SOMMAIRE DU N^o 127

Éditorial

L'année 2011 s'ouvre, avec son lot d'espoirs, nourris par l'extraordinaire vitalité de l'activité mathématique, par la conscience que nous avons de ce qu'elle a d'essentiel au progrès intellectuel, technologique et culturel, mais aussi avec quelques inquiétudes dont fait état le Mot du Président qui suit cet éditorial. Autant de sujets et de défis que nous allons essayer de suivre au plus près dans les numéros qui viennent.

Au titre des dossiers abordés dans ce numéro, sur lesquels nous comptons revenir ultérieurement, signalons la question de la bibliométrie qui, en dépit de débats multiples au cours de ces dernières années, reste encore largement ouverte et problématique, celle de l'interdisciplinarité, une belle idée, parfois difficile à mettre en oeuvre, mais dont l'enquête que nous publions montre l'effectivité, ou encore le lancement d'une année internationale sur la planète terre. Nous reviendrons également amplement sur la disparition, en Octobre dernier, de B. Mandelbrot et sur les diverses facettes de son œuvre exceptionnellement féconde.

Au nom de tout le Comité de Rédaction, nous saisissons enfin l'occasion de ce numéro de janvier pour présenter aux lecteurs de la Gazette nos meilleurs voeux de créativité, d'enseignements ou de loisirs mathématiques pour 2011.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Mot du Président

L'année 2010 a été riche en évènements heureux ou décevants. Si l'été a été radieux avec les succès de l'école mathématique française révélés lors du congrès de Hyderabad, les espoirs d'embellie pour le financement des mathématiques ne se sont pas concrétisés complètement. Nous avons vivement réagi dans une lettre ouverte au président du CNRS Alain Fuchs, cosignée avec la SMAI, sur l'annonce d'un budget fonctionnement pour l'INSMI en baisse. Nous prenons note de l'annonce d'un rattrapage permettant la remise à niveau du budget 2011 à celui de 2010, mais il faut rester vigilants. Cette annonce a été faite devant le conseil scientifique de l'INSMI dont c'était la première réunion le 10 Décembre. Ce conseil est présidé par C. Kassel et son bureau est constitué de P. Auscher, J.-M. Couveignes, O. Gipouloux et H. Saada. Sa fonction est principalement « de conseiller et d'assister par son avis et ses recommandations le directeur de l'institut de manière prospective sur la pertinence et l'opportunité des projets et des activités de l'Institut ». Nous espérons qu'il aidera effectivement à préciser comment l'INSMI exerce ses missions nationales.

Les dossiers Labex sont maintenant transmis. Le projet de Labex Carmin regroupant le CIMPA, le CIRM, l'IHÉS et l'IHP et coordonné par C. Villani a tout le soutien de la SMF qui se réjouit de voir de nouvelles coopérations se nouer entre le CIRM et l'IHP. Un autre projet où le CIRM est impliqué dans ses missions régionales est le Labex Archimède dont le coordinateur est J. Los et il a également tout notre soutien. Sa préparation a été l'occasion pour la SMF de nouer des contacts avec les principaux dirigeants des différentes universités marseillaises.

La réflexion de la SMF s'appuie très souvent sur le travail de ses correspondants, qui sont sollicités pour obtenir des informations sur la situation dans les départements ou laboratoires de mathématiques. En voici deux exemples récents :

a) Les résultats de l'enquête sur les variations des effectifs en Master recherche, pro et enseignement et les conséquences de la masterisation sont en ligne sur notre site (à la une et à la page enseignement). La baisse des effectifs est inquiétante dans tous les secteurs.

b) Une autre enquête sur le financement des bibliothèques de mathématiques dont l'avenir est incertain, en raison de la suppression progressive des Programmes Pluri Formation a été réalisée et est également disponible sur notre site. Pour pallier à ses problèmes, le Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques étudie des solutions d'abonnement global dans lesquelles la SMF pourrait être impliquée en tant qu'éditeur.

Je tiens donc à remercier tout particulièrement les correspondants pour leur action.

L'année 2011 est l'année des 30 ans du CIRM. Ce sera l'occasion de fêter une longue aventure de la SMF avec ce centre qu'elle a créé et espérons-le de pouvoir annoncer avant la fin de l'année de nouvelles étapes dans son développement. Le directeur du CIRM Patrick Foulon a prévu toutes sortes de manifestations dont la première le 5 Janvier s'est adressée à des collégiens avec deux conférences de H. Gispert et P. Nabonnand, avec le soutien du dispositif Projets Ateliers Sup'Sciences. Le CIRM accueillera aussi la journée annuelle de la SMF en juin et une grande manifestation sera organisée en octobre.

En ce mois de Janvier, je présente à tous les lecteurs de la *Gazette* mes meilleurs vœux en vous souhaitant plus de temps pour faire de la recherche ou de l'enseignement et beaucoup de plaisir dans la lecture de ce numéro préparé par le comité de rédaction.

Le 1er janvier 2011
Bernard Helffer

MATHÉMATIQUES

Une construction de l'espace L^1 de Lebesgue

Jerôme Depauw[1]

1. Introduction

Dès la fin du XVII^e siècle, le système de notation que nous utilisons pour les intégrales, ainsi que les règles fondamentales de leurs calculs, sont mis en place. Leibniz invente notamment les symboles $\int$ et ∂x, et met en évidence, en même temps que Newton, la réciprocité des opérations d'intégration et de dérivation. Cela permet le calcul explicite des intégrales, qui se développe tout au long du XVIII^e siècle, notamment dans les travaux d'Euler. Mais il faut attendre la première moitié du XIX^e siècle pour trouver la première définition rigoureuse d'intégrale, énoncée par Cauchy. Considérant les subdivisions $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle d'intégration $[a, b]$, l'intégrale d'une fonction f réelle continue par morceaux sur $[a, b]$ est définie comme étant la limite des sommes

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

lorsque le pas $\delta = \max_i(x_{i+1} - x_i)$ tend vers zéro. À partir de là, une question essentielle est celle de l'extension du champ d'application de l'intégrale. En 1866 Riemann étend l'intégrale aux fonctions bornées dont l'ensemble des points de discontinuité peut être, pour tout $\varepsilon > 0$, recouvert par une famille dénombrable d'intervalles $(I_i)_{i\geqslant 1}$ dont la somme des longueurs vérifie $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < \varepsilon$ (on reconnaît sans peine la future notion d'ensemble de mesure nulle). Mais surtout il démontre que cette condition détermine, parmi les fonctions bornées, la classe de fonctions la plus large pour laquelle la définition de Cauchy est valide.

Au tout début du XX^e siècle, en 1901, Lebesgue abandonne le découpage de Cauchy de l'intervalle d'intégration, et utilise un découpage adapté à la fonction. Il partitionne l'intervalle $[a, b]$ selon les valeurs de la fonction f, par des ensembles de la forme $E_{y,z} = \{x; y \leqslant f(x) < z\}$. S'inspirant des travaux de Borel, il détermine d'abord à quelle condition on peut attribuer une longueur à ces ensembles. La mesure extérieure $m_e(E)$ d'un ensemble $E \subset [a, b]$ est définie comme étant la borne inférieure, prise sur toutes les familles dénombrables d'intervalles $(I_i)_{i\geqslant 1}$ formant un recouvrement de E, de la somme $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i|$ des longueurs de ces intervalles. Or, de la propriété de Borel sur la compacité de l'intervalle $[a, b]$, découle l'inégalité suivante liant la mesure extérieure de E et de son complémentaire $[a, b] \setminus E$:

$$m_e(E) + m_e([a, b] \setminus E) \geqslant b - a$$

[1] Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Université François-Rabelais de Tours.

Lorsque cette inégalité est une égalité, l'ensemble E est dit mesurable au sens de Lebesgue, de mesure $m_e(E)$, notée alors $m(E)$. Considérant donc une fonction f à valeurs dans un intervalle borné $[m, M]$ et mesurable (c'est-à-dire telle que pour tous $y < z$, l'ensemble $E_{y,z}$ défini ci-dessus est mesurable) et une subdivision $m = y_0 < \cdots < y_n = M$ de l'intervalle des valeurs de f, Lebesgue démontre que la somme

$$m(E_{y_0,y_1})y_0 + m(E_{y_1,y_2})y_1 + \cdots + m(E_{y_{n-1},y_n})y_{n-1}.$$

tend, lorsque le pas $\eta = \max_i(y_{i+1} - y_i)$ tend vers zéro, vers une quantité qui définit l'intégrale de f. L'intégrale ainsi définie s'applique à plus de fonctions que l'intégrale de Riemann. Surtout, grâce au théorème de convergence dominée, elle est un outil remarquable pour traiter l'intégration terme à terme des séries de fonctions simplement convergentes, problème pour lequel l'intégrale de Riemann demandait la convergence uniforme, nécessitant souvent de complexes découpages préalables.

Mais ce n'est qu'à partir de 1907 que l'intégrale de Lebesgue prend sa pleine dimension, grâce à Fischer et Riesz qui mettent en lumière la notion de convergence en moyenne, et la complétude de l'espace L^2. Dès lors, la théorie de Lebesgue s'impose rapidement comme le cadre idéal pour de nombreuses questions d'analyse. Citons, sans vouloir être exhaustif, la convergence des séries de Fourier, la représentation des fonctionnelles linéaires et ses liens avec la théorie de Stieltjes (théorie passée inaperçue lors de sa publication par Stieltjes en 1894), les équations intégrales et l'expression de leurs solutions grâce à des familles de fonctions orthogonales...

Non seulement l'espace fonctionnel L^p donne son envergure à l'intégrale de Lebesgue, mais il a aussi un intérêt heuristique. Il permet de reposer en termes algébriques la question initiale de l'extension de l'intégrale. Le point de départ n'est plus la fonction f à intégrer, mais l'opérateur d'intégration

$$\Lambda : f \mapsto \int f.$$

La question prend la forme : sur quel espace cet opérateur Λ doit-il être défini ? Cette démarche, qui donne des constructions élégantes et nettes, a été suivie par de nombreux auteurs, comme Riesz, Daniell, Stone, ou encore Bourbaki. Nous adoptons ici ce point de vue, et proposons une construction de l'intégrale de Lebesgue consistant à étendre simultanément l'opérateur d'intégration et l'espace sur lequel il est défini, grâce à la notion classique d'espace complété.

Plus précisément, l'espace C_0 des fonctions en escalier, nulles en dehors d'un intervalle borné et continues à droite, muni de la distance d définie par $d(\varphi, \psi) = \int |\varphi - \psi|$, est un espace métrique sur lequel l'application $\Lambda : \varphi \to \int \varphi$ est uniformément continue. L'intégrale de Lebesgue sur la droite réelle peut donc être définie comme étant le prolongement de Λ à l'espace complété de C_0 pour la distance d. Il reste à identifier cet espace complété comme espace de fonctions. C'est l'objet de cette note. La démarche est la suivante. Le complété abstrait d'un espace métrique est construit à partir des suites de Cauchy de ce dernier. Dans le cas d'un espace vectoriel normé, les suites de Cauchy peuvent être remplacées par les séries normalement convergentes (au sens où la série des normes converge). Or nous disposons du résultat préliminaire suivant lequel « une série de fonctions en escalier normalement convergente converge presque partout ». Cela permet d'associer à toute suite de Cauchy de C_0 une fonction définie presque partout.

Cette démarche nous obligera à introduire la convergence presque partout avant d'avoir défini l'intégrale de Lebesgue. Il n'y a évidement aucune contradiction dans cette progression logique, qui suit au fond la chronologie historique. En effet, comme cela a été mentionné ci-dessus, la notion d'ensemble négligeable a été introduite par Riemann, pour caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann, avant que Lebesgue ne construise sa mesure. Signalons d'ailleurs que Riesz et Sz.-Nagy proposent, dans leur livre [1], une construction de l'intégrale de Lebesgue reposant sur les ensembles négligeables et les fonctions en escalier.

La construction de l'espace L^1 est faite dans tout traité d'intégration. La démonstration de sa complétude passe en général par le théorème de convergence monotone de Beppo Levi. C'est aussi le cas dans le livre de Riesz et Sz.-Nagy mentionné ci-dessus. Notre démarche est différente. Elle est motivée par le fait que la complétude de L^1 est un résultat central de la théorie de Lebesgue et qu'il est donc naturel d'en faire le but premier d'une construction de l'intégrale.

2. Séries de fonctions en escalier

Cet exposé s'appuie sur la notion d'intégrale d'une fonction en escalier, que nous considérons comme connue. On utilisera notamment le fait que l'application $\Lambda : \varphi \to \int \varphi$ définit sur l'espace C_0 une forme linéaire positive (ce qui relève du calcul algébrique).

Rappelons la définition d'un ensemble négligeable, et les propriétés élémentaires de ces ensembles.

Définition 1 (Ensembles négligeables). *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille dénombrable d'intervalles $(I_n)_{n\geqslant 1}$ recouvrant A et telle que la somme des longueurs $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n|$ soit inférieure à ε.*

Dans la suite l'expression « presque partout » qualifiera une propriété vérifiée en dehors d'un ensemble négligeable. On a :

– quitte à rallonger chaque intervalle I_n d'une longueur inférieure à $\varepsilon/2^n$, on peut choisir ces intervalles ouverts ;

– la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable ;

– tout ensemble dénombrable est négligeable.

On notera $\|\varphi\|_0$ la norme $\int |\varphi|$ d'une fonction $\varphi \in C_0$. Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, notre construction repose sur un résultat préliminaire, précisé dans le lemme ci-dessous. Ce lemme, relativement élémentaire dans son énoncé, est une conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$ pour le premier alinéa, et de sa compacité locale pour le second. Sa démonstration est exposée dans le dernier paragraphe (paragraphe 6).

Lemme 1 (Séries de fonctions en escalier)**.** *Soit $(\psi_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions en escalier dans C_0 .*

– Si la série des normes $\sum_{k=1}^{+\infty} \|\psi_k\|_0$ est bornée alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x)$ ne converge pas est négligeable.

– *Supposons de plus qu'il existe une fonction* $\varphi \in C_0$ *et un ensemble négligeable* $\mathcal{N}$ *tels que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x) = \varphi(x)$ *pour* $x \notin \mathcal{N}$. *Alors la convergence a lieu en norme dans* C_0 : $\| \sum_{k=1}^{n} \psi_k - \varphi\|_0 \to 0$ *pour* n *tendant vers l'infini.*

Notons que par continuité de $\Lambda : \varphi \mapsto \int \varphi$, on en déduit, toujours sous les hypothèses du deuxième alinéa du lemme, que $\int \varphi = \lim_n \int \sum_{k=1}^{n} \psi_k$, ce qui s'écrit par linéarité

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi_k. \tag{1}$$

3. Intégrale de Lebesgue

Les sommes partielles d'une série normalement convergente forment une suite de Cauchy. Les sommes de telles séries sont donc des points du complété. Le lemme précédent nous indique comment les identifier comme fonctions. L'objet de ce paragraphe est d'étendre la notion d'intégrale aux fonctions qui sont la somme presque partout des séries considérées dans le lemme 1, et de donner quelques propriétés élémentaires de cette intégrale.

Définition 2 (Intégrale de Lebesgue). *Une fonction* f, *définie sur* $\mathbb{R}$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *est intégrable au sens de Lebesgue s'il existe une suite* $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ *de fonctions en escalier de* C_0 *telle que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \int |\psi_n|$ *soit bornée, et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n = f$ *presque partout. L'intégrale de* f *est* $\int f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int \psi_n$.

La définition ci-dessus a bien un sens, puisque la série des intégrales ne dépend pas de la suite $(\psi_n)_n$. En effet si $(\psi'_n)_n$ est une autre suite comme dans la définition ci-dessus, la suite $(\psi_n - \psi'_n)_n$, vérifie les hypothèses du second alinéa du lemme 1 avec $\varphi = 0$. De l'égalité (1) on déduit bien $\sum_n \int \psi_n = \sum_n \int \psi'_n$.

Une fonction en escalier $\varphi \in C_0$ est intégrable et les deux notions d'intégrales coïncident. Cela se voit en prenant $\psi_1 = \varphi$ et $\psi_n = 0$ pour $n \geqslant 2$.

Enfin, il découle immédiatement de la définition ci-dessus que si l'on modifie une fonction intégrable sur un ensemble négligeable, on ne modifie ni son caractère intégrable, si son intégrale.

Théorème 1 (Linéarité). *L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue forme un espace vectoriel sur lequel l'application* $f \mapsto \int f$ *est une forme linéaire.*

Démonstration.— Ce théorème découle directement de la définition précédente et des propriétés analogues de l'intégrale sur C_0. □

Proposition 1 (Sommabilité, positivité). *Si une fonction* f *est intégrable au sens de Lebesgue, alors sa valeur absolue* $|f|$ *l'est aussi et on a* $|\int f| \leqslant \int |f|$. *Notamment, si* $f \geqslant 0$ *presque partout, alors* $\int f \geqslant 0$.

Démonstration.— Soit une fonction intégrable f. Soit une série normalement convergente de C_0 telle que $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k$ presque partout comme dans la définition 2. Posons $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_k$ et $\psi'_n = |\varphi_n| - |\varphi_{n-1}|$ (où $\varphi_0 = 0$). On a $|f| = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi'_k$ presque partout et $|\psi'_n| \leqslant |\psi_n|$. D'après la définition 2 cela montre que la fonction $|f|$ est intégrable et $\int |f| = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi'_k$. D'autre part d'après la définition 2 appliquée cette fois à f on a aussi $\int f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi_k$. Ces deux dernières égalités s'écrivent

$$(2) \qquad \int |f| = \lim_n \int |\varphi_n| \qquad \text{et} \qquad \int f = \lim_n \int \varphi_n.$$

L'inégalité $|\int f| \leqslant \int |f|$ découle alors de la propriété analogue vérifiée par l'intégrale des fonctions en escalier. Enfin, si $f \geqslant 0$ presque partout, alors $f = |f|$ presque partout, d'où l'on déduit $\int f \geqslant |\int f| \geqslant 0$. □

Le théorème suivant est la généralisation du lemme 1 au cas d'une série de fonctions intégrables.

Théorème 2 (Convergence des séries)**.** *Soit une suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions intégrables telle que la série des intégrales $\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|$ soit bornée. Alors la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable g et on a $\lim_{\ell \to +\infty} \int |\sum_{n=1}^{\ell} f_n - g| = 0$.*

Démonstration.— Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. *Soient une fonction intégrable f et un nombre $\alpha > 0$. Parmi les séries normalement convergentes de C_0 telles que $f = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_\ell$ presque partout il en existe qui vérifient $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int |\psi_\ell| < \int |f| + \alpha$.*

Démonstration du lemme 2.— Soient une fonction intégrable f et, suivant la définition 2, une série normalement convergente de C_0 telle que $f = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_\ell$ presque partout. Considérons $\varphi_n = \sum_{\ell=1}^{n} \psi_\ell$. D'après (2) il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\int |\varphi_n| < \int |f| + \alpha/2$. D'autre part il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $\sum_{\ell=n_1}^{+\infty} \int |\psi_\ell| < \alpha/2$. Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors la suite $(\psi'_\ell)_\ell$ définie par $\psi'_1 = \varphi_N$ et $\psi'_\ell = \psi_{N+\ell-1}$ si $\ell \geqslant 2$ convient. □

Revenons à la démonstration du théorème 2. Soit $n \geqslant 1$. D'après le lemme 2 ci-dessus avec $\alpha = 2^{-n}$, il existe une suite $(\psi_{n,\ell})_{\ell \geqslant 1}$ de fonctions en escalier de C_0 telle que $\sum_\ell \int |\psi_{n,\ell}| \leqslant \int |f_n| + 2^{-n}$, et telle que $\sum_\ell \psi_{n,\ell}(x) = f_n(x)$ pour x en dehors d'un ensemble négligeable noté $\mathcal{N}_n$. Posons $\psi'_i = \sum_{j=1}^{i} |\psi_{j,i-j+1}|$. Comme on peut changer l'ordre de sommation dans une série double à termes positifs (sur la théorie des séries doubles, on renvoie au livre de Titchmarsh [2], paragraphe 1.6), on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int \psi'_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int |\psi_{n,\ell}| \Big).$$

Cela est majoré par $\sum_{n=1}^{+\infty} (\int |f_n| + 2^{-n})$, d'où l'on déduit que la série $\sum_i \int \psi'_i$ est bornée. D'après le lemme 1, la série $\sum_i \psi'_i(x)$ converge pour x en dehors d'un ensemble négligeable, noté $\mathcal{N}_0$. Il s'en suit que la série double de terme général $\psi_{n,\ell}(x)$ est absolument convergente, et que l'on peut à nouveau changer l'ordre de sommation. On a donc pour $x \notin \mathcal{N}_0$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} \psi''_i(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_{n,\ell}(x) \Big),$$

où l'on a posé $\psi''_i(x) = \sum_{j=1}^{i} \psi_{j,i-j+1}(x)$. Comme $|\psi''_i| \leqslant \psi'_i$, il découle de la définition 2 que la fonction g définie pour $x \notin \mathcal{N}_0$ par $g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \psi''_i(x)$, et

$g(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}_0$, est une fonction intégrable, d'intégrale $\int g = \sum_{i=1}^{+\infty} \int \psi_i''$. Comme de plus la série double des intégrales $\int \psi_{n,\ell}$ est aussi absolument convergente, cette dernière égalité s'écrit aussi

$$\int g = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int \psi_{n,\ell} \Big). \tag{4}$$

D'une part on peut calculer (3) grâce au fait que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{N}_n$ est négligeable, et d'autre part on peut appliquer la définition 2 à chaque somme en ℓ dans (4). On obtient ainsi :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \qquad \text{presque partout, et} \qquad \int g = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n.$$

Ce raisonnement peut aussi s'appliquer à la série des valeurs absolues $|f_n|$, et montre l'existence d'une fonction intégrable h telle que

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \qquad \text{presque partout, et} \qquad \int h = \sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|.$$

Or on a clairement $|g| \leqslant h$ presque partout. Par positivité de l'intégrale, on en déduit $\int |g| \leqslant \int h$. En revenant aux fonctions f_n, cela s'écrit $\int |g| \leqslant \sum_n \int |f_n|$. Cela restant vrai pour les sommes à partir du rang $\ell + 1$, on a $\int |g - \sum_{n=1}^{\ell} f_n| \leqslant \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \int |f_n|$, qui tend bien vers 0 pour ℓ tendant vers l'infini. □

Ce théorème a le corollaire immédiat suivant.

Lemme 3 (Fonctions négligeables)**.** *Soit une fonction intégrable f. On a $\int |f| = 0$ ssi $f = 0$ presque partout.*

Démonstration.— Le sens direct découle de l'application du théorème ci-dessus à la série de terme général $f_n = |f|$. Le sens réciproque se lit sur la définition 2. □

4. Complétude de L^1

Il découle du paragraphe précédent que la fonctionnelle définie sur l'espace des fonctions intégrables par $N(f) = \int |f|$ est une semi-norme, qui identifie deux fonctions égales presque partout. Dans la suite, on note $\tilde{f}$ la classe d'équivalence des fonctions égales presque partout à la fonction intégrable f. L'espace de Lebesgue L^1 est défini comme étant l'espace de ces classes d'équivalences. Les propriétés rapidement énumérées dans la proposition suivante se vérifient sans difficulté.

Proposition 2. *L'intégrale, l'addition, la multiplication par un scalaire, la valeur absolue, définies sur les fonctions intégrables, sont des opérations qui se factorisent sur L^1, et en font un espace vectoriel, admettant la fonctionnelle $\tilde{f} \to N(f)$ pour norme. La forme linéaire positive $\tilde{f} \mapsto \int f$ est uniformément continue.*

On notera $\|\tilde{f}\|_1$ la quantité $N(f)$. Soit $\tilde{C}_0 \subset L^1$ l'espace des classes $\tilde{\varphi}$ des fonctions $\varphi \in C_0$. Notons que l'injection canonique $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est une isométrie de $(C_0, \|\cdot\|_0)$ sur $(\tilde{C}_0, \|\cdot\|_1)$. De plus, d'après la définition 2 et le théorème 2, l'espace $\tilde{C}_0$ est dense dans L^1.

Théorème 3. *L'espace L^1 s'identifie au complété de C_0.*

Démonstration.— On vient de remarquer que C_0 s'identifie à un sous-espace dense de L^1. Il suffit donc de vérifier que L^1 est complet. Or le théorème 2, traduit en termes de classes de fonction modulo l'égalité presque partout, signifie « toute série normalement convergente de L^1 converge dans L^1 ». On sait qu'un espace vectoriel normé vérifiant une telle propriété est complet. $\square$

5. Théorie de Lebesgue classique

La complétude de L^1 et la densité de $\tilde{C}_0$ sont des arguments suffisants pour affirmer que notre définition de l'espace de Lebesgue est équivalente à la définition classique. Cependant, il peut être intéressant d'avoir une démonstration de ce fait ne demandant rien d'autre de connu sur la théorie de Lebesgue usuelle que la définition d'un ensemble mesurable avec la mesure extérieure. Nous renvoyons pour cela au paragraphe intitulé *Ensembles mesurables (L)* du livre [1]. En effet, bien que la construction de l'intégrale de Lebesgue dans ce livre soit différente de celle exposée ici, les démonstrations du dit paragraphe ne reposent que sur la densité de $\tilde{C}_0$ dans L^1 et le théorème de convergence dominée. Elles peuvent donc être reprises sans modification ici, sous réserve que l'on explique comment s'obtient ce dernier théorème. C'est l'objet de ce paragraphe (où l'on ne détaillera pas toutes les démonstrations). Commençons par présenter le théorème de convergence monotone, appelé aussi théorème de Beppo Levi, qui est le théorème 2, dans le cas particulier de fonctions $f_n \geqslant 0$. On donne l'énoncé à l'aide des sommes partielles $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Théorème 4 (Beppo Levi)**.** *Soit une suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ croissante de fonctions intégrables. Si la suite des intégrales $(\int g_n)_n$ est bornée alors la suite $(g_n)_n$ converge presque partout vers une fonction g intégrable et $\int g = \lim_n \int g_n$.*

Le théorème de Beppo Levi a pour corollaires immédiats le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet, ces deux théorèmes s'obtiennent en appliquant le théorème de Beppo Levi successivement aux deux limites monotones définissant la limite inférieure :

$$\liminf(g_n) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{\ell\to+\infty} \min_{k\leqslant n\leqslant \ell}(g_n).$$

Nous ne développons pas ici ces résultats, car leurs démonstrations ne doivent rien à la spécificité de notre construction (pour vérifier que si f et g sont deux fonctions intégrables, leur minimum l'est aussi, il suffit d'écrire $\min(f,g) = (f+g-|f-g|)/2$).

6. Démonstration du lemme 1

Dans ce dernier paragraphe, dédié à la démonstration du lemme 1, la seule intégrale considérée est celle des fonctions en escalier nulles en dehors d'un intervalle borné. Notons que cette dernière permet de définir la longueur d'un ensemble E pouvant s'écrire comme une réunion finie d'intervalles bornés. En effet la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un tel ensemble est une fonction en escalier. On définit donc la longueur de E par $|E| = \int \mathbf{1}_E$.

Commençons par démontrer le premier alinéa de ce lemme. D'après la complétude de $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que la série $\sum_k |\psi_k|$ est bornée presque partout. Soient $M = \sum_{k=1}^{+\infty} \int |\psi_k|$ et $\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\psi_k(x)|$. On a $\int \Psi_n \leqslant M$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des points x pour lesquels la suite $(\Psi_n(x))_n$ n'est pas bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Si $x \in \mathcal{N}$, alors $\Psi_n(x)$ dépasse la valeur $M\varepsilon^{-1}$ pour n assez grand. On a donc l'inclusion $\mathcal{N} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, où

$$B_n = \{x \ ; \ \Psi_n(x) \geqslant M\varepsilon^{-1}\}.$$

Puisque $\Psi_n \geqslant 0$, on a $\Psi_n(x) \geqslant M\varepsilon^{-1}\mathbf{1}_{B_n}(x)$. Comme B_n est une réunion finie d'intervalles, sa longueur est bien définie, et se majore par intégration de l'inégalité précédente : $|B_n| \leqslant \varepsilon$. La suite d'ensembles $(B_n)_n$ étant croissante, et l'ensemble $B_n \cap B_{n-1}^c$ (où B^c désigne l'ensemble complémentaire de B) s'écrivant comme une réunion disjointe d'intervalles $\bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n}$, on a $B_n = \bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n} \cup B_{n-1}$, et $|B_n| = \sum_{k=1}^{K_n} |I_{k,n}| + |B_{n-1}|$. Soit de proche en proche, en partant de $B_0 = \varnothing$:

$$B_N = \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n}, \qquad \text{et} \qquad |B_N| = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K_n} |I_{k,n}|.$$

Ainsi, en laissant N tendre vers l'infini, on obtient que l'ensemble $\mathcal{N}$ est recouvert par la famille dénombrable des intervalles $(I_{k,n})_{k,n}$, dont la somme des longueurs est $\leqslant \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathcal{N}$ est négligeable. Or, pour $x \notin \mathcal{N}$, la série de terme général $\psi_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui achève la démonstration du premier point du lemme.

Passons au second point. Soient $K = \max(|\varphi| - \Psi_1)$ et $J = [a, b]$ un intervalle borné en dehors duquel $|\varphi| - \Psi_1$ est nulle. La suite de fonctions $(\Psi_n)_n$ est croissante. Donc pour $n \geqslant 1$, la fonction $|\varphi| - \Psi_n$ est aussi majorée par K, et est négative en dehors de J. Considérons enfin, pour $\eta > 0$ fixé, l'ensemble $E_n = \{x \ ; \ |\varphi(x)| - \Psi_n(x) > \eta\}$, qui est une réunion finie d'intervalles bornés. On vérifie, en distinguant suivant la position de x par rapport à E_n et J, que

$$|\varphi(x)| - \Psi_n(x) \leqslant K\mathbf{1}_{E_n}(x) + \eta\mathbf{1}_J(x).$$

On en déduit, en intégrant puis en laissant n tendre vers l'infini

$$\int |\varphi(x)| - M \leqslant K \lim_{n\to\infty} |E_n| + \eta|J|. \tag{5}$$

Vérifions que $\lim_n |E_n| = 0$. De l'inégalité $|\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\psi_n|$, on déduit que $|\varphi| \leqslant \lim_n \Psi_n$ presque partout, c'est-à-dire que $\bigcap_n E_n$ est négligeable. Soit $\overline{E}_n$ l'adhérence de E_n. Celle-ci s'obtenant en ajoutant à E_n un nombre fini de points (les extrémités des intervalles qui composent E_n), il s'ensuit que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$ ne diffère de $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ que par un ensemble dénombrable de points, et est donc négligeable aussi. On note $\mathcal{N} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. Soit $B = \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m$ une réunion d'intervalles ouverts recouvrant $\mathcal{N}$, et dont la somme des longueurs est inférieur à ε. L'inclusion $\mathcal{N} \subset B$ s'écrit $\mathcal{N} \cap B^c = \varnothing$. Soit en commutant les intersections, $\bigcap_{n,m=1}^{\infty} (\overline{E}_n \cap I_m^c) = \varnothing$. Par compacité de $\overline{E}_1$, il existe un n_0 tel que $\bigcap_{n,m=1}^{n_0} (\overline{E}_n \cap I_m^c) = \varnothing$. D'après la décroissance de la suite d'ensembles $(\overline{E}_n)_n$, on en déduit que $\overline{E}_{n_0} \subset \bigcup_{m=1}^{n_0} I_m$, soit sur les longueurs

$$|E_{n_0}| = \int \mathbf{1}_{E_{n_0}} \leqslant \int \sum_{m=1}^{n_0} \mathbf{1}_{I_m} = \sum_{m=1}^{n_0} |I_m| \leqslant \varepsilon.$$

Donc a fortiori $\lim_n |E_n| \leqslant \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'égalité $\lim_n |E_n| = 0$ est démontrée.

On remplace dans la majoration (5), ce qui donne $\int |\varphi| - M \leqslant \eta |J|$. Cela étant vrai pour tout $\eta > 0$, on a $\int |\varphi| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int |\psi_k|$. Cette inégalité reste valide pour les sommes à partir du rang N, et s'écrit alors

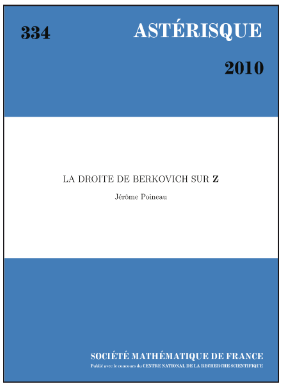
$$\int \left| \varphi - \sum_{k=1}^{N} \psi_k \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int |\psi_k|.$$

En laissant N tendre vers l'infini on obtient $\lim_{N\to+\infty} \|\varphi - \sum_{k=1}^{N} \psi_k\|_0 = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme 1. $\square$

Remerciements. — L'auteur tient à remercier Yves Derriennic et Emmanuel Lesigne, pour leurs conseils et indications durant l'élaboration du présent article.

7. Références

[1] F. Riesz et B. Sz.-Nagy – *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1955, 3e éd.
[2] E. C. Titchmarsh – *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939, 2nd ed.



Astérisque 334

La droite de Berkovich sur Z

Jérôme Poineau

Ce texte est consacré à l'étude de la droite de Berkovich au-dessus d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Cet objet géométrique contient naturellement des copies de la droite analytique complexe (ou de son quotient par la conjugaison), associées aux places infinies, et des droites de Berkovich classiques au-dessus de corps ultramétriques complets, associées au places finies. Nous montrons qu'il jouit de bonnes propriétés, topologiques aussi bien qu'algébriques. Nous exhibons également quelques espaces de Stein naturels contenus dans cette droite. Nous proposons des applications de cette théorie à l'étude des séries arithmétiques convergentes : prescription de zéros et de pôles, noethérianité d'anneaux globaux et problème inverse de Galois. Des exemples typiques de telles séries sont fournis par les fonctions holomorphes sur le disque unité ouvert complexe dont le développement en est à coefficients entiers.

This text is devoted to the study of the Berkovich line over the ring of integers of a number field. It is a geometric object which naturally contains complex analytic lines (or their quotient by conjugation), associated to the infinite places, and classical Berkovich lines over complete valued fields, associated to the finite places. We prove that it satisfies nice properties, both from the topological and algebraic points of view. We also provide a few examples of Stein spaces that are contained in this line. We explain how this theory may applied to adress various questions about convergent arithmetic power series: prescribing zeroes and poles, proving that global rings are Noetherian or constructing Galois groups over them. Typical examples of such series are given by holomorphic functions on the complex open unit disc whose Taylor developments in have integer coefficients.

Prix public* : 70 € - prix membre* : 49 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

HISTOIRE

L'émergence de la notion de groupe d'homologie

Nicolas Basbois

L'introduction[1] de concepts algébriques en topologie au début du vingtième siècle a, on le sait, été déterminante pour le devenir de la discipline. Elle a conduit à la formulation de résultats nouveaux[2] et a permis la mise en œuvre de calculs[3] pour la détermination explicite d'invariants topologiques. Par la suite, elle a donné naissance à une nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre homologique[4].

L'algébrisation de la topologie entretient en outre des rapports étroits avec l'émergence de l'algèbre moderne. Par ce seul fait, elle mérite d'être étudiée comme un des événements importants du vingtième siècle mathématique. Mais elle marque plus généralement un moment clé du développement des mathématiques, caractérisé par le transfert de notions entre des domaines traditionnellement séparés, au même titre, par exemple, que l'algébrisation de la géométrie par Descartes. Elle se présente ainsi comme un phénomène historique majeur des mathématiques du vingtième siècle, ce qui explique sans doute que Jean-Alexandre Dieudonné, grand producteur d'analyses historiques, ait consacré son principal ouvrage d'Histoire des Mathématiques [Die89] à la topologie. Selon son analyse, y serait à l'œuvre le mouvement de fond de l'histoire mathématique dans la perspective structuraliste :

– convergence des méthodes et unification des mathématiques (pour nous, la théorie des groupes et la topologie), au travers des transferts d'intuitions entre disciplines ;

– rôle moteur de l'école algébrique allemande (Hilbert, E. Noether) ;

– émergence de structures abstraites en lieu et place des méthodes originelles, empreintes de recours à l'intuition.

Ces thèmes ont d'ailleurs été mis en avant par certains des principaux protagonistes du développement algébrique de la topologie, tels Heinz Hopf et Paul Alexandroff. Ce fut néanmoins en général au détriment de l'histoire interne de ce phénomène, que nous voulons approfondir en montrant la priorité du rapport à l'objet dans l'émergence de la notion de groupe d'homologie.

---

[1] Je tiens à remercier Jean-Michel Lemaire pour ses critiques des versions préliminaires de cet article, Colin McLarty pour ses remarques et encouragements ainsi que Frédéric Patras pour tous ses conseils avisés.

[2] Cf. [Hir99] p. 64 : « The sensational new concepts and results would have been impossible even to formulate without algebraic objects. »

[3] Cf. [Wei99] p. 797 : « A 1925 observation of Emmy Noether (...) shifted the attention to the « homology groups » of a space, and algebraic techniques were developed for computational purposes in the 1930's. »

[4] Cf. [Wei99] pour un survol de l'histoire de l'algèbre homologique et [Die89] pour un tour d'horizon, entre autres, de la topologie algébrique.

Bien entendu, cette histoire des objets et concepts est indissociable d'un mouvement plus complexe, où les programmes de recherche (le structuralisme de Noether), les relations humaines et professionnelles (les contacts entre Noether, Hopf, Alexandroff, Brouwer), l'environnement scientifique (le rôle de Göttingen dans les mathématiques des années 20) jouent, nous le verrons, un rôle essentiel. Cependant, même chez un auteur comme Hopf qui n'hésite pas à mettre ces facteurs au premier plan, c'est bien la résolution des problèmes mathématiques concrets qui reste le moteur du développement scientifique et donne l'occasion à ces facteurs de participer à l'émergence d'une nouvelle *doxa* topologico-algébrique.

Cette confluence de facteurs multiples dans l'édification de la topologie algébrique moderne nous semble d'ailleurs un cas d'école pour les mathématiques du vingtième siècle, et justifier amplement que nous y revenions plus avant ici. En fin de compte, notre propos sera double : dresser un tableau le plus complet possible de cette histoire, en entrant dans le détail du travail des concepts ; articuler ces moments conceptuels aux autres dimensions du phénomène historique.

Pour en revenir à notre objet d'étude, après ces digressions méthodologiques, la topologie, qui était jusque là traitée d'un point de vue combinatoire et faisait appel à une intuition de nature géométrique, s'est vue investie, au début du XX^{e} siècle, par des outils de théorie des groupes et des concepts abstraits parfois difficilement interprétables en termes géométriques. Ce tournant du développement de la topologie est traditionnellement associé à l'introduction de la notion de groupe d'homologie. Voici pourquoi. Jusqu'alors les topologues associaient des nombres (dits « de Betti » et « de torsion ») à leurs objets d'étude (les polyèdres ou « complexes ») ; il était dans une large mesure connu, mais implicite, que ces nombres étaient caractéristiques de groupes sous-jacents aux polyèdres (groupes qui, lors de leur introduction, furent appelés « groupes de Betti » et « groupes d'homologie »). Parce que justement ces nombres permettaient de décrire sans ambiguïté les groupes en question, il n'était a priori pas nécessaire d'introduire les groupes en topologie combinatoire, sauf à créer une redondance d'informations à première vue inutile. Si l'on considère que l'introduction des groupes de Betti et d'homologie est un indicateur du début de l'algébrisation de la topologie, c'est parce qu'elle marque la première reconnaissance d'un intérêt véritable à considérer la structure de groupe en topologie et a, comme nous le verrons, ouvert la voie à une utilisation de la théorie des groupes en topologie.

Se pose donc une question simple et légitime : quelle est l'origine précise de la notion de groupe de Betti/d'homologie ? À savoir : qui les a conçus ? Qui les a considérés pour la première fois dans la littérature mathématique ? Avec quelles motivations, quels résultats et quel devenir ?

Ces questions ont déjà été considérées dans de précédents travaux, avec un intérêt croissant au cours des vingt dernières années. Notre travail s'inscrit dans cette thématique de recherche et vise à en approfondir les analyses. Nous ferons, entre autres, une synthèse des travaux les plus pertinents sur le sujet[5]. Il en ressort qu'Emmy Noether a eu une influence prépondérante dans la définition des groupes de Betti/d'homologie et, de manière plus générale, dans l'introduction de la théorie des groupes en topologie. Si le premier à définir les groupes d'homologie

[5] Citons notamment [Die84], [Hir99], [ML86], [McL06], [Vol02], [Wei99].

est Leopold Vietoris, mathématicien vivant à Vienne à l'époque qui nous intéresse, et certainement pas un proche d'Emmy Noether, on peut trouver trace d'une rencontre entre Vietoris et Noether – à l'occasion d'un repas chez Brouwer – au cours de laquelle celle-ci aurait expliqué la définition des groupes de Betti[6]. Il semble donc à première vue que l'on puisse attribuer pour une part non négligeable la découverte de Vietoris à l'influence de Noether.

Cette analyse historique superficielle reflète en fait assez mal la réalité. Comme nous l'expliquerons en détails, on ne peut en effet qu'être d'accord avec l'affirmation suivante de Klaus Volkert : « Die Algebraisierung in diesem Sinne scheint in zwei voneinander unabhängigen Entwicklungslinien begonnen zu haben » [7]. Les deux lignes de développement menant à la conception et l'utilisation des groupes d'homologie sont incarnées principalement par Noether et Hopf d'un côté, et Vietoris de l'autre. Si l'environnement conceptuel offert par les grands programmes de recherche – comme l'émergence de l'algèbre moderne et du structuralisme[8] – a de toute évidence joué un rôle important, le travail des concepts proprement dit, c'est en tout cas l'une de nos thèses, a joué un rôle essentiel. Aussi l'analyse directe des textes des auteurs cités est-elle à même de dégager avec clarté des oppositions fondamentales entre les méthodes concurrentes, leurs philosophies sous-jacentes, leurs objectifs et leurs résultats. C'est pourquoi nous nous concentrons sur l'analyse minutieuse des tout premiers textes où figure le concept de groupe de Betti/d'homologie. Cette analyse permet de relativiser largement le rôle des propos de table tenus par Noether au cours du dîner chez Brouwer et, accessoirement, de mieux valoriser le rôle joué par Brouwer dans les travaux d'Alexandroff et Vietoris.

Nous commencerons par rappeler brièvement le cadre d'étude de la topologie dans les années 20. La deuxième section, propédeutique, s'intéressera à l'« abstract » d'un exposé d'Emmy Noether datant de 1925, qui porte en germe la notion de groupe d'homologie et nous donnera une base de réflexion pour l'étude des textes analysés dans les paragraphes suivants. Nous en profiterons pour mentionner les quelques (rares) occurrences de la notion de groupe en topologie avant 1925 afin de mettre en valeur l'avancée suggérée par les propos de Noether. Nous entrerons ensuite dans le cœur de l'analyse mathématique des articles d'époque les plus importants en lien avec notre étude, à savoir : une communication [Vie27A] de Vietoris aux *Mathematische Annalen* faisant suite à l'article de 1926 ([Vie26]) et les articles *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel* de Heinz Hopf et *Über abstrakte Topologie* de Walther Mayer[9]. Ceux-ci feront l'objet, au cours des sections 3, 4 et 5, d'une analyse spécifique. Nous confronterons ces articles entre eux et, plus particulièrement, nous pencherons sur l'influence de Noether dans le travail de Hopf. Nous discuterons enfin, dans la 6e section, de la place du travail

[6] L'épisode est évoqué par Alexandroff, également présent à ce dîner : « In the middle of December Emmy Noether came to spend a month in Blaricum. (...) I remember a dinner at Brouwer's in her honour during which she explained the definition of the Betti groups of complexes, which spread around quickly and completely transformed the whole of topology », [Alex79] p. 324.

[7] « L'algébrisation en ce sens semble avoir commencé selon deux lignes de développement indépendantes l'une de l'autre », cf. [Vol02] p. 283.

[8] Cf. [Cor96].

[9] Respectivement [Hop28B] et [May29].

de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether (qu'Alexandroff a pu lui transmettre) et de Brouwer.

1. Arrière-plan conceptuel : la topologie combinatoire dans les années 1920

Le but de ce paragraphe n'est pas de tracer un historique du développement de la topologie, ou Analysis Situs, depuis les travaux d'Henri Poincaré de la fin du dix-neuvième siècle. Pour le lecteur curieux d'en apprendre plus sur ce développement nous renvoyons entre autres aux premières pages de [Wei99] et aux sections 7.2 et 7.3 de [Epp99], ainsi qu'à [Sar99] pour une analyse synthétique du travail de Poincaré. Nous souhaitons uniquement donner au lecteur les définitions et concepts clés pour la compréhension des objets au centre des réflexions de Noether, Vietoris, Hopf, etc., dont nous débattrons par la suite. L'exposé relativement abstrait et axiomatique qui suit ne doit pas faire oublier au lecteur que la topologie a des inspirations fortement géométriques, ce qui est perceptible dans le vocabulaire utilisé.

Sans entrer dans le détail des terminologies diverses ni dans une description historique du développement de la topologie depuis les travaux de Poincaré, nous pouvons néanmoins donner un socle de définitions commun aux topologues des années 20. Plusieurs définitions des différents objets, se recoupant les unes les autres, ont cohabité, et nous privilégions ici la plupart du temps la version de J. W. Alexander dans [Ale26]. Ce choix est motivé par l'importance des travaux d'Alexander en topologie, par le fait que son article est contemporain de ceux étudiés dans les paragraphes suivants, et parce que Hopf semble reprendre en partie sa terminologie dans [Hop28B] (nous reviendrons sur ce point plus loin). La seule exception concernera la définition de « complexe » qui, dans [Ale26] (selon Alexander lui-même, p. 302), est plus restrictive que les définitions habituelles.

Commençons par rappeler la définition d'un « simplexe » : un k-simplexe est, selon les propres termes d'Alexander, l'analogue k-dimensionnel d'une région tétraédrique (un 1-simplexe est donc un segment, un 2-simplexe un triangle plein, un 3-simplexe un tétraèdre plein, etc.). Tout k-simplexe possède un « bord » défini comme l'ensemble de ses sous-simplexes (aussi appelés « faces ») de dimension 0 à $k-1$ (le bord d'un 0-simplexe est le vide). Ainsi défini, un simplexe est entièrement déterminé par la donnée de ses sommets (les 0-faces).

On peut se représenter un « complexe » comme un agrégat de simplexes éventuellement soudés entre eux selon certaines de leurs faces. Rigoureusement, un complexe peut être défini comme un ensemble fini de simplexes, vérifiant les propriétés :

(1) deux simplexes quelconques de l'ensemble ne peuvent s'intersecter que selon une de leurs faces[10] ;

(2) toute face d'un simplexe de l'ensemble est elle-même un simplexe de l'ensemble.

[10] Dans [Ale26], Alexander donne pour son propos une définition plus restrictive que celle énoncée ici. La définition ici proposée est plus représentative des définitions alors usuelles des complexes.

Les simplexes d'un complexe Φ sont aussi appelés « cellules ».

Une « i-chaîne élémentaire » d'un complexe Φ est une expression symbolique de la forme

$$\pm V_0 V_1 \ldots V_i,$$

les V_j désignant les sommets d'une i-cellule de Φ. Deux expressions de la forme précédente sont considérées comme identiques si elles coïncident par permutation paire des sommets qui les composent, opposées si elles coïncident par permutation impaire des sommets qui les composent. On peut exprimer cette propriété en disant qu'une i-cellule $|V_0 V_1 \ldots V_i|$ admet deux orientations distinctes, celle définie par la suite de symboles $V_0 V_1 V_2 \ldots V_i$ et celle définie par la suite de symboles $V_1 V_0 V_2 \ldots V_i$ par exemple[11]. Si l'on désigne les i-chaînes élémentaires par E^i_s, est appelée i-chaîne de Φ toute combinaison linéaire de la forme

$$K^i = \sum_{s=1}^{\alpha^i} x^s E^i_s,$$

où les x^s sont des entiers et où α^i désigne le nombre de i-chaînes élémentaires de Φ.

Le bord, défini précédemment ensemblistement sur les simplexes, peut également être défini algébriquement sur les chaînes : le bord de la i-chaîne élémentaire $V_0 V_1 \ldots V_i$ est défini comme la $(i-1)$-chaîne

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s V_0 \ldots V_{s-1} V_{s+1} \ldots V_i.$$

La définition du bord est ensuite étendue aux chaînes quelconques par linéarité.

Une chaîne est dite fermée ou est appelée « cycle » [12] si son bord est nul. Il est important de noter que tout bord est un cycle (ce qui traduit l'idée intuitive qu'un bord n'a pas de bord). La relation d'homologie s'introduit alors de la façon suivante : un cycle K est dit « homologue à 0 » et on note $K \sim 0$ s'il est le bord d'une chaîne de Φ. Deux chaînes quelconques K et K' de Φ sont dites homologues, et on note $K \sim K'$, si leur différence est homologue à 0 ($K - K' \sim 0$).

Il est maintenant possible d'introduire les nombres alors associés par les topologues aux complexes, et qui furent remplacés plus tard par les groupes d'homologie. Est appelé « i-ème nombre de connexité » (ou également « i-ème nombre de Betti ») du complexe Φ, et est noté P^i, le nombre maximal de i-cycles linéairement indépendants de Φ, relativement à la relation d'homologie.

---

[11] Au sujet de l'orientation, la remarque suivante d'Alexander mérite l'attention ([Ale26] p. 311) : « We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0 V_1 \ldots V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell. » Alexander procède ici volontairement de façon abstraite en considérant une expression symbolique sans chercher à en donner une représentation géométrique ou une quelconque intuition. Cette démarche se distingue de la volonté d'Alexander de définir un simplexe (analogue d'un tétraèdre) par recours à l'intuition géométrique. Nous reviendrons sur la question de l'orientation au cours du troisième paragraphe.

[12] Dans [Ale26], Alexander désigne ce concept par l'expression « chaîne fermée » mais la terminologie usuelle est celle de « cycle ».

Les nombres de Betti peuvent être calculés à l'aide d'un des outils primordiaux des topologues avant l'introduction des groupes d'homologie : les « matrices d'incidence ». Si les bords des α^i i-chaînes élémentaires E_s^i s'écrivent sous la forme

$$\sum_{j=1}^{\alpha^{i-1}} \mu_s^j E_j^{i-1},$$

alors la matrice d'incidence en dimension i de Φ est la matrice des coefficients μ_s^j, $1 \leqslant s \leqslant \alpha^i$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha^{i-1}$. Les matrices d'incidence donnent une description complète des complexes en traduisant les relations d'incidence entre les $(i-1)$-chaînes élémentaires et les i-chaînes élémentaires. Si l'on note ρ^i le rang de cette matrice alors on peut montrer (comme le mentionne Alexander dans [Ale26] p. 316) que le i-ième nombre de Betti de Φ vérifie :

$$P^i = \alpha^i - \rho^i - \rho^{i+1}.$$

Le calcul du rang des matrices d'incidence permet donc de déterminer les nombres de Betti de Φ. En outre, depuis les travaux de Poincaré, d'autres nombres étaient considérés comme importants pour la description des complexes : il s'agit des diviseurs élémentaires[13] distincts de ± 1 des matrices d'incidence, appelés « nombres de torsion ».

2. Emmy Noether

Emmy Noether, fille du célèbre mathématicien Max Noether, est née à Erlangen en 1882. Ayant mené la quasi-totalité de ses études jusqu'à ses premières recherches en théorie des invariants à Erlangen, elle s'est ensuite établie à Göttingen en 1915, ayant répondu à l'invitation de David Hilbert et de Felix Klein. Ses compétences dans le domaine des invariants différentiels devaient initialement amener Noether à assister Hilbert dans ses recherches en physique mathématique, mais elle se tourna peu à peu vers l'algèbre. Ses travaux à partir de 1920 en firent progressivement le chef de file de l'algèbre au sein de l'Institut mathématique de Göttingen. De par l'influence d'Emmy Noether, relayée notamment par l'ouvrage *Moderne Algebra* de van der Waerden, Göttingen est considérée comme le berceau de l'algèbre moderne. Elle a même pu être considérée, de 1920 au début des années 30, comme la capitale mondiale des mathématiques, de par la réussite des mathématiques allemandes et la présence à l'Institut des plus grands mathématiciens allemands de l'époque, au premier rang desquels Hilbert, Courant, Klein et bien sûr Noether.

Si Emmy Noether est connue pour son rôle prépondérant dans l'avènement de l'algèbre moderne, son influence en topologie semble beaucoup moins évidente car elle n'a jamais publié d'article de topologie. Pour autant, la littérature mathématique contient une de ses remarques sur le sujet ; nous y consacrons une part conséquente de ce paragraphe. Cette remarque se trouve dans l'« abstract » d'un exposé effectué par Noether lors d'une réunion de la Göttinger Mathematische

[13] On trouvera plus de détails au sujet des diviseurs élémentaires dans le paragraphe suivant.

Gesellschaft en date du 27 janvier 1925. Il s'agit d'une note très courte (parue en 1926) [Noe25], relativement méconnue[14].

L'exposé d'Emmy Noether est intitulé « Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie » [15]. Étant donnée son importance, nous en reproduisons ici intégralement le résumé :

« Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form $(e_1y_1, e_2y_2, ..., e_ry_r)$, wo jedes e durch das folgende teilbar ist ; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbewiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen üblichen Beweises, und daraus durch Übergang von Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz ; in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich. »

Analysons ces quelques lignes. Noether commence par rappeler un résultat classique ; si l'on considère un système de formes linéaires à coefficients entiers, soit $\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^m \beta_k x_k$, etc., où les α_k, β_k,..., sont des entiers et les x_k des indéterminées, et si l'on note N le $\mathbb{Z}$-module engendré par ces formes, alors on peut trouver des quantités y_1,...,y_m, combinaisons à coefficients entiers des x_k et des entiers e_1,...,e_r[16] se divisant successivement, tels que $(e_1y_1, ..., e_ry_r)$ forme une base de N. Formulé autrement, ce résultat revient à dire que, si l'on considère le module libre de type fini M engendré par les x_k, on peut en trouver une base y_1,...,y_m dans laquelle les formes linéaires $\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^m \beta_k x_k$,..., voient leur écriture simplifiée au possible (vu qu'elles deviennent simplement e_1y_1, e_2y_2,...). Le résultat tel que présenté par Noether reste encore ancré dans l'héritage des systèmes linéaires vu qu'il signifie juste que l'on peut rendre diagonal, à l'aide d'opérations élémentaires, un système d'équations de la forme[17]

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + \ldots = & A \\ \beta_1 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + \ldots = & B \\ \ldots & & & & \end{array}\right.$$

[14] Cette source n'est guère citée, et on ne peut plus brièvement, que par [ML86], [Wei99] et [McL06], et est absente des œuvres complètes d'Emmy Noether. Klaus Volkert la reproduit intégralement dans [Vol02] mais sans commentaire.

[15] « Déduction de la théorie des diviseurs élémentaires à partir de la théorie des groupes ».

[16] appelés « diviseurs élémentaires ».

[17] À la fin du procédé, le système en question a été mis sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lllll} e_1 y_1 & + & 0 & + 0\ldots = & A' \\ 0 & + & e_2 y_2 & + 0\ldots = & B' \\ \ldots & & & & \end{array}\right.$$

Il est à noter que l'emploi même de la notion de module, ou dans le langage d'alors, de « Linearformenmodul », n'était en soi pas courant à l'époque, bien qu'il était très clair que l'ensemble des cycles notamment vérifiait les propriétés d'un module. L'usage des matrices d'incidence et des opérations matricielles était l'habitude.

Nul doute que Noether a pu privilégier cette présentation traditionnelle de la proposition des diviseurs élémentaires pour rester le plus possible en phase avec son public mais elle aurait certainement préféré une présentation plus abstraite (considérant uniquement des modules, sans recours au langage des formes linéaires) et plus générale (qui ne se limite pas aux $\mathbb{Z}$-modules) que l'on peut notamment trouver dans le *Moderne Algebra*[18] de son élève, Bartel Leendert van der Waerden.

Noether explique ensuite que le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie peut être prouvé à l'aide de la théorie des modules et des diviseurs élémentaires qu'elle vient de rappeler. En effet tout groupe abélien de génération finie peut être vu comme quotient d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini par un sous-module de « formes linéaires » [19] et donc, une fois mis en œuvre le procédé des diviseurs élémentaires, il apparaît que G peut s'écrire comme somme directe de groupes cycliques d'ordres respectifs $e_1,\ldots,e_r$ plus éventuellement des groupes monogènes infinis[20].

Puis Noether fait remarquer – c'est le point primordial de cette note – que l'on peut très bien se passer de la théorie des modules pour prouver ce théorème et l'obtenir directement avec les seuls outils de la théorie des groupes en généralisant la preuve pour les groupes abéliens finis[21], et ainsi en déduire la théorie des diviseurs élémentaires – elle renverse ainsi totalement l'ordre classique rappelé au début de son exposé, selon lequel on déduit le théorème de décomposition des groupes abéliens de type fini de la théorie des diviseurs élémentaires. Noether considère même qu'il est plus simple de procéder de la sorte. Ce constat l'amène à la conclusion suivante : « in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich. » [22]

---

[18] La proposition des diviseurs élémentaires (« Elementarteilersatz »), telle qu'énoncée par van der Waerden dans [Wae31] p. 122, affirme :

si N est un sous-A-module d'un A-module libre de type fini M, alors il existe une base $(u_1,\ldots,u_m)$ de M et une base $(v_1,\ldots,v_n)$ de N, avec $n \leqslant m$, et des éléments non nuls $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ de A tels que :

– $v_i = \varepsilon_i u_i$ *pour* $i \in \{1,\ldots,n\}$;
– $\varepsilon_{i+1} \equiv 0\ (\varepsilon_i)$.

Cette proposition est valable dans le cas où A est un anneau euclidien, ou encore si A est un anneau principal.

[19] Par exemple, si G est un groupe abélien engendré par les éléments $g_1,\ldots,g_n$ soumis aux relations $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = 0$, $\sum_{k=1}^n \beta_k g_k = 0$, etc., on peut le voir comme quotient du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $g_1,\ldots,g_n$ par le module engendré par les quantités $\sum_{k=1}^n \alpha_k g_k$, $\sum_{k=1}^n \beta_k g_k$, etc.

[20] De façon moderne cela revient à dire que G est isomorphe à un produit de la forme

$$\mathbb{Z}^p \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_2)} \times \ldots \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_r)}.$$

[21] Le théorème de décomposition pour les groupes abéliens finis a, selon van der Waerden (cf. [Wae85] p. 150), été prouvé pour la première fois par Kronecker (cf. [Kro70]).

[22] « dans la mise en œuvre du théorème pour les groupes – par exemple pour les nombres de Betti ou les nombres de torsion en topologie – un retour par la théorie des diviseurs élémentaires n'est donc pas nécessaire. »

Noether suggère donc en conclusion un lien entre ses considérations théoriques sur les groupes abéliens et diviseurs élémentaires et la topologie. Il nous faut éclaircir ce point.

Le lien entre l'explication de Noether sur les modules et les groupes et sa conclusion sur les nombres de Betti et de torsion se fait via la notion de module. Comme on l'a vu dans le premier paragraphe, le regard des topologues de l'époque se portait sur les chaînes, qui sont des combinaisons linéaires de chaînes élémentaires. C'est Poincaré qui avait eu l'idée de travailler non pas sur les simplexes ou cellules, qui ont une réalité géométrique, mais sur des combinaisons formelles de tels objets. En tant que chaînes particulières, les cycles peuvent également être sommés entre eux de manière formelle. Les cycles forment donc ce qu'on appelle maintenant un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, mais cette terminologie n'était pas utilisée couramment à l'époque. Parmi les cycles certains sont des bords. Étant donnée une base $(x_1, ..., x_m)$ des cycles (en tant que $\mathbb{Z}$-module), les bords s'écrivent donc comme combinaison linéaire à coefficients entiers des x_i, c'est-à-dire ont la forme $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, etc. En appliquant l'algorithme des diviseurs élémentaires on obtient les nombres de torsion, e_i, et le nombre de ces diviseurs élémentaires permet de déterminer le rang de la matrice d'incidence (cf. le paragraphe 1), et donc les nombres de Betti.

De manière synthétique, le point de vue de l'époque, tel que formulé par Noether dans le langage des modules, était le suivant. L'ensemble N des bords d'une dimension fixée k forme un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, que l'on peut voir comme sous-$\mathbb{Z}$-module du $\mathbb{Z}$-module libre M des k-cycles. Une base de M étant donnée, le théorème des diviseurs élémentaires montre que l'on peut trouver une base $(u_1, ..., u_m)$ de M formée de k-chaînes et une base $(v_1, ..., v_n)$ de N formée de k-cycles, telles que :

– $v_i = \varepsilon_i u_i$ pour $i \in \{1, ..., n\}$;
– $\varepsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\varepsilon_i)$.

Les $\mathbb{Z}$-modules pouvant être vus comme des groupes abéliens, les propos de Noether[23] invitent à considérer les ensembles des i-cycles et des i-cycles homologues à 0 comme des groupes. Le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie appliqué au quotient du groupe des i-cycles par le groupe des i-cycles homologues à 0 fait apparaître le i-ième nombre de Betti et les coefficients de torsion (il s'agit respectivement de p et de e_1, e_2, ..., e_r, selon la notation utilisée plus haut). Emmy Noether semble justifier ce point de vue par une mise en œuvre du théorème de décomposition des groupes de génération finie plus aisée que la mise en œuvre des diviseurs élémentaires. En outre, bien que la brièveté de la communication de Noether ne nous donne qu'un accès restreint à ses idées, on peut supposer qu'elle envisageait un gain conceptuel avec l'introduction en topologie des outils de théorie des groupes par le biais des groupes de cycles, etc.

L'approche proposée par Noether n'est justifiée – à ce moment-là en tout cas – par aucun gain concret, aucune application à la simplification d'une preuve ou l'établissement d'un résultat nouveau. Il s'agit d'un simple changement de point de vue, d'une appréhension conceptuellement différente des objets de la topologie combinatoire. Est sous-jacente à cette vision originale la volonté de ne plus s'arrêter aux cycles mais de les regarder modulo la relation d'homologie. Alors que

[23] Voir note 22.

jusqu'alors les nombres de Betti et de torsion étaient déterminés par un processus purement calculatoire de manipulation des cycles, ils sont avec Noether obtenus comme caractéristiques d'un groupe, le groupe résultant du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords, i. e. du quotient par la relation d'homologie. Il semble qu'il y ait eu pour certains mathématiciens quelques obstacles épistémologiques à effectuer ce passage au quotient[24], ce qui explique qu'il ait fallu attendre une trentaine d'années entre les travaux de Poincaré avec notamment la mise en évidence des nombres de Betti et de torsion et l'idée de Noether de considérer l'ensemble des cycles et des bords comme des groupes abéliens.

Une analogie pourra peut-être donner au lecteur une justification de la motivation de Noether à introduire les groupes en topologie, bien que sans gain pratique immédiat. La situation décrite ici est fort proche de celle exposée par Leo Corry dans [Cor96] (pp. 29-32) au sujet du théorème de Jordan-Hölder. En résumé, Camille Jordan, dans un article de 1869, introduisit la notion de « suite de composition » d'un groupe quelconque G non simple. Il s'agit d'une suite croissante de sous-groupes de G dont chacun est distingué dans le suivant, et minimale, au sens où il ne peut être inséré aucun sous-groupe entre deux sous-groupes consécutifs de cette suite qui satisfasse les conditions précédentes. Jordan forma les quotients des ordres de deux sous-groupes successifs d'une suite de composition, et appela les nombres obtenus les « facteurs de composition » (associés à la suite). Il prouva que le nombre de ces facteurs et leurs valeurs sont indépendants de la suite de composition considérée, et forment donc un invariant de G.

Comme l'explique Leo Corry, cette formulation en termes d'invariants numériques nous apparaît rétrospectivement comme limitée. Le travail d'Otto Hölder dans l'article [Hol89] de 1889 pousse plus loin l'analyse des suites de composition et montre qu'il y a plus d'enseignements à tirer que la simple invariance des facteurs de composition mise en évidence par Jordan. En effet, plutôt que de considérer uniquement les quotients des ordres des sous-groupes consécutifs d'une suite de composition, Hölder définit le concept de « groupe quotient » et fit le quotient des sous-groupes consécutifs. À l'aide de cette nouvelle notion, le théorème de Jordan devint : *la collection des groupes quotients déterminés par une série de composition de G est un invariant*[25] *de G.*

Ainsi dans le développement historique initial de ce théorème, dit de Jordan-Hölder, peut-on voir de nombreuses similarités avec la remarque de Noether concernant la théorie des groupes et la topologie. L'information pertinente dans les deux situations est initialement exprimée numériquement ; l'ajout d'une composante structurelle, qui se trouve être dans les deux cas un groupe, permet de reformuler le résultat de manière plus abstraite et, particulièrement dans le cas du théorème de Jordan-Hölder, en gagnant de l'information. L'ajout de la structure permet de gagner en profondeur dans la compréhension, d'ouvrir des perspectives. Dans le cas du travail d'Hölder, les nouveaux concepts introduits soulevèrent de nouveaux

[24] À la page 191 de [McL06], en note, Colin McLarty mentionne l'avis d'Erhard Scholz selon lequel Weyl s'empêchait de réaliser des quotients de groupes car n'aimant pas former des ensembles d'ensembles infinis.

[25] Pour être totalement clair, cette collection est la collection des quotients de sous-groupes consécutifs d'une suite de composition de G. L'invariance est bien sûr prise à isomorphisme près, Hölder précisant bien au début de son article que deux groupes isomorphes peuvent être considérés comme deux mêmes objets.

problèmes féconds comme ceux de factorisation et d'extension de groupes. En topologie, l'introduction de la théorie des groupes fut source d'une compréhension bien supérieure et aboutit à l'émergence d'une nouvelle discipline : la topologie algébrique.

Néanmoins, dans le cadre de la remarque de Noether, l'introduction des groupes en topologie n'apporte dans l'immédiat aucune information réelle supplémentaire, étant donné, comme cela a déjà été mentionné, que les groupes abéliens de type fini sont caractérisés par les nombres de Betti et de torsion. Le gain est donc moins évident que dans le cadre de la reprise par Hölder du théorème de Jordan. Ce sont les développements ultérieurs, au premier rang desquels ceux de Vietoris et Hopf traités dans les paragraphes suivants, qui apporteront une première démonstration de l'intérêt de l'introduction des groupes en topologie.

Avant de clore ce paragraphe, nous voulons évoquer une question que le lecteur peut légitimement s'être posé. On peut en effet trouver étrange que l'idée de considérer les ensembles de chaînes, de cycles ou de bords comme des groupes abéliens ne soit pas apparue plus tôt. Pour être tout à fait complets nous devons d'une part préciser qu'il existe des occurrences de la notion de groupe en lien avec les cycles avant 1925 mais aussi les commenter au vu de la remarque de Noether. En soi, la notion de groupe n'était pas du tout étrangère à la topologie. Poincaré lui-même appelait « groupe fondamental » d'un espace l'ensemble des lacets basés en un même point de cet espace, considérés à homotopie près. Ce groupe était souvent décrit par Poincaré et ses successeurs via générateurs et relations. Poincaré savait qu'en ajoutant les relations de commutativité entre générateurs, le nombre de générateurs linéairement indépendants restant coïncide avec le nombre de Betti 1-dimensionnel, ce qui lui fournissait un lien entre homotopie et homologie, en dimension 1 du moins. Pour autant, Poincaré n'a jamais voulu appeler « groupe » le groupe justement obtenu à partir du groupe fondamental en rajoutant les relations de commutation (i.e. l'abélianisé du groupe fondamental). Si l'on se fie à Colin McLarty par exemple, l'explication de ce fait rétrospectivement curieux semble tenir en le refus de Poincaré d'appeler « groupe » un groupe commutatif et même d'appeler « groupe » un ensemble qui ne soit pas un groupe de permutations[26].

Un prolongement de cette idée se retrouve dans la dissertation *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen* de Hugo Gieseking (1912), un étudiant de Max Dehn. En effet, s'intéressant notamment à l'homotopie sur une surface orientable fermée, Gieseking en vint à considérer le groupe abélien obtenu à partir d'un système de générateurs du groupe fondamental de la surface. Il cita une étude antérieure de Tietze montrant que cet abélianisé du groupe fondamental permet de déterminer les nombres de Betti et de torsion associés à la surface. Gieseking appela ce groupe le « groupe abélien de la surface orientable fermée » [27].

On trouve la même construction dans la deuxième édition du classique *Analysis Situs* d'Oswald Veblen[28]. Veblen nomme même « homology group » le groupe

[26] Cf. [McL06] pp. 207-208.
[27] « Abelschen Gruppe einer geschlossenen zweiseitigen Fläche ». Les quelques remarques que nous venons d'effectuer sur Gieseking ne sont qu'un résumé sommaire de l'étude de Ria Vanden Eynde, [Van92] pp. 174-178.
[28] Cf. [Veb21] pp. 145-149. L'original est de 1916 et la deuxième édition de 1921.

abélien ainsi obtenu (qui est le groupe d'homologie 1-dimensionnel), ce qui semble constituer la première occurrence de la terminologie « groupe d'homologie ».

Il ne faut donc pas en soi s'attarder uniquement sur le fait que Noether introduit la notion de groupe en lien avec la topologie. On ne peut lui reconnaître une originalité et exclusivité totales au vu des exemples précédents. Néanmoins les occurrences précédentes de la notion de groupe en rapport avec l'homologie ne se faisaient que via la dimension 1. Il se trouve que le groupe d'homologie en dimension 1 est l'abélianisé du groupe fondamental, mais il n'y a pas de relation aussi simple entre homologie et homotopie en dimension supérieure. Le groupe d'homologie 1-dimensionnel obtenu par Gieseking ou Veblen ne provient pas du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords mais simplement de l'abélianisation du groupe fondamental. La démarche de Noether est évidemment plus profonde. Elle décide de travailler sur les cycles à homologie près, via un passage au quotient de deux groupes, et ce en dimension quelconque. Son procédé est de ce point de vue totalement général, non restreint à la dimension 1.

L'analyse de cette remarque de Noether nous ayant en particulier permis d'appréhender les notions de groupe des chaînes, des cycles, etc. et l'utilisation de ces notions pour calculer les nombres de Betti et de torsion, nous allons maintenant pouvoir aborder l'étude des textes cités en introduction. Nous procéderons de façon chronologique en commençant par l'étude de l'article [Vie27A] de Vietoris, première publication où figure une définition des groupes d'homologie.

3. Leopold Vietoris

Leopold Vietoris, mathématicien autrichien né en 1891, a partagé l'essentiel de sa scolarité et de sa carrière entre Vienne, Graz et Innsbruck. Son activité mathématique, d'abord concentrée sur la topologie générale, s'orienta à partir de 1925 vers la topologie combinatoire, à l'occasion d'un séjour en tant que « Rockefeller fellow » chez L. E. J. Brouwer à Amsterdam. Les résultats de ses recherches d'alors parurent via les articles [Vie26], [Vie27A] (soumis le 28 juin 1926) et firent l'objet de sa conférence du 24 septembre 1926 devant la Deutschen Mathematiker-Vereinigung intitulée *Über den höheren Zusammenhang kompakter Raüme*[29]. Ces travaux furent réalisés intégralement lors du séjour de Vietoris chez Brouwer, au carrefour des années 1925 et 1926 et l'influence de ce dernier y est très perceptible. Vietoris précise notamment dans la première note de [Vie27A] que ses recherches sont nées d'une remarque orale de Brouwer[30] et, à la lecture de l'article, on peut constater qu'il a repris les concepts et la terminologie de l'article [Bro12A] de ce dernier.

Dans [Bro12A], Brouwer prouve un résultat plus général que ne l'annonce le titre (« Invariance de la courbe fermée ») ; il établit que le nombre de domaines délimités par un ensemble plan, borné, connexe, parfait (i.e. fermé et sans point isolé) est invariant par bijection continue (donc est un invariant topologique). Considérant

[29] Cf. [Vie27B].

[30] Cf. [Vie27A] Note 1 p. 454 : « Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, daß diese Invarianz (...) auch für die von ihm (...) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt. »

un ensemble π comme ci-dessus et $(h+1)$-connexe[31] et un point P de π, il montre qu'il existe un système de h lacets dans π d'origine P (mais aucun système de moins de h lacets) tel que tout lacet dans π ayant pour origine P est homotope à la composée d'un nombre fini de lacets (et de leurs inverses) de ce système. Pour ce faire, il considère à la place des lacets des ensembles finis de points, invariants par permutation cyclique, et tels que la distance entre deux points consécutifs est inférieure à ε, qu'il nomme ε-chaînes[32] (« ε-Ketten »). L'homotopie sur les lacets est, elle, traduite par des ε-modifications (« ε-Abänderungen ») consistant à modifier légèrement les ε-chaînes par ajout, élimination ou déplacement de points.

L'article [Vie27A] est proche sur de nombreux points de [Bro12A]. Vietoris y définit les groupes de connexité et d'homologie d'une partie quelconque M d'un espace métrique sans s'en remettre à l'existence d'une décomposition de M en cellules. À cet effet, il commence par considérer des complexes combinatoires, et donne des définitions assez proches de celles d'Alexander, quoique sans faire appel à la notion de tétraèdre et, de manière plus générale, sans faire référence à des objets ou des intuitions de nature géométrique.

Ainsi, un n-simplexe est défini par Vietoris comme l'ensemble formé de $n+1$ points, ainsi que de toutes les paires, triplets, ..., n-uplets formés à partir de ces points. Cette définition est analogue à celle utilisée par Alexander dans [Ale26] si l'on considère la donnée d'une paire de points comme équivalente à celle du segment reliant ces deux points, la donnée d'un triplet de points comme équivalente à celle du triangle plein ayant ces trois points pour sommets, etc. Les idées géométriques sous-jacentes aux définitions données par Vietoris sont évidemment analogues à celles motivant les définitions que nous avons énoncées au premier paragraphe et la définition de complexe introduite par Vietoris, bien qu'exprimée en des termes différents de ceux d'Alexander, est équivalente à celle du premier paragraphe. Vietoris ajoute juste une idée, consistant à dire que les sous-simplexes[33] d'un complexe donné apparaissent avec une certaine multiplicité (qui correspond au fait qu'un même simplexe peut être face de plusieurs simplexes différents). Le bord d'un complexe C « k-dimensionnel homogène » (i.e. dont les simplexes – qui ne sont faces d'aucun autre – sont tous de dimension k) est défini comme le complexe formé à partir des simplexes $(k-1)$-dimensionnels qui sont faces d'un nombre impair de simplexes de C. Cette définition peut sembler curieuse mais résulte en fait de ce que Vietoris considère des simplexes non orientés : en effet, considérer des simplexes non orientés revient à considérer des complexes modulo 2. Vietoris écrit d'ailleurs, pour deux complexes donnés K_1, K_2, la relation $K_1 = K_2 \pmod 2$, lorsque les multiplicités de leurs sous-simplexes sont égales modulo 2. Un n-cycle est un complexe n-dimensionnel homogène sans bord.

Enfin, Vietoris introduit l'opération somme sur les complexes (la somme de deux complexes K_1, K_2 est l'ensemble des sous-simplexes de K_1 et de K_2, chacun de ces

31 Cette terminologie n'est pas à prendre au sens actuel mais en un sens plus ancien, signifiant « délimitant un nombre $h+1$ de domaines » ; cf. [Die89], note p. 341.

32 Cette discrétisation des lacets consiste en fait en une approximation affine, si l'on considère à la place d'un lacet la courbe obtenue comme réunion des segments reliant deux points consécutifs de la chaîne.

33 Vietoris considère un complexe comme un ensemble fini de simplexes dont aucun n'est la face d'un autre, puis y ajoute les faces (sous-simplexes) de ces simplexes.

sous-simplexes ayant pour multiplicité la somme de ses multiplicités respectives dans K_1 et K_2) puis introduit la relation d'homologie :

$R^{(k-1)} \sim 0$ dans C si $R^{(k-1)}$ est le bord d'un simplexe k-dimensionnel $S^{(k)}$ du complexe C.

Ayant précisé la compatibilité de la somme avec la considération des complexes modulo 2, il définit le *n*-ième groupe de connexité (« *n*-te Zusammenhangsgruppe ») d'un complexe K comme étant le groupe des cycles *n*-dimensionnels non orientés de K modulo la relation d'homogie[34]. Est appelé *k*-ième nombre de connexité (« Zusammenhangszahl ») d'un complexe C le nombre maximal s de *k*-cycles de C entre lesquels il n'existe aucune relation d'homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_s C_s \sim 0$ (ici les cycles ne sont pas considérés modulo 2 ; le nombre de connexité est donc identique au nombre de Betti).

Vietoris reprend ensuite ces définitions dans le cas de simplexes orientés[35]. Le bord d'un complexe K *n*-dimensionnel homogène est défini comme le complexe $(n-1)$-dimensionnel contenant l'ensemble des $(n-1)$-faces de K $(p-q)$ fois, si celles-ci apparaissent orientées positivement dans le bord d'exactement p *n*-faces de K et orientées négativement dans le bord d'exactement q *n*-faces de K. Le *n*-ième groupe d'homologie (« *n*-te Homologiegruppe ») d'un complexe C est alors défini comme le groupe des cycles *n*-dimensionnels orientés de K modulo la relation d'homologie.

Dans un deuxième temps, Vietoris effectue le transfert des notions sur les complexes combinatoires aux parties d'un espace métrique (son intérêt se concentrant finalement sur les parties compactes). Il commence par définir très généralement un complexe C dans un ensemble M comme étant un complexe au sens combinatoire défini précédemment dont les sommets appartiennent à M.[36] Il introduit ensuite une notion d'homologie lorsqu'une distance est donnée sur M :

un cycle C dans M est dit ε-homologue à 0 dans M (noté $C \sim_\varepsilon 0$) s'il est homologue au sens combinatoire à une somme de bords de simplexes (dans M) de diamètre strictement inférieur à ε.

La même vision géométrique que celle présente dans [Bro12A] guide les définitions. Par exemple, l'addition du bord $R^{(k)}$ d'un simplexe $(k+1)$-dimensionnel $S^{(k+1)}$ dont les arêtes sont toutes de longueur strictement inférieure à ε (il note $R^{(k)} \sim_\varepsilon 0$) à un cycle *k*-dimensionnel $C^{(k)}$ est appelée « ε-Abänderung » de $C^{(k)}$. Vietoris généralise ainsi en dimension (finie) quelconque les idées liées à l'homotopie présentes dans l'article [Bro12A] de Brouwer. D'ailleurs, Vietoris définit également le groupe d'homotopie d'une partie M d'un espace métrique et ce, de façon totalement analogue au groupe d'homologie.

---

[34] Cf. [Vie27A] p. 456 : « Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen « $+K_1$ » und « $+K_2$ » als dieselbe Operation. »

[35] Le principe de l'orientation a été donné dans le premier paragraphe pour les chaînes élémentaires. Il s'applique de la même façon aux simplexes considérés par Vietoris car ils sont entièrement déterminés par la donnée de leurs sommets.

[36] De tels complexes n'ont donc pas une grande réalité géométrique vu que seuls leurs sommets sont réellement dans M. Il n'est aucunement demandé, par exemple, que les segments reliant ces sommets soient bien inclus dans M.

Vietoris considère des *suites fondamentales*[37] F dans M ; il s'agit de suites de cycles k-dimensionnels $(C_m)_{m=1\dots+\infty}$ dont les longueurs des arêtes tendent vers 0 avec m et tels que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n_1, n_2 > n_\varepsilon,\ C_{n_1} \sim_\varepsilon C_{n_2}.$$

Une suite fondamentale est dite ε-homologue à 0 s'il existe n_ε tel que $C_n \sim_\varepsilon 0$ pour tout $n > n_\varepsilon$. Une suite fondamentale F est appelée *suite nulle* (« Nullfolge ») si elle est ε-homologue à 0 pour tout ε ; on écrit dans ce cas $F \sim 0$.[38]

Ayant alors précisé que les suites fondamentales formaient un groupe pour l'addition et les suites nulles un sous-groupe, il définit les n-ièmes groupes de connexité et d'homologie de M comme étant les groupes des suites fondamentales modulo la relation d'homologie sur les suites (ce qui revient à faire le quotient par le sous-groupe des suites nulles – ce que ne précise pas Vietoris). La distinction entre groupe d'homologie et groupe de connexité vient comme précédemment de ce que l'on considère les cycles orientés ou non.

Vietoris procède de façon analogue pour définir le groupe fondamental de M mais nous ne le détaillons pas ici. La suite de l'article est révélatrice de la conception qu'avait Vietoris des objets qu'il manipulait. Les groupes (de connexité, d'homologie, fondamentaux) qu'il a introduits sont étudiés en partie du point de vue de leurs propriétés topologiques : il montre qu'on peut les munir d'une distance qui en fait des espaces métriques complets et prouve que si M est compact alors le groupe de connexité de M l'est également. Toujours pour M compact, il montre que ces groupes possèdent chacun une famille génératrice (il emploie le mot « Basis ») compacte et définit la multiplicité (« Vielfachheit ») de ces groupes comme le plus petit nombre d'éléments d'une famille génératrice (qui peut être infinie dénombrable). La multiplicité des groupes de connexité et d'homologie est pour lui l'analogue des nombres de connexité et de Betti dans les complexes combinatoires. Reprenant la terminologie « Zyklosis » [39] employée par Brouwer dans [Bro12A], il fait le lien avec ses définitions (ce qui les justifie) en montrant que la multiplicité des « Zyklosis » non orientés est égale à la multiplicité du groupe de connexité de la dimension correspondante[40].

---

[37] La terminologie employée est « *Fundamentalfolge* » ; on aurait également pu traduire par *suite de Cauchy* car la condition exprimée équivaut à une condition de Cauchy selon la métrique définie par Vietoris. En outre Felix Hausdorff, à la même époque, utilise le terme « *Fundamentalfolge* » pour désigner une suite de Cauchy dans son *Grundzüge der Mengenlehre*, cf. [Hau02] p. 414.

[38] Ce sont donc les suites fondamentales qui joueront le véritable rôle de cycles de M. Géométriquement, il s'agit de suites d'ensembles de points représentant les sommets de complexes abstraits. Les conditions définissant les suites fondamentales assurent que les sommets des C_n sont espacés d'une distance de plus en plus faible à mesure que n augmente. De plus, elles forcent le nombre de sommets des C_n à tendre vers l'infini. La condition de Cauchy est là pour faire en sorte que, dans un compact, ces ensembles de points convergent vers un ensemble de points limite qui devrait dessiner un véritable cycle sur M.

Les suites nulles jouent, elles, le rôle des bords dans M. L'exigence d'être ε-homologue à 0 pour tout ε est là pour tenter d'assurer que les trous dans M seront bien détectés, et donc qu'une suite nulle délimitera bien une partie pleine – pour le dire de manière plus précise, homotopiquement triviale – de M.

[39] Il s'agit d'une terminologie très particulière, semblant provenir de [Lis47]. Elle désigne les lacets employés par Listing pour mesurer la connexité. On trouvera des détails dans [Bre99] p. 920.

[40] [Vie27A] p. 464 : « Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension. »

Tout ceci confirme l'importance des idées de Brouwer et la prépondérance des intuitions géométriques et des notions topologiques dans le travail de Vietoris. Dans [Vie27A], Vietoris n'utilise aucun outil de théorie des groupes, évite la terminologie des groupes quotients et travaille toujours sur les cycles ou les chemins et non sur leurs représentants à homologie ou équivalence près. Ainsi, si Vietoris introduit les groupes en topologie, c'est tout simplement parce qu'il ne peut faire autrement. Comme l'explique Mac Lane dans [ML86], l'intérêt de Vietoris se portant sur les espaces métriques compacts – qui peuvent avoir une infinité de trous, comme l'ensemble triadique de Cantor par exemple – leur homologie ne peut plus s'exprimer à l'aide des nombres de Betti ou de torsion[41] et demande donc l'introduction de la structure de groupe[42] afin de définir l'analogue du nombre de Betti : la multiplicité. Comme cela a déjà été évoqué précédemment, il n'était pas ignoré que certains ensembles considérés à l'époque en topologie – comme l'ensemble des cycles – pouvaient être munis d'une structure de groupe. Vietoris l'admet lui-même dans une lettre à Puppe ([Hir99] p. 62-63) : « Selbstverständlich wußten die Topologen schon vor diesen Arbeiten, daß sie es bei der Addition von Zykelklassen mit Abelschen Gruppen zu tun hatten. Weil sie aber wußten, daß diese Gruppen durch Rang- und Elementarteiler (Torsionszahlen) charakterisiert sind, hielten sie die Beschäftigung mit den Gruppen für überflussig. »[43] L'intérêt du travail de Vietoris dépasse donc la seule introduction de la notion de groupe en homologie ; la notion de groupe est dans le cadre de son étude absolument nécessaire car ses objets d'étude (les espaces métriques compacts) ne pouvaient en général être décrits avec les nombres de Betti et de torsion jusqu'alors suffisants pour l'étude des complexes. Les groupes abéliens de type fini sont incapables de coder l'information homologique pour les espaces métriques compacts généraux.

En adoptant une approche géométrique inspirée par Brouwer, Vietoris a pu étudier l'homologie d'objets plus riches que les complexes simpliciaux. Une démarche plus classique aurait été de fournir un procédé général permettant d'associer un complexe simplicial à un espace métrique compact et de définir ensuite l'homologie de cet espace comme étant l'homologie du complexe associé. Mais la voie empruntée par Vietoris lui a permis justement de contourner la difficulté de l'affectation d'un complexe simplicial pertinent à un espace métrique compact quelconque, ce qui explique qu'il ait été le premier à définir la notion de groupe d'homologie.

[41] On a vu dans le premier paragraphe que les nombres de torsion étaient définis à partir des matrices d'incidence, elles-mêmes attachées à un complexe. Pour définir les nombres de torsion d'un espace métrique compact, il aurait donc fallu que Vietoris trouve comment associer un complexe simplicial (qui est un ensemble fini) à un espace métrique compact tout en en conservant les propriétés topologiques – ce qui semble une entreprise vaine. Les nombres de Betti peuvent, eux, être définis sans le recours aux matrices d'incidence (cf. la définition donnée dans le premier paragraphe) mais on peut facilement obtenir des nombres de Betti infinis pour les espaces métriques compacts. En effet, si l'on considère un espace avec une infinité de trous, on obtient une famille infinie de 1-cycles indépendants en se donnant pour chaque trou de l'espace considéré un 1-cycle entourant ce trou.

[42] Cette explication de Mac Lane est d'ailleurs confirmée par Vietoris lui-même dans une lettre à Friedrich Hirzebruch, citée dans [Hir99], p. 62.

[43] « Bien sûr, les topologues savaient déjà avant ce travail qu'ils avaient affaire à des groupes abéliens via l'addition de classes de cycles. Mais comme ils savaient que ces groupes sont caractérisés par le rang et les diviseurs élémentaires (nombres de torsion), ils considéraient cet emploi des groupes superflu. »

On peut cependant légitimement se demander pourquoi le problème de la définition d'une homologie pour des objets plus complexes que les complexes simpliciaux n'a pas rencontré une réponse antérieure à celle de Vietoris. Sans entrer dans les détails, il semble que cela soit lié au problème de la définition même d'une variété[44]. En effet, dans ses premiers articles sur l'*analysis situs*, Poincaré considéra des variétés différentiables, définies par exemple à l'aide de conditions sur des paramétrisations locales. La relation d'homologie était ainsi présentée :

$V_1 + V_2 + ... + V_K \sim 0$ *si les sous-variétés de dimension* m $V_1, V_2, ..., V_K$ *de la variété* M *forment le bord d'une sous-variété de dimension* $m+1$ *de* M.

Poincaré proposa également ensuite de représenter les variétés via une décomposition en cellules (donc de les représenter par des complexes cellulaires), affirmant semble-t-il que toute variété admet une triangulation. Il put ainsi introduire les matrices d'incidence et fournir un algorithme de calcul des nombres de Betti et définir les nombres de torsion. Mais la démarche de Poincaré souleva bon nombre de problèmes auxquels peu de réponses avaient été apportées au milieu des années 1920. On peut citer principalement le problème de l'existence d'une décomposition en cellules pour une variété donnée, l'invariance des nombres de Betti et de torsion pour deux triangulations d'une même variété, l'invariance de l'homologie ainsi définie pour deux variétés homéomorphes, etc. Ces problèmes sont en fin de compte liés à celui de la définition elle-même de variété. Soit on adoptait le premier point de vue de Poincaré et tentait de montrer des théorèmes d'existence de triangulation pour de telles variétés, soit on partait du principe qu'une variété était – par définition – un complexe cellulaire, et on cherchait des conditions de nature combinatoire pour qu'une variété vérifie certaines propriétés comme la dualité de Poincaré. Étant donné la commodité des complexes cellulaires pour le calcul des nombres de Betti et de torsion et la difficulté à prouver l'existence de triangulations pour les variétés en général (l'existence de triangulations pour les variétés 2-dimensionnelles, par exemple, ne fut prouvée qu'en 1925 par T. Radó), on peut comprendre aisément que les topologues aient en général pris, jusqu'à Vietoris, les complexes simpliciaux comme base de leurs réflexions.

4. Walther Mayer

Le travail de Vietoris a une filiation directe et immédiate via celui de Walther Mayer (de Vienne) et en particulier par le biais de l'article [May29]. La première partie de [May29], soumise le 16 novembre 1927, voit Mayer préciser en introduction : « In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte. » [45] Mayer se place d'un point de vue abstrait et donne un système d'axiomes pour les complexes[46]. Pour notre propos, nous nous limiterons à l'étude de la première partie, qui concerne essentiellement les définitions et l'axiomatique.

Les complexes sont vus comme objets d'un module des complexes Σ et à chaque complexe est associé un entier – appelé dimension – compris entre 0 et un certain

[44] Pour plus de détails, on pourra consulter [Sch99].

[45] « J'ai été initié à la topologie par mon collègue Vietoris dont j'ai fréquenté le cours 1926/27 à notre université. »

[46] Mayer renforce d'ailleurs ce point de vue abstrait en précisant que les complexes sont des objets qu'il ne faut pas forcément considérer comme représentant des entités géométriques.

entier n qui est la dimension du module Σ. La notion de simplexe disparaît ainsi, de même que la notion de face, et en particulier celle de sommet, qui était jusque-là nécessaire pour déterminer la dimension d'un simplexe. Les axiomes introduits par Mayer sont les suivants :

(1) il existe une opération entre les complexes de Σ qui fait de l'ensemble des complexes $\{K^{(\rho)}\}$ d'une dimension donnée ρ un groupe abélien ;

(2) il n'y a aucun élément d'ordre fini dans $\{K^{(\rho)}\}$;

(3) pour tout ρ il existe une famille finie de complexes ρ-dimensionnels $a_1^{(\rho)}$, ..., $a_\tau^{(\rho)}$ telle que tout complexe ρ-dimensionnel de $\{K^{(\rho)}\}$ est inclus dans $\left\{\sum_{i=1}^{\tau} p_i a_i^{(\rho)}, p_i \in \mathbb{Z}\right\}$;

(4) il existe une opération R, dite "bord", qui à tout complexe ρ-dimensionnel $K^{(\rho)}$ de Σ $(1 \leqslant \rho \leqslant n)$ associe un complexe $(\rho - 1)$-dimensionnel de Σ noté $R(K^{(\rho)})$;

(5) R est $\mathbb{Z}$-linéaire ;

(6) $R \circ R = 0$.

Mayer en arrive ensuite très rapidement à définir les groupes d'homologie (juste après l'introduction des cycles, des nombres de torsion et des cycles homologues à 0). Il y a une avancée notable : alors que chez Vietoris le concept de groupe d'homologie pouvait apparaître forcé par les circonstances, il est ici pleinement assumé. Rien en effet dans ses axiomes n'obligeait Mayer à l'introduire et ce d'autant plus que, d'après l'axiome 3, les groupes de complexes sont de génération finie – donc entièrement caractérisés par les nombres de Betti et de torsion – au contraire de ceux utilisés par Vietoris pour les espaces métriques compacts.

Pourtant l'importance des outils de la théorie des groupes ne semble toujours pas décelée chez Mayer. On pourrait croire le contraire vu que, à la différence de Vietoris, il commence par définir le ρ-ième groupe d'homologie comme le groupe obtenu comme quotient du groupe des cycles ρ-dimensionnels par le sous-groupe des cycles ρ-dimensionnels homologues à 0 ; mais il ressent le besoin de montrer par la suite que les classes de cycles modulo la relation d'homologie se comportent bien comme un groupe additif[47], comme si la définition par passage au quotient n'était pas totalement satisfaisante. En outre, la vision matricielle guide la plupart des calculs. Mayer raisonne continuellement à l'aide des matrices d'incidence et, avant toute considération, se donne une base des complexes (les facteurs invariants sont, de ce fait, toujours mis en évidence via des changements de base), s'obligeant dans la plupart des cas à montrer que les résultats qu'il obtient sont indépendants de la base considérée. On peut rétrospectivement d'autant plus s'étonner que Mayer ne se soit pas affranchi des matrices que l'article [Vie27A] de Vietoris semblait aller dans ce sens, cf. p. 456, Vietoris parlant des nombres de connexité : « Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst. »[48] Il y a d'ailleurs à ce sujet une opposition très nette entre l'article de Vietoris et celui de Mayer : Vietoris n'a aucun usage de l'algèbre linéaire dans [Vie27A] alors qu'elle est omniprésente chez Mayer.

[47] Cf. [May29] pp. 7-8 : il vérifie que l'addition entre classes est bien définie, qu'elle est commutative, que la classe des cycles d'homologie nulle est le neutre pour cette addition, etc.

[48] « Nous avons justement détaché la définition elle-même de la description par des matrices. »

5. Heinz Hopf

5.1. Une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré

Le dernier article que nous étudierons est l'article [Hop28B] de Heinz Hopf. Il est important de noter que Hopf est venu pour la première fois à Göttingen en 1926, y rencontrant Paul Alexandroff – avec qui il écrivit plus tard un célèbre manuel de topologie [AH35] – et bien sûr Emmy Noether, puis y est retourné à plusieurs reprises entre 1926 et 1928. Dans cet article [Hop28B] de 1928, Hopf reprend, d'une manière différente, la preuve[49] d'une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré[50]. Entrons plus avant dans le détail de cet article : celui-ci se divise en trois paragraphes.

Le premier paragraphe énumère des propriétés classiques de théorie des groupes, en particulier des groupes abéliens de génération finie. Hopf s'intéresse notamment aux groupes quotients et à la trace (« Spur ») d'un endomorphisme d'un groupe abélien libre de rang fini et établit la relation

$$SG = SH + S\frac{G}{H},$$

où G est un groupe abélien libre de rang fini n, H un sous-groupe de G stable par un endomorphisme f de G et tel que le quotient $\frac{G}{H}$ soit lui aussi libre (il prouve qu'un tel quotient est obligatoirement abélien et de génération finie), SG désignant la trace de f en tant qu'endomorphisme de G, SH la trace de f en tant qu'endomorphisme de H et $S\frac{G}{H}$ la trace de l'endomorphisme induit par f sur $\frac{G}{H}$.

Le deuxième paragraphe traite notamment des définitions liées aux complexes. Considérant un complexe[51] C^n de dimension n , il désigne par T^i_j, $j = 1,\ldots,a^i$, ses simplexes orientés (l'orientation étant définie selon l'ordre des sommets de T^i_j) et nomme « complexe i-dimensionnel dans C^n » toute combinaison linéaire à coefficients entiers des simplexes T^i_j.[52] Ainsi Hopf emploie le mot « complexe » pour deux choses différentes, le complexe C^n étant un complexe au sens d'Alexander et les complexes i-dimensionnels dans C^n étant les i-chaînes au sens d'Alexander dans [Ale26]. Il introduit l'application de bord ρ par sa valeur sur les simplexes et en la prolongeant par linéarité, puis la notion de cycle (complexe annulant le bord). Il définit enfin un « diviseur de bord » (« Randteiler ») comme un complexe dont un multiple est un bord et introduit les groupes commutatifs $\mathfrak{L}^i \supset \mathfrak{Z}^i \supset \overline{\mathfrak{R}^i} \supset \mathfrak{R}^i$, respectivement groupe des complexes, groupe des cycles, groupe des diviseurs de bord et groupe des bords i-dimensionnels (les trois derniers ensembles sont bien des groupes pour l'addition d'après les propriétés de ρ). Il en arrive ainsi à définir

[49] Sa preuve originelle fait l'objet d'un article précédent [Hop28A].

[50] La formule d'Euler-Poincaré est une généralisation de la célèbre formule d'Euler pour les polyèdres (S-A+F=2). Elle est notamment donnée par Alexander dans [Ale26], p. 316. Selon les notations du premier paragraphe, cette formule est : $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i P^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha^i$. Elle est au cœur du débat dans [Lak84].

[51] La définition d'un « complexe » n'est pas rappelée mais il faut certainement entendre ici « complexe » au sens d'Alexander dans [Ale26] car Hopf y fait référence dans l'article [Hop28A].

[52] « Für jedes i nennen wir die Linearformen in den T^i_j mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten "die in C^n liegenden i-dimensionalen Komplexe." »

le i-ième groupe de Betti $\mathfrak{B}^i$ comme étant le quotient $\dfrac{\mathfrak{Z}^i}{\overline{\mathfrak{R}^i}}$, prouve qu'il s'agit d'un groupe (abélien) libre, et appelle i-ième nombre de Betti (noté p^i) le rang de $\mathfrak{B}^i$. Il montre enfin que ρ induit un isomorphisme entre $\dfrac{\mathfrak{L}^i}{\mathfrak{Z}^i}$ et $\mathfrak{R}^{i-1}$.

Dans le troisième paragraphe il ne reste plus à Hopf, avant de débuter la preuve, qu'à introduire la notion d'application simpliciale entre deux complexes n-dimensionnels C^n et K^n. Il s'agit d'une application de l'ensemble des sommets de C^n dans l'ensemble des sommets de K^n, telle que les images des sommets d'un simplexe de C^n soient les sommets d'un simplexe de K^n. Il montre que toute application simpliciale commute avec ρ puis en déduit que toute application simpliciale induit un homomorphisme entre chacun des groupes $\mathfrak{L}^i$, $\mathfrak{Z}^i$, $\overline{\mathfrak{R}^i}$, $\mathfrak{R}^i$ des complexes respectifs et, en utilisant les résultats des paragraphes précédents, établit la relation

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{B}^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{L}^i$$

comme généralisation de la formule d'Euler-Poincaré (S désignant la trace comme endomorphisme d'une application simpliciale f de C^n dans K^n, où C^n est une subdivision simpliciale de K^n). Il obtient cette dernière dans le cas particulier où f est l'identité de C^n dans lui-même.

5.2. La part de Noether dans le travail de Hopf

Cette brève étude terminée se posent deux questions :

– en quoi l'influence d'Emmy Noether est-elle notable dans cet article de Hopf ?
– en quoi l'article de Hopf est-il original du point de vue de la naissance des groupes d'homologie (et notamment en quoi se distingue-t-il des articles de Vietoris et de Mayer) ?

Nous répondrons à la deuxième question plus tard mais nous pouvons d'ores et déjà répondre à la première question. Citons Hopf lui-même, dans son introduction : « Meinen ursprünglichen Beweis dieser Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E. Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten.»[53] L'idée d'introduire des concepts de théorie des groupes lui a donc été fournie par Emmy Noether. Cela se traduit dans son article par un premier paragraphe totalement dédié à des propriétés de théorie des groupes et définissant les outils lui permettant de simplifier sa première preuve. L'efficacité de cette démarche est telle qu'il n'y a en fin de compte qu'un seul résultat intermédiaire non trivial qui ne provienne pas de propriétés sur les groupes (il s'agit du fait qu'une application simpliciale

[53] « J'ai pu, lors d'un de mes cours de l'été 1928 à Göttingen, réécrire de manière bien plus limpide et plus simple ma preuve originelle de cette généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant, sous l'influence d'Emmy Noether, des notions de théorie des groupes. »

commute avec le bord[54]). Il est d'ailleurs intéressant de noter que Hopf n'a pas introduit la notion de groupe d'homologie dans cet article mais celle de groupe de Betti, le groupe de Betti représentant la partie sans torsion du groupe d'homologie (en quotientant par le groupe des diviseurs de bord, non par le groupe des bords, la torsion est supprimée). Les groupes de Betti suffisent au but de l'article de Hopf et, qui plus est, lui permettent de rester dans le cadre simple des groupes abéliens libres de génération finie. Le caractère novateur de cet article de Hopf vient donc moins de la présence des groupes d'homologie que de l'utilisation systématique de la théorie des groupes et, en conséquence, de l'abandon des matrices d'incidence.

D'autres témoignages nous permettent d'étayer les propos de Hopf en confirmant l'importance de Noether dans la genèse de l'article de 1928. Tout d'abord Hopf lui-même, bien des années plus tard, précise dans [Hop66] (p. 12) ce qu'Emmy Noether lui a appris, et l'on peut se rendre compte que l'on retrouve les concepts formulés par Noether presque mot pour mot dans l'article [Hop28B] de Hopf[55], à la différence près que dans cet article Hopf considère les groupes de Betti, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des diviseurs de bord, et non les groupes d'homologie, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des bords. Paul Alexandroff, topologue russe, ami de Hopf et de Noether et visiteur régulier de Göttingen de 1923 à 1929, explique quant à lui, dans son éloge d'Emmy Noether [Alex83], que Noether a assisté à ses cours et à ceux de Hopf des étés 1926 et 1927, et insiste sur le fait qu'elle a *immédiatement* remarqué tout le bénéfice qu'il y aurait à introduire les groupes (de complexes, de cycles etc.) en topologie et proposé de définir les groupes de Betti ; Alexandroff ajoute qu'Hopf et lui se rallièrent sans délai à ses propositions et que l'article [Hop28B] de Hopf est repose entièrement sur les remarques de Noether[56]. Alexandroff va donc peut-être encore plus loin que Hopf en attribuant absolument toutes les nouveautés conceptuelles de [Hop28B] à Emmy Noether et ce, du fait de remarques datant de 1926 ou 1927. Cette affirmation semble cohérente avec les propos de l'abstract de la conférence de Noether évoquée dans le deuxième paragraphe et les souvenirs d'Alexandroff du

[54] Ce point est important. Comme on l'a déjà mentionné plus tôt, il permet d'en déduire qu'une application simpliciale induit un homomorphisme entre les groupes des complexes, des cycles, des diviseurs de bord et des bords. Sont également induits des homomorphismes entre groupes de Betti et d'homologie. Donc, étant donné deux complexes n-dimensionnels et une application simpliciale entre eux, on sait définir les groupes d'homologie/Betti de dimension 0 à n de ces deux complexes et des homomorphismes entre leurs groupes d'homologie/Betti respectifs, induits par l'application simpliciale. Ainsi est mis en évidence l'aspect plus tard appelé « fonctoriel » de l'homologie, si important dans le développement futur de la topologie et d'autres domaines des mathématiques. Nous renvoyons au chapitre 6 de [McL06] pour un développement de l'essor des foncteurs en lien avec Noether et la topologie.

[55] « Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet : das Bild ∂X^{r+1} ist in dem Kern Z^r der Abbildung $\partial : X^r \to X^{r-1}$ enthalten ; die Faktorgruppe $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe ».

[56] Cf. [Alex83] p. 9 : « In the summers 1926 and 1927 she went to the courses on topology which Hopf and I gave at Göttingen. (...) she immediately observed that it would be worthwile to study directly the groups of algebraic complexes and cycles (...), she suggested immediately defining the Betti group (...) she noticed how simple and transparent the proof of Euler-Poincaré formula becomes if one makes systematic use of the concept of a Betti group. »

repas à Blaricum[57] au cours duquel Emmy Noether aurait donné la définition des groupes de Betti de complexes.

L'abstract d'Emmy Noether, étudié dans le deuxième paragraphe, laisse imaginer assez aisément qu'elle avait déjà en sa possession l'idée de la définition des groupes de Betti au début de l'année 1925. L'article [Hop28B] de Hopf met en œuvre les idées en germe dans le résumé de Noether : laisser de côté les modules sur les anneaux principaux et placer à la base de la théorie des complexes la notion de groupe. On a déjà dit qu'Emmy Noether n'avait jamais écrit d'article de topologie et que ses seuls propos sur le sujet inscrits dans la littérature mathématique semblent être ceux de l'abstract. Néanmoins on peut se rendre compte que la topologie n'était pas totalement absente des pensées d'Emmy Noether, ce qui explique qu'elle ait pu en parler en conférence et proposer une avancée conceptuelle notable dans un domaine qui n'était pas le sien. L'origine des réflexions de Noether en lien avec la topologie semble provenir des visites régulières d'Alexandroff à Göttingen à partir de mai 1923, qui furent accompagnées de nombreuses discussions avec Noether. Celle-ci sembla montrer un réel intérêt aux investigations d'Alexandroff[58].

On peut penser que, dès lors, Emmy Noether a répété ses remarques à plusieurs reprises, le temps que certains topologues se persuadent de leur intérêt. Peu d'occasions se sont présentées à elle vu que la topologie n'était pas un sujet d'étude de Göttingen. Il y eut d'abord le séjour chez Brouwer lors des vacances de Noël 1925, avec une présence importante de topologues (Alexandroff, Brouwer, Menger, Vietoris... cf. [Alex79] p. 323), puis les visites de Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926 et les cours donnés dès lors par Alexandroff et Hopf furent pour Noether l'occasion d'appliquer ses idées en situation. On comprend mieux ainsi que Noether ait pu faire des remarques *immédiatement* – comme le fait remarquer de façon insistante Alexandroff dans [Alex83] – à l'occasion de leurs cours vu qu'elle ne faisait que leur expliquer des concepts qu'elle avait déjà formulés depuis plus d'un an. Alexandroff les avait manifestement déjà entendues mais probablement sans en sentir alors toute la portée ou sans vouloir se consacrer aux perspectives ouvertes par Noether, tandis que pour Hopf il s'agissait d'une totale découverte.

6. Vietoris, synthèse de diverses influences ?

On a pu relever de fortes distinctions lors de l'étude, au cours des paragraphes 3, 4 et 5, des articles de Vietoris, Mayer et Hopf. Ainsi l'article [Vie27A] de Vietoris, première occurrence dans la littérature mathématique de la notion de groupe d'homologie, a pour idée directrice la généralisation en dimension finie quelconque des concepts de Brouwer dans [Bro12A] sur l'homotopie. De ce fait l'intuition géométrique mène les réflexions et les matrices d'incidence sont abandonnées car ne pouvant décrire les objets considérés par Vietoris. Les nombres de Betti et de torsion n'ayant en général pas d'existence pour les objets considérés par Vietoris,

[57] Cet épisode a déjà été évoqué en introduction, note 6.
[58] Cf. [Alex79] p. 299 : « We [Alexandroff et Urysohn] constantly met Emmy Noether on a relaxed basis and very often talked to her, about topics both in ideal theory, and in our work, which had caught her interest at once. » et p. 316 : « We were constantly meeting Emmy Noether on her famous walks, which were first called algebraic and after our arrival came to be called topological algebraic. »

il leur faut un substitut, et la notion de groupe d'homologie s'impose alors naturellement. Il n'y a cependant aucune utilisation d'outils de théorie des groupes, et même une présence très faible d'une terminologie propre aux groupes, l'usage de la notion de quotient, par exemple, étant inexistant.

L'influence de Brouwer sur l'article [Vie27A] de Vietoris étant prépondérante, on peut mentionner quelques aspects du travail de Brouwer afin d'expliquer la démarche de Vietoris et ce qui la distingue de celle de Noether et de Hopf.

6.1. L. E. J. Brouwer

Il est difficile d'évaluer ce que Brouwer connaissait et pensait des travaux d'Emmy Noether. On sait cependant qu'il l'a rencontrée en 1912 et l'a très probablement revue plusieurs fois par la suite car il se rendait régulièrement à Göttingen[59]. En outre, l'invitation à séjourner chez lui lors de l'hiver 1925 lancée à Noether indique qu'ils étaient certainement en bons termes.

Étant donné les propos de Noether (cf. note 6) lors du repas chez Brouwer, il peut paraître assez surprenant que les méthodes développées par Vietoris et celles encouragées par Noether soient si éloignées l'une de l'autre. On peut l'expliquer notamment par la fidélité de Brouwer à ses propres conceptions : l'esprit de l'intuitionnisme et celui de l'algèbre moderne sont pour le moins inconciliables. En outre, le travail de Brouwer au début des années 1910 montre bien que l'idée de l'introduction de concepts algébriques lui était alors étrangère[60] et si l'on part du principe que l'activité de Brouwer fut assez éloignée de la topologie à partir de 1913 et que l'algèbre n'a jamais été un de ses domaines de recherche, on peut aisément comprendre son manque de sensibilité aux innovations de Noether.

L. E. J. Brouwer écrivit entre 1910 et 1913 une série d'articles qui firent date autant par les résultats qu'ils contiennent que par la nouveauté des méthodes mises en œuvre – qui purent être réemployées efficacement par la suite par d'autres topologues. Il fut notamment le premier à considérer ce qu'on appelle maintenant des applications homotopes[61], d'ailleurs présentes dans l'article [Bro12A] mentionné plus haut. Dans ses travaux, l'importance de l'intuition géométrique et même de l'approche géométrique est absolument manifeste, et confirmée par ses propres paroles : « It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized. » [62]

Cet attachement à un traitement géométrique des problèmes mathématiques ainsi qu'une méconnaissance ou un désintéressement volontaire ont fait que Brouwer ne s'est pas consacré à l'homologie alors même que les outils qu'il avait introduits ont ensuite permis un traitement satisfaisant de questions soulevées par

[59] Cf. [FH76] p. XIII : « In the summer of 1909 he seems to have met Hilbert, and from 1911 onwards he made regular visits to Göttingen. »

[60] L'article [Bro12A] mentionné dans le troisième paragraphe, notamment, se prêtait parfaitement à l'introduction du langage des groupes, chaque lacet ainsi que tous ceux qui lui sont homotopes représentant un seul et même élément du groupe fondamental, mais il en est pourtant totalement absent.

[61] Cf. [Bro12B].

[62] Cf. [Bro75] p. 120.

Poincaré[63]. En fait, Brouwer s'est peu à peu détourné de la topologie à compter de 1913 du fait tout d'abord de la première guerre mondiale puis surtout de son intérêt grandissant pour les questions de fondation des mathématiques et le développement de l'intuitionnisme. Ce n'est finalement qu'en 1923 que Brouwer retrouva – mais seulement pour un temps et surtout indirectement, en dirigeant les travaux de Menger, Alexandroff et Vietoris – un attrait supérieur à la topologie, relancé, semble-t-il, par les résultats d'un jeune topologue russe prometteur – mais décédé peu après – Pavel Urysohn.

6.2. Le rôle d'Alexandroff

L'influence de Brouwer ne s'est pas limitée à celle que nous avons mis en évidence au sujet de Vietoris. Alexandroff avait également rejoint Brouwer à Blaricum en mai 1925, soit peu de temps avant l'arrivée de Vietoris. Si Alexandroff s'est rendu à Blaricum, c'est qu'il était lui-même en train de mener une réflexion visant à adapter les propriétés et concepts essentiels de la topologie combinatoire à des variétés générales. Pour ce faire, il avait commencé par poser les fondations d'une topologie des variétés à l'aide de la théorie des ensembles[64]. Son idée consistait à approcher des éléments n-dimensionnels par des ensembles finis de « tétraèdres » n-dimensionnels, les tétraèdres en question consistant en fait simplement en la donnée de $n+1$ points jouant le rôle de leurs sommets.

Le procédé d'approximation utilisé par Alexandroff est clairement inspiré de celui de Brouwer, de même que celui qu'a utilisé Vietoris pour définir des simplexes dans un espace quelconque. Ce n'est en fait pas une coïncidence ; Vietoris reconnaît dans [Vie26] l'apport fructueux de conversations avec Alexandroff, donc l'influence de celui-ci, pour son approche des espaces métriques.

McLarty, dans [McL06], soulève ce problème des échanges entre Alexandroff et Vietoris pour ce qui est de l'indépendance de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether au sujet de la création des groupes d'homologie. Le point clé est que l'on peut, comme McLarty l'explique dans [McL06], avancer qu'une motivation au passage des invariants numériques aux groupes d'homologie est la volonté de formuler des résultats non seulement pour les espaces, mais aussi pour les application continues entre les espaces[65]. L'article de 1928 de Hopf illustre d'ailleurs très bien cette idée. Or, celle-ci s'apparente clairement au projet d'Emmy Noether d'édifier l'algèbre sur la base de la théorie des ensembles, en oubliant la nature des objets et les opérations algébriques qui les composent, pour décrire les structures situées au-dessus des objets à l'aide de certains sous-ensembles et de certaines applications

[63] Selon Dirk van Dalen, dans [Dal99] p. 956 : « Brouwer stubbornly stuck to his geometrical approach, either unaware of the potential of homology as initiated by Poincaré, or just preferring the geometric attack. » Voir aussi le jugement de Dieudonné, cf. [Die89] p. 161 : « nobody understands why Brouwer never mentionned these papers [of Poincaré], nor tried to apply his fundamental discovery of simplicial approximation to bring to life the theorems guessed by Poincaré (as Alexander did a little later). »

[64] Cf. son article [Alex25] achevé peu avant sa venue à Blaricum.

[65] Bill Lawvere semble même affirmer que cette motivation est la principale raison de l'adoption des groupes d'homologie au détriment des invariants numériques. Ralf Krömer argumente en détail en faveur de ce point de vue dans [Kro07] (en 2.1.2).

(des morphismes pour ladite structure)[66]. Comme l'influence d'Emmy Noether sur Alexandroff est indéniable, qu'Alexandroff chercha à utiliser ses nouvelles bases de la topologie pour établir des théorèmes sur les applications continues entre espaces topologiques[67], et que l'on trouve le même genre de théorèmes dans l'article [Vie27A] de Vietoris, on peut être tenté de conclure à l'influence de Noether – ou en tout cas de son approche de la topologie, via Alexandroff – sur Vietoris.

Ces divers jeux d'influence rendent la situation bien complexe. Néanmoins, il ne nous semble pas que l'on puisse remettre en cause l'indépendance de Vietoris du fait des arguments précédents. Même si les motivations algébriques, et à la rigueur topologiques, de Noether sont claires, la façon dont ses contemporains ont pu se les approprier, surtout en un temps si court, l'est beaucoup moins. Si Alexandroff avait une idée précise des objectifs algébriques de Noether et s'est efforcé de les transposer à la topologie, ce n'est probablement pas le cas de Vietoris. Alexandroff a fait la synthèse de l'influence de Brouwer et de celle de Noether alors que Vietoris a été bien plus profondément influencé par Brouwer.

Lorsqu'on souligne la volonté de Noether de se concentrer sur les structures et les morphismes entre structures, donc sur des propriétés de type fonctoriel, c'est évidemment parce qu'on y décèle dans le prolongement de celle-ci la naissance de la théorie des catégories. Cette remarque est donc extrêmement intéressante mais il apparaît difficile de retrouver dans le travail de Vietoris des traces de cette volonté de Noether. Le résultat le plus ancien retenu par Ralf Krömer concrétisant la volonté d'étudier des applications en lien avec l'homologie est la généralisation de la formule d'Euler-Poincaré par Hopf (que nous avons nous-mêmes retenue comme premier emploi efficace des préceptes de Noether). Comme nous l'avons vu, celle-ci s'est faite dans le cadre des complexes simpliciaux classiques et n'a donc absolument pas nécessité les considérations topologiques d'Alexandroff et de Vietoris. Le travail de Vietoris nous semble réellement ne pas avoir besoin des idées de Noether, de même que les idées de Noether n'ont pas besoin de son travail pour être légitimées. Alexandroff a pu aider Vietoris à la création de l'homologie pour des espaces compacts mais, concrètement, les idées d'approximation remontant aux premiers travaux de Brouwer nous semblent de loin les plus importantes dans le travail de Vietoris, et l'on imagine de toute façon mal qu'Alexandroff ait pu avoir plus d'influence que Brouwer sur Vietoris.

7. Conclusion

L'article [May29] de Mayer se trouve lui aussi assez éloigné des idées de Noether et de la concrétisation qu'en a donnée Hopf. Son principal intérêt est de fournir la première axiomatisation des groupes d'homologie, affirmant ainsi l'importance de ce concept. Mais, par certains traits, cet article est un retour en arrière par rapport aux avancées de Vietoris. Les groupes d'homologie définis par Mayer sont moins généraux que ceux considérés par Vietoris car il considère uniquement des complexes de type fini. Alors que l'outil matriciel avait été, certes probablement par obligation, abandonné par Vietoris, il est chez Mayer essentiel. Enfin, l'utilisation de méthodes de théorie des groupes est à peu près totalement absente.

[66] Pour les groupes par exemple, les sous-ensembles sont les sous-groupes normaux et les morphismes les morphismes de groupes. On trouvera plus de détails dans l'article [McL06] de McLarty.
[67] Comme dans [Alex26].

Les motivations de Vietoris sont bien différentes de celles de Hopf et Noether. Noether procède à une réévaluation de l'ordonnancement des notions et considère que la théorie des groupes doit être placée à la base de la théorie des complexes et doit ainsi fournir les outils permettant de remplacer dans les calculs les matrices d'incidence peu commodes. Il est plutôt normal que Noether ait proposé une telle approche conceptuelle sans l'étayer par un exemple d'application concret. D'une part parce qu'elle n'était pas spécialiste de topologie ; d'autre part car sa proposition d'un intérêt des groupes en homologie n'est qu'une expression d'un principe général la guidant, consistant à poser des fondations autant que possible générales et abstraites (c'est-à-dire notamment en ayant abstrait les seules propriétés pertinentes requises pour la définition des objets d'étude). Dans le cas de la topologie, il lui semble que les groupes doivent être les objets de base des considérations, et non plus les modules, les formes linéaires ou les nombres de Betti et de torsion. À titre d'exemple similaire, elle fit la connexion quelques années plus tard entre la théorie des représentations et des algèbres associatives via l'étude d'anneaux non commutatifs (cf. [Noe29]). L'article [Hop28B] de Hopf concrétise les idées de Noether : il isole les définitions et propriétés propres à la théorie des groupes qui lui seront utiles et définit les complexes de façon à pouvoir utiliser facilement les concepts ainsi introduits. Il démontre ainsi l'intérêt pratique de l'introduction de la théorie des groupes en topologie, alors qu'elle pouvait jusqu'alors être seulement considérée comme un choix esthétique ou philosophique.

Cependant la première démonstration de la pertinence des groupes en topologie n'est pas le fait de Hopf, mais de Vietoris. Les mérites de Hopf et de Vietoris sont d'ailleurs bien distincts, et complémentaires. Avec l'article de 1928, Hopf obtient la simplification d'une preuve via l'utilisation de la théorie des groupes abéliens libres et laisse entrevoir une approche facilitée de l'homologie grâce aux outils de la théorie des groupes. Mais il reste dans le cadre très classique des complexes combinatoires et ne démontre aucun résultat nouveau[68]. Vietoris, par contre, sort du cadre combinatoire et décide d'étudier l'homologie d'espaces jusque-là hors de portée, ce qui l'amène à définir la notion de groupe d'homologie. Les groupes d'homologie s'imposent dans son étude de manière nécessaire et permettent à la topologie d'étendre son domaine d'investigations. Cela dit, alors même que les groupes apparaissent naturellement dans le travail de Vietoris, ceux-ci ne sont pas assumés autant qu'ils l'auraient été par Hopf ou Noether. En effet contrairement à Hopf, Vietoris ne se munit pas d'une assise théorique via des rappels de théorie des groupes et, comme nous l'avons déjà dit, la notion de quotient semble être traitée avec une certaine défiance.

Si nous en revenons pour finir au problème plus large évoqué en introduction de l'algébrisation de la topologie, les réalisations de Hopf et de Vietoris ont toutes deux une grande importance et sont complémentaires. En effet, si l'on suit Klaus Volkert [Vol02] pour qui les raisons de l'algébrisation de la topologie sont d'une part la simplification et la clarification de la théorie et d'autre part la généralisation

[68] Il avait déjà, dans [Hop28A], présenté sa généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant des méthodes combinatoires classiques, sans l'usage des groupes d'homologie. La nouveauté de cette généralisation vient de ce qu'elle exprime une propriété portant sur une application continue entre complexes. L'article [Hop28B] reformule cette généralisation et la prouve plus simplement, à l'aide des groupes de Betti.

au cas de génération non finie[69], il apparaît clairement que les idées de Noether et les travaux de Hopf sont à la source de la première raison tandis que Vietoris est à l'origine de la seconde.

Fait remarquable, les travaux que nous avons étudiés de Vietoris et de Mayer se sont fait connaître d'Alexandroff et de Hopf par le système de « review » pour les revues ! Ainsi possédons-nous des traces de l'appréciation des travaux de Vietoris et de Mayer par Alexandroff et Hopf. L'article [Vie27A] de Vietoris et l'article [May29] de Mayer ont été relus respectivement par Alexandroff et Hopf pour le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (de 1927 et 1929 respectivement). Hopf semble trouver un véritable intérêt au travail de Mayer. Il note que les complexes y sont considérés de façon abstraite et que les ensembles de complexes, de cycles, de classes d'homologie, y sont traités comme des groupes abéliens, mais il ne souligne cependant pas l'introduction des groupes d'homologie. Hopf considère donc la présence de la théorie des groupes dans l'article de Mayer comme un fait important, bien plus que la seule définition des groupes d'homologie, alors même que l'attachement de Mayer à la vision matricielle limite grandement l'utilisation qu'il aurait pu faire des outils de la théorie des groupes. L'introduction des groupes d'homologie dans l'article de Mayer semble d'ailleurs l'avoir tellement peu marqué qu'il écrira en 1964 dans [Hop66], p. 12 : « ich weiss nicht einmal, ob der Begriff der « Homologiegruppe » schon irgendwo schwarz auf weiss in der Literatur vorgekommen war. Ich selbst habe sie zum ersten Mal in meiner Note « Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel » (...) benutzt. » [70], ce qu'il nuancera en note de [Hop28B] dans ses Selecta : « Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von EMMY NOETHER stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt » [71]. Le commentaire d'Alexandroff au sujet de l'article de Vietoris est encore plus surprenant : il se contente de mentionner la généralisation des notions de l'article [Bro12A] de Brouwer et le résultat principal de l'article sans même relever l'introduction des groupes d'homologie. Ainsi semble-t-il bien que pour Alexandroff et Hopf la véritable avancée conceptuelle est la refonte de la topologie reposant sur la théorie des groupes, mais la définition de la notion de groupe d'homologie et l'appréhension par Vietoris d'objets comme les espaces métriques compacts, qui dépassent le cadre alors habituel des complexes, sont vraisemblablement à leurs yeux d'une importance qu'on peut juger rétrospectivement comme injustement faible.

[69] Comme illustration de la pertinence de ce second critère, on pourra remarquer qu'en 1930 van der Waerden publie une sorte d'état des lieux de la topologie (cf. [Wae30]) intitulé *Kombinatorische Topologie*, dont l'objet d'étude est selon lui les complexes formés à partir d'un nombre fini de simplexes, et qui intègre les travaux de Hopf et la notion de groupe d'homologie.

[70] « je ne sais pas si la notion de « groupe d'homologie » était déjà apparue noir sur blanc dans la littérature. Je l'ai moi-même employée pour la première fois dans ma note « Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel » ».

[71] « Il semble bien que la note ci-dessus soit la première publication dans laquelle le point de vue de l'homologie à l'aide de la théorie des groupes, dû à EMMY NOETHER et aujourd'hui familier, a été mis en valeur », cf. [Hop64] p. 183. Par cette phrase, Hopf ne se prononce plus comme c'était le cas dans la citation précédente sur la première apparition de la notion de groupe d'homologie mais souligne le fait que son article [Hop28B] est le premier à privilégier et à utiliser efficacement les concepts de théorie des groupes en topologie, ce qu'on ne peut contester.

Le phénomène historique précis étudié dans ces pages témoigne d'un phénomène plus général, à savoir celui de l'essor et de l'acceptation de l'algèbre moderne, ce mouvement si influent dans l'évolution de l'algèbre au vingtième siècle. L'apport indéniable de l'algèbre moderne à la recherche actuelle ne doit pas faire oublier que l'adoption par les mathématiciens de son esprit ne fut pas automatique. Ainsi Hermann Weyl par exemple, en 1931, exprimait-il son scepticisme au sujet des méthodes abstraites[72], et ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres.

L'algébrisation de la topologie, due pour une part conséquente à des personnes et des idées liées à l'algèbre moderne, s'est heurtée un temps au sentiment qu'elle était superflue[73]. Les résistances encore rencontrées au début des années 1930 à l'usage de la théorie des groupes en topologie, et ce parmi d'illustres mathématiciens, donnent à penser que l'article de Hopf, malgré ses mérites et la démonstration que la théorie des groupes est un cadre parfaitement adapté à la topologie combinatoire, a offert un gain pratique trop limité pour mener seul à l'algébrisation de la topologie. Et ceci met, par contraste, encore une fois en valeur l'apport de Vietoris dont l'article a offert un cadre d'investigations plus large à la topologie, à l'aide de la notion de groupe d'homologie, bien que sans mettre en œuvre les idées de l'algèbre moderne.

Notre conclusion se trouve confortée par Alexandroff lui-même... Celui-ci, dans son intervention[74] célébrant le centenaire de la naissance de Henri Poincaré lors du Congrès International des Mathématiciens de 1954, indiqua les réalisations pratiques dues à l'algébrisation de la topologie qui, selon lui, firent finalement disparaître le genre de doutes exprimés par Weyl et Lefschetz au début des années 1930.[75] Il s'agit pour lui de l'édification de la théorie de la dualité, du transfert des concepts homologiques à des espaces autres que les polyèdres et de l'introduction de la cohomologie. Si l'apport de Vietoris à la deuxième réalisation évoquée par Alexandroff est le plus évident et a été souligné dans les lignes précédentes, n'occultons pas non plus le fait que dans un des travaux cruciaux de Pontrjagin [Pon34] sur la dualité, celui-ci utilisa l'homologie élaborée par Vietoris !

8. Références

[Ale26] J. W. Alexander, *Combinatorial analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 301-329.

[Alex25] P. S. Alexandroff, *Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Mathematische Annalen **94** (1925), 296-308.

[Alex26] P. S. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Mathematische Annalen **96** (1926), 555-571.

[Alex72] P. S. Alexandroff, *Poincaré and Topology*, Math. Surveys **27** (1972), 157-168.

---

72 cité par Alexandroff dans [Alex83], p. 4 : « I should not pass over in silence the fact that today the feeling among mathematicians is beginning to spread that the fertility of these abstracting methods is approaching exhaustion. »

73 Pour Lefschetz, en 1930, utiliser la théorie des groupes en topologie n'est qu'une question de terminologie... Cf. [Lef30] : « Indeed everything that follows in this section can be, and frequently is, translated into the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology ».

74 Son discours fut transcrit en 1972, cf. [Alex72].

75 Pour le lecteur qui souhaiterait en savoir plus sur le processus d'algébrisation de la topologie consécutif à l'introduction des groupes d'homologie, nous renvoyons au chapitre 6 de [Vol02] qui en propose une étude historique synthétique.

[Alex79] P. S. Alexandroff, *Pages from an autobiography*, Russian Math. Surveys **34** (6) (1979), 267-302 ; **35** (3) (1980), 315-358.

[Alex83] P. S. Alexandroff, *In Memory of Emmy Noether, Address delivered by the President of the Moscow Mathematical Society P. S. Alexandrov on September 5. 1935*, EMMY NOETHER, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Springer-Verlag, 1983, 1-11.

[AH35] P. S. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.

[Bre99] E. Breitenberger, *Johann Benedikt Listing*, History of topology, 909-924, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Bro12A] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Mathematische Annalen **72** (1912), 422-425.

[Bro12B] L. E. J. Brouwer, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves*, Proceedings of Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **15** (1912), 352-360. In *Collected works*, Vol. 2, 527-535.

[Bro75] L. E. J. Brouwer, *The Nature of Geometry*, Collected Works, Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, 112-120, North-Holland, Amsterdam (1975).

[Cor96] L. Corry, *Modern Algebra and the rise of Mathematical Structures*, Birkhaüser, 1996.

[Dal99] D. van Dalen, *Luitzen Egbertus Jan Brouwer. 27.2.1881 Overschie - 2.12.1966 Blaricum*, History of topology, 947-964, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Die84] J. Dieudonné, *Emmy Noether and algebraic topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5-6.

[Die89] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhaüser, 1989.

[Epp99] M. Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie, Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1999.

[FH76] H. Freudenthal et A. Heyting, *The Life of L. E. J. Brouwer (27 February 1881 - 2 December 1966)*, in Brouwer *Collected works, Vol. 2 : geometry, analysis, topology and mechanics*, Amsterdam, New York, Oxford : North Holland, 1976 ; X-XV.

[Hau02] F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band II, Springer, 2002.

[Hir99] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and Topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 57-65, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[Hol89] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen **34** (1889), 26-56.

[Hop28A] H. Hopf, *A New Proof of the Lefschetz Formula on Invariant Points*, Proc. Nat. Acad. of Sciences USA **14** (1928), 149-153.

[Hop28B] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127-136.

[Hop64] H. Hopf, *Selecta*, Springer-Verlag, 1964.

[Hop66] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie*, Colloque de Topologie, CBRM Bruxelles (1966), 9-20.

[Kro07] R. Krömer, *Tool and object : a history and philosophy of category theory*, Birkhäuser,2007.

[Kro70] L. Kronecker, *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen* [Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Decbr 1870.] ; *Leopold Kronecker's Werke* 1, Chelsea, 1968.

[Lak84] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann, 1984.

[Lef30] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1930).

[Lis47] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), Göttingen 1848.

[ML86] S. Mac Lane, *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305-307.

[McL06] C. McLarty *Emmy Noether's 'set theoretic' topology : from Dedekind to the rise of functors*, in *The architecture of modern mathematics*, 187-208, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.

[May29] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatschefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1-42, 219-258.

[Noe25] E. Noether, *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Nachrichten der 27 Januar 1925, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abteilung) **34** (1926), 104.
[Noe29] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Math. Zeitschr. **30** (1929), 641-692.
[Pon34] L., Pontrjagin, *The general topological theorem of duality for closed sets*, Annals of Mathematics **35** (4) (1934), 904-914.
[Sar99] K. S. Sarkaria, *the topological work of Henri Poincaré*, History of Topology, 123-168, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Sch99] E. Scholz, *The Concept of Manifold, 1850-1950*, History of Topology, 25-64, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Van92] R. Vanden Eynde, *Historical Evolution of the Concept of Homotopic Paths*, Arch. Hist. Exact Sci. **45** (1992), no. 2, 127-188.
[Veb21] O. Veblen, *Analysis Situs* 2^e^ ed, AMS, New York, 1921.
[Vie26] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang von Kompakten Räume und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert läßt*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 1008-1013.
[Vie27A] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **97** (1927), 454-472.
[Vie27B] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abt.) **36** (1927), 28-29.
[Vol02] K. Volkert, *Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial **4** (2002).
[Wae30] B. L. van der Waerden, *Kombinatorische Topologie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **39** (1930), 121-139.
[Wae31] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* 2, Berlin, 1931.
[Wae35] B. L. van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), 469-476.
[Wae85] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.
[Wei99] C. A. Weibel, *History of Homological Algebra*, History of topology, 797-836, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[Wey23] H. Weyl, *Análisis situs combinatorio*, Revista Matematica Hispano-Americana **5**, 43 pages (1923).

INFORMATIONS

Les interactions pluridisciplinaires des mathématiques

Patrick Dehornoy[1] avec la collaboration de
Philippe Besse, Valérie Berthé, Patricio Lebœuf,
Marc Massot, Guy Métivier, Frédéric Patras

Ce texte présente un panorama des interactions pluridisciplinaires où sont engagés les mathématiciens des laboratoires de l'INSMI[2]. L'analyse repose sur une enquête effectuée au début de l'année 2010, et propose des données à la fois quantitatives et qualitatives. Le principal message est que les interactions jouent aujourd'hui un rôle très important, mettant en jeu environ un cinquième des mathématiciens français.

L'interdisciplinarité est de plus en plus répandue, en mathématiques comme partout dans la science contemporaine. Pour autant, faute de données quantitatives, voire qualitatives, suffisantes, il est assez difficile d'évaluer l'étendue du phénomène et de déterminer les formes précises qu'il prend, tout comme de reconnaître quelles mesures peuvent l'encourager. En dépit de la nature intrinsèquement incomplète des données collectées, qui limite la portée et la pertinence des observations, il nous a paru important de diffuser les résultats obtenus, au moins à titre de premier élément pour l'élaboration d'une réflexion globale sur l'interdisciplinarité.

Une version détaillée de ce texte comportant des informations complémentaires, en particulier quant à la répartition géographique des recherches interdiscipinaires sur le territoire français est disponible sur le site web de l'INSMI
`http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article293`

Contexte et objectifs

Cette étude ne prétend ni à la complétude, ni à l'exhaustivité : elle repose sur des données déclaratives et ne concerne que les recherches impliquant les UMR[3] relevant de l'INSMI. Les collaborations de mathématiciens d'autres organismes comme l'INRIA[4], l'INRA[5], l'INSERM[6] ou le CEA[7] n'y apparaissent pas ou que de façon indirecte.

[1] Contact : `patrick.dehornoy@cnrs-dir.fr`
[2] Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions.
[3] Unités mixtes de recherche.
[4] Institut national de recherche en informatique et automatique.
[5] Institut National de Recherche Agronomique.
[6] Institut national de la santé et de la recherche médicale.
[7] Commissariat à l'énergie atomique.

La principale conclusion de cette étude est que les interactions des mathématiques avec les autres disciplines sont beaucoup plus développées qu'on ne le pense en général : entre 20 et 25% des mathématiciens de la communauté sont directement concernés par des interactions pluridisciplinaires. L'ampleur des interactions se mesure à la fois sur le nombre de collaborations recensées (plus de 1000), le nombre de publications (plus de 1100), le nombre de thèses (plus de 300), le tout sur une période de quatre ans. Tous les domaines scientifiques sont concernés, sauf la chimie qui est très peu citée. La faiblesse relative du nombre de réponses dans le secteur des sciences humaines et sociales ne reflète peut-être pas bien la réalité. Toutes les mathématiques ne sont pas directement concernées, mais tous les grands domaines ont un secteur d'interaction.

Plan

Une première section regroupe des données globales concernant les effectifs mis en jeu, les organismes partenaires, la répartition disciplinaire et géographique des interactions. Ensuite, cinq sections sont consacrées à une analyse plus fine des données correspondant à cinq grands secteurs disciplinaires, à savoir l'informatique (section 2), le secteur mécanique–ingénierie–géosciences (section 3), le secteur physique–chimie–astronomie (section 4), les sciences du vivant (section 5), et, enfin, les sciences humaines et sociales (section 6).

1. Analyse globale

1.1. Mode opératoire et biais

Les interactions ici prises en compte sont les collaborations effectuées entre des mathématiciens des laboratoires dont l'INSMI est tutelle et des partenaires d'autres disciplines entre 2006 et 2009 et sanctionnées par au moins une publication, thèse, ou programme ANR, ainsi que toutes les collaborations en cours au 1er janvier 2010.

Afin d'éviter tout malentendu, on insiste sur le fait que cette étude ne prétend ni à l'exactitude, ni à l'exhaustivité. D'abord, la qualité des données recueillies a varié suivant les laboratoires, certains s'étant prêtés au jeu avec plus de zèle que d'autres. Il doit donc être entendu que toutes les données quantitatives doivent être prises avec précaution.

Ensuite, le passage par les laboratoires de l'IMSMI a écarté du champ de l'enquête les enseignants-chercheurs mathématiciens non rattachés à une structure CNRS, donc en particulier les personnels des équipes d'accueil en université et école d'ingénieur, pourtant certainement engagés dans des interactions. De même se trouve omise ou sous-évaluée au moins une partie des activités mathématiques d'interface développées par des chercheurs, mathématiciens ou non, appartenant à des laboratoires relevant d'autres instituts du CNRS ou d'autres organismes. D'une façon générale, un biais de cette enquête est d'ignorer les interactions entre mathématiciens et partenaires d'autres disciplines qui se déroulent entièrement à l'intérieur d'une seule structure, soit un laboratoire de mathématiques où sont affectés des non-mathématiciens, soit un laboratoire d'une autre discipline où sont affectés des mathématiciens : on rappelle qu'une trentaine de chercheurs CNRS de mathématiques (soit environ 10% de l'effectif) est affectée dans des laboratoires d'autres disciplines, et qu'un nombre équivalent de chercheurs non-mathématiciens est affecté dans des laboratroires de mathématiques.

Autre limite de l'exercice, un certain nombre d'options est discutable, voire arbitraire, notamment les regroupements disciplinaires et les choix de mots-clés et de domaines. Dans un souci d'homogénéité et d'équilibre, cinq grands secteurs ont été retenus : informatique, mécanique–ingénierie–géosciences, physique–chimie–astronomie, sciences du vivant (biologie, santé, écologie), et sciences humaines et sociales. Certains domaines se trouvent ainsi morcelés et leur image globale en est brouillée : c'est le cas notamment pour le traitement de l'image, partagé entre les secteurs informatique (algorithmes de traitement) et sciences du vivant (imagerie médicale), et pour l'hydrodynamique, partagée un peu arbitrairement entre les secteurs mécanique–ingénierie–géosciences (mécanique des fluides) et physique–chimie–astronomie (milieux dilués et plasmas). D'une façon générale, la position du calcul scientifique est floue : présent en tant que tel dans le secteur informatique, il est aussi indispensable comme vecteur d'interaction dans presque tous les autres secteurs, et son importance globale apparaît mal. Noter que les interactions ont été triées en fonction du secteur auquel se rattache le thème scientifique exploré, et non nécessairement celui auquel les collaborateurs extérieurs sont institutionnellement rattachés : une collaboration entre mathématiciens et informaticiens pour développer un modèle de glace est ici rattachée à la physique statistique dans le secteur physique–chimie–astronomie, et pas au secteur informatique.

1.2. Effectifs et production

Au total, 1 002 interactions ont été recensées (et retenues suivant les critères ci-dessus), mettant en jeu 778 mathématiciens (sans répétition) et 1 752 chercheurs d'autres disciplines. Ce chiffre inclut à la fois des chercheurs permanents et des chercheurs non-permanents, et il est peu précis. Néanmoins, quand on le rapproche de l'effectif total d'environ 3000 chercheurs en poste permanent dans les laboratoires de l'INSMI, on peut déduire que **près d'un cinquième des mathématiciens français** a été impliqué dans une collaboration interdisciplinaire au cours des quatre dernières années. La table 1 donne quelques précisions sur la répartition par secteur.

	Interactions recensées	Mathématiciens (sans répétition)	Mathématiciens (avec répétition)	Chercheurs partenaires
Informatique	192	167	267	368
Mécanique	223	170	339	348
Physique	180	155	252	316
Sciences du vivant	278	212	439	529
Sciences humaines	129	74	136	191
Total	1002	778	1433	1752

TAB. 1. Effectifs impliqués dans des interactions avec les autres disciplines

Les 1002 interactions retenues ont mené sur la période de référence à la production de 1594 publications, à savoir 1122 articles de revue et 475 proceedings. Rapporté à une production totale d'environ 8 000 à 10 000 publications pour l'ensemble des mathématiciens français durant la même période, ce chiffre corrobore la proportion d'un cinquième déjà rencontrée pour les effectifs. La table 2 donne les détails par secteur.

	Articles	Proceedings	Total	Moyenne par interaction	Moyenne par mathématicien
Informatique	207	134	341	1,8	2,0
Mécanique	239	110	349	1,6	2,1
Physique	219	34	253	1,4	1,6
Sciences du vivant	337	144	481	1,7	2,3
Sciences humaines	120	50	170	1,3	2,3
Total	1122	472	1594	1,6	2,0

TAB. 2. Publications liées à des interactions avec les autres disciplines

L'encadrement ou le co-encadrement de doctorants est un aspect important des partenariats d'interaction. Toujours sur la période 2006–2009, l'enquête a recensé 315 thèses. En rapprochant ce nombre du total d'environ 400 thèses de mathématiques par an, on trouve à nouveau un rapport de l'ordre du cinquième pour le pourcentage de thèses liées à une interaction. La table 3 montre que les pratiques diffèrent assez suivant les secteurs.

Finalement, on a également recensé les programmes ANR et analogues (ACI, ERC) liés à des interactions. Ceci ne constitue pas en soi une production, l'acceptation d'un projet ANR étant seulement un label de qualité. Néanmoins, il n'est pas inintéressant de constater que 189 programmes ANR (acceptés) ont été mentionnés, à comparer au chiffre d'environ 180 programmes ANR de mathématiques financés entre 2006 et 2010.

1.3. Répartition par discipline

L'analyse secteur par secteur sera développée dans les sections suivantes, et on se limite ici à quelques remarques générales. La première est la relative concentration des domaines d'interaction. On pourra certes constater qu'il n'existe presque aucune discipline sans interaction avec les mathématiques mais, dans les faits, les domaines où la collaboration est intense sont relativement peu nombreux. Les seuls domaines où plus de cinquante interactions ont été recensées sont la mécanique des fluides (74 interactions) et l'informatique théorique (65), suivis ensuite par l'épidémiologie (49), la génomique–génétique (48), la mécanique du solide (42), les sciences de l'ingénieur (42), l'imagerie médicale (41), et la physique théorique et quantique (40) — mais, pour tous les chiffres de ce type, on n'oubliera pas que le découpage en domaines comporte une bonne part d'arbitraire.

À l'autre extrémité, s'il n'est pas très étonnant que peu d'interactions aient été recensées dans le domaine des disciplines artistiques (5 interactions en tout), voire

	Thèses	Moyenne par interaction	Programmes ANR et analogues
Informatique	38	0,35	40
Mécanique	95	0,43	39
Physique	41	0,23	35
Sciences du vivant	84	0,30	58
Sciences humaines	27	0,21	17
Total	315	0,31	189

TAB. 3. Thèses et programmes ANR liés à des interactions avec les autres disciplines

de la géographie (12), il est plus surprenant de constater que des champs entiers comme l'astronomie (7 interactions en tout) ou la chimie (8 interactions) donnent lieu à aussi peu de collaborations. Par ailleurs, à l'intérieur même des secteurs les plus souvent impliqués, certains domaines restent peu souvent cités : par exemple, dans le secteur mécanique–ingénierie, 8 interactions seulement concernent l'automatique et le contrôle, tandis qu'en informatique, seules 12 interactions au total mentionnent la fouille de données et l'optimisation, et pas davantage la théorie du signal, trois domaines pourtant très vastes. Du côté de la physique, la théorie de la relativité–cosmologie a suscité seulement 14 collaborations (dont aucune pour la théorie des cordes), et, du côté des sciences du vivant, la pharmacologie et la dynamique des populations n'apparaissent pas très souvent (respectivement 7 et 13 interactions). Comme on l'a dit plus haut, ces chiffres faibles proviennent en partie des biais de l'enquête, mais il est également probable qu'il existe encore de nombreuses possibilités d'interaction non explorées.

Par contraste, on peut noter l'intérêt récent pour les thèmes liés à l'environnement, avec 16 interactions recensées en écologie (ici rattachée au secteur des sciences du vivant) et 29 en développement durable (rattaché au secteur des sciences humaines).

1.4. Organismes partenaires

Les organismes d'appartenance des partenaires des interactions sont multiples. Dans 50% des cas, un autre institut du CNRS est impliqué. Comme on pouvait s'y attendre, les instituts apparaissant le plus souvent sont l'INS2I[8], cité 115 fois, l'INP[9], cité 106 fois, suivis de l'INSIS[10], cité 78 fois, et de l'INSB[11], cité 76 fois.

[8] Institut des sciences informatiques et de leurs interactions.
[9] Institut de physique.
[10] Institut des sciences de l'ingénierie et des systèmes.
[11] Institut des sciences biologiques.

L'INSHS[12] est cité 59 fois. L'INSU[13], cité 48 fois, et l'INEE[14], cité 26 fois, sont moins concernés, l'INC[15] et l'IN2P3[16] n'apparaissant qu'à la marge.

D'autres partenaires français interviennent dans environ 30% des cas, non exclusifs des précédents, puisque certaines interactions impliquent des partenaires multiples. Les organismes concernés sont nombreux. Les principaux sont, par ordre décroissant, les partenaires industriels, cités 55 fois, soit 17% du total de ces partenariats, puis l'INRIA, cité 52 fois, l'INRA, cité 48 fois, le CEA, cité 39 fois, l'INSERM, cité 36 fois, les partenaires hospitaliers (CHU), cités 30 fois, les écoles d'ingénieur, citées 16 fois. Les autres partenaires apparaissant au moins 5 fois chacun sont l'IFP[17], l'ONERA[18], et l'IFREMER[19]. La DGA[20], l'EHESS[21], l'Institut Curie, l'INED[22], l'IRCAM[23], l'ANDRA[24], le BRGM[25], CDF[26], et Météo-France sont également cités.

Des partenaires étrangers sont impliqués dans environ 19% des cas. La carte de la figure 1 montre la répartition par zone géographique et par secteur disciplinaire.

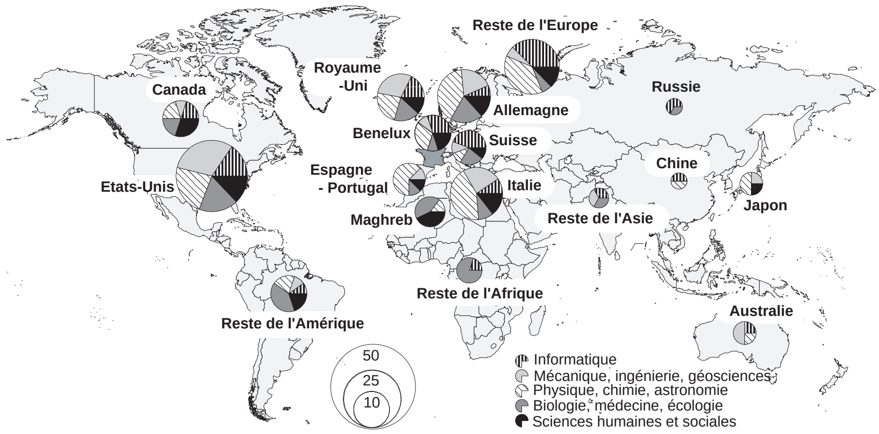


FIG. 1. Interactions mettant en jeu des partenaires étrangers ; noter la part importante de la physique et, par contraste, la part relativement faible du secteur biologie–santé

12 Institut des sciences humaines et sociales.
13 Institut national des sciences de l'univers.
14 Institut écologie environnement.
15 Institut de chimie.
16 Institut national de physique nucléaire et de physique des particules.
17 Institut français du pétrole.
18 Office national d'études et recherches aérospatiales.
19 Institut français de recherche pour l'exploitation de la mer.
20 Direction générale de l'armement.
21 École des hautes études en sciences sociales.
22 Institut national d'études démographiques.
23 Institut de recherche et coordination acoustique/musique.
24 Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs.
25 Bureau de recherches géologiques et minières.
26 Charbonnages de France.

Comme illustré dans la table 4, l'importance relative des partenariats CNRS – autres organismes français – étranger, qui est globalement de 50% – 30% – 20%, se retrouve presque à l'identique dans chaque secteur disciplinaire. Les seules variations significatives concernent le secteur physique–chimie–astronomie, où les partenariats CNRS approchent 60% tandis que les autres partenariats français tombent à 17% et, à l'opposé, le secteur des sciences du vivant où les partenariats CNRS sont seulement de 39% tandis que les autres partenariats français montent à 48% : ceci s'explique aisément par le rôle spécifique joué par l'INSERM pour la santé et l'INRA pour l'agronomie. On pourra aussi noter que la part des partenariats étrangers est spécialement importante en physique, et spécialement faible en sciences du vivant.

	CNRS	Autres organismes français	Partenaires étrangers
Informatique	53	30	18
Mécanique	55	28	16
Physique	59	17	29
Sciences du vivant	39	48	13
Sciences humaines	51	26	21
Global	50	32	19

TAB. 4. Place des différents partenaires par secteur disciplinaire, en pourcentages (la somme ne fait pas nécessairement 100 à cause des partenariats multiples)

1.5. Répartition géographique

Les variations régionales sont assez fortes, tant en données absolues qu'en données relatives par rapport aux effectifs des laboratoires concernés, voir la figure 2. En chiffres globaux, à côté de l'Île-de-France dont la prépondérance n'est pas surprenante, le fait le plus significatif est la prédominance des régions méridionales, Provence–Alpes–Côte d'Azur (Marseille et Nice), Rhône–Alpes (Lyon et Grenoble), et, dans une mesure un peu moindre, Aquitaine (Bordeaux et Pau), Midi–Pyrénées (Toulouse) et Languedoc–Roussillon (Montpellier). Ensuite, mais en retrait, arrivent des régions au fort potentiel scientifique général, comme la Bretagne (Rennes), l'Alsace (Strasbourg), et le Nord–Pas de Calais (Lille).

Lorsqu'on rapporte les chiffres à l'effectif des chercheurs présents dans la région, la tendance reste la même, avec une domination encore renforcée pour Provence–Alpes–Côte d'Azur et Languedoc–Roussillon, mais aussi l'apparition d'une forte densité d'interactions dans des régions aux effectifs totaux plus modestes, comme la Haute Normandie (Rouen), le Centre (Orléans et Tours), et le Limousin (Limoges).

Pour ce qui est de la répartition entre les grands blocs disciplinaires, on note un équilibre général : sur la carte de la figure 2, peu de disques sont monocolores, indiquant que les interactions portent en général sur plusieurs domaines. Naturellement, la plupart des régions ont des domaines de prédilection : sciences du vivant, informatique, et physique en Provence–Alpes–Côte d'Azur, mécanique–ingénierie, informatique, et sciences du vivant en Rhône–Alpes et Aquitaine, sciences humaines

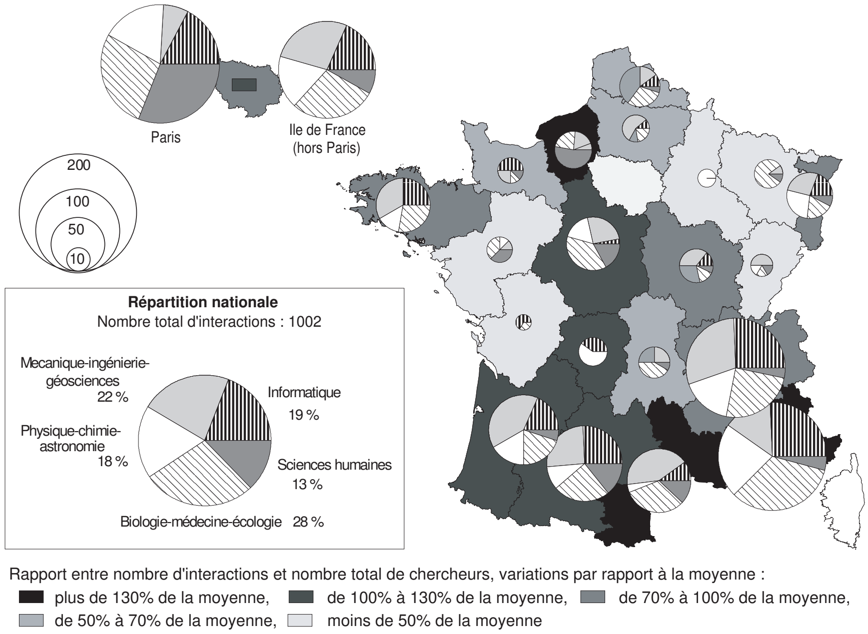


FIG. 2. Répartition régionale des interactions entre les mathématiques et les autres disciplines : la taille des disques représente le nombre total d'interactions recensées pour la région concernée, avec une ventilation entre cinq grands domaines, la couleur de fond des régions représente le rapport entre le nombre d'interactions et l'effectif total des chercheurs de mathématiques de la région. Noter la forte prédominance des régions méridionales à côté de l'Île-de-France.

à Paris intra muros, physique et sciences du vivant dans le Nord–Pas de Calais, etc.

1.6. Types de mathématiques

Tous les types de mathématiques sont mis en jeu dans les interactions avec les autres disciplines. Une analyse vraiment détaillée étant difficile faute de précisions, on se contentera de distinguer quatre types : mathématiques discrètes (algèbre, combinatoire), mathématiques continues (analyse, équations aux dérivées partielles), méthodes numériques, et probabilités–statistique. Il est entendu que la frontière entre mathématiques continues et méthodes numériques est particulièrement floue et les rattachements qui en découlent sont donc un peu arbitraires.

La table 5 rassemble les données par secteur thématique. De façon non surprenante, on constate que les mathématiques discrètes sont prépondérantes dans les interactions avec l'informatique, que les méthodes numériques sont majoritaires dans les interactions avec le secteur mécanique–ingénierie–géosciences, que les interactions avec la physique mettent surtout en jeu des mathématiques continues et, enfin, que la théorie des probabilités et la statistique sont prépondérantes dans les interactions avec les sciences du vivant et les sciences humaines.

	Mathématiques discrètes	Mathématiques continues	Méthodes numériques	Probabilités et statistique
Informatique	61	11	15	13
Mécanique	0	34	54	13
Physique	10	62	14	13
Sciences du vivant	2	34	11	53
Sciences humaines	6	19	5	58
Global	15	33	21	30

TAB. 5. Type de mathématiques mis en jeu dans les interactions suivant les domaines thématiques concernés, en pourcentage

2. Interactions avec l'informatique

On se concentre maintenant sur les interactions dont le thème scientifique relève de l'informatique. Il faut remarquer que les contours de l'étude sont particulièrement flous dans ce cas, la proximité des secteurs et l'interconnexion des communautés faisant que des travaux d'interface mathématiques–informatique sont souvent effectués soit par des mathématiciens seuls, soit par des informaticiens seuls, auxquels cas ils échappent à cette enquête.

2.1. Répartition par domaine, mots–clés

À l'intérieur du secteur informatique, le plus grand nombre d'interactions recensées (63, soit 33% du total du secteur) concerne l'informatique théorique, où des mots-clés revenant fréquemment sont *théorie des langages, automates, théorie des graphes, combinatoire*, et, dans une moindre mesure, *complexité algorithmique* et *géométrie algorithmique*. Ensuite viennent le calcul scientifique (38 interactions, soit 20% du secteur) avec la programmation et le développement logiciel, où des mots-clés sont *grille, clustering, recuit simulé, calcul parallèle, contrôle symbolique*, puis la cryptographie (33 interactions, soit 18%), où il est question de *cryptographie à clé publique, cryptographie elliptique, codes correcteurs d'erreur*, etc. Le traitement de l'image représente 33 interactions, soit à nouveau 18%, avec comme mots-clés *segmentation*, et encore *restauration, ondelettes* du côté des méthodes continues et *géométrie discrète* du côté des méthodes discrètes.

À l'opposé, les autres domaines de l'informatique, comme le traitement du signal (12 interactions seulement), la fouille de données (7 interactions), et l'optimisation (6 interactions), sont l'objet de peu de collaborations avec des mathématiciens.

2.2. Organismes partenaires

Pour ce qui est du CNRS, les interactions avec l'informatique passent presque toutes par l'INS2I. Pour les autres partenaires, l'INRIA intervient dans 50% des cas, suivis des partenaires industriels (17%), du CEA (15%), et des écoles d'ingénieur (12%). Les partenaires étrangers sont surtout situés dans les pays européens limitrophes.

2.3. Répartition géographique

Comme le montre la carte de la figure 3, les interactions entre mathématiciens et informaticiens se concentrent sur quelques régions où elles occupent une place importante : Provence–Alpes–Côte d'Azur (Marseille, Nice) et Rhône–Alpes (Lyon, Grenoble), puis, dans une moindre mesure, Midi–Pyrénées (Toulouse), Aquitaine (Bordeaux), puis Bretagne (Rennes) et Alsace (Strasbourg). Par contre, ce type d'interaction est complètement absent de plusieurs régions où pourtant existent de forts laboratoires de mathématiques. Cette situation est assez spécifique à l'informatique et peut paraître surprenante.

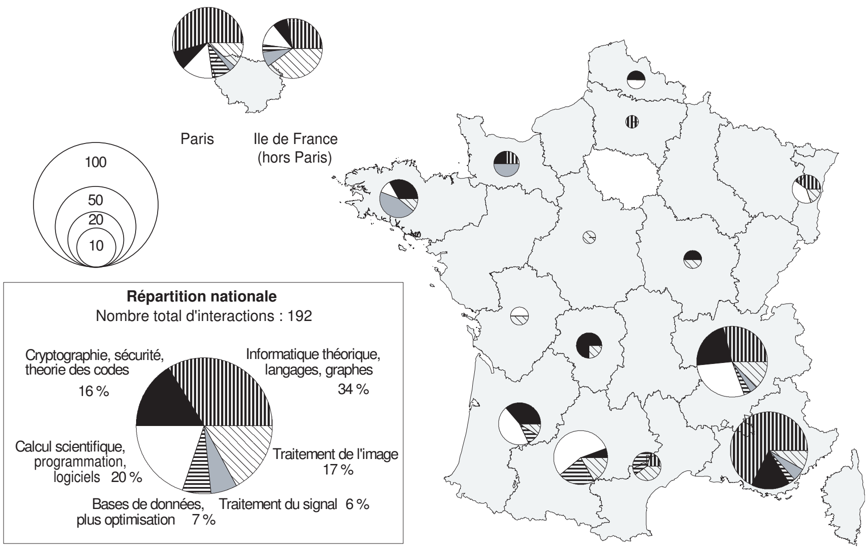


FIG. 3. Interactions entre les mathématiques et l'informatique : noter l'importance des régions Provence–Alpes–Côte d'Azur et Rhône–Alpes, et, par contraste, le très faible nombre d'interactions dans toute la bande médiane du territoire

2.4. Types de mathématiques

Le type de mathématiques le plus souvent mis en jeu dans les interactions avec l'informatique est les mathématiques discrètes (logique, combinatoire, algèbre, combinatoire des mots, dynamique symbolique). Lorsqu'on examine domaine par domaine, cette prépondérance est extrêmement marquée en informatique théorique (89% des interactions) et en cryptographie–théorie des codes (97%). La situation est plus équilibrée pour le calcul scientifique et les logiciels (42% en mathématiques discrètes, 37% pour les méthodes numériques, 16% pour les probabilités et la statistique), et la tendance s'inverse pour le traitement du signal et de l'image (seulement 15% pour les mathématiques discrètes, contre 37% aux mathématiques continues, 28% pour les méthodes numériques, et 17% pour les probabilités et la statistique).

2.5. Commentaires

L'interface mathématiques–informatique est active et en pleine expansion. On peut noter la variété et la richesse des mathématiques impliquées, qui incluent des domaines fondamentaux comme l'arithmétique et la géométrie algébrique (cryptographie), la théorie ergodique et les systèmes dynamiques (dynamique symbolique), ou encore la topologie (topologie combinatoire et topologie computationnelle).

Cependant, même si les interactions recensées sont relativement nombreuses, il semble qu'un potentiel bien plus important pourrait être développé. Les interactions existantes reposent souvent sur quelques personnalités qui essaiment autour d'elles, et il n'est donc pas douteux que davantage pourrait être fait pourvu qu'une impulsion initiale soit donnée.

Certains domaines comme le traitement du signal, ou encore la fouille de données, la recherche opérationnelle et l'optimisation, apparaissent sous-représentés. Il s'agit d'un des biais déjà signalés de cette enquête : certaines recherches relevant de l'interaction mathématiques–informatique sont effectuées prioritairement dans les laboratoires d'informatique (voire d'économie dans le cas de l'optimisation), soit par tradition, soit du fait d'une évolution récente, et elles n'apparaissent pas ici. Une évolution similaire peut être relevée pour certains domaines traditionnels d'interaction comme la théorie des graphes, la logique, ou le calcul formel, qui sont de plus en plus traités en informatique et tendent à glisser hors du spectre des laboratoires de mathématiques.

3. Interactions avec le secteur mécanique–ingénierie–géosciences

On en vient au (vaste) secteur regroupant la mécanique, les sciences de l'ingénieur et les géosciences, auxquelles ont été ici adjointes l'océanographie et l'étude de l'atmosphère.

3.1. Répartition par domaine, mots-clés

Les interactions concernent en priorité la mécanique des fluides, avec 74 interactions recensées (33% du secteur) ; les mots-clés revenant le plus souvent sont *volumes finis, équation d'Euler, cavitation, shallow water models, vagues extrêmes, magnéto-hydrodynamique*. Ensuite, à égalité, viennent la mécanique des solides (42 interactions, soit 19%), avec comme mots-clés *chocs, vibrations, couches-limites, éléments finis*, et les sciences de l'ingénieur (42 interactions également), où des mots-clés sont *filtrage, problème inverse, modélisation multi-échelle, quantiles extrêmes, fiabilité*. Les géosciences, avec en particulier les interactions avec l'industrie pétrolière, concernent 33 interactions (15%), avec comme mots-clés *calcul des variations, problème inverse, valeurs extrêmes, friction fluide–solide, raffinement de maillage*.

Au-delà de ces quatre thèmes, les autres domaines sont nettement en retrait : l'océanographie ne contribue que pour 14 opérations (mots-clés : *modélisation,* *conditions aux limites*), l'étude de l'atmosphère, qui inclut la climatologie et la météorologie, pour 10, et l'automatique et le contrôle pour 8 au moins dans ces deux derniers domaines, on peut penser qu'il existe un fort potentiel de développement futur non encore exploré.

3.2. Organismes partenaires

Au CNRS, les interactions des mathématiques avec le secteur mécanique–ingénierie–géosciences se répartissent entre l'INSIS (ingénierie), à hauteur de 46%, mais aussi l'INSU (univers) pour 30% des cas et l'INP (physique) pour 17% des cas, ce qui traduit la diversité du secteur. Parmi les autres partenaires français, le secteur industriel est fortement prépondérant, représentant 42% de la catégorie, suivi par le CEA (17%) et l'IFP (13%). Pour l'étranger, les collaborations avec les USA sont importantes, représentant un tiers de l'ensemble des partenariats internationaux.

3.3. Répartition géographique

Un peu moins que pour le secteur informatique mais quand même de façon très nette, les variations régionales sont fortes et les interactions avec le secteur mécanique–ingénierie–géosciences se concentrent, outre l'Île-de-France hors Paris (Villetaneuse, Orsay, Cachan, Marne-la-Vallée, pour 17% du total du secteur), sur les régions Rhône–Alpes (Grenoble, 16%) et Aquitaine (Bordeaux et Pau, 11%) puis, dans une moindre mesure, Provence–Alpes–Côte d'Azur (Nice et Marseille, 9%), Languedoc–Roussillon (Montpellier, 9%), Midi–Pyrénées (Toulouse, 8%), puis Paris intra muros (6%), Bretagne (Rennes, 5%), et Centre (Orléans, 4%), tandis que plusieurs régions sont totalement ou presque totalement absentes.

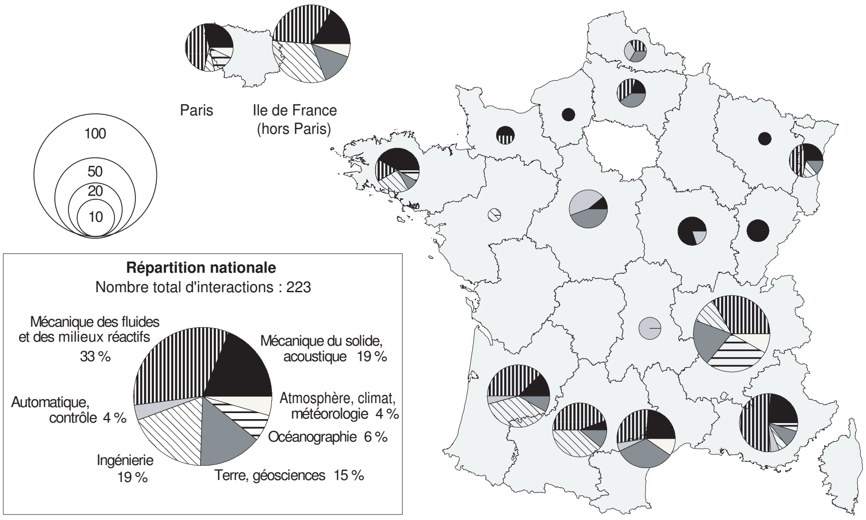


Fig. 4. Interactions avec le secteur mécanique–ingénierie–géosciences : la répartition est plus uniforme qu'en informatique, mais la prépondérance des régions méridionales est toujours marquée

3.4. Types de mathématiques

Les mathématiques discrètes sont ici totalement absentes, alors que les méthodes numériques jouent un rôle prépondérant, spécialement en mécanique des fluides (72%), et en automatique–contrôle, ingénierie, et géosciences (environ 50% dans chacun des cas). La part des mathématiques continues (analyse) est majoritaire en mécanique des solides (52%), et d'à peu près 30% dans chacune des autres branches. La part des probabilités et de la statistique est plus faible, aux alentours de 25% en ingénierie, géosciences et océanographie, sauf en climatologie–météorologie où elle atteint 50%.

3.5. Commentaires

Le niveau global d'interaction dans ce secteur est élevé, surtout avec la mécanique et l'ingénierie. Ceci est d'autant plus le cas qu'un certain nombre d'interactions se déroule entièrement dans le cadre de laboratoires de mécanique ou d'ingénierie et, à ce titre, n'apparaissent pas dans cette enquête. Celle-ci gagnerait à être enrichie par l'étude des retombées de la politique d'échange de postes de chercheurs entre les sections 01 et 10 du CoNRS[27], laquelle a mené à la présence de mathématiciens dans des laboratoires de mécanique ou d'ingénierie, et parfois à la formation d'équipes de mathématiques dans ces laboratoires.

Par ailleurs, dans le présent rapport, les interactions dans le domaine des plasmas apparaissent majoritairement dans le secteur physique mais il faut souligner qu'une partie de l'activité se déroule dans des laboratoires d'ingénierie, notamment ce qui concerne l'hypersonique de rentrée, les torches à plasma, ou les décharges et les streamers : cette thématique est répartie entre physique et ingénierie avec une frontière parfois assez floue.

Finalement, une grande partie des interactions entre les mathématiques et le secteur mécanique–ingénierie–géosciences passe par le calcul scientifique et implique aussi les secteurs informatique et physique–chimie, comme par exemple pour le domaine de la combustion turbulente. Dans ce rapport, le calcul scientifique apparaît scindé entre, d'une part, le développement logiciel, les grilles et le calcul parallèle distribué associés à l'informatique et, d'autre part, les interactions directement applicatives associées à chaque discipline concernée, ingénierie, géosciences, physique, astrophysique, etc. Cet éclatement masque un peu l'importance des mathématiciens dans le domaine du calcul scientifique, où une interface forte est en train de se développer. Même si le phénomène, bien visible lors des appels à projet PEPS[28] mathématiques–informatique–ingénierie, est difficile à quantifier ici, on peut penser que c'est à cette interface que s'opéreront les avancées critiques et les ruptures dans l'avenir.

4. Interactions avec le secteur physique–chimie–astronomie

Autre domaine d'interaction traditionnel des mathématiciens, la physique est l'objet de cette section. Par commodité, on a adjoint la chimie et l'astronomie, dont la place modeste ne saurait justifier un traitement séparé.

[27] Comité national de la recherche scientifique.
[28] Projets exploratoires pluridisciplinaires.

4.1. Répartition par domaine, mots-clés

Il existe des interactions de mathématiciens avec presque tous les domaines de la physique, mais de façon très inégale suivant les domaines. Le domaine le plus représenté est la physique théorique et quantique, avec 40 interactions (22% du secteur), où des mots-clés sont *système intégrable, renormalisation, algèbre de Hopf, électrodynamique quantique, théorie conforme des champs, effet Hall quantique, chaos quantique*. Ensuite, on trouve la physique statistique et les systèmes complexes, avec 37 interactions (20%) et des mots-clés comme *systèmes dynamiques discrets, modèle d'Ising, verre de spin, écoulements granulaires, méthode de grandes déviations*, et la physique des milieux dilués et des plasmas, avec 32 interactions (18% du secteur) et des mots-clés comme *magnétohydrodynamique, équations de Landau et de Vlasov, confinement inertiel, turbulence, flamme de diffusion*, et une intense activité en liaison avec le programme ITER.

Moins importants numériquement, la physique de la matière condensée et les nanosciences concernent 21 interactions (mots-clés : *dynamique vibrationnelle, quasi-cristaux, diffraction, solitons, plasmons*), de même que l'électromagnétisme et l'électronique (mots-clés : *ferromagnétisme, interférométrie, optimisation de forme*,...). La théorie de la relativité et la cosmologie ne concernent que 14 interactions (mots-clés : *équation d'Einstein, conjecture de Penrose, ondes gravitationnelles*).

Les interactions avec la chimie sont très peu nombreuses (8 en tout), autour de questions de *modélisation* et de *dynamique moléculaire*. De même pour les interactions avec l'astronomie (7), centrées sur l'acquisition de données avec des *méthodes multi-échelles* et de *segmentation en grande dimension*.

4.2. Organismes partenaires

Au CNRS, les interactions avec le secteur physique–chimie–astronomie passent naturellement par l'INP (physique), avec 71% du total, puis par l'INSIS (ingénierie), à hauteur de 10%, et de l'INSU (univers), à hauteur de 9%. Les autres partenaires français, dont on a souligné plus haut qu'ils jouent un rôle relativement faible, sont d'abord le CEA (52% de la catégorie), puis l'INRIA (19%). Les partenariats internationaux sont par contre très importants, surtout concentrés sur les pays européens limitrophes, Italie, Allemagne, Espagne, Grande-Bretagne, les USA ne jouant qu'un rôle relativement réduit avec seulement 17% des collaborations internationales mentionnées.

4.3. Répartition géographique

À la différence des secteurs informatique et mécanique, les interactions avec les secteur physique-chimie-astronomie sont réparties sur presque toutes les régions, avec une prédominance de Paris intra muros (20% du total), Provence-Alpes-Côte d'Azur (18%), puis Île-de-France hors Paris (13%) et Rhône-Alpes (11%). Ensuite viennent Aquitaine (6%), Nord-Pas de Calais, Alsace, Midi-Pyrénées, et Centre.

4.4. Types de mathématiques

Les mathématiques impliquées dans les interactions avec le secteur physique-chimie-astronomie sont des mathématiques continues (analyse, EDP) : celles-ci sont hégémoniques en cosmologie (93%), majoritaires en physique quantique (73%), en physique des milieux dilués et des plasmas (67%), en électromagnétisme

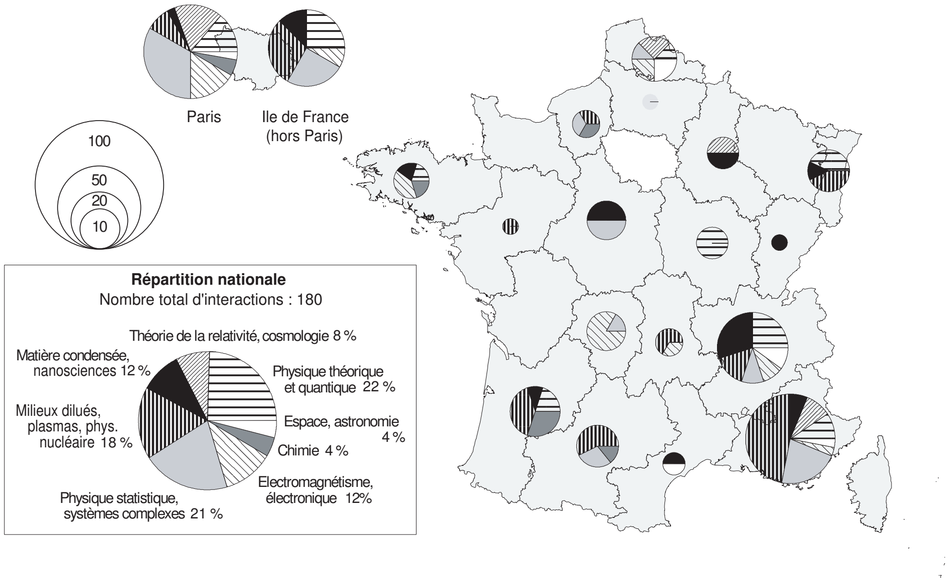


FIG. 5. Interactions entre les mathématiques et le secteur physique–chimie–astronomie : noter la faiblesse de la chimie et de l'astronomie, la prépondérance de Provence-Alpes-Côte d'Azur et Rhône-Alpes, et la relative homogénéité de la répartition

(62%), en physique de la matière condensée (57%), et en physique statistique (47%). Les mathématiques discrètes n'interviennent de façon significative qu'en physique statistique (28%) et en physique quantique (20%). Les méthodes numériques sont majoritaires en chimie (50%). Quant aux probabilités et à la statistique, leur rôle est faible (moins de 15%), sauf en astronomie (57%) et en physique statistique (25%).

4.5. Commentaires

Un des points les plus notables est la faiblesse en France des interactions entre les mathématiques et la théorie des cordes et, plus généralement, les théories cosmologiques récentes : il s'agit pourtant d'une interface naturelle, très riche et dynamique au niveau international, en particulier aux États-Unis, et il est regrettable que davantage de contacts n'existent pas en France sur ces sujets créatifs où les deux disciplines s'enrichissent mutuellement.

Dans la même direction, on remarque la faiblesse des interactions en physique des hautes énergies et, d'une façon générale, l'absence quasi-totale d'interactions mettant en jeu l'IN2P3.

À l'opposé, on ne peut que se réjouir de l'importance des interactions en physique des plasmas, notamment autour de la magnéto-hydrodynamique où le projet ITER joue un important rôle structurant ; on peut remarquer qu'une bonne part des interactions dans ce domaine met en jeu des laboratoires de l'INSIS davantage que de l'INP, *cf.* remarques de la section 3.

5. Interactions avec les sciences du vivant

Cette section est consacrée au secteur des sciences du vivant, biologie, médecine, écologie, qui sont désormais l'objet de très nombreuses interactions avec les mathématiques, principalement sur des questions de modélisation et d'analyse statistique.

5.1. Répartition par domaine, mots-clés

Avec un total de 137 interactions, la biologie représente environ la moitié des interactions du secteur. Le domaine le plus représenté est la génomique, qui concerne 48 interactions, soit 17% ; les mots-clés sont ici *modélisation multi-échelle, phylogénie, théorie du signal stochastique*. Ensuite viennent la biologie de la cellule, avec 33 interactions et des mots-clés comme *modélisation EDP, modélisation statistique, réseau génétique*, et les neurosciences, avec 22 interactions et des mots-clés comme *spiking neurons, apprentissage, synchronisation, équation de Hodgkin–Huxley*. La biologie animale et végétale, à laquelle l'agronomie a été rattachée ici, représente 21 interactions, avec comme mots-clés à nouveau *modèle markovien et modèle EDP, estimation de paramètre*. La dynamique des populations ne concerne que 13 interactions, avec comme mots-clés *modèle de mélange, modèle cinétique, stochasticité démographique*.

Le domaine médecine–santé est de taille comparable, avec un total de 125 interactions. Le domaine le plus représenté est l'épidémiologie, avec 49 interactions (18% du secteur) et des mots-clés tels que *modèles markoviens, modèles SIR, clustering* pour les mathématiques et *prion, Alzheimer, hépatite B, VIH, paludisme* pour les pathologies étudiées. L'imagerie médicale vient ensuite avec 41 interactions et des mots-clés comme *IRM, imagerie 3D, analyse de texture, statistiques de forme, segmentation, appariement de surface*. La modélisation des pathologies (souvent le cancer) concerne 28 interactions, avec des mots-clé comme *inverse scattering, modèle de croissance, modélisation EDP*. Par contre, l'évaluation des thérapeutiques et la pharmacologie ne donnent lieu qu'à un très petit nombre d'interactions (7), où revient le mot-clé *régression logistique*.

Enfin, 16 interactions concernent l'écologie et la biodiversité, avec des mots-clés comme *réaction-diffusion, agrégats spatiaux, modélisation des foules*.

5.2. Organismes partenaires

Les interactions avec les sciences du vivant ne concernent des équipes du CNRS que dans 39% des cas, ce qui est moindre que dans les autres secteurs où le pourcentage dépasse toujours 50%. Parmi ces interactions, environ 63% concernent l'INSB (biologie), mais on note aussi 8% pour l'INSHS (sciences humaines), et 7% pour l'INS2I (informatique) et l'INEE (écologie) : presque tous les instituts du CNRS apparaissent ici, ce qui illustre la diversité des possibilités d'interaction sur le thème du vivant.

Les interactions mettant en jeu d'autres organismes français sont numériquement nombreuses, puisqu'elles représentent quasiment la moitié du total du secteur, et concernent notamment le domaine de l'agronomie et de la santé. Les principaux partenaires sont l'INRA, pour 31% des cas, et l'INSERM, pour 23% des cas. Les CHU apparaissent également pour 20% de la catégorie, suivis par l'INRIA pour 11%.

Les partenariats internationaux sont relativement peu nombreux (13% du total des interactions seulement) ; le pays majoritaire est les USA, avec 19% des cas, mais les autres chiffres sont trop faibles pour être significatifs.

5.3 Répartition géographique

Comme le montre la carte de la figure 6, presque toutes les régions sont concernées par les interactions avec les sciences du vivant, qui apparaissent comme le secteur le mieux réparti à travers l'ensemble du territoire. Par ordre d'importance numérique décroissante, on trouve d'abord Paris intra muros (55 interactions recensées, soit 20% du total), puis Provence-Alpes-Côte d'Azur (17%), l'Île-de-France hors Paris (14%), Rhône-Alpes (11%), suivis de Midi-Pyrénées (6%), Languedoc-Roussillon (6%), Centre (5%), Aquitaine (4%), et Bretagne (3%).

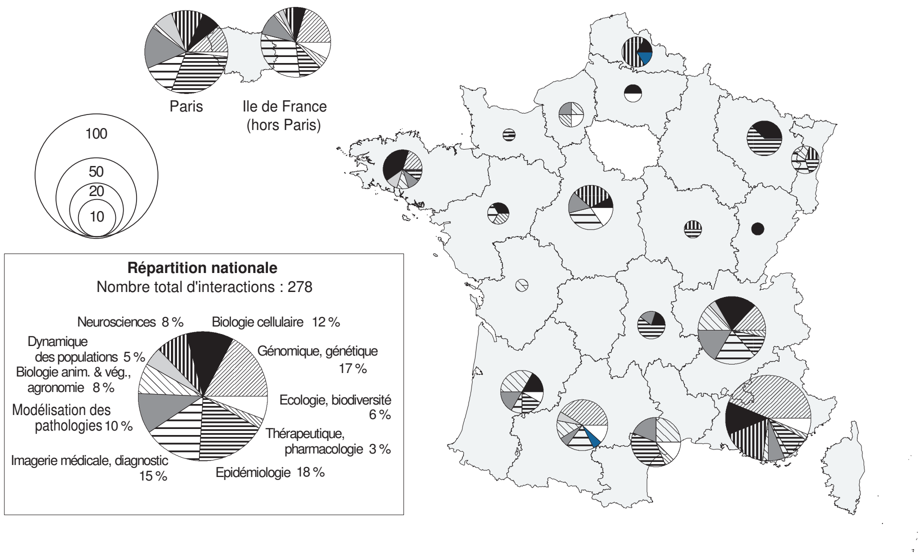


FIG. 6. Interactions entre les mathématiques et le secteur biologie–médecine–écologie : remarquer que presque toutes les régions sont concernées (à des taux variables), et que la plupart sont concernées par un assez grand nombre de domaines différents

5.4. Types de mathématiques

Les mathématiques impliquées dans les interactions avec les sciences du vivant sont principalement les probabilités et la statistique (53% du total) ; cette prépondérance est spécialement marquée dans plusieurs sous-domaines comme la génomique (88%), l'épidémiologie (80%), la dynamique des populations (77%), la biologie animale et végétale (75%), la thérapeutique–pharmacologie (71%). Les mathématiques discrètes sont très peu sollicitées, les mathématiques continues (équations différentielles et aux dérivées partielles) étant mises en jeu pour la modélisation en biologie cellulaire (79%), en pathologie (75%), et en neurologie (73%). Les méthodes numériques ne sont utilisées que pour l'imagerie médicale, où elles représentent 56%.

5.5. Commentaires

On peut noter que, lors d'une collaboration avec les sciences du vivant, la frontière entre mathématiques et informatique est souvent ténue, chaque discipline pouvant apporter des contributions complémentaires mais aussi répondre à des questions très similaires. Ceci se rencontre tout particulièrement au sein des projets sous le label de l'INRIA. D'une façon générale, les rôles de l'INSMI et de l'INS2I sont très comparables.

Il est important pour le futur d'identifier les verrous constituant des goulets d'étranglement ou des blocages dans le développement de la modélisation pour les sciences du vivant. À l'heure actuelle, les deux principaux, qui sont d'ordre plus méthodologique que technologique, semblent être les suivants :

– un manque culturel de relations entre disciplines ou équipes, une indifférence ou une ignorance réciproque due à des habitudes culturelles : par exemple, le biologiste habitué à ses outils (un test de Student, une équation différentielle ordinaire) peine à franchir un niveau de complexité pour aborder des modèles plus sophistiqués mais plus réalistes pour rendre compte de sa problématique et de ses expérimentations ;
– l'évolution explosive des biotechnologies : le développement des modèles accuse un net retard par rapport à l'évolution des technologies, et il faut encore lui ajouter le temps de formation des acteurs mettant en œuvre les technologies et analysant les résultats obtenus.

6. Interactions avec le secteur des sciences humaines et sociales

On termine par le secteur des sciences humaines et sociales, qui est très divers et met en jeu des interactions de types variés. Globalement, le secteur concerne un volume d'interactions (129 au total) moindre que les quatre autres secteurs (effectifs allant de 180 à 278).

6.1. Répartition par domaine, mots-clés

De façon un peu surprenante, l'enquête n'a fait apparaître que 12 interactions dans chacun des domaines économie et finance. Dans le premier cas, il s'agit de modélisation avec des mots-clés comme *analyse convexe, optimisation, théorie des jeux*, dans le second cas, les mots-clés sont par exemple *allocation de risque, coût de transaction, transport optimal*.

Dans le groupe des sciences humaines à proprement parler, les sciences sociales, avec la sociologie et la psychologie sont les plus importantes numériquement, avec 40 interactions recensées, soit 31% de tout le secteur ; les mots-clés sont ici *statistique appliquée, équations cinétiques, systèmes complexes, détection de motif, théorie du contrôle*. Ensuite, un ensemble de 29 interactions se rattachent au thème du développement durable, avec des mots-clés comme *série temporelle, systèmes multi-agents, valeurs extrêmes, analyse de corrélation canonique*. D'autre part, 21 interactions sont recensées dans le domaine de l'histoire et de la philosophie, le thème principal étant ici l'histoire des sciences et des mathématiques.

Le panorama est complété par un petit nombre d'interactions en géographie (10), où il est question principalement de modélisation. Enfin quelques interactions (5) relèvent des disciplines artistiques, dont 3 concernent l'informatique musicale.

6.2. Organismes partenaires

Au CNRS, les interactions avec les sciences humaines et sociales concernent principalement l'INSHS (sciences humaines), pour 68% des cas, ce qui est naturel. Comme on a rattaché le développement durable à ce secteur, on trouve aussi des partenariats avec l'INEE (écologie), dans 20% des cas. Les autres partenaires français sont très divers, aucun ne ressortant de façon nette. De même, les partenariats internationaux se répartissent sur la plupart des pays européens, sans qu'aucun soit prépondérant.

6.3. Répartition géographique

Le secteur des sciences humaines est vaste et divers, et il est difficile de comparer des domaines a priori fort éloignés qui le composent. La carte de la figure 7 montre que les interactions se concentrent sur un assez petit nombre de régions, avec une domination écrasante de Paris intra muros (48% du total), suivie de l'Île-de-France hors Paris (9%), de Midi-Pyrénées (8%), de la Haute-Normandie (7%), puis du Centre, Provence-Alpes-Côte d'Azur, et Languedoc-Roussillon (un peu moins de 5% chacun).

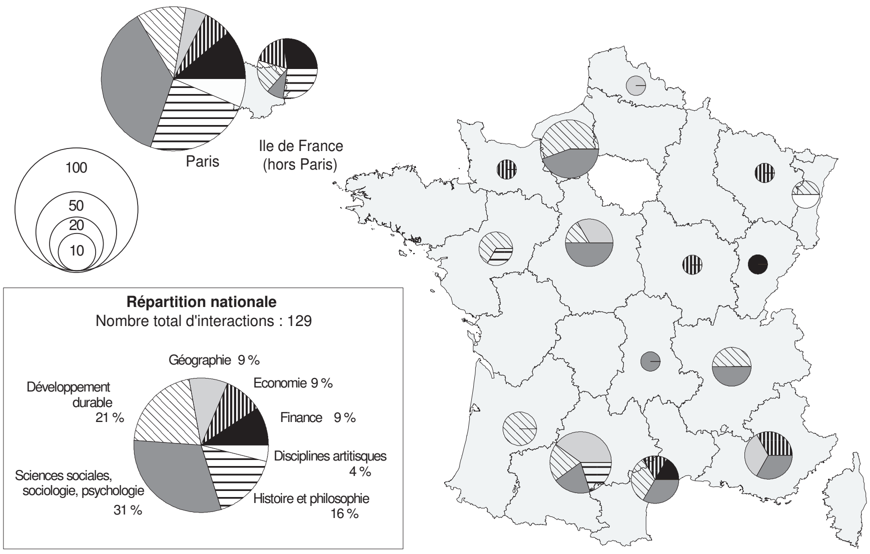


FIG. 7. Interactions entre les mathématiques et le secteur des sciences humaines : noter la prédominance de Paris intra muros

6.4. Types de mathématiques

Les mathématiques impliquées dans les interactions avec les sciences humaines sont diverses, comme le sont les domaines concernés. Le calcul des probabilités joue un rôle important dans les interactions avec l'économie (67%) et surtout la finance (83%), et la statistique dans à peu près tous les domaines : sciences de la société (75%), développement durable (67%), géographie (42%). Les mathématiques discrètes apparaissent dans les disciplines artistiques par le biais de l'informatique musicale. Enfin, l'histoire, principalement impliquée sous la forme de l'histoire des sciences et des mathématiques, fait appel à une réflexion des mathématiques sur elles-mêmes qui échappe à la classification considérée ici, ou, si on préfère, procède d'un cinquième type de mathématiques qui lui est propre.

6.5. Commentaire

Le niveau global des interactions recensées entre mathématiques et sciences humaines et sociales paraît relativement faible et d'un ordre de grandeur plutôt décevant. Néanmoins, plus encore que dans les autres secteurs, les données brutes recueillies dans l'enquête semblent incomplètes dans ce secteur : certains des exemples les plus institutionnalisés (et, de là, les mieux financés) d'interactions entre l'INSMI et l'INSHS n'apparaissent pas dans l'enquête. Ceci concerne notamment le domaine de l'économie et de la finance, où le rôle des mathématiciens est pourtant bien établi. La dichotomie entre mathématiques financières et finance au sens des sciences humaines peut expliquer en partie ce biais qui reflète une spécificité du positionnement disciplinaire de la finance mathématique.

On note aussi l'absence dans l'enquête de certaines interactions pourtant avérées dans le domaine des sciences cognitives. De même, il semble que les interactions entre mathématiques et histoire ne prennent pas bien en compte l'histoire des sciences, alors même que, traditionnellement, plusieurs chercheurs du CNRS historiens des mathématiques relèvent de la section de mathématiques du CoNRS. L'explication de cette faible prise en compte pourrait venir du fait qu'une partie de ces recherches interdisciplinaires soit conduite entièrement dans des laboratoires ou des structures relevant de l'INSHS et, à ce titre, n'apparaissent pas dans cette enquête. Il en va de même pour la philosophie des sciences.

D'une façon générale, l'extrême complexité et la dispersion disciplinaire du secteur des sciences humaines et sociales sont telles qu'il serait bienvenu d'entreprendre un état des lieux disciplinaire, du droit à l'économétrie en passant par la géographie, l'histoire, etc. pour comprendre vraiment comment pourrait et devrait fonctionner une interaction entre les mathématiques et les sciences humaines, sur quels modes scientifiques, avec quelles priorités.

7. Conclusions

Comme on l'a dit, le principal intérêt de cette étude est de montrer que les interactions des mathématiques avec les autres disciplines occupent aujourd'hui une place importante dans le paysage français. Il ne s'agit évidemment pas de nier ou de minorer l'importance de mathématiques fondamentales exclusivement tournées vers le progrès de la connaissance, mais d'insister sur l'existence conjointe, concomitante, consubstantielle, de nombreuses recherches menées en collaboration avec des chercheurs d'autres disciplines, à partir de problèmes issus de ces disciplines, et orientées vers des fins qui ne sont pas exclusivement le développement en soi des mathématiques.

Parmi les points positifs, ressort l'importance du développement des interactions avec les sciences du vivant, qui concernent désormais à peu près toutes les régions et dépassent même en effectifs les interactions plus traditionnelles avec l'informatique, la mécanique, et la physique. Parmi les points négatifs repérés[29], la faiblesse des interactions avec des disciplines comme la chimie, l'astronomie, ou

[29] mais il ne faut pas oublier la non-exhaustivité des données recueillies et les biais de l'enquête.

l'économie ou, à un degré de granularité un peu plus fin, des domaines comme la fouillle de données, l'optimisation, le traitement du signal, la théorie des cordes, la météorologie, l'électronique. Paradoxalement, certains de ces domaines sont très voisins des mathématiques : dans certains cas, il s'agit de domaines qui ont glissé en majorité hors du champ des laboratoires de mathématiques (par exemple la recherche opérationnelle et l'optimisation), dans d'autres cas, les recherches sont menées à la fois dans les laboratoires de mathématiques et dans ceux d'autres disciplines, avec des communautés très proches, voire concurrentes, mais des usages de publication différents, ce qui peut rendre les collaborations (spécialement les co-tutelles de thèse) difficiles à mettre en place. À l'opposé, pour des secteurs plus disjoints des mathématiques comme les sciences du vivant, la répartition des rôles est claire, et les interactions peut-être plus facilement établies. Dans tous les cas, la conclusion est qu'il existe certainement des potentiels de développement considérables.

Une des (nombreuses...) lacunes de l'enquête est de ne pas permettre d'évaluer de façon fiable la durée des collaborations établies : il est clair que les interactions sur le long terme ont une tout autre portée que de simples actions ponctuelles qui, dans le pire cas, peuvent apparaître comme un picorage au bilan discutable. Obtenir des résultats réellement marquants au niveau des applications et suggérant en retour des problèmes de mathématiques pertinents et nouveaux demande en général un investissement long et partagé, d'où l'importance des postes de chercheurs d'interface et de la constitution d'équipes pluridisciplinaires.

L'analyse proposée ici est un instantané à un moment donné, en l'occurrence le début de l'année 2010. Il serait intéressant de comparer cette photographie avec d'autres semblables à des moments différents. S'il est probablement malaisé de retrouver aujourd'hui les données pour le passé, on peut par contre espérer qu'une étude analogue pourra être menée à nouveau dans quelques années, voire que cette pratique devienne périodique, permettant ainsi de suivre en direct les évolutions thématiques et les grandes tendances.

Remerciements

Je remercie les directeurs d'unité et toutes les personnes qui ont aidé à la collecte souvent fastidieuse des données, Didier Journo de l'IPAM du CNRS pour son aide dans la réalisation des cartes, Laurence Labbé pour son aide dans la manipulation des fichiers, Élise Janvresse pour sa relecture attentive, ainsi que Frédéric Patras pour l'adaptation à la *Gazette*.

Note d'information du comité d'expert pour les PES universitaires 2010

Comité PES 2010

Depuis 2009 inclus, la Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (P.E.D.R.) a été remplacée par la Prime d'Excellence Scientifique (P.E.S.). L'attribution de la P.E.S. est du ressort des universités, mais à titre transitoire (jusqu'en 2012 inclus) elles peuvent décider de faire appel à un comité national qui se réunit pour classer dans chaque discipline les demandes de P.E.S. Ses membres ont souhaité informer la communauté mathématique des principes utilisés lors de cette expertise, tout en préservant comme il se doit la confidentialité des débats. Le texte vise à indiquer aux candidats les critères d'évaluation des dossiers, et de fournir aux représentants des mathématiques au sein des conseils des établissements, compétents en ce qui concerne l'attribution de la PES, des éléments utiles à la défense des dossiers dont ils seront chargés.

À noter que les P.E.S. pour les chercheurs des organismes de recherche (C.N.R.S., I.N.R.I.A.) font l'objet de procédures distinctes dont il ne sera pas question ici. De plus certains universitaires ont en principe droit d'office à la P.E.S. : membres de l'I.U.F., lauréats de certains prix nationaux ou internationaux.

Pour les mathématiques (25^{e} et 26^{e} section du C.N.U.) le comité s'est réuni les 9 et 10 septembre 2010 à l'I.H.P. Il était constitué de Nalini Anantharaman, Didier Auroux, Olivier Biquard, Nicolas Burq, François Castella, Indira Chatterji, Laurent Clozel, Albert Cohen, Vincent Colin, Jean-Marc Couveignes, Pierre Del Moral, Josselin Garnier, Vincent Guedj, Yanick Heurteaux, Alain Joye, Michel Ledoux, Christian Le Merdy, Dominique Picard, Ludovic Rifford, Judith Rousseau, Laure Saint-Raymond, Jean-Marc Schlenker (président), Vincent Sécherre, Didier Smets, et Alexandre Tsybakov.

La mission du comité était de classer les dossiers en trois catégories : A, B et C. Les universités doivent ensuite décider de l'attribution ou non de la P.E.S. et de son montant, sachant que les collègues dont les dossiers ont été classés A doivent en principe bénéficier de la P.E.S. et que ceux dont les dossiers ont été classés en B peuvent en bénéficier. Le ministère demande qu'au plus 20% des dossiers soient classés A, et au plus 30% soient classés B. On peut en extrapoler que les dossiers classés B devraient généralement bénéficier de la P.E.S., puisque, pour les P.E.D.R., le taux de réussite était de l'ordre de 50%. De nombreux membres du comité ont exprimé leur désapprobation envers ce système qui dissocie évaluation et décision d'attribution (mais qui est probablement préférable à un système d'attribution géré entièrement dans les universités).

Les dossiers sont classés en trois groupes suivant le grade des candidats : maîtres de conférences (MCF), professeurs de seconde classe (PR2) et professeurs de première classe (PR1) ou de classe exceptionnelle (PREX). Comme les années précédentes, le comité a choisi d'appliquer les mêmes proportions de notes A, B et C dans ces trois groupes. Ce choix revient à donner un net avantage aux MCF par rapport aux PR2 et surtout aux PR1-PREX. Cette décision a été discutée, et le comité a décidé de continuer la pratique des années précédentes, pour plusieurs raisons, dont la principale est la nécessité de préserver une certaine attractivité des postes pour les jeunes chercheurs en mathématiques en France, dans un contexte où des voies beaucoup plus rémunératrices s'offrent à eux.

Certains membres du comité ont remarqué que de nombreux MCF, en particulier jeunes, n'ont pas postulé, alors que leur dossier aurait certainement été classé B voire A. De manière générale, il serait très souhaitable que les mathématiciens postulent largement à la P.E.S. Certains membres du comité ont proposé que les directeurs de laboratoire en mathématiques devraient considérer comme relevant de leur rôle de s'assurer que les enseignants-chercheurs de leur laboratoire postulent aussi largement que possible à la P.E.S.

Comme les années précédentes, le choix d'imposer des quotas égaux aux trois catégories MCF, PR2 et PR1-PREX, qui est propre à la communauté mathématique, a conduit à un niveau d'exigence très élevé pour les PR2 et surtout pour les PR1 et PREX. Il y a en effet dans ces deux groupes un grand nombre d'excellents dossiers et plus encore de très bons dossiers, si bien que l'application des quotas de 20% de A et 30% de B a conduit à noter B des dossiers présentant des recherches de premier plan, et en C les dossiers de collègues qui bénéficient d'une très forte reconnaissance internationale. Il est certainement plus difficile d'être classé A ou B pour un PR1-PREX en mathématiques que dans beaucoup d'autres disciplines.

Voir son dossier classé C ne doit en aucun cas être interprété comme une évaluation négative de l'activité de recherche. Bien au contraire, l'application des quotas imposés par le ministère a obligé le comité à classer C des dossiers de grande qualité scientifique, dès lors qu'ils présentaient une faiblesse (par exemple dans le domaine de l'encadrement doctoral ou des responsabilités scientifiques). Les collègues dont le dossier a été classé C (ou B, mais qui n'obtiendront pas la P.E.S. dans leur établissement) sont fortement encouragés à postuler à nouveau l'année prochaine. Pour la même raison, le comité a du (à regret) classer B des dossiers présentant une activité de recherche de très haut niveau, bénéficiant d'une forte visibilité au niveau international.

La fiche d'évaluation fournie par le ministère précise quatre catégories pour lesquelles des notes A, B ou C sont attribuées à chaque dossier. Ces quatre notes, ainsi que la note globale, sont transmises par le ministère aux universités, mais aucune autre information n'est transmise. Ces catégories sont :

– la « production scientifique »,
– l' « encadrement doctoral et scientifique »,
– le « rayonnement scientifique »,
– les « responsabilités scientifiques ».

Le comité a considéré que ces quatre catégories n'avaient pas, pour l'obtention de la P.E.S., le même poids. La « production scientifique » a joué un rôle prépondérant dans l'évaluation des dossiers. Dans les conditions de fonctionnement du comité, la publication d'articles dans des revues mathématiques parmi les plus sélectives joue un rôle important dans l'évaluation de la « production scientifique », la qualité des revues étant plus importante que le nombre des articles. Néanmoins d'autres facteurs ont été pris en compte, à commencer par l'avis des rapporteurs sur la valeur scientifique des contributions. Le « rayonnement » a aidé dans certains cas à identifier des dossiers dont l'activité de recherche a une influence marquante alors même que les publications paraissent dans des revues moins connues.

Les catégories « encadrement doctoral », « rayonnement » et « responsabilités scientifiques » ont été prises en compte, en particulier pour les PR2 et pour les PR1-PREX. Le comité a considéré que l'absence d'encadrement doctoral ou de responsabilités administratives dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX était une anomalie qui devait – en dehors de quelques situations exceptionnelles – être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Le comité a considéré qu'il n'était pas du ressort de la P.E.S. de récompenser une activité administrative particulièrement intense mais qu'il était anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives. Le même constat a été appliqué aux MCF « expérimentés », donc en dehors de la première petite dizaine d'années d'exercice.

Pour les MCF « jeunes » (dans les 6 années après le recrutement) le comité a considéré que les catégories « encadrement doctoral » et « responsabilités scientifiques » n'avaient en général pas grand sens, ce qui l'a conduit à noter cette catégorie B même pour des dossiers qui ne contenaient que peu d'éléments dans ce domaine, et à ne pas les pénaliser dans l'évaluation globale dans la mesure où ils présentaient une activité de recherche de très haut niveau. Par contre la présence d'éléments (encadrements de M2 voire co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire, etc.) a été appréciée positivement. Pour les très jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur et aux travaux de la thèse est un élément d'appréciation important.

Pour la P.E.S., l'évaluation porte seulement sur une période de 4 ans, pour les P.E.S. 2010 cette période était 2006-2009. Le comité s'est néanmoins autorisé à prendre en compte aussi les articles publiés en 2010 et ceux qui étaient acceptés, dans la mesure où ils correspondent très certainement à un travail effectué dans la période de référence. Il peut néanmoins être utile de rappeler aux candidats que les informations contenues dans leur dossier doivent être centrées sur la période de référence.

Comme chaque année, le travail du comité a été lourd et intense en raison de strictes contraintes de temps. Ses membres ont fait tout leur possible pour arriver au résultat le plus juste et le plus impartial possible. Néanmoins, comme tout travail d'évaluation, celui-ci a certainement donné lieu à des choix contestables, et les quotas A/B/C imposés ont obligé à des décisions difficiles. Dans ces conditions, être classé C ne doit en aucun cas être considéré comme une appréciation négative du dossier par le comité, mais simplement comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints. Le comité encourage très fortement les candidats qui n'obtiendront pas la P.E.S. en 2010 à postuler à nouveau en 2011. Nous attirons aussi l'attention des candidats sur la nécessité de donner toutes les informations nécessaires dans le formulaire de candidature et dans le C.V. joint ; les dossiers mal remplis peuvent pénaliser le candidat.

Le comité a appliqué de manière stricte les règles de déontologie de base, en particulier aucun membre ne s'est exprimé sur les dossiers des collègues de son université ou de son laboratoire.

Bilan des primes d'excellence scientifique (PES) CNRS 2010

Patrick Dehornoy[1]

Depuis 2009, les chercheurs CNRS sont éligibles à la prime d'excellence scientifique (PES). Il existe trois niveaux de prime, correspondant respectivement à un montant annuel de 3500 €, 7000 €, et 10000 €. Une partie des primes est attribuée de façon automatique aux récipiendaires de prix et distinctions, suivant une liste fixée par le CNRS, tandis qu'une autre partie est attribuée sur proposition des instituts au vu des demandes déposées par les candidats. En 2009, seules ont été attribuées les primes automatiques aux récipiendaires de prix et distinctions. L'année 2010 était la première où la procédure complète a été mise en place.

Déroulement de la procédure, conditions d'éligibilité

L'appel à candidature a été diffusé courant juin 2010, pour retour en juillet. Le comité de sélection s'est réuni en octobre, les décisions ont été prises en novembre, pour mise en place des primes en décembre 2010.

Les dossiers, électroniques et légers, consistent en un formulaire récapitulant l'activité au cours des quatre années précédant la demande, à compléter par un curriculum vitæ complet et, le cas échéant, les documents attestant des prix et distinctions.

Tous les chercheurs titulaires peuvent candidater. Il est demandé aux chercheurs ne candidatant pas au titre des prix et distinctions un engagement d'enseignement au cours des quatre années suivantes. La non-acceptation de cette clause entraîne la non-recevabilité du dossier.

Le nombre de candidatures déposées par les chercheurs affectés dans des laboratoires de l'INSMI en 2010 a été de 79, soit 21% d'un effectif total de 374 chercheurs concernés. Parmi ces chercheurs, 70 relevaient de la section 01 (mathématiques et applications), 9 d'autres sections (informatique, physique). Le taux de candidature était de 30% chez les CR2, 17% chez les CR1, 23% chez les DR2, et 22% chez les DR1 et DR0.

Sélection des dossiers

L'examen des dossiers de candidature a été effectué par un comité ad hoc composé de Rémi Abgrall, Valérie Berthé, Philippe Besse, Pascal Chossat, Patrick Dehornoy, François James, François Loeser, Guy Métivier (président), Fabrice Planchon, et Christoph Sorger. La section 01 du Comité National de la Recherche Scientifique n'a pas souhaité participer à ce comité : au cours de sa session de printemps 2010, elle avait voté une motion d'opposition à la PES et une motion de refus de participation à un comité de sélection.

Le comité a constitué une liste ordonnée de propositions. Cette liste a été élaborée en tenant compte du cadrage initial de l'enveloppe des primes, laquelle

[1] INSMI-CNRS.

laissait une certaine flexibilité sur la répartition entre les différentes catégories de prime, avec une possibilité de remplacer des primes à 7000 € par un nombre double de primes à 3500 €.

Les principes retenus pour l'évaluation des dossiers et la constitution de la liste des propositions ont été les suivants :

– priorité forte aux dossiers des chercheurs CR2 entrés au cours des trois dernières années (conformément à une suggestion de la section 01 du Comité National de la Recherche Scientifique),

– dans le cas des CR1, priorité à l'excellence scientifique des dossiers,

– dans le cas des DR, et spécialement DR1 et DR0, priorité aux dossiers qui, en sus d'une activité scientifique excellente, manifestent un fort engagement au service de la collectivité.

Le comité a pris en compte l'ensemble de la situation professionnelle des candidats, et considéré les chercheurs occupant des postes secondaires comme non prioritaires.

La liste finale des chercheurs attributaires de la prime a été décidée par la direction du CNRS à partir de la liste des propositions du comité, dont l'ordre a été intégralement respecté.

Au total, 36 primes ont été attribuées, à savoir 4 primes à 7000 € et 32 primes à 3500 €. Sur ce total, 3 primes ont été attribuées automatiquement au titre des prix et distinctions de la liste fixée par le CNRS, et 33 sur proposition du jury au titre de la catégorie « niveau élevé d'activité scientifique avec condition d'enseignement ». La liste des attributaires contient :

– 16 CR2 (soit 88% des demandes de cette catégorie et 26% du total de la catégorie),

– 9 CR1 (soit 33% des demandes de cette catégorie et 6% du total de la catégorie),

– 7 DR2 (soit 30% des demandes de cette catégorie et 7% du total de la catégorie),

– 4 DR1-DRCE (soit 27% des demandes de cette catégorie et 6% du total de la catégorie).

Les 4 primes d'un montant de 7000 € ont été attribuées à des directeurs de recherche (DR2 et DR1-DRCE).

Les attributaires de primes proviennent de 20 laboratoires différents, et, à une exception près, aucun laboratoire n'héberge plus de trois attributaires.

Par ailleurs, 3 primes ont été attribuées à des chercheurs d'autres sections affectés dans des laboratoires de l'INSMI, soit 1 chercheur de section 02 (physique) et 2 de section 07 (informatique).

Prévisions 2011, recommandations

Le nombre de primes qui seront attribuées en 2011 n'est pas connu à ce jour – mais il est envisageable que ce nombre soit du même ordre de grandeur qu'en 2010.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'absence d'engagement quant à l'obligation d'enseigner (case non cochée) entraîne la non-recevabilité du dossier.

Mathématiques de la planète Terre 2013

Christiane Rousseau[1]

Sous l'acronyme MPT2013, le projet vient d'être lancé d'organiser une année spéciale sur le thème des Mathématiques de la planète Terre en 2013 :

`www.mpt2013.org`

Il s'y tiendra des activités scientifiques organisées par les instituts de recherche en sciences mathématiques, les sociétés savantes et la communauté scientifique, ainsi que des activités pour le public, les médias et les écoles. Une invitation à participer est lancée à la communauté mathématique mondiale.

Le thème est interprété dans un sens très large. La Terre est une planète à l'intérieur d'un système planétaire. Le manteau terrestre est animé de processus dynamiques. Les océans et l'atmosphère créent des climats et causent des désastres naturels. L'eau et l'oxygène permettent la vie. La Terre est peuplée d'espèces vivantes qui évoluent avec le temps, interagissent entre elles et s'organisent en systèmes. Au-dessus de ces processus naturels, l'espèce humaine a développé des systèmes d'une grande complexité, incluant : les systèmes économiques et financiers, la Toile, les systèmes de gestion des ressources, de transports, de production et d'utilisation de l'énergie, les systèmes de santé ou les organisations sociales. L'activité humaine a crû jusqu'à un point où elle influence directement le climat global, a un impact sur la capacité de la planète de s'auto-suffire et menace la stabilité de ces systèmes. Des enjeux comme les changements climatiques, le développement durable, les désastres créés par l'homme, le contrôle des maladies et des épidémies, la gestion des ressources et l'intégration globale sont maintenant sur la ligne de front. Les mathématiques sont appelées à jouer un rôle clé dans l'étude des aspects et enjeux planétaires, en tant que discipline fondamentale mais aussi comme composante essentielle de recherches multidisciplinaires et inter-disciplinaires.

Mathématiques de la planète Terre 2013 va mettre l'accent sur la recherche mathématique dans ces domaines, fournir une plate-forme pour montrer la pertinence des mathématiques dans les problèmes planétaires et fusionner des activités présentement dispersées dans plusieurs institutions pour créer un contexte favorable aux développements mathématiques et inter-disciplinaires rendus nécessaires par ces différents enjeux et, ainsi, mieux répondre aux défis globaux du futur.

Les activités se tiendront partout sur la planète. Les activités scientifiques comprendront des trimestres ou semestres thématiques, des ateliers, des groupes de recherche conjoints, des écoles d'été, des numéros spéciaux de revues scientifiques. Plusieurs sociétés savantes tiendront une rencontre (par exemple, leur rencontre annuelle) sur le sujet ou lui consacreront des articles dans leur bulletin de liaison. La collaboration et l'organisation d'activités conjointes est fortement encouragée.

En parallèle du volet scientifique, l'initiative sera publicisée auprès du public, des médias et des écoles, en mettant l'emphase sur sa dimension planétaire. Des activités de sensibilisation aux mathématiques et au rôle qu'elles jouent dans l'étude de la terre seront organisées partout. Le volet pour le public pourra comprendre conférences grand public, émissions de radio ou de télévision, expositions, articles

[1] Université de Montréal, Vice-présidente de l'Union mathématique internationale.

dans les journaux. Des activités seront organisées pour les écoles : affiches, numéros spéciaux de magazines, pages sur la Toile, contact des associations d'enseignants pour les encourager à tenir leur congrès annuel sur le thème, conférences dans les écoles ou encore projets spéciaux dans les classes. La collaboration internationale est encouragée pour maximiser la visibilité de l'initiative, des affiches produites dans un pays pouvant par exemple être distribuées dans un autre. On peut faire de même avec les revues destinées au public ou aux écoles. (Par exemple, un numéro spécial *d'Accromath* (www.accromath.ca) pourrait être imprimé et distribué en France, et réciproquement).

Le thème est porteur et comprend de très nombreuses facettes, permettant ainsi aux membres de la communauté mathématique et aux différentes organisations de contribuer à l'initiative de manière créative. Nous espérons que la SMF et ses membres promouvront activement *Mathématiques de la planète Terre 2013*, en France et dans les forums européens, tout en y participant eux-mêmes.

Activités périscolaires mathématiques et égalité des chances

Martin Andler[1], Farouk Boucekkine[2]
Véronique Chauveau[3], Lionel Vaux[4]

Cet article est le second d'une série consacrée aux activités périscolaires mathématiques. Le précédent (Gazette 126 d'octobre 2010) s'est centré sur les clubs universitaires et les stages d'été. Cette fois-ci, nous mettons l'accent sur d'autres actions, qui sont tournées vers des publics qui sont a priori enclins à se détourner des disciplines scientifiques, pour des raisons très variées. Comme le précédent, cet article a pour but de susciter des initiatives similaires un peu partout en France.

Journées « filles et mathématiques, une équation lumineuse »

Les associations *femmes et mathématiques* et Animath organisent depuis l'an dernier des journées réservées au filles : « Filles et mathématiques : une équation lumineuse » avec le soutien de la région Ile de France. Elle se déroulent à l'institut Henri Poincaré. Les deux journées organisées en 2009-2010 ont eu un succès considérable : 75 filles de 3ème/2nde en décembre 2009, 52 filles de Première/Terminale en avril 2010, mais surtout des témoignages extrêmement positifs des élèves et de leurs professeurs sur l'effet que ces journées ont eu. Deux nouvelles journées ont lieu cette année, le 15 décembre 2010 et le 27 janvier 2011. À chaque fois, nous avons bien plus d'inscrites que de places.

Bien que la mixité ait été généralisée dans l'enseignement en 1975, bien que l'École polytechnique soit devenue mixte en 1972, que les filles soient en général meilleures élèves que les garçons, les chiffres restent pour le moins décevants :

– 45% de filles en Terminale S et seulement 38,5% en spécialité Mathématiques, alors que les filles représentent 56,1% des élèves en terminale générale[5] ;
– 23,7% de femmes parmi les ingénieurs débutants en 2009[6] ;
– 14% dans la promotion 2008 de Polytechnique.

Il peut paraître étonnant, voire rétrograde, que nos deux associations organisent des journées réservées aux jeunes filles. Pourtant, pour avoir déjà participé à des « journées filles », nous sommes obligé-e-s de reconnaître qu'elles éprouvent du plaisir à se retrouver entre filles pour un temps donné d'une certaine liberté retrouvée....

Certaines études ont montré le renforcement des stéréotypes de sexe dans les groupes mixtes, où les modèles de genres sont plus contrastés, avec pour effet la diminution des performances scolaires – des garçons dans les matières dites

[1] Professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin, Animath.
[2] professeur en CPGE au lycée Henri 4.
[3] professeur au lycée Camille-Sée à Paris, femmes et mathématiques.
[4] maître de conférences à l'université de la Méditerranée, IREM d'Aix-Marseille.
[5] Les élèves du second degré, *Repères et références statistiques* (édition 2010) Ministère de l'éducation nationale.
[6] Mutationnelles 10, `http://medias.letudiant.fr/documents/mutationnelle10.pdf`

« féminines » et des filles dans les matières dites « masculines » –, ainsi que, pour ces dernières, une détérioration de l'estime de soi. Il ne s'agit pas, pour nous, de prôner un retour à des classes non mixtes mais, simplement, de manifester à ces jeunes filles un intérêt spécifique, le temps d'une journée. Nous essayons ainsi de leur faire prendre conscience des stéréotypes de sexe dont nous sommes toutes et tous imprégné-e-s et de leur rôle dans les « choix » d'orientation.

La journée est organisée en quatre temps forts :

(1) une pièce de théâtre interactif sur les stéréotypes liés aux femmes et aux mathématiques,
(2) un atelier sur les métiers des mathématiques,
(3) des témoignages de mathématiciennes face à des petits groupes d'élèves,
(4) une conférence de vulgarisation mathématique.

À la suite des journées, un suivi (marrainage) des jeunes filles est prévu.

Informations complémentaires sur les sites :

`www.animath.fr` et `www.femmes-et-maths.fr/wp/index.php`

Hippocampe mathématiques

Créée en 2005, l'initiative Hippocampe-Math est menée par l'IREM d'Aix-Marseille en collaboration étroite avec la Faculté des Sciences de Luminy (Université de la Méditerranée) l'Institut de Mathématiques de Luminy (UMR CNRS 6206). Elle tente de remplir deux objectifs : lutter contre la désaffection des élèves pour les filières scientifiques (qui ne reflète pas, selon nous, une désaffection pour les sciences) et participer à la diffusion de la culture scientifique. Dans cette perspective, nous proposons de placer l'élève dans la situation du chercheur, lequel construit un savoir personnel avant de le structurer et de le transmettre. C'est l'activité essentielle du laboratoire de mathématiques pour tous, baptisé Pythéas, créé par l'IREM d'Aix-Marseille.

Notre démarche puise ses sources dans de nombreuses expériences développées par les mathématiciens au cours des dernières années : les travaux de Georges Polya sur l'induction et l'analogie en mathématiques ; le rôle de l'erreur dans le développement des mathématiques, mis en valeur par Imre Lakatos ; les travaux de l'IREM de Lyon sur les problèmes ouverts ; l'expérience MATh.en.JEANS ; etc.

Hippocampe-Math adapte aux mathématiques le format des stages de recherche en Biologie initiés en 2004 à l'INMED (Unité 901 de l'INSERM) par Constance Hammond et l'association Hippocampe (aujourd'hui portés par l'association Tous Chercheurs). Un stage Hippocampe-Math, c'est donc trois jours dans le laboratoire Pythéas de l'IREM, en contact direct avec la recherche : encadrés par des chercheurs (généralement doctorants), les élèves réfléchissent sur des problèmes de mathématiques, en lien avec les thèmes de travail du chercheur responsable du stage. Ils posent des questions et élaborent des hypothèses, puis ils expérimentent, discutent, débattent et communiquent, comme le font quotidiennement les chercheurs dans leur activité. Enfin, ils présentent leurs travaux à d'autres chercheurs lors d'une séance de posters.

Une quinzaine de stages Hippocampe-Math ont lieu chaque année. Initialement destinés aux sections scientifiques du lycée, ils se sont progressivement ouverts à d'autres publics du secondaire : collèges, classes de seconde, sections non scientifiques. Une partie significative des classes accueillies provient d'établissements « difficiles ». Depuis 2007, un ou deux stages Hippocampe sont en outre réalisés chaque année avec des élèves de l'École de la Deuxième Chance de Marseille.

Exemples de thèmes abordés en 2010-2011 : Machines à registres, Nombres parfaits et amicaux, Arithmétique et codage dans la vie courante, Mathématiques en renfort de la Médecine, etc.

Le laboratoire Pythéas porte les actions de l'IREM d'Aix-Marseille en direction des jeunes et du grand public. Il collabore régulièrement avec l'association marseillaise Math Pour Tous. Un partenariat avec le CIRM vient également de voir le jour : dans ce cadre, certaines séances de posters se déroulent dans les locaux du CIRM, à l'occasion de colloques ou de groupes de travail dont les thématiques sont en rapport avec le stage.
Informations complémentaires sur le site du laboratoire Pythéas :
`http://pytheas.irem.univ-mrs.fr/`
Voir aussi le site de l'association Maths pour tous :
`www.maths-pour-tous.org/`

Tutorat Animath-Science ouverte

Le tutorat Animath (qui existe depuis 2005, et depuis 2007 en collaboration avec l'association Science Ouverte présidée par François Gaudel) se présente sous la forme de deux sessions annuelles se déroulant jusqu'à présent au département de mathématiques de l'ENS rue d'Ulm, l'une, de novembre à janvier, avec des élèves de Première S, et l'autre, de février à mai, avec des élèves de Seconde.

Ces élèves proviennent d'établissements réputés difficiles de la région parisienne, et sont choisis par leurs professeurs pour leur motivation (et il en faut pour prendre les transports en commun un samedi après midi pour aller faire 2h de mathématiques loin de chez soi, lorsqu'on a 16 ans). Dix lycées participent régulièrement à cette activités, représentant presque autant de villes : Mantes-la-Jolie, Villepinte, Aulnay-sous-bois, Aubervilliers, Noisy-le-Grand, Créteil, Ivry-sur-Seine, et Paris, car il ne faut pas oublier que la capitale a son lot de lycées difficiles.

En moyenne ces dernières années, 40 à 50 élèves participent en Seconde, et 20 à 30 en Première, et ces nombres augmentent régulièrement (la capacité des salles gracieusement prêtées par le département de mathématiques de l'ÉNS étant la limitation la plus forte).

Le projet est né d'une constatation faite par les enseignants exerçant des deux côtés du baccalauréat. Les enseignants du supérieur déplorent que leurs élèves sont, globalement, d'une grande passivité et manquent cruellement de capacités de recherche, d'analyse et de rédaction qu'on attend d'étudiants. Les enseignants du secondaire se plaignent de ne plus avoir le temps d'aider les élèves intéressés à développer ces capacités, qui ne s'acquièrent qu'avec des années passées à avoir une attitude active face à des problèmes nouveaux.

Le tutorat Animath a pour but d'aider des élèves issus d'une dizaine de lycées de la région parisienne à acquérir ces qualités, en les faisant travailler sur des feuilles d'exercices créées pour l'occasion, nécessitant peu de savoir supplémentaire, de difficulté graduelle, avec des exercices obligatoires et d'autres facultatifs, afin que chacun puisse aller à son rythme et suivant son goût. Travaillant en petits groupes en fonction de leur provenance (pour faciliter le travail entre les séances), les élèves sont encadrés par des professeurs de leurs lycées et des étudiants en sciences avancés (majoritairement des doctorants, mais aussi quelques normaliens). Il s'agit donc d'un travail de complément extra-scolaire, destiné à des lycéens de Seconde et Première curieux des mathématiques et non d'aide aux devoirs, ni d'accompagnement scolaire d'élèves en difficulté.

Toutefois, il ne s'agit pas non plus d'une formation élitiste, le niveau des élèves étant très hétérogène, car ils sont choisis par leur professeurs pour leur degré de motivation plus que pour leur niveau. Si certains sont très bons, d'autres ont plus de difficultés, que nous espérons leur apprendre à surmonter en passant du temps sur des questions ne relevant pas du cadre scolaire. Ainsi, les élèves travaillent en commun sur une liste d'exercices dite principale, mais ceux qui vont plus vite peuvent enchaîner sur des exercices optionnels, pendant que les autres travaillent les bases ; le travail au sein d'un petit groupe encadré par des doctorants permet ce fonctionnement individualisé sans problème.

Les doctorants voient leur participation comptabilisée comme stage de formation doctorale par les principales écoles doctorales (CFDIP, CIES Versailles, nous attendons la réponse de Paris 6 pour cette année).

Lien avec d'autres activités :

Les élèves participant à ce tutorat sont encouragés à assister à d'autres programmes d'éveil aux sciences avec lesquelles les organisateurs sont en contact (comme la "Science Académie", des visites de laboratoires, l'école d'été de Science Ouverte, etc.) dans le but de tisser un treillis d'activités de nature à intéresser des adolescents curieux des sciences mais ne trouvant pas dans leur environnement immédiat l'émulation nécessaire pour s'épanouir dans cette direction.

Enfin, un autre tutorat, situé à Bobigny et organisé par l'association Science Ouverte et l'université Paris 13, vient depuis 2010 prendre le relais pour assurer un soutien hebdomadaire aux élèves de terminale et de premières années post-bac (université, prépas), afin d'assurer une continuité dans le suivi des élèves.

CARNET

Benoît Mandelbrot - in memoriam

(1924 – 2010)

Stéphane Jaffard

Benoît Mandelbrot nous a quitté le 14 octobre 2010, suite à un cancer, à l'âge de 85 ans.

Cette nouvelle a été un choc pour de très nombreux scientifiques à travers le monde, tant l'impressionnante stature du fondateur de la géométrie fractale semblait un roc indestructible. La *Gazette* rendra, dans un futur proche, un hommage particulier à celui qui, loin de se cantonner au seul domaine des mathématiques, a été un génie de l'interdisciplinarité, et dont les idées ont profondément bouleversé plusieurs domaines de la science. Nous nous contenterons donc de fournir ici quelques éléments sur sa vie et son œuvre.

Benoît Mandelbrot est né en Pologne le 20 novembre 1924. En 1936, sa famille se réfugie à Paris, où elle retrouve l'oncle de Benoît, Szolem Mandelbrojt, lui-même éminent mathématicien (ainsi, il fut l'un des fondateurs du groupe Bourbaki) et professeur au collège de France ; Szolem aura d'ailleurs une forte influence sur le développement scientifique de son neveu (il attirera par exemple son attention sur les articles de Fatou et Julia concernant l'itération des polynômes complexes). Paul Lévy, qui sera son professeur à l'École Polytechnique, sera une autre de ses sources d'inspiration. Benoît complètera sa scolarité par un master d'aéronautique à Caltech, puis reviendra en France pour effectuer une thèse, soutenue le 16 décembre 1952, dont le sujet est : « Contribution à la théorie mathématique des communications ». La première partie concernait la linguistique mathématique, et la seconde la thermodynamique statistique. Selon ses propres mots, la première partie était une forme très exotique de la seconde. On voit percer, dans ces premiers travaux, le génie de construire des ponts entre domaines de la science qui, pour tout autre que lui, paraissaient sans rapport ; il y met déjà en évidence les phénomènes en loi de puissance, qui seront l'un des fils directeurs de ses travaux postérieurs. Il travaillera plusieurs années au CNRS, puis, après un court passage comme professeur à l'Université de Lille, il passera l'essentiel de sa carrière en dehors des positions académiques, au Centre Thomas J. Watson (IBM), à partir de 1958, où il deviendra bientôt « IBM fellow », cette position lui permettant de mener ses recherches en toute indépendance. Il achèvera sa carrière comme professeur à Yale.

Benoît Mandelbrot fut un pionnier de l'utilisation de l'informatique comme outil d'expérimentation mathématique. Ses travaux ont ouvert de nouvelles perspectives à plusieurs branches des mathématiques (systèmes dynamiques, processus aléatoires,...), mais son apport le plus spectaculaire fut sans doute l'élaboration de concepts et d'outils mathématiques qui ont permis de dévoiler des correspondances insoupçonnées entre des parties de la Science aussi diverses que l'astronomie, la turbulence, la physique des matériaux, la géologie, l'hydrologie, la chimie, la biologie, l'économie, la statistique, le traitement du signal et de l'image ou encore la linguistique. Son célèbre article sur les crues du Nil mettra les mouvements brownien fractionnaires (initialement construits par N. Kolmogorov) au centre de la modélisation en traitement du signal. Les « cascades de Mandelbrot » sont un outil central en modélisation de la turbulence, et le point de départ du chaos multiplicatif, qui se développera ensuite sous l'impulsion de Jean-Pierre Kahane et Jacques Peyrière. L'« ensemble de Mandelbrot » est l'un des objets mathématiques les plus riches, et l'exploration de ses propriétés tient en haleine nombre de mathématiciens. La résolution de la célèbre « conjecture de Mandelbrot », selon laquelle la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne plane a un bord de dimension $4/3$, est l'un des résultats les plus spectaculaires obtenus par Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner, et est lié à des résultats profonds en physique (le rapport avec la gravité quantique a été établi par Bertrand Duplantier). Benoît Mandelbrot a aussi été à l'origine de modèles d'évolution des cours de la bourse qui rendent beaucoup mieux compte des observations expérimentales que le fameux modèle de Black et Scholes. Ces quelques exemples ne donnent qu'un trop bref aperçu de l'ouverture de son champ scientifique et de son inlassable activité d'essaimeur d'idées et de jeteur de ponts. Il ne connaissait pas de frontières entre les domaines de la science, ce qui lui a permis d'en abattre beaucoup.

Ses ouvrages ont eu une immense influence sur l'ensemble de la communauté scientifique ; citons « Les objets fractals, forme, hasard et dimension » (1975) ou « La géométrie fractale de la nature » (1982). On aura un aperçu de la variété des domaines auxquels il a contribué en consultant ses Selecta (édités par Springer).

Benoît Mandelbrot a reçu les plus hautes distinctions internationales dont, le prix Wolf en physique en 1993 et le Japan Prize for science and technology of complexity en 2003. La France a été plus chiche envers lui en termes de reconnaissance. Pourtant un grand nombre de scientifiques français, dans les disciplines les plus diverses, se réclament aujourd'hui de ses idées et de son approche des problèmes scientifiques, aussi originales que fécondes.

Michelle Schatzman

(1949 – 2010)

Sylvie Benzoni[1], Stéphane Descombes[2],
Claire Poignard[3], Magali Ribot[4]

Michelle Schatzman, directrice de recherche CNRS au sein de l'Institut Camille Jordan à l'université Lyon 1, est décédée des suites d'un cancer à l'âge de 60 ans le 20 août dernier. Cette mathématicienne de renom laisse un grand vide dans la communauté mathématique. Auteur d'un livre original et devenu incontournable, *Analyse numérique, Une approche mathématique*, paru pour la première fois chez Masson en 1991 et réédité chez Dunod en 2001, elle le présentait dans l'avant-propos comme le fruit d'un conte de fées dont elle serait l'héroïne. Voici en quelques mots et à sa mémoire, l'histoire de cette héroïne brillante et atypique.

Née dans une famille juive d'un père astrophysicien et rationaliste et d'une mère spécialiste des contes russes, Michelle était « un pur produit de l'école publique », comme elle aimait à le rappeler tout en remerciant le contribuable. Entrée première à l'École Normale Supérieure de jeunes filles en 1968, elle obtient l'agrégation et une thèse de troisième cycle en 1971, sous la direction de Haïm Brézis, puis un doctorat d'état en 1979, sous la direction de Jacques-Louis Lions. Elle fait une carrière « hybride » avec un aller-retour entre le CNRS et l'université : Michelle commence comme attachée puis chargée de recherche de 1972 à 1984 au Laboratoire d'analyse numérique de Paris 6, aujourd'hui Laboratoire Jacques-Louis Lions, puis à partir du printemps 1981, au Centre de Mathématiques APpliquées de l'École Polytechnique. Elle devient professeur des universités à l'université Lyon 1 en 1984, dans l'équipe d'analyse numérique Lyon-Saint-Étienne qui deviendra, en 1995, le laboratoire MAPLY, Mathématiques APpliquées de LYon, dont elle assurera la direction pendant huit années ; ce laboratoire fusionnera en 2005 avec d'autres laboratoires lyonnais pour fonder l'Institut Camille Jordan. Elle réintègre le CNRS en 2005 comme directrice de recherche sans pour autant cesser d'enseigner, en master surtout. Au fil des années, elle écrit plus de 70 articles scientifiques, dont de nombreux font date et sont toujours abondamment cités. Cette carrière brillante autant qu'exemplaire fut jalonnée de séjours de longue durée dans les prestigieuses institutions étrangères que sont University of California à Berkeley, The Institute for Mathematics and its Applications à Minneapolis, The Courant Institute à New York. Michelle reçut aussi des récompenses qui lui firent chaud au cœur. En particulier, au cours de ces dernières années elle fut lauréate du prix

[1] Université Lyon 1.
[2] Université de Nice, Sophia Antipolis.
[3] INRIA Bordeaux-Sud Ouest.
[4] Université de Nice, Sophia Antipolis.

de Mme Claude Berthault décerné par l'Académie des Sciences en 2006, et fut nommée chevalier de la Légion d'honneur au nouvel an 2009.

Michelle était une éminente analyste. Elle adorait aborder sans cesse de nouveaux domaines, se renouveler, se remettre en question et aller chercher de l'autre côté de la palette mathématique ce qui pourrait servir pour ses recherches en cours. Elle s'est toujours refusée à appartenir à une école mathématique, préférant étudier les problèmes qui l'intéressaient plutôt que les problèmes à la mode. Elle définissait elle-même « les mathématiques comme une clé, comme un monde intérieur, comme une énigme policière, comme une poésie, comme une plongée en apnée, comme une pensée qui n'est pas en mots mais en symboles et en images. Et aussi en odeur (avec mes doctorants, quand je travaille : ce calcul-là, ça sent la faute !) et en mouvement ». Pour elle, les mathématiques ne pouvaient se faire sans les mains ; elle a d'ailleurs souffert de ne pas pouvoir écrire à certains moments de sa maladie. Michelle est connue pour ses travaux en analyse non-linéaire et en analyse numérique, qui couvrent un spectre très large. Elle a inventé des concepts et des méthodes largement repris internationalement. Elle était fière et à juste titre d'avoir été pionnière sur plusieurs sujets, notamment :

– la mécanique non régulière à nombre fini ou infini de degrés de liberté, notamment les équations du vibro-impact, décrivant des mouvements limités par des obstacles,
– la version continue des fonctionnelles de Glimm pour des systèmes de lois de conservation hyperboliques,
– le lien entre mouvement à courbure moyenne et les équations de réaction-diffusion,
– les solutions symétriques d'équations et de systèmes elliptiques semi-linéaires,
– les méthodes numériques à haute précision et notamment la décomposition d'opérateur.

Un modèle d'évolution de densité de tourbillons en supraconductivité porte même son nom, c'est le modèle de Chapman-Rubinstein-Schatzman. Michelle aimait à répéter qu'elle faisait des « mathématiques appliquées, pas applicables », n'hésitant pas à s'attaquer à des problèmes aux frontières des équations différentielles et de l'analyse numérique : des problèmes aussi bien issus de la mécanique, de l'électromagnétisme que de l'algèbre. Ses travaux récents portaient sur l'utilisation d'outils de géométrie algébrique pour exploiter la structure particulière de certaines matrices issues de la discrétisation des équations aux dérivées partielles. Elle avait fait le lien entre la possibilité de coder efficacement certains calculs et la dimension de certains objets définis par des équations polynomiales, dont l'estimation relève effectivement de la géométrie algébrique. Là encore, par sa curiosité et l'étendue de ses connaissances, elle était parvenue à rapprocher deux domaines a priori très éloignés des mathématiques. Son immense culture trouvait sa source aussi bien dans ses discussions tous azimuts que dans la quantité impressionnante de livres qui tapissaient les murs de son bureau et de son appartement. Comme elle le disait souvent : « Entre une belle robe et un beau livre, j'ai toujours choisi le livre, regardez donc ma bibliothèque ! ». Et il est vrai qu'on ne la voyait pas souvent en robe...

Cette culture, elle la faisait partager avec enthousiasme, aussi bien à ses collègues lors de discussions informelles et de groupes de travail aux noms parfois étranges comme « Frontières et contrebande », qu'à ses étudiants de tous niveaux : ceux qui n'étaient pas déroutés par son effervescence étaient généralement captivés. Elle attachait en effet une grande importance à la formation, et répétait souvent cette citation du Talmud qui apparaît dans l'avant-propos de son livre : « Rav Hamina disait : j'ai beaucoup appris de mes maîtres, plus de mes condisciples, mais c'est surtout de mes élèves que j'ai le plus appris ». On lui doit de nombreux docteurs, pour la plupart devenus chercheurs, enseignants-chercheurs ou ingénieurs. Elle en parlait souvent en distinguant les clandestins des officiels, les clandestins étant ceux qui n'avaient pas fait leur thèse sous sa direction mais avec qui elle avait beaucoup discuté pendant la préparation d'icelles, et qui ont bien voulu lui en donner acte : Y. Brenier, P. Degond, L. Halpern, G. Raugel et C. Reder. Les officiels sont au nombre de dix-huit, chronologiquement : M. Hammou, H. Tayari, A. Dimier, J-P Lohéac, S. Benhadid, L. Paoli, A. Tlili, B.O. Dia, F. Nqi, S. Descombes, M. Kolli, J. Bastien, A. Petrov, M. Ribot, F. Bernardin, R. Perrussel, C. Poignard, H. Khalil. Tous ceux-là ne peuvent oublier les longues séances de travail, une tasse de thé à la main, sur son immense bureau. Elle faisait aussi partager sa passion des mathématiques aux plus jeunes et au grand public. Elle estimait en effet qu'expliquer l'objet de ses recherches faisait partie de son travail, et faisait sienne la maxime de Boileau : « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement ». À ce titre, elle a signé plusieurs articles dits de vulgarisation, dont un célèbre « Lax-Richtmyer reste un pilier de l'analyse numérique » et participait régulièrement à la Fête de la science, n'hésitant pas à mettre la main à la pâte pour réaliser, par exemple, des pavages en feutrine.

Michelle, c'était aussi une plume originale et fort agréable à lire, comme en témoigne son livre ; ces derniers temps elle avait mis en ligne plusieurs billets remarqués sur le site *Images des Mathématiques* et, de façon plus discrète, diverses contributions à la fois sérieuses et amusantes au projet Mathématiques de Wikipedia. Mais Michelle était surtout une plume politique engagée, s'exprimant régulièrement sur la place des mathématiques appliquées en mathématiques et en sciences (voyez son article « Réalité et fiction des mathématiques appliquées », paru dans la *Gazette des Mathématiciens* en 1998 et toujours d'actualité), donnant son avis sur des sujets graves qui lui tenaient à cœur, comme le conflit israélo-palestinien ou la place des femmes parmi les scientifiques et les mathématiciens. Elle était d'ailleurs membre de l'association Femmes et mathématiques depuis sa création en 1987. Elle avait participé à plusieurs journées et avait apporté son soutien aux jeunes mathématiciennes : elle avait offert à la revue *femmes & math* son abécédaire, paru dans le numéro 6 de mars 2002 et dont nous tirons quelques extraits dans ce texte. Michelle fut en outre une militante syndicale, au sein du SGEN puis en tant que permanente CFDT dans les années 1970 ; elle racontait volontiers que cet engagement syndical avait ralenti sa recherche dans ces années-là, mais que c'est également grâce à l'engueulade d'un syndicaliste, G. Mulet, qu'elle avait pu repartir de plus belle en mathématiques. Au passage, elle avait appris à taper au clavier plus vite que son ombre. Ces deux dernières années, elle contribuait régulièrement au blog « K, histoires de crabe » de Marie-Dominique Arrighi, par des commentaires pleins de lucidité et de sagesse à propos de la vie avec le cancer.

Michelle, c'était une grande petite femme avec deux grands yeux bleus pétillants derrière ses lunettes, qui se caricaturait volontiers pour le plus grand plaisir de ses élèves et de ses collaborateurs. Il faut dire qu'en plus d'être une plume, elle avait des doigts de fée ! Dessins humoristiques, tricot auquel elle s'était remis avec entrain depuis la naissance de ses petits-enfants, dentelle, crochet, rien ne lui résistait. Un personnage haut en couleurs, au propre comme au figuré, avec un humour décapant (ses éclats de rire résonneront longtemps à nos oreilles), ironisant sur sa maladie et n'hésitant pas à faire passer ses problèmes au second plan pour s'intéresser à ceux d'autrui. Un caractère entier et bien trempé aussi, n'hésitant pas à défendre bec et ongles les idées en lesquelles elle croyait, entrant en conflit ouvert avec ses opposants. Lors de ces débats, comme dans la vie, dans ses écrits ou dans sa pratique de la religion juive, elle restait toujours extrêmement précise... sans jamais être ponctuelle. Elle était surtout profondément humaine, affichant un savant mélange d'assurance et de doute. En décembre 2009, un colloque avait été organisé en son honneur pour célébrer ses 60 ans. Nous savions Michelle malade depuis 2004 et sa joie lors de ce grand moment nous avait grandement émus le cœur. Nous n'imaginions pas que c'était l'une des dernières fois où nous la verrions, tant elle rayonnait et paraissait en forme ce jour-là.

Dans son abécédaire, Michelle se présentait comme un « homme généralisé » et disait : « Tant de choses à faire, et je n'ai qu'une vie ». C'est après des années de lutte admirable dans un combat qu'elle savait perdu d'avance, sans jamais se plaindre, qu'elle nous a quittés avec discrétion en plein été, en pleine célébration des mathématiques et des mathématiques françaises en particulier. Elle a juste eu le temps de se réjouir des médailles Fields attribuées à Elon Lindenstrauss, professeur à Jérusalem dans un pays qui lui était tellement cher, et à Cédric Villani qu'elle admirait profondément pour sa production scientifique, mais aussi pour ses qualités humaines. Elle a rejoint les étoiles trop tôt, bien trop tôt. Quelques mois seulement après son père Évry Schatzman, un autre scientifique de renom. Bien des années après son grand-père paternel Benjamin, mort en déportation et pour qui elle avait une grande admiration. Toujours dans son abécédaire, Michelle disait que partir à Lyon lui avait donné une deuxième vie. Elle a choisi de revenir dans sa région natale pour y reposer en paix. Lors du dernier adieu à Michelle au cimetière parisien de Pantin, le 24 août dernier, le soleil s'est caché pendant le discours de son frère. Comme pour, lui aussi, respecter la mémoire de Michelle. Que tous les siens, notamment sa mère Ruth Schatzman, ses enfants Claude et René et ses petits-enfants Yakir et Tamar, reçoivent le témoignage de l'affection et du soutien de la communauté mathématique. Dans son abécédaire, Michelle parlait de sa collaboration avec son grand ami, le mathématicien Piero de Mottoni (1943 – 1990), disparu tragiquement dans un accident de voiture. Elle disait qu'il lui avait fallu dix ans pour en parler sans se déchirer, qu'elle aurait tant aimé pouvoir lui écrire mais qu'elle ne connaissait pas son adresse e-mail au paradis. Cette petite phrase pleine d'émotion et d'humour s'applique désormais à nous.

Merci Michelle pour tout ce que tu as donné aux mathématiques françaises.
Merci pour tout ce que tu nous as transmis, à nous, tes élèves et tes collègues.
Merci pour ton soutien, tes critiques constructives et tes encouragements !

Quelques souvenirs de Michelle Schatzman

Bernard Helffer

Je connais Michelle depuis les années prépa (1967-68). Nous n'étions pas dans la même classe de spéciales au Lycée Janson de Sailly à Paris, mais une certaine vie collective rassemblait les deux classes et une quinzaine d'entre nous (dont elle et moi) s'est même retrouvées pour des vacances communes en 1969. Je me souviens surtout d'elle à cette époque comme d'une militante et qui réussissait en maths sans difficulté apparente.

Quelques années plus tard, nous nous croisons sur les bancs d'un amphi de l'ancienne École Polytechnique pour des séminaires Goulaouic-Schwartz. C'est une période où les Équations aux Dérivées Partielles (EDP) traversent une période de mutation. L'analyse appliquée et les équations aux dérivées partielles non linéaires se développent autour de certains des élèves de J.-L. Lions tandis que la plupart des EDPistes linéaires investissent à fond dans l'analyse microlocale à l'instigation de C. Goulaouic (élève lui aussi de J.-L. Lions), L. Boutet de Monvel, J.-M. Bony, A. et J. Unterberger,... Le fait de trouver Michelle Schatzman dans ce séminaire alors qu'elle travaillait sous la direction d'H. Brézis est de ce point de vue plutôt inhabituel (des collaborations beaucoup plus tard avec G. Lebeau montreront que l'analyse microlocale ne lui sera pas étrangère). On retrouve ici dès le départ une caractéristique de Michelle : n'appartenir à aucune école mathématique et chercher sa propre voie dans la solution des problèmes.

À la même époque, Michelle investit dans le syndicalisme et milite dans le SGEN. Je militais à l'époque au SNCS. Nous nous retrouvons à partir de 1976 à la commission du CNRS, amis toujours, en désaccord parfois, à défendre avec la fougue de notre jeunesse des positions syndicales pas toujours convergentes et pas toujours réalistes dans une commission qui comprenait entre autres J. Bretagnolle, H. Brézis, P. Deligne, M. Hervé, M. Lejeune Jalabert, P. Lelong, P. Malliavin, G. Mokobodzki (président), J.-P. Ramis,... Michelle faisait circuler, quand l'atmosphère se tendait, des petits dessins ou des messages humoristiques, dont les lecteurs de sa page Web peuvent imaginer le style.

Un peu plus tard, Michelle se lance encore plus à fond dans le syndicalisme. Elle devient en effet permanente CFDT. J'ai bien cru à ce moment qu'elle serait perdue pour la recherche. Mais non, elle avait cette rage de vivre pour les maths qui lui permit de repartir quand elle décida d'arrêter son mandat syndical, la même qui lui permettra de tenir ces cinq dernières années.

À partir des années 90, nos chemins scientifiques se sont rapprochés, autour de questions de théorie spectrale qu'elle me posait parfois puis autour de la théorie de Ginzburg-Landau qu'elle explora dans ses travaux avec le mathématicien israélien J. Rubinstein.

Sans renier ses engagements précédents, elle éprouve le besoin de revenir à ses racines et comme toujours elle va jusqu'au bout de ses convictions.

À plusieurs reprises, Michelle m'a invité à regarder les travaux de ses élèves. J'ai été chaque fois frappé par l'originalité des sujets avec une variation entre des chapitres presque bourbakistes et d'autres très appliqués. C'était en effet une autre caractéristique de Michelle : elle aimait toutes les mathématiques et prenait toujours plaisir à découvrir de nouveaux liens entre ses différents domaines.

La dernière fois que je l'ai vue fut à Lyon en décembre dernier dans un colloque organisé en son honneur. Le hasard, la médecine ou sa volonté avaient permis qu'elle soit en forme ces jours-là. Elle gardait toute sa curiosité mathématique pour chaque exposé et put exprimer à tous, avec toute la verve qu'on lui connaît, combien elle voulait profiter de chaque jour qui lui restait.

Comme je l'écrivais cet été dans un message aux membres de la SMF, nous avons perdu une grande mathématicienne qui a beaucoup donné à la communauté mathématique, et pour ma part je perds aussi une amie.

Johannes Jisse (dit Hans) Duistermaat

(1942-2010)

San Vũ Ngọc

Ces quelques pages tentent de rendre hommage à ce très grand mathématicien que fut Hans Duistermaat. Elles s'appuient sur les souvenirs des diverses rencontres que j'ai eu la chance d'avoir avec lui entre 1994 et 2010.

Hans Duistermaat était professeur de mathématiques pures et appliquées de l'université d'Utrecht. Ces cinq dernières années, comme membre de l'Académie Royale des Sciences des Pays-Bas, il se consacrait entièrement à la recherche mathématique. Il était également « Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw » (chevalier de l'ordre du Lion Néerlandais). Il s'est éteint à Utrecht le 19 mars 2010.

Un manque difficile à combler

Avec la disparition de Hans Duistermaat, les mathématiques ont perdu une exceptionnelle force vive et originale. Hans était un esprit à la fois puissant et modeste, pugnace mais avec une ouverture et une culture vraiment hors du commun.

Hans se définissait comme un analyste, mais son enthousiasme permanent et communicatif pouvait le pousser vers n'importe quel domaine, avec une prédilection pour la géométrie, car il aimait comprendre la nature intrinsèque des problèmes auxquels il s'attaquait.

Les mathématiques de Hans sont une combinaison rare d'élégance et de pertinence pratique. Il ne voulait pas être un théoricien, mais il aimait revisiter les exemples les plus simples et les plus classiques pour en démontrer les qualités universelles. Et lorsque le problème théorique apparaissait devant lui, amplement motivé, sa capacité d'abstraction intelligente était reconnue par tous.

Ses anniversaires

Hans avait une vraie modestie. Pas celle qui l'aurait empêché de faire de la publicité pour ses résultats, mais celle qui le rendait très mal à l'aise lorsqu'il avait l'impression que les louanges dépassaient son mérite. Il avait refusé qu'on célébrât ses 60 ans pour cette raison, mais, devant l'insistance de la communauté pour que ses 65 ans ne passent pas inaperçus, en 2007, il avait dû céder, sous la condition expresse que les conférenciers dussent s'en tenir à des communications purement scientifiques.

Les anciens et les jeunes

Sa modestie allait de pair avec son honnêteté scientifique. Il pensait que la plupart des idées soi-disant nouvelles trouvaient leurs origines chez les anciens, souvent célèbres mais que peu de personnes lisent réellement. Sa passion pour l'histoire, évidente à tous ceux qui l'ont côtoyé, le poussait ainsi à remonter aux sources de Lie, Cartan, Poincaré et même Huygens ou Newton. Par conséquence naturelle, et contrairement à une tendance lourde, actuelle et regrettable, il publiait avec parcimonie. De l'aveu que m'a fait l'un de ses plus anciens collègues et collaborateurs, Richard Cushman, lorsque je travaillais ma thèse à Utrecht en 1997, des quantités impressionnantes de notes de la main de Hans étaient délaissées, qui auraient pu fournir la matière à des dizaines et des dizaines d'articles dans des mains moins perfectionnistes.

Pourtant, et heureusement, son goût pour l'histoire ne prenait pas le dessus sur son enthousiasme pour faire avancer les mathématiques : il était le premier à encourager les jeunes et à exprimer des réserves sévères sur les « anciens » lorsqu'il considérait qu'ils n'avaient pas complètement compris un problème. Par exemple, quelques semaines seulement avant son décès, nous avons eu, Hans, Zung et moi, des échanges fournis et contradictoires sur la paternité du théorème des coordonnées actions-angles pour les systèmes complètement intégrables.

Les mathématiques

Hans soutient une thèse de mathématiques à l'université d'Utrecht en 1968, sous la direction formelle de Freudenthal, un mathématicien d'une grande culture universaliste. Puis, il a une intuition géniale en se plongeant dans les travaux de Hörmander. Ce dernier est en train de développer une technique extraordinairement souple pour l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires : les opérateurs intégraux de Fourier, et il a besoin d'en discuter pour avancer. Hans, que la lecture de certains chapitres de Hörmander laisse perplexe, décide de partir en post-doc à Lund pour comprendre de quoi il retourne. Pendant un an, Hörmander raconte sa théorie à un groupe restreint, et Hans est passionné. Sa connaissance déjà profonde des travaux de Lie lui permet de contribuer de façon essentielle à la théorie globale des opérateurs intégraux de Fourier. C'est sans conteste son premier coup d'éclat : alors qu'il rentre aux Pays-Bas en 1970, Hörmander lui demande d'écrire avec lui la théorie globale et ses applications. Hans raconte avec sa modestie habituelle qu'il a travaillé d'arrache-pied pendant six mois, pour finalement recevoir de Suède un manuscrit où ses idées sont beaucoup mieux expliquées et utilisées qu'il n'aurait su le faire lui-même en si peu de temps. C'est ainsi que Hans s'est révélé à la communauté comme un pionnier incontestable de l'analyse microlocale moderne. Ce travail, publié en 1972 [8], est devenu une référence incontournable sur le sujet, à l'instar de son fameux cours donné à Nijmegen et au Courant Institute [4].

Ainsi qu'il me l'a raconté bien plus tard, Hans a assisté pour la première fois, lors de son passage à Lund, à une « guerre d'école », qui opposait Hörmander à Leray, au sujet de la théorie de Maslov. Ce dernier avait compris la signification des ansatz BKW, en termes de distributions lagrangiennes, mais la rigueur manquait dans ses écrits, difficiles à lire par les mathématiciens. Ainsi Hörmander qui, un peu dans la lignée des bourbakistes, voulait une théorie « propre », débarrassée de références à la physique, a voulu ouvertement ignorer le travail de Maslov. En France, Leray était au contraire très intéressé par l'approche de Maslov, et entra ainsi en confrontation avec Hörmander. Malgré son jeune âge, Hans réussit à ne pas prendre parti ; mieux, sa rapidité phénoménale pour comprendre en profondeur ces questions mathématiques si délicates lui permit de contribuer dans les deux camps. À peine deux années après « FIO II », il publia dans CPAM un autre article de référence sur les intégrales oscillantes [3], dans lequel la formulation de Maslov (avec le petit paramètre $\hbar$) est justifiée. En outre, Hans s'intéressa de près à l'indice de Maslov qui intervient dans les phases stationnaires, et fut le premier à faire le lien entre l'indice défini par Hörmander et un indice de Morse d'un problème variationnel.

Entre-temps, Hans avait commencé une collaboration avec Guillemin sur les liens entre le spectre d'opérateurs elliptiques et les trajectoires classiques périodiques basée sur l'interprétation du propagateur quantique comme opérateur intégral de Fourier. L'article [6] correspondant à ce travail, publié à *Inventiones Mathematicæ* est (encore !) devenu un grand classique, cité par un nombre impressionnant d'auteurs. Il faut écouter l'enthousiasme de Victor Guillemin racontant cette collaboration... collaboration qui, du reste, a fait de l'ombre sans le vouloir à Yves Colin de Verdière, qui venait de soutenir sa thèse sur un problème similaire, mais sans utiliser les formidables outils de Hörmander. Comme le montre la photo, la controverse sur la « formule de traces de Colin de Verdière – Duistermaat – Guillemin est maintenant dépassée !

Je me vois obligé, faute de compétences, de passer rapidement sur les travaux de Hans concernant l'analyse harmonique sur les groupes de Lie et les variétés localement symétriques. Par contre, il est impossible de ne pas citer son travail avec Gerd Heckman sur la variation de la forme symplectique lors d'une réduction, et la formule de la phase stationnaire « exacte » correspondante. Cet article, publié en 1983 dans *Inventiones Mathematicæ*, a eu une influence extraordinaire dans le domaine de la géométrie symplectique et la quantification. Atiyah raconte qu'il a été l'une de ses motivations principales pour son travail avec Bott sur la cohomologie équivariante [1]. Encore de nos jours, les travaux sur la célèbre « formule de Duistermaat-Heckman » sont innombrables.

Quelques années après, comme une suite logique (mais dont je ne connais malheureusement pas l'histoire précise), Hans s'est intéressé au problème de la commutation de la quantification et de la réduction symplectique. Son article [7] dans le cas de S^1 est également un classique. Hans m'a parlé un jour de ce travail, et je me souviens que deux faits m'ont marqué. Le premier, anecdotique, était que Hans n'avait jamais rencontré en personne un des collaborateurs, Wu, et il trouvait cela

FIG. 1. Y. Colin de Verdière, H. Duistermaat et V. Guillemin à Grenoble en 2006

remarquable. Le deuxième concerne le livre [5], qui a été publié l'année suivant la parution de cet article. Hans me racontait que, ne connaissant rien au sujet, il avait pris des notes sur les opérateurs de Dirac, le théorème de l'indice (prouvé par l'équation de la chaleur), la cohomologie équivariante, etc. Tout ceci dans le but initial d'être en mesure de collaborer efficacement sur le sujet. Quelqu'un d'avisé a tout de suite compris qu'il ne fallait pas laisser passer l'occasion, et a donc incité Hans à publier ces notes personnelles. C'est ainsi qu'est né le livre [5].

Récemment, Hans s'est passionné pour un problème de géométrie algébrique : l'application QRT et les courbes elliptiques. Il était tellement plongé dans son sujet que pendant près d'un an, le joindre par courrier électronique était devenu une mission quasi impossible. En 2008 il a donné un mini-cours sur ce sujet lors d'une école d'été à Barcelone, comportant une séance de TD sur Mathematica à laquelle, collègues et étudiants, nous avons tous assisté, heureux d'être pour une heure sous la houlette du professeur Duistermaat. De ces travaux est né un livre de plus de 600 pages qui vient juste de paraître.

Cette brève sélection de résultats saillants dus à Hans Duistermaat ne doit pas masquer le fait que Hans a toujours eu des motivations profondes pour s'attaquer à ces problèmes d'apparences si variées. Parmi ces motivations, la mécanique classique n'est pas la moindre. Hans aimait la mécanique sous de nombreuses formes, avec une prédilection pour les systèmes hamiltoniens et en particulier les systèmes intégrables. Son article de 1980 sur la globalisation des coordonnées actions-angles est toujours considéré comme la meilleure référence sur le sujet, et a suscité de nombreux travaux ultérieurs (dont une bonne partie des miens). Ses travaux sur la réduction symplectique – et sa quantification – s'enracinent dans ses études très détaillées sur les bifurcations d'hamiltoniens à orbites périodiques ; ses travaux sur les courbes elliptiques sont ouvertement motivés par les systèmes intégrables et leurs fibrations lagrangiennes. Hans connaissait également des théories mécaniques plus exotiques, ou simplement moins bien formalisées. Je me souviens de mon étonnement de débutant lorsqu'en 1998 il me racontait qu'il se passionnait pour un problème de rotation sans glissement d'un solide ellipsoïdal sur un plan : cela me paraissait si suranné, comparé à l'analyse microlocale et à son article sur les distributions lagrangiennes que j'étais alors en train d'étudier !

L'enseignement

Une de mes grandes erreurs, lors de mon séjour à Utrecht, a été de ne pas assister aux cours « de base » que donnait Hans sur l'analyse et la mécanique classique. Je n'ai compris qu'après coup que Hans aimait vraiment enseigner, et le faisait de façon très personnelle et originale.

Son désir de comprendre les choses en profondeur et avec élégance se traduisait dans son écriture, dense mais précise, et dans ses talents pédagogiques. Je suis persuadé que la publication de ses cours d'Utrecht serait d'un intérêt exceptionnel. On peut déjà en juger grâce aux volumes d'analyse réelles, en collaboration avec Kolk, publiés en 2004 [10, 11]. À un niveau plus élevé, également, l'écriture de Hans fait merveille. Son cours sur les opérateurs intégraux de Fourier est vite devenu une référence, et son livre sur « spin-c » est un régal pour qui veut entrer dans le sujet. Enfin le livre sur les groupes de Lie [9], encore en collaboration avec Kolk, a été reconnu très rapidement par la communauté comme une vraie perle.

Souvenirs

J'ai rencontré Hans pour la première fois à Berkeley en 1994. Lui-même y passait un semestre sabbatique, tandis que j'y séjournais pour effectuer mon stage de DEA sous la direction d'Alan Weinstein. J'étudiais alors avec attention le polycopié de Hans sur les opérateurs intégraux de Fourier, et pourtant j'ai mis longtemps avant de savoir qui était ce personnage distingué, avec un visage un peu creusé et une barbe blanchissante, que je croisais parfois dans les couloirs, et à côté duquel je m'étais assis un jour lors d'une session « lunch » du Centre de Mathématiques Pures et Appliquées de campus, dont Alan s'occupait alors. Il faut dire qu'à cette époque, je ne pensais pas qu'il était possible de rencontrer les auteurs dont je lisais les livres ! Un jour, Alan m'a finalement présenté le professeur Duistermaat, et engagea la discussion sur ce cours polycopié du Courant. J'ai senti que Hans était content de l'intérêt qu'on y portait. Quelques semaines plus tard, Hans et Alan s'étaient mis d'accord pour publier une version plus « présentable » de ce cours dans la série « Progress in Mathématics », dirigée par Alan lui-même.

En 1997, j'avais complètement oublié cette rencontre anecdotique, lorsque je me suis trouvé devant mon directeur de thèse Yves Colin de Verdière pour lui demander quel professeur en Europe, mais hors de France, pourrait m'accueillir comme « coopérant scientifique » dans son laboratoire et me permettre de finir ma thèse. Yves n'a pas hésité en répondant immédiatement « le mieux, c'est Duistermaat ! ». Me voila donc parti pour Utrecht, où j'ai passé une vingtaine de mois dans un bureau situé à quelques portes de celui de Hans. Alan raconte qu'Yves lui aurait annoncé qu'il m'envoyait travailler avec le « Général Duistermaat » !

Comme tout général, Hans n'était pas toujours disponible pour discuter dans son bureau, mais heureusement toujours enclin à parler au « mess des officiers », cette petite cantine qui se trouvait alors au rez-de-chaussée du département de mathématiques et qui a été rapidement déménagée dans le moderne bâtiment rouge accessible par passerelles aériennes et dont j'ai oublié le nom. Puis, je me suis rendu compte que, tout occupé qu'il était, Hans était un gentil général prêt à passer tout le temps qu'il fallait pour discuter de mathématiques, sous réserve qu'on arrivât à l'intéresser... ce qui était un véritable défi pour moi. J'y suis parvenu à trois ou quatre reprises seulement, mais elles m'ont laissé une forte impression.

La première a été lorsque j'ai réussi à le convaincre qu'on pouvait calculer la monodromie d'un système hamiltonien de façon purement locale, grâce à la forme normale d'Eliasson [12] pour les singularités foyer-foyer. L'idée n'était pas de moi, mais de Zou [14], dans un travail amélioré quelques années après par Zung [15] et Matveev [13]. Hans avait vu passer ces papiers mais ne semblait pas trop y croire, ou n'y pas attacher d'importance. J'ai été heureux de réussir à le faire changer d'avis, et j'ai pu être témoin pour la première fois de la méthode de Hans, qui avait don de m'agacer à chaque fois, moi le jeune thésard sans confiance : après plusieurs discussions animées et très agréables, j'arrivais une nouvelle fois dans son bureau pour lui expliquer ce que j'avais fini par comprendre, et là il ne m'écoutait plus ! Au contraire, je le voyais réfléchir, et lorsque j'avais terminé péniblement d'exposer mes idées, il se mettait à expliquer, tout joyeux, le résultat de sa réflexion, et ce résultat contenait à la fois mes propres conclusions (mieux présentées évidemment) et de nouvelles idées pour aller au-delà ! Cette fois-là, il s'était rendu compte que l'argument fonctionnait dans un cadre plus général, non hamiltonien, et encouragé par Richard, ils ont publié ensemble l'article [2].

La deuxième série de discussions que nous avons eues, sûrement la plus intense, a concerné certaines propriétés des distributions homogènes du plan complexe. J'ai vu à l'œuvre à cette occasion l'efficacité de Hans dans les recherches bibliographiques parallèlement à ses efforts personnels pour écrire la bonne théorie : quelques jours après nos premières tentatives, il a découvert que les propriétés dont j'avais besoin dans ma thèse étaient pour l'essentiel démontrées dans la thèse de Tate ! Bien que cette découverte impliquait que nous n'ayons pas grand chose de nouveau à démontrer, Hans a été très content de cet épisode, comme il me l'a répété plus tard à plusieurs reprises. Intrigué par tant d'efficacité, j'ai moi-même pris goût, dans une moindre mesure, aux recherche « historiques ». Ainsi mes découvertes de Huygens, Liouville et Mineur m'ont effectivement été très utiles pour ma thèse.

Les autres discussions que nous avons eues sont plus techniques n'ont probablement pas leur place ici. Par la suite, lors de conférences où nous nous sommes croisés, ma connaissance du caractère de Hans s'est précisée et enrichie, sans remettre en cause mes premières impressions... Par exemple, je ne crois pas me tromper en affirmant que Hans a toujours conservé l'enthousiasme de sa jeunesse pour les mathématiques. Il faut avoir vu son petit mouvement de joie à la fin d'une démonstration, ou à l'énoncé d'une décision qui le réjouit, qui donne littéralement l'impression qu'il effectue un bond en l'air !

Je l'ai déjà mentionné, la passion de Hans pour l'histoire était manifeste. Pas seulement l'histoire des mathématiques, mais l'Histoire en général, ainsi que l'étude des populations et la géopolitique. Il était littéralement intarissable sur le sujet ! Et pas seulement en ce qui concerne par exemple l'histoire des religions aux Pays-Bas, son pays, ou celle des peuples d'Indonésie (où il a passé son enfance) : lors d'un congrès à Barcelone en 2008, il démontrait aisément qu'il connaissait mieux l'histoire des rois d'Espagne que les collègues espagnols eux-mêmes ! Avec moi, il était avide de renseignements sur le peuplement de la France par les invasions « barbares », et bien qu'il parût évident qu'il fût le plus renseigné de nous deux, demandait des détails sur le comportement des gaulois face aux romains, et voulait même savoir le programme des écoles primaires françaises à ce sujet !

FIG. 2. Hans et moi, après la visite des grottes de Choranche en 2006, discutant, si je me souviens bien, de l'évolution des langages indo-européens...

Les autres occupations non mathématiques prisées par Hans que j'ai pu découvrir sont le sport et les échecs. Étant particulièrement ignorant sur ces derniers, j'en ai peu parlé avec Hans. Concernant le sport, Hans m'avait déjà dit qu'il faisait régulièrement du ski en Suisse et surtout en Autriche, mais j'ai compris l'importance qu'il y attachait lorsque, passant 2 ou 3 jours à Grenoble pour ma soutenance de thèse en décembre 1998, il a insisté pour qu'Yves trouve le temps de l'emmener faire du ski de fond dans le Vercors ! Yves m'a confié par la suite que Hans était infatigable et prétendait que c'était lié à sa paresse... Je savais également que, comme tout bon Hollandais, Hans faisait du patin à glace. Malgré tout j'ai été impressionné d'apprendre que seulement un an avant son décès, Hans avait profité de l'hiver particulièrement rigoureux pour faire plus de 50km sur les canaux gelés ! J'ai d'ailleurs songé plusieurs fois que la façon dont Hans envisageait le sport n'était pas sans rapport avec sa pratique des mathématiques : la compétition est bonne et stimulante, non pas dans le désir de battre l'adversaire, mais dans la quête d'un accomplissement personnel.

J'ai été choqué et très peiné d'apprendre le décès de Hans Duistermaat, que je considère comme l'un de mes « pères spirituels ». Mes pensées vont d'abord à sa famille, et à ses collègues d'Utrecht. Aux mathématiciens qui ne l'ont pas connu, je dis : plongez-vous dans un article ou un livre de Hans ! Vous ne le regretterez pas.

Références

[1] M.F. Atiyah and R. Bott. The moment map and equivariant cohomology. *Topology*, 23(1) :1-28, 1984.

[2] R. Cushman and J.J. Duistermaat. Non-hamiltonian monodromy. *J. Differential Equations*, 172 :42-58, 2001.

[3] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfoldings of singularities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 :207-281, 1974.

[4] J.J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators*. Progress in mathematics. Birkhäuser, 1996.

[5] J.J. Duistermaat. *The heat kernel Lefschetz fixed point formula for the spin-c Dirac operator*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 18. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[6] J.J. Duistermaat and V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29 :39-79, 1975.

[7] J.J. Duistermaat, V. Guillemin, E. Meinrenken, and S. Wu. Symplectic reduction and Riemann-Roch for circle actions. *Math. Res. Lett.*, 2(3) :259-266, 1995.

[8] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128 :183-269, 1972.

[9] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Lie groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[10] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Multidimensional real analysis. I. Differentiation*, volume 86 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest.

[11] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Multidimensional real analysis. II. Integration*, volume 87 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest.

[12] L.H. Eliasson. *Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*. PhD thesis, University of Stockholm, 1984.

[13] V. Matveev. Integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom. Topological structure of saturated neighborhoods of saddle-saddle and focus points. *Mat. Sb.*, 187 :29-58, 1996.

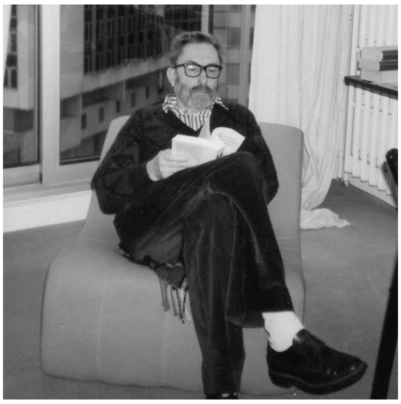
[14] M. Zou. Monodromy in two degrees of freedom integrable systems. *J. Geom. Phys.*, 10 :37-45, 1992.

[15] Nguyên Tiên Zung. A note on focus-focus singularities. *Diff. Geom. Appl.*, 7(2) :123-130, 1997.

Robert Pallu de La Barrière

(1922 – 2010)

Michel Valadier[1]



Robert Pallu de La Barrière s'est éteint le 5 août 2010. J'ai fait sa connaissance en 1963, chez lui, avenue de l'Observatoire à Paris, et à Caen dans le « laboratoire d'Automatique Théorique » qu'il avait fondé (il disait avoir pensé l'appeler LACABAN pour Laboratoire de Cybernétique et d'Automatique de Basse Normandie !). Il avait commencé sa carrière juste après la guerre en Norvège, au titre de ce qui n'était pas encore la coopération, puis à Tunis, avant de revenir en France, à l'université de Caen. Il avait fait sa thèse sur les algèbres d'opérateurs, sous la direction de J. Dixmier. Mais dans les années soixante, il est l'un des tous premiers en France à tirer les conséquences de la révolution informatique. Il importe en France les idées de l'école russe de Pontryagin. Il publie en 1966 chez Dunod un « Cours d'Automatique Théorique », qui fait autorité sur la commande optimale dans le cadre déterministe, et qui tranche par sa rigueur mathématique et par son ampleur de vue sur la littérature de l'époque. De nos jours, les solutions de viscosité sont passées par là, et l'équation de Bellman a supplanté l'approche trajectorielle de Pontryagin, même dans le cas déterministe, mais à l'époque il était difficile de s'y retrouver, entre les recettes qui marchaient mais qui n'étaient pas rigoureuses, et les démonstrations correctes mais sous des hypothèses invérifiables. Le livre de Pallu (il utilisait lui-même l'abréviation RPB ; « Pallu » se disait plutôt dans son dos mais avec affection) clarifia considérablement la situation. Dans la ligne « commande optimale » Charles Castaing développait des théorèmes de choix mesurable et les équations différentielles à seconds membres multivoques. Il faut ici citer le nom de Alain Ghouila-Houri, disparu prématurément, laissant derrière lui quelques travaux ronéotés (il y a un article posthume) dont l'influence allait s'étendre sur toute la période de l'IRIA. Et Pallu a eu l'intuition de l'importance qu'allait prendre la convexité. C'est sans doute par Gérard Debreu, qu'il avait connu à l'ÉNS, et qui devait obtenir le prix Nobel d'économie quelques années plus tard, que Pallu a découvert le théorème de Lyapounov, utilisé en économie pour modéliser les situations de concurrence parfaite, et qui permet de « créer » de la convexité en intégrant par rapport à une mesure sans atomes : si m est une mesure vectorielle (en dimension finie) sans atomes, l'ensemble des m(A) pour A mesurable est compact et surtout convexe. À Caen Pallu a donné quelques conférences, en particulier sur les algèbres de Banach. Le soir nous allions parfois au cinéma ; il m'a dit une fois où je préférais Godard aux Tontons Flingueurs : « c'est que vous n'êtes pas assez fatigué par le travail ».

[1] Merci à Ivar Ekeland pour ses très utiles ajouts mathématiques et historiques.

En 1967 il est devenu Professeur à Jussieu et c'est tout naturellement qu'il fut l'un des deux mathématiciens (l'autre étant Jacques-Louis Lions) chargés de monter un laboratoire dans le tout nouvel IRIA (devenu depuis l'INRIA) à Rocquencourt. Il y rassembla une petite équipe (Ivar Ekeland, Robert Janin, Étienne Lanery, Michel Valadier, quelques thésards de troisième cycle, Bernard Van Cutsem de Caen...), qui se tourna assez rapidement vers les problèmes liés à l'analyse multivoque et à la théorie de la relaxation. Gérard Debreu était un visiteur fréquent, ainsi que Terry Rockafellar. L'atmosphère y était chaleureuse et de travail.

Après 1970, nommé à Montpellier, j'ai maintenu un bon contact avec Pallu. Je l'ai vu à Pavant dans l'Aisne, rue Jules César à Paris, puis dans un triste petit appartement rue Albert Bayet après la maladie de sa femme. Il a contribué, souvent avec Alain Costé, à la théorie des mesures vectorielles et multivoques. En 1997 il a publié « Intégration », chez Ellipses, livre prétendument élémentaire mais qui contient de nombreux résultats sur les espaces de Banach. Outre bon nombre de thèses d'État, Pallu de La Barrière a dirigé quelques dizaines de thèses de troisième cycle. Nous avons perdu un grand directeur de recherches.

TRIBUNE LIBRE

Compter et mesurer. Le souci du nombre dans l'évaluation de la production scientifique

Dans la préface de son livre « Travail, usure mentale »[1], le psychiatre Christophe Dejours expose les conséquences de l'évaluation individuelle des performances dans le monde du travail : *« L'évaluation individuelle des performances a installé la concurrence généralisée dans le monde du travail, jusqu'entre les collègues autrefois unis par les règles de savoir-vivre constitutives d'un collectif ou d'une équipe de travail. L'évaluation individualisée a exalté la concurrence jusqu'à la concurrence déloyale et a dressé les uns contre les autres ceux qui jadis cultivaient entre eux les valeurs de la concorde. Les nouvelles méthodes, qui sont souvent utilisées comme une menace, ont fait fondre la confiance entre collègues, ont promu le chacun pour soi et ont détruit progressivement la convivialité, la prévenance, le savoir-vivre, l'entre-aide et la solidarité. »*

Ce constat, rédigé en 2000 dans une étude qui porte principalement sur des situations et des cas observés en entreprise, pourrait bientôt se transposer sans nuance au monde académique, tant les différentes réformes qui ont touché l'université et le mode de financement de la recherche ces dernières années tentent d'individualiser les carrières en mettant notamment en concurrence les individus.

En parallèle à cet *« esprit gestionnaire »*[2] qui touche aujourd'hui l'université et la recherche se développe une véritable frénésie d'évaluation sans qu'aucune réflexion méthodologique préalable n'ait été menée à ce sujet. *« Or, souligne Yves Gingras, l'absence de balises (...) donne lieu à ce qu'il faut bien appeler des utilisations anarchiques, pour ne pas dire sauvages, de la bibliométrie, méthode de recherche qui consiste à utiliser les publications scientifiques comme indicateur de la production scientifique »*[3]. Poussés par la manie du classement, les différents acteurs (et souvent les scientifiques eux-mêmes) semblent partir du principe qu'une donnée chiffrée est objective et par là irréfutable : mieux vaut un chiffre que rien du tout, ou pire, *« du moment que l'on manipule des chiffres on raisonne scientifiquement »* [4] ! Or,

---

[1] Christophe Dejours, *Travail, usure mentale - De la psychopathologie à la psychodynamique du travail.* Bayard éditions, 1980, Paris, nouvelles éditions augmentées en 1993 et 2000, 281 p.

[2] A. Ogien, *L'esprit gestionnaire. Une analyse de l'air du temps.* Paris, éditions de l'école des Hautes études en Sciences Sociales, 1995.

[3] Yves Gingras, *La fièvre de l'évaluation de la recherche. Du mauvais usage de faux indicateurs.* CIRST (`www.cirst.uqam.ca`), 2008, ISBN 978-2-923333-39-7, `http://www.cirst.uqam.ca/Portals/0/docs/note\_rech/2008\_05.pdf`.

[4] F. Laloë et R. Mosseri, *L'évaluation bibliométrique des chercheurs : même pas juste... même pas fausse.* Publié dans Reflets de la Physique, n° 13 et consultable sur `http://www.sfpnet.fr/fichiers\_communs/publications/articles/reflets\_13\_2324.pdf`.

nous le verrons, les indicateurs les plus populaires sont loin d'avoir la signification qu'on leur attribue. Et il nous paraît dangereux, sinon manipulateur, de fonder une quelconque politique, tant nationale que locale, sur des données biaisées et hétérogènes !

Dans cette perspective, nous cherchons ici à apporter quelques éléments de réflexion sur la bibliométrie et ses conséquences. Qu'entendons-nous par « bibliométrie » [5] ? Nous utilisons ce terme dans l'acception majoritairement admise par les scientifiques : l'agrégation de données bibliométriques conduisant à un indicateur chiffré.

La documentation scientifique utilise depuis longtemps des indices bibliométriques pour jauger le degré d'activité des différents domaines thématiques et son évolution dans le temps. Les administrateurs de la science ont repris la méthode, mais les outils ne sont pas adaptés à la mesure des performances individuelles ou collectives. Pour en juger, il convient de s'interroger non seulement sur l'élément de base utilisé – la publication entendue au sens large – mais aussi sur la machinerie qui conduit à la donnée finale chiffrée.

Nous ne nous attarderons pas sur l'acte même d'évaluer, discutable en soi, renvoyant le lecteur au livre de Christophe Dejours précédemment cité. Néanmoins il apparaîtra dans nos conclusions que l'évaluation peut rapidement être dévoyée et avoir un impact négatif sur la recherche scientifique qu'elle prétend servir. Notons que si nous nous adressons principalement à un public de mathématiciens, nos réflexions doivent pouvoir se transposer à d'autres domaines.

Signalons enfin l'excellent article *Citation Statistics*[6], de R. Adler, J.E. Ewing et P. Taylor, émanant de l'Union Mathématique Internationale (en collaboration avec l'ICIAM et l'IMS), qui peut utilement compléter la présente note.

Les publications

Il semble exister une loi sociale qui consiste à estimer qu'une publication a une valeur par le fait même d'exister – probablement parce qu'elle passe à travers le filtre d'une revue et le jugement de pairs. Or cet axiome est critiquable. En effet, bien qu'incontournable, la publication ne reflète qu'imparfaitement le travail du chercheur, et partant du laboratoire, de l'université ou de l'organisme de recherche, etc. Par ailleurs, la méthode du « peer review » est invalide sur des cas individuels, à cause de sa subjectivité même ; soumise à des biais divers : incompétence, manque de temps ou de rigueur, clientélisme, rapports de force entre écoles, conformisme, autocensure, elle ne garantit qu'approximativement la qualité d'une publication.

En outre, dans le monde de la recherche l'acte de publier ne revêt pas la même signification selon les domaines : dans certains les chercheurs publient peu et uniquement des articles à fort contenu novateur ; d'autres favorisent la publication de toute découverte, même mineure, et dans les deux cas avec des logiques qui paraissent légitimes à chacun des acteurs. À noter que ces différences peuvent également s'observer entre individus.

[5] Une méthode largement déviée de ses objectifs initiaux. Pour une introduction historique, voir H. Rostaing, *La bibliométrie et ses techniques*. Sciences de la Société, CRRM, ISSN 1168-1446, Collection « Outils et méthodes » 1996, 131 p.

[6] R. Adler, J.E. Ewing, P. Taylor, *Citation Statistics*. Statistical Science 2009, Vol. 24, N° 1, 1-14, arXiv :0910.3529v1.

Nous le constatons, les publications sont difficilement comparables et véhiculent une forte valeur subjective. En conséquence il nous semble qu'elles ne peuvent que constituer un élément de mesure universel imparfait[7].

On peut alors s'orienter vers la recherche d'un avis subjectif assumé, dont on connaît les avantages et les limites, ou bien tenter de corriger ces données objectives dans l'espoir de les rendre plus facilement comparables. C'est cette deuxième piste que suivent les indicateurs bibliométriques.

Les indicateurs bibliométriques

Commençons par un constat banal : agréger (moyenner, pondérer etc.) des données discutables ne peut pas, en soi, donner un résultat beaucoup plus probant !

La première tentation, pour corriger l'erreur de l'indicateur « nombre de publications », peut être de considérer aussi le nombre de citations. Il y a certes l'idée intuitive qu'un « bon » article est plus cité, mais quelle justification sérieuse ? Un chercheur rédige un article dans le but d'être lu, et lorsqu'il y inclut des références, c'est d'abord pour donner aux lecteurs la possibilité de vérifier par eux-mêmes la thèse qui est avancée, mais aussi afin d'appuyer et d'étayer sa démonstration. Non pas pour *« établir un palmarès »* [8]. Par exemple, nous citons facilement un livre ou un article de survol plutôt que la source originale ; la notoriété d'un auteur ou d'une revue peut induire un biais, tout comme les effets de mode ; un jeune chercheur en début de carrière n'a pas encore été beaucoup cité ; enfin il arrive qu'un article fermant un domaine ou démontrant une conjecture soit peu cité. Aussi, il nous semble que prendre les citations comme données de base d'un indicateur induit des biais majeurs, au même titre que les publications.

Dans le but précisément de corriger le biais subi par les jeunes chercheurs, J.E. Hirsch[9] a introduit l'indice h. Celui-ci se calcule de la manière suivante : un scientifique a un indice h égal à n si il/elle a n publications citées chacune au moins n fois. Une telle formule – qui mélange les publications et les citations – devrait déjà nous faire douter de sa validité ! À ce titre, Hirsch[10] précise : *« I argue that two individuals with similar h are comparable in terms of their overall scientific impact, even if their total numbers of papers or their total number of citations is very different. Conversely, that between two individuals (of the same scientific age) with similar number of total papers or of total citation count and very different h-value, the one with the higher h is likely to be the more accomplished scientist. »*

Ces affirmations sont risibles, comme le montrent les deux exemples suivants[11] : soient deux scientifiques ayant chacun 10 publications avec 10 citations. Supposons à présent que l'un d'entre eux ait en plus 90 publications avec 9 citations ; ou bien que l'un ait exactement 10 publications avec 10 citations et l'autre exactement 10

[7] C'est pourtant cet élément que notre université, devenue autonome, propose d'utiliser pour évaluer les dossiers de demande de Prime d'Excellence Scientifique. En effet, parmi d'autres critères, figure le nombre de publications des 4 dernières années. En avoir moins de 8 diminue fortement les chances d'obtenir la prime. Dans ces conditions, certaines médailles Fields seraient disqualifiées... Ajoutons que les articles doivent impérativement être publiés dans une liste de revues sélectionnées par l'entreprise Thomson Reuters et non par la communauté scientifique.

[8] F. Laloë et R. Mosseri, *op. cit.*

[9] J.E. Hirsch, *An index to quantify an individual's scientific research output.* Proceedings of the National Academy of Sciences, 102 (46), 2005, 16569–16572

[10] J.E. Hirsch, *op. cit.*

[11] R. Adler, J. Ewing, P. Taylor, *op. cit.*

publications citées 100 fois ! Est-on bien fondé à penser qu'ils ont le même impact ? Évidemment non.

Pour tenir compte du fait que dans le top des n articles conduisant à l'indice h, certains peuvent avoir beaucoup plus de citations, Egghe[12] a introduit l'indice g qui vaut le plus grand n tel que les n articles les plus cités soient eux-mêmes cités, de manière cumulée, n^2 fois ! D'autres indices tentent de corriger les biais dus à l'âge des articles ou au nombre de co-auteurs[13], etc.

Rappelons enfin que ces indicateurs agrègent souvent d'autres indicateurs, comme par exemple dans le calcul du facteur d'impact des journaux[14]. On devine qu'un changement de méthode de calcul aboutit à un changement de classement, ce que le site Journal-Ranking.com[15] permet de constater expérimentalement. Par delà ces raffinements, il y a une certaine naïveté (voire de la malhonnêteté intellectuelle) à espérer synthétiser en *un seul chiffre* des données multiples et disparates.

Le fondement scientifique même de cette approche est discutable : les modèles statistiques qui conduisent au calcul des indicateurs supposent implicitement que les acteurs ont tous un même comportement rationnel, autrement dit que les publiants citent rationnellement leurs sources et produisent des articles de nature comparable acceptés dans un journal « optimal » ; enfin et surtout que le nombre de publications et de citations est suffisamment élevé pour être statistiquement exploitable. Des suppositions discutables, voire irréalistes.

Mais voici venir le plus inquiétant : les effets en retour de l'évaluation sur indicateurs. *« L'évaluation quantitative »* , écrit S. Piron[16], *« produit une perturbation généralisée de la morale scientifique. Le règne des indicateurs de performance exacerbe des valeurs de concurrence et de compétition. De ce fait, il concourt à ruiner ce qui devrait être au contraire les valeurs centrales de la recherche scientifique : le partage, la collaboration et la critique éclairée au sein de communautés bienveillantes. »* Or l'individualisme fait mauvais ménage avec la conscience professionnelle. Afin d'améliorer leurs performances chiffrées, beaucoup de scientifiques modifient leur manière de publier et de citer et cela au détriment de la qualité de leur travail[17]. Se généralisent ainsi le saucissonnage des articles, les publications prématurées, les articles multiples de même contenu, le plagiat, les citations de complaisance. Dans un éditorial récent, D. F. Arnold, président de la SIAM, fait valoir à quel point les indicateurs peuvent perdre toute signification face aux

---

12 L. Egghe, *Theory and practice of the g-index.* Scientometrics, 2006, Vol. 69, N° 1, 131–152.

13 P.D. Batista, M. G. Campiteli, O. Kinouchi, A.S. Martinez, *Universal behavior of a research productivity index.* 2005, arXiv :physics/0510142v1 ; P.D. Batista, M. G. Campiteli, O. Kinouchi, *Is it possible to compare researchers with different scientific interests ?* Scientometrics 2006, Vol. 68, N° 1, 179–189 ; A. Sidoropoulos, D. Katsaros, Y. Manolopoulos *Generalized h-index for disclosing latent facts in citation networks.* 2006, arXiv :cs/0607066v1.

14 *« Par cette approche, les journaux sont considérés comme influents s'ils sont souvent cités par d'autres journaux influents. »* `http://www.eigenfactor.org/`.

15 `http://www.journal-ranking.com/http` ://www.journal-ranking.com/.

16 S. Piron, *Lisons Peter Lawrence, ou les implications morales de l'évaluation bibliométrique*, `http://evaluation.hypotheses.org/229http` ://evaluation.hypotheses.org/229.

17 On découvrira avec profit les conseils sarcastiques et néanmoins efficaces de G. Chamayou : `http://www.contretemps.eu/interventions/petits-conseils-enseignants-chercheurs-qui-voudront-reussir-leur-evaluation`.

fraudes systématiques qui se sont multipliées[18]. Enfin, comme le souligne Martine Vanhove, *« l'accumulation de critères « objectifs » et surtout quantifiables permet de formater nos travaux et notre façon de travailler. C'est un instrument puissant, au même titre que l'ANR, de pilotage de la recherche. »* [19] Que reste-t-il alors de l'espace de liberté nécessaire aux vraies avancées des connaissances ?

Appliquée aux individus[20], la bibliométrie se révèle donc dangereuse ; les spécialistes ne l'utilisent que pour analyser des groupes (universités, pays). Elle souffre néanmoins là aussi de défauts importants comme l'illustre le classement dit de Shanghai[21]. Ce classement est composé de 6 mesures dont 4 comptent pour 20% : (1) nombre de prix Nobel ou de médailles Fields, (2) nombre de chercheurs parmi la liste des « plus cités » de Thomson Reuters, (3) nombre d'articles publiés dans les revues *Nature* et *Science*, (4) nombre total d'articles recensés dans le Web of Science de la compagnie Thomson Reuters. Les 20% restants sont ajustés grâce à deux variables comptant 10% chacune : (5) nombre d'anciens étudiants ayant reçu un prix Nobel ou une médaille Fields, (6) ajustement des résultat précédents selon la taille de l'institution. Une excellente analyse de ce classement est réalisée par Yves Gingras[22] dont nous rapportons ici quelques éléments : les données sur lesquelles se fondent ce classement sont hétérogènes (le nombre de publications dans les revues *Nature* et *Science* n'est pas comparable au nombre de prix Nobel !) et ne sont pas reproductibles[23] ; le choix des revues *Nature* et *Science* est très discutable et fortement biaisé quant on sait que 72% des articles publiés dans la revue américaine *Science* le sont par des auteurs américains, et 67% de ceux parus dans la revue britannique *Nature* le sont par des britanniques ; et enfin comment se fier à un classement qui fait varier la position d'une université de plus de 100 places selon qu'on attribue le prix Nobel d'Albert Einstein (obtenu en 1922 !) à l'université de Berlin ou de von Humboldt ?

Nous partageons les conclusions d'Yves Gingras qui souligne les implications politiques et idéologiques de l'utilisation du classement de Shanghai : *« Il est (...) probable que l'importance soudaine accordée à ce classement soit un effet des discours sur l'internationalisation du « marché universitaire » et de la recherche de clientèles étrangères lucratives qui viendraient ainsi combler les revenus insuffisants provenant des gouvernements. (...) il sert aussi de façon stratégique les acteurs qui veulent réformer le système universitaire et se servent de ces classements de façon opportuniste pour justifier leurs politiques »* [24].

---

[18] D.F. Arnold, *Integrity Under Attack :The State of Scholarly Publishing*. SIAM, December 4, 2009, Talk of the Society. `http://www.siam.org/news/news.php?id=1663`.

[19] Martine Vanhove, *Pourquoi je refuserai la prime d'excellence scientifique* `http://www.sauvonslarecherche.fr/spip.php?page=commentaires&id\_article=2914`.

[20] Comme d'ailleurs aux petits groupes, équipes ou laboratoires.

[21] Il s'agit d'un classement des principales universités mondiales (aussi appelé Academic Ranking of World Universities en anglais) effectué par l'université Jiao-Tong de Shanghai, en Chine. Il a lieu une fois par an, depuis 2003. Son site officiel est consultable à l'adresse `http://www.arwu.org/http://www.arwu.org/`.

[22] Yves Gingras, *op. cit.*

[23] R.V. Florian, *Irreproductibility of the results of the Shanghai academic ranking of world universities*. Scientometrics, Vol. 72, 2007, 25-32.

[24] Yves Gingras, *op. cit.*

On trouvera enfin dans le rapport Bourdin[25] une analyse des différents classements internationaux et le constat qu'ils varient beaucoup selon les pays : *« (...) le classement de Shanghai est très favorable aux universités américaines... le classement anglais* [du Times Higher Education[26]], *quant à lui, valorise mieux les performances des établissements du Royaume-Uni... et le classement de Leiden* [du Centre d'études scientifiques et technologiques de l'université de Leiden (Pays-Bas)[27]] *donne de belles places aux universités néerlandaises... »* [28]. L'auteur ajoute que les grandes écoles françaises ne pouvaient pas rester sans rien faire face à tous ces classements qui les ignoraient. Avec beaucoup d'ambiguïté et de fierté nationale, l'auteur poursuit : *« Il n'était donc pas inutile qu'un organisme français vienne apporter sa contribution à cette surenchère de classements, pour éclairer d'un jour nouveau les performances des établissements français. De fait, le classement publié en septembre 2007 par l'école des Mines de Paris leur est très favorable, même s'il a fallu pour cela abolir tout critère en rapport avec la recherche et se concentrer sur le devenir des anciens étudiants au sein des entreprises »* [29]. En poussant l'expérience encore plus loin, chacun d'entre nous pourrait ainsi s'inventer apprenti-évaluateur et improviser son propre classement sur le coin d'une table, choisissant des critères dans le but d'optimiser les chances de voir son favori se placer dans le haut du panier...

Lorsque l'on examine les bricolages désinvoltes sur lesquels tous ces classements reposent, on est consterné d'apprendre que 61% des dirigeants de 79 universités/grandes écoles interrogés[30] ont « pour objectif explicite d'améliorer leur rang dans le classement de Shanghai », et que 83% d'entre eux « ont pris des mesures concrètes destinées à améliorer leur rang dans les classement internationaux ». Voilà un autre effet en retour, dont nous ne décrirons pas les conséquences absurdes.

Conclusion

Les indices (nombre de publications ou de citations, indice h ou autre) d'un chercheur internationalement reconnu et d'un doux rêveur isolé ne sont pas comparables et leur analyse aboutirait à la conclusion que tout le monde connaît déjà... Bien plus dangereux est d'utiliser la bibliométrie à la comparaison d'individus d'un groupe homogène[31]. On pourra nous objecter que l'indice h n'est pas populaire dans la communauté mathématique. Nous répondrons « Pas encore ! ». Certains d'entre nous, membre du CNU ou d'autres commissions, ont eu en effet à traiter des

[25] Rapport Bourdin (sénateur), 2008, consultable sur le site `http://www.senat.fr/rap/r07-442/r07-4421.pdf`http ://www.senat.fr/rap/r07-442/r07-4421.pdf.

[26] Voir le rapport Bourdin, page 40, pour une présentation détaillée de ce classement et de ses critères. *op. cit.*

[27] Ce classement tente notamment de corriger le biais dû aux spécificités de la bibliométrie dans chaque discipline. Voir le rapport Bourdin, page 44, pour une description détaillée. *op. cit.*

[28] Rapport Bourdin, *op. cit.*, page 53.

[29] Ce classement est fondé sur un indicateur unique : le nombre d'anciens étudiants de l'établissement parmi les dirigeants exécutifs des 500 plus grandes entreprises mondiales (en termes de chiffre d'affaires). Cinq grandes écoles françaises se classent, en 2007, dans les dix premiers rangs ! Rapport Bourdin, *op. cit.*, page 53.

[30] Annexe 1 du Rapport Bourdin page 97, *op. cit.*

[31] F. Laloë et R. Mosseri constatent en effet que *« des valeurs très différentes peuvent être attribuées à des chercheurs dont la qualité de production scientifique est perçue comme très similaire par la communauté scientifique »* . *op. cit.*

dossiers où figurait cet indice, et sa propagation rapide dans certaines sciences (physique notamment) s'est faite à partir de la base[32]. Pour ces scientifiques, contraints à des prises de décision d'autant plus fréquentes que l'évaluation se répand, ces indicateurs sont une solution de facilité, apparemment objective, qui les affranchit de leurs responsabilités et pourrait augurer d'un emploi bientôt systématique dans notre communauté.

Si la bibliométrie, employée avec précaution, se montre parfois utile, les éléments de réflexion présentés ici indiquent qu'elle peut s'avérer au final dangereuse pour la recherche. Nous estimons pour notre part qu'en voulant disposer d'indicateurs chiffrés destinés à formater les activités de ses agents et les pousser à la compétition, l'état induit une dégradation de la qualité de leur travail. N'oublions pas que mettre en concurrence individus et institutions se révèle souvent contre-productif dans le domaine de la recherche.

Il appartient selon nous à la communauté mathématique et à la communauté scientifique toute entière de prendre la mesure du danger d'une utilisation anarchique de cet outil, et d'œuvrer partout où c'est possible à en limiter et contrôler l'usage.

Laissons le mot de la fin à Christophe Dejours[33] : *« Le travail est devenu en maints endroits une école de la trahison de soi et de la trahison des autres, de la lâcheté et du déshonneur. La dégradation des réquisits éthiques du travail dans un contexte de solitude explique le désespoir qui s'abat sur ceux-là qui ont le plus donné d'eux-mêmes pour le travail et à travers lui, pour autrui, pour l'entreprise, pour la cité. (...) »*

Nota bene

En même temps que cet article-ci est proposé à la Gazette, nous soumettons à une revue scientifique l'article *The Logarithmic Sobolev Constant of the Lamplighter* que nous signons collectivement. À l'individualisme débridé et aux mauvaises pratiques favorisées par l'usage d'indicateurs inadaptés, nous voulons opposer une démarche collective qui, en même temps, mette en lumière les faiblesses de l'évaluation chiffrée des activités de recherche.

Remerciements

Nous sommes très reconnaissants à Naziha Aboubeker et Ana Maria Millan Gasca pour leurs commentaires sur ce texte, qu'elles en soient remerciées.

Signataires

Evgeny Abakumov, Anne Beaulieu, François Blanchard, Matthieu Fradelizi, Nathaël Gozlan, Bernard Host, Thiery Jeantheau, Magdalena Kobylanski, Guillaume Lecué, Miguel Martinez, Mathieu Meyer, Marie-Hélène Mourgues, Frédéric Portal, Francis Ribaud, Cyril Roberto, Pascal Romon, Julien Roth, Paul-Marie Samson, Pierre Vandekerkhove, Abdellah Youssfi.
Université Paris Est Marne la Vallée - Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées UMR-8050

---

[32] *« Ce sont en effet,* rapporte Yves Gingras*, les scientifiques eux-mêmes qui succombent souvent aux usages anarchiques de la bibliométrie individuelle et qui, siégeant parfois dans différents comités et conseils d'administration d'organes décisionnels de la recherche, suggèrent d'en généraliser l'usage. » op. cit.*

[33] C. Dejours, *op. cit.*

Références

[1] R. ADLER, J.E. EWING, P. TAYLOR – *Citation Statistics*, Statistical Science 2009, Vol. 24, n° 1, 1-14, arXiv:0910.3529v1.

[2] D.F. ARNOLD – *Integrity Under Attack : The State of Scholarly Publishing*, SIAM, December 4, 2009, Talk of the Society, http://www.siam.org/news/news.php?id=1663.

[3] P.D. BATISTA, M. G. CAMPITELI, O. KINOUCHI – *Is it possible to compare researchers with different scientific interests ?*, Scientometrics 2006, Vol. 68, n° 1, 179-189.

[4] P.D. BATISTA, M. G. CAMPITELI, O. KINOUCHI, A.S. MARTINEZ – *Universal behavior of a research productivity index*, 2005, arXiv:physics/0510142v1.

[5] – *Rapport Bourdin (sénateur)*, 2008, page 97, consultable sur le site http://www.senat.fr/rap/r07-442/r07-4421.pdf.

[6] G. CHAMAYOU – http://www.contretemps.eu/interventions/petits-conseils-enseignants-chercheurs-qui-voudront-reussir-leur-evaluation.

[7] C. DEJOURS – *Travail, usure mentale - De la psychopathologie à la psychodynamique du travail*, Bayard éditions, 1980, Paris, nouvelles éditions augmentées en 1993 et 2000, 281 p.

[8] A. DESROSIÈRES – *Est-il bon, est-il méchant ? Le rôle du nombre dans le gouvernement de la cité néolibérale*, Communication au séminaire *L'informazione prima dell'informazione. Conoscenza e scelte pubbliche*, Université de Milan Bicocca, 27 mai 2010.

[9] P. DOBLER ET O. SAULPIC – *L'échec de l'évaluation des ministres, ou les limites de la culture du résultat*, Le Monde du 17.08.09.

[10] L. EGGHE – *Theory and practice of the g-index*, Scientometrics, 2006, Vol. 69, n° 1, 131-152.

[11] R.V. FLORIAN – *Irreproductibility of the results of the Shanghai academic ranking of world universities*, Scientometrics, Vol. 72, 2007, 25-32.

[12] Y. GINGRAS – *La fièvre de l'évaluation de la recherche. Du mauvais usage de faux indicateurs*, CIRST (www.cirst.uqam.ca), 2008, ISBN 978-2-92333 3-39-7, consultable sur le site http://www.cirst.uqam.ca/Portals/0/docs/note_rech/2008_05.pdf.

[13] J.E. HIRSCH – *An index to quantify an individual's scientific research output*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 102 (46), 2005, 16569-16572.

[14] F. LALOË ET R. MOSSERI – *L'évaluation bibliométrique des chercheurs : même pas juste... même pas fausse*, Publié dans Reflets de la Physique, n° 13, consultable sur le site http://www.sfpnet.fr/fichiers_communs/publications/articles/reflets_13_2324.pdf.

[15] A. OGIEN – *L'esprit gestionnaire. Une analyse de l'air du temps*, Paris, éditions de l'école des Hautes études en Sciences Sociales, 1995.

[16] S. PIRON – *Lisons Peter Lawrence, ou les implications morales de lévaluation bibliométrique*, http://evaluation.hypotheses.org/229http ://evaluation.hypotheses.org/229.

[17] J.-M. SCHLENKER – *Les enjeux de la bibliométrie pour les mathématiques*, Gazette des Mathématiciens, 115, janvier 2008, 73-79.

[18] A. SIDOROPOULOS, D. KATSAROS, Y. MANOLOPOULOS – *Generalized h-index for disclosing latent facts in citation networks*, 2006, arXiv:cs/0607066v1.

[19] M. VANHOVE, – *Pourquoi je refuserai la prime d'excellence scientifique*, http://www.sauvonslarecherche.fr/spip.php?page=commentaires&id_article=2914

⋆ ⋆ ⋆

Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.

Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.

COURRIER DES LECTEURS

Programmes d'enseignement et problèmes de société

À la lecture de *La Gazette* d'avril 2010, j'ai été surprise par la sévérité des critiques formulées contre la réforme de 1925 qui instaurait « l'égalité scientifique » jusqu'en classe de première. Cette réforme a pourtant été une grande chance pour beaucoup de lycéens, dont j'étais, s'ajoutant à l'égalité enfin établie entre les enseignements féminins et masculins.

Pour comprendre le bien-fondé de ce tronc commun imposé à tous les lycéens, il faut se replacer dans le contexte de l'époque, bien différent de la situation actuelle.

La défaite de 1870 avait montré la nécessité de rattraper l'Allemagne dans le domaine scientifique et motivé, entre autres, la création de « Collèges modernes » et d'écoles techniques, Écoles des mines en particulier.

Après la première guerre mondiale les études littéraires étaient cependant restées les plus prestigieuses et, surtout, celles qui offraient le plus de débouchés : concours administratifs, professions libérales et juridiques, journalisme et même médecine ; le latin pouvait apparaître plus utile que les mathématiques pour un juriste et un médecin, et la biologie n'offrait guère de débouchés ; mon propre frère, diplômé de l'Institut national agronomique, a dû passer une licence en Droit et un concours administratif pour trouver un emploi.

Jusqu'à la création du CNRS à la fin des années trente, il n'existait que très peu de bourses de recherche, d'un taux très modeste d'ailleurs, et la plupart des normaliens devaient préparer leur thèse tout en enseignant dans le secondaire : les postes d'assistant n'existaient qu'à Paris, et n'ont été étendus à la province qu'à la fin des années cinquante ; par ailleurs, il n'existait encore en France que 17 universités, regroupant une cinquantaine de professeurs ou maîtres de conférences.

Dans ces conditions il convenait d'offrir à tous les lycéens la possibilité de ne choisir leur voie qu'après une formation générale maximale ; la seule différence entre les sections A, A' et B ne concernait que le choix des langues (anciennes ou modernes) et, ce qui n'est pas du tout négligeable, dans les coefficients attribués aux diverses épreuves de la première partie du baccalauréat.

Je reconnais que notre programme de mathématiques, de la sixième à la première, était très limité, la géométrie plane et spatiale y tenant une grande place. Il comportait cependant une bonne part d'arithmétique (y compris l'extraction de racines carrées) et une pratique du calcul algébrique. Certes, nous ne connaissions pas les dérivées ni la trigonométrie ; mais ce que nous avions appris était durablement acquis et, surtout, nous avions appris à faire des démonstrations et à les rédiger !

Avec 9 heures de mathématiques par semaine ceux qui passaient en « Math Élém » n'avaient pas de peine à assimiler les notions nouvelles qui leur étaient présentées. Le programme comportait encore une bonne part de géométrie ; et l'étude de l'inversion nous donnait à réfléchir ! Le programme des classes préparatoires m'a paru, par contre, beaucoup plus lourd.

Il faut dire qu'à cette époque les bons élèves n'étaient pas réduits au rôle de « locomotive » de leur classe, mais encouragés à progresser encore. Ainsi, il n'était pas rare de voir des lauréats de prix de latin au Concours général en classe de première opter ensuite pour les Sciences : tel fut le cas d'Hélène Cartan (la sœur d'Henri) premier prix de version latine en 1934, entrée à l'ÉNS de la rue d'Ulm en 1937. Certains purent même cumuler prix littéraires et prix de mathématiques : Pierre Samuel et Gaston Casanova, dont les notices nécrologiques viennent de paraître dans la revue « Archicube », en sont des exemples. Ce ne fut pas mon cas ; mais fille et petite-fille de professeurs de lettres, j'ai eu beaucoup de plaisir à m'initier au latin et au grec avant de me consacrer aux mathématiques. Le travail de « décorticage » qu'exige une phrase latine plutôt elliptique n'est-il pas analogue à celui de l'analyse d'une figure géométrique en donnant le « plaisir de trouver » ? — un plaisir que chacun peut ressentir à son niveau mais que l'on ne peut guère ressentir avec l'enseignement actuel des mathématiques qui fait plus appel à la mémoire qu'à la réflexion et d'où les démonstrations sont presque exclues.

J'ai eu récemment l'occasion de suivre le travail d'un lycéen en terminale S avec « spécialité mathématique », celle-ci consistant en quelques notions d'arithmétique du niveau de celles que j'avais étudiées en classe de cinquième en 1929. J'ai été effarée par la rareté des démonstrations proposées dans son manuel ; et la variété des couleurs utilisées par l'imprimeur m'a paru plus propre à brouiller les idées qu'à le rendre attractif. Avec un tel livre, je n'aurais pas eu envie de faire des mathématiques !

On me répondra que l'enseignement secondaire des années trente ne s'adressait qu'à une petite partie de la classe d'âge, issue de familles aisées et cultivées, malgré la gratuité instaurée au cours de ces années. Il s'y ajoutait cependant des boursiers recrutés par concours, des pupilles de la nation et des élèves du primaire remarqués par leur instituteur ; ce système permettait de faire fonctionner l'ascenseur social, de façon limitée mais très efficace.

À côté des lycées, l'enseignement primaire supérieur, les écoles normales d'instituteurs et l'enseignement technique offraient une formation solide, qui ne donnait pas accès à l'enseignement supérieur mais permettait de trouver du travail.

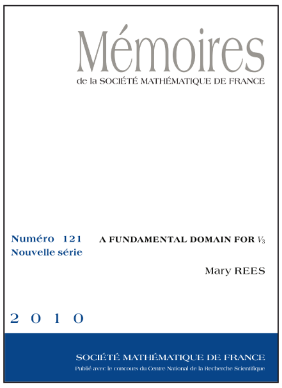
Ayant enseigné en Faculté de 1943 à 1984, j'ai pu observer qu'une des causes d'échec des étudiants, hormis le manque de travail, était une difficulté à exprimer clairement leur pensée par écrit, allant jusqu'à confondre condition nécessaire et condition suffisante, ou même hypothèse et conclusion ; et, pour ceux qui n'étaient pas passés par les classes préparatoires, l'oral était une épreuve pénible.

Certes, à notre époque, l'enseignement de masse qui réunit toute une classe d'âge exige un allégement des programmes, ce qui me semble une raison pour ne pas obliger les élèves à choisir leur voie avant d'avoir pu tester leurs aptitudes. De plus l'enseignement des mathématiques ne peut se réduire à l'observation des figures géométriques et à des techniques de calcul telles que la résolution de l'équation du second degré (l'un des rares points communs à tous les programmes, y compris celui des « mathématiques modernes »). Bien compris, cet enseignement allégé peut contribuer à la formation d'adultes responsables sachant s'exprimer clairement, par écrit et oralement, et qui comprennent que l'on ne peut pas résoudre un problème par une simple affirmation. Or ce but ne peut être atteint que par une initiation aux démonstrations, jointe à une bonne connaissance de notre langue. Sans vouloir tout démontrer, il me semble possible de donner quelques exemples de raisonnements logiques bien choisis ; et les manuels pourraient en proposer d'autres, à l'intention des élèves que cela intéresse.

Ce rôle me semble d'autant plus nécessaire que l'acuité des problèmes de développement durable exige de s'appuyer sur des notions mathématiques multiples : comparaison des divers types de croissance, ordres de grandeur et valeurs approchées, probabilités, évaluation des risques et des ressources ; et je ne saurais mieux conclure qu'en citant une phrase prononcée par J.-L. Lions lors d'une cérémonie en son honneur : « Qui respecte la Nature fait des mathématiques ».

Jacqueline Ferrand,
Professeur honoraire à l'université
Pierre et Marie Curie

Ce texte nous a été transmis par Charles-Michel Marle, qui partage largement le point de vue exprimé par Madame Ferrand. Adesser tout commentaire à marle@math.jussieu.fr, qui transmettra à l'auteur.



Mémoires
Dernières parutions

Mémoire 117
Creation of Fermions by rotating Charged Black Holes
Dietrich Häfner
Prix public* : 28 € - prix membre* : 20 €

Mémoire 118
Topological Properties of Rauzy Fractals
Anne Siegel, Jörg Thuswaldner
Prix public* : 28 € - prix membre* : 20 €

Mémoire 119
Uncertainty principles associated to non-degenerate quadratic forms
Bruno Demange
Prix public* : 28 € - prix membre* : 20 €

Mémoire 120
Convergence des polygones de Harder-Narasimhan
Huayi Chen
Prix public* : 28 € - prix membre* : 20 €

Mémoire 121
A Fundamental Domain for V_3
Mary Rees
Prix public* : 28 € - prix membre* : 20 €

* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Cohomological Theory of Crystals over Function Fields
G. Böckle, R. Pink
European Mathematical Society, Tracts in Mathematics, 2009. 195 p.
ISBN : 978-3-03719-074-6. 48€

Ce livre s'adresse aux chercheurs et étudiants en thèse intéressés par l'arithmétique des corps de fonctions ou par les théories cohomologiques des variétés de caractéristique positive. De bonnes connaissances sur la théorie des schémas de Grothendieck sont indispensables. Quoique bien exposé dans les premiers chapitres, il est aussi conseillé d'être familier avec l'algèbre homologique et les catégories dérivées.

On désigne par q une puissance d'un nombre premier p et par $k := \mathcal{F}_q$ un corps à q éléments. Soit A un anneau de Dedekind de type fini sur k et dont le groupe des unités est fini. L'exemple le plus simple est l'anneau des polynômes $A = k[X]$. Nous disposons déjà de quelques constructions de « A-coefficients », i.e. de catégories de A-objets attachées aux variétés de type fini sur k et plus ou moins stables par opérations cohomologiques. Les premiers exemples de telles constructions, toutes dues à Drinfeld, sont les A-modules de Drinfeld, les shtukas et en particulier les faisceaux elliptiques. Lorsque $A = k[t]$, Anderson introduisit dans les années 1980 la notion de t-motifs, qui fut ensuite généralisée pour A quelconque en celle des A-motifs. Cette catégorie des A-motifs englobe celle des modules de Drinfeld et, contrairement à cette dernière, a l'avantage de disposer en plus de notions d'image inverse et d'opérations d'algèbre linéaire comme le produit tensoriel ou la somme directe.

La catégorie des A-motifs se comporte de manière analogue aux variétés abéliennes (l'anneau A joue le rôle de $\mathbf{Z}$). Cela avait conduit Goss à conjecturer que la fonction L associée à une famille de A-motifs (paramétrée par une variété de type fini sur k) devait aussi être une fraction rationnelle à coefficients dans A. Cette conjecture fut démontrée en 1996 par Tagushi et Wan avec des coefficients plus généraux, les φ-faisceaux. La principale motivation et innovation de ce livre est, en s'inspirant de la preuve par Grothendieck de la rationalité de la fonction zêta de Weil via la cohomologie étale l-adique, de développer un cadre algébro-géométrique et cohomologique avec pour conséquence une preuve purement algébrique de la conjecture de Goss sur la rationalité des fonctions L. Plus précisément, les auteurs introduisent avec beaucoup de soin la notion de complexes de A-cristaux à cohomologie de Tor-dimension finie. Ces A-coefficients généralisent celle des A-motifs et sont l'analogue (l'anneau A joue alors le rôle de $\mathbb{Q}_l$) des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux constructibles pour la topologique étale. Pour ces A-coefficients, on dispose de quatre des six opérations cohomologiques de Grothendieck (qui les préservent) : f^*, Rf_* lorsque f est propre, $Rf_!$ lorsque f est compactifiable. Cette stabilité permet d'établir une formule des traces et une interprétation cohomologique des fonctions L attachées à ces coefficients.

Précisons à présent le contenu des chapitres. On note $C := \mathrm{Spec}\, A$ le schéma des coefficients. Soit X un schéma de type fini sur k. On note σ_X ou simplement σ l'endomorphisme de Frobenius de X défini par $f \mapsto f^q$.

Dans le troisième chapitre, les auteurs définissent la catégorie notée $\mathbf{Coh}_\tau(X, A)$ des τ-faisceaux cohérents sur X à coefficients dans A. Un objet $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \tau_\mathcal{F})$ de cette catégorie est la donnée d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X \times C$ (produit dans la catégorie des k-schémas) muni d'un morphisme $\mathcal{O}_{X\times C}$-linéaire de la forme $\tau_\mathcal{F} : (\sigma \times \mathrm{id})^*(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$. Les morphismes sont les morphismes de faisceaux cohérents commutant aux τ. Un τ-faisceau $(\mathcal{F}, \tau_\mathcal{F})$ est semi-simple (resp. nilpotent) lorsque $\tau_\mathcal{F}$ est un isomorphisme (resp. lorsque le morphisme canonique $(\sigma^n \times \mathrm{id})^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ induit par $\tau_\mathcal{F}$ est nul). En quotientant $\mathbf{Coh}_\tau(X, A)$ par le système multiplicatif des nil-isomorphismes (un nil-isomorphisme est un morphisme dont le noyau et le conoyau sont nilpotents), les auteurs construisent la catégorie $\mathbf{Crys}(X, A)$ des A-cristaux sur X. Cette localisation a été introduite afin de bien définir de façon canonique le foncteur image directe extraordinaire $j_!$ par une immersion ouverte j. Par exemple, lorsque $A = k[t]$ (ou plus généralement pour certains A), un φ-faisceau sur X au sens de Tagushi et Wan (en particulier les A-motifs ou les A-modules de Drinfeld) sont des τ-faisceaux cohérents $(\mathcal{F}, \tau)$ avec $\mathcal{F}$ localement libre.

Dans le quatrième chapitre, les opérations produit tensoriel $\otimes$, image directe f_*, image inverse f^* sont étendues de manière naturelle de la catégorie des modules cohérents à celle des A-cristaux. Il est remarquable que le foncteur f^* devienne exact sur la catégorie des A-cristaux. Afin de dériver ces foncteurs (la catégorie des A-cristaux n'a pas assez d'objets injectifs par exemple), on aura besoin en fait de la notion moins restrictive de quasi-cristaux (on remplace dans la définition la propriété de cohérence par celle de quasi-cohérence). Dans le cinquième chapitre, on étudie les catégories dérivées de la catégorie abélienne des A-cristaux. Dans une sixième partie, les auteurs définissent les foncteurs dérivés du produit tensoriel et de l'image directe par un morphisme propre f notés respectivement $\otimes^{\mathbb{L}}$ et $\mathbb{R}f_*$. Ces deux foncteurs préservent les catégories de la forme $D^-(\mathbf{Crys}(X, A))$. Si f est un morphisme compactifiable, i.e., $f = \overline{f} \circ j$ avec $\overline{f}$ un morphisme propre et j une immersion ouverte, l'image directe extraordinaire $\mathbb{R}f_!$ de f est définie canoniquement en posant $\mathbb{R}f_! = \mathbb{R}\overline{f}_* \circ j_!$. Pour résumer, on bénéficie ainsi de quatre des six opérations cohomologiques de Grothendieck : f^*, $\otimes^{\mathbb{L}}$, $\mathbb{R}f_*$ (pour f propre) et $\mathbb{R}f_!$ (pour f compactifiable). Par contre, on ne dispose pas de notion d'image inverse extraordinaire $f^!$ ni de celle de foncteur dual.

Dans la septième partie, les auteurs introduisent la notion de platitude d'un A-cristal. La platitude est préservée par image inverse, produit tensoriel, extension par zéro. Un A-cristal $\underline{\mathcal{F}}$ sur un point (e.g. un point fermé de X) se décompose de manière unique de la forme $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{ss}} \oplus \underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{nil}}$, avec $\underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{ss}}$ semi-simple et $\underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{nil}}$ nilpotent. Dans ce cas, on dispose alors de la caractérisation suivante : un A-cristal $\underline{\mathcal{F}}$ sur un point est plat si et seulement si sa composante semi-simple $\underline{\mathcal{F}}_{\mathrm{ss}}$ est localement libre. Puis, on en vient naturellement à la notion de complexes de A-cristaux de Tor-dimension finie. La Tor-dimension finie est préservée par le foncteur dérivé de l'image directe par un morphisme propre, et par conséquent par les quatre opérations de Grothendieck.

Dans le huitième chapitre, les auteurs définissent « la fonction L naïve » de la manière suivante : Soit $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \tau)$ un τ-faisceau cohérent tel que $\mathcal{F}$ soit localement libre. Soit $|X|$ l'ensemble des points fermés de X. Soit x un élément de $|X|$, k_x son corps résiduel et d_x son degré sur k, $\mathcal{F}_x$ le faisceau cohérent sur $x \times C$ déduit de $\mathcal{F}$ par image inverse, $\tau_x : (\sigma_x \times \mathrm{id})^*\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ le morphisme induit. Autrement écrit, $i_x^*(\underline{\mathcal{F}}) = (\mathcal{F}_x, \tau_x)$ où i_x est l'immersion fermée induite par x. Comme $\mathcal{F}_x$ est un facteur direct d'un A-module libre de rang fini, quitte à prolonger par zéro τ_x à ce A-module libre, on peut définir canoniquement (cela ne dépend pas du choix d'une telle factorisation) $\det_A(\mathrm{id} - t\tau_x|\mathcal{F}_x)$. La fonction L naïve associée à $\underline{\mathcal{F}}$ est alors définie en posant :

$$L^{\mathrm{naive}}(X, \underline{\mathcal{F}}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_A(\mathrm{id} - t\tau_x|\mathcal{F}_x)^{-1} \in 1 + tA[[t]].$$

Les auteurs donnent ensuite une nouvelle preuve de la formule des traces de Anderson qui exprime cette fonction L naïve en terme de polynôme caractéristique sur le nucleus de son dual de Cartier.

Dans le neuvième chapitre, ils construisent « la fonction L cristalline » associée à un A-cristal plat $\underline{\mathcal{F}}$ sur X en posant :

$$L^{\mathrm{crys}}(X, \underline{\mathcal{F}}, t) := \prod_{x \in |X|} L^{\mathrm{naive}}(x, (i_x^*\underline{\mathcal{F}})_{\mathrm{ss}}, t) \in 1 + tA[[t]].$$

Remarquons que la formule a bien un sens d'après les chapitres 7 et 8 décrits ci-dessus. Plus généralement, cette définition s'étend naturellement aux complexes de A-cristaux sur X à cohomologie bornée et de Tor-dimension finie.

Supposons pour simplifier A réduit (autrement l'égalité ci-dessous n'est vraie qu'à multiplication par un polynôme unipotent près). Les auteurs vérifient alors que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de k schémas de type fini sur k, pour tout complexe $\underline{\mathcal{F}}^\bullet$ de A-cristaux sur X à cohomologie bornée et de Tor-dimension finie on a la formule

$$L^{\mathrm{crys}}(X, \underline{\mathcal{F}}^\bullet, t) = L^{\mathrm{crys}}(Y, f_!(\underline{\mathcal{F}}^\bullet), t).$$

En particulier, en prenant le morphisme structural de X, cela entraîne la rationalité de la fonction cristalline $L^{\mathrm{crys}}(X, \underline{\mathcal{F}}^\bullet, t)$.

Dans le dixième et dernier chapitre, les auteurs traitent le cas où A est fini. À un τ-faisceau cohérent $\underline{\mathcal{F}}$, on associe canoniquement le faisceau sur le petit site étale de X induit par le faisceau cohérent sous-jacent à $\underline{\mathcal{F}}$. Cela donne par localisation le foncteur canonique

$$\overline{\varepsilon} : \mathbf{Crys}(X, A) \to \mathbf{Et}_c(X, A).$$

Le résultat principal dû à Katz de ce dernier chapitre est que ce foncteur $\overline{\varepsilon}$ induit une équivalence de catégories qui commute aux quatre opérations cohomologiques, préserve la platitude, est compatible aux fonctions L i.e. pour tout objet $\underline{\mathcal{F}}^\bullet$ de $\mathbf{Crys}(X, A)$

$$L^{\mathrm{crys}}(X, \underline{\mathcal{F}}^\bullet, t) = L(X, \overline{\varepsilon}(\underline{\mathcal{F}}^\bullet), t).$$

Continuons cette recension par une remarque. Lorsque que la variété X est lisse, on dispose d'une théorie analogue développée par Emerton et Kisin dans leur remarquable papier sur la correspondance de Riemann-Hilbert valable pour des coefficients qu'ils nomment « F-cristaux unités ». D'après Blickle et le premier auteur, ces deux théories sont d'ailleurs duales. Enfin, la théorie cohomologique de ce livre possède déjà quelques applications. Par exemple, V. Lafforgue l'utilise pour étudier les valeurs spéciales de la fonction L de Goss aux points critiques.

Daniel Caro,
Université de Caen

Analytic Combinatorics
P. Flajolet, R. Sedgewick
Cambridge University Press, 2009. 810 p. ISBN : 978-0-521-89806-5. £48

Comme me le disait un jour un collègue (Volker Strehl), la combinatoire n'est pas une discipline des mathématiques, mais un état d'esprit qui traverse toutes les mathématiques. On pourrait d'une certaine manière inverser ces propos en disant que la plupart des domaines mathématiques irriguent la combinatoire et l'arsenal de ses méthodes. Au passage, comment appeler un spécialiste de combinatoire ? On entend *combinatoriste* qui sonne un peu comme *tractoriste*, ou *combinatoricien* qui est un mauvais anglicisme clairement dérivé de *combinatorics*. Comme *mathématicien discret* est un peu ambigu, il nous semble que l'on devrait dire *combinatorien* (sur le modèle de histoire/historien ou oratoire/oratorien).

Le livre de Flajolet et Sedgewick, intitulé *Analytic Combinatorics*, est intimidant de prime abord : plus de huit cents pages et six cent trente références. Pourtant, sa compagnie est un plaisir ; les lecteurs sont pris par la main et emmenés en promenade à travers un nombre fantastique de résultats, d'exemples, de méthodes et de notes explicatives. Sans céder à la facilité, les auteurs réussissent à exposer concepts, théorèmes et applications de manière assimilable dès la première lecture, (presque) sans effort.

L'ouvrage est divisé en trois parties. Ce sont d'abord les méthodes symboliques qui sont présentées : comment passer d'un problème d'énumération à une série génératrice associée (exponentielle ou ordinaire suivant que les objets à compter sont étiquetés ou pas), et – surtout – comment « automatiser » ce passage. Le but peut être de donner des formules énumératives ou leur comportement asymptotique, en utilisant le cas échéant un peu d'analyse réelle. La seconde partie explore les séries génératrices en les considérant comme des fonctions d'une variable complexe. La puissance de la théorie (fonctions méromorphes, étude des singularités, etc.), qui culmine avec entre autres les opérateurs de transfert, permet alors une explosion de méthodes et de résultats. Et, là aussi, on va chercher à « automatiser » certains mécanismes de démonstration. Notons la place spéciale prise par les séries génératrices rationnelles, algébriques, puis holonomes (celles dont les dérivées successives engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des fractions rationnelles). Bien sûr, il n'y a aucune raison de se limiter aux séries à une seule variable... La dernière partie se concentre sur les structures aléatoires : il s'agit essentiellement d'étudier des structures combinatoires dépendant d'un ou plusieurs paramètres en fonction de ces paramètres. Enfin des appendices présentent des précisions sur des notions « élémentaires », des rappels d'analyse complexe « de base » et des indications sur des concepts probabilistes.

Ce livre est remarquable. Il pourra être utile, voire indispensable, d'abord aux « combinatoriens » (voir plus haut) qui y trouveront un livre de référence, une réserve d'outils universels... et une source d'idées, mais aussi par exemple aux spécialistes de théorie analytique des nombres qui reconnaîtront plusieurs de leurs préoccupations (par exemple la méthode du col et ses raffinements), sans oublier tous les mathématiciens et/ou informaticiens théoriciens curieux qui reconnaîtront le bien fondé des affirmations du début de cette recension.

J.-P. Allouche,
CNRS, Mathématiques
Université Paris 6

An introduction to random matrices
G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zetiouni
Cambridge University Press, 2009. 506 p. ISBN : 978-0521-194-525. £40

Commençons par un bref historique du sujet. La théorie des matrices aléatoires est née dans les années 30, quand les statisticiens Jack et Wishart ont commencé à étudier des lois de probabilités naturelles sur l'ensemble des matrices réelles définies positives, dans le but de comprendre les propriétés des matrices de covariance empirique qui abondent en statistique.

Puis, dans les années 50, Wigner, avec des motivations totalement différentes, a introduit des modèles de matrices aléatoires autoadjointes, dont le comportement des valeurs propres devait modéliser les propriétés statistiques des spectres d'Hamiltoniens quantiques en théorie des atomes lourds. Ces travaux ont été poursuivis dans les années soixante, principalement par des physiciens, comme Dyson, Gaudin ou Mehta, ou en URSS, notamment par Marchenko et Pastur.

Au début des années soixante-dix, au cours d'un épisode qui a été raconté maintes fois, le physiciens Dyson et le théoricien des nombres Montgomery se sont retrouvés au thé qui suivait un séminaire à Princeton et se sont aperçus, en comparant leurs travaux, que les propriétés statistiques des valeurs propres des matrices aléatoires considérées par Wigner coïncidaient « miraculeusement » avec celles des zéros de la fonction ζ de Riemann. Depuis, on a assisté à un foisonnement de travaux reliant les matrices aléatoires avec les théories les plus diverses, aussi bien la théorie quantique des champs que les systèmes intégrables, les algèbres d'opérateurs, la géométrie algébrique, la mécanique statistique, ou encore les polynômes orthogonaux. Ce sujet est devenu, en quelques années, d'une actualité brûlante, comme en témoigne le fait que l'un des principaux problèmes ouverts, la conjecture d'universalité pour les espacements de valeurs propres, a été résolu simultanément par deux équipes au moment où ce livre était sous presse. Comprendre ces travaux nécessite la maîtrise de techniques diverses d'analyse, d'algèbre, de combinatoire et évidemment de probabilités. Il est ainsi devenu difficile au néophyte, et même au spécialiste, de s'y retrouver. Il existe déjà un certain nombre d'ouvrages consacrés aux matrices aléatoires. On peut ainsi citer le livre classique de Mehta [1], plusieurs fois réédité, qui présente les

[1] *Random matrices*, Pure and Applied Mathematics, 142. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004

matrices aléatoires du point de vue d'un physicien, celui de Katz et Sarnak[2], qui est essentiellement consacré aux applications à la théorie des nombres, celui de P. Deift[3], qui présente des techniques récentes d'analyse très sophistiquées des problèmes de type Riemann-Hilbert, ou encore celui de Hiai et Petz, [4], motivé par les applications aux algèbres de von Neumann, celui de Lando et Zvonkin, [5], qui contient surtout l'aspect intéressant les géomètres algébristes, enfin très récemment est paru le livre de Peter Forrester [6] qui, là encore, est écrit par un physicien. Curieusement il n'y avait donc pas de livre consacré aux matrices aléatoires qui soit présenté du point de vue probabiliste. Le livre dont il est question ici vient donc combler une lacune dans la littérature, et de ce fait était très attendu, tout particulièrement dans la communauté probabiliste. Comme on l'a vu, le sujet des matrices aléatoires est devenu si vaste qu'on ne peut songer à l'épuiser en un seul volume, ainsi les auteurs prétendent seulement avoir écrit une introduction, et forcément ont dû faire des choix lors de l'écriture du livre. Celui-ci commence par l'étude des matrices de Wigner, qui sont des matrices à coefficients indépendants, modulo une condition de symétrie ou d'hermiticité. Le premier résultat concernant ces matrices est la convergence de la loi empirique des valeurs propres, lorque la taille de la matrice tend vers l'infini, vers la fameuse « loi du demi-cercle » aussi appelée « loi de Wigner », car c'est bien Wigner qui le premier a mis en évidence son importance dans ce sujet. La convergence est établie au moyen de la méthode des moments, comme Wigner l'avait fait dans ses premiers articles. Afin d'arriver à ce résultat, il faut développer une combinatoire intéressante par elle-même, et qui contient en germe des développements très importants, comme les probabilités libres dont il sera question plus loin. Une autre approche, qui utilise la transformée de Stieltjes, permet de s'affranchir de l'hypothèse d'existence de moments arbitraires, mais elle n'est pas présentée dans le livre, qui contient toutefois quelques pages consacrées à cette même transformation de Stieltjes. Au cours du même chapitre sont introduites des méthodes très récentes d'inégalités fonctionnelles et d'inégalités de concentration qui se sont révélées fondamentales pour l'étude des matrices aléatoires. Ce chapitre devrait être bien utile à tous ceux qui ont besoin d'utiliser ces méthodes puissantes. Finalement le chapitre contient aussi une présentation du modèle sans doute le plus étudié de la théorie, celui des matrices de Wigner gaussiennes, souvent désigné par l'acronyme GUE (Gaussian Unitary Ensemble) ou GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble), avec une démonstration de la formule donnant la densité de la loi des valeurs propres.

Le chapitre suivant présente une étude très détaillée du comportement asymptotique des écarts entre valeurs propres, ainsi que de la plus grande valeur propre

[2] *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 45. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999

[3] *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach.* Courant Lecture Notes in Mathematics, 3. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999

[4] *The semicircle law, free random variables and entropy.* Mathematical Surveys and Monographs, 77. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000

[5] *Graphs on surfaces and their applications.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 141. Low-Dimensional Topology, II. Springer-Verlag, Berlin, 2004

[6] *Log-gases and random matrices.* London Mathematical Society Monographs Series, 34. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010

d'une matrice du GUE ou du GOE. C'est ici que commence l'interaction entre les matrices aléatoires et les systèmes intégrables, ainsi les fonctions de Painlevé font une apparition remarquée, qui a contribué au regain d'intérêt dont ces fonctions font l'objet depuis une trentaine d'année. Le chapitre contient en particulier une démonstration de la maintenant célèbre « loi de Tracy-Widom », découverte pour la première fois dans le contexte de la loi de la plus grande valeur propre d'une matrice aléatoire, et qui depuis est apparue dans un nombre incalculable de modèles de mécanique statistique, au point que certains y ont vu là la « gaussienne du vingt-et-unième siècle ». La méthode présentée dans le livre est très proche de la méthode originale de Tracy et Widom, la mettant ainsi à la portée du plus grand nombre. Il existe d'autres approches de ce résultat, en particulier celle de Forrester et Witte, présentée dans le livre de Forrester cité plus haut. Le lecteur intéressé comparera avec profit les deux méthodes.

Suit un chapitre consacré à différents aspects de la théorie des probabilités qui trouvent des applications aux matrices aléatoires, comme par exemple les processus déterminantaux, l'analyse stochastique, ou encore de nouveau les inégalités de concentration de la mesure. Finalement le dernier chapitre du livre est consacré à l'un des domaines où les matrices aléatoires ont trouvé leurs applications les plus spectaculaires, la théorie des probabilités libres. Au départ cette théorie, inventée par Voiculescu dans les années 80, concernait les algèbres de von Neumann de groupes, plus particulièrement les algèbres associées aux groupes libres. C'est une coïncidence, l'apparition de la loi de Wigner à la fois dans l'étude du spectre des matrices aléatoires et dans sa théorie où elle joue le rôle de la loi gaussienne, qui a mis Voiculescu sur la piste d'une relation très profonde entre les matrices aléatoires et les probabilités libres. S'en est suivi depuis vingt ans une floraison de travaux importants, à l'intersection entre les probabilités et les algèbres d'opérateurs, avec en particulier la résolution de nombreux problèmes ouverts depuis les années soixante sur les algèbres de von Neumann. Cette théorie est toutefois d'un abord difficile pour les probabilistes, à cause de l'important appareil d'algèbre et d'analyse fonctionnelle qu'elle nécessite. Le chapitre 5 du livre réussit, avec le minimum de notions abstraites, à faire passer l'intuition probabiliste qui est derrière cette théorie. Il sera là encore précieux pour tous les étudiants ou les chercheurs, avec un bon bagage probabiliste, désireux d'apprendre ce sujet.

Le livre se termine par plusieurs appendices précisant certaines notions utilisées dans le texte, soit d'algèbre linéaire, soit de probabilités et de topologie, ou encore d'algèbres d'opérateurs et de géométrie différentielle.

Le style de l'ouvrage est agréable, assez facile à lire, même si certains passages un peu techniques demanderont au lecteur de retrousser ses manches, (par exemple pour bien comprendre la loi de Tracy-Widom), mais à la fin il sera récompensé de ses efforts par la compréhension en profondeur d'aspects importants de la théorie.

Comme je l'écrivais au début de cette revue, par nécessité des choix de sujets ont dû être faits, et de nombreux aspects des matrices aléatoires sont peu, ou pas abordés dans le livre, en particulier les liens avec la théorie des nombres et la fonction ζ de Riemann, la théorie quantique des champs, ou encore les problèmes de

Riemann-Hilbert pour n'en citer que quelques-uns. Toutefois ces développements sont accessibles dans d'autres ouvrages, dont ceux que je citais plus haut. Le présent livre constitue en revanche la première source d'information en ce qui concerne certains des aspects les plus probabilistes des matrices aléatoires, que j'ai évoqués plus haut. À ce titre, il s'agit d'un ouvrage précieux, qui devrait figurer en bonne place dans toute bonne bibliothèque de probabilités.

Ph. Biane,
Université de Marne la Vallée

Algorithmic Number Theory. Lattices, Number Fields, Curves and Cryptography

P. Buhler, P. Stevenhagen (Eds.)

Cambridge University Press, 2008 (MSRI Publications 44). 652 p.
ISBN : 978-0-521-80854-5. £55

Cet ouvrage collectif contient vingt articles d'exposition, nés d'un semestre du MSRI consacré à la Théorie Algorithmique des Nombres (automne 2000). Thématiquement, le gros du livre est consacré à l'algorithmique de $\mathbb{Z}$ (factorisation, primalité), des réseaux (détermination de vecteurs courts et applications), et des corps de nombres (ordres, groupes de classes et d'unités) ; plusieurs courts survols complètent le panorama. Pour reprendre les mots-clés du titre, réseaux et corps de nombres sont traités en grand détail, la cryptographie apparaît surtout comme motivation (description rapide d'applications), et les courbes sont surtout traitées du point de vue du comptage de points $\mathbb{F}_q$-rationnels ou de la détermination de leurs points $\mathbb{Q}$-rationnels.

Les bibliographies sont séparées. Il y a quelques références croisées, mais les articles peuvent être lus indépendamment, avec des prérequis minimaux – un premier cours de théorie des nombres, par exemple le classique d'Ireland & Rosen [3] –, ce qui le rend accessible au niveau M2. Le style est généralement informel, parfois proche de notes d'exposés, rendant la lecture très vivante, mais laissant souvent au lecteur le soin de compléter les preuves : il n'est probablement pas très adapté comme support direct d'un cours.

Avant de décrire plus en détail le contenu de ces articles, écrits par quinze experts, je donne directement ma conclusion sur l'ensemble. Je recommande chaleureusement cet ouvrage, que j'ai pris grand plaisir à lire : le contenu est assez classique, mais c'est un panorama clair, et un bon point d'entrée dans un domaine actif, plus complet que d'autres bonnes références comme Cohen [1] (un peu ancien – publié en 1993 – , et volontairement très proche de l'implantation des algorithmes), Crandall-Pomerance [2] (limité à l'arithmétique « élémentaire ») ou Gerhard-von zur Gathen [4] (limité aux aspects intéressant le calcul formel). Le survol n'est pas trop rapide, on rentre aussi dans les difficultés techniques et les preuves, avec un point de vue « algébriste » que j'ai trouvé éclairant : le souci de formalisation est réel et constant, et les grandes idées sont mises en valeur. Par contre – et c'est à mon avis une bonne décision des auteurs –, le lecteur désireux d'implanter lui-même ces algorithmes devra travailler, et se reporter à la bibliographie, pour en obtenir des versions efficaces en pratique.

Voici la liste des articles, regroupés thématiquement, avec un bref commentaire :

Algorithmique de $\mathbb{Z}$

– La résolution de l'équation de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ (Hendrik Lenstra, 24 pages) : introduction au volume, motivée par le classique problème des « bœufs d'Archimède ».

– Algorithmes de base en théorie des nombres (Joe Buhler, Stan Wagon, 44 pages) : Euclide étendu, restes chinois, factorisation dans $\mathbb{Z}$ (méthode ρ de Pollard) et logarithme discret (Pohlig-Helman), factorisation dans $\mathbb{F}_q[X]$ (Cantor-Zassenhaus) et lift de Hensel.

– Preuves de primalité dans $\mathbb{Z}$ (René Schoof, 26 pages) : algorithme de Rabin-Miller (preuve de non-primalité), sommes de Jacobi (algorithme APRCL), courbes elliptiques (algorithme ECPP), preuve de primalité en temps polynomial déterministe (algorithme AKS).

– Factorisation dans $\mathbb{Z}$: le crible quadratique (Carl Pomerance, 14 pages), le crible algébrique ou *Number Field Sieve* (Peter Stevenhagen, 18 pages). Logarithmes discrets : algorithmes élémentaires (Carl Pomerance, 12 pages), algorithmes adaptés du crible algébrique (Oliver Shirokauer, 24 pages).

– Nombres friables (Andrew Granville, 58 pages) : explique pourquoi une estimation du nombre d'entiers y-friables (dont les facteurs premiers sont $< y$) dans certaines suites naturelles d'entiers – par exemple les entiers de l'intervalle $[x - 2\sqrt{x}, x + 2\sqrt{x}]$ ou les valeurs d'un polynôme à coefficients entiers sur les entiers de $[0, x]$ – permettrait d'analyser rigoureusement un grand nombre d'algorithmes décrits dans le reste de l'ouvrage, par exemple la preuve de primalité ou la factorisation dans $\mathbb{Z}$ via les courbes elliptiques, ou le crible quadratique. Les démonstrations des résultats connus, par exemple sur la fonction $\psi(x, y) = \#\{n \leqslant x,\ n \text{ est } y\text{-friable}\}$ sont classiques mais rigoureuses et Granville explique pourquoi des conjectures naturelles comme

$$\psi(x + x^\beta, x^\alpha) - \psi(x, x^\alpha) > 0, \quad \text{pour } \alpha, \beta > 0 \text{ et } x \text{ assez grand}$$

paraissent inatteignables, pour les valeurs des paramètres utiles pour les applications visées (il faudrait $\beta = 1/2$). L'article se conclut par un survol d'applications et des problèmes ouverts correspondants en théorie analytique des nombres.

Réseaux, corps de nombres

– Réseaux (Hendrik Lenstra, 56 pages) : décrit l'algorithme de réduction (LLL) qui permet une résolution approchée du problème du plus court vecteur dans le réseau, puis explique comment ramener un problème arithmétique (factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$) à une recherche de plus court ou plus proche vecteur dans un réseau. De nombreuses applications originales sont données dans l'article suivant, autour de la détermination de valeurs de petite hauteur de polynômes (Dan Bernstein, 26 pages).

– Anneaux de nombres (Peter Stevenhagen, 58 pages) : un anneau de nombres est un anneau intègre dont le corps des fractions est un corps de nombres K. Les exemples les plus importants étant les ordres (sous-anneaux $O \subset O_K$ de l'anneau des entiers) et leurs localisés O_T, pour un ensemble fini de places T. La plupart des ouvrages se restreignent au cas des anneaux d'entiers (de Dedekind), dont l'arithmétique est agréable. Malheureusement, la pratique algorithmique impose de travailler avec des ordres (anneaux de nombres de type fini), en général non maximaux, le calcul d'un ordre maximal nécessitant en général la factorisation d'un grand entier, impossible en pratique. Les problèmes sont classiques : normalisation (Pohst-Zassenhaus), calcul de groupe de classes et des unités. L'originalité par rapport au traitement de [1] par exemple est l'usage plus systématique de résultats et de notions d'algèbre commutative, ainsi que l'introduction cosmétique des adèles et idèles de K en fin d'article.

– Calcul de groupes de classes d'Arakelov (René Schoof, 50 pages) : calcul de groupes de classes et unités de corps de nombres, avec un point de vue unifié original sur les théories de Shanks (infrastructure des corps quadratique réels) et Buchmann. Théorie du corps de classe effective (Henri Cohen & Peter Stevenhagen, 38 pages) : calcul d'un élément primitif réalisant une extension abélienne décrite abstraitement par la théorie du corps de classe.

Courbes

– Courbes elliptiques (Bjorn Poonen, 26 pages) : définitions et résultats classiques donnés de façon informelle, algorithme de factorisation dans $\mathbb{Z}$ (ECM). Nombres congruents (Top & Yui, 28 pages) : passage d'un problème diophantien à une recherche de points rationnels.

– Algorithmique des fonctions zêta sur les corps finis (Daqing Wan, 28 pages) : introduction aux conjectures de Weil. Comptage de points de variétés sur des corps finis de petite caractéristique (Alan Lauder & Daqing Wan, 34 pages) : introduction à la théorie de Dwork.

Autres sujets

– Cryptographie (Dan Bernstein, 16 pages) : présente un choix original de 4 algorithmes implantant des primitives cryptographiques : authentificateur de message, générateur pseudo-aléatoire imprévisible, échange de secret, signature.

– Multiplication quasi-linéaire et ses applications (Dan Bernstein, 60 pages) : cet article dense sur l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) et ses conséquences décrit 23 algorithmes classiques sur les entiers ou les polynômes, dont le temps d'exécution est essentiellement linéaire en la taille de l'entrée : multiplication, division euclidienne, pgcd, logarithme / exponentielle, ... Chaque algorithme est décrit avec une analyse de complexité, incluant les meilleures constantes connues (jusqu'en 2007).

– Symboles modulaires et calcul de formes modulaires (William Stein, 11 pages) : manipulation explicite d'espaces de formes modulaires.

Références

[1] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[2] R. Crandall & C. Pomerance, *Prime numbers*, second ed., Springer, New York, 2005, A computational perspective.

[3] K. Ireland & M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 84, Springer-Verlag, New York, 1990.

[4] J. von zur Gathen & J. Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, New York, 1999.

K. Belabas,
Université Bordeaux 1