal{F}f) = \Lambda(f)$. The Fourier inversion formula in this case would be expected to take the form $\Lambda(f) = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\{A_\Lambda(\pi)\pi(f)\}d_\Lambda(\pi)$ where for each $\pi \in \hat{G}$, $A_\Lambda(\pi)$ is an operator on $\mathcal{H}_\pi$. If Λ is invariant, $A_\Lambda(\pi)$ would be scalar so that it pulls outside the trace. Of course the operator $A_\Lambda(\pi)$ and the measure $d_\Lambda(\pi)$ are not well-defined independently of each other.

The Fourier transform of $T(h)$, $h \in H'$, is supported on both the unitary principal series and on $\hat{G}_d$, the discrete series representations of G.

THEOREM. Let f be a K-finite function in $\mathcal{C}(G)$, $\gamma \in A_I$, $t \neq 0$. Then

$$T_f(\gamma h_t) = -|e^t - e^{-t}| \sum_{\pi \in \hat{G}_d} \Theta_\pi(\gamma h_t)\mathrm{tr}\,\pi(f)$$

$$+ \sum_{\chi \in \hat{A}_I} \chi(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda(t)\,\mathrm{tr}\,\pi^{\chi,\lambda}(f)\,d\lambda$$

$$+ i \sum_{\chi \in \hat{A}_I} \chi(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda|t|}\mathrm{tr}\{M_\chi'(\lambda)M_\chi(\lambda)^{-1}\pi^{\chi,\lambda}(f)\}\,d\lambda$$

$$+ \pi\,\mathrm{tr}\,\pi^{+,0}(f).$$

The first term in the formula is the discrete series contribution computed by Arthur in [1b,c]. For $\pi \in \hat{G}_d$, Θ_π denotes the character of π as a function on the regular set of G. This term is invariant since it involves only $\mathrm{tr}\,\pi(f)$.

The remaining three terms correspond to principal series representations. The first and last of these are also invariant. The (scalar-valued) function $\phi_\lambda(t)$ is the solution of an inhomogeneous second order differential equation coming from (W-4). It is given by the integral formulas

(2.5)
$$\phi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{|t|}^{\infty} \sin \lambda(u - |t|) \cos \lambda u\, (\sinh u)^{-2}\, du, \quad t \neq 0,\ \lambda \neq 0$$

$$\phi_0(t) = \lim_{\lambda\to 0} \phi_\lambda(t) = \int_{|t|}^{\infty} (u - |t|)(\sinh u)^{-2}\, du, \quad t \neq 0.$$

The last term is a point mass at the principal series representation corresponding to the trivial character of A_I and $\lambda = 0$. Note that the "π" preceding the trace is the number $\pi \sim 3.14$.

The remaining term is the only non-invariant part of the formula. The induced representations $\pi^{\chi,\lambda}$ are viewed in the compact realization as acting on a fixed Hilbert space $\mathcal{H}^\chi$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$. Then $M_\chi(\lambda)$ denotes the operator on $\mathcal{H}^\chi$ which intertwines $\pi^{\chi,\lambda}$ with the equivalent representation $\bar{\pi}^{\chi,\lambda} = \mathrm{Ind}_{\bar{P}}^G(\chi \otimes e^{i\lambda} \otimes 1)$ where $\bar{P} = A_I A\bar{N}$. (The normalization of $M_\chi(\lambda)$ will be specified later.) $M_\chi'(\lambda)$ denotes the derivative with respect to λ of this family of operators.

Although the Fourier transforms of orbital integrals can be computed directly for arbitrary $f \in C_c^\infty(G)$ by using character formulas on G and abelian harmonic analysis, the non-invariance of the weighted orbital integrals requires a different approach. The Schwartz function f is specialized to a matrix coefficient of a discrete series representation or a wave packet corresponding to matrix coefficients of principal series representations. For such an f, the differential equation and boundary conditions can be used to find an expression for $T_f(h)$, which is then interpreted in terms of representations.

For example, suppose f is a matrix coefficient of a discrete series representation π. Then f is an eigenfunction of the differential operator z and $F_f = 0$ so that the differential equation (W-4) satisfied by T_f becomes $\frac{d^2}{dt^2}T_f(\gamma:t) = n^2 T_f(\gamma:t)$. Here n is an integer corresponding to the Harish-Chandra parameter for the discrete series representation π. Since $T_f(\gamma:t)$ is smooth for $t \neq 0$, even, and decaying at infinity, there is a constant $c(\gamma,f)$ so that $T_f(\gamma:t) = c(\gamma:f)e^{-|nt|}$. Finally $S_f(\gamma:t) = T_f(\gamma:t)$ since $F_f = 0$ and we use the formula for the jump of the derivative at $t = 0$ of $S_f(\gamma:t)$ given in (W-3) to conclude that $-2|n|c(\gamma:f) = 2f(\gamma) = 2\chi_\pi(\gamma)f(e)$. Here $\chi_\pi(\gamma)$ is the character of A_I which takes the value $(-1)^{n+1}$ on the non-trivial element of A_I. But by the Plancherel formula, $f(e) = |n|\,\mathrm{tr}\,\pi(f)$. Thus $c(\gamma:f) = -\chi_\pi(\gamma)\mathrm{tr}\ \pi(f)$. But $\Theta_\pi(\gamma h_t) = |e^t - e^{-t}|^{-1}\chi_\pi(\gamma)e^{-|nt|}$ so that we have

$$T_f(\gamma h_t) = - |e^t - e^{-t}| \Theta_\pi(\gamma h_t) \operatorname{tr} \pi(f).$$

This is the formula proved by Arthur. It agrees with the theorem in this situation since, because of orthogonality, all other terms are zero.

The matrix coefficients of discrete series representations span the space of cusp forms of G. It remains to check the theorem for functions in the subspace of the Schwartz space orthogonal to the cusp forms. This is the space spanned by wave packets corresponding to principal series representations.

For $\chi \in \hat{A}_I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\pi^{\chi,\lambda} = \operatorname{Ind}_P^G(\chi \otimes e^{i\lambda} \otimes 1)$ can be realized on the Hilbert space $\mathcal{H}^\chi = \{g \in L^2(K) : g(k\gamma) = \chi(\gamma)g(k)$ for all $\gamma \in A_I$, $k \in K\}$. For $n \in Z$, let ω_n be the character of K given by $\omega_n(t_\theta) = e^{in\theta}$, $t_\theta \in K$. Let $Z_\chi = \{n \in Z : \omega_n(\gamma) = \chi(\gamma)$ for all $\gamma \in A_I\}$. For χ the trivial character of A_I, Z_χ is the set of even integers. For χ non-trivial, Z_χ is the set of odd integers. Then $\mathcal{H}^\chi$ has as basis $\{\omega_n : n \in Z_\chi\}$. We wish to consider matrix coefficients of $\pi^{\chi,\lambda}$ with respect to this basis of $\mathcal{H}^\chi$. Because the distribution is K-central, only the diagonal entries are needed. Thus for $n \in Z_\chi$, we define $E(n:\lambda:x) = \langle \pi^{\chi,\lambda}(x)\omega_n, \omega_n \rangle$.

Unfortunately, $E(n:\lambda) \notin \mathcal{C}(G)$. In order to get an analogue of a matrix coefficient which can be plugged into the distribution $T(h)$, it is necessary to form wave packets. Thus for $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, the Schwartz space on $\mathbb{R}$, $n \in Z_\chi$, we define

$$f(x) = f(\alpha:n:x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)E(n:\lambda:x)\mu_\chi(\lambda)d\lambda. \tag{2.6}$$

Here $\mu_\chi(\lambda)d\lambda$ is the Plancherel measure corresponding to the representation $\pi^{\chi,\lambda}$. Then $f \in \mathcal{C}(G)$ and has the following properties [4c].

(P-1) For all $k_1, k_2 \in K$, $x \in G$, $f(k_1 x k_2) = \omega_n(k_1 k_2)f(x)$.

In particular $f(\gamma x) = \chi(\gamma)f(x)$ for all $\gamma \in A_I$, $x \in G$.

(P-2) The matrix of $\pi^{\chi,\lambda}(f)$, with respect to the basis $\{\omega_n : n \in Z_\chi\}$, has only one non-zero entry. For $n \in Z_\chi$,

$$\pi^{\chi,\lambda}(f)\omega_m = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad m \neq n \; ; \\ [a(\lambda) + a(-\lambda)]\omega_n & \text{if} \quad n = m. \end{cases}$$

(P-3) For $\chi' \in \hat{A}_I$, $\chi' \neq \chi$, $\pi^{\chi',\lambda}(f) \equiv 0$.

(P-4) Combining (P-2) and (P-3) above,

$$\operatorname{tr} \pi^{\chi',\lambda}(f) = \begin{cases} 0 & \chi' \neq \chi \; ; \\ a(\lambda) + a(-\lambda), & \chi' = \chi . \end{cases}$$

(P-5) Since $E(n:\lambda)$ is an eigenfunction of the differential operator z with eigenvalue $p(\lambda) = -\lambda^2$, f satisfies $(zf)(a:n) = f(pa:n)$.

For $f = f(a:n)$ we will evaluate $T_f(h)$, $h \in H'$. As a result of (P-1), since A_I is central in G, it is clear that $T_f(\gamma h_t) = X(\gamma)T_f(h_t)$ for $\gamma \in A_I$, $t \neq 0$. Thus it is enough to study $T(t:a:n) = T_f(h_t)$, $t \neq 0$. Further, because T is an even function of t, it suffices to compute $T(t:a:n)$, $t > 0$. The first step is to obtain an asymptotic formula for $T(t:a:n)$ as $t \longrightarrow +\infty$.

Writing G/A as $K\bar{N}$, using the invariance of f under K implied by (P-1), and a standard change of variables for $\bar{N}$, we write

$$T(t:a:n) = |e^t - e^{-t}| \int_K \int_{\bar{N}} f(k\bar{n}h_t\bar{n}^{-1}k^{-1})v(\bar{n})\, d\bar{n}\, dk$$

$$= |e^t - e^{-t}| \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{n}_y h_t \bar{n}_y^{-1}) \tfrac{1}{2} \log(1 + y^2)\, dy$$

$$= e^t \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{n}_y h_t) \tfrac{1}{2} \log(1 + (1 - e^{-2t})^{-2} y^2)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\mu_\chi(\lambda)e^t E(n:\lambda:\bar{n}_y h_t)\tfrac{1}{2}\log(1+(1-e^{-2t})^{-2}y^2)d\lambda\, dy.$$

To evaluate this expression as $t \longrightarrow +\infty$ we will use Harish-Chandra's asymptotic formula for the Eisenstein integral [4a] and the following observations.

(A-1) As $t \longrightarrow +\infty$, $\frac{1}{2}\log(1 + (1 - e^{-2t})^{-2}y^2) \longrightarrow \frac{1}{2}\log(1 + y^2)$.

Write $H(y) = \frac{1}{2}\log(1 + y^2)$ and let $h(y)$ denote the element of A with diagonal entries $(1 + y^2)^{1/2}$ and $1/(1 + y^2)^{1/2}$. Then $\bar{n}_y h_t = k(y)h(y)h_t h_t^{-1}n(y)h_t$ where $k(y) \in K$ and $n(y) \in N$. Note that $h_t^{-1}n(y)h_t \longrightarrow 1$ as $t \longrightarrow +\infty$.

(A-2) As $t \to +\infty$, $E(n:\lambda:\bar{n}_y h_t) \longrightarrow E(n:\lambda:k(y)h(y)h_t) = \omega_n(k(y))E(n:\lambda:h(y)h_t)$.

(A-3) As $t \to +\infty$,

$$e^{(t+H(y))}E(n:\lambda:h(y)h_t) \longrightarrow c_n(\lambda)e^{i\lambda(t+H(y))} + c_n(-\lambda)e^{-i\lambda(t+H(y))}.$$

Here $c_n(\lambda)$ is the c-function which is the meromorphic continuation to the real axis of the analytic function defined for $\mu \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Im}\mu < 0$ by

$$c_n(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k(y))e^{(-1-i\mu)H(y)}\,dy. \tag{2.7}$$

Combining the above observations, we find that as $t \longrightarrow +\infty$,

$$T(t:a:n) \longrightarrow R(t:a:n) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\mu_\chi(\lambda)e^{i\lambda t}c_n(\lambda)\omega_n(k(y))e^{(-1+i\lambda)H(y)}\,H(y)\,d\lambda\,dy$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\mu_\chi(\lambda)e^{-i\lambda t}c_n(-\lambda)\omega_n(k(y))e^{(-1-i\lambda)H(y)}\,H(y)\,d\lambda\,dy.$$

In order to simplify the expression for $R(t:a:n)$ we change the order of integration and note that $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k(y))e^{(-1\pm i\lambda)H(y)}\,H(y)\,dy = ic_n'(\pm\lambda)$. Of course the integral is not convergent for real λ, so that we must shift the λ-integration into the appropriate half-plane in each term to get convergence of the integral in y, and then shift back. In doing this we pick up a residue at $\lambda=0$. We also use the fact that for any $n \in Z_\chi$, $\mu_\chi(\lambda) = c_n(\lambda)^{-1}c_n(-\lambda)^{-1}$ to obtain the formula

$$(2.8) \qquad R(t:a:n) = i\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\{e^{i\lambda t}c_n'(-\lambda)c_n(-\lambda)^{-1} + e^{-i\lambda t}c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1}\}\, d\lambda + 2\pi a(0)\mathrm{Res}_{\lambda=0}(c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1}).$$

The residue is computed to be $\begin{cases} -1 & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd.} \end{cases}$ (See details in §3.)

The above asymptotic arguments are clearly heuristic only. More precisely what we actually prove is that

$$(2.9) \qquad T(t:a:n) - R(t:a:n) = 2\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\phi(t:\lambda:n)\, d\lambda$$

where $\phi(\lambda:n)$ is a function of t satisfying $\lim_{t\to+\infty} \phi(t:\lambda:n) = 0$ uniformly on compacta of λ.

By (W-4), T satisfies the differential equation

$$\frac{d^2}{dt^2} T(t:a:n) = T(t:pa:n) + (\sinh t)^{-2}F(t:a:n)$$

$$= T(t:pa:n) + 2(\sinh t)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\cos \lambda t\, d\lambda.$$

Also, R clearly satisfies the differential equation $\frac{d^2}{dt^2} R(t:a:n) = R(t:pa:n)$. Thus $\phi(\lambda:n)$ must satisfy the equation

$$(2.10) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\phi(t:\lambda:n) = -\lambda^2\phi(t:\lambda:n) + \cos \lambda t\,(\sinh t)^{-2}.$$

But $\phi_\lambda(t)$ as defined in (2.5) is the unique solution of this equation satisfying $\lim_{t\to+\infty} \phi_\lambda(t) = 0$. Thus for $t > 0$,

$$T(t:a:n) = R(t:a:n) + 2\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\phi_\lambda(t)\, d\lambda.$$

To interpret this as a Fourier transform of $T_f(h_t)$ we note first that $\phi_\lambda(t)$ is an even function of λ so that

$$2\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\phi_\lambda(t)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda)+a(-\lambda)]\phi_\lambda(t)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr} \pi^{\chi,\lambda}(f)\phi_\lambda(t)d\lambda.$$

Also using a change of variables, we get

$$R(t:a:n) = i\int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda)+a(-\lambda)]\, e^{-i\lambda t}\, c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1}d\lambda + \begin{cases} -2\pi a(0) & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd.} \end{cases}$$

The c-functions $c_n(\lambda)$ are the eigenvalues of the intertwining operators $M_\chi(\lambda)$. In fact, $M_\chi(\lambda)\omega_n = c_n(\lambda)\omega_n$ for $n \in Z_\chi$. But combining this with (P-2) we see that

$$c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1}[a(\lambda) + a(-\lambda)] = \operatorname{tr}\{M_\chi'(\lambda)M_\chi(\lambda)^{-1}\pi^{\chi,\lambda}(f)\}.$$

Finally, in the case that n is even, $2a(0) = \operatorname{tr} \pi^{+,0}(f)$. This gives all the non-zero terms in the theorem for $t > 0$.

Observations

Recall the list (W-1) - (W-4) of general properties of weighted orbital integrals. While some were used to derive the formula for $T_f(\gamma h_t)$, f a wave packet, several of these properties are independent of the proof. It is interesting to check that the formula obtained does satisfy these conditions. In the course of doing this we will also derive a formula for the Fourier transform of the singular distribution defined by (2.3). In particular, we will look at:

(1) the genuinely non-invariant part of the distribution;

(2) the behavior of $T_f(\gamma h_t)$ as $|t| \longrightarrow \infty$;

(3) the behavior of $T_f(\gamma h_t)$ as $t \longrightarrow 0$.

As in §2, let $f = f(a:n)$ be a wave packet corresponding to $n \in Z_\chi$ and $a \in C(\mathbb{R})$. Then the Fourier inversion formula can be written for $t \neq 0$ as

$$T_f(\gamma h_t) = 2\chi(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\phi_\lambda(t)\,d\lambda \tag{3.1}$$

$$+\ i\chi(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\cos\lambda t\,[c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1} + c_n'(-\lambda)c_n(-\lambda)^{-1}]\,d\lambda$$

$$+\ \chi(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\sin\lambda|t|\,[c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1} - c_n'(-\lambda)c_n(-\lambda)^{-1}]\,d\lambda$$

$$+\begin{cases} 2\pi\chi(\gamma)a(0) & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd.}\end{cases}$$

In order to understand the properties of the Fourier transform, it is necessary to study the c-functions. Using formulas of Cohn [2]

$$c_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\frac{i\lambda}{2})\Gamma(\frac{i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{i\lambda+1+n}{2})\Gamma(\frac{i\lambda+1-n}{2})}\,. \tag{3.2}$$

Write $d_n(\lambda) = c_n'(\lambda)c_n(\lambda)^{-1}$. Then differentiating, we find that $d_n(\lambda) = \frac{i}{2}\,[\psi(\frac{i\lambda}{2}) + \psi(\frac{i\lambda+1}{2}) - \psi(\frac{i\lambda+1+n}{2}) - \psi(\frac{i\lambda+1-n}{2})]$ where $\psi(z) = \Gamma'(z)\Gamma(z)^{-1}$. The properties of ψ

can be found in [3]. Like the gamma function, it has simple poles at $z = 0,-1,-2,\ldots$ It also satisfies identities

$$(\psi\text{-}1) \qquad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z},$$

$$(\psi\text{-}2) \qquad \psi(\tfrac{1}{2} + z) - \psi(\tfrac{1}{2} - z) = \pi \tan(\pi z),$$

$$(\psi\text{-}3) \qquad \psi(z) - \psi(-z) = -\pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Thus if n is even, the term $\frac{1}{2}\psi(\frac{i\lambda}{2})$ contributes a simple pole at $\lambda = 0$ with residue -1. The other terms are holomorphic for all $\lambda \in \mathbb{R}$. If n is odd, we find using $(\psi\text{-}1)$ that all poles at $\lambda = 0$ cancel.

In any case, the even combination $d_n(\lambda) + d_n(-\lambda)$ will be well-behaved for all $\lambda \in \mathbb{R}$. Using the identities $(\psi\text{-}2)$ and $(\psi\text{-}3)$ we find that

$$[d_n(\lambda) - d_n(-\lambda)] =$$

$$\frac{1}{2}[-\pi \cot(\frac{i\pi\lambda}{2}) - \frac{2}{i\lambda} + \pi \tan(\frac{i\pi\lambda}{2}) - \pi \tan(\frac{i\pi\lambda+\pi n}{2}) - \pi \tan(\frac{i\pi\lambda-\pi n}{2})].$$

Using elementary trigonometric identities we find that

$$(3.3) \qquad \lambda[d_n(\lambda) - d_n(-\lambda)] = -1 + (-1)^{n+1} \frac{\pi\lambda}{\sinh \pi\lambda}.$$

Note that this shows that $d_n(\lambda) - d_n(-\lambda)$ depends only on whether n is even or odd. This means that for $\chi \in \hat{A}_I$, $M_\chi'(\lambda)M_\chi(\lambda)^{-1} - M_\chi'(-\lambda)M_\chi(-\lambda)^{-1}$ is a scalar matrix. Thus the only genuinely non-invariant part of the distribtuion $T_f(\gamma h_t)$ is the term

$$T_N(\gamma h_t) = i \sum_{\chi \in \hat{A}_I} \chi(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda t \quad tr\{M'(\lambda)M(\lambda)^{-1}\pi^{\chi,\lambda}(f)\}\, d\lambda.$$

This is exactly the distribution defined by Arthur in [1d] and referred to in (W-2).

We now check that $\lim_{|t|\to\infty} T(t:\alpha:n) = 0$. It is easy to verify using the integral formula (2.5) for $\phi_\lambda(t)$ that there is a constant c such that for all $t \neq 0$, $|\phi_\lambda(t)| \leq \frac{c}{|t|}$ uniformly in λ. Thus it is clear that for all $\alpha \in C(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)\phi_\lambda(t)\, d\lambda \longrightarrow 0$ as $|t| \longrightarrow \infty$.

Since $\alpha(\lambda)[d_n(\lambda) + d_n(-\lambda)] \in L^1(\mathbb{R})$, the second term in (3.1) also tends to zero as $|t| \longrightarrow \infty$. The same holds for the third term if n is odd. However, for n even the pole of $d_n(\lambda)$ at $\lambda = 0$ causes

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda) \sin \lambda|t| \,[d_n(\lambda) - d_n(-\lambda)]\, d\lambda = -2\pi\alpha(0).$$

This cancels the fourth term so that in any case $\lim_{|t|\to\infty} T_f(\gamma h_t) = 0$.

Finally, we look at the behavior of $T_f(\gamma h_t)$ as $t \longrightarrow 0$. As in (W-3) we define $S(t:\alpha:n) = T(t:\alpha:n) + \log(1-e^{-2t})F(t:\alpha:n)$. We wish to show that S is continuous at $t = 0$ and that its first derivative has jump $2f(e)$ at $t = 0$.

The second and fourth terms in (3.1) are smooth at $t = 0$. The third is continuous, but because of the $\sin \lambda|t|$ term has a jump in its first derivative equal to

$$2\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)\, \lambda\, [d_n(\lambda)-d_n(-\lambda)]d\lambda = -2\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)d\lambda + (-1)^{n+1}2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\alpha(\lambda)}{\sinh \pi\lambda}\, d\lambda$$

using (3.3).

To study the first term we combine it with the $\log(1-e^{-2t})F(t:\alpha:n) = 2\log(1-e^{-2t}) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda) \cos \lambda t\, d\lambda$ term to obtain $2\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda)\, h_\lambda(t)\, d\lambda$ where $h_\lambda(t) = \phi_\lambda(t) + \log(1-e^{-2t}) \cos \lambda t$. Using the differential equation and boundary behavior at infinity of $\phi_\lambda(t)$, we find that $\frac{d^2}{dt^2} h_\lambda(t) = -\lambda^2 h_\lambda(t) - \frac{4\lambda \sin \lambda t}{e^{2t} - 1}$ and $\lim_{t\to+\infty} h_\lambda(t) = 0$.

Thus we can write, for $t > 0$, $h_\lambda(t) = -4\int_t^{\infty} \frac{\sin \lambda(u-t) \sin \lambda u}{e^{2u} - 1}\, du.$

It is now easy to check that $\lim_{t\downarrow 0} h_\lambda(t) = -4\int_0^\infty \frac{\sin^2\lambda u}{e^{2u}-1}\,du$ is a convergent integral, and that $\lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}h_\lambda(t) = \lambda\int_0^\infty \frac{\sin \lambda u}{e^{u}-1}du = \frac{\pi\lambda\cosh\pi\lambda}{\sinh\pi\lambda} - 1.$

Although $\phi_\lambda(t)$ is even, $h_\lambda(t)$ is not because of the $\log(1-e^{-2t})$ term. However, $h_\lambda(-t) = h_\lambda(t) + 4t\cos\lambda t$. Thus $\lim_{t\uparrow 0} h_\lambda(t) = \lim_{t\downarrow 0} h_\lambda(t)$ so that $h_\lambda(t)$ is continuous at $t = 0$. Also,

$\frac{d}{dt}h_\lambda(-t) = -\frac{d}{dt}h_\lambda(t) - 4\cos\lambda t + 4\lambda t\sin\lambda t$ so that

$\lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}h_\lambda(t) - \lim_{t\uparrow 0}\frac{d}{dt}h_\lambda(t) = 2\lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}h_\lambda(t) + 4 = \frac{2\pi\lambda\cosh\pi\lambda}{\sinh\pi\lambda} + 2.$

Combining this with the jump from the third term we find that

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{d}{dt}S(t:a:n) - \lim_{t\uparrow 0}\frac{d}{dt}S(t:a:n) = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\lambda a(\lambda)\frac{\cosh\pi\lambda + (-1)^{n+1}}{\sinh\pi\lambda}\,d\lambda$$

$$= \begin{cases} 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\lambda a(\lambda)\tanh\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda & n \text{ even} \\ 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\lambda a(\lambda)\coth\frac{\pi\lambda}{2}\,d\lambda & n \text{ odd.}\end{cases}$$

This is exactly the Fourier transform of $f(e)$ given by the Plancherel theorem.

Finally, the singular weighted orbital integral studied by Arthur in [1b] is $T_f(\gamma) = \lim_{t\to 0} S_f(\gamma h_t)$, $\gamma \in A_I$. Using the above formulas we can write, for $f \in C(G)$,

$$(3.4)\qquad T_f(\gamma) = -\sum_{\pi\in\hat{G}_d}\chi_\pi(\gamma)\,\mathrm{tr}\,\pi(f) + \sum_{\chi\in\hat{A}_I}\chi(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\,\pi^{\chi,\lambda}(f)\,h(\lambda)\,d\lambda$$

$$+ \sum_{\chi\in\hat{A}_I}\chi(\gamma)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\{M_\chi'(\lambda)\,M_\chi(\lambda)^{-1}\,\pi^{\chi,\lambda}(f)\}\,d\lambda + \pi\,\mathrm{tr}\,\pi^{+,0}(f)$$

where $h(\lambda) = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2\lambda u}{1-e^{2u}}\,du$.

References

1. J.G. Arthur

(a) The Selberg trace formula for groups of F-rank one, Ann. of Math. 100 (1974), 326-385.

(b) Some tempered distributions on semisimple groups of real rank one, Ann. of Math. 100 (1974), 553-584.

(c) The characters of discrete series as orbital integrals, Inv. Math. 32 (1976), 205-261.

(d) On the invariant distributions associated to weighted orbital integrals, preprint.

2. L. Cohn, Analytic Theory of the Harish-Chandra c-function, Lecture Notes in Math, 429, Springer-Verlag, New York, 1974.

3. A. Erdelyi, editor, Higher Trancendental Functions, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

4. Harish-Chandra,

(a) Harmonic analysis on real reductive groups, I. J. Funct. Anal., 19, (1975), 104-204.

(b) Harmonic analysis on real reductive groups, II, Inv. Math., 36 (1976), 1-55.

(c) Harmonic analysis on real reductive groups, III, Ann. of Math., 104 (1976), 117-201.

5. R. Herb

(a) An inversion formula for weighted orbital integrals, Compositio Math., 47 (1982), 333-354.

(b) Discrete series characters and Fourier inversion on real semisimple Lie groups, Trans. A.M.S., 277 (1983), 241-262.

6. P. Sally and G. Warner, The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one, Acta Math., 131 (1973), 1-26.

7. G. Warner, Selberg's trace formula for nonuniform lattices: the R-rank one case, Advances in Math. Studies, 6 (1979), 1-142.

R. HERB
University of Maryland
College Park
MA 20742
USA

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

M. S. KHALGUI

Caractères des représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 219-253

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__219_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n°15,1984,p. 219-253

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE CONNEXE

M. S. KHALGUI

FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
1060 TUNIS
TUNISIE

M. S. KHALGUI

RÉSUMÉ :

Soient G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et T une représentation factorielle normale de G dont le noyau dans $C^*(G)$ est égal au noyau de l'une des représentations irréductibles de G construites par Duflo.

On associe à T une R-orbite Ω dans le dual de $\mathfrak{g}$. Dans le cas où la sous-algèbre $\mathfrak{g}(g)$ $(g \in \Omega)$ est nilpotente, on montre que T a un caractère distribution relativement au bicommutant $T(G)''$ si et seulement si Ω est tempérée.

Dans ce cas, on a une formule de caractère de Kirillov. Ces résultats généralisent les résultats analogues obtenus dans le cas où G est résoluble et dans le cas où T est irréductible normale.

ABSTRACT :

Let G be a real connected Lie group, $\mathfrak{g}$ it's Lie algebra, T a factor normal representation of G such that the kernel of T in $C^*(G)$ is equal to the kernel of one of the irreducible representations of G constructed by Duflo. We associate to T a R-orbit Ω in the dual of $\mathfrak{g}$. When the stabilizer $\mathfrak{g}(g)$ of g $(g \in \Omega)$ in $\mathfrak{g}$ is nilpotent, we prove that T has a distribution character if and only if Ω is tempered, and in this case we have a Kirillov's character formula. These results generalise the results obtained in the case G solvable and the case T irreducible normal representation of G.

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES

PLAN

INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$, T une représentation (unitaire) irréductible de G . Kirillov a conjecturé le résultat suivant : Il existe une G-orbite Ω pour l'action de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, et une fonction P_Ω G-invariante, de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}$ et telle que $P_\Omega(0) = 1$ de telle sorte que l'on ait :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tr} T(\exp X) = \int_\Omega P_\Omega(X)^{-1} e^{i\langle g,x\rangle} d\beta_\Omega(g) \qquad \text{(T.14)}$$

au voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g}$.

Cette formule a été démontrée progressivement et sous des hypothèses convenables dans les cas suivants : dans le cas nilpotent [Ki] , dans le cas compact [Ki] ; [Pu,1] , dans le cas résoluble [Pu,2] , [Di,1] , [Kh,1] , dans le cas réductif [Ro] , dans le cas moyennable [Kh,2] et dans le cas général [Kh,3].

Dans le chapitre III, on donne un énoncé plus général que celui de [Kh,2] et [Kh,3] . Plus précisément, soient g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X_G^{irr}(g)$ (cet ensemble est défini au §. III), $T = T^G_{g,\tau}$ la représentation associée à (g,τ) par M. DUFLO, et $\Omega = G \cdot g$. Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$ (T.11) et $\dim(\tau) < +\infty$. Alors l'orbite Ω est tempérée (T.18) si et seulement si T a un caractère distribution, et dans ce cas, on a la formule suivante au voisinage de l'origine :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tr}(T(\exp X)) = \dim(\tau) \int_\Omega j(X)^{-1} e^{i\langle g,X\rangle} d\beta_\Omega(g)$$

où j est la fonction définie sur $\mathfrak{g}$ par :

$$j(X) = \left(\det\left(\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ad}X/2)}{\operatorname{ad}X/2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Dans [Kh,1] , suivant une suggestion de L. Pukanszky, on a montré dans le cas d'un groupe de Lie résoluble connexe, que la formule (1) reste encore valable pour une représentation factorielle normale T de G associée à une R-orbite Ω (comme dans [Pu,3]) tempérée dans $\mathfrak{g}^*$ (T.18).

Le but du présent travail est de montrer que ce résultat s'étend aux représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe quelconque.

Plus précisément, soit T une représentation factorielle normale de G telle que $\ker T = \ker T^G_{g,\tau}$ où g est une forme linéaire admissible, bien polarisable sur $\mathfrak{g}$, $\tau \in X^{irr}_G(g)$, et $T^G_{g,\tau}$ est la représentation irréductible associée à (g,τ) par DUFLO. Cette représentation est unique à quasi-équivalence près. On note Ω la R-orbite contenant g. La R-orbite Ω ne dépend que de T et elle est appelée la R-orbite associée à T (cf. V.1). Sur Ω, il existe une mesure de Radon positive G-invariante $d\beta$ unique à une constante > 0 près (cf. II.2).

Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$. Alors la R-orbite Ω est tempérée si et seulement si la représentation T a un caractère distribution relativement au bicommutant $T(G)''$ de $T(G)$. De plus, dans ce cas si t est une trace (normale fidèle semi-finie) sur $T(G)''$, il existe une normalisation de $d\beta$ sur Ω de telle sorte que l'on ait :

$$t(T(\Psi)) = \int_\Omega (\Psi j^{-1})^{\wedge}\,(g)\, d\beta(g) \tag{3}$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V_\varepsilon)$ (T.5), où V_ε est un voisinage convenable de 0 dans $\mathfrak{g}$ (cf. th. V).

Pour prouver ces résultats, on utilise les résultats de Pukanszky [Pu,5] (cf. IV) sur les représentations factorielles normales et leurs caractères qui permettent de ramener ce problème au problème analogue (traité dans [Kh,2], [Kh,3], [Kh,4]) pour les représentations irréductibles normales d'un groupe de Lie connexe.

Le résultat précédent généralise le résultat analogue dans le cas résoluble [Kh,1]. Dans ce dernier cas la condition $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$ est inutile, par contre dans le cas général si cette condition n'est pas satisfaite les formules (1), (2), (3) ne sont pas vraies en général [Kh,2].

Dans le cas où T est une représentation irréductible normale, la R-orbite Ω est une G-orbite, la mesure $d\beta$ est proportionnelle à $d\beta_\Omega$ (T.14), la trace t est proportionnelle à la trace usuelle, et la formule (3) n'est autre que la formule (2) à la constante près en moins.

Je suis heureux de remercier M. DUFLO pour les multiples remarques et conseils qui m'ont aidé dans ce travail.

§. 0.- TABLE DES NOTATIONS

On utilise souvent dans ce texte les notations suivantes sans y faire référence.

T.1.- Si H est un groupe topologique, H_o désigne la composante connexe de l'élément neutre.

T. 2.- Soient H un groupe et K un sous-groupe de H, on note $[H : K]$ l'indice de K dans H.

T. 3.- Soient K un sous-groupe d'un groupe H, π la représentation unitaire de K et $h \in H$. On note $h \cdot \pi$ la représentation unitaire de $K' = h K h^{-1}$ définie par $k' \mapsto \pi(h^{-1}k' h)$ pour $k' \in K'$.

T. 4.- On note $\hat{H}$ l'espace des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de H.

On note $\widehat{H}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de H.

On note $\widehat{H}_{norm}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de H.

T. 5.- On note $\mathcal{K}(H)$ l'espace des fonctions φ continues sur H à support compact.

Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et U est un ouvert dans H ou dans $\mathfrak{h}$, on note $\mathcal{D}(U)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans U.

T. 6.- Si Π est une représentation de H, $\varphi \in \mathcal{K}(H)$ et $d\mu_H$ est une mesure de

Haar à gauche sur H , on note $\Pi(\varphi) = \int_H \Pi(x)\,\varphi(x)\,d\mu_H(x)$. Si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H , $\Psi \in \mathcal{K}(\mathfrak{h})$ et dx est une mesure de Haar sur $\mathfrak{h}$, on note $\Pi(\Psi) = \int_{\mathfrak{h}} \Psi(x)\,\Pi(\exp x)\,dx$.

T. 7.- Soient H un groupe localement compact, $C^*(H)$ la C^*-algèbre de H , Π une représentation unitaire de H , on note encore Π la représentation associée à Π sur $C^*(H)$, $\ker \Pi$ son noyau dans $C^*(H)$ et $R(\Pi)$ l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\Pi(C^*(H))$ (cf [Di]).

T. 8.- On note $\mathrm{Prim}(H)$ l'ensemble des idéaux bilatères primitifs dans $C^*(H)$ (cf [Di]).

T. 9.- Soient H un groupe localement compact, $d\mu_H$ une mesure de Haar à gauche sur H , Δ_H la fonction module sur H et $\varphi \in \mathcal{K}(H)$. On note φ^* la fonction définie par :

$$\varphi^*(h) = \Delta_H(h)^{-1}\,\overline{\varphi(h^{-1})} \quad \text{pour } h \in H \ .$$

Si $\Psi \in \mathcal{K}(H)$, on note $\varphi * \Psi$ la fonction définie par :

$$\varphi * \Psi(h_o) = \int_H \varphi(h)\,\Psi(h^{-1}h_o)\,d\mu_H(h) \quad \text{pour } h_o \in H \ .$$

T. 10.- Soient H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, $d\mu_H$ une mesure de Haar à gauche sur H et dx une mesure de Haar sur $\mathfrak{h}$. On dit que ces deux mesures se correspondent si

$$d\mu_H(\exp x) = \det\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}x}}{\mathrm{ad}x}\right) dx \ .$$

T. 11.- Soient H un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, agissant dans un espace V et $v \in V$ fixé. On note $H \cdot v$ l'orbite de v , $H(v)$ le stabilisateur de v dans H , et $\mathfrak{h}(v)$ l'algèbre de Lie de $H(v)$.

T. 12.- Si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note V^* son dual. Si W est un sous-espace vectoriel de V , on note $W^\perp$ l'othogonal de W dans V^* . Si V est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ l'espace complexifié de V .

T. 13.- Si H est un groupe localement compact, on note $X(H)$ le groupe des homomorphismes continus de H dans le tore à une dimension. Si K est un sous-groupe fermé de H, on note $X(H/K)$ les éléments de $X(H)$ triviaux sur K.

T. 14.- Si H est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et Ω une H-orbite dans $\mathfrak{h}^*$ pour l'action de la représentation coadjointe de H, on note $d\beta_\Omega$ la mesure canonique sur Ω normalisée comme en [Be, p. 18-19-20].

T. 15.- Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie et $h \in \mathfrak{h}^*$. On note B_h la forme bilinéaire antisymétrique définie par $B_h(X,Y) = h([X,Y])$ pour X et $Y \in \mathfrak{h}$. On note aussi B_h la forme bilinéaire non dégénérée associée par passage au quotient par le noyau.

T. 16.- Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. D'après le théorème d'Ado, on peut identifier $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie de telle sorte que les éléments du plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ soient nilpotents. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique contenant $\mathfrak{g}$. Alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$. On note $\tilde{G}$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors G est fermé dans $\tilde{G}$ et on a $[\tilde{G}, \tilde{G}] = [G, G]$ (cf [Ch]).

T. 17.- Soient G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G, et R une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathrm{Ind}_H^G(R)$ la représentation induite de R. Elle est définie par translations à gauche dans l'espace des fonctions φ de G dans $\mathcal{H}$ mesurables et vérifiant les relations suivantes :

$$\text{(i)} \qquad \varphi(xy) = \delta(y)^{\frac{1}{2}} R(y)^{-1} \varphi(x) \quad \text{pour } x \in G \text{ et } y \in H$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{G/H} |\varphi(x)|^2 \, dx < +\infty$$

où δ est le quotient des fonctions modules de G et H (cf par exemple [Be, chap. V]).

T. 18.- Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$,

Ω un sous-espace localement fermé muni d'une mesure de Radon positive G-invariante $d\beta$. On dit que Ω est tempérée s'il existe un nombre $M > 0$ et une norme $\| \ \|$ sur $\mathfrak{g}^*$ de telle sorte que :

$$\int_\Omega (1 + \|g\|)^{-M} \, d\beta(g) < +\infty$$

T. 19.- Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, et m une mesure de Radon positive sur V. Si $\varphi \in \mathcal{D}(V)$, on définit $\hat{\varphi}$ sur V^* par :

$$\hat{\varphi}(v) = \int_V \varphi(x) \, e^{iv(x)} \, dm(x) \quad .$$

La mesure duale m^* de m est la mesure de Radon positive sur V^* définie par :

$$\varphi(0) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(v) \, dm^*(v)$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}(V)$.

§. 1.- PRÉLIMINAIRES

I.1.- Soit G un groupe de Lie algèbrique linéaire dans $GL(E)$ où E est un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si ε est un réel > 0, on note $\mathcal{V}_\varepsilon = \{ X \in \mathfrak{g}$; les valeurs propres x de adX dans E vérifient $|\mathrm{Im}\, x| < \varepsilon \}$. Soit K un sous-groupe algébrique de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$.

Lemme 1 : Il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de K) tel que :

$$(X \in \mathcal{V}_\varepsilon \text{ et } \exp X \in K) \longrightarrow X \in \underline{k} \quad .$$

Démonstration :

a) D'après un théorème de Chevalley (cf [Bo], p. 161), il existe une représentation rationnelle φ de G dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et un sous-espace D de dimension 1 dans F tel que :

$$K = \{x \in G \ / \ \varphi(x) D = D\}$$

$$k = \{x \in \mathfrak{g} / \ d\varphi(x) D \subset D\} \quad .$$

De plus par la construction de Chevalley de l'espace F , les valeurs propres de X dans F sont de la forme $y = x_{i_1} + \ldots + x_{i_\ell}$ où $x_1, \ldots, x_p$ sont les valeurs propres de X dans E . On choisit $\varepsilon = \frac{\pi}{\max p}$. Si $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$, les valeurs propres y de X dans F vérifient $|\mathrm{Im}\, y| < \pi$. On va montrer qu'alors le lemme 1 est satisfait avec ce voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$.

b) Soit $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$ tel que $\exp X \in K$. On sait que $X = X_s + X_n$ où X_s est la composante semi-simple de X et X_n est la composante nilpotente de X , et en plus $\exp X = \exp X_s \exp X_n$, $\exp X_s \in K$ et $\exp X_n \in K$. (cf [Ch] par exemple).
On a : $X_n \in \underline{k}$. En effet, on a, d'après a), $\varphi(\exp X_n) \cdot D = D$ puisque $\exp X_n \in K$; et donc, si $d \in D$, on a $(\exp X_n) \cdot d = \lambda d$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Vu que X_n est nilpotent, $\exp X_n$ est unipotent, et par conséquent, on a $(\exp X_n) \cdot d = d$ pour tout $d \in D$. Comme $X_n \in \mathcal{V}_\varepsilon$, ceci prouve que $X_n \in \underline{k}$ ([Be], p. 4).
Ce qui précède nous permet de nous ramener au cas où X est semi-simple.
c) Supposons que X est semi-simple, $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$ et $\exp X \in K$.
Comme X est semi-simple, on a $F_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} F_\lambda$, où Σ est l'ensemble des valeurs propres de X deux à deux distinctes. Si λ et μ sont différentes dans Σ , $\exp \lambda$ et $\exp \mu$ sont alors des valeurs propres différentes de $\exp X$.
En effet si $\exp\lambda = \exp\mu$, on a $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\mu$ et $\mathrm{Im}\,\lambda - \mathrm{Im}\,\mu \in 2\pi\, \mathbb{Z}^*$, et ceci est en contradiction avec $X \in \mathcal{V}_\varepsilon$. Pour tout $\lambda \in \Sigma$, F_λ est donc l'espace propre de $\exp X$ correspondant à $\exp \lambda$. Comme $\exp X \in K$, d'après a) , $\exp X$ laisse invariant D ,et donc il existe $\lambda \in \Sigma$ tel que $D \subset F_\lambda$.
On a donc $d\varphi(X)\, D \subset D$, et par conséquent d'après a), on a $X \in \underline{k}$. <u>cqfd</u>

I.2.- Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ l'algèbre dérivée de $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathcal{G}$, $\mathcal{L} = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] + \mathcal{N}$, L le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathcal{L}$, $g \in \mathcal{G}^*$, $G(g)$ le stabilisateur de g dans G , K un sous-groupe fermé de G tel que $G(g)_o\, L \subset K \subset G(g)L$. L'algèbre de Lie $\underline{k}$ de K est égale à $\mathcal{G}(g) + \mathcal{L}$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note $V_\varepsilon = \{X \in \mathcal{G}$; les valeurs propres x de adX vérifient $|\mathrm{Im}\, x| < \varepsilon\}$.

Lemme 2 : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$(X \in V_\varepsilon \text{ et } \exp X \in K) \Longrightarrow X \in \underline{k} .$$

De plus on peut choisir ε ne dépendant que de $g|_{\mathcal{L}}$ car $G(g)L$ ne dépend que de $g|_{\mathcal{L}}$.

Démonstration :

Utilisant (T.16), on voit que $\mathcal{L}$ est une algèbre de Lie algébrique. D'après [Ch, p. 228], ad($\mathcal{L}$) est une sous-algèbre de Lie algébrique de $g\ell(\mathcal{G})$. Soit $\bar{G}$ le groupe adjoint algébrique de G, et soit $\bar{L}$ l'adhérence algébrique de AdL dans $\bar{G}$. On note $\bar{\mathcal{G}}$ l'algèbre de Lie de $\bar{G}$ et $\bar{\mathcal{L}}$ l'algèbre de Lie de $\bar{L}$. Il est facile de voir qu'on a $\bar{\mathcal{L}} = \mathrm{ad}(\mathcal{L})$. On note H le groupe $\bar{G}(g)\bar{L}$. C'est un sous-groupe fermé (au sens de Zariski) dans $\bar{G}$ d'algèbre de Lie $\mathcal{h} = \bar{\mathcal{G}}(g) + \bar{\mathcal{L}}$.

D'après le lemme 1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la condition $(X \in V_\varepsilon$ et $\exp(\mathrm{ad}\, X) \in H)$ entraîne $\mathrm{ad}\, X \in \mathcal{h}$. Par hypothèse supposons que $X \in V_\varepsilon$ et $\exp X \in K$. Il en résulte que $\exp(\mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Ad}(\exp X) \in \mathrm{Ad}\, K$. Comme Ad K est inclus dans H , ce qui précède montre que $\mathrm{ad}\, X \in \mathcal{h}$.

Comme $X \in \mathcal{G}$ et comme $\mathrm{ad}(\mathcal{G}) \cap (\bar{\mathcal{G}}(g) + \bar{\mathcal{L}}) = \mathrm{ad}(\mathcal{G}(g) + \mathcal{L})$ et $\mathcal{h} = \bar{\mathcal{G}}(g) + \bar{\mathcal{L}}$, on a $\mathrm{ad}\, X \in \mathrm{ad}(\mathcal{G}(g) + \mathcal{L})$. Puisque par définition $\mathcal{L}$ contient le centre de $\mathcal{G}$, on obtient $X \in \mathcal{G}(g) + \mathcal{L}$, ce qui permet de conclure puisque $\underline{k} = \mathcal{G}(g) + \mathcal{L}$. <u>cqfd</u>

I.3.- Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $g\ell(E)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de E , et $\mathcal{G}$ une sous-algèbre de Lie de $g\ell(E)$. Soit $\mathcal{L}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$, algèbrique dans $g\ell(E)$ et contenant $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$.

Soit $g \in \mathcal{G}^*$. On pose $\underline{k} = \mathcal{G}(g) + \mathcal{L}$ (T.11) , $k = g|_{\underline{k}}$, $\ell = g|_{\mathcal{L}}$.

Lemme 3 : L'algèbre de Lie $\mathscr{G}(g)$ est nilpotente si et seulement si l'algèbre de Lie $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

Démonstration :

a) Utilisant l'égalité $\underline{k} = \mathscr{G}(g) + \mathscr{L}$, il est facile de voir que $\mathscr{L}(k) = \mathscr{L}(\ell)$, et donc que $\underline{k}(k) = \mathscr{G}(g) + \mathscr{L}(\ell)$.

Il est alors clair que si $\underline{k}(k)$ est nilpotente, $\mathscr{G}(g)$ est nilpotente.

Supposons dans la suite que $\mathscr{G}(g)$ est nilpotente, et montrons qu'alors $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

b) Comme $\mathscr{L}$ est une algèbre de Lie algébrique, $\mathscr{L}(\ell)$ est aussi algébrique. Alors $\mathscr{L}(\ell)$ est égal à $\underline{r} + \underline{u}$ où $\underline{u}$ est le radical unipotent de $\mathscr{L}(\ell)$ et $\underline{r}$ est un facteur réductif de $\mathscr{L}(\ell)$ (cf [Mo]).

Comme $[\underline{r}, \mathscr{L}]$ est inclus dans $\mathscr{L}$, il existe un sous-espace supplémentaire $\underline{p}$ de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$ tel que $[\underline{r}, \underline{p}]$ soit inclus dans $\underline{p}$. Comme $\mathscr{L}$ contient $[\mathscr{G}, \mathscr{G}]$, on a $[\underline{r}, \underline{p}] = \{0\}$. Ceci prouve que $\underline{r}$ est inclus dans $\mathscr{L}(g)$, et par conséquent $\mathscr{L}(\ell) = \mathscr{L}(g) + \underline{u}$.

D'autre part, comme $[\mathscr{G}, \mathscr{G}]$ est inclus dans $\mathscr{L}$, $[\mathscr{G}(\ell), \mathscr{G}(\ell)]$ est inclus dans $\mathscr{L}(g)$.

Ces deux dernières remarques montrent que $\mathscr{L}(\ell) = \mathscr{L}(g) + \underline{u}$, et de plus $\mathscr{L}(g)$ et $\underline{u}$ sont des idéaux dans $\mathscr{L}(\ell)$.

Par hypothèse $\mathscr{G}(g)$ est nilpotente, donc $\mathscr{L}(g)$ est nilpotente. Donc $\mathscr{L}(\ell)$ est nilpotente, car elle est somme de deux idéaux nilpotents. On a vu dans a) que $\underline{k}(k)$ est égale à $\mathscr{G}(g) + \mathscr{L}(\ell)$. Utilisant la relation $[\mathscr{G}(\ell), \mathscr{G}(\ell)] \subset \mathscr{L}(g)$, on voit que $\mathscr{G}(g)$ et $\mathscr{L}(\ell)$ sont des idéaux dans $\underline{k}(k)$. On a prouvé plus haut que $\mathscr{L}(\ell)$ est nilpotente, et par hypothèse $\mathscr{G}(g)$ est nilpotente. Par conséquent $\underline{k}(k)$ est somme de deux idéaux nilpotents, et donc $\underline{k}(k)$ est nilpotente.

<u>cqfd</u>

I.4.- Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, $\mathscr{L}$ un idéal dans $\mathscr{G}$, L le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathscr{L}$, $g \in \mathscr{G}^*$ et $\ell = g|_{\mathscr{L}}$.

D'après ([Pu, 6], p. 10 et p. 30), on a le lemme suivant :

Lemme 4 :

a) $L(\ell)_o \cdot g = g + (\mathcal{L} + \mathfrak{g}(\ell))^{\perp}$ (T.11, T.12, T.1)

b) Si de plus $\mathcal{L}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a :

$$G(\ell)_o \cdot g = g + (\mathcal{L} + \mathfrak{g}(g))^{\perp} .$$

§ II.- R-ORBITE DANS $\mathfrak{g}^*$.

II.1.- Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient G' un revêtement simplement connexe de G , et $\tilde{G}$ le groupe de Lie associé à G' comme en (T.16).

Si g est dans $\mathfrak{g}^*$ (T.12), l'orbite $G \cdot g$ est égale à $G' \cdot g$ et donc est incluse dans $\tilde{G} \cdot g$. De plus l'orbite $\tilde{G} \cdot g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$, puisque l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de G est algébrique (cf par exemple [Bo, p. 98]).

Comme dans [Pu, 3, p. 521], on définit une unique relation d'équivalence R sur $\mathfrak{g}^*$ vérifiant ce qui suit :

1) Deux éléments g_1 et g_2 dans $\mathfrak{g}^*$ sont R-équivalents si $g_1 \in \overline{G \cdot g_2}$ où $\overline{G \cdot g_2}$ est l'adhérence de $G \cdot g_2$ dans $\tilde{G} \cdot g_2$.

2) Toute R-orbite Ω est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$ de plus, pour tout $g \in \Omega$, $G \cdot g$ est dense dans Ω , et on a $G \cdot g = \Omega$ si et seulement si la G-orbite $G \cdot g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$.

3) Soit Ω une R-orbite. Pour $g \in \Omega$, notons G_1 la composante neutre de l'adhérence (pour la topologie ordinaire) de $\tilde{G}(g)G'$ dans $\tilde{G}$. Alors G_1 est indépendant du choix de g dans Ω , et on a : $\Omega = G_1 \cdot g$.

II.2.- **Lemme 5** : ([Pu, 3]) Soit Ω une R-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Il existe alors une mesure $d\beta$ sur Ω de Radon, positive, non nulle, G-invariante, et unique à une constante strictement positive près.

Démonstration :

a) D'après II.1, Ω est localement fermé dans $\mathfrak{g}^*$, et $\Omega = G_1 \cdot g (g \in \Omega)$. La R-orbite Ω est alors homéomorphe à $G_1/G_1(g)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une mesure de Radon, positive, G-invariante, non nulle, et unique à une constante strictement positive près sur $G_1/G_1(g)$.

b) Soient $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de G_1 et $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$. On a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = [\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ (T.16). Notons $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et H le sous-groupe de $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Si x est un élément de $G_1(g)$, on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}} x)$$

et

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1(g)} x) = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}(g)} x = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}(g)} x) .$$

Par conséquent, pour tout $x \in G_1(g)$, on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(g)} x) = \det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)} x) .$$

Vu que $B_g : (X,Y) \mapsto g([X,Y])$ définit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$ une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée, pour tout x dans $G_1(g)$ on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)} x) = 1 .$$

Ce qui précède montre qu'alors pour tout x dans $G_1(g)$ on a :

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(g)} x) = 1 .$$

Par conséquent, il existe une mesure de Radon positive non nulle G_1 - invariante sur $G_1/G_1(g)$ unique à un scalaire positif près.

c) Pour terminer la démonstration du lemme, il suffit de prouver que si μ est une mesure G-invariante sur $G_1/G_1(g)$, alors μ est une mesure G_1-invariante. Remarquons que puisque $\mathfrak{h}$ est algébrique, l'orbite $H \cdot g$ est localement fermée dans $\mathfrak{g}^*$ (cf [Bo, p. 98]) . Donc le groupe $G_1(g)H$, qui est le stabilisateur de $H \bullet g$ dans G_1 , est fermé dans G_1 . D'après b), on a pour tout $x \in G_1(g)$:

$$\det(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(g)}(x)) = 1 \ .$$

En identifiant $G_1(g)H/G_1(g)$ et $H/H(g)$, on en déduit qu'il existe une mesure λ sur $H/H(g)$ non nulle et invariante par $G_1(g)H$. Dans ces conditions à la mesure μ (d'après [Be, II.3.4]) on peut associer une mesure ν sur le groupe $G_1/G_1(g)H$ telle que l'on ait, pour tout φ $d\mu$- intégrable sur $G_1/G_1(g)$:

$$\int_{G_1/G_1(g)} \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{G_1/G_1(g)H} \left(\int_{H/H(g)} \varphi(xy)\, d\lambda(y)\right) d\nu(x).$$

La mesure μ est invariante par G , par conséquent la mesure ν est invariante par l'image de G dans $G_1/G_1(g)H$ par l'application canonique de G_1 dans $G_1/G_1(g)H$. Comme $G \bullet g$ est dense dans $G_1 \bullet g$ et $G_1 \bullet g/H$ est homéomorphe à $G_1/G_1(g)H$, l'image de G dans $G_1/G_1(g)H$ est dense dans $G_1/G_1(g)H$. Il résulte de ceci l'invariance de ν par $G_1/G_1(g)H$, et donc l'invariance de μ par G_1 , ce qui permet de conclure.

II.3.- Supposons de plus G simplement connexe. Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{L} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$, et L le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ dans G .
Soient Ω une R-orbite dans $\mathfrak{g}^*$, $g \in \Omega$, $\underline{k} = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{L}$, $K_o = G(g)_o L$, $k = g|_{\underline{k}}$, $\ell = g|_{\mathfrak{L}}$, $\Omega_{K_o} = K_o \bullet k$. Notons M le groupe $G(\ell)_o\, G_1(g)\, L$.

__Lemme 6__ :

1°) Le groupe M est indépendant du choix de g dans l'image réciproque dans $\mathfrak{g}^*$ de $\tilde{G} \bullet \ell$ (et en particulier du choix de g dans Ω) .

2°) Soit $H = G_1(k)$. Alors on a : $H = G(\ell)_o\, G_1(g)$.
De plus, on a : $M = HK_o = K_oH$.

3°) Le groupe M est fermé dans G_1 .

Démonstration :

a) Remarquons tout d'abord que, si g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{G}^*$ et la restriction de g_1 à $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est égale à la restriction de g_2 à $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, alors on a pour tout $x \in \tilde{G}$, $x \bullet g_1 - g_1 = x \bullet g_2 - g_2$. Il en résulte l'égalité $G_1(g_1) = G_1(g_2)$, ce qui permet de prouver le 1°) du lemme.

b) D'après le lemme 4, on a : $G(\ell)_o \bullet g = g + \underline{k}^{\perp}$ (T.12). On en déduit l'égalité $G_1(k) = G(\ell)_o\, G_1(g)$. On peut alors conclure pour le 2°) du lemme.

c) L'orbite Ω_{K_o} est égale à $L \bullet k$ (puisque $K_o = G(g)_o\, L$). Comme l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est algébrique (T.16), on en déduit que Ω_{K_o} est localement fermée dans $\underline{k}^*$. Le stabilisateur de Ω_{K_o} dans G_1 est alors fermé. Il est égal à $G_1(k)K_o$ (= M d'après 2°)). Ceci montre le 3°) du lemme. <u>cqfd</u>

D'après le lemme précédent le sous-groupe M est fermé dans G_1. De plus il contient le sous-groupe L. Le quotient G_1/M est donc un groupe et de plus il existe une mesure de Radon positive G_1-invariante sur G_1/M, unique à une constante positive près.

Soient dX et dY des mesures de Haar respectivement sur $\mathcal{G}$ et $\underline{k}$ et $d\zeta$ la mesure de Haar sur $\underline{k}^{\perp}$ (T.12) duale (T.19) de la mesure quotient dX/dY.

On note $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ la mesure canonique sur Ω_{K_o} (T.14).

Dans ces conditions, on a le lemme suivant :

<u>Lemme 7</u> : Soit $d\tilde{\mu}$ une mesure de Radon, positive, G_1-invariante sur G_1/M. Il existe alors une seule mesure de Radon $d\beta$, positive, G-invariante sur Ω telle qu'on ait pour toute fonction θ $d\beta$-intégrable sur Ω :

$$\int_{\Omega} \theta(g')\, d\beta(g') = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \theta(x \bullet (k'' + \sigma))\, d\zeta(\sigma)$$

(où k'' est un représentant de k' dans $\mathcal{G}^*$).

<u>**Démonstration**</u> :

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 5.1.5 de [Kh, 1] en remplaçant le groupe $\mathfrak{g}$ de [Kh, 1] par G_1. On va la rappeler brièvement. D'après le lemme 4, on a : $H \bullet g = g + \underline{k}^{\perp}$. On identifie alors $H/G_1(g)$ et $g + \underline{k}^{\perp}$. Soient $d\mu_{G_1(g)}$ et $d\mu_H$ des mesures de Haar à gauche sur $G_1(g)$ et H respectivement. D'après [Be, II.4.5] , $d\mu_{H,G_1(g)}$ est une mesure H-invariante sur $H/G_1(g)$ (ceci découle du fait que H opère par translation dans $g + \underline{k}^{\perp}$). Les deux mesures suivantes ν_1 et ν_2 sont invariantes par H :

$$\nu_1 : \varphi \mapsto \int_{\underline{k}^{\perp}} \varphi(g + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

$$\nu_2 : \varphi \mapsto \int_{H/G_1(g)} \varphi(x \bullet g)\, d\mu_{H/G_1(g)}(\dot{x}) \ .$$

Elles sont donc proportionnelles. Pour $d\mu_{G_1(g)}$ fixée, on peut donc choisir $d\mu_H$ telle que :

$$\int_{\underline{k}^{\perp}} \varphi(g + \sigma)\, d\zeta(\sigma) = \int_{H/G_1(g)} \varphi(x \bullet g)\, d\mu_{H,G_1(g)}(\dot{x})$$

pour toutes les fonctions φ $d\zeta$-intégrables sur $g + \underline{k}^{\perp}$.
D'après le lemme 5, $G_1/G_1(g)$ possède une mesure G_1-invariante. D'après [Be, II.4.6], G_1/H possède une mesure G_1-invariante. Puisque G_1/M possède une mesure G_1-invariante, $M/G_1(g)$ et M/H possèdent des mesures M-invariantes. Utilisant $M = HK_o = K_oH$ (lemme 6) , on peut identifier M/H et $K_o/K_o(k)$. D'autre part on peut identifier $K_o/K_o(k)$ et Ω_{K_o} . On peut choisir dans ces conditions une mesure de Haar à gauche $d\mu_M$ sur M telle que $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ soit l'image de $d\mu_{M,H}$ par l'isomorphisme qui identifie M/H et Ω_{K_o} . De ces conditions, si $d\mu_{M,G_1(g)}$ est la mesure induite par $d\mu_M$ et $d\mu_{G_1(g)}$ sur $M/G_1(g)$, on a l'égalité suivante :

$$(1) \qquad \int_{M/G_1(g)} \Psi(x \bullet g)\, d\mu_{M,G_1(g)}(\dot{x}) = \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \Psi(k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

pour toute fonction Ψ définie sur $M \bullet g$ et telle que $(x \mapsto \Psi(x \bullet g))$ soit $d\mu_{M,G_1(g)}$ - intégrable sur $M/G_1(g)$ (où k" est un représentant de k' dans $\mathfrak{g}^*$) . D'après ce qui précède on a une mesure M-invariante $d\mu_{M,G_1(g)}$ sur $M/G_1(g)$. Par hypothèse, on a une mesure $d\tilde{\mu}$ sur G_1/M invariante par G_1 . Il existe donc une seule mesure de Haar à gauche $d\mu_{G_1}$ sur G_1 de telle sorte que la mesure $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ sur $G_1/G_1(g)$ vérifie la condition suivante :

$$(2) \quad \int_{G_1/G_1(g)} \alpha(x)\, d\mu_{G_1,G_1(g)}(\dot{x}) = \int_{G_1/M} \left(\int_{M/G_1(g)} \alpha(xy)\, d\mu_{M,G_1(g)}(\dot{y})\right) d\tilde{\mu}(\dot{x})$$

pour toute fonction α sur $G_1/G_1(g)$ $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ - intégrable. On identifie Ω et $G_1/G_1(g)$, et on note $d\beta$ l'image de la mesure $d\mu_{G_1,G_1(g)}$ sur Ω . En utilisant (1) et (2), on voit que l'on peut conclure. cqfd

§ III.- CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES D'UN GROUPE DE LIE G [Kh, 3] .

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que V soit G-invariant, tel que l'application $X \mapsto \exp X$ soit un difféomorphisme de V sur $\exp(V)$ et tel que pour tout $X \in V$ on ait $|\mathrm{Im}(x)| < \pi$ pour toute valeur propre x de $\mathrm{ad}(X)$.

Remarquons que cette hypothèse est vérifiée en particulier avec $V = \{X \in \mathfrak{g} / \mathrm{Im}(x) < \pi$ pour toute valeur propre x de $\mathrm{ad}X\}$ si la composante neutre du centre de G_o (T.1) est simplement connexe, et en particulier si G_o est simplement connexe.

Rappelons que si $g \in \mathfrak{g}^*$, on note $G(g)$ le stabilisateur de g dans G , $\mathfrak{g}(g)$ l'algèbre de Lie de $G(g)$, $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ le groupe symplectique associé à la forme bilinéaire induite par g (T.15), $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$, le groupe métaplectique associé à $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ si $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$ et $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)) = \{\pm 1\}$ si $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) = \{0\}$, $G(g)^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments (x,m) dans $G(g) \times Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ tel que l'image de x et l'image de m dans

$Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ soient égales. Le groupe $G(g)^{\mathfrak{g}}$ est un revêtement à deux feuillets de $G(g)$. On note p la projection naturelle de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur $G(g)$, et ε l'élément non trivial du noyau de p. On dit que g est admissible s'il existe un caractère unitaire χ_g de $G(g)_o^{\mathfrak{g}} = p^{-1}(G(g)_o)$ de différentielle $ig|_{\mathfrak{g}(g)}$ et tel que $\chi_g(\varepsilon) = -1$. On note $X_G(g)$ (resp $X_G^{irr}(g)$) l'ensemble des classes de représentations unitaires (resp. unitaires irréductibles) τ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ telles que la restriction de τ à $G(g)_o^{\mathfrak{g}}$ soit un multiple de χ_g. On dit que g est bien polarisable s'il existe une polarisation résoluble dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (T.12) en g vérifiant la condition de Pukanszky (complexe) (cf. [Du, 2] pour ces notions).

Au couple (g,τ) où g est admissible et bien polarisable et $\tau \in X_G(g)$, M. DUFLO associe une classe de représentations unitaires de G notée $T_{g,\tau}^G$ (cf [Du, 2]). En particulier $\tau \in X_G^{irr}(g)$ si et seulement si $T_{g,\tau}^G$ est irréductible.

Pour (g,τ) fixé, où g est une forme admissible et bien polarisable et $\tau \in X_G^{irr}(g)$, on note $T = T_{g,\tau}^G$. On note $\Omega = G \cdot g$, $d\beta_\Omega$ la mesure canonique sur Ω (T.14).

Dans ces conditions, on a le résultat suivant :

__Théorème__ : Supposons $\dim \tau < +\infty$ et $\mathfrak{g}(g)$ (T.11) nilpotente $(g \in \Omega)$. Alors la représentation T a un caractère distribution si et seulement si l'orbite Ω est tempérée. Dans ce cas, on a l'identité suivante :

$$(*) \qquad \operatorname{tr} T(\Psi) = \dim(\tau) \int_\Omega (\Psi j^{-1})^\wedge(g)\, d\beta_\Omega(g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)$ (T.5, T.6), où j est la fonction définie dans l'introduction.

__Démonstration__ :

Ce théorème est démontré essentiellement dans [Kh, 3]. En effet dans [Kh,3], on démontre que si l'orbite Ω est tempérée et en plus l'orbite Ω est fermée, alors T a un caractère distribution et la formule (*) est vraie. Ce résultat reste vrai sans l'hypothèse Ω fermée. Cette dernière a été posée pour appliquer le lemme 6 de [Du, 2] à un idéal contenant l'algèbre dérivée. L'hypothèse Ω fermée dans ce lemme est utilisée pour pouvoir déduire, avec les notations de [Du, 2], $B(f_1) \cdot f = f + \underline{k}^{\perp}$, or cette égalité est toujours vraie pour un idéal contenant l'algèbre dérivée d'après le lemme 4 du § I., et donc le lemme 6 de [Du, 2] est vrai pour un tel idéal. La même démonstration que [Kh, 2] et [Kh, 3] permet alors de conclure que si l'orbite Ω est tempérée alors T a un caractère distribution et (*) est vraie. Réciproquement, supposons que T a un caractère distribution. Les mêmes démonstrations que ([Kh, 2], p. 352) et ([Kh, 3], p. 69) permettent de prouver qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel qu'on ait :

$$\int_{\Omega} \hat{\Psi}(g)\, d\beta_{\Omega}(g) < +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} T(\Psi j) = \dim(\tau) \int_{\Omega} \hat{\Psi}(g)\, d\beta_{\Omega}(g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(U)$. En utilisant le théorème 7.2 de [Di, Ma], on montre qu'alors :

$$\int_{\Omega} \hat{\Psi}(g)\, d\beta_{\Omega}(g) < +\infty$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$, et donc $\int_{\Omega} \theta(g)\, d\beta_{\Omega}(g) < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. D'après le théorème du graphe fermé, l'application $(\theta \mapsto \theta|_{\Omega})$ est continue de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ dans $L^1(\Omega, d\beta_{\Omega})$, et donc l'application $(\theta \mapsto \int_{\Omega} \theta(g)\, d\beta_{\Omega}(g))$ est une distribution tempérée. D'après ([Sc], p. 242), l'orbite Ω est alors tempérée.

<u>cqfd</u>

§ IV.- REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES ET CARACTÈRES D'UN GROUPE DE LIE G (d'après L. PUKANSZKY).

Soient G un groupe de Lie connexe, $\hat{G}_{norm}$ l'espace des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de G (T.4), $\mathrm{Prim}(G)$ l'espace des idéaux primitifs de la C*-algèbre de G (T.8) . D'après [Pu, 5] , l'application $T \mapsto \ker T$ de $\widehat{G}_{norm}$ dans Prim(G) est une bijection.

On sait aussi que $\widehat{G}_{norm}$ est en bijection canonique avec l'ensemble des caractères de G définis à une constante multiplicative strictement positive près (cf [Di]).

Supposons de plus G simplement connexe. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soient $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie algébrique choisie comme en (T.16) telle que $\mathfrak{g}$ soit une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$, $[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et $\tilde{G}$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors G est fermé dans $\tilde{G}$ et $[G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ (T.16). Soient $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{L} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$, N et L les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{L}$ respectivement. Alors L est un sous-groupe fermé invariant connexe de type I dans G et dans $\tilde{G}$ ([Pu, 5]). Soit E une $\tilde{G}$-orbite dans $\hat{L}$. Pukanszky définit un sous-groupe fermé K(E) de G contenant L qui a en particulier la propriété que tout $\lambda \in E$ s'étend en une représentation irréductible ρ de K(E) telle que $\mathrm{Ind}_{K(E)\nearrow G}\, \rho$ soit une représentation factorielle de G ([Pu, 5], p. 86).

Posons $F(E) = \{\rho \in \widehat{K(E)} \mid \rho|_L \in E\}$ et $U = \bigcup_E F(E)$. Il existe alors une relation d'équivalence Σ sur U telle que $\rho_1 \Sigma \rho_2$ si et seulement s'il existe $E \in \hat{L}/\tilde{G}$ telle que ρ_1 et $\rho_2 \in F(E)$ et $\rho_2 \in \overline{G \cdot \rho_1}$ (adhérence dans F(E) qui est un sous-espace localement compact séparé dans $\widehat{K(E)}$). Soit $\rho \in U$, on note $J(\rho) = \ker(\mathrm{Ind}\, \rho)$ dans Prim(G) (T.7, T.8). L'application $\rho \mapsto J(\rho)$ est surjective de U dans Prim(G), et on a $J(\rho_1) = J(\rho_2)$ si et seulement si $\rho_1 \Sigma \rho_2$. Soit $J \in \mathrm{Prim}(G)$, on pose $\mathcal{K}(J) = \{\rho \in U \mid J(\rho) = J\}$. C'est une Σ-orbite dans U. Soit $E = E(J)$ la $\tilde{G}$-orbite dans $\hat{L}$ associée à cette Σ-orbite. Le sous-groupe K(E) sera noté K(J). Alors $\mathcal{K}(J)$ est un sous-espace localement compact dans $\widehat{K(J)}$ ($\mathcal{K}(J) \subset F(J) = F(E)$). De plus $\mathcal{K}(J)$ est invariant sous l'action de G, et porte une mesure de Radon, positive, G-invariante μ unique à une constante > 0 près ([Pu, 5], p. 106).

D'après [Pu, 5], il existe une sous-algèbre B involutive, dense dans $C^*(G)$, contenant $\mathfrak{X}(G)$ (T.5) et vérifiant ce qui suit. Si T est une représentation factorielle normale de G, l'ensemble des opérateurs de la forme $T(f)$ ($f \in B^+ = B \cap C^*(G)^+$) de trace finie engendre l'algèbre de Von Neumann $R(T)$ (T.7). De plus, si t est une trace (normale fidèle semi-finie) sur $R(T)$ et $J = \ker T$ (T.7), on peut normaliser la mesure μ sur $\mathcal{X}(J)$ de telle sorte que l'on ait :

$$t(T(f)) = \int_{\mathcal{X}(J)} \operatorname{tr}(\rho(f|_{K(J)}))\, d\mu(\rho)$$

pour tout $f \in \mathfrak{X}(G)^+ = \mathfrak{X}(G) \cap C^*(G)^+$.

§ V.- CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE CONNEXE.

Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X_G^{irr}(g)$ et $T_{g,\tau}^G$ la représentation irréductible associée par M. DUFLO à (g,τ) (cf. III). On note $J = \ker T_{g,\tau}^G$ (T.7) et $T = \mathcal{T}_{g,\tau}$ la classe de quasi-équivalence de représentations factorielles normales associées à J par la bijection de Pukanszky (cf IV), et t une trace (normale fidèle semi-finie) sur $R(T)$ (T.7).

V.1.- R-orbite associée à T

On note Ω la R-orbite contenant g dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ (cf II).

Proposition et Définition : La R-orbite Ω ne dépend que de T. Plus précisément si (g,τ) et (g',τ') sont deux couples tels que $\mathcal{T}_{g,\tau} = \mathcal{T}_{g',\tau'}$ $(= T)$, alors g et g' sont dans la même R-orbite. Cette R-orbite est appelée la R-orbite associée à T.

On démontrera la proposition plus bas (cf V.3) en même temps que d'autres résultats nécessaires pour la suite.

V.2.- Supposons de plus G simplement connexe. On utilise dans la suite les notations de IV. On pose $E = E(J)$, $K = K(J)$, $F = F(J)$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}(J)$. Soient $\underline{k}$ l'algèbre de Lie de K, et $\underline{k}^*$ le dual de $\underline{k}$. On note ℓ la restriction de g à $\mathscr{L}$ et k la restriction de g à $\underline{k}$. D'après ([Kh, 4], IV.3.3), on peut associer à τ une représentation $\sigma \in X_L^{irr}(\ell)$ et une représentation $\tau_K \in X_K^{irr}(k)$ de telle sorte que $E = \tilde{G} \cdot T^L_{\ell,\sigma}$ où $T^L_{\ell,\sigma}$ est la représentation irréductible de L associée à (ℓ,σ), de plus si $T^K_{k,\tau}$ est la représentation irréductible de K associée à (k, τ_K), on a $T^K_{k,\tau_K}\big|_L = T^L_{\ell,\sigma}$, et les représentations $T^G_{g,\tau}$ et $\mathrm{Ind}_{K\uparrow G}(T^K_{k,\tau_k})$ ont même noyau dans $C^*(G)$ (égal à J), et donc T^K_{k,τ_K} est dans $\mathscr{A}$. Soient K_o la composante connexe de l'unité dans K et $F_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ; \; \rho_o|_L \in E\}$. De la même façon que pour F, on montre que F_o est un sous-espace localement compact séparé dans $\hat{K}_o$, et de plus on a : $F_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ;$ il existe $\rho \in F$ pour lequel $\rho|_{K_o} = \rho_o\}$ (cf [Pu, 5]).

Posons $\mathscr{A}_o = \{\rho_o \in \hat{K}_o \; ;$ il existe $\rho \in \mathscr{A}$ tel que $\rho|_{K_o} = \rho_o\}$.

__Lemme 8__ : Pour tout $\rho_o \in \mathscr{A}_o$, on a : $\mathscr{A}_o = \overline{G \cdot \rho_o}$ (l'adhérence de $G \cdot \rho_o$ dans F_o).

__Démonstration du lemme 8__ :

Il est facile de voir que si deux éléments ρ et ρ' de F ont la même restriction à K_o, il existe un caractère unitaire $\eta \in X(K/K_o)$ (T.13) tel que $\rho' = \eta\rho$. Ceci prouve que l'application $\rho \mapsto \rho_o = \rho|_{K_o}$ est une application propre de F sur F_o. Par conséquent $\mathscr{A}_o$ est fermé dans F_o et $\mathscr{A}_o = \overline{G \cdot \rho_o}$ puisque $\mathscr{A}$ est fermé dans F et $\mathscr{A} = \overline{G \cdot \rho}$. <u>cqfd</u>

__Lemme 9__ : Pour tout $\rho_o \in \mathscr{A}_o$, on a $\mathscr{A}_o = G_1 \cdot \rho_o$ (où G_1 est le groupe défini en II.1).

__Démonstration du lemme 9__ :

(1) Rappelons d'abord que, si H est le groupe des points réels d'un groupe algébrique agissant rationnellement dans l'ensemble X des points réels d'une variété (ie $(h,x) \mapsto h \cdot x$ est un morphisme de $H \times X$ sur X), chaque H-orbite dans X est localement fermée dans X et son bord est réunion d'orbites de dimension strictement plus petite (cf [Bo]).

(ii) Soit $\mathcal{G} = \tilde{G} \times \Sigma$ où Σ est l'ensemble des formes linéaires sur $\underline{k}$ nulles sur $\mathcal{L}$. Ce groupe opère dans $\hat{K}_o$. D'après ([Pu, 5]), F_o est égal à $\mathcal{G} \bullet \rho_o$ pour tout $\rho_o \in F_o$, et de plus F_o est homéomorphe à $\mathcal{G} / \mathcal{G}(\rho_o)$. D'après ([Kh, 4], IV, corollaire), on en déduit que :

$$\rho_o = T^{K_o}_{k', \tau'_{K_o}} \quad \text{où } k' \in \underline{k}^* \ , \ \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k') \ .$$

De plus, si $\ell' = k'|_{\mathcal{L}}$ et $\sigma' = \tau'_{K_o}\Big|_{L(\ell')\mathcal{K}}$, le couple (ℓ', σ') est conjugué par un élément de $\tilde{G}$ du couple (ℓ, σ) .

Si $(x,v) \in \mathcal{G}$ et $\tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k')$, on définit $(x,v) \bullet \tau'_{K_o}$ par $((x,v)\ \tau'_{K_o})(\tilde{h}) = \chi_v(h)\ \tau'_{K_o}(x^{-1}\ \tilde{h}\ x)$ pour $\tilde{h} \in K(k')^{\underline{k}}$ où χ_v est la restriction du caractère unitaire de K_o dont la différentielle est égale à iv. Remarquons qu'alors $(x,v) \bullet \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(x \bullet k' + v)$. Si de plus $(x,v) \in \mathcal{G}(k')$, $(x,v)\ \tau'_{K_o} \in X^{irr}_{K_o}(k')$. On notera alors $\mathcal{G}(k')_{\tau'_{K_o}}$ le stabilisateur de τ'_{K_o} dans $\mathcal{G}(k')$. On déduit de ce qui précède que $\mathcal{G}(\rho_o)$ est égal à $\mathcal{G}(k')_{\tau'_{K_o}}\ K_o$.

D'après ([Kh, 4], IV), K_o est égal à $G(g')_o L$ où g' est une forme linéaire sur $\mathcal{G}$ prolongeant k' . Utilisant le lemme III.8.1. et III.1.3. de [Kh, 4] , on en déduit le fait que $\mathcal{G}(k')_{\tau'_{K_o}}$ est égal à $\mathcal{G}(k')_{\sigma'}$, et que $\mathcal{G}(k')_{\sigma'}$ est d'indice fini dans $\mathcal{G}(k')$, et que $[\ \mathcal{G}(k') : \mathcal{G}(k')_{\sigma'}]$ est indépendant du choix de ρ_o dans F_o . Il en résulte que $\mathcal{G}(\rho_o) = L\ \mathcal{G}(k')_{\sigma'}$ et $[\ \mathcal{G}(k')L : \mathcal{G}(\rho_o)] < +\infty$.

(iii) D'après i), l'orbite $\tilde{G} \bullet \ell'\ (= \tilde{G} \bullet \ell)$ est localement fermée dans $\mathcal{L}^*$, et par conséquent $\mathcal{G} \bullet k'$ est localement fermée dans $\underline{k}^*$ (c'est l'image réciproque de $\tilde{G} \bullet \ell$ par l'application $k \mapsto k|_{\mathcal{L}}$ de $\underline{k}^*$ dans $\mathcal{L}^*$) . L'orbite $\mathcal{G} \bullet k'$ est alors homéomorphe à $\mathcal{G} / \mathcal{G}(k')$. D'autre part d'après i) l'orbite $\tilde{G} \bullet k'$ est localement fermée dans $\underline{k}^*$, et par conséquent elle est localement fermée dans $\mathcal{G} \bullet k'$. Vu que les $\tilde{G}$-orbites dans $\mathcal{G} \bullet k'$ ont toutes la même dimension, on en déduit d'après i) que l'orbite $\tilde{G} \bullet k'$ est fermée dans $\mathcal{G} \bullet k'$. Il en résulte le fait que le groupe $\tilde{G}\ \mathcal{G}(k')$ est fermé dans $\mathcal{G}$. D'après ii), le groupe $\tilde{G}\,\mathcal{G}(\rho_o)$ est égal à $\tilde{G}\,\mathcal{G}(k')_{\sigma'}$, et il est d'indice fini dans $\tilde{G}\,\mathcal{G}(k')$. Le groupe $\tilde{G}\,\mathcal{G}(\rho_o)$ est ouvert dans $\tilde{G}\,\mathcal{G}(k')$ et par conséquent il est fermé dans $\tilde{G}\,\mathcal{G}(k')$. Le groupe $\tilde{G}\,\mathcal{G}(\rho_o)$ est donc fermé dans $\mathcal{G}$ et par conséquent $\tilde{G}\,\mathcal{G}(\rho_o)/\,\mathcal{G}(\rho_o)$ est fermé dans $\mathcal{G}/\,\mathcal{G}(\rho_o)$. Ceci permet de conlure que l'orbite $\tilde{G}\cdot\rho_o$ est fermée dans F_o. Comme $\mathcal{R}_o = \overline{G\cdot\rho_o}$ (d'après le lemme 8), et on a : $G\cdot\rho_o \subset \tilde{G}\cdot\rho_o \subset F_o$ (pour tout $\rho_o \in \mathcal{R}_o$), le fait que $\tilde{G}\cdot\rho_o$ est fermée dans F_o permet de conclure que $\mathcal{R}_o$ est inclus dans $\tilde{G}\cdot\rho_o$ (pour tout $\rho_o \in \mathcal{R}_o$).

(iv) On pose $G_1' = \overline{G\,\tilde{G}(\rho_o)}$. D'après ce qui précède, on peut en déduire l'égalité $\mathcal{R}_o = G_1'\cdot\rho_o$ ($\rho_o \in \mathcal{R}_o$). On pose $\tau_{K_o} = \tau_K\big|_{K_o(k)^{\underline{k}}}$ et $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ la représentation associée à (k, τ_{K_o}). Il est facile de voir que :

$$T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} = T^{K}_{k,\tau_K}\Big|_{K_o} \qquad \text{et} \qquad T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} \in \mathcal{R}_o \ .$$

Comme dans iii), on montre que $\tilde{G}(\rho_o) = \tilde{G}(k)_\sigma L$ et que $[\tilde{G}(k)L : \tilde{G}(\rho_o)] < +\infty$. D'après le lemme 4, $\tilde{G}(k)$ est égal à $G(\ell)_o\,\tilde{G}(g)$. Ceci entraîne l'égalité $\tilde{G}(k)G = \tilde{G}(g)G$, et la relation $[\tilde{G}(g)G : \tilde{G}(\rho_o)G] < +\infty$. Utilisant $G_1' = \overline{\tilde{G}(\rho_o)G}$ et $G_1'' = \overline{\tilde{G}(g)G}$, on en déduit alors $[G_1'' : G_1'] < +\infty$. Rappelons que par définition G_1 est la composante connexe de l'élément neutre de G_1''. On peut alors en déduire que G_1 est aussi la composante connexe de l'unité dans G_1'. Utilisant la connexité de $\mathcal{R}_o$, on peut alors conclure que $\mathcal{R}_o = G_1\cdot\rho_o$. Ceci termine la démonstration du lemme 9. <u>cqfd</u>

V.3.- <u>Démonstration de la proposition V.1.</u>

Supposons d'abord que G est simplement connexe.

Soient deux couples (g,τ) et $g',\tau')$ dans X^{irr}_G tels que $\ker T^G_{g,\tau} = \ker T^G_{g',\tau'}$. Comme dans V.2, on associe à (g,τ) et (g',τ') respectivement deux couples (k, τ_K) et $(k', \tau'_K) \in X^{irr}_K$ tels que :

$$\ker(T^G_{g,\tau}) = \ker[\mathrm{ind}(T^K_{k,\tau_K})] \quad \text{et} \quad \ker(T^G_{g',\tau'}) = \ker[\mathrm{ind}(T^K_{k',\tau'_K})] \ .$$

Ceci permet de prouver que T^K_{k,τ_K} et T^K_{k',τ'_K} sont des éléments de $\mathcal{A}$, et donc $T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ et $T^{K_o}_{k',\tau'_{K_o}}$ sont des éléments correspondants dans $\mathcal{A}_o$, où τ_{K_o} et τ'_{K_o} sont les restrictions de τ_K et τ'_{K_o} respectivement à $K_o(k)^{\underline{k}}$ et $K(k')^{\underline{k}}$. D'après le lemme 9, il existe alors un élément $x \in G_1$ tel que $x \cdot T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}} = T^{K_o}_{k',\tau'_{K_o}}$. Quitte à multiplier x par un élément de K_o, ceci entraîne l'égalité $x \cdot k = k'$. Utilisant le lemme 4, on obtient $x \cdot g = g'$, quitte à multiplier x par un élément de $G(\ell)_o$.
Utilisant $\Omega = G_1 \cdot g$ (cf. II.1) on peut alors conclure que g et g' sont dans la même R-orbite Ω, ce qui termine la démonstration de la proposition de V.1, dans le cas où G est simplement connexe.

Revenons au cas où G est connexe (mais pas nécessairement simplement connexe). Soient G' le revêtement simplement connexe de G, et Π la projection de G' sur G. Soient $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}'$ les représentations induites sur $G'(g)^{\mathcal{G}}$ et $G'(g')^{\mathcal{G}}$ par τ et τ'. On a alors $T^{G'}_{g,\bar{\tau}} = T^G_{g,\tau} \circ \Pi$ et $T^{G'}_{g',\bar{\tau}'} = T^G_{g',\tau'} \circ \Pi$. Il est facile de voir qu'alors $\ker T^{G'}_{g',\bar{\tau}'} = \ker T^{G'}_{g,\bar{\tau}}$ puisque $\ker T^G_{g',\tau'} = \ker T^G_{g,\tau}$.
D'après le cas précédent, on en déduit que g et g' sont dans la même R-orbite. <u>cqfd</u>

V.4.- Soient G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, T une représentation factorielle normale de G telle que $\operatorname{Ker} T = \ker T^G_{g,\tau}$ où g est une forme linéaire sur $\mathcal{G}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X^{irr}_G(g)$ et $T^G_{g,\tau}$ la représentation irréductible de G associée à (g,τ) (cf. III). Soient t une trace sur $R(T) = T(G)''$ (T.7), Ω la R-orbite associée à T (cf. V.1), $d\beta$ une mesure de Radon positive G-invariante sur Ω.

Théorème V.4. : Supposons $\mathcal{G}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$.
Alors la R-orbite Ω est tempérée si et seulement si la représentation T a un caractère distribution relativement à $R(T)$. Dans ce cas si t est une trace

fixée, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une normalisation de $d\beta$ sur Ω tels que l'on ait :

(*) $$t(T(\Psi)) = \int_\Omega (\Psi j^{-1})^\wedge \, d\beta$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V_\varepsilon)$ (T.5, T.6) où V_ε est le voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ défini en I.2.

Démonstration du théorème V.4. :

Supposons de plus G simplement connexe. On choisit $V = V_{2\varepsilon}$ de telle sorte que le lemme I.2 soit vrai pour V et $2\varepsilon < \pi$. Dans ce cas l'application $X \mapsto \exp X$ est un difféomorphisme de V sur $\exp V$. A un élément $\Psi \in \mathcal{D}(V)$, on associe $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)$ défini comme suit :

$$\varphi(\exp X) = \Psi(X) \left(\det\left(\frac{1-e^{-\mathrm{ad}X}}{\mathrm{ad}\, X}\right)\right)^{-1} \qquad (X \in V).$$

Soit dX une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}$, et soit $d\mu_G$ la mesure de Haar à gauche correspondante (T.10). On a alors $T(\varphi) = T(\Psi)$ (T.6).

On note $\mathcal{D}(\mathfrak{g})^+$ l'espace des fonctions $\Psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ telles que $\Pi(\Psi)$ soit un opérateur positif pour toute représentation unitaire continue Π de G (T.6), et on note $\mathcal{D}(V)^+ = \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{D}(\mathfrak{g})^+$. Il est alors facile de voir que si $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$, la fonction φ associée à Ψ est dans $\mathcal{D}(\exp V)^+ = \mathcal{D}(\exp V) \cap C^*(G)^+$.

On utilise dans la suite les notations de V.2. D'après Pukanszky (cf. IV), il existe une mesure de Radon $d\mu$, positive, G-invariante sur $\mathcal{X}$ et telle que :

(1) $$t(T(\varphi)) = \int_{\mathcal{X}} \mathrm{tr}(\rho(\varphi|_K)) \, d\mu(\rho)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^+$.

L'application $\rho \mapsto \rho_o = \rho|_{K_o}$ est une surjection continue de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{X}_o$ et son noyau est un sous-groupe fermé du groupe compact $X(K/K_o)$ (T.13) qu'on notera X'. On peut identifier $\mathcal{X}/X'$ et $\mathcal{X}_o$, et si on choisit une mesure de masse totale 1 sur X', il existe alors une mesure de Radon $d\mu_o$ sur $\mathcal{X}_o$

positive et G-invariante telle que :

(2) $$\int_{\mathcal{R}} \alpha(\rho)\, d\mu(\rho) = \int_{\mathcal{R}_o} \left(\int_{X'} \alpha(\chi\, \rho)\, d\chi\right) d\mu_o(\rho_o)$$

pour toute fonction α sur $\mathcal{R}$ $d\mu$-intégrable.

Utilisant la relation $K_o = G(g)_o L \subset K \subset G(g)L$ (cf. [Kh, 4], IV) et le lemme 2, on voit qu'alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)$, la restriction $\varphi|_K$ de φ à K est à support dans $\exp(V) \cap K = \exp(V \cap \underline{k})$. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{R}$, $\rho(\varphi|_K) = \rho_o(\varphi|_{K_o})$. En utilisant (1) et (2), on trouve :

(3) $$t(T(\varphi)) = \int_{\mathcal{R}_o} tr(\rho_o(\varphi|_{K_o})\, d\mu_o(\rho_o)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^+$.

Soit $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ l'élément de $\mathcal{R}_o$ défini en V.2 et V.3. D'après le lemme 9, $\mathcal{R}_o$ est égal à $G_1 \bullet \rho_o$ et il est homéomorphe à $G_1/G_1(\rho_o)$. En identifiant $\mathcal{R}_o$ et $G_1/G_1(\rho_o)$, on obtient à partir de (3) la relation suivante :

(4) $$t(T(\varphi)) = \int_{G_1/G_1(\rho_o)} tr(x \bullet \rho_o(\varphi|_{K_o}))\, d\mu_o(\dot{x}) \quad .$$

Notons $M' = G_1(\rho_o)$. De la même façon que dans la démonstration du lemme 9, on montre que $M' = G_1(k)_\sigma L$ et $G_1(k)_\sigma$ est d'indice fini dans $G_1(k)$. Soit M le groupe défini dans le lemme 6. On voit qu'alors $[M : M'] < +\infty$, et de plus il est facile de voir que $[M : M']$ est indépendant du choix de ρ_o dans $\mathcal{R}_o$.

Soient dY une mesure de Haar sur $\underline{k}$ et $d\mu_{K_o}$ la mesure de Haar à gauche correspondante sur K_o (T.10). Pour $x \in \tilde{G}$, on note φ^x et Ψ^x les fonctions définies sur G et $\mathcal{G}$ respectivement par :

$$\varphi^x(y) = \Delta^{-1}(x)\, \varphi(xy\, x^{-1}) \quad \text{et} \quad \Psi^x(Y) = \Delta^{-1}(x)\, \Psi(x \bullet Y)$$

où Δ est définie sur $\tilde{G}$ par $d(x \bullet Z) = \Delta(x)\, dZ$ pour une mesure de Haar dZ sur $\tilde{\mathcal{G}}$. Utilisant le fait que $\varphi|_{K_o}$ est à support dans $\exp(\underline{k} \cap V)$ et l'invariance de $\underline{k}$ et V par $\tilde{G}$, on voit qu'alors $\varphi^x|_{K_o}$ est à support dans $\exp(\underline{k} \cap V)$ et de plus $\Psi^x|_{\underline{k}}$ est la fonction associée à $\varphi^x|_{K_o}$ dans

$\mathcal{D}(V \cap \underline{k})$. D'après (4) on obtient alors la relation suivante :

(5) $$t(T(\varphi)) = \int_{G_1/M'} tr(\rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}))\, d\mu_o(\dot{x}) \quad .$$

Ayant remarqué que $[M : M'] < + \infty$, si on munit le groupe M/M' de la mesure de masse 1 en tout point, on peut associer à $d\mu_o$ une mesure de Radon $d\tilde{\mu}$, positive, G-invariante sur G_1/M et telle que :

(6) $$\int_{G_1/M'} \theta(\dot{x})\, d\mu_o(\dot{x}) = \int_{G_1/M} \left(\int_{M/M'} \theta(x\, \dot{y})\, d\dot{y}\right) d\tilde{\mu}(\dot{x})$$

pour toute fonction θ $d\mu_o$-intégrable sur G_1/M' .

Notons $\Omega_{K_o} = K_o \bullet k$, $d\beta_{\Omega_{K_o}}$ la mesure canonique sur Ω_{K_o} (T.14) .

Les mesures de Haar dX et dY respectivement sur $\mathfrak{g}$ et $\underline{k}$ induisent une mesure dX/dY sur $\mathfrak{g}/\underline{k}$. On note $d\zeta$ la mesure duale de cette mesure sur $\underline{k}^{\perp}$ (T.12, T.19).

Dans ces conditions, d'après le lemme 7, à la mesure $d\tilde{\mu}$ on peut associer une mesure de Radon positive et G-invariante $d\beta$ de telle sorte que :

(7) $$\int_{\Omega} \theta(g)\, d\beta(g) = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} \theta(x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma)$$

pour toute fonction θ $d\beta$-intégrable sur Ω , où k'' est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ prolongeant k' .

Supposons Ω tempérée. L'application $(g \mapsto (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}(g))$ est alors $d\beta$-intégrable sur Ω et la formule (7) entraîne :

$$\int_{\Omega} (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}\, d\beta = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}\, (x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$.

Utilisant (6) et l'égalité précèdente, on obtient :

(8) $$\int_{\Omega} (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}\, d\beta = \frac{1}{[M:M']} \int_{G_1/M'} d\mu_o(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^{\perp}} (\Psi j^{-1})^{\wedge}(x \bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \quad .$$

D'autre part, en utilisant la relation (7), l'hypothèse Ω tempérée montre qu'alors l'orbite Ω_{K_o} est tempérée. D'après le lemme 3 l'hypothèse $\mathcal{G}(g)$ nilpotente entraîne le fait que $\underline{k}(k)$ est nilpotente. Comme on a $\rho_o = T^{K_o}_{k,\tau_{K_o}}$ et $\dim(\tau_{K_o}) < +\infty$, d'après les résultats de III, on obtient l'égalité suivante pour tout $x \in \tilde{G}$:

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{tr}(\rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}}\, (k')\, d\beta_{\Omega_{K_o}}(k')$$

où $\Psi \in \mathcal{D}(V)$, $(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}}\,(k') = \int_{\underline{k}} \Psi^x(Y)\, j_{\underline{k}}^{-1}(Y)\, e^{i<k',y>}\, dY$, et

$$j_{\underline{k}}(Y) = (\det(\frac{sh(ad_{\underline{k}} Y/2)}{ad_{\underline{k}} Y/2}))^{\frac{1}{2}} \quad (Y \in \underline{k}) \ .$$

Vu que $\underline{k}$ est un idéal dans $\mathcal{G}$, on a : $j_{\underline{k}} = j|_{\underline{k}}$. On a alors pour tout $x \in \tilde{G}$:

$$(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge(k') = \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi^x\, j^{-1})^\wedge (k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \ .$$

L'invariance de j sous l'action de $\tilde{G}$ permet alors d'obtenir :

$$(\Psi^x|_{\underline{k}}\, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge(k') = \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge (x\bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \ .$$

La formule (9) s'écrit alors :

$$\text{(10)} \quad \mathrm{tr}\, \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge (x\bullet k'' + \sigma)\, d\zeta(\sigma) \ .$$

Les formules (5) et (10) entraînent la formule suivante pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$:

$$\text{(11)} \ t(T(\Psi)) = \int_{G_1/M'} [\dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi\, j^{-1})^\wedge (x\bullet k''+\sigma)\, d\zeta(\sigma)]\, d\mu_o(\dot{x}) \ .$$

Utilisant cette formule et la formule (8) , on en déduit la formule suivante pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^+$:

$$\text{(12)} \qquad t(T(\Psi)) = \dim(\tau_{K_o})\, [M : M'] \int_\Omega (\Psi\, j^{-1})^\wedge\, d\beta \ .$$

En remarquant que les nombres $\dim(\tau_{K_o})$ et $[M : M']$ ne dépendent que de T , on peut alors normaliser $d\beta$ sur Ω de telle sorte que l'on ait :

$$(13) \qquad t(T(\Psi)) = \int_{\Omega} (\Psi\, j^{-1})^{\wedge}\, d\beta\,(g)$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^{+}$.

De plus vu que le membre de droite de (13) est fini, l'opérateur $T(\Psi)$ est alors traçable relativement à $R(T)$ pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V)^{+}$, et donc $T(\varphi)$ est alors traçable relativement à $R(T)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\exp V)^{+}$.

Soit $U = \exp V_{\varepsilon}$. Il est facile de voir qu'alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, on a $\varphi * \varphi^{*} \in \mathcal{D}(\exp V)^{+}$, et donc d'après ce qui précède l'opérateur $T(\varphi)$ est de Hilbert-Schmidt relativement à $R(T)$. D'après la proposition de ([Kh, 2], p. 361), T a un caractère distribution relativement à $R(T)$.

D'autre part, en utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma] , on peut montrer que toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\varphi_i * \varphi_i^{*}$ avec $\varphi_i \in \mathcal{D}(U)$. Soient Ψ la fonction dans $\mathcal{D}(V')$ associée à φ (où V' est égal à V_{ε}) , et Ψ_i la fonction associée à $\varphi_i * \varphi_i^{*}$ dans $\mathcal{D}(V)$. Il est clair que $\Psi_i \in \mathcal{D}(V)^{+}$ et que Ψ est une combinaison linéaire des Ψ_i . Utilisant la formule (13) on peut alors conclure que (13) est valable pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V')$.

Nous avons démontré dans ce qui précède que si la R-orbite Ω est tempérée alors T a un caractère distribution relativement à $R(T)$ et de plus pour une trace t fixée, on peut normaliser la mesure $d\beta$ sur Ω de telle sorte que la formule (*) soit satisfaite pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V')$.

Réciproquement, supposons que T a un caractère distribution relativement à $R(T)$. Soit V' un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ choisi comme plus haut. Si $\Psi \in \mathcal{D}(V')$ en utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma], on montre qu'alors Ψ est combinaison linéaire de fonctions $\Psi_i \in \mathcal{D}(V)^{+}$. Utilisant la formule (5) et le fait que T a un caractère distribution on montre qu'alors (5) est vraie pour $\Psi \in \mathcal{D}(V')$, et qu'alors pour presque tout x , $\rho_o(\Psi^{x}|\underline{k})$ est traçable. Il existe alors un voisinage V_1 de 0 dans $\underline{k}$ de telle sorte que $\rho_o(\Psi_1)$ soit traçable pour tout $\Psi_1 \in \mathcal{D}(\underline{k})$. D'après les résultats de III, Ω_{K_o} est alors tempérée et pour un voisinage V_1 de 0 dans $\underline{k}$, on a :

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi_1) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi_1 j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}} \, d\beta_{\Omega_{K_o}} .$$

Quitte à changer le voisinage V' de 0 dans $\mathfrak{g}$, il en résulte que pour $x \in G_1$ et $\Psi \in \mathscr{D}(V')$ on a la formule suivante :

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} (\Psi^x|_{\underline{k}} \, j_{\underline{k}}^{-1})^\wedge_{\underline{k}} \, d\beta_{\Omega_{K_o}} .$$

Utilisant la définition de la mesure $d\zeta$ sur $\underline{k}^\perp$, et le fait que $j_{\underline{k}} = j|_{\underline{k}}$, on en déduit la formule suivante pour $x \in G_1$ et $\Psi \in \mathscr{D}(V')$:

$$\operatorname{tr} \rho_o(\Psi^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi^x j^{-1})^\wedge(k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

En écrivant cette formule pour Ψj à la place de Ψ, on obtient :

(14) $$\operatorname{tr} \rho_o((\Psi j)^x|_{\underline{k}}) = \dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} \hat{\Psi}(x \bullet k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

Soit V'' un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel qu'on ait pour tout $\Psi \in \mathscr{D}(V'')$; $\Psi * \Psi^* \in \mathscr{D}(V')$.

Les formules (5) et (14) écrites pour $(\Psi * \Psi^*)j$ entraînent l'égalité suivante :

(15) $$\operatorname{tr}(T((\Psi * \Psi^*)j)) = \int_{G_1/M'} \Big[\dim(\tau_{K_o}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi * \Psi^*)^\wedge(x \bullet k'' + \sigma) d\zeta(\sigma)\Big] d\mu_o(\dot{x}) .$$

Remarquons que $(\Psi * \Psi^*)^\wedge = |\hat{\Psi}|^2$ et donc cette fonction est positive partout, et par conséquent en utilisant (7) pour $\theta = (\Psi * \Psi^*)^\wedge|_\Omega$ on trouve la formule suivante :

$$\int_\Omega (\Psi * \Psi^*)^\wedge \, d\beta = \int_{G_1/M} d\tilde{\mu}(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi * \Psi^*)^\wedge(x \bullet k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

La formule (6) permet alors d'obtenir :

(16) $$\int_\Omega (\Psi * \Psi^*)^\wedge \, d\beta = \frac{1}{[M:M']} \int_{G_1/M'} d\mu_o(\dot{x}) \int_{\Omega_{K_o}} d\beta_{\Omega_{K_o}}(k') \int_{\underline{k}^\perp} (\Psi * \Psi^*)^\wedge (x \bullet k'' + \sigma) \, d\zeta(\sigma) .$$

Les formules (15) et (16) montrent qu'alors :

$$\int_{\Omega} (\Psi * \Psi^*)^{\wedge} \, d\beta < +\infty$$

pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V'')$.

En utilisant le théorème 3.1 de [Di - Ma], on montre alors que pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(V'')$ $\int_{\Omega} \hat{\Psi} \, d\beta < +\infty$. Comme dans la remarque et la démonstration de III, on peut alors conclure que la R-orbite Ω est tempérée. Ceci termine la démonstration du théorème dans le cas où G est simplement connexe.

Supposons que G est connexe mais pas nécessairement simplement connexe. Soient G' le revêtement simplement connexe de G , Π la projection canonique de G' sur G , $\Gamma = \ker \Pi$ et $T' = T \circ \Pi$.

Il est facile de voir que si $\varphi \in \mathcal{K}(G')$ (T.5), la fonction $\tau(\varphi)$ définie par $\tau(\varphi)(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(x\gamma)$ est dans $\mathcal{K}(G)$. De plus, tout $\varphi \in \mathcal{K}(G)$ est de la forme $\tau(\varphi')$ avec $\varphi' \in \mathcal{K}(G')$. On peut alors en déduire que $T(\mathcal{K}(G)) = T'(\mathcal{K}(G'))$, et par conséquent que $T(C^*(G)) = T'(C^*(G))$ et $R(T) = R(T')$ (T.7) . Par conséquent la trace t est une trace associée à T et T' . De plus si $\Psi \in \mathcal{D}(V)$ et φ est la fonction associée à Ψ dans $\mathcal{D}(\exp V)$ où $\exp V \subset G'$, on a $\tau(\varphi) \in \mathcal{D}(\exp V)$ où $\exp V \subset G$. Dans ces conditions, on a $T'(\Psi) = T'(\varphi) = T(\tau(\varphi)) = T(\Psi)$ (T.6). Utilisant les résultats obtenus dans le cas simplement connexe, on peut alors conclure. <u>cqfd</u>

BIBLIOGRAPHIE

[Be] P. Bernat et Al. Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod 1972.

[Bo] A. Borel. Linear algebraic groups. Benjamin, New York 1969.

[Ch] C. Chevalley. Théorie des groupes de Lie, vol. II, groupes algébriques, Act. Sc. Ind N° 1152 Paris Hermann (1951).

[Di] J. Dixmier. Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-villars, Paris 1964.

[Di-Ma] J. Dixmier et P. Malliavin. Factorisations de fonctions et vecteurs indéfiniment différentiables. Bulletin Sciences Math. 2ème Série 102, (1978), 305-330.

[Du,1] M. Duflo. Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles. Annales de l'E.N.S., t. 3, (1970), 23-70.

[Du,2] M. Duflo. Opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie. Annales de l'E.N.S., t. 10, (1977), 265-288.

[Du,3] M. Duflo. Construction des représentations unitaires d'un groupe de Lie. Cours d'été du CIME. Cortona 1980, Liguori ed. Napoli 1982.

[DU,4] M. Duflo. Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques. Acta Mathematica, vol. 149, (1982), 153-213.

[Kh,1] M. S. Khalgui. Sur les caractères des groupes de Lie résolubles. Publication de Paris VII, vol. 2, (1978), 7-44.

[Kh,2] M. S. Khalgui. Sur les caractères des groupes de Lie à radical co-compact. Bull. Soc. Math. France, 109, (1981), 331-372.

[Kh,3] M. S. Khalgui. Caractères des groupes de Lie. Journal of Functional Analysis, 47, (1982), 64-77.

[Kh,4] M. S. Khalgui. Extensions des représentations des groupes de Lie construites par M. Duflo. Math. Annalen, 265, 343-375 (1983).

[Ki] A. A. Kirillov. Characters of unitary representations of Lie groups. Functional Analysis and its applications, vol. 2, (1968), 40-55 et vol. 3, (1969), 36-47.

[Mo] G. D. Mostov. Fully reducible subgroups of algebraic groups. Amer. J. Math., 78, (1956), 200-221.

[Pu,1] L. Pukanszky. On the characters and Plancherel formula of nilpotent Lie groups. J. of. Funct. Analysis, vol. 1, (1967), 255-280.

[Pu,2] L. Pukanszky. Characters of algebraic solvable groups. J. of. Funct. Analysis, vol. 3, (1968), 435-491.

[Pu,3] L. Pukanszky. Unitary representations of solvable Lie groups. Annales de l'E.N.S., 4 série (1971), 457-608.

[Pu,4] L. Pukanszky. Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of class of type I groups. Annales de l'E.N.S., 5 (1972), 379-396.

[Pu,5] L. Pukanszky. Characters of connected Lie groups. Acta Math. 133, (1974), 82-137.

[Pu,6] L. Pukanszky. Unitary representations of co-compact radical Lie groups. Trans. Amer. Soc. 236, 1978, 1-50.

[Ro] W. Rossmann. Kirillov's character formula for reductive Lie groups. Inv. Math., 48, (1978), 207-220.

[Sc] L. Schwartz. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HUBERT RUBENTHALER

Paramétrisation d'orbites dans les nappes de Dixmier admissibles

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 255-275

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__255_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 255-275

PARAMÉTRISATION D'ORBITES DANS LES NAPPES DE DIXMIER ADMISSIBLES

Hubert RUBENTHALER
I.R.M.A. , 7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

Résumé : Nous montrons que dans les algèbres de Lie semi-simples complexes, certaines nappes de Dixmier dites admissibles, admettent une section de leurs orbites qui est un espace affine.
Ceci généralise la section de Kostant des éléments réguliers.

Abstract: We show that in a complex semi-simple Lie algebra, suitable Dixmier sheets (so called admissible) admit a section of their orbits which is an affine space.
This is a generalization of Kostant's section of the regular elements.

1. Sous-algèbres paraboliques et espaces préhomogènes associés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, ψ une base de R fixée une fois pour toutes et θ une partie de ψ. On désigne par $\mathfrak{h}_\theta$ l'orthogonal de θ :

$$\mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h} \, , \, \alpha(X) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta\} \ .$$

Dans $\mathfrak{h}_\theta$ on distingue l'élément H^θ défini par les équations $\alpha(H^\theta) = 0$ si $\alpha \in \theta$ et $\alpha(H^\theta) = 2$ si $\alpha \in \psi - \theta$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g} \, , \, [H^\theta, X] = 2pX\} \ .$$

On vérifie trivialement que $[d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta)$, ce qui montre qu'on a ainsi obtenu une $\mathbb{Z}$-graduation.

L'espace $d_o(\theta)$, <u>que nous noterons désormais</u> ℓ_θ, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$, qui opère par l'action adjointe dans chacun des $d_i(\theta)$. Nous noterons L_θ le sous-groupe connexe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ correspondant à ℓ_θ. La représentation précédente de ℓ_θ dans chacun des $d_i(\theta)$ provient évidemment d'une représentation de L_θ dans les $d_i(\theta)$. Ces représentations sont notées $(\ell_\theta, d_i(\theta))$ et $(L_\theta, d_i(\theta))$.

On sait (Vinberg) que ces représentations sont préhomogènes, c'est-à-dire que l'action de L_θ dans $d_i(\theta)$ admet une orbite Zariski ouverte. Pour tout ce qui concerne de tels espaces préhomogènes (qui sont dits de type parabolique) nous renvoyons à [9] ou [10]. Posons

$$n_\theta^+ = \sum_{p\geq 1} d_p(\theta) \quad , \quad n_\theta^- = \sum_{p\leq -1} d_p(\theta) \ .$$

Alors $\mathfrak{p}_\theta = \ell_\theta + n_\theta^+$ est la sous-algèbre parabolique standard associée à θ.
Son radical nilpotent est n_θ^+ et son radical résoluble est $\mathfrak{r}_\theta = \mathfrak{h}_\theta + n_\theta^+$.
L algèbre ℓ_θ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_\theta$.

La représentation $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ est maximale, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Card}(\psi - \theta) = 1$ (ce résultat est classique, voir par exemple [9]).

On sait que les espaces préhomogènes intéressants (ceux qui, par exemple, possèdent une fonction zêta associée) sont les espaces préhomogènes dits réguliers, ce qui signifie que le sous-groupe d'isotropie de la grosse orbite est réductif.

Le critère important de régularité est le suivant :

THÉORÈME 1.1. ([9],[10])

Supposons que $\mathrm{Card}(\Psi - \theta) = 1$.

Alors l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est régulier si et seulement si il existe $X \in d_1(\theta)$ et $Y \in d_{-1}(\theta)$ tels que (Y, H^θ, X) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

2. Parties admissibles et sous-algèbres associées.

Ce paragraphe constitue un rappel des résultats de l'article [11] auquel nous renvoyons pour les démonstrations.

Si π est une partie de Ψ nous désignerons par $\langle\pi\rangle$ l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire d'éléments de π. On pose également $\langle\pi\rangle^+ = R^+ \cap \langle\pi\rangle$ et $\langle\pi\rangle^- = R^- \cap \langle\pi\rangle$, où R^+ et R^- sont respectivement les racines positives et négatives. Si $\gamma \in R$ on désigne par $\mathfrak{g}^\gamma$ l'espace radiciel usuel correspondant à γ et par H_γ la coracine habituelle.

Nous identifierons toute partie de Ψ à un sous-graphe du graphe de Dynkin de Ψ. Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie. Si $\alpha \in \Psi - \theta$, nous noterons Ψ_α la composante connexe de $\theta \cup \{\alpha\}$ contenant α.

Soit $\theta_\alpha = \Psi_\alpha - \{\alpha\}$. Soit $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\Psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma + \sum_{\gamma\in\langle\theta_\alpha\rangle} \mathfrak{g}^\gamma$.

Soient

$$n^+_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\langle\Psi_\alpha\rangle^+ - \langle\theta_\alpha\rangle^+} \mathfrak{g}^\gamma \ , \quad n^-_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\langle\Psi_\alpha\rangle^- - \langle\theta_\alpha\rangle^-} \mathfrak{g}^\gamma$$

On pose $d_1(\theta_\alpha) = d_1(\theta) \cap n^+_{\theta_\alpha}$ et on définit l'élément $H^\theta_\alpha \in \sum_{\gamma\in\Psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma$ par les équations $\alpha(H^\theta_\alpha) = 2$ et $\gamma(H^\theta_\alpha) = 0$ lorsque $\gamma \in \theta_\alpha$. Il est évident que $d_1(\theta_\alpha) = \{X \in n^+_{\theta_\alpha} , [H^\theta_\alpha, X] = 2X\}$.

Lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ n'est pas maximale $(\mathrm{Card}(\Psi - \theta) \neq 1)$ la décomposition de la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ s'obtient comme suit.

PROPOSITION 2.1.

a) $\mathfrak{g}(\Psi_\alpha) = n^-_{\theta_\alpha} + \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ est une algèbre de Lie semi-simple de graphe de Dynkin Ψ_α.

b) $\mathfrak{p}_{\theta_\alpha} = \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}(\Psi_\alpha)$.

c) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en idéaux simples et soit

$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ <u>la décomposition correspondante de</u> R . <u>Soit</u> I <u>l'ensemble des indices</u> i <u>tels que</u> $R_i \cap (\Psi - \theta) = \emptyset$. <u>On a alors</u>

$$\ell_\theta = \Big(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i \Big) \oplus \Big(\sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \ell_{\theta_\alpha} \Big)$$

(<u>la somme des</u> ℓ_{θ_α} <u>n'étant pas directe</u>).

d) $d_1(\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi - \theta} d_1(\theta_\alpha)$ (<u>somme directe</u>) <u>et chaque</u> $d_1(\theta_\alpha)$ <u>est</u> ℓ_θ<u>-stable et irréductible sous l'action de</u> ℓ_{θ_α} (<u>donc a fortiori irréductible sous l'action de</u> ℓ_θ) .

e) <u>Les éléments</u> H_α^θ $(\alpha \in \Psi - \theta)$ <u>forment une base de</u> $\mathfrak{h}_\theta$.

Soit $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique dans une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Nous allons nous intéresser aux parties θ de Ψ telles que pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, l'espace préhomogène $(\ell_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ soit régulier. Autrement dit, nous considérons les espaces préhomogènes $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ dont toutes les composantes irréductibles sont régulières (ce qui n'est pas le cas en général lorsque $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ est régulier).

Introduisons quelques notations. Soit $\bar{R}$ l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de R à $\mathfrak{h}_\theta$. Les éléments de $\bar{R}$ seront appelés racines restreintes. Si $\alpha \in R$ nous noterons $\bar{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{h}_\theta$. Une racine restreinte $\bar{\alpha}$ sera dite non divisible si elle n'est pas de la forme $c\bar{\gamma}$ $(c \in \mathbb{Z}, c > 1, \gamma \in R)$. Nous désignerons par $\bar{R}_{nd}$ l'ensemble des racines restreintes non divisibles.

Si $\alpha \in R$, nous poserons $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g} ,\ [H,X] = \bar{\alpha}(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}_\theta\}$.

De ce fait, si $\alpha \in \Psi - \theta$, on a $d_1(\theta_\alpha) = \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$.

Au vu du théorème 1.1. et de ce qui précède, on est amené à poser la définition suivante :

DEFINITION 2.2.

<u>Une partie</u> θ <u>est dite admissible si pour tout</u> $\alpha \in \Psi - \theta$, <u>il existe</u> $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$, $X_{-\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{-\bar{\alpha}}$ <u>tels que</u> $(X_{-\bar{\alpha}}, H_\alpha^\theta, X_{\bar{\alpha}})$ <u>soit un</u> $s\ell_2$<u>-triplet</u> .

On remarque immédiatement d'après la définition que θ est admissible si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, θ_α est admissible dans Ψ_α .

Autrement dit, la classification des parties admissibles se ramène à la classification des parties admissibles telles que $\mathrm{Card}(\psi-\theta)=1$, et cette dernière a été obtenue dans [10] grâce au théorème 1.1.

La table qu'on trouvera plus loin donnera notamment la liste des parties admissibles dans les algèbres de Lie simples.

Le résultat essentiel est alors le suivant.

THÉORÈME 2.3. ([11])

Soit θ une partie admissible de ψ et soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors :

a) Pour tous $\alpha,\beta\in\psi-\theta$ les nombres $\dfrac{2B(H_\alpha^\theta,H_\beta^\theta)}{B(H_\alpha^\theta,H_\alpha^\theta)}$ sont des entiers négatifs ou nuls.

b) Les éléments $X_{-\bar\alpha}, H_\alpha^\theta, X_{\bar\alpha}$ $(\alpha\in\psi-\theta)$ engendrent dans $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ semi-simple dont $\mathfrak{h}_\theta$ est une sous-algèbre de Cartan. Les restrictions des éléments de $\psi-\theta$ à $\mathfrak{h}_\theta$ forment une base du système de racines de $(\mathfrak{g}_\theta,\mathfrak{h}_\theta)$ et la base correspondante du système inverse est constituée des éléments H_α^θ.

Remarque 2.4.

a) La partie $\theta=\emptyset$ est toujours admissible. Les espaces $\mathfrak{g}^{\bar\alpha}$ sont alors les espaces radiciels usuels et $\mathfrak{g}_\emptyset=\mathfrak{g}$.

b) La sous-algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ dépend évidemment du choix des éléments $X_{\bar\alpha}$. Deux choix distincts conduisent à des sous-algèbres conjuguées par le groupe L_θ.

c) Désignons par R_θ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_\theta,\mathfrak{h}_\theta)$. On peut montrer que $R_\theta=\bar R_{nd}$.

Soit W le groupe de Weyl de R et W_θ le groupe de Weyl de R_θ. Le lien entre ces deux groupes est donné dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5.

Soit $W_o=\{w\in W,\ w.\mathfrak{h}_\theta\subset\mathfrak{h}_\theta\}$ et soit $\bar W_o$ l'ensemble des restrictions des éléments de W_o à $\mathfrak{h}_\theta$. On a $\bar W_o=W_\theta$.

Démonstration :

a) $W_\theta\subset\bar W_o$.

Soit G_θ le sous-groupe connexe de G correspondant à $\mathfrak{g}_\theta$. Soit $v\in W_\theta$.

Il existe $g\in G_\theta$ tel que $g_{|\mathfrak{h}_\theta}=v$. Mais alors il est facile de voir que g stabilise la partie semi-simple ℓ_θ' de ℓ_θ. Soit $\mathfrak{h}(\theta)$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}_\theta$ dans $\mathfrak{h}$ (pour la forme de Killing). L'algèbre $\mathfrak{h}(\theta)$ est une sous-algèbre de

Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta$. Soit $\mathfrak{h}_1 = g.\mathfrak{h}(\theta)$, c'est encore une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta$. Il existe donc $g_1 \in L'_\theta$ (le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{l}'_\theta$) tel que $g_1 g.\mathfrak{h}(\theta) = \mathfrak{h}(\theta)$. D'autre part :

$$g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = g_{|\mathfrak{h}_\theta} = w \quad \text{car} \quad g_1 \quad \text{agit trivialement sur} \quad \mathfrak{h}_\theta \; .$$

Finalement, on constate que $g_1 g$ conserve $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_\theta$, donc $g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} \in \bar{W}_o$.

b) $\bar{W}_o \subset W_\theta$.

Soit $w \in W_o$. En utilisant un élément $g \in G$ tel que $g_{|\mathfrak{h}} = w$, on voit facilement que, si $\bar{\alpha} \in \bar{R}$, alors $w(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \circ w^{-1}$ appartient aussi à $\bar{R}$. Ainsi w est un automorphisme de $\bar{R}$, qui envoie $\bar{R}_{nd} = R_\theta$ sur lui-même (si $\bar{\alpha} \in \bar{R}_{nd}$ et si $w\bar{\alpha} = n\bar{\beta}$ alors $\bar{\alpha} = n\,w^{-1}\bar{\beta}$: impossible ....). Il existe alors $w_1 \in W_\theta$ tel que $w_1 w$ soit un automorphisme de R_θ laissant stable la base $\overline{\Psi - \theta}$. Soit $g_1 \in G_\theta$ un élément qui vérifie $g_{1|\mathfrak{h}_\theta} = w_1$.

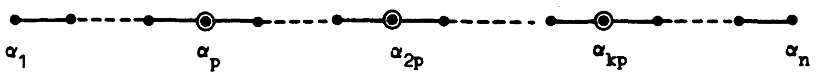
Comme dans la partie a) de la démonstration, on constate que $g_1 g$ stabilise $\mathfrak{h}_\theta$ et on en déduit qu'il existe $g_2 \in L'_\theta$ tel que $g_2 g_1 g$, non seulement stabilise $\mathfrak{h}(\theta)$, mais envoie θ sur θ . Mais alors $g_2 g_1 g$ stabilise $\mathfrak{h}$ et envoie Ψ sur Ψ . Donc $g_2 g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = id = g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = w_1 w_{|\mathfrak{h}_\theta}$.

Ainsi $w_{|\mathfrak{h}_\theta} = w_1^{-1}$. □

La table ci-dessous donne la liste complète (sous forme de diagrammes) des parties admissibles des bases des systèmes de racines irréductibles.
A côté de chaque diagramme figure le type de l'algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ associée, ce dernier ayant été calculé cas par cas.

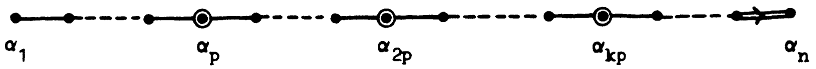
<u>Table</u>

<u>Type</u> A_n : $n = (k+1)p-1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, $p \geq 1$.



A_k

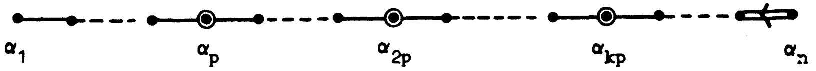
<u>Type</u> B_n : $n \geq kp$, $(2k+1)p \leq (2n+1)$, $p \geq 1$.



B_k

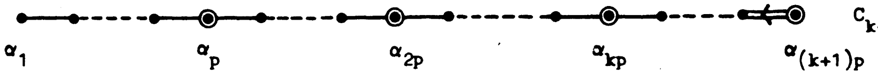
<u>Type</u> C_n :

1) p pair, $(2k+1)p \leq 2n$.



B_k

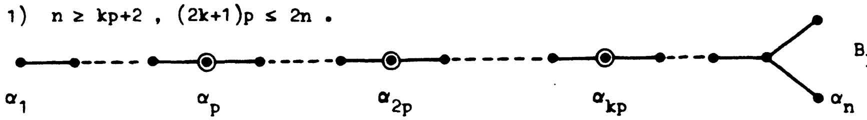
2) $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.



C_{k+1}

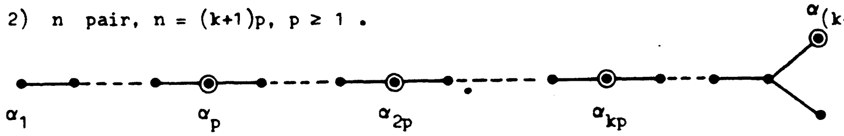
<u>Type</u> D_n :

1) $n \geq kp+2$, $(2k+1)p \leq 2n$.



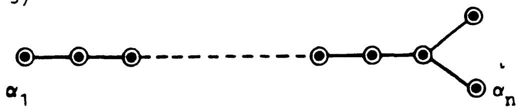
B_k

2) n pair, $n = (k+1)p$, $p \geq 1$.



C_{k+1}

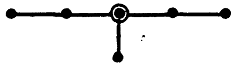
3)



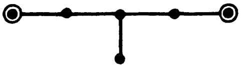
D_n

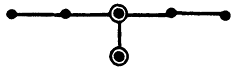
Table (suite)

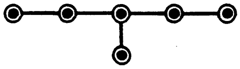
<u>Type</u> E_6

1)  A_1

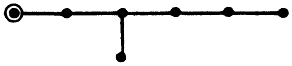
2)  A_1

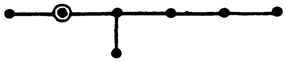
3)  A_2

4)  G_2

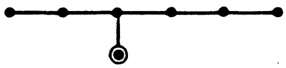
5)  E_6

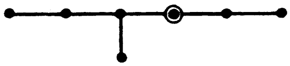
<u>Type</u> E_7

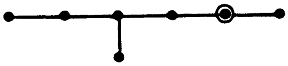
1)  A_1

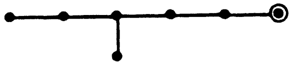
2)  A_1

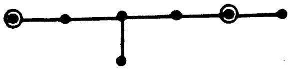
3)  A_1

4)  A_1

5)  A_1

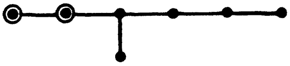
6)  A_1

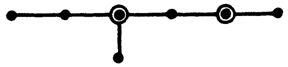
7)  A_1

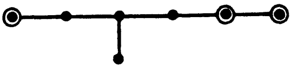
8)  B_2

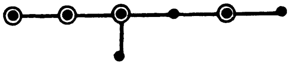
<u>Table</u> (suite)

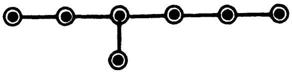
<u>Type</u> E_7 (suite)

9)  G_2

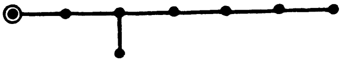
10)  G_2

11)  C_3

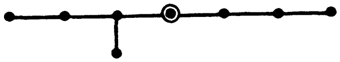
12)  F_4

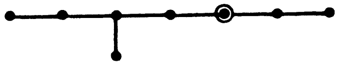
13)  E_7

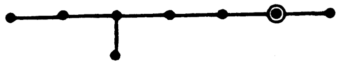
<u>Type</u> E_8 :

1)  A_1

2)  A_1

3)  A_1

4)  A_1

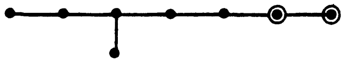
5)  A_1

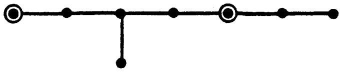
6)  A_1

7)  B_2

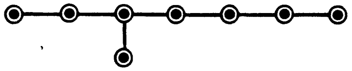
Table (suite)

Type E_8 (suite) :

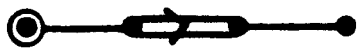
8)  G_2

9)  G_2

10)  F_4

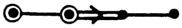
11)  E_8

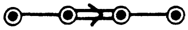
Type F_4 :

1)  A_1

2)  A_1

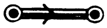
3)  A_1

4)  G_2

5)  F_4

Type G_2 :

1)  A_1

2)  G_2

3. Paramétrisation d'orbites.

De manière générale pour tout sous-ensemble $X \subset \mathfrak{g}$, on définit l'ensemble des points réguliers de X par

$$X^{reg} = \{x \in X \text{ , } \dim \mathfrak{g}^x \leq \dim \mathfrak{g}^y \ \forall y \in X\} \text{ .}$$

Les notations $\mathfrak{g}^x$ (resp. $\mathfrak{g}^y$) désignant le centralisateur de x (resp. y) dans $\mathfrak{g}$.
On voit alors facilement que pour toute partie θ de ψ on a

$$\mathfrak{h}_\theta^{reg} = \{H \in \mathfrak{h}_\theta \text{ , } \alpha(H) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \psi - \theta\} \text{ .}$$

DÉFINITION 3.1.

<u>Soit</u> $\mathfrak{p}$ <u>une sous-algèbre parabolique de</u> $\mathfrak{g}$, <u>soit</u> $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ <u>le centre d'une sous-algèbre de Lévi de</u> $\mathfrak{p}$. <u>On appelle nappe de Dixmier fermée associée à</u> $\mathfrak{p}$ <u>l'ensemble</u>

$$X_\mathfrak{p} = \overline{G \cdot \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^{reg}}$$

(<u>la barre indiquant la fermeture pour la topologie de Zariski</u>).
<u>On appelle nappe de Dixmier associée à</u> $\mathfrak{p}$, <u>l'ensemble</u> $X_\mathfrak{p}^{reg}$.

<u>Remarque 3.2.</u> :

a) Ces ensembles ont été introduits par Dixmier dans [4]. En fait Dixmier appelle nappe les ensembles $G.\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^{reg}$. La définition ci-dessus des nappes est due à Borho et Richardson. On peut démontrer ([8]), qu'en fait $X_\mathfrak{p}$ ne dépend que de la classe d'association de $\mathfrak{p}$ (rappelons que par définition deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont associées si leurs sous-algèbres de Lévi sont conjuguées).

b) Soit $n_\mathfrak{p}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$, on a

$$X_\mathfrak{p} = G.(\mathfrak{h}_\mathfrak{p} + n_\mathfrak{p}). \quad ([6], [2])$$

c) Désignons par $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}$. On montre ([4]) que

$$X_\mathfrak{p}^{reg} = \{x \in X_\mathfrak{p} \mid \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\}$$

et que $X_\mathfrak{p}^{reg}$ est une composante irréductible de l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ ([2])

d) W. Borho et H. Kraft ([2]) ont alors élargi la notion de nappe en définissant une nappe comme étant une composante irréductible de l'ensemble des points dont le stabilisateur a une dimension constante. L'étude de ces nappes a été faite par W. Borho ([1]) .

<u>Notations 3.3.</u> : Si θ est une partie de ψ nous noterons X_θ la nappe fermée $X_{\mathfrak{p}_\theta}$. Nous désignerons également par S_θ (resp. $\mathcal{N}_\theta$, resp. $\mathcal{R}_\theta$) l'ensemble des éléments semi-simples (resp. nilpotents, resp. réguliers) de X_θ . Notamment donc $\mathcal{R}_\theta = X_\theta^{reg}$ est la nappe de Dixmier associée à $\mathfrak{p}_\theta$.

On remarque facilement que $X_\phi = \mathfrak{g}$. La nappe $\mathcal{R}_\phi$ correspondante (les éléments réguliers de $\mathfrak{g}$) a été étudiée par B. Kostant dans un article fondamental ([7]) . On pourra aussi se reporter au compte rendu de R. Godement au Séminaire Bourbaki ([5]) . Il démontre notamment qu'il existe une section des orbites régulières qui est un espace affine $\mathbb{C}^\ell$ (où ℓ est le rang de $\mathfrak{g}$) .

<u>Nous allons montrer que dans le cas où</u> θ <u>est admissible, il existe toujours une section des orbites de</u> $\mathcal{R}_\theta$ <u>qui est un espace affine de type</u> $\mathbb{C}^\ell$ <u>où</u> $\ell = \dim \mathfrak{h}_\theta$.

Si V est une variété algébrique sur laquelle agit un groupe Γ , nous noterons toujours $\mathbb{C}[V]$ l'anneau des fonctions régulières sur V et $\mathbb{C}[V]^\Gamma$ le sous-anneau des fonctions régulières invariantes par Γ . La question qui se pose naturellement est de savoir si les éléments de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$ suffisent à séparer les orbites de $\mathcal{R}_\theta$; cela a été démontré par B. Kostant pour les orbites régulières de $\mathfrak{g}$. La réponse est en général négative (voir [1] , 6.1. pour un contre-exemple) .

Soit $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$ (le spectre maximal de $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ est donc le normalisé du spectre maximal de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$) . Pour une partie θ quelconque, nous définissons $\bar{W}_o$ comme au paragraphe précédent. Rappelons l'important théorème suivant dû à W. Borho.

THÉORÈME 3.4.(*) ([1] Satz 6.3.)

<u>L'homomorphisme de restriction</u> $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{\bar{W}_o}$ <u>est un isomorphisme</u>.

Supposons à présent que θ soit admissible. Dans ce cas, on a vu (Prop. 2.5.) que $\bar{W}_o = W_\theta$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ est un anneau de polynômes engendré par $\ell = \dim \mathfrak{h}_\theta$ générateurs algébriquement indépendants $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$. D'après [1] , Théorème 6.5. les fonctions u_i sont continues sur X_θ pour la topologie de Zariski.

Soit X un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}_\theta$ (c'est-à-dire nilpotent principal dans la terminologie de [7]) . Un tel X est simplement un conjugué

(*) Le théorème 3.4. est vrai pour les nappes généralisées. Nous ne l'énonçons ici que pour les nappes de Dixmier.

par G_θ de l'élément $\sum_{\alpha \in \Psi - \theta} X_{\bar{\alpha}}$. Soit (Y,H,X) un $s\ell_2$-triplet de $\mathfrak{g}_\theta$ contenant X et soit $\mathfrak{g}_\theta^X$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}_\theta$. Posons $\nu_\theta = Y + \mathfrak{g}_\theta^X$. L'ensemble ν_θ est donc un plan affine de dimension égale à celle de $\mathfrak{h}_\theta$. C'est la section de Kostant des éléments réguliers de $\mathfrak{g}_\theta$ ([7]).

LEMME 3.5. $\qquad \nu_\theta \subset \mathfrak{R}_\theta$.

Démonstration : (*) Puisque $\nu_\theta \subset \mathfrak{g}_\theta$, tout élément de ν_θ est conjugué à un élément de la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_\theta$ engendré par $\mathfrak{h}_\theta$ et les $X_{\bar{\alpha}}$ $(\alpha \in \Psi - \theta)$.

Donc tout élément de ν_θ est conjugué à un élément de $\mathfrak{h}_\theta + n_\theta^+$, ainsi $\nu_\theta \subset X_\theta$. Pour démontrer que $\nu_\theta \subset \mathfrak{R}_\theta$ il suffit donc de démontrer que $\dim \mathfrak{g}^x \leq \dim \ell_\theta$ pour tout $x \in \nu_\theta$.

Soit $\mathfrak{g}^{2j}$ $(j \in \mathbb{Z})$ la graduation de $\mathfrak{g}$ définie par H.

Soit $\mathfrak{p} = \sum_{j \geq 0} \mathfrak{g}^{2j}$. Les propriétés classiques des $s\ell_2$-triplets impliquent que $\mathfrak{g}_\theta^X \subset \mathfrak{p}$. Nous allons montrer, ce qui est plus général que le lemme, que si $z \in \mathfrak{p}$, alors $\dim \mathfrak{g}^{Y+z} \leq \dim \ell_\theta$.

Posons $\mathfrak{a}^{2j} = \mathfrak{g}^{2j} \cap \mathfrak{g}^Y$. Soit $x \in \mathfrak{g}^Y$ et écrivons sa décomposition dans la graduation : $\qquad x = \sum x_{2j} \quad (x_{2j} \in \mathfrak{g}^{2j})$. On a

$$0 = [Y,x] = \sum [Y,x_{2j}]$$

et puisque $Y \in \mathfrak{g}^{-2}$, ceci implique que $[Y,x_{2j}] = 0 \ \forall j$.

Ainsi $\mathfrak{g}^Y = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{a}^{2j}$ et on en déduit que :

$$\dim \mathfrak{g}^Y = \dim \mathfrak{g}^H = \dim \ell_\theta = \sum \dim \mathfrak{a}^{2j}$$

Filtrons à présent $\mathfrak{g}$ en posant

$$\mathfrak{g}_j = \sum_{i \geq j} \mathfrak{g}^{2i}$$

Donc $\mathfrak{g}_j \supset \mathfrak{g}_{j+1}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_j$ pour j suffisamment petit et $\mathfrak{g}_j = \{0\}$ pour j suffisamment grand.

Soit $z \in \mathfrak{g}_o = \mathfrak{p}$. On a $\mathrm{ad}z(\mathfrak{g}_j) \subset \mathfrak{g}_j \ \forall j$. Les $\mathfrak{g}_j$ induisent une filtration sur $\mathfrak{g}^{Y+z}$ en posant

---

(*) Cette démonstration est inspirée de celle du lemme 10 de [7].

$$\mathfrak{g}_j^{Y+z} = \mathfrak{g}^{Y+z} \cap \mathfrak{g}_j \ .$$

Donc
$$\dim \mathfrak{g}^{Y+z} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim \mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \ .$$

On a une injection

$$\mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \to \mathfrak{g}^{2j}$$

définie de la manière suivante : si $x = x_{2j} + x_{2(j+1)} + \dots$ est un élément de $\mathfrak{g}_j^{Y+z}$, alors on associe à sa classe $\bar{x}$ dans $\mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z}$ l'élément x_{2j} de $\mathfrak{g}^{2j}$.

Mais x , par définition, commute à $Y+z$ donc $0 = [Y,x] + [z,x]$, d'autre part $[z,x] \in \mathfrak{g}_j$ et $[Y,x] = [Y,x_{2j}]$ mod. $\mathfrak{g}_j$. Cela implique que $[Y,x_{2j}] = 0$, donc que l'injection ci-dessus est à valeurs dans $\mathfrak{a}^{2j}$.

Donc $\dim \mathfrak{g}^{Y+z} = \Sigma \dim \mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \leq \Sigma \dim \mathfrak{a}^{2j} = \dim \mathfrak{l}_\theta$.

$\square$

THÉORÈME 3.6. :

<u>Supposons que</u> θ <u>soit admissible. Alors</u> ν_θ <u>est inclus dans</u> $\mathfrak{R}_\theta$, <u>tout élément de</u> $\mathfrak{R}_\theta$ <u>possède un unique conjugué dans</u> ν_θ <u>et l'application de restriction de</u> $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ <u>à</u> ν_θ <u>est un isomorphisme de</u> $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ <u>sur</u> $\mathbb{C}[\nu_\theta]$.

<u>Démonstration</u> : La première assertion du théorème constitue le lemme précédent. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{C}}_\theta \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\theta]^{G_\theta} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{C}[\nu_\theta] \\
& \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta} &
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des homomorphismes de restriction. La flèche α est un isomorphisme (théorème 3.4.) ainsi que la flèche β (c'est l'isomorphisme de Chevalley), on en déduit que γ est un isomorphisme. La flèche δ est également un isomorphisme car ν_θ est la section de Kostant des éléments réguliers de $\mathfrak{g}_\theta$ ([7] théorème 7 , [5] théorème 3) . On en déduit que $\delta \circ \gamma$ est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ sur $\mathbb{C}[\nu_\theta]$, ce qui démontre la dernière assertion du théorème.

Considérons l'application $u : X_\theta \to \mathbb{C}^\ell$ définie par $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_\ell(x))$. D'après [1], théorème 6.5., deux éléments x et y de $\mathcal{R}_\theta$ sont conjugués si et seulement si $u(x) = u(y)$.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_\theta$ une orbite, et soit $u_i(\mathcal{O})$ la valeur de u_i sur $\mathcal{O}$ $(i = 1, \dots, \ell)$. D'après Kostant ([7] théorème 7) la restriction de u à ν_θ induit une bijection de ν_θ sur $\mathbb{C}^\ell$. Il existe donc $x \in \nu_\theta$ tel que $u_i(x) = u_i(\mathcal{O})$ pour tout i. Puisque $\nu_\theta \subset \mathcal{R}_\theta$, on en déduit que $x \in \mathcal{O}$. Ainsi ν_θ rencontre toutes les orbites régulières. Si x et y sont deux éléments G-conjugués de ν_θ, alors $u_i(x) = u_i(y)$ $\forall\, i = 1, \dots, \ell$ et puisque u est une bijection de ν_θ sur $\mathbb{C}^\ell$, on en déduit que $x = y$.

□

Remarque 3.7. : Soit $\mathcal{R}_{\theta/G}$ l'ensemble des orbites de la nappe. Une conséquence de ce qui vient d'être dit au cours de la démonstration précédente est que l'application u définit par passage au quotient une bijection $\bar{u} : \mathcal{R}_{\theta/G} \to \mathbb{C}^\ell$. On peut d'ailleurs montrer de manière élémentaire que u définit également une bijection $\bar{u} : \mathcal{S}_{\theta/G} \to \mathbb{C}^\ell$, où $\mathcal{S}_{\theta/G}$ désigne l'ensemble des orbites semi-simples de X_θ. En effet u est surjective lorsqu'on la restreint à $\mathfrak{h}_\theta$ (c'est le théorème correspondant de Kostant pour $\mathcal{S}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}_\theta$), donc $\bar{u}$ est surjective. Soient x et y deux éléments de $\mathcal{S}_\theta$ tels que $u(x) = u(y)$. Quitte à les conjuguer on peut supposer qu'ils appartiennent à $\mathfrak{h}_\theta$ (voir par exemple [8]), mais alors la condition $u(x) = u(y)$ implique qu'il existe $w \in W_\theta$ tel que $y = wx$. Comme les éléments de W_θ agissant sur $\mathfrak{h}_\theta$ sont des restrictions d'automorphismes de G, on a le résultat voulu.

En fait, pour bon nombre de cas, la situation en ce qui concerne les fonctions invariantes sur X_θ, est meilleure que celle du théorème 3.4. ainsi que le prouvent la proposition ci-dessous et son corollaire.

PROPOSITION 3.8. :

1) Supposons que θ soit admissible dans une algèbre simple $\mathfrak{g}$ et que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

i) $\mathfrak{g}$ est de type classique,

ou ii) Card $\Phi - \theta = 1$.

Alors l'homomorphisme de restriction $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ est surjectif.

2) La conclusion du 1) est fausse en général pour les parties admissibles dans les algèbres de type exceptionnel.

Démonstration : Pour 1) i) nous utiliserons les descriptions explicites des polynômes invariants que l'on trouve dans [3] chap. VI § 4 n° 5-9 p. 202-211, et le fait bien connu que les polynômes symétriques en n variables sont engendrés par les polynômes $u_r(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \quad 1 \le r \le n$.

Les parties θ admissibles et les sous-algèbres $\mathfrak{g}_\theta$ associées sont celles de la table. Les racines de Φ sont notées $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

<u>type A_n, $n = (k+1)p-1$</u>

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1}) \ , \ \Sigma\lambda_i = 0\}$$

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \qquad i = 1,\dots,n .$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \ , \ 1 \le \ell \le k\}$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1 \ , \mu_2,\dots,\mu_2 \ , \dots,\mu_{k+1},\dots,\mu_{k+1}), \ \Sigma\mu_i = 0\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (de type A_k) est donnée par les polynômes $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i^r$ qui sont respectivement les restrictions des polynômes $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>type B_n</u>

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\}$$

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2,\dots,\alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n \ , \ \alpha_n = \lambda_n$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \ , \ 1 \le \ell \le k \ , \ (2k+1)p \le 2n+1 \ , \ p \ge 1\} .$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1 \ , \mu_2,\dots,\mu_2 \ , \dots, \ \mu_k,\dots,\mu_k \ , 0,\dots,0)\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. Une base des éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) est constituée des éléments $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r \quad (1 \le r \le k)$ qui sont les restrictions des éléments $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>Type C_n 1)</u>

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\}$$

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2,\dots,\alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n \ , \ \alpha_n = 2\lambda_n$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \quad 1 \le \ell \le k \ , \ p \text{ pair} \ , \ 2k+1 \le 2n\}$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1,\dots,\mu_k,\dots,\mu_k, \ 0,\dots,0)\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. L'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) admet une base constituée par les polynomes $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r$ $1 \le r \le k$ qui sont les restrictions respectives de polynômes $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

Type C_n 2)

$n = (k+1)p \quad p \ge 0$

$\theta = \{\alpha_{\ell p}, 1 \le \ell \le k+1\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1, \mu_2,\dots,\mu_2, \dots,\mu_{k+1},\dots,\mu_{k+1})\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Une base des invariants de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type C_{k+1}) est donnée par les polynômes

$$\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_i^2)^r \quad 1 \le r \le k+1$$

qui sont les restrictions respectives des polynômes

$$u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i^2)^r$$

qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

Type D_n 1)

$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\}$

$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n, \alpha_n = \lambda_{n-1} + \lambda_n$.

$\theta = \{\alpha_{\ell p}, 1 \le \ell \le k, (2k+1)p \le 2n, kp+2 \le n\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{\mu_1,\dots,\mu_1, \dots, \mu_k,\dots,\mu_k, 0,\dots,0)\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. L'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) admet une base constituée des polynômes

$$\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r \quad 1 \le r \le k$$

qui sont les restrictions respectives des polynômes

$$u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$$

qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>Type D_n 2)</u>

n pair , $n = (k+1)p$, $p > 1$

$\theta = \{\alpha_{\ell p}\ ,\ 1 \leq \ell \leq k+1\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\ldots,\mu_1\ ,\mu_k,\ldots,\mu_k\ ,\ \mu_{k+1},\ldots,\mu_{k+1})\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Les polynômes $\bar{u}_r(\mu_1,\ldots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_i^2)^r$ forment une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type C_{k+1}) et sont les restrictions respectives des polynômes $u_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$ appartenant à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>Pour le type D_n 3)</u> on a $\mathfrak{h}_\theta = \mathfrak{h}$ et il n'y a rien à démontrer.

Nous avons ainsi démontré l'assertion 1) dans le cas i).

Dans le cas ii), Card $\psi - \theta = 1$, donc $\mathfrak{g}_\theta$ est de type A_1 et $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ est engendré par l'unique polynôme de degré 2 obtenu à partir de la forme de Killing de $\mathfrak{g}_\theta$. Mais on sait que la restriction de la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}_\theta$ est non dégénérée, la restriction du polynôme $B(x,x)$ à $\mathfrak{h}_\theta$ engendre donc $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$. Ainsi 1) est démontré.

Pour démontrer 2) considérons le type E_6 3) . Les degrés des invariants fondamentaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ sont 2, 5, 6, 8, 9, 12 ([3] planche V) et puisque $\mathfrak{g}_\theta$ est de type A_2 , les invariants fondamentaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ ont pour degrés 2 et 3. Aucun polynôme homogène de degré 3 ne peut être obtenu "polynomialement" à partir des degrés précédents.

□

COROLLAIRE 3.9. :

<u>Si</u> θ <u>est admissible et si l'une des conditions</u> i) <u>ou</u> ii) <u>de la proposition précédente est remplie, alors l'homomorphisme de restriction</u> : $\mathbb{C}[X_\theta]^G \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> : L'injectivité résulte du fait que $X_\theta = \overline{G.\mathfrak{h}_\theta}$, la surjectivité de la considération du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathbb{C}[X_\theta]^G \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta} \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des homomorphismes de restriction. Puisque β est surjective (c'est l'isomorphisme de Chevalley) ainsi que γ (par hypothèse), δ est surjective.

□

Remarque 3.10.(*)

a) Revenons à la notion générale de nappe dont nous avons parlé dans la remarque 3.2. d). Dans une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{a}$ on appelle orbite originelle une orbite incluse dans $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ et qui est elle-même une nappe au sens de la remarque citée. Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$ son radical nilpotent, soit $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ le centre de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite originelle de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Alors $S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}} = (\overline{G(\mathcal{O}+\mathfrak{h}_\mathfrak{p})})^{reg}$ est une nappe et toute nappe s'obtient par ce procédé (voir [1]). On a également $\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}} = G.(\mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \overline{\mathcal{O}} + \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$.

Désignons par $\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G}$ la clôture intégrale de $\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G$.

D'après Borho les morphismes de restriction suivants

$$\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$$

$$\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G \longrightarrow \mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$$

sont des isomorphismes ([1], Satz 6.3. ; Korollar 6.4.).
La clôture intégrale de $\mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$ s'identifie donc à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$.

D'autre part, si $\mathcal{O} = \{0\}$ on a $\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\{0\}}} = X_\mathfrak{p}$. Soit alors θ une partie admissible qui vérifie l'une des conditions de la proposition 3.8. 1) et soit $\mathcal{O}$ une orbite originelle de $\mathfrak{l}_\theta$.

(*) Je remercie W. Borho de m'avoir rendu attentif au contenu de cette remarque.

Le corollaire 3.9. implique en conséquence que $\mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$ est intégralement clos, il en est donc de même pour $\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]^G$.

Le morphisme de restriction

$$\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]^G \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$$ est alors un isomorphisme.

b) W. Borho a conjecturé que les restrictions des éléments de $\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]}^G$ à $S_{\ell_\theta,\Theta}$ sont des fonctions régulières sur $S_{\ell_\theta,\Theta}$, au sens de la géométrie algébrique ([1] Vermutung 6.4.). Une conséquence immédiate du corollaire 3.9. et de la remarque a) ci-dessus est que cette conjecture est vraie pour les nappes considérées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORHO W. : Über Schichten halbeinfacher Lie-Algebren, Inv. Math. 65, 1981, 238-317.

[2] BORHO W., KRAFT H. : Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen. Comment. Math. Helv. 54, 1979, 61-104.

[3] BOURBAKI N. : Groupes et Algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6, Hermann, Paris, 1968.

[4] DIXMIER J. : Polarisations dans les algèbres de Lie semi-simples complexes, Bull. Sci. Math. 99, 1975, 45-63 .

[5] GODEMENT R. : Quelques résultats nouveaux de Kostant sur les groupes semi-simples. Séminaire Bourbaki n° 260 Décembre 1963.

[6] JOHNSTON D.S. RICHARDSON R.W. : Conjugacy classes in parabolic subgroups II, Bull. London Math. Soc. 9, 1977, 245-250.

[7] KOSTANT B. : Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. vol. 85, 1963,327-404.

[8] KRAFT H. : Parametrisierung von Konjugations klassen in $s\ell_n$. Math. Ann. 234, 1978, 209-220.

[9] RUBENTHALER H. : Espaces préhomogènes de type parabolique, thèse, Préprint IRMA, Strasbourg, 1982.

[10] RUBENTHALER H. : Espaces préhomogènes de type parabolique, Lect. in Math. Kyoto University n° 14, 1982, Kinokuniya Company, Japon , 189-221.

[11] RUBENTHALER H. : Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples. J. of. Alg. vol. 81, n° 1, 1983,268-278.

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

H. SCHLICHTKRULL

On some series of representations related to symmetric spaces

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 15 (1984), p. 277-289

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__277_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p.277-289

ON SOME SERIES OF REPRESENTATIONS RELATED TO SYMMETRIC SPACES.

by

H. Schlichtkrull

In this paper, the series of representations constructed by M. Flensted-Jensen in [3] and [4] are considered. The main results of [8], on lowest K-types and Langlands parameters of the representations of [3] in the equal rank case, are generalized to the other series as well. The representations are identified with subquotients of parabolically induced representations. The parabolic subgroup we use, $P = MAN$, is cuspidal, and moreover, the symmetric space $M/M \cap H$ satisfies the equal rank condition. The inducing representation $\pi \otimes \nu \otimes 1$ of MAN is given by a Flensted-Jensen representation π of M, and thus the determination of Langlands parameters is reduced to Flensted-Jensen representations of M. Further, these results imply unitarity of the representations under certain conditions (see Theorem 4).

Since the proofs of some of our results are rather straightforward generalizations of those of [8], we do not give all the details in these cases, but refer to [8] in stead.

Our results generalize some results of G. Ólafsson [5], [6] (in fact, Theorem 1 and 3 below were obtained before we received [5] and [6]).

The author expresses his gratitude to the organizers of the conference for the invitation to participate.

1. Notation. Let G/H be a semisimple symmetric space with G and H connected and linear. Let τ be the corresponding involution, and let θ be a commuting Cartan involution. Denote by $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ and $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ the corresponding decompositions of the Lie algebra $\mathfrak{g}$, and let K be the maximal compact subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{k}$. Let G_0 denote the analytic subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

Choose a θ-invariant maximal abelian subspace $\mathfrak{a}^0$ of $\mathfrak{q}$, and put $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{k}$. Let $\Delta \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$ be the set of roots of $\mathfrak{a}^0$ in $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, and choose a positive system Δ^+ which is θ-compatible, i.e. $\alpha \in \Delta^+$ and $\alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0$ implies $\theta\alpha \in \Delta^+$. Put $\rho = \rho(\Delta^+) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta^+} (\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha})\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$.

Let $\ell = \mathfrak{g}^{\mathfrak{t}}$ be the centralizer of $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{g}$, and let $\bar{\ell}$ denote the orthocomplement of $\mathfrak{t}$ in ℓ (w.r.t. the Killing form of $\mathfrak{g}$). Choose $\mathfrak{t}_2$ maximal abelian in $\bar{\ell} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$, then $\tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} + \mathfrak{t}_2$ is maximal abelian in $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$. Let $\Delta_c = \Delta(\tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$, $\Delta_{c,1} = \{\alpha \in \Delta_c \mid \alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0\}$ and $\Delta_{c,2} = \{\alpha \in \Delta_c \mid \alpha|_{\mathfrak{t}} = 0\}$. Put $\Delta_{c,1}^+ = \{\alpha \in \Delta_c \mid \exists\beta \in \Delta^+ : \beta|_{\mathfrak{t}} = \alpha|_{\mathfrak{t}}\}$ and choose a positive system $\Delta_{c,2}^+$ for the root system $\Delta_{c,2}$, then $\Delta_c^+ = \Delta_{c,1}^+ \cup \Delta_{c,2}^+$ is a positive system for Δ_c. Define $\rho_c = \rho(\Delta_c^+) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_c^+} (\dim \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{\alpha})\alpha \in i\tilde{\mathfrak{t}}^*$ and $\rho_{c,1} = \rho(\Delta_{c,1}^+)$ similarly. Notice that $\rho_{c,1}|_{\mathfrak{t}_2}$ does not vanish in general, but at least we have:

Lemma 1. $\langle \rho_{c,1}, \alpha\rangle = 0$ *for all* $\alpha \in \Delta_{c,2}$.

Proof: Let $\alpha \in \Delta_{c,2}$, and denote by s_α reflection in α. Then $s_\alpha(\Delta_{c,1}^+) = \Delta_{c,1}^+$ and hence the lemma. □

For each $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$ we define $\mu_\lambda \in \tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}}^*$ by the following equations:

$$(1) \qquad (\mu_\lambda + 2\rho_c)|_{\mathfrak{t}} = (\lambda+\rho)|_{\mathfrak{t}} \quad \text{and} \quad (\mu_\lambda + 2\rho_{c,1})|_{\mathfrak{t}_2} = 0 .$$

2. Flensted-Jensen's representations. Let $c \geq 0$ be the smallest possible constant such that [4] Theorem 1 holds, and define $\Lambda \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$ to be the set of those $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$ satisfying the following conditions (2) and (3):

(2) $\quad \operatorname{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle > c$ for all $\alpha \in \Delta^+$ with $\alpha|_{t} = 0$

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\langle\mu_\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}^+ & \text{for all } \alpha \in \Delta_c^+ \\ \mu_\lambda(X) \in \mathbb{Z} & \text{for } X \in t,\ \exp 2\pi i X = e\ . \end{cases}$$

For each $\lambda \in \Lambda$ Flensted-Jensen [4] defines a function $\psi_\lambda \in C^\infty(G/H)$ by an integral formula (for the dual function on the dual symmetric space G^0/H^0), and the following properties hold for these functions:

a) The representation of K generated by ψ_λ is finite dimensional and irreducible. Denoting by δ_λ the contragredient of this representation of K, δ_λ is spherical for $K/K \cap H$ and has highest weight μ_λ.

(We have not included Condition (9) of [4], since it is redundant by Lemma 1).

b) ψ_λ is a joint eigenfunction for $U(g)^K$ acting on $C^\infty(G/H)$ from the left. The eigenvalues are determined as follows: There is a unique homomorphism $\gamma: U(g)^K \to U(a^0)$ such that for $u \in U(g)^K$:

(4) $$u - \gamma(u) \in (\bar{\ell} \cap k)_{\mathbb{C}}\, U(g) + U(g)\, (h_{\mathbb{C}}^{a^0} + n^0)$$

where $n^0 = \sum_{\alpha\in\Delta^+} g_{\mathbb{C}}^{\alpha}$. Then $u\psi_\lambda = \gamma(u)(-\lambda-\rho)\psi_\lambda$.

<u>Remark</u>. In the sequel we use only properties a) and b) of the functions ψ_λ. If ψ_λ can be defined (e.g. by analytic continuation in λ), such that a) and b) still hold for some λ which does not satisfy (2), then our results can be extended to these parameters as well.

From a) and b) it follows by [2] Proposition 9.1.10 (iii) that the K-type $\mu_\lambda^\vee$ has multiplicity one in the g-module generated by ψ_λ. Consequently, this module has a unique irreducible quotient T^λ which contains $\mu_\lambda^\vee$.

If t is maximal abelian in $k \cap q$, then ψ_λ is the same as the function defined in [3]. In this case $c = 0$, but (2) is not necessary for defining ψ_λ. In fact (2) is not serious since one can prove that then $\psi_{s\lambda} = \psi_\lambda$ for all elements s from the Weyl group of the root system $\{\alpha \in \Delta \mid \alpha|_{t} = 0\}$. The series of (g,K)-

modules T^λ is in this case called the <u>fundamental series</u> for the symmetric space G/H.

If we can choose $\mathfrak{a}^0$ such that $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}^0$, we say that G/H satisfies the <u>equal rank</u> condition. If furthermore $\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$ for all $\alpha \in \Delta^+$, then ψ_λ is square integrable with respect to invariant measure on G/H, and hence ψ_λ generates a unitary irreducible representation $\pi_\lambda{}^G$ of G, whose Harish-Chandra module is T^λ. This was proved under stronger assumptions on λ in [3], and subsequently proved in general by T. Oshima (unpublished, cf. however [10] and [13]).

<u>3. Lowest K-types</u>. Let $L = G^t$, then L is connected and has Lie algebra ℓ. Put $n_1 = \Sigma_{\alpha\in\Delta^+,\alpha|_{\mathfrak{t}}\neq 0}\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ and $n_2 = \Sigma_{\alpha\in\Delta^+,\alpha|_{\mathfrak{t}}=0}\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$, and observe that $\ell_{\mathbb{C}} + n_1$ is a θ-stable parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Choose an Iwasawa decomposition $\ell = \ell \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus n_\ell$ such that $\mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ and $n_2 \subset n_\ell$. Notice that $\mathfrak{a}$ is τ-stable, and $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{p}$ by maximality of $\mathfrak{a}^0$ in $\mathfrak{q}$ so that $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{p} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$. Define $\rho_\ell \in \mathfrak{a}^*$ by $\rho_\ell = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{n_\ell}$, then it follows easily that $\rho_\ell|_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{q}} = \rho|_{\mathfrak{a}^0\cap\mathfrak{p}}$. Define for each $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{0*}$ an element $\nu_\lambda^L \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ by

$$(5) \qquad \nu_\lambda^L|_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{q}} = -\lambda|_{\mathfrak{a}^0\cap\mathfrak{p}} \quad \text{and} \quad \nu_\lambda^L|_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}} = \rho_\ell|_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}}\,.$$

<u>Theorem 1</u>. *Assume* $\lambda \in \Lambda$ *and*

$$(6) \qquad \langle(\lambda+\rho)|_{\mathfrak{t}},\ \alpha|_{\mathfrak{t}}\rangle \geq 0 \quad \textit{for all} \quad \alpha \in \Delta^+ .$$

Then $\mu_\lambda^\vee$ *is a lowest* K*-type of* T^λ, *and* T^λ *has no other lowest* K*-types.*

<u>Proof</u>: Let $\bar{V}_\lambda$ denote the spherical representation of $\bar{L}$ (the analytic subgroup with Lie algebra $\bar{\ell}$) with parameter $\nu_\lambda^L \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, and denote by V_λ the representation of L which extends $\bar{V}_\lambda$ with the character $e^{\mu_\lambda - 2\rho(n_1\cap\mathfrak{p})}$ on $\exp i\tilde{\mathfrak{t}}$ (then V_λ is well defined, cf. [8] Lemma 5.5 and the succeeding remark).

Let $X(\ell_{\mathbb{C}}+n_1,\ V_\lambda,\ \mu_\lambda)$ be the $(\mathfrak{g},K)$-module induced from V_λ in the sense of [11], then one can conclude by comparing actions of $U(\mathfrak{g})^K$ on μ_λ that the module $T^{\lambda\vee}$, contragradient to T^λ, is equivalent to $X(\ell_{\mathbb{C}}+n_1,\ V_\lambda,\ \mu_\lambda)$, (cf. [8] Lemma 5.6 where T^λ has been interchanged with $T^{\lambda\vee}$).

When $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}^0$ Theorem 1 is exactly [8] Theorem 5.4, and the general case follows in the same way as there, the only complication being the analogue of [8] (5.10), but at that point one can apply Lemma 1 above. □

4. Definition. The symmetric space G/H is said to satisfy Condition D, if the subgroup $\widetilde{L} = G^{\widetilde{\mathfrak{t}}}$ is compact or, equivalently, if

(7) $$\operatorname{rank} G/H = \operatorname{rank} G/G_0 = \operatorname{rank} K/K \cap H .$$

Notice that if G/H satisfies Condition D, then $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$, so that the discrete series of G is nonempty. In fact, by [8] Theorem 6.1, π^G_λ belongs in this case to the discrete series of G whenever $\langle\lambda,\alpha\rangle > k$ for all $\alpha \in \Delta^+$, where k is a certain nonnegative constant explicitly determined. However, for "smaller" λ it happens that π^G_λ no longer belongs to the discrete series of G (cf. [8] Example 7.5), and we do not know in general the Langlands parameter ν of π^G_λ in this case.

Examples. 1° $G\times G/d(G)$ satisfies Condition D if and only if $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$.

2° From the list of [1] exactly the following spaces with G classical satisfy Condition D:

$SU(2r,q)/SU(r,k)+SU(r,q-k)+T$, $SU(p,q)/SO(p,q)$,

$SU(2r,2s)/Sp(r,s)$, $SU(n,n)/SL(n,\mathbb{C})+\mathbb{R}$, $SO^*(2n)/SO(n,\mathbb{C})$,

$SO^*(4n)/SU^*(2n)+\mathbb{R}$, $SO(2r,q)/SO(r,k)+SO(r,q-k)$,

$SO(2r,2s)/U(r,s)$ (r and s not both odd), $Sp(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R})+\mathbb{R}$,

$Sp(2r,q)/Sp(r,k)+Sp(r,q-k)$, $Sp(p,q)/U(p,q)$.

5. T^λ as induced representation. Let $\mathfrak{a}$ be as defined in Section 3, let $A = \exp \mathfrak{a}$ and let $P = MAN$ be a cuspidal parabolic subgroup of G with A as its split component.

Observe that M is invariant under τ, and that $\mathfrak{t}$ is a maximal abelian subspace of $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$ where $\mathfrak{m}$ denotes the Lie algebra of M. Moreover, $M/(M\cap H)_e$ (where subscript e means "identity component") satisfies Condition D (which is generalized to non-connected reductive groups in the obvious fashion).

Let $\Delta_m \subset it^*$ (resp. $\Delta_{mc} \subset it^*$) consist of the roots of t in $m_{\mathbb{C}}$ (resp. in $m_{\mathbb{C}} \cap k_{\mathbb{C}}$), let $\Delta_m^+ = \Delta_m \cap \{\alpha|_t \mid \alpha \in \Delta^+\}$ and $\Delta_{mc}^+ = \Delta_m^+ \cap \Delta_{mc}$, and put $\rho_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_m^+} (\dim m_{\mathbb{C}}^{\alpha})\alpha$ and $\rho_{mc} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_{mc}^+} (\dim m_{\mathbb{C}}^{\alpha} \cap k_{\mathbb{C}})\alpha$.

For $\lambda \in t_{\mathbb{C}}^*$, $\mu_\lambda^m \in t_{\mathbb{C}}^*$ is defined by $\mu_\lambda^m = \mu + \rho_m - 2\rho_{mc}$. By the following lemma we get for $\lambda \in a_{\mathbb{C}}^{0*}$ that $\mu_{\lambda|_t}^m = \mu_\lambda|_t$.

<u>Lemma 2</u>. $\rho|_t - 2\rho_c|_t = \rho_m - 2\rho_{mc}$.

<u>Proof</u>: Suppose β is a weight of $it + a$ in $g_{\mathbb{C}}$, and assume $\beta|_t \in \{\alpha|_t \mid \alpha \in \Delta^+\}$. The claim is that if $\beta|_a \neq 0$ then $\beta|_t$ contributes nothing to $(\rho-2\rho_c)|_t$. This follows from the fact that then $\theta\beta$ is also a weight and $\beta|_t \in \{\alpha|_t \mid \alpha \in \Delta_c^+\}$. □

Let $\lambda \in \Lambda$. Since the highest weight μ_λ of $\mathcal{X}$ has multiplicity one in δ_λ, it follows from Lemma 1 that the multiplicity of the weight $\mu_\lambda|_t$ of t in δ_λ is also one. Therefore, δ_λ contains a unique irreducible subrepresentation δ_λ^M of $M \cap K$ of highest weight $\mu_\lambda|_t$. Assuming

$$(8) \qquad \langle\lambda|_t, \alpha\rangle > 0 \quad \text{for all } \alpha \in \Delta_m^+$$

it follows from the last paragraph of Section 2 above that $\lambda|_t$ determines a Flensted-Jensen representation π_λ^M of M in the discrete series of $M/(M\cap H)_e$ (here one should also take into account the possibility that M is not semisimple or not connected. In the latter case π_λ^M is determined by δ_λ^M rather than by $\lambda|_t$. See [6] Section 4.8).

<u>Theorem 2</u>. *Let* $\lambda \in \Lambda$ *and assume* (8). *Define* $\nu_\lambda^L \in a_{\mathbb{C}}^*$ *by* (5).

(i) $\mu_\lambda^\vee$ *is a lowest* K-*type of* $\mathrm{Ind}_P^G(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L \otimes 1)$ *where it occurs with multiplicity one.*

(ii) T^λ *is equivalent to the irreducible subquotient of* $\mathrm{Ind}_P^G(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L \otimes 1)$ *containing* $\mu_\lambda^\vee$.

We prove (i) in the next section and (ii) in Section 7.

<u>6. Langlands parameters</u>. For $\lambda \in \Lambda$ let $P_\lambda^G = M_\lambda^G A_\lambda^G N_\lambda^G$ and $P_\lambda^M = M_\lambda^M A_\lambda^M N_\lambda^M$ be cuspidal parabolic subgroups of G and M,

respectively, associated to the K-type $\delta_\lambda^\vee$, respectively the $M \cap K$-type $\delta_\lambda^{M\vee}$ by [12] Proposition 5.3.3, and let σ_λ^G and σ_λ^M be the associated discrete series representations of M_λ^G and M_λ^M, (cf. [12] Lemma 6.6.12). Notice that only the associate classes of P_λ^G and P_λ^M are uniquely determined.

<u>Lemma 3</u>. *We can choose* P_λ^G *and* P_λ^M *such that* $P_\lambda^G \subset P$ *and* $P_\lambda^M = P_\lambda^G \cap M$. *Then* $M_\lambda^M = M_\lambda^G$ *and moreover* $\sigma_\lambda^M = \sigma_\lambda^G$.

The proof is similar to the proof of [8] Lemma 6.5, and we omit it.

In particular $\mathfrak{a}_\lambda^G = \mathfrak{a}_\lambda^M \oplus \mathfrak{a}$.

Assume (8) and let $\nu_\lambda^G \in (\mathfrak{a}_\lambda^G)_{\mathbb{C}}^*$ and $\nu_\lambda^M \in (\mathfrak{a}_\lambda^M)_{\mathbb{C}}^*$ be the Langlands parameters of T^λ and π_λ^M, respectively.

<u>Proof</u> of Theorem 2 (i): Since by definition π_λ^M is a subquotient of $\mathrm{Ind}_{P_\lambda^M}^M (\sigma_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^M \otimes 1)$, the composition factors of $\mathrm{Ind}_P^G(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L \otimes 1)$ are also composition factors of $\mathrm{Ind}_{P_\lambda^G}^G (\sigma_\lambda^M \otimes (\nu_\lambda^M + \nu_\lambda^L) \otimes 1)$ using induction by stages. Theorem 2 (i) then follows from Lemma 3. □

Though Theorem 2(ii) is still to be proved, we observe the following corollary to this and the preceding proof of Theorem 2 (i):

<u>Corollary</u>: $\nu_\lambda^G = \nu_\lambda^M + \nu_\lambda^L$.

Thus the determination of Langlands parameters of Flensted-Jensen's representations is reduced to the case of symmetric spaces satisfying Condition D.

For "large" values of λ, π_λ^M is itself in the discrete series of M (cf. Section 4), so $\sigma_\lambda^M = \pi_\lambda^M$ and thus Theorem 2 (ii) implies:

<u>Theorem 3</u>. *There is a constant* $c_1 \geq 0$ *such that if* $\lambda \in \Lambda$ *and*

$$(9) \qquad \langle \lambda|_{\mathfrak{t}}, \alpha|_{\mathfrak{t}} \rangle > c_1 \quad \textit{for all} \quad \alpha \in \Delta^+ \quad \textit{with} \quad \alpha|_{\mathfrak{t}} \neq 0$$

then P, π_λ^M, ν_λ^L *and* μ_λ *constitute a set of Langlands parameters for* T^λ (i.e. $T^\lambda \simeq J_G(P, \pi_\lambda^M, \nu_\lambda^L, \mu_\lambda)$ in the notation of [8] Section 3).

Since we need Theorem 3 in our proof of Theorem 2 (ii), we indicate how to prove the former without reference to the latter.

Proof: The proof follows that of [8] Lemma 6.7 with only minor modifications (see also [11], proof of Proposition 4.13). In short, since $T^{\lambda\vee} \simeq X(\ell_{\mathfrak{c}} + n_1, V_\lambda, \mu_\lambda)$, (cf. the proof of Theorem 1), the a-parameters of $T^{\lambda\vee}$ and V_λ in the Langlands classification coincide when μ_λ is sufficiently "large", which is ensured by (9). V_λ however, has the same a-parameter as $\bar{V}_\lambda$, and since $\bar{V}_\lambda$ is spherical this is $-\nu_\lambda^L$. □

Remark. In particular, Theorems 1 and 3 generalize the results of [8] to the fundamental series for G/H. For these representations, the results have been obtained independently by G. Ólafsson [6], where they are also generalized to arbitrary real reductive linear groups (in the sense of [12] p. 1).

7. Proof of Theorem 2 (ii). From Theorem 3 the statement of Theorem 2 (ii) immediately follows for sufficiently large values of λ. We will now prove Theorem 2 (ii) in general by explicit construction of a C^∞-vector for the induced representation $\mathrm{Ind}_{P_\lambda}^G(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L \otimes 1)$, generating a subrepresentation which contains T^λ as a quotient.

Consider the K-type δ_λ of highest weight μ_λ. Let U_λ be a representation space for δ_λ, and assume that δ_λ is unitary on U_λ. Let u_0 and u_λ in U_λ be a $K \cap H$-fixed vector and a vector of weight μ_λ respectively, normalized to $(u_\lambda, u_0) = 1$.

Define $\rho_P \in a^*$ by $\rho_P = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_n$. Guided by [3] Eq. (3.18) we attempt a definition of a function φ_λ on G for $\lambda \in \Lambda$:

$$\varphi_\lambda(kxhan) = \int_{(M\cap K\cap H)_e} (\delta_\lambda(kl)u_\lambda, u_0)e^{\langle -\lambda-\rho, H(x^{-1}l)\rangle} dl \; e^{\langle -\nu_\lambda^L - \rho_P, \log a\rangle} \tag{10}$$

for $k \in K$, $x \in (M\cap G_0)_e$, $h \in (M\cap H)_e$, $a \in A$ and $n \in N$. The term $H(x^{-1}l)$ appearing in (10) is defined using the Iwasawa projection corresponding to Δ^+ of the dual group G^0 - see [3] or [4].

Proposition 1. *Eq.* (10) *defines a nonzero* C^∞-*function* φ_λ *on* G *which is* K-*finite of the irreducible type* $\mu_\lambda^\vee$. *When* (8) *holds the function* $m \to \varphi_\lambda(gm)$ *on* M *belongs to* $L^2(M/(M\cap H)_e)$ *for each* $g \in G$, *and is in the representation space of* π_λ^M.

Proof: For connected semisimple M it follows from [9] Example 3.5 that the formula

$$(11)\qquad \Psi_\lambda(kxh) = \int_{(M\cap K\cap H)_e} \delta_\lambda(kl)u_\lambda e^{\langle -\lambda-\rho_m, H(x^{-1}l)\rangle} dl$$

for $k \in M \cap K$, $x \in (M\cap G_0)_e$ and $h \in (M\cap H)_e$, gives a well defined U_λ-valued C^∞-function on M satisfying $\Psi_\lambda(km) = \delta_\lambda(k)\Psi_\lambda(m)$ for $k \in M \cap K$, $m \in M$. Moreover, when (8) holds the function $m \to (\Psi_\lambda(m), u_0)$ is in $L^2(M/(M\cap H)_e)$ and generates π_λ^M.

The preceding remarks are easily generalized to the general nonconnected reductive M.

From (11) we have that (10) is equivalent to

$$(12)\qquad \varphi_\lambda(k\,man) = (\delta_\lambda(k)\Psi_\lambda(m), u_0)e^{\langle -\nu_\lambda^L-\rho_P,\ \log a\rangle}$$

for $k \in K$, $m \in M$, $a \in A$ and $n \in N$. From this Proposition 1 follows.

□

From Proposition 1 we see that we may regard φ_λ as a C^∞-vector for $\mathrm{Ind}_P^G(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L \otimes 1)$. Since φ_λ is K-finite of type $\mu_\lambda^\vee$ which has multiplicity one, φ_λ is a joint eigenvector for $U(g)^K$.

Proposition 2. *The eigenvalues for* $U(g)^K$ *of* φ_λ *and* ψ_λ *are equal.*

Proof: Let $u \in U(g)^K$. We will first prove the existence of an element $u_1 \in U(a^0)$ such that $u\varphi_\lambda = u_1(\lambda)\varphi_\lambda$ for all $\lambda \in \Lambda$.

By symmetrization we identify the symmetric algebra $S(k+m)$ with a subspace of $U(g)$. Since $g = n \oplus a \oplus (m+k)$ we can determine elements $v_1,\dots,v_p$ in $U(a)$ and $w_1,\dots,w_p$ in $S(k+m)$ such that $u - \Sigma_{i=1}^p v_i w_i \in nU(g)$ (cf. [2] 2.4.14), and since a and $m \cap k$ commute we may assume that w_i is centralized by $m \cap k$ $(i=1,\dots,p)$.

Put $\varphi_\lambda^y(g) = \varphi_\lambda(yg)$ for $y,g \in G$, then since $u \in U(g)^K$ we have that $(u\varphi_\lambda)(yg) = (u\varphi_\lambda^y)(g)$ for $y \in K$. Using the decomposition $G = KM_eAN$ we may take $g = man$, $m \in M_e$, $a \in A$, $n \in N$. Since φ_λ is invariant under N and homogeneous under A from the right we get

$$(13) \qquad (u\varphi_\lambda)(yman) = \Sigma_{i=1}^{p} v_i(-\nu_\lambda^L-\rho_p)(w_i\varphi_\lambda^y)(m)e^{\langle -\nu_\lambda^L-\rho_p, \log a\rangle}$$

To prove our claim that $u\varphi_\lambda = u_1(\lambda)\varphi_\lambda$ for some $u_1 \in U(\mathfrak{a}^0)$ it is then clearly enough to prove that for each $w \in S(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}}$ there exists $w_0 \in U(\mathfrak{t})$ such that

$$(14) \qquad (w\varphi_\lambda^y)(m) = w_0(\lambda|_{\mathfrak{t}})\varphi_\lambda^y(m)$$

for all $\lambda \in \Lambda$ and $m \in M_e$, $y \in K$.

Let $w \in S(\mathfrak{m}+\mathfrak{k})^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k}}$ and write $w = \Sigma_{j=1}^{q} a_j \otimes b_j$ where $a_j \in S(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p})$ and $b_j \in S(\mathfrak{k})$, according to the identification $S(\mathfrak{m}+\mathfrak{k}) \simeq S(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{p}) \otimes S(\mathfrak{k})$. Denote by $v \to v'$ the principal antiautomorphism of $U(\mathfrak{g})$. From (12) we then get for $m \in M_e$ that:

$$(w\varphi_\lambda^y)(m) = \Sigma_{j=1}^{q} (\delta_\lambda(y)\delta_\lambda(b_j')(a_j\Psi_\lambda)(m), u_0).$$

Let M^0 denote the group dual to M by Flensted-Jensen's duality. Put $f(x) = e^{\langle -\lambda-\rho_m, H(x)\rangle}$ for $x \in M^0$, and write $m = kxh$ where $k \in (M\cap K)_e$, $x \in (M\cap G_0)_e$ and $h \in (M\cap H)_e$, then (11) gives that

$$\Psi_\lambda(m) = \int_{(M\cap K\cap H)_e} \delta_\lambda(kl)u_\lambda f(x^{-1}l)dl$$

and therefore it follows that

$$(a_j\Psi_\lambda)(m) = \int_{(M\cap K\cap H)_e} \delta_\lambda(kl)u_\lambda([Ad(kl)^{-1}a_j]_L f)(x^{-1}l)dl$$

where $[Ad(kl)^{-1}a_j]_L$ denotes $Ad(kl)^{-1}a_j$ acting as a left invariant differential operator on $C^\infty(M^0)$ (cf. [9] Eq.'s (2.3) and (4.6)).

Now we get

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{j=1}^{q} \delta_\lambda(b_j')(a_j\Psi_\lambda)(m)\\
&= \int_{(M\cap K\cap H)_e} \delta_\lambda(kl)\{\Sigma_{j=1}^{q} \delta_\lambda(Ad(kl)^{-1}b_j')u_\lambda([Ad(kl)^{-1}a_j]_L f)(x^{-1}l)\}dl\\
&= \int_{(M\cap K\cap H)_e} \delta_\lambda(kl)\{\Sigma_{j=1}^{q} \delta_\lambda(b_j')u_\lambda(a_{jL}f)(x^{-1}l)\}dl
\end{aligned}$$

since $w = \Sigma a_j \otimes b_j$ commutes with kl.

Using the decompositions

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} = \tau(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{n}^0) \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}^{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{n}^0)$$

and

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_{c,1} \oplus (\bar{\mathfrak{l}}\cap\mathfrak{k})_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \tau(\mathfrak{n}_{c,1})$$

where $n_{c,1} = \Sigma_{\alpha\in\Sigma^+_{c,1}} k^{\alpha}_{\mathbb{C}}$, we can define a map $\eta\colon S(m+k)^{\ell} \to U(\ell)$ uniquely by

$$w-\eta(w) \in (n_{c,1}+\bar{\ell}\cap k_{\mathbb{C}})S(m+k) + S(m+k)(m^{\ell}_{\mathbb{C}}\cap p_{\mathbb{C}}+m_{\mathbb{C}}\cap n^0\cap p_{\mathbb{C}}) .$$

Using Lemma 1 one can see that $\delta_{\lambda}(x)u_{\lambda} = 0$ for $X \in n_{c,1} + \bar{\ell}\cap k_{\mathbb{C}}$. Since also $X_L f = 0$ for $X \in m^{\ell}_{\mathbb{C}} + m_{\mathbb{C}} \cap n^0$, it follows then that

$$(w\varphi^{Y}_{\lambda})(m) = \eta(w)(\mu_{\lambda}|_{\ell})\varphi^{Y}_{\lambda}(m)$$

as claimed in (14).

To finish the proof of Proposition 2 we prove that $u_1(\lambda) = \gamma(u)(-\lambda-\rho)$ for all $\lambda \in a^{0*}_{\mathbb{C}}$. Since φ_{λ} generates the K-type $\check{\mu}_{\lambda}$ in $\mathrm{Ind}^{G}_{P}(\pi^{M}_{\lambda} \otimes \nu^{L}_{\lambda} \otimes 1)$ this follows immediately from Theorem 3 when (9) holds. Since u_1 and $\gamma(u)$ are polynomials in λ the assertion holds for all λ.

□

Theorem 2 (ii) follows immediately from Proposition 2.

Remark. It would be interesting if one could construct a G-homomorphism from the space

$$\{f \in C^{\infty}(G) \mid f(gman) = f(g)e^{\langle -\nu^{L}_{\lambda}-\rho_P,\log a\rangle}$$
$$\forall m \in (M\cap H)_e,\ a \in A,\ n \in N,\ g \in G\}$$

to $C^{\infty}(G/H)$, taking φ_{λ} to ψ_{λ}. In the special case of $\sigma = \Theta$, ψ_{λ} is the spherical function, P is a minimal parabolic and φ_{λ} is the function $g \to e^{\langle\lambda-\rho,H(g)\rangle}$, and thus the homomorphism searched for is the Poisson transformation. In general the work of Oshima (cf. [7]) can probably be used to construct such a homomorphism.

8. Unitarity. Let $\lambda \in \Lambda$ and consider the following condition on λ

(15) $\langle\lambda|_{\ell}, \alpha|_{\ell}\rangle > 0$ for all $\alpha \in \Delta^{+}$ with $\alpha|_{a^0\cap p} = 0$.

Theorem 4. *Assume* (15), *and moreover that* λ *is purely imaginary on* $a^0 \cap p$. *Then* T^{λ} *is unitarizable.*

<u>Proof</u>: Choose a parabolic subgroup $\tilde{P} = \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}$ with Langlands decomposition as indicated, such that $\tilde{M}\tilde{A} = G^{a^0 \cap p}$ and $P \subset \tilde{P}$. Then $\tilde{a}$ is τ-invariant, and $\tilde{a} \cap q = a^0 \cap p$ since $\tilde{a}$ centralizes a^0 and a^0 is maximal in q. $\tilde{M}$ is invariant under τ and t is a maximal abelian subspace of $\tilde{m} \cap q$, and thus $\tilde{M}/(\tilde{M}\cap H)_e$ satisfies equal rank. By (15) $\lambda|_t$ determines a representation $\pi_\lambda^{\tilde{M}}$ in the discrete series of $\tilde{M}/(\tilde{M}\cap H)_e$.

Observe that $a = (a\cap\tilde{m}) \oplus \tilde{a}$. Put $\tilde{\ell} = \ell \cap \tilde{m}$, $\tilde{n}_\ell = n_\ell \cap \tilde{\ell}$ and $\tilde{\rho}_\ell = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_{\tilde{n}_\ell} \in (a\cap\tilde{m})^*$. It is then easily seen that $\tilde{\rho}_\ell = \rho_\ell|_{a\cap\tilde{m}}$. Therefore $\pi_\lambda^{\tilde{M}}$ is a subquotient of $\operatorname{Ind}_{P\cap\tilde{M}}^{\tilde{M}}(\pi_\lambda^M \otimes \nu_\lambda^L|_{a\cap\tilde{m}} \otimes 1)$ by Theorem 2, and using induction by stages and Theorem 2 once more we get that T^λ is a subquotient of $\operatorname{Ind}_{\tilde{P}}^G(\pi_\lambda^{\tilde{M}} \otimes \nu_{\lambda|\tilde{a}}^L \otimes 1)$.

Now $\tilde{a} = \tilde{a} \cap h \oplus a^0 \cap p$ and $\rho_{\ell|\tilde{a}\cap h} = 0$, therefore $\nu_{\lambda|\tilde{a}}^L$ is purely imaginary by (5), and the theorem follows. □

<u>Remark</u>. Theorem 4 was proved for the fundamental series for large values of λ by Ólafsson ([5]).

REFERENCES

[1] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. 74 (1957), 85-177.

[2] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthiers-Villars, Paris 1974.

[3] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. 111 (1980), 253-311.

[4] M. Flensted-Jensen, K-finite joint eigenfunctions of $U(g)^K$ on a non-Riemannian semisimple symmetric space G/H. Actes du Colloque d'Analyse Harmonique Non Commutative 1980, Marseille-Luminy. Lect. Notes in Math. 880 (1981), pp. 91-101.

[5] G. Ólafsson, Die Langlands-Klassifizierung, unitäre Darstellungen und die Flensted-Jensensche fundamentale Reihe, Seminar Prof. Maak, Nr. 39, Göttingen 1982.

[6] G. Ólafsson, Die Langlands-Parameter für die Flensted-Jensensche fundamentale Reihe, preprint 1983.

[7] T. Oshima, Poisson transformations on affine symmetric spaces, Proc. Japan Acad. Ser. A, 55 (1979), 323-327.

[8] H. Schlichtkrull, The Langlands Parameters of Flensted-Jensen's Discrete Series for Semisimple Symmetric Spaces, J. Func. Anal. 50 (1983), 133-150.

[9] H. Schlichtkrull, A Series of Unitary Irreducible Representations Induced from a Symmetric Subgroup of a Semisimple Lie Group, Invent. Math. 68 (1982), 497-516.

[10] H. Schlichtkrull, Applications of Hyperfunction Theory to Representations of Semisimple Lie Groups, Prize Essay, Københavns Universitet 1983.

[11] B. Speh and D. Vogan, Reducibility of generalized principal series representations, Acta Math. 145 (1980), 227-299.

[12] D. Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, Boston 1981.

[13] T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces. Preprint.

Københavns Universitet
Matematisk Institut
p.t.
Institute for Advanced Study

Princeton
NJ 08540

USA

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NOLAN R. WALLACH

The asymptotic behavior of holomorphic representations

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 291-305
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__291_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15,1984,p. 291-305

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF HOLOMORPHIC REPRESENTATIONS

By

Nolan R. Wallach*

Abstract. In this article the Jacquet module of a holomorphic representation is computed by a direct and elementary method. The preliminary results involve the study of the notion of opposite parabolic subalgebra.

* Research partially supported by an N.S.F. grant.

Introduction.

Let $\underline{g}_o$ be a semi-simple Lie algebra over R. Let $\theta:\underline{g}_o \to \underline{g}_o$ be a Cartan involution of $\underline{g}_o$ and let $\underline{k}_o = \{X \in \underline{g}_o \mid \theta X = X\}$. Let $\underline{g}$ (resp. $\underline{k}$) denote the complexification of $\underline{g}_o$ (resp. $\underline{k}_o$). Then a $(\underline{g}, \underline{k})$ - module, M, is said to be holomorphic if there is a θ-stable Borel subalgebra, $\underline{b}$, such that M is in the Bernstein-Gelfand-Gelfand category $\mathcal{O}$ for $\underline{b}$. It is not hard to show that if there exists an infinite dimensional holomorphic $(\underline{g},\underline{k})$-module, then $\underline{g}_o$ contains a θ-stable simple ideal $\underline{g}_o'$ such that $(\underline{g}_o', \underline{k}_o \cap \underline{g}_o')$ is a symmetric pair of Hermitian type.

The purpose of this article is to give a description of the Jacquet module of an irreducible holomorphic representation. No doubt many of the results of this article are known to several specialists in the field (for example, Casselman and Zuckerman have communicated certain less precise results to us). However, there is no place in the literature where one can find a reference. The importance of these results now stems from the fact that the unitarizable holomorphic representations have been classified ([1]).

As it turns out the determination of the Jacquet module of a holomorphic representation is relatively easy once one understands the notion of "opposite parabolic". The first half of this paper is devoted to a rather detailed study of opposite parabolics and the relationship between their categories $\mathcal{O}$. We give here an example for $\underline{s\ell}(2,\mathbb{C}) = \underline{g}$. Let

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Then $\underline{b} = \mathbb{C}H + \mathbb{C}X$ and $\underline{b}' = \mathbb{C}h + \mathbb{C}x$ are opposite parabolics. Indeed

$$\underline{b} \cap \underline{b}' = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Using $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ as a Cartan subalgebra of $\underline{g}$ one sees that $\underline{b}'$ is the opposite Borel subalgebra in the usual sense.

HOLOMORPHIC REPRESENTATIONS

As a consequence of our results in the second part of this paper we describe the Langlands parameters of holomorphic representations. Collingwood has informed us that he knows how to do this also (although we have not seen his results or methods).

1. Remarks on the Category $\mathcal{O}$.

Let $\mathfrak{g}$ be a reductive Lie algebra over $\mathbb{C}$. Let $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ be a Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$. We define the category $\mathcal{O}'(\mathfrak{b})$ to be the subcategory of the category $M(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$-modules consisting of those $M \in M(\mathfrak{g})$ such that

(1) M is finitely generated as a $U(\mathfrak{g})$-module.

(2) If $m \in M$, then $\dim U(\mathfrak{b})\cdot m < \infty$.

Lemma 1.1. Let $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ be a Cartan subalgebra of $\mathfrak{b}$. If $M \in \mathcal{O}'(\mathfrak{b})$ and $\mathfrak{h}$ acts semi-simply on M then if $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{b}$ is a Cartan algebra of $\mathfrak{g}$ then $\mathfrak{h}'$ acts semi-simply on M.

Proof. Let $\mathfrak{n}(\mathfrak{b})$ be the nil radical of $\mathfrak{b}$. Then there is $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{b})$ such that $e^{\mathrm{ad}X}\cdot\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. By (2) we see that X acts locally nilpotently on M (i.e. if $m \in M$ there is $k = k(m)$ such that $X^{k(m)}m = 0$). Thus if $t \in \mathbb{C}$ we can form

$$T(t)\cdot m = \sum (t^n/n!)X^n m\,, \quad m \in M\ .$$

The sum is actually finite for all $m \in M$. By the obvious formal relations one has

$$T(t+S) = T(t)\ T(S)$$

$$\text{So}\ \ T(-1)\ T(1) = T(1)\ T(-1) = I\ .$$

Set $T = T(1)$. Then T is bijective on M. Also if $Y \in \mathfrak{g}$ then

$$T(t)\,Y\,m = (e^{t\,\mathrm{ad}X}\ Y)\ T(t)\,m\ .$$

Hence

$$Th\cdot m = (e^{\mathrm{ad}X}\ h)Tm\,, \quad h \in \mathfrak{h}\ .$$

This clearly implies the result.

We can thus define the category $\mathcal{O}(\mathfrak{b})$ to be the subcategory of $\mathcal{O}'(\mathfrak{b})$ consisting of these objects M of $\mathcal{O}'(\mathfrak{b})$ that are semi-simple relative to some Cartan subalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$.

Let $\mathcal{B}$ denote the space of all Borel subalgebras of $\mathfrak{g}$. If $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ we denote by $\bar{\mathcal{B}}(\mathfrak{b})$ the subset of all $\bar{\mathfrak{b}} \in \mathcal{B}$ such that $\bar{\mathfrak{b}}$ $\mathfrak{b}$ is a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$.

We describe $\bar{\mathcal{B}}(\mathfrak{b})$. Let $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$ be a Cartan subalgebra. Let $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ be the root system of $\mathfrak{g}$ with respect to $\mathfrak{h}$. Let Φ^+ be the system of positive roots of $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ corresponding to $\mathfrak{b}$. Then $\mathfrak{n}(\mathfrak{b}) = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Set $\bar{\mathfrak{n}}(\mathfrak{b},\mathfrak{h}) = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Then $\bar{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b},\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{n}}(\mathfrak{b},\mathfrak{h}) \in \mathcal{B}$. Clearly $\bar{\mathfrak{b}} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{h}$.

Lemma 1.2. Let $\underline{b} \in \mathcal{B}$. Then the following statements are equivalent

(1) $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$,

(2) there is $\underline{h} \subset \underline{b}$ such that $\underline{b}' = \underline{h} + \bar{\underline{n}}(\underline{b},\underline{h})$,

(3) $\underline{b}' \in \mathcal{B}$ and $\underline{b}' + \underline{b} = \underline{g}$.

Proof. (1) implies (2). Let $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. Let $\underline{h} = \underline{b}' \quad \underline{b}$. Then $\underline{n}(\underline{b}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \underline{g}_\alpha$, $\Phi^+ \subset \Phi(\underline{g},\underline{h})$ a system of positive roots. $\underline{n}(\underline{b}') = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \underline{g}_\alpha$, $\Psi \subset \Phi(\underline{g},\underline{h})$ a system of positive roots. Since $\underline{b}' \cap \underline{b} = \underline{h}$, $\Psi \cap \Phi^+ = \emptyset$. So $\Psi = -\Phi^+$.

That (2) implies (3) is clear.

To prove (3) implies (1) we note that $\dim(\underline{b}'+\underline{b}) = \dim \underline{b}' + \dim \underline{b} - \dim(\underline{b} \cap \underline{b}')$. $\dim \underline{b} = \ell + \dfrac{\dim \underline{g} - \ell}{2}$ for $\underline{b} \in \mathcal{B}$. Here ℓ is the rank of $\underline{g}$. Thus if $\underline{b}+\underline{b}' = \underline{g}$ $\dim \underline{g} = \dim \underline{g} + \ell - \dim(\underline{b} \cap \underline{b}')$. So $\dim \underline{b} \cap \underline{b}' = \ell$. The Bruhat lemma implies that $\underline{b} \cap \underline{b}'$ contains a Cartan subalgebra of $\underline{g}$. Hence $\underline{b} \cap \underline{b}'$ is a Cartan subalgebra of $\underline{g}$.

If $M \in \mathcal{M}$ we define

$$j_{\underline{b}}(M) = \{\lambda \in M^* \mid \underline{n}(\underline{b})^k \cdot \lambda = 0 \quad \text{for some } k\} .$$

Since $\underline{n}(\underline{b})$ acts nilpotently on $\underline{g}$ under ad it is trivial to see that

(3) $j_{\underline{b}}(M)$ is a $\underline{g}$ submodule of M^*.

Let $\underline{m} \subset \underline{g}$ be a Lie subalgebra such that the action of $\underline{m}$ on $\underline{g}$ relative to ad is completely reducible. Let $\mathcal{C}(\underline{g},\underline{m})$ denote the category of all $(\underline{g},\underline{m})$-modules. That is $M \in \mathcal{C}(\underline{g},\underline{m})$ if as an $\underline{m}$-module M splits into a direct sum of irreducible finite dimensional $\underline{m}$-modules. If $M \in \mathcal{C}(\underline{g},\underline{m})$ then we say that M is admissible if for every finite dimensional $\underline{m}$-module, F,

$$\dim \operatorname{Hom}_{\underline{m}}(F,M) < \infty .$$

Let $\mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$ denote the full category of all admissible objects in $\mathcal{C}(\underline{g},\underline{m})$. If $M \in \mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$ we define $\tilde{M}$ (the admissible dual of M) by

$$\tilde{M} = \{\lambda \in M^* \mid \dim U(\underline{m})\cdot\lambda < \infty\} .$$

Lemma 1.3. The functor $M \rightsquigarrow \tilde{M}$ defines an equivalence of categories between $\mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$ and $\mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})^{\mathrm{opp}}$ (the opposite category).

Proof. Let $\hat{\underline{m}}$ denote the set of equivalence classes of irreducible finite dimensional representations of $\underline{m}$. If $M \in \mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$, $\gamma \in \hat{\underline{m}}$ let $M(\gamma)$ denote the sum of all $\underline{m}$-submodules of M that are in γ. Then admissibility implies that $\dim M(\gamma) < \infty$. Now it is easy to see that $\tilde{M} = \bigoplus_{\gamma} M(\gamma)^*$ as an $\underline{m}$-module. Thus $\tilde{M} \in \mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$. It is also trivial to check that $\tilde{(\tilde{M})} = M$ for $M \in \mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$ (in the sense that $M \subset (M^*)^*$ naturally), and $M \rightsquigarrow \tilde{M}$ is an exact functor from $\mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$ to $\mathcal{A}(\underline{g},\underline{m})$. The result now follows.

We note that if $\underline{b} \in \mathcal{B}$ and if $\underline{h} \subset \underline{b}$ is a Cartan subalgebra then

$$\mathcal{O}(\underline{b}) = \mathcal{O}'(\underline{b}) \cap A(\underline{g},\underline{h}).$$

Lemma 1.4. Let $\underline{b} \in \mathcal{B}$, $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. If $M \in \mathcal{O}(\underline{b})$ then $j_{\underline{b}}(M) = \tilde{M}$ where $\tilde{M}$ is defined relative to $\underline{h} = \underline{b} \cap \underline{b}'$.

Proof. $\underline{b} = \underline{h} + \underline{n}$, $\underline{b}' = \underline{h} + \bar{\underline{n}}(\underline{b},\underline{h}) = \underline{h} + \bar{\underline{n}}$. Since $M \in \mathcal{O}'(\underline{b})$, M is finitely generated as a $U(\bar{\underline{n}})$-module. Now $j_{\underline{b}'}(M) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (M/\bar{\underline{n}}^k M)^*$. Thus since $\dim M/\bar{\underline{n}}^k M < \infty$, $j_{\underline{b}'}(M) \subset \tilde{M}$. Let $M = \bigoplus_{\xi \in \underline{h}^*} M(\xi)$ $(\underline{h}^* = \hat{\underline{h}})$. If $\lambda \in \tilde{M}$ then $\lambda = \sum_{\xi \in S_\lambda} \lambda_\xi$, $S_\lambda \subset \underline{h}^*$ a finite set, $\lambda_\xi \in M(\xi)^*$. We note that $(\bar{\underline{n}}^k M) \cap M(\xi) = (0)$, $\xi \in S_\lambda$ for k sufficiently large. Thus $\bar{\underline{n}}^k \lambda = 0$ for k sufficiently large. Hence $\tilde{M} \subset j_{\underline{b}'}(M)$.

It is well known that if $M \in \mathcal{O}(\underline{b})$ then M has finite length. Thus if $\bar{\underline{h}} \subset \underline{b}$ is a Cartan subalgebra, $\tilde{M}$ is also finitely generated. Combining this observation with the previous results we have

Proposition 1.5. Let $\underline{b} \in \mathcal{B}$. Let $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. Then

(1) If $M \in \mathcal{O}(\underline{b})$, $j_{\underline{b}'}(M) \in \mathcal{O}(\underline{b}')$.

(2) The functor $M \mapsto j_{\underline{b}'}(M)$ defines an equivalence of categories between $\mathcal{O}(\underline{b})$ and $\mathcal{O}(\underline{b}')^{\mathrm{opp}}$.

Let now $\underline{q} \subset \underline{g}$ be a parabolic subalgebra. Let $\mathcal{B}(\underline{q}) = \{\underline{b} \in \mathcal{B} \mid \underline{b} \subset \underline{q}\}$. We set $\mathcal{O}(q) = \bigcap_{\underline{b} \in \mathcal{B}(\underline{q})} \mathcal{O}(\underline{b})$.

Lemma 1.6. Let $\underline{q} = \underline{m} + \underline{n}(\underline{q})$ ($\underline{n}(\underline{q})$ the nilradical of $\underline{q}$ and $\underline{m}$ a Levi factor of $\underline{q}$). Let $\underline{h} \subset \underline{m}$ be a Cartan subalgebra of $\underline{m}$. Let $\underline{b} \in \mathcal{B}(\underline{q})$ be such that $\underline{h} \subset \underline{b}$. Then

$$\mathcal{O}(\underline{q}) = \mathcal{O}(\underline{b}) \cap \mathcal{C}(\underline{g},\underline{m}) .$$

Proof. Let $M \in \mathcal{O}(\underline{q})$. $\underline{b} = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \underline{g}_\alpha$, $\Phi^+ \subset \Phi(\underline{g},\underline{h})$ a system of positive roots. $\underline{m} = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\underline{m},\underline{h})} \underline{g}_\alpha$. Let $\sum = \Phi^+ - \Phi(\underline{m},\underline{h})$. Then $\underline{b}' = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \sum} \underline{g}_{\alpha} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ - \sum} \underline{g}_\alpha \in \mathcal{B}(\underline{q})$. Set $\underline{n}' = \bigoplus_{\alpha \notin \sum} \underline{g}_\alpha$, $\bar{\underline{n}}' = \bigoplus_{\alpha \notin \sum} \underline{g}_{-\alpha}$. Then

$$\underline{m} = \bar{\underline{n}}' + \underline{h} + \underline{n}' .$$

If $m \in M$ then $\dim U(\underline{b}'')\cdot m < \infty$, $\underline{b}'' \in \mathcal{B}(\underline{q})$. Thus $\dim U(\underline{m})m < \infty$ since $\bar{\underline{n}}' \subset \underline{b}'$, $\underline{h} + \underline{n}' \subset \underline{b}$. Since $\underline{h}$ acts semi-simply on M we see that

$$M \in \mathcal{O}(\underline{b}) \cap \mathcal{C}(\underline{g},\underline{m}) .$$

Let $M \in \mathcal{O}(\underline{b}) \cap \mathcal{C}(\underline{g}.\underline{m})$. Let $\underline{b}' \in \mathcal{B}(\underline{g})$. Since $\underline{m}+\underline{b} = \underline{g}$ we see that if $m \in M$, $\dim U(\underline{g})\cdot m < \infty$. Thus $\dim U(\underline{b}')m < \infty$, $m \in M$. Since $\underline{b} \cap \underline{b}' \supset \underline{h}'$, a Cartan subalgebra of $\underline{g}$, Lemma 1.1 implies $M \in \mathcal{O}(\underline{b}')$.

Let now P be the set of all parabolic subalgebras of $\underline{g}$. If $\underline{q} \in P$ define $\bar{P}(\underline{q})$ to be the set of all $\underline{q}' \in P$ such that $\underline{q} \cap \underline{q}'$ is a Levi factor of both $\underline{q}$ and $\underline{q}'$.

We describe the elements of $\bar{P}(\underline{q})$. Let $\underline{h}$ be a Cartan subalgebra of $\underline{g}$, $\underline{h} \subset \underline{q}$. Let $\underline{n}(\underline{q})$ be the nilradical of $\underline{q}$. Let $\Phi(\underline{q},\underline{h}) = \{\alpha \in \Phi \mid \underline{g}_\alpha \subset \underline{q}\}$. Set

$$\Psi(\underline{q},\underline{h}) = \{\alpha \in \Phi(\underline{q},\underline{h}) \mid \underline{g}_\alpha \subset \underline{n}(\underline{q})\} .$$

Let $\underline{m} = \underline{m}(\underline{q},\underline{h}) = \underline{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\underline{q},\underline{h})-\Psi(\underline{q},\underline{h})} \underline{g}_\alpha$. Then $\underline{m}$ is a Levi factor of $\underline{q}$.

Set $\bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h}) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi(\underline{q},\underline{h})} \underline{g}_{-\alpha}$. Then $\bar{q} = \underline{m} \oplus \bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h}) \in \bar{P}(\underline{q})$.

Lemma 1.6. Let $q \in P$. Then $\underline{q}' \in \bar{P}(\underline{q})$ if and only if $\underline{q}' \in P$ and there exists $\underline{h} \subset \underline{q}$ a Cartan subalgebra of $\underline{g}$ such that $\underline{q}' = \underline{m}(\underline{q},\underline{h}) \oplus \bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h})$.

Proof. Let $\underline{q}' \in \bar{P}(\underline{q})$. Let $\underline{m} = \underline{q}' \cap \underline{q}$. Let $\underline{h} \subset \underline{m}$ be a Cartan subalgebra of $\underline{g}$. Then $\underline{m} = \underline{m}(\underline{q},\underline{h})$, $\underline{n}(\underline{q}') = \bigoplus_{\alpha \in \Psi(\underline{q}',\underline{h})} \underline{g}_\alpha$, $\underline{n}(\underline{q}) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi(\underline{q},\underline{h})} \underline{g}_\alpha$. Let $\underline{b}_1 \supset \underline{h}$ be a Borel subalgebra of $\underline{m}$. Let $\bar{b}_1(\underline{b},\underline{h})$ be as above. Then $\underline{b}_1 \oplus \underline{n}(\underline{q}) = \underline{b}$ and $\bar{\underline{b}}_1 \oplus \underline{n}(\underline{q}') = \underline{b}'$ are Borel subalgebra of $\underline{g}$. Now $\underline{b}' \cap \underline{b} \subset \underline{q}' \cap \underline{q} = \underline{m}$. Hence $\underline{b}' \cap \underline{b} = \bar{\underline{b}}_1 \cap \underline{b}_1 = \underline{h}$. Thus $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. Hence $\Phi(\bar{\underline{b}}_1,\underline{h}) \cup \Psi(\underline{q}',\underline{h}) = -\Phi(\underline{b},\underline{h}) \cup -\Psi(\underline{q},\underline{n})$. Thus $\Psi(\underline{q}',\underline{h}) = -\Psi(\underline{q},\underline{h})$. Hence $\underline{n}(\underline{q}') = \bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h})$. Q.E.D.

If $\underline{q} \in P$, $M \in \mathcal{M}$ define

$$j_{\underline{q}}(M) = \{\lambda \in M^* \mid \underline{n}(\underline{q})^k \cdot \lambda = 0 \text{ for some } k\} .$$

Then $j_{\underline{q}} : \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ is a functor.

Lemma 1.7. Let $\underline{q} \in P$, $\underline{q}' \in \bar{P}(\underline{q})$ and $\underline{q}'' \in P$ such that $\underline{q}' \supset \underline{q}''$. Then

$$j_{\underline{q}'}(M) = j_{\underline{q}''}(M) \text{ for all } M \in \mathcal{O}(\underline{q}) .$$

Proof. Since $\underline{n}(\underline{q}'') \supset \underline{n}(\underline{q}')$ it is clear that $j_{\underline{q}''}(M) \subset j_{\underline{q}'}(M)$.

Let $\underline{h} \subset \underline{q}$ be a Cartan subalgebra such that $\underline{q}' = \underline{m}(\underline{q},\underline{h}) + \bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h})$.

Since $\underline{g} = \bar{\underline{n}}(\underline{q},\underline{h}) + \underline{m}(\underline{q},\underline{h}) + \underline{n}(\underline{q})$, Lemma 1.6 implies that M is finitely generated as a $U(\underline{n}(\underline{q}'))$-module. Thus

$$\dim M/\underline{n}(\underline{q}')^k M < \infty , \quad k = 1,2,\ldots,$$

This implies that ($\underline{m} = \underline{m}(\underline{q},\underline{h})$),

(1) If $\lambda \in j_{\underline{q}'}(M)$ then $\dim U(\underline{m})\cdot\lambda < \infty$.

Now $\underline{n}(\underline{q}'') = \underline{n}(\underline{q}'') \cap \underline{m} + \underline{n}(\underline{q}')$. Using (1) we see that if $\lambda \in j_{\underline{q}'}(M)$ then

$$(\underline{n}(\underline{q}'')\cap \underline{m})^{k}\cdot\lambda = 0 \quad \text{for some } k \ .$$

Thus $\underline{n}(\underline{q}'')^{k'}\cdot\lambda = 0$ for some k'. Thus $j_{\underline{q}'}(M) \subset j_{\underline{q}''}(M)$.

Proposition 1.8. Let $\underline{q} \in P$, $\underline{q}' \in \bar{P}(\underline{q})$. Then the functor $M \rightsquigarrow j_{\underline{q}'}(M)$ is an equivalence of categories between $\mathcal{O}(\underline{q})$ and $\mathcal{O}(\underline{q}')^{opp}$.

Proof. Let $\underline{b}' \in \mathcal{B}(\underline{q}')$. Then there exists $\underline{b} \in \mathcal{B}(\underline{q})$ such that $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. By Lemma 1.7, $j_{\underline{q}'}(M) = j_{\underline{b}'}(M) \in \mathcal{O}(\underline{b}')$. Hence $j_{\underline{q}'}(M) \in \mathcal{O}(\underline{q}')$. The rest follows from Lemma 1.7 and Proposition 1.5.

The last results we need have to do with parametrizing the irreducibile objects $\mathcal{O}(\underline{b})$ for $\underline{b} \in \mathcal{B}$. Let $L \in \mathcal{O}(\underline{b})$ be irreducible. Then

$$\dim L^{\underline{n}(\underline{b})} = \{v \in L \mid \underline{n}(\underline{b})\, v = 0\} = 1 \ .$$

Hence $\underline{b}/\underline{n}(\underline{b})$ acts on $L^{\underline{n}(\underline{b})}$ by $\Lambda \in (\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}))^*$. As is well known Λ determines L up to equivalence. If $\Lambda \in (\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}))^*$ then Λ defines a one dimensional representation C_Λ of $\underline{b}$. Let $M^\Lambda = U(\underline{g}) \underset{U(\underline{b})}{\otimes} C_\Lambda$ (the usual Verma module). Let L^Λ be the irreducible non-zero quotient of M^Λ. Then $(L^\Lambda)^{\underline{n}(\underline{b})} = C_\Lambda$ as a $\underline{b}$-module.

We set $L^\Lambda = L^\Lambda_{\underline{b}}$ for $\Lambda \in (\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}))^*$.

If $\underline{h} \subset \underline{b}$ is a Cartan subalgebra then $\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}) \cong \underline{h}$. Thus we may look upon the roots of $\underline{h}$ on $\underline{b}$ as elements of $(\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}))^*$ denoted $\Phi(\underline{b})$. We can also pull back the Killing form to get a non-degenerate form on $\underline{b}/\underline{n}(\underline{b})$ which is clearly independent of the choice of $\underline{h}$. We therefore get a form $(\ ,\ )$ on $(\underline{b}/\underline{n}(\underline{b}))^*$.

Let now $\underline{q} \in P$. Then $\mathcal{O}(\underline{q}) = \bigcap_{\underline{b}\in\mathcal{B}(\underline{q})} \mathcal{O}(\underline{b})$. If $\underline{b} \in \mathcal{B}(\underline{q})$ then $\underline{b}/\underline{n}(\underline{q}) \in \mathcal{B}(\underline{q}/\underline{n}(\underline{q}))$. Clearly $\Phi(\underline{b}/\underline{n}(\underline{q})) \subset \Phi(\underline{b})$. One has $L^\Lambda_{\underline{b}} \in \mathcal{O}(\underline{q})$ if and only if

$$2(\Lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$$

for $\alpha \in \Phi(\underline{b}/\underline{n}(\underline{q}))$.

It is also convenient to choose $\underline{h} \subset \underline{b}$, $\underline{h}$ a Cartan subalgebra of $\underline{b}$. Then if $\Lambda \in \underline{h}^*$ we may extend Λ to $\underline{b}$ by $\Lambda(\underline{n}(\underline{b})) = 0$. Thus we have $L^\Lambda_{\underline{b}} = L^\Lambda_{\underline{b},\underline{h}}$, $\Lambda \in \underline{h}^*$. Let $\underline{b}' \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$. And let C be an inner automorphism of $\underline{g}$ such that $C\,\bar{\underline{b}}(\underline{b},\underline{h}) = \underline{b}'$. Then $\underline{b}' = C\underline{h} \oplus C\,\bar{\underline{n}}(\underline{b},\underline{n})$.

Lemma 1.9. $j_{\underline{b}'}(L^\Lambda_{\underline{b},\underline{h}}) \cong L^{-\Lambda\cdot C^{-1}}_{\underline{b}',C\underline{h}}$.

Proof. Proposition 1.5 implies that $L = j_{\underline{b}'}(L^\Lambda_{\underline{b}.\underline{h}})$ is irreducible and in $\mathcal{O}(\underline{b}')$. It is a simple matter to see that $L \cong L^{-\Lambda}_{\underline{b}'}$. Thus we need only see that $L^{-\Lambda}_{\underline{b}'} = L^{-\Lambda\cdot C^{-1}}_{\underline{b}',C\underline{h}}$. But $C\underline{h}$ acts on $(L^{-\Lambda}_{\underline{b}'})^{\underline{n}(\underline{b}')}$ by $-\Lambda$ pulled back from $\underline{b}'/\underline{n}(\underline{h}')$ to $C\underline{h}$. The lemma now follows.

2. Applications to Holomorphic Representations.

Let $\underline{g}_o$ be a real reductive Lie algebra. Let $\theta:\underline{g}_o \to \underline{g}_o$ be a Cartan involution. Let $\underline{k}_o = \{X \in \underline{g}_o \mid \theta X = X\}$, $\underline{r}_o = \{X \in \underline{g}_o \mid \theta X = -X\}$. We apologize to the reader for using $\underline{r}$ in place of the more customary $\underline{p}$ in order to save the notation $\underline{p}$ for parabolic subalgebras. If $\underline{c}_o$ is a Lie algebra or vector space over R we denote by $\underline{c}$ the complexification of $\underline{c}_o$. We say that $(\underline{g}_o,\underline{k}_o)$ is an irreducible symmetric pair if the action of $\underline{k}_o$ on $\underline{r}_o$ under ad is irreducible. We say that an irreducible symmetric pair is Hermitian if the action of $\underline{k}$ on $\underline{r}$ reduces. As is well known this is equivalent to saying that there exists $H \in \underline{k}$ which is central in $\underline{k}$ and

(1) $\mathrm{ad}\, H\big|_{\underline{r}}$ has eigenvalues 1 and -1.

Set $\underline{r}^+ = \{X \in \underline{r} \quad \mathrm{ad}H\cdot X = X\}$. Then $\underline{q} = \underline{k} + \underline{r}^+$ is a parabolic subalgebra of $\underline{g}$. Fix $\underline{b}_k \subset \underline{k}$ a Borel subalgebra. Then $\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{r}^+$ is a Borel subalgebra of $\underline{g}$ which is θ-stable. Fix $\underline{h} \subset \underline{b}_k$ a Cartan subalgebra of $\underline{g}$. Let $\Phi^+ = \Phi(\underline{b},\underline{h})$, $\Phi_k^+ = \Phi(\underline{b}_k,\underline{h})$, $\Phi_n = \{\alpha \in \Phi(\underline{g},\underline{h}) \mid \alpha(H) \neq 0\}$, $\Phi_n^+ = \Phi_n \quad \Phi^+ = \Psi(\underline{g},\underline{h})$. Fix a linear order on $\Phi = \Phi(\underline{g},\underline{h})$ such that $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha > 0\}$. We define $\gamma_1 > \ldots > \gamma_r$ by the usual recipe. γ_1 is the largest element of Φ_n^+. $\Psi_1 = \{\alpha \in \Phi_n^+ \mid \alpha \pm \gamma_1 \notin \Phi \cup \{0\}\}$. If $\Psi_1 \neq \emptyset$, γ_2 is the largest element of Ψ_1 and $\Psi_2 = \{\alpha \in \Psi_1 \mid \alpha \pm \gamma_2 \notin \Phi \cup \{0\}\}$, if γ_{j-1} and Ψ_{j-1} have been defined as above then γ_j is the largest element of Ψ_{j-1} and $\Psi_j = \{\alpha \in \Psi_{j-1} \mid \alpha \pm \gamma_j \notin \Psi \cup \{0\}\}$. This gives $\Psi_1 \supset \Psi_2 \supset \ldots \supset \Psi_{r-1} \supset \Psi_r = \emptyset$.

Set $\underline{g}_{\gamma_j} + \underline{g}_{-\gamma_j} + [\underline{g}_{\gamma_j}, \underline{g}_{-\gamma_j}] = \underline{\ell}_j$. Then $\underline{\ell}_j$ is isomorphic with $\underline{s\ell}(2,\mathbb{C})$. Clearly, $\theta\underline{\ell}_j = \underline{\ell}_j$. If $(\underline{\ell}_j)_o = \underline{\ell}_j \cap \underline{g}_o$. Then it is easy to see that there exists an isomorphism $\eta_j:(\underline{\ell}_j)_o \to \underline{s\ell}(2,\mathbb{R})$ such that $\eta_j(\theta X) = -{}^t\eta_j(X)$. We can thus choose $H_j \in [\underline{g}_{\gamma_j}, \underline{g}_{-\gamma_j}]$, $X_j \in \underline{g}_{\gamma_j}$, $Y_j \in \underline{g}_{-\gamma_j}$ such that

$$\eta_j(H_j) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta_j(X_j) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_j(Y_j) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

Then

$$\eta_j(X_j+Y_j) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Set $\underline{a}_o = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}(X_i+Y_i)$. Then $\underline{a}_o \subset \underline{r}_o$. It is part of the standard theory of symmetric pairs that $\underline{a}_o$ is a maximal abelian subalgebra of $\underline{g}$ subject to the condition that it is contained in $\underline{r}_o$.

Let C (the Cayley transform) be defined by

$$C = \prod_{i=1}^{r} \exp(\mathrm{ad}X_i)\ \exp(\tfrac{1}{2}(\log 2)\ \mathrm{ad}H_i)\ \exp(-\mathrm{ad}Y_i)$$

Then $CH_i = -(X_i+Y_i)$, $i = 1,\ldots,r$.

It is also standard that $C\bar{\underline{n}}(\underline{b},\underline{h}) \cap \underline{g}_o = \underline{n}_o$ is a maximal nilpotent subalgebra of $[\underline{g}_o,\underline{g}_o]$. Set $\bar{\underline{b}} = \bar{\underline{b}}(\underline{b},\underline{h}) = \underline{h} + \bar{\underline{n}}(\underline{b},\underline{h})$. Then the formula for C immediately implies

(2) $\quad C\bar{\underline{b}} \in \bar{\mathcal{B}}(\underline{b})$.

Now applying Lemma 1.9 we have

(3) $\quad j_{C\underline{b}}(L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}}) \cong L^{-\Lambda\circ C^{-1}}_{C\underline{b},C\underline{h}}$.

Define $\underline{m}_o = C_{\underline{g}_o}(\underline{a}_o) = \{X \in \underline{g}_o \mid [X,\underline{a}_o] = 0\}$. Then $\underline{m}_o \oplus \underline{n}_o = \underline{p}_o$ is a minimal parabolic subalgebra of $\underline{g}_o$. One checks that

(4) $\quad \underline{p} \supset C\bar{\underline{b}}$.

Set $\bar{\underline{q}} = \underline{k} + \underline{r}^-$, $\underline{p}' = C\bar{\underline{q}}$. Then

(5) $\quad \underline{p}' \in \bar{\mathcal{P}}(\underline{q})$ by the formula for C.

Applying Lemma 1.7 we have

(6) $\quad$ If $M \in \mathcal{O}(\underline{g})$ then

$\quad j_{\underline{p}'}(M) = j_{C\bar{\underline{b}}}(M)$.

<u>Lemma 2.1</u>. $\underline{p}' \supset \underline{p}$.

<u>Proof</u>. Let $\tilde{\underline{m}}_1 = \{X \in \underline{g} \mid [X,H_i] = 0,\ i = 1,\ldots,r\}$. Let $\Psi = \Phi(\tilde{\underline{m}}_1,\underline{h})$. If $\alpha,\beta \in \Phi_n^+$ then $(\alpha+\beta)(H) = 2$. Thus $\alpha+\beta \notin \Phi$. This implies that if $\alpha,\beta \in \Phi_n$ and $(\alpha,\beta) = 0$ then $\alpha\pm\beta \notin \Phi\cup\{0\}$. Thus $\Psi \cap \Phi_n^+ \supset \cap\,\Psi_i = \emptyset$. So $\Psi \subset \Phi_k$. Hence $\tilde{\underline{m}}_1 \subset \underline{k}$. Now $\underline{m}_1 = C\tilde{\underline{m}}_1$. Thus $\underline{p} \subset C(\tilde{\underline{m}}_1+\bar{\underline{b}}) \subset C\underline{q} = \underline{p}'$.

Now Lemma 1.8 implies

Lemma 2.2. If $M \in \mathcal{O}(\underline{q})$ then $j_{\underline{p}}(M) = j_{\underline{p}'}(M)$.

Lemma 1.8 and (5) now imply

Proposition 2.3. $j_{\underline{p}}:\mathcal{O}(\underline{q}) \hookrightarrow \mathcal{O}(\underline{p}')$ ($\mathcal{O}(\underline{p})$) defines an equivalence of categories between $\mathcal{O}(\underline{q})$ and $\mathcal{O}(\underline{p}')^{opp}$.

Let now $(\underline{p}'')_o \subset \underline{g}_o$ be a subalgebra containing $\underline{p}_o$. Then $\underline{p}''$ is a parabolic subalgebra of $\underline{g}$. Let $\underline{p} = \underline{m} \oplus \underline{n}$ as above, then $\underline{p}'' = \underline{m}'' \oplus \underline{n}(\underline{p}'')$ with $\underline{m}''$ a θ-stable Levi factor of $\underline{p}''$ and $\underline{m}'' \supset \underline{m}$, $\underline{n}(\underline{p}'') \subset \underline{n}$. Set ${}^*\underline{p}'' = \underline{p} \cap \underline{m}''$.

Lemma 2.4. If $L \in \mathcal{O}(\underline{p})$ is irreducible then

(1) $L/\underline{n}(\underline{p}'')L$ is an irreducible $(\underline{m}'', \underline{k} \cap \underline{m}'')$-module.

(2) $j_{*\underline{p}''}(L/\underline{n}(\underline{p}'')L)$ is an irreducible $\underline{m}''$ module.

Proof. We first show that (2) implies (1). Indeed, $j_{*\underline{p}''}(L/\underline{n}(\underline{p}'')L)$ is the real Jacquet module in the sense of [2]. Thus $M \mapsto j_{*\underline{p}''}(M)$ is an exact functor on the category $H(\underline{m}'',\underline{k} \cap \underline{m}'')$ of finitely generated admissible $(\underline{m}'',\underline{k} \cap \underline{m}'')$ modules. Also Casselman's theorem implies that if $M \in H(\underline{m}'', \underline{k} \cap \underline{m}'')$, $M \neq 0$ then $j_{*\underline{p}''}(M) \neq 0$. This clearly implies that (2) implies (1).

We now prove (2). $j_{*\underline{p}''}(L/\underline{n}(\underline{p}'')L) = j_{\underline{p}}(L)^{\underline{n}(\underline{p}'')}$. Since $j_{\underline{p}}(L)$ is irreducible and in $\mathcal{O}(\underline{p})$, $j_{\underline{p}}(L)^{\underline{n}(\underline{p}'')}$ is irreducible as an $\underline{m}''$-module. Q.E.D.

To get more refined results we must introduce some more notation and (well known) structural results.

Let $\varepsilon_i \in \underline{a}_o^*$ be defined by $\varepsilon_i(X_j+Y_j) = \delta_{ij}$. Then it is standard that the root system of $\underline{a}_o$ on $\underline{n}_o$ denoted $\Phi(\underline{p}_o,\underline{a}_o)$ consists of the linear functionals

$$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ , \quad 1 \leq i < j \leq r$$
$$2\varepsilon_i \quad , \quad i = 1,\ldots,r$$

and possibly ε_i, $i = 1,\ldots,r$.

If the ε_i do not occur then we see that $\Phi(\underline{p}_o,\underline{a}_o)$ is a positive root system of type C_r. If the ε_i occur then $\Phi(\underline{p}_o,\underline{a}_o)$ is a non-reduced positive root system of type BC_r.

In the C_r case the simple roots are $\varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r-1}-\varepsilon_r, 2\varepsilon_r$ and in the BC_r case the simple roots are $\varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r-1}-\varepsilon_r, \varepsilon_r$.

Set $(\underline{a}_i)_o = \sum_{j \leq r} \mathbb{R}(X_j+Y_j)$. Set $(\underline{m}_i)_o = C_{\underline{g}_o}((\underline{a}_i)_o)$, $(\underline{n}_i)_o = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Phi(\underline{p}_o,\underline{a}_o) \\ \lambda|_{(\underline{a}_i)_o} \neq 0}} (\underline{n}_o)_\lambda$.

Set $(\underline{p}_i)_o = (\underline{m}_i)_o + (\underline{n}_i)_o$. Then $(\underline{p}_1)_o \supset (\underline{p}_2)_o \supset \cdots \supset (\underline{p}_r)_o = \underline{p}_o$.

We now give a slightly different description of the $\underline{m}_i$. We preface it with the following well known result.

Lemma 2.5. If $\alpha \in \Phi$ and $(\alpha,\gamma_i) = 0$ then $\alpha \pm \gamma_i \notin \Phi \cup \{0\}$.

Proof. It is well known that $(\gamma_i,\gamma_i) = (\gamma_1,\gamma_1)$ $i = 1,\ldots,r$. Hence there is $S_i \in W(\underline{g},\underline{h})$ (the Weyl group of $\underline{g}$ relative to $\underline{h}$) such that $S_i\gamma_1 = \gamma_i$. Since γ_1 is the largest root in Φ^+ we see that γ_i is the largest root in $S_i\Phi^+$. Hence the result.

Let for $1 \le j \le r$,

$$C_j = \prod_{i\le j} \exp(\mathrm{ad}X_i)\exp(\tfrac{1}{2}(\log 2)\,\mathrm{ad}H_i)\exp(-\mathrm{ad}Y_i) .$$

C_j is usually called a partial Cayley transform. We note that $C_jH_i = -(X_i+Y_i)$ for $i \le j$ and if $\underline{h}_j = \{H \in \underline{h} \mid \gamma_i(H) = 0,\ i \le j\}$, $C_j|_{\underline{h}_j} = I$.

Set $\tilde{\underline{m}}_j = \{X \in \underline{g} \mid [\bar{X},H_i] = 0,\ i = 1,\ldots,j\}$. Then clearly $C_j\tilde{\underline{m}}_j = \underline{m}_j$. Now

$$\tilde{\underline{m}}_j = \underline{h} + \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi\\ (\alpha,\gamma_i)=0,\, i\le j}} \underline{g}_\alpha .$$

Thus $C_j\tilde{\underline{m}}_j = \underline{a}_j \oplus \underline{h}_j \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi\\ (\alpha,\gamma_i)=0}} \underline{g}_\alpha$ by Lemma 2.5.

We set $\underline{b}_j = \underline{b} \cap \tilde{\underline{m}}_j$ and $\underline{b}_j' = C_j\underline{b}_j = \underline{a}_j \oplus \underline{h}_j \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi^+\\ (\alpha,\gamma_i)=0}} \underline{g}_\alpha$.

Lemma 2.6. Set $\underline{m}_j' = \underline{h}_j \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi\\ (\alpha,\gamma_i)=0,\, i\le j}} \underline{g}_\alpha$.

Then $(\underline{m}_j' \cap \underline{g}_o,\ \underline{m}_j' \cap \underline{k}_o)$ is an irreducible symmetric pair of Hermetian type.

Proof. Set $(\underline{r}_j)_o = \underline{m}_j' \cap \underline{r}_o$, $r_j^+ = \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi_n^+\\ (\alpha,\gamma_i)=0,\, i\le j}} \underline{g}_\alpha$.

$$\underline{r}_j^- = \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi_n^+\\ (\alpha,\gamma_i)=0,\, i\le j}} \underline{g}_{-\alpha} .$$ Then $\underline{r}_j = \underline{r}_j^+ \oplus \underline{r}_j^-$.

Thus the result follows if we show that $(\underline{m}_j' \cap \underline{g}_o,\ \underline{m}'_j \cap \underline{k}_o)$ is irreducible.

For this set $*\underline{a}_j = \sum_{i>j} \mathbb{C}(X_i+Y_i)$, $*\underline{n}_j = \underline{n}(\underline{p}_j) \cap \underline{m}_j$. $*\underline{m}_j = \underline{m} \cap \underline{m}_j$. Then $*\underline{m}_j \oplus *\underline{a}_j \oplus *\underline{n}_j$ is a minimal parabolic over $\mathbb{R}$ of $(\underline{m}_j')_o = \underline{m}_j' \cap \underline{g}_o$. The root system of $*\underline{a}_j$ on $*\underline{n}_j$ is easily seen to be either of the form C_{r-j}, BC_{r-j}. In either case it is irreducible. The result now follows.

If $\Lambda \in \underline{h}^*$ define $\Lambda^j = -\sum_{i\leq j} \frac{2(\Lambda,\gamma_i)}{(\gamma_i,\gamma_i)} \varepsilon_i$. We look upon Λ^j as an element of $\underline{a}_j^*$. We note

(7) If $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} \in \mathcal{O}(\underline{g})$ then

$$-\mathrm{Re}(\Lambda,\gamma_2)/(\gamma_2,\gamma_2)) \leq \dots \leq -\mathrm{Re}((\Lambda,\gamma_j)/(\gamma_j,\gamma_j)) .$$

Indeed, if $\alpha \in \Phi_n^+$ then $\alpha = \gamma_1 - Q$ with Q sum of elements of Φ_k^+. Now if $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} \in \mathcal{O}(\underline{g})$ then $2(\Lambda,\beta)/(\beta,\beta) \in \mathbb{N}$ for $\beta \in \Phi_k^+$. Thus if $\alpha \in \Phi_n^+$ then

$$\mathrm{Re}(\Lambda,\alpha) \leq \mathrm{Re}(\Lambda,\gamma_1) .$$

Since $(\gamma_i,\gamma_i) = (\gamma_1,\gamma_1)$, $i = 1,\dots,r$. This implies (7).

If $\mu \in \underline{a}_j^*$, $M \in \mathcal{M}(\underline{m}_j')$ we denote by $C_\mu \otimes M$ the $\underline{m}_j$-module, M with $\underline{m}_j'$ acting on M as given and $\underline{a}_j$ acting by μI.

<u>Lemma 2.7</u>. Let $\Lambda \in \underline{h}^*$ be such that $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} \in \mathcal{O}(\underline{g})$. Then

$$L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} / \underline{n}_j(\underline{b},\underline{h})\, L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} \cong C_{\Lambda^j} \otimes L^{\Lambda|\underline{h}_j}_{\underline{b}_j,\underline{h}_j}$$

Furthermore, $L^{\Lambda|\underline{h}_j}_{\underline{b}_j,\underline{h}_j} \in \mathcal{O}(\underline{g}_j')$, $\underline{g}_j' = \underline{g} \cap \underline{m}_j'$

<u>Proof</u>. We already know that the left hand side, L, of the asserted equivalence is irreducible. Thus $L \cong C_\mu \otimes L'$, $\mu \in \underline{a}_j^*$, $L' \in \mathcal{M}(\underline{m}_j')$ and L' is irreducible. Applying (3) above we find that $\mu = \Lambda\cdot C^{-1}|_{\underline{a}_j}$. Now

$$(\Lambda\cdot C^{-1})(X_i+Y_i) = -\Lambda(H_i) =$$

$$= -2(\Lambda,\gamma_i)/(\gamma_i,\gamma_i), \quad i \leq j .$$

Hence $\mu = \Lambda^j$ as asserted. On the other hand since $C_j\bar{\underline{b}} \in \mathcal{B}(\underline{b})$ we see that $(L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}})^{\underline{n}(\underline{b})} / \underline{n}(\underline{p}_j)\, L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} = (0)$ $(\underline{n}(\underline{p}_j) \subset \underline{n}(C_j\bar{\underline{b}}))$. Thus $(L')^{\underline{n}(\underline{b}_j)}$ must have the weight $\Lambda|\underline{h}_j$ relative to $\underline{h}_j$. Q.E.D.

Using Lemma 2.7 it is now a simple matter to describe the Langland's parameters of the $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}}$ that are in $\mathcal{O}(\underline{g})$ relative to $\theta(\underline{p})$.

Set $\Psi^+ = \Phi_k^+ \cup -\Phi_n^+$. If $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{n}}$ is in $\mathcal{O}(\underline{g})$ then we say that $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{n}}$ is in the "closure of the discrete series" if

$$\mathrm{Re}(\Lambda+\rho,\alpha) \geq 0, \qquad \alpha \in \Psi^+$$

Here $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ (as usual).

(8) $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{n}}$ is in the closure of the discrete series if and only if

(i) $2(\Lambda+\rho,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{N}-\{0\}, \quad \alpha \in \Phi^+_k$

(ii) $\mathrm{Re}\ 2(\Lambda+\rho,\gamma_1)/(\gamma_1,\gamma_1) \leq 0$.

Indeed, $L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{n}}$ is in $\mathcal{O}(\underline{g})$ if and only if (i) is satisfied (see the end of Section 1, (ii) is clearly necessary. (*) in the proof of Lemma 2.6 implies that it is sufficient (assuming (i)).

Proposition 2.8. Let $\Lambda \in \underline{h}^*$ be such that $L^{\Lambda} = L^{\Lambda}_{\underline{b},\underline{h}} \in \mathcal{O}(\underline{g})$. If L^{Λ} is not in the closure of the discrete series then there exists a unique $1 \leq j \leq r$ such that (here $\rho_{\underline{p}_j}(H) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}H|_{\underline{n}(\underline{p}_j)}$, $H \in \underline{a}_j$)

(1) $\mathrm{Re}(\Lambda_j-\rho_{\underline{p}_j},\lambda) < 0, \quad \lambda \in \Phi(\underline{p}_j,\underline{a}_j)$

(2) $L^{\Lambda|_{\underline{h}_j}}_{\underline{b}_j,\underline{h}_j}$ is in the closure of the discrete series for $\underline{m}_j'$.

Proof. $\rho_{\underline{p}_j}|_{\underline{a}_j} = -\rho\cdot C^{-1}|_{\underline{a}_j}$. Thus (1) is the same as saying that

(*) $\quad \mathrm{Re}(-2(\Lambda+\rho,\gamma_1)/(\gamma_1,\gamma_1)) < \mathrm{Re}(-2(\Lambda+\rho,\gamma_2)/(\gamma_2,\gamma_2)) <$

$$\cdots < \mathrm{Re}(-2(\Lambda+\rho,\gamma_j)/(\gamma_j,\gamma_j)) < 0$$

and (2) says

(**) $\quad \mathrm{Re}(-2(\Lambda+\rho,\gamma_{j+1})/(\gamma_{j+1},\gamma_{j+1})) \geq 0$.

Now if L^{Λ} is not in the closure of discrete series then (*) is either true for all $1 \leq j \leq r$ and the result follows since $\underline{m}_r'$ $\underline{k}$. Otherwise (*) is true for a maximal $j \leq r$. Hence (**) is true for j+1. Q.E.D.

References

[1] T, Enright, R. Howe, N.R. Wallach, A classification of unitarizable highest weight modules, to appear in the proceedings of the Utah Conference, 1982.

[2] N.R. Wallach, Asymptotic expansions of generalized matrix entries, to appear in the proceedings of the special year at Maryland, 1982-1983.

N.R. WALLACH
Rutgers College
Dept of Maths
University Heights Campus
NEW BRUNSWICK
NJ 08903
USA