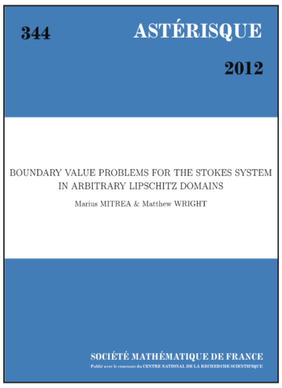
SOMMAIRE DU N^{o} 134



Astérisque 344

Boundary Value Problems for the Stoke System in Arbitrary Lipschitz domains

M. Mitrea, M. Wright

The goal of this work is to treat the main boundary value problems for the Stokes system, i.e.,
(i) the Dirichlet problem with L^p-data and nontangential maximal function estimates,
(ii) the Neumann problem with L^p-data and nontangential maximal function estimates, the Regularity problem with $L^p{}_1$-data and nontangential maximal function estimates,
(iv) the transmission problem with L^p-data and nontangential maximal function estimates,
(v) the Poisson problem with Dirichlet condition in Besov-Triebel-Lizorkin spaces,
(vi) the Poisson problem with Neumann condition in Besov-Triebel-Lizorkin spaces,

in Lipschitz domains of arbitrary topology in R^n, for each $n \geq 2$. Our approach relies on boundary integral methods and yields constructive solutions to the aforementioned problems.

(Problèmes au bord pour le système de Stokes dans les domaines de Lipschitz quelconques)

Le but de ce travail est d'étudier des problèmes au bord pour le système de Stokes, i.e.,
(i) le problème de Dirichlet avec des données L^p et des estimations de la fonction maximale non tangentielle,
(ii) le problème de Neumann avec des données L^p et des estimations de la fonction maximale non tangentielle,
(iii) le problème de régularité avec des données $L^p{}_1$ et des estimations de la fonction maximale non tangentielle,
(iv) le problème de transmission avec des données L^p et des estimations de la fonction maximale non tangentielle,
(v) le problème de Poisson avec des conditions de Dirichlet au bord dans des espaces de Besov-Triebel-Lizorkin,
(vi) le problème de Poisson avec des conditions de Neumann au bord

dans des espaces de Besov-Triebel-Lizorkin, dans des domaines lipschitziens de R^n pour tout $n \geq 2$ de topologie arbitraire. Notre approche repose sur des méthodes d'intégrales au bord et fournit des solutions constructives aux problèmes ci-dessus.

ISBN : 978-2-85629-343-0

Prix public* : 50 € - prix membre* : 35 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

SMF

Mot de la Présidente

Pour les mathématiques françaises, la première nouvelle de l'été fut la moisson de prix internationaux : prix jeunes chercheurs de la Société Mathématique Européenne et prix Klein, tout d'abord, puis prix Poincaré et prix jeune chercheur de l'IUPAP, prix Shaw. Le palmarès est à la une du site de la SMF. On ne peut que se réjouir, à cette occasion, que le congrès européen fasse maintenant partie des événements qui comptent en mathématiques.

Il est des circonstances, comme cet été, où l'on peut vraiment parler d'excellence des mathématiques françaises, quelle que soit l'irritation qu'on éprouve à l'usage incessant du mot « excellence » depuis quelques années. C'est d'ailleurs ce qu'a fait *le Monde*, dans un éditorial du 10 août 2012 intitulé « Être les meilleurs en maths, et comment le rester ». Mais il se permet d'évoquer en parallèle les performances des élèves français dans les comparaisons internationales. On sait aussi que l'ensemble des places ouvertes au concours du Capes n'est pas pourvu depuis quelques années, faute de candidats jugés valables. Les Assises de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche vont-elles être l'occasion de réfléchir aux moyens de lutter contre ce que beaucoup d'entre nous vivent comme une dégradation de l'enseignement et de l'attractivité des mathématiques ? La SMF a organisé le 21 septembre une réunion sur la licence de mathématiques. Ses conclusions sont disponibles sur notre site.

Si l'année passée a été riche en interventions diverses de mathématiciens dans les médias, il n'y a pas vraiment eu de pause durant l'été. La nouvelle année scolaire a commencé très tôt côté Grand Public : il y avait salle comble (1200 inscrits, surtout des lycéens, dans deux amphithéâtres) pour écouter Cédric Villani à Lille le 19 septembre dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien ». Cet événement, accompagné d'une longue séance de signature de son livre « Théorème Vivant » et précédé de plusieurs conférences préparatoires, en particulier dans les lycées, a encore une fois mis en valeur le potentiel d'intérêt qu'on pouvait susciter en province autour des mathématiques.

Les décisions se sont précipitées côté gratuité de l'accès à la documentation, ou encore « Open Access », en commençant au mois de juillet par le choix du gouvernement britannique de basculer dans le système « auteur-payeur », qu'il est convenu d'appeler le « Gold Open Access », où l'éditeur fait payer ses services à l'auteur et non au lecteur. Un tel système peut avoir beaucoup d'effets pervers, que nous avons jugés indispensable de dénoncer dans une déclaration commune des trois sociétés savantes de mathématiques (SFdS, SMAI, SMF). Plus récemment a été créée sur le site de la SMF une rubrique Tribune sur ce sujet. On trouvera dans le dossier qui suit toutes les informations correspondantes, ainsi qu'un compte-rendu, écrit par Valérie Girardin, de la Table Ronde de juin sur les publications en mathématiques.

Lorsque la SMF prend position sur les effets pervers du « Gold Open Access », elle le fait évidemment comme société savante représentative des chercheurs en mathématiques, qui sont tour à tour auteurs et lecteurs, mais également recenseurs. Tout au long de ses 140 ans d'existence, elle s'est aussi affirmée comme défenseur d'une édition scientifique de type académique ; elle est elle-même maison d'édition et réfléchit à ce titre à sa propre dynamique de développement. On trouvera dans ce numéro toutes les informations nécessaires pour profiter de la « vente d'automne ».

Le 1^er^ octobre 2012
Aline Bonami

AUTOUR DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES

Quel avenir pour les publications mathématiques ?

Valérie Girardin[1]

La synthèse qui suit, rédigée avec la participation de Jean-Paul Allouche, Yann Lefeuvre et Olivier Ramaré, rend compte de la table ronde que j'ai animée le 15 juin 2012 à l'IHP lors des Journées Annuelles de la SMF.

Cette table ronde était organisée par Jean-Paul Allouche, Olivier Ramaré et moi-même, et les intervenants en étaient Jean-Paul Allouche (CNRS, Université Pierre et Marie Curie), Colette Anné (Université de Nantes), Srecko Brlek (Université du Québec à Montréal), Pierre Carbone (Inspection Générale des Bibliothèques), Fabrice Planchon (Université de Nice), et Catherine Thiolon (INRA Versailles). Elle s'est enrichie des interventions d'un public nombreux.

Pourquoi publier ?

Dans le monde académique mathématique, la publication d'articles répond au moins à deux buts. Le but premier est de faire connaître des résultats à la communauté et d'en fixer une version de référence. Le second but, non explicitement prévu à l'origine mais qui s'est imposé progressivement, est l'évaluation des chercheurs, associée récemment aux indices bibliométriques et autres facteurs d'impact des revues. Ces deux buts reposent sur le fait que le contenu des articles publiés dans des revues est réputé être vérifié et évalué, ce qu'il n'est pas dans les rapports techniques, prépublications ou serveurs d'archives ouvertes.

En mathématiques, un article est une invitation à la lecture, le rapporteur en étant souvent le premier lecteur attentif. Dans les sciences expérimentales, il peut constituer aussi une invitation à reproduire une expérience, l'attitude des chercheurs face aux publications n'est pas uniforme. Même si la communauté mathématique française se sent particulièrement concernée par l'avenir des publications scientifiques, il ne se joue évidemment pas seulement en son sein. Le comité d'éthique de la SME s'intéresse particulièrement aux problèmes de plagiat, sans oublier les enjeux de bibliométrie ou de coût des publications. L'IMU et l'ICIAM ont mis en place en 2010 un groupe de travail chargé de réfléchir à la question du classement des revues. Sur le blog[2] associé, tout classement est rejeté, à cause des risques d'interprétations erronées et de dérives d'évaluations individuelles ; aussi bien sa mise en œuvre sujette à conflits d'intérêts que l'association d'un chiffre unique à

---

1 Université de Caen Basse Normandie.

2 `http://blog.mathunion.org/journals/`

une revue y sont dénoncées. L'IMU a décidé en conséquence de ne pas prendre en charge un tel classement, mais reste attentive aux problèmes posés par des revues opportunistes peu scientifiques : un forum sur les pratiques des revues à travers le monde pourrait voir le jour et le blog reste ouvert sur les nouveaux modèles de publication et le prix des revues.

Quel modèle de publication prédomine actuellement ?

Un noyau de 9360 revues publiant un million d'articles par an est indexé au Journal Citation Reports (JCR). Dans le monde, 2000 éditeurs publient environ 25400 revues, soit 1,5 million d'articles par an. Si 95% d'entre eux ne publient qu'un ou deux titres, les cent premiers éditeurs en publient les deux tiers, les dix premiers plus du tiers et les quatre plus gros (Elsevier, Springer, Taylor & Francis, Wiley-Blackwell) plus de 1000. Les éditeurs commerciaux publient 64% du total des articles, les éditeurs académiques se partageant le reste (soit 30% pour les sociétés savantes et 4% pour les presses d'universités). La croissance annuelle est de 3,5% en titres et 3% en articles, presque entièrement en version électronique. Relativement à la plupart des autres sciences, les éditeurs sont plus diversifiés et le nombre de revues est plus grand en mathématiques.

Le marché mondial de l'IST[3] représente 16 milliards de dollars de chiffre d'affaires répartis pour moitié entre revues et livres. Les bibliothèques constituent la principale source de revenus pour les revues (68 à 75% du chiffre d'affaires global), suivies par les entreprises (15 à 17%), la publicité (4%), les cotisations à des sociétés savantes et abonnements individuels (3%), et les auteurs (3%).

Les éditeurs perdent parfois de l'argent sur les livres, outil pédagogique fondamental de transmission du savoir pour lesquels ils effectuent un travail important de suivi des auteurs et d'incitation à l'écriture. Par contre, ils en gagnent beaucoup sur les revues pour lesquelles leurs tâches traditionnelles se réduisent pourtant :

– la soumission des manuscrits aux comités éditoriaux puis des épreuves aux auteurs se fait maintenant généralement sous forme électronique ;

– la gestion des relations entre auteurs et rapporteurs est de plus en plus déléguée aux comités éditoriaux sous forme électronique automatisée ;

– la mise en forme du texte final à partir de son manuscrit reste nécessaire même en version électronique, mais les auteurs doivent maintenant fournir un texte respectant un format imposé ; beaucoup d'éditeurs n'interviennent plus que marginalement sur ce qui continue à s'appeler un manuscrit, se désengageant largement du travail de typographie (langue, style, bibliographie) ;

– en version électronique, l'impression et la reliure sont réduites à une mise en ligne ;

– reste la diffusion.

Peu de revues uniquement en ligne existent à ce jour, mais une version électronique des revues vient doubler la version papier, selon un modèle qui s'impose depuis les années 1990. L'accès à cette version électronique vient en surcoût de l'abonnement papier, avec accès « gratuit » aux années récentes, à l'origine en nombre d'accès limité, puis illimité et à distance. L'abonnement est

[3] Information Scientifique et Technique ; voir le rapport Outsell *Information Industry Market Size and Share Rankings: Preliminary 2008 Results.*
http://www.outsellinc.com/store/products/795

majoritairement payé par une institution pour une communauté d'utilisateurs ; la communauté peut être nationale, on parle alors de licences nationales (voir aussi les accords du RNBM).

Ce modèle d'abonnement est en place pour les éditeurs commerciaux et les sociétés savantes. Certaines sociétés savantes éditent leurs revues via un éditeur commercial. Pour les autres, les coûts sont réduits aux seuls frais de fonctionnement minimaux (nombre réduit de salariés permanents, informatique, frais d'imprimeurs), un travail important étant assuré bénévolement par les scientifiques eux-mêmes. Les tarifs qu'elles pratiquent sont en général bien inférieurs à ceux des éditeurs commerciaux, et les profits éventuellement dégagés financent d'autres activités au bénéfice de la communauté. Par ailleurs, certaines revues dites d'universités sont totalement gratuites ; il s'agit le plus souvent de revues purement électroniques dont les frais de fonctionnement sont pris en charge par une institution.

Ce modèle fondé sur l'usage, propre à une période de transition du papier vers l'électronique, est absurde pour le client qui ne prend qu'un abonnement électronique, la référence au coût du papier jouant cependant pour calculer une remise. Selon des études menées en Grande-Bretagne en 2004 et aux USA en 2007, la différence de coût pour l'éditeur entre électronique et papier se situe entre 20 et 30%, bien supérieure aux remises consenties pour l'électronique (au maximum 15%).

Même si l'augmentation annuelle du prix des abonnements s'est ralentie pendant les années 2000 par rapport aux années 1980-1990, elle reste très largement supérieure à l'inflation, et devient insupportable comparée à l'évolution des crédits. Qui plus est, les éditeurs commerciaux imposent de plus en plus l'abonnement par *bouquet*, c'est-à-dire à toutes leurs revues dans une discipline donnée, voire dans toutes les disciplines, abonnement assorti de clauses léonines (interdiction de diminuer le montant global souscrit, augmentation contractuelle automatique annuelle bien supérieure à l'inflation, etc.).

Quel avenir pour les modèles Open Access ?

On parle de plus en plus des systèmes Open Access. Si étymologiquement il s'agit de garantir la gratuité de l'accès à la version électronique des articles, comme concrètement tout système de publication a un coût, l'Open Access a été coloré pour correspondre à des systèmes économiques différents. Les serveurs d'archives ouvertes *Green Open Access*, dépôts en ligne n'incluant aucun travail éditorial sur les articles, sont gratuits pour les auteurs comme pour les lecteurs. Leur coût doit être supporté par des institutions, assurant les services nécessaires de maquettage, distribution, recherche de fonds et entretien de portail. Par contre, comme sa désignation française de système auteur-payeur l'indique, dans le *Gold Open Access* les auteurs ou leurs institutions paient pour publier dans des revues en accès en ligne gratuit pour les lecteurs. D'autres systèmes existent, par exemple la revue *Nature* fait payer les auteurs, tout en étant diffusée sur abonnement payant. Toutes les pistes de réflexion sont encouragées, notamment par l'IMU.

Gold Open Access – Système auteur-payeur

Dans ce système, l'auteur (ou son institution) dont l'article a été accepté par le comité éditorial d'une revue doit payer, de l'ordre de 2000 euros par article ou 50 euros au moins par page, pour que son article y paraisse. L'article est alors mis en ligne par l'éditeur en accès libre.

Un tel système ouvre la voie à toutes sortes de dérives, comme l'acceptation d'articles d'un intérêt scientifique douteux pour garantir les revenus de l'éditeur. La possibilité de publier d'un chercheur y est directement liée à son accès à des crédits, renforçant son accès aux crédits dans une spirale infernale, mais justifiant par là même le système aux yeux de ses promoteurs. De fait, les chercheurs des organismes riches y sont favorisés ; à l'inverse, dans une université donnée à budget fixé, on pourrait en arriver à l'absurdité de devoir décider localement quels collègues verraient quelles publications subventionnées.

Les éditeurs commerciaux prônant ce système affirment parfois qu'il coûterait moins cher aux scientifiques ou à leurs institutions. Même sans étude précise de coût, il apparaît peu probable que ces éditeurs cherchent à mettre en place un système qui diminuerait leur revenu global, le contraire paraissant bien plus vraisemblable. Qui plus est, une fois l'article payé, il est à craindre que l'éditeur fasse peu d'efforts pour sa diffusion ne lui rapportant rien. Enfin, ce modèle ne corrige pas le défaut souvent dénoncé du modèle classique où les contribuables paient deux fois, d'abord en finançant la recherche publique puis en payant les abonnements aux revues.

Green Open Access – Archives ouvertes

En 2001, l'Initiative de Budapest préconise d'une part l'auto-archivage par les auteurs des articles soumis à des revues à comité de lecture (voir le Directory of Open Access Repositories) et d'autre part la publication de revues en accès libre financées par les institutions. Suit en 2003 la déclaration de Berlin en faveur du libre accès à la connaissance, signée par 344 institutions en sciences exactes, sciences de la vie, sciences humaines et sociales, dont en France les EPST, la CPU, la CGE, etc.

Les archives ouvertes sont apparues au début des années 1990 en physique. En plus des pages personnelles des chercheurs, on peut actuellement citer :

– ArXiv, hébergé par la Cornell University Library, qui contient plus de 720000 publications en mathématiques, informatique, physique, biologie, économie ;

– HAL en France, et au niveau européen, le pilote Open Access 7e PCRD destiné à procurer aux chercheurs un accès libre amélioré aux résultats des recherches financées par l'Union Européenne ;

– PubMed Central, avec plus de 2,3 millions articles en sciences biomédicales émanant de près de 1000 revues y déposant tous leurs articles, de 300 revues y déposant les articles financés par le National Institute of Health, et de plus de 1500 revues y déposant une sélection d'articles ;

– RePEc (Research Papers in Economics), avec près d'un million de documents publiés dans 75 pays.

Ces archives ouvertes ayant un coût bien réel (contrairement à une idée répandue), elles doivent être soutenues. En France, l'UMS Cléo du CNRS soutient 250 revues et collections de livres en sciences humaines et sociales via le portail

OpenEdition[4]. En 2010, y figuraient 167 revues académiques françaises en accès libre complet (dont seulement 6 indexées dans le JCR) ; le cas le plus fréquent (200 titres, dont les I-revues de l'INIST du CNRS) est celui de revues retenant les articles pour une période limitée dite d'*embargo* avant accès libre. On peut également citer SPARC (The Scholarly Publishing and Academic Resources Coalition), créée en 1998 par l'ARL (Association of Research Library), qui réunit plus de 800 institutions dans le monde ; SPARC Europe, créé en 2001, comprend plus de 100 institutions et maintient les registres OpenDOAR et DOAJ.

Quel avenir pour les archives ?

Conservation et archivage

L'accessibilité, la reproductibilité, la maniabilité et la portabilité arrivent avant l'exigence de conservation pure.

Les quelque 50 ans de l'électronique doivent être comparés aux 5000 ans de l'écriture et aux 600 ans de l'imprimerie qui avait permis la reproduction en nombreux exemplaires après la copie exemplaire par exemplaire. L'électronique a d'abord reposé sur des supports physiques (bande magnétique, disquettes, CD, etc.) avant une diffusion via Internet par fichier ou lien URL. Les relations entre auteur, éditeur, diffuseur, bibliothèque, utilisateur, lecteur, en ont été profondément modifiées, instaurant une grande facilité de communication scientifique libre là où régnait auparavant une division du travail stricte.

Parallèlement à la publication numérique native, la numérisation rétrospective des revues et ouvrages est en cours. Les transferts d'un support à un autre ne suppriment pas l'utilité de conserver le support original de l'œuvre pour un travail de recherche. La conservation en un grand nombre d'exemplaires a également son utilité, on rappelle que les ouvrages de l'Antiquité grecque, détruits lors des invasions dans le monde grec et romain, ne nous sont parvenus que parce que conservées par les Arabes. Contrairement aux idées reçues, l'électronique n'est pas structurellement pérenne, ni uniquement virtuelle, puisque dépendant de supports dégradables. Par conséquent, transférer périodiquement les données et conserver les moyens d'émuler les logiciels est nécessaire, de même que leur impression sur papier pour les confier à des bibliothèques. C'est l'un des problèmes abordés par le projet BSN[5].

Lorsqu'un abonné met fin à son abonnement sur papier, il conserve ses exemplaires, ce qui n'est pas clair pour l'accès électronique : en général, s'abonner une année donne le droit de consulter une bonne partie des archives en ligne, mais, sauf fourniture de CD, interrompre son abonnement fait perdre l'accès y compris aux archives des années d'abonnement. Les éditeurs commerciaux ont longtemps dit ne pas se sentir plus concernés par un archivage électronique pérenne que par l'archivage des exemplaires papier d'anciens numéros, et que ce rôle revenait aux structures institutionnelles (par exemple en France à la BnF). Leur point de vue a évolué lorsqu'ils ont compris qu'ils pouvaient vendre ces archives. Leur achat (par exemple par le Labex Istex) doit être encadré d'une réflexion sur leur structuration, leur classement et leur accès, par qui, comment, où, et à quel prix.

[4] *revues.org*, *hypotheses.org* et *calenda*.

[5] Bibliothèque Scientifique Numérique `http://cleo.cnrs.fr/974`

Droit de propriété intellectuelle

Les éditeurs des revues exigent que les auteurs de tout article accepté par le comité éditorial leur cèdent gracieusement leurs droits d'auteur ; s'ils refusent, leur article n'est pas publié dans la revue, mais s'ils acceptent, ils ne peuvent plus le diffuser eux-mêmes. Bien que cette cession ne constitue pas un contrat, les éditeurs ne s'engageant par aucune signature, les auteurs ont-ils pour autant le droit d'afficher une version de leurs publications sur leur page personnelle ou sur un serveur d'archives ouvertes ?

La mise en ligne d'une version *dégradée*, autrement dit correspondant au manuscrit soumis (ou à une autre version non finale éventuellement accompagnée des rapports), pourrait constituer une solution acceptable. Des exceptions à la cession des droits d'auteur étant déjà faites pour les employés d'état des USA, Royaume-Uni, Australie ou Canada, dont les articles appartiennent de droit à leur institution, la création d'une instance européenne qui jouerait ce rôle pourrait être envisagée. Le modèle de contrat du MIT mériterait une traduction française. Le CSPLA (Conseil Supérieur de la Propriété Littéraire et Artistique), et le rapport Salançon[6] peuvent apporter des réponses. On rappelle que les articles de Grigori Perelman n'existent que sur ArXiv, mais que leur diffusion a été utilement accompagnée par la publication d'articles et ouvrages écrits par d'autres chercheurs reprenant ses résultats.

Quel avenir pour les bibliothèques de mathématiques ?

Depuis l'abandon des PPF, un certain nombre de bibliothèques de mathématiques ont été intégrées dans les Bibliothèques Universitaires (BU) multithématiques et, en conséquence, les mathématiciens y ont perdu leur voix. Qui plus est, le financement par projet de la recherche, qui tend à se substituer au financement sur crédits récurrents, semble incompatible avec le financement de bibliothèques spécialisées. L'importance que chercheurs et bibliothécaires de mathématiques interviennent et affichent la même position dans les discussions et négociations extérieures est fortement soulignée.

Les quatre plus gros éditeurs seront en position de vente forcée tant que les chercheurs voudront absolument avoir accès à leurs revues. Les BU, au financement non augmenté, n'ont ainsi d'autre choix que de supprimer ce qui est hors contrats contraints pour faire face aux augmentations de ceux-ci. Les dernières années ont vu un échec pour la communauté mathématique, avec l'acceptation du passage au tout électronique ou l'aval donné à la fin de la politique par titre. Malgré tout, les actions menées en 2011-2012 (*The Cost of knowledge*[7], Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques[8], etc.) liées aux déclarations de refus de *refereeing* ou arbitrage, de participation à des comités de rédaction ou de publication dans certaines revues, ont eu un impact non négligeable.

Tant que les revues sont publiées aussi sous forme papier, la conservation partagée du papier (sur au moins deux sites dans des lieux distants) et de l'électronique

[6] http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid21677/rapport-du-comite-ist-information-scientifique-et-technique.html
[7] http://thecostofknowledge.com/
[8] http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/petitions/index.php?petition=3

doit être assurée. La France constitue un cas particulier d'organisation de la recherche, n'entrant pas dans le modèle anglo-saxon, avec un enchevêtrement de structures, laboratoires, universités, écoles, EPST, EPIC, etc. La structuration de ses archives ne peut être mise en place qu'à partir d'une entraide entre bibliothèques, en accord avec leurs responsables scientifiques et leurs bibliothécaires. Le RNBM offre un tel lieu de discussion et de partage d'informations et de pratiques.

S'il a surtout été question lors de la table ronde de publications d'articles dans des revues, le passage à l'électronique des livres est également en marche. Un livre blanc électronique[9] sur les *ebooks* vient de paraître, donnant des clés pour comprendre la situation du livre numérique dans l'édition professionnelle, universitaire et de recherche, et sur son évolution à court terme. La part relative du coût des livres et de celui des revues dans le budget des bibliothèques est en question : l'augmentation considérable du prix des revues entraîne directement une baisse drastique des achats de livres. L'importance de garantir aux BU le financement d'ouvrages et de documentation à destination des étudiants est soulignée.

Quels espoirs pour l'avenir ?

La disparition du papier au profit des seules publications électroniques (système dit *e-only*) est annoncée comme imminente depuis au moins vingt ans. Si elle paraît probable à moyen terme, elle ne doit pas se faire à marche forcée. Même les plus jeunes et ceux qui manient facilement l'électronique impriment les articles pour les étudier. La transition suit un rythme différent selon les disciplines, la communauté mathématique dans son ensemble doit participer à déterminer le sien. Les conditions de l'évolution se posent : équilibre entre libre/gratuit/payant, modèles mixtes ou hybrides, évolution de la notion même de revue, différenciation entre l'article électronique et sa version papier, définition d'un continuum entre article et données, conséquences sur les modes de lecture et de recherche.

Les stratégies de développement sont forcément plus réfléchies et les ambitions et investissements plus importants chez les éditeurs commerciaux que dans les institutions ou les sociétés savantes. En conséquence, la responsabilité des pouvoirs publics en matière d'archivage électronique est claire, pour prendre en compte ses coûts (infrastructure, ressources humaines, etc.) et garantir son accès, sa maniabilité et sa pérennité. La nécessité que ces mêmes pouvoirs publics soutiennent les publications académiques et les archives ouvertes est répétée, ainsi que la demande à la communauté mathématique de privilégier la publication dans des revues académiques. Une charte de bonnes pratiques pour les revues se met en place en France à cet effet, qui contribuera à garantir liberté de recherche et autonomie de travail.

L'espoir que les nouvelles technologies donnent aux chercheurs plus de temps pour penser s'est éloigné, la gestion des tâches non-mathématiques est en augmentation constante. Face à l'avalanche de publications (payantes...), le temps disponible pour leur lecture diminue, et face au droit de lecture revendiqué, le devoir de lecture ne doit pas être oublié. Pour finir, on rappelle la vraie valeur des publications mathématiques : un théorème est un théorème !

---

[9] `http://www.gfii.fr/ebook`

Quelques indications pour en apprendre plus

Des lectures informatives, dont les liens figurent sur la page du site de la SMF dédiée à la table ronde[10].

Textes issus de la SMF

Résultat de l'enquête de mars 2009 par la SMF à propos de l'usage de la bibliométrie à l'université.
Analyse de l'enquête d'octobre 2010 par la SMF sur le devenir des bibliothèques de mathématiques dans la LRU.
Position de janvier 2012 de la SMF sur les négociations avec les éditeurs commerciaux.
Chercheurs, éditeurs : le débat, Gazette des mathématiciens, n° 132, avril 2012.

Textes collectifs

Monograph and Serial Costs in ARL Libraries 1986-2003.
Costs and business models in scientific research publishing, a report commissioned by the Wellcome Trust, April 2004.
La définition des différentes couleurs Open Access, site de SHERPA, 2006.
Expenditure for Monographs vs Serials Over Time ARL Statistics 2008.
Les collections électroniques, une nouvelle politique documentaire, sous la direction de P. Carbone et F. Cavalier, Editions du Cercle de la librairie, Paris, 2009.

Contributions individuelles

Aspesi, C., *Reed Elsevier: Need for a Progressive Divestiture?* sur le blog de Richard Poynder, juin 2010.
Bucknell, T., *The "Big Deal" Approach to Acquiring e-Books : a Usage-Based Study*, Serials, 23 (2), July 2010, p.126-134.
Carbone, P., *Coûts, bénéfices et contraintes de la mutualisation des ressources électroniques : éléments de comparaison internationale et propositions*, Rapport IGB 2010-012, octobre 2010.
Carbone, P., *Optimisation des coûts de la documentation électronique dans les établissements d'enseignement supérieur et les organismes de recherche français*, Rapport IGB 2011-13-1 et 2011-13-2, décembre 2011.
Farge, M., *Avis du COMETS sur les relations entre les chercheurs et les maisons d'édition scientifique*, juin 2011.
Guédon, J.-C., *Le libre accès aux publications scientifiques : éléments d'une prospective prudente*. Centre d'Alembert, décembre 2011.
Jeffery, K. G., *Open Access: An Introduction*, ERCIM News, janvier 2006.
Johnson, R. K., Luther, J., *The E-only Tipping Point for Journals, What's Ahead in the Print-to-Electronic Transition Zone*, Washington DC, Association of Research Libraries, 2007.
Kapovich, I., *The Dangers of the "Author Pays" Model in Mathematical Publishing*, Scripta Manent, Notices of the AMS, Volume 58 Issue 9, October 2011.
Legendre, O., *La mariée était en position dominante*, blog de la bibliothèque numérique de Clermont-Ferrand, mai 2011.

[10] `http://smf.emath.fr/content/table-ronde-quel-avenir-pour-les-publications-mathematiques`

Lin, T., *Cracking Open the Scientific Process*, New York Times, janvier 2012.
Luguern, O., *Le contrat Springer et le RNBM*, 2011.
Monbiot, G., *Academic Publishers Make Murdoch Look Like a Socialist*, The Guardian, August 2011.
Ware, M., Mabe M., *The STM Report: An Overview of Scientific and Scholarly Journals Publishing*, Oxford, STM-International Association of Scientific, Technical and Medical Publishers, 2009.

Déclaration des trois sociétés savantes françaises de mathématiques

Open Access : mise en garde et effets pervers du système auto-payeur

Les sociétés savantes de mathématiques (SFdS, SMAI, SMF)[1] tiennent à alerter les pouvoirs publics et la communauté scientifique française sur les effets pervers du modèle de publication scientifique dont la presse a récemment parlé à deux occasions sous l'intitulé *Open Access* : lorsque la Grande Bretagne a décidé que tous les travaux universitaires financés par les contribuables britanniques devraient être disponibles en ligne gratuitement et immédiatement[2], et lorsque l'Union Européenne a adopté une position similaire[3].

Une large partie des articles de mathématiques est déjà en libre accès sur internet, que ceux-ci soient déposés gratuitement sur des serveurs à accès gratuit tels que ArXiv ou HAL, ou qu'ils soient disponibles sur des pages personnelles (ce qu'on désigne actuellement sous le nom de *Green Open Access*). Ces pratiques se sont généralisées à la suite de la *Déclaration de Berlin*[4] qui les encourage.

Mais il est question aujourd'hui de tout autre chose. Cette idée généreuse que les articles soient mis à disposition gratuitement sur internet risque d'être détournée et pervertie par certains grands éditeurs commerciaux qui cherchent à imposer le modèle dit *Gold Open Access* (ou encore auteur-payeur), où l'article est mis en ligne en accès libre après que l'auteur ou son institution de rattachement a payé à l'éditeur une somme importante (on parle de 2 000 euros par article en mathématiques, à comparer aux financements des laboratoires !). C'est le choix fait par le gouvernement britannique. Les sociétés savantes de mathématiques alertent les pouvoirs publics français sur les dangers du *Gold Open Access*.

On dit souvent que la généralisation de l'*Open Access* permettra d'éviter que les contribuables paient deux fois comme ils le font maintenant, puisque actuellement

---

[1] Seconde version, septembre 2012, la première version ayant été mise sur le site de la SMF le 24 juillet 2012.
[2] Le 15 juillet 2012.
[3] Le 17 juillet 2012.
[4] Voir `http://oa.mpg.de/lang/en-uk/berlin-prozess/berliner-erklarung/`. Elle a en particulier été signée en France par le CNRS, l'INRIA et la Conférence des Présidents d'Université.

ils paient une première fois pour financer la recherche publique puis une deuxième fois pour les abonnements souscrits par les bibliothèques scientifiques. Rien n'est changé avec le *Gold Open Access* puisque les contribuables paient aussi deux fois, d'abord en finançant la recherche publique puis en payant la publication des articles (pour un montant dont le calcul fait pour l'instant l'objet d'opacité). On dit aussi que l'*Open Access* gomme les inégalités, ce qu'on ne peut nier du point de vue du lecteur (qui bénéficie déjà largement du *Green Open Access* et peut toujours s'adresser aux auteurs). Mais un chercheur est toujours à la fois auteur et lecteur. Or le *Gold Open Access* ne peut qu'accroître considérablement les inégalités lorsqu'on veut publier, que ce soit entre laboratoires ou à l'intérieur des laboratoires. La recherche des financements nécessaires va faire revenir de vieilles habitudes, dont le mandarinat et le clientélisme, tout en risquant de laisser de côté des travaux de premier ordre. Que dire aussi des inégalités qui vont encore se creuser entre les pays qui pourront mettre en place des systèmes de financement et ceux qui n'en auront pas les moyens ?

Il est clair que l'édition scientifique est en pleine mutation, sans qu'on puisse vraiment déterminer quel sera le système de demain. L'internationalisation de la recherche, la multiplication des archives ouvertes, l'abandon progressif du papier au profit de l'électronique, l'amélioration continue de l'accès aux ressources en ligne, la croissance exponentielle du nombre d'articles, les ambitions financières démesurées de certains éditeurs commerciaux et leur politique de vente forcée par des abonnements en bouquets, tous ces facteurs rendent inévitable une évolution du système actuel. On peut imaginer des systèmes de publication autres que le *Gold Open Access* qui préservent les intérêts des différents acteurs (auteurs, éditeurs, bibliothèques, laboratoires, organismes financeurs), tout en permettant un accès libre et gratuit à tous, en accord avec la Déclaration de Berlin. Cet accès peut avoir lieu en mode dégradé ou avec une période d'embargo après la publication de l'article. La diffusion des résultats scientifiques peut aussi très bien évoluer vers d'autres systèmes que les revues que nous connaissons aujourd'hui[5], dès lors que ces nouveaux systèmes garantissent l'accès aux archives sur une longue durée et intègrent les coûts de publication, même très modérés.

Quel que soit l'avenir, et quels que soient les modèles économiques vers lesquels on se dirige au niveau international, il est urgent que les pouvoirs publics français et la communauté scientifique se mobilisent sur ces questions, à la fois pour faire de la prospective à moyen terme et pour réfléchir aux périodes de transition. Les auteurs, acteurs principaux de la création scientifique, doivent être associés étroitement à l'élaboration de ces modèles du futur. Les sociétés savantes françaises de mathématiques sont prêtes à prendre part aux discussions à venir. Si les pouvoirs publics français se décident en faveur d'un accès public aux travaux des chercheurs du type *Open Access*, elles les alertent sur les effets pervers potentiels du modèle *Gold Open Access*.

[5] Quel que soit le système adopté, le souhait quasi-unanime de la communauté mathématique est que le système actuel d'évaluation par les pairs des articles scientifiques avant leur acceptation (*peer-review*) reste la norme. Ce système repose sur le travail bénévole des scientifiques. Il assure la qualité des articles publiés.

Open Access et le système auteur-payeur : actualités

Les prises de position et décisions se sont multipliées depuis la fin juin 2012. Les débats de la table ronde en sont d'autant plus actuels qu'ils sont éclairés par les événements plus récents.

– 29 juin 2012 : le comité d'éthique du CNRS (COMETS) prend position.

– 2 juillet 2012 : Cambridge University Press lance une nouvelle revue sur le modèle auteur-payeur, même si elle est pour l'instant gratuite. Ce lancement est relayé sur les blogs de Tim Gowers et Terence Tao.

– 15 juillet 2012 : le gouvernement de la Grande Bretagne annonce changer sa politique en matière d'accès aux résultats de la recherche. De fait il choisit le système auteur-payeur.

– 17 juillet 2012 : la Commission Européenne s'exprime à son tour.

– 24 juillet 2012 : les sociétés savantes de mathématiques (SFdS, SMAI, SMF) tiennent à alerter les pouvoirs publics et la communauté scientifique française sur les effets pervers du modèle de publication scientifique dit Open Access s'il se présente sous la forme de Gold Open Access.

– 7 septembre 2012 : le gouvernement de la Grande Bretagne annonce la mise à disposition de fonds spéciaux.

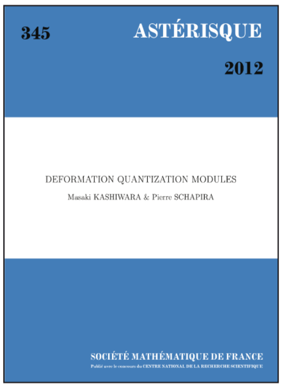
– 13 septembre 2012 : le Conseil Scientifique de l'INSMI vote une recommandation sur le « Gold Open Access » soutenant la déclaration des sociétés savantes et faisant référence à l'avis du COMETS.

Pour permettre à chacun d'aller plus loin dans la réflexion, une rubrique Tribune intitulée Open Access et système auteur-payeur a été créée sur le site de la SMF[1].

Elle contient des liens pour chaque item de la liste ci-dessus. Notre souhait est d'afficher des textes argumentés issus de contributions spontanées, qui permettent à chacun de se forger une opinion et à la communauté mathématique de faire entendre ses choix par l'intermédiaire des sociétés savantes[2].

[1] `http://smf.emath.fr/content/open-access-et-systme-auteur-payeur`

[2] On y trouvera entre autres des contributions d'Olivier Ramaré et Pierre Colmez.



Astérisque 345

Deformation quantization modules

M. Kashiwara, P. Schapira

Abstract. — On a complex manifold $(X, \mathscr{O}_X)$, a DQ-algebroid $\mathscr{A}_X$ is an algebroid stack locally equivalent to the sheaf $\mathscr{O}_X[[\hbar]]$ endowed with a star-product and a DQ-module is an object of the derived category $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{A}_X)$.

The main results are:

- the notion of cohomologically complete DQ-modules which allows one to deduce various properties of such a module $\mathscr{M}$ from the corresponding properties of the $\mathscr{O}_X$-module $\mathbb{Z}_X \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_X[\hbar]} \mathscr{M}$,
- a finiteness theorem, which asserts that the convolution of two coherent DQ-kernels defined on manifolds $X_i \times X_j$ $(i = 1, 2, j = i + 1)$, satisfying a suitable properness assumption, is coherent (a non commutative Grauert's theorem),
- the construction of the dualizing complex for coherent DQ-modules and a duality theorem which asserts that duality commutes with convolution (a non commutative Serre's theorem),
- the construction of the Hochschild class of coherent DQ-modules and the theorem which asserts that Hochschild class commutes with convolution,
- in the commutative case, the link between Hochschild classes and Chern and Euler classes,
- in the symplectic case, the constructibility (and perversity) of the complex of solutions of an holonomic DQ-module into another one after localizing with respect to $\hbar$.

Hence, these Notes could be considered both as an introduction to non commutative complex analytic geometry and to the study of microdifferential systems on complex Poisson manifolds.

Prix public* : 40 € - prix membre* : 28 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

MATHÉMATIQUES

Les développements asymptotiques après Poincaré : continuité et... divergences

Jean-Pierre Ramis[1]

1. Introduction

Cet article est la suite de *Poincaré et les développements asymptotiques (Première partie)*, paru dans le précédent numéro de la *Gazette*. Dans cette seconde partie, je vais décrire l'évolution des recherches sur les développements asymptotiques à partir de la toute fin du XIX^{e} siècle jusqu'à aujourd'hui. Il s'est passé (et se passe encore) beaucoup de choses et le sujet connaît actuellement un développement assez « explosif », je me suis donc limité à essayer de dégager les lignes de force et je serai nécessairement assez bref sur chaque sujet, en marquant les jalons essentiels et en donnant quelques repères bibliographiques. On me pardonnera de n'avoir pas pu (ou su...) parler de tout[2]. Mon propos étant essentiellement historique j'ai évité au maximum les détails techniques, le lecteur intéressé se reportera aux articles originaux.

Je terminerai l'article par un point, selon moi, essentiel : l'utilisation des développements asymptotiques *divergents* pour modéliser les discontinuités et la réduction des théories en physique, dans la ligne du travail de Stokes sur les caustiques[3]. Je suis entré en contact avec cet aspect du sujet en 1980 par un heureux hasard comme je le raconterai plus loin (*cf.* 10.2).

2. Séries divergentes.

Les travaux de Poincaré et Stieltjes ont remis à l'honneur les séries divergentes, quasiment proscrites chez les mathématiciens après Cauchy et Weierstrass. Ainsi, à la toute fin du XIX^{e} siècle, en 1898, l'Académie des Sciences de Paris proposait pour le *Grand Prix des sciences mathématiques* le thème : *« Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en analyse les séries divergentes »*. Le prix fut obtenu par Émile Borel pour un mémoire contenant, entre autres, ce que l'on appelle aujourd'hui la *sommation de Borel* [14]. Un peu plus tard Borel publia une présentation

[1] Institut de France (Académie des Sciences) et Institut de Mathématiques, CNRS UMR 5219, équipe Émile Picard, U.F.R. M.I.G., université Paul Sabatier (Toulouse 3), 31062 Toulouse Cedex 9.

[2] Comme par exemple des récentes versions *discrètes* des développements asymptotiques et des q-analogues [68]

[3] Cf. la première partie de cet article.

des connaissances de l'époque sur les séries divergentes [15]. Le point de vue de Borel est assez différent de celui de Poincaré (il est plutôt dans la continuité des travaux de Stieltjes sur les fractions continues), il renoue avec Euler : certaines séries divergentes ont une « somme » et dans le cas des séries formelles celle-ci correspond à un développement asymptotique *exact* (cf. 5 ci-dessous).

En 1949 paraît le traité posthume de G. H. Hardy *Divergent Series* [43], édité par L. S. Bosanquet et préfacé par J. E. Littlewood. C'est *la* somme sur le sujet, tout au moins en ce qui concerne les mathématiques pures et les aspects historiques[4] et l'exposé est d'une précision parfaite. Par contre, Hardy se désintéresse totalement de toute application en dehors des mathématiques pures, on est aux antipodes de l'approche de Poincaré...

Voici un extrait de la préface de [43] :

« All his books gave him some degree of pleasure, but this one, his last, was his favourite. ... The title hold curious echoes of the past and of Hardy's past. Abel wrote in 1828 [5] 'Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever'. *In the ensuing period of critical revision they were simply rejected. Then came a time when it was found that something after all could be done about them. This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical and unrigorous,* was *regarded as sensational, and about the present title, now colourless, there hung an aroma of paradox and audacity. »* .

3. Le théorème fondamental des développements asymptotiques

Voici d'abord une citation extraite de [37], donnant la description du *théorème fondamental des développements asymptotiques* par un physicien[6].

The present talk will be solely concerned with the formal expansions used in the analysis of asymptotic phenomena. The idea of giving validity to these formal series is classical : essentially it goes back to Poincaré. Poincaré advanced this idea in his work on ordinary differential equations in 1886*. Before that time many formal series solutions of such equations had been developed and it was found that they did not converge in general. Poincaré proved that these formal series solutions represent* asymptotic expansions of actual solutions. *Thus it became clear in which way formal series solutions may be regarded as "valid".*

Je reviens donc sur la question posée par Poincaré dans son article fondateur sur les développements asymptotiques [64] : *étant donnée une solution série formelle d'une équation différentielle ordinaire algébrique (dans le champ complexe), est-elle le développement asymptotique d'une vraie solution ?*

Nous avons vu que Poincaré répondait positivement dans le cas des équations *linéaires* « générique », en exprimant un doute pour le cas général (où les solutions formelles sont ramifiées[7]). En fait son résultat est toujours vrai (et même pour des équations linéaires à coefficients analytiques), mais la preuve est assez délicate

[4] Avec en particulier une interprétation remarquable de la pensée d'Euler.

[5] Dans une lettre à Holmboe datée du 16 janvier 1826 et non 1828 comme l'écrit Littlewood. Notons que l'on trouve un peu plus loin dans la même lettre une réserve : « La plupart des choses sont exactes : cela est vrai ; et c'est extraordinairement surprenant. Je m'efforce d'en chercher la raison. »

[6] Je reviendrai ci-dessous, dans la partie 10, sur ce très intéressant article.

[7] On dit aussi aujourd'hui à pentes non entières en référence au polygone de Newton [66].

et a nécessité de longues années et les efforts de plusieurs mathématiciens[8], on la trouvera dans le livre de Wasow [79]. (Elle a été longtemps ignorée en dehors d'un étroit cercle de spécialistes...) Plus généralement, on peut poser la question pour des équations *non-linéaires* analytiques. La réponse est encore positive, c'est *le théorème fondamental des développements asymptotiques* sous sa forme définitive. Des réponses partielles ont été données par plusieurs auteurs (Horn (1899), Birkhoff, Malmquist (1940), Hukuhara, Iwano...) et la preuve complète, dans le cas le plus général, se trouve dans [70], un peu plus d'un siècle après l'article [64] de Poincaré. On peut en fait dire (beaucoup...) plus, comme on le verra dans les deux paragraphes suivants.

Il est je crois intéressant de signaler qu'après Poincaré le regard des mathématiciens sur les développements asymptotiques a changé au cours du temps et que le regain d'intérêt pour le sujet est assez récent. Quand j'ai commencé à travailler sur ce thème, à la toute fin des années 70, le sujet de l'article fondateur de Poincaré [64], c'est-à-dire le *théorème fondamental des développements asymptotiques* pour les EDO linéaires était bien oublié. L'article [70], qui règle définitivement une difficile et importante conjecture vieille de cent ans, a été plusieurs fois refusé pour publication[9]. Heureusement certains étaient plus lucides, comme le montre cet extrait d'une lettre de P. Deligne à B. Malgrange, en août 1977 [32] (page 21) : *« Le théorème fondamental des développements asymptotiques est extraordinaire ».*[10]

4. Développements asymptotiques Gevrey

On a constaté très vite que la définition des développements asymptotiques par Poincaré est *trop générale* : deux fonctions ayant le même développement diffèrent par une fonction infiniment plate à l'origine (ou l'infini...) et il y a « trop » de telles fonctions. Au début du XX^e siècle le mathématicien anglais George Watson a proposé de remédier à ce défaut en introduisant une nouvelle notion de développement asymptotique. Ignorant les travaux de Watson, j'ai retrouvé bien plus tard cette notion et ai appelé *« développements asymptotiques Gevrey »* [11] les développements correspondants. Les travaux de Watson (jeune mathématicien à l'époque) semblent avoir étés fort mal reçus et, sans doute découragé, il a rapidement abandonné cette voie. Une très forte opposition aux idées de Watson s'est maintenue jusque dans les années 70, on la trouve dans certains des meilleurs livres sur les développements asymptotiques (cf. [66], pages 31–32). Frank W. J. Olver, par exemple, écrit [61] : *« The theory is then largely unnecessary »* . En retrouvant les idées de Watson, j'ai connu un accueil assez similaire[12], mais j'avais montré que le domaine d'application des développements asymptotiques Gevrey était très large[13] (il n'a fait que s'élargir par la suite, bien au-delà de ce que je pouvais croire, avec aujourd'hui plusieurs centaines de papiers...). Par ailleurs, j'ai eu la chance de

---

[8] J. Horn, G. D. Birkhoff...

[9] Au prétexte qu'il s'agissait d'une question très technique et très marginale...

[10] Il s'agit ici du cas linéaire.

[11] En hommage aux travaux de Maurice Gevrey sur les EDP paraboliques, postérieurs aux articles de Watson...

[12] Je le raconte dans [32], page 10.

[13] Ce qui disqualifiait une partie des critiques faites à Watson : on lui reprochait l'extrême étroitesse – supposée à tort par ses détracteurs – du champ d'application de sa théorie.

convaincre rapidement Bernard Malgrange et Yasutaka Sibuya et je suis têtu, ainsi je n'ai pas abandonné...

Les motivations « expérimentales » de l'introduction de la notion de développement asymptotique Gevrey sont les suivantes (cf. [66], 2.1, page 28).

a) On constate que « presque toutes » [14] les séries formelles *divergentes*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

que l'on rencontre dans les *applications* vérifient des estimations, dites Gevrey :

$$|a_n| < CA^n(n!)^s$$

(pour $C,\ A > 0, s = \frac{1}{k} > 0$ convenables).

b) On constate très souvent que si deux fonctions différentes solutions d'un même problème « concret » ont le même développement asymptotique, alors elles diffèrent d'une fonction (au plus) à décroissance exponentielle d'un certain ordre $k > 0$.

c) On constate très souvent que si la fonction f, solution d'un problème « concret », admet la série formelle $\hat{f} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ comme développement asymptotique, $\hat{f}$ satisfaisant la condition a), alors il existe $b > 0$ tel que, pour tout x, la somme finie $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (où N est la partie entière de b/x^k) donne une « excellente approximation » de $f(x)$[15].

On peut montrer que les conditions a), b), c) convenablement reformulées sont équivalentes [69].

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 4.1. *Soient V un secteur ouvert de sommet* 0 *du plan complexe, f une fonction holomorphe sur V et $\hat{f} := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On dit que f est* asymptotique Gevrey *d'ordre $s = 1/k$ à $\hat{f}$ (ou que $\hat{f}$ est le développement asymptotique Gevrey d'ordre $s = 1/k$ de f) sur V si, pour tout sous-secteur strict $W \subset V$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $C_W > 0$ et $A_W > 0$ tels que :*

$$\forall\, z \in W, \quad |z|^{-n}|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| < C_W (n!)^s A_W^n.$$

Pour des secteurs « suffisamment petits » (i.e. d'ouverture $< s\pi$), les développements asymptotiques Gevrey d'ordre $s > 0$ ont essentiellement les mêmes propriétés que les développements classiques (les preuves étant différentes). En particulier on a pour les EDO analytiques des variantes Gevrey du théorème fondamental des développements asymptotiques [70, 75] (et donc une amélioration des résultats de Poincaré dans [64]). Mais l'avantage n'est pas seulement d'obtenir des résultats plus précis, il y a un phénomène nouveau et remarquable : sur les « grands secteurs » (i.e. d'ouverture $> s\pi$) la situation se rigidifie et donne naissance à une notion de sommabilité que j'ai appelée k-sommabilité ($k := 1/s$)

[14] Pas toutes... : les solutions formelles d'équations aux q-différences vérifient des estimations différentes dites q-Gevrey [66] 3.4, page 54, [68].

[15] C'est la quasi-sommation au plus petit terme

et à des développements asymptotiques *exacts* : si une série formelle $\hat{f}$ est le développement asymptotique Gevrey d'ordre $1/k$ d'une fonction f holomorphe sur un tel secteur, f est *unique*[16], c'est la k-somme de $\hat{f}$. Ceci avait déjà été remarqué par Watson (avec ce que l'on appelle maintenant *le lemme de Watson*). Pour les solutions formelles d'un système différentiel « générique », l'ordre $1/k$ est lié à ce que l'on appelle le *rang de Poincaré* de ce système, c'est-à-dire l'entier k minimal tel qu'il puisse s'écrire $x^{k+1}dY/dx = \Phi(x, Y)$, avec Φ holomorphe.

Pour des détails et une bibliographie (qu'il faudrait compléter par la grande quantité d'articles parus depuis sur le sujet, en particulier dans le domaine des EDP), je renvoie le lecteur à [66]. Pour les preuves on pourra consulter [7] et les appendices de [75].

5. Resommation et résurgence

5.1. k-sommabilité et multisommabilité

Pour $s = k = 1$, on montre que la rigidification de la notion de développement asymptotique Gevrey 1 sur les secteurs d'ouverture strictement plus grande que π, c'est-à-dire la 1-sommabilité est essentiellement équivalente à la sommabilité de Borel [14, 15], ce qui fournit une formule intégrale pour la somme. Plus généralement la k-sommabilité est essentiellement équivalente à la généralisation de la sommation de Borel introduite par Leroy et étudiée par R. Nevanlinna [66, 75, 7] et l'on a encore des formules intégrales pour la somme.

Génériquement, les solutions séries formelles d'EDO analytiques sont k-sommables [66, 75] (ce qui généralise les résultats de Poincaré [64]), mais pas toujours[17], ce qui a motivé l'introduction de la notion de multisommabilité par Martinet et Ramis[18] [54]. On a pu alors montrer que *toutes* les solutions séries formelles de *toutes* les EDO analytiques sont multisommables (cf. [66], [7], pour plus de détails et des références). On a ainsi une théorie des *développements asymptotiques exacts* (la multisomme d'une série solution est une vraie solution), ceci précise et étend au cadre le plus général les résultats de Poincaré dans [64] et unifie les approches d'Euler, Stokes, Poincaré et Stieltjes.

5.2. Résurgence

Dans de nombreux cas *suffisamment génériques*[19] (séries formelles solutions d'EDO ou apparaissant dans des réductions à forme normale ou certains problèmes de perturbations singulières [33, 31, 47, 52, 39, 72, 73]...) les séries formelles ont une propriété bien plus précise que la 1-sommabilité, elles sont *résurgentes*[20], ce qui permet de définir sur des algèbres de telles fonctions de nouvelles dérivations, les dérivées étrangères. Cette théorie créée par J. Écalle au début des années 80 a connu depuis un grand développement avec de nombreuses applications aux

16 À prolongement analytique près...

17 On trouvera un contre-exemple dans [70].

18 Basée sur la notion d'accélération de Jean Écalle.

19 Et avec rang de Poincaré égal à 1 ou une condition similaire.

20 Une propriété se lisant sur les singularités du prolongement analytique de leur transformée de Borel sur le revêtement universel du plan de Borel privé d'un réseau convenable.

systèmes dynamiques. On peut dire que le traitement du pendule forcé par Poincaré, tel que je l'ai décrit dans la première partie de cet article (partie 3.3), est d'esprit « *prérésurgent* » . Si l'on revient une fois de plus à l'article fondateur de Poincaré [64], on peut montrer que les solutions séries formelles des équations différentielles (de rang de Poincaré un « génériques ») étudiées par Poincaré, sont résurgentes [47].

6. Petits diviseurs et grands multiplicateurs

Si l'on a un système dynamique analytique lent-rapide à *une seule* phase rapide, on peut, en utilisant un processus de moyennisation itérée, éliminer cette phase par un changement de variables *formel*. En général les séries divergent mais sont de type Gevrey [69] : la divergence est due *aux grands multiplicateurs*. Si l'on a plusieurs phases les estimations Gevrey peuvent être « érodées » par un phénomène diophantien [74] : la divergence est due à la fois *aux grands multiplicateurs* et *aux petits diviseurs*.

Un phénomène similaire est décrit dans [17] pour le cas des formes normales. On devrait dans le futur rencontrer cette situation dans de nombreux problèmes et la question mérite d'être approfondie.

7. Perturbations singulières. Développements asymptotiques composés

7.1. Perturbations singulières et développements asymptotiques

Les développements asymptotiques Gevrey ont été introduits pour étudier les solutions des EDO analytiques au voisinage d'un point singulier, dans le prolongement des idées de Poincaré [64]. A posteriori ils se sont révélés un instrument précieux (et même exactement l'instrument qui manquait)[21] pour étudier les perturbations singulières et certains problèmes de moyennisation. Le point de départ est la preuve par Mireille Canalis-Durand, en 1990, du caractère Gevrey du développement en série (commun) des *valeurs à canard* de l'équation de van der Pol forcée, un résultat que j'avais conjecturé une dizaine d'années auparavant[22]. Je ne peux citer tous les très nombreux résultats qui ont suivi, cf. par exemple [25] et la preuve d'une difficile conjecture de W. Wasow sur les *points tournants* (*turning points*) qu'en a déduit C. Stenger [77] ou les beaux travaux d' A. Fruchard et R. Schäfke sur le problème de la résonance d'Ackerberg-O'Malley (cf. la bibliographie de [38]).

7.2. Développements asymptotiques composés

Pour l'étude d'un système singulièrement perturbé de la forme :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Phi(x, y, \varepsilon)$$

au voisinage d'un *point tournant* ($\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, 0) = 0$), les développements asympto-

[21] Cf. par exemple [76].

[22] À partir de résultats de F. Diener et E. Benoit obtenus par l'analyse non standard.

tiques « du style de Poincaré » ne suffisent plus. Dans l'abondante littérature sur le sujet on définit des développements dits respectivement *intérieur* et *extérieur* et une technique de comparaison essentiellement heuristique (*matching*). Récemment A. Fruchard et R. Schäfke ont introduit une nouvelle notion de développement asymptotique [38] : les *développements asymptotiques composés* (DACs), avec des versions Gevrey délicates. Ils permettent un traitement rigoureux des problèmes avec beaucoup d'applications. Les DACs devraient en particulier permettre de prouver des résultats de résurgence dans un certain nombre de cas où les approches connues échouent, comme le problème de Voros [39] où la résurgence de la série des valeurs à canard de l'équation de van der Pol forcée [40].

Contrairement au cas des développements de Poincaré (où il n'y a qu'un point singulier) les DACs se greffent sur une géométrie *globale*, avec en particulier une situation d'éclatement. Dans ce cadre une approche « à la Poincaré » avec une *symbiose* de la géométrie et des divergences me semble pouvoir être mise en place avec profit. Pour dire les choses autrement, il faut bien sûr traiter les équations différentielles comme des objets géométriques, mais en *inventant* la géométrie adéquate, qui est une géométrie « à plusieurs échelles de grandeur », une géométrie « sauvage » [23] [32], greffée sur la géométrie ordinaire[24].

Je termine par une citation de [37] sur les relations des techniques évoquées ci-dessus (éclatements mêlant la variable indépendante et le paramètre) et les idées de Poincaré :

« Although the scope of the method of stretching is rather limited, the general idea of employing appropriate transformations of the independent variable, depending on the parameter, seems to be very fruitful. The importance of this idea, which occurs already in Poincaré's work,... That is, one desires an approximation which is uniformly valid on the boundary and off the boundary in a problem of the boundary layer type, or on the Stokes line and off the Stokes line when a Stokes phenomenon is involved. »

8. Les développements asymptotiques aujourd'hui

Nous pouvons maintenant tenter un bilan de l'évolution du concept de développement asymptotique depuis Euler et ses contemporains. Au départ il y a la donnée d'une suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (au début réels) engendrée par un *algorithme* (par exemple de nature combinatoire) ou, de façon souvent équivalente, d'une série formelle $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ solution formelle d'une équation fonctionnelle ou obtenue par le développement d'une « expression » (fonction, fraction continue...).

Dès le XVIII^{e} siècle, il y a apparemment un accord général sur le cas convergent (même si la notion n'est pas formalisée à cette époque), tout le monde sait qu'il y a dans ce cas un parfait dictionnaire entre les séries et les fonctions qui sont leurs sommes (compatible avec les opérations usuelles, la dérivation...) et que toute solution formelle d'une équation fonctionnelle analytique représente de façon unique (localement) une vraie solution. Le cas divergent est par contre le sujet de plusieurs controverses, Euler, par exemple pense que toute série divergente a une somme

[23] En relation avec la *Geometric singular perturbation theory* de Fenichel [36] et ses variantes Gevrey [50, 51].
[24] Comme le dit très bien M. Berry : *« The aim is to sew the quantum flesh on classical bones »* [44].

et même mieux une somme *unique* tandis que Nicolas Bernoulli s'interroge et conjecture aussi la possibilité d'une non-unicité de la somme.

Citons, pour étayer le point de vue d'Euler sur l'existence d'une « somme », Émile Borel [14] :

« Le paradoxe disparaît si l'on songe à la différence profonde, sur laquelle nous avons insisté plus haut, entre les séries naturelles, auxquelles conduisent des problèmes simples, et les séries fabriquées artificiellement. Ces dernières, lorsqu'elles sont convergentes, ont sans doute une valeur numérique (...) ; lorsqu'elles sont divergentes, on n'en peut absolument rien dire. On conçoit qu'il puisse en être tout autrement des séries naturelles. »

et sur un épisode de la *« kleine Dispute über die series divergentes » entre L. Euler et N. Bernoulli »* une lettre d'Euler à Goldbach [35] (on notera l'apparition de la série de Wallis) :

LETTRE LXXXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches sur les séries. *P. S.* Courbe catoptrique.

Berlin d. 7 August 1845.

— — Ich habe seit einiger Zeit mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil

FIG. 1. Controverse sur la somme d'une série divergente

C'est finalement N. Bernoulli qui avait raison[25]. Bien plus tard, Hardy écrit [43] :

« Different methods may sum the same series to Different sums... »

Il relie en particulier le phénomène de multiplicité des sommes à des questions de *prolongement analytique* (il appelle $\mathfrak{S}$ *method* une famille de procédés de sommation par prolongement analytique, cf. [66], 1.5) :

« ... then we call s the $\mathfrak{S}$ sum of $\sum a_n$. The value of s may naturally depend of the region chosen. »

Hardy relie cette approche aux idées d'Euler :

[25] D'une certaine façon car si l'on reste strictement dans le cadre réel, dans lequel pensait Euler, la question est plus subtile ! La série (1) ci-dessous ne semble pas pouvoir avoir de somme *réelle* raisonnable, par contre la série d'Euler a une somme réelle pour $x = -1$, la sommation de Borel conduit à deux sommes complexes distinctes pour cette même valeur de x [66] (page 25), et il y a en fait une *infinité* de sommes...

« It's impossible to state Euler's principle accurately without clear ideas about functions of a complex variable and analytic continuation. »

Voici un exemple simple [66] (page 58). La $\mathfrak{S}$ *method*[26] permet d'attribuer à la série :

$$1+\frac{1}{2}(-2)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2))}{3!}(-2)^3+\cdots \tag{1}$$

les *deux sommes distinctes* i et $-i$. Nous avons cité plus haut un autre exemple à propos du phénomène de Stokes : une série formelle de rayon de convergence nul peut avoir deux sommes distinctes. De toute façon, comme l'explique Poincaré, une telle série est nécessairement le développement asymptotique d'au moins deux fonctions distinctes, sinon elle serait convergente.

Revenons maintenant à l'exemple du traitement du pendule forcé par Poincaré (cf. la première partie de cet article). Nous avons d'un côté un objet *formel* : un développement divergent en $\sqrt{\mu}$ (une série formelle dont les coefficients sont des fonctions) et de l'autre un objet *géométrique* : une paire de variétés $\mathcal{W}^+$ (stable) et $\mathcal{W}^-$ (instable) infiniment (exponentiellement) proches :

$$\hat{S}(\varepsilon,\sqrt{\mu})=S_0(\varepsilon)+S_1'(\varepsilon)\sqrt{\mu}+S_2'(\varepsilon)\mu+\cdots=(\sum T_p\,\mu^{p/2})\varepsilon+\cdots\longleftrightarrow(\mathcal{W}^+,\mathcal{W}^-).$$

On retrouve plus tard une situation similaire chez G. Birkhoff dans un cas plus simple[27] [12]. Il considère des germes de systèmes différentiels linéaires méromorphes $\frac{dY}{dx}=\frac{A(x)}{x^{k+1}}Y$ (je me ramène à l'origine), dans une situation « générique », et associe à une solution fondamentale formelle [28] $\hat{F}=\hat{H}(x)x^Le^{Q(1/x)}$ une collection finie de vraies solutions $(F_i=H_i(x)x^Le^{Q(1/x)})_{i\in I}$ holomorphes sur des secteurs ouverts de sommet l'origine. Les H_i sont *bornées*, maximales en un certain sens, et leurs différences deux à deux sont infiniment proches (exponentiellement proches à l'ordre k) :

$$\hat{F}\quad\longleftrightarrow\quad(F_i)_{i\in I}.$$

La description des deux exemples ci-dessus admet une très large généralisation, surtout du point de vue des applications (cf. par exemple [52], l'Appendice de [75], [70], [22] pour des cas typiques). La situation « modèle » est la suivante (en simplifiant quelque peu pour éviter les détails trop techniques...) :

(1) on a une collection $(F_i)_{i\in I}$ (dite 0-cocycle) de « solutions privilégiées » *holomorphes bornées*, intéressantes du point de vue géométrique ou dynamique[29] d'un problème analytique (P) ;

(2) les adhérences des domaines des F_i ont un point commun a et les F_i sont infiniment proches en a ;

(3) il y a une série formelle divergente $\hat{F}$ (scalaire, vectorielle,...) qui est *développement asymptotique commun* des solutions F_i et solution formelle du problème (P).

---

26 Appliquée à $\sqrt{1+x}$ et $x=-2$.

27 Proche de celle de la deuxième partie de [64].

28 Avec C matrice constante, $\hat{H}$ matrice formelle inversible et $Q(1/x)=\mathrm{Diag}\,(\lambda_i/x^k)$.

29 Souvent maximales *au sens holomorphes et bornées dans le domaine complexe.*

L'objet naturel du point de vue *calculatoire* (à la main ou à l'ordinateur) est la série $\hat{F}$ mais l'objet naturel du point de vue géométrique ou dynamique est le 0-cocycle $(F_i)_{i \in I}$.

On peut maintenant faire *l'observation cruciale* suivante. Étant donnée la série divergente $\hat{F}$ il est le plus souvent très difficile de prouver directement certains résultats sur elle : estimations Gevrey, k-sommabilité, résurgence ou propriétés des divers développements asymptotiques associés [30]. Ceci devient « beaucoup plus facile », si $\hat{F}$ est solution formelle d'un problème analytique (P), en raisonnant « géométriquement ». On construit une collection de solutions privilégiées comme ci-dessus[31], puis l'on estime le 1-cocycle infiniment plat $F_i - F_j$ (ou $F_i \circ F_j^{-1}$ pour une opération de groupe convenable)[32]. On termine en utilisant un « dictionnaire » entre les développements asymptotiques (modulo développements convergents) et les 1-cocycles.

Dans les « bons cas » les estimations sur les 1-cocycles sont d'origine géométrique (ordres de contact...) et l'on en déduit des estimations Gevrey sur les séries (via le théorème dit de Ramis-Sibuya [75]). Ce bel ordonnancement (grands multiplicateurs) peut être partiellement ou totalement détruit par des phénomènes diophantiens (petits dénominateurs).

L'exemple le plus simple de la situation décrite dans ce paragraphe est donné par la série d'Euler (cf. la première partie de cet article) : $\hat{F} := \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n n!\, x^{n+1}$ qui est, nous l'avons vu, une solution formelle de l'équation différentielle d'Euler $x^2 y' + y = x$. Notons d_α la demi-droite issue de l'origine du plan complexe, d'argument $\alpha \in]0, 2\pi[$. Les fonctions $f_\alpha : x \mapsto \int_{d_\alpha} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ $(\alpha \neq \pi)$ sont solutions de l'équation différentielle d'Euler et se recollent, par prolongement analytique, en deux solutions F_1 et F_2 holomorphes *bornées* (au voisinage de 0) définies respectivement sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^- i$ et $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ i$, en faisant varier α dans $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$. Le 0-cocycle est (F_1, F_2), le 1-cocycle associé est $F_{12} := F_2 - F_1$, il est holomorphe sur $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^- i) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ i) = \{\Re x > 0\} \cup \{\Re x < 0\}$. On a, par un calcul de résidu, $F_{12}(x) = 2i\pi\, e^{-1/x}$ si $\Re x < 0$ et $F_{12}(x) = 0$ si $\Re x > 0$, en effet, si $\Re x > 0$, $F_1(x) = F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ (cf. [55] : 5, page 163 ou [66]).

9. Preuves de non intégrabilité

L'introduction de [49] commence par *« The fundamental problem in Hamiltonian mechanics is to decide whether a given system is integrable »*. Il s'agit d'intégrabilité au sens classique, ou de Liouville : n étant le nombre de degrés de liberté, il existe n intégrales premières indépendantes (presque partout) en involution (au sens symplectique) (cf. par exemple [5]).

Notons un problème important de définition : tout dépend de la *régularité* exigée pour les intégrales premières. Traditionnellement on s'intéresse à des systèmes algébriques ou analytiques réels et l'on cherche des intégrales premières polynomiales ou rationnelles (dans un cadre où ceci a un sens), ou plus généralement

[30] En 1900 Mittag-Leffler avait en ce sens critiqué sévèrement la théorie de la sommabilité de Borel.

[31] Généralement par une méthode de point fixe et un prolongement analytique ad-hoc conservant la propriété des solutions d'être bornées.

[32] Une telle estimation est souvent aisée car ce problème se *linéarise*.

analytiques (ou méromorphes). Mais, avec la vogue actuelle des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on peut évidement présenter la mécanique hamiltonienne dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$ et s'intéresser à des intégrales premières $\mathcal{C}^\infty$. Il me semble toutefois que l'intégrabilité $\mathcal{C}^\infty$ (au sens de Liouville) n'apporte pas toujours une information dynamique significative (*cf.* par exemple [13]). Je cite A. Chenciner, parlant de la méthode de Morales-Ramis décrite au paragraphe suivant et de la restriction au cadre des *intégrales premières méromorphes* qu'elle suppose :

« ...pourvu qu'on se restreigne au monde des intégrales méromorphes. Une telle restriction n'est pas, comme on pourrait le croire, arbitraire. C'est au contraire le monde différentiable qui est trop souple pour qu'une notion de non-intégrabilité seulement différentiable soit fortement liée à des propriétés géométriques d'un système » .

Je me limiterai donc implicitement aux cas des systèmes *analytiques* et de l'intégrabilité *méromorphe*[33].

9.1. Non-integrabilité du problème des trois corps

La première preuve de la non-intégrabilité du problème des trois corps est due à Bruns [20], il se limite à des intégrales premières *algébriques* en les positions et les moments[34]. La méthode de Bruns a été généralisée par Painlevé (algébricité en les moments seuls) et Husson. Dans le tome I de [65] Poincaré donne une preuve de la non-intégrabilité mais c'est une version « faible » (il y a une condition d'analyticité en un paramètre de masses). Enfin Poincaré donne dans le tome III de [65] une autre preuve en relation avec la divergence des séries.

Nous allons décrire ci-dessous une autre approche de la preuve de non-intégrabilité d'un système hamiltonien. Elle conduit à d'autres démonstrations, assez simples, de la non-intégrabilité de nombreux problèmes à *n* corps. Elle permet aussi d'éclairer la relation entre divergence de séries et non-intégrabilité.

9.2. Les théories de Ziglin et de Morales-Ramis

Les théories de Ziglin et Morales-Ramis donnent des critères efficaces pour montrer la non-intégrabilité d'un système Hamiltonien (analytique).

Le point de départ de la théorie de Ziglin [82, 83] est le choix d'une *intégrale particulière* et le calcul de l'équation variationnelle de Poincaré le long de cette solution. C'est tout à fait dans la ligne de Poincaré attaquant le problème des trois corps à partir de solutions périodiques, mais, et c'est ce qui est nouveau, Ziglin reprend la démarche de Sophie Kowalevski en passant en *temps complexe*. Il cherche alors des obstructions à l'intégrabilité dans la *monodromie* de l'équation variationnelle (une connexion symplectique que l'on interprète comme un système différentiel linéaire sur une surface de Riemann). La théorie de Ziglin a de nombreuses applications, en particulier la solution du vieux problème des cas d'intégrabilité du solide mobile autour d'un point fixe dans le champ de pesanteur terrestre (Ziglin montre que les seuls cas d'intégrabilité sont les cas connus : cas d'Euler-Poinsot, de Lagrange, de Kowalevski). Toutefois, en pratique, la théorie de Ziglin n'est plus guère applicable si l'on a plus de deux degrés de liberté.

[33] Poincaré ne s'intéressait qu'à l'intégrabilité rationnelle ou, plus généralement analytique.
[34] Il y a des erreurs dans la preuve de Bruns, pour une version corrigée et généralisée, cf. [45].

Morales et Ramis ont repris la démarche de Ziglin, en remplaçant la monodromie (qui est généralement transcendante) par le *groupe de Galois différentiel* (qui est purement algébrique). L'idée de départ, fort simple, est que l'intégrabilité d'un système est reflétée par l'intégrabilité (au sens de Picard-Vessiot ou Liouvillien) de son équation variationnelle le long de toute solution (non stationnaire). Le critère d'intégrabilité de Morales et Ramis est que l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel de toute équation variationnelle doit être *abélienne*[35]. Je renvoie à [5, 56, 58, 59] pour la présentation de la théorie et des applications. Ensuite la théorie a été étendue aux (linéarisées des) variationnelles d'ordre supérieur [60].

Il y a un très grand nombre d'applications, en particulier à de nombreux problèmes à n corps (et à des problèmes réduits : Sitnikov, Hill, satellites). Je renvoie à [59] pour une bibliographie et des analyses de divers cas.

La théorie de Morales-Ramis permet aussi de comprendre la relation entre non-intégrabilité et divergence sur des exemples beaucoup plus élémentaires que ceux de Poincaré (cf. [56] : pages 92-94, ou l'exemple de système de Hénon-Heiles de [60]). L'un des plus simples est dû à M. Audin ([5] : p. 84). La variété symplectique complexe est $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ et le hamiltonien $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1)$. Le plan $\{q_2 = p_2 = 0\}$ est invariant et les trajectoires contenues dans ce plan sont des droites. On choisit comme trajectoire privilégiée la droite $\Gamma : t \mapsto \big(q_1(t) = \frac{1}{2}t - A, q_2(t) = 0, p_1(t) = \frac{1}{2}, p_2(t) = 0\big)$ paramétrée par le temps complexe $t \in \mathbf{C}$. L'équation variationnelle normale se ramène à l'équation d'Airy : $\xi'' - t\xi = 0$ (que nous avons rencontrée dans la première partie de cet article). La divergence des solutions à l'infini est, nous l'avons vu, une traduction du phénomène de Stokes. Les multiplicateurs de Stokes sont $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, l'adhérence de Zariski du sous-groupe engendré dans $GL_2(\mathbf{C})$ est $SL_2(\mathbf{C})$ (cf. [55] : 3.5, page 198). On en déduit que le groupe de Galois différentiel (sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(t)$) de l'équation normale variationnelle (qui est conservative) est $SL_2(\mathbf{C})$. Ce groupe connexe n'étant pas abélien, d'après le critère de Morales-Ramis, le système n'est pas intégrable.

9.3. Le système de Lorenz

En 1963 un météorologue E. N. Lorenz (re)découvre la notion de *sensibilité aux conditions initiales* d'un système dynamique [48]. Cette question avait été soulevée au XIX$^{\text{e}}$ siècle par Poincaré, puis Hadamard[36] :

« Un des problèmes fondamentaux de la Mécanique Céleste, celui de la stabilité du système solaire, rentre peut-être dans la catégorie des questions mal posées. Si, en effet, on substitue à la recherche de la stabilité du système solaire la question analogue relative aux géodésiques d'une surface à courbure négative, on voit que toute trajectoire stable peut être transformée, par un changement infiniment petit dans les données initiales, dans une trajectoire complètement instable se perdant à l'infini. Or, dans les problèmes astronomiques, les données initiales ne sont jamais

[35] Ce critère algébrique permet de mettre en œuvre divers algorithmes et d'utiliser le calcul formel.

[36] Pour plus de détails, en particulier sur l'avis de Poincaré sur le travail d'Hadamard, on pourra se reporter à [41].

connues qu'avec une certaine erreur. Si petite soit-elle, cette erreur pourrait amener une perturbation totale et absolue dans le résultat cherché. » [42]

« Tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe ». (1898)

En fait, pour rencontrer la sensibilité aux conditions initiales, il n'est pas besoin de recourir à des systèmes bien compliqués, il suffit pour le voir de tracer avec un ordinateur les solutions de $y' - y = 0$, de l'équation d'Euler $x^2y' + y - x = 0$, ou de nombreuses EDO algébriques simples (on en trouvera de nombreux exemples dans [4, 9] : les phénomènes de *fleuves*).

Contrairement à ce qui est souvent affirmé, la sensibilité aux conditions initiales n'a rien d'incompatible avec un certain type d'intégrabilité (par exemple par quadratures, comme dans l'équation d'Euler). Ce qui est incompatible avec l'intégrabilité est le concept plus restrictif de *chaos*.

Le système de Lorenz (modélisant un problème de convection atmosphérique) est le système dynamique réel (avec $\sigma,\ \rho\ ,\beta \in \mathbf{R}$) :

$$\begin{cases} \dot{x} = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} = & x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = & xy - \beta z. \end{cases}$$

Il existe plusieurs preuves assistées par ordinateur du caractère chaotique de ce système (l'un des 18 problèmes posés par S. Smale en 2000). Considérons le problème plus simple de l'intégrabilité du système de Lorenz (ou plutôt du système Hamiltonien relevé sur le cotangent [6]). On peut le résoudre en utilisant le théorème de Morales-Ramis [24][37], [26]. Si $\beta \neq 0$, l'axe des z est *invariant*, l'équation normale variationnelle correspondante se ramène à une équation de Whittaker dont le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ [55]. Le système n'est donc pas intégrable.

On peut penser à partir de là, dans l'esprit de Poincaré, à une preuve rigoureuse d'un certain caractère chaotique du système localement au voisinage (*complexe*) de l'axe des z, par exemple en utilisant deux dérivées étrangères[38] dont les linéarisées sont les multiplicateurs de Stokes de l'équation de Whittaker (comparer à l'exemple du pendule forcé de Poincaré décrit dans la première partie de cet article et à l'approche de [72]). Cf. aussi [57].

10. Développements asymptotiques et physique

10.1. Développements asymptotiques et réduction des théories physiques

Les développements asymptotiques *divergents* ont toujours joué un rôle important en physique, d'abord de façon informulée, comme nous l'avons vu chez Stokes, puis plus tard en accord avec la définition donnée par Poincaré (et Stieltjes).

[37] Résultat trouvé au coeur de la baie d'Halong...
[38] Cf. 5.2.

Contrairement à ce qui s'est passé en mathématiques après Cauchy et Weierstrass[39], l'utilisation de ces développements n'a jamais été abandonnée en physique et la pratique de la sommation au plus petit terme (ou « des astronomes ») s'est toujours maintenue :

« Those who employ mathematics as a tool have rarely been inhibited by the fear of divergence; they have always been confident that, somehow or other, formal procedures are valid » [37].

Les raisons fondamentales de l'importance des développements asymptotiques *divergents* en physique ont été très bien dégagées et étudiées par le physicien anglais Michael Berry[40]. Je vais essayer d'en donner brièvement l'idée centrale. Je connais malheureusement fort mal les œuvres de Poincaré en relation avec la physique et je ne sais pas si l'on peut y trouver des rapports directs avec les idées de Berry.

Voici d'abord deux citations extraites d'une interview de M. Berry [44] :

« If you can't solve a problem in physics exactly then you try to represent it mathematically as an infinite series, hoping that it will converge. In fact almost all series describing physics diverge ».

« The best mathematical work I have done has been to develop some technologies for dealing with divergent series ».

Berry s'intéresse au problème de la *réduction* des théories physiques [10, 11] et montre que dans ce contexte apparaissent naturellement des développements asymptotiques qui sont presque toujours divergents[41].

Berry considère la situation où une théorie « générale » est paramétrée par $\delta > 0$ (un petit paramètre *sans dimension*) et, en un certain sens (compliqué...), « tend vers » une théorie « moins générale » quand $\delta \to 0$. C'est ce qu'il appelle *reduction*.

Il donne les exemples suivants (je renvoie à [11] pour les notations et des détails).

(1) relativité restreinte $\to$ mécanique newtonienne ($\delta = \nu/c$) ;
(2) relativité générale $\to$ relativité restreinte ($\delta = Gm/c^2a$) ;
(3) mécanique statistique $\to$ thermodynamique ($\delta = 1/N$) ;
(4) fluide visqueux (Navier-Stokes) $\to$ fluide non visqueux (Euler), $\delta = 1/\mathrm{Re}$;
(5) optique ondulatoire $\to$ optique géométrique ($\delta = \lambda/a$) ;
(6) mécanique quantique $\to$ mécanique classique ($\delta = \hbar/S$).

Le premier exemple est exceptionnellement simple, les autres limites sont « très singulières » et donnent naissance à des *développements asymptotiques divergents* (cf. [67] pour une analyse du cas 5 en relation avec les développements asymptotiques divergents de Stokes et l'abondante littérature *semi-classique* pour le cas 6).

On rencontre aussi des idées voisines de celles de Berry dans un très intéressant article de Friedrichs [37], que j'ai déjà cité plus haut (Friedrichs connaît bien le travail de Poincaré en asymptotique) :

« The problems concern what may be called asymptotic phenomena. Instead of explaining in general terms what I mean by asymptotic phenomena, I prefer to single out at first one class of such phenomena : discontinuities. A typical discontinuity of the kind I have in mind is the boundary of the shadow which

---

[39] Nous avons dit ailleurs (...) comment les mathématiciens du XIX^e siècle, lassés de ce formalisme sans frein et sans fondement, ramènent l'Analyse dans les voies de la rigueur [16], page 283.

[40] Le lecteur intéressé trouvera sur sa page web de très nombreuses publications sur le sujet, en plus des deux que je signale, en particulier sur le cas de l'arc-en-ciel.

[41] Une exception : le passage de la relativité restreinte à la mécanique newtonienne avec pour « petit paramètre » $1/c$.

appears when a light wave passes an object. ... Nevertheless, it is remarkable enough that the differential equations of wave motion have solutions which involve such quick transitions – in fact, most differential equations of physics possess such solutions – and it is an interesting task to study those features of these equations which make such quick transitions possible. Discontinuities and quick transitions occur in various branches of physics. ... In such a systematic approach one may develop an appropriate quantity with respect to powers of a parameter, ε. This expansion is to be set up in such a way that the quantity is continuous for $\varepsilon > 0$ but discontinuous for $\varepsilon = 0$. Naturally, a series expansion with this character must have peculiar properties. A most remarkable property is that in general these series do not converge. No doubt, divergent series are very useful ; it has even been said that they are more useful than convergent ones. However this may be, if a divergent series is useful it must be meaningful. »

10.2. Électrodynamique quantique

Voici encore une citation extraite de [37] :

« *It would have been tempting to speak about the quantum theory of fields. Here physicists have developed formal series expansions with great ingenuity. These series, to say the least, do not converge, and yet, to an amazing degree, they make sense physically.* »

Un certain nombre de séries perturbatives de l'électrodynamique quantique, obtenues *après renormalisation*[42], sont (conjecturalement) divergentes, de type Gevrey et (conjecturalement) asymptotiques à des fonctions (que l'on ne sait pas définir...)[43]. En tout cas, ce qui me permet de conclure sur un point d'orgue..., l'heuristique d'Euler, Stokes, Poincaré... fonctionne *fabuleusement bien* si l'on compare avec les données expérimentales. La problématique impulsée par Poincaré est donc toujours d'actualité avec de très difficiles problèmes ouverts. Pour illustrer ce propos je vais dire quelques mots du cas du *moment magnétique anomal de l'électron* (pour plus de détails et des résultats théoriques et expérimentaux « récents », on pourra se reporter, par exemple, à [46]).

Dans le moment magnétique de spin d'une particule intervient un nombre (sans dimension), le facteur de Landé g. L'équation de Dirac prédit pour l'électron la valeur $g = 2$ mais la valeur expérimentale (2005) est voisine de $2,0023193043737$[44]. On définit *l'anomalie a* par $a := \frac{g-2}{2}$, la théorie quantique des champs permet de la « calculer » en un sens formel (on dit *perturbatif*), plus précisément comme *série formelle* en la *constante de structure fine*[45] α ($1/\alpha \approx 137,035999070$). On utilise plutôt $\alpha_1 := \alpha/\pi$ et la série perturbative pour l'anomalie est donc de la forme :

$$a = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3 + c_4\alpha_1^4 + \cdots$$

On sait montrer que cette série est Gevrey, on *conjecture* sa divergence[46].

[42] Les coefficients des séries perturbatives initiales sont des sommes d'intégrales de Feynmann *divergentes*, ce qui nécessite une renormalisation.

[43] Dans le cas des théories *super-renormalisables* les séries sont Borel-sommables et leurs sommes correspondent aux fonctions de la théorie qui, dans ce cas, existe !

[44] L'écart a été découvert en 1947 dans la structure hyperfine des raies spectrales de l'hydrogène.

[45] Qui n'est pas constante [28]...

[46] La divergence est « expérimentalement évidente » d'après ce qui suit et il en existe une « preuve physique » due à F. Dyson.

La série est obtenue après un processus appelé *renormalisation* [28]. On obtient successivement les termes en utilisant des *diagrammes de Feynmann* (1 pour c_1, 7 pour c_2, 72 pour c_3, 891 pour c_4). Dans les années 50 le calcul *numérique* de c_2 a pris plusieurs années avec les plus gros ordinateurs de l'époque. Aujourd'hui on a des expressions *exactes* pour c_1, c_2, c_3 ne faisant intervenir que des *nombres rationnels* et des « *périodes* » [47]. Il en est sans doute de même pour c_4 mais seule une valeur numérique est connue (Kinoshita 2006).

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1/2 \quad \text{(Schwinger 1948)}\\
c_2 &= \frac{197}{144} + \Big(\frac{1}{2} - (3 - \log 2)\Big)\zeta(2) + \frac{3}{4}\zeta(3)\\
c_3 &= \frac{82}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{100}{3}\Big(Li_4(\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}\pi^2(\log 2)^2\Big)\\
&\quad - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{298}{9}\pi^2\log 2 + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184}\\
c_4 &\approx -1,7283(35).
\end{aligned}
$$

La somme des *trois* premiers termes de la série est $\approx 0,00115965246$. C'est cette somme que R. Feynmann appelait (en 1985) *valeur théorique* de a (sic !). La valeur *expérimentale* à cette époque était $0,00115965221$. La précision relative (pour $1 + a$) est de l'ordre de l'épaisseur d'un cheveu comparée à la distance de New-York à Los-Angeles !

Aujourd'hui on peut, au lieu de sommer 3 termes, en sommer 4, on obtient une valeur encore plus proche de la valeur expérimentale. Mais du point de vue de la théorie quantique des champs ceci revient à augmenter l'énergie, il y a alors la possibilité de création-annihilation de *nouvelles particules* et il faut passer de l'électrodynamique quantique au *modèle standard*. Je renvoie le lecteur à [46] pour la suite de l'histoire, on obtient finalement des résultats encore meilleurs, soit, pour valeur théorique de a :

$$a_{th} \approx 0,0011596521535$$

tandis qu'une valeur expérimentale récente (2005) est :

$$a_{exp} \approx 0,00115965218085.$$

On notera que, faute de savoir calculer plus de 3 ou 4 termes, on se contente d'arrêter là la sommation au lieu de sommer au plus petit terme comme Euler et ses successeurs. On peut toutefois conjecturer que la différence est très faible : si l'on admet que la série est le développement asymptotique au sens de Poincaré (ou mieux Gevrey) de l'anomalie et qu'elle est *Gevrey générique*, alors il y a autour du plus petit terme[48] un phénomène de « long plateau » (cf. la première partie de cet article, figure 26) sur lequel c_n varie très très peu en valeur absolue et avec des signes alternés.

Ce dernier exemple confirme donc de façon on ne peut plus spectaculaire les convictions d'Euler, Cauchy, Stokes et Poincaré : les calculs sont beaucoup plus rapides et précis si, au lieu de séries convergentes, on utilise (intelligemment...) des

[47] Des nombres transcendants « que l'on trouve dans les œuvres d'Euler » ... [2], [18, 19].

[48] Qui pourrait être vers c_{100}.

séries divergentes. Les méthodes analytiques (au bon sens du terme) n'ont donc pas du tout dit leur dernier mot !

Dans [2], Y. André écrit : *« La divergence, plus importune encore en physique qu'en mathématique, infeste la physique des champs quantiques. »* . On peut être plus optimiste et, comme Poincaré, voir plutôt la divergence comme un « plus » : c'est ce que font A. Connes et M. Marcolli [29] en interprétant les divergences des intégrales comme la manifestation d'un groupe de Galois, dit cosmique[49]. Au delà, il faudrait, au niveau *non perturbatif*, interpréter les divergences des séries renormalisées comme la manifestation d'un groupe de Galois, sans doute lié à des phénomènes de Stokes et à des développements asymptotiques (cf. [38] pour une version semi-classique).

Pour finir, voici une anecdote personnelle sur mon premier contact avec le sujet (*cf.* [32], page 9, [71]). En 1980 j'étais responsable à Strasbourg de la RCP 25 [50]. J'avais invité le physicien américain A. S. Wightman, qui après sa conférence, devant un demi et un bretzel au café en face de l'IRMA, m'a appris les bases de la sommation de Borel, totalement oubliée à l'époque par presque tous les mathématiciens[51], ce qui est immédiatement « entré en résonance » avec mes recherches de l'époque sur les développements asymptotiques Gevrey (cf. la partie 4).

11. Conclusion

Je ne vois pas comment mieux terminer cet article que par une citation de S. Ulam [30][52] :

« ... why are asymptotic theorems so much simpler than finite approximations ? Infinity does-not correspond to the popular image. It is a guiding light, a star that draws us to finite ways of thinking. God knows why. »

12. Références

[1] **N.H. Abel, 1826** Lettre à Holmboe, 16 janvier 1926, Correspondance d'Abel, Kristiana 1902.
[2] **Y. André, 2007** Idées galoisiennes (théorie de l'ambiguïté), ircam 2006-2007.
[3] **Y. André, 2012** Idées galoisiennes, journées x-ups 2011.
[4] **M. Artigues, V. Gautheron, 1983** Systèmes différentiels : étude graphique, *CEDIC*.
[5] **M. Audin, 2001** Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, *Cours Spécialisés, Société Mathématique de France* 8.
[6] **M. Ayoul, N. T. Zung, 2009** Galoisian obstruction to non-Hamiltonian integrability, *Comptes Rendus Mathématiques, Acad. Sc. Paris*, Vol. 348, 23, 1323–1326.
[7] **W. Balser, 1994** From Divergent Power Series to Analytic Functions, *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 1582, Springer.
[8] **J. Barrow-Green, 1077** Poincaré and the three-body problem, *AMS-LMS History of mathematics*, Vol. 11.
[9] **C. Bender, S. A. Orszag, 1978** Advanced Mathematical Methods for Scientists an Engineers, *Mc Graw Hill*
[10] **M. Berry, 1991** Some Quantum-to-Classical Asymptotics, Course 4, *Chaos and Quantum Physics, Les Houches*, M. J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin, eds., 252–303.

[49] *cf.* aussi la conclusion de [3].
[50] Une structure du CNRS, créée en 1965, destinée à mettre en contact mathématiciens et physiciens théoriciens par des réunions bi-annuelles, qui existe toujours.
[51] À l'exception de J. Ecalle...
[52] Trouvée chez M. Berry.

[11] **M. Berry, 1994** Asymptotics, singularities and the reduction of theories, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IX, D. Prawitz, B. Skyrms, D. Westerstah eds., Elsevier Science B. V., 597–607.

[12] **Birkhoff, 1909** Singular points of linear differential equations, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 10, 436-470.

[13] **A.V. Bolsinov, I.A Taimanov, 2000** Bolsinov, A.V. and Taimanov, I.A. : Integrable geodesic flows with positive topological entropy. *Invent Math.*, 140, 3, 639–650.

[14] **E. Borel, 1899** Mémoire sur les séries divergentes, *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 3e série, tome 16, 9–131.

[15] **E. Borel, 1928** Leçons sur les séries divergentes, *Gauthier-Villars*, 2-Éd. Paris.

[16] **N. Bourbaki, 1960** Éléments d'histoire des mathématiques, *Hermann, Paris*.

[17] **B. Braaksma, L. Stolovitch, 2007** Small divisors and large multipliers (Petits diviseurs et grands multiplicateurs), *Annales de l'institut Fourier*, 57, nº 2, 603–628.

[18] **F. Brown, 2010** On the periods of some Feynman integrals *arXiv :0910.0114v2*.

[19] **F. Brown, 2012** Amplitudes in φ^4 *Conference, DESY Hamburg, 6 march 2012*.

[20] **H. Bruns, 1887** Über die Integrale des Vielkörper Problems, *Acta Math.*, 11, 25–96.

[21] **J.L. Callot, 1981** Les canards ont la vie brève, *Collactenea Mathematica*, Vol. 32, 2, 99–119.

[22] **J.L. Callot, 1992** Sur la piste des canards imaginaires, *Technical report, Mulhouse*.

[23] **M. Canalis-Durand, 1991** Formal expansion of van der Pol equation canard solutions are Gevrey, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1493, 29–39.

[24] **M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, P. Rouchon, J.-A. Weil, 2001** Calculations on the Lorenz system : Variational equation, Bessel dynamics *MAPLE worksheet*, disponible à `http://perso.univ-rennes1.fr/-guy.casale/ANR/ANR\_html/publications.html`.

[25] **M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, R. Schäfke, Y. Sibuya, 2000** Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations, *J. Reine Angew. Math.*, 518, 95–129.

[26] **G. Casale, 2009** Morales-Ramis Theorems via Malgrange pseudogroup *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 59, Vol. 7, 2593–2610.

[27] **A. Chenciner, 1991** Séries divergentes de la Mécanique Céleste (problèmes planétaires), Journées x-ups 1991.

[28] **A. Connes, 2002** Symétries Galoisiennes et Renormalisation *Séminaire Poincaré*, 2, .

[29] **A. Connes, M. Marcolli, 2008** Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 55.

[30] **N. G. Cooper ed., 1989** From Cardinals to Chaos. Reflexions on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam, *Cambridge University Press*, 311.

[31] **E. Delabaere, 1994** Introduction to the Écalle theory, in *Computer algebra and differential equations*, London Math. Soc. Lecture Note Series 193, 59–101.

[32] **P. Deligne, B. Malgrange, J. P. Ramis, 2007** Singularités irrégulières : correspondance et documents *Documents Mathématiques, Société Mathèmatique de France*, 5.

[33] **J. Ecalle, 1981** Les fonctions résurgentes (en trois parties), *Publications Mathématiques d'Orsay*, 81-05.

[34] **L. Euler, 1760** De seriebus divergentibus, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 5, 205-237.

[35] **L. Euler, 1745** Lettre LXXXIII à Goldbach, Berlin d. 7 august 1745.

[36] **N. Fenichel, 1979** Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, 31, 53–98.

[37] **K. O. Friedrichs, 1955** Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61, 485–504.

[38] **A. Fruchard, R. Schäfke, 2012** Composite asymptotic expansions and turning points of singularly perturbed ordinary differential equations, à paraître dans *Springer Lecture Notes in Mathématics*.

[39] **A. Fruchard, R. Schäfke, 2012** On the parametric resurgence for a certain singularly perturbed linear differential equation of second order, dans *Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs ; Generalized Borel Summation, Vol. II, CRM Series*, 12, O. Costin, F. Fauvet, F. Menous, D. Sauzin eds., 213–243.

[40] **A. Fruchard, E. Matzinger, R. Schäfke, 2011** On the resurgence of the formal canard solution of the forced van der Pol equation, *preprint*.

[41] **E. Ghys, 2010** Géodésiques sur les surfaces à courbure négative, in *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, Le sel et le fer, Cassini*, Vol. 4, 339-365.

[42] **J. Hadamard, 1901** Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard, *Gauthiers-Villars, Paris.*

[43] **Hardy, 1949** Divergent Series, *Oxford at the Clarendon Press.*

[44] **N. Hall, 1997** Interview of Sir Michael Berry by Nina Hall : Caustics, catastrophes and quantum chaos, *Nexus News.*

[45] **E. Julliard-Tosel, 2000** Bruns' Theorem : The Proof and Some Generalizations *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 76, No 4 (2000), 241–281.

[46] **M. Knecht, 2002** The Anomalous Magnetic Moment of the Electron and the Muon, *Séminaire Poincaré*, 2, 93–125.

[47] **M. Loday, Remy, 2011** Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems, *Journal of Differential Equations*, Vol. 250, no 3, 159–1630.

[48] **E.N. Lorenz, 1963** Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130–141.

[49] **A. J. Maciejewski, M. Przybylska, H. Yoshida, 2012** Necessary conditions for partial and super-integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potential, *Nonlinearity*, 25, 2.

[50] **P. De Maesschalck, 2003** Geometry and Gevrey asymptotics of two dimensional turning points, PhD thesis, Faculteit Wetenschappen, Limburgs universitair centrum.

[51] **P. De Maesschalck, 2005** Gevrey properties of real planar singularly perturbed systems, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, 340.

[52] **B. Malgrange, 1982** Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques *Séminaire N. Bourbaki 1981-82, exp. 582*, 59–73.

[53] **B. Malgrange, 1991** Équations différentielles à coefficients polynomiaux, *Birkhäuser, Progress in Mathematics*, 96.

[54] **J. Martinet, J.P. Ramis, 1991** Elementary Acceleration and Multisummability *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 54, 1.

[55] **J. Martinet, J.P. Ramis, 1989** Théorie de Galois différentielle et resommation, *Computer Algebra and Dif- ferential Equations*, E. Tournier Ed., Academic Press, London, 117–214.

[56] **J. J. Morales-Ruiz, 1999** Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems, *Birkhaüser*, Vol. 179.

[57] **J. J. Morales-Ruiz, J.M. Peris, 2001** On the Dynamical meaning of the Picard-Vessiot Theory, *Regular and Chaotic Dynamics*, 6, 277–290.

[58] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, 2001** Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I & II, *Methods Appl. Anal.*, 8, n° 1, 33–111.

[59] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, 2010** Integrability of Dynamical Systems through Differential Galois Theory : a practical guide, *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials, Contemp. Math.*, 509, P. B. Acosta-Humánez, F. Marcellán eds., Amer. Math. Soc., Providence, 143–220.

[60] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó, 2001** Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 4, 40, n° 6, 845–884. (2007)

[61] **F. W. J. Olver, 1974** Asymptotics and Special Functions, *Academic Press.*

[62] **H. Poincaré, 1883** Sur les groupes des équations linéaires, *Comptes Rendus acad. des Sciences, Paris*, T. 96, 691–696.

[63] **H. Poincaré, 1885** Sur les Équations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Différences finies *American Journal of Mathematics. Baltimore*, 7, 203–258.

[64] **H. Poincaré, 1886** Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires *Acta mathematica*, t. 8, 295–344.

[65] **H. Poincaré, 1892** Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tomes I, II, III, *Gauthier-Villars, Paris.*

[66] **J.P. Ramis, 1993** Séries divergentes et théories asymptotiques, *Panoramas et Synthèse*, 0, Société Mathématique de France.

[67] **J.P. Ramis, 2009** Leonhard Euler, ou l'art de donner un sens à ce qui n'en avait pas, Conférence donnée dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien », organisée par la Société Mathématique de France, la Bibliothèque nationale de France, et

Animath. Réalisation : BnF, Paris, http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/BNF/2009/Ramis.html.

[68] **Ramis J.-P., Sauloy J. et Zhang C., 2007.** Local analytic classification of irregular q-difference equations, *Astérisque, S.M.F.*, à paraitre (arXiv :0903.0853v3).

[69] **J.P. Ramis, R. Schäfke, 1996** Gevrey separation of fast and slow variables, *Nonlinearity*, 9, 353–384.

[70] **J.P. Ramis, Y. Sibuya, 1989** Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, *Asymptotic Analysis*, 2, 39–94.

[71] **RCP 25, 1980** Vingt-sixième reunion de la R.C.P. 25 : Exposés de V. Rivasseau, A. S. Wightman, B. Malgrange, H. Araki, Vol. 28, IRMA Strasbourg.

[72] **D. Sauzin, 1995** Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé, *Annales de l'institut Fourier*, 45, n° 2, 453–511.

[73] **D. Sauzin, 2009** Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials *Renormalization and Galois Theories*, Connes, Fauvet, Ramis (eds), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 15, European Mathematical Society, 83–163.

[74] **C. Simó, 1994** Averaging under fast quasiperiodic forcing. In *Hamiltonian mechanics (Torún 1993)*, volume 331 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., Plenum, 13–34.

[75] **Y. Sibuya, 1990** Linear Differential equations in the Complex Domain : Problems of Analytic Continuation, *Transl. Math. Monographs*, 82, Amer. Math. Soc. Providence, R. I..

[76] **Y. Sibuya, 2000** The Gevrey Asymptotics in the Case of Singular Perturbations, *Journal of Differential equations*, Vol. 165, 2, 255–314.

[77] **C. Stenger, 1999** Sur une conjecture de Wolfgang Wasow en théorie des points tournants, *Comptes Rendus Acad. Sc., Paris, Series I, Math.*, Vol. 325, no 1, 27–32.

[78] **T. J. Stieltjes, 1886** Recherches sur quelques séries semi-convergentes, *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 3e série, tome 3, 201–258.

[79] **W. Wasow, 1966** Asymptotic expansions for ordinary differential equation *John Wiley and Sons Inc*, New York-London-Sydney.

[80] **G. Watson, 1911** A theory of asymptotic series, *Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 211, 279–313.

[81] **E. T. Whittaker, G. Watson, 1902** A Course of Modern Analysis, *Cambridge University Press.*

[82] **S. L. Ziglin, 1982** Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I, *Funct. Anal. Appl.*, 16, 181–189.

[83] **S. L. Ziglin, 1983** Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II *Funct. Anal. Appl.*, 17, 6–17.

Une promenade dans les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

Alain Chenciner[1]

« En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant : Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites ». C'est ainsi qu'au début de son mémoire « *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* » qui recevra en 1889 le prix du roi de Suède, Poincaré décrit le cadre de ce qu'il développera dans *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, en grande partie construites pour corriger la phrase qui suivait : *« Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité »*. Publiés par Gauthier-Villars respectivement en 1892, 1893 et 1899 ces trois volumes (1268 pages + 10 pages de tables) feront dire en 1925 à Paul Appell : *« Il est probable que, pendant le prochain demi-siècle, ce livre sera la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux. »* La prédiction s'est réalisée : plus de cent ans après, nous contemplons quelques-unes de ces pépites dont l'éclat n'a pas faibli.

1. Le problème général de la dynamique

Dès le chapitre I, section 13, intitulé « Problème général de la dynamique », Poincaré donne le cadre de son ouvrage : *« Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :*

Étudier les équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \tag{1}$$

en supposant que la fonction $F(x, y, \mu)$ peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante ;

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots ,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y et que $F_1, F_2, \cdots$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y. » Autrement dit, le système est une petite perturbation du système « complètement intégrable » associé à $F_0(x)$ pour lequel (x, y) sont des « coordonnées action-angles » et dont les solutions sont :

$$x_i = x_i^0, \quad y_i = n_i t + y_i^0, \text{ où } n_i = -\frac{dF_0}{dx_i}(x^0). \tag{2}$$

[1] Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD, Université Paris VII, http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chenciner.html

L'espace des phases, produit par un tore $\mathbb{T}^N$ (coordonnées y) d'un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$ (coordonnées x), est alors feuilleté par des « tores invariants » $x = x^0 = (x_1^0, \cdots, x_N^0)$ de dimension N portant des solutions quasi-périodiques dont les fréquences n_i ne dépendent que de x^0. En particulier, si elles en dépendent effectivement, les solutions portées par une sous-famille dense de ces tores seront périodiques. Pour une petite planète dont le mouvement keplerien autour du soleil est troublé par Jupiter, le petit paramètre est le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil, soit environ 1/1000. Mais des équations semblables régissent les mouvements du couple Terre-Lune troublé par le Soleil, le petit paramètre étant alors le rapport de la distance Terre-Lune à la distance Terre-Soleil, c'est-à-dire environ 1/400. Les travaux de G.W. Hill sur ce dernier problème ont beaucoup influencé Poincaré dans son étude de ce qu'on nomme aujourd'hui « Problème restreint circulaire plan des trois corps » (en anglais, circular planar RTBP). Les équations obtenues dans un repère tournant ont la forme ci-dessus, avec pour F la « constante de Jacobi ». Avec le « flot géodésique » sur une surface presque sphérique étudié par Poincaré à la fin de sa vie, ce sont des exemples de systèmes hamiltoniens génériques – et en particulier « non-intégrables »– à $N = 2$ degrés de liberté. Plus généralement, cette forme des équations vaut également pour le Problème des $1 + n$ corps dans le cas planétaire avec un Soleil de masse 1 et n planètes de masses $O(\mu)$ qui ont autour du centre de gravité du système des mouvements presque circulaires et presque coplanaires, mais surgit une nouvelle difficulté : le problème de Kepler en énergie négative fixée ayant toutes ses solutions périodiques de même période, la fonction F_0, qui décrit n problèmes de Kepler non couplés, ne dépend que d'une partie des variables d'action x.

2. Solutions périodiques

Dans le chapitre III, section 36, apparaissent les solutions périodiques (penser au retour des jours, des mois, des années, des saisons). *« Le problème que nous allons traiter ici est le suivant : Supposons que, dans les équations (1)*[2]*, les fonctions X_i dépendent d'un certain paramètre μ ; supposons que dans le cas de $\mu = 0$ on ait pu intégrer les équations, et qu'on ait reconnu ainsi l'existence d'un certain nombre de solutions périodiques. Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? »* Ces solutions se retrouvent dans tout l'ouvrage, et leur étude par des méthodes de perturbation préfigure certains aspects de la théorie des singularités ; les « exposants caractéristiques » sont introduits dans le chapitre IV, les « solutions asymptotiques » (aujourd'hui variétés stables ou instables) dans le chapitre VII, enfin la non-intégrabilité leur est en grande partie due. Annonçant l'existence d'une infinité de solutions périodiques du Problème planétaire des trois corps lorsque les masses planétaires sont suffisamment petites, Poincaré justifie ainsi ses efforts : *« Il semble d'abord que ce fait ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec*

[2] Il s'agit des équations $dx_i/dt = X_i(x_1, \cdots, x_n),\ i = 1, \cdots, n$.

avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de M. Gylden.

Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le numéro 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »

Un peu plus loin, dans la section 39, Poincaré rappelle sa classification des solutions périodiques en trois sortes : « *... j'ai été conduit à distinguer trois sortes de solutions périodiques : pour celles de la première sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites ; pour celles de la deuxième sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies ; enfin, pour celles de la troisème sorte, les inclinaisons ne sont plus nulles.* »

Puis, décrivant les recherches de Hill sur la Lune, il précise encore l'importance de la construction de solutions périodiques approchées : « *Supposons que, dans le mouvement d'un astre quelconque, il se présente une inégalité*[3] *très considérable. Il pourra se faire que le mouvement véritable de cet astre diffère fort peu de celui d'un astre idéal dont l'orbite correspondrait à une solution périodique.*

Il arrivera alors assez souvent que l'inégalité considérable dont nous venons de parler aura sensiblement le même coefficient pour l'astre réel et pour cet astre idéal ; mais ce coefficient pourra se calculer beaucoup plus facilement pour l'astre idéal dont le mouvement est plus simple et l'orbite périodique.

C'est à M. Hill que nous devons la première application de ce principe. Dans sa théorie de la Lune, il remplace ce satellite dans une première approximation par une Lune idéale, dont l'orbite est périodique. Le mouvement de cette Lune idéale est alors celui qui a été décrit au n°41, où nous avons parlé de ce cas particulier des solutions périodiques de la première sorte, dont nous devons la connaissance à M. Hill.

Il arrive alors que le mouvement de cette Lune idéale, comme celui de la Lune réelle, est affecté d'une inégalité considérable bien connue sous le nom de variation ; le coefficient est à peu près le même pour les deux Lunes. M. Hill calcule sa valeur pour sa Lune idéale avec un grand nombre de décimales. Il faudrait, pour passer au cas de la nature, corriger le coefficient ainsi obtenu en tenant compte des excentricités, de l'inclinaison et de la parallaxe. C'est ce que M. Hill eût sans doute fait s'il avait achevé la publication de son admirable Mémoire. »

3. Non-existence des intégrales uniformes

Bruns avait montré la non-existence d'intégrales premières du problème newtonien des n corps qui soient algébriques en les vitesses, autres que celles provenant des symétries du problème, c'est-à-dire l'énergie et le moment cinétique. Par une toute autre méthode, intimement liée au comportement des solutions périodiques,

[3] C'est-à-dire une déviation du mouvement elliptique due à l'action du Soleil.

Poincaré montre dans les chapitres V et VI la non-existence d'intégrales premières qui soient analytiques en x, y et μ, c'est-à-dire qui dépendent analytiquement des masses (supposées suffisamment petites) des planètes : *« Le théorème qui précède est plus général en un sens que celui de M. Bruns, ... Mais, en un autre sens, le théorème de M. Bruns est plus général que le mien ; j'établis seulement, en effet, qu'il ne peut pas exister d'intégrale algébrique pour toutes les valeurs suffisamment petites des masses ; et M. Bruns démontre qu'il n'en existe pour aucun système de valeurs des masses. »*
Il s'agit de raisonnements délicats sur la présence de suffisamment de coefficients non nuls dans le développement de Fourier en les angles y de la « fonction perturbatrice » $\mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$, ce qui revient à prouver le comportement « générique » des solutions périodiques et en particulier le fait qu'elles ne forment pas des continua remplissant des tores invariants comme c'est le cas lorsque $\mu = 0$: un tore invariant contenant des orbites denses, est l'adhérence de chacune d'elles, ce qui lui donne une signification dynamique ; un tore invariant réunion de solutions périodiques n'a au contraire pas de raison dynamique d'exister et a donc toutes les chances de se briser sous l'effet d'une petite perturbation en donnant naissance à un nombre fini de solutions périodiques. Ces raisonnements constituent le chapitre VI, très technique, dans lequel Poincaré généralise à des fonctions de deux variables complexes une méthode de Darboux reliant le comportement de leurs coefficients de Fourier d'ordre élevé à leurs propriétés analytiques et plus précisément au comportement de leurs singularités et aux obstructions que celles-ci constituent à la déformation des contours d'intégration : *« M. Flamme applique à chacun des facteurs la méthode de M. Darboux. Cet artifice ne saurait nous suffire pour notre objet ; il nous faut, au contraire, appliquer directement à la fonction perturbatrice la méthode de M. Darboux et pour cela étendre cette méthode au cas des fonctions de deux variables. »*

4. Solutions quasi-périodiques

Le deuxième volume des *Méthodes Nouvelles* est consacré à l'examen des séries de perturbation, outil principal des astronomes pour « résoudre » les équations du mouvement. Poincaré commence par montrer dans le chapitre IX ce qui est l'essence des « méthodes nouvelles », l'existence de solutions formelles quasi-périodiques des équations (1), analogues à ce que deviendraient les solutions (2) après avoir subi un changement de coordonnées formel dépendant de μ. Ce sont les *séries de Lindstedt*, nommées ainsi par Poincaré qui est cependant le premier à montrer leur existence : *« Mais il y a une autre difficulté plus grave ; on constate aisément que la méthode est applicable dans les premières approximations, mais on peut se demander si l'on ne sera pas arrêté dans les approximations suivantes ; M. Lindstedt n'avait pu l'établir rigoureusement et conservait même à ce sujet quelques doutes. Ces doutes n'étaient pas fondés et sa belle méthode est toujours légitime ; je l'ai démontré d'abord par l'emploi des invariants intégraux dans le Bulletin astronomique, t. III, p. 57, puis, sans me servir de ces invariants, dans les Comptes rendus, t. CVIII, p. 21. »* Ces séries – dans lesquelles le temps n'intervient que « sous des sinus et des cosinus », à l'exclusion des termes polynomiaux, les redoutables « termes séculaires », qui n'apparaissent plus que comme des artefacts provenant du développement de Taylor de ces sinus et cosinus[4] (les « méthodes anciennes ») – sont de la forme suivante (je ne suis pas ici les notations de Poincaré) :

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu\Phi_1(w) + \mu^2\Phi_2(w) + \cdots , \\ y = w + \mu\Psi_1(w) + \mu^2\Psi_2(w) + \cdots , \end{cases} \tag{3}$$

où les Φ_j et les Ψ_j sont des applications de $\mathbb{T}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et où

$$w = (w_1, w_2, \cdots , w_N), \quad w_i(t) = \overline{w}_i(\mu) + n_i(\mu)t,$$

les $\overline{w}_i(\mu)$ et $n_i(\mu)$ étant des séries formelles en μ.

C'est dans la célèbre section 149 du chapitre XIII que Poincaré aborde la question de la convergence, distinguant les séries « à fréquences variables », pour lesquelles la divergence est liée au comportement « générique » des solutions périodiques d'un système (indépendamment en fait de la non-intégrabilité), de celles « à fréquences fixes » dont il écrit : « *Il nous reste à traiter la deuxième question ; on peut encore, en effet, se demander si ces séries ne pourraient pas converger pour les petites valeurs de μ, quand on attribue aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies.* ...

... Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté ; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable. »

L'existence de solutions quasi-périodiques des équations (1) dont les fréquences satisfont à des hypothèses diophantiennes sera démontrée pour la première fois par A. N. Kolmogorov en 1954 [K] ; quant à la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixées satisfaisant à des hypothèses diophantiennes, qui s'en déduit si l'on a de plus l'analyticité de ces solutions par rapport au paramètre μ, elle sera démontrée par Moser dans [M2]. Deuxième victoire sur les « petits dénominateurs » après celle de C. L. Siegel en 1942, elle implique une stabilité très forte dans le Problème restreint. La preuve de Kolmogorov sera étendue par V. I. Arnold [A] au cas dégénéré du problème des trois corps et adaptée au cas différentiable (i.e. non analytique) par J. Moser [M1], ce qui fait qu'on parle aujourd'hui de « théorie K.A.M » (voir [AKN]).

5. Invariants intégraux

« Pour bien faire comprendre l'origine et la portée de la notion des invariants intégraux, je crois utile de commencer par l'étude d'un exemple particulier emprunté à une application physique. ... Examinons en particulier le cas des liquides ; c'est celui où le fluide est incompressible, c'est-à-dire où le volume d'une masse fluide est invariable. Supposons alors que la figure F_0 soit un volume, au bout du temps t la masse fluide qui remplissait ce volume occupera un volume différent qui ne sera

[4] Faire disparaître les arcs de cercle (i.e. ici les puissances de t) en faisant varier les fréquences est une idée déjà présente dans la théorie de la Lune que d'Alembert écrit en 1748.

autre chose que la figure F. Le volume de la masse fluide n'a pas dû changer ; donc F_0 et F ont même volume : ... » C'est par cet exemple du *mouvement d'un fluide permanent* que la section 233 du chapitre XXII, ouvre le troisième volume : ayant démontré la non-existence d'intégrales premières supplémentaires, Poincaré voit en les invariants intégraux un ersatz de celles-ci consistant en le remplacement des équations du mouvement par les « équations aux variations » qui, elles, admettent des intégrales premières. Voici comment, dans la section 242, il exprime cette parenté un peu oubliée aujourd'hui : « *Reprenons le système*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt. \tag{1}$$

Nous pouvons former les équations aux variations correspondantes telles qu'elles ont été définies au début du Chapitre IV. Pour former ces équations, on change dans les équations (1) x_i en $x_i + \xi_i$ et l'on néglige les carrés des ξ_i ; on trouve ainsi le système d'équations linéaires

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2 + \cdots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Il y a, entre les intégrales des équations (2) et les invariants intégraux des équations (1), un lien intime qu'il est aisé d'apercevoir.
Soit $F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) =$ const., une intégrale quelconque des équations (2). Ce sera une fonction homogène par rapport aux ξ, et dépendant d'ailleurs des x d'une manière quelconque. Je pourrai toujours supposer que cette fonction F est homogène de degré 1 par rapport aux ξ ; car s'il n'en était pas ainsi, je n'aurais qu'à élever F à une puissance convenable pour trouver une fonction homogène de degré 1. Considérons maintenant l'expression

$$\int F(dx_1, \cdots, dx_n),$$

je dis que c'est un invariant intégral du système (1). »

Rappelons que l'édifice théorique de la mécanique classique est en grande partie fondé sur l'existence de l'« invariant intégral de Poincaré-Cartan » ou « tenseur impulsion-énergie »

$$\sum_i p_i dq_i - H(p, q, t)dt.$$

6. Stabilité à la Poisson

« *Le mot stabilité a été entendu sous les sens les plus différents, et la différence de ces divers sens deviendra manifeste si l'on se rappelle l'histoire de la Science. Lagrange a démontré qu'en négligeant les carrés des masses, les grands axes des orbites deviennent invariables. Il voulait dire par là qu'avec ce degré d'approximation les grands axes peuvent se développer en séries dont les termes sont de la forme $A\sin(\alpha t + \beta)$, A, α et β étant des constantes.* » Le titre du chapitre XXVI n'est pas innocent. Ayant annoncé à tort dans le mémoire de 1889 un résultat très fort de stabilité dans le problème restreint circulaire plan des trois corps, Poincaré tient à couronner son traité d'un résultat de stabilité qui, s'il est bien moins fort que

le premier, n'en est pas moins d'une importance considérable. En effet, basé sur le « théorème de récurrence », il est le précurseur de la « théorie ergodique ». La stabilité « à la Poisson » fait allusion à l'absence de termes séculaires purs (i.e. croissant indéfiniment avec le temps) dans les demi grands axes planétaires au deuxième ordre de la théorie classique des perturbations (i.e. en négligeant les cubes des masses planétaires) ce qui, à cet ordre d'approximation, implique un comportement quasi-périodique (et en particulier récurrent) de ces demi-grands axes. (S. Haretu montrera qu'il n'en est plus de même aux ordres suivants). Poincaré montre par un argument de conservation du volume dans une enceinte de volume fini que, dans le cas qu'il considère, la conservation de l'invariant intégral implique qu'une solution « générique » du problème restreint repassera une infinité de fois dans un voisinage arbitrairement petit d'un point donné de l'espace des phases. La citation suivante (chapitre XXVI section 296) légitime la considération du cas générique dans un esprit qui annonce les ensembles de mesure nulle de Borel : *« En résumé, les molécules qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles au même titre que les nombres commensurables qui ne sont qu'une exception dans la série des nombres, pendant que les nombres incommensurables sont la règle. Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler. »*
Intitulée *Probabilités*, cette section 296 est particulièrement visionnaire : rejetant les craintes qu'a J. Bertrand des « paradoxes » des probabilités continues, Poincaré comprend parfaitement qu'un choix quelconque de densité régulière conduira à la même notion d'ensembles de probabilité négligeable : *« Mais il faut d'abord que j'explique le sens que j'attache au mot probabilité. Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction quelconque positive des trois coordonnées x, y, z ; je conviendrai de dire que la probabilité pour qu'à l'instant $t = 0$ une molécule se trouve à l'intérieur d'un certain volume est proportionnelle à l'intégrale*

$$J = \int \varphi(x, y, z) dxdydz$$

étendue à ce volume. ... Nous pouvons choisir arbitrairement la fonction φ et la probabilité se trouve ainsi complètement définie. ... Nous retombons donc sur les mêmes résultats qui sont ainsi indépendants du choix de la fonction φ. » Une belle analyse de cette partie du texte se trouve dans la thèse d'Anne Robadey [Ro].

7. Théorie des conséquents

Le problème restreint circulaire plan des trois corps se ramenant, une fois rapporté à des axes tournants, à un système hamiltonien à deux degrés de liberté, une hypersurface d'énergie constante est une variété de dimension trois. Dans la section 305 du chapitre XXVII, Poincaré construit un demi-plan que recoupent une infinité de fois les courbes intégrales, lui faisant jouer le rôle d'un stroboscope : *« Le point M_1 sera dit le conséquent de M_0. Ce qui justifie cette dénomination, c'est que, si l'on considère le faisceau des courbes qui satisfont aux équations différentielles (1) ; si, par le point M_0, on fait passer une courbe et qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle* *rencontre de nouveau le demi-plan* $(y = 0, x > 0)$*, cette nouvelle rencontre aura lieu en* M_1*.* »

L'existence d'un invariant intégral implique la conservation par l'« application de premier retour » sur cette « surface de section », d'une mesure ayant une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue (que bien entendu Poincaré ne pouvait connaître) : *« Ainsi, l'intégrale (5) a même valeur pour une aire quelconque et sa conséquente.* » Poincaré en déduit un résultat important d'intersection avec sa conséquente d'une courbe fermée formée de segments de variétés asymptotiques de solutions périodiques.

Birkhoff construira un anneau jouant le même rôle, à l'origine de l'étude des « distortions conservatives de l'anneau » qui, dans la deuxième moitié du 20ème siècle, a joué un rôle important dans le développement de la dynamique conservative qualitative et la naissance de la topologie symplectique (théorème du point fixe de Birkhoff et conjecture d'Arnold). C'est l'anneau de Birkhoff que, plutôt que le demi-plan de Poincaré, j'ai choisi de représenter dans la figure-résumé du paragraphe 9. L'application de premier retour peut s'interpréter comme décrivant les positions successives du passage au périhélie du corps de masse nulle (voir [C]).

8. Solutions doublement asymptotiques

Rappelons l'assertion fautive du Mémoire de 1889 : *« Donc les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées. Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.* » En fait, bien que coincidant à tous les ordres de la théorie des perturbations (voir l'estimation exponentiellement petite de l'angle d'intersection donnée pour un exemple de pendule perturbé dans le chapitre XXI), les surfaces asymptotiques stable et instable d'une solution périodique du problème restreint n'ont aucune raison de coincider effectivement et ne définissent donc pas des surfaces fermées confinant les solutions dans une hypersurface d'énergie fixée [BG, Y]. Cette non coïncidence est la manifestation de la divergence des « séries de Bohlin » en $\sqrt{\mu}$, dont Poincaré avait supposé quelles convergent dans la première version du Mémoire[5].

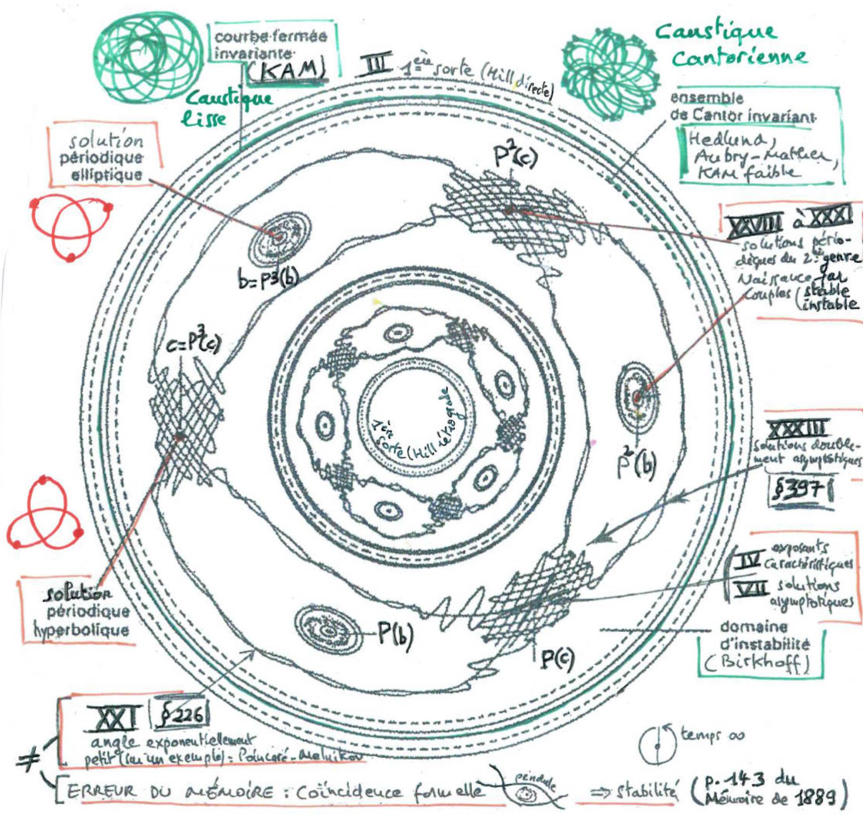
Comprenant l'extrême complexité des intersections de ces deux variétés asymptotiques, Poincaré écrit (il faudrait dire « s'écrie ») : *« Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.*

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner un idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les série de Bohlin sont divergentes. » (chapitre XXXIII, section 397).

[5] Voir [Ra] pour une étude approfondie de la façon dont Poincaré manie les séries divergentes.

À l'origine de ce que certains ont nommé (fort mal à mon avis) « théorie du chaos », cette complexité du treillis des intersections homoclines ou hétéroclines (i.e. des variétés stables et instables) s'analyse aujourd'hui par des méthodes de dynamique symbolique mais, bien que les ordinateurs en aient permis une vision partielle, l'imaginer vraiment reste difficile.

9. Une image pour résumer



10. Un séminaire

En 1988–1989, Jacques Laskar et moi avions organisé au Bureau des Longitudes un séminaire de lecture des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Rassemblant astronomes et mathématiciens, ce séminaire est à l'origine de la création de l'équipe ASD (Astronomie et Systèmes Dynamiques) dans laquelle nous essayons de perpétuer la collaboration entre astronomes et mathématiciens. Nous savions que les recherches de Poincaré sur les équations différentielles, et en particulier sur le problème des trois corps, étaient à l'origine de pans entiers de la mathématique d'aujourd'hui : systèmes dynamiques, formes différentielles, théorie ergodique, topologie, ... , mais nous avons découvert avec quelle précision visionnaire ces trois volumes exposaient des idées que nous avions cru récentes. Trois fascicules sont parus à cette occasion :

[S1] A. Chenciner *Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi : coordonnées « action-angles » de Delaunay*; J. Laskar *Les variables de Poincaré et le développement de la fonction perturbatrice*
[S2] A. Chenciner *Séries de Lindstedt*
[S3] S. Ferraz-Mello *The Method of Delaunay*; A. Jupp *Chapter XIX Bohlin Method*

11. Une lettre à Gauthier-Villars

Monsieur et cher Camarade,

Il y a quelques mois vous m'avez dit que vous seriez disposé à publier le troisième volume de mon traité de Mécanique Céleste dans les mêmes conditions que les deux premiers. Seriez-vous assez bon pour me faire savoir si vos intentions sont toujours les mêmes. Dans ce cas je me mettrais immédiatement au travail.

Ce troisième volume aurait à peu près les mêmes dimensions que les deux premiers et serait le dernier de l'ouvrage.

Est-il nécessaire de faire un nouveau traité?

Veuillez agréer, Monsieur et cher Camarade, l'assurance de ma considération la plus distinguée

Poincaré

Remerciements

Merci à Daniel Bennequin, Hakan Eliasson, Jacques Féjoz, Hugo Jiménez-Pérez, Jacques Laskar, François Laudenbach, Pierre Moussa, David Sauzin, Carles Simó, Shanzhong Sun, Tadashi Tokieda pour des relectures critiques.

12. Références

[A] V.I. Arnold *Petits dénominateurs et problème de la stabilité du mouvement en mécanique classique et céleste*, Usp. Mat. Nauk 18 (1963), 91-192

[AKN] V.I. Arnold, V.V. Kozlov & A.I. Neishtadt *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd ed., Dynamical Systems III, Encycloædia of Mathematical Sciences, vol. 3, Springer 2006

[BG] J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem* AMS, History of Mathematics, vol. 11, 1997

[C] A. Chenciner *Three-body problem*, Scholarpedia

[K] A.N. Kolmogorov *On the Conservation of Conditionnally Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. akad. nauk SSSR, 1954, vol. 98, pp. 527-530

[M1] J. Moser *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Gött., Math. Phys. Kl. (1962), 1-20

[M2] J. Moser *Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions*, Math. Annalen 169, 1967, 136–176

[Ra] J. P. Ramis *Poincaré et les développements asymptotiques (Première partie)*, Gazette des mathématiciens 133, juillet 2012, pp. 33-72

[Ro] A. Robadey *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les sytèmes dynamiques*, Thèse Paris 2006

[Y] J.C. Yoccoz *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré*, Gazette des mathématiciens, no 107, 2006, p. 19-26

Ce texte paraît simultanément dans la revue Quadratures. Par ailleurs, un texte plus technique sur Poincaré et le problème des trois corps sera publié dans le séminaire Poincaré (Bourbaphy) de novembre `http://www.bourbaphy.fr`.

HISTOIRE

Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920 Scènes de la vie parisienne

Michèle Audin[1]

C'est Paris lui-même qui m'a libéré de Paris. Il m'a appris dans sa propre langue à me servir (à essayer du moins de me servir) de ma propre langue. Car il faut distinguer entre ses leçons immédiates et celles qui agissent en profondeur : dont la plus profonde est sans doute qu'étant étonnamment lui-même, il vous enseigne à être soi-même.
C.F. Ramuz, [48]

Au cours de ses études, dans les années 1920, le mathématicien suisse Georges de Rham est passé par Paris. Il y a bénéficié des conseils d'Henri Lebesgue, des cours et des idées d'Élie Cartan. En le suivant, nous esquissons un tableau de la topologie dans la vie mathématique parisienne au cours des années 1922-1931.

En 1895, Henri Poincaré contribua à la célébration du centenaire du *Journal de l'École polytechnique* en donnant à ce journal un article destiné à devenir célèbre, l'*Analysis situs* [47, pp. 193–288][2]. Cet article inspiré fut suivi de cinq « compléments », consacrés à compléter, mais aussi à préciser, voire à corriger, ce qui y était imprimé. Le cinquième [47, pp. 435–498], paru en 1904, contient, on le sait, une description de la « sphère de Poincaré », une variété de dimension 3 ayant l'homologie d'une sphère mais pas simplement connexe. C'était à la fois un contre-exemple à un énoncé erroné du second complément [47, pp. 338–370], une clarification devenue nécessaire de la différence entre homotopie et homologie (entre π_1 et H_1), et la source de la conjecture qui occupa ensuite les topologues pendant plus de cent ans, « Mais cette question nous entraînerait trop loin », telle était d'ailleurs la dernière phrase de cette somme.

En 1935, après le Congrès de topologie de Moscou, une réunion vraiment internationale (voir [72, 69]), Pavel Alexandroff et Heinz Hopf passèrent quelques jours dans la station balnéaire de Yalta, en Crimée, et, le 28 septembre, y terminèrent la rédaction du livre [10] en mettant le point final à sa préface. Ce livre devint, et resta longtemps, internationalement, une bible de la topologie algébrique (combinatoire, disait-on encore). À Paris, les mathématiciens qui organisaient le séminaire Julia et ceux (souvent les mêmes) qui créaient Bourbaki consacrèrent, dès le début de

[1] Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS.

[2] Dans ce texte, les articles de Poincaré sur l'Analysis situs sont cités avec leur pagination dans le volume 6 de ses Œuvres complètes.

1936, plusieurs séances du séminaire à des techniques et résultats contenus dans cet ouvrage (voir [16]). Plusieurs d'entre eux (Jean Leray, Henri Cartan, André Weil, Charles Ehresmann...) devaient s'illustrer, dans les décennies suivantes, par des travaux de topologie.

Dans cet article, nous évoquons un moment de la période intermédiaire à Paris, entre 1922, année où Henri Lebesgue, qui venait d'être nommé professeur au Collège de France, commença à y dispenser ses cours[3], et 1931, année de la soutenance de la thèse de Georges de Rham, dont les souvenirs constituent le fil narratif de cette histoire[4].

Si ces dates limites sont associées aux noms de Lebesgue et de Rham, le véritable héros de cette histoire est Élie Cartan : nous le verrons se documenter sur l'Analysis situs et produire, à plus de cinquante-cinq ans, des résultats étonnants sur les formes différentielles et la topologie des groupes de Lie ouvrant la voie au théorème de de Rham.

Promenade

Georges de Rham — Alors je me suis tourné vers l'*Analysis situs* ou Topologie. J'ai essayé de comprendre les Mémoires de Poincaré sur ce sujet et j'ai lu le premier chapitre du livre de Lefschetz « L'analysis situs et la Géométrie algébrique », qui contient un exposé clair sans démonstrations, et le livre de *Kerekjarto*[5]. En 1926, il n'y avait encore que peu de publications sur ce sujet, alors que sur la théorie des fonctions, de variables réelles ou complexes, il y en avait tant qu'un débutant isolé s'y perdait[6]. Sur le conseil de Dumas[7], me signalant que Lebesgue donnait au Collège de France un cours sur l'Analysis situs, je me suis rendu à Paris en novembre 1926. [55, p. 23]

1. Arrière-plan : Henri Lebesgue et l'invariance du domaine

Si le nom de Lebesgue est resté attaché à la théorie de l'intégration, il est clair que cette théorie avait besoin de topologie générale. Le théorème que l'on appelle (en France) théorème de Borel-Lebesgue est un théorème de topologie générale, une propriété des parties fermées et bornées de l'espace $\mathbf{R}^n$, *de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini,* propriété si remarquable qu'elle est devenue la définition d'un espace compact.

[3] Les résumés de ses cours sont rassemblés dans [38].

[4] Ces autres « notes d'un Vaudois », dans [55] et [54], utilisées ici un peu comme les promenades des *Tableaux d'une exposition*, de Moussorgski, orchestrés par Ravel pour une version créée à Paris le 19 octobre 1922, ou d'*Un Américain à Paris*, de Gershwin, créé à New York le 13 décembre 1928.

[5] Les livres [42] et [36].

[6] On pense ici notamment aux raffinements du théorème de Picard en théorie des fonctions analytiques d'une variable (voir [12]).

[7] Il s'agit de Gustave Dumas (1872–1955), qui était professeur à Lausanne et dont de Rham a déjà parlé au début de son texte.

De l'analysis situs, il dit dans sa notice de 1922 [38, p. 164][8] :

> Au moment où je sortais de l'École Normale, l'attention des jeunes gens était alors attirée sur cet important sujet par le cours d'analyse de Jordan, par les leçons de M. Picard sur les fonctions algébriques et par le premier mémoire de Poincaré qui venait de paraître[9].

Si ses travaux en Analysis situs n'occupent que quatre-vingt-trois pages des cinq volumes de ses Œuvres complètes[10], Lebesgue n'en a pas moins consacré beaucoup de temps à ce sujet.

Le nombre de Lebesgue d'un recouvrement. Lebesgue est l'un des mathématiciens qui ont proposé une démonstration de l'« invariance du domaine » — le théorème que Brouwer venait de démontrer et qui affirme qu'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ que si $m = n$. Sa démonstration reposait sur un essai de définition topologique de la dimension, via le théorème suivant :

Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. De tout recouvrement fini de U par des ouverts, on peut extraire un recouvrement tel qu'il y ait des points communs à $n+1$ de ces ouverts et qu'aucun point de U ne se trouve dans plus de $n+1$ de ces ouverts.*

C'est une idée utile et brillante, que l'on illustre souvent, pour $n = 3$, par l'image un peu inadéquate d'un mur de briques (voir la figure 1) — il est difficile de penser à des briques comme à des ouverts. Lebesgue lui-même est réputé [27, p. 85] avoir dit plus tard que cette idée lui était venue alors qu'il bricolait un travail de maçonnerie.

Sauf que... Lebesgue n'avait pas de démonstration convaincante de ce fait à l'époque, que l'article était publié comme une lettre à Otto Blumenthal dans *Math. Annalen* en 1910, et que Brouwer avait, lui, une démonstration complète [17] de l'invariance du domaine. Ni Brouwer, ni Lebesgue n'avait un caractère facile et une polémique épistolaire s'ensuivit, le plus souvent à travers Blumenthal, qui dirigeait les *Mathematische Annalen* (polémique que l'on pourra suivre dans la correspondance de Brouwer [25]). Lebesgue finit par publier une démonstration complète de son théorème [39, p. 177][11] en 1921 (on en trouvera une autre dans [32]). Au moment qui nous intéresse, c'est-à-dire en 1922, le théorème était démontré.

---

[8] Il s'agit de la notice écrite en vue de son élection à l'Académie des sciences, qui eut lieu le 29 mai 1922.

[9] Lebesgue est entré à l'ENS en 1894. Il en est donc sorti en 1897. Le cours d'analyse de Jordan était un cours de l'École polytechnique, dont il exista trois éditions. Celle dont parle Lebesgue est certainement la deuxième [34], parue en 1893, qui contenait dans un chapitre « Ensembles » d'importantes notions de topologie générale (sur les diverses éditions du cours de Jordan, voir [28]). Il est certain que les travaux de Picard, en analyse complexe et sur les fonctions algébriques, menaient droit vers la topologie. Le « premier mémoire » de Poincaré parut, nous l'avons dit, en 1895.

[10] Même si son nom n'y apparaît pas, la publication des Œuvres de Lebesgue par *l'Enseignement mathématique* à Genève doit certainement beaucoup à Georges de Rham (voir [23]).

[11] Les articles sur l'Analysis situs de Lebesgue sont cités avec leur pagination dans le volume IV de ses Œuvres.

FIG. 1

Promenade

Georges de Rham — J'y suis resté jusqu'en mai 1927 et j'ai pu y retourner l'hiver suivant. J'ai suivi plusieurs cours à la Sorbonne, le Séminaire Hadamard au Collège de France, où j'ai appris beaucoup de choses. Mais sur l'Analysis situs, il n'y avait rien. Lebesgue avait changé le sujet de son cours et parlait des fonctions eulériennes et des formules sommatoires d'Euler-MacLaurin[12]. [55, p. 23]

2. Le séminaire Hadamard

Il est exclu de parler de la vie mathématique à Paris pendant cette période sans mentionner le séminaire de Jacques Hadamard. Brièvement puisque de Rham nous dit qu'il n'y fut pas question d'Analysis situs ces années-là. Rappelons que ce fut, de 1920 à 1933, le seul séminaire de mathématiques à Paris (à partir de 1933, il y en eut deux, voir [16]).

Renvoyons aux différents articles mentionnés dans la biographie [45], aux souvenirs d'André Weil dans [67, 68, 69], et résumons la situation, comme dans [44] par :

> la vie mathématique à Paris dans les années 1920 et au début des années 1930 était pour l'essentiel décrite par les deux mots « Séminaire d'Hadamard ».

Promenade

Georges de Rham — À la bibliothèque de la Sorbonne, je lisais tout ce que je trouvais sur l'Analysis situs, travaux de Poincaré, de Brouwer, Lebesgue, la Thèse de L. Antoine. [55, p. 23][13]

---

[12] Sur les cours de Lebesgue, voir ci-dessous. Le résumé du cours de 1926–27 sur la fonction Γ figure dans [38, p. 179].

[13] Rien, dans cet article de de Rham, ne peut expliquer la phrase

> Despite the eternal difficulty of obtaining books at the Sorbonne library (a situation which does not seem to have improved very much at most French universities) [...]

(dans [23, p. 203]) bien au contraire. Nous ignorons donc la source de ce commentaire. Il serait intéressant aussi de connaître la liste des bibliothèques qu'ont fréquentées les auteurs de cet article... La caricature et le préjugé rappellent, mutatis mutandis, les Parisiens vus par Hollywood dans le film inspiré par *Un Américain à Paris*.

3. Lebesgue, Jordan, Schoenflies, Antoine

Un autre apport de Lebesgue à la topologie fut son intérêt pour le théorème de Jordan, sur lequel il donna le premier de ses cours au Collège de France. Les relations entre le théorème de Jordan et l'invariance du domaine n'avaient pas échappé à Lebesgue, pas plus d'ailleurs qu'à Hadamard, comme nous allons le voir. Dans une note [39, pp. 173–175] consacrée à cette question, il avait mis ces relations en évidence en introduisant une notion de « variétés enlacées ». Celle-ci généralisait la position relative d'un couple de points et d'une courbe de Jordan dans le plan : le couple de points et la courbe sont enlacés si le segment joignant les deux points rencontre la courbe un nombre impair de fois (si c'est le cas, l'un des points est à l'intérieur, l'autre pas). Peu de temps auparavant (dans *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*[14]), Jacques Hadamard avait considéré l'« ordre d'un point par rapport à une courbe », qui est un indice d'intersection (indice de Kronecker, comme le titre de l'article l'indique). La définition de Lebesgue est la définition moderne du nombre d'enlacement de deux sous-variétés. Notons un article [18] de Brouwer, l'année suivante, ou un nombre d'enlacement dit *looping number* était défini avec une intégrale.

Signalons aussi la démonstration de Lebesgue [39, p. 207] du théorème de Schoenflies. L'article [39, pp. 177–206] de 1921 sur les correspondances entre points de deux espaces, que nous avons déjà cité parce qu'il y démontrait son énoncé « nombre de Lebesgue », contenait d'autres résultats. Au §12, il démontrait

> l'importante propriété suivante, connue sous le nom de théorème de Schoenflies :
>
> *si l'on a une correspondance univoque et continue dans les deux sens entre les points de deux ensembles fermés de deux espaces à n dimensions,*
> *les points intérieurs des deux ensembles se correspondent,*
> *les points frontières, limites de points intérieurs se correspondent,*
> *ainsi que les points frontières non limites de points intérieurs.*

Schoenflies l'avait démontré[15] pour la dimension 2 (c'est alors un perfectionnement du théorème de Jordan : une courbe de Jordan — plongement du cercle — dans le plan s'étend à un plongement du disque comme l'intérieur de la courbe de Jordan). Lebesgue dut revenir sur sa démonstration trois ans plus tard [39, pp. 207–210]. Une nouvelle citation s'impose :

> M. Fréchet vient de me faire observer que ma démonstration est insuffisante ; par une singulière étourderie, en effet, j'ai admis presque entièrement la propriété à démontrer à un moment de mon raisonnement. Pourtant, il suffit d'ajouter quelques lignes au §12 pour le compléter. Mais, comme il résulte de ma correspondance avec M. Fréchet que tout ce paragraphe n'est pas clair, je vais le reprendre entièrement.

Une autre de ses contributions fut de lancer Louis Antoine, un grand blessé que la guerre avait rendu aveugle, sur une thèse en topologie. Celui-ci écrivit, en 1945 :

> Pendant mon long séjour à l'hôpital, j'avais mûrement réfléchi aux possibilités que pouvait me permettre la cécité. [...] je me suis laissé convaincre

[14] Une note publiée dans le livre [60] de Tannery en 1910 et reproduite dans [29, pp. 875–915].
[15] Voir les références dans l'article de Lebesgue.

> quand même et, parmi les sujets proposés par Lebesgue, j'ai choisi l'Analysis situs (on dit maintenant la Topologie). Je n'ai pas eu à regretter cette décision et j'ai gardé de mon Maître la plus vive reconnaissance. [reproduit dans [27, p. 19]]

Le collier d'Antoine est un sous-espace peu ordinaire de l'espace $\mathbf{R}^3$, dont nous esquissons ici une description. Dans un tore, on dessine une chaîne (au sens ordinaire du terme, un ensemble de chaînons accrochés les uns aux autres) fermée. On remplace le tore par cette chaîne. Chacun des maillons est un tore, que l'on remplace à son tour par une chaîne semblable à celle dont il était un maillon. En répétant indéfiniment cette opération, on obtient un sous-espace de $\mathbf{R}^3$, compact, parfait et totalement discontinu (aucun de ses points n'est isolé, toutes ses composantes connexes sont des points) — et auto-similaire par construction. La figure 2, dessinée par Arnaud Chéritat[16], montre le résultat.

FIG. 2. Le collier d'Antoine

On connaissait déjà, bien avant la thèse d'Antoine, des espaces topologiques ayant ces propriétés : l'archétype de l'ensemble compact parfait totalement discontinu est l'ensemble triadique de Cantor (sur une droite) dont des versions planes venaient de faire irruption dans les mathématiques comme les poussières de Fatou produites par l'itération des fractions rationnelles (pour les travaux de Pierre Fatou, voir [12]). Ce que l'exemple d'Antoine avait de plus ? C'est un espace topologique homéomorphe à l'ensemble de Cantor, *mais* il n'existe aucun homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même qui envoie le collier d'Antoine sur une poussière plane. La preuve en est faite par un argument d'enlacement : un cercle qui enlaçait le tore originel (dans lequel se trouve le collier) garde un coefficient d'enlacement non nul avec le collier. En réalité, chacune des courbes similaires enlaçant chacun des tores de plus en plus petits utilisés dans la construction engendre un élément d'ordre infini dans le groupe fondamental du complémentaire ; ainsi celui-ci n'est même pas finiment engendré[17].

[16] Avec le logiciel POV-RAY. Voir des versions colorées dans son article [24].
[17] Ceci est démontré, par exemple, dans un texte [53] de Georges de Rham qu'il n'est pas inadéquat de citer ici.

La notion de variétés enlacées introduite par Lebesgue et déjà mentionnée au début de cette section se révéla fort utile. Cette utilité ne devait cesser de se confirmer au cours des années[18], même si Lebesgue ne fut pas beaucoup cité et Hadamard à peine plus[19].

Ici on a vu les centres d'intérêt de Lebesgue se déplacer des « ensembles de points » (ce qui deviendra, quelques années plus tard, la topologie générale) à l'« analysis situs » (topologie combinatoire, puis algébrique). Clairement, un espace compact parfait totalement discontinu appartient à la première sous-discipline, alors que la notion d'enlacement appartient à la deuxième. Au cours des années que nous évoquons dans cet article, les deux sous-disciplines étaient en cours de séparation, la première se développant davantage en liaison avec l'analyse fonctionnelle.

Voilà pour l'arrière-plan de cette exposition.

Promenade

Georges de Rham — En généralisant le théorème de Jordan pour les dimensions supérieures, Lebesgue avait introduit la notion de variétés enlacées et démontré un cas particulier du théorème de dualité d'Alexander[20]. [55, p. 25]

4. Les cours de Lebesgue au Collège de France

Arrivé au Collège de France, Lebesgue commença en 1922 à donner un cours tous les ans. Et, les premières années, c'est à l'Analysis situs qu'il consacra ce cours annuel.

FIG. 3. Au Collège de France

[18] Par exemple, pour rester dans la période considérée, dans l'étude de la fibration de Hopf [31].
[19] Ce qui explique sans doute la quasi-absence de Lebesgue dans un livre tel que [33].
[20] Les mentions ici ou là dans ce texte, après ceux de Brouwer, de travaux de James Alexander, de Heinz Hopf, d'Hermann Weyl ou d'autres mathématiciens devraient rappeler que, si Paris est le sujet de cet article, elle était loin d'être le centre du monde...

Voici les titres de ces cours.

1922–23 Sur quelques questions d'Analysis situs, à propos des travaux de Camille Jordan
1923–24 Sur l'Analysis situs
1924–25 Les divers ordres de connexion des espaces supérieurs

Le fait qu'on ait su, à Lausanne en 1926, que Lebesgue donnait un cours sur l'Analysis situs n'avait donc rien d'étonnant. Juste un peu de retard. En effet, en 1926, c'était déjà fini. Les titres des cours suivants furent

1925–26 Quelques procédés récents d'intégration (totalisation de M. Denjoy, intégrales de Radon, Hellinger, etc.)
1926–27 Sur la fonction Γ et quelques relations fonctionnelles

FIG. 4. À Paris

C'est ce dernier que de Rham trouva à son arrivée à Paris. Ses souvenirs ne contiennent aucune opinion sur les cours de Lebesgue ; à vrai dire, il n'est même pas complètement clair qu'il y a assisté[21]. Sur ces cours, il reste quelques avis. Szolem Mandelbrojt, qui assista à certains de ces mêmes cours en dit (en 1974) :

> Dans ma jeunesse, j'ai suivi pendant plusieurs années les conférences de Lebesgue au Collège de France [...] Ses leçons étaient plus que profondément intéressantes : elles étaient souvent, je ne crains pas de le dire, émouvantes. Son inspiration, sa recherche de l'expression exacte, nous obligeaient à penser avec lui. [...] Le public n'était pas bien nombreux, à ces leçons. [27, Préface]

À peu près à la même époque, en 1971, bien après les cours, André Weil, qui était entré à l'ENS en 1922 et avait donc probablement assisté à des séances de l'un ou l'autre de ces cours, eut une phrase lapidaire :

[21] Il est sûr, par contre, qu'il a suivi au moins un cours d'Élie Cartan (voir ci-dessous page 69).

> [...] hors de là [du séminaire Hadamard], l'inspiration faisait défaut. Lebesgue, au Collège de France, consacrait ses cours à l'« Analysis situs », c'est-à-dire à une topologie combinatoire qui en était restée aux premiers travaux de Poincaré. [67, p. 18]

S'il est certain que Lebesgue fut un successeur de Poincaré, s'il est tout aussi certain qu'il n'a pas laissé son nom à des résultats marquants de topologie algébrique, le commentaire de Weil est quand même un peu injuste. Le théorème de Schoenflies n'est ni une évidence ni une trivialité, les coefficients d'enlacement sont utiles, un cours sur la classification des surfaces n'était pas en 1925 une chose aussi commune que dans les années 1970.

Et puis, il y avait Georges de Rham.

Promenade

Georges de Rham — Or, Kerekjarto, dans l'Introduction à son livre, mentionnait une Note d'Alexander intitulée « Two manifolds with the same group », que je n'avais pas trouvé[e] à Lausanne et que je pus obtenir à la Bibliothèque de la Sorbonne[22]. Les deux variétés d'Alexander sont les deux espaces lenticulaires dont le groupe est cyclique d'ordre cinq. En étudiant cet exemple, j'ai vu que la théorie des enlacements et des intersections allait plus loin que l'homologie et donnait d'autres résultats, qui me semblaient nouveaux. [55, p. 24]

Le problème fondamental de la Topologie étant résolu pour les surfaces, il était naturel d'aborder les variétés à trois dimensions. [55, p. 25]

5. Le cours de Lebesgue en 1924–25. Les divers ordres de connexion des espaces supérieurs

Avant l'arrivée à Paris de notre visiteur suisse, arrêtons-nous sur le dernier de ces cours de topologie, simplement parce que nous avons, sur celui-ci, des informations complémentaires : outre le résumé, une lettre de Lebesgue à Élie Cartan dans laquelle il évoque ce cours, et le cahier dans lequel le jeune Henri Cartan a pris des notes pendant les séances[23]. Justement, il y était question de la classification des surfaces.

Commençons par le résumé (qui semble avoir été rédigé après que le cours a été donné) :

> Pendant l'année scolaire 1924–25, le Professeur a exposé les mémoires de Poincaré sur la recherche des conditions d'homéomorphie de deux variétés, et les travaux de Tietze, de Veblen, de Weyl, d'Alexander qui précisent, rectifient et prolongent ceux de Poincaré.
>
> Il s'est attaché surtout à mettre nettement en évidence les résultats définitivement acquis et les difficultés qui arrêtent actuellement la marche en avant.
>
> La représentation d'un polyèdre par des tableaux, introduite par Poincaré et qui joue un rôle essentiel dans ces recherches, demeure, par exemple, quelque peu illusoire pour les polyèdres à plus de trois dimensions, car on ne

[22] Voir la note 13.

[23] Les archives d'Élie et d'Henri Cartan conservées par ce dernier constituent une mine à peu près inépuisable.

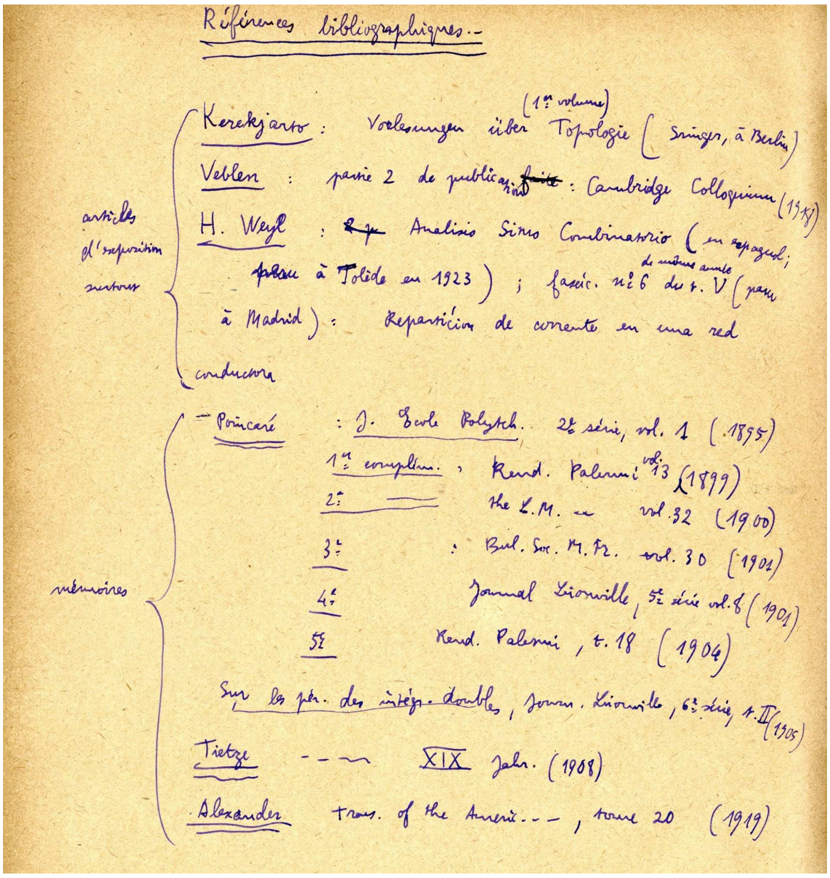
sait pas déterminer quels sont les tableaux qui correspondent à des polyèdres et quels sont ceux qui ne correspondent à aucun polyèdre.

Pour le cas de trois dimensions, il reste aussi beaucoup à faire ; on s'en rendra compte en remarquant que nous cherchons à donner au problème de l'homéomorphie une solution reposant uniquement sur des considérations arithmétiques et que, pourtant, nous ne savons pas formuler arithmétiquement le problème étudié.

La référence à Poincaré est explicite, elle l'est aussi dans le cahier, qui commence ainsi :

> Mémoire de Poincaré en 1895 (Journ. éc. polytechn.). Beaucoup d'erreurs, mauv. dém. ; mais résult. princip. justes, et beaucoup d'idées. – Mémoires ont suivi.

Les travaux de Tietze et Weyl (en Allemagne) et d'Alexander et Veblen (aux États-Unis) sont invoqués, dans le résumé de cours comme dans le cahier. La figure 5 montre les références du cours, sur la dernière page utilisée du cahier.


Références bibliographiques.–

articles d'exposition surtout

Kerekjarto : Vorlesungen über (1er volume) Topologie (Springer, à Berlin)
Veblen : partie 2 de publication ~~faite~~ : Cambridge Colloquium (1918)
H. Weyl : ~~2 p.~~ Analisis Situs Combinatorio (en espagnol ; ~~paru~~ à Tolède en 1923) ; fascic. n° 6 du t. V (paru de même année à Madrid) : Reparticion de corrente en una red conductora

mémoires

Poincaré : J. Ecole Polytech. 2e série, vol. 1 (1895)
1er complém. , Rend. Palermi vol. 13 (1899)
2e — the L.M. — vol. 32 (1900)
3e : Bul. Soc. M. Fr. vol. 30 (1902)
4e Journal Liouville, 5e série vol. 8 (1902)
5e Rend. Palermi, t. 18 (1904)
Sur les pér. des intégr. doubles, Journ. Liouville, 6e série, t. II (1905)
Tietze ——— XIX Jahr. (1908)
Alexander trans. of the Americ. ---, tome 20 (1919)

FIG. 5. La bibliographie dans le cahier d'Henri Cartan

Le cahier. C'est un cahier jaune relié et toilé, de la sorte dont tous les témoignages s'accordent à dire que l'on en a distribué aux normaliens pendant encore de longues années (et qui étaient un des signes auxquels on reconnaissait les normaliens dans les cours de la Sorbonne [57, p. 75]). Outre la date (1925), qui a pu être ajoutée ultérieurement au crayon sur l'étiquette, on peut lire

H.Cartan carré
Cours de M.Lebesgue
(Collège de France)

Et en effet, Henri Cartan était « carré », c'est-à-dire élève de deuxième année à l'ENS, en 1924–25. D'autre part, l'une des pages (celle numérotée 104) porte une date : « cours du mardi 17 mars 1925 ». L'étudiant prenait ses notes à l'encre violette, il y a de nombreuses ratures, sans doute des démonstrations incorrectes au tableau, corrigées ensuite (un cours vivant, donc).

Voici un résumé de ce qu'on lit dans ce cahier :

pages 1 à 26 La classification des surfaces (polygone)

pages 27 à 44 Discussion de $F+S-A$, de l'ordre de connexion, tableaux de Poincaré et de Veblen

pages 45 à 53 Calcul des nombres, en particulier, de Betti-Poincaré[24], qui pour les surfaces sont

– Var. orientable $BP = A - F - S + 3$
– Var. non orientable $BP = A - F - S + 2$

pages 54 à 75 Nombres de Betti-Riemann (et de Tietze-Veblen) [dont la conclusion est]

$$TV = A - F - S + 3 = BR$$

pages 76 à 93 Espaces supérieurs

pages 93 à 103 Nombres de Betti, Riemann, Poincaré, Tietze, Veblen et qques autres [dont la conclusion est] Donc n. de Betti et coef. de torsion ne suffisent pas à caractériser variété au p. de vue de l'analysis situs.

pages 104 à 110 Groupe fondamental

puis Références bibliographiques.

La bibliographie. Elle est présentée sur la figure 5. Il s'agit, pour les articles d'exposition, des livres [36] et [62] (que Lebesgue datait de 1918) et de l'article en espagnol [70] d'Hermann Weyl, puis de la liste des articles « analysis situs » de Poincaré, de son [46], et des articles de Tietze [61] et d'Alexander [1][25].

La classification des surfaces. « La » démonstration du théorème de classification des surfaces que présentait Lebesgue dans le cours que suivit le jeune Henri Cartan est celle que le même Henri Cartan enseignait encore à Orsay cinquante

[24] BR ici est notre b_1+1, ainsi $-(2-2g)+3 = 2g+1$ pour une surface orientable (avec $b_1 = 2g$).

[25] L'article d'Alexander, comme l'a dit de Rham dans la promenade page 57, montre deux espaces lenticulaires quotients de S^3 par un groupe $\mathbf{Z}/5$ et non homéomorphes. Il est daté de Paris, 1918. Ce que faisait cet Américain à Paris en 1918 ne nous est pas connu (il était dans l'armée, mais avait contribué à l'effort de guerre aux États-Unis même). Qui il y a rencontré non plus.

ans plus tard, juste avant son départ à la retraite[26]. Il n'est pas très facile de dire à qui elle est due. Le principe est le suivant :

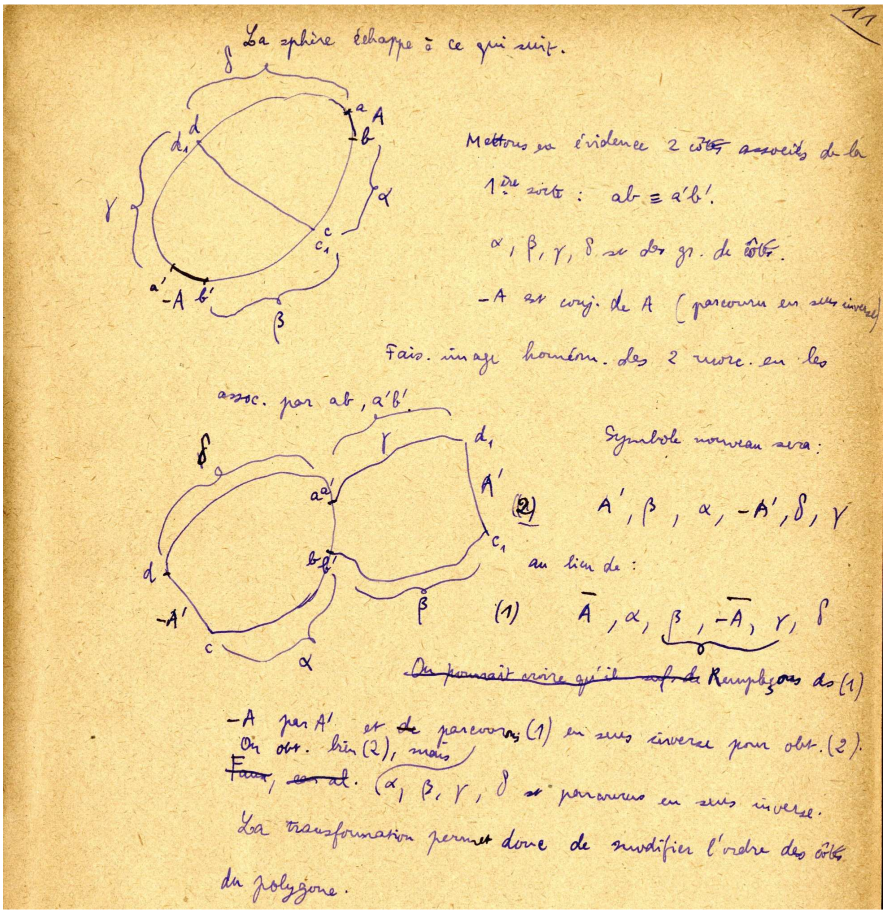


FIG. 6. La figure page 11 du cahier d'Henri Cartan

(1) La surface peut être triangulée (« On admettra possibilité de constr. » a noté Henri Cartan dans son cahier[27]).

(2) Elle est donc décrite comme un polygone dont certains côtés doivent être identifiés.

(3) Par découpages et recollements de triangles, on modifie le polygone (dont les côtés sont identifiés deux à deux) de façon que tous les sommets soient le même point de la surface. La figure 6, qui vient des notes d'Henri Cartan, montre une étape de la manipulation du polygone.

[26] La comparaison des notes de cours de l'étudiant Cartan avec celles, cinquante ans après, d'un étudiant de son cours, est assez intéressante.

[27] Dans son cours d'Orsay, il se limita lui aussi sagement aux surfaces triangulées.

Quelques années plus tard, en 1934, Seifert et Threfall, dans leur livre [58, p. 319] firent remonter cette démonstration à un article [26] de Max Dehn et Poul Heegaard paru en 1907 dans l'*Enzyklopädie*[28]. La liste de références copiée par Henri Cartan à la fin de ses notes indique le livre de Béla Kerékjártó [36] comme source vraisemblable.

Promenade

Georges de Rham — À la fin du 2ième Complément à l'Analysis situs, Poincaré écrit : « Pour ne pas allonger davantage, je me borne à énoncer le théorème suivant... », énoncé se réduisant à ceci : une sphère d'homologie est la sphère ordinaire ! Mais dans le 5ième Complément, il montre que c'est faux en construisant une sphère d'homologie à trois dimensions dont le groupe fondamental n'est pas trivial. Il pose alors le problème appelé aujourd'hui « Hypothèse de Poincaré » : la sphère S^3 est-elle topologiquement caractérisée, parmi les variétés closes à trois dimensions, par le fait que son groupe se réduit à l'identité ?

Plus généralement, on pouvait se demander si la connaissance du groupe fondamental suffisait pour caractériser topologiquement une variété close à trois dimensions. [55, p. 25]

Ces travaux [ceux d'Élie Cartan, menant à son livre [19]], les premiers où apparaissent des préoccupations d'ordre topologique, ne font intervenir, en fait de notions topologiques, que celles de groupe fondamental et de revêtement. À l'époque, en ces années 1924–25, ces notions n'étaient pas nouvelles, mais elles n'étaient pas comme aujourd'hui familières à tous les mathématiciens. J'imagine qu'Élie Cartan a fait ces travaux en même temps qu'il cherchait à se documenter sur l'Analysis situs, comme on appelait alors la Topologie. [54, p. 642]

6. Élie Cartan se documente sur l'Analysis situs

À l'appui du commentaire de Georges de Rham, nous avons une lettre, dans laquelle Lebesgue répond à une demande d'Élie Cartan, justement. Et mentionne le cours de 1924–25.

Une lettre de Lebesgue à Élie Cartan, 19 octobre 1925. La première partie de cette lettre n'a aucun rapport avec le sujet de cet article[29]. En voici la deuxième partie :

> Vous m'avez parlé, il y a quelque deux ans[30], du plan projectif complexe et vous m'avez demandé ce que c'est au point de vue de l'Analysis situs.
>
> Dans mon cours de l'an dernier, après avoir exposé les travaux de Poincaré et de ses suivants, j'ai traité des exemples pris parmi les multiplicités que fournissent la géométrie et l'analyse et j'ai en particulier considéré le cas du plan projectif complexe. Voici les caractéristiques de cette variété (j'entends

28 Cet article de l'Encyclopédie de Felix Klein semble n'avoir eu ni traduction ni analogue dans la version française dirigée par Jules Molk.

29 Il existe quatre lettres de Lebesgue à Cartan. Les deux dont il est question dans cet article, qui ont déjà été publiées dans les fabuleuses notes de [40] (notes qui n'ont pas été conservées dans le livre [41]), une troisième, que l'on trouvera ici [14, Appendix] ou là [15], et une quatrième, non datée, à propos d'examens à l'école de physique-chimie.

30 Avant, donc, que le « fils Cartan » suive le cours de Lebesgue.

les caractères qui permettent de la distinguer de certaines autres, mais qui ne sont pas, peut-être, suffisants pour la différencier de toutes les autres — car c'est là que nous en sommes en Analysis Situs).

D'abord elle est bilatère[31].

Les nombres de Betti-Poincaré sont

$$BP_1 = BP_3 = 1; \qquad BP_2 = 2;$$

il n'y a pas de coefficients de torsion[32]. Enfin le groupe fondamental se réduit à l'application identique. Ceci est curieux car, jusqu'au bout Poincaré avait pensé, espéré, que seules les variétés simplement connexes[33] auraient un tel groupe fondamental.

La division de cet espace en polyèdre à éléments simplement connexes ne parle guère à l'imagination ; elle peut se faire en 4 sommets, 12 arêtes, 14 faces, 6 cases, 3 hypercases[34]. C'est un polyèdre déjà très costaud ; je veux essayer de vous en donner une idée.

Soient H_1, H_2, H_3 les 3 hypercases, chacune est homéomorphe à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant 1$, par définition même ; les 3 frontières de ces hypercases sont 3 hypersphères $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, c'est-à-dire 3 espaces ordinaires à 3 dimensions E_1, E_2, E_3 ; dans chacun desquels il n'y a qu'un point à l'infini (espace de l'inversion). Mais les points de E_1, E_2, E_3 se correspondent 2 à 2 puisque les E servent à relier les H.

Imaginez dans E_i un tore T_i qui partage E_i en 2 parties. Nous aurons ainsi les parties A et B dans E_1 ; C et A dans E_2 ; B et C dans E_3. Les lettres vous donnent la correspondance entre parties ; pour fixer la correspondance entre points il suffit de fixer la correspondance pour les trois surfaces T_i qui se correspondent toutes trois point à point. Voici : sur chaque tore traçons un méridien, un parallèle et une hélice torique à un seul tour, on a ainsi m_i, p_i, h_i, la correspondance est

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv p_2 \equiv h_3 \\ p_1 &\equiv h_2 \equiv m_3 \\ h_1 &\equiv m_2 \equiv p_3 \end{aligned}$$

Maintenant, si vous voyez clairement, c'est que vous avez les yeux de l'esprit diablement[35] pénétrants.

Cordialement à vous

H. Lebesgue

Remarques. *Le 19 octobre 1925, « mon cours de l'année dernière » n'a qu'une signification possible, il s'agit de celui de 1924–25.*

---

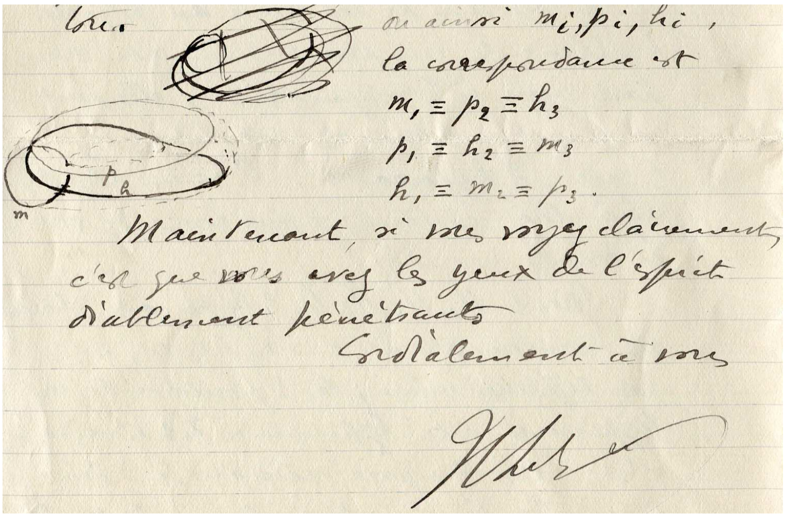
31 C'est-à-dire orientable.

32 Voir la note 24. Pour $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, $BR_i = b_i + 1$ et $b_1 = b_3 = 0$, $b_2 = 1$ donnent les valeurs annoncées par Lebesgue.

33 C'est-à-dire, homéomorphes à une sphère. Il n'est pas clair que Poincaré ait écrit quelque chose pour les dimensions plus grandes que 3.

34 La terminologie est due à (en tout cas utilisée par) Poincaré.

35 Cette lettre est très posée. Comme la « singulière étourderie » de la démonstration du théorème de Schoenflies (ici page 53), le polyèdre « costaud » et l'adverbe « diablement » sont du pur Lebesgue — que reconnaîtront les lecteurs de [40, 41] et [14, 15] !



tore ou aussi m_i, p_i, h_i,
la correspondance est
$m_1 \equiv p_2 \equiv h_3$
$p_1 \equiv h_2 \equiv m_3$
$h_1 \equiv m_2 \equiv p_3$.
Maintenant, si vous voyez clairement,
c'est que vous avez les yeux de l'esprit
diablement pénétrants
Cordialement à vous
H Lebesgue

FIG. 7. La fin de la lettre

Il n'y a pas trace dans les notes prises par Henri Cartan du plan projectif complexe. Il n'est pas impossible que le jeune Cartan n'ait pas pris des notes très assidûment, ou même ait séché tel ou tel cours (nous l'avons dit, il y a une seule date dans le cahier). La dernière page des notes est une liste de références bibliographiques (reproduite ici sur la figure 5), il semble donc bien qu'il ait été là jusqu'au bout. Le résumé de cours ne mentionne que la dimension 3. *Il est possible que Lebesgue ait réfléchi à cet exemple de dimension* 4 *sans en parler dans son cours.*

Que savait-on de la topologie de l'espace projectif complexe ? De cette lettre nous apprenons que, vers 1923, Élie Cartan s'est renseigné auprès de Lebesgue sur la topologie de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. D'où nous pouvons déduire deux informations : il s'y intéressait, d'une part, et le résultat n'était pas « bien connu », de l'autre.

Nous verrons ci-dessous qu'Élie Cartan commençait à mettre au point des méthodes qui permettraient bientôt d'étudier, non seulement le plan mais les espaces projectifs complexes — eux-mêmes comme cas particuliers d'une classe beaucoup plus étendue d'espaces symétriques complexes.

Quant au fait que le résultat n'était pas bien connu, il est un peu étonnant : cet exemple serait aujourd'hui l'un des tout premiers d'un livre de topologie. Constatons qu'il n'est pas mentionné dans les livres de topologie de l'époque (ceux de Kerékjártó [36] et de Veblen [62]). Constatons encore, avec un peu plus d'étonnement, qu'il ne l'est pas non plus, dix ou douze ans plus tard, dans celui d'Alexandroff et Hopf [10] et notons qu'il apparaît dans une des notes finales du Seifert et Threlfall [58, p. 318], où l'on apprend que le premier à avoir calculé l'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ fut... Bartel Leendert van der Waerden, dans un article [64] de 1929[36].

[36] On connaît surtout aujourd'hui van der Waerden pour son livre d'algèbre [65, 66]. Pour un géomètre algébriste, étudier la topologie de l'espace projectif était quand même de toute première nécessité : penser aux théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes, parus quelques années

Pourtant, nous le verrons, les nombres de Betti de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ étaient bien connus de Georges de Rham en 1928 (voir la note 43).

Mais revenons à la lettre de Lebesgue à Cartan. Il est bien évident que Lebesgue, spécialiste des constructions géométriques, et Cartan, futur auteur de [21], savaient parfaitement que le plan projectif se décompose comme réunion d'un plan affine auquel est ajoutée une droite à l'infini, qui est elle-même une droite affine avec son point à l'infini

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{C} \cup \{\infty\}.$$

Nous lisons aujourd'hui cette décomposition comme une décomposition cellulaire. C'est aussi un cas particulier de cellules de Schubert qui, comme leur nom l'indique (ou ne l'indique pas), avaient été inventées par Hermann Schubert au XIX$^{\text{e}}$ siècle (et furent utilisées par van der Waerden dans sa détermination de l'homologie de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ dans [64]). Avec une cellule de dimension 4, une de dimension 2 et une de dimension 0, les nombres de Betti et le groupe fondamental de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sont évidents.

On pourra donc s'étonner de la complication de la description donnée par Lebesgue dans sa lettre...

Le plan projectif complexe et son tore central. Avec la pénétration que donnent aux yeux de notre esprit les plus de quatre-vingts ans écoulés et la familiarité avec les tores dans les variétés algébriques complexes[37], il est assez facile d'y voir clair même dans le polyèdre costaud de Lebesgue. Écrivons le plan projectif complexe comme quotient de la sphère S^5, ensemble des points de coordonnées complexes homogènes $[x, y, z]$ normalisées par

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1.$$

Les équations

$$|x| = |y| = |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

décrivent un tore de dimension 2, qui mérite le nom de « tore central » de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

La figure 8 représente le triangle image de l'application

$$\mu : \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}^3, \qquad [x, y, z] \longrightarrow (|x|^2, |y|^2, |z|^2).$$

Le tore central est l'image inverse du centre du triangle. Nous laissons aux lecteurs le plaisir d'identifier les espaces E_1, E_2 et E_3 de la lettre de Lebesgue à partir de cette figure.

Quant à Élie Cartan, eh bien, à peine quelques années plus tard, dans son exposé du Congrès international de 1932 à Zurich [22], il faisait entrer les espaces projectifs complexes dans une longue liste d'espaces symétriques complexes... dont les méthodes dont il va être question maintenant permettent de calculer les nombres de Betti.

---

auparavant [42]. Dans un souci de complétude, signalons que van der Waerden redémontra ces années-là quelques-uns des résultats anciens d'Élie Cartan et lui écrivit à ce sujet (le 11 juin 1932), une lettre conservée dans le fonds 38J aux archives de l'Académie des sciences.

[37] Voir par exemple [11].

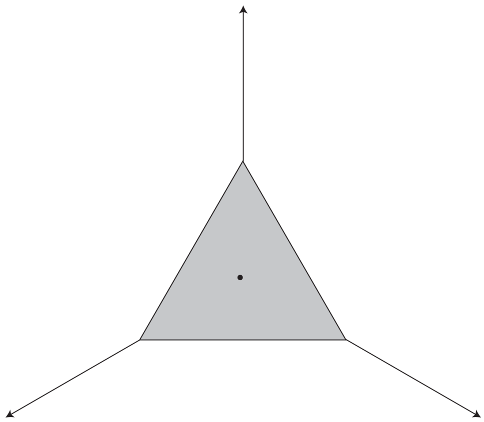


FIG. 8. Le tore central dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Promenade

Georges de Rham — J'ai alors écrit à Lebesgue en lui demandant un entretien. Il a tout de suite accepté et m'a appelé à la fin de son cours au Collège de France.

Comme la conversation se prolongeait et que l'appariteur semblait s'impatienter, Lebesgue m'a proposé de le raccompagner à pied jusqu'à la rue Saint-Sabin[38], en me disant qu'on devait avoir des égards pour ce vieil appariteur qui avait introduit Liouville[39].

Lebesgue, tout en étant très encourageant, m'a signalé d'autres travaux d'Alexander que j'ignorais, parus en 1924 et 1925 dans les Proceedings of the Nat. Ac. of Sc., que j'ai trouvé[s] à la Bibliothèque de la Sorbonne[40]. Ma déception a été grande d'y voir beaucoup de ce que j'avais fait et que je croyais nouveau.

Changeant de problème, j'ai alors essayé de démontrer l'hypothèse de Poincaré[41]. Espérant pouvoir y arriver, j'ai montré à Lebesgue une esquisse de mon projet de démonstration. Il m'a dit tout de suite que, pour une chose aussi importante, il fallait faire une rédaction complète, avec tous les détails, avant de rien annoncer. Je m'y suis acharné pendant des semaines, couvrant des dizaines et des dizaines de pages, jusqu'à ce que je me trouve devant une difficulté imprévue qui s'est révélée insurmontable. Découragé, je suis retourné voir Lebesgue. Il m'a conseillé de revenir à l'étude des invariants d'intersection et d'enlacement, en donnant un exposé clair

[38] Voir la figure 9 et la note 55.

[39] Joseph Liouville (1809–1882), fut nommé professeur au Collège de France en 1850. En 1926, il n'y avait pas d'« âge de la retraite » et le vieux monsieur pouvait bien travailler là depuis soixante ans... Cet appariteur, dit Lebesgue dans sa leçon inaugurale [37] du 7 janvier 1922,

> se rappelle encore Liouville dans les dernières années de son professorat, vieillard qu'il fallait guider et qui, miracle renouvelé à chaque leçon, retrouvait toute sa vivacité de pensée et des allures de jeunesse dès qu'il était au tableau.

[40] Il y a six notes de James Alexander dans le volume 10 (1924) des Proceedings de la National Academy of Sciences, il y en a deux dans le volume 11 (de 1925) [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

[41] De nombreux mathématiciens ont essayé de démontrer la conjecture de Poincaré. Bien avant de Rham, citons le cas de Max Dehn (voir [59]).

et rigoureux avec des exemples. Il m'a prêté un tiré à part de l'exposé de H. Weyl sur l'Analysis situs combinatoire qui m'a été très utile[42].

Avant la fin de mon séjour à Paris, Lebesgue me conseilla de rédiger une Note qu'il fit publier dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences[43]. J'avais alors un plan bien établi pour une thèse. Il s'agissait d'en achever la rédaction, ce qui était un gros travail et me prit beaucoup de temps, d'autant plus que j'avais dès septembre 1928 une lourde charge d'enseignement secondaire à Lausanne. [55, p. 24]

FIG. 9. L'immeuble 35 bis rue Saint-Sabin, qu'habitait Lebesgue, dans le XI^{e} arrondissement de Paris, près du métro Bréguet - Sabin

7. Élie Cartan et l'Analysis situs

Pendant ce temps, Élie Cartan, qui s'était documenté, comme nous en avons vu des preuves, s'était mis à la topologie. Pour résumer la situation nous utilisons

42 Il s'agit de [70].

43 Il s'agit de la note [49], qui fut présentée à l'Académie des sciences par Édouard Goursat le 12 mars 1928. Hermann Weyl avait montré (dans l'article [70]) que la forme d'intersection d'une variété de dimension 4 est un invariant topologique. De Rham signala trois variétés avec les mêmes nombres de Betti et des formes non isomorphes (sommes connexes de deux plans projectifs complexes orientés différemment ou pas, produit de deux sphères) et proposa des invariants de torsion pour les variétés de dimension $4k-1$. Voir aussi la note 52.

l'article [54] de de Rham déjà cité dans les promenades. À cette période, grâce aux efforts conjugués d'Hermann Weyl et d'Élie Cartan, l'étude (jusque-là plutôt locale) des groupes de Lie se mit à soulever des problèmes globaux. Élie Cartan avait, depuis longtemps, étudié les représentations linéaires des groupes.

Hermann Weyl chercha à prolonger ces travaux pour démontrer un résultat de complète réductibilité dans le cas général d'un groupe de Lie semi-simple.

Le cas compact fut traité facilement par un désormais classique procédé de moyenne, qui permit à Hermann Weyl de montrer que la représentation était unitaire. Pour le cas général, et grâce à un théorème de Cartan, on sait que la représentation adjointe d'une forme réelle du groupe est orthogonale. Il reste à montrer que le groupe réel est compact et donc, comme c'est un revêtement du groupe adjoint, il suffit de démontrer que son groupe fondamental est fini. Ce que fit Hermann Weyl dans une série d'articles publiés par *Math. Z.* en 1925–26 (et reproduits dans [71, pp. 543–647]) — et ce résultat fut une des sources des recherches d'Élie Cartan en topologie dans les années 1920.

Promenade

Georges de Rham — En utilisant sa théorie des espaces riemanniens symétriques, il [Cartan] démontre que tout groupe de Lie simplement connexe est homéomorphe au produit d'un sous-groupe compact maximal par un espace euclidien [...] Il en résulte que, pratiquement, les propriétés topologiques d'un groupe se ramènent à celles d'un sous-groupe compact maximal. Pour un groupe compact semi-simple G, outre le théorème de Weyl affirmant que $\pi_1(G)$ est fini, Cartan montre que $\pi_2(G)$, le second groupe d'homotopie, se réduit à zéro. Il en déduit que les deux premiers nombres de Betti de G sont nuls, et remarque que, par contre, le $3^{\text{ème}}$ ne peut pas être nul. [54, p. 644]

8. Élie Cartan et la topologie des groupes de Lie

Ici nous arrivons à l'année 1928 et à la note [20]. Le résultat était nouveau, frappant et spectaculaire : on en déduit par exemple que les sphères de dimensions plus grandes que 3 ne peuvent pas être des groupes de Lie[44]. Mais comment Cartan démontrait-il donc que ce troisième nombre de Betti n'est pas nul ?

> *Il y en a toujours une [intégrale] du troisième ordre*. Si l'on choisit la base infinitésimale du groupe, ce qui est toujours possible[,] de manière que les constantes de structure c_{ijk} forment un trivecteur, cette intégrale est $\iiint \sum^{i,j,k} c_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k$. Étendue à la variété à trois dimensions représentative d'un sous-groupe simple à trois paramètres de G, elle a une valeur différente de zéro. *Le troisième nombre de Betti de l'espace d'un groupe semi-simple clos n'est donc jamais nul.* [20, p. 197]

Autrement dit : il y a une 3-forme différentielle sur le groupe dont l'intégrale sur les sous-groupes de dimension 3 n'est pas nulle, donc il y a des classes d'homologie de dimension 3 non triviales. Ceci peut sembler aujourd'hui un raisonnement évident

[44] Quelques années plus tard, en 1936, André Weil par exemple considérait Élie Cartan comme un spécialiste de la topologie combinatoire et en particulier des questions liées aux sphères, comme le montre une lettre qu'il lui adressa et que l'on trouve dans [13, p. 474].

et une simple application de la formule de Stokes. Ce ne l'était pas à l'époque. Bien sûr la définition des nombres de Betti par Betti (voire par Riemann) vient des périodes des intégrales abéliennes sur les courbes. Nous allons voir que la référence aux courbes algébriques est explicite dans la note d'Élie Cartan. Bien sûr, il y a un paragraphe (plutôt sybillin) sur ce sujet dans l'*Analysis situs* de Poincaré (le § 7). Mais dire que l'idée que l'on peut étudier la topologie algébrique via les formes différentielles est implicite dans Poincaré[45] semble très exagéré. En effet, d'une part la différentielle extérieure n'apparaît pas vraiment (en tout cas pas explicitement), mais surtout il n'y a ni mention ni utilisation (ni implicitement ni explicitement) de quoi que ce soit qui ressemble à la formule de Stokes. Au moment où l'on attend celle-ci, c'est une déformation à un paramètre d'un cycle qui est invoquée. Il est difficile d'admettre que Poincaré a raté ceci[46], mais c'est pourtant le cas.

Mais revenons à Élie Cartan. Il semble donc bien que le résultat que nous venons de mentionner soit la toute première application hors géométrie algébrique de ces idées. Ici, Élie Cartan mobilisa, au service de la démonstration d'un résultat global, sa connaissance, à la fois de la structure des groupes et des formes différentielles.

Promenade

Georges de Rham — Déjà dans ses travaux d'avant 1900, E. Cartan avait introduit et utilisé ce qu'il a appelé ensuite les formes différentielles extérieures. Dans son livre de 1922, *Leçons sur les invariants intégraux*, il en expose systématiquement la théorie. Il définit en particulier l'opération appelée d'abord dérivée extérieure, puis, suivant Kaehler, *différentielle extérieure*[47], qui fait passer d'une forme de degré p à une forme de degré $p+1$. Il démontre que la différentielle extérieure seconde est toujours nulle[48], et que réciproquement, si la différentielle extérieure d'une forme de degré p est nulle, dans $\mathbf{R}^n$, cette forme est la différentielle[49] d'une forme de degré $p-1$. [54, p. 644]

Il était alors naturel — mais personne n'y avait pensé avant — de considérer des homologies entre formes. [54, p. 645]

À cette époque, travaillant en vue d'une thèse sur l'Analysis situs, j'avais étudié les mémoires de Poincaré, et pendant un séjour d'études à Paris, où j'ai bénéficié des précieux conseils et encouragements d'Henri Lebesgue, je m'étais familiarisé avec le calcul différentiel extérieur en suivant un cours d'Élie Cartan et en lisant ses Leçons sur les invariants intégraux. Les rares mathématiciens qui s'occupaient alors de topologie ne connaissaient guère le calcul différentiel extérieur. [54, p. 645]

---

45 Comme par exemple dans [30].

46 Si difficile que même Georges de Rham, qui dit très nettement dans [54, p. 646] que Poincaré n'a pas introduit la différentielle extérieure, même sous un autre nom, et qu'il n'a pas mentionné la formule de Stokes, avait renvoyé à l'Analysis situs de Poincaré à propos de la formule de Stokes dans son livre [52, Note 1, p. 34] paru vingt ans plus tôt.

47 Élie Cartan avait appelé dérivée extérieure, et noté ω' la dérivée de la forme ω. La notation d est due à Erich Kähler [35], peu après le moment dont il est question ici.

48 Le célèbre $d \circ d = 0$, qui est trivial, comme dit de Rham lui-même [54, p. 646], mais qui crée la cohomologie.

49 Ce théorème d'Élie Cartan a été doté par lui du nom de Poincaré. Comme l'explique de Rham [54, p. 646], il n'avait rien à voir avec Poincaré... mais se trouvait dans Volterra [63] — sans qu'Élie Cartan le sût.

[...] je me suis rappelé le cours que vous [Élie Cartan] avez donné en 1926–27 sur les espaces de Riemann. C'est là que je me suis initié aux formes différentielles extérieures, et comme j'étudiais en même temps la théorie topologique des intersections, l'analogie entre les deux théories devait inévitablement me frapper[50].

À côté du Collège où j'enseignais [à Lausanne], se trouvait la petite Bibliothèque de l'École d'ingénieurs, où je pouvais jeter un coup d'œil sur les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Un jour, *ce fut la chance de ma vie*[51], je tombai sur la Note d'Élie Cartan, intitulée « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », signalant quelques problèmes d'Analysis situs, dont il montrait la grande importance, mais qui n'étaient pas résolus. Cette Note mit mon cerveau en ébullition et le lendemain j'étais sûr d'avoir la solution. Il s'agissait de démontrer deux théorèmes qui permettent de définir les nombres de Betti à l'aide des formes différentielles. [55, p. 25]

9. Élie Cartan et le théorème de de Rham

Il y avait de quoi mettre un cerveau en ébullition : la note [20] ne s'arrêtait pas, en effet, à la non nullité du troisième nombre de Betti du groupe. Élie Cartan n'était certes pas un débutant, il avait à son actif de nombreux résultats de géométrie. Il était âgé, en 1928, de cinquante-neuf ans, et il eut une idée remarquable. Souhaitant compléter son énoncé sur la non nullité du troisième nombre de Betti par un énoncé sur la valeur de ce nombre, il remarqua qu'il ne pourrait le démontrer avec certitude...

[...] que si l'on avait démontré le théorème suivant.

Théorème A. *Si une intégrale de différentielle exacte d'ordre p, définie dans l'espace clos $\mathcal{E}$, est nulle pour tout domaine d'intégration fermé à p dimensions, elle résulte, par application de la formule de Stokes généralisée, d'une intégrale multiple d'ordre $p-1$ (définie et régulière dans tout l'espace).* [20, p. 197]

En d'autres termes, une forme fermée (attention, « exacte » dans Cartan est ce que nous appelons aujourd'hui fermée) dont les intégrales sur tous les cycles sont nulles est exacte. Mais ce n'est pas tout.

D'autre part, pour qu'on pût déduire du nombre des intégrales multiples considérées des conclusions précises sur les nombres de Betti de l'espace, il faudrait être également certain du théorème suivant, vérifié dans la théorie des courbes algébriques.

Théorème B. *Si l'on considère h variétés fermées à p dimensions entre lesquelles n'existe aucune homologie, il existe h intégrales de différentielles exactes telles que le tableau carré des valeurs de ces intégrales étendues aux h variétés ait un déterminant différent de zéro.* [20, p. 198]

[50] Lettre de Georges de Rham à Élie Cartan, 16 avril 1946 (fonds 38J, archives de l'Académie des sciences). Les archives de Georges de Rham contiennent des notes prises à deux cours d'Élie Cartan, sur les invariants intégraux et sur les espaces de Riemann, me signale Manuel Ojanguren.
[51] Souligné par de Rham.

En termes modernes, l'intégration établit une dualité entre les formes fermées et les sous-variétés fermées. En termes encore plus anachroniques, c'est le fait que l'on peut définir des groupes de (co-)homologie à partir des formes différentielles, et que la forme bilinéaire

$$H_k(\mathcal{E}) \times H^k(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (V, \omega) \longmapsto \int_V \omega$$

que la formule de Stokes définit est non dégénérée. De ses conjectures, Cartan déduit par exemple les nombres de Betti (le polynôme de Poincaré) du groupe unitaire $U(n)$. Rappelons que ce n'était pas une évidence, à un moment où même les nombres de Betti de l'espace projectif complexe n'étaient pas dans les têtes de tous les mathématiciens.

Promenade

Georges de Rham — Aux yeux de Lebesgue, les théorèmes énoncés par E. Cartan dans sa Note de 1928 sur les nombres de Betti présentaient le même degré d'évidence que le théorème de Jordan sur les courbes fermées planes, mais tout autant que ce dernier, ils exigeaient une démonstration. [55, p. 25]

Au sujet des conjectures, il [Élie Cartan] avait consulté Lebesgue qui lui avait assuré qu'elles n'étaient nullement démontrées, bien qu'elles puissent présenter une certaine évidence analogue au théorème de Jordan sur les courbes planes. [54, p. 647]

Peu après, j'écrivis à Lebesgue en lui indiquant l'esquisse de ma démonstration. Il me répondit qu'avant de publier, il fallait être bien sûr de ma démonstration, ajoutant : « ... or vous vous basez sur des théorèmes de Poincaré mal démontrés ou pas démontrés du tout, comme : toute variété admet une subdivision polyédrale. »

En fait, j'admettais l'existence d'une subdivision polyédrale, sans laquelle, à cette époque, on ne savait pas démontrer le théorème de dualité de Poincaré. Je lui répondis que j'allais encore tout rédiger complètement pour en faire un nouveau chapitre de ma thèse. Quelques mois plus tard, je lui ai envoyé la Note « Intégrales multiples et Analysis situs » qui fut, grâce à lui, publiée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences[52].

Mais il me fallut encore plusieurs mois pour achever la rédaction de ma thèse. [55, p. 25]

Permettez-moi de vous [Élie Cartan] adresser mes vifs remerciements pour l'envoi de vos mémoires. Comme ces questions m'intéressent beaucoup, je suis particulièrement content de pouvoir les étudier. Mes notes sont développées dans un travail assez étendu, presque achevé, qui fera, j'espère, une thèse. J'y résous un autre problème sur les intégrales, celui de déterminer les périodes d'une intégrale de différentielle exacte qui est égale au produit de deux autres, connaissant les périodes des dernières et un schéma de la variété. On est conduit à des invariants

[52] Il s'agit de la note [50], dans laquelle de Rham annonça deux théorèmes, équivalents aux théorèmes A et B de Cartan cités ci-dessus. C'est peut-être grâce à Lebesgue que la note fut publiée, mais c'est Jacques Hadamard qui la présenta à l'Académie des sciences, le 24 juin 1929. Voir aussi la note 43. S'il n'est pas certain que Lebesgue a assisté à la séance de l'Académie des sciences le 24 juin 1929, il semble bien qu'il avait signé la liste d'émargement le 12 mars 1928 : faire présenter la note par un autre académicien, Goursat ou Hadamard, devait être un point de déontologie pour lui.

topologiques distincts des nombres de Betti, et il semble que votre méthode permet de les déterminer directement, aussi facilement que les nombres de Betti[53].

Enfin, aux vacances de Pâques 1930, je lui [Lebesgue] apportais mon manuscrit, écrit à la main de ma plus belle écriture ! [55, p. 25]

10. Élie Cartan lit la thèse de de Rham

Lebesgue écrit à Cartan, le 14 avril 1930. Lebesgue habitait, nous l'avons dit, à Paris, rue Saint-Sabin, mais Élie Cartan habitait, lui, au Chesnay, près de Versailles. Il était donc naturel qu'ils s'écrivissent.

> Lundi[54]
>
> Mon cher Cartan,
>
> M. de Rham qui, comme vous vous rappelez, s'occupe d'*Analysis situs*, me remet le manuscrit de sa Thèse dont le dernier chapitre est consacré aux théorèmes que vous avez énoncés sur les intégrales multiples. Accepteriez-vous d'examiner cette thèse ? Le manuscrit très soigné est de lecture facile matériellement et la compréhension facilitée par le fait que M. de Rham a fait un exposé complet n'obligeant pas à se reporter aux mémoires (en partie faux, en partie rectifiés, en partie contradictoires) de Poincaré.
>
> Si oui et si vous n'êtes pas en ce moment parti en vacances voulez-vous donner rendez-vous à M. de Rham (50 rue des Écoles, Paris V)[55] qui reste encore à Paris jusque samedi sans doute. Il irait vous porter son manuscrit et vous pourriez l'interroger.
>
> Cordialement à vous
>
> H. Lebesgue

Élie Cartan nota sur la lettre : « jeudi 17 à 14h30 ».

Promenade

Georges de Rham — À sa demande, Élie Cartan, avec qui je n'avais pas encore eu de contact personnel, me convoqua chez lui à Versailles[56]. [55, p. 25] Au cours de mon premier entretien avec Élie Cartan, à qui Lebesgue m'avait envoyé porter le manuscrit de ma thèse, il m'a dit qu'il avait été amené à tout cela par une idée qu'il qualifiait de baroque : il avait voulu montrer que la sphère est simplement connexe *en partant du groupe*. [54, p. 647]

---

53 Lettre de Georges de Rham à Élie Cartan, 5 février 1930.

54 C'est grâce au cachet du bureau de poste de la rue Cujas où elle a été postée que nous connaissons la date de cette carte-lettre.

55 Le numéro 50 de la rue des Écoles se trouve exactement en face de l'entrée du Collège de France. Nous ignorons si Georges de Rham vivait à cette adresse lors de ses séjours parisiens de 1926–28. Si c'était le cas, il devait avoir le temps de réfléchir à ce que Lebesgue lui avait raconté lorsqu'il revenait de la rue Saint-Sabin à la rue des Écoles...

À ceux qui savent que Georges de Rham avait d'autres cordes à son arc que les mathématiques, signalons que le magasin *le Vieux campeur*, qui occupe les rez-de-chaussée de ce pâté de maisons n'a été fondé qu'en 1941... et qu'il ne fut sans doute jamais le fournisseur d'un alpiniste suisse aussi renommé que le fut de Rham.

56 Au Chesnay, nous l'avons dit.

FIG. 10. 50 rue des Écoles

Il voulut bien accepter d'examiner mon travail et fut ensuite à la fois rapporteur et président du jury de ma thèse[57]. Après qu'elle ait été publiée dans le Journal de mathématiques pures et appliquées[58], la soutenance eut lieu en juin 1931. [55, p. 25]

11. Épilogue

Georges de Rham soutint donc sa thèse en juin 1931. Élie Cartan avait été élu membre de l'Académie des sciences, le 9 mars, à l'âge de 61 ans — plutôt tard[59].

Si le carton contenant le rapport sur la thèse de de Rham semble avoir disparu des Archives Nationales [43], le rapport d'Élie Cartan n'a pas été complètement perdu puisqu'il est reproduit dans les Œuvres de de Rham [56, pp. 87–89] à la suite de sa thèse. Laissons donc la parole à Élie Cartan :

> Le travail présenté comme thèse par M. de Rham apporte des contributions importantes à l'Analysis situs combinatoire et en particulier à l'Analysis situs des variétés closes à n dimensions. D'une part il présente d'une manière nouvelle les notions et théorèmes classiques, ce qui permet de simplifier notablement la théorie des intersections et des coefficients d'enlacement et d'étendre la première théorie aux variétés unilatères, ce qui n'avait pas été fait jusqu'ici ; il contient aussi toute une série de théorèmes nouveaux sur l'enlacement des chaînes d'ordre fini, théorèmes qui fournissent de nouveaux invariants topologiques. D'autre part, il étudie d'une manière

[57] Le jury de la thèse de Georges de Rham était constitué de Gaston Julia, Paul Montel et Élie Cartan. Deux lettres de de Rham à Cartan, datées des 22 et 23 septembre 1930, sont consacrées à la formation de ce jury. Lebesgue, qui n'était pas professeur à la Sorbonne, ne pouvait pas en faire partie. C'est à lui que de Rham dédia sa thèse.

[58] C'est l'article [51].

[59] La moyenne d'âge (lors de l'élection) des dix élus de la section de géométrie entre 1900 et 1942 est de 50 ans.

complète les relations qui existent entre les nombres de Betti d'une variété close et les intégrales de différentielle exacte existant à l'intérieur de cette variété ; les théorèmes fondamentaux à cet égard avaient été énoncés d'une manière précise par M. Cartan en 1928 ; M. de Rham en a ajouté d'autres mettant en évidence le parallélisme qui existe entre la théorie des intersections et la multiplication extérieure des éléments d'intégrales de différentielle exacte existant dans la variété. Tous ces théorèmes semblent susceptibles d'applications nombreuses et importantes.

Remerciements à

Arnaud Chéritat, qui a adapté sa figure du collier d'Antoine à ma contrainte « noir-et-blanc » [60].

Manuel Ojanguren pour l'information sur les archives de de Rham.

Claude Sabbah qui m'a prêté ses notes du pénultième cours d'Henri Cartan (en 1973–74).

12. Références

[1] J. W. Alexander – « Note on two three dimensional manifolds with the same group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **20** (1919), p. 339–342.

[2] ———, « On the subdivision of 3-space by a polyhedron », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 6–8.

[3] ———, « An example of a simple connected surface bounding a region which is not simply connected », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 8–10.

[4] ———, « Remarks on a point set constructed by Antoine », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 10–12.

[5] ———, « New topological invariants expressible as tensors », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 99–101.

[6] ———, « On certain new topological invariants of a manifold », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 101–103.

[7] ———, « Topological invariants of manifolds », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **10** (1924), p. 493–494.

[8] ———, « On the intersection invariants of a manifold », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **11** (1925), p. 143–146.

[9] ———, « Note on a theorem by H. Kneser », *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **11** (1925), p. 250–251.

[10] P. Alexandroff & H. Hopf – *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[11] M. Audin – *Torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, 2004, Revised and enlarged edition.

[12] ———, *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après*, Springer, 2009.

[13] ———, *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.

[14] ———, *Fatou, Julia, Montel, the Great Prize of Mathematical sciences of 1918, and Beyond*, Lecture Notes in Mathematics, 2014, Springer, 2011.

[15] ———, « Une lettre de Lebesgue à Élie Cartan », (2011), `http://arxiv.org/abs/1109.0716`.

[16] ———, « Le séminaire Julia », (2013), en préparation.

[17] L. Brouwer – « Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. », *Math. Ann.* **70** (1910), p. 161–165.

[60] Toutes les autres figures et les photographies (prises à Paris, bien sûr) me sont dues.

[18] ———, « On looping coefficients », *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings* **15** (1912), p. 113–122.
[19] É. Cartan – *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
[20] ———, « Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos », *C. R. Acad. Sci. Paris* **187** (1928), p. 196–198.
[21] ———, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
[22] ———, « Les espaces riemanniens symétriques », Verh. Internat. Math.-Kongr. 1, 152-161 (1932), 1932.
[23] S. Chatterji & M. Ojanguren – « A glimpse on the de Rham era », in *Schweizerische Mathematische Gesellschaft 1910*, European math. Soc., 2010.
[24] A. Chéritat – « Le collier d'Antoine », *Images des Mathématiques* (2009), En ligne `http://images.math.cnrs.fr/Le-collier-d-Antoine.html`.
[25] D. van Dalen – *Correspondence of L.E.J. Brouwet*, Springer, 2011.
[26] M. Dehn & P. Heegaard – « Analysis situs », in *Enzyklop. d. math. Wissensch.* III_1, 1907, p. 153–220.
[27] L. Félix – *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1974.
[28] H. Gispert – « Sur les fondements de l'analyse en France », *Arch. Hist. Exact Sci.* **28** (1983), p. 37–106.
[29] J. Hadamard – *Œuvres, volume 2*, CNRS, Paris, 1968.
[30] K. Hess – « A history of rational homotopy theory », *in* [33] (1999), p. 757–796.
[31] H. Hopf – « Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. », *Math. Ann.* **104** (1931), p. 637–665.
[32] W. Hurewicz & H. Wallman – *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, v. 4, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
[33] I. James (éd.) – *History of topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.
[34] C. Jordan – *Analyse*, Cours de l'École polytechnique, 1893, Deuxième édition.
[35] E. Kähler – « Über die Integrale algebraischer Differentialgleichungen », *Abhandlungen Hamburg* **7** (1930), p. 355–385.
[36] B. Kerékjártó – *Vorlesungen über Topologie I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, VIII, Springer, Berlin, 1923.
[37] H. Lebesgue – « Humbert et Jordan, Roberval et Ramus Les professeurs de mathématiques du Collège de France », *L'enseignement Math. (2)* **3** (1957), p. 188–215, Leçon d'ouverture professée le 7 janvier 1922.
[38] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, L'enseignement mathématique, Genève, 1972.
[39] ———, *Œuvres scientifiques, Volume IV*, L'enseignement mathématique, Genève, 1973.
[40] ———, « Lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **12** (1991), p. 1–506.
[41] ———, *Les lendemains de l'intégrale, lettres d'Henri Lebesgue à Émile Borel*, Vuibert, Paris, 2004.
[42] S. Lefschetz – *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
[43] J. Leloup – « L'entre-deux guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France », Thèse, Paris, 2009.
[44] S. Mandelbrojt & L. Schwartz – « Jacques Hadamard (1865–1963) », *Bull. Amer. Math. Soc.* **71** (1965), p. 107–129.
[45] V. Maz'ya & T. Shaposhnikova – *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP-Sciences, Les Ulis, 2005, traduit de l'anglais par Gérard Tronel.
[46] H. Poincaré – « Sur les périodes des intégrales doubles », *J. Math. Pures Appl. (6)* **2** (1906), p. 135–189.
[47] ———, *Œuvres, Volume VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
[48] C.-F. Ramuz – *Paris, Notes d'un Vaudois*, Fondation C.F. Ramuz, Éditions de l'Aire, Lausanne, 1978.
[49] G. de Rham – « Sur la dualité en analysis situs », *C. R. Acad. Sci. Paris* **186** (1928), p. 670–672.

[50] ———, « Intégrales multiples et analysis situs », *C. R. Acad. Sci. Paris* **188** (1929), p. 1651–1652.
[51] ———, « Sur l'analysis situs des variétés à *n* dimensions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **10** (1931), p. 115–200.
[52] ———, *Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques*, Actualités Sci. Ind., no. 1222 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago III, Hermann et Cie, Paris, 1955.
[53] ———, *Lectures on introduction to algebraic topology*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969, Notes by V. J. Lal, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 44.
[54] ———, « L'Œuvre d'Élie Cartan et la topologie », in *Élie Cartan, 1869–1951 (hommage de l'Acad. République Socialiste de Roumanie à l'occasion du centenaire de sa naissance)*, Editura Acad. R.S.R., Bucharest, 1975, p. 11–20.
[55] ———, « Quelques souvenirs des années 1925-1950 », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **1** (1980), p. 19–36.
[56] ———, *Œuvres mathématiques*, L'Enseignement mathématique, Genève, 1981.
[57] L. Schwartz – *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.
[58] H. Seifert & W. Threlfall – *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1934.
[59] J. Stillwell – « Max Dehn », *in* [33] (1999), p. 965–978.
[60] J. Tannery (éd.) – *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. T. 2*, Hermann, Paris, 1910.
[61] H. Tietze – « Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten », *Monatsh. für Math. u. Phys.* **19** (1908), p. 1–118.
[62] O. Veblen – *The Cambridge Colloquium, 1916. Part II : O. Veblen. Analysis Situs. (Amer. Math. Soc., Colloquium Lectures, vol. V.).*, Amer. Math. Soc., New York, 1922.
[63] V. Volterra – « Delle variabili complesse negli iperspazi », *Atti della Reale Academia dei Lincei (4)* **5** (1889), p. 158–165 et 291–299.
[64] B. van der Waerden – « Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 337–362.
[65] ———, *Moderne Algebra*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1930.
[66] ———, *Moderne Algebra. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Bd. II*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Springer, 1931.
[67] A. Weil – « Biographie de Jean Delsarte », in *Œuvres complètes de Jean Delsarte*, C.N.R.S., 1971.
[68] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, Springer, 1979.
[69] ———, *Souvenirs d'apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Birkhäuser, Basel, 1991.
[70] H. Weyl – « Análysis situs combinatorio », (1924), reproduit dans les Œuvres complètes.
[71] ———, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1968.
[72] H. Whitney – « Moscow 1935 : topology moving toward America », in *A century of mathematics in America, Part I*, Hist. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, p. 97–117.

La « quatrième géométrie » de Poincaré

Philippe Nabonnand[1]

Introduction

Henri Poincaré est souvent cité dans les travaux relatifs à l'histoire des géométries non-euclidiennes. Tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques du 19e siècle savent qu'il a proposé dans son mémoire sur les groupes fuchsiens un modèle conforme de la géométrie hyperbolique grâce auquel il représente l'action de ces groupes[2] [Poincaré 1884]. Tous ceux qui s'intéressent à la philosophie des sciences ont lu le troisième chapitre de *La Science et l'hypothèse* [Poincaré 1902] dans lequel il explique à un public de profanes éclairés sa conception de la géométrie et défend un point de vue conventionnaliste sur la question du statut des axiomes de la géométrie[3]. Dans ce chapitre, qui est la reprise d'un article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* une dizaine d'années auparavant[4], Poincaré évoque d'autres géométries que les non-euclidiennes ; en particulier, outre les géométries à courbure variable de Riemann et les géométries non-archimédiennes[5] qu'il élimine du champ des applications, il considère une quatrième géométrie à laquelle, selon lui, on doit accorder un statut similaire à celui des géométries euclidienne, elliptique et hyperbolique.

Cette quatrième géométrie aux propriétés surprenantes n'a pas donné lieu à l'époque à des commentaires particuliers que ce soit de la part des mathématiciens ou des philosophes. On peut néanmoins citer une allusion dans un article d'un économiste canadien, défenseur de la théorie du libre échangisme :

> *« Les principes du libre-échange n'ont pas de défenseurs au Canada. Les manufacturiers leur sont énergiquement hostiles. Les marchands et les banquiers n'y ajoutent pas foi, et les classes agricoles ont toujours soutenu les principes protectionnistes.*
>
> *Tant pis pour eux. Qu'est-ce que cela prouve ?*
>
> *Il existe une quatrième géométrie, aussi cohérente que celle d'Euclide, de Riemann ou de Lobatchewsky. Voici un de ses théorèmes : une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même. Le bon sens lui est « énergiquement hostile », les maçons et les charcutiers « n'y ajoutent pas foi », et les élèves de nos lycées « ont toujours soutenu des principes » contraires.*
>
> *Qu'est-ce que cela prouve ?*
>
> *Que ce groupe-ci aurait besoin d'apprendre la géométrie, et, ce groupe-là d'apprendre l'économie politique. – Pas autre chose. [Macquart 1904, 66] »*

[1] Laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie – Archives Poincaré (UMR 7117 du CNRS) & MSH de Lorraine (USR 3261 du CNRS) – Université de Lorraine.

[2] Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret du groupe des isométries du plan hyperbolique (que l'on peut identifier à $PSL(2, \mathbb{R})$).

[3] Sur cette question, on peut lire [Zahar 2000] ou [Nabonnand 2010].

[4] [Poincaré 1891].

[5] Dans l'article original, Poincaré ne parle pas des géométries non-archimédiennes. Il n'évoque celles-ci que dans le texte remanié qui constitue le chapitre 3 de *La Science et l'hypothèse*.

Poincaré, lui-même, n'insiste pas particulièrement sur ce qui semble être néanmoins une découverte qu'il avait exposée dans un article publié en 1887 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* consacré aux hypothèses fondamentales de la géométrie[6].

Dans le premier paragraphe, nous expliciterons le rôle rhétorique joué par la quatrième géométrie dans le second chapitre de *La Science et l'hypothèse*, puis, nous reviendrons à l'article antérieur de Poincaré dans lequel apparaît la quatrième géométrie comme un exemple de géométrie quadratique. Puis nous nous demanderons pourquoi Poincaré ne découvre qu'une quatrième géométrie alors qu'il aurait pu dans le même geste mathématique en découvrir une cinquième puisque les géométries quadratiques sont modelées sur les quadriques.

Le troisième chapitre de *La Science et l'hypothèse*

Le chapitre intitulé « Les géométries non-euclidiennes » a pour objectif de défendre l'idée que les axiomes de la géométrie ne sont ni des vérités synthétiques a priori, ni des vérités expérimentales mais des conventions, l'expérience nous guidant dans le choix des conventions les plus commodes. Il est divisé en deux parties. Dans la première, Poincaré introduit les géométries non-euclidiennes à partir de la considération de l'axiome des parallèles, ce qui l'amène à présenter la géométrie hyperbolique (appelée géométrie de Lobatchevsky) et la géométrie sphérique (appelée géométrie de Riemann) de l'espace. Dans la seconde, il tire les conséquences philosophiques de sa présentation des géométries non-euclidiennes.

Le style adopté par Poincaré n'est pas mathématique mais exige néanmoins du lecteur sinon une certaine culture mathématique, au moins une habitude à manier les concepts géométriques de base. Concernant les géométries en dimension deux, Poincaré évoque d'une part le modèle de Beltrami et d'autre part « une sorte d'opposition entre la géométrie de Riemann et celle de Lobatchevsky », la première étant réalisée sur la sphère, la seconde en partie sur la pseudo-sphère. Pour présenter ces géométries en dimension deux, il utilise la fiction « d'êtres dénués d'épaisseur » et dotés des mêmes capacités cognitives que les êtres humains. En l'absence d'autres expériences, selon que ces êtres fictifs vivent sur un plan, une sphère ou une pseudo-sphère, Poincaré conclut qu'« ils n'attribueront certainement à l'espace que deux dimensions » et seront conduits à la géométrie euclidienne dans le premier cas, à la géométrie sphérique dans le deuxième et à la géométrie hyperbolique dans le troisième. Ce raisonnement justifie selon Poincaré que l'expérience joue un rôle dans le choix de la géométrie à laquelle nous rapportons notre expérience spatiale.

Dans la mesure où il est possible d'exhiber des modèles et que l'on peut imaginer comment des êtres doués des mêmes capacités cognitives que les êtres humains pourraient être amenés à utiliser, selon leurs expériences, ces géométries pour rendre compte de leur perception spatiale, Poincaré considère qu'« ainsi s'évanouit l'objection[7] en ce qui concerne les géométries à deux dimensions[8] ». Pour justifier les géométries non-euclidiennes en dimensions 3, Poincaré se refuse à généraliser les

[6] [Poincaré 1887].

[7] Il s'agit de l'objection philosophique selon laquelle les géométries non-euclidiennes ne sont pas applicables à des questions de spatialité du fait de leur nature (purement logique).

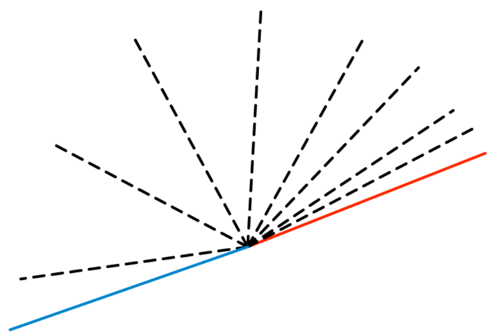
[8] [Poincaré 1902, 68].

raisonnements précédents en considérant des sphères ou des pseudo-sphères en dimension 4 et préfère une justification intrinsèque à la dimension 3. À cette fin, il propose son propre modèle de la géométrie hyperbolique ; il construit « une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même :

Espace.............................	Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental
Plan................................	Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental
Droite..............................	Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental
Sphère.............................	Sphère
Cercle..............................	Cercle
Angle...............................	Angle
Distance de deux points....	Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement, etc.[9] »

Dans ces conditions, tout théorème de géométrie hyperbolique se traduit en un théorème de géométrie euclidienne et réciproquement. Poincaré rappelle que Felix Klein et lui-même ont utilisé la géométrie hyperbolique dans leurs travaux mathématiques ce qui permet à Poincaré de souligner que la géométrie hyperbolique étant « susceptible d'interprétations concrètes, cesse d'être un vain exercice de logique et peut recevoir des applications » [10].

Avant de passer à l'objet philosophique de ce chapitre, Poincaré explique que les géomètres admettent implicitement des axiomes qu'il apparaît inutile d'énoncer de fait de leur évidence. Ainsi, souvent des définitions comme celle de l'égalité des figures renferment simultanément une définition et un axiome (dans le cas de l'égalité des figures, un axiome qui affirme la possibilité du mouvement d'une figure invariable). Un axiome implicitement admis dans les trois géométries euclidienne et non-euclidiennes est celui selon lequel on peut appliquer une droite sur elle-même par un renversement, et qui lui « semble mériter quelque attention, parce qu'en l'abandonnant, on peut construire une quatrième géométrie aussi cohérente que celles d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann[11] ».



[9] [Poincaré 1902, 68].
[10] [Poincaré 1902, 69].
[11] [Poincaré 1902, 72].

Poincaré signale que les théorèmes de cette quatrième géométrie sont surprenants ; il donne l'exemple de droites qui sont orthogonales à elle-même. Cependant, insiste-t-il, cette géométrie est non contradictoire.

En exhibant cette géométrie, Poincaré montre qu'en restant dans le cadre des géométries qui admettent « le mouvement de figures invariables » – autrement dit, des géométries définies par un groupe de transformations – des géométries étranges peuvent apparaître. Celles de Lobatchevsky ou de Riemann en deviennent de ce fait moins extraordinaires et leur utilisation pour décrire des phénomènes physiques ou astronomiques plus envisageable.

Poincaré poursuit en faisant référence à la classification des groupes de transformations conservant un invariant quadratique par Lie[12]. Il en conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de géométries à examiner dès que l'on admet la possibilité du mouvement de figures invariantes :

« *Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :*

(1) *l'espace a n dimensions ;*

(2) *le mouvement d'une figure invariable est possible ;*

(3) *il faut p conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace. Le nombre de géométries compatibles avec ces prémisses sera limité*[13]. »

Puis, en excluant les géométries à courbure variable et les non-archimédiennes[14], Poincaré arrive finalement à ne considérer comme véritablement possible pour les applications à l'espace que les trois géométries euclidienne, hyperbolique et sphérique.

Néanmoins, la quatrième géométrie, aux théorèmes aussi étranges par rapport aux autres géométries présentées par Poincaré, est une géométrie obtenue à partir des mêmes considérations générales que ces dernières ; que ce soit en discutant des axiomes ou comme Poincaré le fait dans son article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*[15], en la présentant comme une géométrie modelée sur une quadrique, la quatrième géométrie apparaît aux yeux de Poincaré comme structurellement très proche des géométries euclidienne et non-euclidiennes.

Les géométries quadratiques

Quelques années auparavant, en 1887, Poincaré avait consacré un article aux hypothèses fondamentales de la géométrie. L'intention de ce travail était d'« énoncer toutes les hypothèses nécessaires et [de] n'énoncer que celles-là » de la géométrie plane.

Le problème est décomposé en deux questions : 1) déterminer les hypothèses communes à toutes les géométries quadratiques (les géométries que l'on peut modeler sur les quadriques), puis 2) caractériser la géométrie euclidienne parmi les

[12] Voir [Nabonnand 2010].

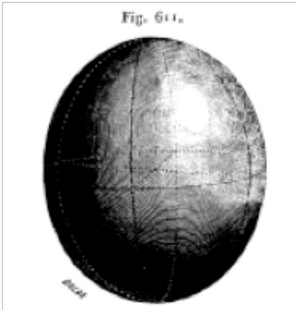
[13] [Poincaré 1891, 772-773] & [Poincaré 1902, 72-73].

[14] Poincaré exclut ces géométries pour rendre compte de notre expérience car il considère que nous appréhendons la spatialité à partir de notre capacité à former des groupes continus de transformations. Ainsi, selon Poincaré, les géométries à courbure variable « ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celle d'Euclide ».

[15] [Poincaré 1887].

géométries quadratiques. La réponse à la première question est une application des méthodes de Lie pour classer les groupes de transformations géométriques.

Pour identifier les géométries quadratiques, Poincaré part du constat que la géométrie de Riemann (dans laquelle par un point donné, il ne passe aucune parallèle à une droite donnée) « est susceptible d'une interprétation très simple », à savoir la géométrie sphérique, « pourvu que l'on convienne de donner le nom de *droites* aux grands cercles de la sphère » [16]. Il se propose de généraliser cette méthode d'interprétation aux géométries euclidienne et hyperbolique. Pour cela, il suffit de considérer la géométrie des sections planes des surfaces du second ordre (quadriques) en convenant « de donner le nom de *droites* aux sections planes diamétrales[17] de cette surface et le nom de *circonférences* aux sections planes non diamétrales » [18].



L'ellipsoïde [Comberousse-Rouché 1891, 490]

Pour définir l'angle de deux droites en un point, Poincaré considère les deux tangentes aux deux sections planes diamétrales et les deux droites génératrices qui passent par ce point[19] :

> « *Ces quatre droites (au sens ordinaire du mot) ont un certain rapport anharmonique. L'angle que nous cherchons à définir sera alors le logarithme de ce rapport anharmonique si les deux génératrices sont réelles, c'est-à-dire si la surface est un hyperboloïde à une nappe*[20] *; dans le cas contraire, notre angle sera ce même logarithme divisé par* -1[21]. »

Poincaré reprend ici par exemple les théories de Laguerre[22] en les réinterprétant à partir de l'espace tangent des quadriques. Dans la même veine, il définit la distance entre deux points en considérant le birapport de ces deux points avec les deux points à l'infini situés sur une section diamétrale qui contient ces deux points :

---

[16] [Poincaré 1887, 205].

[17] Une section diamétrale est une section plane qui passe par le centre de la quadrique étant entendu que le centre des paraboloïdes est le point à l'infini de leur axe.

[18] [Poincaré 1887, 205].

[19] Les quadriques possèdent deux systèmes de génératrices rectilignes imaginaires ou réelles.

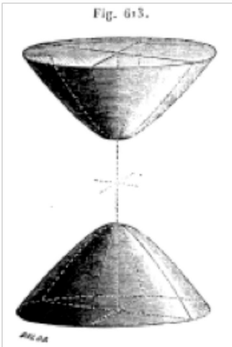
[20] On notera que Poincaré ne cite pas le paraboloïde hyperbolique.

[21] [Poincaré 1887, 205].

[22] Voir par exemple la note d'Edmond Laguerre publiée dans les *Nouvelles annales de mathématiques* [Laguerre 1853] ou la recension des travaux de Laguerre publiée par Eugène Rouché [1887].

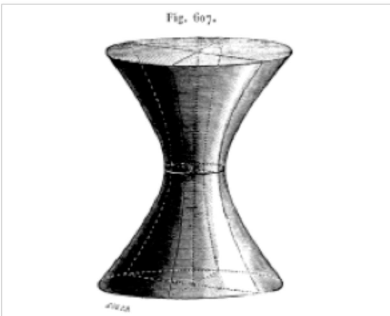
« Considérons un arc de conique faisant partie d'une section plane diamétrale (c'est ce que nous sommes convenus d'appeler un segment de droite). Les deux extrémités de l'arc et les deux points à l'infini de la conique ont un certain rapport harmonique comme tout système de quatre points situés sur une conique. Nous conviendrons alors d'appeler longueur du segment considéré le logarithme de ce rapport si la conique est une hyperbole et ce même logarithme divisé par -1 *si la conique est une ellipse* [23]. »

Poincaré dénomme ces géométries obtenues sur les quadriques, géométries quadratiques. Il souligne qu'« il y a plusieurs géométries quadratiques, car il y a plusieurs espèces de surfaces du second ordre ». Il annonce que la géométrie construite sur l'ellipsoïde est celle de Riemann, sur l'hyperboloïde à deux nappes, la géométrie de Lobatchevsky et sur le paraboloïde elliptique, la géométrie euclidienne.



L'hyperboloïde à deux nappes [Comberousse-Rouché 1891]

Ces trois cas n'épuisent pas bien sûr « la liste des géométries quadratiques » puisque en particulier, celui de l'hyperboloïde à une nappe n'a pas été étudié, ni même évoqué.



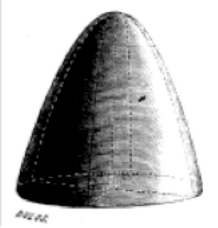
L'hyperboloïde à une nappe [Comberousse-Rouché 1891, 483]

Poincaré ajoute :

« Nous pouvons donc dire qu'il y a trois géométries quadratiques, qui correspondent aux trois espèces de surfaces du second ordre à centre.

[23] [Poincaré 1887, 205].

Nous devrons y ajouter d'ailleurs les géométries qui correspondent aux cas limites et parmi lesquelles prendra rang la géométrie d'Euclide[24]. »



Le paraboloïde elliptique [Comberousse-Rouché 1891, 492]

Poincaré explique que la géométrie modelée sur l'hyperboloïde à une nappe n'a pas été remarquée par les mathématiciens car ses propriétés sont tellement déconcertantes qu'elles ont été toujours implicitement écartées :

« Comment se fait-il donc que la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe ait jusqu'ici échappé aux théoriciens ? C'est qu'elle entraîne les propositions suivantes :

(1) la distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle ;

(2) il y a deux sortes de droites correspondants, les premières aux sections diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques ; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde ;

(3) il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points[25]*. Tous les géomètres ont implicitement supposé que ces trois propositions sont fausses, et vraiment ces trois propositions sont trop contraires aux habitudes de notre esprit pour qu'en les niant les fondateurs de la géométrie aient cru faire une hypothèse et aient songé à l'énoncer*[26]. »

De nombreux commentateurs qui s'arrêtent simplement aux propriétés de la quatrième géométrie énoncées par Poincaré identifient celle-ci avec la géométrie de Minkowski en dimension deux. Schlomo Sternberg ne s'y trompe pas et reconnaît une géométrie de De Sitter[27] :

---

[24] [Poincaré 1887, 206].

[25] Dans un article consacré aux fondements de la géométrie, Poincaré [1898] utilise la classification par Lie des 12 groupes de transformations de $\mathbb{R}^3$ possédant un invariant quadratique. Pour sélectionner parmi ceux-ci les géométries euclidienne et non-euclidiennes, Poincaré utilise la propriété de posséder un sous-groupe de rotation d'ordre 3.

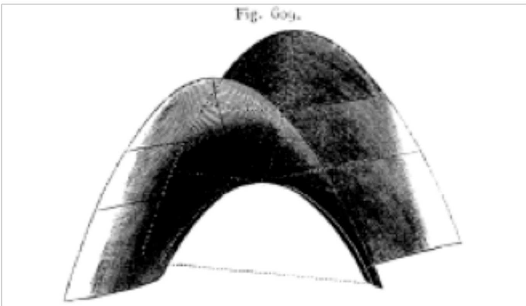
[26] [Poincaré 1887, 206].

[27] Les géométries de Minkowski et de De Sitter ont toutes les deux des métriques lorentziennes, la première étant de courbure nulle et celle de De Sitter de courbure ± 1. Pour plus de détails sur la géométrie de De Sitter, on peut consulter l'article de H. S. M. Coxeter [1943], A Geometrical Background for De Sitter World.

So now we see exactly what this fourth geometry of Poincaré was referring to is, it is the two-dimension version of the geometry of the De Sitter space. That is, one can regard the group SO(1,2) as the group of isometries of the usual Lobachevski geometry – SO(1,2)/SO(2) but we can also regard this same group as the group of automorphisms of the two-dimensional De Sitter space SO(1,2)/SO(1,1). One of the degeneracies of this single-sheeted hyperboloid is of course the hyperbolic paraboloid. The corresponding geometry of course is nothing other than two-dimensional Minkowski space[28].

Pourquoi Poincaré n'a pas découvert une cinquième géométrie

Il est surprenant que Poincaré n'ait pas découvert au moins une cinquième géométrie. Il sait parfaitement qu'il y a cinq quadriques (non dégénérées) ; on trouve leur description par exemple dans le classique traité de géométrie de Rouché et de Comberousse[29]. Après avoir défini les surfaces du second ordre comme les surfaces dont les sections planes sont des coniques (réelles ou imaginaires), les deux auteurs distinguent cinq types de surfaces du second ordre « proprement dites » : les surfaces du second ordre réglées (hyperboloïde à une nappe et paraboloïde elliptique) apparaissent comme le lieu d'intersection des plans homologues de deux faisceaux de plan projectifs. L'hyperboloïde à une nappe a une section plane à l'infini non dégénérée alors que la section plane à l'infini du paraboloïde hyperbolique se réduit à deux droites. Comberousse et Rouché classent les surfaces du second ordre « proprement dites » non réglées selon leur intersection avec le plan à l'infini. Ces surfaces sont donc bien connues et font même l'objet dans les années 1880 d'un chapitre d'un cours standard de géométrie de l'espace.



Le paraboloïde hyperbolique [Comberousse-Rouché 1891, 486]

Comme la citation ci-dessus de son article de 1887 l'indique, Poincaré considère que les trois géométries quadratiques modelées sur les trois quadriques à centre (ellipsoïde, hyperboloïdes à une et deux nappes) constituent en quelque sorte les trois cas génériques et que celles modelées sur les autres quadriques ne sont que des cas dégénérés. Poincaré indique bien qu'à chaque quadrique dégénérée correspond une géométrie, et que la géométrie modelée sur le paraboloïde elliptique est la

[28] [Sternberg 2006, 68]. Je remercie Scott Walter de m'avoir indiqué cette référence.

[29] Comberousse-Rouché 1891]. Poincaré rédigera en 1900 pour la 7e édition de ce traité classique une note sur les géométries non-euclidiennes.

géométrie euclidienne. Pour quelles raisons Poincaré n'a pas au moins signalé une cinquième géométrie modelée sur le paraboloïde hyperbolique, dotée des mêmes propriétés que celles pointées par Poincaré pour la quatrième [30] ?

Une première réponse est à chercher dans le projet de Poincaré au moment où il écrit ses articles en 1887 et 1891. En 1887, Poincaré se propose de déterminer « les prémisses de la Géométrie, les propositions indémontrables sur lesquelles repose cette science, en excluant, bien entendu, les propositions qui sont déjà nécessaires pour fonder l'Analyse » [31]. La caractérisation de la géométrie euclidienne que recherche Poincaré exclut certainement les axiomes non spécifiquement géométriques mais se doit d'expliciter « le grand nombre d'hypothèses que l'on fait implicitement au début de la démonstration des différents théorèmes ». Ces hypothèses implicites sont nombreuses et difficiles à lister :

> *Mais ces hypothèses échappent généralement au lecteur, à moins qu'il ne soit particulièrement attentif ; car, bien qu'elles ne soient pas évidentes, au point de vue de la pure logique, elles nous semblent telles par suite d'habitudes invétérées de nos sens et de notre esprit*[32].

La quatrième géométrie exhibée par Poincaré sert essentiellement à illustrer ce propos. La discussion autour du postulat des parallèles ne suffit pas et l'étude des diverses géométries non-euclidiennes ne permet pas d'identifier toutes les hypothèses implicites admises en géométrie. En utilisant un cadre général pour construire les diverses géométries, Poincaré en fait émerger une, construite exactement de la même manière que les géométries euclidienne et non-euclidiennes et qui est pourtant totalement hétérodoxe, au moins du point de vue de notre expérience. Avoir exhibé cette quatrième géométrie justifie l'introduction de deux axiomes en sus de ceux qui caractérisent les géométries quadratiques, deux axiomes qui excluent cette quatrième géométrie et qui permettent de ne retenir que la géométrie euclidienne et les deux non-euclidiennes :

> *Faisons encore les deux hypothèses suivantes :*
>
> *D. la distance de deux points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident ;*
>
> *E. lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.*
>
> *Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre ; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre et d'exclure la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe*[33].

De même, dans l'article publié en 1891 dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées*[34], la mention de la quatrième géométrie précède un paragraphe consacré à la classification par Lie des groupes de transformation.

En conclusion, bien que l'on s'aperçoive aisément que les géomètres ont admis nombre d'hypothèses implicites qui ne sont pas pour autant neutres, – l'oubli de la quatrième géométrie en étant une bonne illustration – la tâche de caractériser exactement les géométries n'est pas pour autant irréalisable puisque les géométries

[30] Bien entendu, cette cinquième géométrie serait celle du plan de Minkowski.
[31] [Poincaré 1887, 203].
[32] [Poincaré 1887, 204].
[33] [Poincaré 1887, 214].
[34] [Poincaré 1891].

envisageables sont en nombre fini. Poincaré n'a donc pas besoin d'exhiber une cinquième géométrie qui n'apporterait rien à son propos.

Une seconde réponse relève du contexte mathématique. À la fin du 19e siècle, les notions de courbure d'une surface dans l'espace euclidien ou d'espace riemannien sont bien connues et sans nul doute Poincaré les domine parfaitement[35]. Par contre, la notion de métrique lorentzienne et a fortiori, celle de courbure d'une surface dans un espace lorentzien ne sont pas explicitées à cette période[36]. Il n'y a aucune raison pour que Poincaré (ou quelque mathématicien de l'époque) puisse identifier l'hyperboloïde à une nappe comme une surface à courbure constante non nulle d'un espace lorentzien et le paraboloïde hyperbolique comme une surface à courbure nulle de ce même espace. Même si Poincaré a fait les calculs et constaté que les métriques qu'il obtenait sur ces deux surfaces étaient différentes, le contexte théorique ne lui offrait rien pour vraiment identifier des géométries différentes, d'autant plus que les propriétés de ces géométries que Poincaré met en exergue leur sont communes[37]. Que ce soit en s'appuyant sur une approche par les groupes de transformations comme dans l'article de 1887 ou en reprenant cette question à partir de considérations sur les axiomes comme dans sa contribution de 1891, Poincaré a indéniablement découvert un type de géométrie qu'il lie à l'abandon d'une propriété de transitivité de l'action du groupe des déplacements sur les droites ; pour autant, parce que ce n'est pas son propos et qu'il n'y ait pas été incité par les dynamiques de recherche de l'époque, il ne cherche pas à explorer, et encore moins à classer ces géométries[38].

Bibliographie

[1] Charles DE COMBEROUSSE & Eugène ROUCHÉ [1891] *Traité de géométrie*, 6e édition, Paris : Gauthier-Villars, 1891.

[2] Harold Scott MacDonald COXETER [1943] A geometrical background for De Sitter's World, *The American Mathematical Monthly*, 50 (1943), 217-228.

[3] Edmond LAGUERRE [1853] Note sur la théorie des foyers, *Nouvelles annales de mathématiques*, (1) 12 (1853), 57-66.

[4] Émile MACQUART, [1905] Revue des principales publications économiques de l'étranger, *Journal des économistes, revue mensuelle de la science économique et de la statistique*, Paris : Librairie Guillaumin, 63e année, 5e série, tome 1, 56-74.

[35] Poincaré a commandé et reçu en 1883 les *Werke* de Riemann (voir `http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/image/mayer_muller1b.jpg`).

[36] Bien plus tard, en 1905, et dans un tout autre contexte (celui des débuts de la théorie de la relativité), Poincaré étudiera le groupe de Lorentz et fera apparaître la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ comme invariante par les « substitutions de ce groupe » [Poincaré 1906, 168].

[37] En fait, comme Poincaré insiste dans son article de 1887 sur le fait que la géométrie euclidienne est un « cas limite » c'est-à-dire que l'on peut l'obtenir comme une dégénérescence de la géométrie hyperbolique, on peut penser qu'il aurait pu – si cela avait été son objectif – s'apercevoir que la géométrie modelée sur le paraboloïde hyperbolique était par rapport à celle modelée sur l'hyperboloïde à une nappe dans une relation analogue à celle de la géométrie modelée sur le paraboloïde elliptique par rapport à celle modelée sur l'hyperboloïde à deux nappes.

[38] Je remercie Caroline Ehrhardt, Philippe Henry et Laurent Rollet dont les lectures attentives et critiques ont permis d'améliorer une première version de ce texte.

[5] Philippe NABONNAND [2010] La Théorie de l'espace de Poincaré, in P.E Bour & S. Roux (éds.), *Lambertiana*, numéro hors série de *Recherches sur la philosophie et le langage*, Paris : Vrin, 2010, 373-391.
[6] Henri POINCARÉ [1884] Théorie des groupes fuchsiens, *Acta mathematica*, 1 (1884), 1-62.
[1887] Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15 (1887), 203-216.
[1891] Les géométries non-euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 2 (1891), 769-774.
[1898] On the Foundations of Geometry, *The Monist*, 9 (1898), 1-43 (trad. anglaise d'un manuscrit de Poincaré par T.J. Mc Cormack) ; trad. française de la version anglaise par L. Rougier, *Des Fondements de la géométrie*, Paris : Chiron, 1921 ; rééd. par L. Rollet dans H. Poincaré, *L'Opportunisme scientifique*, Basel : Birkhäuser, 2002, 5-46.
[1902] *La Science et l'hypothèse*, Flammarion : Paris, 1902 ; cité d'après la rééd. Flammarion : Paris, 1968 (avec une préface de J. Vuillemin).
[1906] La dynamique de l'électron, *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 21 (1906), 129-176.
[7] Eugène ROUCHÉ [1887] Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux, *Nouvelles annales de mathématiques*, (3) 6 (1887), 105-173.
[8] Shlomo STERNBERG [1986] Review of *Imagery in Scientific Thought* by Arthur I. Miller, *The Mathematical Intelligencer*, 8 (2) (1986), 64-74.
[9] Elie ZAHAR [2000] Les fondements de la géométrie selon Poincaré, *Philosophia Scientiæ*, 1 (2000), 145-186.

ENSEIGNEMENT

L'enseignement supérieur : une approche quantitative

Jean-Louis Piednoir

L'objectif de la présente note est de décrire grossièrement le parcours des étudiants de l'entrée à la sortie dans les différents types d'institutions de l'enseignement supérieur français et d'en analyser certaines évolutions.

L'enseignement supérieur est en France segmenté en 5 entités : les universités au sens strict, les instituts universitaires de technologie (IUT), les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) et les sections de techniciens supérieurs (STS) implantées dans les lycées, les grandes écoles. Il existe un 6ᵉ secteur, baptisé « autres » dans les statistiques, qui recouvre des formations très diverses recrutant au niveau du baccalauréat, allant des écoles d'ingénieurs ou de commerce au paramédical ou au social en passant par les facultés privées et diverses formations artistiques, secteur en rapide croissance depuis quelques années.

L'orientation des bacheliers

La répartition dans les différentes structures de l'enseignement supérieur des inscriptions des bacheliers 2010 est donnée par le tableau ci-dessous. Un bachelier peut être compté deux fois du fait des doubles inscriptions, dont le nombre peut être évalué à 5000 ; c'est pour cela que le taux d'inscription des bacheliers S est de 103% correspondant essentiellement à des doubles inscriptions prépa-universités. Globalement le taux d'inscription des bacheliers dans l'enseignement supérieur est de 78%, il est de 26,3% pour les bacheliers professionnels, de 78% pour les bacheliers technologiques et de 96% pour les bacheliers généraux.

Flux des inscriptions des bacheliers 2010 dans l'enseignement supérieur (effectifs en milliers)

Bac	Université	IUT sec.	IUT tertiaire	STS prod	STS service	CPGE éco	CPGE litt.	CPGE scient.	Autres	Bacheliers
L	31,2	ε	1	1,4	3,4	0,5	3,5		4,4	45,7
ES	46,1	0,2	10,5	1	9,1	3,9	1,5		11,6	88,2
S	75,8	12	6,3	5	5	4,4	1,5	22,5	18,4	145,8
STI	2,6	4,4	0,9	15,2	1,8	ε		0,7	1,1	30
STG	15,6	0,1	6,4	0,7	29,9	0,9			5,2	68
Autre	6,7	1,2	0,2	4,4	4,9				2,7	35,4
Pro	8,1	0,7	0,6	9,8	12				0,7	118,6
total	186,1	18,1	25,9	37,5	56,1	9,7	6,5	23,1	44,1	531,8

L'évolution depuis 10 ans des flux d'orientation est caractérisée par une stabilité pour les filières courtes (IUT, STS), une diminution de l'entrée en filière universitaire, hors études de santé, une augmentation en CPGE et surtout dans le secteur autre. Les tableaux suivants illustrent l'évolution. Pour le premier il s'agit de jeunes des panels entrés en sixième respectivement en 1987 et en 1995 donc, pour le plus grand nombre, bacheliers respectivement en 1996 et en 2002, sauf pour les bacheliers professionnels où il faut rajouter au moins un an en moyenne. Le second recense les inscriptions.

Filière/(%)	Bac général		Bac technologique		Bac professionnel	
	1996	2002	1996	2002	1996	2002
L1	50	35	19	12	6	5
PCEM/P	6	11	1	1		
CPGE	12	13	1	2		
IUT	10	11	11	10	1	1
STS	9	8	49	46	21	39
Autres	9	17	6	14	2	2
Total	96	95	87	85	29	47

Evolution des inscriptions des bacheliers dans trois structures (%)

	Université		Classes préparatoires		Autres formations	
	2 000	2 010	2 000	2 010	2 000	2 010
Bac général	61,8	54,8	12,6	13,2	9,1	12,3
Bac techno	19,1	18,7	Non significatif		3,9	5,1

La ventilation des inscriptions entre les différentes filières universitaires n'est pas fournie par la direction compétente du ministère, elle peut être estimée à partir des statistiques des nouveaux inscrits qui comportent aussi des étudiants non bacheliers, souvent originaires de pays étrangers, et des titulaires de baccalauréat antérieurs. En recoupant les différentes informations on aboutit au résultat suivant, estimation faite à partir des inscriptions 2010.

Inscriptions dans les filières universitaires, effectifs en milliers (2010)

Bac	Droit éco	Lettres	Sciences	Ingénieurs	Santé	STAPS
L	8	24			1	
ES	24	17			2	2
S	10	9	14	2	33	4

Il y a un problème majeur concernant l'orientation vers les filières scientifiques longues que masque le tableau précédent. L'évolution est résumée dans le tableau ci-dessous.

Orientation des bacheliers S en pourcentage de leur effectif

Date du bac	1996	2002	2008
Licence sciences	24	17	11
CPGE scientifique	16	14	14
Ingénieurs	5	6	6
STS ou IUT industriel	16	12	11
Total sciences	**61**	**49**	**42**
Santé (PCEM-PCEP)	13	15	21
Paramédical	4	4	6
CPGE litt. et économique.	3	4	5
Licence non scientifique.	12	14	11
Autres	7	14	15

La désaffection des licences scientifiques est impressionnante ainsi que l'engouement pour les études de santé, même si seulement 1/3 des inscrits deviendront médecins ou pharmaciens. Il y a, dès 2008, davantage d'élèves en CPGE qu'à l'université en première année de licence scientifique. Mais pour les orientations scientifiques il y a aussi des différences de nature qualitative. En moyenne les performances scolaires des bacheliers sont corrélées avec le choix de la spécialité, elles décroissent de la spécialité mathématique (21%) à la spécialité SVT (35%) en passant par la spécialité physique (34%), la filière sciences de l'ingénieur dite SI (10%) étant plus hétérogène. Ceux qui ont choisi la spécialité mathématique se distinguent par leurs performances au baccalauréat. Les formations suivies par les bacheliers S en 2008 sont les suivantes :

Formations suivies par les bacheliers S selon leur spécialité en 2008 (%)

	Math	physique	SVT	SI	Ensemble
CPGE scientifiques	31	11	4	28	14
L1 sciences	7	8	15	6	11
Ecoles ingénieurs	9	7	2	13	6
IUT ou STS secondaires	4	14	9	32	12
Total scientifique	51	41	31	73	43
Formations de santé	19	28	38	1	27
Formations non scientifique	30	31	31	26	30

Les notes obtenues à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat sont très différentes selon les orientations :

Notes obtenues en mathématique au baccalauréat S selon l'orientation suivie (%)

	15 et plus	12-15	8-12	Moins de 8
CPGE scientifique	61	24	11	4
L1 sciences	13	20	39	28
Ecoles ingénieurs	43	28	23	6
PCEM	25	25	29	21
CPGE non scientifique	39	34	23	4
IUT	11	22	40	27
L1 non scientifique	10	18	39	33
Ensemble	24	22	32	22

En clair, parmi les scientifiques ceux qui fréquentent le L1 ont eu les notes les plus basses en mathématiques. Quand on connaît l'importance des résultats scolaires antérieurs pour la réussite dans une formation il ne faut pas s'étonner des difficultés des collègues enseignant en L1.

Les étudiants

Les effectifs en 2010

A l'université on a par cursus et discipline la répartition suivante (en milliers)

Disciplines	Licence	Master	Doctorat
Lettres	276,6	140,3	22,7
Droit sciences politiques	119,5	71,6	8,2
Economie AES	116,2	68,6	3,9
Sciences	144,0	87,4	27,6
Santé	67,2	134,4	1,5
STAPS	28,8	9,6	0,5
Total	747,3	509,1	64,3

La longueur des études de médecine et pharmacie explique que le master accueille autant d'étudiants. En France on dénombre 2 318 700 étudiants dont 1 183 000 à l'université hors IUT et formation d'ingénieurs internes aux universités. Les autres se répartissent ainsi :

Effectif des formations (en milliers)

Structure	Effectif	Structure	Effectif
Grands établissements	32,1	INP, UT hors ingénieur	4,7
IUT	116,5	Comptabilité	9,1
STS	240,2	Privé universitaire	26,6
CPGE	79,9	Arts Culture	68
Ingénieurs	122,3	Paramédical	136,2
Commerce	121,3	Divers	50,9

Les formations d'ingénieurs rassemblent 119 300 étudiants qui se répartissent ainsi :

Effectif des écoles d'ingénieurs

Structures	Effectif	Structures	Effectif
Université	20,9	Ecoles du MEN	37,8
Univ. Technologiques	6,0	Ecoles autre ministère	16,9
INP	5,4	Ecoles privés	32,3

L'évolution sur 30 ans est décrite ci-dessous. Certaines formations et certains établissements ont été comptabilisés avec les universités afin d'avoir des nomenclatures comparables. La différence entre les 122 300 en formations d'ingénieurs et les 119 300 ventilés dans les différentes structures est due à l'existence de formations liées à la formation continue qui n'ont pas été prises en compte.

Effectifs en milliers des différentes structures

	1980	1990	2 000	2 010
Université	804	1 086	1 278	1 321
IUT	54	74	119	116
STS	68	199	239	242
CPGE	40	64	70	80
Autres formations	215	293	454	560

L'origine des étudiants

L'origine sociale des étudiants varie fortement d'une structure à l'autre, les jeunes issus des classes favorisées étant largement surreprésentés. La comparaison entre les catégories « cadres supérieurs et professions intellectuelles » et « ouvriers » est instructive.

Origine sociale des étudiants en pourcentage de la structure

	STS	IUT	CPGE	Univ.	Droit	Santé	Licence	Master	Doctorat
Cadres	16	16	51	31	36	43	32	38	40
Ouvriers	22	14	6,3	10	9	5,6	14	9	5,6

On dénombre 284 700 étudiants étrangers en France soit 12,3% de l'effectif total, dont 218 400 à l'université. Leur proportion varie beaucoup suivant les disciplines, 5% en santé, 18% en économie, mais surtout suivant le cursus :

– licence 11% ;
– master 19% ;
– doctorat 41%.

Le recrutement en STS s'est profondément modifié, surtout dans le secteur de la production devenu très peu sélectif, affecté qu'il est par la baisse du nombre de bacheliers STI. Les sections de techniciens supérieurs sont les seules à accueillir massivement des bacheliers professionnels avec quelque chance de succès. Ils représentent 21,5% du recrutement pour le secteur de la production et 14,1% pour celui des services.

Les classes préparatoires sont devenues moins sélectives dans le secteur scientifique du fait de la baisse globale de l'orientation vers les études scientifiques longues aggravée par la réforme du lycée de 1993. Par ailleurs la proportion de boursiers a augmenté entre 2006 et 2010 passant de 19 à 27% (dont 2% de boursiers à taux 0 et 25% de boursiers CROUS). En 2010 elles ont accueilli :

– en filière scientifique 25 000 étudiants (y compris la classe ATS) ;
– en filière économique 9 600 ;
– en filière littéraire 6 700.

Elles sont concurrencées par l'accès direct après le baccalauréat pratiqué par plusieurs écoles d'ingénieurs ou de commerce. C'est le phénomène des « prépas intégrées ». Mais elles continuent à faire une razzia sur les bons élèves de l'enseignement secondaire, souvent concentrés dans la spécialité mathématique de la filière S. Celle-ci ne représente que 20% des élèves de Terminale S mais 51% des étudiants de classe préparatoire. D'autres études montrent d'ailleurs que, quelle que soit la filière d'enseignement supérieur, les étudiants bacheliers S spécialité mathématiques ont en moyenne les meilleurs taux de réussite aux examens et concours. Autre indice, parmi les bacheliers généraux ayant obtenu une mention bien ou très bien au baccalauréat, 39% d'entre eux ont choisi une classe préparatoire. Ils représentent plus de la moitié des élèves de ces classes.

Le L1 des universités est tenu en droit de recevoir tous les bacheliers. Certains s'y inscrivent par intérêt pour les études proposées, d'autres faute de structures concurrentes, une importante minorité faute d'avoir été acceptée dans une structure sélective : 35% en moyenne et 47% pour le L1 scientifique.

L'enseignement supérieur privé s'est beaucoup développé depuis 2000 : + 49%. Il regroupe 408 700 étudiants soit 17,6% de l'effectif total, il est majoritairement présent dans les formations tertiaires (écoles de commerce, STS des services).

Les formations d'ingénieurs ont connu une croissance rapide qui a amené les écoles à diversifier leur recrutement :

Recrutement des écoles d'ingénieurs

baccalauréat	CPGE	Université	DUT BTS	Autres
27%	41%	6%	14%	12%

Circulation entre les structures et réussite des études

Après son entrée dans l'enseignement supérieur l'étudiant peut évidemment poursuivre dans la même filière ou se réorienter, voire abandonner ses études. Globalement 25% des inscrits dans l'enseignement supérieur quittent celui-ci sans avoir obtenu un diplôme, soit à peu près un flux de 114 000 étudiants. La France n'est pas isolée quant au taux de décrochage, il atteint 40% aux États-Unis et en Suède. La réussite dans une filière donnée ou après réorientation dépend de nombreux facteurs, adaptation de l'étudiant à la pédagogie utilisée, perception de la pertinence des débouchés offerts, importance des acquis de la formation antérieure (mesurée imparfaitement par la mention obtenue au baccalauréat), temps de travail consacré aux études. Sur ce dernier point une enquête déjà ancienne (2002) et fondée sur les déclarations des intéressés, donc à prendre avec prudence, a donné les résultats suivants.

Temps de travail moyen déclaré des étudiants en nombre d'heures par semaine

	Cours + TD +TP	Travail personnel	Total
Lettres, sciences humaines	15	13	28
Droit, sciences économiques	19	15	34
Sciences	23	12	35
IUT	30	12	42
STS	32	10	42
Santé	20	28	48
CPGE	34	25	59

Plusieurs études, dont celle relative aux jeunes entrés en sixième en 1997 et bacheliers en 2005 ou 2006, permettent d'avoir une information sur les parcours dans l'enseignement supérieur.

Inscrits en licence après le baccalauréat

L'examen du panel des élèves entrés en sixième en 1995, baccalauréat passé en 2002 ou après, montre que les études en L1 ont été choisies par 35% des bacheliers généraux, 12% des bacheliers technologiques et 5% des bacheliers professionnels contre, respectivement 50%, 19%, 6%, pour les bacheliers du panel 1989, bacheliers en 1996 et après. Parmi les bacheliers généraux 13% d'entre eux avaient eu une mention B ou TB au baccalauréat, à comparer avec les 60% des classes préparatoires et les 41% du PCEM.

Sur 100 étudiants qui se sont inscrits en L1 :

– 38 ont leur licence en 3 ans ;
– 15 ont leur licence en 4 ans, quelques-uns auront une licence en 5 ans ;
– 20 sortent sans autre diplôme que le baccalauréat ;
– 22 se sont réorientés, dont 11 en IUT ou BTS ;
– 6 sortent avec un diplôme : DEUG, licence en plus de 4 ans,...

Le total de 101% est dû aux arrondis à deux chiffres significatifs.

La réussite à la licence des étudiants de L3 dépend fortement du baccalauréat d'origine. Même en possession du DEUG ou de son équivalent, la réussite des bacheliers technologiques ou professionnels est loin d'être assurée.

Réussite en L3 (%)

Baccalauréat	Réussite en 1 an	Réussite en 2 ans	Réussite en 3 ans	Echec
Général	76,4	8,3	1,4	13,9
Technologique	63,9	9,4	1,7	25,0
Professionnel	56,4	10,4	1,5	32,7

Inscrits en PCEM ou PCEP

La première année des études médicales ou pharmaceutiques fait un petit nombre d'élus. En 2010 ce sont 29 240 nouveaux bacheliers qui s'inscrivent en PCEM 1, rejoignant 19 810 redoublants, le tout (49 050) pour 7 400 places. L'enquête décrite ici concerne les étudiants bacheliers 2007 en PCEM 1 en 2007-2008. Le profil de ces nouveaux bacheliers est proche de celui des élèves de classe préparatoire : catégorie sociale très favorisée pour 48% d'entre eux (51% en CPGE), mention bien ou très bien au baccalauréat pour 33% d'entre eux (mais 60% en CPGE), ces caractéristiques étant encore renforcées parmi les reçus : 60% d'étudiants issus des catégories très favorisées. Par ailleurs les inscrits qui avaient une année de retard au baccalauréat ont été pratiquement tous éliminés : 17% des inscrits en PCEM 1 mais seulement 4% des reçus.

Sur 1000 nouveaux bacheliers inscrits en PCEM 1, l'année universitaire suivante :

– 127 sont reçus : 112 en médecine, 10 en dentaire, 5 pour des études de sage-femme ;
– 541 redoublent ;
– 163 se réorientent vers une autre formation universitaire ;
– 169 abandonnent l'université.

Parmi les 541 redoublants, l'année suivante :

– 204 sont reçus : 152 en médecine, 26 en dentaire, 26 pour des études de sage-femme ;
– 176 se réorientent vers une autre formation universitaire ;
– 153 abandonnent l'université.

En résumé 1/3 réussit, 1/3 se réoriente, 1/3 va ailleurs. Ceux qui se réorientent dans une formation universitaire choisissent pour la moitié d'entre eux une filière scientifique, essentiellement la biologie, 30% préfèrent une licence non scientifique, 13% optent pour le paramédical ou la pharmacie. La très grande majorité de ceux qui quittent l'université font des études dans le paramédical, très peu interrompent leurs études.

Réussite en licence professionnelle

Du point de vue de la réussite des étudiants, la licence professionnelle est un succès. On observe 87% de reçus la première année et 2% de plus la deuxième.

Inscrits en master

Sur 100 étudiants inscrits en M1 en 2005, la répartition était la suivante à la rentrée 2006 :

– 50 sont passés en M2 ;
– 16 ont redoublé le M1 ;
– 9 ont changé d'orientation dans l'université (dont l'IUFM) ;
– 25 ne se réinscrivent pas à l'université.

À la rentrée 2007 la répartition devient celle ci-dessous :

– 42 ont obtenu le master ;
– 4 redoublent le M2 ;
– 5 redoublants du M1, plus 1 en année sabbatique après le M1, s'inscrivent en M2 ;
– 33 ne se réinscrivent pas à l'université dont 25 abandons en M1 ;
– 10 se sont réorientés ;

– 5 sont dans des situations diverses.

À la rentrée 2008 on aura 7 reçus de plus au master soit dans le même, soit après une réorientation. En résumé, en trois ans, un étudiant sur deux atteint son objectif de départ : avoir un master en poche.

Inscrits en classe préparatoire

Le parcours dans l'enseignement supérieur des bacheliers inscrits en CPGE varie fortement selon les filières et les projets professionnels. À la rentrée 2010 les effectifs se répartissaient ainsi :

Effectifs des classes préparatoires en milliers

Filière	1ère année	2ième année
Scientifique	23,9	25,8
Economique	9,6	8,9
Littéraire	6,7	5,0

Pour la filière scientifique il y avait aux concours classiques d'entrée dans les écoles d'ingénieurs 15 000 candidats (dont 5 100 redoublants) pour 16 700 places. S'y ajoutent des places réservées aux élèves de 2e année, si bien que la plupart des élèves souhaitant rentrer dans une école d'ingénieurs le peuvent. Certains visent d'autres métiers, l'enseignement par exemple, et utilisent la classe préparatoire comme un contournement du L1 et du L2. Ils sont d'ailleurs surreprésentés parmi les reçus aux concours de recrutement de l'enseignement secondaire.

Pour la filière économique la quasi-totalité des élèves intègre une école de management. En 2010 ces écoles en avaient recruté 6 500, ce qui ne représente que 16% de leur recrutement, mais il faut faire une différence entre les écoles reconnues par l'État et dont au moins un diplôme est visé, celles reconnues mais dont le diplôme n'est pas visé par l'État et les autres. Les écoles des deux dernières catégories recrutent peu en CPGE et accueillent des bacheliers et des sortants de formations supérieures courtes.

La filière littéraire, compte tenu du faible nombre de places aux ÉNS, est d'abord une alternative au L1 & L2 des universités et en second lieu une voie de préparation aux concours d'accès aux instituts d'études politiques.

Globalement, sur 100 bacheliers entrant en classe préparatoire scientifique ou économique au bout de trois ans, on a la répartition suivante :

– 78 sont dans une grande école ;
– 17 étudient à l'université ;
– 3 étudient dans une autre formation ;
– 2 ont abandonné leurs études.

Inscrits en IUT

La réussite en IUT dépend fortement du type de baccalauréat possédé.

Taux d'obtention du DUT (en %)

	Diplôme en deux ans	Diplôme en trois ans
Baccalauréat général	74	7
Baccalauréat technologique	57	11
Baccalauréat professionnel	42	6

Mais la principale évolution depuis quelques années est la poursuite d'études des titulaires du DUT stimulée par la création de la licence professionnelle. Pour le panel 1995 (bacheliers en 2002 ou 2003) les poursuites d'études s'établissaient ainsi :

– en licence professionnelle 23% ;
– en L2 ou L3, 31% ;
– en grandes écoles 14% ;
– autres formations 13%.

La sortie vers la vie active ne concernait plus que 19% des titulaires du DUT. Le phénomène s'est probablement accentué depuis.

Inscrits en section de techniciens supérieurs (STS)

Les STS accueillent massivement des bacheliers technologiques et aussi beaucoup de bacheliers professionnels. C'est la seule filière où ces derniers ont quelque chance de réussite. Beaucoup d'étudiants en STS sont d'origine modeste et on compte dans leurs rangs 43% de boursiers. En 2010 ces classes ont accueilli 125 000 bacheliers de l'année, 43 000 dans le secteur de la production et 82 000 dans celui des services, dont l'origine est la suivante :

– bacheliers généraux 24 600 ;
– bacheliers technologiques 55 900 ;
– bacheliers professionnels 20 800 ;
– autres dont réorientation 23 700.

Leur réussite n'est pas toujours assurée, elle dépend fortement du baccalauréat d'origine. Souvent les bacheliers professionnels abandonnent dès les premiers mois de cours, ce qui explique que 52% d'entre eux n'ont pas obtenu leur BTS.

Taux d'obtention du BTS (en %)

	Diplôme en deux ans	Diplôme en trois ans
Baccalauréat général	77	9
Baccalauréat technologique	57	12
Baccalauréat professionnel	40	8

Quoique moins importante qu'à l'issue du DUT, la poursuite d'études après le BTS existe. Par exemple 800 d'entre eux sont accueillis en classe préparatoire ATS en vue d'entrer en école d'ingénieurs. Globalement les poursuites d'études sont les suivantes pour les élèves du panel 1995 (bac en 2002 ou 2003) :

– en licence professionnelle 15% ;
– en L2 ou L3, 10% ;
– en grande école 3% ;
– autres formations 17%.

Probablement le phénomène s'est accentué depuis.

Obtention de la licence et devenir des licenciés

Compte-tenu de l'importance des réorientations dans l'enseignement supérieur, il est intéressant de regarder les antécédents scolaires et universitaires des licenciés et ensuite de regarder leur devenir.

La revue du CEREQ, intitulée « Relief », a publié dans son numéro 36 de janvier 2012, sous le titre précédent une étude sur les études de licence combinant des analyses globales et des monographies faites dans diverses universités. La présente annexe est un résumé de cette étude qui porte sur les étudiants ayant obtenu leur licence en 2005, voire en 2004. En 2005 les universités, y compris l'outremer, ont délivré 141 921 licences générales et 23 874 licences professionnelles, à comparer aux 124 300 licences générales et 40 100 licences professionnelles délivrées en 2010. En 5 ans il y a le même nombre de licenciés mais avec une répartition différente.

Origine des licenciés

Les antécédents scolaires des 139 138 licenciés ayant obtenu la licence générale en 2005 en France métropolitaine sont donnés dans les tableaux suivants :

Baccalauréat d'origine des licenciés généraux de 2005

Baccalauréat	Effectifs en milliers	Part du total (en%)
L	31,4	22
ES	35,7	26
S	47,8	34
STT	7,1	5
Autre technique	5,4	4
Professionnel	0,9	0,6
Non bachelier	11	8
Total	139,1	100

Choix du L1 par les bacheliers du panel des jeunes entrés en sixième en 1995 selon leur section de baccalauréat (en % des bacheliers de la filière).

Baccalauréat	L	ES	S	STT	STI
Part du L1	68	55	30	21	6

Etudes suivies en 2003-2004 par les licenciés 2005 (% par discipline)

Discipline	L2	L3	IUT	Autre form. université	Hors université
Droit	76	14	2	3	5
Sciences éco.	51	10	18	7	14
AES	62	12	7	7	12
Lettres	72	14	1	5	8
Langues	70	18		4	8
SHS	66	15	2	5	12
SVT	71	12	6	4	7
Sc. fondamentales	51	17	16	9	7
STAPS	80	16		2	2
Total	65	14	5	5	9

À noter que les redoublants de L3 peuvent être originaires d'autres cursus que le L2, en particulier STS ou IUT. Deux disciplines sont particulièrement affectées par les stratégies de contournement de l'ex DEUG, l'économie et les sciences fondamentales. Depuis 2005 le phénomène s'est probablement renforcé. Pour la licence professionnelle, sont passés par :

– L1 et L2, 7% ;
– IUT 36% ;
– STS 42%.

L'université de Metz a procédé à une étude sur les décrocheurs de L1. Sans surprise le phénomène touche surtout les bacheliers professionnels et dans une moindre mesure les bacheliers technologiques, il est très corrélé avec les notes obtenues au baccalauréat et au fait d'être salarié par ailleurs. À Besançon on a étudié l'efficacité du tutorat pour éviter échec et abandon. Elle apparaît limitée du fait de l'hétérogénéité des besoins des étudiants et de son caractère facultatif. À Lille 1 une expérience de parcours aménagés pour les bacheliers technologiques a amélioré sensiblement leur réussite.

Après la licence

Leur licence obtenue, les étudiants poursuivent massivement leurs études. À la rentrée 2005 la répartition de ceux qui continuent leurs études est la suivante :

– en master : 67,4% ;
– en préparation aux concours de l'enseignement : 10,1% ;
– vers d'autres formations universitaires : 4,6% ;
– ont quitté l'université dont pour des études en école : 17,9%.

Deux ans plus tard (2007-2008) ils se répartissent ainsi : (en %)

Doctorat	M2	M1	Prépa enseig.	Autres univ.	Sortie
2,7	12,1	5,1	8,8	6,2	65,2

In fine 39,1% obtiendront un master. Il faut réussir à être sélectionné et être reçu aux examens et la situation est très contrastée selon les disciplines, avec des taux d'inscription et de réussite différents.

Réussite en master des licenciés 2005, effectifs et taux de réussite.

Discipline	Effectif de licenciés (milliers)	Réussite en deux ans (%)	Réussite en trois ans (%)
Droit	16,2	48,7	13,1
Sc. Economiques	15,9	48	6,8
AES	7,2	28,6	7,3
Langues	14,1	16,1	7,1
Lettres	13,6	14,8	6,6
SHS	35,9	18,2	9,2
SVT	10,2	47,9	8,2
Sc. Fondamentales	19	46,2	8,2
STAPS	7	9,3	3,7
Total	1réussite en master	30,7	8,4

Remarquons que les licenciés ayant effectué toutes leurs études à l'université sont rejoints en cours d'étude par ceux qui ont contourné l'ex DEUG. Pour la génération sortie du système éducatif en 2004 le CEREQ a étudié le parcours des diplômés de master 2 en sciences (le LMD n'était pas encore en place) quand ils étaient en licence. On observe que moins de la moitié des titulaires du master 2 avait fait toutes ses études à l'université. Plus précisément sont passés par :

- une CPGE 12,3% ;
- une école recrutant au baccalauréat 6,2% ;
- PCEM 8,2% ;
- un DUT 22,1% ;
- un BTS 8,1% ;
- l'université 45%.

Les débouchés

Pour la licence professionnelle les conditions d'accès au marché du travail sont proches de celles des DUT ou BTS, mais le chômage est plus faible et le salaire plus élevé. Mesuré en 2007, le taux de chômage est de 5% dans l'industriel et de 6% dans le tertiaire et les salaires médians respectivement de 1 540 et 1 470 euros.

Pour la licence générale les conditions d'insertion professionnelle varient fortement selon la discipline.

Insertion des licences générales

Discipline	Taux de chômage (%)	Salaire médian (euros)
Sciences	De 4 (ingénierie,) à 9 (biologie), 5 en maths	De 1350 à 1490
Lettres	De 22 (arts) à 11 (histoire)	De 1010 à 1270
Droit	14	1400
Economie	14	1470

Pour les 22 000 étudiants qui sont sortis de L3 en 2004 et qui ont trouvé un emploi, la répartition des secteurs d'activité était la suivante en 2007.

Secteurs d'activité des sortants de L3 ayant un emploi (en % de chaque colonne)

	Licence générale	Licence professionnelle
Education nationale	26,1	2,3
Autre secteur public	8,8	6,1
Secteur privé	56	86,6

Pour l'insertion professionnelle la licence du même nom est pour l'instant un succès, par contre après une licence générale mieux vaut continuer ses études jusqu'en master si on a la possibilité d'être sélectionné après le M1.

Les diplômes et insertion professionnelle

La production de l'enseignement supérieur se mesure (imparfaitement) par le nombre des diplômes délivrés, ce qui ne dit rien sur leur qualité ! Les diplômes ne sont pas seulement attribués aux étudiants, ils peuvent aussi être acquis par formation continue ou par validation des acquis de l'expérience.

Diplômes de type bac+2

Voici par grands secteurs le nombre de BTS et de DUT délivrés respectivement en 2010 et 2009 :

Nombre de diplômes délivrés

	BTS (2010)	DUT (2009)
Secteur de la production	29 182	19 404
Secteur des services	84 319	28 580
Total	113 505	47 984

Si tous les DUT sont délivrés par les départements d'IUT, les BTS peuvent être obtenus par différents dispositifs. Ainsi on a la répartition suivante :

- 14 584 BTS acquis par des apprentis ;
- 18 104 par des stagiaires de la formation continue ;
- 5 398 par des candidatures individuelles.

Les autres BTS sont obtenus par des élèves des classes STS des lycées publics ou privés.

Les diplômes universitaires

On ventilera par grandes disciplines les diplômes délivrés par les universités en 2010. Les diplômes du secteur de la santé ne seront pas évoqués, leur nombre est proche de celui des places offertes au concours quelques années auparavant.

Diplômes délivrés en 2010 en milliers

	Licences	Licences pro	Master	Doctorat
Droit	18,0	1,2	16,8	0,8
Economie, AES	21,6	16,2	27,1	0,6
Lettres	52,8	5,2	26,5	2,8
Sciences	24,2	17,0	23,4	6,3
STAPS	4,7	0,5	1,3	0,1
Total	124,3	40,1	86,8	10,6

Un nombre important de titulaires d'un master en économie sont des élèves d'écoles de commerce. Pour les licences de lettres et de sciences le maximum a été atteint en 2006 avec respectivement 59 600 et 25 300 diplômes délivrés.

Les titres délivrés par les écoles

Les écoles, publiques ou privées délivrant le titre d'ingénieur sont habilitées par la commission du titre d'ingénieur (CTI). En 2010 on a recensé 28 253 titres délivrés. Leur nombre fluctue selon les années mais reste stable depuis 2005 après une période de croissance rapide :

1985	1990	2000	2010
7 325	12 151	18 342	28 253

Les écoles de commerce délivrent des certificats, certains sont visés par le ministre, d'autres non :

– 14 309 diplômes visés par l'état ;
– 13 833 diplômes délivrés sous la seule responsabilité des écoles.

L'insertion professionnelle

Il est peu opérant de chercher les taux d'insertion immédiate des diplômés du fait des fluctuations du marché de l'emploi. Aussi l'INSEE, auteur de l'étude ci-après, a fait la moyenne des sorties du système dans la période 2003-2009.

Remarque : comme il s'agit de moyennes sur 6 années la somme des pourcentages peut dépasser 100, un individu pouvant changer de statut au cours de la période. On observe que les diplômés du secteur de la production ont souvent un devenir plus favorable que ceux du secteur des services.

Indicateurs d'insertion professionnelle

Diplôme	Secteur	Taux de chômage au sens du BIT %	% de cadres et intermédiaires	Salaire médian
DUT-BTS	Mécanique	5	71	1 630
	Electronique	7	73	1 570
	Informatique	8	80	1 590
	Commerce	9	50	1 460
	Comptabilité	8	29	1 350
	Secrétariat	11	44	1 340
Diplôme	Secteur	Taux de chômage	% cades et intermédiaires	Salaire médian
Licence	Sciences	5	84	1 640
	Droit, éco	8	66	1 440
	Lettres	9	69	1 440
Licence pro	production	9	83	1610
	Services	10	71	1500
Master	Math physique	6	96	2 000
	Chimie SVT	8	89	1 760
	Economie	7	73	1 790
	Droit	9	82	1 940
	Histoire	8	80	1590
	Psycho-socio	13	80	1 480
	Langues	9	93	1 650
	Spécialiste production	7	93	2 060
	Commerce	9	80	2 000
	Finance	5	73	2 070
	Communication	15	80	1 710
	Informatique	9	94	2 300
Ingénieurs		5	97	2 500
Ecole commerce		7	91	2 570
Doctorat	Science	6	96	2 330
	Droit, lettres	8	93	2 100
	Santé	2	99	2 570

Coup d'œil sur le métier de chercheur en entreprise

Le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche a publié en avril 2011 (note d'information 11.05) une étude sur les personnes occupant un emploi de chercheur dans l'entreprise. On recense en 2007 : 137 000 emplois de chercheurs. Leur répartition selon le diplôme académique le plus élevé est donnée par le tableau suivant qui compare la situation à 10 ans d'intervalle :

Diplôme académique le plus élevé

Diplôme	1997	2007
Doctorat	10,5	11,1
Ingénieur-docteur	4,4	2,1
Ingénieur	54	52,5
DEA, maîtrise, licence	13,7	20,7
Autodidacte	15	12
Diplôme étranger	2,4	1,5

À noter l'importance relative de la promotion sociale. Il y a maintenant pratiquement autant de chercheurs en entreprise que dans le secteur publique hors entreprise, alors qu'en 1997 le ratio entre les deux catégories était de 1,28 (public/ entreprise). Les secteurs de recherche en entreprise sont les suivants :

– sciences de l'ingénieur 65% ;
– mathématique, informatique, physique 14% ;
– biologie et applications 9% ;
– chimie 4%.

Les 3/4 des chercheurs sont employés par des entreprises de plus de 250 salariés.

La répartition selon les secteurs de production est la suivante :

– génie électrique 17,9% ;
– informatique 13,8% ;
– automobile 11,2% ;
– aéronautique 8,9% ;
– pharmacie 8,3% ;
– machines équipement 4,9% ;
– transport 3,4% ;
– autres 15,7%.

Les femmes sont peu nombreuses, de l'ordre de 20% des effectifs.

Les coûts

La documentation accessible publiquement ne permet pas de connaître exactement les coûts pour la puissance publique des différentes formations. Elle fournit des moyennes mélangeant les différentes spécialités.

Or il y a des différences importantes entre elles ; à titre d'exemple, à partir de données de 2001, on a pu déterminer le coût d'un étudiant d'une discipline donnée rapporté au coût moyen d'un étudiant :

– droit et économie 0,63 ;
– lettres 0,85 ;
– sciences 1,69 ;
– médecine 1,75.

L'augmentation du nombre d'étudiants en médecine a probablement fait baisser ce rapport, tandis que la baisse du nombre des scientifiques a pour effet mécanique de l'augmenter. Comme 19% des étudiants sont scientifiques dans les universités contre 60% en classes préparatoires, la comparaison des financements publics en utilisant les coûts moyens n'a guère de sens. De plus depuis l'introduction de la LOLF (loi organique sur la loi de finances), les chiffres publiés correspondent à la dépense globale et comprennent les crédits de recherche et de développement, avec la totalité des traitements des enseignants-chercheurs qui pourtant sont enseignants à mi-temps. Les dépenses relatives aux IUT sont incluses dans la dépense globale, mais les coûts engendrés sont très différents de ceux relatifs aux filières L. Aussi la moyenne obtenue n'a pas grand sens si on veut savoir combien coûte un étudiant de licence.

Établir le coût de l'étudiant en grande école est encore plus compliqué. 30% des étudiant ingénieurs fréquentent une école privée avec des droits d'écolage de l'ordre de 5 000 euros. Mais celle-ci perçoit de la taxe d'apprentissage. La quasi-totalité des écoles de management est privée ou dépend des chambres de commerce, avec là aussi des droits d'écolage, pouvant atteindre 15 000 euros, et des contributions des chambres consulaires.

Trois chiffres sont communiqués, seuls les deux premiers ont quelque pertinence :

– étudiant en CPGE 14 850 euros par an en 2009 (15 500 en 2003) ;
– étudiant en STS 13 730 euros par an en 2009 (14 000 en 2004) ;
– étudiant en université 10 220 euros par an en 2009 (8 600 en 2006 mais l'augmentation est purement artificielle et s'explique par la modification des règles de calcul).

Une enquête difficile sera nécessaire pour établir la vérité des prix.

Les grandes tendances

En conclusion de ce panorama, on peut essayer de dégager quelques grandes tendances, en commençant par le vivier le plus important (86%), celui des bacheliers.

1) Depuis 25 ans le flux des bacheliers n'a connu qu'une croissance modérée, mais sa structure interne a assez profondément évolué. Le baccalauréat L a perdu 30% de ses effectifs, alors que les réformes successives avaient pour objectif d'enrayer cette tendance ! Il semble qu'en 2012 cette évolution soit terminée. Le baccalauréat S a connu une baisse après la réforme de 1994 suivie, après 2000, d'une augmentation des effectifs : 150 800 bacheliers S en 2012 mais avec

une structure très différente. Si avant 1995, 55% d'entre eux avaient un horaire hebdomadaire de 9 heures de mathématiques en Terminale, depuis 2008 seulement 20% d'entre eux ont 7 heures $\frac{1}{2}$ hebdomadaire de cette discipline. Les futurs bacheliers auront vu leur horaire de mathématiques réduire en classe de Première : 4 heures hebdomadaires au lieu de 6. À noter que, sauf dans la réforme en cours, les heures perdues par les mathématiques ont été récupérées par la biologie.

Pour les études scientifiques certains observateurs avaient émis l'hypothèse que les bacheliers STI viendraient combler les vides laissés par les bacheliers S ne poursuivant pas en sciences. Il n'en est rien : après s'être maintenu à 35 000 lauréats par an jusqu'en 2005, le baccalauréat STI n'en compte plus que 26 800 en 2012. Par ailleurs le nombre des bacheliers STT a aussi baissé mais celui des bacheliers du secteur médico-social a fortement augmenté ces dernières années. Le baccalauréat professionnel a aussi fortement augmenté avec une demande de poursuite d'études à laquelle les structures actuelles répondent mal, d'où les taux d'échecs importants, surtout pour les bacheliers du secteur tertiaire, à l'université en particulier.

2) Une attractivité de plus en plus faible des cursus universitaires, sauf pour l'accès aux professions de santé, au niveau des deux premières années surtout dans les formations où une concurrence existe. Après avoir réussi ailleurs le début de leurs études supérieures beaucoup d'étudiants rejoignent l'université au niveau L3 (licence générale) ou M1, c'est le cas de 17% des élèves des CPGE scientifiques et de 30% des titulaires du DUT. Ainsi l'IUT, qui avait été prévu comme devant déboucher majoritairement sur le marché du travail, joue de plus en plus le rôle d'un premier cycle universitaire.

3) La réussite globale des différentes structures de l'enseignement supérieur n'est pas flamboyante puisque 20% des entrants sortent du système sans autre diplôme que le baccalauréat, mais ce n'est pas une exception française. D'autres pays ont des taux de sortie sans diplômes plus importants : par exemple ils sont de 40% aux États-Unis et en Suède. Par ailleurs il faut interpréter ces sorties, qui ne sont pas toutes, loin s'en faut des échecs. Des étudiants abandonnent leurs études avant de se présenter à l'examen car se présente à eux une opportunité d'emploi, quitte à acquérir le diplôme ultérieurement par la formation continue et la validation des acquis de l'expérience (VAE). Dans une filière donnée, par exemple la licence, un échec ou un abandon peut se traduire par une réorientation qui, elle, se terminera par un succès. Dès que l'on prend en compte ces éléments, le taux d'échec, en particulier à l'université, se rapproche de celui qui est observé en IUT ou en STS.

4) Parmi les facteurs influençant la réussite dans l'enseignement supérieur le plus important est celui de l'acquisition dans l'enseignement secondaire d'un capital scolaire suffisant. On le voit clairement quand on compare les réussites des bacheliers selon le baccalauréat obtenu. L'échec est d'abord celui des bacheliers professionnels, particulièrement ceux du secteur tertiaire et dans une moindre mesure des bacheliers technologiques, qui n'ont pas, surtout les premiers, de formations adaptées à leur profil scolaire sauf, dans de nombreux cas, les STS.

Souvent il faut remonter davantage dans le temps et un prédicteur important de la réussite dans le supérieur est la performance obtenue à l'évaluation des acquis des élèves faite à l'entrée en sixième, variable bien sûr liée à la situation sociale de la famille.

5) On a vu que, plus une formation est prestigieuse, plus le niveau social des étudiants qui la fréquente est élevé. La démocratisation est encore à faire, même si on a enregistré quelques progrès depuis 20 ou 30 ans. Quant à la parité, elle est loin d'être acquise partout, les orientations des étudiants restent sexuellement typée. Pour prendre l'exemple des sciences, une majorité large de femmes en biologie, entre 60 et 70%, mais 15% en formation d'ingénieurs !

INFORMATIONS

Prix André Lichnerowicz pour la géométrie de Poisson

Le prix André Lichnerowicz a été créé en 2008. Il est attribué en reconnaissance de contributions notables à la géométrie de Poisson, tous les deux ans lors de la « Conférence internationale sur la géométrie de Poisson en mathématiques et en physique » (« International Conference on Poisson Geometry in Mathematics and Physics ») à des chercheurs ayant soutenu leur doctorat huit ans au plus avant l'année de la Conférence.

Le prix est établi à la mémoire d'André Lichnerowicz (1915-1998) dont les travaux furent essentiels dans la création de la géométrie de Poisson comme branche des mathématiques. En 2012, il a été décerné, par un jury composé des membres du comité scientifique et du comité d'honneur de la Conférence à Thomas Willwacher de l'université de Harvard, le 30 juillet 2012, lors de la cérémonie d'ouverture de la conférence « Poisson 2012 » à l'université d'Utrecht, Pays-Bas. Le prix pour 2012 a été offert par le journal *Indagationes Mathematicae* de l'Académie royale néerlandaise des Arts et des Sciences (KNAW) au nom de la Société royale néerlandaise de Mathématiques (KWG).

Thomas Willwacher, lauréat du prix André Lichnerowicz pour 2012

Thomas Willwacher est titulaire depuis 2009 d'un doctorat de l'ETH de Zurich, préparé sous la direction de Giovanni Felder. Il a reçu pour sa thèse, intitulée « Cyclic formality », la médaille de thèse d'excellence de l'ETH en 2010. Il a ensuite été nommé à l'université de Harvard en tant que « Junior Fellow of the Society of Fellows ». Il a apporté à la géométrie de Poisson des contributions fondamentales, démontrant des théorèmes profonds qui font intervenir des techniques de théorie quantique des champs, d'algèbre homologique et de la théorie des complexes de graphes. Ainsi, il a donné des preuves de la conjecture de Kontsevich sur la formalité cyclique des cochaînes, et de la conjecture de Tsygan sur celle des chaînes. Avec Pavol Ševera, il a montré l'équivalence d'homotopie entre la formalité de Kontsevich de l'opérade des petits disques et celle de Tamarkin. Plus récemment, il a démontré que la cohomologie du complexe de graphes de Kontsevich est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe de Grothendieck-Teichmüller.

CENTRE INTERFACULTAIRE BERNOULLI

CIB

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

CALL FOR PROPOSALS

The Bernoulli Center (CIB), funded jointly by the Swiss National Science Foundation and the Swiss Federal Institute of Technology in Lausanne, has started its activity in March 2002.

Its mission is to support research in mathematics and its applications, to organize and host thematic programs, to provide a supportive and stimulating environment for researchers, and to launch and foster collaborations between mathematicians working in different areas as well as mathematicians and other scientists.

The CIB launches a call for proposals of four one-semester programs during the **period July 1, 2014 - June 30, 2016**. A thematic program consists of a six months period (January 1 - June 30 or July 1 - December 31) of concentrated activity in a specific area of current research interest in the mathematical sciences. In exceptional cases, one year and three month programs will also be considered.

Those who are interested in organizing a program at the CIB should submit a **two page letter of intent by April 1st, 2013**. This letter should give the names of the organizers, of the potential visitors, and outline the program. For more details see http://cib.epfl.ch/

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Centre Interfacultaire Bernoulli -CIB
EPFL SB CIB-GE
AAC034 (Bâtiment AAC)
Station 15
CH-1015 Lausanne

CARNET ET ÉLOGES

Vladimir Savelievich Buslaev

(1937 – 2012)

Ludvig Faddeev, Alexander Fedotov, Alexander Its, Ari Laptev,
Alexander Sobolev, Tatyana Suslina, Vitali Tarasov, Dmitri Yafaev

Vladimir Savelievich Buslaev, un mathématicien russe exceptionnel et l'un des leaders de l'école mathématique moderne de Saint-Petersbourg est décédé subitement le 14 mars 2012 à l'âge de 74 ans.

Dès ses années d'études, Buslaev a été associé au Département de Mathématiques et de Physique mathématique de l'Université d'État de Saint-Petersbourg. Il fut élève de O.A. Ladyzhenskaya et L.D. Faddeev. V.S. Buslaev a été membre de la faculté de Physique pendant cinquante ans et à la tête du Département les 12 dernières années.

Les centres d'intérêts et la variété des résultats de Buslaev furent remarquablement étendus. Ses travaux sur la théorie mathématique de la diffraction et la propagation des ondes, sur la théorie du scattering, sur les équations non-linéaires, sur les méthodes asymptotiques semi-classiques et adiabatiques, aussi bien que sur la théorie des équations aux différences à coefficients périodiques, ont été grandement reconnus par la communauté mathématique mondiale.

Le plus important résultat de Buslaev en théorie de la diffraction a été la justification rigoureuse de l'asymptotique à haute fréquence des ondes de scattering pour un obstacle convexe deux-dimensionnel. Pour parler de ce problème on doit mentionner un papier court mais très élégant dans lequel il déduit de manière heuristique ces asymptotiques au moyen d'une intégrale de Wiener.

Les travaux de Buslaev sur le scattering à longue portée et sur le scattering à plusieurs particules sont très connus. Avec V.B. Matveev, Buslaev a introduit la notion d'opérateurs d'onde modifiés, pour le cas de potentiels décroissant plus lentement que le potentiel de Coulomb. Il a obtenu plusieurs résultats profonds en théorie analytique du scattering à plusieurs particules. Avec S.P. Mercuriev il a obtenu les formules de trace, décrit les singularités de la matrice de scattering et trouvé les asymptotiques des fonction propres pour des systèmes quantiques à plusieurs particules.

V.S. Buslaev a été coauteur des célèbres formules de trace de Buslaev-Faddeev. Plus tard, après avoir développé les difficiles techniques très non triviales d'analyse adéquate, il généralisa ce résultat au cas multidimensionnel. V.S. Buslaev réalisa des travaux pionniers en théorie des équations non-linéaires notamment concernant le comportement en temps long des solutions de systèmes intégrables non linéaires. Avec V.V.Sukhanov il a mené à bien une analyse rigoureuse pour l'équation de

Korteweg-de Vries. Aussitôt après, en collaboration avec L.D. Faddeev et L.A. Takhtajan, il acheva l'interprétation hamiltonienne de la théorie du scattering pour cette équation. De plus, avec G.S. Perelman il a obtenu une série de résultats sur le scattering non linéaire et la stabilité asymptotique des solitons pour des équations d'onde générales. V.S. Buslaev a écrit de nombreux papiers bien connus sur l'analyse asymptotique. En particulier il développa une approche originale pour l'étude des asymptotiques des solutions d'équations de Schrödinger périodiques avec des perturbations adiabatiques. À l'aide de cette approche il obtint des résultats concernant les propriétés spectrales des électrons de Bloch dans des champs externes et l'asymptotique des résonances de Stark-Wannier (avec L.A. Dimitrieva et avec A. Grigis). Avec A.A. Fedotov, il développa une version de la méthode WKB complexe pour les équations aux différences dans le plan complexe, qui fut appliquée pour étudier les propriétés semi-classiques du spectre de l'équation de Harper. En collaboration avec A.M. Budylin, V.S. Buslaev obtint une série de résultats sur l'analyse semiclassique des opérateurs pseudodifférentiels à symboles discontinus dans les deux variables duales. Ces résultats furent alors appliqués à de nombreux problèmes de l'analyse asymptotique des équations différentielles intégrables et à des problèmes de physique statistique quantique et d'hydro- et aéro-dynamique. On doit aussi mentionner le papier de Buslaev sur la définition invariante de l'opérateur canonique de Maslov.

Plusieurs fois durant sa carrière mathématique V.S. Buslaev s'est intéressé aux problèmes de la diffraction et de la propagation des ondes. Il a consacré plusieurs papiers à la propagation du son dans l'océan. Ses résultats les plus connus dans ce domaine sont les formules des quatre rayons pour le champ du son près de la surface d'une mer profonde et la description du scattering des ondes soniques à haute fréquence par des anneaux synoptiques (structures adiabatiquement inhomogènes) dans l'océan (en collaboration avec A.A. Fedotov).

Pendant une longue période V.S. Buslaev, avec A.A. Fedotov, étudia les équations aux différences à coefficients périodiques sur la droite réelle et dans le plan complexe. Il considérait la méthode de monodromisation – une méthode de renormalisation qui fut développée au cours de ce travail – et les résultats correspondants comme une des plus importantes de ses réalisations.

Les papiers de Vladimir Savelievich Buslaev, ses idées et ses méthodes sont devenus le point de départ de nombreuses directions de recherche dans la physique mathématique moderne.

Beaucoup des étudiants de Buslaev sont devenus maintenant des mathématiciens bien connus. Il apprit à ses jeunes collègues à se concentrer sur des problèmes concrets non triviaux, à chercher les caractéristiques analytiques fondamentales de ces problèmes et à considérer le travail avec des formules comme central. De son point de vue, cette manière de penser fut une caractéristique principale de l'école mathématique de Saint-Petersbourg.

Vladimir Savelievich Buslaev était une personnalité extraordinaire. Ses idées et ses résultats entreront au patrimoine de la communauté mathématique pour un long avenir, et ses élèves et ses collègues se souviendront toujours de lui comme d'un brillant scientifique et d'un homme merveilleux.

Une version anglaise de cet article a déjà paru dans IAMP News Bulletin (avril 2012) auquel la Gazette exprime ses vifs remerciements.

Éloge de Paul Malliavin

prononcé à l'Académie des Sciences le 29 mai 2012

Jean-Michel Bismut

Madame,
Mesdames et Messieurs les membres de la famille de Paul Malliavin,
Mes chers confrères,
Mesdames, Messieurs,

Paul Malliavin est décédé à Paris le 3 juin 2010 dans sa quatre-vingt-cinquième année. Un mois auparavant, il avait participé à une conférence organisée en son honneur à Pékin. Il avait donné quatre exposés pendant son séjour, dont un exposé auquel j'ai pu assister, qui était intitulé *Canonical Brownian Motion on the Space of Jordan Curves*, où il rapportait sur l'un de ses derniers résultats, obtenu avec Hélène Airault et Anton Thalmaier. Paul Malliavin est ainsi resté actif et disponible jusqu'au bout.

C'est de sa vie et de son œuvre qu'il m'appartient de vous entretenir aujourd'hui. Paul Malliavin naît le 11 septembre 1925 à Neuilly. Son père était juriste, et sa mère médecin. Un oncle polytechnicien lui donne le goût des mathématiques, en lui enseignant des rudiments de trigonométrie et de balistique. Il hésitera d'ailleurs longtemps entre mathématiques d'une part, droit et économie d'autre part. Agrégé de mathématiques à 20 ans en 1946, après avoir suivi à la Sorbonne les cours d'Émile Borel et d'Élie Cartan, il interrompt ses études scientifiques pour obtenir en deux ans une licence en droit. Ayant reconnu que les mathématiques sont sa véritable vocation, il devient professeur de lycée à Nancy, tout en poursuivant sa formation à l'université de Nancy, où il côtoie Henri Cartan, Jean Dieudonné, et Jean Leray.

Sa vocation pour l'analyse s'affirme. Szolem Mandelbrojt lui propose l'étude d'un problème posé dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Mandelbrojt et Wiener [2] sur l'ensemble des zéros réels d'une fonction holomorphe dans le demi-plan droit, sous des conditions de croissance sur les parallèles à l'axe imaginaire. Dans sa thèse soutenue à l'université de Paris en 1954 et intitulée « Sur quelques procédés d'extrapolation », Paul Malliavin donne une solution complète du problème par une méthode de dualité totalement nouvelle. Cette thèse paraîtra en 1955 dans la revue *Acta Mathematica* [5].

Paul Malliavin est maître de conférences puis professeur à l'université de Caen de 1955 à 1962, Professeur à Orsay de 1962 à 1966, puis professeur à l'université de Paris à partir de 1967, dans la composante qui deviendra l'université Paris 6. Il enseigne également à l'École Polytechnique. Il est élu correspondant à l'Académie des Sciences en 1977, puis membre de l'Académie en 1979.

J'évoquerai devant vous son travail de mathématicien, ses contributions à la communauté scientifique, et sa participation à la vie de l'Académie des Sciences.

Paul Malliavin mathématicien

L'œuvre scientifique de Paul Malliavin est considérable. Elle touche à l'analyse réelle et complexe, à l'analyse harmonique, à la géométrie différentielle, aux équations aux dérivées partielles, à la théorie des probabilités qu'il contribue à révolutionner. Son œuvre se déroule sur 197 articles répertoriés aux *Mathematical Reviews*. Je n'en évoquerai ici que quelques aspects.

En 1959, Paul Malliavin [7, 8] résout un problème d'analyse harmonique posé par Beurling et Gelfand [1], la démonstration de l'impossibilité de la synthèse spectrale pour les groupes abéliens localement compacts qui sont non compacts. On veut savoir si certains espaces de fonctions peuvent être reconstruits à partir de fonctions de type exponentielle de Fourier, d'où le terme de « synthèse spectrale ». Dans le cas de $\mathbf{R}^3$, Laurent Schwartz [3] avait montré que la synthèse spectrale est impossible. Le contre-exemple donné par Paul Malliavin au problème général de la synthèse spectrale est obtenu par la construction d'une fonction très irrégulière, et par l'étude de son ensemble de zéros. Dans le compte rendu de l'article [7] dans les *Mathematical Reviews*, le mathématicien Carl Herz écrivait : *The result has been ardently sought for several years for the additive group of real numbers ; no progress at all has been made until this strikingly original work*. Le théorème de Malliavin a été redémontré plusieurs fois par des méthodes différentes [6, 10, 16].

En 1960 et 1961, à Princeton, Beurling et Malliavin développent ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de « théorie de Beurling-Malliavin » [9, 11]. Ils y caractérisent certaines fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions de type exponentiel, bornées sur la droite réelle, et calculent le rayon de totalité d'une suite de nombres réels ou complexes, autre question difficile d'analyse harmonique. Paul Malliavin considérait que son séjour à Princeton avait été l'une des périodes les plus heureuses de sa vie mathématique.

Les résultats évoqués précédemment placent Paul Malliavin au tout premier niveau parmi les analystes au plan international.

Paul Malliavin va s'intéresser à la théorie des probabilités, qu'il révolutionne dans ses concepts, et dans ses méthodes. Comprises comme une discipline de caractère expérimental à partir de la perception sensible du hasard interprété comme une réalité physique, les probabilités deviennent une théorie mathématique à part entière, à partir des bases posées en 1933 par Kolmogorov, qui les relient à la théorie de la mesure fondée par Lebesgue. Paul Lévy [4] avait réalisé le travail prodigieux d'étude à main nue de la trajectoire très irrégulière du mouvement brownien. Dans les années quarante et cinquante, Kyoshi Itô construit l'intégrale stochastique et le calcul différentiel stochastique, qui donnent un moyen de calculer tout aussi bien le long de ces trajectoires maximalement irrégulières que le long de courbes parfaitement lisses. Itô découvre également les équations différentielles stochastiques.

Paul Malliavin aborde la théorie des probabilités avec un triple bagage d'analyste harmonicien, d'analyste complexe et de géomètre. Il découvre qu'il est possible de faire de l'analyse sur l'espace des trajectoires du mouvement brownien, comme on le fait sur $\mathbf{R}$ ou sur une variété [13]. Aux solutions d'équations différentielles stochastiques de Itô, on peut appliquer un opérateur aux dérivées partielles en dimension infinie, l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, de la même manière qu'on applique le laplacien aux fonctions sur $\mathbf{R}$, pour en déduire des formules d'intégration par parties. Ce nouveau calcul fonctionnel est aujourd'hui universellement connu sous le nom de calcul de Malliavin. Il est le pendant fonctionnel du calcul de Itô.

Paul Malliavin applique alors cette nouvelle machine à un problème de régularité (ou d'hypoellipticité) d'opérateurs aux dérivées partielles étudiés par Hörmander [12]. Il déduit cette régularité de l'inversibilité de la matrice de covariance de Malliavin, elle-même conséquence de l'irrégularité des trajectoires du mouvement brownien : le vice au service de la vertu !

Approfondissant les travaux d'Itô et Eells-Elworthy, Paul Malliavin utilise la méthode du repère mobile d'Élie Cartan pour donner une description intrinsèque du mouvement brownien géométrique [14]. Il suffit de munir la trajectoire brownienne d'un repère orthonormé qu'elle transporte parallèlement le long d'elle-même. La difficulté évidente est que cette trajectoire n'est nulle part différentiable, que le transport parallèle n'existe pas a priori... peu importe. Le calcul de Itô est là pour remédier à cette apparente contradiction. Paul Malliavin découvre les flots stochastiques, qui étendent aux équations de Itô une propriété des équations différentielles ordinaires. Il invente un principe de comparaison entre solutions d'équations différentielles stochastiques pour comparer entre elles des variétés différentes... Je m'arrête.

Il faut bien admettre qu'à la fin des années soixante-dix, le public capable de comprendre et de s'approprier un si grand nombre d'idées et de méthodes nouvelles, convoqué par la baguette d'un chef d'orchestre qui se jouait des difficultés de lecture de sa partition, se comptait sur les doigts d'une main. Il avait inventé, pour situer en anglais la place du fameux repère mobile qui accompagnait le mouvement brownien, le terme de *upstairs*, alors que le mouvement brownien lui-même se trouvait *downstairs*. Nous étions ainsi ballottés entre deux étages desservis par un mystérieux escalier, que son propriétaire pouvait, semblait-il, escamoter à son gré.

Il n'empêche : des probabilistes aux États-Unis, au Japon, en France, travaillent sur un sujet dont ils perçoivent la richesse, aidés et encouragés par Paul Malliavin. Il y a bien longtemps que cette bataille là, a été gagnée, en France et ailleurs.

Je devrais décrire aussi ses travaux sur l'analyse harmonique sur l'espace des lacets d'un groupe de Lie [15], et sur la construction d'un mouvement brownien à valeurs dans les difféomorphismes du cercle. Des considérations de théorie des représentations l'ont poussé jusqu'à la fin de sa vie à étudier ce problème. Dans un travail mené avec Hélène Airault et Anton Thalmaier [17], il venait d'achever la construction de la diffusion correspondante, qu'on peut interpréter comme un mouvement brownien à valeurs dans les courbes de Jordan dans le plan complexe. C'est à ce résultat qu'était consacré son exposé de Pékin en mai 2010.

Je passe aussi sur les applications qu'il avait données de l'analyse de Fourier et du calcul de Malliavin. La distinction entre mathématiques pures et appliquées ne l'intéressait guère.

Sur le plan mathématique, Paul Malliavin était un radical. Il avait été proche de Jean Dieudonné, Pierre Lelong, et Jean Leray. Des liens d'une vie avaient créé entre Jean-Pierre Kahane et lui une grande complicité. Plus récemment, il s'était rapproché de mathématiciens plus jeunes, tels Pierre-Louis Lions et Cédric Villani.

Il acceptait volontiers d'autres approches que la sienne aux problèmes qu'il avait abordés, voire aux théorèmes qu'il avait démontrés. J'ai retiré le sentiment que les mathématiques l'ont immensément amusé.

Paul Malliavin professeur, éditeur et académicien

Paul Malliavin aura eu de nombreux élèves et disciples en France et à l'étranger. La richesse des thèmes qu'il avait abordés fournissait à ceux qui en avaient la volonté et la capacité des sujets de recherche sans fin. Certains de ses élèves sont d'ailleurs devenus ses collaborateurs. Il avait compris que la transmission directe était le meilleur moyen de rendre accessibles les théories difficiles qu'il avait développées. Il aura ainsi été un grand voyageur. Il se sera rendu très souvent en Chine, contribuant à la création d'une école chinoise de probabilités, formant des jeunes mathématiciens chinois, dont certains sont devenus professeurs en France. Le fait que la conférence donnée à Pékin en son honneur ait été organisée conjointement par des mathématiciens allemands et chinois ne devait rien au hasard.

Paul Malliavin aura été aussi l'éditeur d'un journal, le *Journal of Functional Analysis*, qu'il aura fait vivre de bout en bout. Ce journal fut créé en 1967 sous la direction conjointe de Paul Malliavin, Ralph Philips, et Irving Segal, trois très fortes personnalités. Ce journal est devenu une référence pour les développements majeurs des mathématiques d'aujourd'hui. Paul Malliavin en est resté éditeur en chef jusqu'à son décès. Un volume du journal lui avait été dédié en 2008. Il aura également associé son nom à deux autres journaux : le Bulletin des Sciences Mathématiques, et le Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Paul Malliavin était membre de l'Académie des Sciences depuis 1979. C'est peu de dire qu'il en était fier. Il s'était passionné pour les comptes rendus de l'Académie, et spécifiquement pour sa série mathématique. Il exprimait ses positions sur le sujet avec passion et une extrême fermeté. Il continuait à suivre les travaux des très jeunes mathématiciens, qu'il lisait attentivement, et dont il promouvait les œuvres.

Esprit rapide et brillant, il défendait ses points de vue avec énergie, n'hésitant pas à manier une ironie souvent allègre. Quand le besoin s'en faisait sentir, il pouvait utiliser les ressources de l'ancienne éloquence, avec d'autant plus d'efficacité que rien ne permettait d'en présager l'usage, ajouterais-je, particulièrement de la part d'un mathématicien. La place de la science dans la société le passionnait. Il déplorait la perte de pouvoir des ingénieurs au profit des financiers dans les entreprises nationales.

Face à la Seine, dans la Bibliothèque Mazarine qu'il faisait visiter à Michèle Vergne [18], il citait Richelieu : « Je regretterai la beauté de ces lieux dans l'au-delà ». Dans un petit bureau de l'Institut Henri Poincaré, où il m'est arrivé de le retrouver pour quelques heures, je pouvais recommencer l'histoire que je souhaitais lui raconter exactement au point où je l'avais laissée six mois auparavant, épiant ses réactions face aux turbulences d'objets qu'il avait découverts, dans un certain silence.

Il était membre de l'Académie des Sciences de Suède, de l'*Academy of Arts and Sciences*, et de l'Académie des Technologies, et docteur honoris causa de plusieurs universités étrangères, dont la *Scuola Normale* de Pise et la *Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität* de Bonn. Il avait été membre du comité de la médaille Fields pour le Congrès Mondial de Mathématiques de 1982, tenu en 1983 à Varsovie.

Conclusion

Chez un mathématicien, l'œuvre écrite n'exprime qu'imparfaitement la stratification des savoirs, des espoirs et des doutes, à travers laquelle s'exprime sa personnalité scientifique. Paul Malliavin était une très forte personnalité, dans les mathématiques, et dans le monde.

Il nous appartient de saluer en Paul Malliavin la mémoire d'un très grand mathématicien, qui, dans la sphère qui était la sienne, aura changé le monde.

Références

[1] I. Gelfand. Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 9 (51) :41–48, 1941.

[2] S. Mandelbrojt et N. Wiener. Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 :978–980, 1947.

[3] L. Schwartz. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 :424–426, 1948.

[4] P. Lévy. *Le mouvement brownien*. Mémor. Sci. Math., n° 126. Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[5] P. Malliavin. Sur quelques procédés d'extrapolation. *Acta Math.*, 93 :179–255, 1955.

[6] J.-P. Kahane. Sur un théorème de Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2943–2944, 1959.

[7] P. Malliavin. Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1959 :85–92, 1959.

[8] P. Malliavin. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2155–2157, 1959.

[9] A. Beurling et P. Malliavin. On Fourier transforms of measures with compact support. *Acta Math.*, 107 :291–309, 1962.

[10] N. Varopoulos. Sur un théorème de M. Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263 :A834–A836, 1966.

[11] A. Beurling et P. Malliavin. On the closure of characters and the zeros of entire functions. *Acta Math.*, 118 :79–93, 1967.

[12] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.

[13] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.

[14] P. Malliavin. *Géométrie différentielle stochastique*, volume 64 of *Séminaire de Mathématiques Supérieures [Seminar on Higher Mathematics]*. Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1978. Notes prepared by Danièle Dehen et Dominique Michel.

[15] M.-P. Malliavin et P. Malliavin. Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures. *J. Funct. Anal.*, 93(1) :207–237, 1990.

[16] J.-P. Kahane et Y. Katznelson. Sur un théorème de Paul Malliavin. *J. Funct. Anal.*, 255(9) :2533–2544, 2008.

[17] H. Airault, P. Malliavin, et A. Thalmaier. Brownian measures on Jordan-Virasoro curves associated to the Weil-Petersson metric. *J. Funct. Anal.*, 259(12) :3037–3079, 2010.

[18] M. Vergne. Malliavin et moi. *Gaz. Math.*, (126) :111–113, 2010.

Je remercie très vivement Madame Paul Malliavin pour les informations qu'elle a bien voulu me communiquer sur la vie et l'œuvre de Paul Malliavin.

Éloge de Poincaré

Cimetière du Montparnasse, 9 juillet 2012

Alain Chenciner

Mesdames, Messieurs, membres de la famille d'Henri Poincaré, représentants d'institutions ou de sociétés savantes, mathématiciens, philosophes, physiciens, journalistes, passants, curieux, poètes ... C'est un homme encore jeune, 58 ans, un homme en pleine possession de son génie, je le vois, assis à sa table de travail, une main posée sur le rebord, l'autre étendue sur la jambe légèrement repliée, le regard tourné vers l'intérieur, derrière le lorgnon, les cheveux légèrement hérissés, les sourcils relevés, si proche et si lointain, ... Cet homme, c'est à lui que je m'adresse aujourd'hui en votre nom, avec à la fois le respect que commande son ombre immense et la familiarité que produit un long commerce avec sa pensée, dont la force et la nouveauté sont, aujourd'hui encore, intactes.

Henri Poincaré, permets que je te dise « tu » ; après tout, tu es encore bien jeune ; et n'avons-nous pas fréquenté la même école où il est d'usage de s'appeler « cher camarade » ? Prononcer ton éloge ! Autant passer en revue une grande partie de la mathématique et de la physique du 20^{e} siècle et aussi les nouvelles technologies et la philosophie des sciences. Mais aucun tableau noir ici, pas de formules, pas même de figures pour honorer le géomètre. Il me faut donc essayer avec de simples mots de faire vivre les paysages que tu nous as fait découvrir, les continents que tu nous as donnés à explorer.

Tu es né le 29 avril 1854 à Nancy, dans une famille de la grande bourgeoisie lorraine. Ton père, Léon Poincaré, est neurologue et enseigne à la faculté de médecine ; ton oncle, Antoine Poincaré, est polytechnicien, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées ; Raymond Poincaré, qui sera Président de la République de 1913 à 1920, est un cousin ; ta femme, Louise Poulain d'Andecy, que tu épouseras en 1881, est apparentée par sa mère à Etienne Geoffroy Saint-Hilaire...

À seize ans, tu es confronté à la guerre, à l'occupation, et cela te marque profondément. Tes dons se manifestent avec un tranquille éclat dès l'adolescence. Paul Appell, ton compagnon en classe préparatoire, décrira la déjà déroutante concision des solutions que tu donnes aux problèmes proposés, allant droit au but tel un voyant, sans s'embarrasser d'explications intermédiaires. Tu choisis de rentrer à l'École Polytechnique, où tu as été reçu premier.

Heureuse époque pour les mathématiques à l'Ecole Polytechnique, si différente d'aujourd'hui. La tradition de Monge, Lagrange, Poisson, Fourier, Cauchy, est bien vivante. Quoiqu'en tous points opposé à ta forme d'esprit, Hermite, l'anti-géomètre qui a remplacé Bertrand, t'influence profondément par son cours d'analyse, qui fait la part belle aux équations différentielles. Célèbre en particulier pour sa preuve de la transcendance du nombre e, il inspirera tes études des formes quadratiques et ternaires. Hadamard a parfaitement décrit l'opposition de vos deux natures :

« Face à une découverte d'Hermite, on est enclin à dire :

– Admirable qu'un être humain ait pu parvenir à une manière de penser si extraordinaire !

Mais, lisant un mémoire de Poincaré, on dit :

– Comment se fait-il que l'on ne soit pas arrivé beaucoup plus tôt à des choses aussi profondément naturelles et logiques ? »

Ta première publication date de cette époque. Trace plus anecdotique de ton passage à l'X, un superbe diagramme envoyé à ta mère, qui décrit avec une parfaite précision l'évolution de ton rhume.

Sorti second, tu entres en octobre 1875 à l'École des Mines et es nommé en 1878 ingénieur à Vesoul.

En 1879, tu soutiens une thèse intitulée « Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles ».

L'un des lemmes de ta thèse est le début de la théorie des *formes normales*, c'est-à-dire de la recherche de changements de coordonnées locales qui rendent la plus apparente possible la géométrie de la situation.

Si la commission, composée de Jean-Claude Bouquet, Pierre-Ossian Bonnet et Gaston Darboux, est impressionnée par les résultats, elle critique cependant la rédaction, parfois obscure et imprécise. Ce sera un trait constant de tes écrits : ta pensée est trop rapide, tes intérêts trop multiples. Une fois acquis le résultat, tu n'as pas le temps de revenir sur ta rédaction pour la polir. D'autres problèmes t'occupent déjà. Darboux l'exprimera bien plus tard : « une fois au sommet, il ne revenait jamais sur ses pas ». Un bel exemple se trouve dans le paragraphe 341, chapitre XXIX, du volume 3 de tes *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, paru en 1899 : *« Jusqu'ici, quand j'ai dit, telle intégrale est minimum, je me suis servi d'une façon de parler abrégée, mais incorrecte, qui ne pouvait d'ailleurs tromper personne ; je voulais dire, la variation première de cette intégrale est nulle ; cette condition est nécessaire pour qu'il y ait minimum, mais elle n'est pas suffisante ».*

Géométrie, groupe, les maîtres mots ! Tu développes la théorie des fonctions fuchsiennes, vaste généralisation des fonctions elliptiques, dans le but explicite d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Mais c'est la découverte du lien étroit avec la géométrie non-euclidienne qui te permet d'atteindre le but. Les fonctions fuchsiennes te conduisent naturellement au théorème d'uniformisation. Si, en 1882, tu en annonces, ainsi que Klein, une démonstration, il faudra attendre 1907 pour que tu aies enfin, en même temps que Koebe, une démonstration complète de ce théorème qui, couronnant l'œuvre de Riemann, domine les mathématiques du 19^{e} siècle.

L'année 1881, celle de ton mariage, est décidément miraculeuse. Remplaçant l'étude analytique locale dans le champ complexe (celle de Briot et Bouquet) par une étude qualitative globale dans le champ réel, tu bouleverses la théorie des équations différentielles et crées ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie des systèmes dynamiques*. Y figure par exemple ton « théorème de l'indice » affirmant que, pour un champ de vecteurs sur la sphère, le nombre de nœuds et de foyers est égal au nombre de cols augmenté de 2. Te rappelles-tu l'introduction de ton mémoire *Sur les courbes définies par une équation différentielle* ? *« Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions*

de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres... »
Voici donc le moment où, à 27 ans, tu comprends que la connaissance analytique explicite d'une solution d'une équation différentielle peut n'apporter que très peu d'information effective sur le comportement du système qu'elle décrit.

Mais bientôt, tout en faisant des apports décisifs à l'arithmétique (formes quadratiques, forme automorphes) et à la géométrie algébrique (fonctions abéliennes), tu fais les premières incursions dans le domaine inexploré des fonctions de deux variables complexes (fonctions méromorphes, domaines d'holomorphie). Et comme dans les autres domaines, tes contributions sont fondamentales et créent de nouveaux champs de recherches.

Continuons. Que ce soit pour les équations différentielles, les fonctions algébriques de deux variables, les sous-groupes finis des groupes de Lie, tu as besoin de développer les outils qui permettent l'étude qualitative. Et, comme avait fait Riemann, tu les crées de toutes pièces. Texte fondateur de la topologie algébrique, ton *Analysis situs* paraît en 1895 ; en environ 100 pages, tu y introduis les concepts d'homologie, de nombres de Betti, de groupe fondamental, la caractéristique d'Euler-Poincaré, la dualité de Poincaré (théorie de l'intersection) ; c'est l'évolution des mathématiques dans tous les domaines qui s'en trouvera affectée. Tu énonces d'abord de façon fautive ta fameuse conjecture, démontrée un siècle plus tard par Perelman, qui caractérise homotopiquement la sphère de dimension trois parmi toutes les « variétés différentiables » de dimension 3. Mais tu donnes rapidement le remarquable contre-exemple d'une sphère d'homologie dont le groupe fondamental est le groupe du dodécaèdre.

La même année 1885, tu publies un texte fondamental sur les figures d'équilibre d'une masse fluide, étudiant les « bifurcations » associées aux changements de stabilité : de l'ellipsoïde de révolution de Mac Laurin à l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi et enfin aux figures piriformes que tu viens de découvrir, qui elles-mêmes pourraient se scinder en deux masses inégales. George Darwin, le fils de Charles, pensera en déduire un mécanisme de formation de la Lune mais Liapunov, puis Jeans et enfin Elie Cartan montreront l'instabilité d'un tel scénario.

Tout aussi importante, ta découverte, deux ans plus tard, du *balayage* qui, fournissant une distribution de charges sur la sphère ayant même potentiel à l'extérieur qu'une distribution donnée à l'intérieur de la boule, permet dans beaucoup de cas de justifier le *principe de Dirichlet* et donc de résoudre des problèmes aux limites pour l'équation de Laplace, fondamentale pour l'attraction newtonienne, mais aussi en électricité et en magnétisme.

J'en viens à l'une des parties les plus importantes de ton œuvre, celle en tout cas que j'ai le plus pratiquée, la *Mécanique céleste* et plus particulièrement le *Problème des trois corps*. Si ta première note sur le sujet date de 1883, c'est dans les trois volumes des *Nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, parus entre 1892 et 1899, et totalisant près de 1300 pages, que culminent tes recherches. Dans cet ouvrage extraordinaire, dont Painlevé a dit qu'il était l'œuvre qui porte peut-être la marque la plus profonde de ton originalité, tu développes le mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, qui t'avait valu le prix du roi de Suède en 1889. Combien de notions trouvent là leur origine : existence et stabilité des *solutions périodiques, solutions asymptotiques, exposants caractéristiques, invariants intégraux, solutions homoclines, application de premier retour*. Tu y démontres l'existence et la divergence des *séries de Lindstedt* tout en étant conscient de la possibilité que certaines des séries à fréquences fixées convergent, ce que démontrera Kolmogorov en 1954 ; tu y présentes les *invariants intégraux* comme les ersatz infinitésimaux de ces *intégrales premières* dont tu montres qu'il ne peut y en avoir d'autres que celles classiquement déduites des symétries du problème ; tu y démontres ton célèbre *théorème de récurrence* par une manipulation virtuose de ces probabilités continues dont Joseph Bertrand avait si peur. Ce qu'on nomme aujourd'hui (bien mal à mon avis) le *chaos déterministe* vient de là et des travaux d'Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, si joliment décrits par Pierre Duhem qui contemple les géodésiques s'enroulant autour des deux cornes d'un taureau. Mais le problème des trois corps, plus exactement le problème restreint qui t'a surtout occupé, par exemple le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, ressemble au problème des *géodésiques* sur une surface proche d'une sphère, donc à courbure positive, et tu sais bien que ce cas est incommensurablement plus difficile que le cas de courbure négative traité par Hadamard.

Dans le mémoire original, la question principale était celle de la *stabilité*. Ce problème, tu réussis, en introduisant l'idée d'une *surface de section*, définie par les retours au périhélie, et en utilisant les invariants intégraux, à le ramener à l'étude de l'itération d'une application conservant les aires d'un domaine du plan dans lui-même. On connaît l'histoire de ton erreur, due peut-être à une trop fine analyse qui t'avait fait prendre pour nulle une quantité dont tu savais qu'elle était nulle à tous les ordres de la théorie des perturbations (on parle aujourd'hui de *splitting exponentiellement petit des séparatrices*). Mais on sait aussi que toute la théorie moderne des systèmes dynamiques conservatifs est sortie de cette erreur, décidément fort féconde. La théorie ergodique, en particulier, précise ton théorème de récurrence qui dit que, pour presque toutes les *conditions initiales*, un système dynamique conservatif dont l'espace des phases est de volume fini va repasser au cours du temps aussi près que l'on veut de sa condition initiale, et ce de façon répétée. C'est ce que tu as appelé *Stabilité à la Poisson*, allusion à l'absence au deuxième ordre de termes purement séculaires dans les demis grands axes planétaires, pour remplacer la stabilité perdue du Mémoire.

Le dernier article que tu publies concerne les solutions périodiques, cette *« seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable »*. Tu y montres l'importance de ce qu'on appellera ton *dernier théorème géométrique*, qui sera démontré deux ans plus tard par Birkhoff et peut être considéré comme l'ancêtre de la *Topologie symplectique*.

Combien d'idées que nous tenions pour récentes se trouvent déjà dans ces trois volumes ! C'est manifestement pour toi que les oulipiens ont créé le concept de *plagiaire par anticipation*.

Avec les équations différentielles, la théorie du potentiel, le problème des trois corps, nous sommes déjà dans la physique mathématique, que tu caractérises ainsi :

« En résumé le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles. Il est encore, il est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais. De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir. » (La valeur de la science, Chapitre 5)

Dans les quelques 15 volumes qui constituent la rédaction de tes cours de la Sorbonne, tu as passé en revue, que dis-je, tu as re-pensé l'ensemble des théories physiques de ton époque : *Thermodynamique, Électricité et optique, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Théorie mathématique de la lumière, Calcul des probabilités, Capillarité, Tourbillons, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*... Et de plus, tu enseignais à l'École supérieure des Télégraphes, tu vulgarisais la TSF dans un petit livre élémentaire, tu écrivais en postface à la Monadologie de Leibniz une note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz, tu supervisais en tant que président du Bureau des longitudes l'expédition du méridien de Quito, tu participais avec Rémy Perrier et Paul Painlevé à la rédaction d'un beau livre pour les enfants intitulé *Ce que disent les choses*. Mais comment faisais-tu ?

On a beaucoup discuté pour savoir si tu avais ou non inventé avant Einstein la *théorie de la relativité*. On s'accorde aujourd'hui sur le fait que tu en avais tout l'appareil mathématique ainsi que les bases conceptuelles : impossibilité de détecter le mouvement absolu, impossibilité d'une intuition directe de la simultanéité de deux événements ayant lieu dans des endroits différents. Ce serait en quelque sorte ta tendance au nominalisme qui t'aurait empêché de faire immédiatement le pas décisif rejetant définitivement l'éther. Mais Einstein lui-même n'est-il pas revenu à une forme abstraite d'éther ? Et le *groupe de Poincaré* est bien vivant !

Et n'oublions pas la philosophie. Je ne sais si l'on peut encore dire aujourd'hui, comme Frédéric Masson lors de ta réception à l'Académie française dans le fauteuil de Sully Prudhomme, que tu as « initié aux mystères de la haute philosophie scientifique la nation entière » – il est vrai que vendre en peu de temps 16 000 exemplaires d'un livre de philosophie des sciences n'est pas chose courante – mais c'est un fait que tes quatre livres, *La science et l'hypothèse, Science et méthode, La valeur de la science, Dernières pensées*, n'ont rien perdu de leur force conceptuelle. Bien loin d'une philosophie spontanée de savant, ils forment une philosophie des sciences construite et cohérente. Le passage suivant, sur la notion de groupe des déplacements, traduction de ton article *On the foundations of geometry* paru dans *The Monist* en 1898 illustre bien ton *conventionnalisme géométrique* : *« Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas* *seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques. »*

et en conclusion :

« Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le groupe des déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie : en résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. »

Comme le résume Gerhardt Heinzmann : la construction de la réalité mathématique est à effectuer à partir de l'imagination de sensations ; cette construction doit être guidée par l'expérience ; l'expérience n'est pas suffisante, mais n'est que l'occasion de prendre conscience de certaines catégories de l'esprit avec lesquelles il faut faire concorder par décision (convention) notre expérience.

Il manque un mot ici, *beauté* ou *harmonie*, mais tu ne l'oublies pas, toi qui, dans l'introduction de *La valeur de la science*, écris

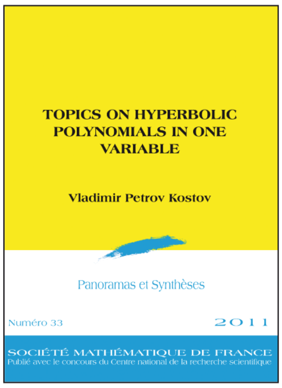
« Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous ; cette partie commune, comme nous le verrons, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques.

C'est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre ; et si j'ajoute que l'harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître. »

Henri Poincaré, quel meilleur salut t'offrir que les mots que tu avais toi-même adressés à Halphen :

« Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi ; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver. »

Cet éloge a été prononcé devant la tombe de Poincaré au cimetière du Montparnasse, le 9 juillet 2012, dans le cadre de la journée d'hommage organisée à l'observatoire de Paris `http://www.imcce.fr/poincare2012/`.
Il se trouve en ligne sur le site de l'IHP `http://www.poincare.fr/`.



Panoramas et Synthèses 33

Topics on Hyperbolic Polynomials in one Variable
Vladimir Petrov Kostov

The book exposes recent results about hyperbolic polynomials in one real variable, i.e. having all their roots real. It contains a study of the stratification and the geometric properties of the domain in $\mathbb{R}^n$ of the values of the coefficients a_j for which the polynomial $P := x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ is hyperbolic. Similar studies are performed w.r.t. very hyperbolic polynomials, i.e. hyperbolic and having hyperbolic primitives of any order, and w.r.t. stably hyperbolic ones, i.e. real polynomials of degree n which become hyperbolic after multiplication by x^k and addition of a suitable polynomial of degree $k-1$. New results are presented concerning the Schur-Szegő composition of polynomials, in particular of hyperbolic ones, and of certain entire functions. The question what can be the arrangement of the $\frac{1}{2}n(n+1)$ roots of the polynomials $P, P^{(1)}, \ldots, P^{(n-1)}$ is studied for $n \leq 5$ with the help of the discriminant sets $\mathrm{Res}(P^{(i)}, P^{(j)}) = 0$.

ISBN : 978-2-85629-346-1

prix public* : 30 € - prix membre* : 21 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization
Levent Tunçel,
American Mathematical Society, et The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2010, 219 p., ISBN 978-0-8218-3352-0, \$77

L'ouvrage commence par rappeler les notions de *programmation linéaire* et *programmation semidéfinie*. (Rappelons que, dans ce contexte, la « programmation » ne se rapporte pas à l'écriture de logiciels, mais à la résolution de problèmes d'optimisation.)

La programmation linéaire est bien connue depuis les années 1950 : il s'agit, étant donnés une matrice A et un vecteur b réels (ou rationnels), de maximiser une forme linéaire $c^T x$ sur l'ensemble des solutions de $Ax \leqslant b$ (un polyèdre convexe), et de calculer le x^* optimal. Ce problème admet une dualité convexe forte (garantie par le lemme de Farkas) : à un problème primal de la forme « minimiser $c^T x$ sous contrainte $Ax = b \wedge x \geqslant 0$ » correspond un problème dual de la forme « maximiser $b^T y$ sous contrainte $A^T y + s = c \wedge s \geqslant 0$ », et si le premier a une solution optimale x^*, alors le second également (notée y^*) et leurs valeurs $c^T x^*$ et $b^T y^*$ coïncident. Certaines méthodes numériques de résolution exploitent cette dualité, par exemple en maintenant à la fois une sur-approximation $c^T x$ de l'optimum et une sous-approximation $b^T y$; de plus, formuler un problème sous l'une ou l'autre forme peut être plus économique. On connaît depuis longtemps l'*algorithme du simplexe*, qui explore les sommets du polyèdre $Ax \leqslant b$ en suivant les arêtes à la recherche du sommet optimal ; si cet algorithme est dans la pratique très efficace (on en a aujourd'hui des versions très optimisées tant en calculs flottants qu'en calculs rationnels exacts), son nombre d'opérations est dans le pire cas exponentiel en le nombre de contraintes du problème d'origine (le nombre de lignes de A).

L'existence d'un algorithme polynomial – c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P tel que le nombre d'opérations élémentaires de l'algorithme est borné par $P(|x|)$ où $|x|$ est le nombre de bits de l'écriture en binaire de l'entrée, le triplet (A, b, c) – n'a été établie qu'en 1979, avec la *méthode de l'ellipsoïde* de Khachiyan (chapitre 3 de l'ouvrage). Celle-ci n'est pas efficace en pratique, mais elle permet d'établir des résultats théoriques de complexité algorithmique, notamment par l'usage de problèmes décrits par un oracle de séparation (au lieu de contraintes explicites $Ax \leqslant b$).

La programmation semidéfinie est en revanche moins connue. Reprenons la formulation de la programmation linéaire vue ci-dessus : « minimiser $c^T x$ sous contrainte $Ax = b \wedge x \geqslant 0$ », autrement dit minimiser « $c^T x$ dans l'intersection de l'espace affine des solutions d'$Ax = b$ et du cône convexe des vecteurs à coefficients positifs ». Il existe une théorie générale de l'optimisation par rapport à des cônes convexes, avec des notions adaptées de dualité (voir par exemple Boyd &

Vandenberghe, *Convex optimization*) ; la programmation semidéfinie en est l'instance où les vecteurs sont des matrices symétriques réelles et où le cône considéré est celui des matrices M semidéfinies positives (noté $M \succeq 0$), autrement dit celles n'ayant aucune valeur propre négative. On calcule donc

$$\inf \left\{ c^T x \mid -F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i \succeq 0 \right\} \tag{1}$$

où $-F_0 + \mathrm{vect}(F_1, \ldots, F_n)$ est l'espace affine considéré (c'est sous cette forme que la plupart des outils numériques prennent ce problème). Il existe là aussi une formulation duale $\sup\{\ldots\}$, mais ici il peut exister un strict *écart de dualité* ($\sup\{\ldots\} < \inf\{\ldots\}$). Outre son utilisation en optimisation combinatoire, la programmation semidéfinie sert notamment à trouver des expressions de polynômes en sommes de carrés, ou en quotient de sommes de carrés, pour montrer leur positivité.

Les problèmes de programmation linéaire et semidéfinie peuvent se résoudre par des méthodes de *points intérieurs*. Rappelons que l'on cherche un optimum dans un convexe K (l'intersection du cône avec l'espace affine) ; voici maintenant l'idée de la méthode (chapitre 4). On choisit une fonction f strictement concave et suffisamment régulière, valant $-\infty$ sur le bord de K et des valeurs finies dans son intérieur ; les surfaces de niveau forment donc des « couches d'oignon » donnant, à la limite, la forme de K. Par optimisation numérique on trouve le maximum de f dans K (le « centre » de K). On s'intéresse ensuite aux « tranches d'oignon », c'est-à-dire aux intersections de K avec les plans $c^T x = \alpha$ où α varie ; on suit le chemin central, c'est-à-dire les centres des tranches, en faisant diminuer α. On arrive à l'optimum.

La programmation linéaire a depuis longtemps été appliquée à l'optimisation combinatoire. Un exemple classique est le *problème du voyageur de commerce* : on se donne un graphe dirigé où chaque arête (i, j) porte un coût c_{ij} (on peut prendre $c_{ij} = \infty$ pour les arêtes absentes) et on cherche un circuit de coût total minimal passant par tous les sommets (le problème tient son nom du cas où les sommets sont des villes et les coûts des temps de trajet, le voyageur de commerce souhaitant minimiser le temps nécessaire à visiter toutes les villes). Ce problème est NP-complet, même si l'on se restreint à des sommets placés dans un plan et à c_{ij} la distance euclidienne entre les sommets i et j ; on conjecture donc qu'il n'existe aucun algorithme polynomial pour le résoudre (la définition précise de problème NP-complet nous entraînerait trop loin ; il suffit de noter que la question de prouver qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial pour eux est un des problèmes du millénaire de l'Institut Clay). Pourtant, en pratique, on le résout assez bien à l'aide de programmation linéaire en nombres entiers. On se donne des variables entières $0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1$ signifiant si une arête est présente (1) ou non (0) dans le circuit, avec la contrainte que pour chaque nœud i_0, $\sum_j a_{i_0 j} = \sum_j a_{j i_0} = 1$ (le circuit rentre et sort une fois de chaque sommet), et on minimise $\sum_{i,j} a_{ij} c_{ij}$. Si la solution fournie est fractionnaire, on exclut celle-ci à l'aide de *coupes de Gomory-Chvátal*, c'est-à-dire des inégalités forcément satisfaites par toute solution entière. Il peut aussi arriver qu'on obtienne une solution entière définissant non pas un circuit, mais une union de circuits disjoints, auquel cas on rajoute une contrainte obligeant le circuit à franchir une des disjonctions rencontrées.

Ceci illustre bien certaines des techniques utilisées en optimisation combinatoire : on *relaxe* le problème discret, combinatoire, vers un problème d'optimisation en grandeurs continues, et même polyédrique (programmation linéaire) ; on résout celui-ci ; on rajoute au besoin des contraintes excluant des solutions parasites ; on impose que certaines variables soient entières à l'aide de coupes ou d'autres méthodes. L'ouvrage présente des méthodes de relaxation et d'approximation pour divers problèmes.

Un même problème peut se formuler de différentes façons, dont certaines peuvent produire un nombre très élevé de contraintes ; il est souvent rentable de rajouter des variables supplémentaires si cela permet de diminuer le nombre de contraintes. Il s'agit ici en quelque sorte d'inverser la projection d'un polyèdre (projeter un polyèdre peut résulter en un polyèdre avec un nombre de faces bien supérieur, exponentiel en le nombre de dimensions projetées). Les chapitres 7 et 8 discutent de méthodes systématiques, dites *lift and project*, pour obtenir ce genre de formulations en tirant partie du fait que certaines variables sont $\{0, 1\}$.

L'ouvrage de L. Tunçel balaie des sujets assez divers (méthodes de résolution de problèmes en programmation linéaire et semidéfinie, complexité algorithmique, formulation de certains problèmes de graphes, *lift and project*, représentation de certains problèmes comme sous-problèmes de la programmation semidéfinie...), le tout dans un format assez restreint. Autant dire qu'il n'a guère le temps de s'étendre didactiquement sur chaque sujet ; il s'agit d'un ouvrage destiné à un public déjà très averti.

David Monniaux,
CNRS (Laboratoire VERIMAG)

An Introduction to Measure Theory
TERENCE TAO,
American Mathematical Society, 2011, 206 p., ISBN 978-0-8218-6919-2, $53

Le livre de Terence Tao « An Introduction to Measure Theory » se compose de deux chapitres : l'un, très long (172 pages) sur la théorie générale de la mesure, l'autre nettement plus court contenant des compléments, essentiellement le théorème de Rademacher sur la différentiabilité presque partout des fonctions lipschitziennes et le théorème d'extension de Kolmogorov qui permet de construire des produits infinis d'espaces de probabilités et des processus stochastiques de lois prescrites.

On retrouve dans cet ouvrage le style, les qualités et les préoccupations pédagogiques, de T. Tao : les choses sont racontées et répétées, les fils conducteurs des preuves suivis jusqu'au bout, sans obsession de la brièveté, et la vision du sujet est *panoramique* et trahit l'envergure scientifique de l'auteur. La présentation (influencée par les ouvrages récents de Stein et Shakarchi, comme le dit lui-même T. Tao) est *géométrique.* Elle fait aussi constamment référence à un autre ouvrage de l'auteur (*An epsilon of Room, Vol.I*) qu'il vaut mieux avoir entre les mains si l'on veut lire cette introduction à la théorie de la mesure avec le maximum d'efficacité. En particulier, le lecteur est renvoyé à *An epsilon of Room, Vol.I* pour le théorème de représentation de Riesz (comparaison entre les points de vue ensembliste et fonctionnel).

Décrivons maintenant le contenu du nouvel ouvrage plus en détail :

1) Le très long « chapitre 1 » commence par poser le problème de la notion de mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, avec comme point de départ les *ensembles élémentaires*, les unions finies de pavés, puis la mesure de Jordan d'une partie bornée quelconque, avec son caractère finiment additif et son lien avec la Riemann-intégrabilité. Les limitations de cette procédure conduisent naturellement à la « vraie » mesure de Lebesgue, et la différence fondamentale entre recouvrements finis et recouvrements dénombrables est bien amenée et commentée. On passe ensuite à la construction de l'intégrale et aux trois principes de Littlewood, illustrés notamment par les théorèmes d'Egoroff (toute convergence simple est uniforme à epsilon près) et de Lusin (toute fonction mesurable est continue à epsilon près). Á ce stade (nous en sommes au milieu du chapitre), T. Tao fait le bilan de ce qui précède, pour motiver l'introduction des algèbres de Boole et des mesure finiment additives (qui correspondent à Jordan) puis des sigma-algèbres et des mesures (qui correspondent à Lebesgue). Cela conduit inévitablement à un certain nombre de répétitions, assumées par l'auteur, et bien supportées par le lecteur. Les théorèmes fondamentaux (Beppo Levi, Fatou, Lebesgue) sont prouvés, ainsi que le théorème de Vitali sur la convergence en norme L^1 des suites de fonctions équiintégrables qui convergent en mesure. Le *point fort* de la suite est le traitement en quarante pages de la différentiation, avec les deux grands théorèmes de Lebesgue de dérivation des intégrales et d'intégration des dérivées (on se passerait d'une redémonstration des théorèmes de Rolle et des accroissements finis). La question est traitée à fond dans les méthodes (lemme du soleil levant, fonction maximale de Hardy-Littlewood, lemmes de recouvrement de Vitali et Besicovitch, lemme de Cousin) et dans les énoncés (fonctions monotones, à variation bornée, lipschitziennes, absolument continues, à plusieurs variables,...). Les preuves, par exemple celle de la formule fondamentale

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

si F est *partout* dérivable à dérivée Lebesgue-intégrable, ne sont délibérément pas toujours les plus courtes, au profit d'un « désossage » souvent plus instructif qu'un minimalisme glacé. Ce chapitre finit par une nouvelle conceptualisation : avec une trentaine de pages sur les prémesures, les mesures extérieures (et le théorème de prolongement de Carathéodory), les mesures produits finis et les théorèmes de Fubini.

2) Le chapitre 2 est nettement plus court. Il commence par une douzaine de pages « Problem Solving Strategies » (qui m'ont paru d'un intérêt discutable), et se poursuit avec le théorème de différentiation de Rademacher, très bien expliqué avec le théorème de Fubini et la formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_v f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)D_{-v}g(x)dx.$$

Enfin, l'auteur conclut par le théorème de compatibilité de Kolmogorov (avec une hypothèse topologique) qui contient la construction d'un produit infini d'espaces de probabilité.

Cet ouvrage sera lu avec grand profit par les étudiants à partir du L3, les agrégatifs, et les enseignants-chercheurs. Un point de forme m'a un peu chagriné, le mélange des genres entre exercices (sans doute trop nombreux, et parfois aussi dérangeants dans la lecture qu'une publicité télévisée pendant un bon film) et le cours. Certains de ces exercices m'ont paru moyennement intéressants (toute fonction lipschitzienne est uniformément continue mais la réciproque est fausse), d'autres (comme les lemmes de Besicovitch qui permet une inégalité maximale pour des mesures non-doublantes, et de Cousin, qui est la pierre de touche de l'intégrale de Kurwzweil-Henstock) très intéressants. Et Besicovitch en dimension un est facile à établir. Mais même si le lecteur est capable de « faire » ces exercices sur Besicovitch et Cousin, dommage que ces résultats fondamentaux ne figurent pas dans le cours, où ils sont utilisés ! J'aurais pour ma part préféré leur regroupement à la fin d'un paragraphe ou d'un chapitre, et qu'un certain nombre de propriétés dont la preuve est sans grand intérêt (comme les propriétés de la mesure de Jordan dans l'exercice 1.1.16) soient simplement énoncées comme des faits, dont la vérification est laissée au lecteur. Cette petite réserve de forme mise à part, on ne peut que recommander chaleureusement la lecture et l' achat du livre « An Introduction to Measure Theory » de Terence Tao !

Hervé Queffélec,
Université Lille 1

Le Théorème de Travolta
Olivier Courcelle,
Amazon, 2012 (Plon, 2002), 274 p., ISBN 978-2954222509, 4.99€(électr.), 11.99€(papier)

Cet ouvrage est une réédition électronique et papier (impression à la demande) du roman paru chez Plon en 2002 et qui était depuis longtemps épuisé. L'occasion, pour ceux qui ne l'avaient pas encore lu de se détendre en suivant le héros de l'histoire, Faroud, mathématicien raté (quoi que... !) au Congrès International des Mathématiciens à Genève. Il y rencontrera d'autres comparses, dont Jean-Jacques, qui tente de faire carrière dans le cobordisme homologique en dimension impaire, et le journaliste Uriel Muller, qui veut désespérément écrire un guide technique sur les mathématiques ! Mais grâce à l'intervention de Donovan, vieux routier des mathématiques, qui prend sous son aile Faroud, tout finira par s'arranger. Une lecture à recommander à tous ceux qui cherchent un moment de détente, après avoir trop fait de (vraies) maths !

Jean-Paul Truc