SOMMAIRE DU N^{o} 128

SMF

Mot du Président

Après les résultats sur les equipex (voir le communiqué du bureau du 11 février 2011[1]), les résultats sur les labex étaient très attendus. Il est bien sûr trop tôt pour faire une analyse complète de la situation alors que les résultats définitifs sur les Idex sont encore à venir et que des négociations sur une seconde vague sont déjà engagées, par exemple sur les equipex. La SMF s'efforcera d'être présente dans cette réflexion.

Les résultats parus le 25 mars font apparaître au moins 7 projets de labex où les mathématiques sont présentes sur une centaine de labex classés. En premier lieu, nous sommes rassurés que les deux projets de labex à vocation nationale CARMIN et AMIES soient retenus, même si les moyens qui pourraient leur être attribués risquent d'être très insuffisants par rapport aux besoins. Sont aussi retenus des projets de la FSMP, et des projets émanant de Lyon (MILYON), Paris-Est (BEZOUT), Clermont-Ferrand (CLERVOLC et IMOBS3), Montpellier (NUMEV) avec une part Maths plus ou moins grande selon les cas. Difficile de comprendre à la lecture de cette liste comment se construit à travers ce programme des labex une politique scientifique nationale au niveau des mathématiques.

À la même date nous sommes aussi informés que 7 projets d'Idex sont présélectionnés. Je rappelle que cet appel à projets, doté de 7,7 Md, se donnait comme objectif de « faire émerger en France 5 à 10 pôles pluridisciplinaires d'excellence d'enseignement supérieur et de recherche de rang mondial, capables de rivaliser avec les plus grandes universités du monde ». Les 7 projets pré-sélectionnés concernent Bordeaux, Grenoble, Lyon-Saint-Étienne, deux IDEX de Paris-Centre, Toulouse et Strasbourg. Nous espérons bien sûr que des équipes de mathématiques sont présentes dans tous ces projets. Mais de nouveau, même en admettant la logique du programme, il y a des absences qui laissent perplexe par rapport aux objectifs affichés.

Enfin, à la date où j'écris ce texte, il n'est pas clair que les promesses de réajustement du budget de l'INSMI (voir notre lettre ouverte du 2 décembre 2010[2]) se concrétiseront.

[1] http://smf.emath.fr/content/110211-communique-du-bureau-de-la-smf-sur-le-soutien-des-bibliotheques

[2] http://smf.emath.fr/files/text_like_files/fuchs-02-12-10.pdf

Vous trouverez dans ce numéro un texte adopté par le CA de la SMF du 29 janvier 2011 sur l'élaboration des nouveaux programmes de mathématiques dans les classes de terminale. Il fait suite à une entrevue de novembre 2010 entre une délégation de la SMF et des représentants de l'Inspection Générale. La parution en mars du projet de programme mis en consultation jusqu'au 22 avril[3] n'a nullement apaisé les inquiétudes que nous exprimions dans ce texte qui demeure d'actualité. La SMF fera une analyse détaillée des manques et incohérences de ces programmes dans sa réponse officielle à la consultation. Pour prendre un seul exemple, que penser de la disparition de la notion de limite finie en un point au profit d'une notion de « fonctions continues par intervalle », tandis qu'est proposée l'étude de fonctions continues nulle part dérivables en accompagnement personnalisé.

Pour finir sur une note plus gaie, c'est un plaisir de vous informer de l'énorme succès d'une manifestation grand public organisée par la SMF en province.

Plus de 700 lycéens de toute la région (et il a fallu refuser des inscriptions) sont venus écouter le 25 mars à Avignon C. Villani, dans le cadre du cycle : un texte, un mathématicien. Outre Animath et la SMF, l'université d'Avignon s'est beaucoup impliquée dans l'organisation de cet événement et je tiens à remercier en particulier T. Barbot et M.-C. Arnaud ainsi que bien sûr le conférencier.

Le 29 mars 2011
Bernard Helffer

[3] `http://eduscol.education.fr/cid55136/consultation-sur-les-projets-programmes-terminale.html`

DES MATHÉMATIQUES AUTOUR DE L'ICM

La percolation, et un résultat de S. Smirnov

Vincent Beffara[1]

Le but de cette note est de présenter l'un des résultats de Stanislav Smirnov pour lesquels il a reçu la médaille Fields en 2010 ; ce résultat concerne l'invariance conforme du comportement asymptotique de la percolation en dimension 2, et nous en profitons pour décrire le modèle de manière un peu plus générale.

1. Introduction

La percolation est un modèle de mécanique statistique introduit par Broadbent et Hammersley [5] en 1957 pour étudier le flot d'un fluide à travers un milieu aléatoire poreux, représenté comme un réseau de canaux microscopique ; il s'agit du système le plus simple pour lequel une *transition de phase* se produit. En dehors de ses applications nombreuses à l'étude de phénomènes comme les feux de forêt, et à celle de modèles plus « physiques » comme le modèle d'Ising, la percolation est à l'interface de plusieurs branches des mathématiques : probabilités et théorie des graphes bien sûr, mais aussi théorie des groupes, géométrie, et plus récemment (avec les travaux de Lawler, Schramm, Smirnov et Werner) analyse complexe.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe ($\mathbb{Z}^d$ dans le modèle initial, mais n'importe quel graphe infini, connexe, localement fini et quasi-transitif fera l'affaire), $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses arêtes ; soit $p \in (0,1)$. On peut construire un sous-graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ de $\mathcal{G}$ en déclarant chaque arête *ouverte* avec probabilité p et *fermée* avec probabilité $1-p$, de manière indépendante, et en gardant seulement les arêtes ouvertes ; on obtient ainsi une mesure P_p sur l'ensemble des sous-graphes de $\mathcal{G}$, qui porte le nom de **percolation par arêtes de paramètre p sur $\mathcal{G}$**.

Un *chemin* sur $\mathcal{G}$ est une suite de sommets de $\mathcal{G}$, chacun étant relié au suivant par une arête du graphe. Un chemin est dit *ouvert* si toute les arêtes correspondantes sont ouvertes ; on dit que deux sommets sont *reliés* s'il existe un chemin ouvert passant par eux deux, ce qui équivaut à dire qu'ils sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}_p$; on notera cet événement $x \leftrightarrow y$. On dira que deux parties A et B de $\mathcal{V}$ sont reliées, et on notera $A \leftrightarrow B$, s'il existe un chemin ouvert reliant un point de A à un point de B. On notera $C(v)$ l'ensemble des sommets reliés à v, *i.e.* la composante connexe de v dans $\mathcal{G}_p$; par un abus de notation courant, on écrira $v \leftrightarrow \infty$ pour dire que $C(v)$ est infini.

[1] CNRS, UMPA, ÉNS Lyon.

Il existe une variante du modèle, dite **percolation par site**, dans laquelle toutes les arêtes restent ouvertes mais où chaque sommet est déclaré ouvert avec probabilité p ; dans ce cadre, un chemin sera dit ouvert si tous ses sommets sont ouverts, mais les autres définitions restent les mêmes. Sauf précision contraire, tous les énoncés qui suivent sont valables de la même façon dans les deux cas. Enfin, une partie de la littérature désigne sous le terme de percolation n'importe quelle mesure de probabilité sur l'ensemble des sous-graphes de $\mathcal{G}$; le cas d'arêtes ou de sites indépendants est alors nommé **percolation de Bernoulli**.

La quantité la plus importante dans l'étude du modèle est la **probabilité de percolation**, définie (étant donné un sommet marqué 0) par

$$\theta(p) := P_p\left[0 \leftrightarrow \infty\right] \in [0,1)$$

(si le graphe $\mathcal{G}$ n'est pas transitif, cette probabilité peut dépendre du choix de l'origine ; en revanche, le fait qu'elle soit ou non positive n'en dépend pas). La fonction θ ainsi définie est croissante ; de plus, $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$. On peut donc définir

$$p_c = p_c(\mathcal{G}) := \sup\{p : \theta(p) = 0\} = \inf\{p : \theta(p) > 0\} \in [0,1]$$

qui porte le nom de **paramètre critique** du modèle.

Par définition, si $p < p_c$ la composante connexe de l'origine est finie presque sûrement, et par conséquent avec probabilité 1 toutes les composantes connexes du graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ sont finies. Si $p > p_c$, l'origine est avec probabilité strictement positive dans une composante connexe infinie, et le théorème ergodique implique qu'il existe presque sûrement au moins une composante connexe infinie dans $\mathcal{G}_p$. Un tel changement de comportement porte le nom de **transition de phase**.

La première question qui se pose naturellement est celle de la valeur de p_c. Il n'est pas difficile de voir que dès que le degré du graphe est borné par $D > 0$, on a $p_c \geqslant (D-1)^{-1} > 0$. En effet, le nombre de chemins issus de l'origine et utilisant n arêtes disjointes est au plus de $D(D-1)^{n-1}$, et chacun d'entre eux est ouvert avec une probabilité p^n, ce qui implique que la probabilité que $C(0)$ contienne un point à distance n est au plus $pD[p(D-1)]^{n-1}$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$ (ce qui implique que $C(0)$ est fini presque sûrement) dès que $p < (D-1)^{-1}$. Dans l'autre direction, il n'est pas toujours vrai que $p_c < 1$: un contre-exemple immédiat est le cas où le graphe est $\mathbb{Z}$, mais il n'y a pas de critère général permettant d'obtenir une telle borne.

La valeur exacte de p_c n'est quant à elle connue exactement que dans un très petit nombre de cas. Si le graphe est un arbre, alors la percolation se réduit à un processus de branchement, dont l'étude est facile ; dans le cas de l'arbre homogène de degré D, on a $p_c = (D-1)^{-1}$. Si le graphe est planaire, des arguments de dualité permettent parfois de calculer p_c (on y reviendra plus bas), mais c'est loin d'être le cas général.

2. La percolation sur $\mathbb{Z}^d$

Le premier cadre dans lequel la percolation a été étudiée est celui du réseau cubique $\mathbb{Z}^d$ (avec $d \geqslant 2$ pour que le modèle ne soit pas trivial) ; la référence « canonique » sur le sujet est le livre de Grimmett [8]. La preuve de l'inégalité $p_c < 1$ est due à Hammersley [10], et repose sur des arguments de comptage de chemins (argument dit « de Peierls ») ; en particulier, les deux phases décrites plus haut sont effectivement réalisables en choisissant le paramètre p correctement. On dit que le système est *sous-critique* si $p < p_c$, *sur-critique* si $p > p_c$ et *critique* si $p = p_c$.

2.1. Loin du régime critique

Dans le régime sous-critique, presque sûrement toutes les composantes connexes de $\mathcal{G}_p$ sont finies par définition de p_c, mais dans le cas de $\mathbb{Z}^d$ ou plus généralement d'un graphe périodique, on a en fait le résultat plus fort de **décroissance exponentielle** suivant :

Théorème 2.1 (Aizenman et Barsky [1], Menshikov [13])**.** *Pour tout $p < p_c$ il existe $0 < C_1, C_2 < \infty$ telles que, pour tout $n > 0$,*

$$P_p\left[|C(0)| \geqslant n\right] \leqslant C_1 e^{-C_2 n}.$$

En particulier, l'espérance de $|C(0)|$ est finie, et la probabilité que le *diamètre* de $C(0)$ soit plus grand que $l > 0$ décroît elle aussi exponentiellement vite. Un résultat plus précis concerne la décroissance de la *fonction à deux points* : il existe deux constantes $0 < c < C < \infty$ et une fonction $\xi : (0, p_c) \to \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, tout $p \in (0, p_c)$ et tout $n > 0$, on ait

$$P_p\left[0 \leftrightarrow nx\right] = \exp\left(-\frac{n\varphi_p(n,x)}{\xi(p)}\right)$$

avec $c < \varphi_p(n,x) < C$. La fonction ξ porte le nom de **longueur de corrélation** du modèle ; elle tend vers l'infini au point critique.

Dans le cas $p > p_c$, le graphe $\mathcal{G}_p$ a au moins une composante connexe infinie par définition ; mais en fait le nombre de composantes connexes infinies est presque sûrement égal à 1. Cela est une conséquence de la moyennabilité de $\mathbb{Z}^d$, et on y reviendra par la suite. Cette composante infinie a une densité asymptotique égale à $\theta(p)$, et « ressemble beaucoup » à $\mathbb{Z}^d$ lui-même – par exemple, la marche aléatoire simple y est diffusive, récurrente si $d = 2$ et transiente si $d \geqslant 3$.

On a encore décroissance exponentielle pour les composante connexes *finies* :

$$P_p\left[n \leqslant |C(0)| < \infty\right] \leqslant C_1 e^{-C_2 n}$$

(intuitivement, dès qu'une composante connexe est suffisamment grande, elle rencontre la composante infinie avec une grande probabilité). On a également existence d'une longueur de corrélation pour la probabilité que 0 et nx soient reliés *à l'intérieur d'une composante connexe finie.*

2.2. Autour du régime critique

Le fait que la longueur de corrélation tende vers l'infini au point critique indique que l'on n'a pas décroissance exponentielle quand $p = p_c$. Le comportement (conjecturé) du système fait apparaître des **exposants critiques** : quand $p \to p_c$,

$$\theta(p) \approx (p - p_c)_+^\beta \qquad \xi(p) \approx |p - p_c|^{-\nu} \qquad E_p[|C(0)|; |C(0)| < \infty] \approx |p - p_c|^{-\gamma}$$

et pour le système pris au point critique :

$$P_{p_c}[|C(0)| = n] \approx n^{-1-1/\delta} \quad P_{p_c}[0 \leftrightarrow x] \approx |x|^{2-d-\eta}$$

$$P_{p_c}[\mathrm{diam}(C(0)) = n] \approx n^{-1-1/\rho}.$$

En utilisant des arguments non rigoureux reposant sur l'utilisation du *groupe de renormalisation*, les physiciens prédisent que ces exposants dépendent de la dimension d du système, mais sont les mêmes pour tous les réseaux de même dimension (alors que bien sûr la valeur de p_c change d'un réseau à l'autre). Ce phénomène porte le nom d'**universalité** – mais il est extrêmement mal compris par les mathématiciens.

En supposant l'existence de ces exposants, on peut obtenir des relations entre eux dites **relations de scaling**. L'idée est la suivante : si on considère la percolation pour un paramètre proche de p_c, dans une boule de taille plus petite que $\xi(p)$, on ne voit pas la décroissance exponentielle et tout devrait se passer comme si on avait $p = p_c$. On obtient les relations suivantes (démontrées rigoureusement par Kesten [12] en dimension 2) :

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \qquad \gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1).$$

En dimension $d \leqslant 6$, on conjecture également la relation dite d'*hyperscaling*

$$d\rho = \delta + 1.$$

En grande dimension (ce qui suit est prouvé rigoureusement pour $d \geqslant 19$, mais conjecturé dès que $d > 6$), ces exposants ne dépendent plus de la dimension mais prennent leur valeur de **champ moyen**, qui est leur valeur pour la percolation sur un arbre régulier :

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad \eta = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{1}{2}.$$

En dimension 2, on conjecture les valeurs suivantes :

$$\beta = \frac{5}{36}, \quad \gamma = \frac{43}{18}, \quad \delta = \frac{91}{5}, \quad \eta = \frac{5}{24}, \quad \nu = \frac{4}{3}, \quad \rho = \frac{48}{5}$$

(on reviendra sur ce point plus bas).

3. Le cas particulier de la dimension 2

3.1. Calcul du point critique

L'un des résultats les plus marquants de la théorie de la percolation est la preuve par Kesten [11] du fait que, sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, le paramètre critique est égal à $1/2$. Les détails techniques dépasseraient largement le cadre de cette note, mais l'argument fondamental est celui de **dualité planaire**, que nous décrivons brièvement ici.

De manière générale, si $\mathcal{G}$ est un graphe planaire plongé dans le plan $\mathbb{R}^2$, on peut lui associer un *graphe dual* $\mathcal{G}^\star$ dont les sommets sont en bijection avec les faces de $\mathcal{G}$ et les arêtes en bijection avec celles de $\mathcal{G}$. Étant donné un sous-graphe aléatoire $\mathcal{G}_p$ de $\mathcal{G}$, on peut construire un sous-graphe $\mathcal{G}_p^\star$ de $\mathcal{G}^\star$ en déclarant une arête du dual ouverte si et seulement si l'arête de $\mathcal{G}$ correspondante est fermée. Ce que l'on obtient ainsi est exactement la percolation de Bernoulli sur le graphe $\mathcal{G}^\star$ pour le paramètre $p^\star = 1 - p$.

Il est facile de se convaincre du fait qu'une composante connexe de $\mathcal{G}_p$ est finie si et seulement si elle est entourée d'une composante connexe de $\mathcal{G}_p^\star$. On s'attend donc à ce que, si $p^\star$ est sous-critique, $\mathcal{G}_p$ contienne une composante connexe infinie, puisque toutes celles de $\mathcal{G}_p^\star$ sont « petites » ; inversement, la présence d'une composante connexe infinie dans le graphe dual semble empêcher p d'être surcritique. Voilà pour l'intuition, qui mène à la conjecture naturelle que

$$p_c(\mathcal{G}) + p_c(\mathcal{G}^\star) = 1,$$

que l'on sait prouver sous des hypothèses suffisantes de symétrie sur $\mathcal{G}$. Le réseau carré étant isomorphe à son dual, on en déduit que $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$.

Il existe une autre transformation dite **triangle-étoile** qui permet de relier deux graphes : si $\mathcal{G}$ contient un *triangle*, *i.e.* trois sommets formant un sous-graphe complet, on peut remplacer ces trois arêtes par une *étoile*, *i.e.* ajouter un sommet supplémentaire au centre du triangle, relié à chacun des trois sommets extérieurs. Un cas particulier de cette transformation est celui du réseau triangulaire $\mathcal{T}$: si on remplace chacun des triangles d'une certaine orientation par une étoile, on obtient le réseau hexagonal $\mathcal{H}$.

On peut comparer les probabilités de connexion à l'intérieur d'un de ces triangles pour la percolation de paramètres respectivement p sur le premier et q sur le second ; on constate qu'elles sont égales pour toutes les configurations locales si et seulement si $p + q = 1$ et $p^3 - 3p + 1 = 0$. Pour un tel choix, les deux graphes aléatoires correspondants ont alors les mêmes propriétés asymptotiques : p est surcritique en même temps que q. Comme $\mathcal{H}$ est le graphe dual de $\mathcal{T}$, leurs points critiques sont de somme 1, et on en déduit que $p_c(\mathcal{T})$ satisfait à l'équation $p_c^3 - 3p_c + 1 = 0$. Autrement dit, on peut le calculer explicitement, et on obtient

$$p_c(\mathcal{T}) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

3.2. Le cas critique en dimension 2

Une conséquence supplémentaire de l'argument de dualité est la suivante. Considérons la percolation par arêtes de paramètre $p = 1/2$ sur le rectangle R de taille $(n+1) \times n$ de $\mathbb{Z}^2$. Le graphe dual de ce rectangle est celui $R^\star$ de taille $n \times (n+1)$. Soit $LR(n+1, n)$ l'événement « il existe un chemin ouvert traversant R horizontalement ». L'événement complémentaire est exactement l'existence, dans le modèle dual, d'un chemin ouvert traversant $R^\star$ verticalement ; mais ce dernier événement a la même probabilité que le premier parce que R et $R^\star$ sont isomorphes : on obtient donc l'estimée fondamentale

$$P_{1/2}\left[LR(n+1, n)\right] = \frac{1}{2}$$

indépendamment de la valeur de n. En particulier, il ne peut pas y avoir décroissance exponentielle pour $p = 1/2$. On peut étendre cette estimée à des rectangles de forme quelconque :

Théorème 3.1 (Russo [15], Seymour–Welsh [16])**.** *Pour tous $a, b > 0$ il existe $\eta > 0$ et $N > 0$ tels que, pour tout $n \geqslant N$,*

$$P_{1/2}\left[LR(na, nb)\right] \in (\eta, 1-\eta).$$

On en déduit facilement que $\theta(1/2) = 0$, et donc que $p_c \geqslant 1/2$: en effet, tout anneau entre les rayons R et $2R$ contient, avec probabilité minorée, un circuit formé d'arêtes duales ouvertes, et ces événements sont indépendants pour des anneaux disjoints. On en déduit un peu moins facilement que $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$ – la preuve du théorème n'utilise pas le fait que $1/2$ soit critique, seulement qu'il soit auto-dual.

Une question naturelle est alors de savoir si la probabilité de traverser un rectangle de taille $na \times nb$ converge quand n tend vers l'infini. Plus généralement, étant donné un domaine lisse simplement connexe Ω du plan complexe, on peut considérer la percolation critique sur l'intersection de Ω avec le réseau $\delta\mathbb{Z}^2$; si a, b, c et d sont quatre points (dans cet ordre) du bord de Ω, soit $f_\delta(ab, cd, \Omega)$ la probabilité qu'il existe dans $\Omega \cap \delta\mathbb{Z}^2$ un chemin d'arêtes ouvertes connectant les arcs ab et cd de $\partial\Omega$.

Le théorème précédent entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $f_\delta(ab, cd, \Omega) \in (\eta, 1-\eta)$, uniformément en $\delta > 0$. Il est naturel de conjecturer l'existence d'une **limite d'échelle** de cette probabilité quand δ tend vers 0. Cette question est toujours ouverte, mais le résultat le plus retentissant de ces quelques dernières années est la preuve par Smirnov de l'existence d'une telle limite dans un cas proche, que nous énonçons maintenant.

3.3. Invariance conforme de la percolation critique

Considérons la percolation *par sites* sur le réseau *triangulaire* ; pour les mêmes raisons de dualité, on a également dans ce cas les bornes uniformes sur la probabilité de traverser des domaines du plan quand $p = 1/2$, qui est encore le point critique du modèle. On peut définir f_δ de la même façon ; alors,

Théorème 3.2 (Smirnov [17])**.** *Avec les notations précédentes,*

(1) *$f_\delta(ab, cd, \Omega)$ converge vers un certain $f(ab, cd, \Omega)$ quand $\delta \to 0$;*

(2) *si Φ envoie conformément Ω sur un autre domaine simplement connexe, alors*

$$f(ab, cd, \Omega) = f(\Phi(a)\Phi(b), \Phi(c)\Phi(d), \Phi(\Omega))\,;$$

(3) *si $T = abc$ est un triangle équilatéral de côté 1, alors $f(ab, cd, T)$ est égal à la longueur cd.*

Le second point porte le nom d'**invariance conforme** de la limite d'échelle ; par le théorème de Riemann, et le cas particulier du troisième point, il permet de calculer $f(ab, cd, \Omega)$ dans tous les cas. Dans le cas du rectangle, on obtient la **formule de Cardy**, initialement conjecturée sur la base d'arguments non rigoureux de théorie conforme des champs. La remarque que la formule s'écrit de manière particulièrement simple dans le cas du triangle est due à Carleson ; elle n'est sans doute pas étrangère au fait que les faces du réseau soient également dans ce cas des triangles équilatéraux, mais ce lien reste complètement obscur dans la preuve.

Il est remarquable que la preuve de ce théorème soit extrêmement simple (voir par exemple [2]) et n'utilise que des résultats de base d'analyse complexe (essentiellement le théorème de Morera) ; l'étape cruciale est une remarque combinatoire très astucieuse mais facile à prouver *a posteriori*. Cette simplicité apparente masque le fait que le modèle soit particulièrement simple à étudier sur le réseau triangulaire, et à ce jour on ne connaît pas d'autre réseau sur lequel la limite d'échelle de la percolation soit connue.

On peut déduire de ce théorème tous les énoncés précédents sur la percolation critique (toujours dans le cas du réseau triangulaire), en particulier les valeurs des exposants critiques en découlent [19]. On peut également en déduire des informations de nature géométrique sur la forme des composantes connexes au point critique, et la convergence de leurs bords vers des **processus de Schramm-Loewner** quand $\delta \to 0$, mais donner des énoncés précis sortirait du cadre élémentaire de cette note.

4. Quelques extensions naturelles du modèle

4.1. Le rôle de la moyennabilité

Revenons à un énoncé précédent : sur $\mathbb{Z}^d$, si $p > p_c$, il y a une unique composante connexe infinie. La preuve la plus éclairante de ce fait est celle de Burton et Keane [6], qui fonctionne de la manière suivante. Fixons $p > p_c$, et soit N le nombre de composantes connexes infinies de $\mathcal{G}_p$. L'invariance par translation du modèle entraîne que N prend une valeur presque sûre $n(p) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $1 < n(p) < \infty$, alors il existe $L > 0$ tel que la boule de rayon L rencontre au moins deux composantes infinies distinctes avec probabilité positive ; en ouvrant toutes les arêtes de la boule (qui sont en nombre fini) on obtient un événement qui est toujours de probabilité positive, mais sur lequel il y a strictement moins de composantes connexes – ce qui est absurde. On a donc $n(p) \in \{0, 1, \infty\}$.

Supposons à présent que $n(p) = \infty$. À nouveau, pour L assez grand, la boule de rayon L rencontre au moins trois composantes connexes infinies, et par une modification locale on arrive, toujours avec probabilité finie, à un événement sur lequel 0 est une *trifurcation*, un point d'une composante connexe infinie tel que, si on l'ôte de cette composante, on la sépare en trois composantes infinies disjointes.

L'invariance par translation implique que chaque point est une trifurcation avec probabilité positive. Dans une boule de rayon L, il y a donc en espérance de l'ordre de L^d trifurcations ; mais le nombre de composantes infinies rencontrant cette boule est au plus de l'ordre du cardinal de son bord, *i.e.* L^{d-1}, et il est facile de voir que ce nombre est au moins égal au nombre de trifurcations dans la boule. On arrive donc à une contradiction : $n(p)$ ne peut pas être infini, ce qu'on voulait.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe transitif (ou quasi-transitif, *i.e.* dont le groupe d'automorphismes a un nombre fini d'orbites) infini, de degré borné. Sa *constante de Cheeger* est définie comme

$$\iota(\mathcal{G}) := \inf \frac{|\partial V|}{V}$$

où l'infimum est pris sur toutes les parties finies non vides de $\mathcal{G}$. Le graphe est **moyennable** si $\iota(\mathcal{G}) = 0$, non moyennable sinon ; et l'argument de Burton et Keane prouve en fait que $n(p) \in \{0, 1\}$ dès que $\mathcal{G}$ est moyennable.

Le cas non-moyennable est plus riche. Häggström et Peres [9] prouvent que, si $n(p) = 1$ et $p' > p$, alors $n(p') = 1$ également. On peut donc définir un second point critique,

$$p_u := \inf\{p : n(p) = 1\}$$

et on a alors trois phases possibles :

– si $0 \leqslant p < p_c$, alors $\mathcal{G}_p$ n'a que des composantes finies ;
– si $p_c < p < p_u$, alors $\mathcal{G}_p$ a une infinité de composantes infinies ;
– si $p_u < p \leqslant 1$, alors $\mathcal{G}_p$ a une seule composante infinie.

Si $\mathcal{G}$ est le produit de $\mathbb{Z}$ et d'un arbre de degré suffisamment grand, Grimmett et Newman [7] prouvent que l'on a $0 < p_c < p_u < 1$, donc tous ces régimes peuvent se produire sur le même graphe selon la valeur de p.

La conjecture naturelle est que $p_c < p_u$ si et seulement si $\mathcal{G}$ n'est pas moyennable, mais la question reste ouverte dans le cas général [4]. Si G est un *groupe de type fini* non moyennable, un théorème de Pak et Smirnova [14] donne l'existence d'une famille de générateurs de G telle que, sur le graphe de Cayley correspondant, on ait effectivement $p_c < p_u$; Gaboriau montre que c'est aussi le cas si le graphe $\mathcal{G}$ est transitif, localement fini, unimodulaire et porte des fonctions harmoniques bornées non constantes dont le gradient est dans ℓ^2.

4.2. Modèles dépendants

On a utilisé plusieurs fois dans ce qui précède l'indépendance entre les états des différentes arêtes, mais dans la plupart des situations, ce qui est vraiment nécessaire est la **propriété d'énergie finie**, qui exprime qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute arête e de $\mathcal{G}$, et uniformément en l'état des autres arêtes, la probabilité conditionnelle que e soit ouverte est dans l'intervalle $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

Un cas particulièrement intéressant est celui de la **percolation FK** (ou *random-cluster model*). Si le graphe $\mathcal{G}$ est fini, elle est définie *via* sa densité de Radon-Nikodym par rapport à la percolation de Bernoulli P_p, que l'on choisit proportionnelle à q^K où $K(\omega)$ est le nombre de composantes connexes de la configuration ω et où $q \geqslant 1$ est un second paramètre du modèle. Dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, on peut construire la mesure $P_{p,q}$ en prenant la *limite thermodynamique* de cas de volume fini. Le même argument de dualité que pour la percolation fournit la prédiction

$$p_c(\mathbb{Z}^2, q) = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}},$$

prouvée récemment [3].

L'intérêt physique de ce modèle est son lien avec des systèmes classiques comme le **modèle d'Ising** ou celui de Potts : si, partant d'une configuration de loi $P_{p,2}$, on choisit pour chaque composante connexe un signe ± 1 avec probabilité $1/2$ pour chaque valeur, de manière indépendante, on arrive à un choix de signes sur les sites de $\mathbb{Z}^d$ qui est distribué selon le modèle d'Ising à la température inverse β satisfaisant à $p = 1 - e^{-\beta}$, et on retrouve par exemple le résultat d'Onsager sur $\mathbb{Z}^2$: $\beta_c = \ln(1+\sqrt{2})$.

Au point critique, et par des méthodes entièrement différentes de celles utilisées pour la percolation, Smirnov prouve également l'invariance conforme pour une certaine observable du modèle, dite *observable para-fermionique* [18] ; mais comme l'énoncé du résultat ne peut pas se faire sans introduire des notations supplémentaires, il dépasserait le cadre de cette note.

5. Références

[1] M. Aizenman & D. J. Barsky – « Sharpness of the phase transition in percolation models », *Communications in Mathematical Physics* **108** (1987), no. 3, p. 489–526.

[2] V. Beffara – « Cardy's formula on the triangular lattice, the easy way », in *Universality and Renormalization* (I. Binder & D. Kreimer, éds.), Fields Institute Communications, vol. 50, The Fields Institute, 2007, p. 39–45.

[3] V. Beffara & H. Duminil-Copin – « The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geqslant 1$ », preprint arXiv 1006.5073, 2010.

[4] I. Benjamini & O. Schramm – « Percolation beyond $\mathbb{Z}^d$, many questions and a few answers », *Electronic Communications in Probability* **1** (1996), p. no. 8, 71–82 (electronic).

[5] S. R. Broadbent & J. M. Hammersley – « Percolation processes, I and II », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), p. 629–645.

[6] R. M. Burton & M. Keane – « Density and uniqueness in percolation », *Communications in Mathematical Physics* **121** (1989), no. 3, p. 501–505.

[7] G. R. Grimmett & C. M. Newman – « Percolation in $\infty + 1$ dimensions », in *Disorder in physical systems*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, p. 167–190.

[8] G. R. Grimmett – *Percolation*, deuxième éd., Grundlehren Math. Wiss., vol. 321, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] O. Häggström & Y. Peres – « Monotonicity of uniqueness for percolation on Cayley graphs : all infinite clusters are born simultaneously », *Probability Theory and Related Fields* **113** (1999), no. 2, p. 273–285.

[10] J. M. Hammersley – « Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration », in *Le calcul des probabilités et ses applications. Paris, 15-20 juillet 1958*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXXVII, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959, p. 17–37.
[11] H. Kesten – « The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$ », *Communications in Mathematical Physics* **74** (1980), no. 1, p. 41–59.
[12] ———, « Scaling relations for 2D-percolation », *Communications in Mathematical Physics* **109** (1987), p. 109–156.
[13] M. V. Menshikov – « Coincidence of critical points in percolation problems », *Soviet Mathematics Doklady* **33** (1986), p. 856–859.
[14] I. Pak & T. Smirnova-Nagnibeda – « On non-uniqueness of percolation on nonamenable Cayley graphs », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 6, p. 495–500.
[15] L. Russo – « A note on percolation », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **43** (1978), no. 1, p. 39–48.
[16] P. D. Seymour & D. J. A. Welsh – « Percolation probabilities on the square lattice », *Ann. Discrete Math.* **3** (1978), p. 227–245, Advances in graph theory (Cambridge Combinatorial Conf., Trinity College, Cambridge, 1977).
[17] S. Smirnov – « Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I : Mathématiques* **333** (2001), no. 3, p. 239–244.
[18] ———, « Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model », *Annals of Mathematics* **172** (2010), no. 2, p. 1435–1467.
[19] S. Smirnov & W. Werner – « Critical exponents for two-dimensional percolation », *Mathematical Research Letters* **8** (2001), p. 729–744.

Yves Meyer et l'opérateur de Cauchy

Hervé Pajot[1]

Yves Meyer vient de recevoir le prix Gauss pour ses contributions fondamentales en mathématiques pures et appliquées. Le but de ce modeste texte (modeste comparé à l'œuvre d'Yves) est de raconter un de ses résultats les plus connus, à savoir la preuve (en collaboration avec R. Coifman et A. McIntosh) de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens (*Annals of Mathematics*, 1982). J'ai découvert Yves et l'opérateur de Cauchy en même temps, lors d'un stage de DEA (l'ancêtre du M2R) sous la direction de Guy David qui fut ensuite mon directeur de thèse (Yves est donc mon grand-père mathématique). Guy m'avait demandé de regarder un article de Coifman-Jones-Semmes dans lequel étaient proposées deux démonstrations « élémentaires » du théorème de Coifman-McIntosh-Meyer et de concrétiser ce qui était suggéré à la fin du papier, à savoir qu'en adaptant les arguments on pouvait aussi donner une preuve simple des fameux théorèmes $T(1)$ et $T(b)$ de David-Journé-Semmes (voir [3] pour cette preuve). J'avais demandé naïvement à Guy si je devais lire aussi le papier de Coifman-McIntosh-Meyer. Sa réponse a été un NON assez ferme pour que je décide de suivre le conseil. Par conséquent, le lecteur ne trouvera rien dans la suite sur la preuve initiale de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschtiziens pour cause d'incompétence de l'auteur de ces lignes. Par contre, ce résultat était jugé tellement important par la communauté des analystes harmoniciens que diverses preuves « plus simples » avec des idées vraiment novatrices (souvent inspirées par les travaux d'Yves et de ses collaborateurs ou élèves) ont vu le jour dans les années 1980/1990. Après avoir présenté brièvement les opérateurs d'intégrale singulière et discuté de façon plus détaillée l'exemple le plus simple (l'opérateur de Hilbert), nous présenterons trois preuves de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. Dans la première, on se ramène au cas de l'opérateur de Hilbert via le théorème géométrique du voyageur de commerce (qui donne une caractérisation des sous-ensembles de courbes rectifiables du plan complexe). La seconde utilise des bases d'ondelettes du type « base de Haar ». Après avoir estimé notre opérateur dans cette base bien choisie, on peut conclure en utilisant un résultat classique d'algèbre linéaire, à savoir le lemme de Schur. Enfin, la dernière utilise la courbure de Menger qui est un objet géométrique simple, mais fort utile. Elle permet de faire directement le lien entre la géométrie d'un graphe lipschitzien et la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy. Nous discuterons ensuite de la continuité de l'opérateur de Cauchy sur d'autres sous-ensembles du plan complexe et nous définirons alors la rectifiabilité uniforme au sens de David et Semmes qui permet d'aller au delà des graphes lipschitziens.

[1] Université Grenoble I.

Tout ce dont nous avons besoin dans la suite en analyse se trouve dans le livre de Rudin « Analyse réelle et complexe ».

Sauf mention du contraire, nos constantes se nomment C même si elles varient d'une ligne à l'autre. Concernant les articles cités, nous ne donnerons que le nom de la revue et l'année de publication. Le lecteur qui souhaite en apprendre plus trouvera à la fin une bibliographie (ne contenant que des livres) que l'on commentera succinctement.

1. Qu'est ce qu'un opérateur d'intégrale singulière ? L'exemple de l'opérateur de Hilbert

On se donne une mesure positive μ dans le plan complexe $\mathbb{C}$. On notera dans la suite E le support de μ que l'on supposera fermé dans $\mathbb{C}$. Les exemples que nous avons en tête sont $E = \mathbb{R}$ et $\mu = \mathcal{L}^1$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou plus généralement E est un graphe lipschitzien et μ est la mesure de longueur sur ce graphe. Nous préciserons ce dernier exemple dans le prochain paragraphe. Si $p \geqslant 1$, $L^p(\mu)$ (que nous noterons parfois aussi $L^p(E)$) est l'espace des fonctions mesurables sur E telles que

$$||f||_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Considérons maintenant un noyau $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est régulier hors de la diagonale de $\mathbb{C}$, mais dont nous contrôlons le défaut de régularité. Dans ces notes, nous dirons qu'une fonction $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{z = z'\} \to \mathbb{C}$ est un noyau standard s'il existe des constantes $\delta \in]0, 1]$ et $C > 0$ telles que pour tout $z \neq z'$, on a les propriétés suivantes :

(i) $K(z', z) = -K(z, z')$ (on dit que K est impair) ;
(ii) $|K(z, z')| \leqslant C/|z - z'|$.
On suppose en outre que si $|z_0 - z_1| < 1/2|z_0 - z_2|$, on a
(iii) $|K(z_0, z_2) - K(z_1, z_2)| \leqslant C|z_0 - z_1|^\delta/|z_0 - z_2|^{1+\delta}$.

Le comportement du noyau K est comparable à celui de $1/(z - z')$ qui en est un exemple. Il existe diverses notions de « noyau standard » dans la littérature, mais celles-ci sont très proches de celle que nous avons choisie. Nous ne considérerons dans la suite que de tels noyaux. Un exemple typique est de prendre une fonction $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est régulière sauf en 0 et de considérer $K(x, y) = \varphi(x - y)$. Nous associerons à la mesure μ et au noyau K un opérateur d'intégrale singulière que l'on définit formellement par

$$Tf(x) = \int_E K(x, y) f(y) d\mu(y). \tag{1}$$

Dans le cas où $K(x, y) = \varphi(x - y)$, Tf est juste la convolution de f par φ :

$$Tf(x) = f * \varphi(x) = \int_E \varphi(x - y) f(y) d\mu(y). \tag{2}$$

Les principaux problèmes qui se posent sont les suivants.

Problème d'existence. Comment donner un sens à $Tf(x)$ pour $x \in E$ si f est dans une bonne classe de fonctions sur E, par exemple $f \in L^p(\mu) = L^p(E)$? Par densité des fonctions lisses dans les espaces de Lebesgue, il est naturel de se limiter dans un premier temps au cas des fonctions de classe C^∞ à support compact dans E. Le problème vient du fait que K est singulier sur la diagonale. Une idée est de considérer les opérateurs tronqués qui sont définis pour tout $\varepsilon > 0$ par

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)d\mu(y). \tag{3}$$

Il est clair que $T_\varepsilon f(x)$ est bien défini pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$. On dit que l'opérateur T est défini au sens de la valeur principale si pour (presque) tout $x \in E$, la limite $T^*f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f(x)$ existe et est finie. En pratique, il n'est pas facile de vérifier une telle convergence. Une autre façon de donner un sens à T est de le faire au sens des distributions comme l'ont suggéré Coifman et Meyer (*Astérisque*, 1978). On peut définir ainsi T comme un opérateur continu de l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans son dual dont l'action est donnée par

$$< Tf, g >= 1/2 \int\int K(x,y)(f(y)g(x) - f(x)g(y))d\mu(x)d\mu(y).$$

Rappelons que K est impair et donc l'intégrale $< Tf, g >$ est formellement égale à

$$\int\int K(x,y)f(y)g(x)d\mu(x)d\mu(y).$$

Le point est que la singularité en $x = y$ est « tuée » par le fait que $|f(x)g(y) - f(y)g(x)| \leqslant C|x-y|$ (où la constante C dépend de f et g).

Problème de la continuité L^2. La continuité L^2 joue un rôle particulier. En effet, elle peut être obtenue par des techniques d'analyse de Fourier comme nous le verrons pour l'opérateur de Hilbert. D'autre part, sous des hypothèses générales sur μ et le noyau, elle entraîne la continuité L^p pour tout $1 < p < \infty$. Ceci est un des points-clés de la théorie des intégrales singulières de Calderón-Zygmund (voir [2] ou [13]). Mais, que signifie que T est continu sur $L^2(\mu)$? Supposons dans un premier temps que le problème d'existence (au sens de la valeur principale ou des distributions) soit réglé dans le cas des fonctions lisses (par exemple de classe C^∞ à support compact, voir le paragraphe suivant). Le but est alors de démontrer que l'on peut étendre T en un opérateur continu de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$. Afin d'éviter d'avoir à résoudre d'abord le problème d'existence, il est plus commode de considérer la définition suivante. Nous dirons que l'opérateur T est borné sur $L^2(\mu)$ si les opérateurs tronqués T_ε sont bornés uniformément en ε sur $L^2(\mu)$, c'est-à-dire s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, toute fonction $f \in L^2(\mu)$, on a $||T_\varepsilon f||_2 \leqslant C||f||_2$. En fait, ces diverses notions de continuité L^2 sont équivalentes. Notons que dans beaucoup de situations, la continuité L^2 entraîne l'existence en tant que valeur principale (voir [2]). Enfin, il est important de voir que la continuité L^2 d'un opérateur d'intégrale singulière associé à un noyau K implique en général que la mesure est 1-dimensionnelle, au sens où il existe une constante $C > 0$ telle que $\mu(B(z,R)) \leqslant CR$ pour tout

$z \in \mathbb{C}$, tout $R > 0$ (voir plus loin le théorème de Guy David sur la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les courbes rectifiables).

Pour illustrer ce qui précède, nous allons considérer le cas de l'opérateur de Hilbert. Dans ce cas $E = \mathbb{R}$, μ est la mesure de Lebesque $\mathcal{L}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $K(x,y) = 1/(x-y)$. Cet opérateur est donc la convolution sur $\mathbb{R}$ avec la fonction $1/x$. Pour alléger les notations, on note $dx = d\mathcal{L}^1(x)$. Tout d'abord, nous affirmons que si f est de classe C^∞ à support compact (par exemple dans $[-1,1]$), $Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} 1/\pi \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$ existe et est finie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. Le point-clé est de noter que $\int_{\varepsilon<|x-y|\leqslant 1} \frac{1}{x-y} dy = 0$. Cette égalité est triviale (elle vient de la parité de la fonction intégrée), mais elle est cruciale. Pour s'en convaincre, le lecteur pourra essayer de reprendre ce qui suit avec le noyau $K(x,y) = 1/|x-y|$ qui lui ne vérifie pas ce type d'égalité. Puisque f est à support dans $[-1,1]$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy &= \int_{\varepsilon<|x-y|\leqslant 1} \frac{f(y)-f(x)}{x-y} dy \\ &= \int_{|x-y|\leqslant 1} \frac{f(y)-f(x)}{x-y} dy - \int_{|x-y|\leqslant \varepsilon} \frac{f(y)-f(x)}{x-y} dy.\end{aligned}$$

Comme f est lisse, la première intégrale est finie et la seconde tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Ce qui permet de conclure à l'existence au sens de la valeur principale de l'opérateur d'Hilbert. Pour la continuité L^2, on commence par noter que si f est de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}$, on a $\widehat{Hf}(\xi) = -i\hat{f}(\xi)\frac{\xi}{|\xi|}$ où la transformée de Fourier de f est définie par $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi x\xi} f(x) dx$ (voir [5]). Par l'identité de Parseval, $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$ et $||Hf||_2 = ||\widehat{Hf}||_2$, donc $||Hf||_2 = ||f||_2$. D'où, par densité des fonctions lisses dans $L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur H a une unique extension en un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même. La continuité dans $L^p(\mu)$ (pour $p \neq 2$) de la transformée de Hilbert peut se démontrer par des méthodes d'analyse complexe (travaux de M. Riesz, voir [5] paragraphe 6.3 du chapitre 3).

2. Preuves de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens

2.1. Quelques notations et définitions

Un graphe lipschitzien Γ est un sous-ensemble du plan complexe de la forme, à une rotation près,

$$\Gamma = \{x + iA(x); x \in \mathbb{R}\}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne. Nous rappelons que ceci signifie qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$,

$$|A(x) - A(y)| \leqslant C|x-y|. \tag{4}$$

La plus petite constante C vérifiant (4) est la constante de Lipschitz de A et nous la noterons $\mathrm{Lip}(A)$. Signalons que l'on peut de façon analogue définir des applications lipschtziennes entre deux espaces métriques généraux. Les applications lipschitziennes jouissent des propriétés fondamentales suivantes.

Extension. Supposons que l'application A ne soit lipschtzienne que sur un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire l'inégalité (4) n'est vraie que pour x, $y \in K$). Alors, on peut étendre A en une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ tout entier qui a la même constante de Lipschitz que A, c'est-à-dire il existe une application lipschitzienne $\tilde{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $A(x) = \tilde{A}(x)$ si $x \in K$ et $\mathrm{Lip}(A) = \mathrm{Lip}(\tilde{A})$ (ici, $\mathrm{Lip}(A)$ est la plus petite constante telle que (4) soit vérifiée pour x, $y \in K$). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $\tilde{A}(x) = \inf\{A(x') + \mathrm{Lip}(A)|x - x'|; x' \in K\}$ convient. Ainsi, si notre graphe lipschitzien Γ n'était défini que sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on pourrait prolonger l'application lipschitzienne (et donc son graphe) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si $A : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne sur un sous-ensemble K de $\mathbb{R}^n$, alors, en appliquant la méthode précédente coordonnée par coordonnée, on peut la prolonger en une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ avec une constante de Lipschitz $\sqrt{n}\mathrm{Lip}(A)$. En fait, le théorème de Kirszbraun affirme que l'on peut prolonger A en une fonction lipschitzienne de même constante. On peut voir ce résultat comme une version non linéaire du théorème d'Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires. Nous en omettons la preuve qui est plus difficile que la précédente (voir le livre « Éléments d'analyse pour l'agrégation « de Zuily et Queffelec). Très récemment, ce type de résultat a été étendu aux applications lipschitziennes entre espaces métriques sous des hypothèses de courbure (par exemple variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative).

Différentiabilité. Toute fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument continue. Il s'en suit par le théorème de Radon-Nykodym que A est dérivable presque partout. On note $s_\Gamma(x) = x + iA(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, Γ a donc une tangente en $s_\Gamma(x)$. De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant |s'_\Gamma(x)| = \sqrt{1 + A'(x)^2} \leqslant \sqrt{1 + \mathrm{Lip}(A)^2}$. D'où, $|dx| \leqslant |ds_\Gamma(x)| \leqslant \sqrt{1 + \mathrm{Lip}(A)^2}|dx|$. Donc, Γ est un exemple de courbe corde-arc, ce qui signifie qu'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que tout couple de points $s_\Gamma(x)$ et $s_\Gamma(x')$ peut être joint par une sous-courbe de Γ de longueur $\leqslant C|s_\Gamma(x) - s_\Gamma(y)|$ (ici, $C = \sqrt{1 + \mathrm{Lip}(A)^2}$ convient). Notons d'ailleurs que la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy reste vraie dans ce cadre plus général. Le résultat sur la différentiabilité s'étend aux fonctions lipschitziennes $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $n, m > 1$ (Théorème de Rademacher, voir [9] pour une démonstration) et plus récemment il en a été donné des versions dans le cas d'applications lipschitziennes d'un espace métrique à géométrie bornée vers un espace de Banach qui vérifie la propriété de Radon-Nykodym.

L'opérateur de Cauchy sur le graphe lipschitzien Γ est formellement défini par

$$C_\Gamma f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi, z \in \Gamma.$$

On peut aussi mettre un $1/(2i\pi)$ devant l'intégrale pour faire encore plus le lien avec la formule de Cauchy. Si on pose $F(t) = f(t + iA(t))(1 + iA'(t))$, on a alors que

$$C_\Gamma f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy \text{ si } z = x + iA(x).$$

Or, d'après ce qui précède, la norme de F dans $L^2(\mathbb{R})$ est comparable à la norme de f dans $L^2(\Gamma)$. On pourra donc aussi considérer l'opérateur de Cauchy sous la forme

$$C_\Gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy, x \in \mathbb{R}.$$

Le problème de la continuité L^2 pour les deux opérateurs précédents (dans $L^2(\Gamma)$ pour l'un, dans $L^2(\mathbb{R})$ pour l'autre) est équivalent. Dans la suite, nous présenterons trois preuves de la continuité L^2 de cet opérateur. Nous préciserons à chaque fois laquelle des définitions différentes (mais équivalentes) de la bornitude L^2 nous utiliserons.

2.2. Un survol historique

L'origine de ce problème est quelque peu confuse. D'après Igari (cité par Murai dans [11]), Zygmund aurait conjecturé ce résultat en 1965 lors de cours donnés à Orsay en relation avec l'existence en tant que valeur principale de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. À la même époque, selon Meyer [10], Calderón pour résoudre un problème de Dirichlet aurait été confronté à cette difficulté.

Écrivons formellement l'opérateur de Cauchy sur le graphe $\Gamma = \{x + iA(x), x \in \mathbb{R}\}$ comme

$$C_\Gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x + iA(x) - (y + iA(y))} dy.$$

En faisant un développement en série du dénominateur, on obtient de façon formelle $C_\Gamma f(x) = \pi Hf(x) + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n T_n f(x)$ où H est l'opérateur d'Hilbert et T_n (appelé commutateur de Calderón d'ordre n) est l'opérateur d'intégrale singulière associé au noyau $K_n(x,y) = \dfrac{(A(x) - A(y))^n}{(x-y)^{n+1}}$. Comme on sait que H est continu sur $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que les T_n sont bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ avec des normes bien contrôlées par rapport à n. En 1965, Calderón (*Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*) prouve que T_1 est borné. Le cas $n = 2$ est résolu en 1975 par Coifman et Meyer. En 1978, Calderón (*Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*) démontre le cas général à condition que la constante de Lipschitz du graphe soit assez petite (sans qu'il lui soit possible de donner une borne explicite), puis en 1982, Coifman, McIntosh et Meyer (*Annals of Mathematics*) se passent de cette dernière condition. Diverses preuves vont ensuite être données, nous en présenterons trois très différentes. Notons aussi que David (Annales de l'École Normale Supérieure) a démontré en 1988 que si Γ est une courbe (localement) rectifiable, l'opérateur de Cauchy C_Γ est borné sur $L^2(\Gamma)$ si et seulement si la courbe est Ahlfors-régulière. Ce sera un des points de départ de la théorie de la rectifiabilité uniforme que David et Semmes développeront dans les années 1990 (voir le dernier paragraphe).

La continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens a eu diverses applications en analyse de Fourier, analyse complexe, théorie du potentiel, équations aux dérivées partielles,... voir par exemple les exposés aux congrès mondiaux des mathématiciens de Calderón (Helsinki, 1978), Fefferman (Vancouver, 1978), Meyer (Varsovie 1983), David (Berkeley, 1986), Tolsa (Madrid, 2006).

2.3. Problème géométrique du voyageur de commerce et formule de Calderón

La première preuve de nature géométrique est due à Peter Jones (*Lecture Notes in Mathematics 1384*, Springer, 1989). L'idée de départ est simple et repose sur deux observations :

1) dans le cas où le graphe lipschitzien est une droite, la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy n'est rien d'autre que celle de l'opérateur de Hilbert et peut s'obtenir par des méthodes simples d'analyse de Fourier (voir le premier paragraphe) ;

2) un graphe lipschitzien est « plat » ; nous avons vu par exemple qu'il admet une tangente en presque tout point.

Cela nous conduit à approcher le graphe lipschitzien par des droites, et donc l'opérateur de Cauchy par des opérateurs d'Hilbert. La continuité L^2 du premier découlera de la continuité L^2 des seconds. La philosophie de la preuve est simple mais elle est difficile à mettre en pratique. Tout d'abord, la platitude locale de Γ ne suffit pas. Il nous faut mesurer en tout point et à toutes les échelles la platitude de Γ. Pour cela, Jones a introduit les nombres β qui se sont révélés fort utiles pour étudier quantitativement les propriétés de rectifiabilité des sous-ensembles des espaces euclidiens (voir le paragraphe 3.6). Du coup, il nous faut aussi décomposer f suivant la localisation et les échelles (ou en temps/fréquence). Ceci sera fait via la formule reproduisante de Calderón. Commençons par le problème géométrique du voyageur de commerce et les nombres β. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble fermé du plan complexe (pas nécessairement le support d'une mesure μ). Pour tout $z \in \mathbb{C}$ (et non pas seulement dans E !), tout $t > 0$, on pose

$$\beta_E(z,t) = \inf_L \sup_{z' \in E \cap B(z,t)} \frac{d(z', L)}{t}$$

où l'inf est pris sur toutes les droites L de $\mathbb{C}$ (sans se restreindre aux droites passant par le point z). Le nombre $\beta_E(z,t)$ est compris entre 0 et 1. Il vaut 0 si à l'intérieur de $B(z,t)$, E est contenu dans une droite. D'un autre côté, $\beta_E(z,t)$ est égal à 1 si E « remplit presque » toute la boule $B(z,t)$ (penser par exemple à $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). On peut aussi voir que $t\beta_E(z,t)$ est comparable à la largeur de la bande la plus fine qui contient $E \cap B(z,t)$. Dans le cas où $E = \Gamma$ est un graphe lispchitzien, nous avons vu que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to 0} \beta_\Gamma(s_\Gamma(x), t) = 0$ (car en presque tout point, Γ admet une tangente). En fait, Jones démontre que dans ce cas, les nombres β sont intégrables en un certain sens : Il existe une constante $C \geqslant 0$ ne dépendant que de la constante de Lipschitz de A telle que pour toute boule B de $\mathbb{C}$, on a

$$\int_{\Gamma \cap B} \int_0^{\mathrm{diam} B} \beta_\Gamma(z,t)^2 dz dt/t \leqslant C \ \mathrm{diam} B. \tag{5}$$

Cette estimation permet de contrôler l'erreur commise en approchant l'opérateur de Cauchy par des opérateurs de Hilbert. Plus tard, Jones (*Inventiones Mathematicae*, 1990) s'est rendu compte que les nombres β peuvent caractériser les sous-ensembles de courbes rectifiables de $\mathbb{C}$. Pour cela, posons

$$\beta(E) = \int_{\mathbb{C}} \int_0^{+\infty} \beta_E(z,t)^2 dz\, dt/t^2.$$

Alors, E est contenu dans une courbe rectifiable γ si et seulement si $\beta(E) < \infty$. De plus, dans ce cas,

$$C^{-1}(\beta(E) + \mathrm{diam} E) \leqslant \inf_{\gamma \supset E} l(\gamma) \leqslant C(\beta(E) + \mathrm{diam} E)$$

où C est une constante absolue et $l(\gamma)$ est la longueur de la courbe γ. L'ingrédient (presque) principal de la preuve de ce résultat est le théorème de Pythagore !

Passons maintenant à la formule de Calderón. Commençons par quelques rappels d'analyse de Fourier. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (à valeurs complexes). On définit sa transformée de Fourier pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int f(x) e^{-i<x,\xi>} dx$ où $< x, \xi >$ désigne le produit scalaire usuel de x et ξ dans $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il est clair qu'alors $\tilde{f}$ est aussi dans L^1 donc sa transformée de Fourier est bien définie. De plus, elle vérifie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}}(\xi). \tag{6}$$

En effet, on a, par un changement de variable trivial,

$$\hat{\tilde{f}}(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} \overline{f(-x)} dx = \overline{\int e^{-i<x,\xi>} f(x) dx} = \overline{\hat{f}}(\xi).$$

Soit g une autre fonction dans L^1. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g(x) = \int f(x-y) g(y) dy$ est définie presque partout et $f * g \in L^1$. En effet, par le théorème de Fubini, $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1 ||g||_1 < \infty$. La transformée de Fourier de $f * g$ est donc bien définie et vérifie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \tag{7}$$

Pour voir cela, par le théorème de Fubini et l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, notons que

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int e^{-i<x,\xi>} f * g(x) dx \\ &= \int e^{-i<y,\xi>} \left(\int g(x-y) e^{-i<x-y,\xi>} dy \right) f(y) dy \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Soit φ une fonction (lisse) d'intégrale nulle, telle que pour tout $\xi \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} |\hat{\varphi}(t\xi)|^2 dt/t = 1. \tag{8}$$

L'identité de Calderón s'énonce ainsi. Si $f \in L^2$ et si on note $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$, on a presque partout

$$f = \int_0^{\infty} f * \tilde{\varphi}_t * \varphi_t dt/t.$$

Pour voir cela, posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} f*\tilde{\varphi}_t*\varphi_t(x)dt/t$. Alors, en utilisant le théorème de Fubini et les inégalités (6), (7), (8), on a $\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)$, d'où l'identité de Calderón. Celle-ci découverte par Calderón en 1964 a été retrouvée des années plus tard par Grossmann et Morlet, les précurseurs des ondelettes (vite rejoints par Yves !). On pose $\varphi_{a,b}(x) = a^{-n/2}\varphi((x-b)/a)$, puis pour $f \in L^2$, $F(a,b) = < f, \varphi_{a,b} >$ où $< .,. >$ est le produit scalaire usuel dans L^2. Dans ce cadre, la formule de Calderón s'écrit

$$f(x) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(a,b)\varphi_{a,b}(x) db da/a^{1+n}.$$

En discrétisant, c'est-à-dire en écrivant l'identité précédente en terme de série et non d'intégrale grâce à un pavage bien choisi de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, on obtient de façon formelle la décomposition en ondelettes de f :

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \alpha(j,k) 2^{jn/2} \varphi(2^j x - k).$$

Il y a un lien entre ondelettes et nombres β. Les premières permettent de faire une analyse multi-échelle d'une fonction, les seconds d'un ensemble. La preuve complète de Jones utilise les ingrédients précédents (et la stratégie expliquée au début de ce paragraphe) et peut se trouver dans [2] (Théorème 10 du chapitre IV).

2.4. Bases de Haar et lemme de Schur

Nous présentons maintenant une preuve due à Coifman, Jones et Semmes (*Journal of the American Mathematical Society*, 1989) qui est inspirée, d'après ce qu'écrivent les auteurs dans l'introduction de leur article, par des travaux présentés par Meyer et Tchamitchan lors d'une conférence d'analyse harmonique en 1987. L'idée de départ est simple et consiste à considérer la matrice (infinie) de l'opérateur de Cauchy dans une base orthonormale de $L^2(\Gamma)$ bien choisie. Apres avoir estimé les coefficients de cette matrice, on peut conclure par le lemme de Schur. Dans le cas de l'opérateur de Hilbert, la base choisie est la base de Haar qui est l'exemple le plus simple de base d'ondelettes. Dans le cas général, il faut tenir compte de la géométrie de l'ensemble et modifier le système classique de Haar. Un des intérêts de cette preuve est qu'elle peut s'adapter pour démontrer les critères célèbres de continuité L^2 que sont le théorème $T(1)$ de David-Journé (qui dit qu'il suffit de tester l'opérateur sur la fonction 1 pour conclure ! voir le paragraphe suivant pour une version de ce résultat) ou $T(b)$ de David-Journé-Semmes (qui dit qu'il suffit de tester l'opérateur sur une fonction b bien choisie, par exemple $b = 1 + iA'$ ou A' dans le cas de l'opérateur de Cauchy (suivant sa définition), pour conclure) dans les espaces euclidiens (voir [3]) ou plus généralement les espaces de type homogène (voir [2]). Donnons maintenant quelques détails et commençons par considérer le cas de l'opérateur de Hilbert. Pour simplifier la présentation, nous oublions le problème d'existence de Hf (quand $f \in L^2(\mathbb{R})$). Pour traiter les choses de façon rigoureuse, il faudrait considérer les opérateurs tronqués H_ε et obtenir des estimées uniformes en ε (voir aussi la discussion sur le cas de l'opérateur de Cauchy à la fin de ce paragraphe). Construisons maintenant la base de Haar et pour cela, notons Δ la famille des intervalles dyadiques de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des intervalles de la forme $I_j^k = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ quand j et k décrivent $\mathbb{Z}$, et Δ_j la famille des intervalles dyadiques de taille 2^{-j}, c'est-à-dire $\Delta_j = \{I_j^k ; k \in \mathbb{Z}\}$. Remarquons que nous avons les propriétés suivantes :

(i) Δ est la réunion des Δ_j et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les intervalles de Δ_j forment une partition de $\mathbb{R}$;
(ii) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tous les intervalles de Δ_j sont de de diamètre et de mesure de Lebesgue égales à 2^{-j} ;
(iii) si $I \in \Delta_j$, $I' \in \Delta_k$ avec $j \leqslant k$, alors soit $I \cap I' = \varnothing$ soit $I' \subset I$;
(iv) les intervalles de Δ ont la propriété de petite frontière, à savoir $\mathcal{L}^1(\{x \in I, dist(x, \mathbb{R} \setminus I) \leqslant \tau 2^{-j}\}) = 2\tau 2^{-j}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, tout $I \in \Delta_j$ et tout $\tau > 0$.

Ces propriétés sont assez élémentaires à vérifier dans ce cas simple. Dans les espaces euclidiens, la famille des pavés dyadiques a des propriétés similaires. Il est beaucoup moins évident de voir que dans des situations plus abstraites, comme dans le cas des ensembles Ahlfors-réguliers de $\mathbb{R}^n$ et des espaces de type homogène, il existe des analogues des intervalles dyadiques (voir [3] ou [2]).

Construisons maintenant la base de Haar associée à Δ. Si $I \in \Delta_j$ s'écrit $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, on note $I_g = [(2k)2^{-j-1}, (2k+1)2^{-j-1}[$ et $I_d = [(2k+1)2^{-j-1}, (2k+2)2^{-j-1}[$, de sorte que I_g, $I_d \in \Delta_{j+1}$ et I est l'union disjointe de I_g et I_d. La fonction h_I est la fonction à support dans I telle que $h_I(x) = |I|^{-1/2}$ si $x \in I_g$ et $h_I(x) = -|I|^{1/2}$ si $x \in I_d$ où $|I|$ est la longueur de l'intervalle dyadique I.

La famille $\{h_I\}_{I \in \Delta}$ forme une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ dans laquelle on peut écrire notre opérateur

$$Hf = \sum_{I,J \in \Delta} < Hh_I, h_J > h_J < f, h_I >$$

où $< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$ est le produit scalaire classique sur $L^2(\mathbb{R})$. Le but est d'obtenir une estimation du type

$$\sup_{I \in \Delta} \left\{ \sum_{J \in \Delta} | < Hh_I, h_J > | + \sum_{J \in \Delta} | < Hh_J, h_I > | \right\} < \infty. \tag{9}$$

On peut alors conclure en appliquant le lemme de Schur qui s'énonce ainsi. Soit I une famille d'indices (par exemple, $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$). On se donne des poids

w_i, $i \in I$, qui sont des réels strictement positifs et une matrice (peut-être infinie) $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$. Supposons qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\sum_{j \in I} |a_{i,j}| w_j \leqslant C w_i \text{ pour tout } i \in I \tag{10}$$

$$\sum_{i \in I} |a_{i,j}| w_i \leqslant C w_j \text{ pour tout } j \in I. \tag{11}$$

Alors, A est bornée sur $l^2(I)$. En effet, soit $x = (x_j)$. On souhaite estimer la norme de $y = (y_i)$ où pour tout $i \in I$, $y_i = \sum_j a_{i,j} x_j$. Commençons par écrire que $y_i = \sum_j \mathrm{sign}(a_{i,j})(|a_{i,j}|^{1/2} w_j^{1/2})(w_j^{-1/2}|a_{i,j}|^{1/2} x_j)$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que (10) :

$$\begin{aligned} |y_i|^2 &\leqslant \sum_j (|a_{i,j}| w_j) \sum_j \left(|a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2\right) \\ &\leqslant C w_i \sum_j |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant (11), il vient

$$\begin{aligned} ||y||^2 = \sum_i |y_i|^2 &\leqslant C \sum_j \sum_i w_i |a_{i,j}| w_j^{-1} |x_j|^2 \\ &\leqslant C^2 \sum_j w_j w_j^{-1} |x_j|^2 \\ &= C^2 \sum_j |x_j|^2 = C^2 ||x||^2. \end{aligned}$$

Comment obtenir une estimation du type (9) ? Le but est d'estimer

$$\int \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x-y} h_I(x) h_J(x) dx dy.$$

Les fonctions h_I et h_J sont respectivement de support les intervalles dyadiques I et J. Alors, soit $I \cap J = \varnothing$, soit l'un des deux intervalles est contenu dans l'autre. Il y a divers cas selon que

- les intervalles I et J sont ou ne sont pas de taille comparable ;
- les intervalles I et J sont loin l'un de l'autre (par rapport à leurs longueurs), ils sont proches ou contenus l'un dans l'autre.

Considérons le cas où $I = [0, 1]$, le cas général se déduisant par homothéties et translations. Supposons en outre que $|J| \geqslant 1/10$ (soit $|J| \geqslant 1/10|I|$) et $[0, 1] \cap 2J = \varnothing$. On commence par noter que si $x \notin 2J$, on a

$$|H(h_J)(x)| \leqslant C|x - x_J|^{-2} |J|^{3/2},$$

où x_J est le milieu de l'intervalle J. En effet, comme $\displaystyle\int h_J(x)dx = 0$, on a

$$\begin{aligned} |H(h_J)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-x_J} \right) h_J(y)dy \right| \\ &\leqslant |J|^{-1/2} \int_J \frac{|x_J - y|}{|x-y||x-x_J|} dy \\ &\leqslant C|x-x_J|^{-2}|J|^{3/2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors $| < H(h_I), h_J > | \leqslant C|J|^{3/2}|x_J|^{-2}$. Les autres cas se traitent de façon analogue. La propriété de petite frontière permet de contrôler la mesure des $(x, y) \in I \times J$ pour lesquels $1/(x-y)$ est grand quand les intervalles dyadiques I et J sont voisins par exemple.

Dans le cas de l'opérateur de Cauchy sur le graphe Γ d'une fonction lipschitzienne $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on tient compte de la géométrie de l'ensemble considéré et on modifie en conséquence la base de Haar. Notons $s_\Gamma(x) = x + iA(x)$. Il est plus agréable de travailler avec l'opérateur de Cauchy défini par

$$C_\Gamma f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{s'_\Gamma(y)}{s_\Gamma(y) - s_\Gamma(x) - i\varepsilon s'_\Gamma(x)} dy.$$

On a alors par la formule de Cauchy que

$$\int C_\Gamma f(x) s'_\Gamma(x) dx = 0$$

si f est une fonction étagée telle que $C_\Gamma f \in L^1(\mathbb{R})$.

On pose $m(I) = 1/|I| \displaystyle\int_I s'_\Gamma(x)dx$ (moyenne de s'_Γ sur I). Le produit scalaire associé est $< f, g >_\Gamma = \int f(x)g(x)s'_\Gamma(x)dx$. Attention ! Ce produit scalaire ne vérifie aucune des propriétés usuelles. Enfin, la base de Haar considérée est

$$g_I(x) = |I|^{-1/2} \left(\frac{m(I_g)m(I_d)}{m(I)} \right)^{1/2} \left(m(I_g)^{-1}\chi_{I_g}(x) - m(I_d)^{-1}\chi_{I_d}(x) \right).$$

Avec ces normalisations, on peut montrer que (g_I) se comporte comme une base orthonormale. En effet, il existe une constante $C > 0$ telle que, si $f \in L^2(\Gamma)$, $f = \sum_I < f, g_I >_\Gamma g_I$ et $C^{-1}||f||_2^2 \leqslant \sum_I | < f, g_I >_\Gamma |^2 \leqslant C||f||_2^2$. Cette estimation est difficile. Comme précédemment, nous avons en faisant des calculs similaires que

$$\sup_{I \in \Delta} \left\{ \sum_{J \in \Delta} | < C_\Gamma g_I, g_J >_\Gamma | + \sum_{J \in \Delta} | < C_\Gamma g_J, g_I >_\Gamma | \right\} < \infty.$$

Nous pouvons alors conclure par le lemme de Schur.

2.5. Une preuve géométrique via la courbure de Menger

Nous allons présenter la preuve la plus récente de la continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens due à Melnikov et Verdera (*International Mathematical Research Notices*, 1995). Elle repose sur la courbure de Menger que nous allons maintenant définir. Étant donnés trois points distincts z_1, z_2 et z_3 du plan complexe, on définit leur courbure de Menger $c(z_1, z_2, z_3)$ comme l'inverse du rayon du cercle circonscrit aux trois points. Ainsi, si les points sont alignés, ce rayon est infini et donc $c(z_1, z_2, z_3) = 0$. Par des arguments de géométrie élémentaire, on a les formules suivantes

$$\begin{aligned} c(z_1,z_2,z_3)^2 &= \left(\frac{4S(z_1,z_2,z_3)}{|z_1-z_2||z_2-z_3||z_3-z_1|}\right)^2 \\ &= \sum_\sigma \frac{1}{(z_{\sigma(1)}-z_{\sigma(2)})(\overline{z_{\sigma(1)}-z_{\sigma(1)}})} \end{aligned} \tag{12}$$

où $S(z_1, z_2, z_3)$ est l'aire du triangle de sommets z_1, z_2, z_3, et σ décrit l'ensemble des permutations sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On en déduit les formules suivantes (que l'on peut aussi démontrer directement) :

$$c(z_1,z_2,z_3) = 2\frac{d(z_1, D_{z_2z_3})}{|z_1-z_2||z_1-z_3|} = 2\frac{\sin\alpha}{L}$$

où $D_{z_2z_3}$ est la droite de $\mathbb{C}$ passant par z_2 et z_3, L est la longueur d'un côté du triangle de sommets z_1, z_2, z_3 et α est l'angle opposé à ce côté.

Si μ est une mesure de Borel positive dans $\mathbb{C}$, on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \int\int\int c(z_1,z_2,z_3)^2 d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3).$$

Nous allons maintenant faire le lien entre cette courbure de mesure et l'opérateur de Cauchy via la formule (12). Pour cela, considérons formellement l'opérateur de Cauchy associé à μ et défini par $Cf(z) = \displaystyle\int \frac{f(\xi)}{z-\xi} d\mu(\xi)$. On a alors, si B est une boule de $\mathbb{C}$ et si on note χ_B sa fonction indicatrice,

$$\int_B |C\chi_B(z_1)|^2 d\mu(z_1) = \int_B (C\chi_B(z_1))(\overline{C\chi_B(z_1)}) d\mu(z_1) \tag{13}$$

$$= \int_B\int_B\int_B \frac{1}{(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_3})} d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3) \tag{14}$$

$$= 1/6 \int_B\int_B\int_B c(z_1,z_2,z_3)^2 d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3). \tag{15}$$

Si nous voulons rendre plus rigoureux le calcul précédent, il faudrait considérer les opérateurs de Cauchy tronqués $C_\varepsilon f(z) = \displaystyle\int_{|z-\xi|>\varepsilon} \frac{f(\xi)}{z-\xi} d\mu(\xi)$. Si nous supposons que la mesure μ est Ahlfors-régulière de dimension 1 (voir le paragraphe suivant pour la définition), on peut montrer que $\displaystyle\int_B |C_\varepsilon \chi_B(z)|^2 d\mu(z)$ est comparable à

$$\int_B\int_B\int_B c(z_1,z_2,z_3)^2 d\mu(z_1)d\mu(z_2)d\mu(z_3)$$

modulo un O(diam$B$) uniforme en ε. Or, toujours sous l'hypothèse que μ est Ahlfors-régulière de dimension 1, le théorème $T(1)$ nous dit que l'opérateur de Cauchy associé à μ est borné sur $L^2(\mu)$ (au sens où tous les opérateurs tronqués sont uniformément bornés sur $L^2(\mu)$) si et seulement s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, toute boule B de $\mathbb{C}$, on a

$$\int_B |C_\varepsilon \chi_B(z)|^2 d\mu(z) \leqslant C\mathrm{diam}B.$$

L'opérateur de Cauchy est donc borné si et et seulement s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour toute boule B de $\mathbb{C}$,

$$\int_B \int_B \int_B c(z_1, z_2, z_3)^2 d\mu(z_1) d\mu(z_2) d\mu(z_3) \leqslant C\mathrm{diam}B.$$

Cette dernière condition s'appelle la condition de courbure locale et il nous reste à la vérifier dans le cas où μ est la mesure de longueur sur un graphe lipschitzien.

Nous allons en fait montrer que si Γ est le graphe d'une fonction K-lipschitzienne $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si on note μ la mesure de longueur sur Γ, $c^2(\mu) \leqslant C(1+K)^{3/2}K^2\mathrm{diam}I$ où C est une constante absolue. Ceci est équivalent à la condition de courbure locale pour un graphe lipschitzien. Rappelons que, si x, y et z sont des points de $\mathbb{C}$,

$$c(x, y, z) = \frac{2d(x, L_{y,z})}{|x-y||x-z|}$$

où $L_{y,z}$ est la droite de $\mathbb{C}$ qui passe par y et z.
Si r, s et t sont dans I, on a, pour $x = (r, f(r))$, $y = (s, f(s))$, et $z = (t, f(t))$,

$$\begin{aligned} c^2(x,y,z) &\leqslant \left(\frac{(f(t)-f(r))(s-r)-(f(s)-f(r))(t-r))}{|x-y||x-z||y-z|}\right)^2 \\ &\leqslant \left(\frac{\frac{f(t)-f(r)}{t-r} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{t-s}\right)^2 \end{aligned}$$

Écrivons $I = [a, b]$ et posons $g(t) = f(t) - \left(f(a) + (t-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ si $t \in I$ et $g(t) = 0$ sinon. Alors, g est $2K$-lipschitzienne avec une dérivée dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, si r, s et t sont dans I,

$$c^2(x,y,z) \leqslant \left(\frac{\frac{g(t)-g(r)}{t-r} - \frac{g(s)-g(r)}{s-r}}{t-s}\right)^2.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} c^2(\Gamma) &\leqslant \int_I\int_I\int_I \left(\frac{\frac{f(t)-f(r)}{t-r} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{t-s}\right)^2 (1+|f'(r)|)^{\frac{1}{2}}(1+|f'(s)|)^{\frac{1}{2}}(1+|f'(t)|)^{\frac{1}{2}} drdsdt \\ &\leqslant (1+K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(t)-f(r)}{t-r} - \frac{f(s)-f(r)}{s_r}\right)^2 dr\frac{dsdt}{(s-t)^2} \\ &\leqslant (1+K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(r+h)-f(r)}{h} - \frac{f(r+k)-f(r)}{k}\right)^2 dr\frac{dhdk}{(h-k)^2}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Plancherel, il vient

$$c^2(\Gamma) \leqslant (1+K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-i\xi h}-1}{h} - \frac{e^{-i\xi k}-1}{k} \right|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \frac{dhdk}{(h-k)^2}.$$

En appliquant les changements de variables $h \to \xi h$ et $k \to \xi k$, et de nouveau la formule de Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} c^2(\Gamma) &\leqslant (1+K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-ih}-1}{h} - \frac{e^{-ik}-1}{k} \right|^2 \frac{dhdk}{(h-k)^2} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant C(1+K)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g'(t)|^2 dt \\ &\leqslant C(1+K)^{\frac{3}{2}} K^2 \mathrm{diam} I. \end{aligned}$$

Ce qui est l'inégalité cherchée.

2.6. Au delà des graphes lipschitziens : la rectifiabilité uniforme

Une question naturelle est de se demander pour quel type d'ensemble E (qui est est le support d'une mesure μ) l'opérateur de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(\mu)$. De façon plus précise peut-on caractériser les sous-ensembles (fermés) E (qui supporte une mesure μ) du plan complexe tels qu'il existe une constante $C > 0$ qui satisfait à

$$\int_E |C_\varepsilon f|^2 d\mu \leqslant C \int_E |f|^2 d\mu$$

pour tout $\varepsilon > 0$, tout $f \in L^2(\mu)$? Ici, $C_\varepsilon f(x) = \displaystyle\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} d\mu(y)$ est l'opérateur de Cauchy tronqué associé à μ. Nous avons déjà vu au paragraphe 3.2 que si $E = \Gamma$ est une courbe rectifiable (munie de sa mesure de longueur μ), l'opérateur de Cauchy sur E définit un opérateur borné sur $L^2(\mu)$ si et seulement si la courbe Γ est Ahlfors-régulière : il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\mu(B(x,R)) \leqslant CR$ pour tout $x \in \Gamma$, tout $R > 0$. Notons que, par connexité, l'estimation inverse $\mu(B(x,R) \geqslant C^{-1}R$ est automatique (si $R \leqslant \mathrm{diam}\Gamma$). Cette condition de croissance des boules étant (presque) nécessaire pour la bornitude de l'opérateur de Cauchy, nous supposerons dans la suite que notre ensemble E est Ahlfors-régulier de dimension 1, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $C^{-1}R \leqslant \mu(B(x,R)) \leqslant CR$ pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \mathrm{diam} E[$. Une courbe Ahlfors-régulière est donc une courbe (localement) rectifiable qui est un ensemble Ahlfors-régulier lorsqu'on la munit de sa mesure de longueur. Notons aussi qu'un graphe lipschitzien est une courbe Ahlfors-régulière.

Remarque. Une autre motivation pour considérer ce type de condition est qu'un ensemble Ahlfors-régulier est un espace de type homogène au sens de Coifman et Weiss (voir [2] chapitre VI). L'ensemble de ces espaces était le paradis des analystes harmoniciens, c'est-à-dire les espaces dans lesquels l'analyse harmonique euclidienne s'adaptait sans problème, jusqu'aux travaux très récents de David, Tolsa, Nazarov-Treil-Volberg. Ces auteurs ont montré que le contrôle de la mesure μ n'était pas nécessaire pour obtenir des théorèmes de type $T(1)$ ou $T(b)$ par exemple.

Notons que si E est Ahlfors-régulier de dimension 1, il est de dimension de Hausdorff 1 et que μ est équivalente à la restriction de la 1-mesure de Hausdorff H^1 sur E (ces notions sont définies dans l'appendice). Ainsi, E est Ahlfors-régulier (nous omettons de préciser dorénavant la dimension) s'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}R \leqslant H^1(E \cap B(x,R)) \leqslant CR$ pour tout $x \in E$ et tout $R \in]0, \mathrm{diam} E[$.

Nous avons vu au paragraphe 3.5 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur de Cauchy soit borné sur $L^2(\mu)$ est la condition de courbure locale : il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\int_B \int_B \int_B c(x,y,z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z) \leqslant C \mathrm{diam} B.$$

Mattila, Melnikov et Verdera (*Annals of Mathematics*, 1996) ont démontré que cette condition était aussi équivalente à la rectifiabilité uniforme au sens de David et Semmes que nous allons maintenant décrire. Commençons par rappeler la définition classique de la rectifiabilité. Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ (avec $H^1(E) < \infty$) est 1-rectifiable s'il existe une famille dénombrable de fonctions lipschitziennes $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $H^1(E \setminus \bigcup_j f_j(\mathbb{R})) = 0$. Il est équivalent de demander que l'on puisse recouvrir E (à un ensemble de H^1 mesure nulle près) par une famille dénombrable de graphes lipschitziens. La notion de rectifiabilité uniforme est une version quantitative de la notion classique de rectifiabilité. Elle a été introduite pour étendre le théorème de Coifman-McIntosh-Meyer à d'autres ensembles du plan complexe. Un ensemble Ahlfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ est dit uniformément rectifiable s'il existe une courbe Ahlfors-régulière $\Gamma \subset \mathbb{C}$ telle que $E \subset \Gamma$. Par le théorème de Guy David, l'opérateur de Cauchy est borné sur un tel ensemble. Par les travaux de David-Semmes (voir [4]) puis de Mattila-Melnikov-Verdera, les conditions suivantes sont équivalentes pour un ensemble Alhfors-régulier $E \subset \mathbb{C}$ (muni d'une mesure μ, par exemple la restriction de H^1 sur E) :

(i) E est uniformément rectifiable ;
(ii) E vérifie BPLG (Big Pieces of Lipschitz Graphs) : Il existe des constantes $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ telles que pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \mathrm{diam} E[$, il existe un graphe lipschitzien Γ de constante de Lipschitz $\leqslant M$ vérifiant $\mu(B(x,R)) \geqslant \varepsilon R$;
(iii) il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \mathrm{diam} E[$, $\int_0^R \int_{E \cap B(x,R)} \beta_E(y,t)^2 d\mu(y) dt/t \leqslant CR$;
(iv) E vérifie la condition de courbure locale ;
(v) l'opérateur de Cauchy est borné sur $L^2(\mu)$.

Faisons quelques commentaires. Un ensemble uniformément rectifiable est rectifiable au sens classique. D'ailleurs, la condition BPLG est une version quantitative de recouvrir E par des graphes lipschitziens. Il n'est pas difficile de voir que la condition BPLG implique la bornitude de l'opérateur de Cauchy grâce au théorème de Coifman-McIntosh-Meyer (et ici, le contrôle uniforme de la norme des graphes et de la masse de $E \cap B(x,R)$ contenue dans un graphe lipschitizen est primordial). Nous avons déjà rencontré la condition (iii) (qui dit que la mesure $\beta_E(y,t) dydt/t$

est une mesure de Carleson, voir [12] chapitre 1) dans le paragraphe 3.3 dans le cadre des graphes lipschitziens qui sont donc uniformément rectifiables. Elle permet de contrôler la proportion dans toute boule $B(x,R)$ de couples (y,t) pour lesquels $\beta_E(y,t)$ est grand. Dans le cas rectifiable classique, une condition nécessaire et suffisante (démontrée par l'auteur de ces lignes dans *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1997) est

$$\int_0^{\operatorname{diam} E} \beta_E(x,t)^2 dt/t < \infty$$

pour presque tout $x \in E$. Cette condition ne donne qu'un contrôle local des β. Nous avons déjà rencontré la condition (iv) au paragraphe 3.5 et vu qu'elle était équivalente à (v).

L'histoire est-elle terminée ? Plaçons-nous maintenant dans $\mathbb{R}^n$ et considérons un ensemble Ahlfors-régulier E de dimension d (d entier, $0 < d \leqslant n$), c'est-à-dire que E supporte une mesure μ telle qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \operatorname{diam} E[$,

$$C^{-1}R^d \leqslant \mu(B(x,R)) \leqslant CR^d.$$

Les analogues de l'opérateur de Cauchy sont les transformées de Riesz R_j associées aux noyaux $K_j = (x_j - y_j)/|x-y|^{d+1}$. Ces opérateurs sont bornés L^2 sur les d-graphes lipschitiziens qui sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\Gamma = \{(x, A(x)); x \in \mathbb{R}^d\}$ où $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ est lipschitzienne. Il existe une théorie de la rectifiabilité uniforme dans ce cadre. Mais, nous ne savons pas si la rectifiabilité uniforme caractérise la bornitude des transformées de Riesz. Le point crucial est que nous n'avons pas une courbure de Menger adaptée (c'est-à-dire vérifiant l'égalité « magique » (12)).
Très récemment, une bonne notion de graphe lipschitzien a été proposée dans le groupe d'Heisenberg. Des tentatives d'étude d'intégrales singulières dans ce cadre ont été faites par Mattila et ses collaborateurs. Mais, ceci est une autre histoire qui ne fait que débuter...

3. Appendice : mesures et dimension de Hausdorff

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $d \geqslant 0$ et tout $\delta > 0$, on pose

$$H^d_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^d ; E \subset \cup_i U_i, \operatorname{diam} U_i \leqslant \delta \right\},$$

puis $H^d(E) = \lim_{\delta \to 0} H^d_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} H^d_\delta(E)$. Pour tout d, H^d est une mesure extérieure qui est borélienne et régulière, mais qui n'est pas finie sur les compacts (sauf si $d \geqslant n$). Si $d = 0$, on reconnaît la mesure de comptage. Si Γ est une courbe rectifiable (c'est-à-dire de longueur finie), $H^1(\Gamma)$ est la longueur $l(\Gamma)$ de Γ. Pour voir cela de façon intuitive, supposons que la courbe Γ soit donnée par un paramétrage $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et considérons une subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ de $[a,b]$.

On peut alors associer à cette subdivision un recouvrement de Γ par les boules B_i de diamètre $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{diam} B_i,$$

d'où la conclusion en passant au supremum (obtenue de façon peu rigoureuse !) car

$$l(\Gamma) = \sup \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a, b]$. Si $d = n$, la mesure H^n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Si $d > n$, H^d est la mesure triviale (égale à zéro sur tout ensemble). C'est un petit exercice de manipulation de la définition de voir que si $0 \leqslant d < d' < \infty$, on a $H^d(E) < \infty \Longrightarrow H^{d'}(E) = 0$ et $H^{d'}(E) > 0 \Longrightarrow H^d(E) = \infty$. On définit alors la dimension de Hausdorff de E par

$$\dim_H(E) = \sup\{d > 0, H^d(E) = \infty\} = \inf\{d' > 0; H^{d'}(E) = 0\}.$$

Ainsi, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, la dimension de Hausdorff d'un singleton est 0, celle d'une courbe rectifiable est 1 et celle de $\mathbb{R}^n$ (ou de toute autre ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive) est n. Il n'est pas aisé en général d'estimer cette dimension. Décrivons un cas favorable. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit auto-similaire si $E = \cup_{i=1}^N S_i(E)$ où les $S_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des similitudes de rapport r_i (ce qui signifie que $|S_i(x) - S_i(y)| = r_i|x - y| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$). Sous une hypothèse technique qui dit que les divers $S_i(E)$ doivent être assez séparés, la dimension de Hausdorff de E est l'unique solution s de l'équation $\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$. Le lecteur peut alors appliquer ce qui précède pour démontrer que la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\log 2/\log 3$. On peut aussi voir de façon heuristique que cette dimension est la bonne. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, considérons la partition naturelle de l'ensemble de Cantor par les intervalles I_j^k, $k = 0, ..., 2^j - 1$, de longueur 3^{-j}. Considérons la somme $S_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} (\mathrm{diam} I_j^k)^d = (2/3^d)^j$. Cette suite géométrique converge si et seulement si $d \geqslant \log 2/\log 3$, d'où la conviction que la dimension de l'ensemble de Cantor doit être cette valeur bizarre, non entière...

Un autre résultat utile pour estimer la dimension de Hausdorff est le lemme de Frostmann. Si E est un borélien de $\mathbb{R}^n$, alors $H^d(E) > 0$ si et seulement s'il existe une mesure de Radon μ (non triviale) à support compact dans E telle que $\mu(B(x, R)) \leqslant R^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $R > 0$. Le lecteur pourra essayer de démontrer seul l'implication $\Longleftarrow$. La réciproque est un joli exercice de théorie de la mesure utilisant la convergence faible de mesure (voir [9]).

4. Petite bibliographie commentée

Le lecteur pourra trouver une introduction (assez complète) aux opérateurs d'intégrales singulières dans [2] ou [5] avant de consulter le pavé [13]. Sur la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens, on pourra aussi consulter [8] ou [11]. Concernant le lien entre ondelettes et intégrales singulières, on pourra tout d'abord se plonger dans [3] qui donne aussi une introduction à la théorie de la rectifiabilité uniforme alors balbutiante, avant de se plonger dans [10]. Le lecteur qui veut apprendre de la théorie géométrique de la mesure (mesures et dimension de Hausdorff, rectifiabilité) commencera par lire [9] ou [6] avant d'aborder la « bible » du domaine [7] dans lequel le lecteur patient trouvera les réponses à (presque) toutes ses questions. Une très bonne introduction à la théorie de la rectifiabilité uniforme est la première partie du livre [4]. Les liens entre opérateur de Cauchy, nombres β et courbure de Menger sont décrits dans [12]. Enfin, signalons qu'il existe des méthodes probabilistes pour étudier les intégrales singulières. Elles ont été développées par un autre Meyer (Paul-André). En particulier, il est possible d'utiliser le calcul stochastique d'Itô pour démontrer la continuité L^2 de l'opérateur de Hilbert ou des transformées de Riesz (voir par exemple [1]). Cependant, il n'existe pas de démonstration probabiliste de la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens.

5. Références

[1] R. Bass, *Probabilistic techniques in Analysis*, Springer-Verlag (1995)
[2] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, Regional Conference Series in Mathematics 77, American Mathematical Society (1990).
[3] G. David, *Wavelets and singular integral operators on curves and surfaces*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1465 (1991), Springer-Verlag.
[4] G. David, S. Semmes, *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, Mathematical Surveys and Monographs 38, American Mathematical Society (1993).
[5] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society (2001).
[6] K. J. Falconer, *Geometry of fractal sets*, Cambridge University Press (1985).
[7] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag (1969).
[8] J. L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Mathematics Volume 994 (1983), Springer-Verlag.
[9] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Volume 44, Cambridge University Press (1995).
[10] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Tome 1 et 2 (1990), Hermann.
[11] T. Murai, *A real variable method for the Cauchy transform, and analytic capacity*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1307 (1988), Springer-Verlag.
[12] H. Pajot, *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, Lecture Notes in Mathematics Volume 1799 (2002), Springer-Verlag.
[13] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton University Press (1995).

Yves Meyer et la théorie des nombres

Jean-Paul Allouche[1]

Les théoriciens des nombres « officiels » ne reconnaîtraient peut-être pas Yves Meyer comme étant vraiment un des leurs. Et pourtant, la théorie des nombres est l'un des domaines auxquels il a apporté des contributions majeures d'après la notice de l'ICM [4]. Et pourtant encore, en se limitant aux titres de certains de ses articles, on trouve les mots : *nombres algébriques, nombres transcendants* [9], *adèles et séries trigonométriques spéciales* [11], *nombres premiers et vibrations* [12], *séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques* [14]...

Nous allons essayer de montrer les liens forts entre plusieurs travaux d'Yves et la théorie des nombres, en choisissant quatre articles (pas forcément les plus connus) où il présente soit des résultats en théorie des nombres, soit des résultats pour la démonstration desquels il utilise (ou démontre) des lemmes clairement arithmétiques.

1. Nombres transcendants et équirépartition modulo 1

Le premier théorème de [9] s'énonce ainsi.

Théorème 1. (cf. [9, Théorème 1]) *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $|\lambda_n - n| \leqslant \varepsilon$ et que $(x\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si le nombre réel x est transcendant.*

Le sujet de cet article inspira beaucoup les théoriciens des nombres dans les années 1968-1970 (voir en particulier les travaux de M. Mendès France [7, 8], F. Dress [2, 3] et G. Rauzy [20]).

2. Vibrations des sphères

En 1973 si je me souviens bien, J. Giraud alors directeur des études de mathématiques à l'ÉNS de Saint-Cloud, recevant les élèves de première année pour les conseiller sur le choix d'un DEA (on dirait maintenant master de recherche), répondit sans hésitation à ma vague indication sur mon goût pour la théorie des nombres : allez voir Yves Meyer, il fait de jolies choses de théorie des nombres en faisant vibrer des sphères.

Si l'on se plonge dans les travaux correspondants d'Yves, par exemple en relisant son exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz [13], on voit que la question qui l'intéresse est l'étude des solutions de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

où u est une fonction de $S_{n-1} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (S_{n-1} est la sphère $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$).

Voici deux des théorèmes donnés par Y. Meyer dans cet article, et dont je ne présenterai volontairement que des énoncés « en français courant », donnés en commentaire dans [13], dans le style caractéristique d'explication bienveillante

[1] CNRS, Institut de Math., équipe C. et O., Université Pierre et Marie Curie.

qu'affectionne Yves. (Que le lecteur bourbachisant se rassure, des énoncés en bonne et due forme sont donnés dans l'article ; ils veulent d'ailleurs dire exactement la même chose.)

Théorème 2. (cf. [13, Commentaire sur le théorème 1]) *Si $u(\sigma, t_0)$ est très grand, cette forte vibration se répercutera au point antipodique $-\sigma$ au bout d'un temps ne dépassant pas 2π.*

Puis l'auteur se demande si durant ce laps de temps il va nécessairement y avoir de fortes vibrations aux points « intermédiaires ». La réponse est non.

Théorème 3. (cf. [13, Commentaire sur le théorème 1]) *Une vibration qui était restée négligeable « pendant des siècles » peut dans un voisinage arbitrairement petit du « pôle nord » et du « pôle sud » devenir très grande, tout en restant toujours négligeable sur le reste de la sphère.*

La lecture des démonstrations montre qu'Y. Meyer utilise (ou démontre) des lemmes de théorie des nombres dont voici quatre exemples cruciaux pour démontrer le théorème 2 et un exemple crucial pour démontrer le théorème 3.

Lemme 1. ([13, Lemmes 1, 3, 5, 6 et inégalité (19)])

– *(i) Soient $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ $n+1$ nombres premiers distincts. Alors $\sqrt{p}$ n'appartient pas au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$.*

– *(ii) Soit $m \geqslant 1$ un entier, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ m nombres réels $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, et $s_1, s_2, \dots, s_m$ m fonctions continues et 2π-périodiques. Alors*

$$\limsup_{t\to\infty} (s_1(\omega_1 t) + s_2(\omega_2 t) \cdots + s_m(\omega_m t)) = \sup_{\mathbb{R}} s_1(t) + \sup_{\mathbb{R}} s_2(t) + \cdots + \sup_{\mathbb{R}} s_m(t).$$

– *(iii) Soit $q \geqslant 2$ un entier sans facteur carré, $a \geqslant 1$ un entier et $\theta_q > 1$ l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Il existe un ensemble fini A de solutions $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ tel que Card $A \leqslant d^2$ et tel que toute solution $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ s'écrive $z = \alpha\theta_q^j$ où $j \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in A$.*

– *(iv) L'unité fondamentale $\theta_q > 1$ d'un corps quadratique réel vérifie l'inégalité $\theta_q \geqslant (1+\sqrt{5})/2$.*

– *(v) Il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ de ± 1 telle que pour tout réel t et tout entier $n \geqslant 1$, on ait*

$$\left| \sum_{1\leqslant k\leqslant N} \varepsilon_k e^{ikt} \right| \leqslant 16\sqrt{N}.$$

3. Nombres de Pisot, analyse harmonique et quasicristaux

Au début des années 1970, Yves Meyer s'intéressa à des liens entre nombres de Pisot et de Salem et analyse harmonique. Il écrivit en particulier les livres [10, 15]. Un peu moins de quinze ans plus tard, la découverte des *quasicristaux* [21], ces corps intermédiaires entre l'ordre des *cristaux* et le désordre des *verres*, donna lieu à une intense recherche en mathématiques et en physique. Je me souviens de M. Mendès France (probablement aux Houches en 1986, mais sans doute aussi ailleurs) me disant ainsi qu'à d'autres collègues que les physiciens devraient aller voir les travaux d'Y. Meyer dans les deux livres cités ci-dessus. Et ce sont finalement M. Duneau et A. Katz qui en parlèrent à Yves (voir [16]). C'est alors aux Houches en 1994 qu'Yves rappela ses travaux des années 1970 [16]. Nous allons voir que la théorie des nombres y joue un rôle particulier, en nous limitant à deux définitions et un théorème.

Définition

– (i) Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^n$ est appelé ensemble de Delone (ou Delaunay) s'il existe deux rayons R_1 et R_2, tels que $R_2 > R_1 > 0$, ayant la propriété que les boules de rayon R_1 et de centre quelconque contiennent chacune au plus un point de Λ et que les boules de rayon R_2 et de centre quelconque contiennent chacune au moins un point de Λ.

– (ii) Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^n$ est appelé quasicristal si c'est un ensemble de Delone et s'il existe un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.

Bien sûr on peut faire le lien avec d'autres définitions comme l'engendrement par « coupe et projection ». Pour en savoir plus (mais aussi pour savoir ce que sont les *ensembles harmonieux*, les *ensembles modèles*, les *quasicristaux duaux*, les *ensembles... de Meyer*), on pourra lire par exemple les articles de R. V. Moody [18] et J. C. Lagarias [6], et bien sûr les deux livres d'Y. Meyer cités ci-dessus [10, 15]. Nous nous contenterons d'énoncer un joli théorème, avec un fort parfum d'arithmétique.

Théorème 4. (cf. [16, Théorème 6]) *Soit Λ un quasicristal, et soit θ un nombre réel > 1. Si $\theta\Lambda \subset \Lambda$, alors θ est soit un nombre de Pisot soit un nombre de Salem.*

À rebours, pour chaque entier $n \geqslant 1$ et chaque nombre θ qui soit Pisot ou Salem, on peut trouver un quasicristal Λ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\theta\Lambda \subset \Lambda$.

En conclusion de l'article [16], Y. Meyer indique son admiration pour les quasicristaux exhibés par J. Patera [19] et explique qu'une raison pour laquelle son travail n'a pas été reconnu par les physiciens est peut-être que, pour résoudre le problème qu'il avait attaqué, il avait besoin de la recherche systématique de tous les quasicristaux alors que les quasicristaux spécifiques considérés par J. Patera lui auraient été de peu d'utilité : ils sont fondés sur un nombre de Pisot particulier (le nombre d'or) alors que lui avait besoin de tous les nombres de Pisot. Je cite cette conclusion car elle fait écho pour moi à ce que dit le compositeur (minimaliste) T. Johnson ; là où le mathématicien est intéressé par tous les objets ayant une propriété donnée, le musicien (le compositeur) s'intéressera seulement à un petit nombre d'entre eux, des « joyaux » : *Mathematicians always look for things that are generally true. The fact that something happened once in some particular situation doesn't mean much for them. For me, however, and for other composers who work with mathematical models, it is great to find some crazy beautiful automaton, or the shortest possible something, or some immense perfect number that happens to be a perfect palindrome, or other oddball mathematical models. A composer doesn't have to generalize or prove anything. It's sufficient that the idea is interesting and the music works* [5].

4. Bruissements

En 2001 paraissait un article intitulé *Noiselets* [1]. Ce terme ne semble pas avoir été traduit et nous proposons ici *Bruissements*. Pour « faire court » indiquons seulement ici comme Y. Meyer dans [17] que « la base orthonormée des bruissements est la base la plus décorrélée des bases de paquets d'ondelettes ». Ce qui nous a poussé à citer cet article [1] dans le paragraphe *Théorie des nombres* est qu'il y est fait un usage essentiel des suites de Thue-Morse, du dragon (pliage de papier) et de Shapiro-Rudin. Ces suites sont des prototypes classiques de suites engendrées par automate fini (on dit *suites automatiques*), et, sans prêcher exagérément pour sa propre paroisse, l'auteur note que dans la classification par sujets des *Mathematical Reviews* et de *Zentralblatt* on peut lire : 11B85 Automata sequences. (Au passage on remarquera que la propriété essentielle de la suite de Shapiro-Rudin est de satisfaire à l'inégalité donnée dans le (v) du lemme 1).

5. La théorie des nombres a des applications ?

Ce bref tour d'horizon nous semble montrer à l'envi qu'Y. Meyer est (entre autres) un théoricien des nombres. Mais aussi, en regardant en particulier les deux paragraphes précédents, que la théorie des nombres peut, comme toutes les mathématiques d'ailleurs, avoir des applications imprévues, et ce bien après la publication de résultats théoriques fondamentaux. Pour Yves nous avons déjà cité les quasicristaux, mais l'histoire ne s'arrête pas là. En effet les *bruissements* (noiselets) sont utilisés dans le *compressed sensing* dont la philosophie est que l'échantillonnage d'images est plus économique dans la base la plus distante de la base de Haar où ces images sont comprimées de manière *parcimonieuse* : J.-L. Starck a amélioré la méthode d'échantillonnage découverte par E. Candès et D. Donoho et connue sous le nom de *compressed sensing*, fournissant en particulier un nouvel algorithme de transmission de données entre Herschel (mission spatiale de l'agence spatiale européenne) et la terre, à base de *bruissements*. Au passage j'indiquerai que si je me suis permis de proposer une traduction en français du mot *noiselet*, il existe déjà pour *compressed sensing* l'équivalent *acquisition comprimée*, voir par exemple l'article de la Recherche (volume 445, septembre 2010) cité dans la revue de presse :

`http://images.math.cnrs.fr/Revue-de-presse-septembre-2010.html`
voir aussi [17].

6. Références

[1] R . Coifman, F. Geshwind, Y. Meyer, Noiselets, *Appl. Comput. Harmonic Anal.* **10** (2001) 27–44.
[2] F. Dress, Sur l'équirépartition de certaines suites, *Acta Arith.* **14** (1968) 169–175.
[3] F. Dress, Intersections d'ensembles normaux, *J. Number Theory* **2** (1970) 352–362.
[4] `http://www.icm2010.org.in/prize-winners-2010/carl-friedrich-gauss-prize-yves-meyer`
[5] T. Johnson, communication personnelle.
[6] J. C. Lagarias, Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996) 365–376.
[7] M. Mendès France, Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, *Acta Arith.* **14** (1968) 163–167.

[8] M. Mendès France, Nombres transcendants et ensembles normaux, *Acta Arith.* **15** (1969) 189–192.

[9] Y. Meyer, Nombres algébriques, nombres transcendants et équirépartition modulo 1, *Acta Arith.* **16** (1970) 347–350.

[10] Y. Meyer, Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique, *Lect. Notes. Math.* **117**, Springer Verlag, 1970.

[11] Y. Meyer, Adèles et séries trigonométriques spéciales, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres* **13** (1971-1972), Exp. No. 11, 16 p.

[12] Y. Meyer, Nombres premiers et vibrations, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres* **13** (1971-1972), Exp. No. 15, 5 p.

[13] Y. Meyer, Étude asymptotique des vibrations des sphères, *Séminaire équations aux dérivées partielles (dit « Goulaouic-Schwartz »)* (1971-1972), Exp. No. 28, 9 p.

[14] Y. Meyer, Séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques, *Studia Math.* **44** (1972) 321–333.

[15] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North Holland, 1972.

[16] Y. Meyer, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers in *Beyond Quasicrystals* (Les Houches, 1994), Springer, pp. 3–16, 1995.

[17] Y. Meyer, Les mathématiques embarquées dans la mission Herschel, disponible à l'URL `http://www.cmla.ens-cachan.fr/fileadmin/Groupes/Seminaire/slides20092010/Mission.pdf`

[18] R. V. Moody, Meyer sets and their duals, in *The Mathematics of Aperiodic Order*, NATO ASI Series C489, pp. 403–441, 1997.

[19] J. Patera, The pentacrystals, in *Beyond Quasicrystals* (Les Houches, 1994), Springer, pp. 17–31, 1995.

[20] G. Rauzy, Caractérisation des ensembles normaux, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970) 401–414.

[21] D. Shechtman, I. A. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Letters* **53** (1984) 1951–1953.

Rapport sur le lemme fondamental[1]

Pierre-Henri Chaudouard, Michael Harris et Gérard Laumon

« Le lemme fondamental » est une famille d'identités en analyse harmonique des groupes réductifs. Cet énoncé a évolué au cours des tentatives de Langlands d'utiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg pour établir des cas particuliers importants de sa *conjecture de fonctorialité* qui est le cœur de son programme d'unification de la théorie des nombres, de la théorie des représentations et des formes automorphes. Grâce aux efforts de nombreux mathématiciens (voir section 8) et particulièrement ceux de Bao Chaû Ngô, le lemme fondamental est aujourd'hui un théorème. Dans cet article, nous expliquons l'approche de Langlands de la formule des traces et le rôle central du lemme fondamental dans l'accomplissement de ce qui peut être considéré comme la première étape du programme de Langlands. Il ne fait aucun doute que l'achèvement de cette étape sera riche en applications à la théorie algébrique des nombres et à la géométrie arithmétique ; certaines des applications d'ores et déjà obtenues seront décrites brièvement plus bas. Cet article se termine par une courte esquisse de la démonstration du lemme fondamental par Ngô qui combine remarquablement bien des méthodes automorphes et des techniques de théorie géométrique des représentations (l'algèbre de Hecke affine) et de géométrie algébrique (la fibration de Hitchin intervenant dans la théorie des espaces de modules de fibrés de Higgs).

1. La formule des traces de Selberg

Soit G un groupe localement compact qui admette une mesure de Haar dg (par exemple $G = \mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$).

Soit Γ un sous-groupe discret de G (par exemple $\Gamma = \mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$). On peut alors munir $X = \Gamma\backslash G$ d'une mesure G-invariante à gauche $\overline{dg}$ induite par dg. Pour simplifier, supposons que X soit *compact*.

Le groupe G agit par translation à gauche sur X et donc aussi sur l'espace $L^2(X)$ des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes sur X. Pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on a un opérateur

$$\rho(f)\colon \varphi \longmapsto \rho(f)(\varphi)(x) = \int_G \varphi(x\cdot g)f(g)dg$$

sur $L^2(X)$.

On note $\hat{G}$ un ensemble représentatif des classes d'isomorphismes de représentations continues et irréductibles de G dans des espaces de Hilbert.

La représentation ρ de G sur $L^2(X)$ peut être décomposée en une somme hilbertienne discrète des représentations $\pi \in \hat{G}$ affectées de multiplicités finies $m(\pi)$ et on a :

$$tr\rho(f) = \sum_{\pi\in\hat{G}} m(\pi) tr\pi(f).$$

[1] Cet article est une traduction de l'anglais d'un article paru dans le numéro 77 (septembre 2010) de la *Newsletter of the European Mathematical Society.*

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on note

$$G_\gamma = \{g \in G, g^{-1}\gamma g = \gamma\}$$

son centralisateur dans G. Il admet aussi une mesure de Haar dg_γ. Pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on définit l'*intégrale orbitale*

$$O_\gamma(f, dg_\gamma) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}$$

et le volume

$$v(\gamma, dg_\gamma) = vol((\Gamma \cap G_\gamma)\backslash G_\gamma, dg_\gamma).$$

Théorème 1 (Selberg). *Soit $\tilde{\Gamma}$ un ensemble représentatif des classes de conjugaison dans Γ. Alors, l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\sum_{\gamma \in \tilde{\Gamma}} v(\gamma, dg_\gamma) O_\gamma(f, dg_\gamma) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m(\pi) tr\pi(f).$$

Si G est fini et $\Gamma = \{1\}$, ce n'est rien d'autre que la formule de réciprocité de Frobenius.

En général, X n'est pas compact, mais dans les cas intéressants, il est de volume fini et une formule des traces plus générale est satisfaite. Cela est dû à Selberg pour $\mathbf{SL}(2)$ et à Arthur en général. S'il est impossible d'en expliquer les détails sans introduire un grand nombre de notations, la structure de la formule reste la même : le membre de droite (*spectral*) contient les multiplicités $m(\pi)$ – l'information intéressante ; le membre de gauche (*géométrique*) fait intervenir des données qui peuvent en principe être calculées.

2. Le programme de Langlands

Langlands a élaboré un programme exhaustif pour classifier les représentations automorphes. En particulier, il a conjecturé le *principe de fonctorialité* reliant les représentations automorphes de groupes différents.

Un des buts du principe de fonctorialité de Langlands est de comparer les multiplicités $m(\pi)$ de représentations automorphes de deux groupes G et G' liées par la fonctorialité. Bien que les termes géométriques des formules des traces pour les deux groupes puissent rarement être calculés explicitement, ils peuvent souvent être comparés et ceci permet de comparer les multiplicités.

Pour mener à bien cette comparaison, il faut d'abord *stabiliser* la formule des traces d'Arthur-Selberg pour les deux groupes. Ce procédé hautement sophistiqué fait intervenir une famille d'identités combinatoires pour les intégrales orbitales, ces identités pouvant toutes être déduites d'une famille d'identités élémentaires qui constituent le *lemme fondamental*.

La stabilisation de la formule des traces et ensuite le lemme fondamental sont également nécessaires pour les applications arithmétiques, comme le calcul de la fonction Zêta de Hasse-Weil de variétés de Shimura.

3. Intégrales orbitales p-adiques

Soit p un nombre premier et $F = \mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, ou plus généralement, une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Le corps F est muni de la topologie p-adique pour laquelle $\mathcal{O} = \mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}_p$ (ou plus généralement la clôture intégrale $\mathcal{O}$ de $\mathbf{Z}_p$ dans F) est un sous-anneau ouvert compact.

Si $\mathcal{G}$ est un groupe algébrique linéaire semi-simple ($\mathcal{G} = \mathbf{SL}(n), \mathbf{SO}(n), \mathbf{Sp}(2n), \dots$), la topologie p-adique de F induit une topologie sur $G = \mathcal{G}(F)$. Pour cette topologie, G est un groupe localement compact et $K = \mathcal{G}(\mathcal{O})$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G.

Les éléments de G qui ont des « valeurs propres distinctes » sont appelés semi-simples réguliers. On peut définir comme plus haut les intégrales orbitales en des éléments semi-simples réguliers de fonctions à valeurs complexes sur G à support compact et localement constantes. Les plus élémentaires sont associées à la fonction caractéristique 1_K de K dans G,

$$O_\gamma(1_K) = \int_{G_\gamma \backslash G} 1_K(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{dg_\gamma}$$

où $\gamma \in G$ est un élément semi-simple régulier arbitraire et où la mesure de Haar dg est normalisée par $vol(K, dg) = 1$. Ce sont ces intégrales qui sont comparées dans l'énoncé du lemme fondamental.

Il est facile de vérifier que l'intégrale ci-dessus est une somme finie,

$$O_\gamma(1_K, dg_\gamma) = \sum_g \frac{1}{vol(G_\gamma \cap gKg^{-1}, dg_\gamma)},$$

où g parcourt un système représentatif des doubles classes de l'ensemble fini

$$G_\gamma \backslash \{g \in G, g^{-1}\gamma g \in K\}/K.$$

4. Conjugaison stable

Soit k un corps et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Suivant Langlands, on dit que deux éléments semi-simples réguliers $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}(k)$ sont *stablement conjugués* s'il existe $\overline{g} \in \mathcal{G}(\overline{k})$ tel que $\gamma' = \overline{g}\gamma\overline{g}^{-1}$.

Si $\mathcal{G} = \mathbf{GL}(n)$, deux éléments semi-simples réguliers $\gamma, \gamma' \in G$ stablement conjugués sont automatiquement conjugués : on peut trouver $g \in \mathcal{G}(k)$ tel que $\gamma' = g\gamma g^{-1}$.

Ceci ne vaut plus si $\mathcal{G}$ est $\mathbf{SL}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$ ou $\mathbf{Sp}(2n)$. Pour la plupart des groupes réductifs $\mathcal{G}$, deux éléments semi-simples réguliers de $\mathcal{G}(k)$ peuvent être stablement conjugués sans être conjugués. L'exemple le plus simple est celui de $k = \mathbf{R}$, $\mathcal{G} = \mathbf{SL}(2)$ et des deux matrices

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \gamma' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

qui sont conjuguées par $\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ mais qui ne sont pas conjuguées dans $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$.

5. κ-intégrales orbitales

Soit F comme ci-dessus un corps p-adique et $\gamma \in \mathcal{G}(F)$ un élément semi-simple régulier.

La classe de conjugaison stable de γ est une réunion finie de classes de conjugaison ordinaires. Cette union peut être indexée de manière unique par un groupe abélien fini $R(\gamma)$ [2]. Notons $(\gamma_r)_{r\in R(\gamma)}$ un ensemble représentatif des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ. La mesure de Haar dg_γ induit une mesure de Haar dg_{γ_r} sur G_{γ_r} pour tout r.

Pour tout caractère $\kappa\colon R(\gamma) \to \mathbf{C}^\times$, on dispose de la κ-intégrale orbitale

$$O_\gamma^{G,\kappa}(1_K, dg_\gamma) = \sum_{r\in R(\gamma)} \kappa(\gamma_r) O_{\gamma_r}(1_K, dg_{\gamma_r}).$$

Pour $\gamma \equiv 1$, la κ-intégrale orbitale est aussi appelée *intégrale orbitale stable*

$$SO_\gamma^{G,\kappa}(1_K, dg_\gamma) = \sum_{r\in R(\gamma)} O_{\gamma_r}(1_K, dg_{\gamma_r}).$$

6. Groupes endoscopiques et lemme fondamental

Les groupes algébriques semi-simples (et plus généralement réductifs) sont classifiés par leur système de racines $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ où X et $X^\vee$ sont deux groupes abéliens libres de type fini duaux l'un de l'autre, $\Phi \subset X$ un ensemble de racines et $\Phi^\vee \subset X^\vee$ un ensembles de coracines vérifiant les axiomes habituels des systèmes de racines.

Le *dual de Langlands* d'un groupe algébrique semi-simple $G(F)$ comme plus haut est le groupe semi-simple (ou réductif) complexe dont le système de racines $(X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$ est le dual du système de racines $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ de $\mathcal{G}$. Par exemple, le dual de Langlands de $\mathbf{SL}(n, F)$ est $\mathbf{PGL}(n, \mathbf{C})$ et le dual de Langlands de $\mathbf{SO}(2n+1, G)$ est $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ et vice-versa. Le L-groupe ${}^LG$ de $G(F)$ est le produit semi-direct du dual de Langlands avec le groupe de Galois absolu de G (ou son groupe de Weil) pour une certaine action naturelle de ce groupe sur le dual de Langlands.

En utilisant cette dualité, Langlands a associé au groupe $G(F)$ d'autres groupes $H(F)$ qui sont appelés groupes endoscopiques. Par exemple, pour toute partition non triviale $n = n_1 + n_2$, $H(F) = \mathbf{SO}(2n_1 + 1) \times \mathbf{SO}(2n_2 + 1)$ est un groupe endoscopique de $\mathcal{G} = \mathbf{SO}(2n + 1)$.

Le *lemme fondamental de Langlands-Shelstad* – et plus précisément le lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour l'endoscopie – est une série d'identités

$$O_\gamma^{G,\kappa}(1_K, dg_\gamma) = \Delta_H^G(\gamma, \delta) SO_\delta^H(1_{K^H}, dh_\delta)$$

Ici, $\mathcal{H}$ est un groupe endoscopique de $\mathcal{G}$ déterminé par κ et $K^H = \mathcal{H}(\mathcal{O})$; $\delta \in H = \mathcal{H}(F)$ et $\gamma \in G$ sont des éléments semi-simples réguliers associés, c'est-à-dire

[2] L'élément neutre correspond à ce qu'on appelle la *classe de conjugaison ordinaire de Kostant* à l'intérieur de la classe de conjugaison stable. La construction de Kostant généralise la section de l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique donnée par l'application qui à un polynôme unitaire de degré n associe sa matrice compagnon. Le représentant de Kostant joue un rôle crucial dans l'étude de la fibration de Hitchin.

qu'« ils ont le même polynôme caractéristique ». La mesure de Haar dh_δ sur H_δ est induite par dg_γ.

Enfin, $\Delta_H^G(\gamma, \delta)$ est ce qu'on appelle le *facteur de transfert* : c'est une puissance de p, facile à définir, multipliée par une constante, typiquement une racine de l'unité dont la définition est explicite quoique mystérieuse. En particulier, la constante tient compte du groupe $R(\gamma)$ mentionné dans la section précédente. Grâce à cette propriété du facteur de transfert, les κ-intégrales orbitales peuvent êtres vues, quand κ varie, comme une transformée de Fourier sur les classes de conjugaison dans une classe de conjugaison stable.

7. Un exemple

Voici l'exemple non trivial le plus simple du lemme fondamental pour des algèbres de Lie en égale caractéristique. Soit $\mathcal{G}$ le groupe $\mathbf{SL}(2)$ sur $F = \mathbf{F}_p((t))$. Soit $a \in \mathbf{F}_p$ un élément qui n'est pas un carré. Alors les deux éléments

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & at^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma' = \begin{pmatrix} 0 & at \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathbf{SL}(2, F)$ sont stablement conjugués mais pas conjugués. La réunion de leurs deux classes de conjugaison est la classe de conjugaison stable de γ, qui est le représentant de Kostant (c'est une matrice compagnon, cf. note 2).

Alors on peut vérifier que pour une normalisation convenable des mesures de Haar, on a

$$O_\gamma(1_K) = p + 1 \text{ et } O_{\gamma'}(1_K) = 1,$$

de sorte que

$$O_\gamma^{G,\kappa}(1_K) = (p+1) - 1 = p.$$

Dans ce cas particulier, le facteur de transfert est $\Delta_H^G(\gamma, \delta) = p$ et l'intégrale orbitale stable endoscopique est $SO_\delta^H(1_{K^H}) = 1$.

8. Historique du sujet

La première mention du lemme fondamental pour l'endoscopie apparaît en 1979 dans un article de Labesse et Langlands sur les formes automorphes pour $\mathbf{SL}(2)$. À un certain moment, les auteurs ont remarqué qu'ils avaient besoin d'un lemme plutôt technique. Ce lemme, vérifié directement par le calcul, joue un rôle fondamental dans leur article, d'où la terminologie associée à cette conjecture de Langlands et Shelstad, qui fut formulée pour la première fois dans toute sa généralité en 1987.

Kottwitz (1992) et Rogawski (1990) ont démontré le lemme fondamental pour $\mathbf{U}(3)$. En 1991, Waldspurger l'a fait pour $\mathbf{SL}(n)$. Hales et Weissauer (1993) pour $\mathbf{Sp}(4)$.

En 1997, Waldspurger a introduit une variante du lemme fondamental pour les algèbres de Lie qui est plus facile à formuler et a montré que cette variante impliquait l'énoncé pour le groupe. En 2005, Waldspurger a montré que l'analogue évident du lemme fondamental où on remplace le corps p-adique F par une extension finie de $\mathbf{F}_p((t))$ impliquait le lemme fondamental sur les corps p-adiques.

Ces deux derniers résultats de Waldspurger fournissent le point de départ de toute approche géométrique au lemme fondamental.

8.1. Résultats obtenus par des méthodes géométriques

En utilisant la cohomologie ℓ-adique équivariante des fibres de Springer affines, Goresky, Kottwitz et MacPherson ont démontré le lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour les éléments non ramifiés γ, ceux dont les valeurs propres ont les mêmes valuations.

En utilisant la cohomologie ℓ-adique équivariante de la fibration de Hitchin, Laumon et Ngô ont complètement démontré le lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour les groupes unitaires $\mathbf{U}(n)$ sous l'hypothèse $p > n$.

Enfin, en utilisant toujours la cohomologie ℓ-adique de la fibration de Hitchin, Ngô a démontré le lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour un groupe réductif général pourvu que p ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl de $\mathcal{G}$. Nous dirons quelques mots à propos de sa démonstration dans la dernière section.

9. Applications au programme de Langlands

Il y a de cela quelques années, Arthur a montré comment *stabiliser* la formule des traces d'Arthur-Selberg pour tout groupe réductif G sur un corps de nombres, sous l'hypothèse du lemme fondamental de Langlands-Shelstad et d'une variante appelée *lemme fondamental pondéré*. Cette variante a été démontrée récemment par Chaudouard et Laumon, à partir du travail de Ngô sur la fibration de Hitchin. Ainsi, la stabilisation d'Arthur est bien établie et il est possible de comparer les formules des traces pour des groupes associés dans bon nombre de situations.

Soit G et H deux groupes réductifs sur un corps local ou global F. Un L-homomorphisme est un homomorphisme ${}^LH \to {}^LG$ qui commute avec la projection naturelle sur le groupe de Galois. La conjecture de fonctorialité de Langlands prédit qu'un tel L-homomorphisme donne lieu à un *transfert fonctoriel* des représentations de H vers G. Si L est local, le transfert envoie les représentations irréductibles de $H(F)$ sur des représentations irréductibles de $G(F)$. Le transfert n'est en général pas défini individuellement sur chaque représentation mais plutôt sur des familles finies de représentations, appelées L-paquets, de $H(F)$ auxquelles sont associées des L-paquets sur $G(F)$. Si F est un corps global, alors le transfert associe à un L-paquet de représentations automorphes de H un L-paquet sur $G(F)$.

Soit $G = \mathbf{GL}(n)$; alors le dual de Langlands de G est $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et chaque L-paquet de G, qu'il soit local ou global, est en fait un singleton. Si maintenant H est un groupe classique, il existe un L-homomorphisme naturel ${}^LH \to {}^L\mathbf{GL}(N)$ pour un entier N approprié. Par exemple, le dual de Langlands de $H = \mathbf{SO}(2n+1)$ est $\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{C})$ et on peut prendre $N = 2n$.

En comparant les formules des traces stables pour un groupe classique H avec la *formule des traces tordue* stable (voir ci-dessous) pour le groupe correspondant $\mathbf{GL}(N)$, Arthur a construit une version du transfert fonctoriel de Langlands que l'on attend de H vers $\mathbf{GL}(N)$. Plus précisément, il peut classifier les représentations irréductibles de $H(F)$ où F est un corps p-adique, et les représentations automorphes discrètes de H quand F est un corps de nombres, en termes des objets correspondants pour $\mathbf{GL}(N)$. Il est ainsi en mesure de déduire la paramétrisation de Langlands pour les groupes classiques sur les corps p-adiques à partir du cas de $\mathbf{GL}(N)$, qui fut établi il y a une dizaine d'années par Harris-Taylor et Henniart. De façon similaire, il peut classifier les représentations automorphes discrètes d'un groupe classique en termes de représentations automorphes cuspidales pour différents $\mathbf{GL}(n)$.

La formule des traces tordues est une variante de la formule des traces d'Arthur-Selberg pour un groupe réductif non connexe, dans ce cas un produit semi-direct de $\mathbf{GL}(N)$ par un groupe non trivial d'automorphismes extérieurs. On s'attend à ce qu'il soit possible de la stabiliser en suivant la méthode utilisée par Arthur dans le cas standard. Les analogues tordus de la plupart des lemmes fondamentaux appropriés ont été établis par Waldspurger et Ngô.

10. Applications à la théorie des nombres

En suivant une stratégie développée par Langlands et Kottwitz, le lemme fondamental est utilisé dans deux versions différentes – la version de Langlands-Shelstad pour l'endoscopie et une autre version tordue – pour calculer la fonction Zêta de Hasse-Weil de variétés de Shimura. Quand les variétés de Shimura peuvent être identifiées à des espaces de modules pour certaines familles de variétés algébriques munies de structures supplémentaires, comme c'est le cas de la plupart des variétés de Shimura associées aux groupes classiques, le nombre de points de ces variétés sur les corps finis peut être exprimé en termes d'intégrales orbitales explicites, et les expressions obtenues peuvent être stabilisées tout comme la formule des traces d'Arthur-Selberg.

Maintenant que les lemmes fondamentaux appropriés ont été établis, il est possible de faire les calculs expliqués par Kottwitz il y a plus de vingt ans. S. Morel a mené ce programme jusqu'au bout dans le cas des variétés de Shimura de type PEL associées aux groupes unitaires. Ce sont des espaces de modules pour les variétés abéliennes polarisées munies d'endomorphismes supplémentaires compatibles à la polarisation.

Les méthodes utilisées pour calculer la fonction Zêta de Hasse-Weil pour les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires permettent également la construction de représentations ℓ-adiques de groupes de Galois de corps nombres associées à certaines classes de formes automorphes, généralisant la théorie classique d'Eichler et Shimura à la dimension strictement supérieur à 2 et aux corps de nombres autres que $\mathbf{Q}$. C'est le point de départ pour une généralisation aux dimensions supérieures des méthodes introduites par Wiles dans sa démonstration du Théorème de Fermat. La démonstration de la conjecture de Sato-Tate pour les formes modulaires de poids arbitraires est une conséquence typique de ces résultats, dont aucune n'eut pu être démontrée sans cette compréhension nouvelle de la cohomologie des variétés de Shimura qu'apporte le lemme fondamental.

11. Remarques sur la démonstration du lemme fondamental

Grâce au travail de Waldspurger, il suffit de démontrer le lemme fondamental pour les algèbres de Lie sur un corps local F de caractéristique $p > 0$. Un tel corps local peut être vu comme le complété en un point fermé d'une courbe projective lisse C sur un corps fini $\mathbf{F}$.

Dans le processus de stabilisation de la formule des traces, le lemme fondamental implique des identités entre des combinaison linéaires d'intégrales orbitales globales (pour le corps des fonctions sur C) qui constituent une sorte de *lemme fondamental global*. Inversement le lemme fondamental global implique le cas local par un argument local-global classique.

Le *champ modulaire de Hitchin* $\mathcal{M}$ est un champ algébrique sur $\mathbf{F}$ qui classifie les G-fibrés E sur C muni d'un *champ de Higgs* θ, qui est essentiellement une section du fibré vectoriel $Ad(E)$ sur C (induit par E *via* la représentation adjointe) dont les pôles sont contrôlés par un diviseur effectif D. La *fibration de Hitchin* est le morphisme de $\mathcal{M}$ vers un espace affine $\mathbf{A}$ qui fait correspondre au couple (E,θ) une famille finie d'invariants de θ généralisant les coefficients du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

En 2003, en utilisant la description adélique de Weil des G-fibrés, Ngô a remarqué que les intégrales orbitales globales interviennent naturellement quand on veut compter le nombre de points des fibres de Hitchin. De plus, en utilisant le dictionnaire de Grothendieck entre les fonctions et les faisceaux et en faisant un usage systématique du théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber, il a montré que le lemme fondamental global est une conséquence d'une propriété très particulière de la cohomologie ℓ-adique relative de la fibration de Hitchin.

Cette propriété peut être ainsi résumée : malgré la très grande dimension des fibres de Hitchin, l'application de Hitchin se comporte cohomologiquement parlant comme si les fibres étaient toutes finies (au moins au-dessus du lieu elliptique).

En 2008, Ngô a démontré que cette propriété cohomologique était une conséquence d'une part d'une propriété cohomologique de la fibration de Hitchin qui rappelle un théorème pour les courbes planes dû à Severi (dans l'espace projectif des courbes planes de degré d, et donc de genre arithmétique $q=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, les courbes de genre géométrique $g=q-\delta$ forment un sous-ensemble localement fermé de codimension δ) et d'autre part d'une propriété cohomologique d'une variété munie d'une action libre d'une variété abélienne (la cohomologie de la variété abélienne agit librement sur la cohomologie de la variété).

JEUX MATHÉMATIQUES

Les jeux de dés

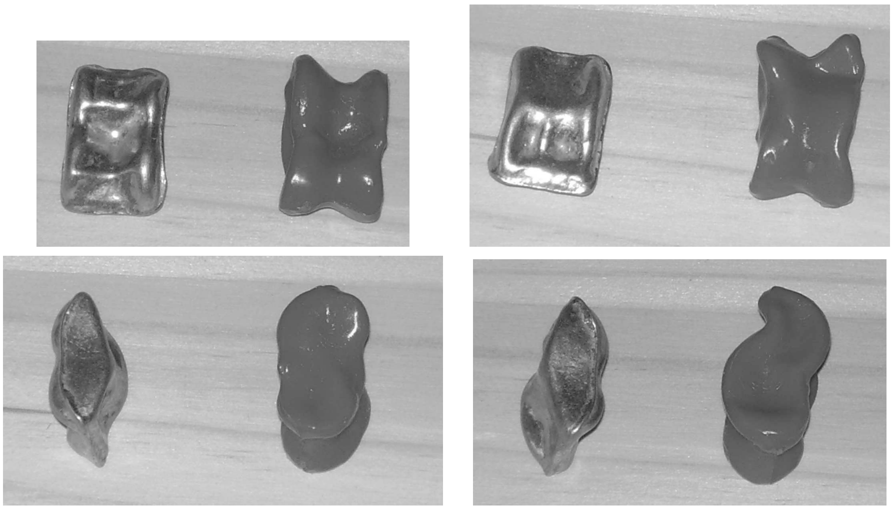
Michel Criton[1]

Les jeux remontent aux origines de l'humanité, et beaucoup de ces jeux font intervenir le hasard. C'est pourquoi l'homme a très tôt voulu simuler le hasard. Il a commencé par utiliser des objets naturels, qu'il a ensuite façonnés et épurés de façon à éliminer autant que possible tout biais éventuel. De ces essais et de ces perfectionnements est né le dé cubique que nous connaissons. Les mathématiciens se sont alors naturellement intéressés à ce générateur de hasard et ont progressivement dégagé les bases de ce qui allait devenir le calcul des probabilités.

De deux à quatre puis à six faces : la préhistoire du dé

Les premiers générateurs de hasard ont été des objets plus ou moins plats présentant deux faces principales et permettant de pratiquer des jeux de type « pile ou face ». Des coquillages, tels les cauris par exemple, ou des tiges de roseau fendues en deux, ont longtemps pu jouer ce rôle. Mais ce sont les premiers éleveurs qui sont passés d'objets à deux faces à des objets à quatre faces avec les astragales de mouton ou de chèvre. Ces os, situés dans l'articulation des pattes arrière des animaux et que nous connaissons sous le nom d'« osselets », présentent en effet une forme à peu près parallélépipédique. Un osselet lancé en l'air n'a quasiment aucune chance de retomber sur une de ses extrémités (les plus petites faces du parallélépipède), celles-ci étant très arrondies. On peut donc grossièrement considérer cet objet comme un dé à quatre faces, ces quatre faces n'ayant d'ailleurs pas la même probabilité d'occurrence en raison de leurs surfaces différentes. Si l'usage des ces osselets a souvent été à des fins autant divinatoires que ludiques, l'homme a très vite essayé de fabriquer des objets similaires dans divers matériaux. C'est ainsi qu'on a trouvé en Europe Orientale ou en Anatolie des répliques d'osselets de métal datant de plus de six millénaires. De nombreux jeux comme le « jeu du vizir » et ses innombrables variantes, pratiquées en Anatolie et dans les Balkans, utilisent les osselets comme des dés à quatre faces. Dans le jeu du vizir par exemple, la grande face creuse correspond au voleur, la grande face bombée au boulanger, la face étroite plate au vizir et la face étroite sinueuse au sultan.

[1] Président de la Fédération Française des Jeux Mathématiques.



Les quatre faces de deux osselets modernes, l'un en métal et l'autre en matière plastique, correspondant dans l'ordre au voleur, au boulanger, au vizir et au sultan. (Photos M. Criton)

On sait aussi que les Indiens de la vallée de l'Indus utilisaient des dés en bois de forme parallélépipédique très allongée, donc à quatre faces utilisables, bien avant notre ère.

L'avènement du dé cubique

Si le premier dé cubique connu apparaît en Syrie, quatre millénaires avant notre ère, il faudra attendre la civilisation grecque, puis les celle des Étrusques et des Romains, pour qu'il devienne un élément de jeu universel. Les dés de l'Antiquité, souvent fabriqués en terre cuite, sont d'abord grossiers, mais leur fabrication s'affine afin que les occurrences des différentes faces deviennent réellement équiprobables. Des dés cubiques, s'il sont fabriqués dans un matériau homogène, sont dits « équitables » (*fair dice* en anglais). Ceci suppose également que les points marqués sur les faces ne soit pas creusés dans la matière du dé et qu'il n'y ait ni enlèvement ni ajout de matière pour marquer ces points. Dès la période grecque, la règle de numérotation par laquelle la somme des points portés par deux faces opposées d'un dé doit toujours être égale à 7, se fixe et cette règle demeure inchangée jusqu'à nos jours.

Durant le Moyen-Âge, les jeux d'argent en général et les jeux de dés furent combattus par l'Eglise catholique qui les considérait comme immoraux et pensait qu'elle détournait les individus de la religion. C'est pourquoi l'Eglise tenta d'en limiter la progression, voire de les interdire à certaines classes de la population. C'est ainsi que le très pieux Louis IX (1214 ; 1270), plus connu sous le nom de Saint-Louis, édicta en 1254 une ordonnance réglementant très sévèrement les jeux de hasard et d'argent. En 1258, le prévôt de Paris Étienne Boileau codifia et encadra la profession de « déicier » (fabricant de dés) de façon à interdire les dés « plombés » utilisés par les tricheurs ou les dés portant un même nombre de points sur deux ou plusieurs faces.

La naissance de la théorie des probabilités

Luca Pacioli

Luca Pacioli (vers 1445 ; 1517) est un mathématicien italien de la fin du 15e siècle. Dans son ouvrage *Summa de Arithmetica Geometria Proportio et Proportionalità*, imprimé à Venise en 1494, il s'intéresse à un problème connu sous le nom de « problème des partis ». À l'époque, de nombreux jeux, qu'il s'agisse de jeux d'adresse ou de jeux de dés, donnaient lieu à des paris. Les joueurs misaient une somme convenue et le gagnant empochait les mises. Quel que soit le type de jeu pratiqué, une partie se déroulait en un nombre donné de manches, chaque manche rapportait un nombre donné de points et les deux joueurs en présence devaient s'efforcer d'atteindre un total fixé. Le premier joueur ayant atteint ou dépassé ce total récupérait les mises. Lorsqu'une partie entamée s'interrompait pour une raison quelconque avant qu'un des joueurs ait atteint le total visé, comment les mises de départ devaient-elles être réparties entre les deux joueurs ?

Pacioli prend l'exemple suivant : *une brigade joue à la paume. Il faut 60 pour gagner, et chaque coup vaut 10. L'enjeu est de dix ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp ?* [2] Luca Pacioli propose plusieurs modes de répartition tous basés sur le nombre de points déjà acquis par les deux équipes. Deux de ces solutions intègrent dans le calcul le nombre total de manches possibles : au total, onze manches peuvent être jouées, au maximum, avant qu'une des équipes n'atteigne le total de 60 points. La première équipe a déjà obtenu 5/11 des points possibles, et la seconde 2/11, ce qui fait 7/11 au total. La première équipe récupérera donc les 5/7 des mises, soit 7 ducats et 1/7, et la seconde 2/7 des mises, soit 2 ducats et 6/7. Les différents raisonnements de Pacioli, qui ne tiennent compte que des points acquis, parviennent tous au même résultat.

Jérome Cardan

Gerolamo Cardano, connu sous le nom de Jérôme Cardan (1501 ; 1576) revient sur le problème des partis dans deux ouvrages, *Liber de ludo alea*, écrit vers 1525 mais qui ne sera publié qu'en 1564, et *Practica arithmetice et mesurandi singularis* qu'il publie en 1539. Cardan juge la solution de Pacioli non équitable et affirme que le calcul doit être fait non pas à partir des points déjà obtenus, mais des points que les deux équipes devraient encore obtenir pour gagner la partie : « Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue en s'arrêtant de jouer ». Cardan propose donc la solution suivante sans argumentation : Il reste une seule manche à gagner au premier joueur pour atteindre le total de 60, alors que le second doit

[2] *« Une brigata gioca a palla a 60, el gioco e 10 per caccia, e fanno posta ducati 10 ; acade per certi accidenti che non possono fornire e l'una parte a 50 e l'altra a 20 : se dimanda che tocca per parte de la posta. »* in *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Guglielmo Bruto, I. T. Libri, Carucci della Sommaia, 1840).

en gagner quatre pour atteindre le même but. La progression[3] de 1 est 1, celle de 4 est $1+2+3+4$, soit 10. Le premier joueur recevra donc 10/11 des dix ducats, soit 9 ducats et 1/11 et le second 1/11 des 10 ducats, soit 10/11 de ducat.

Tartaglia

Un autre mathématicien italien Niccolo Fontana, dit « Tartaglia » qui signifie « le bègue » (1499 ; 1557) reprend le problème dans un ouvrage publié en 1556, *La Prima parte del general trattato di numeri et misure*. Tartaglia modifie l'exemple de Pacioli afin de critiquer sa solution : il suppose qu'une équipe a marqué 10 points, tandis que l'autre n'en a encore marqué aucun. Dans ce cas, selon le calcul de Pacioli, la totalité de la mise irait intégralement à la première équipe. Une telle répartition n'est visiblement pas raisonnable, dans la mesure où l'équipe adverse a encore des chances non nulles de gagner la partie.

Tartaglia propose la solution suivante : si l'un des joueurs a obtenu 10 points et l'autre 0 et que chacun des deux joueurs a misé 22 ducats, le premier joueur a déjà obtenu le sixième des points nécessaires pour emporter la partie. Il devra donc récupérer, outre ses 22 ducats, le sixième de ceux de son adversaire, soit au total 25 ducats 2/3.

Dans un autre exemple où l'un des joueurs a obtenu 50 points et l'autre 30, Tartaglia propose une autre méthode : la différence entre les deux scores est de 20 ducats, soit un tiers du nombre de points à obtenir. Le premier joueur récupérera donc ses 22 ducats plus le tiers de ceux de son adversaire, soit au total 29 ducats 1/3.

Mais le mathématicien pense finalement que « la résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelques manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges » (... la risolutione di una tal questione è più presto giudicale, che per ragione, tal che in qual si volia modo la sarà risolta visi trovare da litigare).

Galilée

En 1620, Galileo Galilei, dit « Galilée » (1554 ; 1642) est Premier Mathématicien à l'Université de Pise et Premier Philosophe au service du Grand Duc de Toscane Cosme II. Le grand-duc, qui est un amateur de jeux de dés, lui pose la question suivante : « On lance trois dés. Le cas où la somme est 10 est-il plus favorable que celui où la somme est 9 ? »

La question n'est pas anodine : l'expérience semble montrer que la somme 10 est obtenue avec une fréquence légèrement supérieure à celle de la somme 9. Pourtant, la somme 10 peut s'obtenir de 6 façons, comme la somme 9.

$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$

$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3.$

Le paradoxe est seulement apparent. En effet, en écrivant les sommes comme ci-dessus, on ne différencie pas les dés. Or si l'on différencie les trois dés, en supposant qu'ils sont par exemple de couleurs différentes, on constate que la somme 9 ne s'obtient que de 25 façons tandis que la somme 10 s'obtient de 27 façons.

---

[3] Cardan désigne par progression de n la somme des entiers de 1 à n. Il considère que s'il restait p points à gagner au premier joueur et q points au second pour emporter la partie interrompue, le premier doit recevoir $(1+2+...+q)/(1+2+...+p+1+2+...+q)$ et le second $(1+2+...p)/(1+2+...p+1+2+...+q)$.

Galilée rédigea un petit mémoire en réponse à la Question du Grand Duc de Toscane où il expliqua le paradoxe. Ce texte ne sera publié que dans une réédition de ses œuvres en 1718.

Le problème de Galilée n'était pas nouveau. Il apparaît dès le 13$^{\text{e}}$ siècle dans un poème médiéval, *De Vetula*, qui relate la vie d'Ovide. Ce poème en latin, attribué à Richard de Fournival , chanoine et chancelier du Chapitre de Notre-Dame d'Amiens (1201-1260), sera traduit en français au 14$^{\text{e}}$ siècle par Jean Lefèvre, procureur au Parlement de Paris. Dans ce poème, on trouve une évocation du jeu des tables, ancêtre du backgammon, et du lancer de trois dés, qui y est complètement et correctement analysé.

3	18	*1 punctatura*	*1 cadencia*
4	7	*1 punctatura*	*3 cadencia*
5	16	*2 punctatura*	*6 cadencia*
6	15	*3 punctatura*	*10 cadencia*
7	14	*4 punctatura*	*15 cadencia*
8	13	*5 punctatura*	*21 cadencia*
9	12	*6 punctatura*	*25 cadencia*
10	11	*6 punctatura*	*27 cadencia*

Table figurant dans le poème De Vetula. Le nombre de « punctatura » correspond au nombre de façons d'obtenir un total sans distinguer les dés et sans tenir compte de l'ordre tandis que le nombre de « cadencia » correspond au nombre de façons d'obtenir un total en tenant compte de l'ordre.

Pascal et les problèmes du Chevalier de Méré

Antoine Gombault, Chevalier de Méré (1607 ; 1684) est un gentilhomme et homme de lettres de la cour de Louis XIV. Son nom est lié à plusieurs des problèmes précédemment cités. Le chevalier de Méré a échangé une correspondance au sujet de ces problèmes avec Blaise Pascal (1623 ; 1662) qui a lui-même débattu de ces questions avec Pierre Fermat (1601 ; 1665). Selon Pascal, le Chevalier de Méré *« a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre »* . Le premier problème évoqué par le Chevalier de Méré est le suivant :

« Si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il y a plus de chance d'obtenir au moins un 6 que d'en obtenir aucun ; si l'on jette 24 fois deux dés à 6 faces, il y a plus de chance d'obtenir au moins un double 6 que d'en obtenir aucun. »

Le raisonnement incorrect de Méré était le suivant : dans le premier cas, on a six possibilités (les six faces du dé) et 4 lancers, donc les chances sont de 4/6 ; dans le second cas, les chances sont de 24/36 (24 lancers pour 36 combinaisons possibles des faces des deux dés), ce qui correspond à la même probabilité. Dans une lettre à Fermat datée du 29 juillet 1654, Pascal écrit à ce sujet :

« Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire Sonnez (i.e. double-six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. »

Pour le lancer d'un dé, l'affirmation de Méré était juste, bien que son raisonnement soit incorrect, puisque $(5/6)^4 = 625/1296$ et $1 - (5/6)^4 = 671/1296$. Pour le lancer de deux dés, le résultat lui-même était faux, puisque $1-(35/36)^{24} < 0,5$.

Méré s'intéresse aussi au problème des partis. Il propose la version suivante à Pascal qui en débattra avec Fermat et en fournira la première solution correcte, faisant appel sans le dire à la notion d'espérance mathématique :

« Deux joueurs jouent à un jeu de hasard où le but est de gagner trois manches, chacun ayant misé 32 pistoles au départ. La partie doit s'interrompre alors que le premier joueur a gagné 2 manches et le second une seule. Comment les 64 pistoles doivent-elles être réparties entre les deux joueurs ? »

Citons la solution de Pascal[4] : *« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu. Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.*

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 : s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44". »

Roberval objectera à Pascal *qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le pari juste sur une condition feinte*[5]... La même année, Pascal rédigea son *Traité du triangle arithmétique* qui ne paraîtra qu'en 1665 et dans lequel il reviendra sur ce problème.

[4] Lettre à Fermat du 29 juillet 1654.

[5] *Acta Eruditorum*, Wilhelm Gottfried Leibniz.

Combinatoire du dé cubique

Lorsqu'on observe des dés cubiques, à première vue, ils semblent tous fabriqués sur le même modèle. Mais en observant la façon dont leurs faces sont numérotées, on réalise que ce n'est pas vraiment le cas.

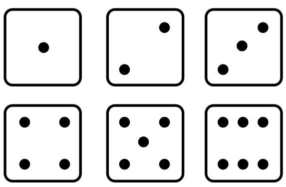
Si l'on numérotait les faces d'un dé cubique de 1 à 6 sans respecter aucune règle particulière, on pourrait fabriquer $6!/24$, soit 30 dés différents. En effet, on a six choix possibles pour numéroter la face du dessus, cinq choix pour celle de gauche, quatre choix pour la face du dessous, trois choix pour celle de droite et deux pour la face avant (il ne reste plus alors qu'une possibilité pour la face arrière). Mais un dé donné peut être posé sur n'importe laquelle de ses six faces, et lorsqu'il est posé sur une face fixée, il peut être tourné selon quatre orientations.

Depuis l'Antiquité grecque, la numérotation des faces d'un dé respecte systématiquement la règle suivante : la somme des points portés par deux faces opposées est toujours égale à 7. Mais cette règle ne suffit pas à assurer l'unicité. Même sans tenir compte du graphisme et de son orientation, il existe un dé « droit » et un dé « gauche » et on trouve les deux types de dés dans le commerce. Sur un dé « gauche », les nombres 1, 2 et 3 sont disposés autour d'un sommet dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, alors que sur un dé « droit », les mêmes nombres sont disposés dans le sens des aiguilles d'une montre (voir photo). Traditionnellement, les dés occidentaux étaient des dés « gauches » et les dés japonais des dés « droits », mais les dés fabriqués industriellement de nos jours peuvent être indifféremment de l'un ou de l'autre type.

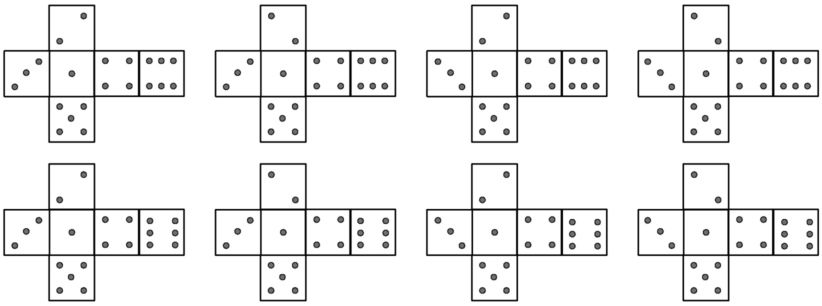
Un dé gauche et un dé droit. (Photos M. Criton)

Les seize dés possibles

En faisant le décompte précédent, on ne prend absolument pas en compte le graphisme de la numérotation des dés. Les « nombres » apparaissant sur les faces des dés sont figurés par des points (qu'on appelle des « ocelles »). Ces points sont traditionnellement disposés comme sur la figure ci-dessous.

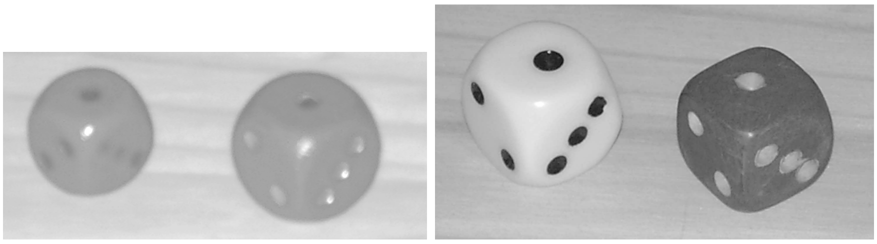


On remarque que chacun des « chiffres » 2, 3 et 6 peut prendre deux orientations possibles. Cela porte le nombre de dés différents à $2 \times 2 \times 2 \times 2$, soit à seize.

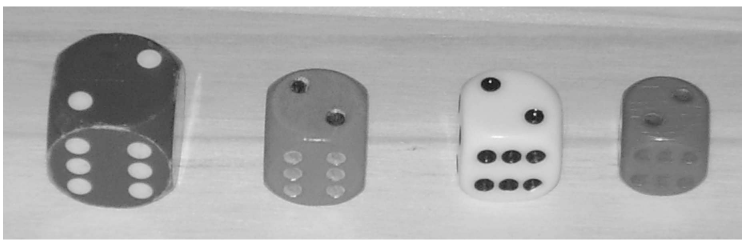


Les huit dés gauches possibles.

En effet, pour une même orientation des faces 1, 2 et 3, si l'on prend en compte l'orientation des points figurant les chiffres 2, 3 et 6, chacun des deux dés « classiques » peut être décliné en huit variantes (voir la figure ci-dessous). On a donc théoriquement 16 dés différents possibles. On trouve dans le commerce la plupart de ces variantes (voir les photos ci-dessous).



Dans ces quatre dés gauches, le 2 prend les deux orientations possibles, de même que le 3. *(Photos M. Criton)*



Sur ces quatre dés, on observe les quatre dispositions relatives possibles du 2 et du 6.(Photos M. Criton)

Curiosités mathématiques autour des dés

Les dés de Sicherman

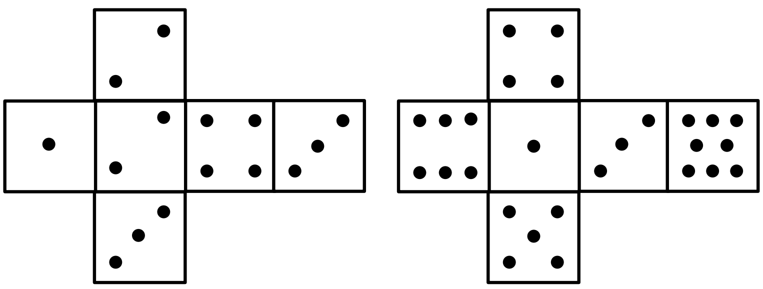
Lorsqu'on lance deux dés ordinaires, les différentes occurrences possibles, au nombre de 36, sont celles du tableau ci-dessous.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Ce tableau conduit aux probabilités suivantes d'obtenir chacun des totaux possibles de 2 à 12.

total	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Est-il possible d'obtenir la même loi de probabilité avec deux dés numérotés d'une façon différente de la numérotation classique ? Ce problème a été posé et résolu par un colonel américain de Buffalo, George Sicherman, et diffusé par le ludologue américain Martin Gardner (1914 ; 2010) dans une de ses chroniques du *Scientific American* de 1978. Il existe une solution unique à ce problème. Cette solution est représentée par les deux patrons ci-dessous, dans lesquels l'égalité des nombres de points portés par deux faces opposées a été respectée.



Ces deux dés $(1; 2; 2; 3; 3; 4)$ et $(1; 3; 4; 5; 6; 8)$ permettent les occurrences suivantes.

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

On vérifie que le nombre d'occurrences de chaque total est bien le même qu'avec deux dés classiques. On peut démontrer l'unicité de cette solution différente de la disposition classique en la construisant pas à pas à partir des plus petits totaux. La seule façon d'obtenir un seul total égal à 2 est d'avoir 1 sur chaque dé. Il y a deux façons d'obtenir deux totaux égaux à 3 : avoir 2 sur chaque dé, ou bien avoir deux 2 sur un même dé et aucun sur l'autre. On construit ainsi, de proche en proche, deux et seulement deux solutions : la solution « classique » avec deux dés identiques et la solution de Sicherman avec deux dés différents.

Avec des dés cubiques, on a également cherché des solutions pour trois dés. Sicherman a démontré que pour trois dés, la seule solution non classique était celle comprenant les deux dés de Sicherman et un dé classique.

Une généralisation

Le problème de Sicherman a été généralisé à des dés ayant d'autres formes que le cube. On a ainsi trouvé qu'il existe une paire unique de dés tétraédraux de Sicherman : $(1; 2; 2; 3)$ et $(1; 3; 3; 5)$.

Il existe trois paires de dés octaédraux de Sicherman :

$(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5)$ et $(1; 3; 5; 5; 7; 7; 9; 11)$,

$(1; 2; 2; 3; 5; 6; 6; 7)$ et $(1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 9)$,

$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 6)$ et $(1; 2; 5; 5; 6; 6; 9; 10)$;

sept paires de dés dodécahédraux de Sicherman :

$(1; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 6)$ et $(1; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14; 15; 18)$,

$(1; 2; 2; 3; 3; 4; 7; 8; 8; 9; 9; 10)$ et $(1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 14)$,

$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 8)$ et $(1; 2; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 15; 16)$,

$(1; 2; 3; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 9; 10; 11)$ et $(1; 2; 4; 5; 5; 6; 8; 9; 9; 10; 12; 13)$,

$(1; 2; 3; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 13; 14; 15)$ et $(1; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 8; 9)$,

$(1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 9; 9; 11; 11; 13)$ et $(1; 2; 2; 3; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 10; 11)$,

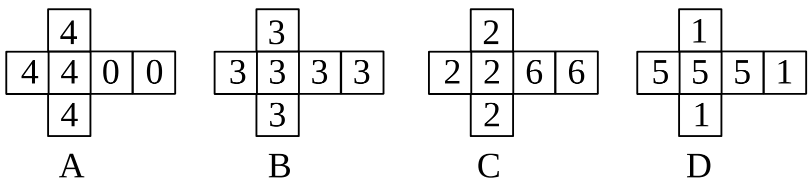
$(1; 3; 5; 7; 7; 9; 9; 11; 11; 13; 13; 17)$ et $(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7)$;

et sept paires de dés icosaédraux de Sicherman :

$(1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 8)$
et $(1; 5; 6; 9; 10; 11; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 22; 23; 24; 27; 28; 32)$,
$(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 11; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 16)$
et $(1; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 22; 24)$,
$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11; 12)$
et $(1; 2; 5; 6; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 23; 24; 27; 28)$,
$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 7; 11; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 16; 17)$
et $(1; 2; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 17; 18; 18; 19; 22; 23)$,
$(1; 2; 3; 4; 5; 11; 11; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 21; 22; 23; 24; 25)$
et $(1; 2; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11; 12; 13; 14; 15)$,
$(1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 9; 9; 11; 11; 13; 13; 15; 15; 17; 17; 19; 19; 21)$
et $(1; 2; 2; 3; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 17; 18; 18; 19)$,
$(1; 3; 5; 7; 9; 11; 11; 13; 13; 15; 15; 17; 17; 19; 19; 21; 23; 25; 27; 29)$
et $(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11)$,

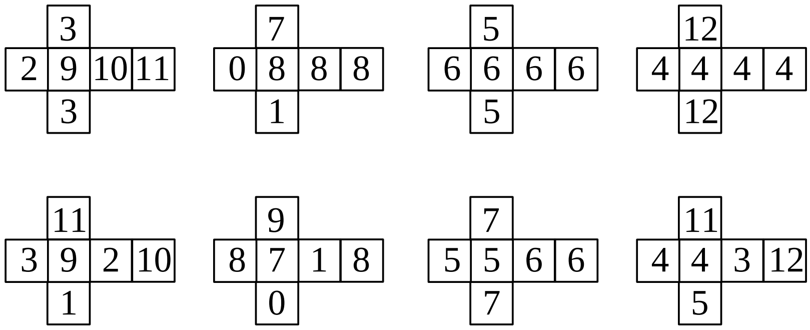
Les dés non transitifs d'Efron

Bradley Efron est un statisticien américain de l'Université Stanford. Il fut le premier à trouver un ensemble de quatre dés qui violent le principe de transitivité. Supposons en effet que quatre joueurs A, B, C, D disposent chacun d'un des dés représentés ci-dessous, chaque lettre correspondant au joueur utilisant le dé en question.



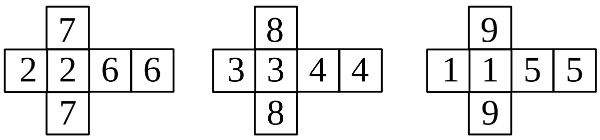
On constate que le joueur A gagnera contre le joueur B avec une probabilité de 2/3 : quatre faces sur les six faces du dé A portent un nombre supérieur à ceux des six faces du dé B. Pour la même raison, le joueur B l'emportera sur le joueur C avec une probabilité égale à 2/3. Le joueur C obtient un 6 dans 1/3 des cas, et lorsqu'il obtient un 2, il l'emporte dans la moitié des cas sur le dé D, d'où une probabilité de gain encore égale à 2/3. Enfin le joueur D l'emporte sur le joueur A avec une probabilité à nouveau égale à 2/3 (il obtient un 5 dans la moitié des cas, et dans l'autre moitié des cas, il l'emporte une fois sur trois). Efron a démontré que 2/3 est la probabilité maximale pour un tel ensemble de quatre dés A ; B ; C ; D où $A > B > C > D > A$ (« $>$ » signifiant ici que le dé précédent bat le dé suivant avec une probabilité égale à 2/3).

Efron a trouvé d'autres ensembles de dés présentant la même propriété.



Dans la seconde série de dés, la probabilité de gain d'un dé sur le suivant est également égale à 2/3. Dans la troisième série, on a la possibilité d'obtenir des nombres égaux. On suppose alors que l'on doit rejouer jusqu'à l'obtention de nombres inégaux. La probabilité de gain d'un dé sur le suivant est alors égale à 11/17.

En 1976, dans un article de la revue américaine *Mathematics Magazine*, Richard L. Tenney et Caxton C. Foster décrivent un ensemble de trois dés non transitifs (voir la figure).



A B C

En analysant les couples possibles dans chaque duel, on constate que A gagne contre B, B contre C et C contre A, avec une probabilité à chaque fois égale à 5/9.

Les dés équitables

Les dés cubiques sont universellement utilisés et considérés comme « équitables », ce qui signifie que les occurrences des différentes faces sont équiprobables. Quelles sont les autres formes géométriques permettant d'obtenir des dés équitables ?

Les polyèdres réguliers

Pour des raisons de symétrie, les cinq polyèdres réguliers convexes (dits de Platon) constituent évidemment des dés équitables. Rappelons qu'un polyèdre régulier est constitué de faces qui sont des polygones réguliers et que chaque sommet est l'intersection du même nombre de faces. On ne rencontre que rarement des dés tétraédriques, car ceux-ci « roulent » difficilement, mais les jeux de société et les jeux de rôle ne se sont pas privés d'utiliser les dés octaédriques, dodécaédriques ou icosaédriques, bien que le dé cubique reste très largement majoritaire en raison de la facilité de sa fabrication et de sa grande stabilité.

Les polyèdres semi-réguliers

Les polyèdres semi-réguliers ou archimédiens sont composés de deux ou plusieurs types de polygones réguliers, les sommets présentant toujours le même assemblage de faces. Ils sont au nombre de treize : le tétraèdre tronqué ; le cube tronqué ; l'octaèdre tronqué ; le dodécaèdre tronqué ; l'icosaèdre tronqué ; le cuboctaèdre ; le cube adouci ; l'icosidodécaèdre ; le dodécaèdre adouci ; le petit rhombicuboctaèdre ; le grand rhombicuboctaèdre ; le petit rhombicosi-dodécaèdre ; le grand rhombicosidodécaèdre. À ces polyèdres, il faut ajouter les prismes et les antiprismes semi-réguliers (à l'exception du cube et de l'octaèdre régulier, qui sont un prisme et un antiprisme particuliers). Pour chaque polyèdre semi-régulier, les faces de même type sont équiprobables (ce qui n'est pas le cas pour des faces de types différents). Des prismes ou antiprismes très allongés peuvent ainsi être considérés comme des dés équitables dans la mesure ou la probabilité qu'ils tombent sur une base est suffisamment faible.

Les isoèdres

Il existe d'autres dés équitables constitués de polyèdres ayant des faces toutes identiques ainsi que des sommets présentant le même arrangement de faces, mais dont les faces ne sont pas obligatoirement des polygones réguliers. On peut citer les duaux des prismes et des antiprismes qui constituent des suites infinies de polyèdres (l'octaèdre et le cube pouvant être considérés comme des cas particuliers de ces suites). Tous ces isoèdres possèdent un nombre pair de faces.

Ces deux dés à dix faces en forme de bi-pyramides,
sont des duaux d'antiprismes. *(Photos M. Criton)*

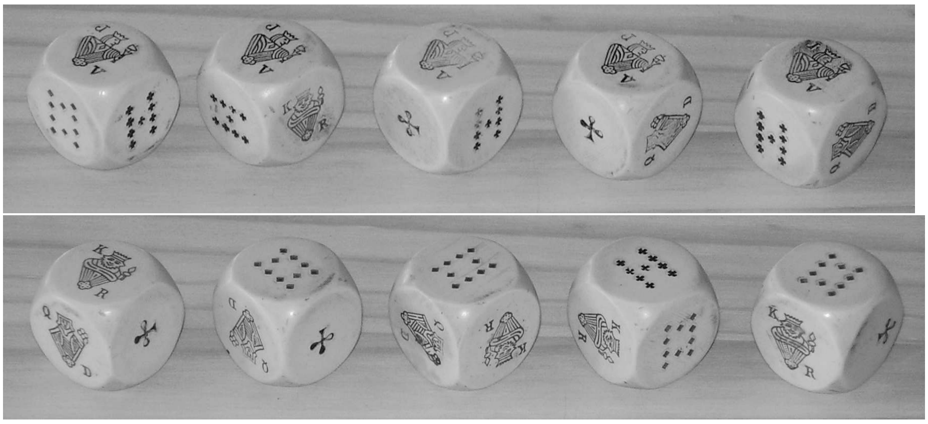
Quelques exemples de jeux de dés

Les dés sont des accessoires d'un très grand nombre de jeux utilisant par ailleurs d'autres matériels (plateaux, pions, figurines, cartes, etc...). Nous n'évoquerons donc ici que des jeux utilisant uniquement des dés et éventuellement une feuille de papier et un crayon pour marquer les points et des jetons qui peuvent servir à matérialiser la mise ou le pot.

La plupart des jeux de dés se jouent en famille ou entre amis, mais quelques-uns sont aussi des jeux de casino dans lesquels les joueurs jouent contre la banque. Il existe donc pour chacun d'eux de nombreuses variantes selon la zone géographique et le cadre dans lequel le jeu est pratiqué. Dans la plupart de ces jeux, le but est de réaliser certaines combinaisons en lançant deux ou plusieurs dés. Le craps, le six ou as, utilisent deux dés ; le 421, le marinetti, le jeu de couronne et ancre, utilisent trois dés ; le poker d'as, le jeu des dés indiens, le yam ou yam's utilisent cinq dés ; le dixmille et le jeu du cochon utilisent six dés ; le vingt-six utilise dix dés.

Le poker d'as

Le poker d'as doit son appellation à une déformation du nom anglais *poker dice*. Il apparaît en France au début des années 1920. Il s'agit d'une adaptation du jeu de poker qui se joue avec des dés au lieu de cartes à jouer. Les dés ne sont pas des dés classiques, mais portent chacun six marques correspondant aux valeurs : as, roi, dame, valet, dix et neuf.



Cinq dés d'un jeu de poker d'as datant du début du XX^e siècle. On remarque que la disposition des marques sur les faces n'est absolument pas standardisée.

(Photos M. Criton)

Le but du jeu est de gagner des jetons en réalisant certaines combinaisons (voir tableau). Lorsque deux joueurs réalisent une même combinaison, ils peuvent être départagés par sa hauteur. Par exemple, une séquence dame-valet-dix l'emporte sur une séquence valet-dix-neuf ou un brelan d'as l'emporte sur un brelan de dames. Le lancer de cinq dés offre 6^5, soit 7776 possibilités (les dés étant différenciés). Pour chaque combinaison on obtient les probabilités ci-dessous.

combinaison	description	gain	probabilité
paire simple	2 faces identiques	1 jeton	25/54
double paire	deux fois 2 faces identiques	1 jeton	25/108
séquence	5 faces qui se suivent	1 jeton	5/162
brelan	3 faces identiques	2 jetons	25/162
full	un brelan + une paire	3 jetons	50/1296
carré	4 faces identiques	4 jetons	25/1296
poker	5 faces identiques	5 jetons	1/1296
aucune		aucun	5/81

Le 421

Ce jeu est un jeu de comptoir. Jusque dans les années 1960, on le trouvait au comptoir de nombreux cafés français. Il est un dérivé d'un jeu plus ancien, le zanzibar, appelé aussi zanzi. Il se joue avec trois dés classiques (numérotés de 1 à 6), en un, deux ou trois coups. Après un premier lancer des trois dés, on peut relancer un dé, deux dés ou les trois dés, en gardant éventuellement les nombres obtenus avec un dé ou deux dés, pour tenter d'améliorer son score. Les combinaisons à réaliser sont les suivantes.

combinaison	description	gain	probabilité
paire as - as - *n*	deux as et un autre nombre *n*	*n* jetons	5/72
autre paire	2 faces identiques autres que « 1 »	1 jeton	25/72
tierce	3 faces qui se suivent	2 jetons	1/9
brelan ou zanzi	3 faces identiques *n*	*n* jetons	1/36
brelan d'as	3 as	7 jetons	1/216
421	un « 4 » un « 2 » et un « 1 »	6 jetons	1/36
autres		1 jeton	5/12

Références

BROLINE D.M., *Renumbering of the faces of dice*, Mathematics Magazine, volume 52, 1979.

CAZEAUX J.-L. & CRITON M., *Les jeux de dés*, Éditions Pole, 2007.

DERRIENNIC Y., *Pascal et les problèmes du Chevalier de Méré*, Gazette des mathématiciens n° 97, Société Mathématique de France, 2003.

DIACONIS P. & KELLER J., *Fair dices*, American Mathematical Monthly (1989).

GARDNER M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, 1989.

GODFROY-GENIN A.-S., *De la doctrine des probabilités à la théorie des probabilités*, thèse de doctorat, 2004.

GRANDJOUAN J.-O., *L'astragale et le pari*, Éditions G.-P. Maisonneuve et Larose, 1969.

LAURENT C.-M., *Tous les jeux de dés et leurs règles*, Borneman, 1967.

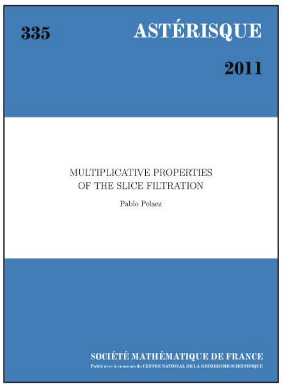
Mathématiques : approche par les textes historiques, IREM Paris VII, brochure 61, 1986.

TEMAM D., *Une obscure affaire de partage*, Tangente n° 47, Éditions Pole, 1995.

TENNEY R.L. & FOSTER C.C., *Non transitive Dominance*, Mathematics Magazine, volume 49, 1976.

Site internet d'Ed Pegg : `http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm`

Site internet de Klaus Æ Mogensen : `http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm`



Astérisque 335

Multiplicative Properties of the Slice Filtration

Pablo Pelaez

Soit S un schéma noethérien séparé de dimension de Krull finie, et $\mathcal{SH}(S)$ la catégorie homotopique stable de Morel-Voevodsky. Afin d'obtenir un analogue motivique de la tour de Postnikov, Voevodsky définit la filtration par les tranches dans $\mathcal{SH}(S)$ considérant les smash-produits itérées de le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Nous montrons que la filtration par les tranches est compatible avec le smash-produit dans la catégorie de Jardine $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ des T-spectres symétriques motiviques. Cette compatibilité a plusieurs conséquences intéressantes. D'entre eux, sur un corps parfait tous les tranches s_q sont canoniquement modules dans $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ sur le spectre motivique d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{Z}$, et si le corps est de charactéristique zéro les tranches s_q sont motifs grands au sens de Voevodsky, cela utilise les résultats de Levine, Röndigs-Østvær et Voevodsky. Nous montrons aussi que le smash-produit dans $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ induit des structures multiplicatives sur la suite spectrale motivique de Atiyah-Hirzebruch.

Let S be a Noetherian separated scheme of finite Krull dimension, and $\mathcal{SH}(S)$ be the motivic stable homotopy category of Morel-Voevodsky. In order to get a motivic analogue of the Postnikov tower, Voevodsky constructs the slice filtration by filtering $\mathcal{SH}(S)$ with respect to the smash powers of the multiplicative group $\mathbb{G}_m$. We show that the slice filtration is compatible with the smash product in Jardine's category $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ of motivic symmetric T-spectra, and describe several interesting consequences that follow from this compatibility. Among them, we have that over a perfect field all the slices s_q are in a canonical way modules in $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ over the motivic Eilenberg-MacLane spectrum $H\mathbb{Z}$, and if the field has characteristic zero it follows that the slices s_q are big motives in the sense of Voevodsky, this relies on the work of Levine, Röndigs-Østvær and Voevodsky. It also follows that the smash product in $\mathrm{Spt}_T^{\Sigma}\mathcal{M}_*$ induces pairings in the motivic Atiyah-Hirzebruch spectral sequence.

ISBN : 978-2-85629-305-8

Prix public* : 60 € - prix membre* : 42 €

* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

ENSEIGNEMENT

Baisse des effectifs : masters de mathématiques et concours de recrutement de professeurs

Valérie Girardin[1]

Les effectifs sont en baisse dans toutes les premières années de masters de mathématiques, baisse plus marquée en filière recherche que pro. Les masters enseignement créés à la rentrée n'ont pas attiré les étudiants, qui ne se sont pas pour autant réorientés dans les autres masters. L'effet précis de la « masterisation » est difficile à mettre en évidence, la baisse des effectifs constatée depuis plusieurs années en licence induisant mécaniquement une baisse des effectifs de master.

Tel est le constat alarmant résultant de l'analyse des réponses reçues à l'enquête menée en novembre 2010 par la SMF via ses correspondants locaux et les responsables de masters. Cette enquête portait sur les effectifs de master, recherche ou pro en mathématiques et enseignement (dirigés vers l'agrégation, le CAPES ou le CRPE[2]) depuis trois ans. En lien avec la « masterisation » des concours de recrutements des professeurs, des informations étaient également demandées sur la prise en compte dans les masters de la nouvelle épreuve « Agir en fonctionnaire de l'état et de manière éthique et responsable » et des certifications prévues pour 2012 d'informatique et de langue étrangère. Des réponses ont été reçues d'une quarantaine d'établissements, dont la diversité des tailles et situations géographiques permet de rendre compte des problèmes généraux. Une première analyse des réponses a été mise en ligne sur le site de la SMF en décembre 2010. Ces inquiétudes sont accentuées par les premières statistiques disponibles de la session en cours des concours de recrutement, par comparaison à celles des dernières années. Les chutes d'effectifs sont vertigineuses au CAPES comme au CRPE, et celles de Master 1 ne peuvent rassurer sur les effectifs probables de candidats aux sessions suivantes. La reconnaissance au plus haut niveau qu'il faut aujourd'hui remettre sur le chantier certains éléments de la formation des maîtres, précédant de peu les premières annonces de mise en œuvre dans certaines académies de masters en alternance[3] dès la rentrée 2011 ne contribue pas non plus à rassurer sur l'avenir et la qualité de cette formation.

[1] Université de Caen.
[2] Concours de Recrutement des Professeurs des Écoles.
[3] Possibilité ouverte par une circulaire du 13 juillet 2010.

Les filières recherche et pro des masters

Les Master 1 sont de trois types : non différenciés (recherche - pro, les étudiants souhaitant se diriger vers le CAPES ne sont pas inclus), ou spécifiquement recherche ou pro. Le maximum des effectifs est de 414 pour les M1 non différenciés, 75 pour les M1 et 305 pour les M2 recherche, et de 46 pour les M1 et 92 pour les M2 pro. Voir le tableau 1.

TAB. 1. Effectifs de master de mathématiques recherche et pro, regroupant 33 universités

	2008-2009	**2009-2010**	**2010-2011**
Master 1			
recherche-pro	870	872	818
recherche	464	439	300
pro	493	416	396
Master 2			
recherche	828	815	774
pro	493	493	574

Les filières enseignement des masters

Enseignement primaire

A priori il existe un master dirigé vers le CRPE dans chacune des 30 académies. Sur les 10 réponses donnant les effectifs sur les trois dernières années, le total varie selon les universités de 82 à 616 en M1PE et de 73 à 946 en M2PE conduisant vers le CRPE.

Enseignement secondaire

Les M1 peuvent être indifférenciés enseignement - recherche - pro notamment (mais pas seulement) dans les établissements dont l'effectif de master est réduit ; les effectifs des M1 enseignement sont alors des estimations, par exemple d'après le type de stage (TER ou stage dans un collège/lycée) choisi, qui permettent une comparaison avec les années antérieures.

Les effectifs cumulés de M1E et M2E[4] des 27 universités ayant répondu n'atteignent presque nulle part ceux de la préparation au CAPES antérieure en IUFM. Ils varient de 5 à 28 en M1E et de 5 à 37 en M2E. Les effectifs d'étudiants préparant l'agrégation (et généralement un M2) des 22 universités ayant répondu varient de 3 à 55. Voir le tableau 2.

TAB. 2. Effectifs regroupant 10 universités pour le CRPE, 27 pour le CAPES et 22 pour l'agrégation

Concours	**2008-2009**	**2009-2010**	**2010-2011 M2**	**2010-2011 M1**
CRPE - M1 PE	6531	5752	4253	5752
CAPES	1140	1044	534	415
Agrégation	446	358	307	voir M1R

[4] Master enseignement conduisant au CAPES de mathématiques.

La « masterisation » a rendu la situation encore plus complexe qu'elle ne l'était pour les futurs professeurs de lycée professionnels de spécialité mathématiques-sciences (PLP-MS) et les masters ou formations très peu nombreuses qui leur sont destinés. Les étudiants préfèrent préparer un CAPES disciplinaire, et ne passent le plus souvent le CRPLP qu'après des échecs répétés, ou si leur profil les a fait refuser en master mono-disciplinaire.

Des questions de compatibilité entre résultat des concours et mise en place des masters se posent, qui doivent être résolues au cas par cas. Quelques exemples concrets : un étudiant de M2 non admissible ayant validé le premier semestre de M2, souhaite suivre les cours de M1 au second semestre pour se représenter au concours l'année suivante ; un étudiant de M2 non admissible mais ayant réussi les UE de préparation à l'écrit, souhaite les préparer à nouveau l'année suivante ; un étudiant du M2 disciplinaire non admissible au CAPES mais admissible au PLP-MS, souhaite préparer le second semestre du M2 PLP-MSP, etc.

Les stages de master

Les lauréats des concours étant en charge de classe à temps plein dès la rentrée suivante, la « masterisation » reposait en partie sur les stages effectués en master. Les stages prévus dans un établissement d'enseignement primaire ou secondaire en masters enseignement dirigés vers le CRPE ou le CAPES sont en observation (l'étudiant assiste à des cours) de 0 à 3 semaines, en pratique accompagnée (l'étudiant assure des cours en présence du professeur responsable de la classe) de 1 à 6 semaines, ou en responsabilité (l'étudiant est seul dans la classe) de 0 à 8 semaines. Ils sont parfois en binôme, même pour les stages dits en responsabilité. Le total est de 6 à 9 semaines en général, avec une moyenne de 4 semaines de stage dit en responsabilité en M2. La recette varie totalement d'une université à l'autre.

Les étudiants désirant préparer l'agrégation ne se voient pas systématiquement proposer de stage en M1 et rarement de stage en responsabilité en M2. Les stages en responsabilité en M2 sont parfois réservés aux admissibles au CAPES, les non admissibles se contentant alors de stages en pratique accompagnée. Par contre, un certain nombre d'universités proposent une ou deux semaines de stages en observation en L3 pour permettre aux étudiants de confirmer leur volonté d'orientation en master enseignement.

Il sera nécessaire de confronter ces durées prévues à celles réalisées en fin d'année, des stages ayant déjà été annulés au premier semestre dans certaines académies bien qu'ils figurent dans les maquettes de master, la validation des ECTS correspondantes devant alors être revue en cours d'année. Des précisions sur les conditions réelles de stage (période par rapport au concours et au déroulement de l'année scolaire, degré réel de responsabilité, niveau) seraient utiles. Des remplacements par des étudiants éventuellement non admissibles, en mars ou avril, d'un professeur titulaire enseignant uniquement en terminale, ou d'un lauréat du CAPES de la session précédente, ont déjà été constatés, posant des problèmes différents mais bien réels aux élèves concernés.

Cette formation pratique en établissement d'une durée moyenne de 2 mois (tous types de stages confondus) est finalement à comparer avec les stages en entreprise de master pro qui durent entre 4 et 6 mois, parfois en M1 et en M2.

Les concours de recrutement

La session 2011 des concours de recrutement des professeurs est la première à prendre en compte les exigences de la « masterisation », les candidats devant être titulaires d'un master début juin pour l'agrégation et avant la rentrée (ou au plus tard à la rentrée suivante) pour le CAPES et le CRPE.

Le nombre de postes au concours de professeurs des écoles a diminué de moitié entre les sessions 2010 et 2011 (précisément 2916 contre 6577). Le nombre de présents aux épreuves écrites 2011 qui ont eu lieu en septembre 2010 a également diminué de moitié (18000 contre 35000). Le nombre d'admissibles, publié par académie, est d'environ 6120, soit 2 candidats par poste à pourvoir. Les épreuves orales d'admission auront lieu en mai 2011. Notons que le nombre de postes ouverts au CRPE privé augmente, avec 731 postes contre 601 en 2010.

Toutes disciplines de CAPES confondues, 21000 étudiants ont passé les épreuves écrites contre 38000 lors de la session 2010. Selon un communiqué du ministère du 16 décembre 2010, « cette proportion globale de candidats, par rapport au nombre de postes proposés, garantit l'exigence de qualité de ce recrutement, avec cependant quelques disparités entre disciplines, allant de 14 candidats présents pour 1 poste en philosophie, à moins de 2 candidats présents pour 1 poste pour les disciplines lettres classiques ou mathématiques ». Dans les faits, ce rapport est nettement inférieur à 2, précisément 0,73 en lettres classiques (135 présents pour 185 postes) et 1,37 en mathématiques (1300 présents pour 950 postes). L'optimisme de ce communiqué est nuancé par une déclaration du 21 décembre du ministère au journal *Le Monde*[5] « Là où n'avons pas assez de candidats, il y a des postes qui ne seront pas pourvus ». En janvier 2011, 7193 candidats ont été déclarés admissibles, pour 4881 postes à pourvoir, soit 1,5 candidat par poste en moyenne (voir le tableau 3[6]). En mathématiques, 1057 candidats ont été déclarés admissibles, soit 1,11 par poste, et en lettres classiques 102, soit 0,55 par poste.

Le même communiqué précise que « Des points d'inquiétude persistent, notamment pour les mathématiques et les sciences physiques, pour lesquelles le nombre de candidats est en baisse constante depuis 2006 ». Le nombre de candidats en mathématiques baisse en fait depuis dix ans (voir le tableau 4[7]). Malgré cette division par trois du nombre de candidats, le rapport entre admissibles et postes était resté supérieur à 1,89, les postes ouverts ayant toujours été pourvus, avec recours à une liste complémentaire en 2001 et 2002. Le rapport entre admissibles et postes n'étant que de 1,11 cette année, il est légitime de se demander si tous les postes seront pourvus.

Notons que pour le CAFEP[8], 90 postes sont à pourvoir, avec 300 présents aux écrits et 210 admissibles. Les postes n'en ont été pourvus qu'une seule fois (en 2009) depuis dix ans, avec en moyenne de l'ordre de 6 candidats présents aux écrits pour un poste finalement pourvu.

---

[5] `http://www.lemonde.fr/societe/article/2010/12/21/percu-comme-plus-eprouvant-l-enseignement-suscite-moins-de-vocations_1456182_3224.html`
[6] Extrait du SIAC2.
[7] Chiffres extraits des rapports du jury.
[8] Certificat d'aptitude aux fonctions d'enseignant du second degré dans les établissements d'enseignement privé sous contrat.

TAB. 3. Les postes à pourvoir et les admissibles de la session 2011 au CAPES externe

Discipline CAPES externe session 2011	**Postes**	**Admissibles**	**Rapport**
Arts plastiques	175	252	1,44
Documentation	145	24	0,16
Éducation musicale et chant choral	120	114	0,95
Histoire et géographie	550	1195	2,17
Langue corse	2	4	2
Langue des signes française	3	7	2,33
Langues régionales : basque	1	1	1
Langues régionales : breton	2	5	2,5
Langues régionales : catalan	1	2	2
Langues régionales : créole	4	10	2,5
Langues régionales : occitan-langue d'oc	4	7	1,75
Langues vivantes étrangères : allemand	175	230	1,31
Langues vivantes étrangères : anglais	790	1141	1,44
Langues vivantes étrangères : chinois	12	18	1,5
Langues vivantes étrangères : espagnol	252	538	2,13
Langues vivantes étrangères : italien	45	120	2,66
Lettres classiques	185	103	0,55
Lettres modernes	800	1011	1,26
Mathématiques	950	1057	1,11
Philosophie	32	70	2,19
Sciences économiques et sociales	72	127	1,76
Sciences physiques et chimiques	300	570	1,9
Sciences de la vie - de la terre	260	585	2,25
Tahitien	1	2	2
Total	**4881**	**7193**	**1,47**

Enfin, 288 postes seront à pourvoir à l'agrégation de mathématiques en 2011. La session 2010 a compté 2332 candidats inscrits, 1177 présents aux épreuves (dont 478 étudiants et 106 normaliens), pour 263 admis (dont 135 étudiants et 99 normaliens). Le nombre de candidats qui se sont inscrits en juillet 2010 est en hausse. Les épreuves d'admissibilité ont lieu fin avril 2011.

Les certificats d'informatique et de langue étrangère

Le certificat informatique et internet-enseignant, ou C2i2e, et le certificat de compétences en langues de l'enseignement supérieur de niveau 2, ou CLES2, seront exigés pour la rentrée suivante de tous les lauréats de la session 2012. Le CEi2e doit « permettre à tout enseignant de toutes disciplines d'avoir une utilisation professionnelle des TICE dans le cadre des pratiques de classe ou plus généralement dans le cadre professionnel ». Un certifié CLES2 « peut comprendre le contenu essentiel de sujets concrets ou abstraits dans un contexte complexe, y compris une discussion technique dans sa spécialité. Peut communiquer avec un degré de spontanéité et d'aisance tel qu'une conversation avec un locuteur natif ne comporte

TAB. 4. Présents, admissibles et postes au CAPES de mathématiques des dernières années.

CAPES de mathématiques	Présents à l'écrit	Admissibles	Postes	Rapport
1999	7332	2274	945	2,4
2000	8038	2067	890	2,32
2001	5676	2109	990	2,13
2002	4948	2213	1125	1,97
2003	4428	2328	1195	1,95
2004	4194	2040	1003	2,05
2005	4074	2473	1310	1,89
2006	3983	2043	952	2,15
2007	3875	2102	952	2,21
2008	3453	1802	806	2,23
2009	3160	1836	806	2,28
2010	2695	1919	846	2,27
2011	1300	1057	950	1,11

de tension ni pour l'un, ni pour l'autre. Peut s'exprimer de façon claire et détaillée sur une grande gamme de sujets, émettre un avis sur un sujet d'actualité et exposer les avantages et les inconvénients de différentes possibilités ». Si 12635 stagiaires IUFM ont obtenu le C2i2e en 2009-2010 pour 18278 inscrits, seulement 5419 étudiants ont obtenu le CLES de niveau 2 ou 3 en France en 2009-2010 pour 8890 qui l'ont présenté.

Une préparation aux deux certificats est proposée dans presque tous les masters conduisant au CAPES cette année, moins généralement pour l'agrégation. Exceptionnellement, certains problèmes de mise en place restent à régler entre IUFM et universités pour la préparation au C2i2e, dont l'obtention paraît poser moins de problèmes que le CLES2, en tout cas pour les étudiants en mathématiques. Le nombre d'heures prévu de préparation au CLES2 est notoirement insuffisant, une vingtaine d'heures en général. À l'automne, quelques universités n'en prévoyait aucune préparation, et une ou deux étaient en cours de certification, ou en train de trouver des solutions pour permettre aux étudiants au minimum de pouvoir utiliser les laboratoires de langues pour s'entraîner. Seule une université a inclus dans le master enseignement un module de langue diplômant.

Les sociétés savantes de langues vivantes ont demandé dès juin 2010 au ministère un assouplissement, soit dans le degré de CLES, soit dans l'élargissement à d'autres certificats déjà délivrés par les universités et dans la prise en compte de modules validés dans les cursus. La conservation en l'état de l'exigence du CLES2 accentuerait encore nettement la chute des effectifs de candidats à tous les concours de recrutement de professeurs pour la session 2012.

L'épreuve « Agir en fonctionnaire ? »

Il apparaît une diversité considérable d'interprétations de cette nouvelle épreuve et de sa préparation selon les universités. La plupart s'inspirent largement de la formation transversale proposée les années passées aux fonctionnaires stagiaires, maintenant incluse dans la formation diplômante pour au moins un tiers des masters enseignement. Cette formation peut prendre la forme de conférences, cours et mini-oraux, études de cas, analyses de situations professionnelles, etc., souvent en lien avec les exemples de sujets diffusés par le ministère au printemps. Les intervenants en sont des inspecteurs, chefs d'établissement, CPE, formateurs IUFM, spécialistes de formations interdisciplinaires et transversales (FIT), mais aussi des philosophes et sociologues, plus généralement des collègues de sciences humaines et sociales. Si les ambitions sont clairement affichées, l'étudiant apprendra ce qu'est « agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable », les contenus varient très fortement d'une université à l'autre. Même pour les étudiants préparant l'agrégation de mathématiques, on va jusqu'à prévoir des cours de droit public et droit administratif.

La formation dispensée est souvent identique pour tous les masters enseignement d'une même université. Rappelons que l'épreuve avait vocation à être non disciplinaire, mais que le choix et l'écriture des sujets sera de la responsabilité du jury disciplinaire de chaque concours, le jury étant le même pour cette épreuve que pour les autres. Des disparités importantes dans son interprétation apparaissent entre disciplines pour l'agrégation dans les recommandations données dans les rapports des jurys de la session 2010.

Pour terminer sur une note positive, notons que l'arrêté du 6 janvier 2011 diminue à partir de la session 2012 à 4,76% la part de cette épreuve dans la note finale de l'agrégation de mathématiques, part qui avait été fixée à 8,33% par l'arrêté du 28 décembre 2009. Le même arrêté rétablit également l'équilibre perdu l'année précédente entre analyse-probabilités et algèbre-géométrie.

Le socle commun de connaissances et de compétences

Bernard Martin

Le texte qui suit est une présentation « située » du socle commun de connaissances et de compétences : j'ai fait des choix en amont qui ont mis en lumière certains aspects du socle tandis que d'autres ont été laissés de côté. Ces choix ont été orientés par la problématique suivante : quels sont les thèmes à aborder qui permettent de donner du sens ? Quels sont les éléments qui sont dans l'obscurité dans une première approche mais qui peuvent être importants pour comprendre l'esprit de cette réforme ?

Le premier thème abordé est ainsi celui des différents cadres institutionnels qui ont participé à l'élaboration de cette réforme : d'où vient le socle ? La section suivante répond à cette question : quel fond y-t-il à ce qu'on nomme aujourd'hui « l'enseignement par compétences » ? On s'intéressera après aux conséquences sur le diplôme national du brevet. Enfin, l'approche de l'enseignement par compétences se veut transversale. On regardera comment les mathématiques peuvent être mises en œuvre dans des zones du socle qui leur sont extérieures.

Les cadres institutionnels

Le socle commun de connaissances et de compétences se situe à l'intersection de trois réalités institutionnelles : l'OCDE, l'Europe et la France.

L'OCDE

Depuis l'année 2000, une soixantaine de pays membres de l'OCDE et de pays partenaires représentant ensemble 90% de l'économie mondiale ont mis en place un programme d'évaluation triennal. Le Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) a pour objectif de fournir des indicateurs comparatifs sur les systèmes d'éducation. Citons le rapport officiel : *« L'enquête PISA vise à évaluer dans quelle mesure les jeunes adultes de 15 ans, c'est-à-dire des élèves en fin d'obligation scolaire, sont préparés à relever les défis de la société de la connaissance. L'évaluation est prospective, dans le sens où elle porte sur l'aptitude des jeunes à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour faire face aux défis de la vie réelle et qu'elle ne cherche pas à déterminer dans quelle mesure les élèves ont assimilé une matière spécifique du programme d'enseignement. Cette orientation reflète l'évolution des finalités et des objectifs des programmes scolaires : l'important est d'amener les élèves à utiliser ce qu'ils ont appris à l'école, et pas seulement à le reproduire »*. La conception épistémologique qui sous-tend cette action est la « littéracie » : c'est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, à produire des jugements fondés sur les mathématiques, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Quelques données élémentaires d'abord. Les contenus des questions de PISA couvrent environ 15% des contenus des programmes du collège. (Taux de Recouvrement selon Antoine Bodin datant du 18 février 2006). Plus de la moitié des élèves français qui passent les tests PISA sont en lycée. Que ressort-il ensuite de cette enquête pour notre pays ? Peut-être que la France ne réussit pas bien en ce qui concerne l'éducation mathématique pour tous. Notre système éducatif a du mal à doter tous les jeunes d'une formation mathématique minimum. Il paraît important de laisser certaines questions ouvertes. Quelle est la validité de ces enquêtes ? Quelles mathématiques sont en jeu ? Qu'est-ce qui est valorisé ? On notera enfin la faible importance que l'étude PISA accorde à la question de la preuve : sans aller jusqu'à l'idée de démonstration (totalement absente), les processus d'explication et de justification sont très peu pris en compte. Cela fait évidemment, une grande différence avec les conceptions françaises habituelles de l'enseignement des mathématiques.

Le cadre européen

Le Livre blanc sur l'éducation et la formation (1996) est l'un des premiers documents qui, dans ses objectifs pour une société de l'apprentissage, propose la création d'un processus européen permettant de confronter et de diffuser largement la définition de « compétences clés » et de trouver les meilleurs moyens de les acquérir, de les évaluer et de les certifier. Quelle analyse sur notre société propose ce document ? Parmi les changements nombreux et complexes, qui traversent la société européenne à la fin des années 90, le Livre blanc distingue trois « chocs moteurs ». Le choc de la société de l'information, celui de la mondialisation et enfin celui de la civilisation scientifique et technique. Parce que « culture générale et formation à l'emploi ont cessé d'être opposées ou séparées » (page 27), le Livre blanc propose alors deux orientations d'actions pour l'éducation et la formation : la revalorisation de la culture générale ainsi que le développement de l'aptitude à l'emploi. Car l'enjeu de cette avancée vers une société cognitive est double. Il est économique et social.

C'est de cette manière que l'action dans le domaine des compétences clés est devenue partie intégrante de la coopération européenne en éducation et de la politique communautaire en matière d'emploi. Au conseil européen de Lisbonne, en mars 2000, les chefs de gouvernement se sont alors assigné un nouvel enjeu stratégique à l'échéance de 2010. Ils se sont engagés à mettre en œuvre « les politiques et réformes nécessaires pour faire de l'économie européenne une économie compétitive, dynamique, basée sur la connaissance et l'innovation ». L'objectif était d'élever le niveau de formation des personnes qui arrivent sur le marché de l'emploi, de les rendre acteurs dans l'économie de la connaissance. La relation inverse niveau d'études/taux de chômage tendant à s'accentuer, l'objectif devient alors que l'Europe relève son niveau d'instruction à la sortie des études. Il s'agissait ainsi d'adopter un cadre européen définissant « les nouvelles compétences de base dont l'éducation et la formation tout au long de la vie doivent permettre l'acquisition : compétences en technologie de l'information, langues étrangères, culture technologique, esprit d'entreprise et aptitudes sociales » ?

Le cadre français

Y-a-t-il un mouvement spécifiquement propre à notre pays qui ait été aussi origine de cette réforme ? Il semblerait que oui. En 1946, le plan Langevin-Wallon, projet global de réforme de l'enseignement et du système éducatif français élaboré à la Libération souligne : « L'enseignement doit donc offrir à tous d'égales possibilités de développement, ouvrir à tous l'accès à la culture, se démocratiser moins par une sélection qui éloigne du peuple les plus doués que par une élévation continue du niveau culturel de l'ensemble de la nation ». Ce sens fut repris par le Président Giscard d'Estaing le 25 juillet 1974 lors de sa première conférence de presse à l'Élysée. Les bases de ce qui devait être le fondement du collège (unique) étaient tracées : « Le premier objectif, c'est l'élévation du niveau de connaissances et de culture des Français [...]. On peut se poser la question de savoir si, à côté de l'obligation de scolarité jusqu'à seize ans, il ne faudrait pas imaginer une autre obligation qui serait de donner à chaque Française et à chaque Français un savoir minimal ».

La question de « la définition d'un savoir commun minimal » ou d'une « culture commune » exigible à la fin de la scolarité obligatoire, à la fin du collège, est restée durant tout ce dernier quart de siècle une question régulièrement éludée.

Le socle commun de connaissances et de compétences est aujourd'hui une obligation juridique. Il a été instauré par la loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école du 23 avril 2005. Elle fait partie de ce qu'on nomme « les textes fondateurs du système éducatif ». Ce texte répond ainsi à la nécessité d'adapter l'école aux exigences et aux attentes nouvelles de la société. Le projet de loi entend répondre au défi que représente le fait que 150 000 jeunes sortent chaque année sans diplôme ni qualification du système scolaire, soit environ 20% d'une classe d'âge. La scolarité obligatoire doit ainsi au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société. Défini par le décret du 11 juillet 2006, le socle est constitué de 7 compétences : la maîtrise de la langue française ; la maîtrise des principaux éléments de mathématiques ; une culture humaniste et scientifique permettant le libre exercice de la citoyenneté ; la pratique d'au moins une langue vivante étrangère ; la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication. En mars 2006, le Haut Conseil de l'éducation recommandait : « Les compétences clés constituent un ensemble transposable et multifonctionnel de connaissances, d'aptitudes et d'attitudes nécessaires à tout individu pour son épanouissement et développement personnel, son intégration sociale et sa vie professionnelle. Elles devraient être acquises au terme de la période obligatoire d'enseignement ou de formation et servir de base à une poursuite de l'apprentissage dans le cadre de l'éducation et la formation tout au long de la vie. ». Le B.O n° 40 du 29 octobre 2009 note alors qu'à compter de la session 2011, l'attestation de maîtrise des compétences au palier 3 du socle commun, est exigible pour l'obtention du diplôme national du brevet.

De nouvelles questions peuvent légitimement rester ouvertes. Quelles sont les intentions du socle ? S'agit-il seulement « d'identifier les connaissances et les compétences nécessaires à tous les jeunes abordant leur vie d'adulte » ?... La finalité du système éducatif évolue-t-elle ? L'efficacité des actions doit-elle être appréciée en fonction de l'impact sur l'emploi ? Y a-t-il des dérives possibles ? Le socle peut-il devenir un critère de qualité, un instrument de comparaison de performances entre établissements ? Enfin, il est légitime de vouloir adapter l'enseignement à notre temps. Mais ne risque-t-on pas à trop glisser de l'abstrait vers le concret, à délaisser un savoir intemporel, certes, mais qui a fait ses preuves pour une attraction vers un temporel par définition souvent éphémère ?

L'enseignement par compétences

Quelles mécaniques peut-on articuler pour construire un enseignement par compétences qui « respire » ? La notion de compétence repose sur celle d'acquis et son évaluation s'appuie sur un concept incontournable, celui du transfert. Cette notion, comme d'autres, peut prêter à confusion. Nous sommes en partie dans le domaine de la psychologie cognitive, et c'est souvent sous cet angle qu'il s'agit d'aborder le sujet. Parler des performances d'un élève, par exemple, ce n'est pas le réduire à un athlète ou à un cheval de course.

Évaluer les acquis des élèves

Aujourd'hui, on compare les systèmes éducatifs en plaçant au centre de cette action les acquis des élèves : que savent nos élèves ? Il s'agit d'un profond changement des représentations et des pratiques pédagogiques. Qu'est ce qu'un acquis ? L'école est là « pour réaliser un certain nombre d'opérations de transformations des élèves qui lui sont confiés ». Ce sont les résultats de ces opérations de transformation qu'on appellera des acquis. S'intéresser à ces fameux acquis est un objectif d'analyse des performances des élèves. C'est positionner explicitement l'évaluation comme partie prenante, et même centrale, des processus d'apprentissage.

Qu'est ce qu'une compétence ?

On peut constater l'introduction, ces dernières années d'une logique de compétences dans les curricula de nombreux pays d'Amérique du nord et d'Europe. La notion de compétence est loin d'être claire et distincte. L'objectif global, lui, est clair : c'est l'approche par compétences de la formation scolaire ou professionnelle. Une compétence repose sur la mobilisation et l'intégration d'une diversité de ressources. Des ressources internes comme des connaissances, des capacités ou des attitudes ; des ressources externes mobilisables dans l'environnement de l'individu comme des documents, ou des outils informatiques. La « mobilisation de ressources » se réalise dans une situation donnée : la compétence se construit à partir de situations contextualisées, mais diversifiées.

On est amené peu à peu à développer une véritable« intelligence des situations ». La notion de compétence ne peut pas être définie indépendamment de son cadre d'apprentissage, et des situations prévues pour son évaluation : une compétence se définit de manière opérationnelle.

Une compétence est un processus, c'est-à-dire qu'on se situe dans une approche dynamique donc évolutive de l'enseignement. Il s'agit d'éviter toute restitution de processus automatisés, de créer une synergie entre l'acquisition de connaissances, le développement de capacités ou d'habiletés et l'adoption d'attitudes.

La tâche à accomplir doit être complexe. Travailler sur des tâches (complexes) n'est pas un objectif, mais un moyen. L'objectif, ce n'est pas de réussir : le « faire » est au service du « comprendre ».

On parle souvent de transversalité dans le socle. C'est que chaque compétence requiert la contribution de plusieurs disciplines, et réciproquement, une discipline contribue à l'acquisition de plusieurs compétences.

Pour terminer, remarquons qu'il ne suffit pas de trouver du plaisir dans une activité ou de l'effectuer minutieusement pour garantir un apprentissage : ce dernier nécessite la stabilisation d'une habileté mentale dont la maîtrise n'est garantie que par le transfert. Une compétence est ainsi une « promesse de transfert ».

Le transfert

C'est la capacité d'un sujet à réinvestir ses acquis cognitifs dans de nouvelles situations. L'objectif est de préparer les élèves à réinvestir leurs acquis dans des contextes variés. Le réinvestissement des acquis antérieurs dans de nouveaux apprentissages scolaires est un enjeu permanent dans les systèmes scolaires. Le transfert de connaissances est le mécanisme qui permet à un sujet d'utiliser dans un nouveau contexte des connaissances acquises antérieurement.

Une connaissance ne se détache des situations où elle a pris naissance – pour un sujet donné – que par un *travail* qui n'est en réalité jamais achevé. Dans des actions complexes, la capacité d'intégrer, d'assembler des ressources diverses est décisive. Il importe donc d'identifier des pratiques pédagogiques, qui, non contentes de garantir des acquis, favorisent leur réinvestissement au-delà de la situation d'apprentissage initiale. Peut-être est-ce simplement une façon de redéfinir à la hausse le niveau de formation visé. Travailler le transfert ne consiste donc pas nécessairement à multiplier les exercices d'application dans des contextes variés. Cela peut aussi bien passer par un approfondissement théorique.

La certification finale exige une capacité attestée de transfert. Pour pouvoir l'évaluer, il faut d'abord la développer. Cela demanderait du temps, de l'énergie, de l'imagination, du renouvellement, toutes choses qui dépendent fortement du rapport des enseignants à leur métier.

S'exercer au transfert, c'est s'habituer à la nouveauté. Faire le deuil du côté sécurisant des exercices traditionnels, avec leurs variations mineures, pour leur substituer des situations face auxquelles chacun est au départ démuni, parce que le problème est encore à identifier et à construire. Parce que, même alors, les solutions ne s'imposent pas à l'œil nu. C'est donc négocier un nouveau contrat didactique avec les élèves, les inviter à admettre qu'affronter l'inconnu, l'incertitude, le désarroi fait partie du métier d'élève, du métier de tous et pas seulement de ceux qui souffrent d'être toujours dépassés par ce qu'on leur demande.

L'évaluation des compétences

Elle pose la question au quotidien du sens même de l'évaluation. Le terme est à clarifier. Ici, il s'agit « d'évaluer pour mieux enseigner et d'être évalué pour mieux apprendre ». Il s'agit donc d'une conception à double sens.

La construction des outils d'évaluation commence par la mise en situation (complexe) de celles-ci. Elle propose aux élèves des tâches nouvelles (pas encore rencontrées ou inédites). Elle demande d'utiliser à bon escient des savoirs et des savoir-faire effectivement appris. Elle a une dimension formative : elle doit tenir compte des progrès et des points forts de l'élève, et signaler ses points faibles et les moyens de les corriger. Elle est globale : elle doit apprécier son attitude face au travail et à l'apprentissage ainsi que son comportement social. Enfin elle est au service des apprentissages.

Cette évaluation se fait à travers les devoirs surveillés, ceux donnés à la maison, ou en situation de classe ; c'est le cas, par exemple, du calcul mental, de l'utilisation des TICE, des attitudes ou capacités liées à la pratique d'une démarche expérimentale ou d'un travail en groupe. Son support a des missions très diverses. Il doit former l'élève en régulant son apprentissage, certifier cet apprentissage, guider et ajuster la démarche du professeur et informer les parents.

Des difficultés de mise en œuvre

La communication en direction des parents doit certainement faire l'objet d'une réflexion spécifique au sein des établissements. Il est clair qu'on peut s'attendre à la légitime difficulté pour les enseignants de proposer des évaluations de compétences. Quelques questions ouvertes pour finir : comment prendre en compte l'évaluation des compétences dites transversales ? On veut accumuler beaucoup de visées. N'y a-t-il pas de risque que cet outil d'évaluation reste flou... donc inefficace ? Comment se préserver de glisser vers un « utilitarisme du savoir » (on « sait pour ») ? Peut-on réduire le savoir en termes d'acquis ? Pour terminer, on peut s'interroger sur une réforme qui peut être vue comme une augmentation des exigences d'enseignement et d'évaluation des élèves. L'urgence du contexte n'est-elle pas celle de la lutte contre le retard et le décrochage scolaire ?

Le Diplôme national du brevet

À compter de cette rentrée 2010, le livret personnel de compétences devient obligatoire au collège. On note 3 paliers d'évaluation (avec attestation) : le palier 1 en fin de cycle 2 (CE1), le palier 2 en fin de cycle 3 (CM2) et le palier 3 à la fin de la 3^{e}. À compter de la session 2011, l'attestation de maîtrise des compétences au palier 3 du socle commun, est exigible pour l'obtention du diplôme national du brevet.

La mise en œuvre avec les autres compétences

On peut définir le socle comme un ensemble composé de trois types d'aptitudes différents : des savoirs, des capacités et des attitudes, regroupés sous la forme de sept sous-ensembles qu'on appelle des compétences. La troisième compétence est celle des « principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique ». De manière plus générale, une compétence, pourra être définie comme un sous-ensemble composé de certains de ces savoirs/capacités/attitudes, sachant que chacune de ces trois ressources doit être représentée au moins une fois.

Ainsi, au-delà de ces sept compétences « institutionnelles », toute nouvelle situation peut être vue comme une compétence à construire. Il s'agit alors d'enrichir cette situation pour qu'elle mette en œuvre un (ou plusieurs) savoir(s) mathématique(s), mais aussi une (ou plusieurs) capacité(s) (issue du socle) et surtout une (ou plusieurs) attitude(s).

Nous abordons deux situations qui permettent de mettre en œuvre des parties du socle qui ne relèvent pas directement des mathématiques.

Activité 1 (niveau troisième)

On a lancé 4 fois de suite une pièce de monnaie (non truquée !) et chaque fois le résultat a été face. Si on lance la même pièce une fois de plus, laquelle des affirmations suivantes sera correcte ?

– On a autant de chances d'obtenir pile que face.
– On a plus de chances d'obtenir pile.
– On a plus de chances d'obtenir face.
– On ne peut pas obtenir à nouveau face.

Activité 2 (niveau sixième)

Une piscine a une forme rectangulaire. L'aire de cette piscine est de $42\,\mathrm{m}^2$. Elle est entourée d'une clôture de forme rectangulaire, qui a un périmètre de 72 mètres.

– Quelles peuvent être la longueur et la largeur de cette piscine ?
– Quelles peuvent être la longueur et la largeur de la clôture ?

L'activité 1, de niveau troisième, entre dans la mise en œuvre d'une des capacités de la troisième compétence, dans la partie non mathématique, la culture scientifique et technologique : « pratiquer une démarche scientifique, savoir observer, questionner, formuler une hypothèse et la valider, argumenter, modéliser de façon élémentaire ».

Voici la compétence mathématique (créée) qui sous-tend cette activité :

Connaissances	Capacités	Attitudes
• Les notions de chance ou de probabilité.	• Raisonner logiquement, pratiquer la déduction, démontrer. • Saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique.	• Le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver. • L'esprit critique : distinction entre le prouvé, le probable ou l'incertain, la prédiction et la prévision.

L'activité 2, de niveau sixième, met en œuvre une capacité issue de la première grande compétence du socle, la maîtrise de la langue française : « Connaître des mots de signification voisine ou contraire ».

Voici la compétence mathématique (créée) qui sous-tend cette activité :

Connaissances	Capacités	Attitudes
• Les principales grandeurs (unités de mesure, formules, calculs).	• Effectuer mentalement des calculs simples et déterminer rapidement un ordre de grandeur. • Saisir quand une situation de la vie courante se prête à un traitement mathématique.	• Le sens de l'observation. • Une attitude critique et réfléchie vis-à-vis de l'information disponible.

Les ressources disponibles

– *La loi d'orientation et de programme pour l'avenir de l'école* du 23 avril 2005 (voir l'article 9).

– *Les compétences-clés européennes : les compétences clés dans un monde en mutation de 2005.*

– *Les acquis des élèves, pierre de touche de la valeur de l'école ?* Inspection Générale de l'Éducation Nationale. (2005).

– Journal officiel de l'Union Européenne (2006) : Recommandation du parlement européen et du conseil du 18 décembre 2006 sur *les compétences clés pour l'éducation et la formation tout au long de la vie.*

– Journal Officiel de la République Française : le décret du 11 juillet 2006 relatif au *socle commun de connaissances et de compétences* en décline le contenu.

– HCE : *Recommandations pour le socle commun* (2006).

– Journal Officiel de la République Française : le décret du 14 mai 2007 relatif au *livret individuel de compétences*.

– *Les livrets de compétences : nouveaux outils pour l'évaluation des Acquis*. Inspection Générale de l'Éducation Nationale (2007).

– Attestation de maîtrise des connaissances et compétences au cours élémentaire première année et au cours moyen seconde année (B.O n° 45 du 27 novembre 2008).

– Arrêté du 9 juillet 2009 et note du DGESCO du 13 juillet 2009 relatifs à *la délivrance du DNB* et *l'attestation de maîtrise des connaissances et compétences du socle commun au palier 3* (B.O n° 40 du 29 octobre 2009).

– Circulaire du 18 juin 2010 : mise en œuvre du LPC.

– HCE : *Le collège. Bilan des résultats de l'école* (2010).

– Groupe Académique d'Animation en Mathématiques : *Guide pratique pour une évaluation par compétences*. (Académie de Reims, février 2009, 49 pages). `www.ac-reims.fr/datice/math/`

– Le Livret Personnel de compétences : *Repères* pour sa mise en œuvre au collège. (50 pages).

– Socle commun de connaissances et de compétences. *Principaux éléments de mathématiques. Banque de problèmes* (36 pages).

– Socle commun de connaissances et de compétences. *Principaux éléments de mathématiques. Vade-mecum* (58 pages).

– Bodin, A. (2006) *Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français*. Bulletin de l'APMEP n° 463.

Réforme des programmes de terminales générales Position de la Société Mathématique de France (janvier 2011)

Une délégation de la SMF composée de Michel Granger, Bernard Helffer et Yann Lefeuvre a été reçue le 5 novembre 2010 par le groupe d'experts de l'inspection générale de mathématiques représenté par Brigitte Bajou, Xavier Sorbe et Geneviève Loridon dans le cadre des consultations de sociétés savantes et associations d'enseignants sur le projet de programme de terminale des filières ES et S.

Informations données par le groupe d'experts

Les projets de programmes sont écrits en concertation avec les autres disciplines scientifiques (sciences physiques et chimie, sciences de la vie et de la terre, sciences de l'ingénieur,...), ce qui explique certaines suppressions, comme celle des barycentres et des transformations qui ne sont pas utilisées dans ces autres disciplines. Le but de cette concertation est de permettre la convergence et l'interaction sur certains points du programme ainsi qu'une tentative d'harmonisation des spécialités (programme spécifique et évaluation).

Le groupe d'experts affirme son souci de garder un esprit mathématique aux programmes de lycée. En particulier dans l'enseignement de spécialité, même si la volonté est de proposer un enseignement plus attractif pour réduire l'écart d'effectifs avec les autres spécialités, l'IG veut conserver un véritable enseignement de mathématiques et non pas de la vulgarisation.

La diminution des horaires de première en mathématiques (4 heures au lieu de 5 heures) est liée au rapprochement voulu entre les premières S et L/ES dans l'espoir de faciliter des réorientations. Cependant, l'accompagnement personnalisé en première (2 heures) et terminale (2 heures) pourra permettre d'approfondir les notions de mathématiques surtout en terminale S où cet accompagnement doit se faire obligatoirement dans les disciplines scientifiques.

Les programmes de terminale ont été conçus pour rester cohérents avec ceux de première et de seconde, pour un enseignement de 6h hebdomadaires (au lieu de 5h30).

Certaines notions de l'analyse ont été repoussées en terminale (étude asymptotique, composition, fonctions trigonométriques...). Certains points ne sont pas encore arrêtés.

Il est envisagé de ne traiter la composition de fonctions et sa dérivée que sur des exemples. Il est également envisagé de ne conserver que les notions de limite d'une fonction à l'infini et de limite infinie en un point. La notion de limite finie d'une fonction en un point disparaîtrait alors des programmes au profit d'une notion de continuité « globale » en lien avec le théorème des valeurs intermédiaires.

L'introduction demandée par les physiciens des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants a été écartée. L'intégrale sera définie d'abord comme l'aire sous la courbe d'une fonction positive comme actuellement, puis reliée rapidement aux primitives. L'intégration par parties disparaît du programme car jugée trop systématique et calculatoire. Les suites adjacentes et les fonctions racine n-ièmes sont aussi supprimées.

Certains domaines de la géométrie disparaissent du lycée (barycentres et transformations) où elle se réduit en terminale à la géométrie affine et vectorielle en dimension 3. Les nombres complexes sont maintenus uniquement pour leur utilité en sciences de l'ingénieur, avec des applications géométriques réduites du fait de la suppression des transformations.

En probabilités-statistique, la loi normale apparaît par approximation asymptotique de lois binomiales pour introduire la notion d'intervalles de confiance. La loi exponentielle avec absence de mémoire sera conservée. Le dénombrement disparaît du programme de terminale et les densités ne seront plus abordées d'un point de vue théorique.

Pour la spécialité de terminale S (2 heures hebdomadaires), l'arithmétique, à mettre en liaison avec la cryptographie, est conservée et l'introduction des processus markoviens via les matrices stochastiques est évoquée, pouvant peut-être même aller jusqu'à la recherche de valeurs propres.

Faute de temps et faute d'enseignement de spécialité en première, l'enseignement de spécialité en ES se réduit à celui des graphes.

Commentaires et réactions de la SMF

Nous regrettons qu'il n'ait pas été possible, dès la consultation sur les projets de programmes de seconde en mai 2009, d'avoir l'ensemble des programmes du cycle terminal, ou même du lycée, ce qui aurait permis une réflexion globale plus efficace. Nous nous plaçons dans la suite de la contribution de la SMF du mois de mai sur les programmes de première (voir `http://smf.emath.fr/content/prises-de-position-sur-lenseignement-secondaire`) et en rappelons les grands principes. L'objectif fondamental de l'enseignement des mathématiques est de former les élèves au raisonnement et à l'esprit critique, qualités fondamentales pour la poursuite d'études dans les domaines scientifiques. En ce sens retarder la spécialisation en harmonisant les programmes de première générale est une erreur fondamentale. L'esprit des programmes est de plus en plus tourné vers l'aspect numérique et calculatoire ce qui est très regrettable : cela se ressent ensuite dans les études supérieures où les étudiants ont de plus en plus de difficultés avec les aspects théoriques des mathématiques et n'en privilégient que les applications numériques.

Rappelons que l'écriture des programmes est clairement de la responsabilité de l'Inspection Générale de mathématiques et du groupe d'experts qu'elle a suscité. Nous nous réjouissons de la volonté du groupe d'experts de conserver un esprit mathématique aux programmes du lycée.

Le souci de concertation du groupe d'experts avec les autres disciplines scientifiques est une bonne initiative. Cependant cette consultation interdisciplinaire ne doit pas servir de prétexte à des suppressions (comme à celle des barycentres). Les mathématiques, comme les autres sciences, sont une discipline à part entière et ne doivent pas devenir une discipline au service exclusif des autres.

Nous déplorons une nouvelle fois les conséquences de la forte diminution des horaires en première, de plus non entièrement compensée en terminale. Penser à utiliser, pour y remédier, l'accompagnement personnalisé en première et terminale pour approfondir les notions de mathématiques nous semble aller à l'encontre du principe égalitaire de l'enseignement secondaire public : certains enseignements ne seront pas offerts partout, ce qui créera de fait une concurrence regrettable entre matières à l'intérieur d'un même établissement et entre lycées d'un même bassin d'enseignement.

Les passerelles L/ES vers S nous semblent illusoires, et à l'inverse, par un effet mécanique, les élèves risquent d'être rendus moins conscients des enjeux d'une terminale S. En même temps ils seront toujours, et même encore plus, attirés par cette filière comme étant celle qui ouvre le plus de portes vers des études supérieures.

L'apprentissage des notions délicates doit être raisonné et progressif. Certaines notions fondamentales de l'analyse étant repoussées en terminale, les élèves auront moins le temps de les appréhender et donc de les assimiler. Certaines notions, certes difficiles, sont indispensables à un cursus scientifique et différer leur introduction dans les programmes ne fait que compliquer leur acquisition. Le saut qualitatif et quantitatif lors du passage de la première à la terminale, déjà important avant la réforme, deviendra certainement insurmontable pour une partie des élèves.

Cette diminution a déjà abouti en première à l'affaiblissement des programmes, avec en particulier des coupes sombres en géométrie. Nous avions dénoncé dès l'annonce du programme de seconde ce déséquilibre entre les différents domaines des mathématiques : analyse, géométrie, probabilités-statistique. Ce défaut n'est pas atténué dans l'ensemble du cycle terminal, au contraire.

Le niveau de la terminale S se verra dans les faits revu à la baisse. Le saut qualitatif entre secondaire et enseignement supérieur sera alors accru, point sur lequel la SMF est particulièrement vigilante. Nous pensons que la terminale S n'est pas une fin en soi mais une ouverture vers la poursuite d'études. La question de l'adéquation des programmes des CPGE se pose également, pas seulement en probabilités et statistique.

Les carences dans l'aptitude basique au raisonnement et les compétences en calcul, qualifiées de « calcul manuel », sont un problème croissant dans le supérieur. Le succès plus que mitigé des restitutions organisées de connaissances serait à analyser précisément. Nous maintenons les réserves exprimées en mai 2010 quant à la dégradation des aptitudes au calcul des élèves. L'apprentissage de l'usage des calculettes est louable mais doit s'accompagner d'une compréhension en amont des objets étudiés que ce soit pour le calcul ou le tracé de graphes. Il serait utile dans le cadre d'un cours sur l'aléatoire de remarquer que seuls des nombres pseudo-aléatoires sont générés, sous peine de confusion entre aléatoire et simulation.

Les programmes de terminale doivent certes rester cohérents avec ceux de première mais aussi l'être avec ce qui est enseigné dans le supérieur. La SMF est attachée au sens mathématique des mots : les termes employés dans les programmes officiels doivent refléter des notions mathématiques bien établies. Les études secondaires doivent être l'occasion de formaliser certaines notions, le programme ne doit en aucun cas devenir un catalogue de recettes sans arrière-plan théorique reconnu. Un certain nombre de points nous inquiètent particulièrement dans ce sens.

Ainsi, la disparition totale de pans entiers de la géométrie (barycentres et transformations) est consommée en terminale où elle se réduit au sujet certes intéressant mais limité de la géométrie affine et vectorielle en dimension 3. Nous ne comprenons d'ailleurs pas, dans ce cadre, la disparition des barycentres. Notons que l'étude des nombres complexes perd de sa substance par réduction des applications potentielles de nature géométrique qui montraient l'intérêt et l'importance du sujet en mathématiques. Cette diminution de la géométrie est symptomatique de la volonté de se tourner plus vers l'aspect calculatoire des mathématiques que vers les principes fondamentaux de réflexion intellectuelle.

La notion de limite finie en un point ayant déjà été abordée en classe de première pour la définition du nombre dérivé, il serait étrange de l'éliminer du programme de terminale. De façon liée, la continuité est structurellement une notion locale et ne doit pas figurer en terminale sous un aspect uniquement « global » qui paraîtrait saugrenu en mathématiques.

L'idée de ne parler de composée de deux fonctions que sur des exemples paraît bien réductrice. Les élèves doivent apprendre à manipuler des définitions et formules générales aussi bien pour la dérivation que pour le calcul des limites sous peine de ne plus avoir qu'à apprendre par cœur un catalogue de formules sans aucun cadre mathématique réel.

La démarche de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants est similaire à celle demandée par la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre un. Elle aurait pu permettre de dégager une amorce de théorie générale sur les équations différentielles linéaires. Les notions d'espace vectoriel pour les équations homogènes et d'espace affine pour les équations avec second membre pourraient ainsi être sous-jacentes.

Le théorème d'intégration par parties est un outil fondamental du calcul intégral qui a toute sa place en terminale S, et dont l'application pour des densités de probabilité est indispensable. Le remplacer par des questions du type « Vérifier que la fonction définie par ... est une primitive de ... sur ... » ou « Un logiciel de calcul formel donne le calcul d'intégrale suivant... » serait d'un intérêt pédagogique bien moindre.

La base historique de l'enseignement des probabilités est le dénombrement dont nous déplorons la disparition complète du programme de terminale. À l'inverse, parvenir à faire comprendre à un élève de terminale la place fondamentale de la loi normale générale en probabilités nous semble utopique.

L'étude de lois à densité devrait permettre une mise en évidence substantielle des liens entre les mathématiques et leur application, par exemple de faire le lien avec le cours sur l'intégration à travers la fonction de répartition, et ainsi, pour la loi exponentielle, avec l'application à l'analyse des durées de vie.

Même si nous craignons que son utilisation ne se réduise dans les faits à l'utilisation de tables, l'introduction de la loi normale standard permettra cependant de justifier la notion mathématique d'intervalle de confiance, notion reconnue de statistique inférentielle. L'introduction d'intervalles unilatères serait appréciable de par leurs nombreuses applications. Le risque de confusion avec la notion d'intervalle de fluctuations restera majeur, si cette dernière subsiste ; rappelons que cette notion apparue récemment dans les programmes de seconde est si peu canonique qu'il avait été jugé nécessaire de l'y définir spécifiquement, contrairement à toutes les autres notions du programme.

Nous regrettons que, faute de temps encore une fois et faute d'enseignement de spécialité en première, l'enseignement de spécialité en ES se réduise finalement à celui des graphes. Pour la spécialité de mathématiques de terminale S, la volonté de proposer un enseignement plus attractif, qui est positive en soi, ne peut constituer la seule base de choix du programme. Le but ne doit pas être d'attirer les élèves vers cette spécialité pour augmenter son effectif, mais pour son intérêt dans la poursuite d'études supérieures, en particulier par un approfondissement de la démarche mathématique. L'idée d'y introduire des processus markoviens via les matrices stochastiques est intéressante à condition qu'elle se fasse en lien avec des notions d'algèbre linéaire (par exemple la notion de valeur propre évoquée lors la réunion). Sinon on peut craindre que cela se résume à une application de recettes ou de simulations sans argument théorique. Rappelons qu'une nouvelle spécialité « Informatique et sciences du numérique » sera créée, sur laquelle aucune information n'est disponible actuellement, ni sur les enseignants concernés ou leur formation à prévoir, ni sur le contenu en termes de programme, même succinct.

INFORMATIONS

En France, les femmes sont largement exclues du recrutement des enseignants-chercheurs en mathématiques[1]

Laurence Broze, Camille Ternynck[2]

La question de l'égalité entre les femmes et les hommes dans l'enseignement supérieur reste toujours d'actualité en dépit des mesures prises à la suite de la convention interministérielle du 25 février 2000, pour l'égalité entre les femmes et les hommes, dans le système éducatif. La situation est inégalitaire dans l'ensemble des disciplines de l'enseignement supérieur et la recherche publique mais l'association *femmes et mathématiques* a montré que le problème était bien plus préoccupant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques et que la part des femmes n'avait pas cessé d'y diminuer en dépit de l'augmentation du nombre de postes ouverts[3]. Dans les conclusions du récent colloque MATHS A VENIR 2009, on note que « sans action volontariste dans ce domaine, la communauté mathématique restera, notamment, largement masculine ».

Cet article porte sur le point essentiel de la représentation des femmes au sein des comités de sélection chargés de procéder au recrutement des enseignants-chercheurs à l'université pour des postes en sections 25 et 26.

Les femmes dans l'enseignement supérieur en 2009.

Dans les universités françaises, la part des femmes professeures (PR) ou maîtres de conférences (MCF) est plus faible que celle des hommes[4]. Les chiffres de 2009 montrent que 34% des enseignants-chercheurs sont des femmes (20% de femmes chez les PR, 42% de femmes parmi les MCF).

Dans le domaine des mathématiques (sections CNU 25 et 26), la part des femmes professeures ou maîtres de conférences est bien plus faible. En effet, les femmes représentent seulement 21% des enseignants-chercheurs. Et elles sont très peu présentes au sein des professeurs, puisque seulement 11% d'entre eux sont des femmes. Les maîtres de conférences comptent 27% de femmes, ce qui reste très médiocre.

[1] Ce travail a bénéficié du soutien de la mission égalité femmes/hommes de l'université Lille 3.
[2] EQUIPPE (EA 4018), université Lille 3 et association *femmes et mathématiques*
[3] Voir à ce sujet : « En France, les mathématiques attendent plus de femmes », L. Broze et V. Lizan, *Matapli*, 89, mai 2009.
[4] Source : `http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid22708/bilans-et-statistiques.html`.

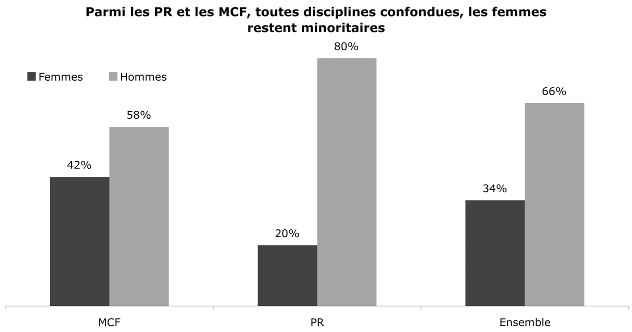


FIG. 1. Répartition des enseignants-chercheurs, en France, en 2009.

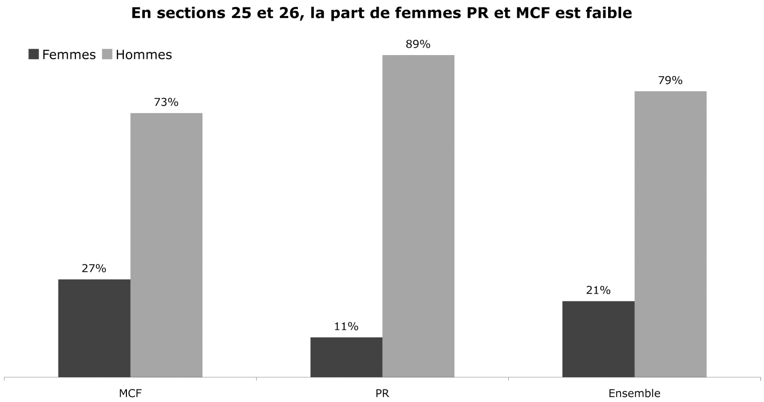


FIG. 2. Répartition des enseignants-chercheurs en mathématiques, en France, en 2009.

Composition des comités de sélection de la session du printemps 2010

La réforme des universités en 2007 a mis en place un nouveau système de recrutement des enseignants-chercheurs qui repose sur le travail de comités de sélection. Ces comités obéissent à des règles assez complexes quant à leur composition et leur fonctionnement. Pour la bonne compréhension de cet article, retenons ici quelques points principaux[5]. Les comités comportent de 8 à 16 membres. Ils sont nommés par les conseils d'administration restreints aux enseignants-chercheurs sur proposition du président ou de la présidente de l'université. Pour recruter au niveau maître de conférences, le comité comporte moitié de professeurs et moitié de maîtres de conférences. Les comités chargés de recruter au niveau professeur comportent seulement des professeurs. Notons enfin qu'un comité siège valablement si la moitié de ses membres est présente, parmi lesquels une moitié au moins de membres extérieurs

[5] Nous n'entrons pas ici dans tous les détails techniques que les lecteurs pourront trouver dans le décret n° 2008-333 du 10 avril 2008. Notons qu'une circulaire récente du 24 décembre 2010 a précisé certains points en référence à une décision du Conseil constitutionnel du 15 décembre 2010. Cette circulaire, pas plus que le décret n'aborde la question de la représentation hommes/femmes dans les comités.

à l'établissement. Cette dernière règle favorise la présence de membres extérieurs dans les comités et permet notamment de rééquilibrer la présence de femmes dans les comités des établissements où elles sont peu nombreuses. Notons enfin que le conseil d'administration restreint aux enseignants-chercheurs désigne aussi, sur proposition du président de l'université, le président du comité de sélection parmi ses membres. Il n'y a aucune contrainte quant au choix de ce président, contrairement aux anciennes commissions de spécialistes pour lesquelles le président était un professeur de l'établissement.

La manière dont le président de l'université formule les propositions de comité à soumettre à son conseil d'administration n'est pas fixée par le décret. Elle varie d'une université à l'autre, d'un président à l'autre. Certains présidents délèguent ce travail aux UFR ou aux laboratoires de recherche, d'autres à des commissions disciplinaires chargées d'animer des viviers, etc

Le décret précise que la composition des comités de sélection doit être rendue publique avant le début de ses travaux. Cette règle nous a permis de compléter les données disponibles sur l'« Opération Postes » (`http://postes.smai.emath.fr/2010/concours.php`) et de constituer une base de données concernant les comités de sélection relatifs à la session du printemps 2010 (dite synchronisée).

Les membres des comités de sélection

Avant d'entrer dans les détails de la composition des comités, notons ces chiffres stupéfiants :

pour le recrutement des MCF :
- en section 25, 13 comités sur 52 ne comportaient aucune femme
- en section 26, 7 comités sur 95 ne comportaient aucune femme

pour le recrutement des PR :
- en section 25, 15 comités sur 28 ne comportaient aucune femme
- en section 26, 18 comités sur 45 ne comportaient aucune femme.

Regardons à présent la composition détaillée de ces comités. Pour le recrutement des maîtres de conférences en section 25, sur les 684 membres des comités de sélection, on compte 73 femmes[6] : elles ne représentaient donc que 11% de ces comités alors qu'elles constituent 16% de la section 25 (21% pour les MCF et 6% pour les PR).

On constate que les femmes sont moins présentes au sein des professeurs (PR) qu'au sein des maîtres de conférences (MCF). La part des femmes maîtres de conférences internes (MCF INT) à l'université est plus élevée que celle des femmes maîtres de conférences externes (MCF EXT) à l'université : les universités n'ont donc pas utilisé la nouvelle réglementation pour augmenter la représentation des femmes au sein des comités de sélection. Pour les comités relatifs au recrutement de professeurs en section 25, la part des femmes est de 7% puisqu'elles ne sont que 20 parmi les 269 membres qu'ont comptés ces comités. Cette proportion est

[6] Il n'a pas été tenu compte des cumuls de mandats, c'est-à-dire qu'une personne nommée dans plusieurs comités est comptée autant de fois que de comités.

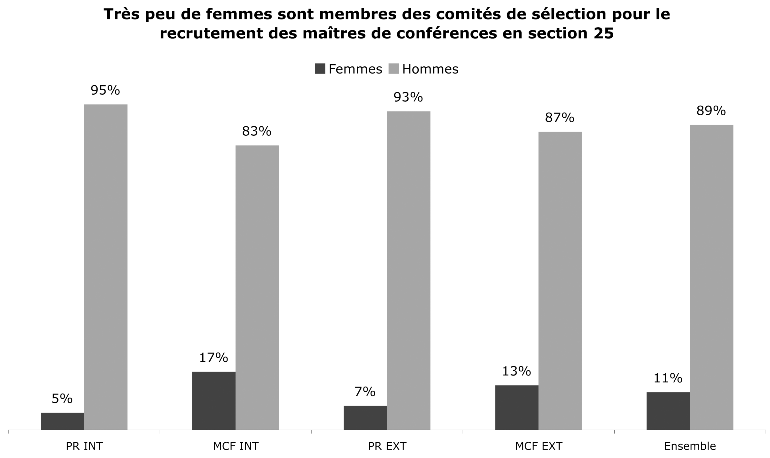


FIG. 3. Répartition des membres des comités de sélection des maîtres de conférences, de la section 25, pour le recrutement 2010.

conforme à la très faible part que représentent les femmes au sein du corps des professeurs de section 25.

FIG. 4. Répartition des membres des comités de sélection pour le recrutement 2010 des professeurs en section 25.

Les comités de sélection pour le recrutement des maîtres de conférences de la section 26 comptaient 1 226 membres dont 249 femmes, c'est-à-dire 20% alors que les femmes représentent 25% des membres de la section 26 (30% pour les MCF et 13% pour les PR).

On note un léger effort pour intégrer des femmes extérieures au sein des professeurs avec une part de femmes de 16% chez les professeurs externes et de 12%

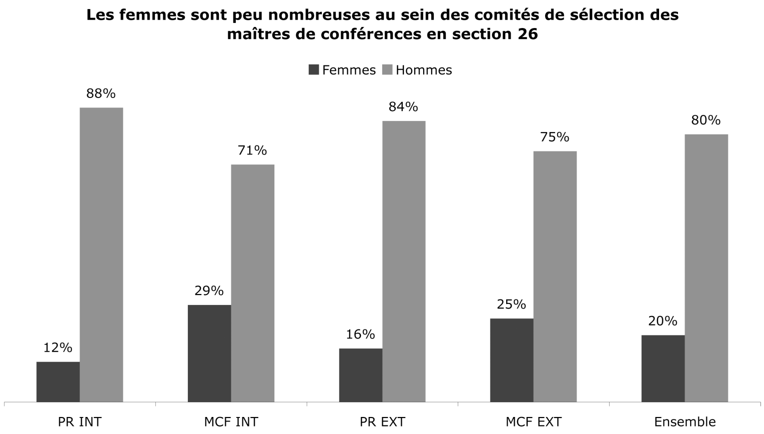


FIG. 5. Part des membres des comités de sélection pour le recrutement 2010 des maîtres de conférences en section 26.

chez les professeurs internes. Pour les comités relatifs au recrutement de professeurs en section 26, la part de femmes est de 12%, avec 51 femmes et 369 hommes membres, chiffre aussi faible que les 13% que les femmes représentent au sein des PR de la section 26.

FIG. 6. Répartition des membres des comités de sélection des professeurs de la section 26 pour le recrutement 2010.

Présidence des comités de sélection

En 25ème section du CNU, 80 postes ont été publiés dont 52 postes de maîtres de conférences et 28 postes de professeurs. Pour ces comités, 95% des présidents ont été des hommes.

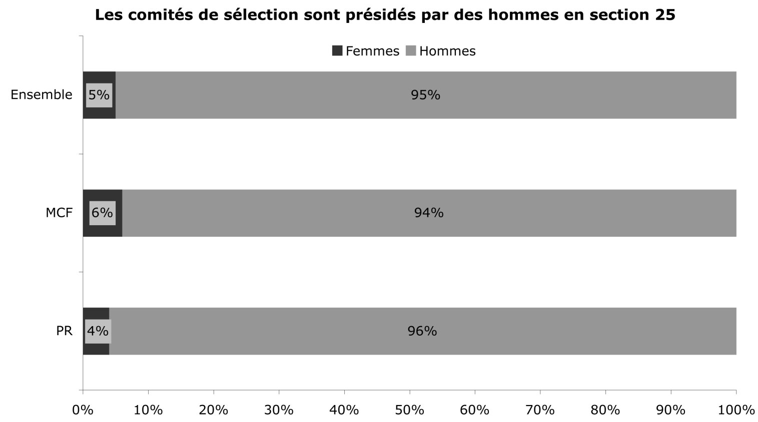


FIG. 7. Genre des présidents des comités de sélection pour le recrutement 2010 en section 25.

En 26e section du CNU, sur 133 comités de sélection, 17 sont présidés par des femmes. Cela signifie que les présidents des comités de sélection des enseignants-chercheurs en section 26 comptent près de 13% de femmes. Cette part reste très faible, même si elle est supérieure à celle constatée pour le recrutement en section 25 du CNU.

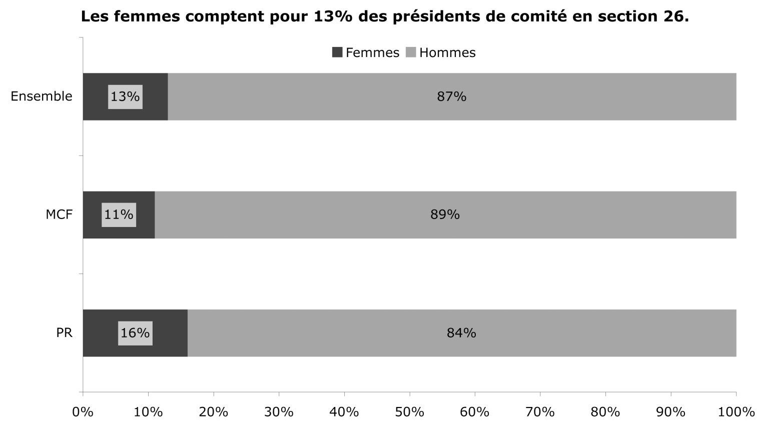


FIG. 8. Genre des présidents des comités de sélection pour le recrutement 2010 en section 26.

Conclusion

En dépit de la réglementation qui permet de rééquilibrer la composition des comités de sélection dans les établissements où les femmes sont peu nombreuses, on constate que les femmes sont sous-représentées, presque invisibles dans les comités en mathématiques. On constate même que 53 comités de sélection n'ont comporté aucune femme durant le concours de la session synchronisée 2010. Une discrimination aussi marquée existe peut-être dans d'autres disciplines, mais aucune étude n'est disponible à ce sujet.

En l'absence de directives venant du Ministère, certaines universités ont mis en place ou réfléchissent à des dispositions permettant de favoriser une présence plus équilibrée des femmes comme, par exemple, l'interdiction de comités « uni-sexe » ou de comités ne comportant pas un pourcentage minimal de chacun des sexes. Des actions de ce type pourraient aisément être relayées et proposées dans tous les établissements. En effet, le décret n° 2009-460 du 23 avril modifiant le décret dit « statut des enseignants-chercheurs » n° 84-431 du 6 juin 1984 prévoit dans son article 1 que : « Aucune distinction, directe ou indirecte, ne peut être faite entre les enseignants-chercheurs en raison de leur sexe. » et aussi que : « Toutefois des distinctions peuvent être faites entre les femmes et les hommes en vue de la désignation par les autorités qui en sont chargées des membres des jurys et des comités de sélection ou instances constituées pour le recrutement, l'évaluation ou la carrière des enseignants-chercheurs, afin de concourir à une représentation équilibrée des femmes et des hommes dans ces organes. »

Ainsi la loi prévoit bien une représentation équilibrée des hommes et des femmes dans les comités de sélection, les instances de recrutement, d'évaluation ou pour la carrière des enseignants-chercheurs. Ceci signifie en particulier que, dans les établissements où il y a très peu de femmes, les instances doivent prévoir une représentation des femmes plus importante que celle du vivier local correspondant.

Seules une prise de conscience collective et une volonté de l'ensemble de la communauté mathématique peuvent permettre aux femmes mathématiciennes de jouer le rôle qui leur revient aussi dans les procédures de recrutement.

Dixième Forum des jeunes mathématicien-ne-s

Aline Bonami[1]

Ceci est un bilan tout à fait personnel[2] du forum des jeunes mathématicien-e-s 2010 qui s'est tenu au CIRM du 22 au 24 novembre. Celui-ci a rassemblé plus d'une quarantaine de participants et intervenants, dont 17 doctorants et doctorantes. On trouvera le programme sur le site internet de Femmes et Mathématiques [3].

Le projet

Les neuf premiers forums des jeunes mathématiciennes avaient été organisés par l'association Femmes et Mathématiques (F&M) suivant une périodicité variable, le neuvième s'étant déroulé sur deux jours à l'Institut Henri Poincaré en 2009. Le projet 2010 est issu de l'intérêt porté par la Mission pour la place des femmes du CNRS (alors dirigée par Agnès Netter) pour ce type d'évènement, du fait que c'était l'occasion de faire du mentorat à destination des jeunes femmes, ce qu'elle souhaitait promouvoir. La Mission pour la place des femmes était prête à donner des moyens assez importants pour le forum si cette manifestation changeait d'échelle, était programmée pour les quatre années à venir, et si de plus c'était l'occasion d'actions de mentorat. Il s'agissait donc à la fois de s'appuyer sur l'expérience de Femmes et Mathématiques et d'innover sur certains points. J'ai été rapidement associée aux réunions communes à F&M et à la Mission pour la place des femmes au CNRS. Je me suis occupée de la constitution d'un comité de programme que j'ai été chargée d'animer.

L'idée d'une première rencontre au CIRM s'est tout de suite imposée, ainsi que celle d'avoir pour chacune des quatre rencontres un thème scientifique différent. Beaucoup de discussions ont porté sur le mentorat, avec la présence pour une partie de celles-ci d'Annie Ducellier, responsable du cabinet de conseil Isotélie, qui est spécialisé dans la mise en place de politiques d'égalité et de mixité au sein des entreprises. Il n'était pas clair pour moi que ce soit au niveau du doctorat que les femmes aient besoin d'aide spécifique, par rapport en particulier aux collègues en début de carrière, entre le recrutement comme maître de conférences et le recrutement comme professeur (ou, disons, 45 ans). Mais ce choix ne pouvait être remis en question. En revanche nous avons insisté pour que la cible ne soit pas la préparation du concours CNRS mais tous les recrutements de chercheurs et enseignants-chercheurs. De nombreuses discussions ont aussi porté sur l'ouverture aux conférenciers ainsi qu'aux participants hommes. J'ai personnellement pris fortement parti pour cette ouverture, qui avait d'ailleurs déjà eu lieu par le passé, mais n'avait probablement pas été affichée ouvertement. En particulier le dernier appel d'offres était explicitement ouvert aux doctorants hommes. Du coup l'appellation du forum s'est mise à osciller entre *forum des jeunes mathématiciennes* et *forum des jeunes mathématicien-ne-s*.

[1] Professeur émérite à l'université d'Orléans.

[2] Merci aux nombreuses relectrices, et en particulier à Valérie Berthé, Christine Charretton et Céline Grandmont.

[3] `http://www.femmes-et-maths.fr`

Même si l'organisation générale se situait dans la continuité des forums précédents, il fallait faire des choix quant à la durée, au format, à l'organisation. Ceux-ci ont été faits pour l'année 2010, avec l'idée qu'on tiendrait compte de l'expérience acquise pour les années à venir. On trouvera le programme et la composition des différents comités à l'adresse :
`http://www.femmes-et-maths.fr/wp/index.php/?p=474#more-474`

L'orientation scientifique, les conférences plénières de mathématiques

On a eu des exposés superbes, en particulier les deux mini-cours. Tous les exposés menaient à des problèmes ouverts, pour la plupart d'énoncés simples mais faisant appel à des notions profondes. On a vu comment les côtés applicatif, numérique, théorique pouvaient se mélanger et se compléter. Les conférencier-ère-s ont vraiment fait des efforts pour s'adapter à un public de jeunes chercheurs.

La preuve était donnée à nouveau, si jamais elle avait été nécessaire, qu'une manifestation scientifique de cette qualité pouvait être planifiée, organisée par des femmes, avec une très large majorité de femmes parmi les conférenciers. Le fait qu'il y ait eu un thème scientifique, et que tout le spectre des mathématiques n'ait pas été couvert comme dans les forums des années précédentes, a été bien reçu par les participants.

L'adéquation entre les exposés et le public appelle toutefois quelques commentaires. Au vu de la qualité du programme, on pouvait espérer une audience plus large. Or il y a eu peu de public marseillais et très peu de public spécifiquement attiré par celui-ci en dehors des jeunes participants. Peut-être y a-t-il eu manque d'information. Au-delà d'erreurs de communications faciles à corriger, se pose le problème d'une réelle demande en France de manifestation scientifique qui soit à la fois ciblée sur les problèmes de parité et de nature à attirer un public spécialisé, à l'image de ce qui se fait par exemple à l'*Institute for Advanced Studies* à Princeton. Comment faire, si on souhaitait s'orienter dans cette direction, pour attirer non seulement un public de doctorants, mais aussi de jeunes chercheurs et enseignants-chercheurs ? Il y a certainement nécessité de moyens : il faudrait pouvoir prendre en charge tous les participants financièrement et faire un appel à exposés pour chercheurs confirmés en augmentant la durée de la manifestation. Mais, même à ce prix, il convient de s'interroger sur le désir des mathématiciennes de se retrouver à un colloque scientifique de ce type, dans un environnement différent de leur environnement habituel du fait de la prise en compte d'une composante parité.

Les exposés des doctorants

Ils se sont déroulés de façon standard, dans deux sessions parallèles. Il est dommage que les deux salles n'aient pas été plus proches, et mieux adaptées. Il y a eu plus de questions qu'à l'habitude, mais les jeunes auraient certainement été preneurs de plus de conseils ou de possibilités de discussions après leurs exposés. Il n'y a pas eu réellement de mentorat scientifique, et le suivi (sous la forme d'un contact possible, par exemple) n'a pas encore été mis en place. Les communications ont été bonnes, voire très bonnes, dans l'ensemble.

Du côté des critiques, on peut mettre le fait que l'accent avait été mis, côté scientifique, sur les conférences plénières du matin. Il est difficile de rester concentré pendant autant d'exposés ! Du coup les communications des doctorants étaient plutôt vues côté mentorat, ce qui privilégiait de facto la forme de l'exposition par rapport au fond, même si on a veillé à ce qu'il y ait toujours des séniors qui posent des questions.

On pourrait imaginer un autre format, où, en dehors d'un exposé par jour, par exemple, le contenu scientifique soit apporté par les jeunes eux-mêmes, avec une vraie discussion après chaque exposé.

La mixité

C'est le premier forum organisé par F&M qui est vraiment affiché comme mixte ; il y avait une certaine inquiétude de la part de certaines d'ouvrir explicitement le forum aux garçons : y avait-il risque de voir les hommes occuper le terrain et détourner l'esprit du forum ? De fait il n'y avait aucun risque de voir les hommes l'emporter numériquement puisque les communications étaient sélectionnées par le comité scientifique, auquel il était possible de donner des consignes. Deux garçons se sont inscrits et ont participé, et leur présence a été jugée très positive par les participantes (avec, pour certaines, la question de savoir s'il faut limiter la proportion d'hommes). Le fait que le forum soit ouvert aux hommes, dans des proportions à discuter, semble acquis pour l'avenir. En même temps, certaines participantes ont trouvé reposant d'être dans un environnement essentiellement féminin.

Les activités liées à la parité

Celles-ci ont occupé, en dehors du mentorat dont je parlerai spécifiquement, la fin de l'après-midi et la soirée du premier jour.

La table ronde sur les stéréotypes a été largement suivie. J'ai personnellement été très frappée par l'intervention de Catherine Thinus-Blanc[4] (en particulier le phénomène de menace du stéréotype, permettant d'expliquer un certain nombre d'expériences de psychologie sociale, où on voit filles et garçons réussir différemment un exercice suivant la façon dont il leur est présenté). Louise Lafortune[5] a conquis l'auditoire, en particulier par ses dessins d'enfants (on leur demande de dessiner « les mathématiques »), et par son franc parlé, nous disant qu'on ne pouvait pas dire : « les hommes font ceci » mais « des hommes font ceci », etc., nous expliquant comment cette différence de vocabulaire était déjà un progrès, qui permettait à chacun d'évoluer. La table ronde a aussi été l'occasion de mesurer les efforts faits au CNRS et au ministère, grâce aux interventions de Pascale Bukhari[6] et Agnès Netter[7]. Ensuite la conférence d'Anne-Marie Devreux[8] nous a permis de voir avec quelle rigueur les sociologues travaillaient s'ils voulaient avancer sur une question comme celle qu'elle abordait, « Qui concilie quoi ? Travail professionnel,

---

[4] Laboratoire de psychologie cognitive, université de Provence.
[5] Professeure au Département des sciences de l'éducation de l'université du Québec.
[6] Directrice de la Mission pour la place des femmes au CNRS.
[7] Chef de la mission de la parité et de la lutte contre les discriminations au ministère de l'enseignement supérieur et la recherche.
[8] Directrice du Centre de Recherches Sociologiques et Politiques de Paris, université de Paris 8.

domestique et parental des hommes et des femmes. » L'auditoire a été emporté bien au-delà des problèmes rencontrés par chacune ou chacun, dans une réflexion sur la société française en général et son évolution.

L'ouverture vers les sciences humaines et sociales est une spécificité des forums de jeunes mathématiciennes et, plus généralement, des activités de F&M. Il me semble clair qu'elle est appréciée des participants.

Le mentorat et l'intervention d'Isotélie

À l'initiative de la Mission pour la place des femmes au CNRS, trois personnes du cabinet de conseil Isotélie (`http://www.isotelie.com/index.html`) sont intervenues dès la première matinée, à la fois pour sensibiliser les participants aux problèmes de parité et pour organiser des activités de mentorat. Dès ses premiers mots la responsable Annie Ducellier a trouvé le ton juste et conquis l'auditoire avec son approche très pragmatique des difficultés professionnelles des femmes (par exemple ne pas utiliser de mots dévalorisants, comme le mot « petit »). La présentation des trois ateliers prévus le lendemain a immédiatement fait mouche, en particulier l'atelier « Lâcher sa peur et tenir son besoin » qui, visiblement, parlait aux jeunes et moins jeunes.

Chacun-e s'est inscrit-e à cet atelier, ou à l'un des deux autres, ciblés respectivement sur la communication et sur la parité. Pour savoir ce qui se passait dans l'ensemble des ateliers je ne peux que témoigner de la bonne humeur qui régnait au dîner suivant, où les échanges ont fusé autour des impressions de chacun. J'étais moi-même à l'atelier parité qui m'a beaucoup intéressée. J'ai aimé l'idée qu'on hésite, à propos des questions de parité, entre la théorie « différentialiste », qui insiste sur les différences entre sexe et leurs spécificités, et la théorie « universaliste », pour laquelle une femme, un homme, sont considérés comme des individus d'un même groupe. Et surtout l'idée que chacun d'entre nous se situe tantôt dans l'une, tantôt dans l'autre.

Les trois animatrices d'Isotélie ont été très présentes auprès des participantes au cours des repas et des pauses.

Je dois dire que, si j'éprouvais un certain scepticisme au départ à l'égard de l'intervention d'Isotélie, celui-ci s'est rapidement dissipé. L'intervention d'Isotélie a été très appréciée de toutes et tous. Toutefois on ne pourra empêcher les questions de coût d'entrer en ligne de compte dans l'organisation des futurs forums.

La conférence de Christine Proust

C'était une idée de Sandro Vaïenti et de la FRUMAM (Fédération de Recherches des Unités de Mathématique d'Aix-Marseille) que de nous faire profiter de la présence de Christine Proust à Marseille pour avoir une conférence d'histoire des mathématiques. Idée qui s'est révélée excellente. Tout le monde était fatigué, mais la fatigue n'a pas freiné les questions. On a rarement dans les colloques une intervention de ce genre, et c'est bien dommage !

La séance sur CNU, CN, etc.

Elle était organisée à la fin du colloque, sous ce titre dont plusieurs jeunes participant-e-s n'ont pas saisi qu'il recouvrait des questions importantes pour eux. Chacun était pressé de partir. Il aurait évidemment fallu donner des explications sur le but de cette séance dès le premier jour, et même dans les annonces du forum, de façon plus explicite. Et également coordonner davantage les interventions, pour faire passer des messages simples. Mais l'intérêt des jeunes était tangible.

La conclusion du forum

Pas de discussion et bilan en conclusion, tout le monde étant pressé, simplement l'annonce que l'an prochain ce serait probablement à Toulouse, sur le thème Probabilités et Statistique. Les questionnaires remplis par les participants ont tout de même confirmé l'impression générale que tout le monde était content, mais que le programme était trop chargé. Il est vrai qu'avec les deux soirées prises par des conférences le temps avait manqué !

La suite à donner

Nous avions tranché à l'avance pour ne pas avoir d'Actes. Il est prévu, mais pas encore fait, de mettre les transparents sur un site web. Ce serait bien, aussi, d'assurer un suivi des participants qui le souhaitent.

Et ma conclusion

Même si le bilan est largement positif, bien des points méritent discussion pour les années à venir. Il convient de trouver une meilleure adéquation entre le programme scientifique et l'auditoire. Cette année, au vu du programme on aurait aimé une audience plus large, constituée à la fois de jeunes et de mathématiciens plus confirmés. Mais l'annonce aurait due être plus explicite quant au public ciblé.

Même si on considère uniquement le nombre de doctorants, celui-ci était modeste par rapport à l'ensemble de la population concernée (rappel : environ 400 doctorants par an, dont probablement un quart de filles, et un bon contingent d'entre elles en analyse appliquée). Une telle manifestation est susceptible de marquer durablement certains jeunes. Il faudrait qu'elle diffuse dans l'ensemble des laboratoires pour avoir une influence véritable, en particulier sur les problèmes de parité.

Rétrospectivement je suis gênée qu'à l'inverse des doctoriales on n'ait pas parlé des débouchés non académiques. Or seule une fraction des jeunes qui sont venus auront des postes académiques. Il peut être dangereux de s'adresser à des jeunes comme si c'était de futurs collègues, alors qu'on ne sait pas si ce sera le cas. D'un autre côté les problèmes de parité ne se posent pas de la même manière au moment du doctorat et pour les jeunes collègues. N'y a-t-il pas risque que nous ayons inquiété ces jeunes femmes en leur parlant de problèmes qui n'étaient pas encore les leurs sans leur parler davantage du problème principal qu'elles ont devant elles, celui de leur avenir professionnel ?

Une évolution possible pour les années à venir consiste à s'orienter vers un type de doctoriales spécifiques aux mathématiques, ouvert aux hommes et aux femmes, comportant du mentorat comme celui qu'on a eu au 10e forum et du mentorat scientifique, et aussi une prise de conscience des problèmes de parité. On pourrait s'inspirer pour la partie scientifique des journées des jeunes probabilistes et statisticiens qui ont lieu tous les deux ans.

Une autre évolution possible est de s'appuyer sur une communauté mathématique spécifique (par exemple probabilistes et/ou statisticiens), qui accepte d'avoir un colloque dont une des finalités soit liée à la parité et dont les aspects mentorat soient renforcés. L'avantage serait évidemment de toucher une population plus large, et aussi plusieurs classes d'âge.

À côté du forum on pourrait promouvoir des journées ou demi-journées, ou débats, tournant autour de la parité dans les colloques « ordinaires », un peu à l'image de ce qui se fait dans les congrès internationaux. On pourrait imaginer trouver un format pour de telles manifestations qui permettent de les organiser sans beaucoup de travail. Ce pourrait être en particulier à l'occasion des réunions de GdR (Groupements de Recherche).

Le projet Felix Klein : un projet conjoint ICMI[1]-IMU[2]

Michèle Artigue[3]

L'origine du projet et ses débuts

L'idée de ce projet a émergé lors de la préparation du centenaire de l'ICMI célébré à l'Académie dei Lincei à Rome en mars 2008 à l'endroit même où cette commission avait vu le jour au quatrième congrès des mathématiciens en 1908. Felix Klein en avait été le premier président. Dans l'introduction du premier volume de son célèbre ouvrage, *Elementarmathematik vöm höheren Standpunkte aus*, il souligne la discontinuité alors existante entre les mathématiques de l'enseignement secondaire et les mathématiques universitaires, et l'existence d'un mouvement qui cherche à abolir cette discontinuité, d'une part en imprégnant l'enseignement secondaire des idées nouvelles dérivées des développements de la science et en accord avec la culture moderne, d'autre part en s'efforçant de prendre en compte les besoins de l'enseignant du secondaire dans la formation universitaire. C'est à cet effort qu'il a souhaité contribuer par la série de conférences données au début du siècle qui ont été la source de l'ouvrage. Depuis cette série de conférences, un siècle s'est écoulé au cours duquel les mathématiques ont connu un développement impressionnant et multiforme, rendant sans doute encore plus difficile que ce ne l'était du temps de Felix Klein le maintien d'un contact entre les mathématiques récentes et actuelles et les mathématiques enseignées. Comme le soulignait László Lovász à

[1] International Congress on Mathematical Education.
[2] International Mathematical Union.
[3] Membre du comité de pilotage du projet.

la conférence de Lisbonne sur le futur de l'éducation mathématique en Europe en décembre 2007[4], ce développement des mathématiques est tel qu'il pose problème pour la communication au sein même de la communauté mathématique. À ceci s'ajoute le fait que, dans un très grand nombre de pays, la scolarité au lycée n'est plus réservée à une petite élite d'étudiants et d'enseignants et que l'on ne peut supposer de tous les enseignants de lycée même intéressés par ce contact avec les mathématiques actuelles (le public visé par ce projet en priorité), la culture mathématique que Felix Klein supposait de ses auditeurs et lecteurs. Il n'en demeure pas moins qu'aujourd'hui, bien plus encore qu'il y a un siècle, ouvrir l'école et notamment le lycée aux mathématiques qui se sont développées depuis un siècle, faire percevoir aux élèves la vitalité des sciences mathématiques, les relations productives qu'elles entretiennent avec de plus en plus de domaines, est une nécessité.

Ainsi, lorsque le comité exécutif de l'ICMI a proposé de reprendre, en l'actualisant, le projet de Felix Klein de travailler à rendre la richesse et la vitalité des mathématiques actuelles accessibles aux enseignants du secondaire et source d'inspiration pour leur enseignement, le comité exécutif de l'IMU a immédiatement adhéré à ce projet. Les deux institutions ont constitué ensemble un comité de pilotage réunissant des mathématiciens et des didacticiens prêts à y travailler ensemble[5] car si le projet Felix Klein est mathématique par essence, il vise des enseignants. Dans sa réalisation, il doit pouvoir s'appuyer sur les connaissances qui ont été accumulées au fil des dernières décennies sur l'enseignement des mathématiques et sur ses acteurs : élèves et enseignants, leur vision des mathématiques, leurs connaissances, leurs attentes, leur usage des ressources existantes...

L'ambition initiale était de produire un livre de 300 pages environ pour les professeurs du secondaire et plus particulièrement ceux enseignant au niveau lycée, qui serait diffusé simultanément dans plusieurs langues, au moins l'allemand, l'anglais, l'espagnol, le français et le mandarin à l'origine. En accord avec la vision de Felix Klein, l'accent serait mis sur les relations existant aujourd'hui entre les différents domaines des sciences mathématiques comme entre mathématiques et autres champs scientifiques. Il montrerait aussi ce que sont les pratiques mathématiques actuelles et comment elles ont évolué et évoluent sous l'effet de l'évolution technologique. Et prenant en compte les possibilités offertes par cette évolution technologique, il était prévu de compléter cet ouvrage par un site web évolutif et des ressources diverses sous forme de DVD qui aideraient les enseignants à exploiter didactiquement ces mathématiques récentes ou actuelles.

Une première structure pour l'ouvrage a été pensée par le comité de pilotage, avec d'une part des chapitres liés à des thèmes mathématiques et des chapitres transversaux. Pour les chapitres thématiques, nous avons volontairement repris les domaines qui structuraient les volumes de Felix Klein et constituent toujours le cœur de l'enseignement secondaire mais, en cohérence avec l'esprit du projet, nous avons voulu mettre tout particulièrement l'accent sur des domaines qui ont émergé ou se sont tout particulièrement développés depuis le début du vingtième siècle.

[4] Lovasz L. (2007). Trends in Mathematics, and How they could Change Education ? Conférence Européenne « The Future of Mathematics Education in Europe », Lisbonne, Décembre 2007. `http://www.cs.elte.hu/~lovasz/lisbon.pdf`

[5] Ce comité est présidé par Bill Barton, l'actuel président de l'ICMI, et ses autres membres sont par ordre alphabétique : Michèle Artigue, Ferdinando Arzarello, Graeme Cohen, William (Bill) McCallum, Tomas Recio, Christiane Rousseau et Hans-Georg Weigand.

D'où la liste suivante : logique, arithmétique, algèbre et structures, géométrie, fonctions et analyse, mathématiques discrètes et algorithmique, calcul scientifique, probabilité & statistiques. La vocation des chapitres transversaux est, quant à elle, d'une part de dépasser le cloisonnement que pourrait induire le découpage en domaines en mettant l'accent sur les connexions internes et externes, d'autre part, au-delà de la considération des mathématiques elles-mêmes, de donner accès aux pratiques d'où ces mathématiques émergent et qui les font vivre. D'où les trois entrées : intra-disciplinarité ou les connexions internes aux sciences mathématiques ; inter-disciplinarité ou les mathématiques comme science vivante au sein des sciences et de la société ; comment travaillent les mathématiciens. Chacun de ces chapitres sera à la charge d'un auteur ou d'un petit groupe d'auteurs, sur la base d'un cahier des charges négocié avec le comité de pilotage. Il n'est pas exclu que des membres du comité de pilotage participent directement à l'écriture de tel ou tel chapitre, mais ils doivent en priorité assurer la cohérence et l'harmonisation de l'ensemble des productions.

Les conférences Klein

Dès la première réunion du comité de pilotage en juin 2009 à Paris a émergé l'idée d'organiser des Conférences Klein, tout au long de la réalisation du projet, prévue pour durer quatre ans. Ces conférences devaient permettre d'élargir le débat autour de la conception et du développement du projet, de recueillir des contributions, de tester les réalisations en cours auprès de son public cible en prenant la mesure de la diversité des contextes et cultures, de disséminer l'information. La première conférence a eu lieu à l'université de Madère en octobre 2009 à l'initiative du CIM et elle a accueilli environ 100 participants avec une forte proportion de portugais et de brésiliens. L'intérêt que soulevait le projet auprès de tous ceux qui en étaient informés, les discussions menées lors de cette première conférence, ont conduit à une évolution du projet. Il nous a semblé nécessaire, plutôt que de nous précipiter dans la préparation et l'écriture du livre, de permettre à tous ceux qui souhaitaient collaborer à ce projet de pouvoir le faire et contribuer à l'inspirer. C'est ainsi qu'est née l'idée de Vignette Klein qui a été précisée lors de la seconde réunion du comité de pilotage en avril 2010. Depuis, une seconde conférence Klein a eu lieu à Castro-Urdales en Espagne, à l'initiative de la section espagnole de l'ICMI. Elle fut, elle aussi, un réel succès et confirma pour le comité de pilotage non seulement l'importance de ces conférences pour la régulation du projet mais aussi la pertinence du choix effectué après la conférence de Madère. La conférence de Madère eut une autre conséquence importante. Elle fut à l'origine du projet Klein en langue portugaise. Ce projet piloté par la Société Mathématique Brésilienne, en association avec toutes les sociétés liées aux mathématiques ou à leur enseignement au Brésil, vise d'une part à assurer la traduction du livre en portugais, d'autre part à préparer des ressources en portugais particulièrement adaptées pour les enseignants brésiliens et à organiser des formations associées pour les enseignants. Il bénéficie d'un soutien financier important du gouvernement brésilien et est mené en collaboration avec les collègues portugais.

Les vignettes Klein

Le comité de pilotage a envisagé a priori deux types de vignettes. Dans le premier cas, les vignettes offriraient une trajectoire reliant des mathématiques du secondaire ou envisageables au secondaire avec des mathématiques récentes et plus avancées. Dans le second cas, il s'agirait de rendre compréhensibles des applications actuelles importantes des mathématiques. Dans les deux cas, il nous semble important de partir d'un exemple ou d'un problème qui parle aux enseignants, soit parce qu'il concerne les mathématiques qu'ils connaissent ou enseignent, soit parce qu'il renvoie à un aspect familier du monde actuel, et d'élargir progressivement l'horizon. Comme précisé sur le site du projet, ces vignettes doivent être rédigées en ayant à l'esprit un lecteur qui se demande pourquoi le sujet traité est important et ce qu'il faut retenir de la vignette, au-delà même de l'exemple développé. C'est pourquoi nous souhaitons que chaque vignette ait une « morale » et que cette morale soit explicite. Ces vignettes doivent être accessibles à un enseignant de lycée. L'accent doit être mis sur les idées importantes et il n'est pas question d'y rentrer trop avant dans des détails techniques, mais cependant il nous semble essentiel que les mathématiques y soient bien visibles. Les vignettes doivent être courtes (quelques pages) et c'est pourquoi le thème vignette a été choisi, et il est attendu des auteurs qu'ils essaient de profiter au mieux pour ces ressources destinées à un site web des possibilités de visualisation, de liens, voire d'interaction dynamique aujourd'hui offertes par la technologie. Il est aussi important de fournir des références aisément accessibles pour ceux qui souhaiteraient aller plus loin mathématiquement et également, dans la mesure du possible, des références à des ressources pédagogiques. Les vignettes peuvent être proposées dans différentes langues dont bien sûr le français.

J'espère que cette présentation du projet suscitera des contributions de la part de la communauté mathématique française. Pour avoir plus d'information, pour consulter quelques exemples de vignettes, n'hésitez pas à aller sur le site du projet : `www.kleinproject.org` ou à me contacter. La prochaine réunion du comité de pilotage aura lieu en novembre 2011 et, à ce moment-là, nous déciderons comment les contributions reçues jusque-là seront exploitées, notamment dans la réalisation du livre.

Du bon usage de la bibliométrie pour l'évaluation individuelle des chercheurs

Nous publions ici quelques extraits, choisis en fonction de leur signification pour la communauté mathématique du Rapport de l'Académie des sciences remis le 17 janvier 2011 à Madame la Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Ces extraits (pour lesquels la numérotation originale a été indiquée) ne prétendent pas rendre compte de façon fidèle de l'intégralité du rapport, accessible sur le site de l'Académie : http://www.academie-sciences.fr/activite/rapport/avis170111.pdf et qui porte sur le problème général de l'évaluation, toutes disciplines confondues. Celui-ci contient donc des analyses comparatives des différentes pratiques disciplinaires, et les conclusions générales qu'il dresse doivent être comprises à cette aune. La spécificité des mathématiques y est, de façon générale, bien prise en compte. Il contient un certain nombre de recommandations très concrètes, dont la connaissance peut s'avérer utile, en particulier dans un contexte pluridisciplinaire, à tous ceux d'entre nous qui ont à participer à des jurys ou arbitrages.

Avantages et dérives potentielles de la bibliométrie (sect. II - 3)

La bibliométrie est « apparemment » facile d'usage et fournit des nombres attrayants pour un évaluateur en raison de leur simplicité et de leur nature factuelle. Néanmoins, elle comporte de très nombreux biais et il est important de mentionner que pour être réalisée de façon incontestable, elle nécessite du temps, de la rigueur, et une certaine expérience. Il est indispensable de rappeler qu'aucun indicateur ni aucun ensemble d'indicateurs ne peuvent résumer à eux seuls la qualité de la production scientifique d'un chercheur. Par ailleurs, l'importance prise par la bibliométrie dans certaines disciplines peut même inciter certains chercheurs à adapter l'orientation de leurs recherches aux domaines ou aux technologies privilégiés par les revues à haut facteur d'impact dans lesquelles ils souhaitent publier, au détriment de l'originalité et de l'innovation.

Quand utiliser/ne pas utiliser la bibliométrie (sect. III - 1)

Pour les jurys mono-disciplinaires ayant généralement une bonne connaissance de tous les candidats, le recours à la bibliométrie est souvent utilisé pour un rapide tour d'horizon sans que les résultats ne constituent un élément décisif. Dans le cas de jurys traitant de plusieurs sous-disciplines, il peut être utile d'y avoir recours pour effectuer un premier tri car cela peut faire gagner du temps, mais à condition que le jury soit constitué d'experts conscients des différences considérables qui peuvent exister entre elles et avec prise en considération de la distribution des indicateurs dans chacune des sous-disciplines. En revanche, les indicateurs bibliométriques n'ont pas de valeur au début de la carrière scientifique et ne doivent donc pas être utilisés pour les recrutements, sauf lorsqu'il s'agit du recrutement de seniors.

Les indices bibliométriques ne peuvent pas être utilisés de la même façon selon l'objet de l'évaluation : recrutements, promotions, contrats, distinctions, etc. (Recommandation n° 3)

– Il ne faut pas utiliser les indicateurs bibliométriques pour les chercheurs ayant moins de dix années de carrière afin d'éviter la chasse aux domaines à fort taux de citations, ce qui handicaperait la créativité dès le début de la carrière.

– Il faut également exclure le recours à la bibliométrie pour le recrutement des jeunes. Au niveau CR2 ou Maîtres de Conférences, les travaux d'un candidat à examiner sont généralement modestes en quantité. Le jury doit plus qu'ailleurs lire et s'efforcer de comprendre les textes qui lui ont été proposés par le candidat.

– Dans le cas de recrutement dans des postes seniors, les indicateurs peuvent être consultés par les pairs comme pour les promotions (cf. ci-dessous).

– Pour les passages DR2, DR1 et DRE et les équivalents pour les enseignants-chercheurs, le recours aux indicateurs et à la bibliométrie peut devenir une aide pour déblayer le terrain en établissant la distribution de tous les candidats et en éliminant ceux dont les performances sont manifestement trop faibles au vu de la distribution.

– Le recrutement au niveau DR2 ou PR2, DR1 ou PR1 s'assimile plus au cas précèdent qu'à celui des jeunes. Donc « l'écrémage » préliminaire par la bibliométrie est possible dans le cas d'un très grand nombre de candidats.

– Dans le cas où la décision finale ne correspondrait pas aux indices bibliométriques, une argumentation explicite des raisons de cette décision devrait être fournie.

– Les évaluations bibliométriques des chercheurs candidats à un contrat de recherche ou à une distinction (prix, médailles, Académies, etc.) doivent être abordées de façon particulière en fonction du contexte et de l'âge des chercheurs concernés, en donnant une grande importance à l'originalité du travail souvent mal prise en compte par la bibliométrie.

La bibliométrie en mathématiques (Annexe 3 : Pratiques bibiométriques selon différentes disciplines)

Les mathématiciens sont très réticents quant à l'utilisation des outils bibliométriques pour l'évaluation des chercheurs. Il ne s'agit pas d'une position spécifique aux mathématiciens français, mais d'une position commune aux mathématiciens du monde entier. L'extrait des conclusions d'un rapport circonstancié de l'Union Mondiale des Mathématiciens (`http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Report/CitationStatistics.pdf`) dispose : « *While numbers appear to be "objective", their objectivity can be illusory. The meaning of a citation can be even more subjective than peer review. The sole reliance on citation data provides at best an incomplete and often shallow understanding of research – an understanding that is valid only when reinforced by other judgments. Numbers are not inherently superior to sound judgments.* »

Pour les mathématiciens, cela ne tient pas à un quelconque refus de méthodes qui seraient plus « modernes », mais plutôt au fait qu'ils disposent d'outils beaucoup plus efficaces que ceux que fournit et que pourrait fournir la bibliométrie, et qu'ils les utilisent systématiquement pour l'évaluation. Les raisons tiennent à deux spécificités : la communauté mondiale des mathématiciens est relativement réduite (environ 40000 dans le monde dont environ 4000 français), et les mathématiciens ont su s'organiser au plan mondial depuis longtemps (on peut dire deux tiers de siècle). Il existe deux bases de données mathématiques : Zentralblatt Math (de l'European Mathematical Society) et MathSciNet (Mathematical Reviews on the web de l'American Mathematical Society). La seconde, la plus utilisée, contient les références de tous les articles mathématiques publiés dans le monde depuis 1940 et fournit pour chacun d'eux une analyse critique des résultats, signée d'un mathématicien et non de l'auteur, allant d'une demi-page à trois pages pour les plus importants. Destinée en premier lieu à être une aide à la recherche, cette base de données est systématiquement utilisée par quiconque doit évaluer des mathématiciens (recrutement, promotion, prix, etc.). Elle fournit pour chacun d'eux la liste de leurs publications, leur analyse, leurs citations (par qui et dans quels articles). Le problème des homonymies est ainsi résolu. Depuis longtemps, la communauté mathématique toute entière travaille à l'élaboration de ces bases de données remarquables qui ne se limitent pas à des tableaux de nombres. On peut se demander s'il ne faudrait pas s'inspirer de ce succès pour encourager la création de bases de données analogues dans d'autres disciplines. On peut bien sûr aussi en extraire des données bibliométriques. On jugera de leur pertinence sur l'exemple des deux récentes Médailles Fields françaises : Cédric Villani est cité 1520 fois par 629 auteurs, et Ngô Báo Châu est cité 102 fois par 52 auteurs, alors qu'aucun mathématicien au monde ne se risquerait à y voir une disparité de niveau. En conclusion, la taille relativement modeste du monde mathématique, l'unité fondamentale de cette discipline, et l'existence de bases de données remarquables font que les mathématiciens privilégient l'évaluation qualitative par les pairs, fondée pour l'essentiel sur la lecture des articles. La bibliométrie en mathématiques ne peut être qu'un aspect très marginal de l'évaluation individuelle des chercheurs.

Culture mathématique, activités périscolaires « Cap'Maths »

Martin Andler[1]

Cet article est le troisième d'une série consacrée aux activités périscolaires mathématiques. Les deux précédents (Gazette 126 et 127) s'étaient centrés sur les clubs universitaires, les stages d'été, les journées « filles et mathématiques, une équation lumineuse », Hippocampe mathématique, le tutorat Animath-Science ouverte. Cette fois-ci, nous présentons le consortium « Cap'Maths » qui a vocation à structurer l'ensemble des activités périscolaires et culturelles mathématiques.

Le consortium « Cap'Maths »

Dans le cadre du grand emprunt, un appel à projets « culture scientifique et technique et égalité des chances » a été ouvert en novembre 2010. Il est doté d'un montant total de 500 millions d'euros. Les fonds débloqués pour les actions en faveur de la culture scientifique et technique doivent faire l'objet, sur la durée du financement dans sa globalité, d'un cofinancement à hauteur de 50%. Les textes de référence sont disponibles sur `http://www.anru.fr/-Programme-Internats-d-excellence-.html`.

À l'été et à l'automne 2010, en prévision de la publication attendue de cet appel, de nombreux échanges entre sociétés savantes, associations et acteurs de terrain ont eu lieu, et un contact avec le Commissariat général à l'investissement a été établi pour voir si la proposition telle que nous l'imaginions serait recevable. À la suite de quoi, la décision a été prise de constituer un consortium rassemblant l'ensemble des acteurs de la communauté mathématique française (sociétés savantes et organisations professionnelles d'enseignants, associations, organismes de recherche, acteurs de la culture scientifique...) et de déposer un projet centré sur les mathématiques pour cet appel. Le consortium s'appelle *Cap'Maths* ; il est coordonné par l'association Animath, dans son rôle de maison commune de l'animation mathématique.

Notre démarche partait du constat d'un contraste : d'un côté, de très riches expériences sont menées par de nombreux acteurs un peu partout en France en matière de culture mathématique – actions en direction des jeunes de tous niveaux, des plus motivés à ceux qui ont les plus grosses difficultés – actions ciblées vers les jeunes filles ou dans les zones scolairement défavorisées. De l'autre, la perception des mathématiques dans le grand public est souvent négative ; le dynamisme des sciences mathématiques, ses nombreuses interactions avec les autres sciences, ses applications sont incompris.

Or le contexte général du système scolaire est caractérisé par

– l'aggravation des inégalités sociales et géographiques,

– la persistance de fortes inégalités entre garçons et filles dans les études scientifiques à forte part mathématique,

[1] Professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin, Animath.

– une évolution préoccupante des effectifs dans les filières scientifiques, notamment universitaires, avec une inquiétude sur notre capacité à assurer le renouvellement des cadres scientifiques : ingénieurs, chercheurs, professeurs...

Vu la place importante des mathématiques dans toutes ces questions, il paraissait important que les mathématiques mobilisent les forces pour inverser cette tendance, dans l'idée que la promotion de la culture mathématique et d'activités mathématiques périscolaires pourrait jouer un rôle crucial pour renverser la tendance.

Objectifs de « Cap'Maths »

Ils s'organisent autour de quatre axes principaux :

– atténuer les disparités sociales et géographiques ;

– inciter et aider les jeunes filles à surmonter la barrière des préjugés pour se lancer dans des études à forte composante mathématique ;

– améliorer la perception générale des mathématiques par le grand public et notamment les jeunes scolarisés, en améliorant la compréhension de leur impact, de leur utilité et de leur vitalité ;

– augmenter globalement le flux d'étudiants effectuant des études longues dans un domaine scientifique, et en particulier dans les sciences à forte composante mathématique.

Le consortium encouragera toutes formes d'activités susceptibles de contribuer à la réalisation de ces objectifs, et en particulier les actions permettant de :

– renforcer la diffusion de la culture mathématique, notamment par le contact avec le monde de la recherche, en faisant porter l'effort tout particulièrement vers les jeunes, afin de montrer à tous que les mathématiques sont une discipline vivante, dont la recherche est florissante, de mettre en avant leurs interactions multiples avec toutes les sciences, leurs nombreuses applications et le rôle important qu'elles jouent dans la vie des entreprises ;

– accroître fortement l'impact de différents types d'animation en direction des jeunes : concours, clubs, ateliers, travaux sur projets scientifiques, stages pendant les vacances ;

– développer de telles actions dans les zones socialement ou géographiquement défavorisées ;

– encourager la participation des filles à toutes ces actions et, de plus, organiser des actions destinées à elles seules : tutorats, marrainages, journées... Tout cela ayant pour but leur engagement dans les filières scientifiques et techniques au lycée et dans des études supérieures dans les domaines des sciences et techniques où elles sont sous-représentées ;

– se doter des moyens d'une diffusion des initiatives les plus prometteuses (documents et films, sites web, forums...) et d'assurer à l'ensemble des actions une forte visibilité.

Un effort particulier sera mené pour donner à ces actions une dimension européenne et internationale.

Sans entrer ici dans les détails, il est prévu que *Cap'Maths* fonctionne par appels à projets réguliers. Toute entité, qu'elle ait été associée à la création de *Cap'Maths* ou non, pourra répondre à l'appel. Si un projet est retenu, l'entité porteuse devient automatiquement membre de *Cap'Maths*. La préparation du dossier a été l'occasion d'un vaste recensement de ce qui se faisait en matière de culture mathématique et d'activités périscolaires. Tout cela, ainsi que les éléments principaux du dossier de candidature, sont disponibles sur le site d'Animath : `www.animath.fr`. Nous espérons évidemment que le projet soit retenu, mais même s'il ne l'était pas, le travail de recensement, les discussions entre les membres du consortium auront été très utiles.

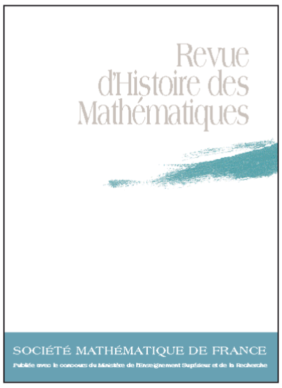
Le recensement n'est évidemment pas exhaustif. Nous invitons tous les collègues impliqués dans telle ou telle action à nous transmettre les informations afin d'en compléter la liste. Dès maintenant, cette liste fourmille d'idées qui ne demandent qu'à être reproduites, amplifiées, adaptées...

Annexe

Membres fondateurs : APMEP, Femmes et mathématiques, SFdS, SMAI, SMF, UPS, ADIREM, CultureMath, département de mathématiques de l'université Paris-Sud, Images des mathématiques, Institut Henri Poincaré, IREM d'Aix-Marseille, laboratoire de mathématiques de l'université Charles-de-Gaulle de Lille, Maths à modeler, la fondation C'Génial et les Associations Animath, Centre-Sciences, Cité des géométries de Maubeuge, Comité international des jeux mathématiques, Fédération française des jeux mathématiques, Kangourou sans frontières, Maths en jeans, Maths pour tous, Science ouverte.

Soutiens : Section de mathématiques de l'Académie des sciences, Institut national de recherche en informatique et automatiques, Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions du Centre national de la recherche scientifique, École normale supérieure de Cachan, École normale supérieure de Paris, Université Paris XIII, Université de Versailles-Saint-Quentin, Fondation Jacques Hadamard, Fondation des sciences mathématiques de Paris, Institut des hautes études scientifiques, Fédération de recherche Normandie mathématiques, Institut Camille Jordan de Lyon, Institut mathématique de Bordeaux, Institut mathématique de Jussieu, Laboratoire amiénois de mathématiques fondamentales et appliquées, Laboratoire Laurent-Schwartz de l'École polytechnique, Laboratoire de mathématiques Jean-Leray de l'université de Nantes, Laboratoire de mathématiques Nicolas-Oresme de l'université de Caen, Laboratoire de mathématiques Raphaël-Salem de l'université de Rouen, Unité de mathématiques pure et appliquées de l'ÉNS de Lyon.

Comité de parrainage :
Informatique : Serge Abiteboul, François Baccelli, Gérard Berry, Olivier Faugeras.
Sciences physiques et mécaniques : Edouard Brézin, Jean Salençon.
Littérature : Antoine Compagnon.
Économie : Daniel Cohen, Jean Tirole.
Mathématiques : Alain Connes, Nicole El Karoui, Etienne Ghys, Jean-Pierre Kahane, Pierre-Louis Lions, Yves Meyer, Cédric Villani, Claire Voisin, Wendelin Werner, Jean-Christophe Yoccoz



Revue d'histoire des mathématiques

Tome 16, Fascicule 2

Sommaire

prix public* : 38 € - prix membre* : 27 €
* frais de port non compris

Catalogue disponible à l'adresse :
http://smf.emath.fr/

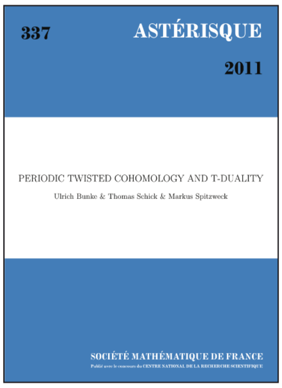
Information
Maison de la SMF
avenue de Luminy, BP 67, F-13274 Marseille cedex 9, France
Tél : 33 4 91 83 30 25 • Fax : 33 4 91 41 17 51 • email : smf@smf.univ-mrs.fr

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr



Astérisque 337

Periodic twisted cohomology and T-duality

Ulrich Bunke, Thomas Schick, Markus Spitzweck

La cohomologie de de Rham tordue (périodique de période 2) est une construction bien connue, elle est importante en tant que codomaine d'un caractère de Chern pour la K-theorie tordue. La motivation principale de notre livre est une interprétation topologique de la cohomologie de de Rham tordue, une interprétation avec géneralisations à des espaces et coefficients arbitraires. Dans ce but, nous développons une théorie des faisceaux sur des piles topologiques localement compactes, et plus particulièrement : la construction des opérations de la théorie des faisceaux dans les catégories derivées non-bornées, les élements de la dualité de Verdier, et l'intégration.
Notre résultat principal est la construction d'une périodisation fonctorielle associé à une U(1)-gerbe. Parmi les applications, citons la vérification d'un isomorphisme de T-dualité pour la cohomologie périodique tordue et celle des orbi-espaces.

Using the differentiable structure, twisted 2-periodic de Rham cohomology is well known, and showing up as the target of Chern characters for twisted K-theory. The main motivation of this work is a topological interpretation of two-periodic twisted de Rham cohomology which is generalizable to arbitrary topological spaces and at the same time to arbitrary coefficients. To this end we develop a sheaf theory in the context of locally compact topological stacks with emphasis on: the construction of the sheaf theory operations in unbounded derived categories, elements of Verdier duality, and integration.
The main result is the construction of a functorial periodization associated to a U(1)-gerbe. As an application we verify the T-duality isomorphism in periodic twisted cohomology and in periodic twisted orbispace cohomology.

ISBN : 978-2-85629-307-2

Prix public* : 30 € - prix membre* : 21 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Percolation et modèle d'Ising
W. Werner
Société Mathématique de France, Cours Spécialisés 16, 2009. 161 p.
ISBN : 978-2-85629-276-1. 40 €

La percolation et le modèle d'Ising sont deux modèles de référence de la physique statistique pour étudier les transitions de phases. Le modèle de percolation a été introduit par Hammersley en 1957 pour décrire certaines caractéristiques des milieux aléatoires. Le modèle d'Ising, qui fut inventé par Lenz vers 1920, modélise des effets collectifs produits par des interactions locales entre particules, comme le ferromagnétisme. Ces deux modèles issus de la physique posent aussi de formidables problèmes mathématiques, citons notamment le concept d'universalité conjecturé par les physiciens. De nombreuses théories de physique mathématique ont été élaborées pour essayer de répondre à ces questions. Ces dernières années des résultats spectaculaires sur les phénomènes critiques en dimension deux ont été obtenus par les méthodes probabilistes de Lawler, Schramm, Werner, Smirnov, etc.

Ce livre repose sur des notes de cours donnés par W. Werner au niveau M2 et sa grande originalité est de présenter à la fois les fondements de la percolation, mais aussi les développements les plus récents sur l'invariance conforme en dimension deux des modèles de percolation et d'Ising.

Le livre s'ouvre sur une introduction très pédagogique au modèle de percolation en détaillant les concepts fondamentaux de transition de phase, d'inégalités stochastiques (FKG, BK) et de décroissance des corrélations. Ces résultats classiques figurent dans l'ouvrage de référence de Grimmett[1], mais c'est, à ma connaissance, le premier livre en français sur la question. La nouveauté dans la présentation du sujet est de permettre au lecteur d'accéder ensuite très rapidement aux résultats sur le régime de la percolation critique en dimension 2 : la théorie de Russo-Seymour-Welsh, mais surtout la preuve de la formule de Cardy-Smirnov.

La seconde partie du livre est dédiée au modèle d'Ising et plus généralement au modèle de Potts qui peuvent être interprétés comme des modèles de percolation dépendante (FK-percolation). À l'image de la première partie, les principaux aspects de la FK-percolation sont expliqués et plusieurs conjectures recensées. Ces chapitres offrent un aperçu concis mais assez complet de la FK-percolation sans être aussi exhaustif que le volumineux livre de Grimmett[2]. Le livre se conclut par une excellente introduction aux méthodes développées par Smirnov pour prouver l'invariance conforme du modèle d'Ising. Toute la démarche pour obtenir l'analyticité discrète est expliquée très clairement : les modèles de boucles, la spécificité du modèle d'Ising...

[1] G. Grimmett, *Percolation*, Second edition, Springer 1999.
[2] G. Grimmett, *The Random-Cluster Model*, Springer 2006.

Cet ouvrage constitue à la fois une excellente introduction mathématique à l'étude de modèles probabilistes sur réseau (percolation, modèles d'Ising et de Potts) et un point d'entrée remarquablement clair et concis aux phénomènes critiques en dimension deux. Il s'agit d'une lecture à conseiller aux étudiants pour découvrir ces modèles comme aux chercheurs confirmés qui souhaitent comprendre les résultats récents de S. Smirnov sur l'invariance conforme en dimension deux.

Thierry Bodineau
École Normale Supérieure, Paris

Rationnel mon Q
L. Duchêne et Agnès Leblanc
Hermann, 2010.
ISBN : 978-2-70567-031-3. 15 €

Logique formelle, combinatoire, théorie des graphes, algèbre... Que ce soit dans la définition de nouvelles règles formelles ou dans les thèmes abordés – *La Vie, Mode d'emploi* reste sans doute le seul Prix Médicis à contenir le symbole Hom – les mathématiques ont, on le sait, été une source d'inspiration féconde pour les auteurs de l'Oulipo. Avec *Rationnel, mon* **Q**, sous-titré « 65 exercices de style sur l'irrationalité de racine de 2 », les mathématiques rendent la politesse. Dans la plus pure tradition de la fameuse citation de Raymond Queneau remarquant que « [l]e classique qui écrit sa tragédie en observant un certain nombre de règles qu'il connaît est plus libre que le poète qui écrit ce qui lui passe par la tête », les 65 exercices en question répondent à plusieurs contraintes : tout d'abord, ils contiennent, ou au minimum évoquent, la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (à l'occasion, quelques autres) ; ensuite, ils sont rédigés en un certain style littéraire ou mathématique (désinvolte, pédant...) ; enfin, ils satisfont à une propriété technique oulipienne ou pastichent le style d'un auteur du monde des arts, des sciences ou des lettres. Ultime critère : les auteures s'amusent à exhiber leurs textes en couple. Chaque variation admet une adjointe, à moins que ce ne soit une transposition, qui vient l'éclairer d'une nouvelle lumière.

Des lettres, Ludmila Duchêne et Agnès Leblanc n'en manquent pas, même si, comme il se doit, le *e* finira par disparaître, et le W par briller par son absence. C'est avec un réel bonheur que j'ai découvert comment l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aurait pu être traitée par Beckett, Flaubert, Joyce ou Molière ou comment le critère d'Eisenstein permet d'expliquer le *Théorème* de Pasolini. J'avoue même quelques francs éclats de rires quand les auteures s'amusent aux dépens de ceux qui ont tendance à tirer un peu trop sur la (super-)corde (page 117) ou quand elles font discuter le petit Nicolas avec son homonyme poldève (page 133). Brillants sont également les exercices plus formels : les mânes de Théétète nous offrent une charmante démonstration monovocalique, un prisonnier anonyme nous griffonne la sienne (en utilisant uniquement les lettres sans jambage inférieur ou supérieur ; on s'interdit donc le l et le p, et ne restent que les lettres acemnorsuvwxz) en forme de testament sur le mur de sa prison (page 141)...

Au risque de passer pour coincé du corps des rationnels, je reconnais avoir été un peu moins convaincu par ce que l'on pourrait appeler la partie **Q** de l'ouvrage.

Bien que l'érotisme soit fréquemment présent dans les textes, il m'a à la longue un peu ennuyé et je ne suis pas sûr que les augustes membres de la SMF trouvent tant de motifs de plaisir de ce côté-là. Mais peut-être cela révèle-t-il une intention des auteures, comme nous allons le voir.

Une lecture possible de l'œuvre de Perec est de voir en son obsession virtuose du jeu avec les lettres et les mots l'effort permanent de l'auteur d'extraire des signes un sens, une identité mémorielle, peut-être même une inspiration vitale, apte à donner un sens à la vie, et d'abord à la sienne, brisée par la disparition brutale de ses parents. Il m'a semblé qu'une pareille lecture, finalement très intimiste pour un ouvrage si ludique au premier abord, était possible pour *Rationnel, mon* **Q**. Dans ce livre où amour et érotisme sont omniprésents, on ne peut être que frappé par l'insatisfaction profonde qu'ils semblent procurer : qu'il soit matrimonial (dans le magnifique *Portrait de l'artiste en jeune fille*), filial (dans la *Version latine*), essentiellement sexuel (pour les textes X et Y, ainsi que pour celui intitulé *Fonctoriel*) ou même simplement évoqué ou potentiel (d'une des auteures pour son interlocuteur de l'introduction ou de la rêveuse pour l'étourdi) l'amour est toujours déçu, trompé, équivoque ou univoque et finalement insatisfaisant. L'absurdité, la contradiction finale démontrant l'irrationalité de nos prémisses, que les auteures veulent porter à notre attention serait donc peut-être l'observation (sans cesse réitérée par les protagonistes de l'ouvrage) que ni la virtuosité mathématique et linguistique, ni l'érudition et la culture ne sont suffisantes pour susciter affection et amour ; qu'elles peuvent même rendre plus cruelles, ou du moins plus désagréables, les petites humiliations que l'on doit subir lorsque l'on appartient à la gent féminine. Car pour être mathématiciennes, les auteures n'en sont pas moins femmes, dans la vie comme dans *Rationnel, mon* **Q**, et semblent toujours avoir à l'esprit que le mieux qu'elles peuvent attendre de la vie est « un cours [NdA : de mathématiques bien sûr] ou un suave roman sans sexe car sans amour » comme elles l'écrivent page 141 (simple coïncidence ?). Est-ce pour cela que le sexe, comme nous l'avons déjà évoqué, est si faible dans cet ouvrage (ce que l'auteur de ces lignes refuse catégoriquement d'attribuer par essence au genre choisi) ? Est-ce ainsi également que l'on doit lire le texte intitulé *Mersenne ne m'aime*, rédigé entièrement au féminin, et qui fait de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ un véritable manifeste féministe (un brin moqueur, toutefois) ? Suivant cet axe de lecture, on se plaît à remarquer que le livre se clôt sur un texte intitulé *Lysistrata*, dont on rappellera à tout hasard qu'elle se rendit célèbre pour avoir voulu remédier à l'irrationalité de sa société en décrétant une grève du sexe (dans *Rationnel, mon* **Q**, ce procédé devient bien sûr l'affirmation révolutionnaire que **Q** est algébriquement clos). Envisagé ainsi, *Rationnel, mon* **Q** pourrait se lire comme un témoignage ironique et facétieux des difficultés que rencontrent « une personne du sexe [...] du fait de nos coutumes et préjugés » pour « explorer en profondeur [...] les sciences abstraites en général et plus particulièrement [l]es mystères des nombres », pour citer Gauss dans sa correspondance avec celle qui signait déjà du nom de Leblanc. Ou bien faut-il imaginer le Sisyphe condamné à démontrer encore et toujours l'irrationalité de $\sqrt{2}$ heureux, et voir au contraire dans l'acte de création mathématique et littéraire la porte de sortie par excellence pour celles (et ceux, il n'y a pas de raison) qui se trouveraient trop frustrés de l'absurdité du monde social ?

Mais revenons à nos racines. L'auteur de ces lignes, qui confesse un faible pour l'Oulipo, a passé un excellent moment à la lecture de *Rationnel, mon* **Q** et il imagine que ce livre enchantera tous ceux qui aiment les mathématiques, les exercices de style, l'irrationalité, les corps (de nombres) et les belles constructions formelles. Autrement dit, sans doute, l'intégralité des lecteurs de cette revue[3].

Olivier Fouquet
Université Paris-Sud 11

Heights in Diophantine geometry
E. Bombieri, W. Gubler
Cambridge University Press, 2007. 668 p. ISBN :978-0-521-17122-93. £75

Le livre de Bombieri et Gubler expose très clairement les multiples notions de hauteurs qui ont été introduites dans le cadre de la géométrie diophantienne, ainsi que les grands résultats de cette théorie.

Les mots *géométrie diophantienne* ont été lancés par Serge Lang il y a un demi-siècle [9, 5]. Ils désignent une approche des équations diophantiennes *via* la géométrie algébrique, clarifiant la distinction entre notions géométriques (objets définis sur le corps des complexes ou plus généralement sur un corps algébriquement clos) et arithmétiques (objets définis sur **Z** ou **Q** ou plus généralement sur un anneau ou corps de type fini). Les solutions d'équations diophantiennes sont ainsi vues comme les points entiers ou rationnels de la variété définie par les équations. Un outil fondamental a émergé, la notion de hauteur, qui dans sa forme la plus naïve peut être définie ainsi : un point P de l'espace projectif sur **Q** possède des coordonnées homogènes $(x_0, \ldots, x_n)$ que l'on peut choisir entières et premières entre elles, on pose alors $H(P) = \max\{|x_0|, \ldots, |x_n|\}!$.

Un des premiers résultats important du domaine est le théorème de Mordell-Weil qui dit que le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique ou plus généralement d'une variété abélienne est de type fini (1922-28). Ce résultat est crucial dans la preuve du théorème de Siegel (1929) : l'ensemble des points entiers d'une courbe affine est fini pourvu que la courbe ait un genre au moins égal à un, ou au moins trois points à l'infini. L'archétype du théorème de géométrie diophantienne est aujourd'hui le théorème de Faltings [3] (*quondam* conjecture de Mordell) : « *L'ensemble des points rationnels d'une courbe de genre au moins deux est fini* ». L'analogie entre les tores algébriques (groupes algébriques isomorphes à une puissance du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ – au moins sur la clôture algébrique du corps de définition) et les variétés abéliennes a une longue histoire. Par exemple le groupe des points entiers sur un corps de nombres K de $\mathbf{G}_m$ n'est autre que le groupe des unités $\mathcal{O}_K^\times$ de l'anneau des entiers algébriques de K ; le théorème des unités de Dirichlet indique que ce groupe est de type fini, comme le groupe de Mordell-Weil. Cette analogie avait suggéré à Serge Lang une généralisation de la conjecture de Mordell, également démontrée en 1991 grâce principalement aux

[3] Comme il serait scandaleux que cette recension ne comporte pas de note de bas de pages là où l'ouvrage en compte plus de 90 pas forcément toujours essentielles, n'est pas David Foster Wallace qui veut, ma co-autrice me fait remarquer que bien que les auteures se soient données beaucoup de mal pour être lues même par les résidants habituels de l'arrière de la salle, c'est « de la peine » qu'elles auraient dû écrire page 64.

travaux de Vojta et Faltings [4, 13]. Si G est une variété semi-abélienne (extension d'un tore par une variété abélienne) et Γ un sous-groupe de rang fini, l'intersection de Γ avec une sous-variété X fermée dans G n'est pas dense dans X (est contenue dans une hypersurface de X) sauf si X est un translaté de sous-groupe algébrique. La démonstration de ce dernier résultat repose sur la théorie des hauteurs et pas mal de géométrie algébrique mais fait aussi fait appel à des techniques classiques d'approximation diophantienne qui culminent avec la preuve du théorème de Roth (1955) puis du théorème du sous-espace de Wolfgang Schmidt dans les années 70. Dans une version simplifiée, celui-ci affirme que si les L_i sont des formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques, l'ensemble des solutions entières $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'inéquation

$$\prod_{i=0}^{n} |L_i(x)| \leqslant H(x)^{-\varepsilon}$$

est contenu dans une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts. Lorsque α est un nombre algébrique irrationnel, en prenant $n = 2$, $L_1(x, y) = x - \alpha y$, $L_2(x, y) = y$, on retrouve le théorème de Roth : le nombre de rationnels $x/y \in \mathbf{Q}$ tels que $|\alpha - x/y| \leqslant y^{2-\varepsilon}$ est fini.

La théorie servant de filigrane à la première démonstration de la conjecture de Mordell est la géométrie d'Arakelov, qui a été brillamment développée depuis. Les idées arakeloviennes sont encore présentes dans le travail novateur de Vojta [12] dont Serge Lang a déclaré que c'était une des plus belles visions mathématiques qu'il ait rencontrée. Il s'agit d'analogies entre la théorie de Nevanlinna (concernant la distribution des valeurs de fonctions de variable complexe) et la théorie de l'approximation diophantienne. Les conjectures de Vojta sont loin d'être démontrées (ou infirmées) aujourd'hui mais ont servi d'inspiration aux travaux précités ; elles entraînent notamment la conjecture *abc* (*confer* ci-dessous).

Le livre de Bombieri et Gubler présente un exposé systématique et très accessible de l'ensemble de ces thèmes. Serge Lang a publié il y a quelques années un point de vue dans la *Gazette* [7] où il vantait les mérites d'une vision géométrique des équations diophantiennes ; ce point de vue est devenu aujourd'hui une évidence pour beaucoup. Le présent livre concilie les deux points de vue (abstraction géométrique et calculs concrets). On peut regretter que certains aspects soit peu développés comme les développements autour de la conjecture de Zilber-Pink (voir [2]) ou l'apport de la théorie d'Arakelov, mais il sera difficile de bouder son plaisir devant la richesse et la qualité des quelques 600 pages proposées.

Le titre des chapitres décrit assez bien leur contenu : 1 Hauteurs ; 2 Hauteurs de Weil ; 3 Tores linéaires ; 4 Petits points ; 5 Équation aux unités ; 6 Théorème de Roth ; 7 Théorème du sous-espace ; 8 Variétés abéliennes ; 9 Hauteurs de Néron-Tate ; 10 Théorème de Mordell-Weil ; 11 Théorème de Faltings ; 12 Conjecture *abc* ; 13 Théorie de Nevanlinna ; 14 Conjectures de Vojta. Trois appendices concernent un résumé des outils de géométrie algébrique, de la théorie de la ramification et de la géométrie des nombres. Le chapitre sur la conjecture *abc* est riche de résultats (Belyi, Elkies, Darmon-Granville) et questions ; la conjecture *abc*, initialement proposée par Masser et Oesterlé peut se formuler très élémentairement (sur le corps des rationnels). Si $R(n)$ désigne le *radical* de n, i.e. le produit des nombres premiers divisant n, cette conjecture prédit que pour des entiers premiers entre eux vérifiant $a+b+c=0$ on a l'inégalité

$$\max\{|a|,|b|,|c|\} \leqslant C_\varepsilon R(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Parmi les textes pré-existant sur la géométrie diophantienne, citons le survey de Serge Lang [10] essentiellement sans démonstration et les ouvrages [6, 9, 11]. Le livre de Bombieri et Gubler est remarquablement bien écrit dans un style précis et détaillé. Il contient des exposés concis, lumineux sur plusieurs sujets non abordés dans d'autres livres comme les hauteurs sur les grasmanniennes, les versions optimales du lemme de Siegel, les estimations explicites des hauteurs, le théorème de Beukers-Schlickewei sur l'équation aux unités, la version de Sprindzhuk du théorème d'irréductibilité de Hilbert, les minorations de hauteurs (problème des petits points de Lehmer ou Bogomolov) et même quelques résultats originaux comme le décompte des points situés sur des droites dans un threefold cubique (chapitre 11). Plusieurs chapitres produisent le meilleur exposé écrit sur leur sujet ; c'est le cas notamment des chapitres sur le théorème de Roth et le théorème du sous-espace, du chapitre donnant la démonstration du théorème de Faltings (suivant la démonstration de Vojta revisitée par le maître [1]) et le dernier appendice sur la géométrie des nombres.

C'est un ouvrage qui mérite de figurer dans la bibliothèque de tout(e) mathématicien(ne).

Références

[1] Bombieri, Enrico, *The Mordell conjecture revisited*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1990), 615–640.
[2] Chambert-Loir Antoine, *Relations de dépendance et intersections exceptionnelles*. Exposé Bourbaki (janvier 2011).
[3] Faltings, Gerd, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. 73 (1983), 349–366.
[4] Faltings, Gerd, *Diophantine approximation on abelian varieties*. Ann. of Math. 133 (1991), 549–576.
[5] Hindry, Marc, *La géométrie diophantienne, selon Serge Lang*. Gazette Math. No. 108 (2006), 17–32.
[6] Hindry, Marc ; Silverman, Joseph H., *Diophantine Geometry. An introduction*. GTM 201. Springer-Verlag, 2000.
[7] Lang, Serge, *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, Diophantine geometry, and 20th century mathematics*. Gazette Math. No. 63 (1995), 17–36.
[8] Lang, Serge, *Hyperbolic and Diophantine analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 14 (1986), 159–205.
[9] Lang, Serge, *Fundamentals of Diophantine geometry*. Springer-Verlag, New York, 1983. [version augmentée de *Diophantine geometry*, Interscience, New York, 1962.]
[10] Lang, Serge, *Number theory, III. Diophantine geometry*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 60. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[11] Serre, Jean-Pierre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. (Traduit et édité par Martin Brown à partir de notes de Michel Waldschmidt). Aspects of Mathematics, Vieweg, 1989.
[12] Vojta, Paul, *Diophantine approximations and value distribution theory*. Lecture Notes in Mathematics, 1239, 1987.
[13] Vojta, Paul, *Siegel's theorem in the compact case*. Ann. of Math. 133 (1991), 509–548.

Marc Hindry,
Université Paris Diderot