SOMMAIRE DU N° 118

Éditorial

Ce numéro d'octobre consacre un dossier spécial à Jacques Herbrand et son héritage scientifique, suite au colloque qui lui a été dédié à Paris en février 2008. À l'initiative de notre collègue Georges Comte, initiative soutenue par la SMF, et conformément à la tradition montagnarde, l'anniversaire de sa mort a été également marqué par la pose d'une plaque commémorative à « la Bérarde », chapelle proche du lieu de la chute qui lui coûta la vie. Il semblerait d'ailleurs que la mémoire de l'accident survenu à « un grand savant français », transmise de génération en génération, ait survécu dans la mémoire collective des guides de la vallée – la plaque qui vient d'être posée permettra d'en perpétuer définitivement le souvenir.

Autre dossier, qu'il convient de signaler de par son caractère tragique : celui que consacrent Aline Bonami et Marie-Françoise Roy à notre collège tchadien Ibni Oumar Mahamat Saleh. Si la raison d'État semble entourer encore de quelques incertitudes les circonstances exactes de sa disparition, notre communauté a su à cette occasion réaffirmer sa solidarité et son attachement à la justice, indissociable d'une conception humaniste de la Science qu'il convient, encore et toujours, de défendre. Elle continuera à militer pour que la vérité soit faite et soit dite.

Dernier élément pour lequel un commentaire se justifie sans doute dans cet éditorial : le texte consacré par Marc Yor aux mathématiques financières – nous laissons au lecteur le soin de découvrir par lui-même les autres articles de ce numéro. Il fait suite à un débat initié par les Sociétés savantes et l'Académie des Sciences sur le rôle des mathématiciens et des modèles mathématiques dans la crise financière actuelle. Quel que soit le point de vue adopté quant au degré de responsabilité de ces modèles dans la crise, la faillite des outils quantitatifs de traitement du risque et de valorisation des produits dérivés correspondants est incontestable, et quelques questions se doivent d'être posées : pertinence des méthodes quantitatives actuelles de traitement du risque, opportunité (ou non) de concevoir les formations en mathématiques financière de façon moins quantitative, en lien avec une approche plus globale des problèmes. La réflexion n'est pas anecdotique, puisqu'elle porte, au-delà de l'exemple particulier de la finance, sur la façon dont l'interdisciplinarité doit fonctionner, aux trois niveaux de la recherche académique, de l'offre de formation, et dans le monde des entreprises. Il est probable que la réflexion engagée à l'occasion de la crise actuelle va se poursuivre et s'approfondir dans les mois qui viennent, et la Gazette *cherchera à en suivre l'évolution, dès lors que celle-ci pourra contribuer à la compréhension du mode de fonctionnement des interactions de notre discipline.*

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Mot du Président

Chers amis, chère amies,

Notre été a été endeuillé par le décès d'Henri Cartan. De futures *Gazettes* s'en feront amplement l'écho. Je me contenterai donc ici, en mon nom et en celui de toute la SMF, de présenter nos plus sincères condoléances à la famille d'Henri Cartan et à ses proches.

Nous sommes très inquiets des réformes annoncées concernant l'enseignement : celle des lycées aurait pour conséquence un morcellement des enseignements ; et la mastérisation des concours du CAPES et de l'agrégation pourrait conduire à une dégradation du niveau et de la formation des enseignants de mathématiques. Nous allons poursuivre notre réflexion et nos actions dans les mois qui viennent pour prévenir ces dangers.

Nous avons maintenant la quasi-certitude que notre collègue Ibni Oumar Mahamat Saleh, mathématicien tchadien et ancien ministre, est mort en détention. Différentes actions sont envisagées en sa mémoire, comme l'établissement d'une bourse, ou donner son nom à un bâtiment universitaire.

Un nouveau cycle de conférences « Une question, un chercheur » est organisé à l'Institut Henri Poincaré pour les élèves de classes préparatoires et ceux de licence. Elles auront lieu deux fois par an (une en mathématiques et une en physique). La première sera donnée par Wendelin Werner, médaille Fields 2006, le 7 novembre à 20 H. Elle sera suivie d'un pot qui permettra aux étudiants de discuter avec le conférencier et de rencontrer des chercheurs. Ces conférences sont organisées en partenariat entre l'IHP, la SMF, la SFP[1] et l'UPS[2]. À partir d'un problème scientifique actuel, elles proposeront à nos étudiants une ouverture sur le monde de la recherche, éveilleront leur curiosité, et répondront à leurs interrogations. Une affiche sera éditée pour chaque conférence et envoyée dans les lycées ayant des CPGE et aux responsables de L en mathématiques et en physique de la région parisienne. Des informations concernant le conférencier et l'organisation pratique seront également disponibles sur notre site web. Nous vous demandons de faire une publicité active auprès de vos étudiants. À moyen terme, nous envisageons que ces conférences soient filmées et retransmises en direct de façon à ce que plus d'étudiants puissent en profiter. Certaines pourraient aussi être rééditées en province.

Je vous souhaite à tous une excellente rentrée !

Le 1er octobre 2008
Stéphane Jaffard

---

1 Société Française de Physique.
2 Union des Professeurs de Spéciales.

Lucien Le Cam (1924-2000)


Droit réservé

D'origine paysanne, Lucien Le Cam est né en 1924, dans la Creuse. Il connaîtra un parcours sinueux. Tenté par une vocation religieuse, il commence par rentrer au Séminaire de Limoges, qu'il quitte au bout de 24 heures. Ensuite, du fait d'une procédure spéciale en vigueur sous l'Occupation, il ne peut se présenter à l'X. Il passe enfin sa Licencee ès sciences en 1945 à Paris. Là, il rencontre les mathématiques et, plus spécifiquement, les statistiques. Il travaille d'abord pendant cinq ans comme statisticien appliqué à EDF.

C'est en 1950, lors d'un séminaire, qu'il rencontre le mathématicien et statisticien américain Jerzy Neyman (1894-1981). Celui-ci l'invite pour un an à Berkeley. En effet, la statistique s'est plutôt développée dans les pays anglo-saxons. Le Cam arrive donc à Berkeley avec l'intention d'y séjourner un an. En réalité, il y restera cinquante ans. Il y poursuit son parcours universitaire : lecturer en 1950, graduate student en 1951, PH. D en 1952.

En 1953, il est assistant professor et a un premier étudiant en thèse. En 1960, il est full profesor of statistics. En 1973, il se voit attribuer la Chaire de statistique et de mathématiques. Il aura 40 étudiants en thèse et a 290 descendants à ce jour.

Le Cam deviendra l'un des fondateurs des statistiques modernes. Il est à l'origine des notions et théories suivantes :

- la théorie des expériences
- la théorie de la déficience et la distance entre des expériences
- la normalité asymptotique locale
- la contiguité
- le théorème du minimax et de convolution
- la superefficacité
- l'entropie métrique et statistique.

Il meurt en 2000.

Lucien Le Cam : comprendre la géométrie d'une expérience statistique[1]

Gaëlle Octavia

Dans un article publié en 1964, Lucien Le Cam, l'un des fondateurs des statistiques modernes, définissait l'exhaustivité approchée d'une expérience statistique. Cette notion, qui permet de réduire la quantité d'information nécessaire à la connaissance d'un phénomène, trouve de nombreuses applications, de la physique au stockage de données, en passant par la finance.

Les statistiques sont un domaine apparu assez tardivement dans l'histoire des mathématiques. Les fondements des mathématiques peuvent être situés au III^e^ siècle avant J.-C., avec Euclide (-325 - -265). Les probabilités arrivent environ 2000 ans plus tard, en 1654, avec Pascal (1623-1662) et Fermat (1601-1665), puis Jakob Bernoulli (1654-1705). La loi des grands nombres est énoncée en 1713. Quant aux origines de la statistique, on peut les situer à la fin du XVII^e^ et au début du XVIII^e^ siècle, avec l'écrivain et mathématicien écossais John Arbuthnot (1667-1735), qui avait fait des statistiques sur le sexe des bébés (et attribué à la « Divine providence » le plus grand nombre de garçons). Citons comme autres grands noms Thomas Bayes (1702-1761), Abraham de Moivre (1667-1754) ou encore Pierre Simon de Laplace (1749-1827). Le théorème de la limite centrale s'énonce en 1738.

En statistique, on suit une démarche qui fait l'aller-retour entre la réalité et les mathématiques : on part de données que l'on observe, puis on va vers les mathématiques, et enfin on retourne vers l'application aux données. Les objectifs d'un statisticien sont les suivants : prendre des décisions (pour cela il devra définir des paramètres, des dépendances, valider des hypothèses), réduire des données, transférer les savoir-faire d'une expérience facile à une expérience plus difficile. Sondages, économie, médecine... : nous sommes quotidiennement confrontés aux statistiques !

On peut approcher des expériences statistiques par des expériences statistiques élémentaires.

En décembre 1959, Lucien Le Cam écrit *Sufficiency and approximate sufficiency*. L'article n'est publié que 5 ans plus tard, en 1964 dans *Annals of Mathematical Statistics*[2], les experts ayant jugé l'article original de Le Cam trop difficile. Cet

[1] Cet article est issu de la conférence donnée par Dominique Picard le 19 mars 2008 à la Bibliothèque nationale de France dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien » organisé par la SMF et la BnF.
[2] Vol. 35, n° 4, pp. 1419-1455.

article dit que l'on peut approcher des expériences statistiques par des expériences statistiques élémentaires (de même que l'on peut approcher une courbe localement par des segments de droites, ou une figure géométrique compliquée à l'aide de triangles).

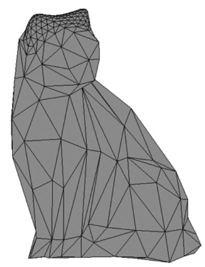


FIG. 1. Le chat approché par des triangles

Le Cam définit donc ce qu'est une expérience statistique élémentaire, ainsi qu'une distance sur l'ensemble des expériences statistiques : voir ci-dessous.

Quelques définitions et formules en statistiques modernes

Déficience
Étant données deux expériences $\varepsilon = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ et $\varepsilon' = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$, on définit la déficience de ε' par rapport à ε : $\delta(\varepsilon', \varepsilon) := \inf_\pi \sup_\theta |P_\theta - \pi Q_\theta|$

Distance entre expériences
$\varepsilon = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ et $\varepsilon' = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$, $\Delta(\varepsilon, \varepsilon') = Sup(\delta(\varepsilon, \varepsilon'), \delta(\varepsilon', \varepsilon))$

Perte et risque
Soit $\varepsilon = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. Étant donnée une décision $d(\chi)$ de ε, on lui associe : une perte, notée $l(d(\chi), \theta)$, et un risque $R(\theta, d) := E_\theta[l(d(\chi), \theta)]$.

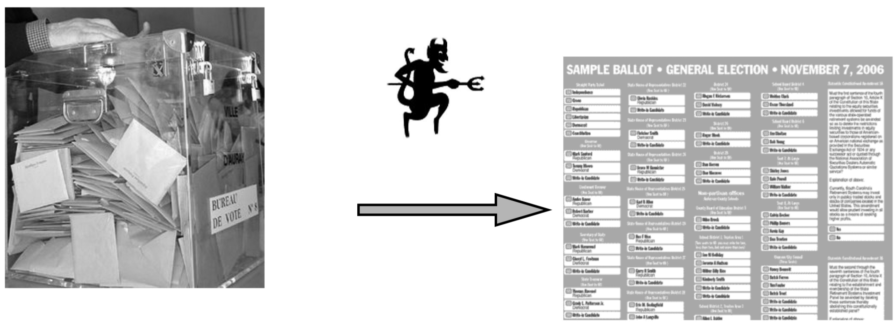
Expérience moins bonne du point de vue du risque
Si on a deux expériences $\varepsilon = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ et $\varepsilon' = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$, il est « naturel » de dire que ε' est moins bonne que ε, $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ ou encore $\delta(\varepsilon, \varepsilon') = 0$ si pour toute fonction de perte, pour toute décision τ de ε', il existe une décision d de ε, telle que pour tout θ : $R_\varepsilon(\theta, d) \leqslant R_{\varepsilon'}(\theta, \tau)$.

Sous-expérience
Une expérience $\varepsilon = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ étant donnée, si $Y : x \mapsto y$ est une application mesurable et $Q_\theta = P_\theta^Y$, $\varepsilon^Y = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$ est une sous-expérience, moins puissante que ε.

Randomisation
Choisissons y individus dans $\{1, \ldots, n\}$ (avec probabilité uniforme – sans remise –). Notons $A = \{k_1, \ldots, k_y\}$ le résultat, et posons $\chi' = \{\chi'_1, \ldots, \chi'_n\}$ $\chi'_i = 1$ si et seulement si $i \in A$, 0 sinon. On a ainsi utilisé une transformation qui permet de passer de façon aléatoire d'une probabilité sur un espace Y à une probabilité sur un espace X, qui s'appelle un *noyau de Markov* (noté π) et vérifie : $\forall \theta \in [0,1]$, $Q_\theta = P_\theta^Y$, $P_\theta = \pi Q_\theta$. On dit alors que $\varepsilon' = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ est une *randomisation* de $\varepsilon = \{Q_\theta, \theta \in \Theta\}$. Le théorème de *Blackwell-Sherman-Stein* dit que : $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ si et seulement si ε' est une randomisation de ε.

1. L'expérience statistique

Pour comprendre l'idée de Le Cam, tâchons tout d'abord de définir ce qu'est une expérience statistique. Cette notion est introduite par Wald en 1939 et par Blakwell en 1950. Une expérience statistique ε est un objet mathématique. On la définit comme un ensemble de probabilités : $\varepsilon = \{P_\theta, \theta \text{ appartenant à } \Theta\}$, où Θ est l'ensemble des paramètres et P_θ est une probabilité sur Ω associée au paramètre θ. La donnée χ est alors une réalisation aléatoire tirée suivant la loi P_θ inconnue. L'expérience ε peut servir à prendre une décision $d(\chi)$.



Plusieurs lois de probabilité peuvent tirer une même donnée. Face à une donnée, on a donc deux incertitudes. Une incertitude est liée au fait que la donnée est aléatoire. Par ailleurs, on ne connaît pas la probabilité qui a tiré cet événement (est-ce une loi uniforme, une loi de Dirac... ?).

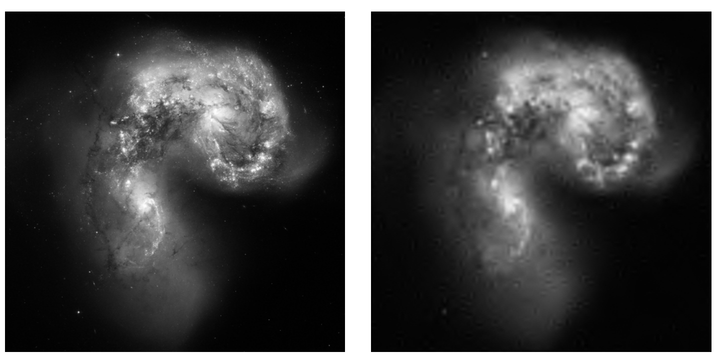
Le statisticien essaye donc de deviner cette probabilité à partir de l'observation des données. (voir l'Exemple du sondage ci-dessous).

Exemple d'un sondage

On effectue un sondage. Soit θ la proportion d'individus de la population votant oui.
θ appartient à $\Theta = [0, 1]$
On observe : $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\}$ appartient à $\{0, 1\}^n$ qui sont les expressions des votes de n individus tirés indépendamment.
P_θ est donc la loi de n variables de Bernoulli indépendantes : pour $n = 4$, $P_\theta(\chi = \{0, 0, 0, 1\}) = (1 - \theta)^3\theta$.

2. Décision, risque et exhaustivité

Une expérience étant donnée, on l'utilise pour prendre une décision dont on mesure le risque. On peut définir qu'une expérience est meilleure ou moins bonne qu'une autre du point de vue du risque (voir définitions p.6). Par exemple, dans une classe, les élèves sont identifiés par leurs noms et prénoms. On peut vouloir les identifier par leurs seules initiales, ce qui représente une véritable économie en termes de stockage de données. Cependant, cela conduit à une perte d'information trop importante, puisque plusieurs élèves peuvent avoir les mêmes initiales. Cette expérience sera jugée moins bonne (plus restreinte) du point de vue du risque. De manière générale, une sous-expérience d'une expérience donnée est moins bonne du point de vue du risque. Mais elle peut aussi être équivalente. C'est le cas lorsque, pour reprendre l'exemple du sondage, au lieu de stocker les « oui » et les « non », on décide de ne compter que les « oui ». La sous-expérience ε^Y est équivalente à l'expérience ε si à partir de ε^Y on peut reconstruire une expérience qui n'est pas ε mais qui aura le même comportement que ε du point de vue des décisions et de leurs risques. On peut parler d'exhaustivité lorsque l'équivalence est vérifiée, qu'il n'y a aucune perte d'information. Le Cam introduit l'idée d'exhaustivité approchée, dont on peut avoir l'intuition en regardant une photo et sa version compressée : l'image compressée ne représente que 10% de l'originale en termes de place, de quantité d'information. Cependant, cette information est « suffisante » puisque la photo compressée est tout à fait lisible et exploitable.



Tab. 1. Galaxie originale et galaxie compressée

Le théorème de Le Cam démontré dans l'article de 1964 lie la notion d'exhaustivité approchée aux comportements des risques dans les expériences en question. cf. ci-dessous.

Théorème de Le Cam

$$\delta(\varepsilon', \varepsilon) := \inf_{\pi} \sup_{\theta} |P_\theta - \pi Q_\theta|$$

$$\delta(\varepsilon', \varepsilon) \leqslant e$$

équivaut à : pour toute fonction de perte bornée par 1, pour toute décision d de ε, il existe une décision τ de ε' telle que pour tout θ, $R_{\varepsilon'}(\theta, \tau) \leqslant R_\varepsilon(\theta, d) + e/2$.

3. Normalité asymptotique locale

Le Cam définit au début des années 1960 la notion de *normalité asymptotique locale* : « La notion asymptotique ici traduit deux idées : la première traduit le fait que l'information amenée par l'observation est suffisante pour produire des estimations assez précises des paramètres du modèle. La deuxième traduit le fait que dans le voisinage des « valeurs plausibles » pour ces paramètres, la famille de probabilités peut être approchée assez finement par une expérience gaussienne de nature plus simple. »

Il y a donc une théorie de la régularité sur les expériences statistiques : si une expérience est assez régulière, elle vérifie cette propriété de normalité asymptotique locale, c'est-à-dire que localement, la loi se comporte comme une gaussienne.

4. Big Bang et stockage des données

Le résultat de Le Cam a pour conséquences directes ou indirectes le codage, la compression de données, la théorie de l'information, l'estimation fonctionnelle, la notion de sparsité (à savoir que si on s'y prend bien, beaucoup de phénomènes peuvent s'exprimer avec peu de paramètres), le bootstrap (rééchantillonnage)... La normalité asymptotique locale se vérifie dans des cas concrets. Par exemple, des données financières suivent en général une loi compliquée, mais elles sont exploitables localement car approchées par des gaussiennes. Autre domaine : la cosmologie, où un exemple d'application est celui du bruit de fond cosmologique, qui est une radiation fossile provenant du Big Bang et qui renseigne les physiciens sur l'univers. Le fait de pouvoir dire si ces données sont gaussiennes est très utile. Les statistiques en médecine et en médecine légale, l'analyse du signal et de l'image, les logiciels de notation musicale en sont aussi des champs d'application parmi d'autres.

Sur les nombres constructibles à la règle et au compas

Antoine Chambert-Loir[1]

Le but de cette note est de montrer que le critère classique pour qu'un nombre complexe soit constructible à la règle et au compas peut être établi sans faire usage de la théorie de Galois.

Dans toute cette note, nous identifions le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes au plan réel $\mathbf{R}^2$. Si $a, b \in \mathbf{C}$ sont des nombres complexes, on désigne par (ab) la droite passant par a et b et par $\mathcal{C}(a, b)$ le cercle de centre a qui passe par b.

Soit S une partie de $\mathbf{C}$ contenant 0 et 1. On dit qu'un nombre complexe z est *élémentairement constructible* (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de S s'il existe des points a, b, a', b' dans S tels qu'une des assertions suivantes soit vérifiée :

– les droites (ab) et $(a'b')$ ne sont pas parallèles et se croisent en z ;
– le cercle $\mathcal{C}(a, b)$ et la droite $(a'b')$ se rencontrent en z ;
– les cercles $\mathcal{C}(a, b)$ et $\mathcal{C}(a', b')$ se rencontrent en z.

On dit qu'un nombre complexe z est *constructible* (sous-entendu : à la règle et au compas) à partir de S s'il existe des points $z_1, \dots, z_n = z$ tels que, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, z_i soit élémentairement constructible à partir de $S \cup \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$.

Enfin, on dit qu'un nombre complexe z est constructible s'il l'est à partir de $\{0, 1\}$.

La construction classique d'une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné, jointe au théorème de Thalès, implique facilement que si z, z' sont des nombres complexes constructibles (à partir d'une partie S, parfois sous-entendue dans la suite), il en est de même de $z + z'$, $z - z'$, zz' et, si $z' \neq 0$, z/z'.

De même, en traçant les droites passant par un point et perpendiculaires aux axes de coordonnées, on voit qu'un nombre complexe est constructible si et seulement s'il en est de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. La valeur absolue d'un nombre constructible est constructible.

Soit z un nombre réel positif qui est constructible et traçons trois points B, H, C sur une droite, dans cet ordre, aux distances $BH = 1$ et $HC = z$. La perpendiculaire à (BC) passant par H et le cercle de diamètre BC se croisent en deux points, disons A et A'. Alors, $AH = \sqrt{z}$, ce qui démontre que la racine carrée d'un nombre réel positif constructible est elle-même constructible. En résolvant les équations pour la partie réelle et la partie réelle des racines carrées d'un nombre complexe, on constate que les racines carrées d'un nombre complexe constructible sont encore constructibles.

En écrivant les équations qui définissent les intersections droite–droite, droite–cercle et cercle–cercle, on constate que si un nombre complexe z est

[1] Université Rennes I, IRMAR (UMR 6625 du CNRS).

élémentairement constructible à partir d'une partie S, il satisfait une équation polynomiale de degré $\leqslant 2$ dont les coefficients appartiennent au sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par S. Inversement, les solutions d'une telle équation s'expriment à l'aide d'une racine carrée. Renvoyant aux textes standard d'algèbre de base ou de théorie des corps pour plus de détails, les considérations précédentes impliquent le théorème suivant.

Théorème 1. *Un nombre complexe z est constructible si et seulement s'il existe des des sous-corps $Q = F_0 ..., F_n$ de $\mathbf{C}$ tels que $z \in F_n$ et tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, F_i soit une extension quadratique de F_{i-1}.*

Remarque 1.1. Soit S une partie de $\mathbf{C}$ contenant $\{0, 1\}$. L'ensemble des nombres complexes qui sont constructibles à partir de S est le plus petit sous-corps de $\mathbf{C}$ contenant S qui soit stable par extraction de racine carrée.

Les corollaires suivants font référence aux définitions de base en théorie des corps, dont celle d'une extension finie, ainsi qu'à la multiplicativité des degrés. Pour tout cela, nous renvoyons aux textes d'algèbre de base. Rappelons tout de même que, par définition, un nombre algébrique est un nombre complexe z qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficients rationnels. Il existe alors un tel polynôme M_z, et un seul, dont le degré est minimal ; c'est le polynôme minimal de z et son degré est appelé le degré de z ; les racines complexes de M_z sont appelées les *conjugués* de z.

Corollaire 1.2. *Si un nombre complexe z est constructible, c'est un nombre algébrique et son degré est une puissance de* 2.

Démonstration. Avec les notations du théorème 1, F_n est une extension finie de $\mathbf{Q}$ de degré 2^n, en particulier une extension algébrique. Puisque $z \in F_n$, c'est un nombre algébrique. De plus, $\mathbf{Q}(z)$ est une sous-extension de F_n dont le degré est précisément celui de z. Par multiplicativité des degrés, le degré de z divise 2^n, donc est une puissance de 2. □

Corollaire 1.3. *Si un nombre complexe z est constructible, il en est de même de ses conjugués.*

Démonstration. Soit z' un conjugué de z dans $\mathbf{C}$. Il existe un unique homomorphisme de corps $f_0 \colon \mathbf{Q}(z) \to \mathbf{C}$ tel que $f_0(z) = z'$. On peut l'étendre par récurrence en un homomorphisme de corps $f_n \colon F_n \to \mathbf{C}$. En considérant la suite de corps $(f_n(F_i))$, on voit que z' est constructible. □

Corollaire 1.4. *Si un nombre complexe z est constructible, le corps engendré par ses conjugués est une extension finie de $\mathbf{Q}$ dont le degré est une puissance de* 2.

Démonstration. Soit z une nombre complexe constructible, de conjugués $z_1, \ldots, z_d$, où d est le degré de z. Le corps engendré par les z_i est le compositum des corps $\mathbf{Q}(z_i)$ dans $\mathbf{C}$. Son degré divise le produit des degrés $[\mathbf{Q}(z_i) : \mathbf{Q}]$. C'est donc une puissance de 2. □

Ce dernier corollaire permet de démontrer que la réciproque du corollaire 1.2 n'est pas vraie. Il y a des polynômes $P \in \mathbf{Q}[X]$ de degré 4, irréductibles sur $\mathbf{Q}$, dont la résolvante cubique Q est encore irréductible sur $\mathbf{Q}$; on peut prendre par exemple $P = X^4 - X - 1$. Le corps F_P engendré par les racines complexes de P contient les racines de Q, qui sont toutes de degré 3. Par conséquent, le degré de F_P est un multiple de 3, donc n'est pas une puissance de 2. Cependant, il est bien connu que la réciproque du corollaire 1.4 est vraie, donc fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre complexe soit constructible.

Théorème 2. *Un nombre complexe est constructible si et seulement si c'est un nombre algébrique et que le corps engendré par ses conjugués est une extension finie de* $\mathbf{Q}$ *de degré une puissance de* 2.

La démonstration de ce théorème est souvent faite au moyen de théorie de Galois. La démonstration qui suit figure en exercice dans [1, 2] et est plus élémentaire ; elle s'inspire d'une preuve classique du théorème de d'Alembert-Gauss, voir par exemple [3] et constitue la seule partie peut-être originale de cette note.

Démonstration. Soit z un nombre algébrique, de degré d, de conjugués $z_1, \dots, z_d$. Supposons que le degré du corps $F = \mathbf{Q}(z_1, \dots, z_d)$ soit une puissance de 2. Puisque ce corps contient $\mathbf{Q}(z_1)$, dont le degré est d, cela entraîne déjà que d est une puissance de 2. Raisonnons maintenant par récurrence sur d.

Soit $c \in \mathbf{Q}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires $\{i, j\}$ d'entiers distincts satisfaisant $1 \leqslant i, j \leqslant d$. Pour toute telle paire $p = \{i, j\}$, posons $z_{p,c} = z_i + z_j + c z_i z_j$ et soit Q_c le polynôme $\prod_{p \in \mathcal{P}} (X - z_{p,c})$. On le considère comme un polynôme en X dont les coefficients sont des polynômes en $z_1, \dots, z_d$. Toute permutation des z_i induit une permutation de l'ensemble des paires $\mathcal{P}$ et laisse donc le polynôme Q_c inchangé. Par conséquent, les coefficients de Q_c sont des polynômes symétriques en $z_1, \dots, z_d$ (à coefficients dans $\mathbf{Q}$). D'après le théorème fondamental sur les fonctions symétriques,[2] ce sont des fonctions polynomiales à coefficients rationnels en les coefficients du polynôme minimal de z_1, donc des nombres rationnels. Autrement dit, $Q_c \in \mathbf{Q}[X]$.

Toute racine de Q_c engendre une extension de $\mathbf{Q}$ contenue dans F ; son degré est donc une puissance de 2. Ainsi, les degrés $d_1, \dots, d_e$, des facteurs irréductibles $Q_{c,1}, \dots, Q_{c,e}$ de Q_c sont des puissances de 2, disons $d_i = 2^{a_i}$. On a $d_1 + \dots + d_e = \frac{1}{2} d(d-1)$. Notons aussi $d = 2^a$; l'exposant de 2 au membre de droite de la relation précédente est égal à $a - 1$; au membre de gauche, il est au moins égal à $\min(a_1, \dots, a_e)$. Cela entraîne qu'au moins l'un de $a_1, \dots, a_e$, disons a_s, est inférieur ou égal à $a - 1$. En d'autre mots, d_s divise $d/2$.

Les racines de $Q_{c,s}$ sont de la forme $z_{i,j,c}$; leur degré est une puissance de 2 qui divise $d/2 < d$. Elles engendrent un sous-corps de F, sous-corps dont le degré est donc aussi une puissance de 2. Par l'hypothèse de récurrence, les racines de $Q_{c,s}$ sont constructibles. Cela démontre qu'il existe une paire $p \in \mathcal{P}$ telle que $z_{p,c}$ soit constructible.

[2] Pour être précis, il faudrait d'abord raisonner en remplaçant les z_i par des indéterminées Z_i, définissant ainsi un polynôme Q_c^* dont les coefficients sont des éléments de $\mathbf{Q}[Z_1, \dots, Z_d]$, appliquer le théorème fondamental sur les polynômes symétriques à Q_c^* et évaluer enfin en $(z_1, \dots, z_d)$.

Jusqu'à présent, le nombre rationnel c était fixé, mais ce qui précède vaut pour tout c. Puisque le corps des nombres rationnels est infini, mais que l'ensemble $\mathcal{P}$ est fini, il existe deux nombres rationnels distincts c et c', et une paire $p = \{i, j\}$ comme ci-dessus, tels que $z_{p,c} = z_i + z_j + cz_iz_j$ et $z_{p,c'} = z_i + z_j + c'z_iz_j$ soient tous deux constructibles. Puisque les nombres constructibles forment un corps, il s'ensuit que $z_i + z_j$ et z_iz_j sont constructibles. Alors z_i et z_j, étant les racines du polynôme quadratique $(X - z_i)(X - z_j)$ à coefficients constructibles, sont aussi des nombres constructibles (*cf.* les commentaires qui précèdent l'énoncé du théorème 1). Puisque $z_1, \ldots, z_d$ sont conjugués de z_i, le corollaire 1.3 entraîne qu'ils sont tous constructibles, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Références

[1] Antoine Chambert-Loir. *Algèbre corporelle*. Éditions de l'École polytechnique, 2005.
[2] Antoine Chambert-Loir. *A Field guide to Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
[3] Pierre Samuel. *Théorie algébrique des nombres*. Méthodes. Hermann, 1971.

Jacques HERBRAND *(au centre)*
au cours de l'excursion où il trouva la mort

Photo Suzanne Lautman

L'HÉRITAGE SCIENTIFIQUE DE JACQUES HERBRAND

À l'occasion du centenaire de sa naissance, la Gazette *propose un dossier sur ce mathématicien prématurément disparu, mais dont les travaux, tant en logique qu'en théorie algébrique des nombres, se sont avérés extrêmement féconds. Notre dossier commence par une brève notice biographique de Georges Comte et quelques photos prises lors de la pose de la plaque commémorative de la SMF en juillet dernier.*

Suivent trois articles issus de la journée « L'Héritage Scientifique de Jacques Herbrand » *organisée le 15 février 2008 par Françoise Delon, François Loeser et Angus Macintyre avec le soutien de l'École Normale Supérieure, de l'université Paris VII, du CNRS et de la SMF.*

Concernant le théorème fondamental de Jacques Herbrand sur le calcul des prédicats, on trouvera dans ce numéro de la Gazette un article de Thierry Coquand intitulé « Herbrand et le programme de Hilbert », *qui présente ce résultat et le situe dans le développement de la théorie de la démonstration. Ensuite vient l'article* « Herbrand's theorem and extractive proof theory » *d'Ulrich Kohlenbach qui montre comment le théorème d'Herbrand permet d'extraire des algorithmes de certaines démonstrations et des bornes de certains résultats de convergence.*

Concernant le résultat d'Herbrand sur les corps cyclotomiques, c'est-à-dire sur un des sens de l'équivalence connue sous le nom de théorème d'Herbrand-Ribet, notre dossier propose un article intitulé « Modular constructions of unramified extensions and their relation with a theorem of Herbrand » *où le même Kenneth Ribet explique le résultat d'Herbrand ainsi que ses développement récents.*

Outre ces trois articles, la journée comportait également un exposé de Warren Goldfarb, « Herbrand and the early development of proof theory », *ainsi qu'un de Catherine Goldstein,* « La place de J. Herbrand dans la théorie des nombres de l'entre-deux-guerres ».

Je remercie chaleureusement François Loeser auquel revient l'initiative de ce dossier.

Christian Retoré

Jacques Herbrand

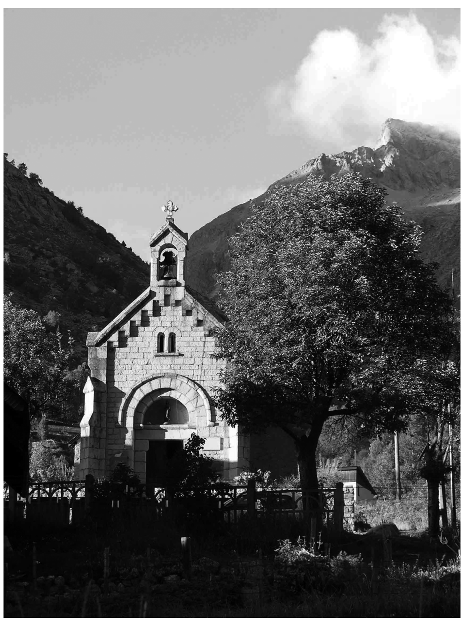
(1908 – 1931)

Georges Comte

Jacques Herbrand naît le 12 février 1908 et décède accidentellement à l'age de 23 ans, le 27 juillet 1931, alors qu'il descend avec deux compagnons, après l'avoir gravie, la voie normale des Bans depuis La Bérarde. La photographie en noir en blanc le représente, entouré de ses deux compagnons, quelques instants avant l'accident.

Bien que décédé très jeune, son héritage mathématique est considérable. À ce sujet on peut se reporter à : Jacques Herbrand, *Écrits Logiques*, Presse Universitaires de France, Paris, 1968 et pour une introduction à l'œuvre, tout particulièrement à la préface de Jean Van Heijenoort ainsi qu'aux deux notices d'ordre plus biographique écrites par Claude Chevalley et Albert Lautman.

À l'occasion du centenaire de sa naissance la SMF a financé la pose d'une plaque commémorative dans la petite chapelle de La Bérarde (comme c'est l'usage pour les alpinistes disparus dans les vallée du Vénéon et des Étançons) le 20 juillet 2008, jour de la fête des guides de la Bérarde.



© Georges Comte

Herbrand et le programme de Hilbert

Thierry Coquand

Cette note reprend l'exposé que j'ai donné pour la journée sur « l'Héritage scientifique de Jacques Herbrand » à l'école Normale Supérieure à l'occasion du centième anniversaire de sa naissance. Cet exposé était, essentiellement, un commentaire de deux preuves de cohérence pour l'arithmétique données dans sa thèse et dans la référence [14]. Ces deux preuves constituent une contribution importante au programme de Hilbert, et je commence par présenter quelles étaient les motivations et les buts de ce programme.

1. La signification des énoncés d'existence en mathématiques

Une des meilleures manières de présenter le programme de Hilbert est, comme le fait von Neumann [25], de commencer par une discussion sur la signification des énoncés mathématiques, et en particulier des énoncés qui affirment l'existence d'un objet vérifiant une propriété donnée. Comme le remarque von Neumann, si on a une preuve en mathématiques de l'existence d'un nombre réel satisfaisant à une propriété $E(x)$, il peut arriver que l'on n'ait *aucun* moyen à partir de cette preuve de construire un tel x qui vérifie $E(x)$ (un tel exemple sera donné plus tard). Ce phénomène illustre bien le caractère « non effectif » des mathématiques. On peut noter que cet aspect non effectif des énoncés mathématiques est relativement nouveau : avant 1888 (date du célèbre théorème de la base finie de Hilbert), la plupart des théorèmes d'existence en mathématiques contenaient, peut-être implicitement, un algorithme pour construire le témoin (même si le calcul n'était possible peut-être seulement qu'en théorie ; Galois, par exemple, insiste sur le caractère purement idéal des calculs nécessaires pour tester si une équation donnée est ou non résoluble par radicaux). On doit noter aussi que cette discussion sur l'effectivité a eu lieu bien avant la définition des fonctions récursives par Church, Kleene et Turing dans les années 1930-40. Comme on peut le voir dans son « Nachlaß » [16], Hilbert était très préoccupé par cette question dès les années 1890. Une idée d'Hilbert pour analyser ce problème est de remarquer la grande différence entre la « forme » et le « contenu » en mathématiques : si la *signification* des énoncés mathématiques n'est peut-être pas si claire et non effective, la *vérification* d'un raisonnement mathématique, elle, doit être parfaitement claire et effective. S'il y a une erreur dans un raisonnement on peut toujours la mettre en évidence, et de plus cette vérification repose uniquement sur la *forme* du raisonnement, et non sur son *contenu*. Il y a donc une différence essentielle en mathématiques entre la « sémantique » (qui peut rester vague et intuitive) et la « syntaxe » (qui doit être extrêmement précise).

1.1. Exemples

Voyons maintenant quelques exemples en mathématiques qui illustrent le problème de la signification des énoncés d'existence. Considérons l'affirmation suivante

Théorème *Si $f : [0,1] \to [-1,1]$ est continue et croissante et telle que $f(0) = -1,\ f(1) = 1$ alors il existe x tel que $f(x) = 0$ et $f(y) < 0$ si $0 \leqslant y < x$*

On affirme l'existence d'un nombre réel x. La preuve est très courte : il suffit de prendre pour x la borne supérieure de l'ensemble $\{\ y \in [0,1] \mid f(y) < 0\ \}$ qui est non vide et majoré.

Toutefois, il est impossible d'extraire de cette preuve un moyen de calculer un tel nombre x.

En effet, considérons comme cas particulier la fonction $f : [0,1] \to [-1,1]$ linéaire par morceaux (et clairement calculable) telle que $f(0) = -1,\ f(1) = 1$ et $f(1/3) = -\varepsilon, f(2/3) = \varepsilon$ où ε est un nombre positif ou nul très près de 0. On voit alors que le nombre x doit être proche de $1/3$ ou proche de $1/2$ suivant que ε est positif ou nul. Mais si on ne sait rien de plus sur ε, on ne peut pas décider.

Par exemple, prenons $\varepsilon = \Sigma_n \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ avec $\varepsilon_k = 0$ si $2k$ est une somme de deux nombres premiers et $\varepsilon_k = 1$ dans le cas contraire. Alors ε est calculable : on peut en calculer des approximations arbitrairement proches. Mais on ne peut trouver x tel que $f(x) = 0$ et $f(y) < 0$ si $y < x$. Il est même impossible de calculer une approximation de x à $1/12$ près à partir de la preuve « d'existence » d'un tel objet. En effet, trouver une telle approximation revient à décider la conjecture de Goldbach, et il est clair que la preuve très courte d'existence d'un nombre x que l'on a donnée ne contient aucune indication sur ce problème !

Cet exemple peut paraître artificiel, mais il illustre bien la subtilité de la notion d'existence en mathématiques. Voici d'autres exemples plus naturels.

En algèbre, Hilbert utilisait dans le cas de base le fait suivant (théorème de la base finie) : si on a une suite d'entiers $n_1,\ n_2,\ \dots$ il existe k tel que n_k soit minimum (on a $n_l \geqslant n_k$ pour tout l). Peut-on calculer un tel indice k ?

En théorie des nombres, Dirichlet a une preuve en utilisant de l'analyse qu'il y a un nombre infini de nombres premiers de la forme $an + b$, avec $a,\ b$ premiers entre eux. Étant donné a et b, peut-on extraire de cette preuve *un* tel nombre premier ?

En algèbre réelle, Artin et Schreier présentaient une solution du XVII$^{\text{e}}$ problème de Hilbert.

Théorème *Un polynôme P de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ qui ne prend que des valeurs positives ou nulles peut s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles*[1].

La preuve utilise des raisonnements transfinis (existence d'un bon ordre sur tout ensemble). Une question naturelle (qui était posée par Artin) est alors la suivante : si on donne le polynôme P peut-on l'écrire effectivement comme une somme de carrés à partir de cette preuve ?

Terminons par un exemple en algèbre commutative : le théorème de Quillen-Suslin (problème de Serre).

Théorème *Une matrice idempotente de polynômes est semblable à une matrice de projection canonique.*

[1] En général, il peut ne pas être une somme de carrés de polynômes.

La preuve de Suslin utilise l'existence d'un idéal maximal. La preuve de Quillen utilise des résultats de nature « locale-globale », qui reposent sur l'existence d'idéaux premiers. Est-il possible d'extraire de ces preuves un algorithme pour résoudre la question suivante[2] : si on a une matrice de polynômes explicitement donnée M, peut-on calculer effectivement P tel que PMP^{-1} soit une matrice de projection canonique ?

1.2. Quelques questions

Ces exemples suggèrent les questions suivantes. Tout d'abord, comme on l'a vu par le premier exemple, on ne peut extraire en général de manière effective un témoin à partir d'une preuve d'existence en mathématiques. Y-a-t'il certains cas où on le peut ? Ensuite, quelle est la signification intuitive concrète[3] de l'énoncé $\exists x.E(x)$, qui doit être plus subtile en général que la seule existence de x ?

2. Critique de Brouwer et le programme de Hilbert

Comme Hilbert, Brouwer prend très au sérieux ces problèmes de signification des énoncés mathématiques. Le résultat de son analyse est qu'il faut reconstruire les mathématiques suivant des critères plus rigoureux. Brouwer identifie la source du caractère non effectif des mathématiques dans le principe du tiers-exclu[4]. Ce principe permet de montrer l'existence d'un élément vérifiant une propriété en montrant qu'il est impossible que tout élément vérifie sa négation. Il propose donc de rejeter ce principe. Cette restriction des mathématiques aux raisonnements qui n'utilisent pas ce principe (les mathématiques « finitistes », « constructives » ou « intuitionnistes » ; comme Herbrand, nous utiliserons ces termes de manière équivalente) est absolument impensable pour Hilbert. Ce dernier en fait la critique suivante [18] (mes italiques) : « *Si nous restons dans le domaine des propositions finitistes,* comme nous le devons d'ailleurs*, les relations logiques qui y règnent manquent singulièrement de clarté, et ce défaut s'aggrave au point de devenir insupportable lorsque « tous » et « il existe » se combinent... il est de fait que personne, même qui parlerait le dialecte des anges, n'empêchera les hommes de nier des assertions quelconques... et d'appliquer le tiers exclu. Que faire ?* ». On voit dans cette citation qu'Hilbert reconnaît tout à fait le problème de la signification des énoncés mathématiques. Si on veut des énoncés qui ont un sens clair, il faut se restreindre aux énoncés finitistes. Le problème pour Hilbert est alors que ces énoncés, et encore plus les preuves, deviennent complexes au point d'être inutilisables.

La solution de Hilbert est très originale. On veut garder la forme usuelle des énoncés et preuves mathématiques et on a vu que cet aspect formel est très précis, peut se décrire de manière constructive, et suffit à lui-même pour vérifier la correction des arguments mathématiques. On va donc simplement oublier l'aspect sémantique, ou si l'on veut, remplacer la « sémantique » par la « syntaxe ». Le

[2] Pour une analyse de ces questions, voir [22] et [30].

[3] Cette question a été analysée par Gentzen, 1936, pour les énoncés d'arithmétique.

[4] Cette analyse, en 1908, n'était pas triviale dans le contexte de l'époque, car la discussion se concentrait alors autour de l'axiome du choix et de la preuve de Zermelo de l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble à partir de cet axiome. Les discussions semblent attribuer cette existence non effective à l'utilisation de l'axiome du choix, et non à l'utilisation du tiers-exclu. Pour une discussion de ce point, voir l'introduction du livre de Bishop [5].

calcul logique, qui est bien défini et gouverne les mathématiques classiques, est considéré comme un jeu formel et sans contenu.

On notera l'analogie avec l'analyse de la théorie physique, qui avait été dégagée peu auparavant par Duhem [10]. Comme le présente Duhem, on met au point un modèle purement formel de certains phénomènes physiques et seul compte la condition que les observations prévues par ce modèle se vérifient. Le fait que les résultats intermédiaires du modèle, peut-être non observables, peuvent ne correspondre à aucune propriété du monde physique n'a aucune importance. En revanche, un rôle essentiel est confié aux critères d'élégance de la théorie et la facilité avec laquelle on peut prévoir des résultats observables. La situation est similaire ici : si le critère d'élégance est crucial (et motive le programme de Hilbert) il est en outre essentiel que si l'on prouve de manière formelle un énoncé finitiste, que l'on peut vérifier, alors cet énoncé est effectivement correct. Comme le remarque Hilbert, ceci revient à prouver la *cohérence* de ce calcul formel. On saura alors plus généralement que tous les énoncés purement universels que l'on prouve de manière formelle, peut-être en utilisant des arguments transfinis, sont corrects[5] : en effet, si le calcul est cohérent, on ne peut pas avoir de contre-exemples. On peut remarquer que cet énoncé de cohérence est lui-même un énoncé purement universel. Si on arrive de plus à montrer cette cohérence en n'utilisant que des raisonnements intuitionnistes, on aura vraiment répondu à la critique de Brouwer. Tel est, dans les grandes lignes, le programme de Hilbert, auquel Herbrand va apporter des contributions essentielles.

2.1. Formalisation des mathématiques

La première étape consiste à préciser complètement la structure logique des raisonnements mathématiques. Une très bonne description de la situation avant les travaux d'Herbrand est donnée par Weyl [31]. Il présente une stratification des raisonnements en deux calculs. Le premier calcul, le calcul *propositionnel*, ou calcul Booléen, est décidable par la méthode des tables de vérité. Cette méthode donne à la fois une *sémantique* et un *procédé de décision*. Le deuxième calcul, le calcul *des prédicats*, est obtenu en ajoutant les quantifications existentielles et universelles. En général on ne peut pas calculer la valeur de vérité d'un énoncé pour ce calcul et, suivant la critique de Brouwer, les énoncés avec quantificateurs (sur un domaine qui peut être infini) n'ont pas un sens clair. On doit se restreindre à une présentation syntaxique précise des règles de déduction qui permettent de manipuler ces énoncés de manière formelle. On pourra considérer que les énoncés sans quantificateurs correspondent aux énoncés « finitistes ».

Hilbert a en fait aussi une approche originale du calcul des prédicats. Elle consiste à définir les quantificateurs à partir du symbole τ qui a pour unique axiome $A(\tau_x A) \rightarrow A(x)$ ce qui constitue une forme de l'axiome du choix[6]. Ce symbole et cet axiome concentrent le côté non effectif des quantifications : même si A est décidable, il n'y a en général aucun moyen de trouver une valeur de $\tau_x A$. Le

[5] Hilbert donne comme exemple de tel énoncé le Théorème de Fermat.

[6] On peut alors définir $\forall x.A$ par $A(\tau_x A)$. Si par exemple $A(x)$ est la propriété « être malhonnête », alors $\tau_x A$ sera un individu (Aristide) d'une intégrité telle que s'il est malhonnête, alors tous les hommes sont malhonnêtes. Pour tester si la propriété d'être malhonnête est universellement vraie, il suffit donc de la tester sur cet individu particulier.

but est de montrer que l'on peut éliminer ce symbole dans toute démonstration donnée d'un résultat finitiste. La méthode de Hilbert est expliquée de manière très suggestive par Weyl dans la référence [32] [7].

2.2. Représentation d'un ensemble infini

Le premier problème considéré par Hilbert [17] est celui de la théorie la plus simple d'un ensemble infini, qui est donné dans le langage avec un symbole de constante 0, un symbole de fonction $S(x)$ et les deux axiomes

$$S(x) \neq 0, \qquad S(x) = S(y) \rightarrow x = y$$

qui expriment que cette fonction n'est pas surjective mais est injective. Il n'y a pas de modèle fini de cette théorie. « Naïvement », ces axiomes sont vérifiés pour $\mathbb{N}$; il y a donc intuitivement un modèle (infini), ce qui montrerait la cohérence. Mais cet argument est sans valeur pour un finitiste, car la signification des quantificateurs est problématique, et on ne peut pas calculer a priori la valeur de vérité des énoncés quantifiés. Il n'est donc pas du tout clair pour un finiste que les deux axiomes ne conduisent pas à une contradiction si on les utilise dans le calcul des prédicats. Pour être vraiment écrit dans le calcul des prédicats, la théorie doit être complémentée par les axiomes suivants qui axiomatisent l'égalité.

$$x = x, \quad x = y \wedge y = z \quad \rightarrow \quad x = z, \quad x = y \rightarrow y = x$$
$$x = y \rightarrow S(x) = S(y)$$

2.3. Premières preuves de cohérence

L'argument de Hilbert (1904) est en gros le suivant. On regarde la théorie précédente de manière purement syntaxique. Les termes $t, u, \ldots$ sont $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ et les formules que l'on considère des équations $t = u$. On voit que les axiomes $a = a$ sont des équations vraies. Les autres axiomes peuvent être vus comme des règles d'inférences qui permettent de déduire d'autres équations à partir d'équations. Par exemple, l'axiome $x = y \rightarrow y = x$ s'interprète de la manière suivante : si on a déduit $t = u$ alors on peut ajouter aussi $u = t$ dans les conséquences possibles. On voit directement que l'on ne pourra jamais déduire que des équations vraies : si par exemple on utilise la règle

$$x = y \wedge y = z \rightarrow x = z$$

en déduisant $t = v$ à partir de $t = u$ et de $u = v$, il est clair que si $t = u$ est vrai (c'est-à-dire t et u sont le même terme $S^k(0)$) et $u = v$ est vrai alors $t = v$ est aussi vrai. Par ce moyen il semble que l'on puisse montrer la cohérence d'une théorie qui n'a pas de modèle fini, à partir d'un raisonnement purement syntaxique. (Dans ce raisonnement, on ne considère jamais l'ensemble des termes comme une totalité « close ».)

Hilbert était très optimiste sur la portée d'une telle méthode syntaxique. Il conclut son papier [17] : « *De la même manière, nous pouvons montrer que les*

[7] Le symbole τ sera remplacé par la suite par un symbole dual ε, qui dénote une fonction de choix. Bourbaki adoptera le symbole τ dans sa formulation de la théorie des ensembles, mais avec la signification duale du symbole de choix ε.

notions fondamentales de la théorie de Cantor, en particulier les alephs, ont une existence cohérente. »

Le problème dans cette approche est que cet argument ne considère qu'une partie des raisonnements possibles en calcul des prédicats, ceux qui utilisent directement les axiomes comme règle d'inférence pour conclure des égalités entre des termes clos. Mais on peut avoir des raisonnements indirects, en passant par des lemmes qui utilisent des énoncés quantifiés complexes. Comme on l'a vu, le sens de ces énoncés quantifiés n'est pas si clair et, a priori, il se pourrait bien qu'en utilisant un tel énoncé A et les règles de déduction du calcul des prédicats, on arrive à la fois à montrer A et sa négation à partir des axiomes.

Une preuve de cohérence finitiste pour le calcul des prédicats étendus avec les axiomes de la section 2.2 est obtenue par von Neumann [24], qui utilise l'approche de Hilbert du calcul des prédicats (avec le symbole τ) et qui précise un essai précédent dû à Ackermann [1, 33].

3. Première contribution d'Herbrand

Le travail de thèse d'Herbrand contient une preuve remarquablement simple de cohérence de la théorie précédente. Herbrand montre en fait la cohérence d'une *extension* de cette théorie où l'on ajoute les axiomes d'induction

$$\forall \vec{x}.\ \varphi(\vec{x}, 0) \wedge (\forall y.\ \varphi(\vec{x}, y) \rightarrow \varphi(\vec{x}, S(y))) \rightarrow \forall y. \varphi(\vec{x}, y)$$

L'argument est de plus d'une simplicité remarquable, comparée aux preuves d'Ackermann et von Neumann. Il fournit non seulement une preuve de cohérence mais aussi une *caractérisation complète* de la théorie (procédure de décision). L'approche consiste à « éliminer les quantificateurs » en associant à chaque formule $\varphi(\vec{x})$ une autre formule $\varphi'(\vec{x})$ *sans quantificateurs* telle que

$$\forall \vec{x}.\ \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi'(\vec{x})$$

est démontrable à partir des axiomes donnés. Un corollaire est que, dans ce cas particulier, on peut en fait calculer la valeur de vérité des énoncés quantifiés, bien que la quantification porte sur un domaine infini.

Herbrand a le commentaire suivant : « *Nous allons faire sur ce terme les opérations qui, en algèbre ordinaire, correspondent à l'élimination de x dans un système d'égalités et d'inégalités.* » Il ajoute aussi, faisant allusion à la théorie récente d'Artin et Schreier : « *La méthode employée dans ce chapitre est susceptible d'autres applications ; elle fournit toujours, en même temps que la non-contradiction de la théorie étudiée, sa résolubilité ... Il nous parait probable qu'elle permettrait également d'arriver à la non-contradiction de la théorie des corps réels et « réellement fermés » ; mais les méthodes du Chapitre suivant nous y conduiraient plus aisément.* » C'est une formulation du résultat d'élimination des quantificateurs sur la théorie des corps réels clos, qui sera publié par Tarski quelques années plus tard[8]. Citons le travail [8], pour une analyse récente de la situation, et par lequel on peut comprendre la remarque d'Herbrand, que l'autre méthode qu'il va développer (et que l'on va décrire dans la prochaine section),

[8] Il semble que Tarski ait obtenu ce résultat de manière indépendante des travaux d'Artin et Schreier.

permet une approche alternative pour montrer la cohérence de la théorie des corps réels clos.

4. Deuxième preuve de cohérence et Théorème Fondamental

Le problème avec cette première approche est qu'elle ne peut pas fonctionner dès que l'on ajoute l'addition et la multiplication. En effet, si elle s'appliquait, on aurait aussi un procédé de décision pour cette extension. Mais il est intuitif (et ce sera précisé plus tard par Church [6]) qu'un tel procédé de décision ne peut pas exister, puisque l'on peut par exemple exprimer dans cette théorie le théorème de Fermat pour un exposant donné. (Il faut noter aussi que par contre, si on se restreint à ajouter seulement l'addition, la méthode d'élimination des quantificateurs fonctionne bien, comme l'a montré Pressburger.)

La deuxième méthode proposée par Herbrand résout ces difficultés. Cette méthode est extrêmement flexible et fonctionne généralement en ajoutant des symboles de fonctions avec des axiomes qui spécifient (de manière intuitionniste) ces fonctions. Par exemple, elle s'appliquera à la théorie considérée en section 2.2 étendue avec les axiomes

$$x + 0 = x, \quad x + S(y) = S(x + y), \quad x = z \wedge y = t \rightarrow x + y = z + t$$

$$x \times 0 = 0, \quad x \times S(y) = x + x \times y,, \quad x = z \wedge y = t \rightarrow x \times y = z \times t$$

Dans une telle théorie, On peut montrer que si $\psi(x)$ est sans quantificateur et t est un terme clos, alors soit $\psi(t)$, soit $\neg\ \psi(t)$ est démontrable (intuitivement, les formules sans quantificateurs sont décidables). Notons que pour cette théorie utilisée par Herbrand, tout terme clos est égal à un terme de la forme $0,\ S(0),\ S(S(0)),\ldots$ Les substitutions closes qu'il faut effectuer ont donc une structure très simple.

On peut ajouter des définitions de la forme

$$\psi(x) \rightarrow f(x) = 0, \quad (\neg\psi(x)) \rightarrow f(x) = S(0), \qquad x = y \rightarrow f(x) = f(y)$$

pour $\psi(x)$ formule sans quantificateurs. En effet, ceci est une spécification complète d'une fonction que l'on peut calculer, puisque la propriété $\psi(t)$ est décidable. Il n'y a pas d'axiome d'induction explicite comme dans la version précédente, mais on peut montrer aussi que l'axiome d'induction est démontrable pour les énoncés sans quantificateurs en utilisant de telles fonctions.

La théorie de l'arithmétique considérée par Herbrand est une théorie *universelle*, c'est-à-dire n'ayant que des axiomes de la forme $\forall\vec{x}.\varphi(\vec{x})$ où φ est sans quantificateurs.

Ce qui est remarquable, c'est que cette méthode marchera sans avoir à décider tous les énoncés. Elle repose sur le Théorème Fondamental suivant[9].

Théorème *Une théorie purement universelle, c'est-à-dire n'ayant que des axiomes de la forme $\forall\vec{x}.\varphi(\vec{x})$ où φ est sans quantificateurs, est* cohérente *si, et seulement si, la théorie* propositionnelle *qui est formée par tous les substitutions*

[9] La formulation que je donne est en fait un cas particulier du résultat d'Herbrand ; on suppose que l'on a au mois un symbole de constante. Une preuve claire de ce résultat est présentée dans le livre de Shoenfield [27].

closes $\varphi(\vec{t})$ est cohérente.

Ce résultat réduit, en un certain sens, le calcul des prédicats (non finitiste) au calcul propositionnel (finitiste). Ceci joue un rôle essentiel en démonstration automatique. On voit que ce théorème est précisément ce qui manque à l'esquisse de la preuve de Hilbert 1904 pour être conclusive.

Ce théorème ne fait intervenir *que des notions syntaxiques* : dérivation dans la théorie des énoncés avec quantificateurs et dérivation en calcul propositionnel. L'énoncé suit donc bien les restrictions intuitionnistes nécessaires, contrairement aux travaux précédents de Lowenheim et Skolem. La preuve de ce théorème n'est pas du tout évidente : on doit partir d'une dérivation en calcul avec quantificateurs et la transformer progressivement en une dérivation sans quantificateurs. En fait, la preuve qu'Herbrand en donne est *fausse*[10] !

4.1. Théorème fondamental, exemple

Voici un exemple simple qui illustre le Théorème Fondamental. Étant donnés trois symboles de constantes a, b et c et un symbole de fonction f à deux arguments et le symbole de relation $\leqslant$, considérons la théorie :

$$\forall x\, y\, z.\ x\leqslant y \wedge y\leqslant z \ \rightarrow\ x\leqslant z,\quad \forall x.\ x\leqslant x,\ \ \forall x\, y.\ x\leqslant f(x,y),\ \ \forall x\, y.\ y\leqslant f(x,y)$$
$$\forall x.\ \ \neg(a\leqslant x \wedge b\leqslant x\wedge c\leqslant x)$$

Celle-ci exprime que $\leqslant$ est une relation de préordre, que f majore ces deux arguments et que a, b et c ne sont pas majorés par un même élément. C'est une théorie contradictoire. De manière sémantique, si on a un préordre et un majorant pour deux éléments, on a un majorant pour trois éléments et donc le dernier axiome est incompatible avec les précédent. Le Théorème Fondamental dit que l'on doit observer cette contradiction à un niveau purement propositionnel en regardant les instantiations closes de ces axiomes. En effet parmi ces instantiations, nous avons

$$a\leqslant f(a,b),\quad b\leqslant f(a,b),\quad f(a,b)\leqslant f(f(a,b),c),\quad c\leqslant f(f(a,b),c)$$
$$a\leqslant f(a,b)\wedge f(a,b)\leqslant f(f(a,b),c)\rightarrow a\leqslant f(f(a,b),c)$$
$$b\leqslant f(a,b)\wedge f(a,b)\leqslant f(f(a,b),c)\rightarrow b\leqslant f(f(a,b),c)$$
$$\neg(a\leqslant f(f(a,b),c)\wedge\ b\leqslant f(f(a,b),c)\wedge\ c\leqslant f(f(a,b),c))$$

qui sont contradictoires de manière purement propositionnelle (sans faire intervenir d'énoncés quantifiés).

L'application du Théorème fondamental à l'arithmétique est directe. La théorie ne comprend bien que des axiomes purement universels. De plus, si on considère les instantiations de ces axiomes, on n'obtient que des énoncés vrais (exactement

[10] Une très bonne discussion sur ce sujet est accessible à la page web `gtps.math.cmu.edu/andrews.html` de Peter Andrews. Voir aussi le papier de Tait [29]. Pour simplifier, l'argument d'Herbrand, s'il était valide, entraînerait que la taille de la preuve de contradiction en calcul propositionnel est une fonction linéaire de la taille de la contradiction en calcul des prédicats, alors que l'on peut donner des exemples où la preuve grossit de manière non élémentaire (tour d'exponentielle). Ce phénomène illustre bien le gain obtenu en utilisant les moyens idéaux donnés par les quantificateurs. Comme il m'a été signalé par R. Zach, la première preuve finitiste correcte du résultat d'Herbrand semble être due à Bernays [4], qui utilise la technique présentée dans [24].

comme dans l'esquisse proposée par Hilbert [17]), et donc on ne peut pas obtenir de contradiction au niveau propositionnel.

4.2. Un corollaire remarquable

Le résultat suivant est un corollaire du Théorème Fondamental qui sera explicité par Bernays [4].

Corollaire : *Si on montre $\exists x.\psi(x)$ dans l'arithmétique présentée par Herbrand et $\psi(x)$ est sans quantificateur, alors on peut calculer t tel que $\psi(t)$ est démontrable*

En effet, la théorie universelle en ajoutant l'axiome $\forall x.\neg\psi(x)$ est contradictoire. Par le Théorème Fondamental, on a donc (explicitement) une contradiction dans la théorie propositionnelle où l'on a ajouté toutes les instantiations $\neg\psi(0),\ \neg\psi(S(0)),\ldots$ Cette contradiction explicite est un objet fini qui fournit un témoin t.

Ce résultat remarquable est utilisé par Church [6] pour une présentation finitiste du fait qu'il n'y a pas d'algorithme de décision pour le calcul des prédicats. L'idée de cette application est la suivante. On peut former par exemple l'énoncé $A = \exists a\ b\ c.\ S(a)^3 + S(b)^3 = S(c)^3$. En utilisant le Corollaire du Théorème fondamental, on voit que cet énoncé est démontrable dans l'arithmétique d'Herbrand si, et seulement si, on peut trouver $p, q, r > 0$ tels que $p^3 + q^3 = r^3$. Un algorithme de décision pour le calcul des prédicats donnerait donc un moyen uniforme de décider tous les énoncés existentiels en arithmétique, ce que Church avait montré impossible auparavant.

Ce corollaire suggère le principe (heuristique) général suivant.

Principe *Si on montre de manière classique l'existence d'un objet* « concret » *(entier, ou qui peut se coder comme un entier) qui vérifie une propriété* décidable *alors on peut extraire de cette preuve un moyen de calculer cet objet.*

Ceci n'est *pas* vérifié pour les énoncés de la forme $\exists x.\forall y.\varphi(x,y)$. Par exemple, étant donné une fonction g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il est très simple de montrer $\exists x.\forall y.g(x) \leqslant g(y)$, mais il est impossible à partir de cette preuve de calculer un témoin à partir de g.

4.3. Généralisation

Herbrand énonce son résultat sans restriction sur la forme des axiomes de la théorie. Il est possible en effet de se ramener au cas d'une théorie purement universelle en introduisant des symboles de fonctions. Prenons l'exemple suivant : supposons que l'on a une preuve en calcul des prédicats de la formule $\exists u.\forall t.G(u,t)$ à partir de l'axiome unique $\forall x.\exists y.\forall z.\exists w.F(x,y,z,w)$ où les formules $G(u,t)$ et $F(x,y,z,w)$ sont sans quantificateurs. Ceci signifie que la théorie avec les deux axiomes

$$\forall x.\exists y.\forall z.\exists w.F(x,y,z,w),\quad \forall u.\exists t.\neg\ G(u,t)$$

est contradictoire. Cette théorie se transforme en une théorie universelle en introduisant des symboles de fonction $f_1(x),\ f_2(x,z),\ f_3(u)$, et on a que la théorie

$$\forall xz.F(x, f_1(x), z, f_2(x,z)),\quad \forall u.\neg\ G(u, f_3(u))$$

est aussi contradictoire. D'après le Théorème Fondamental, ceci revient à dire que la théorie propositionnelle obtenue en remplaçant x, z, u par les termes générés par l'application répétée des fonctions $f_1,\ f_2,\ f_3$ sur une constante initiale a

$$a,\ f_1(a),\ f_2(a,a), f_3(a), ...,\ f_2(f_1(a), f_2(a,a)), ...$$

est contradictoire. Comme le remarque A. Robinson [23], ceci constitue un moyen possible pour chercher les preuves de manière automatique. De plus, cette méthode se rapproche de la manière dont procèdent les mathématiciens par exemple en géométrie élémentaire. Par exemple, les termes obtenus par les fonctions $f_1(x),\ f_2(x,z),\ f_3(u)$ correspondent aux points, lignes... auxiliaires construits pour résoudre un problème. Cette approche est absolument fondamentale en démonstration automatique, le problème principal étant de réduire autant que possible la production des termes auxiliaires[11].

5. Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Le travail d'Herbrand [15] va jouer aussi un rôle essentiel dans la définition mathématique de la notion d'algorithme qui va être mise au point par Church, Turing, Gödel, Kleene, Post dans les années 1930-40. Herbrand présente l'arithmétique comme un système « ouvert » : on peut rajouter de nouvelles fonctions avec leur spécifications. La seule condition est que cette spécification permette le calcul de manière intuitionniste de la fonction. Herbrand insiste de plus sur le fait que ce caractère ouvert du système est inévitable : il est *impossible* de donner un moyen uniforme de décrire toutes les fonctions calculables. C'est un argument très simple de diagonalisation : si l'on a une énumération intuitionniste f_n de fonctions calculables, alors la fonction $n \longmapsto 1 + f_n(n)$ est aussi calculable, mais ne figure pas dans cette énumération. Ceci explique, d'après Herbrand, comment on échappe au résultat de Gödel sur la non-existence d'une preuve de cohérence : elle ne s'applique que pour un système fixe ; mais si l'on fixe le système on peut effectuer la preuve de cohérence dans un système étendu où l'on a ajouté de nouvelles fonctions. Ces réflexions contribueront à la mise au point d'une définition générale de la notion d'algorithme (par Church, Kleene et Turing). En réfléchissant à cette introduction de fonctions intuitionnistes, Gödel mettra au point quelques années plus tard la notion de fonctions d'« Herbrand-Gödel », qui est une définition possible des fonctions récursives[12].

---

[11] Il faut noter que l'idée de cette approche est essentiellement contenue dans les travaux de Lowenheim et Skolem, qui sont antérieurs aux travaux d'Herbrand, cf. l'introduction de [26]. Toutefois, Lowenheim et Skolem utilisent des notions qui ne sont pas interprétables de manière finitiste.

[12] Gödel apporte quelques modifications significatives à l'approche d'Herbrand : la spécification de la fonction doit être faite par un système d'équations uniquement, la preuve du fait que ce système défini bien une fonction peut être non finitiste, et enfin, le calcul d'une valeur de cette fonction peut se faire par réécriture uniquement à partir du système d'équations.

6. Conclusion

Les deux travaux d'Herbrand que nous avons décrits constituent une contribution essentielle au programme de Hilbert. Ils ont eu une importance cruciale en théorie de la récursivité et en démonstration automatique. Peu après ces travaux, Kolmogorov et Heyting montrent comment formaliser la logique intuitionniste (un résultat tout à fait inattendu), et on peut alors analyser le calcul des prédicats comme le calcul des prédicats intuitionnistes auquel on ajoute le principe du tiers-exclu. À l'aide de cette formalisation, et en s'appuyant aussi sur la présentation d'Herbrand, Gödel donne un moyen très simple (la traduction négative [12]) qui permet d'interpréter l'arithmétique non finitiste en arithmétique intuitionniste. Il est alors naturel d'essayer d'étendre cette interprétation à l'Analyse (où l'on quantifie sur les réels et pas seulement sur les entiers), mais une telle interprétation ne marche pas pour l'axiome du choix dépendant. Ce problème sera résolu par Spector [28] (voir [3] et [19] pour une autre interprétation possible). Plus récemment, J.-L. Krivine a annoncé une interprétation calculatoire possible pour le système ZFC, qui étend son interprétation précédente du système ZF [20], à l'axiome du choix général. Mais même la compréhension du calcul des prédicats réserve encore des surprises, comme le montre par exemple le travail [21], qui analyse la signification de tautologie classique de la forme $\exists x.\forall y.\ (P(x) \rightarrow P(y))$.

7. Références

[1] W. Ackermann. Begründung des « tertium non datur » mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. *Math. Ann.* 93, pp. 1–36, 1924.

[2] P. Benacerraf and H. Putnam. Philosophy of mathematics. Selected readings. Cambridge University Press, Second Edition, 1985.

[3] S. Berardi, et M. Bezem, et T. Coquand. On the computational content of the axiom of choice. *J. Symbolic Logic 63* (1998), no. 2, 600–622.

[4] P. Bernays. Lectures at Princeton. Mimeographed notes, The Institute for Advanced Study, N.J, 1936.

[5] E. Bishop. *Foundations of constructive analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London 1967.

[6] A. Church. A Note on the Entscheidungsproblem. *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 1, Number 1, 1936.

[7] A. Church. Correction to *A Note on the Entscheidungsproblem*. *The Journal of Symbolic Logic*, Volume 1, Number 2, 1936.

[8] M. Coste, H. Lombardi et M.F. Roy. Dynamical method in algebra : effective Nullstellesätze. *Annals of Pure and Applied Logic*, 111, 203-256 (2001).

[9] J. Dubucs et P. égré. Jacques Herbrand. in M. Bithold et J. Gayon, dir., *L'épistémologie française, 1850-1950*, Paris, PUF, à paraitre.

[10] P. Duhem. *La théorie physique : son objet et sa structure.* Paris, Chevalier et Rivière, 1906.

[11] G. Gentzen. The collected papers of Gerhard Gentzen. Edited by M. E. Szabo.North-Holland 1969.

[12] K. Gödel. Zur intuitionistichen Aritmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisseneis mathematischen Kolloquiums* 4. 34–38, 1933.

[13] J. van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Reprint of the third printing of the 1967 original. Edited by Jean van Heijenoort. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[14] J. Herbrand. *Recherche sur la théorie de la démonstration.* Thèse à l'université de Paris, 1930.

[15] J. Herbrand. Sur la non-contradiction de l'arithmétique. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 166*, 1-8 (1931).

[16] David Hilbert's Mathematical Notebooks. Maintenu par S. Hayashi et accessible à wwww.shayashi.jb/HNBP/index.html.
[17] D. Hilbert. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. English translation in van Heijenoort. ??
[18] D. Hilbert. *Sur l'infini* Math. Annal. 95, 1926, p. 161-190. Traduction francaise dans Largeault.
[19] J.-L. Krivine. Dependent choice, 'quote' and the clock. Th. Comp. Sc., 308, p. 259-276 (2003).
[20] J.-L. Krivine. Typed lambda-calculus in classical Zermelo-Fraenkel set theory. *Arch. Math. Log.*, 40, 3, p. 189-205 (2001).
[21] J.-L. Krivine et Y. Legrandgérard. Formules valides, jeux et protocoles réseaux. A paraitre, 2008.
[22] H. Lombardi, S. Barhoumi et I. Yengui. Projective modules over polynomial rings : a constructive approach. to appear in Math. Nachrichten, 2008.
[23] A. Robinson. Proving Theorems (as Done by Man, Logician, or Machine). Summaries of Talks Presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Princeton, New Jersey, 1957.
[24] J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie *Math.Z.* 26, pp. 1–46
[25] J. von Neumann. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis*, vol. 2. Translated in English in Benacerraf and Putnam.
[26] *Automation of Reasoning, Classical Papers on Computation Logic 1, 1957-1966.* Edited by J. Siekman and G. Wrightson, Springer-Verlag, 1983.
[27] J.R. Shoenfield. *Mathematical Logic.* Addison-Wesley, 1967.
[28] C. Spector. Provably recursive functionals of analysis : a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. In *Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. V pp. 1–27 American Mathematical Society, Providence, R.I, 1962.
[29] W.Tait. Gödel's Correspondence on Proof Theory and Constructive Mathematics. *Philosophia Mathematica.* 2006 ; 14 : 76-111
[30] I. Yengui. Making the use of maximal ideals constructive. *Theor. Comp. Sci.* 293(1-3) : 174-178 (2008).
[31] H. Weyl. Consistency in Mathematics. *Rice Institut Pamphlet* 16, p. 245-265, 1929.
[32] H. Weyl. David Hilbert and his mathematical work. *Bull. Amer. Math. Soc.* 50, (1944). 612–654.
[33] R. Zach. Numbers and functions in Hilbert's finitism. *Taiwanese J. Philos. Hist. Sci.* 10 (1998), 33–60.

Herbrand's theorem and extractive proof theory

Ulrich Kohlenbach[1]

1. Extractive Proof Theory: New results by logical analysis of proofs

Proof theory has its historic origin in foundational issues centered around (relative) consistency proofs (Hilbert's program). Since the 1950's Georg Kreisel pushed for a shift of emphasis in proof theory towards the use of proof theoretic transformations (as developed in the course of Hilbert's program) to analyze given proofs P e.g. of ineffectively proved $\forall\exists$-statements C with the aim to extract new information on C that could not be read off from P directly. Herbrand's fundamental theorem plays an important role in this development. The general situation is as follows:

Input: Ineffective proof P of C

Goal: Additional information on C:

– effective bounds (e.g. on the number of solutions of an ineffectively proven finiteness theorem, see theorem 1.9) or effective rates of convergence in nonlinear analysis (see sections 4 and 5),
– algorithms for computation of actual solutions of ineffectively established existential statements,
– continuous dependency or full independence from certain parameters (e.g. rates of convergence or stability for iterative processes in fixed point theory and ergodic theory that are independent from parameters such as the starting point or the function being iterated, see remark 5.3 below)
– generalizations of proofs: weakening of premises (e.g. replacing boundedness assumptions by bounds on the rate of growth, see corollary 4.4 below).

In this article, when we use terms like 'computable' or 'decidable' for functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ or subsets $A \subseteq \mathbb{N}$ we always refer to the standard notion of computability as developed by Herbrand, Gödel, Church, Turing, Kleene and others. Herbrand's important role in this development is nicely explained in Coquand's contribution to this volume ([5]).
Now let $C \equiv \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, F(x, y)$.

Naive Attempt: try to extract an explicit computable function f realizing (or bounding) '$\exists y \in \mathbb{N}$': $\forall x \in \mathbb{N}\, F(x, f(x))$.

Unless some restrictions on F are imposed this **naive attempt in general fails** as the following counterexample shows:

Proposition 1.1. *There exists a sentence $A \equiv \forall x \exists y \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$ in the language of arithmetic (A_{qf} quantifier-free and hence decidable) such that*

[1] Technische Universität Darmstadt, Dept. of Mathematics, Schlossgartenstrasse 7, 64289 Darmstadt.

– *A is logically valid,*
– *there is no computable bound f s.t. $\forall x \exists y \leq f(x) \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$.*

Proof: Consider any undecidable but semi-decidable predicate $Q(x) \equiv \exists y \in \mathbb{N}\, P(x, y)$ (P may even be taken as a primitive recursive predicate as in the Halting Problem for Turing machines or – if x, y are replaced by tuples of variables and one uses Matiyasevich's diophantine representation of semi-decidable sets – even of the form $p(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ with $p \in \mathbb{Z}[\underline{x}, \underline{y}]$). Now consider the logically valid sentence

$$A :\equiv \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} \left(P(x, y) \vee \neg P(x, z) \right).$$

Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a bound on '$\exists y \in \mathbb{N}$', i.e.

$$\forall x \in \mathbb{N} \exists y \leq f(x) \forall z \in \mathbb{N}\, (P(x, y) \vee \neg P(x, z)).$$

Then f is not computable since, otherwise, we could use f to decide $Q(x)$. $\square$

However, one can obtain computable bounds and even finitely many witnessing candidates (and so by case decision functions also realizing function(al)s) for a weakened version A^H of A (which, however, is equivalent to A w.r.t. provability in first order theories that do not mention the index function(s) referred to below in their axioms).

Every formula A can be written in a logical equivalent form which has all quantifiers lined up in front of a quantifier-free formula (a so-called prenex formula). For the issues discussed in this paper only the alternations of quantifiers (between $\forall$ and $\exists$) but not the length of blocks of equal quantifiers matter. Hence we will notationally identify single quantifiers and blocks of the same quantifier. Moreover, all relevant phenomena already show up for formulas of rather limited logical complexity. In the following, we will, therefore, restrict ourselves to the formulas mentioned in the next definition:

Definition 1.2. *Let $A \equiv \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 A_{qf}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ with A_{qf} being quantifier-free. Then the Herbrand normal form of A is defined as*

$$A^H :\equiv \exists x_1, x_2 A_{qf}(x_1, f(x_1), x_2, g(x_1, x_2)),$$

where f, g are new function symbols, called index functions.

Note that for purely existential sentences (and similarly for pure $\forall\exists$-sentences once the $\forall$-quantifier is treated either as a parameter or replaced by a fresh constant understood as a 0-place index function) A and A^H coincide.

In the following, let $\mathrm{PL}_{-=}$ denote first order logic (without equality).

Remark 1.3. *A^H is nothing else but the negation of the so-called Skolem normal form of the negation*

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \neg A_{qf}$$

of A as discussed in section 4.3 of Coquand's article [5] *in this volume.*

We now consider again the sentence (either as a sentence of first order logic with P as some binary predicate symbol or read in the language of arithmetic with a concrete primitive recursive P s.t. $\exists y \in \mathbb{N}\, P(x,y)$ is undecidable)

$$A \equiv \forall x \exists y \forall z (P(x,y) \vee \neg P(x,z)).$$

Whereas (as shown above) for A we not even have a computable bound on '$\exists y$', for the Herbrand normal form A^H of A

$$A^H \equiv \exists y \big(P(x,y) \vee \neg P(x,g(y))\big)$$

one can construct a list (of fixed finite length – in the case at hand of length 2 –) of candidates (uniformly in x, g) for '$\exists y$', namely $(x, g(x))$ or $(c, g(c))$ for any constant c s.t.

$$A^{H,D} :\equiv \big(P(x,c) \vee \underbrace{\neg P(x,g(c))\big) \vee \big(P(x,g(c))}_{\in \mathrm{TAUT}} \vee \neg P(x,g(g(c)))\big)$$

is a tautology.

A tautology still is a tautology when one replaces all occurrences of a term s by a variable y. So if we substitute all g-terms by fresh variables replacing bigger terms first, i.e. $g(g(c))$ by z and then $g(c)$ by y, then the result

$$A^D :\equiv \big(P(x,c) \vee \neg P(x,y)\big) \vee \big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big)$$

still is a tautology.

From A^D we can derive A by a so-called direct proof:

$$\begin{array}{c}
P(x,c) \vee \neg P(x,y) \vee P(x,y) \vee \neg P(x,z) \\
\Downarrow (\forall\text{-introduction}) \\
P(x,c) \vee \neg P(x,y) \vee \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \\
\Downarrow (\exists\text{-introduction}) \\
P(x,c) \vee \neg P(x,y) \vee \exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \\
\Downarrow (\forall\text{-introduction}) \\
\forall z\big(P(x,c) \vee \neg P(x,z)\big) \vee \exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \\
\Downarrow (\exists\text{-introduction}) \\
\exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \vee \exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \\
\Downarrow (\text{contraction}) \\
\exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big) \\
\Downarrow (\forall\text{-introduction}) \\
\forall x \exists y \forall z\big(P(x,y) \vee \neg P(x,z)\big)
\end{array}$$

Theorem 1.4 (J. Herbrand's Theorem ('Théorème fondamental' [14], 1930)).
Let $A \equiv \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 A_{qf}(x_1, y_1, x_2, y_2)$. *Then:*
$\mathrm{PL}_{-=} \vdash A$ *iff there are terms* $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_n$ *(built up out of the constants and free variables of A – possible with the help of some default constant c in case*

A does not contain any constant or free variable – and the index functions used for the formation of A^H) such that

$$A^{H,D} :\equiv \bigvee_{i=1}^{k}\bigvee_{j=1}^{n} A_{qf}\big(s_i, f(s_i), t_j, g(s_i, t_j)\big)$$

is a tautology. $A^{H,D}$ is called a Herbrand Disjunction of A and the terms s_i, t_j are called Herbrand terms.
Note that the length of this disjunction is fixed: $k \cdot n$.

The terms s_i, t_j can be extracted from a given $\mathrm{PL}_{-=}$*-proof of A.*

Replacing in $A^{H,D}$ all terms '$f(s_i)$','$g(s_i, t_j)$' by new variables as indicated above results in another tautological disjunction A^D s.t. A can be inferred from A^D by a direct proof.

Corollary 1.5. *Every* $\mathrm{PL}_{-=}$*-proof of a sentence A can be transformed into a direct proof which does not contain any detours via formulas ('lemmas') of greater quantifier complexity than A.*

Discussion:

(1) Herbrand's original proof was syntactic and provides an algorithm for the extraction of the Herbrand terms from a given $\mathrm{PL}_{-=}$-proof of A. However, two lemmas in his proof need a correction as was discovered first by K. Gödel in the 40's (unpublished, see [13]) and in the 60's by B. Dreben et al. [6]. After Herbrand's work, alternative syntactic proofs were given by D. Hilbert and P. Bernays (using Hilbert's ε-substitution method) and by G. Gentzen (using his cut elimination procedure for a sequent calculus formulation of $\mathrm{PL}_{-=}$). Most textbook treatments of Herbrand's theorem nowadays are model theoretic and do not yield any term extraction algorithm (with Shoenfield [32] as a notable exception).

(2) The forward direction in Herbrand's theorem immediately extends to logic with equality PL and even open theories $\mathcal{T}$ (i.e. theories with purely universal axioms only), where then the Herbrand disjunction is a tautological consequence of finitely many instances of equality axioms ('quasi-tautology') and – in the case of $\mathcal{T}$ – finitely many instances of the universal axioms. To get from such an implicative tautology a proof of A in $\mathcal{T}$ (i.e. the converse direction) it is crucial that the Herbrand index functions f, g are new not only w.r.t. A but also w.r.t. $\mathcal{T}$, i.e. do not occur in the axioms of $\mathcal{T}$. Already for logic with equality the syntactic procedure to eliminate the f, g-terms in the Herbrand disjunction becomes much more complicated if instances of f, g-equality axioms are used (see e.g. Shoenfield [32]).

(3) Although Herbrand's theorem constitutes a kind of reduction of predicate logic to propositional logic this does not contradict the undecidability of the former as there is no effective a-priori bound (depending only on A) on the number of Herbrand terms needed but only bounds depending on the data of a given proof P of A. In fact, as was first shown by Statman [35], the required number can be extremely large and, in general, is superexponential in the basic P-data.

(4) Note that the Herbrand terms do not depend on the predicate symbols in A.

We now give an example that illustrates that already extremely elementary proofs (in open theories) can give rise to Herbrand disjunctions that are far from obvious.

Example (Ulrich Berger): Consider the open first order theory $\mathcal{T}$ in the language of first order logic with equality and a constant 0 and two unary function symbols S, f. The only non-logical axiom of $\mathcal{T}$ is $\forall x(S(x) \neq 0)$ (e.g. think of x as ranging over $\mathbb{N}$ including 0 and S as the successor function).

Proposition 1.6. *$\mathcal{T}$ proves that $\exists x\big(f(S(f(x))) \neq x\big)$.*

Proof sketch: Suppose that

$$\forall x\big(f(S(f(x))) = x\big),$$

then f is injective, but also (since $S(x) \neq 0$) surjective on $\{x : x \neq 0\}$ and hence non-injective. Contradiction! $\square$

Analyzing the above proof yields the following Herbrand terms since the sentence in question is purely existential it is already in Herbrand normal form (though not exhibiting the instances of the $=$-equality axioms needed): PL proves that

$$(S(s) \neq 0) \to \bigvee_{j=1}^{3} (f(S(f(t_j))) \neq t_j),$$

where

$$t_1 := 0, t_2 := f(0), t_3 := S(f(f(0))), s := f(f(0)).$$

Remark 1.7. *For sentences $A \equiv \forall x \exists y \forall z\, A_{qf}(x, y, z)$, A^D can always be written in the form*

$$A_{qf}(x, t_1, b_1) \vee A_{qf}(x, t_2, b_2) \vee \ldots \vee A_{qf}(x, t_k, b_k),$$

where the b_i are new variables and the t_i do not contain any b_j with $i \leq j$.

Theorem 1.8 (Roth [31])**.** *An algebraic irrational number α has only finitely many exceptionally good rational approximations, i.e. for $\varepsilon > 0$ there are only finitely many $q \in \mathbb{N}$ such that*

$$R(q) :\equiv q > 1 \wedge \exists! p \in \mathbb{Z} : (p, q) = 1 \wedge |\alpha - pq^{-1}| < q^{-2-\varepsilon}.$$

Guided by Herbrand's theorem in the form of remark 1.7 and using ideas from Kreisel [26], the following polynomial (in ε) bound on the number of exceptionally good rational approximation was obtained by H. Luckhardt based on a Herbrand analysis of an ineffective proof of Roth's theorem due to Esnault and Viehweg [7]. Previously, only exponential bounds had been known (this shows that logical methods not only can be used to obtain effective bounds 'in principle' but even to yield clear-cut numerically improvements of known bounds).

Theorem 1.9 (Luckhardt [29])**.** *The following upper bound on $\#\{q : R(q)\}$ holds:*

$$\#\{q : R(q)\} < \frac{7}{3}\varepsilon^{-1} \log N_\alpha + 6 \cdot 10^3 \varepsilon^{-5} \log^2 d \cdot \log(50\varepsilon^{-2} \log d),$$

where $N_\alpha < \max(21 \log 2h(\alpha), 2\log(1+|\alpha|))$, $d = deg(\alpha)$ and $h(\alpha)$ is the absolute homogeneous height of α as defined in [3].

A similar bound was independently also obtained by Bombieri and van der Poorten [4].

Towards generalizations of Herbrand's theorem: allow **functionals** $\Phi(x, f)$ instead of just Herbrand terms. Let's consider again the example (with decidable P)

$$A \equiv \forall x \exists y \forall z \big(P(x, y) \vee \neg P(x, z))\big).$$

A^H can be realized by a computable functional (of type level 2) which is defined by cases:

$$\Phi(x, g) := \begin{cases} x & \text{if } \neg P(x, g(x)) \\ g(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

From this definition it easily follows that

$$\forall x, g \big(P(x, \Phi(x, g)) \vee \neg P(x, g(\Phi(x, g)))\big).$$

If A is not provable in PL or in some open theory but only with a logically complex instance of induction, then more complicated functionals are needed (Kreisel [25]):

Let (a_n) be a nonincreasing sequence in $[0, 1]$. Then, clearly, (a_n) is convergent and so a Cauchy sequence which we write as:

$$(1)\ \forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \forall i, j \in [n; n + m]\ (|a_i - a_j| \leq 2^{-k}),$$

where $[n; n + m] := \{n, n + 1, \dots, n + m\}$.
Then the (partial) Herbrand normal form of this statement is

$$(2)\ \forall k \in \mathbb{N} \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \forall i, j \in [n; n + g(n)]\ (|a_i - a_j| \leq 2^{-k}).$$

By E. Specker [33] ('Specker sequences'), there exist computable such sequences (a_n) even in $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ without a computable bound on '$\exists n$' in (1). By contrast, there is a simple (primitive recursive) bound $\Phi^*(g, k)$ on (2) (also referred to as 'metastability' by Tao [36]):

Proposition 1.10. *Let (a_n) be any nonincreasing sequence in $[0, 1]$. Then*

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \exists n \leq \Phi^*(g, k) \forall i, j \in [n; n + g(n)]\ (|a_i - a_j| \leq 2^{-k}),$$

where

$$\Phi^*(g, k) := \tilde{g}^{(2^k)}(0) \text{ with } \tilde{g}(n) := n + g(n).$$

In fact, there exists an $i < 2^k$ such that n can be taken as $\tilde{g}^{(i)}(0)$.

Remark 1.11. *The previous result can be viewed as a Herbrand disjunction of* **variable (in** k**) length** *(rather than of fixed length as in Herbrand's theorem):*

$$\bigvee_{i=0}^{2^k - 1} \big(|a_{\tilde{g}^{(i)}(0)} - a_{\tilde{g}(\tilde{g}^{(i)}(0))}| \leq 2^{-k}\big).$$

Corollary 1.12 (T. Tao's finite convergence principle, Tao [36])**.**

$$\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\, \exists M \in \mathbb{N}\, \forall 0 \leq a_M \leq \ldots \leq a_0 \leq 1\, \exists n \in \mathbb{N} \\ \big(n + g(n) \leq M \wedge \forall i, j \in [n; n + g(n)]\, (|a_i - a_j| \ \leq 2^{-k})\big). \end{array}$$

In fact, one can take $M := \tilde{g}^{(2^k)}(0)$.

2. Kreisel's No-Counterexample Interpretation

Definition 2.1 (G. Kreisel [25]). *Let $A \equiv \exists x_1 \forall y_1 \dots \exists x_n \forall y_n A_{qf}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. If a tuple of functionals $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ realizes the Herbrand normal form A^H of A, i.e. if*

$$A_{qf}\big(\Phi_1(\underline{f}), f_1(\Phi_1(\underline{f})), \dots, \Phi_n(\underline{f}), f_n(\Phi_1(\underline{f}), \dots, \Phi_n(\underline{f}))\big)$$

holds for all functions $\underline{f} = f_1, \dots, f_n$, then we say that $\underline{\Phi}(= \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ satisfies the **no-counterexample interpretation** *(n.c.i.) of A.*

Motivation for the name 'no-counterexample interpretation': Let A be as above. Then $\neg A$ is equivalent to

$$\forall x_1 \exists y_1 \dots \forall x_n \exists y_n \neg A_{qf}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n).$$

So a counterexample to A is given by functions $f_1, \dots, f_n$ such that

$$(+)\ \forall x_1, \dots, x_n\, \neg A_{qf}(x_1, f_1(x_1), \dots, x_n, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

holds. Hence functionals $\underline{\Phi}$ satisfying the n.c.i. of A produce a counterexample to $(+)$ i.e. to the existence of **counterexample functions** $f_1, \dots, f_n$.

More information of the no-counterexample interpretation can be found in [10] and – in particular – [22].

Problems of the no-counterexample interpretation: For principles $F \in \exists\forall\exists$ the n.c.i. no longer is 'correct' in the sense that the functionals sufficient to realize the n.c.i. of F may not reflect the true complexity of extractable bounds from proofs based on F (technically, this problem is due to the bad behavior of the no-counterexample interpretation w.r.t. to the modus ponens rule). We now give an example for the issue involved:

The **Infinitary Pigeonhole Principle (IPP)** is defined as follows:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall f : \mathbb{N} \to C_n \exists i \le n \forall k \in \mathbb{N} \exists m \ge k \big(f(m) = i\big),$$

where $C_n := \{0, 1, \dots, n\}$. It is easy to show that (over weak fragments of arithmetic) IPP implies the induction principle for induction formulas with one quantifier and – consequently – can cause arbitrary **primitive recursive complexity** of bounds extractable from proofs based on IPP. However, the n.c.i. of IPP

$$(\mathrm{IPP})^H \equiv \forall n \in \mathbb{N} \forall f : \mathbb{N} \to C_n \forall F : C_n \to \mathbb{N} \exists i \le n \exists m \ge F(i) \big(f(m) = i\big)$$

has a trivial solution:

$$M(n, f, F) := \max\{F(i) : i \le n\} \text{ and } I(n, f, F) := f(M(n, f, F))$$

are realizers for '$\exists m$' and '$\exists i$' in $(\mathrm{IPP})^H$.

Thus M, I do not reflect the true contribution of IPP to the complexity of bounds extractable from IPP-based proofs, while functionals G, I satisfying the Gödel functional interpretation of IPP, discussed in the next section, do.

3. Gödel's Functional Interpretation

In [12], K. Gödel developed a much refined so-called functional interpretation (originally for systems based on intuitionistic logic but combined with his negative embedding of classical systems into intuitionistic ones also for systems based on ordinary classical logic). This interpretation (we in the following tacitly always refer to the combination of negative and functional interpretation) has the property that the equivalence between A and its interpretation A^G can be proved using the axiom schema of choice only for **quantifier-free formulas** though in higher type function spaces

$$\text{QF-AC}:\ \forall x^{\rho}\exists y^{\tau}\, A_{qf}(x,y)\rightarrow\exists Y^{\rho\rightarrow\tau}\forall x^{\rho}\, A_{qf}(x,Y(x)).$$

Here the type $\mathbb{N}$ in $x^{\mathbb{N}}$ is that of a natural number whereas for types ρ,τ an object $f^{\rho\rightarrow\tau}$ is a function from objects of type ρ to objects of type τ. We will not give any details on the general definition of G but just reveal the G-interpretation of IPP:

$$(\text{IPP})\ \overset{\text{QF-AC}}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\,\forall f:\mathbb{N}\rightarrow C_n\exists i\leq n\exists g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\forall k\in\mathbb{N}\,\big(g(k)\geq k\wedge f(g(k))=i\big)$$

$$\overset{\text{QF-AC}}{\Leftrightarrow}$$

$$(\text{IPP})^G\equiv\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\,\forall f:\mathbb{N}\rightarrow C_n\forall K:C_n\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\rightarrow\mathbb{N}\exists i\leq n\exists g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\\ \qquad\big(g(K(i,g))\geq K(i,g)\wedge f(g(K(i,g)))=i\big).\end{cases}$$

The construction of explicit functionals $I(n,f,K), G(n,f,K)$ producing witnesses for '$\exists i\leq n$' and '$\exists g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$' is remarkably involved (see Oliva [30]). To appreciate the complexity we invite the reader to come up with a solution just for $n=2$ (i.e. the case with 3 'colors').

For a thorough discussion of the functional interpretation of IPP and its relation to the 'finitary infinite pigeonhole principle' from Tao [36] see Kohlenbach [22].

General facts about Gödel's functional interpretation

– Functional interpretation was first developed for Peano Arithmetic PA as well as suitable extensions PA^{ω}+QF-AC to higher type functionals and allows one to extract **primitive recursive programs of higher type** (first considered by Hilbert in 1926 [15]) from proofs of $\forall\exists$-theorems in PA^{ω}+QF-AC (Gödel, Kreisel, Yasugi). The modus ponens rule this time is treated without any complexity increase.

– Applied to plain logic PL, functional interpretation can be used for an extraction algorithm of Herbrand terms of optimal complexity (Gerhardy-Kohlenbach [8]). In this sense, functional interpretation can be viewed as a generalization of Herbrand's theorem.

– Seminal work of Spector [34] further extended Gödel's functional interpretation to proofs in 'full classical analysis' $\mathcal{A}^{\omega}$, i.e. to proofs in PA^{ω} augmented by the full axiom schema of dependent choice DC. Then the extractable programs will no longer be primitive recursive in general but so-called bar recursive functionals (i.e. functionals defined by recursion over well-founded trees).

– The primitive recursive as well as the bar recursive functionals used in the context of functional interpretation not only are computable but enjoy a strong mathematical property called 'majorizability' due to W.A. Howard [16] (which fails for general computable functionals). Making use of this fact one can apply a variant of functional interpretation ('monotone functional interpretation', Kohlenbach [18]) to extract highly **uniform bounds** from given proofs of pointwise existence results.

– Recently, (monotone) functional interpretation (based on a novel majorization relation) has been applied to extensions $\mathcal{A}^\omega[X,\ldots]$ of $\mathcal{A}^\omega$ by **abstract structures** X such as arbitrary metric, hyperbolic, CAT(0), normed, uniformly convex or Hilbert spaces and provides bounds which are uniform even in metrically bounded parameters without any compactness assumption (Kohlenbach [19, 22], Gerhardy-Kohlenbach [9]). In fact, all the applications mentioned in the next two sections are based on this.

4. An application in Metric Fixed Point Theory

In the following

– (X, d, W) is a **hyperbolic space** in the sense of [19] (e.g. a convex subset of a normed space),

– $f : X \to X$ is a **nonexpansive mapping**: $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ for all $x, y \in X$,

– (λ_n) is a sequence in $[0, c]$ for some $0 < c < 1$ that is **divergent in sum**,.

– $x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n \oplus \lambda_n f(x_n)$ (Krasnoselski-Mann iteration).

Theorem 4.1 (Ishikawa [17], Goebel-Kirk [11])**.**

If (x_n) is bounded, then $d(x_n, f(x_n)) \to 0$.

Logical analysis of the proof of Ishikawa's theorem: Since the sequence $(d(x_n, f(x_n)))_n$ is nonincreasing its convergence towards 0 can be expressed as a $\forall\exists$-statement so that we do not need any Herbrand normal form here.
Let $K \in \mathbb{N}$ and $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be such that

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, 1 - \frac{1}{K}]^{\mathbb{N}} \text{ and } \forall n \in \mathbb{N}(n \leq \sum_{i=0}^{\alpha(n)} \lambda_i).$$

A logical metatheorem from Gerhardy-Kohlenbach [9] that is based on a new extension of Gödel's functional interpretation applied to the proof of Ishikawa's theorem yields (primitive recursively) computable Ψ, Φ s.t. for all $l \in \mathbb{N}$ and nonexpansive f

$$\begin{aligned}&\forall i, j \leq \Psi(K, \alpha, b, \tilde{b}, l)\ \big(d(x, f(x)) \leq \tilde{b} \wedge d(x_i, x_j) \leq b\big) \ \to \\ &\forall m \geq \Phi(K, \alpha, b, \tilde{b}, l)\ \big(d(x_m, f(x_m)) < 2^{-l}\big)\end{aligned}$$

holds in any (nonempty) hyperbolic space (X, d, W). Note that the bounds depend on $x, f, (X, d, W)$ only via $b, \tilde{b}$. To obtain the existence of such highly uniform computable bounds one only has to verify that the proof of Ishikawa's theorem (as given in [11]) can be formalized in a suitable formal system (extending $\mathcal{A}^\omega$ by (X, d, W) as atom as discussed above). In fact, proofs of purely universal lemmas do not need to be considered at all as those can be treated just as additional universal assumptions. A somewhat closer look at the resources used in the proof (relative to those lemmas) already yields a-priori the existence of primitive recursive bounds. Moreover, the **proof** of the logical metatheorem from Gerhardy-Kohlenbach [9] provides an actual algorithm for the extraction of explicit bounds from the given proof. Applied to that proof in [11] this yields the following

Theorem 4.2 (Kohlenbach [22]). *Logical analysis of a proof from* [11] *yields an explicit rate of convergence* Φ *of* $(d(x_n, f(x_n))$ *(depending only on* $K, \alpha, b, \tilde{b}$ *and* $\varepsilon = 2^{-l}$*) as well as quantitative information on 'the amount of boundedness of* (x_n)*' needed.*
More precisely, let $(X, d, W), (\lambda_n), K$ *be as above and* $f : X \to X$ *nonexpansive. Then the following holds for all* $\varepsilon, b, \tilde{b} > 0$:

$$\text{If } d(x, f(x)) \le \tilde{b} \text{ and } \forall i \le \Phi \forall j \le \alpha(\Phi, M)\ (d(x_i, x_{i+j}) \le b),$$
$$\text{then } \forall n \ge \Phi\ \big(d(x_n, f(x_n)) \le \varepsilon\big),$$

where

$$\Phi := \Phi(K, \alpha, b, \tilde{b}, \varepsilon) := \widehat{\alpha}\left(\left\lceil \frac{\tilde{b}\cdot\exp\Big(K\cdot\Big(\frac{3\tilde{b}+b}{\varepsilon}+1\Big)\Big)}{\varepsilon}\right\rceil \dot{-} 1, M\right),$$
$$M := \left\lceil \frac{3\tilde{b}+b}{\varepsilon} \right\rceil,$$
$$\widehat{\alpha}(0, n) := \tilde{\alpha}(0, n),\ \widehat{\alpha}(i+1, n) := \tilde{\alpha}(\widehat{\alpha}(i, n), n) \text{ with}$$
$$\tilde{\alpha}(i, n) := i + \alpha(i, n) \quad (i, n \in \mathbb{N})$$

with α *s.t.*[2]

$$\forall i, n \in \mathbb{N}\big((\alpha(i, n) \le \alpha(i+1, n)) \wedge (n \le \sum_{s=i}^{i+\alpha(i,n)-1} \lambda_s)\big).$$

For related results see Kohlenbach-Leuştean [23].

Remark 4.3. *If* (λ_n) *is in* $[\frac{1}{K}, 1 - \frac{1}{K}]$, *then we may take* $\alpha(i, n) := K \cdot n$.

The above bound can be used in this case to weaken the assumption of (x_n) being bounded in Ishikawa's theorem:

Corollary 4.4 (Kohlenbach [22]). *Let* (λ_n) *in* $[a, b] \subset (0, 1)$.

If $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c(n)}{n} \to 0$, *where* $c(n) := \max\{d(x, x_j) : j \le n\}$, *then* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = 0$.

The result is optimal: $c(n) \le C \cdot n$ for some $C > 0$ is not sufficient!
For a survey of numerous other applications of proof theory to metric fixed point theory see [20].

5. An application in Ergodic Theory

Let X be a Hilbert space, $f : X \to X$ linear and nonexpansive. Define

$$A_n(x) := \frac{1}{n+1} S_n(x), \text{ where } S_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f^i(x) \qquad (n \ge 0).$$

Theorem 5.1 (von Neumann Mean Ergodic Theorem).
For every $x \in X$, *the sequence* $(A_n(x))_n$ *converges.*

[2] Such a function can easily be constructed from any unary function satisfying the previous condition.

As shown in Avigad et al. [1], even in simple cases there already is no computable rate of convergence so that one has to consider the 'metastable' Herbrand normal form of the Cauchy property as in the finite convergence principle (see (2) above):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \exists n \forall i, j \in [n; n + g(n)] \left(\|A_i(x) - A_j(x)\| < \varepsilon \right).$$

The von Neumann Mean Ergodic Theorem was generalized in 1939 to uniformly convex Banach spaces by Garrett Birkhoff [2] with a proof that nicely formalizes in (a weak fragment of) the system $\mathcal{A}^\omega[X, \|\cdot\|, \eta]$ (see the end of section 3) to which functional interpretation applies.[3] In fact, a logical metatheorem from Kohlenbach [19] based on functional interpretation guarantees the extractability of a computable bound Φ on '$\exists n$' that only depends on ε, g, a modulus of uniform convexity η of X and some norm upper bound $b \geq \|x\|$. Running the extraction procedure on Birkhoff's proof has led to following explicit bound:

Theorem 5.2 (Kohlenbach-Leuştean [24])**.** *Assume that X is a uniformly convex Banach space, η is a modulus of uniform convexity and $f : X \to X$ is a nonexpansive linear operator. Let $b > 0$. Then for all $x \in X$ with $\|x\| \leqslant b$,*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \exists n \leqslant \Phi(\varepsilon, g, b, \eta) \, \forall i, j \in [n; n + g(n)] \left(\|A_i(x) - A_j(x)\| < \varepsilon \right),$$

where

$$\begin{aligned} &\Phi(\varepsilon, g, b, \eta) := M \cdot \tilde{h}^K(0), \text{ with} \\ &M := \left\lceil \tfrac{16b}{\varepsilon} \right\rceil, \gamma := \tfrac{\varepsilon}{16} \eta\left(\tfrac{\varepsilon}{8b}\right), \quad K := \left\lceil \tfrac{b}{\gamma} \right\rceil, \\ &h, \tilde{h} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; h(m) := 2(Mm + g(Mm)), \quad \tilde{h}(m) := \max_{i \leqslant m} h(i). \end{aligned}$$

If $\eta(\varepsilon)$ can be written as $\varepsilon \cdot \tilde{\eta}(\varepsilon)$ with $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \to \tilde{\eta}(\varepsilon_1) \leq \tilde{\eta}(\varepsilon_2)$, then we can replace η by $\tilde{\eta}$ and the constant '16' by '8' in the definition of γ in the bound above.

Remark 5.3. *Note that the above bound Φ is independent from f and depends on the space X and the starting point $x \in X$ only via the modulus of convexity η and the norm upper bound $b \geq \|x\|$. Moreover, it is easy to see that the bound depends on b and ε only via b/ε.*

Specialized to the case where X is a Hilbert space, theorem 5.2 yields the following result which improves a prior bound (also guided by [19]) from Avigad et al. [1] (see also Tao [37]):

Corollary 5.4 (Kohlenbach-Leuştean [24])**.** *Assume that X is a Hilbert space and $f : X \to X$ is a nonexpansive linear operator. Let $b > 0$. Then for all $x \in X$ with $\|x\| \leqslant b$,*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \, \exists n \leqslant \Phi(\varepsilon, g, b) \, \forall i, j \in [n; n + g(n)] \left(\|A_i(x) - A_j(x)\| < \varepsilon \right),$$

where Φ is defined as above, but with $K := \left\lceil \frac{512 b^2}{\varepsilon^2} \right\rceil$.

Acknowledgement: I am grateful to E.M. Briseid and L. Leuştean for helpful comments on an earlier version of this paper.

[3] Also in 1939, E.R. Lorch [28] extended the Mean Ergodic Theorem to general reflexiv Banach spaces but his proof is less suited for a logical analysis.

6. References

[1] Avigad, J., Gerhardy, P., Towsner, H., Local stability of ergodic averages. To appear in: Trans. Amer. Math. Soc.

[2] Birkhoff, G., The means ergodic theorem. Duke Math. J. vol. 5, no. 1, pp. 19-20 (1939).

[3] Bombieri, E., On the Thue-Siegel-Dyson theorem. Acta Mathematica **148**, pp. 255-296 (1982).

[4] Bombieri, E., van der Poorten, A.J., Some quantitative results related to Roth's theorem. J. Austral. Math. Soc. (Series A) **45**, pp. 233-248 (1988).

[5] Coquand, T., Herbrand et le programme de Hilbert. This volume.

[6] Dreben B., Andrews, P., Aanderaa, S., False lemmas in Herbrand. Bull. Amer. Math. Soc. **69**, pp. 699-706 (1963).

[7] Esnault, H., Viehweg, E., Dyson's lemma for polynomials in several variables (and the theorem of Roth). Inventiones Mathematicae **78**, pp. 445-490 (1984).

[8] Gerhardy, P., Kohlenbach, U., Extracting Herbrand disjunctions by functional interpretation. Arch. Math. Logic **44**, pp. 633-644 (2005).

[9] Gerhardy, P., Kohlenbach, U., General logical metatheorems for functional analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **360**, pp. 2615-2660 (2008).

[10] Girard, J.-Y., Proof Theory and Logical Complexity vol.I. Studies in Proof Theory. Bibliopolis (Napoli) and Elsevier Science Publishers (Amsterdam) 1987.

[11] Goebel, K., Kirk, W.A., Iteration processes for nonexpansive mappings. In: Singh, S.P., Thomeier, S., Watson, B., eds., Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis. Contemporary Mathematics **21**, AMS, pp. 115-123 (1983).

[12] Gödel, K., Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica **12**, pp. 280–287 (1958).

[13] Goldfarb, W., Herbrand's error and Gödel's correction. Modern Logic **3**, no. 2, pp. 103-118 (1993).

[14] Herbrand, J., Logical writings. Edited by W. Goldfarb. A translation of the Écrits logiques, edited by Jean van Heijenoort and including contributions by Claude Chevalley and Albert Lautman. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971. viii+312 pp.

[15] Hilbert, D., Über das Unendliche. Math. Ann. **95**, pp. 161-190 (1926).

[16] Howard, W.A., Hereditarily majorizable functionals of finite type. In: Troelstra (ed.), Metamathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, pp. 454-461. Springer LNM 344 (1973).

[17] Ishikawa, S., Fixed points and iterations of a nonexpansive mapping in a Banach space. Proc. Amer. Math. Soc. **59**, pp. 65-71 (1976).

[18] Kohlenbach, U., Analysing proofs in analysis. In: W. Hodges, M. Hyland, C. Steinhorn, J. Truss, editors, *Logic: from Foundations to Applications. European Logic Colloquium* (Keele, 1993), pp. 225–260, Oxford University Press (1996).

[19] Kohlenbach, U., Some logical metatheorems with applications in functional analysis. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 357, no. 1, pp. 89-128 (2005).

[20] Kohlenbach, U., Effective uniform bounds from proofs in abstract functional analysis. In: Cooper, B., Löwe, B., Sorbi, A. (eds.), New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable. Springer Publisher, pp. 223-258 (2008).

[21] Kohlenbach, U., Gödel's functional interpretation and its use in current mathematics. To appear in Baaz, M. et al. (eds.): Horizons of Truth, Gödel Centenary. Cambridge University Press. Reprinted in: dialectica vol. 62, no. 2, pp. 223-267 (2008).

[22] Kohlenbach, U., Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics. Springer Monographs in Mathematics. xx+536pp., Springer Heidelberg-Berlin, 2008.

[23] Kohlenbach, U., Leuştean, L., Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces. Abstract and Applied Analysis, vol. 2003, no.8, pp. 449-477 (2003).

[24] Kohlenbach, U., Leuştean, L., A quantitative mean ergodic theorem for uniformly convex Banach spaces. arXiv:0804.3844[math.DS] (2008), submitted.

[25] Kreisel, G., On the interpretation of non-finitist proofs, part I. J. Symbolic Logic **16**, pp.241-267 (1951).

[26] Kreisel, G., Finiteness theorems in arithmetic: an application of Herbrand's theorem for Σ_2-formulas. Proc. of the Herbrand symposium (Marseille, 1981), North-Holland (Amsterdam), pp. 39-55 (1982).

[27] Kreisel, G., Macintyre, A., Constructive logic versus algebraization I. Proc. L.E.J. Brouwer Centenary Symposium (Noordwijkerhout 1981), North-Holland (Amsterdam), pp. 217-260 (1982).

[28] Lorch, E.R., Means of iterated transformations in reflexive vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, pp. 945-947 (1939).

[29] Luckhardt, H., Herbrand-Analysen zweier Beweise des Satzes von Roth: Polynomiale Anzahlschranken. J. Symbolic Logic **54**, pp. 234-263 (1989).

[30] Oliva, P., Understanding and using Spector's bar recursive interpretation of classical analysis. In: Proceedings of CiE 2006, Springer LNCS **3988**, pp. 423-434 (2006).

[31] Roth, K.F., Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika **2**, pp. 1-20 (1955).

[32] Shoenfield, J.S., Mathematical Logic. Addison-Wesley Publishing Company (Reading, Massachusetts) 1967.

[33] Specker, E., Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. J. Symb. Logic **14**, pp. 145-158 (1949).

[34] Spector, C., Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics. In: Recursive function theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 5 (J.C.E. Dekker (ed.)), AMS, Providence, R.I., pp. 1-27 (1962).

[35] Statman, R., Lower bounds on Herbrand's theorem. Proc. Amer. Math. Soc. **75**, pp. 104-107 (1979).

[36] Tao, T., Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle. Essay posted May 23, 2007. Available at: `http://terrytao.wordpress.com/2007/05/23/soft-analysis-hard-analysis-and-the-finite-convergence-principle/`.

[37] Tao, T., Norm convergence of multiple ergodic averages for commuting transformations. Ergodic Theory and Dynamical Systems **28**, pp. 657-688 (2008).

Bernoulli numbers and ideal classes[1]

Kenneth A. Ribet[2]

1. Introduction

It was Warren Goldfarb who first introduced me to the work of Jacques Herbrand when we were students. At the time, Goldfarb was completing his translation of Herbrand's *Écrits Logiques* [5]. Although Herbrand's book is primarily about logic, it contains a section on "corps circulaires"—cyclotomic fields. Herbrand's remarkable work on class field theory includes a theorem that connects the numerators of individual Bernoulli numbers with specific components of the class groups of cyclotomic fields [4, Th. 3].

I spent the academic year 1975–1976 at the IHÉS. During my stay in Bures and in Paris, I grappled with a question that J-P. Serre had posed in the written version of his 1967–1968 seminar talk on the relationship between Galois representations and modular forms [14]. Specifically, Serre suggested the study of certain two-dimensional mod p Galois extensions attached to modular forms, namely those that are reducible and indecomposable. In particular, Serre asked whether the 2-dimensional mod 691 representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ attached to Ramanujan's τ-function might provide a construction of the unique abelian unramified degree-691 extension of the field of 691st roots of unity. While working on Serre's question, I devised a method for constructing unramified extensions of cyclotomic fields that supplied a converse to Herbrand's 1932 theorem [13].

2. Kummer

Let p be an odd prime number, and let $K = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/p})$ be the field of pth roots of unity. The factorization of algebraic integers in K played a central role in the development of modern algebraic number theory and figured heavily in 19th century attempts to prove Fermat's Last Theorem [12, Lecture I]. The failure of unique factorization in the ring of integers of K is measured by the class number of K, which is an integer $h \geq 1$. This number is 1 if and only if the ring of integers of K is a unique factorization domain. Kummer observed that $h = 1$ for all $p \leq 19$ and performed further calculations that led to the conjecture that $h = 1$ if and only if $p \leq 19$. This statement was proved by Masley and Montgomery roughly 30 years ago [8].

Following Kummer, we say that the prime number p is *regular* if the class number h is prime to p.

---

[1] This article was written in connection with lectures that were given at the Mathematical Sciences Research Institute's 25th Anniversary Workshop in January, 2008 and at the Jacques Herbrand centennial conference that was organized by the École Normale Supérieure in February, 2008. A revised version of this article will appear in the proceedings volume of the MSRI's workshop.

[2] Math Department, M/C 3840, Berkeley, CA 94720-3840, USA.

Theorem 1 (Kummer (1847–1850)). *Suppose that p is regular. Then Fermat's Last Theorem is true for exponent p: there are no non-zero integers a, b and c for which $a^p + b^p = c^p$.*

Crucially, Kummer's theorem is complemented by a simple numerical criterion for regularity that involves the Bernoulli numbers. To introduce these numbers succinctly, we define the kth Bernoulli number B_k to be the coefficient of $x^k/k!$ in the expansion

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \cdots .$$

The odd-indexed Bernoulli numbers are 0, with the exception of $B_1 = -1/2$. The even-indexed numbers are $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, and so on. We view these numbers as fractions in lowest terms. The first B_k with a non-trivial numerator is

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

It is a relatively easy fact, due to Clausen and von Staudt, that the denominators of $B_2, \ldots, B_{p-3}$ are all prime to p; further, the denominator of the next Bernoulli number B_{p-1} is divisible by p. For $k = 2, 4, \ldots, p-3$, we say that p divides B_k if and only if p divides the numerator of B_k. Thus, for example, 691 divides B_{12}.

Theorem 2 (Kummer's Criterion). *The prime number p is regular if and only if p divides none of the rational numbers $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$.*

Said differently, p divides h if and only if p divides at least one of the numbers $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$.

Theorem 2 is obtained by combining two propositions that concern the class number h^+ of the real subfield K^+ of K and the "relative class number" $h^- := h/h^+$. The field $K^+ = \mathbf{Q}(\cos(2\pi i/p))$ is the unique subfield of K over which K has degree 2. Its class number h^+ is a divisor of h because the extension K/K^+ is ramified.

Proposition 3. *The relative class number h^- is divisible by p if and only if the full class number h is divisible by p.*

Equivalently, if p divides h^+, then p divides h^-.

Proposition 4. *The relative class number h^- is divisible by p if and only if p divides at least one of the rational numbers $B_2, B_4, \ldots, B_{p-3}$.*

Proofs of Theorem 1 and Theorem 2 are contained, for example, in [12, Lecture V], [2, Chapter 5] and [11, Chapter IV].

3. Herbrand

Herbrand's theorem is a refinement of Proposition 4. To state it, one must translate this proposition into group-theoretic language. The beginning of the translation is very easy: the class number of a field is the order of its class group, and p-divisibility of the class number means the non-triviality of the p-Sylow subgroup of the class group.

Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}^+$ be the ideal class groups of the fields of K and K^+. These are abelian groups whose orders are h and h^+, respectively. The natural functorial map $\iota : \mathcal{C}^+ \to \mathcal{C}$ is an injection; the cokernel of ι is an abelian group $\mathcal{C}^-$ whose order is the quotient h^-. As we just noted, p divides h or h^+ if and only if the p-Sylow subgroup of $\mathcal{C}$ or $\mathcal{C}^+$ is non-trivial. Similarly, p divides h^- if and only if the p-Sylow subgroup of the cokernel $\mathcal{C}^-$ is non-trivial.

Let $\mathcal{A}$ be the p-Sylow subgroup of $\mathcal{C}$, and introduce analogous notation for the p-Sylow subgroups of $\mathcal{C}^\pm$. Proposition 4 gives a numerical criterion for the non-vanishing of $\mathcal{A}^-$. Embracing the perspective that the abelian groups $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^+$ and $\mathcal{A}^-$ are $\mathbf{Z}$-modules, we imagine them as *additive* groups (despite the fact that ideal classes are normally written multiplicatively). A central point is that the action of the Galois group $\Delta = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ on $\mathcal{C}$ endows the various groups $\mathcal{C}$ and $\mathcal{A}$ with $\mathbf{Z}[\Delta]$-module structures. One consequence will be an eigenspace decomposition of of the p-Sylow subgroup $\mathcal{A}$ of $\mathcal{C}$.

For this, recall first that Δ is identified with the abelian group $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ via the action of Δ on the finite group μ_p of roots of unity in K. Indeed, this action provides an injection

$$\alpha : \Delta \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,\mu_p;$$

to see that α is in fact an isomorphism

$$\Delta \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*,$$

one observes that the target group $\mathrm{Aut}\,\mu_p$ is canonically $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ and then shows (e.g., by invoking the irreducibility of Eisenstein polynomials) that the degree of K over $\mathbf{Q}$ is $p-1$. Under the isomorphism α, the element "complex conjugation" of Δ corresponds to the number $-1 \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ because the complex conjugate of a root of unity is the inverse of the root of unity.

As we noted, the action of Δ on $\mathcal{C}$ endows $\mathcal{C}$ and $\mathcal{A}$ with the structure of a module for the group ring $\mathbf{Z}[\Delta]$. The second group, $\mathcal{A}$, can be viewed alternatively as a module for $\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}[\Delta]$, where p^N is the exponent of $\mathcal{A}$. Since N is not known a priori, it is preferable to regard $\mathcal{A}$ as a module for $\mathbf{Z}_p[\Delta]$; here $\mathbf{Z}_p$, the ring of p-adic integers, is the projective limit of the finite groups $\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$ as N varies.

Now once we have α at our disposal, Δ becomes the multiplicative group $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. There is a natural character $\omega : (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \hookrightarrow \mathbf{Z}_p^*$ that lifts the identity map $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. This is the well known *Teichmüller lifting*, which can be defined conveniently via the p-adic limit formula

$$\omega(a) = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}^{p^n},$$

where $\tilde{a}$ is an arbitrary integer that lifts the number a mod p. The various powers ω^i (i mod $p-1$), which take values in $\mathbf{Z}_p^*$, are precisely the $\overline{\mathbf{Q}}_p^*$-valued characters of Δ.

If ε is a power ω^i of ω, we say (as usual) that ε is *even* if $\varepsilon(-1) = 1$ and *odd* otherwise (i.e., if $\varepsilon(-1) = -1$). Because -1 is a synonym for complex conjugation, the even characters are those whose kernels correspond to real abelian extensions of $\mathbf{Q}$ in the Galois correspondence between subgroups of Δ and fields that are intermediate between $\mathbf{Q}$ and K. Also, since $\omega(-1) = -1$, ε is even if and only if i is even (mod $p-1$). For each ε, let

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \{\, x \in \mathcal{A} \mid \delta(x) = \varepsilon(\delta) \cdot x \text{ for all } \delta \in \Delta \,\}$$

be the subgroup of elements of $\mathcal{A}$ on which Δ acts via ε. Because Δ has order prime to p, it is easy to see that $\mathcal{A}$ is the direct sum of these subgroups:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\varepsilon} \mathcal{A}(\varepsilon) = \bigoplus_{i} \mathcal{A}(\omega^i).$$

In the first sum, ε runs over the group of characters of Δ with values in $\mathbf{Z}_p^*$; in the second, i runs over the set of integers mod $p-1$. Moreover, $\mathcal{A}^+$ is the analogous direct sum of eigenspaces in which the characters ε (or the integers i) are constrained to be even. Similarly, $\mathcal{A}^-$ is the direct sum of eigenspaces $\mathcal{A}(\varepsilon)$ for the odd characters ε; these can be written alternatively in the form $A(\omega^i)$ with i odd mod $p-1$. Finally, we have $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{A}^-$.

Recall now that Proposition 4 can be restated as follows: *The group $\mathcal{A}^-$ is non-zero if and only if p divides at least one of the numbers $B_2, \ldots, B_{p-3}$.*

Herbrand's theorem ([4, Th. 3]) adds precision to this statement by establishing a connection between individual components $\mathcal{A}(\varepsilon)$ of $\mathcal{A}^-$ and individual Bernoulli numbers B_k. More precisely, Herbrand proved in 1932 that the non-vanishing of $\mathcal{A}(\varepsilon)$, where ε is an odd character of Δ, implies the divisibility by p of an appropriate Bernoulli number B_k. As was mentioned above, the main theorem of [13] provides a converse to Herbrand's theorem; the two results together then state that $\mathcal{A}(\varepsilon)$ is non-zero if and only if p divides B_k.

To describe the simple recipe linking k and ε, we write the odd characters of Δ as the powers ω^{1-k}, where k is an even integer mod $p-1$. For definiteness, we take k to be one of the numbers 2, 4, ..., $p-1$. The components $\mathcal{A}(\varepsilon)$ of $\mathcal{A}^-$ are the spaces $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$, for these even k. The results of [4] and [13] can be stated together as follows:

Theorem 5. *Let k be an even integer with $2 \le k \le p-1$. Then $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is non-zero if and only if the numerator of B_k is divisible by p.*

When k takes on the extreme value $p-1$, one knows by the theorem of Clausen–von Staudt that the denominator of B_{p-1} is divisible by p. Thus the numerator of B_{p-1} is *never* divisible by p. Accordingly, Theorem 5 asserts the triviality of the corresponding eigenspace $\mathcal{A}(\omega)$ of $\mathcal{A}$. This triviality is a consequence of Stickelberger's Theorem: see, e.g., [7, Ch. I, §2] and [7, Cor. 2, p. 16].

In the discussion that follows, we assume that k is an even integer between 2 and $p-3$.

4. L-values and the order of class groups

We continue to identify the Galois group Δ with the multiplicative group $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Suppose for a moment that $\varepsilon : \Delta \to \mathbf{C}^*$ is a non-trivial complex character, and let

$$L(s, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(n)}{n^s}$$

be the Dirichlet L-function of ε. (We set $\varepsilon(n) = 0$ if p divides n.) Although the series defining $L(s, \varepsilon)$ converges only for $\Re s > 1$, this L-function has an analytic continuation to a holomorphic function on the complex plane. Further, we have the formula

$$L(0, \varepsilon) = \frac{-1}{p} \sum_{a=1}^{p-1} \varepsilon(a) a.$$

It is elementary that $L(0, \varepsilon)$ is 0 when ε is even and somewhat deeper that $L(0, \varepsilon)$ is non-zero when ε is odd. The non-vanishing of the L-values for odd characters is a consequence of an *analytic class number formula* that relates the product of these L-values to the relative class number $h^- = h/h^+$. This formula results from a comparison of the expressions for the residues at $s = 1$ of the Dedekind zeta functions of K and K^+. (Both expressions involve regulators, but the unit groups of the two fields are essentially identical.)

For ε now a power of ω (so that ε is a character with values in $\mathbf{Z}_p^*$) we use formula for $L(0, \varepsilon)$ that appears above as the *definition* of $L(0, \varepsilon)$. The analytic formula just alluded to takes the following shape: Up to a power of 2, the integer h^- is the product

$$(pL(0, \omega^{-1})) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ even}}}^{p-3} L(0, \omega^{k-1}). \tag{1}$$

Here, the first factor $pL(0, \omega^{-1})$ is a p-adic unit, as one sees by an elementary argument.. Similarly, the remaining $(p-3)/2$ factors $L(0, \omega^{k-1})$ are p-adic integers. Writing "$\sim$" to indicate that two p-adic integers are equal up to multiplication by a p-adic unit, we have

$$h^- \sim \prod_{k=1}^{p-3} L(0, \omega^{k-1}),$$

where the product is taken over even integers k. At the same time, it is clear that

$$h^- \sim \#(\mathcal{A}^-) = \prod_{k=1}^{p-1} \#(\mathcal{A}(\omega^{1-k})) = \prod_{k=1}^{p-3} \#(\mathcal{A}(\omega^{1-k})),$$

where again the products are taken over even k. (The two products are equal because $\mathcal{A}(\omega)$ vanishes, as we noted above.) A bit more compactly, we have

$$\prod_{k=1}^{p-3} L(0, \omega^{k-1}) \sim \prod_{k=1}^{p-3} \#(\mathcal{A}(\omega^{1-k})), \tag{2}$$

which we will think of as an analytic formula for the power of p on the right-hand side. We have written the characters differently in the two products because of the following relation between the individual terms:

Proposition 6. *For each even $k = 2, \ldots, p-3$, the abelian group $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is annihilated by the p-adic integer $L(0, \omega^{k-1})$.*

Proposition 6 is proved, for example, in [7, Ch. I, §3], where the L-value $L(0,\omega^{k-1})$ is written as the negative of the generalized Bernoulli number $B_{1,\omega^{k-1}}$ and some other notations are slightly different. If $L(0,\omega^{k-1}) = p^n u$, where $n \geq 0$ and u is a p-adic unit, the proposition states that the exponent of $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is a divisor of p^n. Especially, if $L(0,\omega^{k-1})$ is already a p-adic unit, i.e., if $n = 0$, then the group $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is trivial.

Furthermore, one has the Kummer congruence

$$L(0,\omega^{k-1}) \equiv -B_k/k \pmod{p}.$$

(For a proof, one can consult [7, Ch. II, Th. 2.5].) In particular, p divides B_k if and only if the p-adic integer $L(0,\omega^{k-1})$ is divisible by p. Herbrand's half of Theorem 5 now follows: if p does not divide B_k, $L(0,\omega^{k-1})$ is a unit, and the group $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is forced to vanish.

In view of Proposition 6 and the analytic formula (1), it is natural to guess that (1) admits a refinement to a term by term relation

$$\#(A(\omega^{1-k})) \overset{?}{\sim} L(0,\omega^{k-1})$$

for each k. This relation, which can be paraphrased by the statement that the order of $\#(A(\omega^{1-k}))$ is the "p-part" of $L(0,\omega^{k-1})$, is a special case of a more general conjecture of G. Gras [3]. It is also a consequence of the Main Conjecture of Iwasawa theory (for the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension of $\mathbf{Q}$). When Mazur and Wiles proved the Main Conjecture in 1984, they established in particular the following result:

Theorem 7. *For each even integer $k = 2, \ldots, p-3$, the order of $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is the exact power of p dividing $L(0,\omega^{k-1})$.*

In view of (1), the theorem would follow if one knew for all k either that the order of $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is divisible (p-adically) by $L(0,\omega^{k-1})$ or that the order of $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ divides this L-value. Establishing these divisibilities might be described (respectively) as the *lower bound* and the *upper bound* approaches to computing the order of $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$.

4.1. The lower bound approach

The article [13] was a first step toward implementing a lower bound approach. Using Galois representations arising from modular forms of weight 2, [13] proves that $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is non-zero whenever $L(0,\omega^{k-1})$ is divisible by p. Taking the methods of [13] farther, A. Wiles showed in [17] that $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ has the correct order (i.e., the order given in Theorem 7) if it happens to be a cyclic group. In this article, Wiles uses techniques from from B. Mazur's then-recent article [9] as well as tools from Iwasawa theory. Note that it is clear from the analytic class number formula (1) and Proposition 6 that each of the groups $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ has the correct order if all of the groups are cyclic; thus Wiles's contribution was to show that cyclicity of a *single* $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ is enough to imply that this group has what was then conjectured to be its order. As L. Washington pointed out in his review of [17], Vandiver's conjecture, to the effect that h^+ is prime to p, implies that all of the $\mathcal{A}(\omega^{1-k})$ are cyclic. Since we know no counterexample to this conjecture (which many nonetheless expect to be false!), it is impossible to cite an example where Wiles's theorem gave new information.

Perhaps the article [17] is now best viewed as a warm-up to its sequel [10], in which Mazur and Wiles proved the Iwasawa Main Conjecture for abelian extensions of **Q** and thereby completed the proof of Theorem 7 by the lower bound method.

4.2. The upper bound approach

In some sense, the upper bound method goes back at least as far as the input provided by Stickelberger's Theorem (Prop. 6). In 1988, F. Thaine [16] introduced revolutionary new methods for bounding components of class groups from above. Thaine's methods are elementary in the sense that they do not use modular forms. Soon after Thaine's ideas became known, V. Kolyvagin [6] introduced Euler Systems and used them along with Thaine's methods to give an elementary proof of the Main Conjecture. A superb account of this proof is given by Karl Rubin in his appendix to the 1990 edition of S. Lang's *Cyclotomic Fields* [7]. (See especially Th. 4.2 of the appendix.)

4.3. Going forward

To obtain the Main Conjecture and its corollary (namely, Gras's conjecture), the analytic class number formula shows that it is sufficient to establish either a systematic set of lower bounds *or* a systematic set of upper bounds on components of ideal class groups. After Kolyvagin's introduction of Euler systems, it seemed as if the upper-bound method had eclipsed the original techniques for proving the Main Conjecture. However, one can imagine a world in which no analytic class number formula is known a priori. In that world, one could still prove Theorem 7 by establishing both sets of bounds; an analytic class number formula would fall out as a corollary.

In other contexts where a Main Conjecture awaits proof, we typically need to work in a world where there is no analytic class number formula. In such situations, the lower bound techniques take on a renewed importance. Such recent articles as Bellaïche [1] and Skinner–Urban [15] offer a glimpse at the current state of the art.

5. References

[1] Bellaïche, J.: À propos d'un lemme de Ribet. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **109**, 45–62 (2003)

[2] Edwards, H.M.: Fermat's last theorem, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 50. Springer-Verlag, New York (1996). A genetic introduction to algebraic number theory, Corrected reprint of the 1977 original

[3] Gras, G.: Étude d'invariants relatifs aux groupes des classes des corps abéliens. In: Journées Arithmétiques de Caen (Univ. Caen, Caen, 1976), pp. 35–53. Astérisque No. 41–42. Soc. Math. France, Paris (1977)

[4] Herbrand, J.: Sur les classes des corps circulaires. J. Math. Pures Appl. (9) **15**, 417–441 (1932)

[5] Herbrand, J.: Logical writings. Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1971). A translation of the *Écrits logiques*, edited by Jean van Heijenoort and including contributions by Claude Chevalley and Albert Lautman

[6] Kolyvagin, V.A.: Euler systems. In: The Grothendieck Festschrift, Vol. II, *Progr. Math.*, vol. 87, pp. 435–483. Birkhäuser Boston, Boston, MA (1990)

[7] Lang, S.: Cyclotomic fields I and II, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 121, second edn. Springer-Verlag, New York (1990). With an appendix by Karl Rubin

[8] Masley, J.M., Montgomery, H.L.: Cyclotomic fields with unique factorization. J. Reine Angew. Math. **286/287**, 248–256 (1976)

[9] Mazur, B.: Modular curves and the Eisenstein ideal. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **47**, 33–186 (1977)

[10] Mazur, B., Wiles, A.: Class fields of abelian extensions of **Q**. Invent. Math. **76**(2), 179–330 (1984)

[11] van der Poorten, A.: Notes on Fermat's last theorem. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York (1996). A Wiley-Interscience Publication

[12] Ribenboim, P.: 13 lectures on Fermat's last theorem. Springer-Verlag, New York (1979)

[13] Ribet, K.A.: A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbf{Q}(\mu_p)$. Invent. Math. **34**(3), 151–162 (1976)

[14] Serre, J-P.: Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan. In: Séminaire Delange-Pisot-Poitou: 1967/68, Théorie des Nombres, Fasc. 1, Exp. 14, p. 17. Secrétariat mathématique, Paris (1969)

[15] Skinner, C., Urban, E.: Sur les déformations p-adiques de certaines représentations automorphes. J. Inst. Math. Jussieu **5**(4), 629–698 (2006)

[16] Thaine, F.: On the ideal class groups of real abelian number fields. Ann. of Math. (2) **128**(1), 1–18 (1988)

[17] Wiles, A.: Modular curves and the class group of $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. Invent. Math. **58**(1), 1–35 (1980)

Lichnerowicz dans son bureau

PRIX ET DISTINCTIONS

Le prix André Lichnerowicz pour la géométrie de Poisson

Le prix André Lichnerowicz

Le prix André Lichnerowicz pour la géométrie de Poisson a été créé en 2008. Il sera attribué en reconnaissance de contributions notables à la géométrie de Poisson, tous les deux ans lors de la « Conférence internationale sur la géométrie de Poisson en mathématiques et en physique » ("International Conference on Poisson Geometry in Mathematics and Physics"), à des chercheurs ayant soutenu leur doctorat huit ans au plus avant l'année de la Conférence.

Le prix est établi à la mémoire d'André Lichnerowicz (1915-1998) dont les travaux fondamentaux furent essentiels dans la création de la géométrie de Poisson comme branche des mathématiques. Il est décerné par un jury composé des membres du comité scientifique de la Conférence qui peuvent inviter des membres du comité d'organisation à participer aux délibérations et au vote. En 2008, le financement de 500 euros pour chaque lauréat du prix a été fourni par l'institution responsable de la Conférence, le Centre Interfacultaire Bernoulli de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Le prix 2008

Le prix pour l'année 2008 a été décerné à Henrique Bursztyn et Marius Crainic le 7 juillet 2008 à l'EPFL à Lausanne.

Henrique Bursztyn est titulaire d'un doctorat de mathématiques, soutenu en 2001 à l'université de Californie à Berkeley sous la direction d'Alan Weinstein. Il a été chercheur post-doctorant au Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) à Berkeley, à l'université de Toronto et au Fields Institute, et a été nommé chercheur associé à la chaire Arminio Fraga de l'Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada (IMPA) à Rio de Janeiro en 2005. Ses nombreuses publications vont de la théorie de quantification par déformation à l'équivalence de Morita dans la catégorie des variétés de Poisson et dans celle des groupoïdes symplectiques. Ses travaux en géométrie de Dirac ont non seulement fait progresser le sujet, ils ont aussi été une source d'inspiration pour de nombreux développements ultérieurs.

Marius Crainic a soutenu son doctorat de mathématiques en 2000 à l'université d'Utrecht sous la direction d'Ieke Moerdijk. Il a ensuite été lauréat de bourses de recherche prestigieuses à l'université de Californie à Berkeley et à l'université d'Utrecht, où il enseigne actuellement. Ses travaux sont une contribution importante à la théorie des groupoïdes de Lie et leurs applications à la géométrie non commutative, à la théorie des feuilletages, la cohomologie des algébroïdes de Lie, aux théories d'application moment et aux questions de rigidité et de stabilité en géométrie de Poisson. Avec Rui Loja Fernandes il a résolu le difficile problème de généraliser le troisième théorème de Lie du cas des groupes de Lie à celui des groupoïdes de Lie, et il en a obtenu plusieurs applications en géométrie de Poisson.

Hommage à André Lichnerowicz (1915 – 1998)[1]

Yvette Kosmann-Schwarzbach[2]

Il y a trente ans paraissait le volume 111 des *Annals of Physics*. La quantification par déformation était née. Cet ensemble de deux articles [1] avait été précédé de plusieurs textes dont les auteurs étaient Daniel Sternheimer, que vous venez d'entendre[3], Moshé Flato, dont Daniel vient d'évoquer la mémoire et dont la personnalité et les travaux en mathématiques et en physique furent si remarquables, et André Lichnerowicz.

Qui était Lichnerowicz ? Pour ses élèves, il était « Lichné ». Pour ses amis, il était « André ». Comme mathématicien, physicien mathématicien, réformateur de l'enseignement des mathématiques en France, et philosophe, il était connu du public comme « Lichnerowicz », une personnalité d'une vaste culture, un homme affable et toujours courtois, un grand homme de science.

On peut aborder l'œuvre et la personnalité d'André Lichnerowicz de bien des façons. On peut, bien sûr, lire les plus de trois cent soixante articles et livres qu'il a publiés, dont les résumés ont paru dans *Mathematical Reviews* et sont disponibles sur « MathSciNet », ou lire seulement la sélection qu'il en a faite lui-même, ceux qui ont été publiés par les éditions Hermann en 1982 en un volume de 633 pages, *Choix d'œuvres mathématiques* [2]. On peut lire les précis de ses travaux jusqu'en 1986, rédigés par Yvonne Choquet-Bruhat, Marcel Berger et Charles-Michel Marle, dans les comptes-rendus de la conférence tenue en son honneur à Paris à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire [3], ou son portrait et la transcription d'un entretien avec lui qui ont paru dans un beau volume illustré décrivant les carrières de vingt-huit des plus important savants français du vingtième siècle, *Hommes de*

[1] Traduction de l'hommage prononcé le 7 juillet 2008, à l'occasion du dixième anniversaire de la mort de Lichnerowicz, lors de la séance d'ouverture de la Conférence internationale « Poisson 2008, Poisson Geometry in Mathematics and Physics », tenue au Centre Interfacultaire Bernoulli de l'École Polytechnique Fédérale à Lausanne, devant environ 200 personnes, en majorité des jeunes de tous les pays qui ne connaissaient de Lichnerowicz que le nom ou rien. Une version anglaise de cet hommage se trouve sur le site web de Poisson 2008.

[2] École Polytechnique, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz.

[3] Cet hommage fut précédé par des hommages à Stanisław Zakrzewski, fondateur de la série de conférences internationales sur la géométrie de Poisson, mort en avril 1998 (par Alan Weinstein), à Paulette Libermann, pour le premier anniversaire de sa mort (par Charles-Michel Marle), et à Moshé Flato, ami et co-auteur de Lichnerowicz, mort en novembre 1998 (par Daniel Sternheimer).

Science [4]. Enfin, et c'est plus triste, on peut lire les éloges scientifiques qui ont paru après sa mort dans la *Gazette des Mathématiciens* [5] qui furent aussitôt traduits pour les *Notices of the American Mathematical Society* [6], car Lichnerowicz était aussi célèbre à l'étranger qu'en France. D'autres notices parurent dans le *Journal of Geometry and Physics*, dont il était un des fondateurs, et dans de nombreuses autres revues.

Lichnerowicz, né à Bourbon-l'Archambault (Allier) en 1915, eut une carrière exceptionnelle. De 1933 à 1936 il fut élève à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, où il suivit les cours d'Élie Cartan qui eut une grande influence sur sa pensée mathématique. Il soutint sa thèse de doctorat, préparée sous la direction de Georges Darmois, en 1939 et fut nommé professeur de mécanique à l'université de Strasbourg en 1941. À cause de la guerre, les enseignants et étudiants de l'université de Strasbourg s'étaient déjà repliés à Clermont-Ferrand afin de ne pas rester dans la zone occupée par les Allemands. Cependant, en 1943 les Allemands occupèrent aussi Clermont-Ferrand et opérèrent une vague d'arrestations au cours de laquelle Lichnerowicz fut pris, mais fut assez heureux, ou assez audacieux, pour s'échapper. À cette époque, il fit ce qu'il put pour aider ceux qui étaient en danger de mort, ses collègues juifs en particulier[4]. Après la Libération, l'université de Strasbourg retourna à Strasbourg. En 1949, Lichnerowicz fut nommé professeur à l'Université de Paris, puis en 1952 il fut élu au Collège de France, à la chaire de physique mathématique, les chaires du Collège de France étant les plus prestigieuses de toutes[5].

Quand Lichnerowicz fut élu à l'Académie des Sciences de Paris – il avait seulement 48 ans, ce qui était exceptionnellement jeune pour un membre de l'Académie en ce temps-là – ses élèves, comme c'était la coutume, se cotisèrent pour contribuer à lui offrir son épée d'académicien. (L'épée, créée spécialement pour chaque académicien ou académicienne, est la seule partie de son riche uniforme qui reflète sa personnalité et son œuvre.) Mais deux ans plus tard, pour son cinquantième anniversaire, nous donnâmes presque autant d'argent pour lui offrir un objet beaucoup plus à son goût,... une pipe ! Il est vrai qu'il était impossible de l'imaginer sans sa pipe à aucun moment... sauf pendant ses cours où il emplissait le tableau noir d'équations, de son écriture fine et serrée, équations qui comportaient presque toujours un nombre impressionnant d'indices tensoriels. D'ailleurs tous ses portraits photographiques le représentent... avec sa pipe.

L'œuvre de Lichnerowicz en relativité générale commence avec sa thèse où l'on trouve le premier exposé de la théorie de la relativité générale d'Einstein d'un point de vue de géométrie globale, ainsi que des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique de signature hyperbolique sur une variété différentiable soit une solution globale des équations d'Einstein. Il montra qu'il ne peut exister de solitons gravitationnels ; il établit l'« équation de Lichnerowicz », équation semi-linéaire

[4] Dans son autobiographie [7], Laurent Schwartz raconte qu'il arriva « que Lichnerowicz, à l'occasion d'un passage – qu'il fit peut-être pour nous [*i.e.*, lui-même et sa femme Marie-Hélène] – dans un commissariat de police, profitât d'une absence d'une ou deux minutes du commissaire pour dérober un instant son cachet et tamponner une [fausse] carte [d'identité] », laquelle ne lui servirait à rien mais sauverait peut-être la vie d'un collègue ou d'un étudiant. Survivre aux années de guerre en France dans l'honneur était en soi un haut fait.

[5] Une chaire de mathématiques avait été créée par François I^{er} lors de la fondation du Collège Royal en 1531 !

elliptique permettant de résoudre les équations des contraintes pour les conditions initiales des équations d'Einstein. Il poursuivit ses travaux dans ce domaine tout au long de sa carrière de recherche. « Géométrie différentielle et analyse globale sur les variétés », « relations des mathématiques avec la physique », « traitement mathématique de la théorie de la gravitation d'Einstein » : c'est ainsi qu'il décrit lui-même ses principaux centres d'intérêt et domaines de recherches dans l'entretien publié dans *Hommes de Science* [4].

Ses travaux en géométrie riemannienne, qui paraissent à partir de 1944, restent particulièrement importants. Il fut parmi les premiers géomètres à établir une relation entre le spectre du laplacien et la courbure de la métrique ; il démontra les équivalences, aujourd'hui classiques, entre les diverses définitions des variétés kählériennes ; il démontra, avec Armand Borel, que le groupe d'holonomie restreint d'une variété riemannienne est compact, et bien d'autres résultats fondamentaux.

Au début des années soixante, Lichnerowicz établit la théorie des spineurs d'Élie Cartan et Hermann Weyl dans le cadre rigoureux de la géométrie différentielle sur une variété pseudo-riemannienne munie d'une métrique hyperbolique (lorentzienne). Avec cette approche géométrique, il traita dans ses cours au Collège de France des années 1962-1964 la théorie de Dirac et celle de Rarita-Schwinger pour le spin $\frac{3}{2}$, puis la théorie de Petiau-Duffin-Kemmer ainsi que les transformations CPT, tandis qu'il publiait aussi en 1963 sa célèbre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* sur les spineurs harmoniques [8], où il démontrait que, pour tout champ spinoriel ψ,

$$\Delta\psi = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\psi + \frac{1}{4}R\psi \ ,$$

où $\Delta = P^2$ est le laplacien sur les spineurs, le carré de l'opérateur de Dirac P, tandis que ∇ est la dérivation covariante et R est la courbure scalaire. Et il continua ses travaux sur les spineurs jusqu'à ses derniers jours.

À partir des années soixante-dix, Lichnerowicz s'intéressa à l'étude géométrique des systèmes dynamiques. La géométrie symplectique faisait l'objet de travaux depuis quelque temps déjà[6]. En janvier 1973, une conférence, « Geometria simplettica e fisica matematica », se tint à Rome et fut, je crois, le premier congrès international sur ce sujet. Jeune chercheur, j'assistai à ce congrès et j'y entendis et rencontrai nombre des fondateurs de la géométrie symplectique, dont Jean Leray, Irving Segal, Bertram Kostant, Shlomo Sternberg, Włodzimierz Tulczyjew, Jean-Marie Souriau, ainsi que les jeunes Alan Weinstein et Jerry Marsden. Et Lichnerowicz était l'un des organisateurs et il prononça la conférence inaugurale.

La raison principale pour laquelle nous rendons hommage à la mémoire de Lichnerowicz, ici, à cette conférence sur la géométrie de Poisson, est qu'il en fut le fondateur, quelques années avant la publication de l'article sur la quantification par déformation que j'ai évoqué en commençant cet hommage.

Son fils Jérôme Lichnerowicz, parlant de la collaboration de son père avec Moshé Flato, a dit : *« Il n'y avait plus de maître ni d'élève mais une synergie incroyable entre deux amis. J'ai vu Moshé soutenir André quand, les années passant, il doutait*

[6] Comme l'explique Weyl au début du chapitre VI de son livre sur les groupes classiques [9], il introduisit l'adjectif « symplectique » tiré du grec pour éviter la confusion avec l'adjectif « complexe » dans le sens de « nombre complexe ».

de ses capacités créatrices », et il a ajouté : *« J'ai entendu Moshé me dire : 'C'est incroyable, il* [Lichnerowicz] *a eu une période à vide, mais là il refait des maths comme avant !'* » [10]. À partir de 1974, travaillant avec Moshé Flato et Daniel Sternheimer, Lichnerowicz formula la définition d'une variété de Poisson en termes de bivecteur, *i.e.*, du 2-tenseur contravariant prôné par Lie, Carathéodory et Tulczyjew, qui est l'analogue de la 2-forme de la géométrie symplectique. Dans son article dans *Topics in Differential Geometry* [11], il définit les variétés canoniques, et l'on peut déjà y trouver une formule pour le crochet de Lie des 1-formes associé à un crochet de Poisson sur les fonctions, mais encore seulement pour le cas des formes exactes,

$$[df, dg] = d\{f, g\} \ .$$

(Plus tard, il montrera que les variétés canoniques sont les variétés de Poisson dont le feuilletage symplectique est partout de codimension 1.) Dans son article de 1977 au *Journal of Differential Geometry*, « Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées » [12], Lichnerowicz introduisit l'opérateur de cohomologie aujourd'hui appelé « opérateur de cohomologie de Poisson », que l'on doit appeler plutôt « opérateur de cohomologie de Lichnerowicz-Poisson », découverte d'importance. Dans cet article, ainsi que dans [1], on lit que, dans le cas particulier d'une variété symplectique,

$$\mu([G, A]) = d\mu(A) \ ,$$

où A est un champ de multivecteurs. (Les notations sont G pour le bivecteur de Poisson et μ pour le prolongement aux multivecteurs de l'isomorphisme du fibré tangent sur le fibré cotangent défini par la forme symplectique, le crochet est le crochet de Schouten-Nijenhuis, et d est la différentielle de de Rham.) Si nous écrivons cette formule en notation plus moderne,

$$\omega^\flat([\pi, A]) = d(\omega^\flat(A)) \qquad \text{ou} \qquad \pi^\sharp(d\alpha) = d_\pi(\pi^\sharp\alpha)$$

(ici, G est remplacé par π et μ par $\omega^\flat$, d'inverse $\pi^\sharp$, tandis que α est une forme différentielle et d_π est la différentielle de Lichnerowicz-Poisson, $d_\pi = [\pi, \cdot]$, agissant sur les multivecteurs), on y voit le précurseur de la propriété de morphisme de complexes satisfaite par l'application de Poisson (inverse de l'application μ précédente), appliquant le complexe de de Rham dans le complexe de Lichnerowicz-Poisson. Avec ses articles précédents écrits avec Flato et Sternheimer [13], [14], [15] et avec le texte des *Annals of Physics* [1], résolvant les problèmes de quantification par une déformation de la multiplication commutative des observables classiques pilotée par une structure de Poisson, cet article fut le fondement de ce qui est devenu un vaste champ de recherches.

C'était le privilège des nombreux élèves de thèse de Lichnerowicz, dont je fus dans les années soixante, d'être reçu par lui dans son bureau exigu dans les combles du Collège de France, ou dans le beau bureau de son appartement, avenue Paul Appell, à la limite sud de Paris. Entouré de collections de revues scientifiques et de hautes piles de documents, Lichné, avec sa pipe, donnait encouragements et suggestions inestimables pour surmonter une difficulté rencontrée dans la recherche. Je savais alors, nous savions tous, que nous parlions à un grand mathématicien. Mais j'étais loin de me douter que je parlais au créateur d'une théorie qui deviendrait un domaine de recherche à part entière, dont les ramifications toucheraient un nombre très important de domaines des mathématiques et de la physique.

Références

[1] François Bayen, Moshé Flato, Chris Fronsdal, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Deformation theory and quantization, *Annals of Physics*, **111** (1978). I. Deformations of symplectic structures, 61-110. II. Physical applications, 111-151.

[2] André Lichnerowicz, *Choix d'œuvres mathématiques*, Hermann, Paris, 1982.

[3] *Physique quantique et géométrie*, Colloque Géométrie et Physique de 1986 en l'honneur de André Lichnerowicz, Daniel Bernard et Yvonne Choquet-Bruhat, éds., Hermann, Paris, 1988. Yvonne Choquet-Bruhat, *L'œuvre de André Lichnerowicz en relativité générale*, pp. 1-10 ; Marcel Berger, *L'œuvre d'André Lichnerowicz en géométrie riemannienne*, pp. 11-24 ; Charles-Michel Marle, *L'œuvre d'André Lichnerowicz en géométrie symplectique*, pp. 25-42.

[4] *Hommes de Science*, 28 portraits, Entretiens et photographie de Marian Schmidt, Hermann, Paris, 1990.

[5] *Gazette des Mathématiciens*, **81** (1999), 94-95 et **82** (1999), 90-108.

[6] *Notices Amer. Math. Soc.*, **46** (11) (1999), 1387-1396.

[7] Laurent Schwartz, *Un Mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997, p. 200.

[8] André Lichnerowicz, Spineurs harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257** (1963), 7-9.

[9] Hermann Weyl, *The Classical Groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1939 ; deuxième édition, 1946,

[10] Jérôme Lichnerowicz, dans *Conférence Moshé Flato 1999*, vol. I, Giuseppe Dito et Daniel Sternheimer, éds., Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 7-8.

[11] André Lichnerowicz, Variétés symplectiques, variétés canoniques et systèmes dynamiques, dans *Topics in Differential Geometry, in memory of E. T. Davies*, Academic Press, New York, 1976, pp. 57-85.

[12] André Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geometry*, **12** (1977), 253-300.

[13] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *C. R. Acad. Sci. Paris* Sér. A, **279** (1974), 877-881.

[14] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Algèbres de Lie attachées à une variété canonique, *J. Math. Pures Appl.* (9), **54** (1975), 445-480.

[15] Moshé Flato, André Lichnerowicz, Daniel Sternheimer, Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications, *J. Mathematical Phys.*, **17** (1976), 1754-1762.

Faut-il avoir peur[1] des Mathématiques Financières ?

Marc Yor[2]

Vous trouverez ci-dessous un texte de M. Yor qui fait suite à une table ronde qui s'est tenue sur le thème « Mathématiques financières et industrie bancaire - le point actuel ; quelques perspectives ». *Pour plus d'informations sur le sujet, vous pouvez consulter le programme de la journée du 1^er^ avril 2008 sur le site de l'Académie des sciences[3]. Par ailleurs, un compte-rendu détaillé de cette journée a été publié dans le nº 86 de* Matapli.

1. Préliminaires

La crise des « subprimes » aux États-Unis, et maintenant en Grande-Bretagne, l'affaire Kerviel en France, la flambée du prix du pétrole et des denrées alimentaires suscitent beaucoup de questions touchant à l'économie, la finance, etc. Compte tenu du flux important de jeunes mathématiciens entrant dans l'industrie bancaire à la suite de leurs études au niveau Master, il était naturel que l'Académie des Sciences, et les deux Sociétés Mathématiques SMAI et SMF réfléchissent à l'évolution de cette implication des mathématiciens (probabilistes, analystes numériciens, etc.) dans le secteur bancaire. Les témoignages des Professeurs P. Bank (Allemagne), M. Davis (Angleterre), P. Embrechts (Suisse) sur la situation correspondante dans leurs pays respectifs, ainsi que de N. El Karoui (École Polytechnique) et D. Lamberton (université de Marne-la-Vallée) pour la France, ont permis d'animer une Table Ronde sur ces thèmes à l'Académie des Sciences, le 1er avril 2008[3].

Cette Table Ronde faisait d'ailleurs suite à une demi-journée d'exposés qui s'est également déroulée à l'Académie des Sciences le 1er février 2005, où la plupart des aspects des mathématiques financières ont été présentés de façon accessible à un

[1] Quelques « non-lecteurs » de cet article ont immédiatement insinué que la conclusion de l'article doit être NON ! C'est un peu plus subtil !

[2] Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Universités Paris VI et Paris VII, Institut Universitaire de France

[3] http://www.academie-sciences.fr/conferences/seances_publiques/pdf/Seance_01_04_08_programme.pdf

public scientifique, mais pas nécessairement spécialiste. La tenue de ces deux rencontres, et les publications[4] qui les ont suivies, me dispensent de discuter d'un certain nombre de points techniques, et me permettent de présenter quelques réflexions personnelles sur, d'une part, les mathématiques, et d'autre part, les (réactions des) mathématiciens au contact du monde financier et de conclure par quelques suggestions en réponse (modeste !) aux développements très rapides de la situation.

2. Les mathématiques au contact du monde financier

Les échanges commerciaux de toutes sortes entre les hommes ont existé depuis des temps immémoriaux, et ont entretenu des relations importantes avec les mathématiques, par exemple sous la forme de la « comptabilité » (« *bookkeeping* »), et des assurances.

Le XX^{e} siècle est marqué par la prise en compte du caractère « aléatoire » des principales quantités, procédures, etc., intervenant dans ces échanges.

Le pionnier en est Louis Bachelier qui, dans sa thèse, en 1900, modélise les cours de la Bourse à l'aide du mouvement brownien[5]. Paul Samuelson, en 1965, « corrige » ce modèle en prenant l'exponentielle du mouvement brownien. Un article très intéressant [3] compare ces deux approches. La formule de Black-Scholes, en 1973, marque un tournant essentiel et, à ce jour, malgré nombre de critiques, reste un des piliers des Mathématiques Financières. Après le krach de 1987, l'industrie bancaire se décide résolument à « intégrer » la culture de l'aléa, i.e : utilisation des processus et calcul stochastiques, en particulier.

Des modèles extrêmement sophistiqués, mettant en jeu, processus de Lévy, etc., en fait, toute la panoplie de la théorie des processus stochastiques, sont constamment utilisés en relation avec les calculs de prix d'options, par exemple.

Une longue chaîne de spécialistes, allant des analystes fonctionnels et théoriciens des processus jusqu'aux « simulateurs », a permis à l'industrie bancaire, sinon de maîtriser tout l'ensemble correspondant des connaissances, tout au moins de pouvoir l'utiliser de façon convenable. Les revues de mathématiques financières se multiplient, avec des lecteurs très motivés et attentifs aux erreurs (lesquelles peuvent coûter très cher !). La théorie des martingales a engendré celle du non-arbitrage (« on ne peut pas gagner sans risque à partir de rien »). Parallèlement, la théorie du risque se développe (« *Coherent Risk Measures* ») mais est encore loin de pouvoir répondre aux nombreuses questions posées par la crise actuelle.

Pour résumer, les besoins de l'industrie bancaire suscitent d'une part le développement de théories mathématiques directement liées aux problèmes de cette industrie, et demandent d'autre part un nouveau regard sur des questions « classiques » de théorie des probabilités, telles que l'étude des processus de Lévy, des lois de martingales, etc.

En outre, l'évolution profonde et constante du fonctionnement de l'industrie bancaire a pour conséquence que les théories mathématiques qu'elle suscite se trouvent

[4] Par exemple : *Aspects des Mathématiques Financières,* Editions Tec & Doc, Lavoisier 2006. Ce volume a maintenant été traduit en anglais, et publié par Springer sous le titre : *Aspects of Mathematical Finance*, 2008.

[5] À l'époque, il n'était pas encore désigné par le terme « mouvement brownien », réservé à l'agitation incessante de grains de pollen en suspension dans l'eau, telle qu'elle a été observée par R. Brown en 1828.

rapidement remises en cause au niveau de leur applicabilité aux problèmes du moment. Il y a là une différence importante avec la recherche des lois « immuables » de la physique, lesquelles évoluent elles-aussi...

Tous ces facteurs font que la recherche dans le domaine des mathématiques financières s'avère, d'un point de vue purement intellectuel, présenter de nombreuses facettes originales ; par exemple, il est impressionnant de voir avec quelles difficultés les notions actuellement « dominantes » se sont frayées un chemin, empruntant aux théoriciens des probabilités beaucoup de leurs objets de prédilection. Une certaine grandeur et une certaine humilité se dégagent à la fois, me semble-t-il, de ce tâtonnement qui a duré plus d'un siècle, et est bien loin d'être achevé !

On trouvera, en référence, deux articles écrits, d'une part par N. El Karoui, et d'autre part, par R. Jarrow et Ph. Protter, qui détaillent soigneusement ce cheminement historique, et les problèmes actuels.

3. Les mathématiciens au contact du monde financier

Depuis le début des années 90, les débouchés s'ouvrant aux mathématiciens (et également aux physiciens) de niveau Master 2 et les niveaux de rémunération de ces débouchés dans l'industrie bancaire ont suscité un engouement qui bat tous les records, aussi bien dans la durée (en tout cas, jusqu'à maintenant) que dans son ampleur... Hormis l'attrait purement pécuniaire, il est certainement très apprécié de beaucoup des jeunes mathématiciens embauchés dans les cellules quantitatives des banques, d'où leur nom de « *quants* », d'utiliser des mathématiques très sophistiquées qui sont directement appliquées au cœur du monde économique, selon la terminologie utilisée pendant la Table Ronde du 1^er^ avril.

Toutefois, un « *quants* » a une durée de vie moyenne de 3 ans, et passe souvent après une telle relativement courte période au niveau « Management », ou autre. Le renouvellement (*« turnover »*) des équipes se fait donc extrêmement rapidement, et à grande échelle.

Par ailleurs, la demande du secteur bancaire est telle que, en Europe tout au moins, et à la City de Londres en particulier, il n'est pas vraiment nécessaire d'avoir une thèse pour être embauché. (En exagérant un peu, ce serait peut-être un handicap ; par contre, aux États-Unis, le PhD sert de référence à l'embauche de la plupart des « *quants* »). De plus, une fois dans la banque, notre « *quants* » n'a plus le temps nécessaire pour réfléchir tout à loisir, ainsi que la préparation d'une thèse le nécessite.

Cette mine d'emplois a, bien entendu, des retombées importantes sur la population étudiante concernée : il est certainement assez difficile à un(e) jeune probabiliste, un peu incertain(e) quant à son insertion dans la recherche, de résister à l'appel de ses pairs qui, eux, ont décidé de prendre un emploi dans le secteur bancaire. Cette attirance, un peu moutonnière, ne risque-t-elle pas d'appauvrir d'autres secteurs universitaires, de recherche, etc. ? Du côté des responsables de Masters, on assiste également à un effet pervers. On entend souvent le discours suivant : si, dans mon université U, on ne développe pas un Master de Finance mathématique, alors les Masters Mathématiques de U vont devoir fermer, faute de candidats... Les responsables en question affirment ensuite, dans la foulée : tout professeur probabiliste est capable d'enseigner les Mathématiques Financières... En d'autres temps, on a entendu des discours voisins, avec « probabiliste » remplacé par « analyste », et « Mathématiques Financières » par « Probabilités », voire « Statistique », avec les dégâts que l'on sait...

L'industrie bancaire, pour l'essentiel, vient de mettre en place un système de chaires, très attrayant, qui permet aux professeurs titulaires de ces chaires de bénéficier de conditions incomparables à celles du professeur moyen... Tout un système de « gratifications » (H. Föllmer a parlé récemment de *« wrong incentives »*) est actuellement mis en place, qui va définitivement créer deux classes d'enseignants (en Probabilités, tout du moins) selon que l'enseignant-probabiliste concerné traite ou non de Mathématiques Financières. La résultante de toutes ces exceptions est que les Masters de Mathématiques Financières deviennent un club à part, se situant bientôt dans les départements adhoc, type : Ingénierie Financière. Ces scissions sont tout à fait à l'ordre du jour, et sont présentées par un certain nombre de responsables et d'institutions comme quasiment inéluctables.

Notons toutefois que cette position est loin de faire l'unanimité, en particulier outre-Atlantique : le Professeur I. Karatzas (Columbia University, New-York) dont les contributions en Mathématiques Financières sont de tout premier ordre, écrit à ce sujet : *« I believe strongly that Probability in general, and Math Finance in particular (you see already my bias in the set-inclusion) can only be healthy within a strong Mathematics environment (yet another set-inclusion). This only works if there is good will and generosity on both sides of the 'inclusion' »* .

4. Et maintenant ? Que faire ? À quel niveau ?

Avec l'analyse que je viens de faire dans les paragraphes précédents, il ne me semble pas avoir forcé le trait, bien au contraire...

D'autre part, les questions traitées lors de la Table Ronde du 1er avril, et dans les paragraphes ci-dessus, sont considérées avec beaucoup d'attention, aussi bien par les praticiens que par les académiques concernés. Depuis le 1er avril, j'ai eu connaissance de 2 exposés très liés à ces questions :

– l'un donné par Jim Gatheral à la conférence *« Global Derivatives »* (mai 2008) sous le titre *« Mathematics and Finance : the perfect couple »* ,

– l'autre donné par H. Föllmer le 30 mai à l'université Paris V sous le titre « Aspects probabilistes de l'incertitude financière ».

L'argumentation de ce second exposé est que l'approche mathématique a mis en lumière, de façon aveuglante, certains aspects de la finance, rejetant le "reste" dans une grande obscurité. H. Föllmer conclut en disant qu'il est nécessaire de porter la lumière sur d'autres aspects, i.e : risques de toutes sortes, et donc de développer les mathématiques correspondantes, mais que ceci doit se faire dans un esprit d'humilité qui n'a pas vraiment eu cours jusqu'alors.

Il apparaît ainsi que, après 20 ans d'interactions importantes avec l'industrie bancaire, la communauté probabiliste, française en particulier, est à la croisée des chemins. En particulier, si la crise bancaire internationale s'amplifie, peut-on laisser des bataillons de jeunes scientifiques s'engouffrer dans la brèche ?... (Les optimistes diront que « le marché » régulera tout cela, mais le mal sera fait, et peut-être pour assez longtemps).

Pendant toutes ces années, et au fil des échanges avec de nombreux chercheurs théoriciens, aussi bien que praticiens, je me suis forgé les convictions suivantes :

– la communauté probabiliste académique doit « rester à sa place », c'est-à-dire réfléchir aux problèmes de fond, dégager le(s) cadre(s) probabiliste(s) généraux intervenant dans les marchés financiers, développer les mathématiques du risque (financier ou autre), faire bénéficier le reste de la communauté académique de sa connaissance du terrain...

– pratiquement, il me semblerait très positif que les jeunes étudiants en cours de Master puissent disposer d'un panorama global des applications des mathématiques, et des techniques actuellement en développement ("porteuses", selon le langage des recherches d'emploi). La communauté académique, secteur par secteur, dispose de moyens d'exploration des possibilités d'emplois, de développement, etc. Il s'agit de faire ce travail systématiquement, de rassembler les informations ainsi obtenues, et de les présenter de façon cohérente. C'est pourquoi l'idée[6] de la constitution d'un « Observatoire des Applications des Mathématiques » qui réaliserait le programme ci-dessus me paraît être un début de réponse aux problèmes extrêmement graves qui se manifestent actuellement autour des interactions des enseignements universitaires en rapport avec l'industrie bancaire.

– Dans quelques échanges avec certains collègues, j'ai eu l'impression d'être considéré comme « anti MF ». Il n'en est pas ainsi, je dis simplement qu'un développement plus équilibré serait souhaitable.

Remerciements : Ils vont à Hans Föllmer pour son exposé du 30 mai 2008 à l'université Paris V, et à Jean-Pierre Kahane pour ses remarques aussi bien sur la forme que sur le fond.

5. Références

[1] **N. El Karoui.** *Gestion des risques financiers dans un monde dynamique*. In : Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui, vol. 3. Editeurs : E. Charpentier, N. Nikolski. Cassini. Collection : Le Sel et le Fer (Janvier 2007).

[2] **R. Jarrow, Ph. Protter.** *A short history of stochastic integration and mathematical finance : the early years, 1880-1970.* In The Herman Rubin Festschrift, éditeur : A. Dasgupta, IMS Lecture Notes 45 ; 75-91 (2004).

[3] **W. Schachermayer, J. Teichmann.** *How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes ?* Mathematical Finance, Vol. 18 (2008), No. 1, pp. 55-76.

[6] Il existe un tel observatoire au CNRS concernant les métiers de la recherche ; par ailleurs, H. Föllmer nous a appris l'existence pour les universités berlinoises d'un tel dispositif pour les Mathématiques des « Technologies Clé ». Ainsi, tout comme le débat qui fait l'objet de cet article, cette idée d'observatoire est « dans l'air », tout au moins en Europe de l'Ouest.

La vérité pour Ibni

Aline Bonami, Marie-Françoise Roy

Nous écrivons cet article début septembre 2008, juste au moment où la presse fait état des conclusions de la commission d'enquête tchadienne sur les événements de février au Tchad. Malgré les hésitations du rapport il n'est plus permis d'en douter : Ibni Oumar Mahamat Saleh a été arrêté à son domicile par des forces de l'armée tchadienne le 3 février ; il est mort dans les jours suivant son incarcération, soit qu'il ait succombé aux mauvais traitements subis, ou au manque de soins médicaux adaptés (sa santé était fragile) soit qu'il ait été assassiné.

Il nous faut apprendre à parler de lui au passé. Pendant les six derniers mois, malgré la conviction grandissante qu'il avait dû mourir, nous avons toujours parlé de lui au présent, pour garder espoir et maintenir vivante son image. Ce que nous pouvons écrire aujourd'hui ne peut qu'être marqué de l'émotion qui est la nôtre, et celle de beaucoup, en pensant à lui en ce mois de septembre 2008.

Aujourd'hui notre demande reste de même nature que lors du lancement de la pétition : savoir la vérité, une vérité complète, une vérité officielle qui mène à ce que justice soit faite et à ce que son corps soit rendu à sa famille.

Notre propos, ici, est de parler de la mobilisation de la communauté mathématique[1] pour demander la vérité sur le sort d'Ibni Oumar Mahamat Saleh et de dire qui était Ibni. Il nous est impossible de citer tous ceux qui, dans la communauté mathématique, nous ont aidées. Qu'ils soient tous remerciés, et qu'ils nous excusent si nous ne les citons pas. Qu'on nous excuse aussi de ne pas développer davantage les aspects politiques de la disparition d'Ibni. Nous ne voudrions ni ne saurions faire ce qui revient aux journalistes de métier, c'est-à-dire écrire un véritable portrait de l'homme politique Ibni Oumar Mahamat Saleh, enquêter sur les circonstances de sa mort, expliquer quelle était sa place dans la classe politique tchadienne et quelles sont les conséquences de sa disparition pour l'avenir de ce pays.

La mobilisation des mathématiciens, vue au jour le jour[2]

Ibni Oumar Mahamat Saleh est enlevé à son domicile le 3 février, juste au moment où les troupes rebelles se retirent de N'Djamena, l'intervention française ayant permis au régime du Président Déby de se maintenir au pouvoir. Mais c'est seulement le 13 février que je l'apprends, par un message de Stéphane Jaffard, lui même alerté par Stéphane Cordier qui s'adresse aux sociétés savantes, ainsi qu'à la présidence de l'université d'Orléans, à la suite d'un appel téléphonique d'un fils d'Ibni. Ibni est quelqu'un que je connais bien car nous l'avons côtoyé Michel Coste et moi lorsque nous enseignions avec lui à Niamey (Niger) entre 1981 et 1983. À l'époque le département de mathématiques et d'informatique de l'université de Niamey était composé d'une grande majorité de coopérants français, dont nous

[1] Beaucoup d'informations sont disponibles sur le site de la pétition, `http://smf.emath.fr/PetitionSaleh/`

[2] Il nous a semblé plus vivant que le déroulement de la mobilisation des mathématiciens soit décrit au travers des impressions d'une seule d'entre nous. C'est Marie-Françoise qui parle dans le prochain paragraphe.

faisions partie. Ibni Oumar Mahamat Saleh, un des rares collègues africains, était d'une grande courtoisie, très calme, très réfléchi, très apprécié de ses collègues français et africains et très présent auprès de ses étudiants. Depuis nous avions su qu'il était retourné au Tchad où il avait eu d'importantes responsabilités universitaires, ministérielles et politiques, mais nous n'avions pas gardé de contacts.

Très rapidement, la SMF[3] et la SMAI[4] s'orientent vers l'idée de lancer une pétition le concernant. Aline et moi sommes chargées par les deux sociétés savantes, vite rejointes par la SFdS[5], d'animer la campagne autour de la pétition. Le Président Sarkozy se rend au Tchad fin février mais cette visite est loin d'éclaircir la situation, il obtient la création d'une commission d'enquête dont la composition et le fonctionnement seront très critiqués par les démocrates africains. Nous décidons la ligne à suivre : n'accuser personne, demander la vérité, à la fois aux autorités tchadiennes et aux autorités françaises, car nous sommes très inquiets pour notre collègue.

Voilà le texte de la pétition, qui est lancée le 10 mars.

« Monsieur le Président de la République du Tchad,

Monsieur le Président de la République Française,

Nous voulons connaître la vérité concernant le sort de notre collègue Ibni Oumar Mahamet Saleh, mathématicien, ancien ministre, homme politique tchadien enlevé à son domicile le 3 février 2008 et dont on est toujours sans nouvelles.

Ibni Oumar Mahamat Saleh est un membre actif de la communauté mathématique. Titulaire d'une thèse de troisième cycle de l'université d'Orléans, où il a fait toutes ses études supérieures, il est professeur à l'université de N'Djamena depuis 1985. Il y a exercé les responsabilités universitaires suivantes :

- *Chef du département de mathématiques (1985),*
- *Directeur du centre de recherche scientifique (1986),*
- *Recteur de l'université de N'Djamena (1990-1991).*

Malgré de très lourdes et nombreuses charges administratives et ministérielles, Ibni Oumar Mahamat Saleh a toujours fait preuve d'un dynamisme remarquable dans ses activités d'enseignement. Pour améliorer le niveau scientifique de l'université de N'Djamena, il a demandé en 1991 à l'université d'Orléans de participer à un accord inter-universitaire de soutien à l'université de N'Djamena, financé par le gouvernement français. Dans ce cadre, en association avec l'INSA de Lyon et l'université d'Avignon, la mission confiée aux universités françaises était de former des enseignants tchadiens au niveau du DEA puis de la thèse dans un certain nombre de disciplines. Cet accord est toujours en vigueur et a donné des résultats très positifs.

Outre son objectif de formation initiale, il a également permis à de nombreux enseignants tchadiens de nouer des contacts durables avec d'autres universités, européennes et africaines. Même appelé à d'autres responsabilités, Ibni Oumar Mahamat Saleh a suivi de près les actions entreprises dans ces accords et son aide a souvent été précieuse. Il s'est rendu plusieurs fois au département de mathématiques d'Orléans dans ce cadre.

---

[3] Société Mathématique de France

[4] Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles

[5] Société Française de Statistique

Depuis le 3 février, des informations contradictoires circulent sur le sort d'Ibni Oumar Mahamat Saleh. Les deux autres opposants enlevés le même jour que lui ont depuis été libérés. L'un d'entre eux pense que malheureusement notre collègue est mort, alors que sa famille pense qu'il est toujours en vie.

Nous voulons connaître la vérité. »

La pétition recueille 1000 signatures dès le 14 mars. À cette date elle est transmise aux autorités tchadiennes et françaises, et notre communiqué de presse est repris par l'AFP. La dépêche AFP est notamment publiée sur le site du Monde. Le 15 mars je suis interviewée par BBC Afrique et Aline porte la pétition à la famille d'Ibni lors du rassemblement des Invalides à Paris.

À la fin mars, nous avons recueilli 2000 signatures. De nombreux médias ont repris la dépêche de l'AFP. J'ai été interviewée par la Voix de l'Amérique diffusée en Afrique. Aline a de son côté mis en ligne un dossier qui sera complété régulièrement depuis.

Nous diffusons régulièrement des messages aux signataires et recevons beaucoup de réponses encourageantes en retour. Certains amis pensent qu'Ibni est toujours vivant. Optimiste incorrigible, j'essaye d'y croire.

Entre temps la communauté mathématique internationale se mobilise. Au Canada, les adhérents de la CMS sont informés et invités à signer. En Inde, la Ramanujan Mathematical Society a également informé ses membres. L'EMS publiera un article dans sa Newsletter de juillet. L'IMU diffuse l'information de son côté. Plus tard ce sera la société mathématique espagnole, puis l'AMS, qui appelleront à signer. L'information circule, les collègues signent de toute part.

De surcroît, de nombreux africains signent : collègues, étudiants, amis, camarades, démocrates... En tout plus de 500 signataires vivant en Afrique ou dans la diaspora.

Malgré nos efforts nous n'avons eu aucune réponse des autorités françaises. Lorsque le Tchad revient au premier plan de l'actualité avec la libération des membres de l'Arche de Zoé après avoir été graciés par le Président tchadien, seul Libération reparle d'Ibni. Notre communiqué de presse n'est pas repris par l'AFP. Je cite sa conclusion : « *Malheureusement, autant les mathématiciens sont prêts à se faire entendre, autant le silence auquel ils se heurtent est assourdissant. Est-il possible qu'à côté du soulagement qu'on éprouve à l'annonce de la grâce pour les membres de l'Arche de Zoé, on partage avec sa famille, ses amis, les milieux démocratiques au Tchad, et les mathématiciens de France et d'ailleurs, l'inquiétude grandissante pour Ibni Oumar Mahamat Saleh ?* »

Une réunion se tient à Orléans le jeudi 10 avril pour demander la vérité sur le sort d'Ibni Oumar Mahamat Saleh. Elle se tient dans un local de la mairie d'Olivet en présence des adjoints au maire d'Olivet, Phillipe Belouet et Jean-Luc Molvot et du sénateur du Loiret Jean-Pierre Sueur, ainsi que des deux fils d'Ibni Oumar, Hicham et Mohamed Saleh. Elle est ouverte par Edouard Boukié, ami très proche d'Ibni Oumar. Elle réunit plus de 30 personnes, parmi lesquels des enseignants de l'université d'Orléans, d'anciens condisciples d'Ibni Oumar lorsqu'il y faisait ses études, des sympathisants.

Choquée du peu d'écho sur les ondes françaises, je trouve de mon côté le contact avec RFI. Mon interview est diffusée le 22 avril. C'est au contact de l'équipe très chaleureuse présente autour de Julie Rengeval que je suis soudainement convaincue qu'Ibni est mort. Ils ne me disent rien de définitif, pourtant, mais il y a dans leurs yeux la compassion et la tristesse de ceux qui ont peur de vous apprendre une très mauvaise nouvelle et je suis sûre qu'on ne fait pas mieux informés qu'eux sur l'Afrique. Mais, quelle que soit notre intime conviction, il faut continuer à demander la vérité.

La campagne se poursuit. La *Recherche* diffuse un texte dans son courrier des lecteurs, l'Action des chrétiens pour l'abolition de la torture (ACAT-France) et l'Association Maurice Audin relaient la pétition. Les parlementaires Jean-Pierre Sueur et Gaëtan Gorce s'adressent au Président Sarkozy et reçoivent une réponse qui ne contient pas d'information nouvelle. Les présidents des trois sociétés savantes écrivent à nouveau aux autorités françaises et tchadiennes en transmettant la liste des signataires, près de 2500 désormais. Leurs courriers restent sans réponse.

Fin juin, le ministre canadien des affaires étrangères répond à nos collègues canadiens. Il dit que, selon les renseignements qu'il a obtenus, Ibni est mort en prison. Les autorités françaises ne nous ont toujours pas répondu directement. Toutefois, le ministère des affaires étrangères a dit quelques mots sur la disparition d'Ibni Oumar dans son point presse, parlant toujours d'éclaircissements nécessaires, et annonçant un rapport de la commission d'enquête pour le mois de juillet.

Une nouvelle réunion a lieu a Orléans, dans les locaux de la présidence de l'université, en présence de journalistes locaux le 24 juin. Les deux fils d'Ibni Oumar étudiants en France, Hicham et Mohamed Saleh, sont présents, ainsi que de nombreuses personnes dont David Békollé, mathématicien camerounais, vice-président de l'Union Mathématique Africaine et ami d'Ibni depuis qu'ils étaient étudiants ensemble à Orléans. Les sociétés savantes sont représentées par Lionel Schwartz. La presse locale parle de la réunion, mais la presse nationale ne reprend pas l'information. Voici le témoignage de David Békollé à cette occasion.

« Ibni est mon camarade. Je l'appelle Ibni, il m'appelle Békollé. Nous avons étudié ensemble les mathématiques à l'université d'Orléans dans les années soixante-dix. Dans la résidence universitaire d'Orléans la Source, nous avons partagé des moments irremplaçables, des moments uniques dans nos vies. Nous nous préoccupions de l'état de l'Afrique, de son développement, de son avenir, de notre avenir. Nous avions vingt ans !

Nous sommes rentrés dans nos pays. Ibni est mon collègue, nous sommes professeurs de mathématiques à l'université. Nous nous sommes revus une seule fois : c'était à l'intérieur de la Bibliothèque de Recherche en Mathématiques de Jussieu. Il était alors ministre au Tchad.

Depuis bientôt trois ans, j'ai été muté à l'université de Ngaoundéré, au Cameroun. Cette université est la plus proche, géographiquement parlant, de l'université de N'Djamena, où enseigne Ibni, mon collègue, mon camarade. Depuis quatre mois, je m'inquiète du sort d'Ibni. Nous sommes inquiets de son sort.

En ma qualité de vice-président de l'Union Mathématique Africaine en charge de l'Afrique Centrale, je dois reconnaître une certaine apathie de notre association panafricaine et j'avoue sa faiblesse d'organisation. Les mathématiciens africains font corps avec la communauté mathématique internationale, la Société Mathématique de France et toutes les sociétés savantes, pour manifester leur profonde inquiétude. Quatre mois déjà ! Bientôt cinq mois qu'Ibni a disparu ! Les universités africaines se *joignent à l'université d'Orléans, l'université d'Ibni, les scientifiques africains sont unis aux scientifiques de France et du monde entier dans un mouvement solidaire pour exiger de connaître la vérité. »*

Pendant l'été, la presse africaine indépendante annonce le décès d'Ibni, qui daterait de ses premiers jours de détention, donnant parfois des précisions sinistres sur les sévices qu'il aurait subis, et affirmant que les autorités françaises sont au courant depuis le début, un médecin français ayant même, selon eux, constaté le décès et transmis un rapport. Nous alertons la presse d'investigation, sans réaction aucune. Le rapport de la commission d'enquête sur les événements survenus au cours de l'attaque des rebelles tchadiens contre N'Djamena est transmis au Président Déby mais n'est pas rendu public. La presse annonce que le rapport de la commission, qui avait également été chargée de faire la lumière sur le cas d'Ibni Oumar Saleh, porte-parole de la principale coalition de l'opposition, disparu le 3 février, n'apporte aucune précision sur son sort.

Dans ce contexte, Michel Broué publie le 9 août un article intitulé « Mathématiciens morts sous la torture et mensonges d'État », faisant un parallèle avec la mort de Maurice Audin. Voici son texte.

« Maurice Audin, enseignant de mathématiques à l'université d'Alger et militant communiste, est arrêté par les hommes du 1er régiment de parachutistes le 11 juin 1957. Il a alors 25 ans, et deux enfants. Selon l'enquête de l'historien Pierre Vidal-Naquet, il est assassiné sous la torture le 21 juin 1957 par le lieutenant Charbonnier, officier de renseignement servant sous les ordres du Général Massu. Depuis lors la version officielle de tous les gouvernements français, et de l'armée, est que Maurice Audin s'est évadé, et a disparu. Depuis cinquante ans, sa veuve, Josette Audin, demande la vérité. Depuis cinquante ans, elle se heurte à l'omerta cynique du mensonge d'État : "évadé". Irrespect obscène des droits des vivants à savoir, à pleurer, à penser aux morts. On a décoré Charbonnier de la Légion d'Honneur, et depuis cinquante ans, consciemment et officiellement, on triche avec la vérité.

Ibni Oumar Mahamet Saleh, 59 ans, mathématicien, professeur à l'université de N'Djamena après des études supérieures à Orléans, ancien ministre, leader de l'opposition démocratique tchadienne, est enlevé à son domicile le 3 février 2008. On ne l'a plus revu depuis. Silences et dénégations des autorités tchadiennes, bizarreries et retards répétés dans les commissions d'enquête... On le dit pourtant mort sous la torture, et des détails commencent à sourdre. On dit qu'il a été battu et maltraité dès son arrestation. On dit qu'il a été tellement torturé, par des bourreaux prenant des ordres par radio, qu'il est tombé dans le coma et qu'on l'a laissé mourir. On dit que son décès aurait été constaté par un français. "On dit" ? Le gouvernement français, lui, dit qu'il ignore tout du sort de Ibni Oumar. Mais on sait les liens unissant le Président tchadien au gouvernement français, et pas une seconde on ne peut croire que les services français ne sont pas au courant. Pas une seconde. Et si les services savent, le Président de la République sait.

Sur ces deux crimes, le Président de la République doit dire ce qu'il sait. Lors de ses vœux, il nous a parlé de son obligation à "faire ce qu'il a dit et à nous devoir la vérité, toujours ?. Il doit en tout cas dire ce qu'il sait, il doit dire la vérité, maintenant ».

L'article est à la une de *Mediapart* le dimanche 10 août.

Plus rien de notable ne se passe avant que ne tombe le 3 septembre une dépêche de l'AFP annonçant que le rapport de la commission d'enquête vient d'être rendu public. Contre toute attente, la mort d'Ibni est annoncée, information que nous transmettons immédiatement à la liste qui comporte désormais plus de 3000 signatures. Dans un premier temps on sait seulement que la commission d'enquête est arrivée à la conclusion qu'Ibni a été enlevé par des forces de l'armée régulière tchadienne. Dès le 5 novembre le rapport complet commence à circuler, il met en évidence l'implication des plus hautes autorités tchadiennes. Mais on n'a toujours pas d'information sur le lieu de détention et la cause du décès d'Ibni, on ne sait pas s'il s'agit d'une bavure ou d'un assassinat prémédité.

Qui était Ibni ?

Suivant la tradition de son pays, Ibni Oumar est le nom qui lui a été donné par ses parents (comme nos prénoms), alors que Mahamat Saleh est le nom donné à son père (comme nos noms patronymiques). Lorsqu'il était étudiant à Orléans, on l'appelait Ibni Oumar, ou Ibni pour ses amis et ses proches.

Ibni était né en 1949 dans l'est du Tchad, dans une famille influente. Il est venu faire ses études supérieures à Orléans, comme beaucoup de Tchadiens à l'époque. Il a fréquenté les bancs de l'université de 1970 à 1975, de la première année au DEA de mathématiques, puis a préparé une thèse de doctorat de troisième cycle sous la direction de François Combes. Il faisait alors partie du groupe d'algèbre d'opérateurs animé par Claire Anantharaman et François Combes. À cette époque il a tissé des liens amicaux avec plusieurs membres du département de mathématiques, et aussi avec d'autres étudiants africains, nombreux à ce moment-là sur le campus orléanais. Les discussions politiques étaient nombreuses et David Békollé témoigne de la maturité dont faisait preuve Ibni, qui faisait partie de différents mouvements d'étudiants.

Alors qu'il préparait sa thèse à Orléans, Ibni a été maître auxiliaire à Montargis. Il est ensuite parti enseigner en Algérie (1980-1981), puis à à l'université de Niamey au Niger (1981-1985). Là Ibni se lie avec Marie-Françoise Roy et Michel Coste, ainsi qu'avec Daniel Pecker. Il finit sa thèse, qu'il soutient en 1983, et écrit une note aux Comptes-Rendus.

Lorsqu'il est nommé professeur à l'université de N'Djamena, en 1985, Ibni est un enseignant du supérieur en pleine maturité, dans un pays où les diplômés ne sont pas nombreux. Il se trouve rapidement chargé de responsabilités. Il est successivement chef du département de mathématiques de l'université de N'Djamena (1985), puis directeur du centre de recherche scientifique (1986) avant d'accéder à des fonctions ministérielles. Sous la présidence d'Hissène Habré, c'est-à-dire avant 1991, il est successivement ministre de l'élevage, ministre de l'enseignement supérieur et de la recherche, puis du plan et de la coopération. Il est recteur de l'université de N'Djamena (1990-1991), puis à nouveau ministre de la coopération et du plan sous la présidence d'Idriss Déby, jusqu'en mai 1994. Il avait fondé en 1993 un nouveau parti, le PLD (Parti des Libertés et du Développement) et se retrouve progressivement dans l'opposition démocratique à Idriss Déby, surtout après la réélection de ce dernier en 1996. Il est candidat à la présidence de la république en 2001. Au moment de son enlèvement, le 3 février 2008, il était à la tête d'une coalition de 21 partis d'opposition démocratique au Président Déby, ce qui en faisait le chef de file naturel de cette opposition. C'était un des acteurs principaux des accords d'août 2007 entre le parti au pouvoir et les partis d'opposition démocratique, accord qui prévoyait une démocratisation progressive du Tchad.

Ibni a continué, malgré ses lourdes charges administratives et ministérielles, à s'intéresser à la promotion de l'enseignement à l'université de N'Djamena. L'un des handicaps majeurs de l'université de N'Djamena, qui tentait de se reconstituer après des années de guerre, était le faible niveau scientifique des enseignants en poste, dont beaucoup étaient à peine titulaires d'une maîtrise. Ibni est à l'initiative d'un accord inter-universitaire, passé avec l'université d'Orléans en 1991. D'abord limité aux mathématiques puis très rapidement étendu à d'autres disciplines, en association avec l'INSA de Lyon et l'université d'Avignon, la mission confiée aux établissements français était de porter progressivement la qualification des enseignants tchadiens au niveau du DEA puis, si possible, de la thèse. Cet accord était un des volants d'un plan pluriannuel d'aide à l'université de N'Djamena beaucoup plus important, lui aussi financé par le gouvernement français. Ibni a été beaucoup pour son bon fonctionnement, à la fois souple et efficace, ce qui lui a valu d'être parfois cité comme exemple par le Ministère des Affaires Etrangères. Au delà de l'objectif initial de formation de base, Ibni était conscient de la nécessité de permettre aux enseignants tchadiens de s'insérer dans le tissu universitaire international et de nouer des contacts durables avec leurs homologues européens et africains (en particulier au Cameroun voisin). Ces accords ont perduré, et permis à Ibni de venir régulièrement à Orléans, jusqu'en 2007.

Ibni a souhaité que ses fils soient à leur tour étudiants à Orléans. Mohamed Saleh Ibni Oumar a fait ses études de mathématiques jusqu'au DEA au département de mathématiques d'Orléans, Hicham à la faculté de droit et sciences économiques.

Il y a plusieurs témoignages de collègues dans les dossiers disponibles sur le site de la pétition. Il s'en dégage l'image d'un homme calme, généreux, ouvert, respecté. Son sens du dialogue et de la synthèse, son attachement à la démocratie, sont relevés par tous ceux qui l'ont connu. On ne peut mieux décrire ce qu'il est possible de ressentir à l'annonce de sa mort dans les conditions qui ont été les siennes, et au long silence de ces derniers mois, qu'en citant ce qu'a dit Yves Denizeau (ancien responsable orléanais de l'accord de coopération avec N'Djamena) évoquant Ibni lors de la réunion du 24 juin. *« Je ne peux passer l'ami sous silence. La chaleur et l'attention avec laquelle il nous a reçu à chacun de nos séjours, les visites qu'il nous rendait lors de ses séjours en France, la richesse des discussions qui occupaient chacune de nos rencontres, la justesse et la lucidité de ses vues, son souci constant d'œuvrer pour le bien de son pays, me rendent sa disparition insupportable.*

Je veux terminer en évoquant l'honnête homme. Bien sûr tout au long de ces années, entres collègues avignonnais, lyonnais et orléanais, nous nous sommes souvent demandés s'il était raisonnable de faire autant d'efforts pour une université qui réunissait tant de difficultés. Eh bien c'est l'existence de personnalités de l'envergure d'Ibni Oumar qui nous a convaincus de continuer le travail. Cet homme nous a fait confiance en nous proposant de l'aider à transformer son université. Il nous a fait confiance en envoyant ses fils faire leurs études dans notre université. Dans le contexte de son pays, il a fait siens nos idéaux : éducation, droits de l'homme, strict respect démocratique dans son action politique. Il a su rassembler autour de lui des mouvements œuvrant dans ce sens. Quel courage dans un pays soumis *aux rivalités armées de multiples clans. Nous nous devons maintenant de tout faire pour l'aider. L'action de notre pays dans le monde est aussi liée à l'émergence de tels hommes. Et c'est un homme de cette qualité qui a été enlevé, voire brutalisé, par on ne sait quelle soldatesque, qui a disparu du jour au lendemain sans que nul n'en ait la moindre nouvelle ! »*

Quelques références quant à la situation politique

Comme nous l'avons déploré, il n'existe pas d'article de fond qui traite de la disparition d'Ibni auquel renvoyer le lecteur. On peut consulter wikipedia au nom d'Ibni Oumar Mahamat Saleh (en anglais) pour connaître le déroulement des faits. Nous avons essayé de mettre à disposition sur le site des articles et des dépêches de presse variés, qui permettent à chacun de se forger une opinion. On y trouvera décrit comment l'arrestation d'Ibni s'est faite au lendemain du jour où l'armée de Déby a repoussé une attaque de rebelles qui voulaient s'emparer de N'Djamena. À défaut de conclure, la commission d'enquête a recueilli de nombreux témoignages. Nous espérons que son rapport sera disponible sur internet très bientôt. Voici l'adresse de quelques vidéos liées à la disparition d'Ibni.

– Présentation de la situation début février par Gérard Fuchs, fondation Jean Jaurès :
`http://www.dailymotion.com/video/x4dgwy_situation-au-tchad_politics`

– Une vidéo de Hicham, fils aîné d'Ibni, qui s'adresse à Idriss Déby, sur France24, 7 mars 2008 :
`http://www.dailymotion.com/video/x4mnep_tchaddeby-ou-est-mon-pere_politics`

– Une vidéo sur France24, 18 mars 2008 :
`http://www.dailymotion.com/video/x4si9s_tchad-ou-est-lopposant-saleh`

et les cahiers de route de Virginie Herz :
`http://www.france24.com/fr/20080315-carnet-route-tchad-reportages`

– Une vidéo sur France24, 4 septembre 2008 :
`http ://www.dailymotion.com/video/x6nu5f_tchad-la-mort-de-lopposant-ibni -sal_politics`

Conclusion

Aujourd'hui nous connaissons une partie de la vérité. Fortes du soutien des 3050 signatures à la pétition, dont une moitié d'étrangers, du mandat des sociétés savantes françaises et de l'appui des sociétés savantes étrangères, nous affirmons dans notre dernier message aux signataires, daté du 5 septembre :

« Nous voulons connaître la vérité pleine et entière sur les circonstances de la mort de notre collègue et ami, et que justice soit faite. Nous ne nous contenterons pas de bribes de vérité.

Par ailleurs nous réfléchissons à des initiatives à proposer aux sociétés savantes de mathématiques pour honorer la mémoire d'Ibni, continuer à demander la vérité sur les circonstances de sa mort pendant le temps qui sera nécessaire, et prolonger l'action qu'il a menée pour promouvoir les mathématiques en Afrique, en particulier au travers d'échanges inter-universitaires.

Restons unis pour demander toute la vérité et pour que la mémoire d'Ibni reste vivante. »

Mémoire 108

Infinitesimal isospectral deformations of the Grassmannian of 3-planes in R^6

J. Gasqui, H. Goldschmidt

We study the real Grassmannian $G^{\mathbb{R}}_{n,n}$ of n-planes in $\mathbb{R}^{2n}$, with $n \geq 3$, and its reduced space. The latter is the irreducible symmetric space $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{n,n}$, which is the quotient of the space $G^{\mathbb{R}}_{n,n}$ under the action of its isometry which sends a n-plane into its orthogonal complement. One of the main results of this monograph asserts that the irreducible symmetric space $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{3,3}$ possesses non-trivial infinitesimal isospectral deformations; it provides us with the first example of an irreducible reduced symmetric space which admits such deformations. We also give a criterion for the exactness of a form of degree one on $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{n,n}$ in terms of a Radon transform.

Ce mémoire a pour cadre la grassmannienne $G^{\mathbb{R}}_{n,n}$ des n-plans de $\mathbb{R}^{2n}$, avec $n \geq 3$, et son espace réduit $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{n,n}$, qui est l'espace symétrique irréductible, quotient de $G^{\mathbb{R}}_{n,n}$ par l'involution envoyant un n-plan sur son orthogonal. Un de nos principaux résultats est la construction de déformations infinitésimales isospectrales non triviales sur $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{3,3}$, obtenant ainsi le premier exemple d'espace symétrique irréductible réduit et non infinitésimalement rigide. Nous donnons aussi un critère d'exactitude pour les formes différentielles de degré 1 sur $\bar{G}^{\mathbb{R}}_{n,n}$, mettant en jeu la nullité d'une transformée de Radon.

prix public* : 27 € - prix membre* : 19 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

Décryptage sur les critères d'identification des chercheurs et enseignants-chercheurs « publiants » en mathématiques à l'AERES

Pascal Auscher, Michel Pierre

L'AERES[1] a indiqué sur son site[2] ce qu'elle entend par enseignant-chercheur ou chercheur « publiant ». Voici quelques informations pour mieux comprendre à quoi sert le comptage des publiants, comment il est fait en mathématiques et pourquoi il est fait ainsi. On terminera par un point sur la bibliométrie.

Le comptage des publiants : qu'est-ce que c'est et à quoi ça sert ?

Le nombre de publiants d'un laboratoire est une « mesure » de son potentiel de recherche à travers un critère minimal d'activité en recherche de ses membres. Quelques points sont essentiels à comprendre :

(1) l'information obtenue n'est pas nominative,

(2) il ne s'agit pas d'une évaluation individuelle des chercheurs et enseignants-chercheurs,

(3) l'indicateur numérique global obtenu vient en complément du rapport d'évaluation du laboratoire effectué par l'AERES suite à une visite par des « pairs ».

Le comptage est effectué à l'occasion de l'évaluation quadriennale sur la base des « fiches individuelles » remplies par chaque membre permanent.

Les directeurs de laboratoires évalués se voient communiquer le nombre de publiants de leur laboratoire. Ce nombre sera d'ailleurs disponible sur le site web de l'AERES, qui mettra cette information à la disposition des établissements[3]. Ces derniers pourront s'en servir dans le calcul des dotations, puisque le budget revenant à chaque laboratoire sera désormais attribué localement. Le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche qui utilisait le comptage effectué auparavant à la MSTP (Mission Scientifique Technique et Pédagogique) pour les dotations financières, s'en sert aussi pour établir une cartographie de la recherche au niveau national.

[1] Agence d'évaluation de la recherche et de l'enseignement supérieur.

[2] `http://www.aeres-evaluation.fr/IMG/pdf/Criteres_Identification_Publiants.pdf`

[3] Le caractère public de cette information intéressera les médias. Le magazine l'Express, dans son numéro du 12 juin 2008, a publié le travail antérieur réalisé par la MSTP pour les laboratoires classés « excellents », sans préciser la règle de comptage des publiants.

Les règles de comptage et son origine

Sachant que l'AERES respecte la spécificité des champs disciplinaires, le critère se décline suivant les disciplines.

La règle pour un mathématicien est la suivante : est considéré comme publiant un enseignant-chercheur ou un chercheur ayant deux publications dans la période de référence (donc les quatre ans du contrat précédent). Les publications comptées sont celles dans les revues internationales à comité de lecture apparaissant dans les bases de données de référence en mathématiques.

Cette règle n'innove pas par rapport aux règles de la MSTP. Elle est en adéquation avec les règles de l'IMU (International Mathematical Union) pour établir le World Directory of Mathematicians pour qui il faut franchir le seuil de deux publications référencées dans les bases de données des mathématiques pour être considéré comme mathématicien. Ce seuil reconnu internationalement pour les mathématiques peut paraître peu élevé pour certains sous-domaines des mathématiques ; il est certainement bien adapté pour d'autres. Il a donc l'avantage d'un chiffre unique de « minimalité » pour l'ensemble de la communauté qui correspond bien à l'objectif du comptage des publiants.

Le comptage n'est pas complètement automatique. Au cas par cas, il y a un examen supplémentaire des « fiches individuelles », pour ne pas considérer comme non publiant l'auteur d'un travail profond qui aurait mené à peu de publications en nombre. De même, un examen du dossier s'impose pour un collègue aux interfaces qui publierait dans des revues d'une autre communauté scientifique. Enfin, certaines compensations sont possibles (activité administrative lourde et même encadrement doctoral important pour tenir compte de la tradition dans certains sous-domaines de ne pas publier avec un doctorant).

Quelques explications sur le choix retenu

Nous avons été interpellés par des collègues qui s'étonnent de voir qu'en mathématiques le seuil est identique pour les chercheurs et les enseignants-chercheurs. Les autres disciplines adoptent un seuil supérieur (1,5 à 2 fois plus élevé) pour les chercheurs.

Quelle est notre philosophie sur la question ? Favorise t-on (ou rend-on moins crédible aux yeux des autres disciplines et des décideurs) la discipline en laissant un seuil identique pour les chercheurs en mathématiques ?

Notre philosophie tout d'abord. Dans le calcul du nombre total de publiants d'un laboratoire, un collègue compte au plus pour une unité, qu'il soit enseignant-chercheur ou chercheur : c'est la règle commune adoptée à l'AERES. Nous pensons qu'en mathématiques (du fait de certaines traditions rappelées ci-dessus) si l'exigence était, par exemple, double pour les chercheurs, ceux-ci devraient aussi compter double dans le potentiel total de recherche du laboratoire, mais la règle commune ne serait plus respectée. Notre logique est donc d'appliquer le même calcul pour les deux populations.

Quelle est maintenant la réalité des chiffres ? Un rappel s'impose. Le poids des organismes en termes de chercheurs dans les UMR de mathématiques est faible : la proportion est (globalement) d'environ 15%, bien inférieure à beaucoup d'autres disciplines. Une expérience en vraie grandeur sur la vague C nous indique que passer à un seuil de 4 publications pour les chercheurs (la plupart CNRS, plus quelques INRIA) aurait réduit le nombre de chercheurs publiants de 7,5% environ (sur un total de 145, cela concerne une dizaine de chercheurs qui ont donc 2 ou 3 publications sur la période). Cela représente 1,3% tout au plus du nombre total d'enseignants-chercheurs et chercheurs publiants de la vague C. Pour un laboratoire donné de cette vague, cela représente effectivement une très faible variation (parfois nulle) du nombre de publiants comparativement à sa taille. Il est fortement probable que ces chiffres soient significatifs de l'ensemble des 4 vagues. La discipline n'est donc pas avantagée par ce choix.

Et la bibliométrie dans tout ça ?

Comme le critère de publiants est quantitatif, on peut effectivement se demander si la bibliométrie (mesure de l'activité par des indicateurs quantitatifs) peut intervenir ; la question se pose plus généralement dans le processus d'évaluation. Où en est-on ? La façon de conduire l'évaluation, d'utiliser plus ou moins fortement l'analyse quantitative (bibliométrie) va induire une adaptation de la communauté. Il faut donc au préalable définir le pour quoi faire, le comment faire et l'afficher. Pour l'instant, il n'est pas prouvé que cette utilisation soit pertinente pour évaluer les laboratoires (et a fortiori les personnes) : les distributions ont des fluctuations qui interdisent une application mécanique des chiffres pour de petits échantillons (peu ou pas de contrôle sur les marges d'erreur). Ceci sans même parler des différences dans les bases de données plus ou moins complètes, et le fait, faut-il le rappeler, que leurs constructions répondent à des objectifs différents comme le dit l'inventeur lui-même du Web of Science. Les indicateurs bibliométriques sont utilisables tout au plus pour avoir une idée de l'activité (ne publie plus depuis 10 ans, est très peu cité,...), et certains indices ne sont pas pertinents (facteur H[4],...)[5]. Il faut donc être très prudent sur la signification de chiffres fournis instantanément par les bases de données et ne pas croire qu'ils détiennent la vérité. L'AERES continue à réfléchir sur ces questions.

[4] En numérotant 1, 2, 3,... les publications rangées en ordre décroissant de nombre de citations, on obtient deux lignes de chiffres, l'une croissante et l'autre décroissante, et le facteur H est le dernier numéro encore supérieur au nombre de citations. Un facteur H de 10 veut dire dix publications citées au moins dix fois, mais la onzième est citée au plus dix fois.

[5] Ceci est confirmé par le rapport Citation Statistics, de Robert Adler, John Ewing, Peter Taylor, http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Report/CitationStatistics.pdf

Le Comité International des Jeux Mathématiques et la diffusion de la culture mathématique

Marie-José Pestel[1]

Avant le CIJM...

Dans les années 1980, l'image des mathématiques dans le grand public est des plus mauvaise.

Dans l'enseignement, l'introduction, mal préparée, mal comprise, des mathématiques dites modernes a laissé des traces profondes et a creusé un fossé entre les générations. Le rôle de sélection que l'on a, en même temps, fait jouer aux mathématiques n'a pas contribué, bien au contraire, à lever les griefs. Les chercheurs semblent s'être alors réfugiés dans leur laboratoire, communiquant peu avec le grand public et laissant place à toutes les idées reçues et fausses : « le monde des mathématiques est un monde à part, réservé à quelques élus » ; « la vérité mathématique est une et immuable, écrite une fois pour toute » ; « en mathématiques tout a été dit »...

Sortir de cette impasse, s'est affirmé comme une nécessité absolue pour les générations de jeunes qui allaient arriver dans le monde du travail. Il fallait remédier au déficit des vocations scientifiques. Avec l'aide de quelques associations, en s'appuyant sur des initiatives publiques (IREM) ou privées (*Tangente*, ACL), des enseignants ont voulu tout mettre en œuvre pour changer ce déplorable état de fait, estimant que notre discipline valait mieux que cela et que le XXI^e^ siècle ne pourrait pas faire l'impasse d'un enseignement vivant et dynamique des mathématiques.

Naissance du CIJM

Ainsi dès 1987, parfois même avant, sont nés des rallyes, tournois, compétitions et championnats de mathématiques aux objectifs communs :

– montrer une image vivante et ludique des mathématiques,

– permettre à tous ou tout au moins au plus grand nombre de connaître le plaisir de chercher et de trouver...

Pour fédérer toutes ces initiatives, pour permettre d'échanger les expériences, parce que « ensemble, on est plus fort pour faire aimer les mathématiques », le CIJM est créé en 1993.

Il est sans doute utile de rappeler les objectifs du CIJM tels qu'ils sont définis dans ses statuts :

– promouvoir l'éducation et la formation intellectuelle par l'organisation d'activités ludiques d'inspiration mathématique ;

– développer et organiser sous toutes formes des compétitions mathématiques et toutes activités connexes et annexes ;

[1] Marie-José Pestel, Présidente du CIJM (http://www.cijm.org/), Prix d'Alembert 2008.

– fédérer les associations organisant des compétitions mathématiques dans le monde ;

– coordonner et mettre en place des moyens communs aidant à l'organisation de championnats et rallyes à quelque échelon que ce soit : local, régional, national ou international.

Les actions du CIJM

Dès sa création, le CIJM, pour favoriser le développement des compétitions régionales, décide de publier des annales corrigées des épreuves. *Panoramath 96*, *Panoramath 2*, *Panoramath 3* et *Panoramath 4* constituent un panorama de ce qui peut être proposé dans les rallyes, championnats et tournois mathématiques. Cette collection constitue une mine d'idées pour enrichir l'enseignement des mathématiques et pour élaborer des jeux et manipulations à présenter en animation grand public.

Ainsi c'est tout naturellement que le CIJM répondant à l'appel à projet de La Ville de Paris pour fêter les mathématiques en 2000, Année Mondiale des mathématiques, propose de monter le Salon de la culture et des jeux mathématiques. Le succès de cette manifestation est tel qu'il semble hors de question que cela reste une expérience unique. Depuis, tous les ans, fin mai début juin, Paris connaît quatre jours assez exceptionnels d'intenses activités culturelles, ludiques et mathématiques. La dynamique née de ces salons, l'expérience acquise en terme de diffusion de culture scientifique, la richesse et la diversité des activités proposées, ont fait de cette manifestation l'événement phare du CIJM. C'est l'occasion d'éditer jeux, expositions et brochures :

– deux jeux originaux : les carrés d'Euler (un double sudoku édité à l'occasion du tricentenaire de la naissance d'Euler) et les triangles d'or et d'argent (un jeu de pavage inspiré des pavages de Penrose) ;

– des expositions interactives : *Raconte moi les fractales* en juin 2003, *Raconte moi le nombre d'or* en juin 2004, *Raconte moi les graphes* en juin 2005, une exposition sur *Images et Mathématiques* en mai 2006, deux expositions, en mai 2007, *2000 ans d'énigmes mathématiques* et *Découvertes Mathématiques d'aujourd'hui* en collaboration avec la SMF et en 2008, *Mathématiques et Nature* ;

– des brochures : *Maths Europe Express* en 2004, *Maths Physique Express* en 2005, *Maths Images Express* en mai 2006, *Maths Enigmes Express* en mai 2007 et *Maths Nature Express* en 2008.

Les expositions sont louées aux établissements scolaires, aux centres culturels, aux bibliothèques universitaires et présentées dans les manifestations auxquelles le CIJM participe. Les brochures sont distribuées gratuitement à toutes les institutions qui en font la demande. Toutes contribuent à diffuser auprès du grand public une image vivante des mathématiques et portent témoignage de l'ancrage de notre discipline dans l'histoire de la pensée et de son importance dans le monde d'aujourd'hui.

Le rayonnement du CIJM

Ainsi le CIJM s'est fait connaître dans le monde de la recherche. Il participe depuis 6 ans au village des Sciences et partout en France à des fêtes de la Science. Il a proposé pour la Ville Européenne des Sciences qui va se tenir à Paris en novembre un grand projet associatif : la création d'une Maison de la culture mathématique.

Le CIJM a pris toute sa place dans le monde des jeux. Il tient un grand stand de jeux mathématiques depuis 6 ans au Festival International des Jeux à Cannes. Un public fidèle nous y attend et aujourd'hui le CIJM, membre de la Confédération des Loisirs et de l'Esprit, apporte la preuve que le jeu et la culture mathématique ont leur place dans des centres de vacances. Il participe à des fêtes du jeu en France ou à l'étranger.

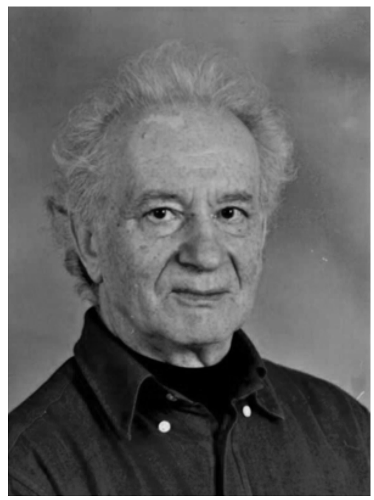
Le CIJM a su fidéliser le monde enseignant qui voit dans ses activités une source d'enrichissement pédagogique. Il participe activement aux Journées Nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Publique. Il intervient dans des colloques internationaux et des journées de formation.

CARNET

Vazgain Avanissian

(1927 – 2007)

Dominique Foata, Raphaële Supper



Archives privées de la famille Avanissian

Vazgain Avanissian nous a quittés le 16 novembre 2007. Ses obsèques ont eu lieu dans l'intimité de la famille. Son état physique s'étant brutalement dégradé, il avait été admis à l'hôpital de Hautepierre à Strasbourg.

Vazgain Avanissian est né le 21 mars 1927 à Kazvin, Iran, une ville située au nord-ouest de Téhéran. Il est venu en France très tôt pour terminer sa scolarité, puis entreprendre des études de mathématiques à la Sorbonne, couronnées d'un doctorat d'État en 1960. Sa thèse, préparée sous la direction de Pierre Lelong, porte sur les fonctions plurisous-harmoniques et doublement sous-harmoniques [1].

Il fut nommé assistant associé (1957-59), puis chef de travaux associé (1959-61) à la Faculté des Sciences de Paris, des fonctions qui lui ont permis de poursuivre ses travaux de recherche. Notons qu'à cette époque il n'était pas facile pour un étranger d'avoir un emploi rémunéré dans l'Enseignement Supérieur. Vazgain Avanissian, arménien d'Iran, devait se contenter de postes contractuels pour un ou deux ans, que l'on devait créer spécialement pour lui. Ses premiers travaux sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques de plusieurs variables avaient très tôt retenu l'attention et fait l'objet de publications immédiates dans les Compte-Rendus de l'Académie des Sciences en 1957 et 1958.

Le début des années soixante voit l'ouverture vers l'Occident du régime du Shah d'Iran. On modernise le pays, on essaie de faire revenir tous les citoyens qui se sont distingués à l'étranger. On offre à Vazgain Avanissian un poste prestigieux de professeur à l'université Nationale d'Iran. Il l'accepte et part pour Téhéran durant l'été 1962. Il y restera deux ans. Pour ses nouveaux étudiants iraniens, il rédige, dans leur langue, un livre d'Initiation à l'Analyse Moderne, ouvrage qui est encore utilisé de nos jours. Là-bas, il découvre une autre manière d'être professeur d'université.

Les obligations protocolaires y sont nombreuses. Il déteste ça. Ayant vécu à Paris toutes ses années de jeunesse et de formation scientifique, sa nostalgie de la France est trop forte. Il prend alors contact avec ses maîtres, Pierre Lelong, Henri Cartan et leur demande comment revenir.

À cette époque, la communauté mathématique était beaucoup moins nombreuse qu'aujourd'hui (sans doute dix fois moins nombreuse). Tout le monde se connaissait. On pouvait recruter une personne de talent, faire approuver sa nomination par le Conseil de Faculté et demander à l'impétrant de passer ensuite sous les fourches caudines du Comité Consultatif des Universités (l'ancêtre du Conseil National des Universités). Il n'y avait pas cette bureaucratisation, sans doute nécessaire, que nous connaissons aujourd'hui.

En 1964, le département de mathématiques de la Faculté des Sciences de Strasbourg est avide de recrutement. Toute une génération de mathématiciens avait quitté Strasbourg, Thom, Koszul, Berger, Malgrange. Une autre était arrivée, Bernard, Cartier, Demazure, Gabriel, Meyer. Le département devait s'ouvrir vers les domaines de l'analyse. Jean Frenkel, qui le dirigeait à l'époque, put obtenir pour Vazgain Avanissian un poste de maître de conférences associé (on dirait professeur de seconde classe associé de nos jours) pour la rentrée d'octobre 1964. Il conservera ce poste d'associé jusqu'en octobre 1969, date à laquelle il sera nommé professeur titulaire de la chaire d'Analyse Supérieure. Entre temps, en 1967, il avait obtenu la nationalité française.

À partir de cette date, il est solidement établi à Strasbourg et déploie pleinement ses talents de chercheur et de professeur. Il collabore scientifiquement avec plusieurs collègues, Fernique, Mignotte. Son école d'analyse voit l'éclosion, notamment, de Roger Gay, Abou Traore, Raphaële Supper. Ses contributions scientifiques s'orientent vers plusieurs directions : fonctions pluri-sous-harmoniques et fonctions holomorphes, questions de croissance, problèmes arithmétiques, fonctions spéciales. De ses nombreux travaux, nous voudrions mentionner tout particulièrement les suivants.

Les techniques de représentation intégrale dues à Pierre Lelong lui permettent d'estimer la croissance des fonctions entières et pluri-sous-harmoniques de plusieurs variables complexes (cf. [2] et [3]).

Son article conjoint avec Roger Gay [4] est l'acte de naissance de la transformation G, qui a trouvé de nombreuses applications, en particulier dans les travaux de Kunio Yoshino sur les fonctions holomorphes et les hyperfonctions.

Dans son article sur les fonctionnelles analytiques [5] il donne une nouvelle application de la transformation G, qui apporte une vision originale sur les familles de polynômes orthogonaux. Il avait en projet un ouvrage exploitant cette nouvelle approche. Malheureusement, il n'a pu donner suite à ce projet.

Sa monographie sur la cellule d'harmonocité [6] fort appréciée des spécialistes, ouvre de nouvelles perspectives en analyse harmonique et en théorie des équations aux dérivées partielles.

Chacun savait qu'il était aussi un pédagogue hors pair. Il excellait dans les cours en amphithéâtre. On le voyait arriver plusieurs minutes avant l'heure, se concentrer tout en faisant les cent pas dans le hall, puis entrer dans l'arène. Il savait communiquer son amour des mathématiques à son auditoire. Des générations de professeurs des lycées et collèges gardent un souvenir très vif de ses cours superbement structurés, émaillés d'exemples frappants, prenant en compte les difficultés naturelles aux débutants.

Il est dommage que son magnifique livre sur l'analyse fonctionnelle [7] ait été publié par une maison d'édition qui a disparu. Le compte-rendu dans *Mathematical Reviews* insiste sur la qualité et la quantité de matériel inclus dans le livre, en particulier la profusion d'exemples illustrant définitions et résultats.

Il fut également un directeur très apprécié de l'UER (puis de l'UFR) de mathématiques et d'informatique, en 1978-79 et en 1988-89. Il faisait et donnait confiance au personnel administratif qui l'entourait. Pourtant, il avait démissionné avec fracas lors de son premier mandat, en dénonçant le travail parasite des commissions qui rendait caduques les décisions du conseil d'UER. Il restait fondamentalement attaché à la collégialité du corps enseignant. Il devint professeur émérite en 1995.

En 1976, il s'était remis à peindre. Lorsqu'il était étudiant à Paris, il avait fréquenté l'atelier d'André Lhote, mais comme l'exprime son site web[1] c'est dès l'adolescence qu'il avait été initié à cet art. À partir de 1977, ses expositions, sous le nom d'Azik, se succèdent : à Strasbourg, chez Landwerlin, à l'Ancienne Douane, à l'Hôtel de Ville, à Courbevoie au centre culturel. Il participe également à des expositions à l'étranger : Portugal, Corée, Japon, Espagne, Danemark, Italie, États-Unis. En fin d'année 2007, on a pu admirer certaines de ses toiles au Grand Palais à Paris et à la Biennale de Florence.

Toute sa vie, il a vécu en parfaite symbiose avec son épouse Arax. Ses deux filles, Sevan et Rouzanne, font de belles carrières, la première comme rédactrice des débats au Parlement, la seconde comme journaliste à FR3.

Nous conservons de lui l'image d'un artiste généreux qui a excellé dans deux disciplines, les mathématiques et la peinture.

Références

[1] *Fonctions pluri-sous-harmoniques et fonctions doublement sous-harmoniques*, Ann. Sci. école Norm. Sup. 78 (1961) 101–161.

[2] *Fonctions entières de p variables et fonctions pluri-sous-harmoniques à croissance très lente*, J. Analyse Math. 9 (1961/1962) 347–364.

[3] *Quelques applications de la méthode des boules d'exclusion*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 8 (1973) 306–320.

[4] (Avec Roger Gay) *Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975) 341–384.

[5] *Quelques applications des fonctionnelles analytiques*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 15 (1990) 225–245).

[6] *Cellule d'harmonicité et prolongement analytique complexe, Travaux en Cours*, Hermann, Paris, 1985.

[7] *Initiation à l'analyse fonctionnelle*, Presses Universitaires de France, Paris, 1996, 546 pages.

[1] `http://membres.lycos.fr/azik/index.htm`

TRIBUNE LIBRE

Réflexions sur le programme de mathématiques des CPGE

Pierre Colmez

J'ai repris le cours de tronc commun à l'école Polytechnique l'année dernière, et j'ai été assez surpris par le contenu du programme des classes préparatoires. Il est clair qu'au fil des années, le niveau en mathématiques à la sortie du lycée a baissé dans des proportions considérables[1], mais j'ai quand même du mal à comprendre comment, en réunissant des enseignants compétents et disposés à consacrer beaucoup d'énergie à leur enseignement, et des élèves motivés par la préparation de concours qui vont conditionner leur avenir, on aboutisse à un programme aussi peu stimulant[2].

Ce programme donne assez nettement l'impression d'avoir perdu en cours de route l'objectif principal des classes préparatoires qui est de préparer aux études dans les Grandes écoles d'ingénieur[3] et pas de réduire[4] le contenu dans le but que les élèves soient à même d'avoir fait tous les exercices possibles et imaginables sur les notions du programme en vue du concours d'entrée. Le décalage est assez grand

---

[1] En raison de la diminution constante de l'horaire de mathématiques dans le secondaire pour des raisons budgétaires (si mes souvenirs sont bons, la France a été confrontée au début des années 1990 à une pénurie de professeurs de mathématiques au point qu'il avait été envisagé de faire appel à des ingénieurs payés plus cher pour assurer les cours ; la solution finalement retenue a été nettement moins coûteuse...) dissimulées derrière des prétextes de « santé publique » (comme la surcharge de travail des élèves...), et des motivations idéologiques de certains de nos ministres de l'éducation.

[2] Je parle du programme officiel. La réalité est moins sombre car les enseignants prennent souvent sur eux de boucher les trous les plus criants du programme. Je ne pense pas que ce soit une situation très saine. Des discussions avec des polytechniciens fraîchement émoulus m'ont révélé que certains avaient vu la théorie de la mesure, d'autres la théorie des espaces de Banach (incluant Banach-Steinhaus, le théorème de l'image ouverte...), que des PC avaient vu le déterminant en passant par S_n et la signature... Je ne peux que me féliciter de ces dépassements de programme, mais leur diversité fait qu'il est difficile de savoir ce que les gens que j'ai en face de moi savent réellement (d'autant plus qu'ils savent aussi qu'ils ne sont pas censés savoir, juridisme des concours oblige...).

[3] Il est assez symptomatique que les « objectifs de formation » du programme ne mentionne pas une seule fois ce rôle.

[4] Ce processus de fractalisation a atteint un niveau assez sidérant : je comptais m'appuyer sur la forme normale d'une rotation dans $\mathbf{R}^n$ pour expliquer ce que signifie la décomposition d'une représentation linéaire d'un groupe fini en somme de représentations irréductibles ; vérification faite, la notion est *explicitement* hors programme, ce qui en dit long sur la manière dont le programme est rédigé (ce n'est pas que je pense qu'il s'agisse d'une notion tellement fondamentale que sa disparition constitue un scandale, mais le fait que les rédacteurs du programme aient pris le soin de rajouter un alinéa pour l'exclure officiellement est proprement incompréhensible).

avec les « objectifs généraux de la formation » qui donneraient presque[5] à penser que l'on va avoir droit à un programme cohérent[6], un peu ambitieux et menant quelque part.

Le programme actuel

Aspect culturel

Le problème le plus aigu, à mon sens, du programme actuel est son étroitesse. Si on compare le programme officiel des deux ans de la filière MP (je n'ai pas fait l'exercice pour la filière PC) à celui des deux premières années de l'université de Cambridge[7], on s'aperçoit que ce programme correspond à environ 150 heures de cours magistraux à Cambridge[8]. Même en tenant compte de la différence de niveau à l'entrée (qui n'est pas si importante que cela), cela laisse un temps non négligeable en CPGE[9], où l'on dispose au total de 700 heures environ, pour faire autre chose que ce qui est au programme officiel (et donc soit du bachotage stérile, soit des dépassements de programme formateurs, mais laissés à l'appréciation du professeur).

Les élèves des CPGE ne voient, à part peut-être[10] $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pas une seule construction[11] d'objet mathématique en 2 ans, et le nombre de concepts et de vrais théorèmes[12] qu'ils rencontrent est incroyablement limité. Il me semble pour

[5] À part le paragraphe « Interprétation et délimitation du programme » qui fait mention de « l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales » dont malheureusement le mot le plus important semble a posteriori être « limité ».

[6] On y lit en particulier : « Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité... » On aimerait que la suite du programme fasse référence, ne serait-ce qu'une fois, à ce contenu culturel. On aimerait plus généralement que le chapitre « Objectifs de formation » ne se contente pas d'énoncer une série de principes, mais repose sur des exemples concrets, sinon on a l'impression d'avoir affaire à un exercice de pure rhétorique. Que signifie en pratique : « Il convient de centrer l'enseignement autour de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. » ? Le reste du programme fait tout pour donner l'impression inverse...

[7] Celui-ci est disponible à `http://www.maths.cam.ac.uk/undergrad/documentation/schedules/currentschedules/master.pdf`.

[8] La comparaison a un certain intérêt car les élèves de Cambridge et Oxford correspondent à peu près (en termes d'effectifs et de sélection) aux classes étoilées des CPGE. (Pour faciliter la lecture du programme de Cambridge, IA=première année, IB=seconde année, les nombres dans la marge correspondent au nombre d'heures consacrées à chaque sujet ; en première année, tous les cours sont obligatoires, en seconde année, c'est à la carte, mais les étudiants suivent en gros 4 cours en parallèle. L'année est divisée en 3 trimestres, les deux premiers comportant 8 semaines de cours, le dernier 4 semaines de cours et des examens.)

[9] Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que « CPGE » signifie « classe préparatoire aux Grandes écoles » et pas « classe préparatoire aux concours d'entrée aux Grandes écoles ».

[10] La manière dont $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est présenté peut laisser la place à des interprétations.

[11] La génération précédente était exposée aux relations d'équivalence et aux passages au quotient dès le plus jeune âge, ce qui n'était probablement pas optimal, mais il est étrange que l'on en soit venu à considérer que ces notions sont trop abstraites pour être présentées en CPGE. Le passage au quotient par une relation d'équivalence est une opération mathématique fondamentale, et je ne vois pas de moment plus propice à son introduction que la période de la prépa.

[12] Les mathématiques ne sont pas un jeu purement formel, et il y a lieu de faire une distinction entre un résultat qui se contente d'exprimer une propriété d'une notion que l'on vient de définir (par exemple, si on définit un compact en termes de recouvrements ouverts, démontrer qu'un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet une valeur d'adhérence est un

le moins curieux que l'on puisse trouver normal que des élèves soumis au régime des CPGE ne sachent pas ce qu'est la dénombrabilité ou que les groupes sont faits pour agir sur toutes sortes de choses, et n'aient que des notions très approximatives de topologie générale, sans parler des disparitions, en filière PC, de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, du groupe symétrique, des suites de Cauchy, de la convergence uniforme...(liste non exhaustive, hélas).

Les théorèmes que j'ai repérés dans le programme de première année sont :

– le théorème de Bolzano-Weierstrass,
– le théorème des valeurs intermédiaires (qui a le mauvais goût d'être visuellement évident),
– le théorème de Rolle,
– le théorème fondamental de l'arithmétique (mais l'existence d'une infinité de nombres premiers semble être passée à la trappe),
– le théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration),
– le fait que la signature soit un morphisme de groupes,
– $\det AB = \det A \det B$,
– $\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$.
– l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En seconde année :

– le théorème de Bézout et le lemme de Gauss (quid de celui des restes chinois ?),
– la diagonalisabilité d'un endomorphisme annulé par un polynôme scindé à racines simples,
– le théorème de Cayley-Hamilton,
– la diagonalisation d'une matrice symétrique réelle en base orthonormée,
– la formule de Taylor avec reste intégral,
– le théorème du relèvement (à moitié),
– le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes,
– l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie,
– le fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue,
– la densité des polynômes ou des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur un intervalle (enfin, le résultat y est, mais pas sous cette forme...),
– l'approximation uniforme de fonctions continues par des fonctions en escaliers,
– le théorème de convergence dominée (sous une forme un peu absurde et sans démonstration),
– le théorème de Dirichlet sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier et la formule de Parseval,
– le théorème de Cauchy-Lipschitz.

---

résultat assez difficile – en tout cas, je ne me vois pas improviser une démonstration au tableau –, mais ne sort pas du cadre de la compacité ; de même, démontrer que les bases ont toutes le même cardinal dans un espace de dimension finie est un résultat difficile (idem), mais ne sert en gros qu'à définir la dimension d'un espace), et un vrai théorème qui répond à une question naturelle et dont la solution est un peu surprenante.

La liste ci-dessus me semble un peu triste pour deux ans d'efforts (d'autant que les énoncés la composant n'ont pas tous la même saveur). C'est d'autant plus dommageable qu'un vrai théorème permet de mettre en perspective les notions introduites. Par exemple, j'ai eu droit en sup.[13] aux espaces de Banach (définition, théorème des fermés emboîtés, théorème du point fixe). Je pense que je n'en aurais plus aucun souvenir si l'introduction de cette notion n'avait débouché sur la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz qui fut un émerveillement : cette manière inattendue de répondre à une question naturelle donnait un sens à tous ces énoncés semi-intuitifs et, cerise sur le gâteau, l'application de la preuve à l'équation différentielle $y' = y$ débouchait sur le développement de e^x en série entière ! Par contraste, le cours de spé que j'ai suivi était très orienté vers la préparation du concours, avec des exercices en pagaille, des problèmes de concours... Je garde un souvenir excellent de la prestation du professeur, mais force m'est de constater que je ne me souviens plus de rien de vraiment précis de son contenu[14] ni de celui des problèmes[15] à l'exception de l'escalier du diable et de la courbe de Peano qui avaient vivement frappé mon imagination.

L'appauvrissement des concepts

Un autre problème sérieux est la dénaturation de certains concepts, ce qui a pour effet de créer des obstacles psychologiques pour l'avenir, et de les rendre inutilisables une fois le concours passé. Je pense en particulier aux points suivants :

– La caractérisation de la compacité (dans un espace métrique[16]) par les suites est d'un maniement plus facile que celle par les recouvrements ouverts tant qu'il s'agit de vérifier la compacité d'un ensemble, mais quand on veut utiliser la compacité pour démontrer de vrais théorèmes, c'est presque toujours la caractérisation par les ouverts que l'on utilise (sans parler du non-sens absolu que constitue la définition d'un compact comme étant un fermé borné en filière PC).

– La connexité est certes moins intuitivement évidente que la connexité par arcs, mais c'est quand même la connexité qui est utilisée pour démontrer de vrais théorèmes, la connexité par arcs n'étant souvent qu'un moyen de prouver la connexité d'un espace.

– Le théorème de convergence dominée énoncé en prépa est encombré d'hypothèses inutiles le privant de sa souplesse incroyable (il faut avouer que c'est quand même un progrès par rapport à ce qui était enseigné il y a 30 ans, où on

---

[13] Le cours en question avait sûrement pris des libertés assez grandes avec le programme de l'époque mais, avec le recul, je le trouve d'une cohérence et d'une ampleur remarquable, assez similaire dans l'esprit avec le programme de l'université de Cambridge.

[14] Pour être honnête, il faut admettre que l'essentiel des mathématiques au programme ayant été vu en sup., il ne restait pas grand-chose de croustillant à nous proposer. Dans mon souvenir, la majeure partie de ce qui n'avait pas été vu en sup. a consisté en de la botanique des équations différentielles, et de la géométrie des courbes et surfaces dont l'unique but était de se ramener à cette botanique.

[15] Je m'aperçois que, 30 ans plus tard, les seuls problèmes ayant laissé une trace dans ma mémoire sont ceux dont la problématique était un peu surprenante ou ceux dont le but, clairement énoncé, était la démonstration d'un théorème hors programme avec un énoncé parlant. Je ne sais pas si on peut en tirer un enseignement sur le type de problèmes à poser pour faire progresser les gens.

[16] Enfin, dans un espace vectoriel normé sur **R** ou **C** d'après le programme officiel...

passait une bonne partie de son temps à découper les ε en morceaux). L'énoncé du théorème de Fubini laisse un peu songeur...

Ceci pose un problème assez sérieux pour l'enseignement des mathématiques en GE. J'ai un peu de mal à voir comment une école d'ingénieur un peu ambitieuse peut se passer de parler de transformée de Fourier dans L^2, de fonctions holomorphes et de probabilités à un niveau sérieux (sans parler de structures algébriques pour la formation d'informaticiens un peu théoriciens). Définir $L^2(\mathbf{R}^n)$ demande de pouvoir définir l'intégrale de Lebesgue. Même en prenant un point de vue axiomatique, il faut comprendre la notion de dénombrabilité qui a disparu du programme de toutes les filières, ce qui est probablement le point le plus incompréhensible du programme[17]. Ensuite, il faut passer au quotient par les fonctions nulles presque partout. Comme les passages au quotient ont été évacués du programme, on s'en tire en agitant les mains et en expliquant qu'on considère comme égales deux fonctions qui sont égales presque partout puisqu'il est impossible de les distinguer. Une fois L^2 construit, vient le problème de l'extension de la transformée de Fourier de L^1 à L^2, ce qui est un peu délicat pour un élève venant de la filière PC qui n'a aucune idée de ce qu'est une suite de Cauchy et n'a pas été exposé à la notion de densité. Pour les fonctions holomorphes, on a besoin de notions raisonnables de topologie[18]. Toutes ces notions que l'on a jugées impossible d'enseigner pendant les 600 ou 700 heures de mathématiques en CPGE doivent être assimilées par magie dans la petite centaine d'heures dont on dispose (dans les bons cas) dans les Grandes écoles.

Suggestion pour une refonte du programme

Rôle des CPGE

Il y a malheureusement deux réalités difficiles à ignorer : d'une part, le niveau en mathématiques des élèves à l'entrée en CPGE s'est considérablement dégradé en 30 ans, d'autre part, le bagage mathématique dont est susceptible d'avoir besoin un ingénieur ou un scientifique a augmenté de manière non négligeable ; les probabilités[19] occupent une place de plus en plus grande dans toutes les sciences (dures

[17] Il semble que tout (?) le monde en parle quand même, ce qui fait qu'on se demande pourquoi ce n'est pas au programme...

[18] L'unicité du prolongement analytique se démontre naturellement par connexité, même si la connexité par arcs des ouverts de $\mathbf{C}^2$ permettrait de fabriquer une démonstration n'utilisant que cette notion ; la compacité intervient régulièrement et c'est souvent la caractérisation par les recouvrements ouverts que l'on a envie d'utiliser.

[19] Les probabilités ont été introduites dès la seconde, ce qui peut paraître une bonne chose. Malheureusement, cette introduction s'est faite au détriment du langage de la théorie des ensembles et de la logique formelle, et la découverte de la notion de structures algébriques. Ceci semble un peu bizarre vu que le langage de la théorie des ensembles est fort utile (peut-être même plus en probabilité qu'ailleurs), et si on pouvait remplacer les probabilités des classes de seconde et première par un apprentissage du langage de la théorie des ensembles et de la logique formelle, et la découverte de la notion de structures algébriques, cela ferait le plus grand bien à tout le monde. Il est un peu étrange qu'un élève de terminale n'ait jamais manipulé d'espace vectoriel de dimension 2 ou 3 et de matrice 2×2. Par contre, il serait bon de garder des probabilités en terminale. La notion de probabilité conditionnelle me semble fondamentale pour la formation d'un citoyen ; cela permet de débusquer des tas d'erreurs de raisonnement, volontaires ou non, dans les discours de tous les jours.

ou molles), l'arithmétique dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et l'algèbre linéaire sur $\mathbf{F}_2$ et ses extensions se sont retrouvées au cœur de la communication informatique, et les structures algébriques jouent un rôle certain dans toute une partie de l'informatique. Il me semble donc qu'il faut en tirer les conclusions et changer assez substantiellement l'esprit dans lequel le programme des CPGE est conçu. En particulier, il ne faudrait pas perdre de vue la continuité qui doit exister entre la formation en CPGE et celle en GE. Il faudrait réfléchir à un partage des tâches entre les CPGE et les GE, et éviter que les élèves ne sortent des CPGE en ne connaissant qu'un corpus trop restreint (mais sur le bout des doigts), ce qui transforme l'enseignement en GE en survol superficiel (en 5 fois moins de temps) d'un corpus plus étendu que celui vu en prépa.

La structure des CPGE présente d'énormes avantages par rapport aux autres structures que je connais (comme l'université) pour la formation des étudiants (en particulier parce que c'est le même enseignant qui maîtrise la totalité des interventions), et la présence du concours au bout des deux ans crée une stimulation qui, bien utilisée, permet d'obtenir des résultats, au niveau de l'acquisition de connaissances, qui seraient impensables autrement. Il est dommage que cette acquisition de connaissances porte plus sur la résolution d'exercices (dont certains reposent sur une virtuosité parfaitement superflue[20]) que sur des concepts utilisables par la suite. Il faudrait donc arriver à un programme nettement plus ambitieux[21] sur le fond et nettement moins sur sur le niveau de technicité attendu de la part des élèves. Autrement dit, il faut diminuer la technicité au profit d'une augmentation du nombre de notions enseignées (plus de savoir pour moins de savoir-faire !), et surtout il faut enseigner ces notions d'une façon utilisable une fois le concours passé.

Que rajouter ?

Comme je l'ai déjà signalé le programme actuel est traité en 150 heures de cours magistral à l'université de Cambridge. Il ne me semble pas déraisonnable, vu le nombre d'heures dont on dispose en tout, d'arriver à un programme, en classe étoilée[22], correspondant à un peu plus de 200 heures de Cambridge. Ceci permettrait, sans trop diminuer la familiarité avec les notions introduites nécessaire pour affronter les concours, de rajouter au programme :

– de la dénombrabilité,

– des structures algébriques (réclamées par les informaticiens et extrêmement formatrices),

[20] J'ai été confronté à un phénomène psychologique assez curieux : certains des élèves que je récupère ont beaucoup de mal à admettre que le but d'un exercice puisse être d'aider à comprendre comment on utilise un théorème et pas forcément de les piéger...

[21] Au cours des deux dernières décennies, on a fait exactement le contraire. Or, à chaque baisse du programme, on assiste à une augmentation significative de la proportion de 5/2 (qui ont eu l'occasion de voir le programme précédent en 3/2) parmi les reçus au concours de l'X, ce qui tendrait à prouver que plus on enseigne de choses aux élèves et plus ils ont de connaissances mobilisables (quelle surprise !).

[22] Comme la différentiation entre classes étoilées et non étoilées ne se fait qu'en seconde année, il faut réfléchir un peu à la répartition entre les deux années ; voir plus loin.

– des constructions[23] d'objets mathématiques par passage au quotient[24],
– faire en sorte que les groupes agissent sur des ensembles[25] (c'est quand même pour ça qu'ils se sont imposés un peu partout en mathématiques...),
– enseigner la topologie de manière utilisable par la suite,
– l'intégrale[26] de Lebesgue sous une forme axiomatique[27],
– des fonctions holomorphes[28],
– des probabilités (sans théorie de la mesure).

Il faut absolument jalonner le programme de « vrais » théorèmes, permettant de mettre en perspective les notions introduites, et d'éléments d'histoire des mathématiques permettant de mettre en valeur les acquis[29]. Par exemple, une manière de mettre en valeur la notion de dimension d'un espace vectoriel, et les bases de la théorie des extensions de corps (qui, soit dit en passant, est fort utile pour les codes correcteurs ou non) est l'impossibilité de la duplication du cube à la règle et au compas. Expliquer aux élèves que ce qu'ils ont appris leur permet de répondre à une question qui a résisté aux assauts de nombreux mathématiciens

[23] Je pense en particulier à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, aux quotients de $K[X]$ (et en particulier à $\mathbf{C} = \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$), à la construction de $\mathbf{R}$ comme quotient de l'anneau des suites de Cauchy par l'idéal des suites tendant vers 0, et à l'espace topologique $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

[24] Il faut dépasser le « traumatisme » causé par l'irruption des mathématiques modernes dans le secondaire il y a 40 ans. Ce traumatisme est d'ailleurs parfaitement relatif : j'ai relayé comme tout le monde l'idée selon laquelle l'introduction des mathématiques modernes avait été un désastre, jusqu'à ce que, récemment, une mère de famille de ma génération, littéraire de formation, et dont un des fils a des difficultés avec le programme de mathématiques du collège, m'ait fait la déclaration suivante : « Qu'est-ce que c'est que ces stupidités sur le cercle et le triangle ? De notre temps, on faisait des intersections, des réunions ; on comprenait quelque chose ; c'était bien plus concret. » Depuis, je suis de l'opinion que ce qui traumatise les parents, c'est de ne pas savoir faire les devoirs à la maison de leurs enfants... (et aussi d'avoir l'impression que ce qu'ils ont appris n'a pas de valeur puisque ce n'est plus enseigné).

[25] On pourrait par exemple envisager de faire agir les groupes $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ sur l'espace vectoriel E...

[26] Je n'arrive pas à savoir si passer par l'intégrale de Riemann donne une intuition pour l'intégrale de Lebesgue ou si on peut s'en passer et la déduire de l'intégrale de Lebesgue (ce qui se fait sans problème). Si on peut s'en passer (ce qui me semble fort possible), cela permet de gagner un temps considérable...

[27] Je pense à la manière dont Bony présentait cette intégrale aux élèves de la filière PC : on admet l'existence d'une intégrale pour toutes les fonctions positives (ce qui est incompatible avec l'axiome du choix, mais parfaitement justifiable) valant ce qu'on pense pour les fonctions en escalier, linéaire, et vérifiant le théorème de convergence monotone. On admet aussi que toute fonction est limite presque partout d'une suite de fonctions en escaliers.

[28] Avec en point de mire un résultat frappant comme l'addition sur une courbe elliptique, le théorème de la progression arithmétique ou celui des nombres premiers.

[29] À Cambridge, la première année commence avec quatre cours de 24 heures en parallèle dont un intitulé « numbers and sets » dans lequel on parle de théorie des ensembles, de relations d'équivalence, de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, de dénombrabilité... Le cours se termine par la démonstration de l'existence de nombres transcendants par des arguments de cardinal. En France, ceci serait typiquement relégué en exercice. Je pense que c'est une erreur, et qu'il faut au contraire mettre le résultat en valeur, expliquer sa genèse (échange de lettres entre Cantor et Dedekind) et parler des réticences qui ont accueilli la démonstration de Cantor (polémique avec Kronecker) ; cela a pour mérite d'humaniser les mathématiques et d'expliquer aux élèves qu'ils ne sont pas les seuls à avoir des problèmes devant certaines notions. Dans le même ordre d'idées, expliquer que Cauchy a réussi à démontrer deux fois qu'une limite simple de fonctions continues est continue peut aider à bien faire comprendre l'intérêt de la notion de convergence uniforme. On peut aussi raconter les déboires de Poincaré (épisode du prix du roi de Suède).

pendant deux millénaires, est une excellente manière de valoriser leur savoir même si l'utilité du résultat est à peu près nulle. Transformer ce résultat en un problème (ce qui m'est arrivé en sup.) est une idée raisonnable, mais insister sur l'aspect historique du problème lui donne une autre saveur.

Il n'est pas nécessaire de tout démontrer, mais il faut n'admettre que de vrais résultats, dont la démonstration est hors de portée, et dont l'utilisation est relativement aisée et simplifie grandement la vie. Je pense principalement à l'existence de l'intégrale de Lebesgue (en incluant le théorème de convergence dominée – le vrai ; pas celui au programme actuellement –, et celui de Fubini), et à la formule de Cauchy et celle des résidus. On peut déléguer aux Grandes écoles le soin de faire un cours de théorie de la mesure dans lequel l'existence de l'intégrale de Lebesgue sera justifiée de la manière adéquate, mais il me semble nuisible de se passer de sa souplesse, au moins en spé. La démonstration de la formule de Cauchy et de celle des résidus peut probablement se faire à ce niveau, mais demande d'utiliser un arsenal de notions (formule de Green ou des rudiments d'homotopie qui, bien que fort utiles par ailleurs, risquent de prendre un temps non négligeable pour une utilité un peu lointaine).

Problèmes pratiques

L'introduction des probabilités en CPGE me semble incontournable vu l'importance croissante que prennent les méthodes probabilistes dans tous les secteurs scientifiques. Il s'agit d'une branche un peu à part dans les mathématiques (même si elle a des connexions avec beaucoup d'autres branches des maths), avec son propre langage, et dont les conclusions sont parfois déconcertantes pour les mathématiciens d'autres branches, et cela justifierait une augmentation du volume horaire global de mathématiques. Qui sait ? Peut-être que pour une fois les considérations scientifiques l'emporteront sur les considérations budgétaires...

Il y a clairement des élèves qui auraient un peu de mal à assimiler complètement le nouveau programme en deux ans. Comme le concours reste incontournable[30], on peut envisager un système à deux vitesses : une première année avec un programme ambitieux (pas de concours à la fin de l'année !), et une seconde année avec de fortes différences entre les programmes des classes étoilées et des autres. Dans les classes non étoilées, une bonne moitié du temps serait consacrée à consolider les notions vues en première année, et le reste du temps à l'acquisition de notions nouvelles. Dans les classes étoilées, on continuerait à un rythme assez soutenu en considérant que la consolidation des notions de première année se fera naturellement en les utilisant pour démontrer des choses nouvelles (ce qui est la méthode naturelle pour apprendre des mathématiques...). Un point positif de cette différentiation serait de permettre à un 5/2 d'une classe non étoilée de redoubler dans une classe étoilée et donc d'apprendre des choses nouvelles au lieu de revoir le même programme. En fait, l'idéal serait que le programme des classes étoilées permette d'accéder directement au M1 à l'université. (Il est un peu absurde qu'avec le travail que fournissent les élèves des CPGE, ils soient

[30] On pourrait quand même envisager d'en modifier un peu l'esprit et de rajouter une petite touche « examen ».

en situation de perdre une année par rapport aux étudiants de la fac en cas de 5/2.).

Enfin, je n'ai pratiquement évoqué que la filière MP dans ce qui précède, mais le cas de la filière PC est nettement plus préoccupant, et il me semble que la différentiation des filières dès la première année est franchement dommageable par l'hétérogénéité qu'elle crée. Je n'ai pas les moyens de savoir si cette différentiation a vraiment augmenté le nombre de vocations de physiciens et de chimistes. Si ce n'est pas le cas, il me semblerait judicieux de revenir au système antérieur où le choix se faisait en seconde année, de manière peut-être un peu plus réfléchie.

⋆ ⋆ ⋆

Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.
Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.

LIVRES

Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives
A. Connes et M. Marcolli
AMS, 2007. 785 p. ISBN : 978-0-8218-4210-2. $99

Présentation Générale

Alain Connes et Matilde Marcolli sont les deux auteurs du livre « Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives ». Ce livre est publié dans la collection « Colloquium Publications of the American Mathematical Society », 2007. Il comporte 785 pages et a été publié fin 2007. La longueur de l'ouvrage s'explique en partie par le fait que *les auteurs rappellent avec précision la définition des notions de base* dans chacun des domaines de physique ou de mathématiques considérés.

L'hypothèse de Riemann et la construction d'une théorie de la gravitation quantique sont les deux grands problèmes associés respectivement à la répartition de l'ensemble des nombres premiers et à la physique de l'espace-temps. L'idée directrice et unificatrice de cet ouvrage est que la géométrie non commutative permet de mettre en évidence des analogies structurelles dans l'étude de l'ensemble des nombres premiers et dans celle de l'espace-temps. Ces analogies s'éclairent mutuellement pour mettre progressivement en place un programme de travail, sous forme d'un dictionnaire, où chaque progrès dans l'établissement d'un cadre conceptuel susceptible d'expliquer l'hypothèse de Riemann admet une contre partie dans la théorie de la gravitation et vice versa. Donnons brièvement deux arguments pour expliquer ce point de vue.

1) Alain Connes avait donné des raisons de croire que le groupe de renormalisation $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ de la physique des champs devrait fournir l'interprétation Galoisienne (suggérée par André Weil) du noyau de l'application d'Artin : $C_\mathbb{Q} \to Gal(\mathbb{Q}^{ab}, \mathbb{Q})$ de la théorie du corps de classe du corps des rationnels $\mathbb{Q}$ ($C_\mathbb{Q}$ désigne le groupe des classes d'idèles). Un pas important vers une interprétation (galoisienne) motivique du groupe de renormalisation est accompli dans le chapitre 1, via le « groupe cosmique » conjecturé par Pierre Cartier et une identification non canonique avec le groupe de Galois motivique dans la théorie des motifs de Tate mixtes.

2) Les auteurs dégagent (dans le chapitre 4) une analogie entre la transition de phase électro-faible du modèle standard et les transitions de phase de certains systèmes de mécanique statistique quantique (« de type Bost-Connes ») apparaissant en théorie des nombres. À partir de cette analogie, ils suggèrent une piste intéressante pour pouvoir étendre la transition de phase électro-faible au secteur

gravitationnel plein : le modèle électro-faible unifie le champ électromagnétique et la force faible, il ne contient pas la gravitation. À ce stade, la géométrie de l'espace-temps devrait apparaître à travers un mécanisme de brisure spontanée de symétrie et un processus de refroidissement analogues à ceux mis en évidence en théorie des nombres par Connes et ses coauteurs (voir Chapitres 3 et 4). Dans cette approche, la construction d'une catégorie appropriée de correspondances, comme dans la théorie de Grothendieck des motifs, est le défi principal pour pouvoir effectuer un progrès notable à la fois sur l'hypothèse de Riemann et sur la théorie de la gravitation quantique.

Cet ouvrage rassemble en un tout cohérent et unifié de nombreux résultats de recherche de Connes, souvent en collaboration, principalement avec Marcolli. Ces résultats sont mis en perspective conformément à la vision globale que possède Alain Connes de la réalité mathématique et en liaison avec les travaux des autres chercheurs. En outre, ce texte fournit des explications et des éclairages qui ne se trouvent pas dans les articles. Ce livre, composé de quatre grands chapitres, s'adresse à un public large. D'une part aux mathématiciens confirmés (non spécialistes du sujet) désirant voir comment la géométrie noncommutative s'applique à la théorie quantique des champs et à la théorie des nombres. D'autre part aux jeunes chercheurs désirant travailler dans ces domaines. Les auteurs donnent régulièrement des exemples concrets pour illustrer les concepts utilisés, classiques ou nouveaux, ainsi que les résultats de recherche. En outre, cet ouvrage se suffit pratiquement à lui-même. Ainsi le lecteur *n'a nullement besoin* pour l'étudier, de consulter des livres traitant respectivement des sujets suivants : la théorie quantique des champs, les algèbres de Hopf, le problème de Riemann-Hilbert, les schémas en groupes, les motifs, le modèle standard de la physique des particules, la cohomologie cyclique, les corps globaux et les fonctions L de Hecke, la théorie du corps de classe, la théorie des algèbres d'opérateurs, la mécanique statistique quantique, des résultats de Shimura sur le corps modulaire, la théorie de la multiplication complexe, la KK-théorie de Kasparov, la formule des traces de Lefschetz, la preuve d'André Weil de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions, etc.

Cet ouvrage met en place un programme de recherche très prometteur et ouvre de nombreuses pistes de recherche. Ce texte est agréable à lire et les démonstrations sont bien rédigées : les auteurs ont fourni un travail rédactionnel considérable et de très grande qualité. Enfin, il est inutile de rappeler que nombre de résultats présentés dans ce livre ont suscité un vif intérêt de la part des communautés internationales de mathématiques et de physique.

Brève description des quatre chapitres de ce livre

Chapitre 1 : Quantum fields, noncommutative spaces, and motives

Ce chapitre comprend environ 340 pages et est divisé en 19 sous-chapitres.

Les auteurs rappellent la problématique de la physique quantique des champs. À une théorie quantique (pertubative) des champs donnée on associe des graphes de Feynman. À chacun de ces graphes on associe une intégrale en général divergente. La renormalisation des physiciens consiste à régulariser ces intégrales pour leur donner une valeur finie tout en obtenant un excellent accord avec l'expérience ; par exemple la charge d'un électron est une quantité renormalisée. Ce processus est très subtil car les intégrales associées aux sous-graphes sont divergentes de sorte que le résultat final dépend de la façon dont on a fait les régularisations intermédiaires. L'approche de Connes-Kreimer est expliquée en détail. Le processus de renormalisation est codé dans une certaine algèbre de Hopf et s'interprète comme une factorisation de Birkhoff des lacets pour un problème de Riemann-Hilbert. Ensuite, les auteurs expliquent comment la correspondance de Riemann-Hilbert (équation différentielle à monodromie prescrite) est présente dans la renormalisation d'une théorie perturbative des champs. La catégorie des fibrés vectoriels plats sur un disque infinitésimal joue un rôle crucial. Il s'agit d'une catégorie Tannakienne dont le schéma en groupe associé est de la forme $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ où $\mathbb{U}$ est le schéma en groupe associé à une algèbre de Hopf commutative bien identifiée et $\mathbb{G}_m$ désigne le groupe multiplicatif. La catégorie des représentations de dimension finie de $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ code de manière précise la correspondance de Riemann-Hilbert sous-jacente à la renormalisation perturbative. En outre, $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ apparaît comme le groupe de Galois « cosmique » conjecturé par Cartier : il agit comme groupe de symétrie universel de l'ensemble des théories renormalisables. Soit G le groupe des difféographismes d'une théorie renormalisable, les auteurs expriment alors le groupe de renormalisation comme la composée des trois flèches (bien identifiées) suivantes :

$$\mathbb{G}_a \to \mathbb{U} \to \mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m \to G \rtimes \mathbb{G}_m,$$

$\mathbb{G}_a$ désignant le groupe additif. Ils signalent que $\mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ apparaît (de manière non canonique) comme un groupe de Galois motivique dans la théorie de motifs de Tate mixte. Ils rappellent de nombreuses définitions de la théorie des motifs et soulèvent plusieurs questions ouvertes sur les liens entre motifs et théorie quantique des champs (cf. sous-chapitre 8).

Ensuite, les auteurs expliquent soigneusement (dans le sous-chapitre 9) les concepts et la problématique associés au modèle standard de la théorie des particules élémentaires. Ces dernières sont divisées en deux classes. D'une part les fermions, qui sont les constituants de base de la matière, et d'autre part les bosons, qui transmettent les interactions. Pour expliquer le mécanisme permettant à la plupart des particules d'avoir une masse, on a postulé dans les années soixante l'existence de particules (ou champs) intermédiaires appelés bosons de Higgs. Un gigantesque accélérateur et collisionneur de particules sera mis prochainement en service (au CERN de Genève) afin de mieux comprendre la structure fine de la matière. Notamment, on cherchera à détecter les bosons de Higgs et à préciser (en cas d'existence) leurs masses.

Dans le sous-chapitre 10, les auteurs rappellent la célèbre notion de triplet spectral (A, H, D), l'algèbre A représente les fonctions coordonnées sur un espace non-commutatif. L'élément de longueur est donné par $ds = D^{-1}$. On a une notion de spectre des dimensions, elles peuvent être complexes. Ils résument les principes de base de la cohomologie cyclique et expliquent la formule de l'indice local en géométrie non-commutative. Dans le sous-chapitre 19, ils parviennent à définir des espaces X_z de dimension (spectrale) complexe z, pourvu que le procédé de régularisation dimensionnelle s'applique à z. Dans le sous-chapitre 11 ils étudient le développement asymptotique de $\mathrm{Tr}\,(f(D/\Lambda))$, où $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ est paire, quand le paramètre de masse Λ tend vers l'infini. Il s'agit du principe de l'action spectrale dû à Connes et Chamseddine. Dans le sous-chapitre 13, les auteurs introduisent une algèbre de dimension finie, essentiellement : $\mathbb{C} \oplus \mathbb{H}_L \oplus \mathbb{H}_R \oplus M_3(\mathbb{C})$ où $\mathbb{H}$ désigne l'algèbre des quaternions. Ils la munissent d'une structure réelle (de $KO-$dimension 6) et étudient sa géométrie en liaison avec certaines particules du modèle standard. Dans le sous-chapitre 18 ils classifient plus généralement les géométries non-commutatives finies de $KO-$dimension 6.

Dans les sous-chapitres 14, 15, 16 et 17, les auteurs décrivent un modèle mathématique, dû à Connes, Chamseddine et Marcolli, pour rendre compte des propriétés du modèle standard minimalement couplé à la gravitation. Plus précisément, les auteurs considèrent l'espace non-commutatif défini par le produit $M \times F$ où M est une variété compacte spinorielle de dimension 4 et F est la géométrie non-commutative finie de $KO-$dimension 6 mentionnée plus haut. Bien entendu $M \times F$ fait partie d'un triplet spectral muni d'une structure précise de type (A, H, D, J, γ). Ils montrent alors (en gros) que le groupe des automorphismes de cet espace non commutatif coïncide avec le groupe de symétries de gauge du lagrangien du modèle standard minimalement couplé à la gravitation. Ce dernier étant un produit semi-direct, il ne peut pas être le groupe des difféomorphismes d'une variété (« commutative »). À l'aide du principe d'action spectrale, ils retrouvent le lagrangien du modèle standard minimalement couplé à la gravitation d'Einstein (en forme euclidienne). Ils parviennent également à exprimer ce modèle comme une pure gravitation sur une géométrie modifiée d'espace-temps. En outre, en utilisant leur machinerie et les équations du groupe de renormalisation, ils obtiennent une « post-diction » de la masse du quark « top » et prédisent, en faisant l'hypothèse additionnelle du « grand désert » c'est-à-dire l'absence de physique nouvelle jusqu'aux énergies d'unification, l'existence d'un boson de Higgs de masse de l'ordre de 170 GeV à 10% près, ce qui coïncide avec les prédictions du modèle standard. Le modèle des auteurs présente un intérêt pour ceux qui veulent apprendre les concepts de la physique des particules en les voyant en action dans un cadre mathématique beau, propre et rigoureux. L'hypothèse du « grand désert » n'est probablement pas vérifiée expérimentalement, comme le montrent des estimations récentes de la masse du boson de Higgs par Fermi-Lab, et les résultats expérimentaux à venir du grand collisionneur de hadrons au CERN donneront des informations précieuses pour affiner la description de la structure fine de la géométrie d'espace-temps.

Chapitre 2 : The Riemann zeta function ζ and non-commutative geometry

Ce chapitre comprend environ 97 pages et est divisé en 10 sous-chapitres.

Les auteurs décrivent une réalisation spectrale (due à Connes et rappelée plus bas) des zéros critiques de la fonction zéta de Riemann ζ et des fonctions L de Hecke ainsi qu'une interprétation des formules explicites de Weil comme une formule des traces. L'action du groupe des classes d'idèles $C_{\mathbb{Q}}$ sur l'espace des classes d'adèles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^*$ joue un rôle crucial. Plus précisément, soit $\mathbb{E}$ l'application définie par

$$\forall g \in C_{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{E}(f)(g) = |g|^{1/2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qg)$$

où f appartient à une certaine complétion Hilbertienne de

$$\{h \in S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}),\ h(0) = 0,\ \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} h(x)dx = 0\,\}.$$

Écrivons de manière non canonique $C_{\mathbb{Q}} \simeq C_{\mathbb{Q},1} \times \mathbb{R}^{+*}$. Le groupe (abélien) $C_{\mathbb{Q},1}$ des classes d'idèles de norme 1 est compact et opère sur le conoyau de $\mathbb{E}$. Les auteurs peuvent considérer la décomposition spectrale suivante de $\operatorname{coker}\mathbb{E}$:

$$\operatorname{coker}\mathbb{E} = \oplus_{\chi \in \widehat{C_{\mathbb{Q},1}}} \mathcal{H}_{\chi},$$

où le groupe (dual) des caractères $\widehat{C_{\mathbb{Q},1}}$ décrit l'ensemble des représentations irréductibles de $C_{\mathbb{Q},1}$. L'action du générateur infinitésimal de $\{1\} \times \mathbb{R}_+^*$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\chi}$ admet pour valeurs propres les $z - 1/2$ où z décrit l'ensemble des zéros critiques de la fonction L_{χ} : c'est la réalisation spectrale mentionnée plus haut. Pour $\chi = 1$ on obtient la fonction ζ.

Les auteurs expliquent que la partie oscillatoire $N_{osc}(E)$ de la fonction de comptage $N(E)$ des zéros de ζ ressemble de manière frappante, *à un signe moins près*, à la partie oscillatoire de la fonction de comptage des valeurs propres associées à un système hamiltonien. C'est parce qu'ils travaillent avec un conoyau, $\operatorname{coker}\mathbb{E}$, que les auteurs peuvent expliquer ce signe moins. Dans le Chapitre 4, ce conoyau est interprété comme un motif dans une catégorie abélienne d'espaces non-commutatifs. Les auteurs considèrent aussi le cas d'un corps de nombres. Enfin, ils proposent une formule de Lefschetz pour les facteurs locaux archimédiens (introduits par Serre) des fonctions L des variétés définies sur un corps de nombres.

Chapitre 3 : Quantum statistical mechanics and Galois symmetries

Ce chapitre comprend environ 140 pages et est divisé en 9 sous-chapitres.

Commençons par un bref rappel de mécanique statistique quantique. Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive qui ne soit pas une homothétie. Soit $\beta > 0$ l'inverse de la température. On définit un état φ_β sur l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ par la formule :

$$\forall x \in M_n(\mathbb{C}),\ \varphi_\beta(x) = \frac{\operatorname{Tr}(\,x\,e^{-\beta H})}{\operatorname{Tr}(\,e^{-\beta H})}.$$

Un tel état vérifie la condition KMS_β (« condition d'équilibre » à la température $1/\beta$) pour le flot modulaire $\sigma_t(x) = e^{itH}\,x\,e^{-itH}$, $t \in \mathbb{R}$. L'apparition du flot $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est due au fait que φ_β n'est pas une trace sur $M_n(\mathbb{C})$ ou, de manière équivalente, au fait que l'endomorphisme $x \to x^*$ n'est pas unitaire pour le produit scalaire de $M_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_\beta(xx^*)$.

Le résultat fondamental de Bost-Connes est la construction d'un C^*-système dynamique non-commutatif $(\mathcal{A}, (\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}})$ constituant (en quelque sorte) « une réalisation en mécanique statistique quantique du corps de classe de $\mathbb{Q}$ ». Bien sûr la C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est de dimension infinie. Plus précisément, le système de Bost-Connes vérifie les propriétés suivantes. La fonction de partition coïncide avec la fonction zéta de Riemann, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}; \mathbb{Q})$ est un groupe de symétrie. Il se produit en $\beta = 1$ un phénomène de transition de phase avec brisure spontanée de symétrie au sens suivant. Pour $\beta \in]0, 1]$, le système ne possède qu'un seul état KMS_β. Pour $\beta > 1$, l'ensemble des états KMS_β extrêmaux est paramétré bijectivement par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}; \mathbb{Q})$, le choix d'un état d'équilibre brise donc la symétrie. Enfin, $\mathcal{A}$ possède une sous-algèbre arithmétique A telle que les valeurs des états KMS_∞ sur A engendrent $\mathbb{Q}^{ab}$.

Bost et Connes utilisent le fait qu'on sait décrire des générateurs de l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$: i.e. le douzième problème de Hilbert est résolu dans le cas de $\mathbb{Q}$. Les auteurs reformulent la construction du système de Bost-Connes en utilisant la notion de $\mathbb{Q}$-réseau de dimension 1. Il s'agit d'une paire (Λ, φ) où $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}\Lambda)/\Lambda$ est un homomorphisme de groupes abéliens. Ce dernier concept est relié à la structure de l'espace des classes d'adèles considéré au Chapitre 2. La C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est alors interprétée comme la C^*-algèbre réduite d'un certain groupoïde.

En considérant la notion de $\mathbb{Q}$-réseau de dimension 2 et les classes de commensurabilité associées, les auteurs généralisent le système de Bost-Connes pour obtenir le système dit GL_2. L'arithmétique associée est très intéressante, elle fait intervenir le corps modulaire et certaines séries d'Eisenstein. Les auteurs généralisent aussi le système de Bost-Connes au cas d'un corps quadratique imaginaire K. Ils utilisent d'une part le plongement d'un K-réseau de dimension 1 dans un $\mathbb{Q}$-réseau de dimension 2 et d'autre part la théorie de la multiplication complexe ainsi que la solution du douzième problème de Hilbert pour K.

Chapitre 4 : Endomotives, thermodynamics, and the Weil explicit formula

Ce chapitre comprend environ 156 pages et est divisé en 8 sous-chapitres. Il décrit un travail en collaboration des auteurs avec Caterina Consani.

Les auteurs utilisent des outils sophistiqués de géométrie non commutative (cohomologie cyclique, $KK-$théorie, théorie de Tomita) pour établir un nouveau cadre mathématique dans lequel la réalisation spectrale du Chapitre 2 et l'application $\mathbb{E}$ acquièrent une signification précise. Ce cadre repose sur trois ingrédients : endomotifs, processus de refroidissement et de distillation (en « thermodynamique non commutative »), cohomologie et motifs.

Un endomotif algébrique sur le corps de nombres $\mathbb{K}$ est la donnée d'une $\mathbb{K}$-algèbre unifère définie par un produit croisé $A \rtimes S$ où A est une limite inductive de $\mathbb{K}$-algèbres *commutatives unifères* $A_\alpha, \alpha \in I$, et S est un semi-groupe unitaire agissant sur A (satisfaisant certaines propriétés). Bien sûr, A est l'algèbre des fonctions sur la limite projective des $\operatorname{Spec} A_\alpha$. Cette notion contient et généralise les motifs d'Artin. Elle admet une version analytique sous la forme de la C^*-algèbre $C(\mathcal{X}) \rtimes S = \mathcal{A}$, où $\mathcal{X}$ est l'ensemble des caractères de A à valeurs dans $\overline{\mathbb{K}}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ agit sur $C(\mathcal{X}) \rtimes S = \mathcal{A}$. Une mesure $S-$invariante μ sur $\mathcal{X}$ induit un état φ sur $\mathcal{A}$.

Décrivons brièvement l'ingrédient thermodynamique. Notons $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot modulaire de $(\mathcal{A}, \varphi)$. Désignons par Ω_β ($\beta > 0$) l'ensemble des états KMS_β (pour σ_t) extrêmaux réguliers de type I_∞. Soit $\psi \in \Omega_\beta$, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall x \in \mathcal{A},\ \psi(x) = \frac{\mathrm{TR}(\,\pi(x)e^{-\beta H})}{\mathrm{TR}(\,e^{-\beta H})}$$

où π est une certaine représentation et H est un certain opérateur positif. Soit $\beta' > \beta$, on définit alors (par refroidissement à la température $1/\beta'$) un état dans $\Omega_{\beta'}$ par l'application injective suivante :

$$c_{\beta',\beta}(\psi)(x) = \frac{\mathrm{TR}(\,\pi(x)e^{-\beta' H})}{\mathrm{TR}(\,e^{-\beta' H})}.$$

Les auteurs regardent le fait d'associer la limite inductive $\lim_{\beta\to+\infty}\Omega_\beta$ à $(\mathcal{A},\varphi)$ comme un processus de refroidissement. En quelque sorte on obtient les « points classiques » de l'espace non-commutatif $(\mathcal{A},\sigma_t)$ en diminuant la température et en considérant les états d'équilibres ainsi obtenus. Enfin on considère le système dual

$$(\widehat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \rtimes_{\sigma_t} \mathbb{R},\ (\theta_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}).$$

Un élément de $\widehat{\mathcal{A}}$ s'écrit formellement sous la forme $\int_{\mathbb{R}} x(t)U_t\,dt$ où $x \in C(\mathbb{R},\mathcal{A})$ et les U_t sont des unitaires de $\mathcal{A}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on a alors (le lecteur pourra supposer x à support compact) :

$$\theta_\lambda(\int_{\mathbb{R}} x(t)U_t\,dt) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{it}x(t)U_t\,dt \in \widehat{\mathcal{A}}.$$

Décrivons brièvement l'ingrédient cohomologique. La théorie de la (co)homologie cyclique permet d'associer au système dual $(\widehat{\mathcal{A}},\ \theta_\lambda)$ un morphisme cyclique δ « de refroidissement » entre deux modules cycliques. Le conoyau de δ, obtenu par « distillation » est noté $D(\mathcal{A},\varphi)$; il joue un rôle crucial. Le passage de $(\mathcal{A},\varphi)$ au système dual est l'analogue du passage de C courbe projective sur $\mathbb{F}_q$ à $C\times_{\mathbb{F}_q}\overline{\mathbb{F}_q}$. En poursuivant cette analogie, l'action de $\theta_\lambda\,(\lambda\in\mathbb{R}^{+*})$ sur le groupe d'homologie cyclique $HC_0\,(D(\mathcal{A},\varphi))$ est un substitut à l'action du Frobenius sur le groupe de cohomologie $l-$adique $H^1(C,\mathbb{Q}_l)$.

Au système dynamique de Bost-Connes du Chapitre 2 les auteurs associent un endomotif important de la manière suivante. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'algèbre :

$$A_n = \frac{\mathbb{Q}[u(n),u(n)^{-1}]}{(u(n)^n-1)}$$

où $u(n)$ est une indéterminée. Si $n|m$, on définit un homomorphisme d'algèbre $\Xi_{n,m} : A_n \to A_m$ qui envoie $u(n)$ sur $u(m)^{m/n}$. Les applications $v\to v^k$ induisent une action du semi-groupe $S=\mathbb{N}^*$ sur l'algèbre limite inductive $A=\lim_{\to} A_n$. En appliquant leur procédé de distillation à cet endomotif, les auteurs obtiennent un module cyclique $D(\mathcal{A},\varphi)$ sur lequel agissent les $\theta_\lambda,\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. Soit maintenant χ un caractère du groupe compact $\widehat{\mathbb{Z}}^*$. L'expression $p_\chi = \int_{\widehat{\mathbb{Z}}^*} g\chi(g)\,dg$ définit un idempotent p_χ dans $\mathrm{End}_\Lambda(D(\mathcal{A},\varphi))$ dans la catégorie abélienne des $\Lambda-$modules. On obtient une décomposition :

$$HC_0(D(\mathcal{A},\varphi)) = \sum_\chi HC_0(p_\chi D(\mathcal{A},\varphi)).$$

Il se trouve alors que le générateur infinitésimal de l'action de $\mathbb{R}_+^*$ $HC_0(p_\chi D(\mathcal{A},\varphi))$ fait apparaître tous les zéros de la fonction L_χ. La présence ici des éventuels zéros non critiques vient du fait, qu'à la différence du Chapitre 2, $HC_0(p_\chi D(\mathcal{A},\varphi))$ n'est pas un espace de Hilbert mais plutôt un espace de fonctions à décroissance rapide. L'application $\mathbb{E}$ du Chapitre 2 est interprétée ici comme une application de refroidissement. Dans le cas d'un corps de nombres $\mathbb{K}$ autre que $\mathbb{Q}$, on ne dispose pas d'un endomotif de type Bost-Connes. Toutefois, en introduisant une certaine « application de restriction » de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^*$ à $C_{\mathbb{K}}$ et au prix d'un surcroît de travail d'algèbre homologique, les auteurs parviennent à définir un certain conoyau d'un morphisme cyclique de sorte que la preuve précédente se généralise à $\mathbb{K}$. Le groupoïde $\mathbb{A}_{\mathbb{K}} \rtimes \mathbb{K}^*$ et la C^*-algèbre associée jouent un rôle essentiel dans la démonstration. Ainsi, ils retrouvent la formule explicite de Weil sur le groupe $C_{\mathbb{K}}$ et reformulent l'hypothèse de Riemann (pour les fonctions L de Hecke sur $\mathbb{K}$) en un problème de positivité.

Ensuite les auteurs expliquent la preuve (donnée par André Weil) de l'hypothèse de Riemann pour une courbe C sur $\mathbb{F}_q$. Ils utilisent les diviseurs ou correspondances sur la surface $C \times_{\mathbb{F}_q} C$ et l'argument de positivité reposant sur l'inégalité de Castelnuovo. Soit maintenant $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Si $v \in \Sigma_{\mathbb{K}}$ est une place de $\mathbb{K}$ on note $a^{(v)}$ l'adèle de $\mathbb{K}$ défini par $a^{(v)} = (a^{(v)}(w))_{w \in \Sigma_{\mathbb{K}}}$ où $a^{(v)}(w) = 1$ si $w \neq v$ et $a^{(v)}(v) = 0$. Les auteurs introduisent alors l'ensemble

$$\Xi_{\mathbb{K}} = \cup_{v \in \Sigma_{\mathbb{K}}} C_{\mathbb{K}} a^{(v)}$$

muni de son plongement dans $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^*$. Ils suggèrent que $\Xi_{\mathbb{K}}/C_{\mathbb{K},1}$ *plongé dans* $(\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^*)/C_{\mathbb{K},1}$ est pour $\mathbb{K}$ l'analogue de la courbe $C \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}$ pour le corps de fonctions de C. Le groupe $\mathbb{R}_+^* \simeq C_{\mathbb{K}}/C_{\mathbb{K},1}$ agit sur $\Xi_{\mathbb{K}}/C_{\mathbb{K},1}$. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\Xi_{\mathbb{Q}}/C_{\mathbb{Q},1}$ est, du point de vue ensembliste, la réunion d'un singleton et de la famille des cercles de longueur $\log p$ où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Les auteurs proposent alors un dictionnaire, motivé par des faits mathématiques précis, entre les concepts utilisés par Weil pour la courbe C et des éléments de géométrie non commutative pour $\mathbb{K}$. Par exemple, à une correspondance de Frobenius $\sum_n a_n \mathrm{Fr}^n$ sur C correspond $Z(f) = \int_{C_{\mathbb{K}}} f(g) Z_g \, d^*g$ où $f \in S(C_{\mathbb{K}})$ et Z_g est le graphe de g^{-1} agissant sur $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^*$. À une correspondance virtuelle on associe une classe bivariante Γ au sens de Kasparov ; $Z(f)$ cité plus haut induit une classe bivariante $\Gamma(f)$. À la composition des correspondances de Weil correspond le cup-produit de la $KK-$théorie. On a une notion de degré d'une correspondance dans les deux situations. À la formule de Lefschetz (pour $\sum_n a_n \mathrm{Fr}^n$ sur C) correspond le caractère de Chern bivariant de $\Gamma(f)$ etc.

Les auteurs semblent indiquer eux-mêmes que beaucoup de concepts restent à découvrir avant de pouvoir mettre en place une preuve de l'hypothèse de Riemann. Toutefois cette dernière constitue une motivation leur permettant de développer des mathématiques intéressantes en suivant un programme de travail précis.

Enfin, les auteurs analysent la transition de phase électro-faible dans le modèle standard en reprenant le travail de M. Sher. Ils mettent en évidence des analogies avec les transitions de phase décrites dans le Chapitre 3 à propos des $\mathbb{Q}$-réseaux. Ce chapitre 4 se termine alors par un dictionnaire (et programme de travail) à la fois intriguant et fascinant entre d'une part l'hypothèse de Riemann et les $\mathbb{Q}$-réseaux et d'autre part la théorie de la gravitation quantique. Ainsi, à un $\mathbb{Q}$-réseau correspond un triplet spectral réel de dimension 3 (i.e. l'espace et non pas l'espace-temps), à une paire de deux réseaux commensurables correspond une correspondance spectrale, à la C^*-algèbre du groupoïde associé aux $\mathbb{Q}$-réseaux correspond l'algèbre de Hecke des fonctions de correspondances, à une série d'Eisenstein correspond

$D \to \mathrm{TR}\,(D^{-n})$, à la variété de Shimura correspond l'espace des modules des opérateurs de Dirac etc.

Le livre se termine par deux appendices consacrés respectivement aux algèbres d'opérateurs et à la théorie de Galois. Les auteurs y rappellent notamment qu'une algèbre de von Neumann M (i.e. « l'ensemble des fonctions mesurables sur un espace non-commutatif ») possède une évolution temporelle intrinsèque $\sigma_t \in \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Inn}(M)$, $t \in \mathbb{R}$.

Il m'est agréable de remercier Alain Connes pour m'avoir expliqué certains points importants du Chapitre 1. J'ai également plaisir à remercier Benjamin Enriquez et Francois Golse dont les commentaires ont permis d'améliorer ce texte.

Eric Leichtnam,
CNRS, Université Paris VI,
Institut de Mathématiques de Jussieu

Dimensions... une promenade mathématique...

J. Leys, É. Ghys, A. Alvarez

DVD © creative commons, Association des mathématiciens de l'ÉNS Lyon, 2008. 2 H. http://www.dimensions-math.org. 10 €

En attendant l'ouverture éventuelle dans la *Gazette* d'une rubrique consacrée aux DVD, c'est évidemment parmi celle des livres que s'insère le plus naturellement l'analyse de la promenade à laquelle nous convient les trois auteurs de *Dimensions*. Et pourtant, elle est bien mince la partie commune à ces deux supports d'informations, probablement réduite au fait que tous deux peuvent parfois contribuer à la diffusion de la culture, à la transmission de connaissances ! Les contraintes d'un DVD : temps limité, nécessité de capter l'attention du spectateur (je n'ose écrire du lecteur) dès les premières minutes, difficulté – sinon impossibilité – de retour en arrière pour relire un passage comme on le fait si souvent avec un livre, obligent les auteurs à être inventifs, disons même à être très inventifs, à se découvrir véritables créateurs d'un genre nouveau. Pour les aider dans cette voie, ils disposent heureusement de tout ce que la technique apporte aujourd'hui. Sur un DVD l'écriture, linéaire, est remplacée à la fois par la parole et par l'image et cette image ne reste pas figée, elle peut être animée au gré du réalisateur pour renforcer son propos, tout comme il peut, dans le même but, orner la parole et l'image d'un fond musical approprié.

Ainsi, nous sommes bien loin du livre, quant à la forme. Maintenant, qu'en est-il du fond ? Le but de nos auteurs est à la fois de rendre intelligible la quatrième dimension, de présenter des mathématiques et de les faire aimer : « *Il y a tant à montrer en mathématiques !* » s'excuse presque le narrateur en annonçant la parution d'un DVD qui fera suite à celui-ci. Vaste programme, que je ne peux m'empêcher de comparer avec la tentative de Dieudonné qui voulait, dans un livre, montrer au lecteur non mathématicien la beauté des mathématiques en démontrant pour lui de beaux théorèmes...[1]. Bien entendu, ce fut un échec, dû à la naïveté de la démarche souvent comprise par les lecteurs non-spécialistes qui ont tenté l'aventure comme, une fois de plus, l'insupportable condescendance du matheux devant les ignorants. Pour nous persuader que les mathématiques sont belles, les auteurs

[1] Pour l'honneur de l'esprit humain, Hachette, 1998.

du DVD nous montrent de splendides images mathématiques extraordinairement animées et ornementées d'une très belle musique, un peu comme les philosophes cyniques contre les Éléates, démontrant le mouvement en marchant, mais, attention ! sans rejeter l'abstrait et la pensée subtile des Parménide, Zenon, et autres maîtres de la raison : ce qui fait tout l'intérêt de *Dimensions*, c'est qu'à aucun moment il ne sacrifie la rigueur de la pensée à la facilité de l'image, c'est qu'il reste constamment un ouvrage de mathématiques, qu'il ne triche donc jamais, tout en restant passionnant pour le plus grand nombre.

Entrons maintenant dans le détail de l'œuvre pour en voir un peu l'architecture. *Dimensions* comporte neuf chapitres d'égale durée. Chapitre est le mot d'usage hérité du livre, mais « exposé » conviendrait probablement mieux. C'est en effet un personnage bien précis qui chaque fois se présente au spectateur avant de lui raconter une aventure mathématique. « *Je m'appelle Hipparque* » : ainsi commence le DVD, et nous voici immédiatement transporté dans l'univers qui nous tiendra en haleine durant deux heures.

Le premier chapitre, consacré à la dimension 2, est présenté par Hipparque. La dimension 2 est suggérée par la surface de la Terre, parallèles et méridiens étant réellement découpés devant nous par des scies différentes, circulaires pour les premiers, et du genre guillotine ou massicot pour les autres, pour introduire l'idée, non énoncée par des mots, que ces deux familles de cercles n'ont pas le même rôle. Un petit avion nous montre comment la donnée de deux nombres permet de situer un point sur la Terre : « *Puisqu'il faut deux nombres pour déterminer un point de la sphère, on dit que la sphère est de dimension 2* ». Dans les chapitres suivants on définira les dimensions 1, 3 et 4 par un argument similaire, sans insister sur le choix des axes de coordonnées. Mais l'objectif principal du chapitre est la projection stéréographique, qui nous est présentée par un globe terrestre, muni de ses parallèles et de ses méridiens, posé sur une table ronde, et les projections sont matérialisées par des tiges ou des fils joignant le pôle nord, un point de la terre et le point où ils percent la table. Que se passe-t-il près du pôle nord, quand le fil n'arrive pas à atteindre la table trop petite ? On dit que l'image est à l'infini. L'infini interviendra souvent dans la suite, toujours sous cette forme ou une forme analogue. Dans un livre on montre en général que les parallèles se transforment en cercles concentriques et les méridiens en droites passant par l'origine, ce que fait aussi le DVD. Mais peut-on, sur le papier, montrer comment se déforment ces cercles et les continents lorsque la Terre tourne sur la table et que l'on projette toujours du point le plus haut ? Ce que le papier nous refuse, le DVD nous l'accorde dans une belle symphonie de couleurs, et nous voyons les cercles se transformer en droites avant de redevenir des cercles, les continents se déformer curieusement tout en restant reconnaissables : en gros ils gardent leur forme, et c'est pourquoi « Hipparque » nous dit que cette transformation est appelée conforme. De même nous apprenons que parallèles et méridiens restent toujours des cercles et forment deux faisceaux de cercles. Dès ce premier chapitre, nous voyons comment fonctionne la pédagogie sous-jacente. On montre des mathématiques, on ne démontre pas (avec une exception cependant). On introduit un vocabulaire (coordonnées, faisceaux de cercles, infini), sans insister, si bien que ceux qui le connaissent le reconnaissent avec plaisir et que les autres, lorsqu'ils le rencontreront peut-être un jour l'associeront à des images agréables. À aucun moment la terminologie, toujours correcte, n'est écrasante.

Le chapitre 2 nous est présenté par le peintre M.C. Escher et est consacré à la dimension 3, et plus précisément, à la vision que pourraient en avoir des êtres plans, ceci afin de nous préparer aux chapitres suivants où, à notre tour nous aurons besoin d'imagination et de techniques pour concevoir et voir la dimension 4. Deux procédés nous sont proposés. Le premier consiste à faire traverser l'univers plan par des solides tridimensionnels et à considérer l'évolution des sections dans ce plan. C'est l'occasion de présenter les polyèdres réguliers, avec le nombre de leurs sommets arêtes et faces. Le second, beaucoup plus visuel, consiste à « gonfler » le polyèdre pour en faire une sphère sur la surface de laquelle se trouvent dessinées les arêtes et diversement coloriées les faces. Il n'y a plus qu'à faire une projection stéréographique de cette sphère sur l'espace plan considéré pour comprendre comment les êtres plats qui l'habitent peuvent se représenter les volumes de notre espace. Pour mieux voir, on fait de nouveau rouler la sphère sur le plan et de nouveau la beauté des images obtenues donne une idée de ce que les mathématiques pourraient apporter à l'art dans l'avenir. Difficile de ne pas penser à Platon qui écrivait que la Terre vue du ciel avait la forme du dodécaèdre dont les faces diversement colorées recevaient chacune une signification particulière[2]. Ailleurs, « *c'est à l'univers que le Dieu en fit application* »[3]. Pour nos auteurs modernes, le dodécaèdre a perdu son essence divine, et devient « *un bijou de la géométrie* ».

Les chapitres 3 et 4 vont nous initier à la quatrième dimension, par l'intermédiaire de Ludwig Schläfli qui étudia les polyèdres réguliers de l'espace de dimension 4 qu'il nous présente ici par analogie avec la présentation des polyèdres de notre espace aux êtres plans du chapitre précédent. Nous faisons aussi connaissance avec la sphère S^3. Si le simplexe de dimension 4 et l'hypercube sont des objets usuels, en particulier pour le topologue, la vision des trois autres polyèdres réguliers quadridimensionnels est fascinante et vaut le voyage, comme on écrit dans les guides touristiques pour signaler un très bon restaurant ou un fameux monument.

Les quatre chapitres suivants grimpent en difficulté, cette difficulté étant compensée par la beauté des animations qui permettent même à de non mathématiciens de rester attentifs devant leur écran et curieux de voir la suite. Dans les chapitres 3 et 4, Adrien Douady – auquel le narrateur rend un émouvant hommage – présente les nombres complexes, les ensembles de Julia et de Mandelbrojt et de nouveau la plongée au sein de l'ensemble de Mandelbrojt vaut le voyage, et dans les deux suivants, c'est Heinz Hopf lui même qui dévoile au néophyte les beautés internes du fibré de Hopf $S^1 \to S^3 \to S^2$, les familles de cercles enlacés, les tores qui tournent, les cercles de Villarceau. Encore une fois ces images valent le voyage.

Enfin dans le dernier chapitre le grand Riemann nous rappelle qu'il n'y a pas de mathématiques sans démonstrations. « *Démontrer* », dit-il, « *c'est beaucoup plus que montrer* ». Après avoir en quelques phrases esquissé ce qu'est une démonstration, nous assistons finalement à la démonstration du théorème, utilisé tout au long du DVD, selon lequel la projection stéréographique sur le plan tangent au pôle sud, d'un cercle ne passant pas par le pôle nord, est un cercle. Démonstration à partir des connaissances du collège, précise le narrateur, probablement trop optimiste : les théorèmes de Thalès, Pythagore, et un peu de géométrie dans l'espace.

[2] Phedon 110 b.
[3] Timée 55c.

Voici donc, rapidement résumée, une œuvre pédagogique nouvelle et originale, dans laquelle le spécialiste comme le néophyte peuvent trouver leur intérêt et leur plaisir. Dans un livre[4] paru il y a quelques années, Frédéric Patras remarque, à propos de la mathématique, que « *Les succès médiatiques de la physique, sa concurrente immédiate dans le panthéon des sciences pures, tiennent à ce que ses questions les plus fondamentales ont su frapper l'imagination* ». Je pense que *Dimensions* est un essai pour frapper l'imagination avec les questions les plus fondamentales des mathématiques d'aujourd'hui. Vivement « *Dimension II* » et peut-être d'autres, consacrés nous dit-on, à la dynamique, à la topologie, à l'arithmétique, et à l'hypothèse de Riemann !

Michel Zisman,
Université Paris VII

Douce perspective, Une histoire de science et d'art
D. Favennec et E. Riboulet-Deyris
Ellipses, 2007. 256 p. ISBN : 978-2-7298-3399-2. 23 €

Voilà un bien joli titre pour un livre bien intéressant. Ce titre fait allusion à une réflexion de Uccello ne pouvant s'arracher à l'étude de la perspective, malgré les injonctions de son épouse ! Le propos du livre est d'une part de faire l'historique de l'invention progressive de la perspective linéaire, aux environ de 1400, par ceux qui en furent à la fois théoriciens et artistes : Brunelleschi, Alberti et Piero della Francesca. Et d'autre part d'éclairer cette étude par des exemples de grandes œuvres du passé. On appréciera l'érudition des auteurs - professeurs en classe préparatoire - et leur connaissance de l'histoire de l'art, de l'iconographie, voire même de la psychanalyse dans le décryptage des œuvres qu'ils ont choisies comme exemples.

Pourtant dans toutes les écoles d'art, on entend la phrase « la perspective c'est ma bête noire » proférée par la plupart des étudiants. Ce n'est pas ici qu'ils l'apprendront, car les auteurs se contentent au début du livre d'un court rappel, incompréhensible pour qui n'est pas mathématicien. Une lacune à combler pour une future édition, peut-être ? Aussi ce livre ne s'adresse pas directement aux artistes mais à la personne cultivée désireuse de mieux saisir l'enjeu de la perspective, vue comme un système de représentation du monde. Ce faisant les auteurs s'intéressent à beaucoup de questions connexes : conception de l'espace, géométrie projective, etc. De ce point de vue (!), le livre est une réussite.

Une remarque : on aurait aimé trouver à la fin quelques commentaires sur l'abandon de la perspective par les artistes du XX^e^ siècle, dans leur souci de revenir au tableau comme surface avant tout. Cependant en ce début de XXI^e^ siècle, quelques signes avant-coureurs chez de jeunes peintres montrent que l'injonction « tout surface » du siècle précédent commence à être dépassée. Et que la perspective inventée voici 600 ans a encore de beaux jours devant elle.

Patrick Le Barz,
Université de Nice

4 *La pensée mathématique contemporaine,* PUF 2001.

Homogenization. Methods and Applications
G. Chechkin, A. Piatnitski, A. Shamaev
AMS, 2007. 234 p. ISBN : 978-0-8218-3873-0. $89

L'homogénéisation est la théorie mathématique qui s'intéresse aux questions de moyennisation et de comportement asymptotique dans les équations aux dérivées partielles avec de nombreuses applications en physique, mécanique ou sciences de l'ingénieur. Le livre de G. Chechkin, A. Piatnitski et A. Shamaev, des experts reconnus de ce domaine, est assez concis et ne se veut pas un ouvrage de référence mais plutôt un florilège de thèmes chers aux auteurs. L'ensemble est donc très plaisant à lire car on sent l'enthousiasme des auteurs pour leurs sujets favoris sans la lourdeur d'une présentation exhaustive de toute une théorie. Je pense que cette caractéristique du livre sera encore plus appréciée par des nouveaux venus que par des experts, d'autant plus que ce texte est issu d'une série de notes de cours et qu'il est donc d'un niveau très abordable, disons dès la deuxième année du Master.

Le premier chapitre est un rappel d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles afin que le livre soit aussi auto-contenu que possible. Le deuxième chapitre est une introduction aux principales méthodes mathématiques de l'homogénéisation. Classiquement la méthode générale de compacité par compensation (le lemme div-rot de Murat et Tartar) est présentée en premier, ce qui permet de définir les notions de G- et H-convergences. Ensuite deux cas particuliers, très importants en pratique, sont discutés : les milieux aléatoires (ergodiques) ou bien périodiques. Après cette présentation des briques de base de l'homogénéisation les auteurs développent une sélection personnelle de notions annexes, ce qui donne à leur ouvrage ce côté unique et assez agréable. J'ai particulièrement apprécié la section sur la méthode de moyennisation de Bogolyubov pour des systèmes dynamiques, mais les passages sur les structures minces, les domaines perforés ou bien les développements asymptotiques raccordés sont aussi intéressants. Finalement le troisième chapitre est consacré à divers exemples d'applications, issus de la mécanique ou de la physique (matériaux composites, écoulements en milieux poreux). Certains résultats sont des classiques du domaine, d'autres sont très récents et intéresseront certainement les lecteurs les plus expérimentés. Je pense notamment à l'homogénéisation d'équations paraboliques où apparaît à la limite une grande vitesse de dérive, ce qui nécessite l'utilisation d'un repère mobile pour établir des résultats de convergence.

Les nombreux exercices proposés et le niveau très progressif de difficulté font que ce livre peut être utilisé pour un cours de niveau Master M2. Le principal défaut de ce livre est sa liste de références trop courte et trop concentrée sur la littérature russe qui ne permet pas au lecteur de se faire une image correcte du domaine. Mis à part cela je recommande tout à fait cet ouvrage aux lecteurs débutants ou confirmés en homogénéisation.

Grégoire Allaire,
CMAP, École Polytechnique