

# SOMMAIRE DU N° 141

---

<b>SMF</b>	
Mot du Président .....	3
Rapport Moral .....	4
<b>MATHÉMATIQUES</b>	
Mouvements collectifs et auto-organisation, <i>P. Degond</i> .....	23
Spectre quantique, <i>D. Hernandez</i> .....	34
<b>ENSEIGNEMENT</b>	
Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral, <i>C. Kesselmark, L. Moonens</i> .....	49
<b>HISTOIRE</b>	
Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui? <i>J.-P. Kahane</i> .....	69
Sur les traces d'opérateurs (de Grothendieck à Lidskii), <i>D. Robert</i> .....	76
<b>TROIS ENTRÉES SOUS LA COUPOLE</b>	
Aller à l'aléa, selon Jean-François Le Gall, <i>G. Miermont</i> .....	95
Laure Saint-Raymond : des molécules aux fluides, <i>F. Golse</i> .....	102
Cédric Villani, chouchou des médias? <i>A. Alvarez</i> .....	109
<b>PRIX ET DISTINCTIONS</b>	
Le prix Fermat et ses lauréats .....	115
<b>CARNET</b>	
Jacqueline Ferrand et son œuvre, <i>P. Pansu</i> .....	121
J.-L. Ovaert .....	129
<b>INFORMATIONS</b>	
Les mathématiques au ministère de la recherche, <i>M. Asch</i> .....	131
Session 2014 du CNU, section 25 .....	134
Session 2014 du CNU, section 26 .....	142
Nouvelles du CNRS, <i>P. Biane, R. Carles</i> .....	151
<b>LIVRES</b> .....	155



# SMF

---

## Mot du Président

---

Je viens d'être réélu président de la SMF pour un second mandat d'une année ; cette charge est lourde mais cette année supplémentaire est nécessaire pour prolonger, avec un bureau légèrement remanié, les actions menées depuis un an. Vous trouverez dans ce numéro de la *Gazette* le rapport moral pour la période de juin 2013 à juin 2014, il a motivé quelques inflexions dans les actions à mener.

Nous avons jugulé les retards de parution de nos publications, ceux de l'accès aux archives, après période d'embargo, sont en voie d'être résorbés. Le personnel de la SMF a été très sollicité et a répondu présent, je tiens à l'en remercier. Il nous faut maintenant stabiliser notre activité éditoriale ; j'y veillerai.

Suite aux réunions organisées cette année avec les responsables des masters enseignement et des directeurs de départements de mathématiques, des attentes ont émergé et la SMF, en étroite collaboration avec la SMAI et la SFdS, va essayer à présent d'y répondre au mieux.

Côté actions grand public, la SMF a été très sollicitée cette année, en lien étroit avec les autres sociétés savantes et le consortium *Cap'maths* ; elle restera mobilisée sur ce terrain dans les mois à venir.

Malheureusement, notre société présente encore pour l'exercice 2013 un déficit structurel important. Depuis un an, nous avons concentré nos efforts sur le rattrapage de nos retards et la production de livres, afin de rétablir une nécessaire crédibilité face à nos auteurs et lecteurs. Une réflexion a été menée sur le partage des rôles au sein de la société, un emploi à temps plein a été supprimé sur Marseille et ne sera pas renouvelé, un effort tout particulier va être porté dans les mois à venir sur une meilleure diffusion de nos ouvrages.

L'année à venir sera marquée par le renouveau de la ligne éditoriale et du format de la *Gazette des mathématiciens* ; une équipe rajeunie en a pris les rênes, nous ne pouvons que nous réjouir de voir de jeunes collègues prendre la relève.

Je serai entouré de quatre vice-présidents qui m'épauleront sur l'ensemble des dossiers : Aviva Szpirglas rejoint le bureau, auprès de Daniel Barlet, Gérald Bourgeois et Pierre Pansu. Étienne Mathéron sera le trésorier et Stéphane Seuret son adjoint, Angéla Pasquale assurera le rôle de secrétaire. Plusieurs « chargés de mission » m'accompagneront aussi : Yves Aubry, Valérie Berthé, Gérard Grancher, Laurent Guillopé, Angéla Pasquale, François Apéry... sans compter tous les bénévoles qui œuvrent discrètement pour la SMF et que je remercie sincèrement.

Je vous souhaite de bonnes vacances d'été.

Le 1<sup>er</sup> juillet 2014  
Marc Peigné

## Rapport Moral

### Période de juin 2013 à juin 2014

---

#### Affaires générales

##### Situation générale

La SMF traverse depuis plusieurs années une période difficile, avec un déficit important en 2011, 2012 et 2013 (respectivement 80 000€, 71 000€ et 72 000€). La crise économique actuelle et celle plus spécifique à l'édition scientifique explique en partie ces déficits.

Le personnel salarié a été soumis à un rythme de travail très important, tout particulièrement en 2013 où les retards dans le secteur des publications ont été presque totalement résorbés. La remise à plat du fonctionnement interne de la SMF, amorcée par l'équipe précédente, s'est imposée encore plus cette année ; les fiches de postes des différents personnels ont été affinées pour améliorer l'articulation entre les différents acteurs. Ce travail est évidemment une source de conflits que le bureau actuel a essayé de gérer au mieux.

##### Adhérents

Le nombre de nos adhérents baisse régulièrement depuis plusieurs années : 2099 en 2011, 2027 en 2012, et 1914 en 2013. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette baisse : les difficultés économiques actuelles, quelques démissions fracassantes ayant inmanquablement terni l'image de la SMF.... Compte tenu de ce constat, les cotisations 2015 ne subiront pas de nouvelles hausses.

Un effort pour susciter de nouvelles adhésions a été mené cette année notamment auprès de collègues participants aux colloques du CIRM ou profitant d'actions parrainées par la SMF.

##### Prises de position et rencontres

Les présidents des trois sociétés savantes, SFdS<sup>1</sup>, SMAI<sup>2</sup>, SMF, ont été reçus à leur demande au MESR<sup>3</sup> le 28 octobre 2013 par deux conseillers de la ministre, E. Delabaere et J.-M. Jollion au sujet de la nouvelle nomenclature des masters. Ils ont de nouveau interpellé sur ce sujet le cabinet de la ministre en décembre par différents mails puis en février au travers d'une lettre ouverte parue à l'AEF. Le compte-rendu de cette rencontre et la lettre ouverte à Mme Fioraso sont accessibles sur le site web de la SMF.

<sup>1</sup> Société Française de Statistiques.

<sup>2</sup> Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.

<sup>3</sup> Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

### Relations avec les autres sociétés savantes et associations

Les échanges d'information et coopérations avec la SFdS et la SMAI sont réguliers, de façon informelle ou non, et concernent tous les domaines d'activité de nos sociétés (en particulier les actions Grand Public).

Les contacts avec la SIF<sup>4</sup> se sont poursuivis entre juin 2012 et juin 2013 en particulier autour du projet en cours de la nouvelle édition du *Zoom des Métiers*.

La SMF a travaillé avec la SFP<sup>5</sup> et la SCF<sup>6</sup>, en particulier lors de la préparation d'une journée « Sciences et média » qui a eu lieu le 21 janvier 2014 au CNAM.

Les contacts entre les présidences de l'EMS<sup>7</sup> et de la SMF sont permanents. Le comité exécutif de l'EMS s'est réuni à l'IHP les 9 et 10 novembre 2013; une occasion pour la SFdS, la SMAI et la SMF de présenter leurs activités récentes, leur mode de fonctionnement et de participer à une discussion focalisée sur la question des publications et le changement de modèle économique qui se dessine. La SMF tient à remercier M. Sanz-Solé, présidente de l'EMS, pour l'accueil et l'écoute dont le comité a fait preuve, ainsi que M. Esteban, cheville ouvrière de cette rencontre. La réunion annuelle des présidents des sociétés membres de l'EMS s'est tenue cette année en avril à Istanbul.

La SMF a eu l'occasion en 2013 de jouer pleinement son rôle de composante de la CFEM. A. Bonami avait écrit un « Point de vue » en mars pour son bulletin de liaison, M. Peigné a clôturé l'année avec le « Point de vue » de décembre.

La SMF travaille toujours en étroite collaboration avec Animath et Cap'Maths, ainsi qu'avec Femmes et Maths. La page web consacrée aux « Promenades mathématiques » et qui est hébergée sur le site de la SMF, est en cours de réfection, la SMF y joue tout son rôle.

### Vie interne de la Société

*Personnel salarié* : la SMF emploie pour ses activités propres (hors CIRM) l'équivalent de 6 emplois à temps plein. Il faut souligner l'importance de la charge de travail pour chacun des salariés et leur mobilisation au sein de la SMF, mais aussi la fragilité de la société du fait du cloisonnement de certains dossiers. Des efforts importants ont été faits pour améliorer la coordination du travail entre les salariés. Les procédures de recrutement, promotion et entretien annuel ont été clarifiées en 2013.

*Sous-traitants, bénévoles* : la SMF fait appel à des sous-traitants, pour la composition et l'impression des revues et des livres, pour les opérations de routage, mais aussi pour la gestion du parc informatique. De nombreux bénévoles participent aussi à ces tâches diverses.

*Informatique, système de gestion* : en 2013, la SMF a fait appel à un sous-traitant pour le passage sous windows des logiciels de gestion et de comptabilité et pour en assurer la maintenance. Cette mutation, s'est effectuée dans de très bonnes conditions en novembre 2013 et semble offrir de nouvelles fonctionnalités très appréciables. Il reste cependant des pesanteurs, en particulier pour la gestion des cotisations et les rapprochements bancaires.

---

<sup>4</sup> Société Informatique de France.

<sup>5</sup> Société Française de Physique.

<sup>6</sup> Société Chimique de France.

<sup>7</sup> European Mathematical Society.

Le système de gestion du processus éditorial a été finalisé en 2013 et est mis en place pour 2014.

La récupération pour archivage des travaux effectués par les sous-traitants ces dernières années est en voie d'achèvement. Un sérieux travail a été nécessaire pour tout remettre d'aplomb. L'objectif de transfert vers Numdam des archives des 4 revues périodiques de la SMF (*Annales de l'ÉNS*, *Bulletin et Mémoires*, *Revue d'Histoire des Mathématiques*) sera tenu fin 2014.

Le site web côté publications a évolué en 2012 et 2013 et a gagné en lisibilité, ceci grâce au travail bénévole de L. Koelblen.

### Actions de communication

L'envoi d'une lettre mensuelle d'information aux membres continue. Ces lettres sont largement diffusées dans les laboratoires de mathématiques, via le réseau des correspondants. Des messages d'information à leur destination ont aussi été diffusés, notamment pour approcher des responsables de filières, les responsables scientifiques des bibliothèques et les directeurs de département et/ou d'UFR de mathématiques. Le Mot du Président dans la *Gazette* permet enfin au président d'évoquer les actions en cours et de les situer dans leur contexte.

Le travail sur les documents présentant les activités de la SMF s'est poursuivi en 2013 : ces documents sont diffusés lors des événements dans lesquels la société est impliquée.

Le serveur web continue d'évoluer selon les besoins, notamment sa boutique en ligne.

Le compte twitter SMF, ouvert en 2012, poursuit sa croissance avec actuellement 250 abonnés et permet de par sa nature de toucher un public différent.

La SMF a été contactée par une agence de télévision coréenne pour le tournage d'une émission sur J. Hadamard. Cette agence a été reçue à Orsay (documents sur J. Hadamard, présentation du théorème des nombres premiers par J.-B. Bost) et à l'IHP (interviews de J.-P. Kahane et A. Bonami). En novembre 2013, M. Peigné a été de nouveau interviewé sur le système métrique et la révolution française.

Avec l'INSMI<sup>8</sup>, la SFdS et la SMAI, la SMF a édité une lettre d'information (5 numéros prévus de janvier à août) présentant la délégation française des conférenciers invités au congrès international des mathématiciens d'août 2014 à Séoul : cette lettre a été largement diffusée vers la presse généraliste. La SMF sera présente à Séoul sur le stand du CIRM.

### Droits de l'homme

À la suite de l'arrestation puis la condamnation en Russie de l'académicien Viktor Vassiliev, président de la société mathématique de Moscou, les 3 sociétés savantes françaises de mathématiques ont interpellé le président de la fédération de Russie, W. Poutine<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> Institut National des Sciences Mathématiques et de leur Interactions.

<sup>9</sup> [smf.emath.fr/files/poutine.pdf](http://smf.emath.fr/files/poutine.pdf)

## Gazette

S. Vũ Ngọc a souhaité passer la main en décembre dernier. Le comité de rédaction et la SMF le remercient pour tout le travail accompli. Dans l'attente d'un successeur, B. Helffer a accepté d'assurer avec l'équipe en place le rôle de rédacteur en chef pour les numéros d'avril et de juillet. B. Adamczewski prendra la succession mais n'entrera en fonction qu'à partir de l'été 2014 afin de disposer d'un temps de réflexion pour la préparation d'un nouveau format et d'une nouvelle ligne éditoriale.

### La Gazette cette année

La *Gazette* a conservé cette année son principe de fonctionnement traditionnel, tout en cherchant à tenir compte des critiques ou suggestions qui nous sont transmises.

*Mathématiques et interactions* : la *Gazette* a publié dans cette rubrique des compte-rendus de travaux passés ou en cours, déjà validés scientifiquement par la communauté, à destination d'un public de mathématiciens le plus large possible. La coopération envisagée depuis plusieurs années avec Images des Mathématiques devrait se concrétiser à partir du numéro de juillet.

*Actualités et débats* : la *Gazette* a essayé de se faire l'écho des points saillants des actualités concernant la politique scientifique et éducative en mathématiques, avec le handicap d'une parution seulement trimestrielle. La *Gazette* a publié les compte-rendus du comité national du CNRS, des CNU, des informations sur l'AERES, le CIMPA, le CIRM, etc.

*Carnet* : nous avons cette année rendu hommage à M.-H. Schwartz dans un dossier préparé par F. Laudenbach.

Nous préparons avec *Matapli* un numéro spécial en l'honneur de M. Yor qui devrait sortir début 2015.

*Enseignement* : cette rubrique doit trouver sa place entre « l'histoire des maths » et la rubrique « actualités » sur la politique éducative en mathématiques – qui reste la plus plébiscitée et la plus naturellement alimentée.

*Livres et autres recensions* : nous avons expérimenté cette année de nouveaux types de recensions comme par exemple celles du film d'O. Peyon.

### Vers une Gazette rénovée

En décembre un comité de réflexion sur l'évolution de la *Gazette* a été mis en place. Il est piloté par V. Berthé qui assure la coordination avec le comité de rédaction actuel.

Ont émané de cette commission des suggestions de sujets à traiter, et également la décision de lancer un questionnaire de satisfaction auprès du lectorat de la *Gazette*. Près de 300 lecteurs y ont répondu.

Rappelons que le mandat de chaque membre du comité est de 3 ans (renouvelable une fois).

### Conseil d'administration et Conseil scientifique

De juillet 2013 à juin 2014, le conseil d'administration de la SMF s'est réuni 6 fois ; les débats ont été ouverts et sereins, les compte-rendus sont en ligne<sup>10</sup>. En décembre, janvier et mars, des invités extérieurs ont été sollicités pour présenter leur point de vue sur des thèmes précis et informer les membres du CA des enjeux sous-jacents.

- En décembre, J. Michel (Poitiers) a évoqué la question de la formation continue pour les enseignants de mathématiques,
- en février, M. Farge (Paris) a évoqué les mutations du secteur scientifique éditorial,
- en mars, M. Andler (Versailles) a abordé la question des actions grand public en mathématiques et le consortium Cap'Maths à venir.

Le Conseil Scientifique a été renouvelé partiellement cette année<sup>11</sup>.

Il a approuvé les propositions de nouveaux membres pour les Comités de Rédaction de *Bulletin et Mémoires* et de la *Revue d'Histoire des Mathématiques* et à cette occasion a souhaité que la parité homme/femme soit mieux respectée à l'avenir.

Sur avis du Conseil scientifique, la SMF a parrainé cette année 9 manifestations<sup>12</sup>.

### Le pôle de Luminy

#### La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro, ...). Le nombre d'envois est passé de 14000 en 2012-2013 à plus de 23000 en 2013-2014 ; en particulier, 8500 exemplaires de la brochure « L'explosion des mathématiques » ont été expédiés durant l'automne 2013. Le nombre de factures émises a été de 1872 en 2013 et de 486 pendant le premier trimestre 2014. Un gros travail a été réalisé pour accompagner la SMF dans la jugulation des retards de publication de certaines collections.

La cellule de diffusion travaille en étroite collaboration avec le secteur des publications, celui des publicités, les services généraux et celui de la comptabilité. Jusqu'en avril 2014, l'équipe était constituée de l'équivalent de 2,5 temps plein ; la répartition des tâches de chacun était bien établie et aurait dû permettre un travail serein. D'importants dysfonctionnements nous ont amenés à nous séparer, courant avril 2014, de L. Cingal et M. Florency.

On constate cette année encore une forte implication dans la gestion et la production de statistiques ; de plus un travail d'évaluation des frais d'envoi et de manutention a été effectué.

Durant l'année L. Cingal a aussi pris en charge une partie du travail de composition (numéros 23 à 28 de la série *Séminaires et Congrès*) ce qui a permis à la SMF de combler tout le retard accumulé ces dernières années.

<sup>10</sup> [smf.emath.fr/PV\\_Conseil](http://smf.emath.fr/PV_Conseil)

<sup>11</sup> [smf.emath.fr/content/conseil-scientifique](http://smf.emath.fr/content/conseil-scientifique)

<sup>12</sup> [smf.emath.fr/rencontres\\_soutenues\\_par\\_smf](http://smf.emath.fr/rencontres_soutenues_par_smf)

## Bilan du CIRM en 2013

### Le rôle du CIRM

Depuis sa création par la SMF, il y a 30 ans, le CIRM est un outil d'excellence au service de la communauté mathématique française et internationale, l'un des tout premiers centres mondiaux de colloques et rencontres de courte durée en mathématique. Il bénéficie d'une implication forte des sociétés savantes. La tutelle est assurée conjointement par la SMF et le CNRS. La SMAI joue également un rôle très actif, notamment à travers le CEMRACS<sup>13</sup>.

Le CIRM bénéficie également du soutien du MESR et, localement, du Conseil régional PACA et de la Ville de Marseille. Il a de fortes collaborations avec les laboratoires de mathématiques d'AMU<sup>14</sup>.

### Missions du CIRM

En tant que centre dédié à l'accueil de colloques de haut niveau en mathématiques fondamentales et appliquées, le CIRM fournit aux chercheurs les conditions idéales pour :

- se transmettre les progrès les plus récents,
- faire avancer ensemble des questions centrales de la discipline,
- préparer des projets ambitieux en interaction avec d'autres sciences,
- assurer la transmission du savoir en direction des jeunes chercheurs et des doctorants.

Le CIRM constitue un instrument essentiel pour l'école française de mathématiques, discipline dans laquelle la rencontre entre chercheurs est l'un des principaux moteurs de progrès.

### La fréquentation du CIRM

La fréquentation du CIRM est en progression. En 2013, le Centre a organisé 54 semaines de Rencontres mathématiques et accueilli 3409 participants. En comparaison, le CIRM recevait 1583 participants en 1999. Le CIRM poursuit son développement en renforçant chaque année ses moyens d'accueil et sa notoriété. Il bénéficie aujourd'hui d'un soutien renforcé de l'INSMI, d'une dotation du MESR et de financements des laboratoires d'excellence CARMIN et ARCHIMEDE qui apportent un complément financier important et nécessaire nous permettant d'affronter un peu plus sereinement la compétition internationale. La proportion de participants étrangers a atteint 43% en 2013, ce qui est un chiffre encourageant. Il serait souhaitable que cette présence de chercheurs travaillant à l'international, certes déjà importante, progresse encore.

---

<sup>13</sup> Centre d'Eté Mathématique de Recherche Avancée en Calcul Scientifique.

<sup>14</sup> Aix-Marseille Université.

### La politique scientifique

La politique scientifique du CIRM s'articule entre ses missions nationales et internationales et son rôle local en relation avec les laboratoires de mathématiques, d'informatique et de physique théorique.

Plutôt que de lister les actions standards du CIRM en matière de colloques – petits groupes – recherches en binôme, nous décrivons ci-après les actions spécifiques qui génèrent une dynamique scientifique forte.

#### – Labex CARMIN.

Le CIRM est l'un des quatre partenaires du Labex CARMIN avec l'IHP, le CIMPA<sup>15</sup> et l'IHÉS<sup>16</sup>. Ce laboratoire d'excellence, qui vise à développer les lieux de rencontres mathématiques français, permet de faire jouer la synergie entre les instituts. Les écoles préparatoires organisées au CIRM en amont des trimestres IHP en sont l'un des piliers.

Un volet très novateur de « valorisation des activités auprès du grand public et des scientifiques via la création de documents audiovisuels » se trouve aussi dans ce laboratoire d'excellence. Dans ce but, le CIRM, l'IHP et l'IHÉS se sont équipés pour enregistrer les conférences qu'ils accueillent, chaque établissement suivant une politique éditoriale qui lui est propre. Le CIRM a construit un environnement audiovisuel performant et enregistre en moyenne 5 films par semaine dont un avec post-production – montage – chapitrage. Le CIRM a décidé de mettre l'accent sur la production de « Documents scientifiques ». Ce projet rassemble, autour d'un Chargé de production audiovisuelle, les services du CIRM concernés : Communication, Bibliothèque, Informatique et Relations internationales. Le deuxième volet de ce projet, en cours de mise en œuvre, est la réalisation d'une plateforme Bibliothèque audiovisuelle mathématique dans laquelle les films seront accessibles en streaming soit dans leur intégralité soit par morceaux choisis grâce au développement d'un moteur de recherche intégré.

#### – Chaire Jean-Morlet.

Lancée en février 2013 avec divers soutiens financiers : CIRM pour les événements scientifiques ayant lieu sur place selon les règles habituelles; AMU pour le salaire du professeur recruté; Ville de Marseille pour le programme d'environnement (20 k€ par chaire).

N. Kistler (ex université de Bonn), premier titulaire de février à juillet 2013, a conduit un semestre sur les Probabilités en binôme avec V. Gayraud du LATP<sup>17</sup> (AMU).

B. Hasselblatt (Tufts University), second titulaire, est venu de novembre 2013 à avril 2014 pour un semestre autour des Systèmes dynamiques et Hyperbolicité, en collaboration avec S. Troubetzkoy de l'I2M.

I. Shparlinski, troisième titulaire, a débuté son semestre en février 2014 en collaboration avec D. Kohel de l'I2M et en liaison partielle avec le mois thématique sur l'Arithmétique.

<sup>15</sup> Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées.

<sup>16</sup> Institut des Hautes Études Scientifiques.

<sup>17</sup> Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilités.

Les lauréats proposés par le CS du CIRM et acceptés par le CS d'AMU sont : pour le 2<sup>e</sup> semestre 2014, H. Feichtinger de l'université de Vienne ; pour le 1<sup>er</sup> semestre 2015, H. Hauser de l'université de Vienne et, pour le 2<sup>e</sup> semestre 2015, F. Lalonde de l'université de Montréal.

Afin de permettre une gestion dynamique de la Chaire, un site web<sup>18</sup> dédié a été réalisé par les pôles communication et relations internationales du CIRM.

On peut dire que la Chaire attire des chercheurs de grands renoms avec des projets ambitieux. Il est aujourd'hui essentiel de pérenniser rapidement le financement du programme d'environnement afin de permettre l'invitation de collègues internationaux et d'encourager la venue de jeunes chercheurs de tous pays qui ne pourront que bénéficier du brassage d'idées et de compétences que chaque chaire apporte.

– **Labex ARCHIMEDE.** Le CIRM participe également, dans le cadre de sa politique locale et régionale, au Labex ARCHIMEDE. L'objectif de ce laboratoire d'excellence est de renforcer la synergie entre les mathématiques et l'informatique et de stimuler des interactions avec trois domaines d'applications majeures que sont la biologie-santé, la sécurité et l'énergie. Grâce à ce Labex, le CIRM peut mieux soutenir l'organisation de conférences présentant un intérêt particulier pour le site d'Aix-Marseille. En 2013, 7 rencontres ont été labellisées ARCHIMEDE.

– **Valorisation - enseignement.** Le CIRM poursuit sa politique de valorisation des mathématiques en donnant le goût des mathématiques aux jeunes élèves et étudiants autour d'activités ciblées (exposés, Hypocampe, accueil de lycéens de l'académie d'Aix-Marseille et du grand public, École de biologie pour mathématiciens et informaticiens, CEMRACS, etc.)

Le CIRM a également largement participé à l'opération mondiale MPT 2013 « Mathématiques de la Planète Terre 2013 ».

Le CIRM a voulu utiliser la richesse des thèmes de ce programme pour susciter chez les jeunes des vocations pour des études scientifiques et a donc décidé d'ouvrir exceptionnellement ses semaines de rencontres scientifiques à ce type de public en créant les « mercredis mathématiques ».

– **Relations internationales.** L'accueil des titulaires de la Chaire Jean-Morlet a eu un effet levier dans le nombre de visiteurs étrangers au CIRM et dans le nombre des contacts reçus au niveau des services rencontres et relations internationales au CIRM.

Après avoir accueilli la session plénière d'ERCOM (European Research Centres on Mathematics) lié à la Société Mathématique Européenne (EMS) au CIRM en mars 2013, le CIRM a poursuivi sa participation active dans ce réseau-laboratoire d'idées en participant à la session plénière qui s'est tenue à Rome en mars 2014.

Dans le but d'accroître sa visibilité internationale et de contacter des institutions et fondations étrangères, le CIRM sera présent à ICM 2014 à Séoul notamment via un stand commun CIRM-SMF.

---

<sup>18</sup> [www.chairejeanmorlet.com](http://www.chairejeanmorlet.com)

### Volet immobilier

- **Projet 2R CIRM.** Afin de s'adapter au développement de ses activités scientifiques et aux demandes croissantes d'accueil et pour également donner plus de cohérence et d'unité au site, le CIRM a envisagé l'agrandissement et la restructuration de l'Annexe. Un programmiste missionné a proposé des solutions pertinentes aux problématiques du CIRM : reconstruction d'une partie du rez-de-chaussée avec création d'au moins 8 chambres ; création au niveau 1 d'une grande salle de formation et de conférences d'au moins 80 places ; liaison horizontale avec le niveau principal par une passerelle ; distribution verticale par ascenseur entre les niveaux.

Ce projet qui a reçu un accord unanime du Conseil d'administration du CIRM a été estimé – pour la partie construction – à 2 100 k€.

La candidature au financement a été déposée dans le cadre du CPER 2014/2020, 2R CIRM étant un des projets phares de l'INSMI.

### Modernisation des outils numériques - Service des rencontres et Chaire Jean-Morlet.

Le CIRM a entrepris de moderniser en profondeur l'ensemble des outils numériques mis à la disposition des organisateurs sur l'ensemble de la chaîne qui conduit à la réalisation d'une rencontre scientifique.

### Conclusion.

On peut conclure en soulignant que l'année a donc été riche dans le développement de nouveaux outils.

Enfin l'équipe du CIRM, a été reconstituée en décembre 2013 avec l'arrivée d'une nouvelle secrétaire générale, C. Reynier (poste IE-CNRS).

## Rencontres et colloques

*Journée des lauréats de l'Académie des sciences* : cette journée a eu lieu le 11 décembre 2013 à l'université de Lorraine<sup>19</sup>. La journée a rencontré un franc succès, avec la participation de nombreux étudiants et élèves de classes préparatoires aux grandes écoles.

*Journée annuelle 2014* : la journée annuelle<sup>20</sup>, organisée par P. Pansu, a lieu le 20 juin 2014 à l'IHP, sur le thème « Arithmétique et dynamique. Chaires Jean Morlet 2014 ». Cette journée comporte aussi l'Assemblée Générale de la SMF et une table ronde intitulée « Apports du numérique dans l'enseignement et la recherche ». En fin de journée, ont lieu les remises des prix d'Alembert et Anatole Decerf.

*Rencontres scientifiques de la SMF* : la SMF organise de manière régulière les sessions « États de la Recherche »<sup>21</sup>. Deux sessions des États de la Recherche vont se dérouler en 2014 : l'une sur la « topologie géométrique et quantique en dimension 3 », et l'autre sur les « matrices aléatoires ».

<sup>19</sup> [smf.emath.fr/content/des-mathematiciens-primés-par-lacadémie-des-sciences-2013](http://smf.emath.fr/content/des-mathematiciens-primés-par-lacadémie-des-sciences-2013)

<sup>20</sup> [smf.emath.fr/content/journee-annuelle-2014-paris](http://smf.emath.fr/content/journee-annuelle-2014-paris)

<sup>21</sup> [smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation](http://smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation)

### Soutien et parrainage de prix

*Prix AMIES* : AMIES<sup>22</sup> a lancé en 2013 un prix destiné à promouvoir les thèses *Mathématiques Entreprises* soutenues en 2012. Ce prix est parrainé par les trois sociétés savantes SFdS, SMAI et SMF. La proclamation des résultats du Prix Amies 2014 aura lieu courant septembre 2014.

*Prix Hamidoune* : ce prix a été créé en 2011 à l'initiative d'amis et collègues du mathématicien Y. Ould Hamidoune et vise à encourager l'enseignement et la recherche en Mauritanie. Il est soutenu par les autorités académiques mauritaniennes ainsi que par divers partenaires étrangers. La SMF a donné son parrainage pour le prix 2014 et soutenu la dotation de ce prix en offrant une dizaine de livres.

*Prix Maurice Audin* : ce prix a été créé en 2004 par l'Association Maurice Audin, avec le soutien de la SMF et de la SMAI pour la France et par l'AMA en Algérie. À chaque session le jury dont fait partie le Président de la SMF désigne deux lauréats, l'un exerçant ses activités en Algérie, l'autre en France. La remise du Prix a eu lieu le 18 juin 2014 à l'IHP, à Paris.

### Secteur grand public

La SMF continue à avoir une activité intense dans ce secteur : cycles de conférences, participations au fonctionnement d'institutions partenaires, événements, publications.

*Une question, un chercheur* : ce cycle de conférences a repris cette année son rythme normal de deux conférences par an. Malgré la mise en place d'un formulaire d'inscription, qui permettra à terme de fidéliser un public, et un effort soutenu d'affichage, l'audience a été moindre qu'en 2012-2013. La conférence d'automne aura lieu un jeudi soir, au lieu du traditionnel vendredi. Il est envisagé de varier le lieu, pour aller à la rencontre de publics différents.

*Un texte, un mathématicien* : ce cycle de conférences rencontre un vif succès. Les conférences sont filmées et montées par les soins de la BnF<sup>23</sup>. Le comité scientifique, présidé par N. Anantharaman, est constitué de S. Cantat, D. Harari, G. Pagès, plus M. Andler et le vice-président ex officio. Il est prévu de donner un lustre particulier à l'édition 2015, celle du 10<sup>e</sup> anniversaire, en faisant parler des mathématiciens étrangers (mais francophones).

*Un texte, un mathématicien en province* : l'idée est d'étendre géographiquement l'impact des conférences *Un texte, un mathématicien*. Il y a eu une seule conférence, en avril 2014 à Nancy. Elle n'a entraîné aucune dépense pour la SMF (hors la réalisation de l'affiche). Le contrat signé avec Cap'Maths en 2012, portant sur une subvention conditionnée à un partage des dépenses avec la SMF, semble donc sans objet, il a été annulé. Cela ne met nullement un terme à l'initiative, qui consiste à reproduire les conférences données à la BnF en d'autres lieux, en en préservant

<sup>22</sup> Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société.

<sup>23</sup> Bibliothèque Nationale de France.

l'esprit : lieu susceptible d'attirer un vaste public, inscription de classes de lycée, pré-conférences.

*Promenades Mathématiques* : Grâce à la chargée de projet, C. Marcher, recrutée par Animath, la présentation du catalogue a été améliorée. Le site web est en cours de refonte (soutien financier demandé à Cap'Maths). Au quotidien, le suivi des commandes de promenades a permis d'augmenter la demande, comme en témoignent les chiffres suivants.

année	2009	2010	2011	2012	2013	2014 (janvier-mai)
promenades	18	12	29	28	42	30

*Commission Culture Mathématique de l'Institut Henri Poincaré* : l'IHP développe son activité sur la diffusion de la culture mathématique : audiovisuel (chaîne youtube, documentaire sur Lagrange, ciné-club), numérique (projets de cours en accès libre), expositions (Sur les pas de Joseph-Louis Lagrange), visites de classes, collaboration avec des médias (*Le Monde*, série *Le Monde est mathématique*). La SMF est représentée dans la commission adhoc par A. Desolneux.

*Cap'Maths* : la SMF est représentée par son vice-président Grand Public au Conseil d'orientation de Cap'Maths. Elle est impliquée dans la mise en place progressive de la fondation qui va succéder au consortium Cap'Maths qui s'éteindra fin 2015 (groupe de travail auquel participe O. Lafitte). Cette fondation devra réunir des fonds pour la diffusion de la culture mathématique. Les premiers déjeuners de collecte de fond devraient avoir lieu en 2014.

*Journée Sciences et Médias, l'enjeu du numérique* : à l'initiative de la SFP, une journée sur l'impact des nouveaux médias sur l'information scientifique du public a été organisée conjointement avec la SMF, la SMAI, la SCF et avec le soutien d'Inria. Une centaine de journalistes, de chargés de communication des organismes et de scientifiques se sont déplacés au CNAM le 21 janvier 2014. Un compte rendu de cette journée est paru dans la *Gazette* d'avril 2014. Il est vraisemblable qu'une suite soit donnée en 2015 ou 2016.

*Semaine des mathématiques* : la SMF a été associée à l'événement de clôture de la semaine des mathématiques qui a eu lieu à la BnF le 22 mars 2014. Cet événement sera reconduit en 2015, sans doute en province.

*Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques* : dans l'édition 2014 du salon, davantage de place est accordée à l'information sur les métiers des mathématiques, thème du stand organisé par la SMF, avec l'organisation de séances de speed-meeting sur inscription. Les associations sont désormais dispensées de frais d'inscription. Néanmoins, la question de l'utilité de la présence de la SMF le jeudi et le vendredi, jours des classes (écoles et collèges) se pose.

*Prix d'Alembert et Anatole Decerf* : le prix d'Alembert, d'un montant de 2000€, est décerné une année sur deux par la SMF, sur ses fonds propres (une subvention

de la FMJH<sup>24</sup> en allège cette année la charge pour la SMF). Le prix Anatole Decerf, d'un montant de 2000€, est aussi décerné cette année. Il est confié à la SMF par la Fondation de France.

*Mathématiques pour la Planète Terre 2013* : c'est C. Imbert qui représente la SMF au comité éditorial. L'opération a été un succès, d'abord parce que le pari de publier un texte par jour ouvrable a été tenu, ensuite par l'audience du site<sup>25</sup>. La SMF a organisé une sorte d'événement de clôture, sous la forme d'une conférence d'I. Ekeland le 22 octobre 2013 à Marseille, agrémentée d'un spectacle, au moment des journées nationales de l'APMEP. La publication, par la maison d'édition *Nouveau Monde*, d'une sélection de brèves sous la forme d'un petit ouvrage grand public, est en cours. Les brèves pourraient faire l'objet d'un calendrier en 2015 ou 2016.

*Brochure « Mathématiques, l'explosion continue »* : publiée en partenariat avec la SMAI et la SFdS, avec le concours de la FSMP<sup>26</sup> et de Cap' Maths, elle est parue le 10 octobre 2013. Un événement de lancement a eu lieu le 22 octobre 2013 à Marseille, à l'occasion des Journées Nationales de l'APMEP<sup>27</sup>. La partie des coûts restant à la charge de la SMF (et non couverts par les subventions) est la diffusion aux adhérents avec la *Gazette* d'octobre 2013, elle s'élève à 1,9 k€. La diffusion, partagée entre les partenaires, Animath, l'APMEP, l'UPS et l'Adirem<sup>28</sup>, et complétée par des expéditions sur demande assurées par la cellule de diffusion de la SMF (seuls les frais postaux ont été imputés aux demandeurs) a été très rapide, la totalité des 20000 exemplaires tirés initialement a été distribuée. Cela a représenté une surcharge ponctuelle de travail importante pour la cellule. Un retraitage limité, pour les besoins d'Animath, est prévu. Une maison d'édition chinoise étant intéressée par les droits de traduction en chinois, les sociétés ont demandé aux 29 auteurs de leur céder leurs droits d'auteurs. Une ré-édition en français, vendue cette fois, est envisagée.

*Brochure « Zoom sur les métiers des mathématiques et de l'informatique »* : le *Zoom sur les métiers des mathématiques*, publié en 2007 par l'ONISEP en partenariat avec la SMF et la SMAI, a été vendu par l'ONISEP jusqu'en 2012. Il était destiné aux lycéens et aux organes qui informent les lycéens sur leur orientation. Depuis, les sociétés continuent de distribuer gratuitement les exemplaires qui leur restent, et il est téléchargeable sur leurs sites. Il répond à une demande des départements de mathématiques universitaires. En raison de la faiblesse du lectorat potentiel d'une brochure spécifique aux mathématiques, l'ONISEP a décidé d'en éditer une mise à jour qui inclura les métiers de l'informatique. Les partenaires seront la SMF, la SMAI, la SFdS et la SIF. Le rôle des partenaires est avant tout de réunir les témoignages, mais une contribution financière importante leur est aussi demandée. Un appel au mécénat a été lancé par la SMAI dans ce but.

<sup>24</sup> Fondation Mathématique Jacques Hadamard.

<sup>25</sup> [mpt2013.fr/](http://mpt2013.fr/)

<sup>26</sup> Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

<sup>27</sup> Association des Professeurs de Mathématiques de Enseignement Public.

<sup>28</sup> Assemblée des Directeurs d'IREM.

## Enseignement

La commission enseignement, réunie en septembre 2013, a adopté le mode de fonctionnement qui a été suivi pendant l'année écoulée : renforcement des deux groupes de travail clé sur le L et le M, animation en réseaux, notamment pour ce qui est du suivi de la réforme de la formation des maîtres.

Les groupes L et M ont travaillé autour de la réalisation d'états des lieux, chaque niveau ayant des inquiétudes fortes – même si elles sont très variables suivant les lieux – sur les effectifs et le maintien de l'ensemble du dispositif de formation. La réalisation de grilles d'analyse s'est heurtée dans les deux cas à la difficulté de la collecte d'informations quantitatives fiables et sur la durée.

Le travail des réseaux s'est traduit par une réunion des responsables MEEF<sup>29</sup> en janvier 2014, une réunion des responsables des départements de mathématiques en mars 2014. Le compte-rendu de ces réunions a été mis en ligne<sup>30</sup>. Parmi les sujets sur lesquels la SMF s'est manifestée figurent les conditions de travail des EAP<sup>31</sup>, l'ouverture des candidatures au CAFEP<sup>32</sup>, la question des licences pluridisciplinaires à dominante scientifique, les résultats de l'enquête Pisa.

La SMF s'est longuement exprimée sur les nouvelles nomenclatures de L et de M, notamment pour l'existence d'une mention « Mathématiques et Informatique » en Master. Cela n'a pas été retenu par le Ministère, celui-ci s'appuyant notamment sur un soutien très mitigé de la Société Informatique de France. La SMF a entrepris un travail avec différents partenaires sur la construction d'une carte des masters d'une part, la réalisation d'un fascicule sur les métiers des mathématiques et de l'informatique d'autre part. Ce travail à plusieurs voix sur certains dossiers donne plus de poids aux prises de positions et projets mais en complique la mise en œuvre.

Enfin, la SMF a contribué à une réflexion menée au niveau de la francophonie sur les licences scientifiques, réflexion qui a conduit à une contribution dans un ouvrage collectif et un article de J.-P. Borel dans la *Gazette*<sup>33</sup>.

## Publications

À partir du 1<sup>er</sup> janvier 2014, les abonnements aux quatre revues périodiques de la SMF (*Annales de l'ÉNS*, *Bulletin et Mémoires de la SMF*, *Revue d'Histoire des Mathématiques*) se font sous forme électronique, avec supplément papier pour les clients qui le désirent.

Nos revues, bien que menacées dans leur équilibre financier, seront bien évidemment préservées tout en évoluant vers une diffusion de plus en plus électronique : l'édition de livres ou de séries de livres semble évoluer moins rapidement.

Il est nécessaire de rechercher des partenariats et de varier les sources de financement ; en 2013, plusieurs volumes ont pu être édités grâce à des aides ponctuelles de partenaires variés (Fondation de Paris, IUF, ...)

<sup>29</sup> Métiers de l'Enseignement, de L'Éducation et de la Formation.

<sup>30</sup> [smf.emath.fr/files/reunion\\_du\\_28\\_mars\\_2014\\_jpb4.pdf](http://smf.emath.fr/files/reunion_du_28_mars_2014_jpb4.pdf) et [smf.emath.fr/files/reunion\\_du\\_24\\_janvier\\_2014\\_autour\\_des\\_meef\\_4.pdf](http://smf.emath.fr/files/reunion_du_24_janvier_2014_autour_des_meef_4.pdf)

<sup>31</sup> Emploi d'Avenir Professeur.

<sup>32</sup> Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Enseignement du Privé.

<sup>33</sup> *Gazette* 140, avril 2014.

## État des parutions

Parutions juin 2013/fin 2013	
Annales de l'ÉNS Tome 47 (2013)	Fascicule 3 à 5, parution été 2013 Fascicule 6, parution automne 2013
Astérisque (2013)	Astérisque 352 à 353, parution été 2013 Astérisque 354 à 358, parution automne 2013
Bulletin de la SMF (2013)	Fascicule 3 et 4, parution automne 2013
Mémoires de la SMF (2013)	Mémoire 132 à 135, parution automne 2013
Panoramas et Synthèses (2013)	Panoramas 38 et 39-40, parution automne 2013
Revue d'histoire des mathématiques	Tome 19 (2013), Fascicule 1, parution automne 2013
Cours spécialisés 19	Parution automne 2013
Séminaires & Congrès	24.II, 25 à 28, parution automne 2013
Parutions 2014	
Annales de l'ÉNS (2014) (Tome 47)	Fascicule 1, parution mai 2014 Fascicule 2, parution juin 2014 Fascicule 3, parution été 2014 Fascicules 4, 5 et 6, à suivre
Astérisque (2014)	Astérisque 359, 360 parus Astérisque 361, parution juin 2014 Astérisque 362-363, 364 et 365 à suivre
Bulletin de la SMF (2014) (Tome 141)	Fascicules 1 et 2, d'ici l'été Fascicules 3 et 4 à suivre
Mémoires de la SMF (2014)	Mémoire 136, paru Mémoire 137, parution juin 2014 Mémoire 138-39 à suivre
Panoramas et Synthèses (2013)	Panoramas 41, parution juin 2014 (3 <sup>e</sup> n° 2013 et dernier)
Panoramas et Synthèses (2014)	Plus d'abonnement. 4 volumes prévus par an.
Revue d'histoire des mathématiques (2013-2014)	Tome 19 (2013), fascicule 2, parution juin 2014 Tome 20, fascicule 1 et 2 à suivre
Cours spécialisés (2014)	Cours Barlet-Magnusson Cours de Langevin 22 à sortir avant décembre 2014
Documents mathématiques (2014)	DM12 (Tits) paru DM13 (Douady-Hubbard), parution automne 2014

## Faits marquants

- Mise en place de l'abonnement (électronique) national (CNRS/ RNBM) pour nos revues (hors *Astérisque*) au 1/1/2014.
- Les retards de certains abonnements (en particulier *Panoramas et Synthèses*, *Séminaires et Congrès*) ont été résorbés et nos publications sont essentiellement à jour au 1/1/2014.
- Base éditoriale. Elle est opérationnelle depuis le début de l'année 2014, mais reste à améliorer.
- Nomination d'un « Conseil d'Orientation Éditoriale » :  
« Conseil d'Orientation Éditoriale » est le nom qui sera donné au comité éditorial que la SMF a mis en place au cours de l'année 2012-2013 en version expérimentale. Il s'agit d'un organisme consultatif, censé réfléchir sur les publications de la Maison SMF en dehors des urgences, en essayant de dégager une vision à moyen terme (5-10 ans) mais sans pouvoir décisionnel : les décisions relèvent du Bureau et du Conseil d'Administration de la SMF.

### Point sur les revues

– *Annales de l'ÉNS* : le passage à 1500 pages par an en 2015 est adopté. Rappelons que 1200 pages sont d'ores et déjà programmées sur 2014. Un effort de diffusion aux États-Unis et en Asie est en cours.

– *Bulletin et Mémoires* : le *Bulletin* présente un nombre excessif d'articles acceptés en attente de publication. Les retards de publication pour les *Mémoires* ont été résorbés.

– *Revue d'Histoire des Mathématiques* : un léger retard est apparu en 2013, suite à des difficultés de composition de certains articles ; si le fascicule 2 de 2013 a du retard, ceux de 2014 sortiront en temps voulu.

### Point sur les collections

– *Astérisque* : finalement le passage à 2500 pages par an ne se fera qu'en 2015 (avec possibilité d'un volume « hors abonnement » en 2014 si besoin est). Sur proposition du Bureau, le Conseil d'Administration de la SMF a décidé de lancer, si possible, l'abonnement électronique d'*Astérisque* en 2015 mais sans rétroactivité, c'est-à-dire que les volumes sortis avant 2015 ne seront pas accessibles électroniquement. Ceci devra bien sûr évoluer dans le temps.

– *Cours Spécialisés* : cette série qui a vécu « au ralenti » ces dernières années est bien repartie depuis début 2013. De plus l'accord de coédition avec la FSMP a vu sortir son premier volume au premier semestre 2014. Nous comptons continuer cette collaboration.

– *Documents Mathématiques* : outre le volume paru et le volume en cours (voir tableau ci-dessus) le projet de coédition avec l'IHÉS des œuvres scientifiques de René Thom devrait voir sortir le premier tome fin 2014-début 2015.

– *Panoramas et Synthèses* : la série n'est plus vendue par abonnements à partir de 2014. Elle va publier 4 volumes en 2014 et 2015 qui seront vendus volume par volume. Un ordre permanent d'achat peut être souscrit.

– *Séminaires et Congrès* : après la résorption des retards de publication en 2013, cette série est « en sommeil » en 2014. Une collaboration avec le CIMPA pourrait la réveiller.

– *Série T* : les deux volumes (numéro 3 et 4) sur lesquels la SMF s'est engagée sont en préparation.

### Ventes

L'effort de production de livres de ces deux dernières années doit s'accompagner d'un effort sérieux de diffusion. La réorganisation de la cellule de Marseille nous permet d'avoir une réflexion d'ensemble. Le problème (difficile) de la diffusion est aujourd'hui notre priorité. Il nous faut également faire un effort sur nos prix qui sont aujourd'hui un peu élevés, surtout pour les non membres. Pour les revues, l'évolution vers l'abonnement électronique pose le problème du prix des « suppléments papier ». Nous sommes, pour l'instant dans une phase « expérimentale », ne sachant pas trop si ces suppléments papiers vont être beaucoup demandés, ou, au contraire, délaissés.

Stands. La tenue de stands permet de faire connaître les publications de la SMF et d'effectuer des ventes. Le problème de l'existence d'un stand au CIRM qui soit

suffisamment visible et attractif est encore à l'étude. C'est un point important à prendre en compte dans la réorganisation de la cellule de Marseille.

### Archivage numérique

Le rattrapage de l'archivage sur Numdam a été effectué pour les *Annales scientifiques de l'ÉNS*, le *Bulletin* et la *Revue d'histoire des mathématiques* : les articles correspondants (couvrant une période de près de 15 ans) sont installés désormais sur le serveur Numdam (et ultérieurement sur le serveur EUdml) avec leurs métadonnées librement accessibles, l'accès à l'article étant sans restriction pour les articles de plus de cinq ans : pour les articles plus récents, il y a redirection automatique sur le serveur de la SMF où les articles sous embargo sont accessibles aux abonnés. D'ici fin 2014, le même archivage sera achevé pour la collection des *Mémoires*, la période d'embargo étant de dix années ; un travail analogue est en cours sur la période complète (1996-2014) de la série *Séminaires et Congrès*.

Cette alimentation de l'archive Numdam devrait se faire annuellement à l'avenir. L'enrichissement des métadonnées par la Cellule Mathdoc (liens vers les bases bibliographiques et vers des versions numériques d'articles cités dans les bibliographies) permet de renforcer l'accès ou la diffusion de la production éditoriale de la SMF, que ce soit en ligne (avec ou sans restriction) ou par achat des tirages papier de certains volumes.

## Rapport financier, année 2013

Pour l'année 2013, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +100 k€. Le total du chiffre d'affaires est de 1844 k€, et le montant total des subventions s'élève à 484 k€. Pour comparaison, le résultat net était de +243 k€ en 2012, avec 1930 k€ de chiffre d'affaire et 473 k€ de subventions. Dans les paragraphes suivants, nous présentons d'abord les finances des activités de la SMF de manière assez détaillée, puis celles des activités du CIRM de façon plus globale.

### La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres ;
- produire et vendre des livres et des revues ;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 864 k€ (842 k€ en 2012). Le total des produits d'exploitation est de 848 k€, avec un chiffre d'affaires de 576 k€ incluant les ventes et cotisations pour 510 k€ (552 k€ en 2012). Le montant total des subventions est de 54 k€. Le total des charges est de 937 k€ (914 k€ en 2012).

Pour la troisième année de suite, la SMF fait donc face à un déficit important (72 k€), comparable à celui des deux années précédentes. Un point « positif » cependant : si on fait abstraction des « opérations de régularisation » (dotations et reprises sur amortissements, variations de stock) on obtient un résultat d'exploitation retraité de -58 k€, chiffre sensiblement moins important que celui du budget prévisionnel (-75 k€).

Dans la suite, nous détaillons un peu plus les comptes.

### Produits d'exploitation, produits financiers et produits exceptionnels

(1) *Ventes de revues et de livres.* Le montant global est de 431 k€, contre 468 k€ en 2012. Cette baisse importante est due à une faible production de livres en 2012. Elle avait été anticipée dans le budget prévisionnel.

(2) *Cotisations et abonnements.* Le montant global est de 79 k€, contre 84 k€ en 2012. Les cotisations avaient déjà diminué en 2012 par rapport à 2011. Si elle se confirme, cette tendance est préoccupante.

(3) *Subventions.* Le montant global est de 54 k€, contre 35 k€ en 2012. Cette différence s'explique par des subventions « exceptionnelles » pour la fabrication et la diffusion de la brochure « Mathématiques, l'explosion continue ».

(4) *Refabrications diverses.* Le montant global est de 59 k€.

(5) *Produits divers.* Cette ligne comprend les recettes dues à la publicité et les dons. Le montant global est de 11 k€.

(6) *Transfert de charges.* Cela correspond au reversement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF. Le montant global est de 166 k€.

(7) *Produits financiers.* Il s'agit de la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 9 k€ (contre 11 k€ en 2012 et 10 k€ en 2011).

(8) *Produits exceptionnels.* Cela correspond à une reprise de subvention de fonctionnement s'élevant à 7 k€.

(9) *Variation du stock et des encours.* Le montant global est de 41 k€.

### Charges d'exploitation

(1) *Masse salariale.* Le montant des salaires – hors charges – de l'ensemble du personnel (SMF+CIRM) est de 332 k€. Il faut y ajouter 143 k€ de charges. Les salaires du personnel SMF détaché au CIRM nous sont intégralement remboursés (166 k€).

Les chiffres de la masse salariale des années précédentes (SMF+CIRM) sont :

- en 2012 : 360k€ et 152 k€ de charges ;
- en 2011 : 359 k€ et 157 k€ de charges ;
- en 2010 : 341 k€ et 146 k€ de charges.

La masse salariale avait augmenté notablement en 2011, suite à des embauches à Marseille (cellule de diffusion), et à une embauche en CDD à Paris pour l'installation du nouveau système de gestion. Ce dernier contrat est arrivé à échéance en mars 2013, ce qui explique la diminution de la masse salariale en 2013.

(2) *Frais de fabrication et composition.* Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 149 k€ (108 k€ en 2012, 130 k€ en 2011, 106 k€ en 2010). Les frais de composition sont de 34 k€ (24 k€ en 2012, 41 k€ en 2011, 39 k€ en 2010). Le montant global de cette ligne est donc de 183 k€. La nette différence par rapport à 2012 s'explique par une production plus importante de livres, l'augmentation du nombre de pages de certaines revues, et la fabrication de la brochure « Mathématiques, l'explosion continue » (20 k€). Il faut également noter que le rattrapage des retards de fabrication a continué en 2013, et qu'il est désormais essentiellement achevé.

Comme les années précédentes, la SMF a produit ses ouvrages à un trop grand nombre d'exemplaires. En plus d'augmenter les coûts de fabrication, cela a pour effet d'alourdir inutilement les charges liées au stockage et à la dépréciation du stock.

(3) *Honoraires, assurances, loyers*. Cette ligne comprend les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable (17 k€), les assurances (2 k€), les loyers versés à l'IHP et à Luminy (13 k€), et des « honoraires divers » (2 k€). Ces chiffres sont les mêmes qu'en 2012. Au total, la ligne s'élève à 34 k€.

(4) *Affranchissements*. Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 80 k€, contre 78 k€ en 2012 et 89 k€ en 2011. Ces frais sont trop importants.

(5) *Impôts et taxes*. Suite à la baisse de la masse salariale, ce poste est mécaniquement en diminution : 29 k€, contre 31 k€ en 2012.

(6) *Frais bancaires et téléphone*. Le montant global est de 6 k€.

(7) *Achat de fournitures*. Le montant global est de 14 k€, dont environ 9 k€ de fournitures liées au routage. Ce chiffre semble trop important.

(8) *Vie de l'Association*. Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 14 k€.

(9) *Entretien, réparation, maintenance*. Cela concerne essentiellement le nouveau système de gestion. Le montant global est de 12 k€.

(10) *Dépenses diverses*. Cette « ligne » hétéroclite inclut entre autres la sous-traitance générale, les chèques déjeuner, les charges de gestion courante et les engagements de subventions. Le montant global est de 16 k€.

(11) *Amortissements sur immobilisations*. Cela correspond à l'amortissement du matériel informatique. Le montant global est de 22 k€.

(12) *Provisions diverses*. Le montant total est de 51 k€, la plus grosse partie provenant de la dépréciation du stock (47 k€).

## Le CIRM

Le CIRM est, depuis 2000, une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques, par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2013 du CIRM est excédentaire de 173 k€, contre 315 k€ en 2012. Ce résultat comptable positif est mobilisé pour autofinancer des investissements non couverts entièrement par les subventions. Le CIRM a ainsi pu entretenir ses installations et améliorer ses capacités d'accueil. L'excédent contribue aussi à la stabilité du fonds de roulement du CIRM, qui reste cependant faible par rapport au volume financier global.

Les produits d'exploitation s'élèvent à 1821 k€ en 2013 (contre 1860 k€ en 2012 et 1724 k€ en 2011), auxquels il faut rajouter 3 k€ de produits financiers et 216 k€ de « produits exceptionnels ». Les produits comprennent des ressources propres – 1359 k€ de chiffre d'affaires, dont 553 k€ de contributions des congressistes – ainsi que des subventions de différents organismes (Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Université d'Aix-Marseille, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 434 k€. Le chiffre d'affaires est en baisse par rapport à 2012 (1412 k€), mais reste supérieur à celui de 2011 (1260 k€). Mentionnons aussi que les Laboratoires d'Excellence (CARMIN, Archimède) dont

fait partie le CIRM ont contribué à diversifier les ressources financières. Leur implication concerne la part CNRS du budget.

Les charges d'exploitation s'élèvent à 1868 k€ (1835 k€ en 2012). Elles comprennent entre autres : les charges salariales ; la sous-traitance à la société EUREST pour la restauration et l'entretien ; des charges de maintenance et petit entretien ; les impôts et les taxes.

Les principaux investissements de l'exercice concernent la maison Jean Morlet (257 k€) et la construction de la Régie auditorium (86 k€).

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 100 k€. L'exercice du CIRM est excédentaire pour 173 k€, mais la SMF est déficitaire pour 72 k€. Le déficit de la SMF semble en grande partie structurel (il était déjà de 72 k€ en 2012 et de 80 k€ en 2011). Il est lié à la « crise » du secteur des publications et à la baisse des adhésions.

### Remerciements

Le rapport moral fait le bilan de l'ensemble des activités menées au sein de la SMF depuis un an. Il est le reflet du travail effectué par le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles, que nous remercions. Citons en particulier les membres du Bureau, du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la SMF, les directeurs et les membres de nos comités de rédaction, et tous ceux que nous sollicitons, ponctuellement ou régulièrement, et qui offrent leur temps et leurs compétences avec une très grande générosité. Nous adressons un remerciement particulier à celles et ceux qui quittent le CA après parfois deux mandats et qui ont beaucoup donné pour la SMF.

Ce rapport a été rédigé par D. Barlet, J.-P. Borel, G. Bourgeois, P. Foulon, L. Guillopé, B. Helffer, É. Matheron, P. Pansu, A. Pasquale, M.-F. Roy, S. Seuret avec l'aide de S. Albin, N. Christiaën, C. Munusami et C. Ropartz. Remercions enfin Frédérique Petit pour sa relecture bienveillante.

# MATHÉMATIQUES

---

*La rubrique de mathématiques donne la parole à deux lauréats de grands prix de l'académie en 2013. À la suite des exposés qu'ils ont donné à Nancy, nous avons en collaboration avec Images des Mathématiques (IdM) essayé de concrétiser une idée lancée il y a plusieurs années : sortir simultanément un texte dans la Gazette et un texte dans IdM sur le même sujet mais en adaptant l'écriture à leurs lectorats complémentaires. L'appel a été lancé conjointement par Étienne Ghys et B. Helffer et quatre lauréats ont accepté le challenge. C'est dans ce cadre que nous publions les contributions de P. Degond et D. Hernandez. Côté IdM, Maxime Bourrigan et Clément Caubel ont assuré la coordination de l'évaluation par des chercheurs et doctorants.*

## Mouvements collectifs et auto-organisation

Pierre Degond<sup>1</sup>

---

La nature nous offre de fascinants exemples de mouvements collectifs : essaims d'abeilles, nuées d'étourneaux, bancs de maquereaux. L'étude des phénomènes sociaux nous fournit également de nombreux exemples d'auto-organisation, comme la formation spontanée de files dans les foules de piétons circulant dans les centres commerciaux. Dans tous les cas, il s'agit de systèmes constitués d'un grand nombre d'agents autonomes, interagissant entre eux localement et n'ayant à leur disposition qu'une information partielle. Cependant, ces systèmes non-hiérarchisés sont capables de produire des structures ordonnées à grande échelle, c'est-à-dire sur des distances excédant largement la portée de perception des agents. Ainsi, le banc de maquereaux peut être constitué de millions d'individus et s'étendre sur des distances de plusieurs kilomètres. Il en est de même des piétons qui n'ont généralement qu'une perception limitée à leurs plus proches voisins et qui, par le seul fait de suivre la personne qui les précède, contribuent à l'émergence d'une circulation en file plus efficace (on parle d'intelligence des foules). Un autre exemple est fourni par les nids de termites ou plus généralement d'insectes sociaux (fourmis, guêpes, etc.). La taille des nids excède de plusieurs ordres de grandeur la taille des individus qui ont contribué à les construire. Leur structure est incroyablement complexe et obéit à des impératifs d'organisation sociale, régulation thermique, protection contre les attaques de prédateurs, etc. Pourtant, ils sont construits par des individus dont le système cognitif ne possède que quelques centaines de milliers de neurones et dont aucun n'a formé dans un quelconque ganglion neuronal le projet d'élaborer

---

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ, United Kingdom (en détachement du CNRS, Institut de Mathématiques de Toulouse).

une structure aussi complexe. L'auto-organisation s'observe également à l'échelle microscopique, comme par exemple, lors de la migration collective des cellules d'un embryon au cours de l'embryogenèse, ou bien lors de la réponse d'un organisme adulte à l'apparition d'une lésion. L'auto-organisation n'est d'ailleurs pas l'apanage des êtres vivants ou des sociétés. Une expérience récente a montré la capacité de sphères de polymères mises en mouvement par un champ électrique à s'auto-organiser en un mouvement collectif [4].

Les structures à grande échelle qui apparaissent dans les systèmes auto-organisés ne sont pas inscrites dans les règles d'interactions entre les individus. Ceux-ci en effet suivent des règles simples comme se suivre les uns les autres, s'orienter dans la même direction, etc. Les structures caractéristiques de l'auto-organisation émergent spontanément lorsqu'un grand nombre d'individus, chacun obéissant à des règles simples interagissent collectivement. On parle de phénomène d'émergence, ou plus simplement d'« émergence ».

L'observation expérimentale semble confirmer que l'auto-organisation, loin d'être un « accident » rendu possible par l'apparition de la vie sur terre, est un phénomène extrêmement répandu et robuste. Ainsi, des molécules, précurseurs de l'ADN, ont-elles été retrouvées sur des astéroïdes et leur présence attribuée à des réactions chimiques favorisées par l'environnement traversé par ces astéroïdes [21]. L'auto-organisation apparaît à des échelles si différentes que l'on peut se demander si le destin final de l'univers est bien une marche vers le chaos ultime telle que l'a décrite Boltzmann et formalisée dans le concept d'entropie. D'ailleurs, le concept de désordre lui-même est matière d'échelle. Il n'y a qu'à observer les formations nuageuses pour s'en convaincre. À l'échelle moléculaire, les composants de l'atmosphère sont décrits par une distribution gaussienne des vitesses qui est un maximum de l'entropie de Boltzmann. Cependant, à l'échelle d'un nuage, on constate bien une ségrégation des molécules, certaines se regroupant en gouttelettes. Et à plus grande échelle encore, il n'est pas rare d'observer des formations nuageuses extrêmement régulières, en bandes ou en damier par exemple. Le désordre serait donc un phénomène local et relatif qui alternerait avec l'ordre selon l'échelle considérée. Les concepts d'auto-organisation et celui d'entropie semblaient déjà difficiles à réconcilier pour le biologiste Jacques Monod, qui a consacré un chapitre de son essai *Le Hasard et la Nécessité* à une tentative de résolution de ce paradoxe [19].

Un autre concept caractérisant les systèmes auto-organisés est celui de transition de phase (selon la terminologie utilisée en physique ; en théorie des systèmes dynamiques, on parlerait plutôt de bifurcation). En effet, le passage à l'état « auto-organisé » peut se faire soudainement. Un exemple en est l'apparition des bouchons routiers sur une autoroute (un tel bouchon est l'exemple d'un phénomène auto-organisé non-désiré) : ceux-ci apparaissent soudainement sans qu'aucune cause apparente ne les ait provoqués (une des caractéristiques du phénomène d'émergence) et disparaissent tout aussi soudainement. En physique, les transitions de phase apparaissent lorsqu'on change certains paramètres du système, comme sa température par exemple : ainsi, l'ébullition, c'est-à-dire le passage de l'eau de l'état liquide à l'état vapeur se produit quand on la chauffe. Dans les systèmes auto-organisés, un analogue de la température est le niveau de bruit associé à la composante aléatoire du mouvement des agents. Ainsi, en trafic routier, la présence de conducteurs au

comportement erratique peut induire la formation d'ondes de « stop and go » dans un trafic dense mais sinon fluide. Le phénomène d'émergence, bien que spontané, peut donc être amplifié par des conditions environnementales favorables.

Mais dans les systèmes auto-organisés, une autre variable induisant des transitions de phase est tout simplement la densité des individus. Un accroissement de densité est très souvent associé à un accroissement du niveau d'ordre dans le système. Par exemple, la formation spontanée de files de piétons n'apparaît que lorsque la densité est suffisamment importante. Pour des densités plus faibles, les obstacles constitués par les autres piétons ne sont pas suffisamment denses pour que des stratégies d'évitement cohérentes soient mises en place. Cet accroissement du niveau d'ordre avec la densité est un phénomène paradoxal et en contradiction avec ce qui est observé dans les systèmes physiques classiques où un accroissement de densité produit généralement un accroissement de température (ce que l'on peut constater par exemple en gonflant un pneu de vélo : après avoir servi, le corps de la pompe s'est échauffé). Pour quantifier le niveau d'ordre d'un système, on se sert d'un paramètre d'ordre, quantité variant entre 0 et 1, la valeur 0 étant associée au désordre total, et la quantité 1 à l'ordre total. Il est cependant parfois difficile de quantifier l'état d'un système à l'aide d'un seul paramètre d'ordre (par exemple, comment caractériser simplement l'ordre d'un réseau complexe. Différents quantificateurs ont été proposés mais aucun n'est associé de manière univoque à un type de structure particulier).

Lors d'une transition de phase, le système subit des variations importantes de ses propriétés, et notamment de son paramètre d'ordre, même si les variations de ses paramètres sous-jacents (densité, niveau de bruit) sont très faibles. Cet état caractéristique du passage du système d'une phase à l'autre est appelé état critique. L'état critique est souvent associé à des propriétés très particulières du système, notamment l'apparition de corrélations à grande distance. En effet, la manifestation d'une organisation se traduit par des propriétés similaires des agents (ce qu'on traduit par le concept de corrélation), même lorsque ceux-ci sont fortement distants les uns des autres. Un système à l'état critique possède la capacité de basculer dans une des deux phases qui le bordent en réponse à une variation extrêmement faible de ses paramètres sous-jacents. Cette propriété confère une forte adaptabilité aux systèmes critiques. De nombreux systèmes vivants semblent opérer dans un état critique, celui-ci ayant été favorisé lors de l'évolution car conférant une meilleure capacité de survie. Par exemple, les interactions entre individus au sein de groupes d'animaux grégaires (poissons, oiseaux, ongulés) permettent des transitions très rapides entre un état de repos où les liens entre les individus sont lâches et où chaque individu poursuit un but individuel (se nourrir par exemple) et un état d'alerte où les individus se regroupent pour résister plus facilement à l'attaque d'un prédateur. Des simulations informatiques montrent que, en faisant varier les « paramètres » de ces interactions par rapport aux valeurs « naturelles », on détériore la capacité du groupe à réagir efficacement à l'attaque du prédateur.

Dans les systèmes physiques, l'état critique apparaît uniquement pour certaines plages de paramètres bien choisies. Ainsi, à pression ambiante, il faut amener l'eau liquide à la température de 100 °C pour que l'ébullition apparaisse. Dans les systèmes auto-organisés au contraire, l'état critique est un état extrêmement

robuste : il apparaît pratiquement systématiquement, quelles que soient les conditions initiales du système. En termes de systèmes dynamiques, l'état critique est un attracteur. Ainsi, pour une densité de véhicules suffisante sur une portion d'autoroute donnée, les bouchons vont apparaître quelles que soient les conditions initiales du trafic. La présence d'états critiques attracteurs de la dynamique est appelée « criticalité auto-organisée » [2]. C'est une branche importante de la physique et maintenant également des probabilités. Pour les systèmes exhibant de la criticalité auto-organisée, la présence de transitions de phases n'est pas un accident fortuit. C'est une circonstance banale dont il est indispensable de tenir compte dans les modèles.

Dans cette présentation succincte, de nombreux aspects ont été passés sous silence, comme par exemple, la distinction entre transitions de phase continues et discontinues, qui donnent lieu à des scénarios de transition différents. De même, il conviendrait de documenter plus précisément un certain nombre des phénomènes décrits, notamment en relation avec les observations expérimentales. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces questions à l'article de revue [24].

Et les mathématiques dans tout cela ? Bien entendu, elles sont susceptibles d'apparaître un peu partout mais nous allons nous restreindre aux problèmes de modélisation, c'est-à-dire à la description du système par le biais d'équations capables de fournir une prédiction de l'état futur du système à partir d'informations présentes à l'état initial. Autrement dit, nous nous intéressons à formuler un problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles approprié. Il s'agit d'une approche complémentaire de celle de la physique statistique, qui vise avant tout à décrire et expliquer les propriétés génériques des systèmes. Il y a tout de même une parenté entre les deux approches, en ce que les systèmes étant par nature stochastique, nous rechercherons une trajectoire moyenne et éventuellement (mais on en est encore loin) des informations sur la répartition statistique des trajectoires autour de cette trajectoire moyenne.

Tout d'abord, pour quelles raisons s'intéresser à la modélisation de ces systèmes ? Après tout, il ne s'agit pas de calculer l'écoulement d'un fluide pour faire voler un avion ou optimiser la carène d'un bateau. Quel intérêt peut-il y avoir à reproduire le comportement des animaux grégaires ou à comprendre comment des termites construisent leur nid, au-delà bien sûr de la soif légitime de connaissance qui est à l'origine de toute recherche ? Il y a tout d'abord des enjeux environnementaux ou sociétaux. Par exemple, la survie d'une espèce grégaire est très nettement dépendante de la taille caractéristique des groupes qu'elle est capable de constituer. Ainsi, la viabilité des bancs de poissons est menacée lorsque ceux-ci ont une taille trop petite. Il en est de même pour certaines espèces d'oiseaux, comme les manchots Adélie qui deviennent incapables de résister à la pression prédatrice lorsque la taille de la colonie est trop petite. Comprendre par quels mécanismes sociaux la taille des groupes influe sur leur viabilité est typiquement une question à laquelle la modélisation des interactions sociales au sein du groupe peut apporter des éléments d'information, éléments qui peuvent ensuite servir à l'élaboration de politiques de prévention. La modélisation du comportement des foules humaines présente également de forts enjeux sociétaux, en termes de sécurité, d'efficacité et de rentabilité. Enfin, au niveau biologique, la compréhension des mécanismes

de migration collective des cellules peut ouvrir de nouveaux paradigmes dans des domaines comme la médecine régénérative.

D'autres enjeux, également considérables, se déclinent en termes technologiques : les sciences de l'ingénieur s'ouvrent de plus en plus aux approches bio-mimétiques qui scrutent la nature pour essayer de s'en inspirer. La robotique étudie les mécanismes d'interactions sociales pour constituer des flottilles de robots ou de drones capables de résoudre de manière autonome des tâches complexes (comme la surveillance des massifs forestiers contre les incendies), de s'auto-adapter et d'apprendre de nouvelles compétences. Récemment des stratégies s'inspirant du vol des oies sauvages ont été proposées pour coordonner des flottilles de satellites. L'architecture elle-même surfant sur la vogue des éco-bâtiments ou éco-quartiers s'intéresse à la manière dont les termites résolvent des problèmes comme celui de la régulation thermique au sein de la termitière. Enfin, il ne faut pas négliger l'industrie du divertissement, porteuse d'un potentiel économique considérable. De plus en plus de films, et pas seulement d'animation, font appel à des images virtuelles. Être capable de créer des séquences vidéos crédibles de foules d'êtres humains (ou non-humains comme les hordes d'Orcs dans le film « Le Seigneur des Anneaux » qui ont été créés à partir de logiciels d'animation graphique) nécessite une compréhension intime des mécanismes d'interaction sociale et des mouvements collectifs.

Pour comprendre comment les systèmes auto-organisés suggèrent de nouveaux problèmes fascinants pour les mathématiciens, il faut d'abord revenir un peu en arrière et examiner comment les mathématiciens et les physiciens abordent les grands systèmes d'agents en interaction (en physique on parle de systèmes de particules). En effet, les systèmes auto-organisés sont des exemples particuliers de systèmes de particules et les théories classiques devraient pouvoir s'appliquer. En fait, il n'en est rien car les systèmes auxquels la théorie cinétique s'est intéressée sont issus de la physique et possèdent donc des caractéristiques particulières que je vais essayer de décrire maintenant. Ces caractéristiques particulières ne sont en général pas vérifiées par les systèmes auto-organisés et par conséquent l'étude de ces derniers demande la mise au point de nouveaux concepts mathématiques.

Les systèmes à grand nombre de particules peuvent être décrits (modélisés) à différents niveaux de détail. Les modèles qui procurent la description ultime, la plus précise, sont les modèles dit « Individus-Centrés » ou « Agents-Centrés », encore appelés modèles de particules en physique. Ils consistent à écrire un grand système d'équations différentielles (déterministes ou stochastiques) couplées qui décrit la position et l'état (vitesse, orientation, etc.) de chaque agent au cours du temps. Lorsqu'il y a beaucoup de particules en interaction, ces systèmes sont très coûteux à résoudre numériquement car leur coût croît polynomialement avec le nombre de particules.

De plus, les modèles de particules ou « Individus-Centrés » ne fournissent pas une information exploitable directement. En effet, dans la pratique, on se moque de connaître la position de chaque agent. Ce qui nous intéresse ce sont des grandeurs moyennes comme par exemple, en supposant que les agents s'assemblent en groupes ou clusters, le nombre de clusters, la statistique des tailles de clusters, etc. Pour obtenir des informations exploitables, il faut donc appliquer un post-traitement aux résultats de ces modèles, ce qui n'est pas toujours immédiat. Dans

le cas des clusters par exemple, il faut appliquer une méthode dite de « clustering » dont les résultats sont dépendants de la méthode et de ses paramètres (comme par exemple la définition d'une métrique qui permettra d'affirmer que deux particules sont « proches » et donc appartiennent au même cluster). Les modèles individus-centrés sont discrets par nature, alors que la morpho-analyse des grands systèmes nécessite des quantités continues obtenues comme moyennes « à gros grains » des quantités discrètes. Ce que l'œil sait faire instinctivement – tracer mentalement le contour du banc de poissons – est une tâche particulièrement ardue à réaliser automatiquement.

Il faut donc rechercher des modèles qui opèrent sur des quantités plus macroscopiques décrivant le comportement statistique moyen des agents. Pour obtenir de tels modèles, dits continus, on peut bien entendu procéder de manière heuristique : les premiers modèles continus pour les systèmes auto-organisés ont été produits de cette manière [22]. Néanmoins, il est indispensable d'établir un lien rigoureux et systématique entre les modèles continus et leurs pendants microscopiques. En effet, bien souvent, le modèle microscopique lui-même est mal connu : par exemple, il est quasiment impossible de déterminer avec certitude les lois d'interaction entre des poissons dans un banc, des insectes dans un essaim ou même des piétons dans une foule. En revanche, il est relativement facile d'observer les structures à grande échelle du système (mouvement du banc, formation des files dans la foule). Celles-ci fournissent des informations qui, rapportées à un modèle continu, permettent d'en calibrer les paramètres. Une fois les paramètres du modèle continu connus, il est possible de remonter aux lois des interactions individuelles à condition qu'un lien rigoureux ait été établi entre le niveau discret et le niveau continu.

Cette approche mérite quelques commentaires. En physique classique, on a tendance à adopter une approche ascendante : on étudie une particule, puis deux, puis trois, puis un petit nombre puis on fait tendre ce nombre vers l'infini pour obtenir le modèle continu. Dans l'étude des systèmes auto-organisés, on doit souvent adopter une approche descendante. Des connaissances des lois du système dans son ensemble, on doit essayer d'en extraire les lois individuelles. C'est une mini-révolution dans la méthodologie scientifique. Cette révolution affecte particulièrement la biologie, où l'approche systémique (descendante) prend une importance croissante au détriment de l'approche réductionniste (ascendante). Cette dernière, qui commence par étudier une protéine ou un gène, puis un réseau de régulation simple, puis qui complexifie progressivement le réseau aboutit à la fin à un résultat tellement complexe qu'il en devient difficilement exploitable. Par ailleurs, les techniques d'analyse ont également subi une révolution quantitative telle qu'il devient maintenant possible d'étudier simultanément un nombre de composants et où une approche systémique devient indispensable.

Les modèles continus sont obtenus par des procédés de moyenne, de passage à gros grains (ou coarsening) à partir des modèles microscopiques. Traditionnellement, on distingue deux niveaux de coarsening. Un premier niveau consiste à utiliser une description statistique du système, c'est-à-dire à remplacer la connaissance supposée parfaite de la position et de l'état de chaque agent par une description probabiliste. Les modèles qui en résultent sont appelés « modèles cinétiques ». En général, pour un système de particules en interaction, il n'est pas possible d'obtenir une équation fermée pour la distribution de probabilité qu'une particule prise au

hasard occupe une position et un état donnés à un instant donné. Pour qu'il soit possible d'écrire une telle équation, il faut faire une hypothèse dénommée « propagation du chaos ». Selon cette hypothèse, les particules sont statistiquement indépendantes et la distribution d'une particule prise au hasard est représentative de la distribution de n'importe quelle autre particule du système. Notons qu'ici le terme de chaos est pris au sens d'indépendance statistique. Il n'y a pas de lien (tout au moins pas immédiat) avec le « chaos » de la théorie du chaos.

En général, pour un système avec un nombre fini de particules, la propriété de propagation du chaos est fautive. En effet, les interactions créent des corrélations entre les particules et même si celles-ci sont statistiquement indépendantes à l'instant initial, elles cessent de l'être dès que le temps croît. Toutefois, on peut prouver que, pour certains systèmes modèles, les corrélations produites par les interactions entre les particules décroissent avec le nombre de particules. Ainsi, la propriété de propagation du chaos devient vraie à la limite d'un nombre infini de particules. Intuitivement, quand le nombre de particules est grand, la position et l'état d'une particule donnée n'a qu'une influence relative faible sur le reste du système. Démontrer un résultat de propagation du chaos est une tâche mathématique ardue et, jusqu'à des progrès récents réalisés par C. Mouhot et S. Mischler [18], le seul résultat – très partiel – était dû à O. Lanford [17]. Des prototypes de modèles cinétiques obtenus sous l'hypothèse de propagation du chaos (démontrée ou non) sont les équations de Boltzmann et de Fokker-Planck. Ce sont des équations aux dérivées partielles incluant parfois des opérateurs intégraux. Surtout, elles sont posées sur un espace dont la dimension est égale au nombre de paramètres décrivant la position et l'état des particules. Ainsi, si les particules sont décrites par une position dans  $\mathbb{R}^n$  et une orientation appartenant à la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ , l'équation cinétique sera posée sur la variété  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

Le niveau ultime de coarsening consiste à réduire la description du système à quelques quantités macroscopiques moyennes, telles que la densité, la vitesse moyenne, le paramètre d'ordre, etc, qui sont fonctions de la position et du temps. Les modèles ainsi produits sont les modèles fluides. Ce sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, dont les prototypes sont les équations d'Euler, de Navier-Stokes, de diffusion, etc. La dérivation des modèles fluides à partir des modèles cinétiques s'effectue en moyennant les équations sur les variables d'état des particules (telles que la vitesse, l'orientation), pour ne plus conserver qu'une information spatio-temporelle. Là encore, la procédure ne fournit pas spontanément de système d'équations fermé, à moins d'effectuer une hypothèse dite de fermeture sur la distribution de probabilité des particules. Cette hypothèse peut être justifiée dans le régime hydrodynamique lorsque les phénomènes mis en jeu dans le modèle cinétique contribuent précisément à rapprocher la distribution de probabilité des particules de la distribution postulée.

Un appareil mathématique considérable a été développé pour donner un cadre rigoureux à ces approches depuis que Hilbert a posé le problème dans son adresse de 1900 (il s'agit du sixième problème de Hilbert : « développer mathématiquement les processus limitatifs, juste esquissés, qui mènent de la vision atomiste aux lois du mouvement du continu. »). La théorie cinétique a connu des développements impressionnants, en particulier en France où deux mathématiciens travaillant dans ce domaine, P. L. Lions et C. Villani, ont reçu la Médaille Fields. Il semble donc

que le terrain est propice à l'application des méthodes de la théorie cinétique aux systèmes auto-organisés.

En fait, cette application s'avère plus délicate que prévu, et de nouvelles questions mathématiques passionnantes ont émergé de ces difficultés. On peut notamment lister trois difficultés principales, mais bien entendu, il ne s'agit pas d'une liste exhaustive. Une des premières difficultés questionne d'emblée la validité de l'approche cinétique. Il s'agit en effet tout simplement de remettre en question la propriété de propagation du chaos. En effet, l'auto-organisation suppose la construction de corrélations entre les particules. Nous avons déjà noté que les corrélations à grande distance sont la signature des états critiques que les systèmes auto-organisés atteignent généralement spontanément au cours de leur dynamique, ceux-ci se comportant comme des attracteurs du système. Dans un système auto-organisé, l'observation d'un agent au hasard (par exemple un poisson au sein d'un banc) permet d'en déduire des informations sur les autres agents dans un voisinage plus ou moins large (ici, les voisins du poisson considéré). C'est bien la signature de corrélations importantes entre les agents du système, dont il n'est pas évident qu'elles disparaissent lorsque le nombre de particules augmente. On a observé plus haut au contraire que l'accroissement du nombre de particules était généralement associé à un accroissement de l'ordre du système. Il semble donc bien que, au moins pour un certain nombre de systèmes auto-organisés, la propriété de propagation du chaos soit invalidée. C'est ce que nous avons observé (avec E. Carlen et B. Wennberg, [5]) dans un système modèle pour lequel nous avons pu expliciter complètement la solution de la hiérarchie des distributions de probabilité d'ordre supérieur (probabilités conjointes à deux, trois ou plus de particules). La question fondamentale qui se pose alors est la suivante : quelles équations vont remplacer les équations cinétiques dans les situations où la propagation du chaos est invalide ? Des réponses phénoménologiques ont été proposées en physique (fermeture de Kirkwood par exemple) mais à notre connaissance, aucune théorie mathématique même formelle n'a été proposée pour l'instant.

La seconde question concerne le passage des modèles cinétiques aux modèles fluides. Dans la physique classique, un des concepts fondamentaux qui permet d'effectuer ce passage est celui de loi de conservation (conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie, du moment angulaire, etc.). On observe que les interactions microscopiques entre particules préservent localement ces quantités et que donc ces conservations doivent « passer » à l'échelle macroscopique. Cette propriété est tellement fondamentale que les modèles fluides sont souvent appelés « systèmes de lois de conservation ». Or la plupart des systèmes auto-organisés d'origine biologique ou sociale n'ont strictement aucune raison d'obéir à des lois de conservation. Les animaux ou les cellules métabolisent des substances chimiques pour en retirer de l'énergie et conséquemment, de l'impulsion. De manière analogue, les véhicules sur une autoroute sont munis d'accélérateurs et de freins qui leur permettent d'augmenter ou de diminuer leur impulsion. Il n'y a donc pas de raisons physiques à ce que les modèles macroscopiques soient le reflet de quelconques lois de conservation.

Pourtant, nous avons pu montrer dans une série de travaux initiée dans [15] que des lois de conservation « affaiblies » pouvaient subsister. Ces lois de conservation proviennent de ce que les interactions élémentaires ne conservent pas des quantités

absolues (comme l'impulsion) mais des quantités dépendantes de la distribution de probabilité des agents. Dans la dynamique d'alignement considérée dans [15], laquelle repose sur un paradigme proposé par Vicsek [23] (voir ci-dessous), il n'y a pas de conservation de l'impulsion totale, mais une certaine moyenne de l'impulsion dans la direction transverse à la vitesse moyenne est conservée par l'interaction. Cette observation a donné lieu au concept d'invariant collisionnel généralisé. Les modèles hydrodynamiques obtenus appartiennent par voie de conséquence à la classe des modèles hyperboliques non-conservatifs. Ces modèles présentent des difficultés mathématiques considérables (notamment dans la définition et la sélection des bonnes solutions discontinues, ou ondes de choc) encore très imparfaitement résolues. La difficulté des modèles obtenus dans [15] se double de la présence d'une contrainte géométrique qui en font des objets nouveaux dont l'étude mathématique est quasi-totalement ouverte (il existe tout juste un résultat d'existence de solutions locales en temps démontré dans [12]). Le concept d'Invariant Collisionnel Généralisé s'est avéré fécond dans plusieurs autres contextes. On a pu ainsi l'utiliser pour proposer une dérivation microscopique du modèle de Landau-Lifschitz-Gilbert du micro-magnétisme dans [11] ou plus récemment pour obtenir des modèles macroscopiques d'évolution de la distribution de richesse pour des économies non-conservatives [14]. Au passage, ce dernier exemple montre des relations insoupçonnées entre les états d'équilibres des systèmes auto-organisés et les équilibres de Nash dans la théorie des jeux [13].

La troisième question concerne la prééminence des états critiques et des transitions de phase dans la dynamique des systèmes auto-organisés. La présence de transition de phases n'est pas l'apanage des systèmes auto-organisés. De nombreux systèmes physiques présentent ce type de phénomène. Toutefois, le fait que l'état critique soit un attracteur du système impose de nouvelles contraintes sur les modèles, notamment les modèles fluides. Il est en effet nécessaire que ces modèles fluides décrivent correctement l'état critique et la possibilité que le système bascule dans l'une ou l'autre des phases associées à cet état. Des phénomènes complexes comme l'hystérésis, qui font intervenir l'histoire du système, doivent également être correctement rendus. Les phénomènes d'hystérésis semblent en effet intervenir de manière assez répandue dans les systèmes auto-organisés [6] et sont liés à la présence d'états d'équilibres multiples et à la métastabilité de ceux-ci. En trafic routier, par exemple, il n'est pas rare qu'une congestion persiste même lorsque la densité du système est revenue à une valeur où, dans d'autres circonstances, le trafic serait fluide.

Or les différentes phases conduisent généralement à des modèles fluides de nature différente. Prenons par exemple le cas des transitions de phase avec brisure de symétrie qui sont très répandues dans les systèmes auto-organisés et dont un des paradigmes est fourni par le modèle de Vicsek. Dans ce modèle, des particules auto-propulsées, dont les vitesses sont de norme constante, tentent de s'aligner sur leur voisines mais subissent par ailleurs un bruit dans l'orientation de leur vitesse. À fort bruit (ou à faible densité), les fluctuations stochastiques l'emportent sur la tendance à l'alignement et l'état du système est désordonné, avec une orientation des vitesses aléatoires. Pour cette phase désordonnée, le modèle macroscopique associé est un modèle de diffusion, de type parabolique. Lorsque le bruit diminue ou que la densité augmente, une transition de phase se produit et une orientation globale

des particules émerge. Pour cette phase ordonnée, le modèle macroscopique est un modèle hydrodynamique, de type hyperbolique. Une description de ces différents types de modèles est proposée dans [9, 10]. Ainsi il y a changement de type du modèle à la traversée de la transition de phase. À l'état critique, certaines parties du système sont dans la phase désordonnée et coexistent avec d'autres régions qui se trouvent dans la phase ordonnée. On doit donc alors trouver le moyen de faire coexister des modèles fluides de type différent et de les coupler à travers l'étroite région de l'espace où se produit la transition. À l'heure actuelle, il n'existe aucune théorie sur la manière d'obtenir rigoureusement les conditions d'interface.

La brisure de symétrie a été utilisée dans un contexte assez surprenant, pour concevoir des tests automatisés de fertilité pour des échantillons de sperme ovin. En effet, le mouvement collectif du milliard de spermatozoïdes par millilitre que contient le sperme ovin met le plasma séminal en mouvement. En observant une goutte de sperme non-dilué sous le microscope, on peut observer des tourbillons très similaires à ceux d'une eau agitée (à la différence d'échelle près bien sûr). Cette motilité collective du sperme est appelée motilité massale et est un marqueur prouvé de la fertilité d'un échantillon de sperme [8]. Cette propriété est utilisée routinièrement dans les centres d'Insémination Artificielle pour sélectionner les échantillons les plus fertiles en vue de leur commercialisation. Pour mesurer objectivement la motilité massale, l'idée est venue de confiner celui-ci dans un anneau. Après quelques secondes de mouvement désordonné, les spermatozoïdes se mettent à choisir un sens de rotation donné, brisant ainsi la symétrie de départ. La mesure de la vitesse de rotation, très facile, permet de quantifier la motilité massale. Un brevet a été déposé [7].

D'autres types de transition de phase interviennent dans les systèmes auto-organisés comme la transition de jamming, qui se produit lorsque des particules de taille finie atteignent des densités telles qu'elles se retrouvent au contact les unes des autres. Cette transition est à l'œuvre par exemple dans les groupes d'animaux tels les ongulés [16] ou dans les foules [1]. Une autre transition couramment observée est celle du continu vers le discret, le milieu discret pouvant prendre la forme d'un réseau. Un exemple en est la formation des pistes de fourmis. Celles-ci sont le produit d'un marquage chimique par des phéromones déposées par les fourmis lors de leurs déplacements. Selon les caractéristiques de ce marquage (fréquence de dépôt, taux d'évaporation), on assiste à une transition entre un processus de diffusion continu vers la formation d'un réseau de pistes empruntés de manière préférentielle par les agents. La dérivation de modèles macroscopiques et la prise en compte de ce type de transition de phase en est encore à un stade très préliminaire (voir par exemple [3]).

Il existe bien d'autres défis passionnants posés par les systèmes auto-organisés et tout mathématicien peut puiser dans une source de problèmes fascinants en fonction de ses intérêts. Ainsi il existe des questions de géométrie (quelle est la trajectoire choisie par une fourmi sur une surface courbe, qu'est-ce qui détermine l'évolution de la surface enveloppant la nuée d'étourneaux), de topologie (comment classifier les différentes structures de nids d'insectes sociaux et comment expliquer leurs différences) ou de systèmes dynamiques (combien faut-il de leaders dans un troupeau de moutons pour prendre le contrôle du troupeau), etc.

Cette courte présentation a pris le parti de se focaliser sur la dynamique macroscopique des grands systèmes pour montrer à quel point l'étude des systèmes auto-organisés pouvait contribuer à stimuler les questionnements mathématiques. On peut résumer le propos de cet article en disant que la dynamique des systèmes auto-organisés pose de nouvelles questions qui nécessitent l'invention de nouveaux concepts mathématiques. L'espoir est grand que ces nouveaux concepts puissent en retour permettre d'avancer sur des questions mathématiques centrales en élargissant le champ de la pensée et en mettant à l'épreuve les concepts classiques.

## Références

- [1] C. Appert-Rolland, P. Degond, S. Motsch, Two-way multi-lane traffic model for pedestrians in corridors, *Netw. Heterog. Media*, 6 (2011) 351-381.
- [2] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality : an explanation of  $1/f$  noise, *Phys. Rev. Lett.*, 59 (1987) 381-384.
- [3] E. Boissard, P. Degond, S. Motsch, Trail formation based on directed pheromone deposition, *J. Math. Biol.*, 66 (2013) 1267-1301.
- [4] A. Bricard, J-B. Caussin, N. Desreumaux, O. Dauchot, D. Bartolo, Emergence of macroscopic directed motion in populations of motile colloids, *Nature* 503 (2013) 95-98.
- [5] E. Carlen, P. Degond, & B. Wennberg, Kinetic limits for pair-interaction driven master equations and biological swarm models, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23 (2013)1339-1376.
- [6] I. D. Couzin, J. Krause, R. James, G. D. Ruxton and N. R. Franks, Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups, *J. theor. Biol.*, 218 (2002) 1-11.
- [7] A. Creppy, P. Degond, O. Praud, F. Plouraboué, Dispositif de traitement d'un échantillon d'un fluide biologique actif, dépôt de brevet FR 13 61662, 26 novembre 2013.
- [8] I. David, X. Druart, G. Lagriffoul, E. Manfredi, C. Robert-Granié, L. Bodin, Genetic and environmental effects on semen traits in Lacaune and Manech tête rousse AI rams, *Genet. Sel. Evol.*, 39 (2007) 405-419.
- [9] P. Degond, A. Frouvelle, J-G. Liu, Macroscopic limits and phase transition in a system of self-propelled particles, *J. Nonlinear Sci.*, 23 (2013) 427-456.
- [10] P. Degond, A. Frouvelle, J-G. Liu, Phase transitions, hysteresis, and hyperbolicity for self-organized alignment dynamics, preprint. arXiv :1304.2929
- [11] P. Degond, J-G. Liu, Hydrodynamics of self-alignment interactions with precession and derivation of the Landau-Lifschitz-Gilbert equation, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22 Suppl. 1 (2012) 1140001.
- [12] P. Degond, J-G. Liu, S. Motsch, V. Panferov, Hydrodynamic models of self-organized dynamics : derivation and existence theory, *Methods Appl. Anal.*, 20 (2013) 089-114.
- [13] P. Degond, J.-G. Liu, C. Ringhofer, Large-scale dynamics of Mean-Field Games driven by local Nash equilibria, *J. Nonlinear Sci.* 24 (2014) 93-115.
- [14] P. Degond, J.-G. Liu, C. Ringhofer, Evolution of wealth in a nonconservative economy driven by local Nash equilibria. Submitted. arXiv :1403.7800
- [15] P. Degond, S. Motsch, Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18 Suppl. (2008) 1193-1215.
- [16] P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez, Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness, *J. Stat. Phys.*, 138 (2010) 85-125.
- [17] O. E. Lanford, III. On a derivation of the Boltzmann equation. In International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975), page 117-137. Astérisque, N° 40. Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [18] S. Mischler, C. Mouhot, Kac's Program in Kinetic Theory, *Invent. Math.*, 193 (2013) 1-147,
- [19] J. Monod, *Le Hasard et la Nécessité. Essai sur la philosophie naturelle de la biologie moderne*, Seuil, 1973.
- [20] M. Moussaïd, E. G. Guilloit, M. Moreau, J. Fehrenbach, O. Chabiron, S. Lemerrier, J. Pettré, C. Appert-Rolland, P. Degond, G. Theraulaz, Traffic Instabilities in Self-organized Pedestrian Crowds, *PLoS Computational Biology*, 8 (2012) e1002442

- [21] S. Pizzarello, L. B. Williams, J. Lehman, G. P. Holland, J. L. Yarger, Abundant ammonia in primitive asteroids and the case for a possible exobiology, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 108 (2011) 4303-4306.
- [22] J. Toner, Y. Tu and S. Ramaswamy, Hydrodynamics and phases of flocks, *Annals of Physics*, 318 (2005) 170-244
- [23] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet, Novel type of phase transition in a system of self-driven particles, *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995) 1226-1229.
- [24] T. Vicsek, A. Zafeiris, Collective motion, *Phys. Rep.*, 517 (2012) 71-140.

**Remerciements** : *les travaux évoqués dans cet article ont été réalisés en collaboration. Je tiens tout particulièrement à remercier C. Appert-Rolland, E. Carlen, J.-G. Liu, F. Plouraboué, G. Theraulaz, B. Wennberg et mes anciens étudiants A. Frouvelle, S. Motsch et L. Navoret, pour leurs contributions essentielles. Je tiens également à remercier les relecteurs d'IdM dont les noms et pseudonymes sont Clement\_M, Aline Parreau et Jérémie Le Borgne pour leur relecture attentive et leurs remarques constructives.*

## Spectre des systèmes intégrables quantiques et représentations linéaires

David Hernandez<sup>1</sup>

---

La structure des valeurs propres d'un système quantique, c'est-à-dire de son spectre, est essentielle à sa compréhension. Dans un célèbre article daté de 1971, Baxter a calculé ces valeurs propres pour le modèle « de la glace ». Il a montré qu'elles ont une forme remarquable et régulière faisant intervenir des polynômes. Dans les années 1980-1990, il a été conjecturé que de tels polynômes permettent de décrire le spectre de nombreux systèmes quantiques plus généraux. Nous allons voir comment, en adoptant le point de vue mathématique de la théorie des représentations, ces polynômes (de Baxter) apparaissent naturellement. Ce résultat nous a permis de démontrer en 2013 la conjecture générale.

### 1. Systèmes intégrables quantiques

Le modèle à 6 sommets est un célèbre modèle de physique statistique introduit par Pauling en 1935, qui permet notamment de décrire le cristal de la glace (voir [B2]). Il est réalisé sur un réseau dont chaque sommet est relié à 4 autres sommets. Un état du système est une orientation des arêtes telle qu'à chaque sommet arrivent exactement 2 flèches (Figure 1). Les flèches représentent l'orientation des molécules d'eau du cristal les unes par rapport aux autres. Il y a 6 configurations possibles à chaque sommet (Figure 2), ce qui justifie l'appellation de ce modèle.

---

<sup>1</sup> Sorbonne Paris Cité, Université Paris Diderot, CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche UMR 7586.

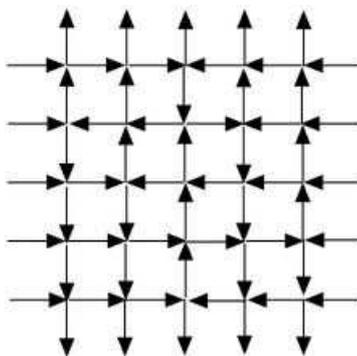


FIG. 1. Une orientation d'un réseau (modèle à 6 sommets).

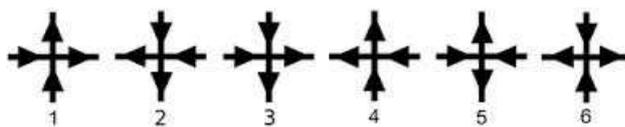


FIG. 2. 6 configurations possibles à chaque sommet.

L'étude du modèle de la glace est fortement liée à celle d'un autre modèle, cette fois-ci en physique statistique quantique, appelé modèle XXZ de Spin 1/2, dit de Heisenberg quantique (1928). Il s'agit d'une variante en physique quantique du modèle d'Ising (1925) (voir [JM]), qui modélise des chaînes de spins magnétiques quantiques ayant deux états classiques, haut ou bas (Figure 3).



FIG. 3. États d'un Spin 1/2 (haut ou bas).

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle XXZ, figurent parmi les plus étudiés en physiques statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches. En dépit de leur formulation assez élémentaire, ils sont extrêmement riches et leur analyse a une très longue histoire.

En physique statistique (quantique), le comportement du système est contrôlé

par la fonction de partition<sup>2</sup>, qui permet d'obtenir les grandeurs mesurables<sup>3</sup>  $\mathcal{Z}$ . Cette fonction  $\mathcal{Z}$  est très difficile à calculer en général. La méthode de la matrice de transfert est un procédé pour tenter de la déterminer : il s'agit d'écrire  $\mathcal{Z}$  comme trace d'un opérateur  $\mathcal{T}$  (la matrice de transfert) agissant sur l'espace des états  $W$  :

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}_W(\mathcal{T}^M).$$

Ici  $M$  est un entier associé à la taille du réseau du modèle. Ainsi, pour trouver  $\mathcal{Z}$ , il suffit d'obtenir les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{Z} = \sum_j \lambda_j^M.$$

Le spectre  $\{\lambda_j\}_j$  de  $\mathcal{T}$  est appelé le spectre du système quantique.

Dans un célèbre article séminal de 1971, inspiré notamment par les travaux de Bethe (1931), Baxter [B1] a complètement résolu ce problème<sup>4</sup>. Grâce à une étude très précise il a notamment montré que les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}$  ont une structure tout à fait remarquable : elles s'expriment sous la forme

$$(1.1) \quad \lambda_j = A(z) \frac{Q_j(zq^2)}{Q_j(z)} + D(z) \frac{Q_j(zq^{-2})}{Q_j(z)},$$

où  $z, q \in \mathbb{C}^*$  sont des paramètres du modèle (respectivement spectral et quantique),  $A(z)$  et  $D(z)$  sont des fonctions « universelles » (au sens où elles ne dépendent pas de la valeur propre  $\lambda_j$ ). La fonction  $Q_j(z)$  dépend de la valeur propre, mais c'est un polynôme. La relation (1.1) est la fameuse relation de Baxter (ou « relation  $TQ$  de Baxter »). Les polynômes  $Q_j$  sont appelés polynômes de Baxter.

En résultent alors naturellement les questions suivantes :

- y a-t-il une explication pour l'existence de la relation de Baxter ?
- une expression analogue avec des polynômes permet-elle de décrire le spectre d'autres systèmes quantiques ?

Une conjecture formulée en 1998 par Frenkel-Reshetikhin [FR] affirme que la deuxième question doit avoir une réponse positive. Comme on ne peut espérer effectuer en général le calcul détaillé de Baxter qui est connu pour le modèle  $XXZ$ , c'est en répondant à la première question que nous pouvons démontrer cette conjecture. Pour ce faire, étudions les structures mathématiques, algébriques, sous-jacentes à la théorie.

<sup>2</sup> En physique statistique, la fonction de partition s'exprime comme la somme  $\sum_j \exp(-E_j/(k_B T))$  sur tous les états  $j$  du système, où  $E_j$  est l'énergie de l'état  $j$ ,  $T$  est la température du système et  $k_B$  la constante de Boltzmann. En physique quantique, la somme est remplacée par une trace  $\text{Tr}_W(\exp(-E/(k_B T)))$  où  $E$  est l'opérateur « hamiltonien » qui agit sur l'espace  $W$  des états quantiques du système.

<sup>3</sup> Une grandeur mesurable  $Q$  est obtenue comme moyenne pondérée sur les états  $\frac{\sum_j \exp(-E_j/(k_B T)) Q_j}{Z}$  des valeurs  $Q_j$  sur chaque état  $j$ .

<sup>4</sup> Baxter a introduit la méthode puissante des « Q-opérateurs » qui lui a également permis de résoudre le modèle « à 8 sommets », plus complexe. Le modèle à 6 sommets avait aussi été résolu par d'autres méthodes, notamment dans les travaux de Lieb et Sutherland (1967).

## 2. Groupes quantiques et leurs représentations

Les groupes quantiques sont graduellement apparus au cours des années 1970, en particulier dans les travaux de l'école de Leningrad, comme le cadre naturel mathématique pour étudier les matrices de transfert. Drinfeld [D1] et Jimbo [J] ont indépendamment découvert une formulation algébrique uniforme sous forme d'algèbres de Hopf. Il s'agit d'un des résultats cités pour la médaille Fields de Drinfeld en 1990.

Pour introduire les groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo, considérons d'abord un objet très classique, une algèbre de Lie (simple) complexe de dimension finie. Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{g}$  muni d'un crochet de Lie, c'est-à-dire d'une application bilinéaire antisymétrique

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

satisfaisant à la formule de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ pour tous } x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

L'exemple le plus simple, mais néanmoins non trivial car il correspond au modèle XXZ, est celui de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  : c'est l'espace des matrices complexes  $2 \times 2$  de trace nulle, muni du crochet naturel

$$[M, N] = MN - NM$$

pour lequel il est clairement stable. Pour les générateurs linéaires

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a par exemple la relation

$$(2.2) \quad [E, F] = H.$$

Ces algèbres de Lie ont des analogues naturelles de dimension infinie, les algèbres de lacets

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}],$$

avec le crochet de Lie défini par

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] = [x, y] \otimes (fg)(t) \text{ pour } x, y \in \mathfrak{g} \text{ et } f(t), g(t) \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}],$$

ce qui revient à remplacer le corps  $\mathbb{C}$  par l'anneau des polynômes de Laurent complexes

$$\mathbb{C}[t^{\pm 1}] = \left\{ \sum_{N \leq i \leq M} a_i t^i \mid N, M \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ces algèbres sont des quotients d'algèbres de Kac-Moody affines, qui ont des propriétés algébriques semblables à celles des algèbres de Lie simples de dimension finie (notamment une présentation analogue à celle de Serre pour  $\mathfrak{g}$ , comme l'ont montré Kac (1968) et Moody (1969), voir [K]). Elles ont été étudiées intensivement pour leurs diverses applications en mathématiques et physique mathématique.

Maintenant, pour étudier les systèmes quantiques qui nous intéressent, ces algèbres de Lie classiques doivent être quantifiées, c'est-à-dire déformées en tenant compte du paramètre quantique

$$q = \exp(h) \in \mathbb{C}^*,$$

où  $h$  est un analogue de la grandeur de Planck ( $q$  sera bien identifié au paramètre quantique de la relation (1.1)). On retrouve les structures classiques pour  $h \rightarrow 0$ , donc  $q \rightarrow 1$ . On supposera dans la suite que  $q$  n'est pas une racine de l'unité.

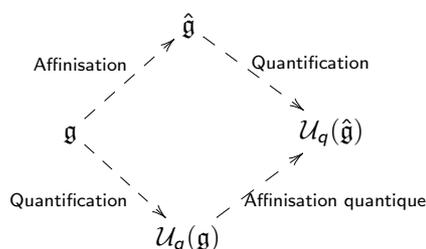
Bien qu'une telle quantification des algèbres de Lie  $\mathfrak{g}$  ou  $\hat{\mathfrak{g}}$  elles-mêmes ne soit pas connue, Drinfeld et Jimbo ont découvert qu'il existe une quantification naturelle de leurs algèbres enveloppantes respectives  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$  (algèbres universelles définies à partir des algèbres de Lie, par exemple en remplaçant dans la présentation de Serre les crochets  $[x, y]$  par des expressions algébriques  $xy - yx$  dans l'algèbre). On obtient alors les groupes quantiques  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  qui dépendent<sup>5</sup> du paramètre quantique  $q$ , voir [CP].

Par exemple dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  la relation (2.2) devient

$$[E, F] = \frac{e^{hH} - e^{-hH}}{q - q^{-1}}$$

qui tend bien vers  $H$  quand  $h$  tend vers 0.

Le cas des algèbres affines quantiques  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est particulièrement remarquable car Drinfeld [D2] a démontré<sup>6</sup> qu'elles peuvent non seulement être obtenues comme quantification de  $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ , mais également, par un autre procédé, comme affinement du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ . C'est la réalisation de Drinfeld des algèbres affines quantiques. Ceci peut être énoncé dans le diagramme « commutatif » suivant :



Ce théorème, qui revient à donner deux présentations isomorphes de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , est un analogue quantique du théorème classique de Kac et Moody. Il s'agit d'une bonne indication de l'importance de ces algèbres d'un point de vue algébrique.

Les algèbres affines quantiques  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  ont en fait une structure beaucoup plus riche, ce sont des algèbres de Hopf. Elles sont notamment munies d'une comultiplication (qui est une opération duale de la multiplication), c'est-à-dire d'un morphisme d'algèbre

$$(2.3) \quad \Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).$$

<sup>5</sup> Elles peuvent être définies comme des algèbres sur  $\mathbb{C}[[\hbar]]$ .

<sup>6</sup> La preuve a été précisée par la suite par Beck puis par Damiani.

Mais surtout,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  possède une  $R$ -matrice universelle, c'est-à-dire un élément (canonique) dans le carré tensoriel<sup>7</sup>

$$\mathcal{R}(z) \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[z]]$$

qui est notamment une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique :

$$\mathcal{R}_{12}(z)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{23}(w) = \mathcal{R}_{23}(w)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{12}(z).$$

Les paramètres formels  $z$ ,  $w$  sont appelés paramètres spectraux. Cette équation est à valeurs dans le cube tensoriel

$$(\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))^{\otimes 3}[[z, w]].$$

Les indices dans les facteurs indiquent l'emplacement des termes de la  $R$ -matrice universelle :

$$\mathcal{R}_{12}(z) = \mathcal{R}(z) \otimes 1, \quad \mathcal{R}_{23}(z) = 1 \otimes \mathcal{R}(z) \dots$$

Il s'agit d'une équation hautement non triviale, liée aux mouvements de tresses. En effet, dans la figure 4 on retrouve l'équation en lisant de bas en haut et en multipliant par un facteur  $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$  d'indice  $(\alpha, \beta)$  lorsque le brin  $\alpha$  croise le brin  $\beta$ . C'est pour cette raison que la théorie des représentations des groupes quantiques permet de construire des invariants en topologie de basse dimension (notamment les polynômes de Jones des nœuds). Il s'agit historiquement, avec la construction par Lusztig et Kashiwara de bases canoniques de représentations des algèbres de Lie classiques, d'un des premiers grands succès de la théorie des groupes quantiques. Nous n'aborderons pas ces sujets ici pour nous concentrer sur les applications aux systèmes quantiques.

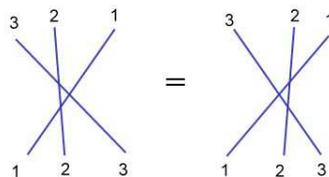


FIG. 4. Équation de Yang-Baxter

Pour décrire des solutions de l'équation de Yang-Baxter quantique, on peut spécialiser sur des représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Une représentation (linéaire) de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est un espace vectoriel  $V$  (ici complexe) muni d'un morphisme d'algèbre

$$\rho_V : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(V).$$

Autrement dit, l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  agit sur l'espace  $V$  par opérateurs linéaires.

L'étude des représentations est un vaste domaine, central en mathématiques, appelé théorie des représentations. En arithmétique par exemple, les représentations de groupes de Galois jouent un rôle crucial. Elles sont également essentielles dans la formulation même des principes de la physique quantique car ils font intervenir des représentations de l'algèbre des observables.

<sup>7</sup> En fait, dans une légère complétion du carré tensoriel.

On définit naturellement la somme directe de représentations  $(V, \rho_V)$  et  $(V', \rho_{V'})$  avec l'application  $\rho_{V \oplus V'} = \rho_V + \rho_{V'}$  à valeurs dans  $\text{End}(V \oplus V')$ .

Les représentations simples, c'est-à-dire qui n'ont pas de sous-représentation (sous-espace stable pour l'action de l'algèbre) propre, sont particulièrement importantes, comme nous allons le voir dans notre étude. Elles constituent les « briques élémentaires » de la théorie des représentations. Par exemple, toute représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  est semi-simple, c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de représentations simples<sup>8</sup>. Ce n'est pas le cas<sup>9</sup> pour l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

Comme  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  est munie d'un coproduit (2.3), pour deux représentations  $(V, \rho_V)$  et  $(V', \rho_{V'})$ , le produit tensoriel  $V \otimes V'$  est aussi une représentation en utilisant

$$\rho_{V \otimes V'} = (\rho_V \otimes \rho_{V'}) \circ \Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \text{End}(V) \otimes \text{End}(V') = \text{End}(V \otimes V').$$

Cette action sur un produit tensoriel de représentation sera utile par la suite. Mais indépendamment on peut faire aussi agir directement la  $R$ -matrice universelle sur un carré tensoriel  $V \otimes V$  pour  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  : on peut en effet considérer l'image de la  $R$ -matrice universelle dans  $\text{End}(V^{\otimes 2})(z)$

$$\mathcal{R}_{V,V}(z) = (\rho_V \otimes \rho_V)(\mathcal{R}(z)) \in \text{End}(V)^{\otimes 2}[[z]] = \text{End}(V^{\otimes 2})[[z]].$$

On obtient aussi une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique, dite  $R$ -matrice, mais dans l'algèbre de dimension finie  $\text{End}(V^{\otimes 2})[[z]]$ .

Par exemple, dans le cas  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  possède une représentation de dimension 2 dite représentation fondamentale et notée  $V_1$ . Par le procédé décrit ci-dessus, elle produit la  $R$ -matrice suivante<sup>10</sup> dans  $\text{End}(V_1^{\otimes 2})[[z]]$  avec  $V_1^{\otimes 2}$  qui est de dimension 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^2} & \frac{q^{-2}-1}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^{-2})}{z-q^{-2}} & \frac{q^{-1}(1-z)}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la  $R$ -matrice associée au modèle XXZ. Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  ou la représentation  $V$ . Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

La matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  est alors définie en prenant la trace partielle sur la représentation, c'est-à-dire

$$(2.4) \quad \mathcal{T}_V(z) = ((\text{Tr}_V \circ \rho_V) \otimes \text{id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]].$$

<sup>8</sup> Ce résultat démontré par M. Rosso et G. Lusztig est un analogue quantique du théorème classique de Weyl qui assure que toute représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  est semi-simple.

<sup>9</sup> Cependant, toute représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  admet une filtration de Jordan-Hölder par des sous-représentations  $V_0 = V \supset V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_N = \{0\}$  avec les  $V_i/V_{i+1}$  simples.

<sup>10</sup> La solution explicite de l'équation de Yang-Baxter donnée ici est la  $R$ -matrice « normalisée », obtenue en multipliant  $\mathcal{R}_{V_1, V_1}(z)$  par une certaine fonction scalaire de  $z$ . On peut constater que ses coefficients sont des fonctions méromorphes en  $z$ . C'est un phénomène général, voir [EFK].

La représentation  $V$  qui sert à construire la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  est appelée espace auxiliaire. Comme conséquence de l'équation de Baxter, les matrices de transfert commutent, c'est-à-dire que pour une autre représentation  $V'$  on a

$$\mathcal{T}_V(z)\mathcal{T}_{V'}(z') = \mathcal{T}_{V'}(z')\mathcal{T}_V(z) \text{ dans } \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z, z']].$$

Ainsi, les coefficients  $\mathcal{T}_V[N]$  des matrices de transfert, définis par

$$\mathcal{T}_V(z) = \sum_{N \geq 0} z^N \mathcal{T}_V[N],$$

engendrent une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

Donnons-nous une autre représentation de dimension finie  $W$  de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , dite espace des états. Les coefficients  $\mathcal{T}_V[N]$  des matrices de transfert agissent donc sur  $W$  en une grande famille commutative d'opérateurs. Ainsi, il fait sens de parler des valeurs propres des matrices de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  sur  $W$ .

Dans le cas particulier du modèle  $XXZ$ , on rappelle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $V = V_1$  est une représentation fondamentale de dimension 2. L'espace des états  $W$  est un produit tensoriel de représentations fondamentales de dimension 2 et l'image de l'opérateur  $\mathcal{T}_{V_1}(z)$  dans  $\text{End}(W)[[z]]$  est bien la matrice de transfert de Baxter. Les résultats de Baxter donnent donc la structure du spectre de  $\mathcal{T}_{V_1}(z)$  sur  $W$  dans ce cas.

Que dire en général ?

### 3. La conjecture du spectre quantique

En 1998 [FR], E. Frenkel et N. Reshetikhin ont proposé une nouvelle approche dans le but de généraliser les formules de Baxter.

À cette fin, ils ont introduit le  $q$ -caractère  $\chi_q(V)$  d'une représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Il s'agit d'un polynôme de Laurent à coefficients entiers en des indéterminées  $Y_{i,a}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ )

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{C}^*}.$$

L'entier  $n$  est ici le rang de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , qui par exemple vaut bien  $n$  pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ . La définition du  $q$ -caractère de  $V$  repose sur une décomposition de  $V$  en sous-espaces de Jordan<sup>11</sup>  $V_m$  paramétrés par des monôme  $m$  en les variables  $Y_{i,a}^{\pm 1}$  :

$$V = \bigoplus_m V_m.$$

Le  $q$ -caractère encode les dimensions de cette décomposition. Il est défini par

$$\chi_q(V) = \sum_m \dim(V_m) m.$$

Ainsi, les coefficients de  $\chi_q(V)$  sont en fait positifs et leur somme est la dimension  $V$ .

<sup>11</sup> Pour une famille commutative d'opérateurs sur  $W$ , obtenus à partir de la réalisation de Drinfeld de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  et distincts en général des coefficients des matrices de transfert.

Par exemple, pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $V = V_1$  la représentation fondamentale de dimension 2,

$$(3.5) \quad \chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1}.$$

On a donc dans ce cas deux sous-espaces de Jordan de dimension 1 associés aux monômes respectifs  $Y_{1,q^{-1}}$  et  $Y_{1,q}^{-1}$  :

$$V = V_{Y_{1,q^{-1}}} \oplus V_{Y_{1,q}^{-1}}.$$

La conjecture du spectre quantique de Frenkel et Reshetikhin [FR] prédit<sup>12</sup> que pour une représentation de dimension finie donnée  $V$ , les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}_V(z)$  sur une représentation simple<sup>13</sup>  $W$  sont obtenues de la manière suivante : dans le  $q$ -caractère  $\chi_q(V)$  de  $V$ , on remplace chaque variable formelle  $Y_{i,a}$  par<sup>14</sup>

$$F_i(az)q^{\deg(Q_{i,j})} \frac{Q_{i,j}(zaq^{-1})}{Q_{i,j}(zaq)},$$

où  $F_i(z)$  est une fonction universelle, au sens où elle ne dépend pas de la valeur propre  $\lambda_j$ , et  $Q_{i,j}(z)$  dépend de la valeur propre  $\lambda_j$  mais est un polynôme. C'est l'analogie du polynôme de Baxter.

Notons que c'est bien le  $q$ -caractère de l'espace auxiliaire  $V$  qui est utilisé pour écrire la formule du spectre de la matrice de transfert sur l'espace des états  $W$ .

Dans le cas particulier du modèle XXZ, on obtient à partir de (3.5) la formule

$$\lambda_j = F_1(zq^{-1})q^{\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^{-2})}{Q_{1,j}(z)} + (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^2)}{Q_{1,j}(z)}.$$

Ainsi, la conjecture est bien compatible avec la formule de Baxter (1.1) en identifiant

$$A(z) = (D(zq^2))^{-1} = (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})}.$$

On peut détailler par exemple le cas où l'espace des états  $W \simeq V_1$  est de dimension 2. On a alors 2 valeurs propres  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ . La fonction universelle est

$$F_1(z) = q^{1/2} \exp \left( \sum_{r>0} \frac{z^r(q^{-r} - q^r)}{r(q^r + q^{-r})} \right),$$

et les polynômes de Baxter sont

$$Q_{1,0}(z) = 1 \text{ et } Q_{1,1}(z) = 1 - z(1 + q + q^2).$$

On obtient donc le spectre

$$\lambda_0 = F_1(zq^{-1}) \left( 1 + q^{-3} \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}q^{-2}} \right),$$

<sup>12</sup> Dans des cas particuliers, une conjecture analogue avait été formulée par N. Reshetikhin [R] ; V. Bazhanov et N. Reshetikhin [BR] ; et A. Kuniba et J. Suzuki [KS].

<sup>13</sup> Plus généralement,  $W$  peut être un produit tensoriel de représentations simples.

<sup>14</sup> Pour simplifier l'exposition, on supposera dans la suite que  $\mathfrak{g}$  est simplement lacée (c'est le cas notamment des algèbres de Lie  $\mathfrak{sl}_{n+1}$ ).

$$(3.6) \quad \lambda_1 = F_1(zq^{-1}) \left( q \frac{1 - z(1 + q^{-1} + q^{-2})}{1 - z(1 + q + q^2)} + q^{-4} \frac{(1 - z^{-1})(1 - z(q^2 + q^3 + q^4))}{(1 - z^{-1}q^{-2})(1 - z(1 + q + q^2))} \right).$$

En général la formule peut avoir plus de deux termes. Par exemple, dans le cas d'une certaine représentation fondamentale  $V$  de dimension 3 de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$ , le  $q$ -caractère est

$$(3.7) \quad \chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1} Y_{2,1} + Y_{2,q^2}^{-1},$$

et la formule pour le spectre est

$$\begin{aligned} F_1(zq^{-1})q^{\deg(Q_{1,j})} \frac{Q_{1,j}(zq^{-2})}{Q_{1,j}(z)} &+ \frac{F_2(z)q^{\deg(Q_{2,j})}}{F_1(zq)q^{\deg(Q_{1,j})}} \frac{Q_{1,j}(zq^2)Q_{2,j}(zq^{-1})}{Q_{1,j}(z)Q_{2,j}(zq)} \\ &+ \frac{q^{-\deg(Q_{2,j})}}{(F_2(zq^2))^{-1}} \frac{Q_{2,j}(zq^3)}{Q_{2,j}(zq)}. \end{aligned}$$

Notons qu'en général les représentations simples  $V$  de dimension finie peuvent avoir une dimension « très grande ». Par exemple, H. Nakajima a obtenu (à l'aide d'un super-calculateur et en s'appuyant sur [N]) que dans le cas de l'algèbre de Lie exceptionnelle de type  $E_8$ , une des représentations fondamentales a un  $q$ -caractère avec 6 899 079 264 monômes qui nécessite un fichier de taille mémoire 180 Go pour être écrit. Il y a donc autant de termes dans la formule de Baxter correspondante. Et les représentations fondamentales sont les représentations simples de dimensions les plus basses.

Il est donc hors de question d'aborder cette conjecture par un calcul explicite en général. D'ailleurs, même si les représentations simples de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  ont été intensivement étudiées ces vingt-cinq dernières années, on ne connaît pas en général de formule pour leur  $q$ -caractère, ni même en fait pour leur dimension.

Ainsi, il faut de nouvelles structures pour aborder la conjecture du spectre quantique.

Notre démonstration avec E. Frenkel [FH] de la conjecture du spectre quantique repose ainsi sur de nouveaux ingrédients dont nous donnons un bref aperçu dans les sections suivantes.

#### 4. Représentations préfondamentales

L'idée générale de la preuve est d'interpréter les  $Q_i$  eux-mêmes comme des valeurs propres de nouvelles matrices de transfert, construites non pas à partir de représentations de dimension finie  $V$ , mais de représentations de dimension infinie dite représentations préfondamentales  $L_{i,a}^+$  où  $1 \leq i \leq n$  et  $a \in \mathbb{C}^*$ .

Nous avons construit préalablement ces représentations préfondamentales avec M. Jimbo [HJ] dans un contexte un peu différent. Ce ne sont pas des représentations de l'algèbre entière  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , mais d'une certaine sous-algèbre, la sous-algèbre de Borel

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).$$

Cela ne pose cependant pas de problème pour construire la matrice de transfert  $\mathcal{T}_{i,a}(z)$  associée à la représentation préfondamentale  $L_{i,a}$  par la formule (2.4), car

il est justement connu que la partie « gauche » de la  $R$ -matrice universelle (celle à qui on applique  $\rho_{L_{i,a}}$ ) est dans la sous-algèbre de Borel<sup>15</sup> :

$$\mathcal{T}_{i,a}(z) = ((\text{Tr}_{L_{i,a}} \circ \rho_{L_{i,a}}) \otimes \text{id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]].$$

Il n'est alors pas difficile de montrer qu'en utilisant un certain automorphisme de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  on a

$$\mathcal{T}_{i,a}(z) = \mathcal{T}_i(az) \text{ où } \mathcal{T}_i(z) = \mathcal{T}_{i,1}(z).$$

Pour le cas du modèle XXZ, c'est-à-dire pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , V. Bazhanov, S. Lukyanov, et A. Zamolodchikov avaient déjà construit « à la main » une représentation fondamentale (appelée représentation de  $q$ -oscillation) et la matrice de transfert associée (appelée  $Q$ -opérateur de Baxter) dans l'article important [BLZ].

Pour obtenir l'existence des représentations fondamentales en général [HJ], on ne peut encore une fois pas faire de calculs explicites : le point crucial est de considérer des systèmes inductifs<sup>16</sup> de représentations simples  $L_k$  (les représentations de Kirillov-Reshetikhin) de dimension finie strictement croissante avec  $k \geq 0$  et de déterminer en quel sens l'action de la sous-algèbre de Borel  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  « converge » sur la limite inductive  $L_\infty$ , qui elle est de dimension infinie :

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_k \subset L_{k+1} \subset \cdots \subset L_\infty.$$

Il s'agit ainsi d'une construction asymptotique des représentations fondamentales.

En utilisant certaines filtrations de la représentation fondamentale  $L_{i,a}$ , nous établissons qu'effectivement, à un facteur scalaire universel  $f_i(z)$  près, la matrice de transfert associée  $\mathcal{T}_i(z)$  agit sur l'espace des états  $W$  par un opérateur polynômial :

$$\rho_W(\mathcal{T}_i(z)) \in f_i(z) \times (\text{End}(W))[z].$$

Il n'est pas difficile d'écrire une formule explicite pour la fonction universelle scalaire  $f_i(z) \in \mathbb{C}[[z]]$  (elle ne dépend que de  $V$  et de  $W$ ). Il est beaucoup plus délicat d'obtenir des informations sur la partie linéaire polynômiale

$$(f_i(z))^{-1} \rho_W(\mathcal{T}_i(z)) \in (\text{End}(W))[z].$$

De même que les matrices de transfert usuelles commutent, on a

$$\mathcal{T}_i(z)\mathcal{T}_i(z') = \mathcal{T}_i(z')\mathcal{T}_i(z),$$

et donc on obtient une famille commutative  $\mathcal{T}_i[m]$  si on écrit

$$\mathcal{T}_i(z) = \sum_{m \geq 0} \mathcal{T}_i[m] z^m.$$

En utilisant la trigonalisation simultanée, cette commutativité implique que les valeurs propres sur  $W$  de  $(F_i(z))^{-1} \mathcal{T}_i(z)$  elles-mêmes sont également des polynômes.

<sup>15</sup> On ne peut cependant pas appliquer la trace à un espace de dimension infinie. On utilise une graduation naturelle de  $L_i$  par des espaces de dimension finie (les espaces de poids). Ainsi dans la suite, les traces, matrices de transfert, etc. sont « tordues » par cette graduation.

<sup>16</sup> Les inclusions  $L_k \subset L_{k+1}$ , construites à l'aide de produits tensoriels de sous-espaces [H], ne sont pas compatibles avec l'action de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  entière mais avec celle d'une sous-algèbre  $\mathcal{U}_q^+(\hat{\mathfrak{b}})$  de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$ .

### 5. Anneau de Grothendieck et relations de Baxter

Il faut enfin démontrer que les valeurs propres de la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  s'expriment, comme prévu dans la conjecture, en terme des valeurs propres des  $\mathcal{T}_i(z)$  selon le  $q$ -caractère de  $V$ . Autrement dit, en remplaçant dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par le quotient<sup>17</sup>

$$\mathcal{T}_i(azq^{-1})/\mathcal{T}_i(azq),$$

obtient-on la matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  ?

Dans le cas  $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$  et  $V$  de dimension du modèle XXZ, un calcul [BLZ] donne le résultat. On a bien :

$$\mathcal{T}_V(z) = \frac{\mathcal{T}_1(zq^{-1})}{\mathcal{T}_1(zq)} + \frac{\mathcal{T}_1(zq^3)}{\mathcal{T}_1(zq)}.$$

En général, nous proposons d'utiliser la catégorie  $\mathcal{O}$  que nous avons définie avec M. Jimbo [HJ]. Il s'agit d'une catégorie monoïdale (stable par produits tensoriels) de représentations de l'algèbre de Borel  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{b}})$ , contenant les représentations de dimension finie ainsi que les représentations fondamentales. Nous catégorifions les relations de Baxter généralisées, c'est-à-dire que nous les exprimons en termes de la catégorie  $\mathcal{O}$ . Pour ce faire, on peut définir l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$  de cette catégorie. En tant que groupe, il s'agit du groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes de représentations simples :

$$K(\mathcal{O}) = \bigoplus_{[V] \text{ Classe d'un simple dans } \mathcal{O}} \mathbb{Z}[V].$$

Alors tout objet (non nécessairement simple) de  $\mathcal{O}$  a une image dans  $K(\mathcal{O})$  en imposant la relation

$$[V''] = [V] + [V']$$

si on a une suite exacte dans la catégorie

$$0 \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow V' \rightarrow 0.$$

On peut alors munir  $K(\mathcal{O})$  d'une structure d'anneau par la relation

$$[V \otimes V'] = [V][V']$$

pour des objets  $V, V'$  de la catégorie  $\mathcal{O}$ .

Un des théorèmes principaux de [FH] est qu'en remplaçant dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par le quotient

$$\frac{[L_{i,aq^{-1}}]}{[L_{i,aq}]},$$

en remplaçant  $\chi_q(V)$  par  $[V]$  puis en « chassant » les dénominateurs, on obtient une relation dans l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$ .

Par exemple, dans notre cas favori du modèle XXZ, on obtient

$$[V] = \frac{[L_{1,q^{-1}}]}{[L_{1,q}]} + \frac{[L_{1,q^3}]}{[L_{1,q}]}$$

<sup>17</sup> Ce quotient doit en fait être multiplié par une matrice de transfert d'une représentation de dimension 1 que nous omettons dans la suite pour simplifier l'exposition.

qui donne la relation de Baxter catégorifiée dans l'anneau de Grothendieck

$$[V][L_{1,q}] = [V \otimes L_{1,q}] = [L_{1,q^{-1}}] + [L_{1,q^3}].$$

En général on obtient des relations avec plus de termes, comme dans l'exemple pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  ci-dessus pour lequel la formule (3.7) donne

$$[V \otimes L_{1,1} \otimes L_{2,q}] = [L_{1,q^{-2}} \otimes L_{2,q}] + [L_{1,q^2} \otimes L_{2,q^{-1}}] + [L_{2,q^3} \otimes L_{1,1}].$$

Maintenant, « prendre la matrice de transfert » est additif et multiplicatif, c'est-à-dire qu'on a un morphisme d'anneau<sup>18</sup>

$$\mathcal{T} : K(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]], [V] \mapsto \mathcal{T}_V(z).$$

Ainsi, les relations de Baxter généralisées dans l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$  impliquent les relations voulues entre les matrices de transfert. La conjecture du spectre quantique est donc démontrée.

Pour conclure, les formules pour les valeurs propres des matrices de transfert en terme des polynômes  $Q_{i,j}$  impliquent des équations entre les racines de ces polynômes pour garantir que les pôles apparents se simplifient (par exemple dans l'équation (3.6),  $(1 + q + q^2)^{-1}$  n'est en fait pas un pôle de  $\lambda_1$ ). Dans le cas du modèle XXZ ce sont les fameuses équations de l'Ansatz de Bethe. Ces considérations ont mené N. Reshetikhin [R] à formuler ces équations dans le cas général (voir aussi [BR, KS, F]). La preuve de la conjecture du spectre quantique permet de donner une explication et une approche uniforme à ces formules. On a maintenant une autre conjecture importante et ouverte : l'existence d'une bijection entre toutes les valeurs propres et les solutions des équations de l'Ansatz de Bethe (conjecture de complétude).

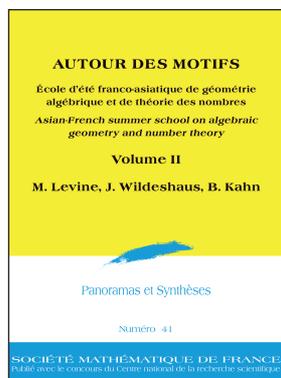
## 6. Références

- [B1] R.J. Baxter, Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model, *Ann. Phys.* **70** (1971), 193–228.
- [B2] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press Inc., London (1982).
- [BLZ] V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov et A.B. Zamolodchikov, Integrable structure of conformal field theory. II. Q-operator and DDV equation, *Comm. Math. Phys.* **190** (1997), 247–278.
- [BR] V.V. Bazhanov et N.Yu. Reshetikhin, Restricted solid on solid models connected with simply laced Lie algebra, *J. Phys. A* **23** (1990), 1477–1492.
- [CP] V. Chari et A. Pressley, *Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [D1] V. Drinfel'd, Quantum groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987)
- [D2] V. Drinfel'd, A new realization of Yangians and of quantum affine algebras, *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 212–216.
- [EFK] P. Etingof, I. Frenkel and A. Kirillov, *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, *Mathematical Surveys and Monographs* **58**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

<sup>18</sup> On peut montrer que ce morphisme d'anneau est injectif et donc que l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{O})$  est commutatif (bien que la catégorie ne soit pas tressée, c'est-à-dire que  $V \otimes V'$  et  $V' \otimes V$  ne sont pas isomorphes en général). En fait, l'application de  $q$ -caractères  $[V] \mapsto \chi_q(V)$  elle-même peut être prolongée en un morphisme d'anneau injectif sur  $K(\mathcal{O})$ .

- [F] E. Frenkel, Affine algebras, Langlands duality and Bethe ansatz, in Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Paris, 1994, ed. D. Jagolnitzer, pp. 606–642, International Press, 1995.
- [FH] E. Frenkel et D. Hernandez, Baxter's Relations and Spectra of Quantum Integrable Models, Prépublication arXiv :1308.3444
- [FR] E. Frenkel et N. Reshetikhin, The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of  $W$ -Algebras, in Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics, Contemp. Math. **248** (1999), 163–205.
- [H] D. Hernandez, Simple tensor products, Invent. Math. **181** (2010), 649–675.
- [HJ] D. Hernandez et M. Jimbo, Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions, Compos. Math. **148** (2012), n° 5, 1593–1623.
- [J] M. Jimbo, A  $q$ -difference analogue of  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. **10** (1985), n° 1, 63–69.
- [JM] M. Jimbo et T. Miwa, Algebraic analysis of solvable lattice models, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **85**, American Mathematical Society (1995).
- [K] V. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KS] A. Kuniba et J. Suzuki, Analytic Bethe Ansatz for Fundamental Representations of Yangians, Comm. Math. Phys. **173** (1995), 225–264.
- [N] H. Nakajima, Quiver varieties and  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras, Ann. of Math. (2) **160** (2004), n° 3, 1057–1097.
- [R] N. Reshetikhin, The spectrum of the transfer matrices connected with Kac–Moody algebras, Lett. Math. Phys. **14** (1987), 235–246.

**Remerciements** : *je souhaite adresser mes remerciements à É. Ghys pour m'avoir encouragé à écrire cet article, à E. Frenkel et M. Jimbo pour notre collaboration et enfin à J. Dumont, C. Hernandez, P. Zinn-Justin et à l'équipe de relecteurs d'IdM dont les noms ou pseudonymes sont B. Duchesne, F. Guéritaud et magicrem pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce texte.*



## Panoramas et Synthèses

### Autour des Motifs II École d'été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres

M. Lévine, J. Wildeshaus, B. Kahn

Ce volume contient la seconde partie des notes de cours de l'École d'été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres, qui s'est tenue à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette) et à l'université Paris-Sud XI en juillet 2006. Cette école était consacrée à la théorie des motifs et à ses récents développements, ainsi qu'à des sujets voisins, comme la théorie des variétés de Shimura et des représentations automorphes. Cette seconde partie est constituée de versions développées des cours de M. Levine consacrés aux catégories triangulées de motifs et à la théorie homotopique des schémas (Six lectures on motives) et des leçons de J. Wildeshaus sur les motifs bords et leurs applications (Boundary motives, relative motives and extensions of motives) et de B. Kahn sur une version triangulée des conjectures de Tate et Beilinson sur les cycles algébriques sur les corps finis (The full faithfulness conjectures in characteristic  $p$ ).

*This volume contains the second part of the lectures notes of the Asian-French summer school on algebraic geometry and number theory, which was held at the Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette) and the université Paris-Sud XI (Orsay) in July 2006. This summer school was devoted to the theory of motives and its recent developments, and to related topics, notably Shimura varieties and automorphic representations. The contributions in this second part are expanded versions of the series of lectures by M. Levine on triangulated categories of motives and motivic homotopy of schemes (Six lectures on motives), and of the additional lectures by J. Wildeshaus on boundary motives and their applications (Boundary motives, relative motives and extensions of motives) and by B. Kahn on a triangulated version of the conjectures of Tate and Beilinson on algebraic cycles over a finite field (The full faithfulness conjectures in characteristic  $p$ ).*

ISBN 978-2-85629-784-1

prix public : 56 € - prix membre : 39 € frais de port non compris



Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
F-75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# ENSEIGNEMENT

---

## Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral

Clément Kesselmark & Laurent Moonens<sup>1</sup>

---

Étant donnée une fonction réelle  $F$  de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b]$ , la formule de Newton-Leibniz :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a),$$

permet de calculer l'intégrale (de Riemann) de  $F'$  sur  $[a, b]$  à partir des valeurs de  $F$  en  $a$  et  $b$ . Lorsque l'on tâche d'étendre la formule ci-dessus au cas d'une fonction  $F$  supposée simplement *dérivable* sur  $[a, b]$ , on rencontre un premier obstacle à cette extension dans l'existence de dérivées non-bornées, et donc non intégrables au sens de Riemann (voir l'exemple 1.13). Du reste, les travaux de V. Volterra ont montré que l'intégrale de Riemann était même impuissante à traiter le cas des dérivées bornées.

L'intégrale de Lebesgue, apte à intégrer toutes les dérivées bornées et à donner lieu, pour de telles fonctions, à la Formule de Newton-Leibniz, est cependant impuissante elle aussi à intégrer toutes les dérivées, dans la mesure où la dérivabilité d'une fonction  $F$  sur un intervalle fermé borné n'assure pas l'intégrabilité, au sens de Lebesgue, de  $F'$  sur cet intervalle (voir l'Exemple 1.13 ci-dessous). Cette insuffisance de l'intégrale de Lebesgue ne tient pas à l'impossibilité foncière d'une pareille extension : A. Denjoy, en effet, avait montré dès 1912 la possibilité de recouvrer les valeurs d'une fonction à partir de sa dérivée par un processus de « totalisation ».

Le procédé de Denjoy, fondé sur une induction transfinie, n'offrait cependant ni la simplicité du cadre riemannien, ni la puissance de généralisation aux cadres abstraits de l'intégrale de Lebesgue.

Les travaux (indépendants) de J. Kurzweil et R. Henstock, au début de la seconde moitié du vingtième siècle, ont mis au jour une définition de l'intégrale alliant la simplicité de l'approche de Riemann à un résultat de compacité, dû à P. Cousin, laquelle s'est avérée par la suite équivalente à la définition de Denjoy. Dans le cadre proposé par ces deux mathématiciens, la formule de Newton-Leibniz devient un résultat élégant et aisé à démontrer pour toutes les dérivées. Nous nous proposons d'illustrer l'efficacité de cette théorie de l'intégrale dans la première partie de ce texte.

En plusieurs dimensions, la formule de Gauß-Green :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} v \cdot n,$$

---

<sup>1</sup> Université ParisSud, Orsay.

qui relie l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini sur un volume, à son flux à travers le bord de celui-ci, constitue une généralisation importante de la formule de Newton-Leibniz, à laquelle elle se réduit en dimension un.

L'intégrale de Kurzweil et Henstock, dont on formule sans peine une généralisation en dimension supérieure à un, ne donne cependant pas lieu à une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs supposés simplement différentiables.

Nous nous proposons de montrer, dans cette brève note, que la non-validité, en théorie de Kurzweil et Henstock, de cette formule de Gauß-Green généralisée, est due à une incompatibilité foncière entre celle-ci et une version générale du théorème de Fubini, laquelle est valide en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

Nous nous efforcerons ensuite de rendre hommage au premier universitaire à avoir adopté la présentation de Kurzweil et Henstock pour enseigner l'intégrale dans les premières années de faculté, le Professeur Jean Mawhin, en présentant la théorie de l'intégrale qui lui est due et qui, en dimension supérieure à un, donne lieu à une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables – théorie qui a été le point de départ d'une longue et fructueuse série de travaux en intégration.

## 1. Une approche Riemannienne de l'intégration en dimension 1 : l'intégrale de Kurzweil et Henstock

Introduisons quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite. Rappelons qu'étant donné  $A \subseteq \mathbb{R}$ , on désigne par  $\overset{\circ}{A}$  son intérieur.

**Définition 1.1.** On appellera intervalle un ensemble de la forme  $[a, b]$ , où  $a < b$  sont des réels, auquel cas on pose  $\ell([a, b]) := b - a$  et on appelle ce nombre la longueur de  $[a, b]$  – on observera en particulier que, pour notre propos, tout intervalle est fermé.

On dira aussi que deux intervalles  $I$  et  $J$  sont essentiellement disjoints si on a  $\overset{\circ}{I} \cap \overset{\circ}{J} = \emptyset$ .

**Définition 1.2.** Soient  $a < b$  des réels. On dit qu'une famille finie d'intervalles mutuellement essentiellement disjoints  $P = \{I^j : 1 \leq j \leq m\}$  est une partition de  $[a, b]$  si on a  $\bigcup_{j=1}^m I^j = [a, b]$ .

On dit qu'une famille finie  $\Pi = \{(x^j, I^j) : 1 \leq j \leq m\}$  est une partition pointée (ou plus simplement une  $P$ -partition) de  $[a, b]$  si  $\{I^j : 1 \leq j \leq m\}$  est une partition de  $[a, b]$  et que l'on a  $x^j \in I^j$  pour chaque  $1 \leq j \leq m$ .

Afin d'obtenir une théorie de l'intégration sur  $\mathbb{R}$  plus puissante que l'intégrale de Riemann, il nous faut recourir au concept de *jauge*. Une *jauge* est une application réelle à valeurs strictement positives qui exerce un contrôle sur les intervalles d'une  $P$ -partition.

**Définition 1.3.** Soient  $a < b$  des réels. Une application  $\delta : [a, b] \rightarrow ]0, \infty[$  est appelée une *jauge* sur  $[a, b]$ .

Soit  $\delta$  une *jauge* sur  $[a, b]$ , et soit  $\Pi := \{(I^j, x^j) : 1 \leq j \leq m\}$  une  $P$ -partition de  $[a, b]$ . On dit que  $\Pi$  est une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $[a, b]$  si pour tout  $1 \leq j \leq m$ , on a  $x^j \in I^j \subseteq [x^j - \delta(x^j), x^j + \delta(x^j)]$ .

**Remarque 1.4.** Donnons-nous un intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , et une jauge  $\delta$  sur  $[a, b]$ . Un lemme, dû à Pierre Cousin, nous assure l'existence d'une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ .

**Lemme 1.5** (Cousin). Soient  $a < b$  des réels. Pour toute jauge  $\delta$  sur  $[a, b]$ , il existe une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Effectuons une preuve par l'absurde. Supposons que l'intervalle  $[a, b]$  n'admette pas de  $P$ -partition  $\delta$ -fine. Posons  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ , et découpons l'intervalle  $[a, b] = [a_0, b_0]$  en deux intervalles de même longueur, i.e.  $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$  ainsi que  $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ . Comme la réunion de deux  $P$ -partitions  $\delta$ -fine en est encore une, il est clair que l'un de ces deux intervalles n'admet pas de telle  $P$ -partition.

On itère alors le procédé en construisant des intervalles fermés emboîtés notés  $[a_k, b_k]$  de longueur  $\frac{b-a}{2^k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , n'admettant pas de  $P$ -partition  $\delta$ -fine. D'après le théorème des intervalles fermés emboîtés, il existe un point  $x$  commun à tous les  $[a_k, b_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par définition, on a  $\delta(x) > 0$ ; il existe donc  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que l'on ait :

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subseteq ]x - \delta(x), x + \delta(x)[,$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ puisque dès lors  $\{(x, [a_{k_0}, b_{k_0}])\}$  constitue une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ .  $\square$

**Définition 1.6.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Pi$  une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $[a, b]$ . On définit la somme de Riemann de  $f$  associée à  $\Pi$ , notée  $S(f, \Pi, [a, b])$ , comme suit :

$$S(f, \Pi, [a, b]) := \sum_{i=1}^m f(x^i) \ell(I^i).$$

L'intégrale de Kurzweil et Henstock est définie par un procédé de passage à la limite sur les sommes de Riemann.

**Définition 1.7.** Soient  $a < b$  des réels,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle à valeurs réelles et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur  $[a, b]$ , d'intégrale  $\alpha$ , si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une jauge  $\delta_\varepsilon$  sur  $[a, b]$  telle que, pour toute  $P$ -partition  $\delta_\varepsilon$ -fine  $\Pi$  de  $[a, b]$ , on ait :

$$(1) \quad |S(f, \Pi, [a, b]) - \alpha| \leq \varepsilon;$$

auquel cas, on dit que  $f$  est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock (ou, brièvement, KH-intégrable) sur  $[a, b]$ .

**Remarque 1.8.** Dans les conditions de la définition précédente, on observe que le réel  $\alpha$  vérifiant la propriété ci-dessus est unique; on le note habituellement  $\int_a^b f$ .

Il est par ailleurs facile de démontrer les propriétés élémentaires de cette intégrale, à savoir : la positivité, la conservation de l'ordre, la linéarité, la relation de Chasles (additivité).

Nous pouvons remarquer la puissance de cette intégrale qui ignore, contrairement à l'intégrale de Riemann comme à celle de Lebesgue, les intégrales dites *impropres* (voir la Remarque 1.14 à ce sujet). Le théorème de Hake énonce en effet, en quelque sorte, que toute limite d'intégrales au sens de Kurzweil et Henstock en est encore une.

**Théorème 1.9** (Hake). Soient  $a < b$  des réels. La fonction  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est KH-intégrable sur  $[c, b]$  pour tout  $c \in ]a, b[$  et que la limite  $\lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f$  existe, auquel cas il vient :

$$(2) \quad \int_a^b f = \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f.$$

Nous admettrons ici ce résultat sans démonstration, mais nous renvoyons au beau livre de J. Mawhin [6] le lecteur intéressé.

Nous pouvons aussi énoncer et démontrer une version particulièrement élégante et générale du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

**Théorème 1.10** (Fondamental de l'analyse et du calcul différentiel). Soient  $a < b$  des réels et  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et dérivable sur  $[a, b]$  ; alors sa dérivée  $F'$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  et on a :

$$(3) \quad \int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

*Démonstration.* Posons, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f(t) := F'(t)$ . Donnons-nous  $\varepsilon > 0$  ; il nous faut construire une jauge  $\delta_\varepsilon$  sur  $[a, b]$  donnant lieu à l'inégalité (1) pour toute P-partition  $\delta_\varepsilon$ -fine  $\Pi$  de  $[a, b]$ .

Si  $t \in [a, b]$  est donné,  $F$  est dérivable en  $t$ . Il existe donc  $\delta_\varepsilon(t) > 0$  tel que si  $s \in [a, b]$  vérifie  $0 < |s - t| \leq \delta_\varepsilon(t)$ , on ait :

$$\left| \frac{F(s) - F(t)}{s - t} - f(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b - a};$$

on obtient ainsi, en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par  $|s - t|$  :

$$|F(s) - F(t) - f(t)(s - t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} |s - t|.$$

Si à présent  $t, u, v \in [a, b]$  vérifient  $u < v$  et  $t \in [u, v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)]$ , on aura :

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| &\leq |F(v) - F(t) - f(t)(v - t)| \\ &\quad + |F(t) - F(u) - f(t)(t - u)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} (v - t) + \frac{\varepsilon}{b - a} (t - u) \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a} (v - u). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  et que son intégrale est donnée par  $F(b) - F(a)$ . Pour ce faire, fixons  $\Pi := \{([x^j, [a^j, b^j]], 1 \leq j \leq m)\}$  une P-partition  $\delta_\varepsilon$ -fine de  $[a, b]$  et observons que l'on peut écrire :

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^m [F(b^j) - F(a^j)].$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
 |F(b) - F(a) - S(f, \Pi, [a, b])| &= \left| \sum_{j=1}^m [F(b^j) - F(a^j) - f(x^j)(b^j - a^j)] \right|, \\
 &\leq \sum_{j=1}^m |F(b^j) - F(a^j) - f(x^j)(b^j - a^j)|, \\
 &\leq \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{b-a} (b^j - a^j), \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

La démonstration est complète.  $\square$

**Remarque 1.11.** On peut également raffiner légèrement ce théorème en supposant  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $[a, b] \setminus E$  où  $E$  est un sous-ensemble au plus dénombrable de  $[a, b]$ .

La façon traditionnelle de définir l'intégrale de Lebesgue (sur un intervalle) consiste à utiliser un processus de passage à la limite sur des fonctions dites « simples » ou « étagées ». L'intégrale de Kurzweil et Henstock permet également de produire une caractérisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue.

**Proposition 1.12.** Soient  $a < b$  des réels. Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Lebesgue sur  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  et  $|f|$  sont intégrables au sens de Kurzweil et Henstock sur  $[a, b]$ ; on dit aussi, dans ces conditions, que  $f$  est absolument intégrable au sens de Kurzweil et Henstock.

**Exemple 1.13.** Étudions pour finir cette première partie une fonction réelle intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur  $[0, 1]$  sans y être intégrable au sens de Lebesgue.

Soit  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \in ]0, 1]. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que  $F$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et que sa dérivée  $F'$  est donnée, au point  $0 \leq x \leq 1$ , par :

$$F'(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \in ]0, 1]. \end{cases}$$

Par le théorème fondamental, on voit donc que  $F'$  est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur  $[0, 1]$ .

Pour montrer qu'en revanche  $|F'|$  n'est pas intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur  $[0, 1]$ , observons qu'il vient, par positivité de l'intégrale, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{i+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{i}}} |F'| \geq \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{i+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{i}}} F' \right| = \left| F\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) \right| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \geq \frac{2}{i+1}.$$

Ce qui implique que l'on a, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^1 |F'| \geq \sum_{i=1}^N \frac{2}{i+1}.$$

Comme le membre de droite dans l'inégalité précédente diverge avec  $N$ , la fonction  $|F'|$  ne peut être intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur  $[0, 1]$  ; il suit alors de la Proposition 1.12 que  $F'$  n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur  $[0, 1]$ .

**Remarque 1.14.** On notera au passage que la fonction  $F'$  construite dans l'exemple précédent est intégrable au sens de Riemann (et donc aussi de Lebesgue) sur  $[\varepsilon, 1]$  pour chaque  $0 < \varepsilon < 1$  et que la limite :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^1 F' = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [F(1) - F(\varepsilon)] = -1,$$

est finie. L'intégrale  $\int_0^1 F'$  est donc dite impropre dans les théories de Riemann et de Lebesgue.

**Remarque 1.15.** Grâce à l'exemple précédent, on peut remarquer le caractère non absolu de l'intégrale de Kurzweil et Henstock. Celle-ci, en effet, donne lieu, contrairement à l'intégrale de Lebesgue, à des fonctions intégrables dont la valeur absolue n'est pas intégrable.

Avant d'examiner la situation en dimension supérieure, mentionnons que plusieurs auteurs ont, dans leur enseignement francophone de l'analyse, tiré profit de la simplicité conceptuelle de l'intégrale de Kurzweil et Henstock pour introduire l'intégrale aux étudiants de premier cycle universitaire : à titre d'exemple, mentionnons le premier traité du genre, celui de J. Mawhin [5] – et son évolution ultérieure [6] – et les excellentes notes de cours de J.-P. Demailly [2], qui mériteraient une diffusion plus large.

## 2. Intégration en dimension supérieure.

On travaillera désormais dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  que l'on munira, par commodité (étant donné que la notion de « pavé », i.e. de « rectangle de dimension  $n$  », est centrale dans la suite de ce texte) de la norme  $|\cdot|_{\infty}$  définie pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par :

$$|x|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On notera en particulier  $B_{\infty}[x, r]$  la boule de centre  $x \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $r > 0$ , relativement à cette norme.

## 2.1. Introduction et notations

L'approche « riemannienne » développée dans la section précédente pour introduire l'intégrale de Kurzweil et Henstock, s'adapte naturellement en dimension supérieure, où l'on substitue, à la notion d'intervalle, celle de *pavé*.

**Définition 2.1.** *Un ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  est appelé un pavé s'il existe des réels  $a_i < b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  tels que l'on ait :*

$$A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\},$$

auquel cas on note  $\overset{\circ}{A}$  l'intérieur de  $A$  et  $\mu[A] := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$  le  $n$ -volume (ou plus simplement le volume, si la dimension  $n$  est identifiable sans ambiguïté) de  $A$ .

Deux pavés  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  sont dits essentiellement disjoints si l'on a  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$ .

Les notions de *jauge*, de *partition* et de *P-partition* ( $\delta$ -fine) s'étendent naturellement en dimension supérieure; il suffira au lecteur d'adapter les Définitions 1.2 et 1.3 à une famille de pavés  $\{A^j : 1 \leq j \leq m\}$  recouvrant un pavé  $A$ , et d'y remplacer l'occurrence de  $[x^j - \delta(x^j), x^j + \delta(x^j)]$  par  $B_\infty[x^j, \delta(x^j)]$ .

L'existence, étant donnée une jauge  $\delta$  sur un pavé  $A$ , d'une P-partition  $\delta$ -fine de  $A$  est garantie par le lemme suivant, dû à P. Cousin en dimension  $n = 2$ , et dont le lecteur intéressé produira sans peine une preuve en adaptant celle du lemme de Cousin uni-dimensionnel (Lemme 1.5).

**Lemme 2.2** (Cousin). *Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un pavé et  $\delta$  une jauge sur  $A$ . Il existe une P-partition  $\delta$ -fine de  $A$  formée de pavés semblables à  $A$ .*

La définition de l'intégrale, telle que nous l'avons présentée, s'étend alors sans peine en dimension supérieure.

**Définition 2.3.** *Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un pavé et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $A$ . On dit que  $f$  est intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur  $A$ , avec pour intégrale  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\delta_\varepsilon$  sur  $A$  jouissant de la propriété suivante : pour toute P-partition  $\delta_\varepsilon$ -fine  $\Pi = \{(x^j, A^j) : 1 \leq j \leq m\}$  de  $A$ , on a :*

$$|S(f, A, \Pi) - \alpha| \leq \varepsilon,$$

où l'on a posé  $S(f, A, \Pi) := \sum_{j=1}^m f(x^j)\mu[A^j]$ .

Dans ce cas, on appellera  $\alpha$  l'intégrale (au sens de Kurzweil et Henstock) de  $f$  sur  $A$  et on la notera indifféremment  $\int_A f$  ou  $\int_A f(x) dx$ .

On démontre aisément, comme en dimension un, la linéarité et la positivité de l'intégrale de Kurzweil et Henstock sur un pavé. Outre les théorèmes de convergence usuels (théorème de convergence monotone, théorème de convergence minorée et majorée), on démontre une version particulièrement élégante du *Théorème de Fubini*, qui lie l'intégrale obtenue aux intégrales définies en dimension inférieure.

La définition suivante est classique.

**Définition 2.4.** Une partie  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  est dite  $n$ -négligeable (ou, plus simplement, négligeable lorsque l'identification de l'entier  $n$  ne souffre aucune ambiguïté) si, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite  $\{A^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de pavés de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$N \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \mu[A^j] \leq \varepsilon.$$

On peut à présent énoncer une version du *théorème de Fubini* pour l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

**Théorème 2.5.** Soient  $1 \leq p \leq n - 1$  un entier,  $A \subseteq \mathbb{R}^p$  et  $B \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$  deux pavés. Supposons en outre que la fonction  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  soit intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur  $A \times B$  et désignons, pour chaque  $y \in A$ , par  $f(y, \cdot)$  l'application

$$B \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(y, z).$$

L'ensemble

$T := \{y \in A : f(y, \cdot) \text{ n'est pas intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur } B\}$  est  $p$ -négligeable et la fonction  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(y) := \begin{cases} \int_B f(y, \cdot) & \text{si } y \notin T, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur  $A$  et vérifie

$$\int_A F = \int_{A \times B} f,$$

ce que l'on écrit encore :

$$\int_A \left[ \int_B f(y, z) dz \right] dy = \int_{A \times B} f.$$

Il n'entre pas dans notre propos d'exposer ici la démonstration, délicate mais élémentaire, de la version précédente du théorème de Fubini. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'excellent livre de J. Mawhin [6, Théorème, p. 537] déjà cité.

## 2.2. Vers un théorème fondamental en dimension $n > 1$

Après avoir développé la généralisation en plusieurs dimensions de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, examinons la possibilité de démontrer, en dimension  $n > 1$ , un analogue au théorème fondamental dans le cadre de cette théorie de l'intégrale.

Introduisons à cet effet une terminologie qui facilitera l'expression des résultats escomptés en dimension  $n$ .

**Définition 2.6.** Soit  $A = \prod_{i=1}^n [a_i^-, a_i^+]$  un pavé de  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle  $i^{\text{ème}}$  projection de  $A$  le sous-ensemble suivant de  $\mathbb{R}^{n-1}$  :

$$A_{(i)} := [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times \widehat{[a_i^-, a_i^+]} \times \cdots \times [a_n^-, a_n^+],$$

où  $\widehat{[a_i^-, a_i^+]}$  indique que le facteur  $[a_i^-, a_i^+]$  manque dans le produit cartésien.

On introduit de façon analogue, pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , deux faces de  $A$  :

$$A_i^\pm := [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times \{a_i^\pm\} \times \cdots \times [a_n^-, a_n^+],$$

tandis qu'à un champ de vecteurs  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on associe de même deux champs de vecteurs  $v_i^\pm$  définis sur  $A_{(i)}$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$  par :

$$v_i^\pm : A_{(i)} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto v(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, a_i^\pm, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{n-1});$$

on définit finalement deux vecteurs normaux  $n_i^\pm$  de la manière suivante :

$$n_i^\pm := (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0),$$

où la composante non nulle  $\pm 1$  apparaît en  $i^{\text{ème}}$  position.

Un analogue au théorème fondamental en dimension supérieure à 1 est généralement formulé, pour un champ de vecteurs  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , à l'aide de sa divergence définie par

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Il s'agit de la formule de Gauß-Green.

On pourrait donc espérer obtenir, en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, un résultat du type suivant.

**Conjecture 2.7.** *Si  $A$  est un pavé de  $\mathbb{R}^n$  et si  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable sur  $A$ , alors on a :*

$$(4) \quad \int_A \operatorname{div} v = \int_{\partial A} v \cdot n,$$

où l'intégration de la divergence de  $v$  se fait au sens de Kurzweil et Henstock, et où l'intégrale de droite représente le flux de  $v$  à travers le bord de  $A$ .

**Définition 2.8** (Flux d'un champ de vecteurs). *Soient  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un pavé de dimension  $n$  et  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs sur  $A$ . Le flux de  $v$  à travers le bord de  $A$ , noté  $\int_{\partial A} v \cdot n$ , est défini par :*

$$\int_{\partial A} v \cdot n := \sum_{i=1}^n \left[ \int_{A_i^+} v \cdot n_i^+ + \int_{A_i^-} v \cdot n_i^- \right],$$

où l'on a posé, pour chaque  $1 \leq i \leq n$  :

$$\int_{A_i^\pm} v \cdot n_i^\pm := \pm \int_{A_{(i)}} v_i^\pm,$$

et où la dernière intégrale, qui est une intégrale de Riemann classique à  $n - 1$  variables, s'interprète comme le flux du champ de vecteurs  $v$  à travers la face  $A_i^\pm$ .

La fonction d'ensembles  $F_v$ , définie sur la collection des pavés de  $\mathbb{R}^n$  contenus dans  $A$  par la formule

$$F_v(B) := \int_{\partial B} v \cdot n,$$

où  $B$  est un pavé de  $\mathbb{R}^n$  contenu dans  $A$ , est appelée le flux de  $v$ .

Les notions de *périmètre* et de *diamètre* d'un pavé nous seront utiles dans la suite.

**Définition 2.9.** Soit  $A = \prod_{i=1}^n [a_i^-, a_i^+]$  un pavé de  $\mathbb{R}^n$ . On définit le périmètre de  $A$ , noté  $\|A\|$ , par la formule suivante :

$$\|A\| := 2 \sum_{i=1}^n \mu[A_{(i)}].$$

On définit de même le diamètre de  $A$ , noté  $d(A)$ , de la façon suivante :

$$d(A) := \sup_{(x,y) \in A^2} |x - y|_\infty.$$

**Remarque 2.10.** Concernant la structure de l'opérateur d'intégrale de bord dans l'équation (4), on remarque immédiatement que l'application  $v \mapsto \int_{\partial A} v \cdot n$  est une fonctionnelle linéaire sur les champs de vecteurs continus. On note en outre que si le champ de vecteurs  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continu, alors l'intégrale de bord  $\int_{\partial A} v \cdot n$  est majorée par  $\|A\| \sup_{x \in \partial A} |v(x)|_\infty$ .

La propriété suivante, dont on se convaincra aisément, traduit une propriété d'additivité du flux d'un champ de vecteurs ; le lecteur intéressé en trouvera une démonstration complète dans le livre de Washek F. Pfeffer [7, Proposition 7.2.2].

**Lemme 2.11.** Soit  $v$  un champ de vecteurs continu sur un pavé  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors le flux de  $v$  est une fonction additive, i.e. on a

$$F_v(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} F_v(C),$$

pour toute partition  $\mathcal{C}$  de  $A$  par des pavés.

La formule (4) est classique pour des champs de vecteurs affines.

**Lemme 2.12.** Soit  $w$  un champ de vecteurs affine défini sur un pavé  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  (i.e. de la forme  $w(x) = M \cdot x + b$  où  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur). On a :

$$\int_A \operatorname{div} w = \int_{\partial A} w \cdot n.$$

Le résultat suivant nous sera utile pour établir une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables.

**Lemme 2.13.** Soit  $v$  un champ de vecteurs défini sur un pavé  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $v$  est différentiable en tout point de  $A$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x \in A$ , il existe  $\delta > 0$  tel que l'on ait :

$$\left| \operatorname{div} v(x) \mu[B] - \int_{\partial B} v \cdot n \right| < \varepsilon \|B\| d(B),$$

pour tout pavé  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $B \subseteq A \cap B_\infty[x, \delta]$ .

*Démonstration.* Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $x \in A$ ; on construit un champ de vecteurs affine  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont la divergence égale  $\operatorname{div} v(x)$  en posant :

$$w(y) := v(x) + v'_x(y - x)$$

pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , où  $v'_x$  désigne la différentielle (ou dérivée totale) de  $v$  au point  $x$ . On vérifie facilement que, pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\operatorname{div} w(y) = \operatorname{div} v(x)$ .

Par ailleurs,  $v$  est différentiable en  $x$ . Il existe donc  $\delta > 0$  tel que l'on ait  $|v(y) - w(y)|_\infty \leq \varepsilon|y - x|_\infty$ , pour tout  $y \in A \cap B_\infty[x, \delta]$ . Si  $B \subseteq A \cap B_\infty[x, \delta]$  est un pavé contenant  $x$ , on aura donc

$$|v(y) - w(y)|_\infty \leq \varepsilon d(B),$$

pour tout  $y \in B$ .

D'après le théorème et le lemme précédents, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{div} v(x)\mu[B] - \int_{\partial B} v \cdot n \right| &= \left| \int_B \operatorname{div} w - \int_{\partial B} v \cdot n \right|, \\ &= \left| \int_{\partial B} w \cdot n - \int_{\partial B} v \cdot n \right|, \\ &= \left| \int_{\partial B} (w - v) \cdot n \right|, \\ &\leq \varepsilon d(B) \|B\|, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme.  $\square$

Tâchons à présent de démontrer la Conjecture énoncée ci-dessus.

*Tentative de démonstration de la Conjecture 2.7.* Par continuité du champ de vecteurs  $v$  sur le pavé  $A$ , le flux  $F_v$  est une fonction d'ensembles bien définie sur la collection des pavés contenus dans  $A$ . Donnons-nous un  $\varepsilon > 0$ ; il nous faut montrer l'existence d'une jauge  $\delta$  sur  $A$  telle que l'inégalité :

$$|S(\operatorname{div} v, \Pi, A) - F_v(A)| \leq \varepsilon,$$

soit vérifiée pour toute  $P$ -partition  $\delta$ -fine  $\Pi$  de  $A$ .

Fixons  $x \in A$ . D'après le lemme précédent, il existe  $\delta(x) > 0$  tel que l'on ait

$$(5) \quad |\operatorname{div} v(x)\mu[B] - F_v(B)| \leq \varepsilon d(B) \|B\|,$$

pour tout pavé  $B \subseteq A \cap B_\infty[x, \delta(x)]$ . Ceci définit une jauge  $\delta$  sur  $A$ . Fixons donc une  $P$ -partition  $\delta$ -fine  $\Pi := \{(x^j, A^j) : 1 \leq j \leq m\}$  de  $A$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} |S(\operatorname{div}, \Pi, A) - F_v(A)| &= \left| \sum_{j=1}^m \operatorname{div}(x^j)\mu[A^j] - F_v(A^j) \right|, \\ &\leq \sum_{j=1}^m |\operatorname{div}(x^j)\mu[A^j] - F_v(A^j)|, \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\|, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (5).

Nous pourrions achever la démonstration s'il existait un moyen de montrer que la somme

$$(6) \quad \sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\|,$$

peut être bornée par une quantité finie indépendante de la P-partition choisie. Nous allons voir que ce n'est, en général, pas le cas; il convient donc d'interrompre ici notre tentative de démonstration.  $\square$

**Remarque 2.14.** Soit  $\{A^j : 1 \leq j \leq m\}$  la partition de  $[0, 1] \times [0, 1]$  définie par

$$A^j := [0, 1] \times \left[ \frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right],$$

pour tout  $1 \leq j \leq m$ . On observe que l'on a  $d(A^j) = 1$  pour tout  $1 \leq j \leq m$ .

Fixons un entier  $1 \leq j \leq m$  et calculons :

$$\|A^j\| = 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\| = 2m + 2.$$

Il n'est donc pas toujours possible de contrôler le terme  $\sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\|$  en raison d'un aplatissement trop important des  $A^j$ ,  $1 \leq j \leq m$ .

La remarque qui précède montre qu'il n'est pas possible de conclure, en suivant l'argument esquissé précédemment, la preuve de la Conjecture 2.7. Nous verrons plus loin (voir la section 3) que la raison en est profonde : cette conjecture est fautive si l'intégrale  $n$ -dimensionnelle dans (4) est interprétée au sens de Kurzweil et Henstock.

L'issue que nous choisirons à cette aporie temporaire est d'intégrer dans la définition d'intégrale une condition garantissant qu'il soit possible de contrôler, pour une partition admissible, la quantité (6).

Cette idée, qui a été le point clef du développement ultérieur des théories non-absolues de l'intégrale en dimension  $n > 1$ , est due à Jean Mawhin (voir [4]).

Pour développer sa définition de l'intégrale, introduisons une terminologie qui en simplifiera l'énoncé.

**Définition 2.15.** Soit  $A$  un pavé de  $\mathbb{R}^n$ ; on définit l'aplatissement de  $A$ , noté  $\sigma(A)$ , de la façon suivante :

$$\sigma(A) := \frac{\max_{1 \leq i \leq n} (a_+^i - a_-^i)}{\min_{1 \leq i \leq n} (a_+^i - a_-^i)}.$$

**Remarque 2.16.** L'idée de Jean Mawhin, afin de contrôler la somme (6) dans le cadre de P-partitions admissibles, est d'imposer un contrôle sur l'aplatissement des rectangles qui la constituent. Il introduit pour ce faire le concept d'irrégularité d'une P-partition d'un pavé  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.17.** Soit  $\Xi = \{(x^j, A^j) : 1 \leq j \leq m\}$  une  $P$ -partition d'un pavé  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . On définit l'irrégularité de  $\Xi$ , notée  $\Sigma(\Xi)$ , comme suit :

$$\Sigma(\Xi) := \frac{\max_{1 \leq j \leq m} \sigma(A^j)}{\sigma(A)}.$$

**Définition 2.18.** On dit que  $f$  est intégrable au sens de Mawhin (ou plus brièvement  $M$ -intégrable) sur un pavé  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , d'intégrale  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $\eta \geq 1$ , il existe une jauge  $\delta_{\varepsilon, \eta}$  sur  $A$  telle que pour toute  $P$ -partition  $\delta_{\varepsilon, \eta}$ -fine  $\Xi$  de  $A$  vérifiant  $\Sigma(\Xi) \leq \eta$ , on ait :

$$(7) \quad |S(A, f, \Xi) - \alpha| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on appelle l'unique réel  $\alpha$  vérifiant la propriété précédente, l'intégrale de  $f$  au sens de Mawhin sur  $A$ , et on le note  $(M) \int_A f$  ou simplement  $\int_A f$  lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

**Remarque 2.19.** Il résulte immédiatement de la définition précédente que si  $f$  est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur  $A$ , alors  $f$  est intégrable au sens de Mawhin sur  $A$ .

**Remarque 2.20.** La définition de J. Mawhin de l'intégrale, qui impose une régularité aux  $P$ -partitions admises pour estimer l'intégrale dans (7), va nous permettre d'obtenir une majoration de la somme (6) posant problème dans la démonstration de la Conjecture 2.7.

Plus précisément, on obtient dans cette nouvelle théorie le résultat suivant.

**Théorème 2.21.** Si  $A$  est un pavé de  $\mathbb{R}^n$  et que  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable sur  $A$ , alors  $\operatorname{div} v$  est intégrable au sens de Mawhin sur  $A$  et on a :

$$(8) \quad (M) \int_A \operatorname{div} v = \int_{\partial A} v \cdot n.$$

*Démonstration.* Fixons  $\varepsilon' > 0$ ,  $\eta > 0$  et posons  $\varepsilon := \varepsilon' / [2n\eta^{n-1}\sigma(A)^{n-1}\mu(A)]$ . Associons à  $\varepsilon > 0$  une jauge  $\delta$  définie sur  $A$  exactement comme dans la tentative de preuve de la Conjecture 2.7, fixons  $\Xi = \{(x^j, A^j) : 1 \leq j \leq m\}$  une  $P$ -partition  $\delta$ -fine de  $A$  et supposons que l'on ait  $\Sigma(\Xi) \leq \eta$ .

On obtient, en procédant exactement comme précédemment :

$$|S(\operatorname{div} v, \Xi, A) - F_v(A)| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\|.$$

On calcule alors, en notant, pour chaque  $1 \leq i \leq n$  et chaque  $1 \leq j \leq m$ ,  $A_i^j$  la projection sur le  $i^{\text{ème}}$  axe du pavé  $A^j$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m d(A^j) \|A^j\| &= \sum_{j=1}^m d(A^j) \min_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1} \frac{\|A^j\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
 &\leq \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{\|A^j\|}{\min_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
 &= \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{2 \sum_{i=1}^n \mu[A_i^j]}{\min_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
 &\leq 2n \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1}}{\min_{1 \leq i \leq n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
 &= 2n \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \sigma(A^j)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Or il vient pour chaque  $1 \leq j \leq m$  :

$$\sigma(A^j) \leq \max_{1 \leq l \leq m} \sigma(A^l) = \Sigma(\Xi) \sigma(A);$$

on obtient donc :

$$\sigma(A^j)^{n-1} \leq (\Sigma(\Xi) \sigma(A))^{n-1}.$$

Les inégalités précédentes nous fournissent la majoration recherchée, puisque l'on écrit finalement :

$$\begin{aligned}
 |S(\operatorname{div} v, \Xi, A) - F_v(A)| &\leq 2n \varepsilon \Sigma(\Xi)^{n-1} \sigma(A)^{n-1} \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \\
 &= \{2n \Sigma(\Xi)^{n-1} \sigma(A)^{n-1} \mu[A]\} \varepsilon \leq \{2n \eta^{n-1} \sigma(A)^{n-1} \mu[A]\} \varepsilon = \varepsilon'.
 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon' > 0$ , le théorème est démontré.  $\square$

Il convient à présent de revenir à la « raison profonde » annoncée comme obstruction à l'obtention d'un théorème de la divergence pour les champs de vecteurs différentiables, en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

### 3. L'incompatibilité des deux « théorèmes fondamentaux »

Contrairement à l'intégrale de Kurzweil et Henstock, l'intégrale de M. Mawhin, nous allons le voir, ne donne pas lieu à un « théorème de Fubini » général. Nous voudrions le montrer, dans cette partie, comme le cas particulier d'un phénomène plus général : l'incompatibilité foncière, pour une théorie de l'intégration donnée, entre une version générale du théorème de la divergence, et une version générale du théorème de Fubini.

Plus précisément, nous parlerons dans la suite d'*intégrale uni-dimensionnelle* pour désigner la donnée, pour chaque intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ , d'un espace  $\mathcal{F}(I)$  (contenant l'espace  $C(I)$  des fonctions continues sur  $I$ ) de fonctions à valeurs réelles

définies sur  $I$  et dites *intégrables sur  $I$* , ainsi que d'une fonctionnelle linéaire positive

$$\int_I : \mathcal{S}(I) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_I f,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(A) si  $I$  et  $I^1, \dots, I^m$  sont des intervalles mutuellement essentiellement disjoints vérifiant  $I = \bigcup_{j=1}^m I^j$  et si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors la restriction (toujours notée  $f$ ) de  $f$  à  $I^j$  est intégrable sur  $I^j$  pour chaque  $1 \leq j \leq m$  et on a :

$$\int_I f = \sum_{j=1}^m \int_{I^j} f;$$

(H) si  $I$  est un intervalle, si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $I$  et si l'on pose  $I_c^- := I \cap ]-\infty, c]$  et  $I_c^+ := [c, +\infty[$  pour tout  $c \in \overset{\circ}{I}$ , on a (en notant toujours  $f$  la restriction de  $f$  à une partie de  $I$ ) :

$$\int_I f = \lim_{c \rightarrow \max I^-} \int_{I_c^-} f = \lim_{c \rightarrow \min I^+} \int_{I_c^+} f;$$

(N) si  $I$  est un intervalle, alors la fonction constante 1 est intégrable sur  $I$  et on a

$$\int_I 1 = \ell(I).$$

On désignera de même par *intégrale bi-dimensionnelle* la donnée, pour chaque pavé  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , d'un espace  $\mathcal{S}(A)$  (contenant l'espace  $C(A)$  des fonctions continues sur  $A$ ) de fonctions à valeurs réelles définies sur  $A$  et dites *intégrables sur  $A$*  ainsi que celle d'une fonctionnelle linéaire et positive

$$\iint_A : \mathcal{S}(A) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \iint_A f,$$

appelée *intégrale sur  $A$*  et vérifiant la condition suivante :

(A) si  $A$  et  $A^1, \dots, A^m$  sont des rectangles deux à deux essentiellement disjoints vérifiant  $A = \bigcup_{j=1}^m A^j$  et si  $f$  est intégrable sur  $A$ , alors la restriction (toujours notée  $f$ ) de  $f$  à  $A^j$  est intégrable sur  $A^j$  pour chaque  $1 \leq j \leq m$  et on a :

$$\iint_A f = \sum_{j=1}^m \iint_{A^j} f.$$

**Définition 3.1.** *Étant donnée une intégrale bi-dimensionnelle, nous dirons :*

(D) *qu'elle intègre toutes les divergences si, pour tout pavé  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  et tout champ de vecteurs différentiable  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la fonction  $\operatorname{div} v$  est intégrable sur  $A$ ;*

(F) *qu'elle vérifie la condition de Fubini (pour les sections verticales) s'il existe une intégrale uni-dimensionnelle telle que, pour tout rectangle  $A = I \times J$  (avec  $I, J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ ) et toute fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $A$ , l'ensemble*

$$\{x \in I : f(x, \cdot) \text{ n'est pas intégrable sur } J\}$$

*soit 1-négligeable.*

Nous allons voir dans la suite que les conditions (D) et (F) sont incompatibles.

Pour ce faire, nous aurons besoin du bel exemple suivant, dû à W.F. Pfeffer [7, Section 11.1]

**Théorème 3.2** (Pfeffer). *Il existe une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et un pavé  $A = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$  (avec  $I, J$  des intervalles) jouissant des propriétés suivantes :*

- (i)  $h = \operatorname{div} v$  pour un champ de vecteurs différentiable  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ;
- (ii) pour toute intégrale uni-dimensionnelle, l'ensemble

$$\{x \in I : h(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } J\}$$

est 1-négligeable.

*Démonstration.* On commence par définir, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , des intervalles  $J_k := \left[ \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right]$ . On choisit également, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , une fonction indéfiniment dérivable  $g_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  vérifiant  $g_k(t) = 0$  pour  $t \leq \frac{4}{3} \frac{1}{2^{k+1}}$  et  $g_k(t) = 1$  pour  $t > \frac{5}{3} \frac{1}{2^{k+1}}$ .

On définit alors une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en posant :

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin x & \text{si } y \geq 1, \\ y^2 \{g_k(y) \sin(8^k x) + [1 - g_k(y)] \sin(8^{k+1} x)\} & \text{si } y \in J_k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Il est clair par construction que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Fixons  $a \in \mathbb{R}$  et vérifions que  $f$  est différentiable en  $(a, 0)$ . Pour ce faire, observons que l'on a, pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $|(u, v)|_\infty < 1$  et  $v \in J_k, k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{|f(a+u, 0+v) - f(a, 0)|}{|(u, v)|_\infty} = \frac{v^2 |g_k(v) \sin[8^k(a+u)] + [1 - g_k(v)] \sin[8^{k+1}(a+u)]|}{\max\{|u|, |v|\}} \leq |(u, v)|_\infty.$$

Comme on a par ailleurs  $f(a+u, v) = 0$  si  $v \leq 0$  et  $f(a, 0) = 0$ , il vient, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $|(u, v)|_\infty < 1$  :

$$\frac{|f(a+u, 0+v) - f(a, 0)|}{|(u, v)|_\infty} \leq |(u, v)|_\infty.$$

Il s'ensuit que  $f$  est différentiable en  $(a, 0)$  et que sa différentielle y est nulle.

Le champ de vecteurs  $v = (f, 0)$  est donc un champ de vecteurs différentiable sur  $A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ . Posons  $h := \operatorname{div} v = \frac{\partial f}{\partial x}$  et, étant donnée une intégrale uni-dimensionnelle sur  $[0, 1]$ , posons

$$S := \{x \in [0, 2\pi] : h(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } [0, 1]\}.$$

Nous allons voir que  $S$  est 1-négligeable.

Pour ce faire, fixons  $x \in S$  et observons que l'on a alors, en utilisant successivement les conditions (H) et (A) :

$$\int_{[0,1]} h(x, \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[2^{-N-1}, 1]} h(x, \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \int_{J_k} h(x, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x),$$

où l'on a posé, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$c_k(x) := \int_{J_k} h(x, \cdot) = 8^k \cos(8^k x) \int_{J_k} y^2 g_k(y) dy + 8^{k+1} \cos(8^{k+1} x) \int_{J_k} y^2 [1 - g_k(y)] dy.$$

Nous avons donc montré l'affirmation suivante.

**Affirmation 1.** *Pour tout  $x \in S$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(x)$  est convergente.*

Rappelons à présent qu'il existe un ensemble 1-négligeable  $N \subseteq [0, 2\pi]$  tel que la suite  $\{(8^k x) \bmod 2\pi\}$  soit *équirépartie dans*  $[0, 2\pi]$  pour tout  $x \in [0, 2\pi] \setminus N$  (le lecteur intéressé pourra trouver une preuve de ce résultat dans le beau livre de L. Kuipers et H. Niederreiter [3, Theorem 4.1, p.32]); en particulier, il s'ensuit que la suite  $\{(8^k x) \bmod 2\pi\}_{k \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $[0, 2\pi]$  pour tout  $x \in [0, 2\pi] \setminus N$ . Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers, notée  $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ , telle que, pour chaque  $l \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$0 \leq (8^{k_l} x) \bmod 2\pi \leq \frac{\pi}{24}.$$

Il vient donc, pour tout  $l \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq \max\{(8^{k_l} x) \bmod 2\pi, (8^{k_l+1} x) \bmod 2\pi\} \leq \frac{\pi}{3},$$

ainsi que

$$(9) \quad \min\{\cos(8^{k_l} x), \cos(8^{k_l+1} x)\} \geq \frac{1}{2}.$$

L'estimation précédente va permettre de conclure à la divergence de la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(x)$  pour  $x \notin N$ .

**Affirmation 2.** *Pour tout  $x \in [0, 2\pi] \setminus N$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(x)$  diverge.*

Pour démontrer l'affirmation précédente, fixons  $x \in [0, 2\pi] \setminus N$  et notons  $(k_l)$  une suite strictement croissante d'entiers vérifiant l'inégalité (9). Il vient alors, pour  $l \in \mathbb{N}$ , en utilisant la définition de  $c_{k_l}(x)$ , la positivité, la linéarité de l'intégrale uni-dimensionnelle et la propriété (N) :

$$\begin{aligned} c_{k_l}(x) &\geq \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2 g_{k_l}(y) dy + \frac{8^{k_l+1}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2 [1 - g_{k_l}(y)] dy \\ &\geq \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2 [g_{k_l}(y) + 1 - g_{k_l}(y)] dy = \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2 dy \geq \frac{8^{k_l}}{2} \left(\frac{1}{2^{k_l+1}}\right)^2 \ell(J_{k_l}) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

La suite  $\{c_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ne peut donc pas converger vers 0, et la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k(x)$  est divergente.

La preuve du théorème est complète, si l'on observe que les Affirmations 1 et 2 montrent que l'on a  $S \subseteq N$ , et que par conséquent  $S$  est 1-négligeable.  $\square$

La fonction construite dans le Théorème 3.2 permet de montrer que les conditions (D) – i.e. l'intégrabilité de toute divergence d'un champ de vecteurs différentiables – et (F) – condition préalable à l'obtention d'un théorème de Fubini – sont incompatibles pour une intégrale bi-dimensionnelle donnée.

Supposons en effet qu'une intégrale bi-dimensionnelle vérifie la condition (D) ; il est clair, alors, que la fonction  $h$  construite dans le Théorème 3.2, est intégrable sur  $A$  pour cette intégrale bi-dimensionnelle; en revanche, la condition (ii) du Théorème 3.2 montre que la condition de Fubini (F) n'a aucune chance d'être vérifiée.

Si, au contraire, on suppose qu'une intégrale bi-dimensionnelle vérifie la condition de Fubini (F), alors il est exclu, par la condition (ii) du Théorème 3.2, que la fonction  $h$  que l'on y construit, soit intégrable sur  $A$  pour cette intégrale bi-dimensionnelle.

On retiendra de ceci qu'une version suffisamment générale du théorème de la divergence, assurant l'intégrabilité sur un rectangle de la divergence de tout champ de vecteurs différentiable sur ce rectangle, est incompatible avec l'obtention d'un énoncé général de type Fubini pour cette intégrale bi-dimensionnelle.

#### 4. Conclusion

Nous avons tâché de montrer, dans ce petit exposé, qu'une modification formellement simple de la définition de l'intégrale de Riemann pouvait donner lieu à une intégrale aisément manipulable – l'intégrale de Kurzweil et Henstock – qui étende l'intégrale de Lebesgue et qui soit susceptible d'intégrer toutes les dérivées en donnant lieu, pour ces dernières, à une formule de Newton-Leibniz.

Nous avons ensuite essayé, en présentant une théorie de l'intégrale elle aussi élémentaire à mettre en œuvre – l'intégrale de Mawhin – de montrer que l'on pouvait suivre une méthode semblable pour obtenir une théorie de l'intégrale adaptée, en dimension  $n > 1$ , à l'obtention d'un théorème de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables. Cette théorie de l'intégrale, qui ne s'identifie pas à la généralisation la plus simple, en plusieurs dimensions, de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, ne donne cependant, à l'inverse de cette dernière, pas lieu à un théorème de Fubini général. Nous avons tâché de montrer que la raison en était l'*incompatibilité foncière entre un énoncé général du théorème de Fubini et une formule de Gauß-Green générale*.

Nous espérons avoir suscité, par notre propos, l'intérêt d'un large public d'amateurs d'analyse pour les théories « riemanniennes » de l'intégration, dont celles de Kurzweil et Henstock ou de Mawhin sont des exemples.

Il nous reste à noter qu'à la suite des travaux que nous avons présentés, le cadre de travail s'est progressivement étendu de la collection des pavés aux *ensembles à périmètre fini*, candidats naturels à donner lieu à une formule de Gauss-Green, puisqu'il s'agit, par définition, des parties (bornées)  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  pour lesquelles on a :

$$\sup \left\{ \int_A \operatorname{div} v \, dx : v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |v(x)|_\infty \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \right\} < +\infty,$$

et que cette condition est remplie dès que l'on peut écrire  $\int_A \operatorname{div} v \, dx = \int_{\partial A} v \cdot n$ , où  $\int_{\partial A} v \cdot n$  est une intégrale de flux convenable. L'étude de l'intégrale obtenue est, pour l'essentiel, l'œuvre de W.F. Pfeffer, que l'on trouvera résumée dans son ouvrage

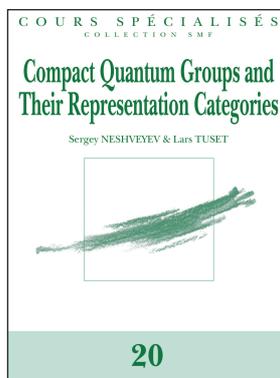
consacré à la question [8] et vers lequel nous renvoyons tout lecteur intéressé, ainsi qu'au bel article de T. De Pauw [1].

Nous avons voulu, pour notre part, montrer à quel point la découverte de J. Mawhin a constitué le chaînon manquant aux spécialistes pour l'obtention d'un théorème de la divergence général.

## 5. Références

- [1] Thierry De Pauw. Autour du théorème de la divergence. dans *Autour du centenaire Lebesgue*, volume 18 de *Panor. Synthèses*, pages 85–121. Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [2] Jean-Pierre Demailly. *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock*. Université Joseph Fourier. Grenoble, 2011.
- [3] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974.
- [4] Jean Mawhin. Generalized multiple Perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields. *Czechoslovak Math. J.*, 31(106)(4) :614–632, 1981.
- [5] Jean Mawhin. *Introduction à l'analyse*. Cabay Libraire-Éditeur S.A., Louvain, deuxième édition, 1981.
- [6] Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, techniques, évolution*. Accès Sciences. De Boeck Université, Bruxelles, 1997.
- [7] Washek F. Pfeffer. *The Riemann approach to integration*, volume 109 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] Washek F. Pfeffer. *Derivation and integration*, volume 140 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

**Remerciements :** *les auteurs tiennent à remercier très chaleureusement le Professeur J. Mawhin pour son aimable accueil lors de leur visite à l'université de Louvain en août 2013. Ils remercient également M. Antoine Bera, qui a eu la gentillesse de se prêter à l'exercice ingrat de la relecture du manuscrit dont ce texte est issu. Merci, finalement, aux relecteurs de la Gazette qui ont permis, par leur lecture attentive et leurs suggestions judicieuses, son amélioration.*



## Cours Spécialisés 20

**Compact quantum groups  
and Their Representation  
Categories**

S. Neshveyev, L. Tuset

The book provides an introduction to the theory of compact quantum groups, emphasizing the role of the categorical point of view in constructing and analyzing concrete examples. The general theory is developed in the first two chapters and is illustrated with a detailed analysis of free orthogonal quantum groups and the Drinfeld-Jimbo  $q$ -deformations of compact semisimple Lie groups. The next two chapters are more specialized and concentrate around the Drinfeld-Kohno theorem, presented from the operator algebraic point of view. The book should be accessible to students with a basic knowledge of operator algebras and semisimple Lie groups.

*Le livre fournit une introduction à la théorie des groupes quantiques compacts, soulignant le rôle du point de vue catégorique dans la construction et l'analyse d'exemples concrets. La théorie générale est développée dans les deux premiers chapitres et est illustrée par une analyse détaillée des groupes quantiques orthogonaux libres et des Drinfeld-Jimbo  $q$ -déformations des groupes de Lie semi-simples compacts. Les deux chapitres suivants sont plus spécialisés et se concentrent autour du théorème de Drinfeld-Kohno, présentée du point de vue des algèbres d'opérateurs. Le livre devrait être accessible aux étudiants ayant une connaissance de base des algèbres d'opérateurs et des groupes de Lie semi-simples.*

ISBN 978-2-85629-777-3

prix public\* : 50 € - prix membre\* : 35 €  
frais de port non compris



Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
F-75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# HISTOIRE

---

## Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui ?

Jean-Pierre Kahane<sup>1</sup>

---

En novembre 2012 avait lieu dans l'amphi Henri Cartan à Orsay la remise des diplômes de licence. Pierre Pansu, comme maître de la cérémonie, avait pensé qu'elle devait inclure une conférence générale, et m'avait demandé de l'assurer. Je venais de parler à Nancy, dans le cadre d'un séminaire consacré au rôle des erreurs en mathématiques, des erreurs de Fourier et sur Fourier. C'était un sujet possible. Mais il me fallait savoir où aller, quelle pouvait être l'utilité de la conférence pour les étudiants. J'ai posé la question à Pansu, et la réponse était claire : il faut leur donner confiance.

J'avais donc la matière et le but. Donner confiance devait être le message final. Et cela me plaisait. Je parlerai un peu des erreurs de Fourier et beaucoup des erreurs sur Fourier, et des erreurs sur ses erreurs. Et je donnerai la parole à Fourier quand, dans le « discours préliminaire » à la Théorie analytique de la chaleur, il décrit sa démarche et sa vision optimiste des relations entre la nature, la science, et la raison humaine.

J'ai donc parlé et je n'ai pas conservé de notes. Mais Pierre Pansu est un extraordinaire auditeur et rédacteur, et j'ai trouvé avec surprise le contenu de ma conférence mis par écrit de façon impeccable. La *Gazette* l'a découvert à son tour, et elle m'a demandé d'en faire un article. La rédaction de Pansu a la vivacité d'un premier jet, j'ai essayé d'en conserver le ton en l'étoffant un peu.

### Fourier méconnu

Oui, Fourier a été méconnu. Sa vie est passionnante. La notice nécrologique écrite par Arago après sa mort en 1830 se lit comme un roman : comment un enfant pauvre et orphelin, né en 1768, finit comme secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, à travers l'Ancien régime, la Révolution, l'Empire et la Restauration. Arago parle de son œuvre scientifique majeure, la Théorie analytique de la chaleur. Mais pas un mot sur la méthode introduite par Fourier pour le traitement des équations de la chaleur, les séries et intégrales trigonométriques.

Or, si le nom de Fourier est célèbre aujourd'hui, c'est bien à cause des séries de Fourier, des intégrales de Fourier, de la transformation de Fourier et en particulier de la transformation de Fourier rapide, et de façon générale de l'Analyse de Fourier. D'où vient donc qu'Arago ait occulté toute la partie trigonométrique de l'œuvre de Fourier ?

---

<sup>1</sup> Université Paris-Sud.

Arago parle avec éloquence de la vie de Fourier. Élève au Collège militaire d'Auxerre, interdit d'armée par le ministre de la guerre (« Fourier n'étant pas noble ne pourrait entrer dans l'artillerie, quand même il serait un second Newton »), voué à l'Église, rompant ses vœux à la faveur de la Révolution pour devenir « instituteur salarié par la nation », élève à l'École normale de l'An III, où il rencontre Monge, Laplace et Lagrange comme professeurs, puis professeur à l'École polytechnique, participant avec Monge à l'expédition d'Égypte, nommé par Bonaparte préfet de l'Isère, destitué, rétabli, destitué de nouveau par Napoléon lors des Cent jours, puis, revenu à Paris comme directeur du bureau des statistiques, membre de l'Académie des sciences et de l'Académie française. En entrant dans le détail de son existence on ferait un film historique saisissant.

Arago parle également de son œuvre scientifique et des conditions dans lesquelles elle s'est fait jour : la théorie des équations, sous l'angle de la localisation et du calcul des racines, l'« analyse indéterminée », c'est-à-dire la théorie des inéquations, et surtout la théorie de la propagation de la chaleur. C'est pendant qu'il était préfet de l'Isère, donc isolé de Paris et responsable d'un département difficile, chargé en plus de la présentation de la monumentale « Description de l'Égypte », qu'il a rédigé sa « Théorie analytique de la chaleur ».

Arago ne parle pas des séries trigonométriques. Fourier y attachait de la valeur ; c'était l'« analyse spéciale » qui lui permettait le traitement des équations de la chaleur. Mais il a dû se battre pour les faire admettre. Lagrange, le plus respecté des mathématiciens de l'époque, y était complètement opposé. Il s'était intéressé à la question 50 ans auparavant, lors de la controverse sur les cordes vibrantes qui avait opposé D'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli. Ce dernier décomposait des fonctions en séries trigonométriques. Tous les autres, Lagrange compris, avaient condamné cette approche. Or, curieusement, j'en dirai un mot, elle était très bien adaptée aux problèmes considérés par Fourier.

Fourier, de Grenoble, envoya à l'Institut une première version en 1807. Pas de réaction. Fourier, ayant eu vent des réticences, tenta par lettres à Laplace et à Lagrange de montrer le bien-fondé de sa méthode. Le sujet de la propagation de la chaleur fut alors proposé pour un prix en 1811. Fourier concourut, il obtint le prix, mais les considérants, tout en appréciant la mise en équations, furent réticents sur leur traitement, qui « laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur ».

Arago avait alors 25 ans et il était déjà membre de l'Institut, comme astronome. Il enregistra ces réserves, il n'était donc pas question, ni alors, ni plus tard, de parler de séries trigonométriques à propos de Fourier.

Fourier non fiable du côté de la rigueur, cette appréciation a perduré. Fourier eut beau entrer à l'Académie des sciences et en devenir secrétaire perpétuel, publier intégralement sa Théorie analytique de la chaleur et revenir au sujet à plusieurs reprises, se faire reconnaître comme un maître par les jeunes mathématiciens de l'époque, Dirichlet, Sturm, Navier, la suspicion resta qu'il n'était pas un vrai mathématicien. Il fallut la caution de Riemann dans sa thèse sur les séries trigonométriques de 1854 pour reconnaître qu'avec Fourier « une nouvelle ère s'ouvrit pour le développement de cette partie des mathématiques ». Mais cette thèse fut publiée tardivement, en 1867, elle fut traduite en français en 1873, et sa partie

historique, excellente à tous égards, n'eut pas le succès de lecture qu'elle mérite, en France du moins.

En 1862, d'exil à Guernesey, Victor Hugo publia « Les Misérables ». Le chapitre sur l'année 1817 commence par une série de flashes. L'un d'eux concerne Fourier : « Il y avait à l'Académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont la postérité se souviendra ». Hugo connaissait bien Arago, il ne se trompe pas sur la date, Joseph Fourier est entré à l'Académie des sciences en 1817, il se trompe sur le jugement de la postérité, mais à peine. Dans l'édition d'Encyclopedia universalis que j'ai chez moi, et qui date de 1974, il y a un article sur l'utopiste Charles Fourier, pas d'article sur Joseph Fourier. Il y a à Paris une rue Charles Fourier, pas de rue Joseph Fourier. Il n'y a pas d'édition complète des œuvres de Fourier. Quand Darboux a édité une partie de son œuvre, il a laissé de côté ce que Fourier appelait l'analyse indéterminée et qui introduisait ce que nous appelons aujourd'hui l'analyse convexe et la programmation linéaire. Darboux explique que Fourier attribuait à ce sujet une importance « exagérée ». On découvre aujourd'hui que Fourier a expliqué l'effet de serre, c'était resté ignoré quoique publié.

Cette méconnaissance de Fourier est maintenant datée. Elle ne s'est maintenue en France qu'à la faveur d'un divorce entre mathématiques et physique qui est aujourd'hui complètement résorbé. L'une des plus grandes universités françaises, à Grenoble naturellement, porte le nom de Joseph Fourier. Le livre de Dhombres, mathématicien, et Robert, physicien, « Fourier, créateur de la physique mathématique », qui date de 1998, fait excellemment le point sur l'époque, la vie et l'œuvre de Fourier. L'année 2005, qui fut l'année internationale de la physique, fut l'occasion pour l'Académie des sciences d'honorer Fourier comme physicien et de constater, sous ma plume, « le retour de Fourier ». Il est clair, et j'en suis un exemple, que ceux qui s'intéressent à lire Fourier ne le lisent pas aujourd'hui comme ils le lisaient autrefois. Autrefois j'aimais à repérer les bizarreries et ce que je prenais pour des erreurs, aujourd'hui je suis admiratif devant tout ce qu'il écrit.

La plus grave erreur est de méconnaître Fourier. J'ai indiqué deux sources : la méfiance devant les séries trigonométriques, et le divorce entre physique et mathématiques. On va regarder de plus près la première.

### Fourier et les séries trigonométriques

Le point de départ est un problème d'équilibre thermique. L'équation de Fourier, l'équation de propagation de la chaleur à l'intérieur d'un solide, quand on la débarrasse des coefficients qui en font l'importance en physique, s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

L'établir occupe toute la première partie du mémoire de Fourier. La fonction  $u = u(x, y, z, t)$  est la température en  $(x, y, z)$  au temps  $t$ . Prenons une barre dont la base est une bande horizontale et dont les parois verticales sont des demi-plans : on l'écrit

$$\{-\pi/2 < x < \pi/2, 0 < y, z \text{ quelconque}\}$$

donc  $x$  est la projection horizontale et  $y$  la hauteur. On porte la base à la température de l'eau bouillante, disons 1, et les parois verticales à celle de la

glace fondante, disons 0. À l'état stationnaire, la température au point  $(x, y, z)$  ne dépend que de  $(x, y)$ , notons-la  $u(x, y)$ , et l'équation se réduit à  $\Delta u = 0$ . Les données sont

$$u(\pm\pi/2, y) = 0, \quad u(x, 0) = 1.$$

Si l'on omet la seconde donnée, on a pour solution

$$u = \cos x \cdot \exp(-y),$$

et aussi

$$u = \cos nx \cdot \exp(-ny)$$

pour tout  $n$  impair, donc aussi les sommes

$$(1) \quad u = a \cos x \cdot \exp(-y) + b \cos 3x \cdot \exp(-3y) + \dots$$

Fourier a l'idée surprenante de décomposer la fonction constante 1 sur l'intervalle  $(-\pi/2, \pi/2)$  comme somme d'une série

$$(2) \quad 1 = a \cos x + b \cos 3x + \dots$$

et il en déduit l'expression de la solution sous la forme (1).

Ses contemporains ont eu du mal à digérer cette idée. Il faut dire que Fourier écrit comme il pense : il écrit la formule (2) et montre comment on peut calculer les coefficients  $a, b$ , etc. En reportant les valeurs de ces coefficients dans (1), il obtient une série rapidement convergente quand on fixe  $y > 0$ . C'est ce qui pour lui justifie la méthode. Quant à la démonstration de la validité de (2), il l'établit quelques pages plus loin, et le lecteur hâtif que j'étais autrefois ne la découvre pas d'emblée. La suite du mémoire, sur 50 pages, consiste à exprimer toute une série d'exemples de fonctions comme sommes de séries trigonométriques. À la fin, il énonce que toute fonction est développable en série trigonométrique sur un intervalle convenable, avec des coefficients donnés par des intégrales.

Il ne donne la démonstration que dans quelques cas, mais ces cas sont typiques et la méthode est générale : elle consiste à écrire les sommes partielles comme convolution de la fonction et de ce que nous appelons aujourd'hui le noyau de Dirichlet. C'est exactement la méthode par laquelle Dirichlet, en 1829, établira le premier théorème général sur la convergence des séries de Fourier. Et sur les cas particuliers, la démonstration de Fourier est impeccable.

Cependant c'est sur un tel cas particulier que Lagrange a cru réfuter le résultat de Fourier. Cela apparaît sur une feuille dans les manuscrits de Lagrange conservés à la Bibliothèque de l'Institut, et j'ai découvert cette feuille d'après les indications que donne Riemann, qui lui-même tenait son information de Dirichlet. Curieusement, cette feuille est suivie d'une autre feuille, de la main de Fourier, qui réfute la réfutation. Lagrange part de l'expression que donne Fourier de la fonction  $f(x) = x/2$  comme somme de sinus d'arcs multiples sur l'intervalle  $(0, \pi)$ , il fait une série de calculs, et la contradiction à laquelle il aboutit consiste en fait à dire que l'expression n'est pas valable quand  $x = \pi$ . Fourier examine les calculs de Lagrange en détail, précise que l'expression est valable sur l'intervalle ouvert  $(-\pi, \pi)$  et qu'on ne doit pas la prolonger au-delà et il conclut qu'« en général on ne peut pas séparer l'usage d'une équation de ce genre de la considération des limites entre lesquelles les valeurs de la variable doivent être considérées ».

Préciser l'ensemble de définition est une idée forte de Fourier. Le terme d'intervalle ouvert lui est bien postérieur, mais il précise les inégalités strictes que la variable doit respecter. D'ailleurs c'est à lui que l'on doit d'écrire l'intégrale définie comme nous le faisons, en précisant les bornes. Fourier non rigoureux ? C'est à voir.

Par exemple, Darboux relève une absurdité dans une formule de Fourier. C'est page 234 au chapitre III des Œuvres, une façon concentrée d'écrire que la fonction est somme de sa série de Fourier :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int F(\alpha) d\alpha \left( \frac{1}{2} + \sum \cos i(x - \alpha) \right)$$

et Darboux observe que la parenthèse n'a aucune signification. Or voici ce qu'écrit Fourier : « L'expression  $\frac{1}{2} + \sum \cos i(x - \alpha)$  représente une fonction de  $x$  et de  $\alpha$  telle que, si on la multiplie par une fonction quelconque  $F(\alpha)$  et si, après avoir écrit  $d\alpha$ , on intègre entre les limites  $\alpha = -\pi$  et  $\alpha = \pi$ , on aura changé la fonction  $F(\alpha)$  en une pareille fonction de  $x$ , multipliée par la demi-circonférence. On verra par la suite quelle est la nature de ces quantités, telles que  $\frac{1}{2} + \sum \cos i(x - \alpha)$ , qui jouissent de la propriété que l'on vient d'énoncer. »

Dans la suite du mémoire en effet Fourier utilise librement ce que nous appelons aujourd'hui les séries de Fourier et intégrales de Fourier de la mesure de Dirac et de ses dérivées. Abus d'écriture en son temps, mais vision prophétique d'autre part.

À nos yeux ce qui reste comme erreur de Fourier est d'avoir écrit que le couplage des formules

$$F \text{ (fonction)} = \sum \text{ (série)}$$

et

$$c \text{ (coefficient)} = \int \text{ (intégrale)}$$

s'appliquait à toute fonction  $F$ , et que toutes les séries étaient convergentes vers la fonction.

Or, Dirichlet l'a d'abord observé, comme les coefficients de la série sont donnés par des intégrales, il faut que la fonction  $F$  soit intégrable. Cette remarque porte très loin. Elle établit le lien entre séries de Fourier et théorie de l'intégrale. Pour Dirichlet, il fallait que la fonction soit continue sur un intervalle. Puis Riemann a défini l'intégrale et donné son critère d'intégrabilité à l'occasion de sa thèse sur les séries trigonométriques. Puis Lebesgue a donné comme première suite à son intégrale son cours Peccot sur les séries trigonométriques. Puis Denjoy a développé sa totalisation dans les quatre volumes de ses « leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique ». Puis Wiener a tiré la série de Fourier du mouvement brownien de ce qu'on appelle l'intégrale de Wiener. Puis Schwartz, dans son premier article sur les distributions, indique dès le titre l'application à la transformation de Fourier. Et dans ces dernières années le « compressed sensing » de Candès et Donoho commence par la reconstitution d'un signal à partir d'un petit nombre de ses coefficients de Fourier. Il y a plusieurs notions d'intégrale, et celle de série de Fourier dépend de la notion choisie : il y aura donc les séries de Fourier-Riemann, de Fourier-Lebesgue, de Fourier-Denjoy etc, mais dans aucun cas on ne pourra prendre pour  $F$  une fonction arbitraire.

Quant à la convergence de la série de Fourier, c'est depuis Fourier l'objet de recherches qui ne sont pas achevées. Dirichlet a donné en 1829 un premier théorème

général, et il espérait revenir au sujet en démontrant la convergence dès que  $F$  est une fonction continue. Un contre-exemple est venu avec Paul du Bois-Reymond en 1873. Jusqu'en 1966 on pouvait se demander s'il existait une fonction continue dont la série de Fourier diverge partout. En effet, il existe une série de Fourier-Lebesgue qui diverge partout (Kolmogorov 1926). Alors est venu le théorème de Carleson disant que, si  $F$  est de carré intégrable, la série de Fourier de  $F$  converge presque partout. Un problème non résolu est l'estimation de l'ordre de grandeur des sommes partielles d'une série de Fourier-Lebesgue presque partout.

Le plus important a été de changer le point de vue. Au lieu de la convergence ponctuelle, la convergence dans un espace fonctionnel s'impose à bien des titres. D'autre part, au lieu de s'attacher uniquement aux sommes partielles, on peut considérer des procédés de sommation des séries ; c'est le sujet introduit par Fejér en 1900.

Riemann insiste sur l'importance du couplage des deux formules  $F = \sum$  et  $c = \int$ . Fourier les a présentées comme ayant une valeur universelle, et il avait tort si on les traite comme un théorème. Mais il avait raison si on les considère comme un programme. Donner des conditions pour leur validité, et des extensions dans des cadres plus étendus, cela a été un ressort constant dans l'analyse de Fourier, et au-delà.

### Quelques citations de Fourier

Les citations qui suivent sont extraites du Discours préliminaire à la Théorie analytique de la chaleur.

Il s'agit d'abord de l'intérêt des recherches sur la propagation de la chaleur.

*... Ces recherches intéressent les sciences physiques et l'économie civile, ... les progrès des arts, ... le système du monde ... les grands phénomènes qui s'accomplissent près de la surface du globe terrestre ...*

Suivent deux pages d'explications, puis une série de questions, un aperçu de la théorie, et une réflexion d'ensemble sur les sources et la portée de l'analyse mathématique.

*... telles sont les questions principales que j'ai résolues ... Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la mécanique rationnelle, d'un très petit nombre de faits primordiaux ... Les équations différentielles de la propagation de la chaleur expriment les conditions les plus générales, et ramènent les questions physiques à des problèmes d'analyse pure, ce qui est proprement l'objet de la théorie ...*

*Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait obtenir les intégrales ... Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux. La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague et d'indéterminé dans les solutions ; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.*

*L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. L'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même ... Elle rapproche les phénomènes les plus divers, et découvre les analogies secrètes qui les unissent. Elle semble être une*

*faculté de la raison humaine destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens.*

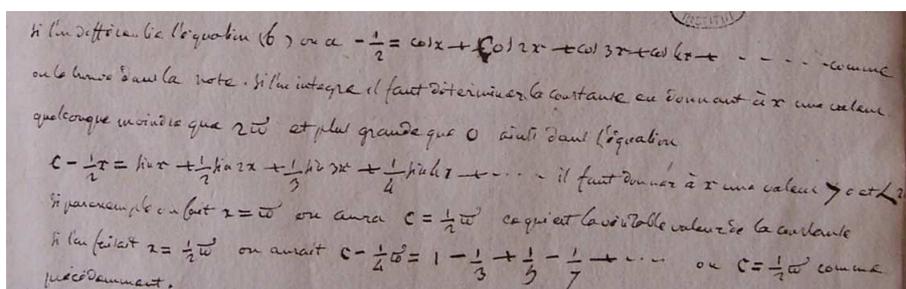
J'interromps ici les citations du Discours préliminaire. Elles peuvent être mises en regard d'une belle lettre du jeune Jacobi à Legendre, son ainé de cinquante ans, juste après la mort de Fourier. Jacobi apprécie beaucoup Fourier, mais réagit à l'utilisation par Poisson d'une phrase de Fourier regrettant qu'Abel et lui, Jacobi, ne se soient pas occupés du mouvement de la chaleur.

*... M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce rapport une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.*

Quand j'étais jeune, et c'est encore le cas aujourd'hui parmi les jeunes, « l'honneur de l'esprit humain » sonnait plus glorieux que « l'étude approfondie de la nature ». Cependant la philosophie de Fourier me paraît plus proche que jamais de l'évolution actuelle des mathématiques et de leur portée, qualifiée parfois de « déraisonnable », dans les sciences de la nature. Voici d'ailleurs ce que dit Fourier dans un manuscrit inédit (BN 22501 page 10) :

*Les progrès que la raison a faits dans les derniers siècles ne permettent plus de comparer cette époque à aucune de celles dont l'histoire nous a laissé le souvenir. Nous ne pouvons pas juger par l'histoire de l'influence que les sciences auront sur le bonheur des hommes et sur l'état des sociétés.*

Fourier a été mêlé au tourbillon de la vie publique en France à son époque. La confiance dans la raison a été sa boussole. A l'heure actuelle, il n'est pas certain que tout le monde fasse confiance à la raison. Les sciences et les mathématiques en particulier, qui ont fait des progrès bouleversants depuis Fourier, ne sont pas associées spontanément au bonheur des hommes et aux progrès des sociétés. C'est plutôt la défiance à leur égard qui s'exprime le plus souvent, au point parfois de les tenir responsables des désordres économiques et financiers dans lesquels nos sociétés sont engluées. Personnellement, j'ai assez confiance dans les ressources de l'humanité pour se sortir des ornières et retrouver le chemin du bonheur et du progrès. Le chemin n'est pas tracé, il est à découvrir, et c'est un défi pour la raison humaine. Nous y avons tous à y œuvrer, et les jeunes qui s'engagent vers les mathématiques y ont une part originale et essentielle.



Extrait de la page de Fourier dans les manuscrits de Lagrange.  
Reproduit avec l'aimable autorisation de la Bibliothèque de l'Institut.

## Sur les traces d'opérateurs (de Grothendieck à Lidskii)

Didier Robert<sup>1</sup>

---

Dans cet article je souhaite attirer l'attention du lecteur sur des notions qui sont classiques en algèbre linéaire mais qui peuvent devenir délicates à manier dans des espaces vectoriels de dimension infinie (munis d'une norme ou d'une topologie d'espace vectoriel). La théorie de Fredholm des équations intégrales, qui sera évoquée à la fin de l'article, a de fortes analogies avec les systèmes d'équations linéaires enseignés en Licence 1 et 2 à ceci près que les endomorphismes opèrent sur des espaces de Banach du type  $C(K)$  (espace des fonctions continues sur un compact  $K$ ) ou  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , pour une mesure donnée sur  $\Omega$ . Dans la théorie de Fredholm les notions de trace, de déterminant, et leur relations avec les valeurs propres, jouent évidemment le même rôle qu'en dimension finie. L'article fondateur de Fredholm date de 1903 : « Sur une classe d'équations fonctionnelles » [Acta Mathematica, 27, p.365-390] alors que l'analyse fonctionnelle était peu développée. Il a été le point de départ de beaucoup de travaux qui ont motivé en partie les développements ultérieurs de l'analyse fonctionnelle tout au long du XX<sup>e</sup> siècle (Hilbert, Banach, Fréchet, Dieudonné, Schwartz, Grothendieck, Sobolev, Gelfand, Krein, et beaucoup d'autres...)

Plus récemment la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et l'analyse microlocale ont permis des avancées importantes dans la compréhension d'opérateurs non-auto-adjoints apparaissant en mécanique des fluides ou en mécanique quantique pour décrire les instabilités de certains systèmes. En effet la localisation dans le plan complexe de valeurs propres à partie imaginaire non nulle permet d'avoir des informations quantitatives sur les résonances du système (voir l'article de Zworski [18] pour une illustration de ces phénomènes). D'autre part les travaux récents (2009) de Sjöstrand [16] sur les formules de Weyl pour des opérateurs non-autoadjoints, perturbés aléatoirement, montrent bien l'intérêt des déterminants en dimension infinie. En exploitant leurs propriétés fines comme fonction entière dans le plan complexe on obtient des informations sur les valeurs propres. Dans ces études la formule de trace de Lidskii joue un rôle fondamental.

Mon objectif ici est de raconter l'historique de cette formule, de rendre compte de son rôle dans les développements de l'analyse fonctionnelle ainsi que de son regain d'actualité dans des résultats récents.

À la fin de l'article je présente une esquisse de la preuve de la formule de Lidskii, proche de la démonstration originelle.

---

<sup>1</sup> Laboratoire Jean Leray, université de Nantes.

### 1. Introduction

Sur un espace vectoriel complexe  $\mathcal{E}$  de dimension finie  $n$  la trace et le déterminant d'un endomorphisme  $A$  possèdent les deux propriétés fondamentales suivantes : ils sont invariants par conjugaison par automorphismes et s'expriment naturellement en fonction des valeurs propres de  $A$  (en utilisant une base qui triangule  $A$ ). Rappelons ici rapidement les résultats suivants bien connus d'algèbre linéaire. Soient  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $\mathcal{E}$  et  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  sa base duale dans  $\mathcal{E}^*$ , dual de  $\mathcal{E}$ . On note par  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des endomorphismes de  $\mathcal{E}$ . La trace de  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$  est définie par l'égalité :

$$(1) \quad \text{Tr}(A) = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(Ae_j).$$

Tr est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ . Passons au déterminant.

Le produit extérieur de 2 formes linéaires  $u, v$  sur  $\mathcal{E}$  est noté  $u \wedge v$ .

On note  $L_n = e_1^* \wedge e_2^* \cdots \wedge e_n^*$  la forme  $n$ -linéaire alternée sur  $\mathcal{E}^n$ ,  $\mathfrak{S}_n$  le groupe symétrique de  $\{1, \dots, n\}$  et  $\varepsilon_\sigma$  la signature de  $\sigma$ . On a donc

$$L_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma e_1^*(x_{\sigma(1)}) \cdots e_n^*(x_{\sigma(n)}), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^n.$$

Le déterminant d'un endomorphisme  $A$  de  $E$  est défini par l'égalité suivante

$$(2) \quad \det A = L_n(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma e_1^*(Ae_{\sigma(1)}) \cdots e_n^*(Ae_{\sigma(n)}).$$

$\det A$  est l'unique scalaire complexe tel que pour toute forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  sur  $\mathcal{E}^n$  on a

$$(3) \quad f(Ax_1, \dots, Ax_n) = (\det A)f(x_1, \dots, x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}^n.$$

On en déduit que  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  pour tout  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .

En particulier  $\det A$  est indépendant de la base choisie. En choisissant une base triangulaire pour  $A$  on en déduit alors que  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ , les  $\lambda_j$  étant les valeurs propres de  $A$ . Le polynôme caractéristique a donc pour expression

$$D_A(z) = \det(A - z\mathbf{1}) = \prod_{1 \leq j \leq n} (\lambda_j - z).$$

Dans la formule précédente, les valeurs propres sont répétées suivant leurs multiplicités.

En utilisant (2) on obtient les coefficients du polynôme caractéristique sous une forme qui fait apparaître des traces et qui s'étendra à la dimension infinie comme on le verra. Pour cela on introduit les puissances tensorielles  $\otimes^k \mathcal{E}$  de  $\mathcal{E}$ ,  $k \geq 1$ , et l'opérateur d'antisymétrisation défini pour  $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{E}$  par :

$$\Pi_a(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)}.$$

Soient  $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ ,  $1 \leq j \leq k$ ; on définit un endomorphisme de  $\otimes^k \mathcal{E}$  par :

$$A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_k = \Pi_a(A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_k) \Pi_a$$

et  $\wedge^k A = \underbrace{A \wedge A \cdots \wedge A}_{k \text{ fois}}$ . Avec ces notations on alors :

$$(4) \quad D_A(-z) = z^n + z^{n-1} \text{Tr}(A) + \cdots + z^k \text{Tr}(\wedge^k A) + \cdots + z^0 \det A.$$

Notons que  $\det A = \text{Tr}(\wedge^n A)$ . Les traces dans  $\mathcal{L}(\otimes^k \mathcal{E})$  sont calculées dans la base  $\{e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}, (j_1, j_2, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k\}$ . On en déduit en particulier, en utilisant la propriété analogue vue pour le déterminant, que  $\text{Tr}(B^{-1}AB) = \text{Tr}(A)$  pour tout  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$  inversible et que  $\text{Tr}A = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j$ .

Enfin la trace est l'unique forme linéaire sur  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  invariante par conjugaison, à multiplication par une constante près : si  $f$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  telle que  $f(B^{-1}AB) = f(A)$  pour tout  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ ,  $B$  inversible, alors il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $f(A) = \mu \text{Tr}A$ ,  $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ . La preuve de cette propriété est laissée en exercice au lecteur (indication : considérer d'abord les endomorphismes de rang 1). Bien sûr en dimension finie il y a plusieurs manières d'aboutir à ces résultats, cette présentation a l'avantage de pouvoir s'étendre à la dimension infinie.

En dimension infinie les notions de trace et de déterminant sont plus difficiles à manier qu'en dimension finie, y compris dans les espaces de Hilbert, car on ne dispose pas, a priori, d'un outil équivalent à la triangulation pour des opérateurs quelconques.

Pour aborder l'étude du spectre d'opérateurs compacts non diagonalisables (que l'on rencontre par exemple dans l'étude de systèmes dissipatifs et dans la théorie de Fredholm des équations intégrales) il est très utile de pouvoir disposer d'une trace et d'un déterminant ayant des propriétés raisonnables, analogues à celles que l'on vient de rappeler pour la dimension finie.

Considérons un opérateur compact  $A$  de  $\mathcal{H}$ . On sait alors que le spectre de  $A$ , en dehors de 0, est constitué d'une suite de valeurs propres  $\{\lambda_j(A)\}_{j \geq 1}$  de multiplicité finie. La multiplicité  $\mu(\lambda)$  de la valeur propre  $\lambda \neq 0$  est définie par

$$\mu(\lambda) = \dim[\mathcal{E}_\lambda(A)], \quad \text{si } \mathcal{E}_\lambda(A) := \bigcup_{k \geq 1} \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k \text{ (sous-espace propre généralisé).}$$

On convient d'écrire la suite  $\{\lambda_j(A)\}_{j \geq 1}$  en répétant chaque valeur propre selon sa multiplicité.

En 1959, le mathématicien russe V.B. Lidskii démontre [9] que si  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable et si  $A$  est un opérateur de classe-trace (définie plus loin) sur  $\mathcal{H}$ , pour toute base orthonormée  $\{e_n\}$  de  $\mathcal{H}$ , on a

$$(5) \quad \sum_{n \geq 1} \langle e_n, Ae_n \rangle = \sum_{j \geq 1} \lambda_j(A).$$

On utilise ici la notation suivante :  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ , supposé anti-linéaire par rapport au premier argument. On note par  $\|\cdot\|$  la norme du  $\mathcal{H}$  définie par le produit scalaire.

Cette égalité (5) peut sembler n'être qu'une extension anodine du cas de la dimension finie. Cependant il a fallu attendre 1959 pour en avoir une preuve dans le cas général bien que quelques années avant Grothendieck disposait implicitement des éléments d'une preuve mais sans énoncer explicitement le résultat. D'autre part,

comme on le verra, la preuve de Lidskii repose sur des arguments classiques (et astucieux) faisant intervenir des propriétés fines de fonctions entières. Rappelons pour commencer une définition de la classe Hilbert-Schmidt et de la classe-trace (la terminologie « opérateur nucléaire » pour « opérateur de classe-trace » est aussi utilisée).

**Définition 1.1.** *Un opérateur  $A$  sur  $\mathcal{H}$  est de classe Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée  $\{e_n\}_{n \geq 0}$  de  $\mathcal{H}$  telle que*

$$(6) \quad \sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 < +\infty.$$

*On montre que le membre de gauche de (6) est indépendant de la base orthonormée choisie et que cette condition entraîne que  $A$  est compact.*

*On dira que  $A$  est de classe-trace s'il existe une décomposition de  $A : A = A_1 A_2$  où  $A_1$  et  $A_2$  sont de classe Hilbert-Schmidt. Un opérateur positif  $A$  est de classe-trace si et seulement si  $\sum_{j \geq 1} \lambda_j(A) < +\infty$ .*

L'ensemble des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt et des opérateurs de classe-trace sont notés respectivement  $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$  et  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ . L'ensemble des opérateurs compacts sera noté  $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$  et l'ensemble des opérateurs bornés  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Le lecteur aura deviné qu'il existe des classes  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  pour tout réel  $p > 0 : A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  si et seulement si  $(A^*A)^{p/2}$  est de classe-trace ( $A^*$  désigne l'adjoint hilbertien (i.e hermitien) de  $A$ ). Pour  $p \geq 1$ , ce sont des espaces de Banach pour des normes naturelles notées  $\|\cdot\|_p$  ; on utilisera souvent la convention  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$  (norme uniforme pour les opérateurs bornés). Les  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  sont des idéaux bilatères normés de la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  (voir plus loin la définition).

Les espaces  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ , introduits par von Neumann et Schatten, portent le nom de classes de Schatten (voir [4]) pour leurs propriétés). Ces espaces ont des propriétés voisines des espaces  $L^p$  de Lebesgue (pour un espace mesuré) où la fonctionnelle trace « Tr » joue le rôle de l'intégrale. On a par exemple la relation :  $\text{Tr}(A^*A) = \|A\|_2^2$ .

Il est alors clair que si  $A$  est de classe-trace on peut définir sa trace par la formule naturelle :

$$(7) \quad \text{Tr}A = \sum_{n \geq 1} \langle e_n, Ae_n \rangle$$

L'absolue convergence de la série est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On vérifie facilement que Tr est une forme linéaire continue sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ , indépendante de la base orthonormée choisie, vérifiant  $\text{Tr}A^* = \overline{\text{Tr}A}$  et  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  pour tout  $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$  et tout  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Il était connu depuis H. Weyl (voir [4]) que si  $A$  est de classe-trace alors la série  $\sum_j \lambda_j(A)$  est absolument convergente. On donnera des détails plus loin.

On peut maintenant énoncer rigoureusement le résultat démontré par Lidskii.

**Théorème 1.2** (Lidskii [9]). *Pour tout opérateur  $A$  de classe-trace, l'égalité (5) est satisfaite.*

Ce théorème peut être considéré comme le théorème fondamental pour l'analyse spectrale des opérateurs non auto-adjoints. En effet les valeurs propres d'un opérateur sont en général difficile d'accès (y compris dans le cas auto-adjoint) et un moyen souvent utilisé pour obtenir des informations est de pouvoir écrire une formule de trace du type

$$(8) \quad \text{Tr}(f(A)) = \sum_{j \geq 1} f(\lambda_j(A))$$

de sorte que le membre de gauche de (8) puisse être analysé, estimé, pour une famille de fonctions  $f$  convenables, dépendant d'un paramètre réel ou complexe, puis de conclure par un argument du type taubérien (voir par exemple [1]).

Bien évidemment si  $A$  est de plus un opérateur normal ( $AA^* = A^*A$ ) le théorème de Lidskii est trivial ( $A$  est alors diagonalisable) mais dans le cas général c'est un théorème subtil et profond. En raison de l'instabilité du spectre des opérateurs compacts non-auto-adjoints on ne peut pas passer facilement de la dimension finie à la dimension infinie.

On trouvera des preuves détaillées dans les livres [4], [3], [15], [10]. On peut remarquer que tous sauf [3] attribuent explicitement le résultat à Lidskii. L'article original de Lidskii (1959) est en russe, il a été traduit en 1965 alors que [3] est paru en 1963. La preuve originale de Lidskii a été reprise et simplifiée dans [4]. Nous en expliquerons le principe à la fin de cet article.

Les preuves évoquées ci-dessus utilisent les propriétés d'une fonction déterminant comme fonction entière d'une variable complexe. D'autres preuves connues, plus algébriques, sont fondées sur la recherche de formes triangulaires en dimension infinie [12].

Dans sa thèse monumentale, publiée dans [5], Grothendieck a considérablement approfondi la question de définir une trace (et un déterminant) pour des classes générales d'opérateurs sur des espace de Banach ou de Fréchet.

Il a soutenu sa thèse d'État en 1953, préparée sous la direction de J. Dieudonné et L. Schwartz à l'université de Nancy. J'invite le lecteur à lire (ou relire) les quatre pages que L. Schwartz consacre à A. Grothendieck dans son livre de souvenirs « Un mathématicien aux prises avec le siècle » [p. 292-295, Odile Jacob - 1997].

Rappelons ici que Grothendieck a obtenu la médaille Fields en 1966 pour ses travaux en géométrie algébrique.

L'une des motivations de ses travaux de thèse était de donner un cadre général pour la théorie de Fredholm dans le prolongement des travaux de Schwartz sur le Théorème des noyaux [6].

Cependant une question ne semblait pas réglée : appliqués au cas particulier des espaces de Hilbert, les résultats de Grothendieck donnent certes une preuve de (5) mais pour une classe plus restreinte d'opérateurs que la classe naturelle des opérateurs à trace  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ , à savoir pour  $A \in \mathfrak{S}_{2/3}(\mathcal{H})$ .

Dans [10, section (27.4.11)] A. Pietsch a obtenu une condition suffisante pour la validité de l'égalité (5) dans un espace de Banach quelconque contenant comme cas particuliers les formules de trace de Grothendieck et de Lidskii.

L'approche de Grothendieck pour la validité de (5) dans des espaces de Banach a été rediscutée dans [11].

## 2. L'approche de Grothendieck de l'égalité de trace (5)

La thèse de Grothendieck [5] est consacrée aux espaces vectoriels topologiques localement convexes et aux différentes classes d'opérateurs entre ses espaces. Nous ne considérons ici que le cas des espaces de Banach (voir aussi [6]).

Dans cette section  $\mathcal{E}$  désigne un espace de Banach complexe,  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}'$  le dual topologique de  $\mathcal{E}$ , la dualité étant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (le crochet est ici bilinéaire).

$\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$  désigne l'idéal des opérateurs de rang fini que l'on identifie au produit tensoriel  $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$  via l'application linéaire définie par  $J(x' \otimes x)y = \langle y, x' \rangle x$ .

On définit l'idéal  $\mathcal{N}(\mathcal{E})$  des opérateurs nucléaires en introduisant sur  $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$  la norme (appelée projective) définie par

$$\|u\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{j \geq 1} \|x'_j\| \|x_j\|, u = \sum_{j \geq 1} x'_j \otimes x_j \right\}.$$

On note par  $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$  le complété de  $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$  pour cette norme.

L'injection canonique  $J$  se prolonge alors en une application linéaire  $J_\pi$  continue de  $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ . En général  $J_\pi$  n'est pas injective (voir [5]) mais elle l'est pour les espaces de Hilbert. La plupart des espaces de Banach utilisés possèdent cette propriété (par exemple les espaces  $L^p$  pour toute mesure  $\mu$  et tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ) qui est reliée à la propriété d'approximation (voir [5]), le premier contre-exemple est dû à P.Enflo [1973].

L'ensemble  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$  des opérateurs nucléaires de  $\mathcal{E}$  est l'image de  $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  par  $J_\pi$ . C'est un idéal bilatère et un espace de Banach pour la norme quotient sur  $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E} / \ker J_\pi$ .

Dans la suite on supposera toujours que  $J_\pi$  est injective.

Pour tout  $A$  de rang fini la trace est naturellement définie par  $\text{Tr}A = \sum x'_j(x_j)$  si  $A = J(u)$ ,  $u = \sum_j \langle x_j \otimes x'_j \rangle$ . On montre facilement que  $\text{Tr}$  se prolonge par continuité à  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$  en une forme linéaire telle que  $|\text{Tr}(A)| \leq \|A\|_1$  pour tout  $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ . De plus  $\text{Tr}$  est invariante sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$  :  $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$  pour tout  $B \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .

Introduisons sur l'espace de Banach  $\mathcal{E}$  une famille  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E})$  d'idéaux pour  $p > 0$ . Soit  $A$  un opérateur linéaire continu dans  $\mathcal{E}$ ,  $p$  un réel,  $p > 0$ .

**Définition 2.1.** On dit que  $A$  est  $p$ -sommable s'il existe une suite  $x_j$  de  $\mathcal{E}$ , une suite  $x'_j$  de  $\mathcal{E}'$ ,  $\|x_j\| = \|x'_j\| = 1$ , une suite de réels positifs  $\sigma = \{\sigma_j\}$  tels que

$$\sum_{j \geq 1} \sigma_j^p < +\infty \text{ et}$$

$$(9) \quad A(u) = \sum_{j \geq 1} \sigma_j \langle u, x'_j \rangle x_j, \quad \forall u \in \mathcal{E}.$$

On note  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E})$  l'idéal des opérateurs  $p$  sommables. On a clairement  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{S}_q(\mathcal{E})$  si  $p \leq q$ . Les opérateurs 1-sommables sont les opérateurs de classe-trace ou nucléaires. La trace est alors donnée par

$$(10) \quad \text{Tr}(A) = \sum_{j \geq 1} \sigma_j \langle x_j, x'_j \rangle.$$

Pour que cette définition ait un sens, le membre de droite de (10) doit être indépendant de la représentation (9) de  $A$ . C'est le cas si  $\mathcal{E}$  possède la propriété d'approximation car alors  $J_\pi$  est injective.

Clairement, tout opérateur  $p$ -sommable avec  $p > 0$  est compact. On désigne par  $\lambda_j(A)$  les valeurs propres non nulles de  $A$  répétées selon leurs multiplicités algébriques.

Dans [5] (Ch.I, p.171-177 et Ch.II, p. 20) Grothendieck a obtenu le résultat suivant.

**Théorème 2.2** (Grothendieck). *On suppose que  $A$  est  $2/3$ -sommable. On a alors l'égalité*

$$(11) \quad \text{Tr}(A) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j(A).$$

Dans le cas général des espaces de Banach le Théorème 2.2 est optimal : dans l'espace de Banach  $\ell_1$  des suites sommables il existe un opérateur  $N$ ,  $p$ -sommable pour tout  $p > 2/3$  tel que  $N^2 = 0$  et  $\text{Tr}(N) = 1$  ([10], paragraphe 10.4.5).

Il peut sembler surprenant que Grothendieck n'ait pas abordé plus explicitement le cas particulier important des espaces de Hilbert. Dans le chapitre II de sa thèse, p.13, il affirme : « si  $p \leq 1$ , alors le déterminant de Fredholm de  $u$  est de genre 0 ». Avec nos notations :  $u = A$  est supposé  $p$ -sommable. On rappellera dans la section suivante les propriétés des déterminants de Fredholm ainsi que la définition du genre pour une fonction entière (voir après la formule (16)).

À la fin de [9] Lidskii ajoute qu'il a pris connaissance du travail de Grothendieck [5] (et donc de la citation ci-dessus) alors que son article était sous presse.

Cette propriété du genre 0, les résultats sur la théorie de Fredholm [6] et le théorème de factorisation des fonctions entières de Weierstrass-Hadamard [7] donnent une preuve du Théorème 1.2 mais Grothendieck n'a ni énoncé le résultat ni poussé l'argument jusqu'au bout. Cette observation a été commentée dans plusieurs publications, en particulier dans [11].

Les théorèmes 1.2 et 2.2 ont été unifiés par Pietsch [10] de la manière suivante.

On désigne par  $\ell_p$  l'espace des suites de nombres complexes de puissance  $p$  sommables,  $p'$  est le réel conjugué de  $p$ . Dans [10] l'auteur a étudié de nombreuses familles d'idéaux d'opérateurs, il a introduit en particulier les idéaux suivants sur l'espace de Banach noté  $\mathcal{B}$ .

**Définition 2.3.** *On fixe 3 réels  $(r, p, q)$  tels que  $r > 0$  et  $1 + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ .*

*L'opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$  est dit  $(r, p, q)$  nucléaire s'il existe une factorisation de  $A$  :  $A = SD_{\text{diag}}(\sigma)R$  telle que  $R \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \ell_{q'})$ ,  $S \in \mathcal{L}(\ell_p, \mathcal{B})$ ,  $\sigma \in \ell_r$ ,  $D_{\text{diag}}(\sigma)$  étant l'opérateur diagonal associé à  $\sigma$ .*

On désigne par  $\mathfrak{N}_{(r,p,q)}(\mathcal{B})$  l'ensemble des opérateurs  $(r, p, q)$  nucléaires de  $\mathcal{B}$ .  $A \in \mathfrak{N}_{(r,p,q)}(\mathcal{B})$  si et seulement si  $A$  admet une représentation

$$A = \sum_{j \geq 1} \sigma_j x'_j \otimes x_j$$

telle que  $\sigma \in \ell_r$ ,  $(x_j) \in \ell_{p'}(\mathcal{B})$  et  $(x'_j) \in \ell_{q'}(\mathcal{B}')$ ;  $\ell_p(\mathcal{B})$  désigne l'espace des suites de  $\mathcal{B}$  qui sont faiblement dans  $\ell_p$ .

En particulier  $\mathfrak{N}_{(r,1,1)}$  coïncide avec l'ensemble des opérateurs  $r$  sommables de  $\mathcal{B}$  et si  $\mathcal{B} = \mathcal{H}$  est un espace de Hilbert alors  $\mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{H}) = \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ .

**Théorème 2.4** (Pietsch [10]). *Pour tout opérateur  $A \in \mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{B})$  on a  $\sum_j |\lambda_j(A)| < +\infty$  et*

$$\text{Tr}A = \sum_{j \geq 1} \lambda_j(A).$$

Il est facile de voir que  $\mathfrak{N}_{(2/3,1,1)}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{B})$ . Ce théorème contient donc les égalités de trace de Grothendieck et de Lidskii.

**Remarque 2.5.** *On notera que dans sa preuve Pietsch n'utilise pas la propriété d'approximation pour  $\mathcal{B}$ .*

En 1988 Pisier [11] a introduit une classe d'espaces de Banach « faiblement hilbertiens », caractérisés par une condition sur le type et le cotype faibles. Il montre que dans ces espaces on a  $\text{Tr}A = \sum_{j \geq 1} \lambda_j(A)$  pour tout opérateur nucléaire  $A$  tel que

$$\sum_{j \geq 1} |\lambda_j(A)| < +\infty.$$

### 3. Traces et fonctions invariantes

On montre facilement que toute forme linéaire continue et invariante  $f$  sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{B})$  est un multiple de la trace  $\text{Tr}$  (voir l'Introduction). Il est naturel de chercher sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{B})$  d'autres fonctions invariantes en particulier des fonctions polynomiales éventuellement sur d'autres idéaux de  $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

Mentionnons ici que Dixmier a étudié une autre propriété de la trace : la normalité. Soit  $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$  le cône des opérateurs positifs sur  $\mathcal{H}$ , espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On dit qu'une fonction  $f$  sur  $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , positive, additive et homogène est une trace.

On dit que  $f$  est une trace normale si de plus elle est complètement additive : si  $A = \sum_{n \geq 1} A_n$ ,  $A_n \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$  alors  $f(A) = \sum_{n \geq 1} f(A_n)$ .

On montre facilement que toute trace normale est proportionnelle à la trace usuelle  $\text{Tr}$ .

Dixmier a montré qu'il existe sur  $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$  une trace non normale,  $\text{Tr}_D$ , appelée depuis trace de Dixmier. Cette trace est identiquement nulle sur les opérateurs de rang fini. Dans son livre « Géométrie non commutative » [InterEditions-1990], A. Connes reproduit l'article de Dixmier et en donne une application à la théorie perturbative des champs.

Nous allons maintenant considérer des fonctions polynomiales invariantes intervenant naturellement dans la théorie des déterminants de Fredholm.

**Définition 3.1.** *Un idéal bilatère  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$  est dit normé s'il est muni d'une norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$  telle que*

$$\|RAS\|_{\mathfrak{S}} \leq \|R\| \|A\|_{\mathfrak{S}} \|S\|.$$

*Une fonction  $f$  continue à valeurs complexes sur l'idéal  $\mathfrak{S}$  est invariante si  $f(T^{-1}AT) = f(A)$  pour tout  $A \in \mathfrak{S}$  et tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .*

*Cette propriété équivaut à  $f(AT) = f(TA)$  pour tout  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ .*

Les espaces  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ ,  $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{E})$ ,  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  sont des idéaux normés. Dans cette section on va déterminer toutes les fonctions polynomiales invariantes sur l'idéal normé  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$  ainsi que sur les classes de Schatten  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$  dans le cas hilbertien. Ce calcul a été réalisé indépendamment dans [13] et [2] avec des motivations différentes : dans [13] pour justifier une méthode numérique de calcul de valeurs propres pour des systèmes d'É.D.P. elliptiques, initiée par Fichera dans l'ouvrage « Linear elliptic systems and eigenvalue problems » [Lecture Notes in Math. N° 8, Springer-Verlag-1965] et dans [2] pour l'étude des espaces classifiants de fibrés vectoriels.

On commence par calculer les fonctions polynomiales invariantes sur l'idéal  $\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$ . On rappelle qu'une fonction polynomiale homogène de degré  $n$  sur un espace de Banach  $\mathcal{B}$  est une application  $\Phi$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par une forme  $n$ -linéaire symétrique et continue  $\tilde{\Phi}$  telle que  $\Phi(A) = \underbrace{\tilde{\Phi}(A, \dots, A)}_{n\text{-fois}}$  ( $\tilde{\Phi}$  est unique).

Suivant [6] on obtient des formes invariantes fondamentales par un calcul tensoriel.

On désigne par  $\otimes^n \mathcal{E}$  la  $n$ -ième puissance tensorielle de  $\mathcal{E}$  et on identifie  $\otimes^n (\mathcal{E}')$  naturellement avec  $(\otimes^n \mathcal{E})'$ . Soit  $\Lambda_n$  resp.  $\Lambda^n$  l'opérateur d'antisymétrisation sur  $\otimes^n \mathcal{E}$  resp.  $\otimes^n (\mathcal{E}')$ . Alors  $\Lambda_n$  est un projecteur de  $\otimes^n \mathcal{E}$  et  $\Lambda'_n = \Lambda^n$ . Si  $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ ,  $j = 1, \dots, n$ , on définit

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \Lambda_n(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n)\Lambda_n$$

$(A_1, \dots, A_n) \mapsto A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$  est  $n$ -linéaire et symétrique et  $\wedge^n \mathcal{L}_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{L}_F(\otimes^n \mathcal{E})$ .

On vérifie que  $A \mapsto \text{Tr}(\wedge^s(A^n)) := \mathcal{J}_s^n(A)$  est une fonction polynomiale invariante sur  $\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$  de degré  $sn$ ,  $s, n$  entiers  $\geq 1$ .  $\mathcal{J}_s^n$  est un invariant élémentaire de type  $(s, n)$ . On a la relation de récurrence :

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \frac{1}{s} \sum_{q=1}^{q=s} \mathcal{J}_1^{nq}(A) \mathcal{J}_{s-q}^n(A)$$

avec la convention  $\mathcal{J}_0^n = 1$ .

En utilisant une inégalité sur les déterminants due à Hadamard [3, (p.1018)] (et la formule de Stirling) on obtient :

$$(12) \quad |\mathcal{J}_s^n(A)| \leq \gamma_s \|A\|_1^{ns}$$

où  $\gamma_s \leq C \left(\frac{e^2}{s}\right)^{\frac{s+1}{2}}$  dans le cas général et  $\gamma_s = \frac{1}{s!}$  dans le cas des espaces de Hilbert,  $C$  étant une constante universelle.

On en déduit que  $\mathcal{J}_s^n(A)$  se prolonge par continuité en une fonction invariante sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$  vérifiant en particulier (12) et (12).

**Théorème 3.2** ([13, 2]). *On suppose  $\mathcal{E}$  de dimension infinie. L'espace vectoriel  $\mathcal{P}_n$  des fonctions polynomiales homogènes de degré  $n \geq 1$ , invariantes sur  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ ,*

est de dimension finie  $p(n)$ , nombre de décompositions de  $n$  en somme d'entiers. Chacune des deux familles suivantes est une base de  $\mathcal{P}_n$  :

$$(13) \quad \left\{ (\mathcal{J}_1^1)^{r_1} (\mathcal{J}_1^2)^{r_2} \cdots (\mathcal{J}_1^n)^{r_n}, \right\}_{r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n}$$

$$\left\{ (\mathcal{J}_1^1)^{r_1} (\mathcal{J}_2^1)^{r_2} \cdots (\mathcal{J}_n^1)^{r_n}, \right\}_{r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n}$$

Dans le cas hilbertien ( $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ ) on a un énoncé analogue pour les classes de Schatten  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ,  $1 \leq p < +\infty$  ([13]). En particulier toute fonction polynomiale invariante de degré  $< p$  est identiquement nulle.

Les invariants élémentaires s'expriment dans une base orthonormée arbitraire  $\{e_k\}$  de  $\mathcal{H}$ . Il est commode ici d'introduire le produit tensoriel hilbertien défini comme suit : si  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  sont deux espaces de Hilbert, la forme sesquilinéaire sur  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  définie par  $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle$  définit un produit scalaire. Le produit tensoriel hilbertien est l'espace de Hilbert noté  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$  obtenu par complétion de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

Soit  $A$  tel que  $A^n$  soit de classe-trace. Alors  $\wedge^s A^n$  est de classe trace dans l'espace de Hilbert  $\hat{\otimes}_2^s \mathcal{H}$  et on a

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \text{Tr}(\wedge^s A^n).$$

On en déduit

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \frac{1}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s} \det_{1 \leq i, j \leq s} \langle e_{k_j}, A^n e_{k_i} \rangle.$$

D'autre part il résulte du théorème 1.2 une expression de  $\mathcal{J}_s^n(A)$  en fonction des valeurs propres de  $A$ .

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \mathcal{T}_s^n(A),$$

si

$$\mathcal{T}_s^n(A) = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_s} \lambda_{j_1}(A)^n \lambda_{j_2}(A)^n \cdots \lambda_{j_s}(A)^n.$$

À partir de ces propriétés il y a deux manières d'introduire un déterminant.  $A$  étant de classe trace, suivant la présentation de Grothendieck [6], on introduit le déterminant de Fredholm :

$$(14) \quad \det(\mathbf{1} - zA) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k z^k \mathcal{J}_k^1(A).$$

C'est une fonction entière de  $z \in \mathbb{C}$  d'ordre 1 (dans un espace de Hilbert), ce qui résulte de l'inégalité (12).

L'autre définition consiste à partir directement des valeurs propres et du produit infini

$$(15) \quad D_A(z) := \prod_{j \geq 1} (1 - z\lambda_j).$$

On sait (17) que  $\sum_{j \geq 1} |\lambda_j| \leq \|A\|_1$ , par conséquent le produit infini définit une fonction entière d'ordre 1.

Le théorème 1.2 équivaut à montrer que  $\det(\mathbf{1} - zA) = D_A(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Pour aller plus loin il est utile de rappeler le Théorème de factorisation de Weierstrass pour les fonctions entières (voir le livre de W. Rudin, *Real and Complex Analysis*).

Les facteurs de Weierstrass sont les fonctions entières définies par  $E_0(z) = (1 - z)$  et pour  $p \geq 1$ ,  $E_p(z) = (1 - z) \exp(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p})$ . Soit  $f$  une fonction entière. On note par  $m$  la multiplicité de 0 si  $f(0) = 0$  et par  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  la suite des zéros non nuls de  $f$ , ordonnés par modules croissants, répétés suivant leur multiplicité. Le théorème de factorisation de Weierstrass nous dit alors que  $f$  admet une factorisation (non unique) du type suivant

$$(16) \quad f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left( \frac{z}{z_n} \right)$$

où  $g$  est une fonction entière et  $\{p_n\}$  est une suite d'entiers.

On dit que  $f$  est de genre  $\leq \mu$  s'il existe une décomposition de Weierstrass telle que pour tout  $n$ ,  $p_n \leq \mu$  et  $g$  est un polynôme de degré  $\leq \mu$ . Le genre est défini comme étant le plus petit entier positif ayant cette propriété. Par conséquent une fonction entière est de genre 0 signifie que  $f$  se factorise trivialement sur ses zéros :  $f(z) = az^m \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_n})$  (où  $a$  est une constante). Pour plus d'informations sur les fonctions entières et leurs zéros on pourra consulter par exemple B. Levin « *Distribution of zeros of entire functions* » [AMS Transl-1964].

Dans [6, Théorème 3] Grothendieck montre alors que les zéros de la fonction entière  $F_A(z) = \det(\mathbb{1} - zA)$  sont exactement les valeurs propres  $\lambda_j(A)$  (avec les multiplicités). D'après le théorème de factorisation de Weierstrass, on aura l'égalité  $D_A = F_A$  si on montre que  $F_A$  est de genre 0. C'est la démarche suivie par Grothendieck dans les espaces de Banach généraux. Il montre en effet [5, p. 13-19] que si  $A$  est  $\frac{2}{3}$ -sommant alors  $F_A$  est de genre 0 et en déduit le Théorème 2.2.

Pour  $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ,  $p \geq 2$ , entier, on introduit une régularisation du déterminant ([3])

$$\det_p(\mathbb{1} - zA) = \prod_j (1 - z\lambda_j) R_p(z\lambda_j), \quad R_p(z) = \exp \left[ z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{p-1} \right]$$

$\det_p(\mathbb{1} - zA)$  est une fonction entière de  $z \in \mathbb{C}$  dont les zéros sont les inverses des valeurs propres non nulles de  $A$ .

On en déduit que pour tout  $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ ,  $p \geq 1$ , il existe  $r > 0$  tel que pour  $|z| < r$  on a

$$(17) \quad \det_p(\mathbb{1} - zA) = \exp \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{J}_1^{p+k}(A)}{p+k} z^{p+k} \right).$$

Cette formule remonte à Poincaré.

Du théorème 1.2 on déduit les relations

$$\mathcal{J}_s^p(A) = \sum_{1 \leq k \leq s} \frac{(-1)^{k+s}}{k!} \left( \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=s} \frac{\mathcal{J}_1^{pr_1}(A) \dots \mathcal{J}_1^{pr_k}(A)}{r_1 \dots r_k} \right).$$

**Exemples**

Considérons maintenant le cas où  $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ ,  $\mu$  étant une mesure borélienne sur un espace localement compact  $\Omega$ .

L'opérateur  $A$  sur  $\mathcal{H}$  est de classe Hilbert-Schmidt si et seulement si il existe un noyau intégral  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu^{\otimes 2})$  tel que pour  $u \in L^2(\Omega, \mu)$  on a  $Au(x) = \int_{\Omega} K_A(x, y)u(y)dy$  et alors

$$\|A\|_2^2 = \text{Tr}(A^*A) = \int_{\Omega \times \Omega} |K_A(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y).$$

Soit  $A$  un opérateur de classe trace,  $A = A_1A_2$ ,  $A_1, A_2$  étant de classe Hilbert-Schmidt. Il en résulte que  $A$  a un noyau intégral :

$$K_A(x, y) = \int_{\Omega} K_{A_1}(x, z)K_{A_2}(z, y)d\mu(z).$$

Pour simplifier on suppose que  $K_A$  est continu sur  $\Omega \times \Omega$ . En utilisant le théorème de Fubini on obtient

$$\text{Tr}(A) = \int_{\Omega} K_A(x, x)d\mu(x),$$

ainsi que pour tout  $s \geq 1$ ,

$$\mathcal{J}_s^1(A) = \frac{1}{s!} \int_{\Omega^s} \left( \det_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} K_A(x_i, x_j) \right) d\mu^{\otimes s}(x_1, \dots, x_s),$$

expressions classiques de la théorie des équations intégrales de Fredholm que l'on trouve par exemple dans le cours de Goursat « Cours d'analyse mathématique » [vol III, Gauthiers-Villars-1943].

Une classe importante d'exemples d'opérateurs intégraux est fournie par les opérateurs pseudo-différentiels. Sur une variété compacte Riemannienne  $M$  de dimension  $d$  un opérateur pseudo-différentiel  $A$  (voir [14]) admet un noyau intégral  $K_A$  qui localement s'écrit :

$$K_A(x, y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi$$

$a$  étant une fonction lisse, à valeurs complexes, appelée symbole de  $A$ .

On suppose que  $a$  est un symbole classique elliptique d'ordre  $m$ . Son symbole principal  $a_m$  est alors une fonction homogène de degré  $m$  en  $\xi$  sur l'espace cotangent  $T^*(M)$ .

Si  $m \leq 0$  alors  $A$  est borné sur  $\mathcal{H} := L^2(M)$ .

Si  $m < -\frac{d}{p}$  alors  $A$  est dans la classe de Schatten  $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ . Par exemple pour l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_M$  sur  $M$ ,  $(-\Delta_M + 1)^{-s}$  est de classe  $\mathfrak{S}_p$  si  $s > \frac{d}{2p}$ .

Si  $m < -d$  la trace de  $A$  est donnée (localement) par la formule :

$$\text{Tr}A = (2\pi)^{-d} \int_{T^*(M)} a(x, \xi) dx d\xi.$$

Notons que le symbole  $a$  n'a en général pas de sens global sur une variété, seul le symbole principal (partie homogène de plus haut degré) est bien défini.

Le calcul symbolique sur les opérateurs pseudo-différentiels permet d'obtenir des informations sur les valeurs propres d'opérateurs différentiels elliptiques  $A$  (auto-adjoints ou non) sur une variété compacte. Les travaux de Seeley [14] sont à l'origine de nombreux développements du sujet. On trouvera dans [1] un exemple d'utilisation de ces techniques pour obtenir des formules asymptotiques sur le spectre d'opérateurs elliptiques non-auto-adjoints.

Dans le cas auto-adjoint on peut aller beaucoup plus loin dans les formules de trace et par exemple relier le spectre du Laplacien sur  $M$  à la géométrie (Selberg, Gutzwiller); ceci est un autre et vaste sujet avec une abondante littérature. Il existe également des extensions des traces pour des opérateurs qui ne sont pas de classe-trace par exemple les traces relatives (et les déterminants relatifs) introduits par Krein [4] ou par prolongement analytique d'une fonction zéta généralisée [14]. Par exemple si  $A = -\Delta_M + 1$ , la fonction  $\zeta_A(s) := \text{Tr} A^{-s}$  définit une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe  $\{s, \Re s > \frac{d}{2}\}$ .  $\zeta$  se prolonge à  $\mathbb{C}$  en une fonction méromorphe dont les pôles appartiennent à la suite  $s_j = \frac{d-j}{2}$ . De plus  $\zeta_A$  est régulière sur les entiers [14].

#### 4. Esquisse de preuve du théorème de Lidskii

Commençons par présenter un outil basique pour l'étude des valeurs propres d'opérateurs non-auto-adjoints : les inégalités de Weyl ([4, (p. 35-41)]).

Soit  $A$  un opérateur compact de  $\mathcal{H}$ . On considère la suite  $\{\lambda_j(A)\}$  de ses valeurs propres non nulles (si elles existent) ordonnée par ordre de module décroissant, répétées suivant leur multiplicité. Soit d'autre part la suite  $s_j(A)$  des valeurs propres  $> 0$  de  $|A| := \sqrt{A^*A}$ , appelées valeurs singulières (ou caractéristiques) de  $A$ . On a pour tout entier  $N \geq 1$  et tout réel  $p >, r > 0$ , les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_N(A)| &\leq s_1(A)s_2(A)\cdots s_N(A) \\ \sum_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j(A)|^p &\leq \sum_{1 \leq j \leq N} (s_j(A))^p \\ \prod_{1 \leq j \leq N} (1 + r|\lambda_j(A)|) &\leq \prod_{1 \leq j \leq N} (1 + rs_j(A)). \end{aligned}$$

On a de plus  $\|A\|_1 = \sum_{j \geq 1} s_j(A)$ .

Rappelons que  $D_A(z) := \prod_{j \geq 1} (1 - z\lambda_j)$ . D'après la troisième inégalité de Weyl on a

$$(18) \quad |D_A(z)| \leq e^{|z|\|A\|_1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

On suppose d'abord que  $A$  est de classe trace, sans valeur propre non nulle. C'est équivalent à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$  (i.e  $A$  est quasi-nilpotent).

Un exemple élémentaire d'opérateur quasi-nilpotent : l'opérateur d'intégration noté  $Ku(x) = \int_0^x u(y) dy$ , défini sur  $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ , pour la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ . On vérifie directement que  $K$  n'a pas de valeurs propres (il est injectif). Il n'est

pas de classe-trace mais il est de classe de Schatten  $1 + \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . En particulier  $K^2$  est quasi-nilpotent de classe-trace.

Soit  $\Pi_N$  une suite croissante de projecteurs orthogonaux de  $\mathcal{H}$  de rang  $N$  convergent fortement vers l'identité sur  $\mathcal{H}$ . Alors  $A_N := \Pi_N A \Pi_N$  converge vers  $A$  dans  $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$  et en particulier dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

On pose  $\lambda_j^{(N)} = \lambda_j(A_N)$  et  $D_N = D_{A_N}$ . On en déduit que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} |\lambda_1^{(N)}| = 0$ .

D'autre part en calculant la dérivée logarithmique  $\frac{D'_N(z)}{D_N(z)}$  on montre que

$$D_N(z) = \exp \left( - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{T}_1^{1+k}(A_N)}{1+k} z^{1+k} \right).$$

On rappelle que pour tout entier  $s$  on a ici

$$\mathcal{T}_1^s(A_N) = \text{Tr}(A_N^s) = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^{(N)})^s \text{ car } A_N \text{ est de rang fini } N.$$

Or il résulte de la deuxième inégalité de Weyl que l'on a

$$|\mathcal{T}_1^{1+k}(A_N)| \leq \|A_N\|_1 |\lambda_1^{(N)}|^k$$

d'où l'on déduit, posant  $a = \text{Tr}(A)$  et utilisant la continuité de la trace,

$$(19) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} D_N(z) = e^{-az}.$$

On montre maintenant que  $\text{Tr}A = 0$  en établissant que si  $a \neq 0$  alors  $D_N$  est à croissance polynomiale, uniformément par rapport à  $N$ , ce qui donne une contradiction avec (19).

Il résulte des inégalités de Weyl et de  $s_j(A_N) \leq s_j(A)$  que l'on a

$$|D_N(z)| \leq \prod_{j \geq 1} (1 + s_j(A)|z|) \leq \prod_{1 \leq j \leq M} (1 + s_j(A)|z|) \exp \left( |z| \sum_{j \geq M+1} s_j(A) \right).$$

On choisit  $M$  tel que  $\sum_{j \geq M+1} s_j(A) \leq \frac{|a|}{2}$  et  $z = e^{-ia \arg a} r$ ,  $r > 0$ , on obtient

$$e^{r|a|/2} \leq \prod_{1 \leq j \leq M} (1 + s_j(A)r),$$

d'où la contradiction.

Le théorème de Lidskii est ainsi démontré pour les opérateurs de classe-trace quasi-nilpotents. Pour le cas général on décompose l'espace de Hilbert en deux sous-espaces orthogonaux  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_D \oplus \mathcal{H}_N$ ,  $\mathcal{H}_D = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}_{\lambda_j}(A)$  (somme de tous les

sous-espaces spectraux généralisés de valeurs propres  $\neq 0$ ). Soient  $P$  le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{H}_D$  et  $P^\perp = \mathbb{1} - P$ . On a alors

$$A = PAP + PAP^\perp + P^\perp AP + P^\perp AP^\perp.$$

Or  $\text{Tr}(P^\perp AP) = \text{Tr}(PAP^\perp) = 0$  (invariance de la trace). D'autre part  $P^\perp AP^\perp$  est quasi-nilpotent. En effet,  $P$  commute avec  $A$  donc  $A^*$  commute avec  $P^\perp$ , or  $A^*$  est quasi-nilpotent d'où la propriété pour  $P^\perp AP^\perp = (P^\perp A^* P^\perp)^*$ . Enfin  $PAP$

est une somme de blocs de Jordan contenant exactement les valeurs propres de  $A$  avec leurs multiplicités.

Ce qui termine la preuve du Théorème 1.2 puisque la trace est linéaire.

## 5. Qui était Lidskii ?

On donne ici quelques éléments biographiques, le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans l'introduction de l'ouvrage consacré à l'œuvre mathématique de Lidski édité par deux de ses anciens élèves M. Levitin et D. Vassiliev « *Operator Theory and its applications* » [AMS Transl-2010].

Victor Borisovich Lidskii est né en 1924 à Odessa, il est décédé à Moscou en 2008. Il a soutenu sa thèse de doctorat à l'université de Moscou, sous la direction de I.M. Gelfand, en 1954, sur le sujet suivant « *Conditions for the completeness of the system of root subspaces of non-self-adjoint operators with discrete spectra* ». Il a été professeur à l'université FizTech de Moscou de 1961 à 2008 ainsi qu'à l'Institut pour les problèmes de mécanique de l'académie des sciences de l'URSS.

L'université Fiz Tech a été créée en 1946 dans la banlieue de Moscou pour favoriser la recherche en physique (en lien avec les programmes nucléaires et spatiaux de l'URSS) ; elle bénéficiait d'un statut privilégié.

Lidskii a été avec Gohberg et Krein l'un des pionniers de l'analyse spectrale des opérateurs non-auto-adjoints.

Il était devenu un expert reconnu du domaine, à la fois pour la partie théorique et ses applications, notamment en mécanique : équations de l'élasticité et de l'hydro-élasticité, théorie des coques minces. Dans ces domaines il a accompli une œuvre importante. Son résultat le plus connu est certainement le Théorème 1.2. Ses travaux connaissent un regain d'actualité avec les développements récents sur le spectre d'opérateurs non-auto-adjoints et sur le pseudo-spectre dont on trouvera dans [17] un aperçu.

Un autre résultat connu de Lidskii concerne une extension d'inégalités de Weyl pour les valeurs propres de matrices hermitiennes.

Soient  $A, B$ , 2 matrices hermitiennes de taille  $n$ . On note  $\{\lambda_j(A), 1 \leq j \leq n\}$  la suite des valeurs propres de  $A$  ordonnées par ordre décroissant.

**Théorème 5.1** (inégalités de Lidski, 1950). *Pour toute partie  $J$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de cardinal  $k$  on a*

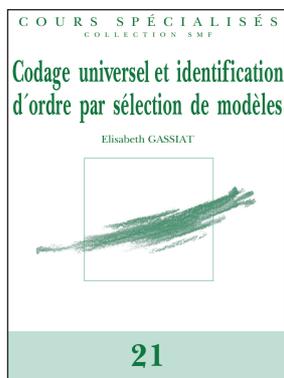
$$(20) \quad \sum_{j \in J} \lambda_j(A + B) \leq \sum_{j \in J} \lambda_j(A) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(B).$$

Il s'agit également d'un résultat important obtenu à la suite d'un travail de Bezein et Gelfand sur les groupes de Lie [8]. L'inégalité (20) est reliée à des propriétés géométriques concernant les variétés de Schubert et la théorie des représentations. On trouvera dans l'article de R. Bhatia, « *Linear algebra to quantum cohomology : the story of Horn's inequality* » [Amer. Math. Monthly-2001] une introduction pédagogique à ce sujet. L'inégalité (20) a aussi des applications en analyse numérique. Mais ces questions sortent du cadre de cet article.

## 6. Références

- [1] M. S. Agranovich and A. S. Markus. On spectral properties of elliptic pseudo differential operators far from self-adjoint ones. *Zeitschrift für analysis und ihre Anwendungen*, 8(3) :237–260, 1989.
- [2] P. de la Harpe and R. Ramer. Polynômes invariants sur les algèbres de Lie banachiques complexes classiques d'opérateurs compacts dans l'espace hilbertien. *C.R.A.S Paris*, pages 824–827, 1972.
- [3] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators*, volume II. InterScience Publishers, 1963.
- [4] I. C Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space*. Translations of mathematical monographs, vol. 18. A.M.S., 1969.
- [5] A. Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques*. A.M.S, 1955. résumé : séminaire N. Bourbaki, 1951–1954, exp. N° 69, p. 193–200.
- [6] A. Grothendieck. Théorie de Fredholm. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 84 :319–384, 1956.
- [7] B. N. Ja. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*, volume 5. Amer. Math. Soc. Transl., 1964.
- [8] V.B. Lidskii. On the characteristic numbers of sum and product of symmetric matrices. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 75 :769–772, 1950. in russian.
- [9] V.B. Lidskii. Non-selfadjoint operators with a trace. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 125 :485–487, 1959. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 47 (1965) 43–46.
- [10] A. Pietsch. *Ideals of operators*. North-Holland Publishing Company, 1980.
- [11] G. Pisier. Weak Hilbert spaces. *Proc. London Math.Soc.*, 56 (3) :547–579, 1988.
- [12] S.C Power. Another proof of Lidskii's theorem on the trace. *Bull. London Math. Soc.*, 15 :146–148, 1983.
- [13] D. Robert. Invariants orthogonaux pour certaines classes d'opérateurs compacts. *C.R.A.S Paris*, 273 :301–304, 1971.
- [14] R. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. In *Singular integrals (proc. Symp. Pure Math. 10)*, pages 288–307. Providence R.I. :Amer. Math. Soc., 1967.
- [15] B. Simon. *Trace ideals and their applications*. A.M.S., 1979.
- [16] J. Sjöstrand. Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators with small multiplicative random perturbations. *Annales Fac. Sci. Toulouse*, 18 :4 :739–795, 2009.
- [17] J. Sjöstrand. Spectral properties of non-self-adjoint operators, 2009. Journées ÉDP, Évier, [http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP\\_2009\\_A1\\_0](http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2009_A1_0).
- [18] M. Zworski. Resonances in Physics and Geometry. *Notices of the AMS*, 46 :3 :319–328, 1999.

**Remerciements** : ce travail a été soutenu par le projet ANR « NOSEVOL » ANR-2011-BS01019 01. Je remercie B. Helffer et le relecteur pour leurs critiques constructives de la première version de ce texte.



## Cours Spécialisés 21

**Codage universel  
et identification d'ordre  
par sélection de modèles**

E. Gassiat

Ces notes de cours se situent à l'interface entre «Théorie de l'information» et «Statistiques». On y met en évidence les liens que le codage universel et la compression adaptative présentent avec l'inférence statistique des processus, par maximum de vraisemblance ou méthode bayésienne. Partant de résultats et outils classiques en alphabet fini, on aborde la théorie récente du codage universel en alphabet infini. On montre comment cela permet de résoudre des problèmes d'identification d'ordre, notamment pour les modèles de chaînes de Markov cachées.

*These notes are situated in the interface between Information Theory and Statistics. We highlight how universal coding and adaptive compression are linked with the statistical inference of random processes, by maximum likelihood or Bayesian methods. We start with classic tools for dealing with finite alphabets, then we present the recent theory of universal coding in infinite alphabets. We show how it allows to solve problems of order identification, in particular for hidden Markov models.*

ISBN 978-2-85629-782-7

prix public\* : 45 € - prix membre\* : 32 €  
frais de port non compris



Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
F-75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# TROIS ENTRÉES SOUS LA COUPOLE

---

*Trois nouveaux académiciens ont été élus en décembre 2013 en mathématiques : Jean-François Le Gall, Laure Saint-Raymond et Cédric Villani. C'est l'occasion pour la Gazette de présenter quelques facettes de leur activité. Chacun dans son style, Grégory Miermont, François Golse et Aurélien Alvarez ont accepté cette tâche. On ne s'étonnera pas que pour C. Villani le choix se soit fait naturellement de parler de son rôle dans la popularisation des mathématiques. La Gazette a déjà en effet eu l'occasion de parler de ses travaux scientifiques.*

## Aller à l'aléa, selon Jean-François Le Gall

Grégory Miermont<sup>1</sup>

---

Commençons par un rapide historique. Après des études à l'Éns de Paris où il entre en 1978, Jean-François Le Gall effectue son doctorat de troisième cycle en 1982 sous la direction de Marc Yor, doctorat au cours duquel il obtient un poste de chargé de recherches au CNRS. Il est ensuite recruté professeur à l'université Paris 6 en 1988, puis rejoint en 2006 l'université de Paris-Sud (Orsay), où il exerce actuellement. De 1997 à 2007, il a été professeur détaché au DMA de l'Éns de Paris, dont il a été directeur des études pendant plusieurs années. Ce séjour de dix ans a eu en particulier un impact profond sur la perception par les normaliens des probabilités et des statistiques. La liste de ses distinctions nationales et internationales est longue, la dernière en date étant sa conférence plénière au congrès international des mathématiciens à Séoul en 2014. De fait, aussi bien par ses recherches que par son investissement dans la transmission du savoir, J.-F. Le Gall endosse depuis une vingtaine d'années un rôle de capitaine au sein des probabilités françaises. À ce titre, sa nomination à l'Académie des sciences ne doit rien au hasard.

Quitte à simplifier un peu, l'école mathématique dont est issu J.-F. Le Gall est celle du *calcul stochastique*, à comprendre au sens large de l'étude des processus aléatoires à temps continu. Les années 1960–1970 avaient vu émerger, notamment aux États-Unis et en France, une théorie abstraite de ces processus, effectuant une synthèse entre la théorie du potentiel probabiliste, mise en évidence par Doob et Kakutani, et le calcul intégral stochastique d'Itô. Si J.-F. Le Gall s'est approprié les profonds enseignements de cette école, il les utilisera toujours dans des buts très concrets, se détournant ainsi, sans doute sous l'influence de chercheurs comme Jacques Neveu ou Marc Yor, de la tentation « bourbachique » qui avait gagné une partie des probabilités. C'est l'une des grandes forces des travaux de J.-F. Le Gall

---

<sup>1</sup> Éns de Lyon.

que d'étudier des objets relativement élémentaires, qui ont parfois une très longue histoire derrière eux (mouvement brownien, processus de branchement), pour se les (ré)approprier et en donner des visions nouvelles à la fois claires et puissantes. Un peu à la manière d'un Kiyoshi Itô montrant, par la théorie des excursions, que le mouvement brownien, objet aléatoire « continu » par excellence, peut parfois être vu plus avantageusement comme un nuage « discret » de points formé par ses excursions loin de zéro.

Notons que les travaux de Wendelin Werner, qui fut l'un des nombreux étudiants en thèse de J.-F. Le Gall, sont fortement influencés par cette volonté de considérer les processus stochastiques comme les interprètes, voire les exégètes, d'un objet ou un résultat mathématique. L'utilisation intensive du calcul stochastique dans l'étude des évolutions de Schramm-Loewner marque en cela un très grand succès de cette ligne de pensée, avec la reconnaissance que l'on sait de la part de l'ensemble de la communauté mathématique.

Nous proposons ici un survol rapide de quelques-uns des résultats marquants de J.-F. Le Gall. Le lecteur intéressé à creuser davantage les thèmes évoqués ci-dessous pourra dans un premier temps consulter le résumé de recherche présent sur sa page web à Orsay, dont je me suis largement inspiré pour écrire ce texte. Mon propos prend aussi appui sur un court texte en forme de *haïku* par lequel Marc Yor a un jour élégamment résumé la recherche de J.-F. Le Gall, sous le titre *Peindre l'aléa* :

*Un serpent brownien,  
De grandes cartes planes,  
Des points multiples.*

### Des points multiples

Après sa thèse sur les équations différentielles stochastiques, J.-F. Le Gall s'attaque rapidement, sous l'impulsion d'un groupe de travail sur les *propriétés fines du mouvement brownien* à Paris 6, à la résolution de nombreuses conjectures fondamentales portant sur la structure des trajectoires du mouvement brownien, et en particulier de celle de ses *points multiples*.

Rappelons que le mouvement brownien est un processus aléatoire  $(B_t, t \geq 0)$  continu, c'est-à-dire une fonction continue aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , telle que  $B_0 = 0$ , et vérifiant la propriété suivante. Pour tout  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ , les variables aléatoires  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$  sont indépendantes, et suivent respectivement la loi gaussienne centrée isotrope  $\mathcal{N}(0, (t_i - t_{i-1})I_d)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , où l'on a noté  $t_0 = 0$ .

Les propriétés presque sûres des trajectoires du mouvement brownien dépendent drastiquement de la dimension  $d$  de l'espace ambiant. Ainsi, il est bien connu que pour  $d \in \{1, 2\}$ , le mouvement brownien est récurrent, c'est-à-dire qu'avec probabilité 1, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\{t \geq 0 : |B_t - x| < \varepsilon\}$  est non borné, où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi, le mouvement brownien de dimension 1 ou 2 passe arbitrairement près de tous les points de  $\mathbb{R}^d$ , et ce en des temps arbitrairement grands. Dans le cas où  $d = 1$ , cela signifie même qu'avec probabilité 1,  $\{t \geq 0 : B_t = x\}$  est non borné pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

En revanche, pour  $d \geq 3$ , c'est tout le contraire : avec probabilité 1, l'on a que  $|B_t| \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

Supposons maintenant que  $d \geq 2$ , et donnons-nous  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Il est facile de voir que presque sûrement, le mouvement brownien ne visite pas le point  $x$ . De même, on montre que le point 0 n'est visité, presque sûrement, qu'à l'instant 0, c'est-à-dire que  $0 \notin \{B_t, t > 0\}$ . Cela ne veut pas dire, évidemment, que le mouvement brownien ne visite aucun point, mais seulement que les points visités sont, en un sens, « exceptionnels ». Pourtant, il y a des points bien plus remarquables que les points visités par le mouvement brownien, et en particulier, il est connu depuis les travaux de Dvoretzky, Erdős et Kakutani dans les années 1950 que pour  $d \in \{2, 3\}$ , il existe presque sûrement des points doubles du mouvement brownien, c'est-à-dire des points  $x \in \mathbb{R}^d$ , tels que  $x = B_s = B_t$  pour deux instants  $s, t \in \mathbb{R}_+$  distincts. En dimension 3, il s'agit là de la plus grande multiplicité possible, c'est-à-dire qu'aucun point n'est visité trois fois. En dimension plus grande que 4, la courbe brownienne est simple.

Mais c'est en dimension 2 que les choses les plus surprenantes ont lieu, puisque les travaux de Dvoretzky, Erdős et Kakutani ont montré l'existence de points de multiplicité finie arbitrairement grande, et même infinie égale à la puissance du continu. J.-F. Le Gall a montré qu'en réalité, le « zoo » des points multiples est le plus riche possible : presque-sûrement, pour tout type d'ordre, c'est-à-dire tout fermé d'intérieur vide  $K$  de  $[0, 1]$ , il existe un point  $x \in \mathbb{R}^2$  et un homéomorphisme croissant  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que

$$\{t \geq 0 : B_t = x\} = \varphi(K).$$

D'autres travaux fameux de J.-F. Le Gall dans les années 80 concernent la structure fractale fine des points de multiplicité finie du mouvement brownien plan. Ainsi, par exemple, il montre que la jauge de Hausdorff exacte des points de multiplicité  $n$  est donnée par

$$h_n(x) = x^2 \left( \log \left( \frac{1}{x} \right) \log \log \log \left( \frac{1}{x} \right) \right)^n,$$

c'est-à-dire que la  $h_n$ -mesure de Hausdorff des points de  $\mathbb{R}^2$  visités  $n$  fois exactement par le mouvement brownien plan dans l'intervalle de temps  $[0, 1]$  est p.s. dans  $]0, \infty[$ . En particulier, tous ces ensembles de points sont de dimension de Hausdorff 2 (comme la courbe brownienne elle-même!), mais ceci quantifie très précisément le fait que les points de multiplicité  $n + 1$  sont néanmoins beaucoup plus rares que ceux de multiplicité  $n$ .

Mentionnons également que de nombreux résultats obtenus pour le mouvement brownien ont un analogue pour les marches aléatoires, ce qui est une belle illustration du principe selon lequel la compréhension du monde « continu » éclaire celle du monde « discret », tout en proposant des preuves robustes qui ne dépendent presque pas du modèle. On peut en effet tirer parti du fait que, sous des hypothèses que nous ne précisons pas ici, une marche aléatoire « vue de très loin », c'est-à-dire renormalisée de façon appropriée, ressemble à un mouvement brownien : on dit que ce dernier est la *limite d'échelle* des marches aléatoires. Le fait que la loi de cette limite ne dépende pas de celle de la marche aléatoire (satisfaisant les

hypothèses idoines) est ce que l'on appelle un *principe d'invariance*, ou encore un principe *d'universalité* en physique.

### Un serpent brownien

Au début des années 1990, J.-F. Le Gall s'intéresse à une classe de processus stochastiques à valeurs mesures, appelés *superprocessus*, et dont l'étude remonte à des travaux de Dawson, Watanabe, Dynkin, Perkins en particulier. Parmi ces processus trône le *super-mouvement brownien*, décrivant la limite d'échelle d'un système de particules qui se déplacent dans  $\mathbb{R}^d$  selon des mouvements browniens indépendants, tout en suivant un processus de branchement critique en temps continu. Par exemple, au bout d'un temps exponentiel, chaque particule meurt ou se duplique avec même probabilité  $1/2$ , et on décrit le système à chaque instant comme une mesure atomique aléatoire, dont les atomes sont les positions des particules en vie à l'instant considéré. Dans la limite d'échelle, obtenue en accélérant le temps du système précédent tout en introduisant un très grand nombre de particules à l'instant initial, des événements de branchement et de mort ont lieu à chaque instant, et le processus à un instant donné est décrit non plus par un nuage de points, mais par une mesure aléatoire diffuse. Dans la lignée de ses travaux de la décennie précédente concernant le mouvement brownien, J.-F. Le Gall obtient des résultats fins sur la nature fractale des superprocessus, complétant en particulier des résultats de Perkins. Mais c'est surtout sa méthode qui retient l'attention.

En introduisant les « serpents », J.-F. Le Gall prendra en effet une hauteur considérable dans l'étude du sujet. Les serpents permettent d'explorer successivement toutes les trajectoires des particules d'un superprocessus, tout en ayant la propriété fondamentale d'être des processus de Markov, c'est-à-dire d'oublier leur passé strict à tout instant. Pour expliquer le nom du « serpent » brownien  $(W_t, t \geq 0)$ , remarquons que ses valeurs  $W_t = (W_t(s), 0 \leq s \leq \zeta_t)$  sont elles-mêmes des fonctions continues définies sur un intervalle de la forme  $[0, \zeta_t]$ , où la durée de vie  $\zeta_t$  évolue au cours du temps. Intuitivement, lorsque la durée de vie  $\zeta_t$  diminue de  $\varepsilon$ , la fonction  $W_t$  est remplacée par sa restriction à  $[0, \zeta_t - \varepsilon]$ , tandis que lorsque  $\zeta_t$  augmente de  $\varepsilon$ ,  $W_t$  reste inchangée sur  $[0, \zeta_t]$ , et la portion de la trajectoire sur l'intervalle  $[\zeta_t, \zeta_t + \varepsilon]$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$  issu du point terminal  $W_t(\zeta_t)$ . Ainsi,  $(W_t, t \geq 0)$  se comporte comme un serpent, ou une murène, qui sortirait et rentrerait alternativement de son repaire. Le processus  $(\zeta_t, t \geq 0)$ , quant à lui, est la valeur absolue d'un mouvement brownien de dimension 1, ce qui fait que la description exacte du serpent est un peu plus délicate que celle donnée ci-dessus, puisque le mouvement brownien n'a aucun intervalle de monotonie.

Pour décrire une des plus belles applications du serpent brownien, rappelons le lien fascinant exhibé par Kakutani entre le mouvement brownien et le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson : si  $D$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$ , alors la solution à l'équation de Poisson

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D$$

avec condition au bord de Dirichlet  $u|_{\partial D} = g$ , est donnée par la formule  $u(x) = \mathbb{E}[g(x + B_\tau)]$ , où  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^d$ , et  $\tau = \inf\{t \geq 0 : x + B_t \notin D\}$  est le premier instant où le mouvement brownien (issu

de  $x$ ) sort du domaine. La loi  $\mu_x$  de la variable aléatoire  $x + B_\tau$ , qui est une mesure sur  $\partial D$ , est la mesure de Poisson sur le bord, et la formule ci-dessus est donc une réinterprétation probabiliste de la formule de Poisson. Bien sûr, ceci s'applique sous des conditions de régularité de  $D$  et  $g$  que nous omettons ici. Des travaux de Dynkin avaient mis en évidence le fait que le super-mouvement brownien permet de donner des représentations de solutions de l'équation semilinéaire

$$\Delta u = u^2.$$

Dans le cas d'un domaine plan borné et à bord lisse, J.-F. Le Gall propose une représentation des solutions positives de cette équation à l'aide du serpent brownien, analogue à celle proposée par Kakutani pour le problème de Dirichlet, même si elle est trop élaborée pour être détaillée ici. Ceci l'amène à définir la notion appropriée de trace de la solution sur le bord, permettant une classification complète des solutions. Comme dans le cas de l'équation de Poisson, cette représentation probabiliste fait mieux que résoudre l'équation puisqu'elle « explique » ses solutions en termes de trajectoires de processus stochastiques. Ces travaux ont entre autres ouvert la voie à des recherches analogues dans le cas des autres dimensions. Il est intéressant de noter qu'en retour, à travers cette représentation, certaines des propriétés du serpent brownien peuvent s'obtenir en résolvant l'équation  $\Delta u = u^2$  avec des conditions de bord idoines dans un domaine.

Le serpent brownien est un objet fondamental, que l'on retrouve également dans l'étude de certains modèles de la physique statistique. Mentionnons par exemple que pour  $d$  assez grand, un arbre aléatoire uniforme sur réseau, c'est-à-dire un sous-graphe de  $\mathbb{Z}^d$  connexe sans cycle et contenant  $n$  sommets, dont l'origine 0, choisi uniformément au hasard, admet pour limite d'échelle quand  $n \rightarrow \infty$  le serpent brownien, en un sens que nous ne préciserons pas ici.

Il est également à noter que la généalogie « pure » des superprocessus, qui demeure lorsqu'on oublie les déplacements spatiaux, est un objet d'étude fascinant en lui-même, et auquel J.-F. Le Gall apportera également des contributions majeures. Au début des années 1990, David Aldous a introduit un fractal aléatoire fondamental, appelé *l'arbre continu brownien*<sup>2</sup>, qui peut s'obtenir comme la limite d'échelle de très nombreux modèles d'arbres discrets aléatoires, dont en particulier les arbres (généalogiques) associés aux processus de branchement discrets critiques conditionnés à avoir un grand nombre d'individus, dans le cas où la loi de reproduction a une variance finie. C'est également cet arbre qui décrit la généalogie du serpent brownien : ce dernier peut être vu comme un mouvement brownien indexé par l'arbre continu brownien ! Avec Yves Le Jan, puis Thomas Duquesne, J.-F. Le Gall introduit au début des années 2000 une famille d'arbres aléatoires continus décrivant toutes les limites d'échelle possibles des généalogies des processus de branchement. Là encore, les outils fins du calcul stochastique, en particulier la théorie des processus de Lévy, s'avèrent indispensables pour traiter ce problème avec la hauteur nécessaire.

<sup>2</sup> Techniquement, c'est un  $\mathbb{R}$ -arbre compact aléatoire : un espace métrique aléatoire compact, géodésique, et sans cycle, c'est-à-dire dans lequel  $\mathbb{S}^1$  ne peut pas se plonger.

## De grandes cartes planes

Depuis une dizaine d'années, le sujet de prédilection de J.-F. Le Gall est celui des cartes aléatoires. Ses recherches antérieures se sont parfaitement cristallisées sur ce thème, puisqu'il y a apporté tout à la fois son expertise de la géométrie fractale des processus aléatoires, du serpent brownien et de son lien avec les EDP, et de la généalogie des processus de branchement, voire ses tout premiers travaux de recherche, comme on le verra plus bas.

Rappelons qu'une carte (plane) est le plongement d'un graphe connexe fini dans la sphère de dimension 2. Deux cartes sont considérées identiques si l'une est l'image de l'autre par un homéomorphisme de la sphère préservant l'orientation ; ainsi l'ensemble des cartes, à ces identifications près, est dénombrable. Si l'on choisit une carte aléatoirement, par exemple uniformément parmi la famille finie formée par les cartes ayant  $n$  arêtes, on obtient un graphe aléatoire tracé sur la sphère, que l'on peut voir comme une façon de doter cette dernière d'une structure géométrique aléatoire. Pour être plus spécifique, si l'on note  $V_n$  l'ensemble des sommets de la carte aléatoire, on peut le munir de la distance de graphe  $d_n$  : la distance  $d_n(u, v)$  est le nombre minimal d'arêtes le long d'un chemin menant de  $u$  à  $v$ . Il a été montré au début des années 2000, par Chassaing et Schaeffer, comment le serpent brownien pouvait jouer un rôle important dans l'étude de la limite d'échelle de ces espaces métriques aléatoires lorsque  $n \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire du comportement limite des espaces  $(V_n, a_n d_n)$  pour une constante de renormalisation  $a_n \rightarrow 0$  appropriée. Plus précisément, on veut choisir  $a_n$  de sorte que le diamètre des espaces métriques ci-dessus reste borné loin de 0 et  $\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et Chassaing et Schaeffer montrent qu'il faut choisir  $a_n = n^{1/4}$  à cet effet. Ils utilisent à cet effet des bijections remarquables entre certaines familles de cartes et des modèles d'arbres étiquetés, qui ne sont autres que des avatars discrets des serpents. Ces bijections remontent au début des années 1980 avec les travaux de Cori et Vauquelin, mais ce n'est qu'avec la thèse de Schaeffer en 1997 que ces méthodes prennent leur véritable essor et imprègnent les milieux des probabilités et de la physique théorique. Notons en particulier que l'une des motivations de l'étude de la limite d'échelle des cartes aléatoires provient de la théorie de la gravité quantique de dimension 2, dans laquelle intervient précisément une « variété riemannienne de dimension 2 choisie uniformément au hasard », et dont le rôle devrait être tenu par la limite d'échelle des cartes aléatoires.

La question naturelle était donc de prouver la convergence de  $(V_n, n^{-1/4} d_n)$ , au sens de Gromov-Hausdorff<sup>3</sup>, vers un espace métrique aléatoire limite. Ce dernier fut appelé *carte brownienne* par Marckert et Mokkadem, dont ils conjecturèrent la loi. Cette question, dite de « l'unicité de la carte brownienne » a été résolue en 2011 par J.-F. Le Gall dans le cas d'une carte choisie uniformément parmi les  $p$ -angulations enracinées à  $n$  faces (c'est-à-dire que chacune de ces faces est de degré  $p$ ), où  $p$  est un élément de  $\{3\} \cup \{4, 6, 8, 10, \dots\}$ , le cas  $p = 4$  ayant été également résolu au même moment, et par des méthodes différentes, par l'auteur de ces lignes. Comme prévu par Marckert et Mokkadem, l'espace métrique limite

<sup>3</sup> Si la distance de Hausdorff permet de comparer deux sous-ensembles d'un même espace métrique, la distance de Gromov-Hausdorff permet de comparer deux espaces métriques en les plongeant au préalable de façon isométrique dans un espace métrique commun, puis en comparant les plongements à l'aide de la distance de Hausdorff.

est un espace aléatoire construit à partir du serpent brownien, d'une façon trop élaborée pour être détaillée ici. Dans l'intervalle entre les travaux de Chassaing-Schaeffer et 2011, J.-F. Le Gall avait apporté nombre de résultats fascinants sur les propriétés vérifiées par toute limite d'échelle potentielle des cartes aléatoires. Il a ainsi montré, que la carte brownienne est presque sûrement homéomorphe à la sphère de dimension 2 (résultat obtenu avec Frédéric Paulin), tout en étant un espace métrique de dimension de Hausdorff 4.

Mais le plus magnifique des résultats de J.-F. Le Gall sur la carte brownienne est à mon sens le suivant. Notons  $(\mathbf{m}_\infty, D)$  la carte brownienne. Cet espace métrique aléatoire est muni d'une mesure de probabilité naturelle, notée  $\lambda$ , qui est en un sens la probabilité uniforme sur  $\mathbf{m}_\infty$ . En particulier, on peut, conditionnellement à la carte brownienne, choisir un point  $\rho$  « uniformément » dans  $\mathbf{m}_\infty$ , c'est-à-dire selon la loi  $\lambda$ . On interprète  $\rho$  comme un point « typique » de la carte brownienne. Définissons le *cut-locus* de  $\mathbf{m}_\infty$  basé en  $\rho$  comme l'ensemble  $\text{CL}(\mathbf{m}_\infty, \rho)$  des points de  $\mathbf{m}_\infty$  qui peuvent être reliés à  $\rho$  par deux chemins géodésiques distincts (un chemin géodésique étant ici un plongement isométrique d'un segment réel dans  $\mathbf{m}_\infty$ ). En décrivant *tous* les chemins géodésiques vers  $\rho$ , J.-F. Le Gall montre que  $\text{CL}(\mathbf{m}_\infty, \rho)$  peut être vu comme le plongement dans la carte brownienne du squelette d'un arbre continu aléatoire brownien, c'est-à-dire des points de cet arbre brownien qui ne sont pas des feuilles. Il est à noter que c'est essentiellement ce que dit la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer dans le cas discret, mais la transcription de cette propriété dans le monde continu est un vrai tour de force. En substance, ce résultat implique que la bijection entre cartes et arbres étiquetés est toujours bien définie dans le monde continu, ce qui est une étape importante vers la résolution du problème d'unicité de la carte brownienne.

Terminons en mentionnant le résultat *d'universalité* de la carte brownienne obtenu par J.-F. Le Gall. Par universalité, on comprend que la carte brownienne est censée être la limite d'échelle de très nombreux modèles de cartes aléatoires discrètes : on a cité par exemple les  $p$ -angulations avec  $p \in \{3\} \cup \{4, 6, 8, 10, \dots\}$ , mais ce cas est en fait très restrictif. Pour obtenir ce résultat, J.-F. Le Gall tire parti d'une propriété de symétrie de la carte brownienne, dite de ré-enracinement. À l'aide de cette propriété, il montre que modulo des vérifications « de routine », on peut montrer qu'un modèle de cartes aléatoires donné converge vers la carte brownienne uniquement en calculant l'espérance de la distance limite  $X$  entre deux points choisis au hasard dans la carte, et en montrant que cette espérance limite  $\mathbb{E}[X]$  est bien égale à l'espérance  $\mathbb{E}[D(\rho, \rho')]$  attendue pour la distance entre deux points aléatoires  $\rho, \rho'$  tirés selon  $\lambda$  dans la carte brownienne. Ce petit miracle vient du fait que la borne  $X \leq D(\rho, \rho')$  est une conséquence facile des vérifications de routine évoquées ci-dessus, et qui fait que l'égalité  $X = D(\rho, \rho')$  voulue revient à celle des espérances. Cette technique astucieuse est très simple mais très puissante, et elle permet de vérifier la propriété d'universalité pour des modèles de cartes aléatoires toujours plus nombreux et exotiques. Je l'ai mentionnée ici car lors de nos discussions à ce sujet, J.-F. Le Gall m'a dit avoir trouvé une partie de son inspiration dans ses travaux de thèse, rédigés trente ans auparavant. Il y avait obtenu des résultats d'unicité trajectorielle pour des équations différentielles stochastiques pour lesquelles on a unicité en loi de la solution. L'approche consiste à montrer, pour la classe d'équations considérée, que

si  $X$  et  $Y$  sont deux solutions, alors  $\max(X, Y)$  est aussi une solution. L'unicité en loi des solutions montre donc que pour tout  $t$ ,  $X_t, Y_t$  et  $\max(X_t, Y_t)$  ont la même espérance, et sont donc égales presque sûrement puisque les deux premières sont majorées par la troisième! Il me semble que cette anecdote éclaire bien la cohérence de la pensée de notre nouvel académicien.

Félicitations Jean-François!

**Remerciements** : merci à *Christophe Garban, Bénédicte Haas, Anne Miermont, et au comité de rédaction de la Gazette pour leur relecture attentive.*

## Laure Saint-Raymond : des molécules aux fluides

François Golse<sup>1</sup>

---

Laure Saint-Raymond a été élue à l'Académie des Sciences le 10 décembre 2013.

Née le 4 août 1975, elle entre en 1994 à l'École normale supérieure. Agrégée de mathématiques en 1996, elle poursuit sa formation au centre de mathématiques de l'Éns où elle occupe un poste d'agrégé-préparateur. Elle soutient une thèse de doctorat à l'université Paris Diderot en 2000, entre au CNRS en tant que chargée de recherches, puis obtient l'habilitation à diriger des recherches, toujours à l'université Paris-Diderot en 2001. Éluë professeur à l'université Pierre et Marie Curie en 2002, elle revient en 2007 à l'Éns, cette fois en tant que professeur.

Les travaux de L. Saint-Raymond portent sur l'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP). L'ensemble de ses recherches s'organise autour d'un même leitmotiv : justifier rigoureusement les EDP utilisées dans la modélisation de phénomènes physiques à grande échelle à partir de modèles à l'échelle microscopique. Du point de vue du mathématicien, on peut penser aux modèles microscopiques comme aux « axiomes » de la théorie physique, et aux modèles macroscopiques que l'on en déduit comme aux « théorèmes ». Cette démarche s'inscrit dans le cadre du 6ème problème de Hilbert.

Ce texte présente deux exemples de problèmes ressortissant à cette démarche, et sur lesquels L. Saint-Raymond a réalisé de véritables percées au cours des quinze dernières années.

### 1. Les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann

La théorie cinétique des gaz remonte aux travaux de Maxwell (1866) et de Boltzmann (1872). Dans cette théorie, l'état d'un gaz à l'instant  $t$  est décrit par la fonction de distribution  $f \equiv f(t, x, v)$ , qui est la densité, par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx dv$ , du nombre de molécules situées à la position  $x$  et animées de la

---

<sup>1</sup> École polytechnique, Palaiseau, France.

vitesse  $v$ . On supposera ici que  $x$  et  $v$  varient dans  $\mathbf{R}^3$ . L'équation de Boltzmann s'écrit

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t, x, v) = \mathcal{C}(f)(t, x, v)$$

où  $\mathcal{C}(f)$  est l'intégrale des collisions de Boltzmann, dont la forme explicite n'est pas nécessaire pour comprendre ce qui va suivre. On se souviendra seulement que  $\mathcal{C}$  est un opérateur intégral agissant sur la seule variable  $v$  de  $f$ , et que les variables  $t$  et  $x$  ne jouent, dans l'intégrale des collisions  $\mathcal{C}(f)$ , qu'un rôle de paramètre. Il faut savoir également que les seules fonctions  $f$  pour lesquelles  $\mathcal{C}(f) = 0$  sont de la forme

$$f(t, x, v) = \mathcal{M}[\rho(t, x), u(t, x), \theta(t, x)](v) := \frac{\rho(t, x)}{(2\pi\theta(t, x))^{3/2}} e^{-|v-u(t,x)|^2/2\theta(t,x)},$$

où  $\rho(t, x) \geq 0$  et  $\theta(t, x) > 0$  tandis que  $u(t, x) \in \mathbf{R}^3$ , fonctions de distributions nommées « maxwelliennes locales ». Le lien entre la théorie cinétique des gaz et les modèles classiques de la mécanique des fluides se fait par le biais des lois de conservation locales déduites de l'équation de Boltzmann. Une des conséquences de la structure de l'intégrale des collisions de Boltzmann est que, si  $f$  est une solution de l'équation de Boltzmann suffisamment décroissante pour  $|v| \rightarrow \infty$ , alors

$$\partial_t \int_{\mathbf{R}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ v_k \\ \frac{1}{2}|v|^2 \end{pmatrix} f(t, x, v) dv + \operatorname{div}_x \int_{\mathbf{R}^3} v \begin{pmatrix} 1 \\ v_k \\ \frac{1}{2}|v|^2 \end{pmatrix} f(t, x, v) dv = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ces trois égalités sont respectivement les lois de conservation locales de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Définissons

$$\rho(t, x) := \int_{\mathbf{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad u(t, x) := \frac{1}{\rho(t, x)} \int_{\mathbf{R}^3} v f(t, x, v) dv,$$

ainsi que

$$\theta(t, x) := \frac{1}{3\rho(t, x)} \int_{\mathbf{R}^3} |v - u(t, x)|^2 f(t, x, v) dv.$$

Lorsque la fonction de distribution est une maxwellienne locale, on a évidemment

$$\int_{\mathbf{R}^3} v_l \begin{pmatrix} v_k \\ \frac{1}{2}|v|^2 \end{pmatrix} f(t, x, v) dv = \begin{pmatrix} \rho u_k u_l(t, x) \\ \frac{1}{2} \rho u_l (|u|^2 + 5\theta)(t, x) \end{pmatrix}$$

et on trouve, en substituant ces valeurs dans les lois de conservation ci-dessus, le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz. Cette observation suggère que, pour déduire les équations de la mécanique des fluides de l'équation de Boltzmann, on écrit les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour l'équation de Boltzmann, puis on essaie de prouver que la fonction de distribution est proche d'une forme explicite particulière en la variable  $v$  – gaussienne dans l'exemple ci-dessus. Comme les maxwelliennes sont les fonctions de distribution annulant l'intégrale des collisions  $\mathcal{C}(f)$ , il est naturel d'espérer obtenir cette forme explicite particulière en choisissant une loi d'échelle correspondant au fait qu'il y a, dans le gaz, un très grand nombre de collisions par unité de temps. Autrement dit, on s'intéresse aux solutions de l'équation de Boltzmann qui sont lentement variables en  $t$  et  $x$ , c'est-à-dire qui sont de la forme

$$f(t, x, v) = F_\varepsilon(\varepsilon t, \varepsilon x, v).$$

Pour traiter ce problème, Hilbert eut, en 1912, l'idée de chercher  $F_\varepsilon$  comme série formelle en puissances de  $\varepsilon$ , à coefficients dans une algèbre de fonctions de classe  $C^\infty$  en  $t$  et  $x$ . Malheureusement, on sait que les solutions du système des équations d'Euler pour les fluides compressibles font apparaître des discontinuités de première espèce (du point de vue physique, des ondes de choc) en temps fini. L'approche de Hilbert ne peut donc fonctionner que pour des temps antérieurs à l'apparition de la première onde de choc – elle a été mise en œuvre par Caflisch en 1980. Ceci pose donc la question suivante : a-t-on vraiment besoin de régularité sur les solutions d'un modèle hydrodynamique pour le déduire de l'équation de Boltzmann ?

On ne sait toujours pas à ce jour si les solutions faibles du système de la dynamique des gaz vérifiant une condition d'entropie (éliminant les ondes de choc non physiques) peuvent être obtenues comme limites de solutions de l'équation de Boltzmann, même en dimension un d'espace. Mais à la suite des travaux de DiPerna et Lions (1989), le rôle de la régularité dans l'obtention des modèles de la mécanique des fluides à partir de l'équation de Boltzmann se posa très naturellement sous un angle un peu différent. Il existe en effet des analogies remarquables entre la théorie des solutions faibles dites « turbulentes » des équations de Navier-Stokes en dimension 3 d'espace d'une part, dont l'existence fut démontrée par Leray en 1934, et la théorie de DiPerna-Lions des solutions faibles dites « renormalisées » de l'équation de Boltzmann. En effet, ces deux théories reposent sur des arguments de compacité dans des espaces fonctionnels appropriés ; ils fournissent l'existence globale de solutions en un sens faible, sans en garantir l'unicité, les conditions initiales étant connues. Les solutions turbulentes de Leray vérifient l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int |\nabla_x u(s, x)|^2 \leq \frac{1}{2} \int |u(0, x)|^2 dx, \quad t > 0,$$

où  $u \equiv u(t, x) \in \mathbf{R}^3$  est le champ des vitesses du fluide et  $\nu > 0$  sa viscosité. Les solutions renormalisées de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann vérifient l'inégalité

$$\iint f \ln f(t, x, v) dx dv - \int_0^t \iint \mathcal{C}(f) \ln f(s, x, v) dx dv ds \leq \iint f \ln f(0, x, v) dx dv$$

pour tout  $t > 0$ . Ces deux inégalités constituent une analogie supplémentaire entre les théories de Leray et de DiPerna-Lions ; elles deviennent des égalités dans le cas de solutions suffisamment régulières et décroissantes à l'infini. Dans le cas de l'équation de Boltzmann, l'égalité est une formulation du théorème  $H$  de Boltzmann<sup>2</sup> qui affirme que la quantité

$$H(f)(t) := \iint f(t, x, v) \ln f(t, x, v) dx dv$$

(qui est l'opposée de l'entropie du gaz) est décroissante pour toute solution  $f$  de l'équation de Boltzmann. Enfin, la régularité des solutions turbulentes de Leray n'est

<sup>2</sup> Sur l'origine de la notation  $H$ , voir S. Brush, *Boltzmann's Eta Theorem : Where is the Evidence ?* Amer. J. Phys **35** (1967), p. 892.

toujours pas connue à ce jour, de sorte qu'on ne peut leur appliquer la méthode de Hilbert.

Une série de résultats dus à différents auteurs et publiés entre 1990 et 2000<sup>3</sup> réduisit la question de la validité de la limite de l'équation de Boltzmann vers les équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles à la vérification d'une certaine estimation non-linéaire sur les fluctuations de la fonction de distribution autour de l'équilibre.

C'est une observation de L. Saint-Raymond sur un modèle simplifié de l'équation de Boltzmann, le modèle de BGK, qui permet de comprendre comment lever cette dernière obstruction. Son idée consistait à utiliser d'une part le terme de production d'entropie pour contrôler la distance entre la solution de l'équation de Boltzmann et l'équilibre maxwellien local, et une variante des lemmes de moyennisation en vitesse dans  $L^1$ . On connaît le principe des lemmes de moyennisation en vitesse pour les équations cinétiques, dont le plus simple s'énonce ainsi : soit  $f_n \equiv f_n(x, v)$  suite bornée de  $L^2_{loc}(dx dv)$  telle que la suite  $v \cdot \nabla_x f_n$  soit bornée dans  $L^2_{loc}(dx dv)$ . Alors, pour toute fonction  $\varphi$  continue à support compact, la suite

$$\int f_n(x, v) \varphi(v) dv$$

est relativement compacte dans  $L^2_{loc}(dx)$ . Mais cette propriété est fautive si l'on remplace l'espace  $L^2$  par  $L^1$ , car la suite des moyennes peut converger au sens des distributions vers une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue. La remarque cruciale de L. Saint-Raymond est que cela ne se produit pas lorsque la suite  $f_n$  est bornée dans  $L^1(dx; L^\infty(dv))$ . Or la production d'entropie contrôle précisément la distance entre la fonction de distribution et les maxwelliennes, qui sont des éléments de  $L^1(dx; L^\infty(dv))$ .

La mise en œuvre de cette stratégie sur l'équation de Boltzmann se révéla particulièrement complexe, parce que le contrôle de la distance à l'équilibre local par la production d'entropie y est infiniment plus subtil que dans le cas du modèle de BGK. Une première façon de contourner cette difficulté consista à remplacer l'équilibre maxwellien local par le terme de gain dans l'intégrale des collisions, dont la régularité en  $v$  avait été prouvée auparavant par Lions en 1993 (une méthode plus élémentaire utilisant une version linéarisée du résultat de Lions, démontrée antérieurement par Caflisch et Grad, fut utilisée par la suite). L'utilisation de ces deux idées nouvelles ainsi que des raffinements des démonstrations déjà connues dans les travaux précédents permit d'aboutir au résultat suivant.

Soit  $F_\varepsilon$  une famille de solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann de donnée initiale  $F_\varepsilon|_{t=0} = \mathcal{M}[1, \varepsilon u^{in}(\varepsilon x), 1]$ , où  $u^{in}$  est un champ de vecteurs  $L^2$  à divergence nulle. Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la suite

$$\frac{1}{\varepsilon} \int v F_\varepsilon \left( \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}, v \right) dv$$

est faiblement relativement compacte dans  $L^1_{loc}$  et tous ses points limites sont des solutions de Leray des équations de Navier-Stokes [3, 4]. En particulier, dans cette

<sup>3</sup> Pour une présentation plus détaillée de ce programme de recherches, voir C. Villani, *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann*, Séminaire Bourbaki, 2000-2001, exp. n°893, pp. 365-405.

limite, l'inégalité d'énergie pour les solutions « turbulentes » de Leray des équations de Navier-Stokes apparaît comme forme limite de la variante faible du théorème H de Boltzmann obtenue par DiPerna-Lions.

Un autre résultat remarquable obtenu par L. Saint-Raymond porte sur la limite hydrodynamique de l'équation de Boltzmann vers les équations d'Euler des fluides incompressibles. Pour cette dernière équation, on dispose de solutions classiques locales en temps, mais on ignore si ces solutions existent – ou restent régulières – pour tout temps. On dispose d'autre part de plusieurs notions de solutions faibles : solutions au sens des distributions construites très récemment par Wiedemann (à la suite des travaux de DeLellis-Szekelyhidi adaptant la méthode d'intégration convexe de Gromov aux équations d'Euler des fluides incompressibles), ou bien la notion de solution dissipative due à Lions. Les solutions dissipatives de l'équation de Boltzmann vérifient une propriété d'unicité « fort-faible », dans l'esprit du théorème de Holmgren : les solutions classiques des équations d'Euler sont déterminées de manière unique par leurs données initiales, non seulement dans la classe des solutions régulières, mais également dans celle, plus large, des solutions dissipatives. La méthode d'entropie relative, proposée par H.T. Yau en 1991 pour des limites macroscopiques de modèles sur réseaux, fut généralisée au cas de l'équation de Boltzmann par différents auteurs vers 2000 afin de déduire les solutions dissipatives des équations d'Euler des fluides incompressibles – et donc, par unicité, les solutions classiques lorsque celles-ci existent – à partir des solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann. Toutefois ces travaux reposaient sur des hypothèses qui n'avaient pu être vérifiées. Un travail ultérieur de L. Saint-Raymond [5], utilisant, cette fois encore, la dissipation d'entropie de manière particulièrement subtile, permit de lever ces derniers obstacles, et de donner une preuve complète de la limite de l'équation de Boltzmann vers les équations d'Euler des fluides incompressibles.

## 2. Des équations de Newton au mouvement brownien

Mais en réalité, la théorie cinétique des gaz ne peut pas véritablement être considérée comme un « axiome » de la mécanique. En effet, il s'agit d'une description statistique du mouvement des molécules de gaz, puisque l'objet fondamental dans cette théorie est la fonction de distribution. D'autre part, le théorème H de Boltzmann définit en quelque sorte une « flèche du temps », alors que les équations de Newton de la mécanique classique sont « réversibles » – nous reviendrons plus précisément sur ces notions à la fin de cette section. Ces quelques remarques expliquent pourquoi la théorie cinétique des gaz a été l'objet de controverses scientifiques pendant plusieurs décennies (comptant parmi les sceptiques des personnalités comme Mach ou Poincaré). En réalité, le statut de la théorie cinétique des gaz est resté assez longtemps mystérieux : en admettant que l'équation de Boltzmann n'est pas un principe fondamental de la physique classique non-relativiste au même titre que les lois de Newton, la question de l'irréversibilité pourrait faire croire qu'il est également improbable qu'on puisse la déduire des lois de Newton. Ce n'est qu'en 1949 que H. Grad identifia une loi d'échelle dans laquelle on pouvait envisager de déduire l'équation de Boltzmann à partir des équations de la mécanique classique. Cette limite, qui porte le nom de limite de Boltzmann-Grad, ne fut réalisée qu'en 1975, par O. Lanford, qui établit la validité de l'équation de Boltzmann sur des intervalles de temps courts à partir des équations de Newton. À vrai dire, le texte

de Lanford laissait de côté plusieurs points particulièrement techniques. Après plusieurs clarifications du travail originel de Lanford par Cercignani-Illner-Pulvirenti, puis Cercignani-Petrina-Gerasimenko, la première rédaction complète de la preuve fait aujourd'hui l'objet d'une monographie de Gallagher-Saint-Raymond-TeXier [2].

En fait, la clarification des arguments de Lanford n'est qu'une étape dans un projet plus ambitieux : peut-on déduire directement les équations de la mécanique des fluides à partir des équations de Newton de la mécanique classique ?

Le problème traité par L. Saint-Raymond et ses collaborateurs est nettement moins complexe, mais contient l'essentiel de la difficulté conceptuelle liée à l'irréversibilité : il s'agit de déduire le mouvement brownien – autrement dit la cinématique de l'équation de la chaleur – à partir des équations de Newton. Plus précisément, on part d'un système constitué d'un très grand nombre  $N$  de particules sphériques identiques de rayon  $r$ , sauf qu'une seule particule est distinguée des autres – par exemple, une particule est blanche et les  $N - 1$  autres sont noires. On se place dans un tore plat de volume  $V_N = o((\ln(\ln N))^{3/5})$ , et on suppose que  $N \rightarrow \infty$  tandis que  $Nr^2 = V_N$ . Alors la position de la particule blanche, considérée sur des intervalles de temps de longueur  $V_N^{2/3}$  et ramenée à distance finie par multiplication par  $V_N^{-1/3}$  converge en loi vers le mouvement brownien dont la constante de diffusion est calculée au moyen de l'équation de Boltzmann linéaire [1]. L'idée est de commencer par établir la validité de l'équation de Boltzmann linéaire sur des temps longs en adaptant les résultats de Lanford obtenus dans [2]. L'argument central de la preuve repose sur une procédure d'élagage des arbres représentant la dynamique collisionnelle des particules. L'obtention de l'équation de la chaleur à partir de l'équation de transport linéaire utilise ensuite des méthodes asymptotiques désormais classiques, reposant sur la méthode des séries formelles de Hilbert.

Ce résultat est absolument remarquable à plusieurs titres. D'une part, c'est la première fois que le mouvement brownien, qui est un processus aléatoire, est déduit de manière rigoureuse à partir d'un système hamiltonien de particules en interaction. Il faut bien comprendre qu'ici, la dynamique est purement déterministe, et que le caractère aléatoire de la dynamique limite, codé par la mesure de Wiener, laquelle est définie sur un espace de chemins, donc en dimension infinie, ne peut venir que de la condition initiale du système à  $N$  particules, qui sont réparties sous des lois absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (et même gaussiennes centrées réduites pour les  $N - 1$  particules noires, à l'exception d'une condition assurant que les centres des particules sont distants d'au moins  $2r$ ). D'autre part, la dynamique limite est on ne peut plus irréversible : on sait que le mouvement brownien joue, pour l'équation de la chaleur, un rôle analogue à celui de la méthode des caractéristiques pour les EDP d'ordre 1. Or l'évolution de l'équation de la chaleur définit sur l'espace  $L^2$ , par exemple, un semi-groupe d'opérateurs régularisants au niveau analytique, qu'il est donc impossible de prolonger en un groupe d'opérateurs bornés sur  $L^2$ .

Précisons cette notion d'irréversibilité. Le caractère réversible des équations de Newton se formule comme suit : soit  $R$  l'endomorphisme orthogonal de  $(\mathbf{R}^3)^N \times (\mathbf{R}^3)^N$  défini par  $R(X, \Xi) = (X, -\Xi)$ . Notons  $X_N := (x_1, \dots, x_N)$  et  $\Xi_N := (\xi_1, \dots, \xi_N)$  les positions et les impulsions de  $N$  particules sphériques identiques

à l'instant initial. Notons  $S_t(X_N, \Xi_N) := (X_N(t), \Xi_N(t))$  le couple formé du  $N$ -uplet des positions  $X_N(t)$  et du  $N$ -uplet des impulsions  $\Xi_N(t)$  à l'instant  $t$  des  $N$  particules, c'est-à-dire que  $S_t$  est le flot engendré par les équations de Newton. La réversibilité des équations de Newton correspond au fait que  $RS_tRS_t = \text{Id}$ . C'est donc une propriété qui se lit dans l'espace des phases à  $N$  particules. Or la théorie cinétique des gaz, elle, est une théorie statistique pour une seule particule, qui est la particule « typique » du gaz. La théorie de la particule marquée, étudiée dans [1], est, elle-aussi, une théorie pour une particule extraite d'un système en interaction. Il n'est évidemment pas possible de représenter l'opération  $R$ , qui consiste à agir *simultanément* sur les impulsions de *toutes* les particules comme opération sur la fonction de distribution de la théorie cinétique des gaz. Dans ce cas précis, le fait de disposer d'un formalisme mathématique précis reliant les modèles cinétiques aux équations de Newton permet de lever les paradoxes liés à ces questions d'irréversibilité.

L. Saint-Raymond a reçu de nombreuses distinctions pour cet ensemble de travaux absolument remarquables : cours Peccot au Collège de France, prix Louis Armand de l'Académie des Sciences et médaille Pie XI de l'Académie pontificale en 2004, prix de l'European Mathematical Society en 2008, prix Ruth Lyttle Satter de l'AMS en 2009, prix Irène Joliot-Curie en 2011... En accueillant Laure Saint-Raymond, l'Académie des Sciences honore aujourd'hui une jeune mathématicienne exceptionnelle, dont les recherches ont fait entrer dans le champ de la rigueur mathématique plusieurs énoncés majeurs touchant aux fondements de la mécanique statistique.

### 3. Références

- [1] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond : *The Brownian Motion as the Limit of a Deterministic System of Hard Spheres*, prépublication arXiv 2013, Invent. Math., en révision.
- [2] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier : « From Newton to Boltzmann : the case of hard spheres and short-range potentials », Zürich Lectures in Advanced Mathematics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
- [3] F. Golse, L. Saint-Raymond : *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, Invent. Math. **155** (2004), 81–161.
- [4] F. Golse, L. Saint-Raymond : *The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials*, J. Math. Pures Appl. **91** (2009), 508–552.
- [5] L. Saint-Raymond : *Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit*, Arch. Ration. Mech. Anal. **166** (2003), 47–80.

## Cédric Villani, chouchou des médias ?

Aurélien Alvarez<sup>1</sup>

---

Le 22 octobre 2011, l'hebdomadaire *Télérama* titrait : « Cédric Villani, la Lady Gaga des maths ». On se souvient bien sûr qu'un peu plus d'un an auparavant, la médaille Fields était venue récompenser ses travaux, subtils mélanges d'analyse, de physique statistique, de probabilités et de géométrie différentielle. Depuis lors, Cédric Villani a endossé comme nul autre avant lui le rôle d'ambassadeur des mathématiques, en particulier auprès des médias. Avec une ambition clairement affichée : faire rayonner les mathématiques partout ! Il faut dire qu'avant de prendre la direction de l'Institut Henri Poincaré, Villani travailla neuf ans à l'Éns de Lyon, un endroit où la communauté mathématique a depuis longtemps pris au sérieux les questions de diffusion scientifique, en particulier sous l'impulsion d'Étienne Ghys qui a entraîné avec lui toute une ribambelle<sup>2</sup> de collègues, de jeunes en particulier. À quelques semaines de peut-être transmettre le flambeau d'émissaire de la communauté mathématique française à un ou une autre médaillé(e) Fields, retour sur une présence médiatique époustouflante et l'occasion pour moi de partager ici quelques leçons et réflexions que j'ai tirées de son expérience.

### Se former à communiquer ?

Les mathématiciens, et plus généralement les scientifiques, sont habitués à communiquer, que ce soit à l'écrit sur des blogs ou dans des revues spécialisées, ou à l'oral dans des colloquiums ou des séminaires entre spécialistes. Ils le sont beaucoup moins lorsqu'il s'agit de s'adresser à un public non spécialiste, lors de conférences grand public ou d'exposés devant des scolaires. Et ils le sont encore moins lorsqu'ils se retrouvent face à des journalistes et aux médias en général. Faire de la diffusion scientifique écrite ou orale est un exercice bien plus difficile qu'il n'y paraît ; même si certains sont naturellement plus à l'aise pour ce genre d'activités que d'autres collègues, la bonne nouvelle est que ça s'apprend. Et ça se travaille !

Sa première rencontre avec un journaliste professionnel, Cédric Villani s'en souvient parfaitement : c'était en 2003 à Lyon pour un journal semi-grand public dans le but de présenter les recherches de son laboratoire<sup>3</sup>. Rencontre qu'il qualifie volontiers de catastrophique. « On ne s'est pas compris, j'ignorais son niveau scientifique et il faisait oui oui à tout ce que je racontais. Il a pris des notes dans son coin pour finalement aller voir son comité de rédaction et lui dire qu'il avait rencontré un fou furieux et qu'il n'avait rien compris. »

---

<sup>1</sup> Université d'Orléans.

<sup>2</sup> L'une des dernières très belles aventures de cette école lyonnaise est sans nul doute la toute nouvelle Maison des mathématiques et de l'informatique (<http://math.univ-lyon1.fr/mmi/>).

<sup>3</sup> C'était l'UMPA, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, de l'Éns de Lyon.

Sur les conseils<sup>4</sup> avisés d'Étienne Ghys donc, Villani participe en 2007 à un stage de deux jours organisé par le CNRS et animé par Claude Vadel. L'occasion d'apprendre d'abord quelques éléments indispensables de psychologie du journaliste : comprendre quelles sont ses contraintes, les différences entre journaliste scientifique et journaliste grand public, les exigences de son comité de rédaction et surtout, les attentes de ses lecteurs. « Il faut essayer de faire du journaliste son allié car c'est ensemble que vous allez raconter une belle histoire. Et pourquoi pas donner quelques éléments de psychologie du scientifique au journaliste à l'occasion : ce qui pèse sur nous, les rapports, les soumissions, le regard des collègues... », expliquait Villani à l'occasion de son exposé *Splendeurs et misères du scientifique face aux médias* lors du colloque récent *Sciences et médias*<sup>5</sup> organisé par plusieurs sociétés savantes dont la SMF.

### Pourquoi communiquer ?

L'idée qu'il soit très important de communiquer est un phénomène relativement récent en mathématiques et il y a mille et une raisons de se lancer dans l'aventure ; ce qui n'empêche pas de se demander pourquoi on le fait, si on est sûr d'avoir vraiment envie de le faire et si on est prêt à y consacrer une partie significative de son temps. Car ce travail demande beaucoup de temps, de temps de préparation notamment : faire quelque chose de simple est toujours plus compliqué que faire quelque chose de compliqué ! Par ailleurs, il n'y a pas de secret : si on veut être bon, il faut multiplier les exposés et les interventions, tel un concertiste qui chaque soir donne le même récital à un public nouveau, dans une salle différente et une ambiance différente. Le récital est le même, l'alchimie entre l'artiste et son public pas nécessairement au rendez-vous. Quelques motivations en vrac :

- vouloir susciter des vocations. Après tout c'est peut-être bien la plus grande menace qui pèse sur nos universités, même si le problème est largement international ;
- revaloriser l'image du scientifique. Par ailleurs, ce dernier a besoin de se sentir écouté, de savoir que les gens s'intéressent de près ou de loin à ce qu'il fait ;
- maintenir le lien entre les scientifiques et le reste de la société. Le monde scientifique forme une toute petite fraction de la société mais c'est important que cette fraction reste bien visible, soit reconnue, respectée et appréciée par tout le monde ;
- continuer à être influents dans la société. On attend entre autres des scientifiques leurs expertises pour éclairer les citoyens et les politiques sur les grands enjeux sociétaux, ne serait-ce que pour justifier des deniers publics qu'on leur accorde ;
- avoir une visibilité médiatique peut aider des projets à se développer. Certains politiques sont, consciemment ou non, sensibles à une présence régulière dans les médias et au capital sympathie d'une discipline plutôt qu'une autre dans le grand public...

<sup>4</sup> Si le stage n'avait été recommandé que par l'institution, Villani confesse volontiers qu'il n'y aurait probablement pas assisté.

<sup>5</sup> <http://sfp.univ-lille1.fr/sciencesetmedia>

### Quelles sont les attentes du public ?

D'abord, les gens veulent savoir ce qu'est un scientifique, ce qu'il fait, si ça pourrait être un bon métier pour leurs enfants, etc. Et les jeunes ? Eux aussi veulent savoir à quoi occupe ses journées un scientifique en 2014. Tous voient le monde qui bouge, la technologie envahir notre quotidien et ils veulent savoir un peu ce qu'il y a derrière, ils ont envie de se sentir associés d'une façon ou d'une autre à l'aventure, mais pas seulement comme simples utilisateurs. Par ailleurs, les gens aiment entendre les scientifiques parler de leur métier, s'adresser à eux directement et pas seulement par l'intermédiaire des médias. Et puis certains sont là également parce qu'ils ont un compte personnel à régler avec les sciences, les mathématiques en particulier, *trop mathisés* qu'ils ont été... alors ils cherchent à se convaincre qu'ils n'ont pas échoué de leur seule faute. Cela n'aurait probablement rien changé mais combien sont-ils, à la fin d'une conférence réussie, à venir voir l'orateur pour lui dire simplement : « Si seulement j'avais eu un prof de maths comme vous ! ».

### Quels médias utiliser ?

S'il y a mille et une raisons, il y a également mille et une façons de communiquer et Cédric Villani les a à peu près toutes testées, les enchaînant sur un rythme effréné depuis quatre ans. Au total, plusieurs centaines d'interventions parmi lesquelles :

- des conférences devant des publics hétérogènes et des exposés dans des classes de tous niveaux, de l'école primaire à l'université ;
- deux ans de carte blanche dans *Le Monde*, un dossier sur *Futura-Sciences*, des textes sur son blog et de nombreux textes à l'occasion de festivals ou autres ;
- les chroniques *La formule Villani* sur *France Info* ;
- trois longs métrages. *L'harmonie et le chaos* de Philippe Worms. *Colors of mathematics* de la cinéaste russe Ekaterina Eremenko. *Comment j'ai détesté les maths* d'Olivier Peyon<sup>6</sup>, sorti en salle à l'automne dernier et prix d'Alembert 2014 de la SMF ;
- des émissions de télévision, du *Grand Journal* à *On a tout essayé* en passant par *La grande librairie* ;
- des journaux télévisés, des émissions de radio ;
- un ouvrage plus littéraire *Théorème vivant* ;
- ...

Ne nous risquons pas à faire ici une liste exhaustive tellement le pari semble perdu d'avance. Le point important à noter, c'est qu'il n'y a pas deux médias et deux façons de communiquer qui se ressemblent : chaque média a ses exigences, sa capacité à toucher un certain public, ses faiblesses et ses contraintes. Bien les connaître pour tirer parti de leurs vertus et de leurs limites, c'est donc les expérimenter des dizaines de fois chacun, se planter complètement parfois, avoir un sentiment mitigé d'autres fois mais apprendre, toujours apprendre, continuer de progresser, sans peur de prendre des coups, ni crainte du jugement des collègues. La critique est aisée mais l'art est difficile. Et Cédric Villani fait aujourd'hui partie de ceux qui maîtrisent cet art, tels les Hubert Reeves, les Axel Kahn, ces scientifiques qui font déplacer les foules et dont les médias raffolent. Si on parle régulièrement

<sup>6</sup> Olivier Peyon a également réalisé un court-métrage de 50 minutes sur Villani à Hyderabad, intitulé *En route pour la médaille Fields*.

de mathématiques dans les média (et il suffit de lire la revue de presse mensuelle sur *Images des mathématiques*<sup>7</sup> pour réaliser à quel point !), c'est grâce à un travail de fond de la communauté mathématique entrepris depuis plusieurs années déjà, et dont Villani est incontestablement devenu l'un des porte-drapeaux.

### Quelques conseils

L'une des premières choses à faire, avant de passer à la radio ou à la télé, c'est de se débarrasser de son réflexe d'universitaire qui consiste à répondre à la question posée. C'est d'autant plus vrai pour les mathématiciens qui, la plupart du temps, mettent un point d'honneur à répondre précisément à la question posée! Aussi courageux cet acte soit-il, ce n'est presque jamais ce qui est attendu... La question est davantage là comme une perche pour permettre de dire ce qu'on a envie de dire. Il faut anticiper, préparer certains éléments que l'on casera quelle que soit la question, et non pas attendre la question opportune du journaliste qui n'arrivera probablement pas... Certaines interventions sont très très courtes et se résument parfois à une unique minute sérieuse, en particulier dans certaines émissions de télé<sup>8</sup> : il faut donc répéter, se préparer, au risque de se retrouver complètement déstabilisé et manquer complètement son passage. Même à l'écrit d'ailleurs, quand on travaille avec les médias, les échelles de temps ne sont pas du tout celles auxquelles le scientifique est habitué. Il faut parfois pouvoir être réactif dans l'heure pour corriger un article qui va finalement paraître en ligne tout de suite plutôt que quelques jours plus tard.

Une autre attitude à laquelle les mathématiciens ne sont en général pas bien habitués, c'est de savoir répéter plusieurs fois la même chose. À l'oral bien sûr, mais à l'écrit aussi! Car chaque journal et chaque revue touche des publics différents : il ne faut donc pas se laisser trop vite de faire passer les mêmes idées dans des textes différents adaptés au public visé, puisqu'il est évident qu'on ne s'adresse pas à un grand public généraliste de la même façon qu'aux lecteurs d'une tribune économique. À titre d'exemple mentionnons *La courbe en cloche*<sup>9</sup>, un article de Jean-Pierre Kahane paru sur *Images des maths* dans trois versions différentes : pistes verte, bleue et noire. À l'oral, c'est encore plus vrai puisqu'il existe deux questions récurrentes parmi toutes les questions récurrentes : « À quoi ça sert les maths? Alors comme ça, il y a encore des choses à trouver en maths? ». Pour celles et ceux qui soupirent déjà, voici toujours une réponse possible à la première question<sup>10</sup> : « À démontrer des trucs de manière rigoureuse. Mais aussi, à démontrer que certains trucs ne peuvent pas être démontrés, et ça, c'est fort. Mais aussi, à démontrer que la démonstration qui montre que certains trucs ne sont pas démontrables est correcte (et que, du coup, il existe indubitablement des trucs indémontrables). Et ça, c'est quand même très fort. » ;-)

<sup>7</sup> <http://images.math.cnrs.fr>

<sup>8</sup> Comme par exemple lorsqu'Antoine de Caunes demanda à Villani le 29 novembre 2013 lors de son passage au *Grand Journal* d'expliquer en quoi les mathématiques, qui on le dit sont partout, sont aussi dans la météo.

<sup>9</sup> <http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-en-cloche.html>

<sup>10</sup> On pourra lire 99 autres réponses possibles à cette question sur le blog <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2011/07/10/21560399.html>.

On pourra lire ou relire la tribune libre *De la mathémédiatique* de Cédric Villani parue simultanément dans les colonnes de cette *Gazette* en juillet 2012 et dans celles d'*Images des maths*<sup>11</sup>, et dont j'ai repris ici quelques éléments. Ce texte, écrit à la fois pour des spécialistes et le grand public, commence précisément par la question précédente de l'utilité des mathématiques avant de nous présenter quelques-unes des difficultés que Villani a rencontrées lors de ses contacts avec les médias.

### De quoi parler face aux médias ?

Là encore, nos réflexes universitaires ont tendance à nous interdire de nous aventurer hors de notre spécialité. Mais est-ce bien raisonnable ? La question divise et il y a probablement autant d'avis que de collègues. Mais la réponse dépend certainement du public auquel on s'adresse et, bien souvent, il n'y a rien de choquant à donner son avis sur un sujet dont on n'est pas expert. D'autant plus que c'est parfois un excellent moyen de capter un public *a priori* non réceptif : parler musique ou cinéma pour mieux parler mathématiques ensuite, voilà une recette qui marche bien ! « Se cantonner à son domaine d'expertise est un argument qui ne tient pas. D'ailleurs la plupart des gens qui s'expriment dans les médias le font sur des sujets qu'ils ne maîtrisent pas », s'est finalement convaincu Villani. Le danger bien sûr, c'est de se retrouver instrumentalisé<sup>12</sup> dans une bataille qui ne vous concerne pas, lorsqu'une remarque dite en passant se retrouve faire les gros titres d'un journal.

Parmi les exercices très intéressants à faire, il y a bien sûr celui d'essayer de vulgariser ses propres travaux de recherche, ou du moins son domaine de recherche. Challenge potentiellement redoutable... Mais après tout, on peut toujours essayer de raconter une belle histoire où s'entremêlent des idées, des succès, des espoirs déçus, des impasses et des relations humaines. Les mathématiques sont avant tout une grande aventure humaine, et le public qui n'est pas forcément conscient de cette dimension sociale, y est systématiquement sensible. Faire le lien avec le monde dans lequel on vit est également un excellent point d'accroche : les gens ne sont pas effrayés par le progrès scientifique ou la technologie si on leur fait sentir comment ça va les aider, et non pas comment ça va tout chambouler demain dans leurs vies. Parmi les cartes blanches que Cédric Villani a signées sur *Le Monde*, *De la mer violette à la mathématique bleue*<sup>13</sup> est l'une de celles qui lui a attiré le plus grand nombre de commentaires élogieux : il y est question d'actualité, Villani commence son discours par une émotion, quelque chose de surprenant, pour finalement faire passer un message bien rationnel. Le titre est accrocheur, les références culturelles n'échappent pas au lecteur et on y découvre une interaction méconnue entre recherche mathématique et cinéma. Le tout est très bien écrit et se lit d'un trait.

<sup>11</sup> <http://images.math.cnrs.fr/De-la-Mathemediatique.html>

<sup>12</sup> Cette mésaventure, Villani l'a connue et vécue durement, lorsque *Ciel et Espace* titrait sa couverture d'un « La matière et l'énergie noires, je n'y crois pas ! » en mars 2013.

<sup>13</sup> <http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/pixar.pdf>

### **La vulgarisation, une activité scientifique comme les autres**

Être chouchou des médias n'est certainement pas de tout repos, surtout si comme Cédric Villani, on le fait sur un rythme aussi soutenu qu'il a jugé utile de le faire. Aux moments émouvants succèdent parfois des moments durs. Ce qui n'est pas surprenant, après tout, c'est une activité comme une autre. Activité qui demande du temps, beaucoup de temps de préparation. Mais aussi beaucoup de disponibilité mentale quand on doit alterner plusieurs choses dans une même journée. Il n'y a pas de ruse ; pour faire du bon boulot, il faut prendre ce travail très au sérieux, avec le même sérieux que pour l'enseignement ou la recherche. Mais il y a une différence essentielle : un travail de recherche s'accompagne toujours d'un ou plusieurs rapports d'évaluation par les pairs. D'où une certaine objectivité à évaluer les travaux des chercheurs. Les activités de diffusion scientifique et de communication sont jusqu'alors dépourvues d'outils d'évaluation consensuels. Mais les lignes sont en train de bouger progressivement, des réflexions collectives sur ces questions commencent à s'engager timidement. Le fait que des scientifiques de premier plan, comme Cédric Villani ou Étienne Ghys, y consacrent autant d'énergie et s'attellent à la tâche avec autant de sérieux et d'enthousiasme est certainement une preuve que la vulgarisation scientifique ne doit plus être considérée comme une activité mineure et secondaire mais comme une mission du scientifique à part entière.

# PRIX ET DISTINCTIONS

---

## Le prix Fermat et ses lauréats

---

*Le prix Fermat 2013 a été attribué à Camillo De Lellis et Martin Hairer, professeurs respectivement à l'université de Zürich et à l'université de Warwick. Rappelons que ce prix récompense des mathématiciens de moins de 45 ans ayant apporté des contributions majeures dans l'un des domaines où s'est illustré Pierre de Fermat : le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique, les probabilités et la théorie des nombres. Il est organisé par l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT) et financé par la Région Midi-Pyrénées avec le soutien de l'université Paul Sabatier. Notons que cette année, la version « junior » du prix a également été décernée<sup>1</sup>.*

*La cérémonie s'est déroulée à l'Hôtel de Région de Midi-Pyrénées le 22 mai 2014 où M. Tkaczuk représentait la Région et Serge Cohen, directeur de l'IMT, l'université Paul Sabatier et l'IMT. Après la remise des prix proprement dite, dont celle du prix junior, Damien Gayet a donné une conférence sur les Créatures mathématiques au cours de laquelle il a brillamment décrit les travaux des lauréats pour un public de profanes<sup>2</sup>.*

*Camillo De Lellis et Martin Hairer ajoutent ainsi leurs noms à la liste prestigieuse des lauréats du prix Fermat, qui fête en 2014 ses 25 ans d'existence (c'est la 13<sup>e</sup> édition). Les deux textes qui suivent décrivent les contributions qui leur ont valu cette distinction.*

### Les contributions de M. Hairer

Dominique Bakry

Les travaux de Martin Hairer portent sur de multiples aspects à la frontière entre les équations aux dérivées partielles non linéaires, les probabilités et l'analyse en dimension infinie. Ils concernent plus spécifiquement ce qu'on appelle les équations aux dérivées partielles stochastiques, mais aussi des domaines plus classiques comme la convergence à l'équilibre pour les bains de chaleur (équations d'évolutions non linéaires très dégénérées), [6], la mécanique statistique hors équilibre, les mouvements browniens fractionnaires [1], les problèmes d'homogénéisation, l'algorithmique.

---

<sup>1</sup> Voir à ce sujet la revue *Quadrature* ([www.quadrature.info](http://www.quadrature.info)).

<sup>2</sup> Comme l'auteur de ces lignes.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques, le cas linéaire, comme par exemple l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u + \xi_t$$

où  $\xi_t$  un terme de forçage aléatoire, en général un bruit blanc, peut s'étudier à l'aide des outils de l'analyse gaussienne en dimension infinie. Dès que l'on aborde les équations non linéaires, les questions deviennent beaucoup plus difficiles : les problèmes sont souvent mal posés, les solutions sont des distributions avec des régularités très faibles, il n'y a pas d'ellipticité locale, etc. Pour résoudre ces questions, M. Hairer a dû revisiter les outils classiques comme le calcul de Malliavin (c'est-à-dire le calcul des variations sur les espaces gaussiens de dimension infinie), la théorie des chemins rugueux (c'est-à-dire la résolution d'équations différentielles ordinaires dirigées par des signaux non dérivables) [4], entre autres.

Le modèle fini dimensionnel de l'équation de la chaleur avec forçage serait l'étude de l'équation différentielle stochastique  $dX_t = AX_t + dB_t$ , où  $A$  est un opérateur linéaire symétrique. On sait bien que ce type d'équation différentielle, associée aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck, a des solutions gaussiennes. On peut alors utiliser l'analyse gaussienne, particulièrement adaptée à la dimension infinie, pour étudier le comportement des lois de ces processus, et par conséquent les solutions de l'équation. Mais dès que l'on sort du domaine linéaire, ce type d'approche est complètement inopérant.

Un des premiers résultats importants de M. Hairer, en collaboration avec J. Mattingly, concerne l'équation de Navier-Stokes 2-d, [5, 7] qu'il étudie de façon plus simple en regardant l'équation scalaire sur la vortacité  $\nabla \wedge u$ . Les auteurs considèrent le problème périodique associé, et ajoutent un terme de forçage gaussien n'ayant qu'un nombre fini de modes en transformée de Fourier. La question de l'existence et surtout de l'unicité d'une mesure d'équilibre (l'ergodicité) devient assez compliquée, car on a alors affaire à un problème hypo-elliptique en dimension infinie, où un nombre fini de champs de vecteurs doivent engendrer un espace de dimension infinie. Le calcul de Malliavin (ou la théorie de Hörmander) est bien adapté pour ces problèmes hypo-elliptiques, mais clairement insuffisant dans ce cadre infini-dimensionnel. Il faut donc revisiter cette théorie de manière plus quantitative. Sur cette question, le principal résultat de ces auteurs est une description complète de la nature arithmétique du support des modes qui permettent d'obtenir l'ergodicité.

Une autre équation d'évolution non linéaire importante est l'équation KPZ, c'est-à-dire :  $\partial_t u = \partial_x^2 u + \lambda(\partial_x u)^2 - \infty + \xi$ , où  $\xi$  est un bruit blanc en espace et en temps, et  $\infty$  est une constante de renormalization qu'il s'agit de comprendre [2]. C'est une équation qui apparaît naturellement lorsqu'on étudie des interfaces aléatoires en mécanique statistique, qui intervient aussi dans les matrices aléatoires. Pour toute solution approchée par régularisation du bruit, on doit, pour faire converger la solution, retrancher à l'équation une quantité qui converge vers l'infini lorsque le paramètre de régularisation converge vers 0. Cette équation est une équation de Hamilton Jacobi avec viscosité et terme de forçage, et la transformation de Hopf-Cole, qui ramène ces équations à des équations linéaires, peut être utilisée. Mais l'irrégularité du bruit rend cette approche quasi impossible, et de plus cette technique est vraiment particulière à ce cas précis. C'est pourquoi M. Hairer utilise une version de la théorie des chemins rugueux développée par T. Lyons, en l'adaptant à

son contexte avec des chemins ayant une structure  $S^1$ , tout en développant le calcul sur des arbres binaires (qui reflètent le caractère quadratique de l'équation lorsqu'on implante une méthode de point fixe). Cela lui permet de décrire précisément le type de régularité des solutions (en terme d'espaces de Besov) lorsque le terme de forçage est une distribution de régularité précisément contrôlée.

Cela l'a amené à développer une ambitieuse « théorie des structures de régularité » [3], qui permet de remplacer les approximations polynomiales de fonctions par une approche formelle. Cette théorie prend en compte les réécritures des développements par passage d'un point à un autre (et c'est l'action de ce groupe de réécriture qui in fine produira les constantes de renormalisation), ainsi que la façon dont, dans un processus d'approximation, on sera amené à multiplier entre elles, des distributions de régularité données. Cela lui permet d'étudier d'autres types d'équations d'évolution non linéaires, comme l'équation PAM (Parabolic Anderson Model)  $\partial_t u = \Delta u + \xi u$ , ou l'équation d'évolution associée à la théorie  $P(\Phi^4)$  :  $\partial_t \Phi = \Delta \Phi - \Phi^3 + \xi$ .

Au total, les travaux de M. Hairer constituent un ensemble extrêmement profond d'avancées dans le domaine des équations d'évolution avec termes aléatoires ou très irréguliers, avec des résultats très précis concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, combiné avec le développement parallèle d'outils théoriques très généraux et puissants ouvrant la voie à de nombreuses applications.

## Références

- [1] Baudoin, F., Hairer, M., *A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion*, Probability Theory and Related Fields **139** (2007), n° 3-4, 373-395.
- [2] Hairer, M., *Solving the KPZ equation*, Annals of Math. **178** (2013), n° 2, pp. 559-664.
- [3] Hairer, M., *A theory of regularity structures*, arXiv :1303.5113.
- [4] Hairer, M., Maas, J., Weber, H., *Approximating rough stochastic PDEs*, Communication on Pure and Applied Math. **67** (5) (2014), 776-870.
- [5] Hairer, M., Mattingly, J. C., *Ergodic properties of highly degenerate 2d stochastic Navier-Stokes equations*, Comptes Rendus Mathématiques **339** (2004), n° 12, 879-882.
- [6] Hairer, M., Mattingly, J. C., *Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains*, Communication on Pure and Applied Math. **62** (2009), no 8, 999-1032.
- [7] Hairer, M., Mattingly, J. C., Pardoux, E., *Malliavin calculus for highly degenerate 2d stochastic Navier-Stokes equations*, Comptes Rendus Mathématiques **339** (2004), n° 11, 793-796.

## The contributions of C. De Lellis

Luigi Ambrosio

Camillo De Lellis made some of the most important achievements of the last years in the Calculus of Variations and in the analysis of Partial Differential Equations. His interests in these fields are multifarious, and show a broad and deep perspective on mathematics, one of the distinctive aspects of De Lellis' research.

One of the recurring themes in his work is the analysis of the singular behavior of solutions to variational problems and partial differential equations. In this note we briefly discuss two spectacular results in De Lellis' recent research (one for each of the fields mentioned above): namely, the ones concerning the Euler system of

partial differential equations of incompressible fluid dynamics, and the regularity of generalized minimal surfaces.

Euler's equations for incompressible fluids are very well studied in mathematical physics. Euler derived these equations 250 years ago in his investigations on the dynamics of ideal fluids, and since then this PDE represents a source of open problems and ideas in many different areas of mathematics (such as the partial differential equations, dynamical systems, harmonic analysis, etc.).

De Lellis has investigated the problem of the existence of "special" and "singular" weak solutions. Since the singularities cannot be ruled out in general, and sometimes have a physical meaning, one can consider solutions in the sense of distributions (i.e. integrating the equations against a test function and moving the derivatives on the test function). Earlier in a groundbreaking paper [16] Scheffer proved the first non-uniqueness result for weak solutions to the Euler equations. He proved the existence of a nontrivial weak solution which has compact support in space and time: i.e., there exists a fluid which starts at rest, after some time begins to move, and eventually stops flowing, without any action of external forces!

In collaboration with Laszlo Székelyhidi, De Lellis gave a new surprising proof of this peculiar phenomenon of non-uniqueness of the Euler equations [8], getting solutions with uniformly bounded velocity and linking the existence of these solutions to a suitable variant of Gromov's  $h$ -principle [12]. This principle pertains to various problems in geometry (the first instance of which is the isometric embedding problem considered by Nash [14]), and it was unexpected that it could have been applied to equations in physics (where the uniqueness of the evolution from given initial conditions is by tacit agreement expected – cf. Gromov's speech at the Balzan Prize [13]).

Rather than being the end of the story, this was only the starting point. In a series of papers in collaboration, still with Székelyhidi as coauthor, De Lellis proved new striking results on the non-uniqueness of weak solutions to Euler's system. In [9] it is shown that there are no reasonable criteria (according to all the previous tentative proposals) to select a unique "admissible" solution. A new surprising step is done in [10], where the authors prove the existence of continuous dissipative solutions (all the wild solutions constructed before were discontinuous). Finally, a further amazing achievement is contained in [11] (see also [2] for an improvement), where it is shown that compactly supported and Hölder continuous solutions can be built, with any exponent less than  $\frac{1}{5}$ . This is not a technical improvement, but is a substantial progress towards the understanding of the Euler equations and their connection to physics. Indeed, as was first pointed out by Onsager [15], these wild solutions have relevant connections to the theory of turbulence, and Onsager conjectured that solutions can be dissipative if and only if they are less than  $\frac{1}{3}$ -Hölder continuous in space (the necessary part of the conjecture has been solved by Eyink and Constantin, E and Titi). This series of results by Székelyhidi and De Lellis is perhaps one of the most significant of the last years in the theory of partial differential equations.

As for the second class of remarkable recent results by C. De Lellis, we mention his achievements in the analysis of singularities of minimizing currents. Minimal surfaces are a very classical area in the calculus of variations and in the geometric analysis. They have been studied for several centuries, and have revealed to be a

useful tool and a prototypical example in many other areas of mathematics, such as general relativity and differential geometry.

A fruitful and successful context for the study of minimal surfaces is the *Geometric Measure Theory*, a novel discipline founded in the 50's by the contributions of many distinguished mathematicians (see the monograph by H. Federer for a comprehensive introduction). Using the techniques in geometric measure theory it was indeed possible to find a general solution to the *Plateau problem* (that of finding a least area surface among those with a fixed boundary), already considered by Lagrange in the 18<sup>th</sup> century and first solved only around 1930 by J. Douglas and T. Rado (the former winning the first Fields medal for such achievement).

The study of the regularity of the generalized solutions to the Plateau problem, called *minimizing currents*, has constituted one of the most challenging problems in the field, and in this respect C. De Lellis has achieved very important results. It is a well-known fact that the qualitative behavior of such solutions changes drastically between the case of hypersurfaces, i.e. currents of codimension 1, and the case of higher codimension. Indeed a new, yet not completely understood phenomenon occurs in the latter case, namely the appearance of *branch points*. There are very few results in this regard, the most remarkable one being the monumental monograph by F. Almgren [1]. This paper, known nowadays as *Almgren's big regularity paper* (because of its almost one thousand pages), appeared in the early '80s but was published only posthumous, remaining mostly unexplored for 30 years, although it contains the most important result in the field (see also the recent interests in this regard, cf. for instance the work by Taubes [18]).

In a series of papers in collaboration with E. Spadaro [3]-[7], C. De Lellis revisits and extends the work of [1], giving a new and self-contained proof of the regularity of minimizing integral currents up to a singular set of codimension at least 2. In particular, he contributed to the non-parametric theory of multiple valued functions [3], found new intrinsic integrability properties [5], and succeeded in constructing a *center manifold* in [6], i.e. an average of the sheets of the current, which is perhaps the most difficult part of Almgren's program developed in his big regularity paper. These achievements shed light on many fundamental aspects of the regularity of minimizing currents, which were buried in Almgren's big regularity paper, opening the road for new future developments.

## References

- [1] Almgren, F., *Almgren's big regularity paper*. Volume 1 of World Scientific Monograph Series in Mathematics. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, (2000).
- [2] Buckmaster, T.; De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Transporting microstructure and dissipative Euler flows. Preprint (2013).
- [3] De Lellis, C.; Spadaro, E., Q-valued functions revisited. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 211(991):vi+79, (2011).
- [4] De Lellis, C.; Spadaro, E., Multiple valued functions and integral currents. To appear in *Ann. Scuola Norm. Sup.* (2014).
- [5] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents II: center manifold. Preprint (2013).
- [6] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents I: gradient  $L^p$  estimates. Preprint (2013).
- [7] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents III: blowup. Preprint (2013).

- [8] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. of Math. (2)* 170 (2009), n° 3, 1417-1436.
- [9] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 195 (2010), n° 1, 225-260.
- [10] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Dissipative continuous Euler flows. *Invent. Math.* 193 (2013), n° 2, 377-407.
- [11] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Dissipative Euler Flows and Onsager's Conjecture. To appear in *J. Eur. Math. Soc.* (2014).
- [12] Gromov, M., *Partial differential relations*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, 9. Springer-Verlag, Berlin, (1986). x+363 pp.
- [13] Gromov, M., Local and global in geometry, Balzan Prize (1999).
- [14] Nash, J.,  $C^1$  isometric imbeddings. *Ann. of Math. (2)* 60, (1954), 383-396.
- [15] Onsager, L., Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento (9)*, 6 Supplemento, 2(Convegno Internazionale di Meccanica Statistica) (1949), 279-287.
- [16] Scheffer, V., An inviscid flow with compact support in space-time. *J. Geom. Anal.* 3 (1993), n° 4, 343-401.
- [17] Shnirelman, A., On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 50 (1997), n° 12, 1261-1286.
- [18] Taubes, C., Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds. Edited by Richard Wentworth. *First International Press Lecture Series*, 2. International Press, Somerville, MA, (2000). vi+401 pp.

# CARNET

---

## Jacqueline Ferrand et son œuvre

(1918-2014)

Pierre Pansu

---

Née en 1918 à Alès (Gard), Jacqueline Ferrand est bachelière en 1934. En 1936, elle entre à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, où elle passe l'agrégation (masculine) en 1939. Elle prend immédiatement fonction d'agrégée préparatrice à l'École normale supérieure de Jeunes Filles. La directrice, Madame Cotton, convaincue que les filles devaient nourrir les mêmes ambitions intellectuelles que les garçons, comptait sur cette jeune mathématicienne d'exception pour amener l'enseignement des mathématiques à Sèvres au niveau de celui de la rue d'Ulm. Nous avons de nombreux témoignages de l'énergie avec laquelle Jacqueline Ferrand s'acquitte de cette tâche, dans les conditions matérielles difficiles de l'époque. Avec la même énergie elle se lance dans la recherche, sous la direction lointaine d'Arnaud Denjoy. Elle soutient le 12 juin 1942 une thèse remarquée, qui lui vaudra d'être distinguée par l'Institut (prix Girbal Barral en 1943) et la Fondation Peccot en 1946. Sa carrière universitaire sera ensuite très rapide : chargée de cours à Bordeaux en 1943, elle est professeur à Caen en 1945, à Lille en 1948 puis à Paris, de 1956 à sa retraite en 1984.

### Premiers travaux

La thèse de Jacqueline Ferrand porte sur les valeurs au bord de la représentation conforme d'un domaine plan. Depuis Riemann, Koebe et Poincaré, on sait que tout domaine simplement connexe  $D'$  du plan admet une représentation conforme  $f$  sur le disque  $D$ , i.e., une carte géographique dans laquelle les angles sont conservés. On peut voir  $f$  comme une fonction analytique d'une variable définie sur le disque, qui est une bijection du disque sur  $D'$ . La question se pose de savoir si  $f$  admet une limite en chaque point du bord. La réponse est oui si le bord de  $D'$  est suffisamment régulier, et le problème devient difficile si le bord est irrégulier.

En 1913, C. Carathéodory a fait un pas décisif en introduisant la notion de bout premier. Carathéodory considère des coupures emboîtées de  $D'$ . Ce sont des suites de sous-domaines emboîtés délimités par des arcs simples reliant deux points du bord, et dont la longueur tend vers 0. Deux suites de coupures sont dites équivalentes si chacune peut être emboîtée dans l'autre. Un bout premier est une classe d'équivalence de coupures emboîtées. Cette définition, qui fait intervenir des longueurs, n'est pas évidemment invariante par transformation conforme. Carathéodory donne une preuve de l'invariance qui repose sur des propriétés fines des fonctions holomorphes.

Dans sa thèse, Jacqueline Ferrand donne une nouvelle preuve de l'invariance conforme des bouts premiers, qui met en évidence le rôle joué par l'aire balayée par la transformation conforme  $f$  dans le contrôle de la longueur de l'image de presque toute courbe par  $f$ . D'autre part, le fait que  $f$  est ouverte permet de passer de presque toute courbe à toute courbe et donc de majorer le module de continuité de  $f$ , [2].

Les estimations précises obtenues conduisent à des conditions suffisantes sur le domaine  $D'$  pour que la représentation conforme ait des limites le long de courbes contenues dans le disque et ayant un contact d'ordre élevé avec le bord du disque. Sous des hypothèses plus fortes, elle montre l'existence de la "dérivée angulaire"

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - a}{z - a}.$$

en un point  $a$  du bord, [1].

Pour une bijection conforme (ou holomorphe), l'aire de l'image coïncide avec l'intégrale de Dirichlet

$$\int_D |f'(z)|^2 dz.$$

Pour une fonction harmonique  $u$  (partie réelle d'une fonction holomorphe  $f$ ), l'intégrale de Dirichlet remplace l'aire de  $f$  et le principe du maximum remplace le fait que  $f$  est ouverte. Les méthodes développées pour les représentations conformes s'étendent donc à l'étude au bord des fonctions harmoniques, et aussi des fonctions surharmoniques, [4].

### Fonctions préholomorphes

L'article [3] développe une discrétisation de la notion de fonction holomorphe. Il s'agit, étant donné  $h > 0$ , de remplacer le plan  $\mathbb{C}$  (ou un domaine borné  $D'$  de  $\mathbb{C}$ ) par le sous-ensemble fini  $Z_h$  des points de  $D'$  dont les parties réelle et imaginaire sont des multiples entiers de  $h$ . Classiquement, on décrète qu'une fonction sur  $Z_h$  est harmonique (J. Ferrand parle de fonctions *préharmoniques*) si pour tout point  $z$  dans  $Z_h$ ,

$$4u(z) = u(z + h) + u(z - h) + u(z + ih) + u(z - ih).$$

Il est moins classique de discrétiser l'équation des fonctions holomorphes. Jacqueline Ferrand appelle fonction *préholomorphe* une fonction  $f$  à valeurs complexes sur  $Z_h$  qui vérifie pour tout  $z$  de  $Z_h$ ,

$$f(z + ih) - f(z + h) = i(f(z + h + ih) - f(z)).$$

La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction préholomorphe sont des fonctions préharmoniques sur les deux sous-réseaux

$$Z'_h = \{z \in Z_h; (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))/h \text{ est pair}\}$$

et

$$Z''_h = \{z \in Z_h; (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z))/h \text{ est impair}\}.$$

Inversement, toute fonction préharmonique sur  $Z_h$  est la partie réelle d'une fonction préholomorphe sur  $Z_h$ . J. Ferrand montre que lorsque le pas  $h$  tend vers 0, les fonctions préholomorphes sur  $Z_h$  convergent vers des fonctions holomorphes sur le domaine  $D'$ . Les estimées a priori de module de continuité le long du bord jouent à nouveau un rôle essentiel.

Elle en déduit une preuve très simple du théorème de représentation conforme des domaines non simplement connexes (voir [5] chapitre V). *Soit  $D'$  un domaine plan dont le bord possède au moins une composante connexe isolée non réduite à un point. Alors il existe une représentation conforme essentiellement unique de  $D'$  sur un rectangle privé de segments parallèles à l'un de ses côtés.*

La notion de fonction préholomorphe a donné lieu à de nombreux développements, Ch. Mercat (2007).

### Actions de groupes

À l'occasion d'un séjour à l'Institute for Advanced Study de Princeton, Jacqueline Ferrand se demande quand une action d'une algèbre de Lie sur une variété s'intègre en une action de groupe. Il en sort une caractérisation d'analyse fonctionnelle de la complétude d'un champ de vecteurs, [6].

Soit  $\xi$  un champ de vecteurs localement Lipschitzien, à divergence nulle, sur une variété  $M$  munie d'un élément de volume  $\omega$ . Alors  $\xi$  est complet si et seulement si l'opérateur différentiel  $i\xi$  s'étend en un opérateur autoadjoint de  $L^2(\omega)$ . Supposons que  $\xi$  engendre un groupe à un paramètre d'isométries de  $M$ . Ce groupe est périodique si et seulement si l'opérateur  $i\xi$  est d'image fermée.

Ce résultat particulièrement élégant n'a pas reçu beaucoup d'écho.

### Ouvrages d'enseignement

La production mathématique de Jacqueline Ferrand connaît une baisse de régime entre 1958 et 1968. À cette époque, Jacqueline Ferrand est mère de quatre jeunes enfants (nés en 1949, 1951, 1952 et 1958). Elle s'investit dans l'enseignement à l'université, rédigeant une série de cours polycopiés qui, à force de travail, deviennent des livres. Un cours de géométrie différentielle (second cycle) paraît chez Masson en 1963. Ses cours de premier cycle paraissent chez Armand Colin en 1964, Dunod en 1967. Dunod publiera au cours des années 1970 la série d'ouvrages avec Jean-Marie Arnaudiès qui couvre l'ensemble du programme des premiers cycles universitaires (cours et exercices), et qui est encore utilisée dans les classes préparatoires.

### Géométrie riemannienne

C'est à l'issue de cette période que Jacqueline Ferrand obtient ses résultats les plus connus, qui lui vaudront de donner une conférence invitée au Congrès International des Mathématiciens à Vancouver en 1974. Il s'agit de la résolution d'un problème de géométrie riemannienne posé par André Lichnérowicz en 1964, et sur lequel de nombreuses réponses partielles avaient été publiées.

Une transformation conforme d'un ouvert de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme dont la différentielle préserve les angles. Cette notion se généralise aux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  munis d'une métrique riemannienne, i.e, d'un produit scalaire

dépendant du point, aux sous-variétés de l'espace euclidien, puis aux variétés riemanniennes abstraites. Le prototype d'une variété riemannienne compacte est la sphère

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

La projection stéréographique réalise un difféomorphisme conforme de la sphère privée d'un point sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Par transport, les similitudes de  $\mathbb{R}^n$  deviennent des difféomorphismes conformes de la sphère. On voit ainsi que le groupe des transformations conformes de la sphère est non compact.

**Théorème 1.** *Si une variété riemannienne compacte  $M$  a un groupe de transformations conformes non compact, alors  $M$  est conforme à la sphère, [7].*

Il s'agit d'estimer *a priori* le module de continuité d'une transformation conforme, en dimension quelconque cette fois. Utilisons l'invariant conforme de 4 points introduit dans [8]. La définition que nous donnons dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  s'étend immédiatement aux variétés riemanniennes.

**Définition 2.** *Soient  $F_0, F_1$  deux compacts connexes disjoints de  $\mathbb{R}^n$ . La capacité  $\text{cap}(F_0, F_1)$  est la borne inférieure des intégrales  $\int |du|^n$  pour toutes les fonctions lisses  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$  telles que  $u = 0$  sur  $F_0$  et  $u = 1$  sur  $F_1$ .*

Soient  $x, y, z, t$  quatre points de  $\mathbb{R}^n$ . L'invariant de Ferrand  $j(x, y, z, t)$  est la borne inférieure des capacités des couples  $(F_0, F_1)$  de compacts connexes tels que  $F_0$  contient  $x$  et  $z$  et  $F_1$  contient  $y$  et  $t$ .

En utilisant une estimation *a priori* du module de continuité des fonctions  $u$  qui minimisent  $\int |du|^n$  (une généralisation non linéaire et  $n$ -dimensionnelle de [2]), J. Ferrand montre que cette borne inférieure est non nulle. En fait (voir [11], complété par [13]), à  $z$  et  $t$  fixés,

$$d(x, y) = j(x, y, z, t)^{1/(1-n)}$$

est une distance qui définit la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{z, t\}$  et qui tend vers l'infini si à  $y$  fixé  $x$  tend vers  $z$ .

Pour donner une première idée de l'utilisation faite de l'invariant  $j$ , montrons que, dans une variété riemannienne quelconque, le groupe  $G$  des transformations conformes qui fixent 3 points  $y, z$  et  $t$  est compact. En effet,  $G$  agit par isométries pour la métrique  $d$  et fixe le point  $y$ , donc toute suite d'éléments de  $G$  a une sous-suite qui converge  $C^0$  vers un homéomorphisme. Il reste à montrer que la limite est un difféomorphisme conforme, et que la convergence est  $C^\infty$ . C'est un théorème de régularité elliptique non linéaire, dû à F. Gehring et Yu. Reshetnjak dans le cas euclidien, et étendu par J. Ferrand au cas des variétés riemanniennes, [10].

On peut tirer davantage de l'invariant  $j$ . Si une suite  $f_i$  de transformations conformes diverge, alors pour toutes suites  $x_i, z_i, t_i$ , si  $f_i(z_i)$  converge vers  $z$  et  $f_i(t_i)$  converge vers  $t$  distinct de  $z$ , alors  $f_i(x_i)$  converge vers  $z$  ou vers  $t$ . Cela signifie qu'il y a au plus deux limites possibles  $z$  et  $t$ . Si  $z$  est distinct de  $t$ , alors, quitte à extraire,  $f_i$  envoie le complémentaire de tout voisinage de  $z$  dans des voisinages arbitrairement petits de  $t$ . Cela entraîne que la variété  $M$  est simplement connexe et sa métrique conformément plate, donc  $M$  est conforme à la sphère.

## Transformations quasiconformes

Comment J. Ferrand a-t-elle découvert son invariant de 4 points ?

L'idée d'utiliser une métrique naturellement invariante sous les transformations conformes remonte à A. Lichnérowicz en 1964. Lichnérowicz utilise les métriques à courbure scalaire constante. Dans les années 60, cette approche était limitée par le fait que le problème de Yamabe, existence et/ou unicité d'une métrique à courbure scalaire constante conforme à une métrique riemannienne donnée, n'était que partiellement résolu. Le résultat essentiel obtenu depuis est un pendant analytique du résultat de [7], dû à R. Schoen (consulter sa contribution au Jubilee do Carmo, 1988). Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte non conforme à la sphère standard. Alors l'ensemble des métriques conformes à  $g$ , à courbure scalaire constante, est compact.

L'idée de métrique naturellement invariante a été développée dans la catégorie holomorphe par S. Kobayashi (voir son livre de 1970), avec un grand succès. S'il est vraisemblable que [8] ait été influencé par les travaux de S. Kobayashi, la construction de ce dernier diffère essentiellement de celle de J. Ferrand. La transcription exacte de la définition de la métrique de Kobayashi à la catégorie conforme (nécessairement limitée aux variétés conformément plates) a été développée par R. Kulkarni et U. Pinkall en 1994.

Il faut plutôt rechercher l'inspiration de J. Ferrand dans la théorie des transformations quasiconformes inaugurée par H. Grötsch en 1928. Voici la définition que donne L. Ahlfors en 1930. Un *quadrilatère* est un domaine plan bordé par une courbe de Jordan portant 4 points marqués  $x, z, y, t$ . Un tel domaine admet une représentation conforme sur un rectangle qui envoie les points marqués sur les sommets. Ce rectangle est unique à similitude près. Le rapport de deux côtés consécutifs est un invariant conforme du quadrilatère donné, appelé *module*. Un homéomorphisme  $f$  entre domaines plans est dit  $K$ -quasiconforme si pour tout quadrilatère  $Q$ ,

$$K^{-1} \text{module}(Q) \leq \text{module}(f(Q)) \leq K \text{module}(Q).$$

Noter que le module d'un rectangle est exactement la moitié de la capacité de deux côtés opposés. En dimension 2, la définition de J. Ferrand est donc très proche de l'idée de L. Ahlfors.

Un homéomorphisme entre domaines plans est quasiconforme si et seulement si il envoie les petites boules sur des domaines d'excentricité bornée, consulter à ce sujet le livre de J. Väisälä (1971). Cette notion garde un sens sur un espace métrique quelconque. M. Gromov, à la suite de G.D. Mostow et G.A. Margulis, a mis en évidence le rôle que jouent les transformations quasiconformes en théorie des groupes : le bord à l'infini d'un groupe hyperbolique possède une structure quasiconforme. Ceci motive des travaux dus à J. Heinonen, P. Koskela, A. Koranyi et M. Reimann (1995), où on étudie la régularité de transformations quasiconformes sur des espaces métriques de plus en plus généraux. Le point essentiel dans ces travaux reste l'estimation de l'invariant de Ferrand. Dans une certaine mesure, la notion d'espace de Loewner, dégagée par J. Heinonen, caractérise les espaces dont l'invariant de Ferrand est non trivial. L'invariant de Ferrand joue un rôle crucial dans les travaux de M. Bourdon et H. Pajot (2000) qui établissent la rigidité quasi isométrique de certains immeubles hyperboliques, et dans ceux de M. Bonk et

B. Kleiner (2002) qui donnent une caractérisation de la sphère standard à quasi-symétrie près.

M. Gromov a soulevé le problème de savoir ce qu'il restait de la théorie quasi-conforme en dimension infinie. Cela motive la recherche d'estimations de l'invariant de Ferrand indépendantes de la dimension, voir [11].

L'invariant de Ferrand exploite l'invariance conforme de l'intégrale  $\int |du|^n$ . En un sens qu'on va préciser, ces intégrales déterminent entièrement la structure conforme. À la suite de H. Royden, J. Ferrand attache une famille d'algèbres de Banach à une variété riemannienne  $M$ . Étant donné  $p > 1$ , notons  $A_p(M)$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $M$  dont les dérivées partielles au sens des distributions sont des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable.  $A_p(M)$  est une algèbre de Banach pour la norme  $\|u\|_\infty + \|du\|_p$ .

Dans [9], J. Ferrand montre que, si  $p = n$ , tout isomorphisme  $A_n(M) \rightarrow A_n(N)$  est induit par une transformation quasiconforme  $M \rightarrow N$ . En revanche, si  $p \neq n$ , tout isomorphisme  $A_p(M) \rightarrow A_p(N)$  est induit par un homéomorphisme bilipschitzien  $M \rightarrow N$ . V. Goldstein et M. Rubin (1995) ont un résultat qui va dans le même sens. M. Bourdon (2007) a étendu ces idées aux bords d'espaces métriques hyperboliques.

J. Ferrand va plus loin. Elle caractérise les applications  $M \rightarrow N$  qui envoient  $A_p(N)$  dans  $A_p(M)$ , pour  $p > n$ . Le cas où  $p < n$  a été abordé par V. Goldstein, L. Gurov et A. Romanov (1995).

### Structures géométriques de type fini

Le problème de Lichnérowicz a une généralisation aux variétés non compactes. On dit qu'un groupe  $G$  de transformations conformes d'une variété riemannienne  $(M, g)$  est *inessentiel* s'il préserve une métrique riemannienne  $g'$  conforme à  $g$  (i.e. proportionnelle à  $g$  en chaque point). La question devient : montrer qu'une variété riemannienne non compacte dont le groupe conforme est essentiel est conforme à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . D.V. Alekseevski en a publié une solution dès 1972. C'est seulement en 1992 que R. Zimmer et K. Gutschera ont trouvé une faille importante dans la preuve d'Alekseevski.

Voici le contexte qui a amené R. Zimmer à étudier le problème de Lichnérowicz. Dans son adresse au congrès de Berkeley, R. Zimmer s'intéresse aux actions de groupes non compacts sur des variétés compactes, du point de vue des systèmes dynamiques. Si toute variété admet une action ergodique de  $\mathbb{R}$ , il semble que seules des variétés compactes très spéciales admettent une action ergodique d'un groupe de Lie semi-simple (consulter à ce propos l'adresse de F. Labourie au congrès de Berlin). Ces groupes portent en eux-même une géométrie (voir le programme d'Erlangen de F. Klein) qu'ils transportent sur les variétés sur lesquelles ils agissent, ce qui restreint les possibilités de structures géométriques invariantes.

Appelons *structure géométrique d'ordre  $r$*  sur une variété  $M$  la donnée d'une réduction du fibré des repères d'ordre  $r$  à un sous-groupe algébrique du groupe  $Gl_n(r)$  des  $r$ -jets de difféomorphismes fixant l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ . Une structure géométrique est *de type fini* si tout automorphisme est déterminé par son jet d'ordre fini. Par exemple, une métrique (pseudo)-riemannienne, une structure conforme, projective, est une structure de type fini. Une structure symplectique ou complexe ne l'est pas.

Un problème passionnant et actuel est l'étude des variétés compactes munies de structures géométriques de type fini qui admettent un groupe non compact d'automorphismes. Un pas important a été accompli par M. Gromov en 1988. Il montre que si le groupe d'automorphismes a une orbite dense, alors celle-ci est ouverte. Les objets recherchés sont donc homogènes "presque partout". Il en résulte par exemple que le groupe d'isométries d'une variété compacte munie d'une métrique lorentzienne analytique réelle est toujours compact (D'Ambra 1988). Pour les structures conformes, le problème est entièrement résolu par [7]. Ch. Francès et C. Tarquini ont obtenu des généralisations de ce beau résultat.

L'assertion d'Alekseevski qui a attiré l'attention de R. Zimmer est la suivante. Si  $G$  est un groupe fermé d'automorphismes d'une variété  $M$  munie d'une structure géométrique de type fini, et si les stabilisateurs de tous les points sont compacts, alors  $G$  agit proprement sur  $M$ . Dans cette généralité, l'énoncé est faux. Dans le cas particulier d'une structure conforme, il est équivalent à la conjecture de Lichnérowicz généralisée, qui a été résolue finalement par Jacqueline Ferrand, [12], ainsi que sa version quasiconforme, [14]. La solution utilise un invariant de 3 points, obtenu à partir de l'invariant de 4 points en faisant tendre un point vers l'infini. D'autres invariants obtenus par passage à la limite sont introduits dans [15]. Après ce dernier texte, complété par un survol de l'histoire de la conjecture de Lichnérowicz, Jacqueline Ferrand a délibérément posé sa plume mathématique (elle avait 80 ans).

### Conclusion

Les travaux de Jacqueline Ferrand ont eu une influence sensible dans plusieurs branches des mathématiques. Pourtant, ils sont peu connus en France. Elle n'a pas cherché à fonder une école. Comme elle l'a dit avec modestie, elle a hésité à entraîner des jeunes sur des pistes qu'elle jugeait insuffisamment prometteuses. Jacqueline Ferrand a mené quelques collaborations à l'étranger, notamment en Finlande où elle jouit d'une grande considération. Toutefois, son itinéraire intellectuel est principalement solitaire. La valeur de ses travaux n'a été pleinement reconnue que lorsque l'actualité mathématique l'a rejointe, ce qui s'est produit en 1942 au moment de sa thèse, en 1969 avec le problème de Lichnérowicz et à nouveau en 1996. L'énergie qu'elle a mise, à 80 ans, à démontrer le théorème qui répond à la question de Lichnérowicz, force l'admiration. Jacqueline Ferrand est décédée le 26 avril 2014 à Sceaux.

### Sélection de publications de Jacqueline Ferrand

- [1] Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **59**, 43–106 (1942).
- [2] Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. Math. de France **70**, 143–174 (1942).
- [3] Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes. Bull. Sci. Math. **68**, 152–180 (1944).
- [4] Étude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace. Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **66**, 125–158 (1949).

- [5] Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée. Cahiers Scientifiques, Fasc. **12**, Gauthier-Villars, Paris (1955).
- [6] Application des méthodes de Hilbert à l'étude des transformations infinitésimales d'une variété différentiable. Bull. Soc. Math. de France **86**, 1–26 (1942).
- [7] Transformations conformes et quasiconformes des variétés riemanniennes compactes. Mém. Acad. Royale Belgique **39**, 1–44 (1971).
- [8] Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes. J. Differen. Geom. **8**, 487–510 (1973).
- [9] Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions. Duke Math. J. **40**, 163–186 (1973).
- [10] Geometrical interpretation of scalar curvature and regularity of conformal homeomorphisms. P. 91–105 in "Differential Geometry and Relativity", M. Cahen and M. Flato eds., D. Reidel, Dordrecht (1976).
- [11] avec G. Martin and M. Vuorinen, Lipschitz conditions in conformally invariant metrics. J. d'Analyse Math. **156**, 187–210 (1991).
- [12] The action of conformal transformations on Riemannian manifolds. Math. Ann. **304**, 277–291 (1996).
- [13] Conformal capacities and extremal metrics. Pacific. J. Math. **172**, 89–97 (1996).
- [14] Convergence and degeneracy of quasiconformal maps of Riemannian manifolds. J. Analyse Math. **69**, 1–24 (1996).
- [15] Generalized condensers and conformal properties of Riemannian manifolds with at least two ends, pages 27–46, précédé de Histoire de la réductibilité du groupe conforme des variétés riemanniennes (1964–1994), pages 9–25. Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. **17**, Année 1998–1999, Sémin. Théor. Spectr. Géom., 17, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères (1999).

## Jean-Louis Ovaert

(1934-2014)

---

*Nous avons appris par par le réseau des IREM<sup>1</sup> et Jean-Pierre Ferrier le décès de Jean-Louis Ovaert le samedi 7 Juin à Marseille, à l'âge de 80 ans. Pour beaucoup de lecteurs de la Gazette, Jean-Louis Ovaert est surtout l'auteur de nombreux livres qui servent encore de référence tant dans les classes préparatoires que pour l'agrégation dont beaucoup ont été écrits avec Lucien Chambadal. D'autre se souviendront que ce fut un acteur important dans les années 70-90 dans la réforme des programmes de maths des lycées.*

*Nous citons ci-dessous des extraits de messages qui nous sont parvenus.*

Evelyne Barbin (responsable de la Commission inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques) :

« Jean-Louis Ovaert a créé, avec Christian Houzel, la Commission inter-IREM (CII) Épistémologie et histoire des mathématiques en mai 1975. À cette époque, ses travaux portaient sur l'histoire et l'épistémologie en analyse. En collaboration avec Christian Houzel, Jean-Jacques Sansuc et Pierre Raymond il a publié en 1976 l'ouvrage "Philosophie et calcul de l'infini". En compagnie de Daniel Reisz, il a animé par ses réflexions et pendant plusieurs années la Commission inter-IREM Analyse, et leurs idées ont eu un rôle déterminant dans les modifications des programmes de lycée après la réforme des mathématiques modernes. En 1981 et en 1983, il a publié avec Jean-Luc Verley, sous le nom de Leonhard Epistemon, deux manuels nourris de leurs connaissances historiques. Il a impulsé des conceptions qui ont marqué et marquent encore les travaux de la CII : une lecture épistémologique de l'histoire, le recours à la lecture des textes anciens, la convivialité gourmande, la jubilation intellectuelle. »

Michèle Artigue (présidente du comité scientifique des IREM) :

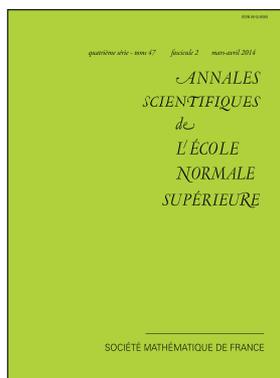
« Ses ouvrages avec Jean-Luc Verley et la publication inter-IREM qu'il avait piloté avec Daniel Reisz sur l'enseignement de l'analyse m'ont profondément marquée. Avec lui, c'est un de ces mathématiciens qui ont constitué cette culture unique qui est celle des IREM qui disparaît, cette culture que nous essayons les uns et les autres de préserver et de développer, malgré les difficultés rencontrées. »

Jean-Pierre Raoult (ex-président du comité scientifique des IREM) :

« J'ai connu Jean-Louis dans ses multiples métiers (enseignant en université, professeur de classes prépas, inspecteur général). Comme tant d'autres, j'étais impressionné par sa haute capacité en mathématiques, sa passion et son talent pour les faire connaître et son sens politique aiguisé pour les promouvoir au travers de ses fonctions administratives. Tout ceci accompagné d'une extrême gentillesse et d'une grande attention portée à autrui. »

---

<sup>1</sup> Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.



## Annales Scientifiques de l'ÉNS Dernières parutions

### Volume 47, fascicule 1 (2014)

- J. AYOUB - La réalisation étale et les opérations de Grothendieck.  
 B. COLLINS, C. MALE - The strong asymptotic freeness of Haar and deterministic matrices.  
 T. BARNET-LAMB, T. GEE, D. GERAGHTY, R. TAYLOR - Local-global compatibility for  $l=p$ , II  
 O. GUES, G. MÉTIVIER, M. WILLIAMS, K. ZUMBRUN - Viscous boundary layers in hyperbolic-parabolic systems with Neumann boundary conditions.

### Volume 47, fascicule 2 (2014)

- Y. MINSKY, B. WEISS - Cohomology classes represented by measured foliations, and Mahler's question for interval exchanges.  
 M. LIEBLICH, D. MAULIK, A. SNOWDEN - Finiteness of  $K3$  surfaces and the Tate conjectures.  
 D. CHEN, M. MÖLLER - Quadratic differentials in low genus: exceptional and non-varying strata.  
 S. DYATLOV, C. GUILLARMOU - Microlocal limits of plane waves and Eisenstein functions.  
 Y. ANDRÉ - Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties: a new differential Galois correspondence.

prix public\* : 77 € (frais de port non compris)

Revue disponible aussi par abonnement :

prix public : [smf.emath.fr/tarifs-abonnements-prix-public-2014](http://smf.emath.fr/tarifs-abonnements-prix-public-2014)



Institut Henri Poincaré  
 11 rue Pierre et Marie Curie  
 F-75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# INFORMATIONS

---

## Les mathématiques au ministère de la recherche

Mark Asch<sup>1</sup>

---

*La Gazette a trouvé utile d'interroger<sup>2</sup> Mark Asch (professeur au LAMFA-UMR 7352, université d'Amiens) sur ses fonctions au ministère. Il semble en effet que beaucoup de collègues ne savent plus très bien comment les mathématiques sont représentées au sein du ministère de l'Éducation nationale. Mark a bien voulu répondre à nos questions. Nous avons présenté trois grands thèmes pour nos questions mais le thème relatif à l'enseignement secondaire, qui ne fait pas partie directement des attributions de M. Asch, ne sera pas abordé dans ce numéro.*

### Qui fait quoi ?

*Quel est ton rôle actuel au ministère ? Change-t-il avec la réorganisation ministérielle, à la direction générale pour la recherche et l'innovation (DGRI) ?*

Le rôle du « chargé de mission » pour les mathématiques est multiple. Étant placé dans le « service de la stratégie » de la DGRI, il/elle participe à l'élaboration de la stratégie nationale de la recherche en collaboration étroite avec les alliances (principalement l'alliance ALLISTENE – voir [www.allistene.fr](http://www.allistene.fr)) et avec l'ANR. La deuxième charge est de représenter le ministère (désormais « Éducation Nationale Enseignement Supérieur et Recherche » = MENESR) dans les CA des différentes instances où le ministère est tutelle. Il s'agit ici des quatre institutions du labex CARMIN : IHÉS, IHP, CIMPA et CIRM. Le chargé de mission rédige également un avis scientifique sur l'activité de ces institutions avant le versement de leur dotation annuelle. Peut-être le plus important, est le rôle de liaison et de coordination entre la communauté mathématique et les deux directions du ministère : DGRI (recherche) et DGESIP (enseignement supérieur).

Sur cette question, je voudrais faire deux remarques.

– Ces rôles ne sont aucunement impactés par les remaniements au niveau du cabinet du ministre.

– Je cumule deux missions : celle des mathématiques ainsi que celle des « infrastructures numériques » dont le calcul haute performance, les réseaux (RENATER), le cloud (France Grilles) et les données (datacenters).

---

<sup>1</sup> [mark.asch@recherche.gouv.fr](mailto:mark.asch@recherche.gouv.fr)

<sup>2</sup> Les questions ont été préparées par le comité de rédaction de la *Gazette* après consultation de M. Peigné.

*Combien de chargés de missions et responsables au ministère sur les mathématiques et sur quels périmètres ? Quelle articulation entre eux ?*

Pour les mathématiques il n'y a qu'un seul chargé de mission<sup>3</sup> au sein de la direction de la recherche. Par contre, du côté de l'Éducation nationale (EN), il y a une section Mathématiques de l'IGEN (inspection générale de l'éducation nationale) où Charles Torossian siège. Mon avis personnel est qu'il manque un poste de chargé de mission pour les mathématiques du côté de l'enseignement supérieur.

*Sur quels dossiers intervient-tu plus spécifiquement ? Quels arbitrages précis es-tu amené à suggérer ?*

En dehors de dossiers de la stratégie, le chargé de mission est souvent appelé pour préparer des « éléments de langage » lorsque le directeur général ou le secrétaire d'état doivent faire un discours qui concerne ou qui touche aux mathématiques. Ceci est potentiellement très stratégique, par exemple lorsque les ministres de la recherche du G8 (ou du G7) se rencontrent, ou lorsqu'il s'agit de présentations devant la Commission Européenne. Le chargé de mission n'arbitre pas directement, il/elle propose un avis scientifique argumenté à ses supérieurs hiérarchiques et ce sont eux qui procèdent à des arbitrages. Une autre tâche est l'expertise scientifique des projets de recherche déposés dans les appels aux projets de la DGCIS (Direction Générale de la Compétitivité, de l'Industrie et des Services) du MRP (Ministère de Redressement Productif). Ces projets associent une unité de recherche à une entreprise et parmi les thèmes on trouve la cryptographie et le « big data » où des mathématiciens peuvent être partenaires. Enfin, il y a l'évaluation (toujours favorable) des demandes de subventions pour des colloques. Mais cette activité est réduite suite à une forte baisse de 80% de l'enveloppe budgétaire disponible.

*Quelle latitude as-tu sur les questions de la recherche et de la défense ou du développement des « grands outils » comme l'IHP, le CIRM, l'IHÉS... ?*

Le chargé de mission intervient directement auprès de la Mission Infrastructures de Recherche de la DGRI en tant qu'expert et conseil. Il/elle peut provoquer des réunions entre nos acteurs et la Mission – chose déjà faite pour le CIRM, l'IHÉS, AMIES et pour CARMIN en général. Il/elle participe à la préparation et l'élaboration de la feuille de route des grandes infrastructures de recherche<sup>4</sup>.

*Comment au niveau général (resp. au niveau des mathématiques), le travail s'articule-t-il avec celui du CNRS (resp. de l'INSMI) ?*

Il y a un lien étroit, une cohérence complète et une consultation mensuelle (parfois plus...) avec Christoph Sorger de l'INSMI. Le nouveau DGDS (directeur

<sup>3</sup> La situation est identique pour les autres disciplines fondamentales (physique, chimie, ...)

<sup>4</sup> <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid23165/une-nouvelle-feuille-de-route-pour-les-grandes-infrastructures-de-recherche-europeennes.html>

général délégué à la science) du CNRS, Philippe Baptiste, est très sensible aux mathématiques – il a fait une thèse en informatique et ses recherches portent sur la théorie de l'ordonnancement, l'optimisation combinatoire et la recherche opérationnelle.

### **Les universités et la place des mathématiques**

*La communauté souhaiterait avoir une idée des prévisions à court terme dans les différents secteurs : administration–recherche–formation, ainsi qu'un bilan des réformes mises en place depuis quelques années.*

*Où en est la réforme des universités LRU ? Toutes les universités sont-elles sur le même pied actuellement ? Que reste-t-il des crédits publics ? En quoi les universités sont-elles autonomes ?*

Pour ce qui concerne les réformes en cours, je reprends les termes du discours que j'ai tenu lors du dernier Conseil d'Administration de l'IHÉS où il était question d'autoriser la signature par l'institut de l'approbation des statuts de l'université Paris-Saclay : le paysage de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (ESR) en France subit actuellement un remodelage profond – il est nécessaire de participer à cette métamorphose pour ne pas rester sur les bancs de touche. Aucune réforme n'est gravée dans le marbre (ni parfaite...) et nous jugerons celle-ci par ses résultats. Il est clair que c'est une réforme complexe et que la question des budgets sera primordiale. Sachez que le sujet est traité au plus haut niveau (directeur général et cabinet) et que les « services scientifiques » sont assez peu impliqués étant donné le caractère sensible du sujet. Pour ce qui concerne la LRU et son avancement, le ministère propose une documentation assez complète sur son site<sup>5</sup>.

*Où en est la loi sur le regroupement des universités et son application (COMUE) ?*

Les COMUEs sont quasiment constituées avec toutes les universités, écoles et régions désormais « casées ». Par contre, la ministre a insisté sur l'aspect « non-contraignant et non-coercitif » de la structure.

*Les choix politiques en faveur de la recherche ne manquent pas d'inquiéter.*

*(1) Le nombre de postes dans l'enseignement supérieur a subi une érosion cette année. Y a-t-il une vision globale du nombre de postes ? en particulier dans le domaine des mathématiques ?*

*(2) Comment sont attribuées les ANR-LABEX etc. ? Y a-t-il des orientations privilégiées ? Existe-t-il un bilan des précédentes dotations ?*

Au sujet des choix politiques en faveur de la recherche, on doit admettre (pour l'instant) la pression de la Commission Européenne (CE) sur les aspects « innovation et transfert » et « grands défis sociétaux » comme base pour la définition d'une politique de recherche – voir les programmes « Horizon 2020 ». La CE possède en

<sup>5</sup> <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/pid24841/1-autonomie-des-universites-est-quoi.html>

plus (et heureusement) l'ERC (European Research Council), actuellement présidé par Jean-Pierre Bourguignon, qui a pour mission de financer de la recherche fondamentale avec un budget très conséquent de l'ordre de 13 milliards d'euros. L'ANR n'a ni la même structure pour la recherche fondamentale, ni le même budget... Cependant, une recherche sur le site de l'ANR<sup>6</sup>, rubrique « projets financés », avec le mot clef « mathématique » produit 509 résultats!

Les Labex sont eux financés par le PIA<sup>7</sup> (programme d'investissements d'avenir). Un nouvel appel « ISITE », qui doit compléter les IDEX, est prévu pour la fin de l'année 2014.

Je n'ai pas d'information sur le nombre de postes.

## Session 2014 du CNU, section 25

Rapport rédigé par le bureau de la section

---

### Qualification aux fonctions de maître de conférences

#### Les résultats

Le nombre de candidats inscrits était de 340 (78 femmes). Le nombre de dossiers parvenus aux rapporteurs est de 290 (67 femmes) : 238 qualifiés (51 femmes) soit 82%, 37 considérés hors section 25 (13 femmes) soit 13%, 15 non qualifiés (3 femmes) soit 5%.

**Les attentes de la section 25**, pour qualifier un candidat, sont de plusieurs sortes :

- l'activité scientifique : l'évaluation du candidat se fait à travers l'ensemble de ses publications, lorsqu'il y en a, et du contenu de sa thèse de doctorat ;
- l'aptitude à enseigner les mathématiques.

#### Les critères retenus

Pour pouvoir évaluer un candidat, les membres du CNU 25 ont axé leur réflexion sur les points suivants.

– L'aptitude du candidat à enseigner des mathématiques fondamentales ; pour les candidats dont les travaux sont aux marges de la section 25, la commission s'appuie en particulier sur leur cursus ou tout autre élément confirmant de manière certaine une telle capacité.

– Un travail récent de recherche en mathématiques, contenant des résultats théoriques nouveaux et des démonstrations rigoureuses sur le plan mathématique. Son évaluation se fait à travers

---

<sup>6</sup> <http://www.agence-nationale-recherche.fr/suivi-bilan/rechercher-un-projet-finance/>

<sup>7</sup> <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/pid24578/investissements-d-avenir.html>

- les travaux de la thèse (les résultats importants du doctorat, le sujet, les techniques mises en jeu ...); pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, on n'exige pas de publication : la qualification peut être accordée après étude de la thèse et des rapports de pré-soutenance;
  - les publications récentes; pour les candidats ayant soutenu une thèse plus de 2 ans avant la demande de qualification, on vérifie que cette thèse a donné lieu à publications; dans le cas d'un changement de thématique, on vérifie qu'il y ait des publications récentes dans les thématiques de la section 25; il se peut qu'une prépublication ne suffise pas à obtenir la qualification, la section demandant alors une confirmation du travail de recherche dans les thématiques de la section 25.
  - Pour les candidats relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) une attention particulière est portée sur les aspects théoriques du dossier et sur les contributions du candidat dans cette direction; la seule utilisation d'outils mathématiques, classiques ou avancés, même de façon innovante et dans des domaines originaux, ne peut permettre de qualifier un candidat en section 25.
  - Pour les candidats dont le dossier contient un volet important d'informatique, que ce soit par l'intermédiaire d'une thématique reconnue à la fois par les communautés mathématique et informatique, comme la théorie des graphes, la logique, la théorie des automates, la complexité algorithmique, ou d'une discipline transverse comme la cryptographie, la section adopte une attitude proche de sa lecture des dossiers à l'interface avec la section 26 et s'assure d'un contenu théorique et mathématique suffisant.
  - Pour les candidats dont la thématique est l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, le dossier scientifique est examiné en tant que dossier d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. On sollicite pour cela l'avis d'experts de ce domaine faisant partie ou non du CNU. En particulier, il n'y a aucune réticence a priori vis-à-vis des travaux portant sur des périodes anciennes ou ayant une orientation davantage philosophique qu'historique.
- Par ailleurs, et c'est cela qui distingue une qualification en section 25 par rapport à une qualification en section 72, on attend que le dossier du candidat mette en évidence des liens significatifs avec la communauté mathématique. Pour une qualification aux fonctions de Maître de Conférences, on vérifie que le candidat est apte à enseigner les mathématiques au moins jusqu'au niveau L3. Des indicateurs pouvant être utilisés sont, par exemple, l'agrégation de mathématiques, un DEA ou un master de mathématiques, une expérience conséquente d'enseignement des mathématiques dans des filières post-bac, un contenu mathématique substantiel dans la thèse et dans les publications.

## Qualification aux fonctions de professeur

### Les résultats

Le nombre de candidats inscrits était de 115 (18 femmes). Le nombre de dossiers parvenus aux rapporteurs est de 111 (18 femmes) : 100 qualifiés (15 femmes) soit 90%, 2 considérés hors section 25, 8 non qualifiés (3 femmes), 1 déjà qualifié.

**Les attentes de la section 25**, pour qualifier un candidat, sont de plusieurs sortes :

- l'activité et le rayonnement scientifique du candidat ;
- la capacité du candidat à encadrer des doctorants (à travers son expertise en mathématiques, la variété des thèmes qu'il a abordés, sa capacité à avoir posé et résolu des questions pertinentes ...); des encadrements ou co-encadrements éventuels de doctorats ou post-doctorats sont un plus pour le dossier, mais il n'est pas nécessaire d'avoir encadré ou co-encadré un doctorat pour une qualification aux fonctions de professeur en section 25 ;
- l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'à un niveau M2.

### **Les critères retenus**

Pour pouvoir évaluer un candidat, les membres du CNU 25 ont axé leur réflexion sur les points suivants.

- L'activité de recherche, jugée
  - par la production régulière de publications de qualité, une attention particulière étant portée sur les 4 dernières années - la variété des thèmes abordés avec une ouverture thématique nécessaire par rapport aux travaux de la thèse - le rayonnement du candidat, jugé par les conférences, les invitations dans des colloques internationaux, les séjours à l'étranger, la variété des collaborateurs, ...
  - Pour les candidats relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) une attention particulière est portée sur les aspects théoriques du dossier et sur les contributions du candidat dans cette direction ; la seule utilisation d'outils mathématiques, classiques ou avancés, même de façon innovante et dans des domaines originaux, ne peut permettre de qualifier un candidat en section 25.
  - Pour les candidats dont le dossier contient un volet important d'informatique, que ce soit par l'intermédiaire d'une thématique reconnue à la fois par les communautés mathématique et informatique, comme la théorie des graphes, la logique, la théorie des automates, la complexité algorithmique, ou d'une discipline transverse comme la cryptographie, la section adopte une attitude proche de sa lecture des dossiers à l'interface avec la section 26 et s'assure d'un contenu théorique et mathématique suffisant.
  - Pour les candidats dont la thématique est l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, le dossier scientifique est examiné en tant que dossier d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. On sollicite pour cela l'avis d'experts de ce domaine faisant partie ou non du CNU. En particulier, il n'y a aucune réticence à priori vis-à-vis des travaux portant sur des périodes anciennes ou ayant une orientation davantage philosophique qu'historique.

Par ailleurs, et c'est cela qui distingue une qualification en section 25 par rapport à une qualification en section 72, on attend que le dossier du candidat mette en évidence des liens significatifs avec la communauté mathématique. Pour une qualification aux fonctions de professeur, on vérifie que le candidat est apte à enseigner les mathématiques au moins jusqu'au niveau L3. Des indicateurs pouvant être utilisés sont, par exemple, l'agrégation de mathématiques, un DEA ou un master de mathématiques, une expérience conséquente d'enseignement des mathématiques dans des filières post-bac, un contenu mathématique substantiel dans la thèse et

dans les publications. On demande en plus que le candidat démontre une grande implication au sein de la communauté mathématique, ce qui peut se traduire notamment par un enseignement régulier des mathématiques à divers niveaux de l'université (du L1 au M2), des responsabilités au sein du département de mathématiques de son établissement, des projets menés en commun avec des mathématiciens, des publications dans des revues destinées aux mathématiciens (à titre indicatif, il est arrivé par le passé qu'une thèse de mathématiques soit exigée, mais le CNU 25 actuel a une position plus souple).

### **Renouvellement de qualification**

Les dossiers des candidats à un renouvellement de qualification font l'objet d'une attention particulière. Les périodes vides en production scientifiques sont analysées, et sont presque systématiquement rédhitoires si elles concernent les 4 dernières années. A contrario, une reprise d'activité récente, concrétisée par des publications ou des travaux soumis est lue favorablement par les membres du CNU ; cependant, si cette reprise se traduit essentiellement par des travaux soumis ou en cours, le CNU peut reporter sa décision de qualification à une campagne ultérieure, subordonnant sa décision à la publication de ces travaux. Il est important de souligner qu'une non qualification est une décision dont la pertinence n'est valable que pour l'année en cours, et qu'elle peut être révisée l'année suivante. Le CNU veille à ce que le dossier d'un candidat refusé ne soit pas examiné deux années de suite par les mêmes rapporteurs.

### **Campagne de promotions**

Les dossiers des candidats à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière, et non des seules 3 dernières années comme l'administration l'indique. Outre le CV et la liste complète des travaux, classés selon le type des travaux (par exemple, articles dans des revues à comité de lecture, actes de colloque, livres, articles de vulgarisation ....), le dossier doit contenir des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives ainsi que sur les services rendus à la communauté universitaire.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs, désignés par les membres du bureau.

Pour l'examen des diverses promotions, le CNU prend en compte les éléments suivants dans chaque dossier de candidature :

- l'activité scientifique : le nombre et surtout la qualité des publications, distinctions scientifiques,...
- la visibilité nationale et internationale, mesurée en particulier par les participations à des conférences et/ou des séminaires
- les responsabilités diverses : membre d'un conseil d'université (CA, CS, CEVU), direction d'UFR, de département, de laboratoire, d'équipe, de projet..., responsabilité pédagogique, activités éditoriales, appartenance et responsabilités dans diverses commissions
- l'activité d'encadrement doctoral : thèses soutenues ou en cours, devenir des doctorants
- le domaine scientifique, le lieu d'exercice, l'âge et l'ancienneté du candidat.

Les candidats sont donc invités à mettre ces éléments en avant dans leur dossier ; il est vivement conseillé aussi de faire une description des travaux scientifiques qui met en avant les résultats marquants, en plus d'une simple liste de publications.

Le CNU veille aussi au respect de certains équilibres dans ses choix en tenant compte notamment

- de l'âge des candidats, afin d'éviter de concentrer les promotions sur les seuls dossiers jeunes et brillants ;
- d'une répartition géographique raisonnable, en particulier entre les établissements parisiens et ceux de province ;
- des thématiques des candidats, avec un examen tout particulier des dossiers transversaux ou en marge de section ;
- de divers éléments factuels qui peuvent expliquer quelques retards de carrières,...

Pour les promotions à la première classe et à la classe exceptionnelle des professeurs, la section fixe en début de séance un échelon minimum indicatif.

### **Promotion à la hors-classe des MCF**

Nombre de promotions offertes : 18

Nombre de collègues promouvables : 188 dont 36 femmes

Nombre de candidats : 46 dont 12 femmes

### **Liste des promus** 14 hommes et 4 femmes

Ammar Khodja Farid (Besançon), Ballet Stéphane (Aix-Marseille 2), Batakis Athanassios (Orléans), Bhowmik Gautami (Lille 1), Birembaux Olivier (Valenciennes), Borne Niels (Lille 1), Chalendar Isabelle (Lyon 1), Charlot Grégoire (Grenoble 1), Chaumine Jean (Polynésie Française), Delay Erwann (Avignon), Ducos Lionel (Poitiers), Fradelizi Matthieu (Marne la Vallée), Loubeau Eric (Brest), Massart Daniel (Montpellier 2), Naie Daniel (Angers), Spriano Thérèse (Avignon), Thierry Alain (Bordeaux), Wach Nathalie (Strasbourg)

Les âges des promus s'étendent de 41 à 58 ans.

À noter une auto-censure importante de la part de nos collègues puisqu'il n'y a que 25% des promouvables à déposer un dossier.

Pour les promotions à la hors-classe des maîtres de conférences, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Le travail de recherche et l'activité d'enseignement sont examinés en premier lieu, cependant un certain investissement important dans le travail pédagogique ou au service de la communauté scientifique est attendu.

### **Promotion à la première classe des PR**

Nombre de promotions offertes : 14

Nombre de collègues promouvables : 189 dont 14 femmes

Nombre de candidats : 79 dont 7 femmes

### **Liste des promus** 10 hommes et 4 femmes

Banica Teodor (Cergy), Bourdon Marc (Lille 1), Bourgeois Frédéric (Paris 11), Chevallier Nicolas (Mulhouse), Dimassi Mouez (Bordeaux), Grellier Piollet Sandrine (Orléans), Hernandez David (Paris 7), Locherbach Eva (Cergy), Nistor Victor

(Lorraine), Pauly Christian (Nice), Pichon Anne (Aix-Marseille), Popescu-Pampu Patrick (Lille 1), Ressayre Nicolas (Lyon 1), Tazzioli Rossana (Lille 1)

Les âges des promus s'étendent de 36 à 57 ans.

À souligner le trop faible nombre de promotions offertes par rapport à celui des candidats, et à la valeur des dossiers examinés ; il serait fortement souhaitable que dans les années à venir le nombre de promotions offertes soit revu à la hausse de façon substantielle.

### **Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR**

Nombre de promotions offertes : 11

Nombre de collègues promouvables : 159 dont 12 femmes

Nombre de candidats : 50 dont 3 femmes

#### **Liste des promus 11 hommes et 0 femme**

Berteloot François (Toulouse 3), Bilu Yuri (Bordeaux), Chambert-Loir Antoine (Paris 11), Dloussky Georges (Aix-Marseille), Du Moulin de la Breteche Régis (Paris 7), Germinet François (Cergy), Gritsenko Valery (Lille 1), Kellendonk Johannes (Lyon 1), Mortini Raymond (Lorraine), Popov Gueorgui (Nantes), Renault Jean (Orléans)

Les âges des promus s'étendent de 43 à 65 ans.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon à la classe exceptionnelle des professeurs, qu'ils aient fait preuve dans leur carrière de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur, que ce soit dans leurs travaux de recherche ou au sein de la communauté scientifique en y jouant un rôle majeur dans l'encadrement de doctorants, la diffusion ou la structuration de la recherche, la prise de responsabilités pédagogiques et administratives.

### **Promotion au second échelon de la classe exceptionnelle des PR**

Nombre de promotions offertes : 5

Nombre de collègues promouvables : 76 dont 1 femme

Nombre de candidats : 26 dont 0 femme

#### **Liste des promus 5 hommes**

Auscher Pascal (Paris 11), Digne François (Amiens), Maisonobe Philippe (Nice), Ullmo Emmanuel (Paris 11), Xu Quanhua (Besançon)

Les âges des promus s'étendent de 49 à 65 ans.

Parmi les candidats dont le dossier témoigne d'une activité scientifique soutenue dans les missions dévolues aux professeurs des universités, le CNU examine l'activité récente du candidat et tient compte de façon importante de son ancienneté dans le premier échelon.

### Congés pour recherche ou conversion thématique

Le CNU 25 avait 8 semestres de CRCT à attribuer, un nombre ridiculement bas par rapport aux 78 semestres demandés par nos collègues et à la qualité des projets scientifiques présentés.

Parmi les critères pris en considération par la section pour l'examen des candidatures à un CRCT, le projet scientifique proposé par les candidats joue évidemment un rôle très important. Les rapporteurs apprécient donc tous les éléments qui leur permettent d'en mesurer la pertinence, la portée et la faisabilité.

– Un CV et une liste de travaux sont utiles pour mieux apprécier le positionnement du projet proposé (recherche ou conversion thématique) dans la trajectoire scientifique et professionnelle du candidat.

– Qu'il s'agisse d'un congé pour recherche, ou pour conversion thématique (ou inclusif), il est indispensable de donner une description précise du projet lui-même, et de spécifier si des déplacements sont prévus pour la réalisation de ce projet. La section apprécie également les éléments qui viennent justifier la pertinence du projet : contexte scientifique, articulation avec la politique de laboratoires ou d'équipes de recherche auxquels les candidats sont associés, le cas échéant argumentaire concernant la conversion thématique, etc.

– D'une manière générale, la section est sensible aux projets qui ont dépassé le stade de simple souhait. Il est donc utile de fournir des éléments attestant de la faisabilité du projet : lettres d'invitation, moyens mis à sa disposition par les candidats ou par leur laboratoire, expertise des candidats dans le domaine concerné (pour un congé de recherche), etc.

Ces éléments sont indicatifs, et ne constituent ni une liste obligatoire, ni une liste limitative. La section recherche en définitive tout ce qui lui permet de se faire une idée précise de la place du projet proposé dans le contexte professionnel des candidats, et les rapporteurs apprécient tous les éléments qui leur permettront de défendre au mieux le projet.

Le CNU a décidé d'attribuer 4 CRCT à des Maîtres de Conférences (Bertrand Benoit, Herbaut Fabien, Hulin Dominique, Laurain Paul) et 4 à des professeurs (Heiermann Volker, Movahhedi Abbas, Renault Jean, Tan Lei).

Liste complémentaire (dans l'ordre) : Lacave Christophe (MCF), Autissier Pascal (PR), Bedaride Nicolas (MCF), Badulescu Ioan (PR).

### Motions

Lors de la session de qualification 2014, le CNU 25 a adopté à l'unanimité les deux motions suivantes.

(1) Le CNU 25 considère que le système de primes ne saurait être un palliatif acceptable de la dégradation des carrières dans l'enseignement supérieur et la recherche. Concernant la PEDR, le CNU 25 est très réservé sur l'évaluation contingentée des dossiers de candidature à une prime dont il ne maîtriserait pas l'attribution.

(2) Le CNU 25 dénonce l'asphyxie budgétaire dont l'Université française est victime. Le désengagement de l'État conduit de nombreuses universités à mettre en place des plans de rigueur sans précédent, en particulier à supprimer des postes d'enseignants, d'enseignants-chercheurs et de BIATSS. Ces suppressions détériorent les conditions de travail et d'études à l'Université. De plus, elles mettent gravement et durablement en péril l'avenir de la recherche française en détournant les jeunes chercheurs des carrières universitaires.

Des marges de manœuvre existent pourtant : moins de 2% du Crédit Impôt Recherche suffirait à boucler le budget des universités. C'est donc par choix politique que l'argent de la recherche est donné au privé.

Le CNU 25 demande que l'État prenne pleinement en charge la masse salariale des universités et lui donne les moyens d'assurer ses missions de service public.

Le CNU 25 demande l'abrogation de la loi LRU et de toutes ses conséquences néfastes.

Lors de la session de promotion 2014, le CNU 25 a adopté à l'unanimité moins une abstention la motion suivante.

– Le CNU 25 s'indigne de la baisse drastique du nombre de postes de MCF et de PR en 25ème section ouverts aux concours. Cette baisse met en péril l'école mathématique française et fragilise la formation scientifique en France. Le CNU 25 demande à l'État de prendre au plus vite les mesures nécessaires pour remédier à cette situation désastreuse.

Le CNU 25 réclame donc une hausse conséquente du nombre de postes en mathématiques ouverts aux concours.

# **Bilan des sessions de qualification et d'avancement 2014 du CNU section 26 et conseils aux candidats**

Rapport rédigé par le bureau de la section

---

*Cette année le CNU a pour charge d'évaluer les candidats à la PEDR (Primes d'Encadrement Doctoral et de Recherche) pour les établissements souhaitant faire appel au CNU (en 2014 toutes les universités l'ont fait sauf 8 établissements). Le CNU 26 a souhaité dès à présent faire connaître un bilan des qualifications et avancements pour qu'en particulier les candidats à la qualification puissent prendre connaissance des critères de qualifications; un bilan particulier concernant les PEDR sera diffusé en automne 2014.*

L'actuel Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2011 pour un mandat de quatre ans. Composée de 48 membres titulaires (et d'autant de suppléants), la section 26 est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » représentant plus de la moitié des mathématiques universitaires en France.

Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la cpcnu<sup>1</sup> mais aussi sur le site spécialisé de la section 26<sup>2</sup>.

Les délibérations de la section se sont déroulées en deux sessions de trois jours chacune : la première session de février 2014, à Paris dans les locaux de l'Institut Henri Poincaré, concernait les qualifications et la seconde session, en mai 2014, dans les locaux de l'université Lyon I, concernait les promotions et l'attribution des CRCT<sup>3</sup>.

## **Prise de position du CNU 26**

Le 12 février 2014, le conseil a souhaité prendre position à travers les deux motions suivantes

---

<sup>1</sup> <http://www.cpcnu.fr>

<sup>2</sup> <http://cnu26.emath.fr>

<sup>3</sup> Congés pour Recherche et Conversion Thématique.

**Motion 1 « conditions de travail et budget »**

Le CNU 26 dénonce l'asphyxie budgétaire dont l'université française est victime depuis la loi LRU. Le désengagement de l'État conduit de nombreuses universités à mettre en place des plans de rigueur sans précédent, en particulier à supprimer des postes d'enseignants, d'enseignants-chercheurs et de BIATSS. Ces suppressions détériorent les conditions de travail et d'études à l'université. De plus, elles mettent gravement et durablement en péril l'avenir de la recherche française en détournant les jeunes chercheurs des carrières universitaires. Des marges de manœuvre existent pourtant : moins de 2% du Crédit Impôt Recherche suffirait à boucler le budget des universités. Le CNU 26 demande que l'État prenne pleinement en charge la masse salariale des universités et lui donne les moyens d'assurer ses missions de service public.

**Motion 2 « Primes et PEDR »**

Le CNU 26 considère que le système de primes ne saurait à lui seul remédier à la dégradation des carrières dans l'enseignement supérieur et la recherche. Concernant la PEDR, le CNU 26 est très réservé sur le processus d'attribution des primes. En effet, le CNU est chargé de l'évaluation contingentée des dossiers de candidature au niveau national mais il ne maîtrise pas son attribution, décidée in fine exclusivement au niveau local.

**Qualifications : bilan 2014**

Le bureau de la section a nommé en novembre 2013 deux rapporteurs par dossier. Les candidats ont connaissance de ces deux rapporteurs à qui ils doivent envoyer leur dossier. Il est important de préciser que la décision de qualification ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, et non pas des seuls rapporteurs (dont le rôle est avant tout de présenter les éléments du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification).

La section 26 a constaté que ses critères de qualifications étaient encore mal connus, aussi elle a souhaité à nouveau préciser la manière dont sont examinées et appréciées les candidatures à la qualification (comme cela a déjà été fait 2013).

**Qualifications aux fonctions de maître de conférences****Résultats de la session 2014**

Il y a eu 539 candidats inscrits, 81 dossiers non parvenus aux rapporteurs (15%) et 458 candidatures examinées. Parmi ces candidats, il y a eu 310 qualifiés (67% des dossiers examinés), 78 non qualifiés, 67 déclarés « hors section », 2 candidatures irrecevables et une parvenue hors délais. Ces chiffres sont tout à fait comparables aux chiffres des années précédentes : le taux de qualification était de 65% en 2013 et de 68% en 2012.

### Critères de qualification

Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrivait pas de façon canonique dans les thématiques de la section.

- L'aptitude à enseigner les mathématiques.
- L'activité scientifique. Dans les domaines d'application des mathématiques, cette activité ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement les points suivants qui seront des critères importants pour l'évaluation.

(1) L'aptitude à enseigner les mathématiques dans un cursus de Licence de mathématiques. Pour les candidats n'ayant pas un cursus français de mathématiques ou mathématiques appliquées, la section examinera le parcours ou tout autre élément dans le dossier faisant ressortir de manière certaine cette aptitude (c'est au candidat à expliquer dans son dossier cette aptitude, certains candidats non qualifiés donnent après coup des informations nouvelles qui n'ont pas été présentées dans les dossiers envoyés aux rapporteurs. C'est bien entendu trop tard).

(2) Une activité de recherche en mathématiques appliquées suffisante qui sera évaluée sous plusieurs aspects.

(a) Les travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.

(b) La présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, mais elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes. La publication d'un article en seul auteur, ou sans son directeur de thèse, peut être un élément positif d'appréciation.

(c) L'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

(d) L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26. (C'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualifications). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26ème section.

(3) Le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soit aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci sera particulièrement examiné en cas de requalification).

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus dans ce document ne font l'objet d'une application automatique.

## **Qualifications aux fonctions de professeur**

### **Résultats de la session 2014**

Il a eu 156 candidats inscrits, 11 dossiers non parvenus et 145 candidatures examinées. Parmi ces candidats, il y a eu 110 qualifiés (75% des dossiers examinés), 21 non qualifiés et 14 déclarés « hors section ». Le taux de qualification était de 69% en 2013 et de 86% en 2012.

### **Critères de qualification**

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de professeur sont les suivants :

- l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master,
- l'activité et le rayonnement scientifiques,
- la démonstration d'une réelle autonomie scientifique,
- l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement les points suivants qui seront des critères importants pour l'évaluation.

(1) La section examine la formation, l'expérience pédagogique à travers le curriculum vitae ou tout autre élément dans le dossier faisant ressortir cette capacité.

(2) Une activité de recherche en mathématiques appliquées suffisante, qui sera évaluée selon plusieurs aspects :

(a) un travail de recherche significatif en mathématiques appliquées, avec une activité avérée dans la période récente ;

(b) une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux postdoctoraux des quatre dernières années) ;

(c) le rayonnement sera estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales, les rapports de l'habilitation.

(3) L'autonomie scientifique sera en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèse.

(4) La capacité à encadrer des doctorants (évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou coencadrement de thèses ou de mémoires de master, ... ).

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal, ... ), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une équivalence de cette HDR. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

### Promotions

Les candidatures se font par voie électronique et avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils d'administration des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion ; cela s'est traduit par les deux formulations suivantes : « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué » ou « La section 26 du CNU par souci d'exemplarité a décidé de ne pas promouvoir des membres en exercice du CNU 26 pendant leur mandat ».

Si les fichiers proposés par le ministère comportent une trame précise à renseigner, qui répond dans l'ensemble aux attentes de notre section, nous rappelons qu'il est essentiel que les dossiers de candidature à une promotion contiennent un descriptif de l'ensemble de la carrière (et non seulement des dernières années). Outre le Curriculum Vitae et la liste complète des travaux, classés si possible par type de publication (par exemple, articles dans des revues d'audience internationale avec comité de lecture, notes aux comptes-rendus ou assimilées, actes de colloques, livres ou chapitres de livres, articles de vulgarisation...), le dossier doit comporter des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives, l'encadrement doctoral (thèses soutenues ou en cours, taux d'encadrement, devenir des doctorants) et les services rendus à la communauté universitaire et scientifique. Il est vivement conseillé, en plus de la liste de publications, de faire une description des travaux scientifiques en insistant sur les résultats marquants. Pour les candidats ayant à leur actif une réalisation conséquente en matière de logiciel scientifique, il est demandé de préciser dans leur dossier tous les éléments utiles à l'appréciation de celle-ci, de son impact, et de préciser également la contribution personnelle du candidat dans le cas de logiciels réalisés en équipe.

Il est souhaitable de faire aussi apparaître les participations aux conférences et les séminaires donnés, pour pouvoir mesurer la visibilité nationale et internationale. De même, la nature des tâches collectives doit apparaître clairement, pour pouvoir être prise en compte.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Pour les dossiers examinés plusieurs

années consécutives par notre section, nous nous efforçons de choisir chaque année des rapporteurs différents.

### **Promotions à la hors-classe des MCF**

Nombre de promotions proposées : 22, dont 1 femme.

Nombre de promouvables : 213, dont 66 femmes.

Nombre de candidats : 77, dont 24 femmes.

Listes des promus : Alfaro Matthieu (Montpellier II), Bahadoran Christophe (Clermont II), Bedjaoui Nabil (Amiens), Burie Jean-Baptiste (Bordeaux), Ceba Emmanuel (Orléans), Chaachoua Abdelhamid (Grenoble I), Ciligot-Travain Marc (Avignon), Clopeau Thierry (Lyon I), El Hamidi Abdallah (La Rochelle), Fehrenbach Jérôme (Toulouse III), Fischer Patrick (Bordeaux), Fournie Michel (Toulouse III), Gouno Evans (Bretagne-Sud), Jouan Philippe (Rouen), Junca Stéphane (Nice), Lafranche Yvon (Rennes I), Luneville Éric (Paris XIII), Marchand Régine (Lorraine), Ould Said Elias (Littoral), Pennequin Denis (Paris I), Perrin Olivier (Toulouse I), Tinsson Walter (Pau).

Les âges s'étendent de 40 à 60 ans. L'âge moyen des promus est de 47 ans.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et de l'activité d'enseignant, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

### **Promotions à la première classe des PR**

Nombre de promotions proposées : 16, dont 2 femmes.

Nombre de promouvables : 222, dont 39 femmes.

Nombre de candidats : 101, dont 16 femmes.

Listes des promus : Alexandre Radjesvarane (ENSAM), Berthon Christophe (Nantes), Bourdarias Christian (Chambéry), Crepey Stéphane (Evry), Dambrine Marc (Pau), Delarue François (Nice), Glass Olivier (Paris IX-Dauphine), Grugeon Brigitte (Paris XII), Lagoutière Frédéric (Paris XI), Lambert Amaury (Paris VI), Ley Olivier (INSA Rennes), Mas André (Montpellier II), Mercier Sophie (Pau), Patilea Valentin (INSA Rennes), Rivoirard Vincent (Paris IX-Dauphine), Santambrogio Filippo (Paris XI).

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants :

- domaine scientifique, âge et ancienneté comme professeur,
- faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques,
- activité et responsabilités pédagogiques,
- responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...),
- rayonnement : activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapporteurs de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales,
- activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications),

- encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques) qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le conseil est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donné la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2014 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur depuis au moins trois ans.

### **Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR**

Nombre de promotions proposées : 14, dont 4 femmes.

Nombre de promouvables : 212, dont 28 femmes.

Nombre de candidats : 62, dont 9 femmes.

Listes des promus :

Bourouchaki Houman (Troyes), Chauvin Brigitte (Versailles), Donato Patrizia (Rouen), Dufour François (Bordeaux), Fang Shizan (Dijon), Gavage Sylvie (Lyon I), Iollo Angelo (Bordeaux), James François (Orléans), Martel Yvan (Versailles), Perrier Valérie (Grenoble), Souplet Philippe (Paris XIII), Suquet Charles (Lille I), Vieu Philippe (Toulouse III), Zakoian Jean-Michel (Lille III).

Les âges s'étendent de 44 à 63 ans. L'âge moyen des promus est de 51 ans.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donné la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2014 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur depuis au moins trois ans.

### **Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR**

Nombre de promotions proposées : 6, dont 0 femme.

Nombre de promouvables : 81, dont 8 femmes.

Nombre de candidats : 42, dont 2 femmes.

Listes des promus : Ahues Mario (Saint-Etienne), Bachelot Alain (Bordeaux), Cattiaux Patrick (Toulouse III), Cohen Albert (Paris VI), Henrot Antoine (Lorraine), Noll Dominikus (Toulouse III).

Les âges s'étendent de 49 à 62 ans. L'âge moyen des promus est de 57 ans.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle. Vu la pression importante pour ces promotions, le CNU 26 a choisi en 2014 de privilégier les candidats qui assuraient l'essentiel de leurs missions de professeur d'université dans un établissement français d'enseignement supérieur ou de recherche.

### **Promotions locales 2013**

Les sections du CNU ne distribuent que la moitié des promotions ouvertes aux enseignants-chercheurs. Ces promotions sont distribuées entre sections du CNU proportionnellement au nombre de promouvables. Les autres promotions sont attribuées par les établissements d'enseignement supérieur. Le bilan des promotions locales pour l'année 2014 n'est pas encore disponible, mais voici le bilan des promotions locales en 2013 dans notre section. En 2013, il y a eu 56 promotions locales en section 26, toutes catégories confondues, et 58 au niveau national.

### **Hors-classe des maîtres de conférences**

22 promotions avaient été attribuées par le CNU en 2013 tandis que 20 promotions ont été obtenues localement.

Voici la liste des promus 2013 : Billiot Jean-Michel (Grenoble II), Fortier Natalie (INSA Rouen), Foucher Françoise (Centrale Nantes), Gabriel Patrick (Dijon), Gil Isabelle (CNAM), Godts Stéphane (Valenciennes), Guillaume Sophie (Avignon), Iovleff Serge (Lille I), Kermorvant Patrice (Bretagne Sud), Larramendy Irène (Montpellier II), Lavaud Evelyne (Toulouse I), Leblanc Frédérique (Grenoble I), Lemaire Sophie (Paris XI), Mora Marianne (Paris X), Oudin Fabienne (Lyon I), Pinçon Bruno (Lorraine), Plantec Jean-Yves (INSA Toulouse), Samson Paul-Marie (Marne), Taleb Salim (Valenciennes), Troupe Marilène (Antilles-Guyane).

### **Première classe des professeurs**

17 promotions avaient été attribuées par le CNU en 2013 tandis que 17 promotions ont été obtenues localement.

Voici la liste des promus 2013 : Adly Samir (Limoges), Alioum Ahmadou (Bordeaux II), Auroux Didier (Nice), Coulon Clémentine (Grenoble I), Coutin Laure (Toulouse III), Creuse Emmanuel (Lille I), De Vuyst Florian (Éns Cachan), Dehay Dominique (Rennes II), Dhersin Jean-Stéphane (Paris XIII), Eisele Karl-Theodor (Strasbourg), Labbé Stéphane (Grenoble I), Le Roux Daniel (Lyon I), Masson Roland (Nice), Paoli Laetitia (Saint-Étienne), Prud'homme Christophe (Strasbourg), Villeneuve Stéphane (Toulouse I), Yé Dong (Lorraine).

### **Classe exceptionnelle des professeurs**

Le CNU avait attribué 14 promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle en 2013 tandis que 15 promotions ont été obtenues localement.

Voici la liste des promus 2013 : Agnan Christine (Toulouse I), Amrouche Cherif (Pau), Aziz-Alaoui Moulay-Ahmed (Le Havre), Bonnetier Éric (Grenoble I), Canalis Mireille (Aix-Marseille 3), Cohen Serge (Toulouse III), Franchi Jacques (Strasbourg), Goubet Olivier (Amiens), Guillopé Colette (Paris XII), Pietrus Alain (Antilles-Guyane), Rochdi Mohamed (La Réunion), Serfaty Sylvia (Paris VI), Sofonea Mircea (Perpignan), Touzani Rachid (Clermont II), Vanderbeck François (Bordeaux I).

Le CNU avait attribué 5 promotions au second échelon de la classe exceptionnelle en 2013. Il y a eu 4 promotions locales : Granier Elisabeth (Paris XI), Raymond Jean-Pierre (Toulouse III), Rusch Francine (Nice), Ycart Bernard (Grenoble I).

### **Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique**

Cette année les demandes étaient faites sur le site en ligne du ministère qui présentait une trame pour remplir les dossiers. Ceci a fait qu'en général les dossiers étaient plus fournis que les années passées.

La section avait 10 semestres CRCT pour environ 80 demandes. Elle a décidé d'attribuer 4 semestres à des professeurs - Gayraud Ghislaine (Compiègne), Liu Quansheng (Bretagne Sud), Suquet Charles (Lille I), Trouche Luc (Éns Lyon) et d'attribuer 6 semestres à des maîtres de conférences - Bulf Caroline (Bordeaux), Bunoiu Renata (Lorraine), Louis Pierre-Yves (Poitiers), Mardare Cristinel (Paris VI), Moyal Pascal (Compiègne), Romon Pascal (Marne).

En outre il a été établi la liste complémentaire classée de 11 noms suivante :

(1) Taupinart de Tiliere Béatrice, MCF, Paris VI (2) Raissi Hamdi, MCF, INSA Rennes (3) Albrecht Gudrun, PR, Valenciennes (4) Mailfert Jean, MCF, Clermont I (5) Jouve François, PR, Paris VII (6) Hérault Alexis, MCF, CNAM (7) Ruiz-Gazen Anne, PR, Toulouse I (8) Sanchez David, MCF, INSA Toulouse (9) Tromeur-Dervout Damien, PR, Lyon I (10) Vallois Pierre, PR, Lorraine (11) Achdou Yves, PR, Paris VII.

Dans l'attribution des CRCT, le CNU privilégie tout particulièrement les dossiers comportant un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini : citons en particulier des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques, etc. Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou peu bénéficié de CRCT ou de délégation dans le passé. Il est souhaité que toutes les délégations passées des candidats soient clairement mentionnées. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres....

## Nouvelles du CNRS

Philippe Biane, Rémi Carles

---

### Session d'automne 2013

#### Remplacement

Suite au départ d'Hermine Biermé après la session de printemps 2013 (élue dans le collège B2 en 2012), la section a examiné deux candidatures déposées au cours de l'été, et a élu Élodie Brunel-Piccinini, MCF à l'université Montpellier 2. Elle a siégé pour la première fois lors du concours de recrutement des chercheurs 2014.

#### Chercheurs

Tous les chercheurs recrutés en 2013 ont été titularisés. Sur 16 chargés de recherche deuxième classe ayant demandé leur promotion, 15 ont été promus, une demande ayant reçu un avis défavorable de la section. 43 dossiers d'évaluation à mi-vague ont été examinés. Environ 93% des dossiers ont reçu un avis favorable. L'absence d'avis favorable donne systématiquement lieu à un suivi spécifique. Quatre dossiers ayant reçu un avis différé au printemps 2013 ont été à nouveau examinés : trois ont reçu un avis favorable, et un, un avis réservé faute de dossier déposé.

Voici les résultats relatifs aux promotions des directeurs de recherche :

*Promotion DR1* (28 candidats, dont 4 femmes) : 1. Ahmed Abbes, Olivier Cationi, Zoé Chatzidakis, Hélène Frankowska, Frédéric Patras, Pierre Picco, Laurent Stolovitch, 8. David Lannes, 9. Eric Leichtnam.

*Promotion DRCE1* (12 candidats, dont 3 femmes) : Patrice Philippon.

*Promotion DRCE2* (4 candidats, dont 1 femme) : Étienne Ghys.

Les sept premiers classés à la promotion DR1 ont été promus par la suite, ainsi que chacun des deux candidats classés pour une promotion DRCE.

#### Médailles

La section a proposé,

- pour la médaille de bronze : Vincent Calvez (CR à l'UMPA, ÉNS Lyon) ;
- pour la médaille d'argent : Mireille Bousquet-Mélou (DR au LaBRI, Université de Bordeaux).

Ces médailles ont été décernées par le CNRS au printemps 2014.

## AERES

Lors de la session d'automne 2012, la section avait voté une motion (disponible, ainsi que toutes les autres, sur la site de la section<sup>1</sup>) demandant la présence systématique d'un élu C dans les comités de visite AERES. Au printemps 2013, en vue de la vague E, l'AERES a sollicité pour chaque site évalué le nom d'un membre A ou B, et le nom d'un élu C. Au final, l'AERES n'a convoqué un élu C que dans le cas d'un laboratoire de la vague E.

## Concours chercheurs 2014

Pour la troisième année, le concours CR se déroule en trois étapes :

- jury d'admissibilité sur dossier (JAD) : après examen des dossiers de candidatures, le jury convoque un certain nombre de candidats pour une audition ;
- jury d'admissibilité : après audition, le jury procède à un classement ;
- jury d'admission.

La possibilité de JAD pour les concours DR n'est pas prévue par la loi, aussi le jury a-t-il choisi de ne pas auditionner les candidats DR. La section 41 tient à affirmer que la liste des candidats auditionnés aux concours CR est établie suivant des critères et des profils spécifiques, et ne peut, en conséquence, servir de référence dans un contexte différent et pour d'autres concours. Les auditions ont eu lieu à l'IHP le 24 mars. La section tient à remercier cet institut pour son soutien.

La liste des candidats admissibles est consultable sur le site de la section<sup>2</sup>.

Pour le concours 41/02 (8 postes de CR2), 221 candidatures ont été examinées (dont 39 femmes, soit 18%, et 63 thèses soutenues à l'étranger, soit 29%). Parmi les 39 candidats retenus en vue d'une audition, 5 femmes (13%), 5 thèses étrangères (13%). En liste principale, on trouve 1 femme (12,5%), 2 thèses étrangères (25%).

Pour le concours 41/03 (2 postes de CR2 sur des thématiques d'interactions des mathématiques en relation avec d'autres disciplines), 130 dossiers ont été examinés (30 femmes, soit 23%, 34 thèses étrangères, 26%), 26 candidats ont été retenus en vue d'une audition (9 femmes, 35%, 2 thèses étrangères, 8%). En liste principale, un homme et une femme, ayant effectué leur thèse en France.

Pour le concours 41/04 (1 postes de CR2 pour un laboratoire relevant des sciences de l'information : mathématiques pour les sciences de l'information), 64 dossiers ont été examinés (18 femmes, soit 28%, 20 thèses étrangères, 31%), 13 candidats ont été retenus en vue d'une audition (4 femmes, 8%, 3 thèses étrangères, 23%). En liste principale, 1 homme ayant effectué sa thèse à l'étranger.

Pour le concours 41/01 (6 postes de DR2), 92 dossiers ont été examinés (15 femmes, 16%). En liste principale, 6 CR1 ont été classés (1 femme, 16%).

---

<sup>1</sup> <http://cn.math.cnrs.fr/>

<sup>2</sup> <http://cn.math.cnrs.fr/>

La pression est très forte sur l'ensemble des concours, et le jury souligne la qualité très élevée des dossiers. Les perspectives annoncées par la direction de l'INSMI vont plutôt dans le sens d'une baisse du nombre de postes mis au concours, à la fois en CR et en DR. Même si l'habilitation ne fait pas partie des diplômes requis pour la candidature aux postes de DR2, en être titulaire est une indication forte de l'implication dans la formation par la recherche, et la section y est particulièrement sensible.

### **Délégations CNRS**

Conformément à la demande faite par la section auprès de l'INSMI au printemps 2013, l'ensemble de la section a participé à l'évaluation des demandes de délégation CNRS cette année, en évitant les conflits d'intérêts (typiquement, personne n'a évalué une demande issue de son site d'appartenance).

Nous soulignons l'importance, au moment de l'évaluation, de faire apparaître clairement les données suivantes :

- décharges au cours des quatre années précédentes (pas uniquement délégations CNRS) ;
- motif de la demande, avec description du projet.

Rappelons qu'une liste de critères prioritaires est consultable sur la page de la section<sup>3</sup>.

Enfin, les informations rappelées ci-dessus sont automatiquement disponibles pour les rapporteurs si les demandeurs ont fourni dans leur dossier la fiche signalétique demandée par l'INSMI.

La section 41 du comité national effectue une évaluation des demandes, qui remonte ensuite à l'INSMI. Les arbitrages se font par site (selon la définition de site du CNRS) ; au final, il s'agit d'un projet commun entre le CNRS et les établissements.

### **Session de printemps 2014**

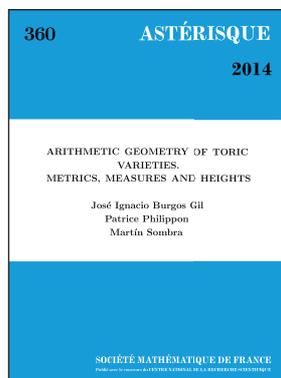
Suite à la vague E de l'AERES, la section a examiné les demandes de renouvellement d'association au CNRS des laboratoires concernés (périphérie parisienne, Lille, Montpellier). Toutes les demandes ont reçu un avis très favorable.

81 dossiers d'évaluation à vague (10 semestres) ont été évalués. Environ 90% ont reçu un avis favorable. Deux dossiers ayant reçu un avis différé à l'automne 2013 ont été à nouveau examinés : les deux ont reçu un avis favorable.

Sur quatre demandes de renouvellement de GDR, la section a émis trois avis très favorables, et un avis favorable. Sur quatre demandes de création de GDR, la section a émis deux avis très favorables, un avis favorable, et ne s'est pas prononcée sur la quatrième demande, ses liens avec la communauté mathématique étant trop peu développés.

---

<sup>3</sup> <http://cn.math.cnrs.fr/Doc/criteres-delegations.pdf>



Astérisque 360

**Arithmetic geometry  
of toric varieties.  
Metrics, measures and heights**  
J. I. Burgos Gil, P. Philippon,  
M Sombra

We show that the height of a toric variety with respect to a toric metrized line bundle can be expressed as the integral over a polytope of a certain adelic family of concave functions. To state and prove this result, we study the Arakelov geometry of toric varieties. In particular, we consider models over a discrete valuation ring, metrized line bundles, and their associated measures and heights. We show that these notions can be translated in terms of convex analysis, and are closely related to objects like polyhedral complexes, concave functions, real Monge-Ampère measures, and Legendre-Fenchel duality. We also present a closed formula for the integral over a polytope of a function of one variable composed with a linear form. This formula allows us to compute the height of toric varieties with respect to some interesting metrics arising from polytopes. We also compute the height of toric projective curves with respect to the Fubini-Study metric and the height of some toric bundles.

*(Géométrie arithmétique des variétés toriques. Métriques, mesures et hauteurs)*

*Nous montrons que la hauteur d'une variété torique relative à un fibré en droites métrisé torique s'écrit comme l'intégrale sur un polytope d'une certaine famille adélique de fonctions concaves. Afin d'énoncer et démontrer ce résultat, nous étudions la géométrie d'Arakelov des variétés toriques. En particulier, nous considérons des modèles de ces variétés sur des anneaux de valuation discrète, ainsi que les fibrés en droites métrisés et leurs mesures et hauteurs associées. Nous montrons que ces notions se traduisent en termes d'analyse convexe et sont intimement liées à des objets tels que les complexes polyédraux, les mesures de Monge-Ampère et la dualité de Legendre-Fenchel. Nous présentons également une formule close pour l'intégration sur un polytope d'une fonction d'une variable composée avec une forme linéaire. Cette formule nous permet de calculer la hauteur de variétés toriques relativement à plusieurs métriques intéressantes, provenant de polytopes. Nous calculons aussi la hauteur des courbes toriques projectives relativement à la métrique de Fubini-Study et la hauteur des fibrés toriques.*

ISBN : 978-2-85629-783-4

prix public : 52 € - prix membre : 37 €

frais de port non compris



Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
F-75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# LIVRES

---

---

## L'univers des mathématiciens

BERNARD ZARCA

Presses Universitaires de Rennes, 2012. 268 pp. ISBN 978-2753521407, 20€

---

Le prochain congrès international des mathématiciens se tiendra à Séoul du 13 au 21 août 2014. Les 21 conférenciers plénières seront un Brésilien, un Canadien, un Sud Coréen, trois Français, un Italien, un Japonais, deux citoyens du Royaume-Uni, un Suisse et dix mathématiciens travaillant aux USA. Cette incroyable concentration géographique des conférenciers invités pose le difficile et douloureux problème du lien entre le développement des mathématiques et la qualité de la vie économique, politique et culturelle des états. Pourquoi une activité qui est essentiellement gratuite, qui devrait être universelle et donc ne pas dépendre de la richesse et de la puissance des états est-elle concentrée dans les pays les plus riches et les plus puissants ? En quel sens les mathématiques sont-elles universelles ? Cette question nous mène tout droit au beau et profond livre de Bernard Zarca.

L'histoire des sciences et l'épistémologie ont une longue et riche tradition. En revanche, l'intérêt des sociologues pour la Science est plus récent. En 1942 Robert K. Merton a proposé la thèse suivante : la solidité de la science reposerait sur l'acceptation d'un code de conduite, d'un ethos, de valeurs partagées qui seraient *l'universalisme* (la vérité obtenue par la science est objective et concerne tous les hommes), le partage, appelé *communalisme*, qui dit que la vérité scientifique doit être accessible à tous et partagée par tous, le *désintéressement* et le *scepticisme* organisé. Merton pensait que ces valeurs étaient corrélées avec l'éthique protestante ce qui implique que les Wasps seraient plus aptes que les autres groupes humains à faire des sciences. Merton aurait donc prévu le choix des conférenciers plénières au congrès international des mathématiciens 2014.

Dans les années 70 est apparue une nouvelle approche sociologique de l'activité scientifique. L'hypothèse de travail du mouvement *relativiste* (ou sociology of scientific knowledge) est qu'il n'y a pas de vérité objective en science, mais seulement des croyances définies par le milieu culturel, social et économique auquel appartient le chercheur. Il y aurait autant de sciences que de cultures, ce qui exclut un savoir universel. Il y aurait ainsi une science bourgeoise et une science prolétarienne. Ces thèses étaient en vogue quand j'étais étudiant (à la fin des années cinquante).

Bernard Zarca est un sociologue. Son livre intitulé *L'univers des mathématiciens, L'ethos professionnel des plus rigoureux des scientifiques* prolonge l'enquête qu'il a effectuée en 2002 sur des mathématiciens purs et appliqués, des mécaniciens, des physiciens théoriciens, des informaticiens et des didacticiens des mathématiques. Bernard Zarca a utilisé le courrier électronique pour diffuser son questionnaire et 2145 personnes ont répondu. Bernard Zarca a également rencontré certains mathématiciens éminents qui n'avaient pas répondu à l'enquête. Il a beaucoup lu. Son livre est nourri de ces trois expériences : son questionnaire, ses rencontres et

ses lectures. Ce livre peut-il nous être utile pour résoudre le problème posé par le programme de l'ICM 2014 ? Oui, en partie, comme nous allons le voir.

Dans le premier chapitre, intitulé *Cadre problématique*, Bernard Zarca nous explique pourquoi la doctrine *relativiste* ne peut s'appliquer aux mathématiques. Son argumentation s'appuie sur une analyse profonde de la spécificité des mathématiques. Bernard Zarca met l'accent sur (1) la spécificité de la notion de vérité en mathématiques, (2) l'universalité des mathématiques et (3) leur architecture. L'analyse de l'architecture des mathématiques est étayée par une page magnifique d'Alexandre Grothendieck extraite de *Récoltes et Semailles* que je reproduis ici.

*Dans une telle situation, quand les choses elles-mêmes nous soufflent quelle est leur nature cachée et par quels moyens nous pouvons le plus délicatement et le plus fidèlement l'exprimer, alors que pourtant beaucoup de faits essentiels semblent hors de la portée immédiate d'une démonstration, le simple instinct nous dit d'écrire simplement noir sur blanc ce que les choses nous soufflent avec insistance, et d'autant plus clairement que nous prenons la peine d'écrire sous leur dictée ! Point n'est besoin de se soucier de démonstrations ou de constructions complètes – s'encombrer de telles exigences à ce stade-là du travail reviendrait à s'interdire l'accès de l'étape la plus délicate, la plus essentielle d'un travail de découverte de vaste envergure – celle de la naissance d'une vision, prenant forme et substance hors d'un apparent néant. Le simple fait d'écrire, de nommer, de décrire – ne serait-ce d'abord que décrire des intuitions évasives ou de simples « soupçons » réticents à prendre forme – a un pouvoir créateur. C'est là l'instrument entre tous de la passion de connaître, quand celle-ci s'investit en des choses que l'intellect peut appréhender. Dans la démarche de la découverte en ces choses-là, ce travail en est l'étape créatrice entre toutes, qui toujours précède la démonstration et nous en donne les moyens – ou pour mieux dire, sans laquelle la question de « démontrer » quelque chose ne se pose même pas, avant que rien encore de ce qui touche l'essentiel n'aurait été formulé et vu. Par la seule vertu d'un effort de formulation, ce qui était informe prend forme, se prête à examen, faisant se décanter ce qui est visiblement faux de ce qui est possible, et de cela surtout qui s'accorde si parfaitement avec l'ensemble des choses connues, ou devinées, qu'il devient à son tour un élément tangible et fiable de la vision en train de naître. Celle-ci s'enrichit et se précise au fil du travail de formulation ! Dix choses soupçonnées seulement, dont aucune (la conjecture de Hodge disons) n'entraîne conviction, mais qui mutuellement s'éclairent et se complètent et semblent concourir à une même harmonie encore mystérieuse, acquièrent dans cette harmonie force de vision. Alors même que toutes les dix finiraient par se révéler fausses, le travail qui a abouti à cette vision provisoire n'a pas été fait en vain, et l'harmonie qu'il nous a fait entrevoir et qu'il nous a permis de pénétrer tant soit peu n'est pas une illusion, mais une réalité, nous appellent à la connaître. Par ce travail, seulement, nous avons pu entrer en contact intime avec cette réalité, cette harmonie cachée et parfaite. Quand nous savons que les choses ont raison d'être ce qu'elles sont, que notre vocation est de les connaître, non de les dominer, alors le jour où une erreur éclate est jour d'exultation – tout autant que le jour où*

*une démonstration nous apprend au-delà de tout doute que telle chose que nous imaginions était bel et bien l'expression fidèle et véritable de la réalité elle-même. Dans l'un et l'autre cas, une telle découverte vient en récompense d'un travail, et n'aurait pu avoir lieu sans lui. Mais alors qu'elle ne viendrait qu'au terme d'années d'efforts, ou même que nous n'apprenions jamais le fin mot, réservé à d'autres après nous, le travail est sa propre récompense, riche en chaque instant de ce que nous révèle cet instant même.*

Ce chapitre se conclut sur un vibrant « discours de la méthode » définissant ce que doit être l'étude sociologique des mathématiques et des mathématiciens. Le second chapitre, consacré aux différences entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées, repose essentiellement sur les réponses au questionnaire. Dans le troisième chapitre Bernard Zarca explore la façon dont fonctionne le cerveau d'un mathématicien au travail et analyse très finement les problèmes posés par la preuve en mathématique ainsi que le rôle de l'intuition dans la découverte. Bernard Zarca s'appuie, là encore, sur les résultats du questionnaire qu'il utilise avec soin. Le quatrième chapitre, très riche lui aussi, traite de l'unité des mathématiques et de leur beauté. L'unité des mathématiques est évidente pour les très grands mathématiciens qui sont cités par Bernard Zarca. Dans le dernier chapitre Bernard Zarca explore les relations de compétition ou de pouvoir à l'intérieur de notre communauté.

Au terme de son livre Bernard Zarca s'est démarqué de l'approche de Merton et de celle des relativistes. Bernard Zarca a analysé les mathématiques en prenant en compte la singularité de notre discipline. Il s'affranchit ainsi de certaines modes intellectuelles aussi stériles que superficielles. Il y est parvenu en s'immergeant complètement à l'intérieur des mathématiques, à tel point que je pensais, en lisant son livre, qu'il était un mathématicien professionnel, tant il parle bien de notre discipline. Au terme de son enquête Bernard Zarca conclut que les mathématiques constituent un édifice où tout se tient, s'équilibre et se renforce, alors même que cet édifice est une construction fragile, inachevée et incertaine de son avenir. La lucidité sociologique n'exclut pas l'admiration du travail accompli par notre discipline.

Bernard Zarca nous aide à reformuler la thèse du *relativisme*. Les mathématiques sont universelles, ce qui permet ces merveilleuses fêtes que sont les congrès internationaux des mathématiciens. En revanche, l'existence et la persistance d'écoles mathématiques nationales est le problème que doivent étudier les sociologues. La mort du général Franco et le rétablissement de la démocratie ont coïncidé avec une extraordinaire renaissance mathématique en Espagne. Mais, contrairement à ce que prétendraient les tenants du *relativisme*, les résultats mathématiques obtenus par Miguel de Guzmán ou Antonio Córdoba n'étaient en rien influencés par les circonstances politiques particulières qui avaient permis à cette école mathématique de se développer. Ces résultats se liaient naturellement à ceux que Calderón, Fefferman ou Zygmund obtenaient à Chicago ou Princeton. On pourrait faire les mêmes remarques sur l'explosion mathématique polonaise des années 1920. Elle a coïncidé avec la renaissance politique de la Pologne.

Bernard Zarca a visiblement une profonde sympathie pour nos valeurs et nos codes. Il nous décrit avec finesse, humour et tendresse. Il nous représente tels que nous sommes, avec nos qualités et nos défauts, quand il insiste sur notre amour passionné et désintéressé de la vérité et de la beauté ou quand il parle de notre

élitisme souvent arrogant. Bernard Zarca est un grand lecteur. Il cite de magnifiques textes de mathématiciens. Voici deux exemple des trésors que j'ai trouvés au cours de ma lecture. Il s'agissait de donner un exemple de notre curiosité et de notre besoin inlassable de comprendre les structures profondes de l'édifice des mathématiques. Bernard Zarca cite alors William Byers. Dans son remarquable ouvrage *How mathematicians think : using ambiguity, contradiction and paradox to create mathematics*, Byers donne un exemple saisissant de la naissance d'une découverte importante, reposant entièrement sur le besoin de comprendre une observation accidentelle :

*The feeling that "something is going on here" can even be brought on by a simple fact, a single number. A case in point appeared in 1978, when my colleague John McKay noticed that  $196884=196883+1$ . What, one may ask, is so important about the fact that some specific integer is one larger than its predecessor? The answer is that these are not any two numbers. They are significant mathematical constants that can be found in two different areas of mathematics. The first arises in the context of the mathematical theory of modular forms. The second arises in the context of irreducible representations of a finite simple group called the Monster. McKay intuitively realized that the relationship between these two constants could not be a coincidence, and his observation started a line of mathematical inquiry that led to a series of conjectures that go by the name of "monstrous moonshine". The main conjecture in this theory was finally proved by Fields Medal winner Richard E. Borcherds.*

Quel exemple merveilleux ! La composition du livre de Bernard Zarca ressemble à celle des *Essais* de Montaigne. Chez Montaigne, les citations des auteurs latins sont les points d'ancrage d'une réflexion libre, souple et alerte. Bernard Zarca procède de même, à ceci près que l'anglais a souvent remplacé le latin. Comme dans les *Essais* certains thèmes courent tout au long du livre ; celui de la beauté ou de l'unité des mathématiques sont récurrents. Alexandre Grothendieck, Grigori Perelman, Jean-Pierre Serre, Cédric Villani, André Weil ou Shing-Tung Yau sont convoqués par Bernard Zarca pour notre plus grand bonheur. Comme dans les *Essais*, l'auteur n'hésite pas à présenter des points de vue antagonistes. On ne se lasse pas de lire et de relire ce livre magnifique.

Yves Meyer  
CMLA, ENS-Cachan