SOMMAIRE DU N^{o} 124

SMF

Mot du Président

Pour des raisons exceptionnelles, le traditionnel « Mot du Président » a été rédigé par l'ensemble du bureau de la SMF.

Nous nous voyons contraints de revenir sur le sujet des nouvelles orientations prises par l'Institut Henri Poincaré. Vous trouverez en « Courrier des lecteurs » un texte de Cédric Villani, actuel directeur de l'IHP, dont le ton extrêmement conciliant ne saurait effacer le caractère brutal de la décision prise à l'encontre des associations de mathématiques, lors du dernier Conseil d'Administration de l'IHP ; vous noterez aussi qu'aucun compromis n'est proposé dans cette lettre pour revenir, même partiellement, sur ce qui a été décidé.

Rappelons les faits : à l'automne, l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) a demandé au directeur de l'IHP que les redevances que nous payons, dont le but a toujours été de couvrir les frais que nous occasionnons à l'IHP, soient augmentées d'un facteur presque 5 sur deux ans pour devenir comparables au prix d'un loyer.

La méthode utilisée pour prendre cette décision inaugure une rupture inquiétante avec des traditions qui faisaient la force de notre communauté : particulièrement soudés, les mathématiciens pratiquaient toujours la concertation avant que des décisions importantes ne soient prises. Dans le cas présent, les associations de mathématiques ont été prises de court : la formulation du point correspondant de l'ordre du jour du CA « Évolution des conventions d'hébergement » ne permettait en aucun cas d'imaginer ce qu'il recouvrait. Les associations ou bien n'ont pas été averties qu'il s'agirait en fait d'une telle augmentation, ou ne l'ont été que soixante douze heures auparavant, ce qui ne leur permettait pas de se concerter, et de pouvoir réagir en conséquence. Le refus d'un report de six mois de cette décision, demandé lors du CA pour permettre une concertation, était tout aussi choquant. On peut d'ailleurs s'interroger sur la légalité des décisions prises par le dernier CA de l'IHP : de l'aveu même de son directeur, la composition de ce CA était entachée de fortes irrégularités : membres élus ayant dépassé la fin de leur mandat, et représentants d'institutions qui n'en étaient plus membres. En tout état de cause, il serait plus sage d'accepter que ces questions soient rediscutées, puis qu'un compromis soit trouvé, et finalement voté par un futur CA dont la validité ne serait pas sujette à caution.

De combien serait cette augmentation pour la SMF ? Voici les chiffres bruts tels qu'ils viennent de nous être donnés dans la nouvelle convention que la direction de l'IHP nous demande de signer : nos redevances vont passer de 4.600 à 20.000 euros par an. Si aucun compromis n'est trouvé, il appartiendra au CA de la SMF de décider comment cette nouvelle dépense de 15 400 euros pourra être financée. Cependant, il ne nous semble pas raisonnable de la répercuter sur les adhérents. Une solution de dernier recours serait d'augmenter le prix de nos publications, mais nous sommes bien conscients que la communauté mathématique apprécie grandement le fait que, éditeur académique à but non lucratif, la SMF pratique pour ses publications des prix nettement en-dessous du marché. Il n'est sans doute pas inutile de rappeler par ailleurs que la SMF contribue déjà au financement du CIRM (il est difficile de chiffrer exactement ce financement, qui se fait de façon indirecte, mais pour 2009, il se situe entre 5000 et 10000 euros).

Une tentative d'augmentation similaire s'était heurtée dans le passé à l'opposition du président du CA de l'IHP, pour des raisons de principe touchant aux missions de cet institut. Elles sont exprimées avec une clarté lumineuse dans le PV du CA du 27 novembre 2001, cité en annexe, et qui montre que la vison idyllique du rôle de l'UPMC que le directeur actuel de l'IHP présente dans le passé n'est malheureusement pas conforme à la réalité.

Derrière la question purement financière, se cache donc clairement une volonté de changement des missions de l'IHP ; elle semble d'ailleurs assumée par son directeur actuel, qui n'hésite pas à écrire que le Centre Emile Borel (trimestres thématiques) est la « mission principale » de l'IHP, et à en tirer toutes les conséquences. Il se trouve ainsi en accord avec le président de l'UPMC, qui, dans un récent message aux membres de l'UFR de Mathématiques de son université, minimisait autant que possible la mission d'hébergement des sociétés de mathématiques :

« L'hébergement des sociétés savantes à l'IHP n'est pas spécifiquement dans les missions de l'IHP et ne se justifie que dans la mesure où elles contribuent aux missions de l'IHP. Il s'agit en l'occurrence principalement de la sixième et dernière mission mentionnée dans l'article 1.2 des statuts : assurer la diffusion d'information sur les activités scientifiques relatives aux disciplines. »

Les membres de la SMF apprécieront la vision extrêmement réductrice du rôle ainsi attribué à leur association.

Rappelons brièvement les raisons que le directeur de l'IHP nous a fournies pour motiver cette augmentation :

– Notre participation actuelle aux charges communes ne correspondrait pas à ce que nous coûtons. Nous sommes prêts à entendre un tel argument, si l'on nous présente des justificatifs convaincants, ce qui n'a pas été le cas jusqu'à présent.

– Une telle augmentation créerait une « pression » qui pousserait nos associations à se serrer, voire à partir, afin de faire de la place au centre Emile Borel. Au-delà de l'aspect moralement et pratiquement contestable d'un tel argument « économique » (les associations ayant le moins de moyens seraient-elles nécessairement celles dont la présence est la moins utile à la communauté mathématique ?), le directeur de l'IHP a reconnu implicitement qu'il ne croit pas à l'efficacité de la méthode « incitative » au moyen des hausses de tarifs : en effet, dans un courrier récent adressé à nos associations, il leur demande de toute façon de libérer la moitié de la surface qu'elles occupent.

– Il reconnaît que le déficit de l'IHP ne sera absolument pas réglé par l'augmentation des taxes d'hébergement.

En effet, ce dernier problème ne peut être résolu de façon viable que par une forte augmentation des subventions de l'IHP. De fait, une telle augmentation a eu lieu cette année, de la part du CNRS. Cette augmentation, dont nous nous félicitons, pouvait être l'occasion d'une solution de compromis que nous avons proposée : parmi les motivations de son augmentation, le CNRS mentionnerait le fait qu'il prend partiellement en charge l'hébergement des sociétés savantes, puisque leurs activités entrent explicitement dans les missions de l'INSMI, et aussi dans les missions nationales de l'IHP. Nous sommes toujours dans l'attente d'une réponse à cette proposition.

Le directeur de l'IHP met en avant le manque de place pour le Centre Emile Borel : personne ne le nie, mais nous dénonçons ici encore l'absence de concertation ; à aucun moment, une réflexion commune n'a été proposée à nos associations par la direction de l'IHP pour envisager ensemble une meilleure occupation de l'espace, grâce à des mutualisations, des rationalisations, voire des travaux,... Le minimum serait donc qu'une commission de concertation soit mise en place sur ce sujet, incluant des représentants de nos associations et des membres du CA de l'IHP, et qu'on laisse à cette commission une chance d'arriver à un compromis qui satisfasse chacune des parties.

Au-delà de ces questions, des problèmes cruciaux concernant l'avenir de l'IHP commencent à émerger. La communauté mathématique ne peut se contenter de quelques phrases rassurantes concernant la bonne volonté de chacun. Conséquence de la loi LRU, la « dévolution » des locaux des universités parisiennes (c'est-à-dire l'attribution de leurs locaux en pleine possession à chaque établissement) va être l'occasion d'âpres débats et de rapports de force, qui ont déjà commencé. Il est indispensable que l'IHP puisse s'étendre, afin que le développement souhaitable du Centre Emile Borel ne se fasse pas au détriment des autres misions de l'IHP ; en effet, son rôle est primordial pour notre communauté et la présence commune des associations de mathématiques dans ses locaux contribue à en faire bien plus qu'un centre de conférences et de trimestres thématiques, mais un lieu unique qui est ressenti par notre communauté comme étant pleinement la « maison des mathématiciens ». La seule extension possible pour l'IHP dans sa proximité immédiate est dans le bâtiment « Chimie-Physique » voisin qui va être libéré par l'UPMC. L'INSMI (ou une autre entité ?) est-il prêt à se mettre clairement sur les rangs pour le réclamer ? Les événements liés au dernier CA mettent à jour des questions fondamentales pour nous : les missions nationales de l'IHP resteront-elles compatibles avec le statut d'une école interne de l'UPMC dans le nouveau contexte de l'autonomie des universités ? La discussion autour de ces interrogations ne peut rester confinée au sein d'un petit groupe de responsables nommés, quelle que soit leur bonne volonté. L'IHP joue un rôle central dans la vie mathématique française, et notre communauté dans son ensemble doit être saisie de ces problèmes, et doit pouvoir donner son sentiment, notamment à travers les Sociétés Savantes, qui la représentent.

Nous espérons que notre appel à une vraie concertation ne sera pas vain, mais permettra de renouer les excellentes relations que les sociétés savantes ont toujours développées avec les précédentes directions de l'IHP.

Le 31 mars 2010
Le Bureau de la SMF :
J.-M. Barbaroux, B. Helffer, F. Germinet,
V. Girardin, M. Granger, S. Jaffard,
P. Loidreau, E. Russ, M. Vigué

Annexe : extrait du PV du CA de l'IHP du 27 novembre 2001

Point V1 : Loyer des sociétés savantes hébergées
La lettre 13/VG/20.11.01 du président le l'UPMC concernant les projets d'avenant aux conventions d'associations hébergées à l'IHP est lue par B. Teissier aux membres du conseil. Le président de l'UPMC demande en substance le doublement des loyers des sociétés savantes hébergées au motif que leur accueil ne relève pas des missions de l'université.
L. Abouaf précise que l'UPMC a entrepris de mettre à jour les tarifs d'hébergement d'organismes dont les missions n'entrent pas dans celles de l'université. La mesure n'est pas dirigée contre l'IHP.
B. Teissier rappelle que le problème est que l'hébergement des sociétés savantes en mathématiques ou en physique ressort précisément des missions confiées à l'IHP et donc à l'université.
E. Gouin Lamourette suggère au Conseil, afin de supprimer toute ambiguïté, de supprimer dans toutes les conventions la référence aux « loyers » pour les remplacer par une « contribution ou participation aux charges communes ».
Le conseil adopte la proposition à l'unanimité des membres présents ou représentés et se prononce pour le maintien du montant des participations financières des sociétés savantes à leur niveau actuel.

MATHÉMATIQUES

TQFT : de la théorie des champs à la topologie quantique

Christian Blanchet[1]

La notion de théorie quantique des champs topologique, en bref TQFT, est apparue en 1988 dans deux articles, avec le même titre *Topological Quantum Field Theory*, écrits respectivement par Edward Witten [10] et par Michael Atiyah [1]. Notons que l'adjectif topologique se rapporte à théorie et non pas aux champs ; l'acronyme en quatre lettres TQFT, utilisé intensivement à partir des années 1990, n'apparaît pas dans les deux articles fondateurs ; Atiyah écrit *Topological* en toutes lettres devant l'acronyme préexistant QFT. Witten systématise l'idée introduite par A.S. Schwartz (1977) d'invariants topologiques définis par des intégrales de chemins

« *... it is in a sense a generally covariant quantum field theory, albeit one in which general covariance is unbroken, there are no gravitons, and the only excitations are topological.* »

Atiyah en donne une formulation axiomatique avec une liste d'exemples, et conclut :

« *These examples, which have natural geometric origins, and cover many of the most interesting topics in low-dimensional geometry show that topological QFTs have real relevance to geometry.* »

1. Axiomatique

La formulation donnée par Atiyah s'inspire d'une axiomatique des théories conformes des champs en dimension 2 due à G. Segal. Elle exprime le fait que les invariants considérés sont *locaux*. Concrètement cela signifie qu'il est possible de les calculer par *couper-coller* : si on considère une variété découpée en variétés à bords, la théorie associe à chaque morceau un vecteur, et la structure permet de calculer l'invariant de la variété globale à partir de ces contributions locales.

Une TQFT en dimension $n+1$ associe à chaque variété X, orientée compacte de dimension n, un espace vectoriel $\mathbf{V}(X)$ (ou plus généralement un module sur un anneau). Un cobordisme de dimension $n+1$ noté (M, X, Y) est une variété M, orientée compacte de dimension $n+1$, dont le bord est décomposé et identifié à l'union disjointe de $-X$ et Y ; autrement dit, la variété M a un bord entrant

[1] IMJ, Université Paris Diderot

identifié à X et un bord sortant identifié à Y. La TQFT associe à chaque cobordisme (M, X, Y) une application linéaire :

$$\tau(M) = \tau(M, X, Y) : \mathbf{V}(X) \to \mathbf{V}(Y) \ .$$

La TQFT doit satisfaire aux axiomes suivants :

(1) (Naturalité) Un difféomorphisme orienté entre variétés compactes de dimension n, $f : X \to X'$, induit un isomorphisme $f_\sharp : \mathbf{V}(X) \to \mathbf{V}(X')$. Pour un difféomorphisme g entre les cobordismes (M, X, Y) et (M', X', Y'), le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(X) & \xrightarrow{(g_{|X})_\sharp} & \mathbf{V}(X') \\ {\scriptstyle \tau(M)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau(M')} \\ \mathbf{V}(Y) & \xrightarrow{(g_{|Y})_\sharp} & \mathbf{V}(Y') \ . \end{array}$$

(2) (Fonctorialité) Si un cobordisme (W, X, Z) est obtenu en collant deux cobordismes (M, X, Y) et (M', Y', Z) avec un difféomorphisme $f : Y \to Y'$, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(X) & \xrightarrow{\tau(W)} & \mathbf{V}(Z) \\ {\scriptstyle \tau(M)}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \tau(M')} \\ \mathbf{V}(Y) & \xrightarrow{f_\sharp} & \mathbf{V}(Y') \ . \end{array}$$

(3) (Normalisation) Pour toute variété orientée compacte de dimension n, X, le cobordisme $([0,1] \times X, X, X)$ induit sur $\mathbf{V}(X)$ l'identité.

(4) (Multiplicativité) Il existe des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathbf{V}(X \amalg Y) \approx \mathbf{V}(X) \otimes \mathbf{V}(Y) \ ,$$

$$\mathbf{V}(\varnothing) \approx \mathbf{k} \ ,$$

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}((X \amalg Y) \amalg Z) & \approx & (\mathbf{V}(X) \otimes \mathbf{V}(Y)) \otimes \mathbf{V}(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{V}(X \amalg (Y \amalg Z)) & \approx & \mathbf{V}(X) \otimes (\mathbf{V}(Y) \otimes \mathbf{V}(Z)) \end{array} \quad ,$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(X \amalg \varnothing) & \approx & \mathbf{V}(X) \otimes \mathbf{k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{V}(X) & = & \mathbf{V}(X) \end{array} \quad .$$

(5) (Symétrie) L'isomorphisme :

$$\mathbf{V}(X \amalg Y) \approx \mathbf{V}(Y \amalg X) \ ,$$

induit par le difféomorphisme évident, correspond à l'isomorphisme naturel :

$$\mathbf{V}(X) \otimes \mathbf{V}(Y) \approx \mathbf{V}(Y) \otimes \mathbf{V}(X) \ .$$

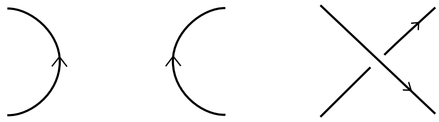


FIG. 1. Trois cobordimes élémentaires de dimension $0+1$

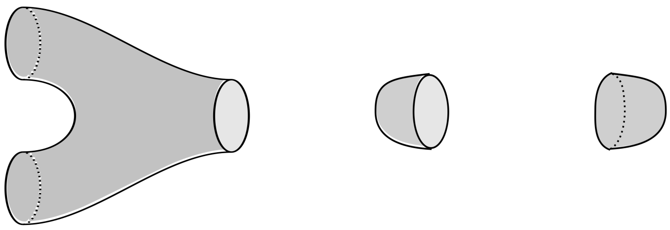


FIG. 2. Les cobordismes induisant la structure d'algèbre de Frobenius

Remarques. Une TQFT $(\mathbf{V},\tau)$ en dimension $n+1$ produit une action du groupe des difféomorphismes d'une variété orientée compacte de dimension n.

Une variété orientée compacte sans bord de dimension $n+1$, X, peut être considérée comme un cobordisme $(X,\varnothing,\varnothing)$. Une TQFT associe à ce cobordisme un invariant $\tau(M)$ dans $\mathrm{End}(\mathbf{V}(\varnothing))$ identifié au corps de base $\mathbf{k}$. Plus généralement, une variété orientée compacte à bord de dimension $n+1$, X, peut être considérée comme un cobordisme $(X,\varnothing,\partial X)$. Une TQFT associe à ce cobordisme un vecteur $\tau(M)$ qui vit dans $Hom_{\mathbf{k}}(\mathbf{k},\mathbf{V}(\partial M))=\mathbf{V}(\partial M)$.

2. TQFT en dimension 2 et algèbres de Frobenius

Étudions les TQFTs dans les petites dimensions. Les TQFTs en dimension $0+1$ sont en bijection avec les espaces vectoriels de dimension finie : on associe à une TQFT $(\mathbf{V},\tau)$ l'espace vectoriel $\mathbf{V}(\mathrm{pt})=E$ associé au point. L'espace vectoriel associé à l'union disjointe de a points orientés positivement et b points orientés négativement est : $E^{\otimes a}\otimes E^{*\otimes b}$. Aux cobordismes élémentaires représentés dans la figure 1 sont associés respectivement, l'évaluation, la co-évaluation et l'échange des deux facteurs (la volte). Ici les trois cobordismes sont représentés de gauche à droite, et sont abstraits : le sens du croisement n'a aucune importance. Il est clair que la théorie plongée en dimension 3 est beaucoup plus riche, mais c'est une autre histoire.

Soit $(\mathbf{V},\tau)$ une TQFT en dimension $1+1$. L'application linéaire τ associée à un disque avec deux trous considéré comme un cobordisme des deux cercles intérieurs vers le bord extérieur (le *pantalon* de la figure 2) définit un produit commutatif et associatif sur l'espace vectoriel $\mathbf{A}=\mathbf{V}(S^1)$, de neutre représenté par le disque D^2 vu comme un cobordisme du vide vers le cercle. Le disque D^2 considéré comme un cobordisme entre le cercle S^1 et la courbe vide définit une trace non dégénérée sur l'algèbre $\mathbf{A}$.

On obtient une algèbre de Frobenius commutative aussi appelée algèbre symétrique. Cette construction donne une bijection entre les classes d'équivalence de TQFTs en dimension 2 et les classes d'isomorphisme d'algèbres de Frobenius commutatives.

La cohomologie des variétés complexes compactes, comme les espaces projectifs $\mathbb{C}P^n$, ou plus généralement les grassmaniennes ou les variétés de drapeaux, fournissent des exemples intéressants d'algèbres de Frobenius commutatives.

3. Paradigme universel

On a vu qu'une TQFT $(\mathbf{V}, \tau)$ associe à une variété M de dimension $n+1$, de bord $\partial M = N$, un vecteur $\tau(M) \in \mathbf{V}(N)$. Dans beaucoup de cas, l'espace vectoriel $\mathbf{V}(N)$ est engendré par ces vecteurs $\tau(M)$, au besoin en considérant des cobordismes M un peu plus généraux, par exemple contenant une sous-variété de codimension 2. On dit dans ce cas que la théorie est engendrée par les cobordismes. Notons $\mathcal{V}(N, N')$ l'espace vectoriel de base tous les cobordismes de N vers N'. Par construction, l'espace vectoriel $\mathbf{V}(N)$ est alors égal au quotient de l'espace vectoriel $\mathcal{V}(\varnothing, N)$, par le noyau de la forme bilinéaire

$$\mathcal{V}(\varnothing, N) \otimes \mathcal{V}(N, \varnothing) \to \mathbf{k} \ ,$$

définie en étendant multilinéairement l'invariant de la variété sans bord obtenue en recollant.

Le paradigme de la *construction universelle* consiste à appliquer ce procédé à un invariant τ des variétés sans bord de dimension $n+1$ pour l'étendre en une TQFT. Les espaces vectoriels ainsi obtenus satisfont aux axiomes 1,2 et 3, mais peuvent ne pas être multiplicatifs. Pour des invariants convenables, on parvient à réduire à la dimension finie et établir la multiplicativité en s'appuyant sur des propriétés de chirurgie.

Pour illustrer la méthode, nous allons traiter un exemple assez élémentaire en dimension $1+1$. On reconstruit ici la TQFT associée à l'algèbre de Frobenius $H^*(\mathbf{CP}^1)$. Cet exemple joue un rôle central dans la construction de l'homologie de Khovanov des nœuds [4].

On considère l'invariant I des surfaces orientées compactes avec un nombre fini de points défini pour une surface de genre g avec k points par :

$$I\left((\Sigma_g, \{x_1, \ldots, x_k\})\right) = \begin{cases} 2 & \text{si } g=1,\ k=0 \\ 1 & \text{si } g=0,\ k=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition. *Il existe une TQFT $(\mathbf{V}, \tau)$ sur l'anneau $\mathbf{Z}$ qui étend l'invariant I.*

Démonstration. Pour une courbe Γ, $\mathcal{V}(\varnothing, \Gamma)$ est le groupe abélien libre de base les surfaces avec points de bord Γ (i.e. les cobordismes de $\varnothing$ vers Γ). Notre candidat est le module $\mathbf{V}(\Gamma)$, quotient de $\mathcal{V}(\Gamma)$ par le sous-module :

$$\mathcal{V}_0(\Gamma) = \left\{ \sum_i \lambda_i M_i,\ \text{pour tout cobordisme } M = (M, \Gamma, \varnothing),\ \sum_i I(M_i \cup_\Gamma M) = 0 \right\} .$$

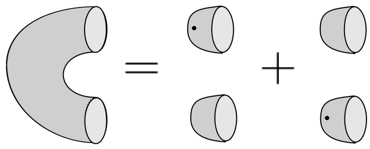


FIG. 3. Formule de chirurgie

À un cobordisme on associe l'application τ définie par le recollement. Cette application passe au quotient, et la construction satisfait aux axiomes 1,2,3. Le lemme ci-dessous et son corollaire calculent $\mathbf{V}(\Gamma)$ et montrent la multiplicativité. $\square$

Lemme (Formule de chirurgie)**.** *On a la relation suivante, illustrée dans la figure 3 :*

$$\tau([0,1]\times S^1,\varnothing,-S^1 \amalg S^1)=\tau(-D^2 \amalg (D^2,0))+\tau(-(D^2,0)\amalg D^2).$$

Corollaire. *a)* $\mathbf{V}(\Gamma)$ *est engendré par les unions disjointes de disques ou de disques avec un point.*
b) Le module $\mathbf{A}=\mathbf{V}(S^1)$ *est libre de rang* 2*, de base* D^2 *et* $(D^2,0)$.
c) $\mathbf{V}(\amalg_k S^1)\simeq \mathbf{A}^{\otimes k}$.

4. TQFT en dimension 3 : les théories de Witten-Reshetikhin-Turaev

Le formalisme des TQFTs a été principalement motivé par les théories en dimension 3, notamment par la formulation de Witten de la théorie de Chern-Simons. Le fameux polynôme de Jones [3] est un invariant V des nœuds et entrelacs dans la sphère S^3 qui vaut 1 pour le nœud trivial, et qui satisfait à la relation de modification locale (*Jones skein relation*) suivante :

Les trois entrelacs représentés sont identiques en dehors d'une boule, où ils sont décrits par les diagrammes. Witten interprète cette relation comme une relation de dépendance dans un *espace de Hilbert physique* associé à la sphère avec quatre points. Ici le groupe de jauge est $SU(2)$, et les points sont marqués avec la représentation fondamentale. *L'intégrale des chemins* de Feynman sur chacune des trois boules avec deux *lignes de Wilson* détermine un vecteur dans cet espace de Hilbert physique qui se trouve être de dimension deux :

« *A two dimensional vector space has the marvelous property that any three vectors obey a relation of dependance* ».

Witten donne des formules de chirurgie pour des invariants de variétés de dimension 3 avec entrelacs. Les premières constructions mathématiques pour les variétés sans bord sont dues à Reshetikhin et Turaev et reposent sur les représentations du groupe quantique $U_q(sl(2))$ aux racines de l'unité.
Cette catégorie de représentations est munie d'une structure enrubannée (tressage, twist et dualité) ce qui permet de définir le polynôme de Jones colorié : un invariant des entrelacs avec une représentation pour chaque composante. En

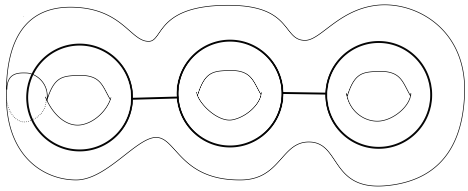


FIG. 4. Epaississement d'un graphe planaire : corps en anses de genre 3

étendant multilinéairement, on peut *colorier* chaque composante avec une combinaison linéaire de représentations. La chirurgie permet de décrire toutes les variétés orientées compactes de dimension trois par des entrelacs dans la sphère. Les relations entre des présentations de chirurgie d'une même variété sont décrites par le calcul de Kirby. Une combinaison linéaire de représentations qui définit un polynôme de Jones colorié compatible avec les mouvements de Kirby conduit à un invariant des variétés de dimension trois. Dans le cas des racines de l'unité, on obtient une telle combinaison linéaire, appelée couleur de Kirby, en moyennant sur un ensemble fini de représentations. Le polynôme de Jones colorié, et donc également les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev peuvent aussi être obtenus par la méthode de linéarisation des entrelacs (*skein theory*).

Blanchet, Habegger, Masbaum, Vogel [2] ont appliqué la construction universelle pour étendre les invariants précédents en une TQFT complète. Ici les cobordismes sont des variétés de dimension trois avec entrelacs coloriés, et une structure additionnelle, par exemple un champ de repères tangents. Les formules de chirurgie montrent que pour une surface Σ_g de genre g, l'espace vectoriel $\mathbf{V}(\Sigma_g)$ est engendré par les entrelacs coloriés dans une seule variété connexe de bord Σ_g. L'épaississement 3-dimensionnel d'un graphe trivalent planaire comme celui de la figure 4 est un *corps en anses* H. Pour une racine de l'unité d'ordre r (ou $4r$ pour la variable de Kauffman), on obtient une base de l'espace TQFT du bord $\Sigma = \partial H$ indexée par les *colorations admissibles* du graphe : une application des arêtes du graphe dans $\{0, \dots, r-2\}$ telle qu'en chaque sommet trivalent les valeurs i, j, k vérifient

$$i + j + k \equiv 0 \bmod 2 \ , \ |i - j| \leqslant k \leqslant i + j \ , \ i + j + k < 2r - 2 \ .$$

La dimension, comme fonction du genre g est donnée par la fameuse formule de Verlinde :

$$d_g = \left(\frac{r}{2}\right)^{g-1} \sum_{m=1}^{r-1} \left(\sin \frac{\pi j}{r}\right)^{2-2g} .$$

Notons que l'action du groupe des difféotopies de la surface sur ces espaces est asymtotiquement fidèle, et que ces espaces contiennent des réseaux invariants.

Par la suite, Turaev [9] a défini la structure de catégorie modulaire et montré qu'à toute catégorie modulaire est associée une TQFT. Ce formalisme s'applique à tous les groupes quantiques obtenus par déformation des algèbres de Lie classiques.

5. La quête des TQFTs en dimension 4

L'article de Witten [10] est motivé par les théories en dimension quatre : les invariants de Donaldson des variétés de dimension quatre, et l'homologie de Floer des variétés de dimension trois.

« *A twisted version of four dimensional supersymmetric gauge theory is formulated. The model, which refines a nonrelativistic treatment by Atiyah, appears to underlie many recent developments in topology of low dimensional manifolds ; the Donaldson polynomial invariants of four manifolds and the Floer groups of three manifolds appear naturally* ».

« *The Floer homology groups are then the ground states of a certain Hamiltonian which is closely related to physical quantum field theories* ».

Le programme suggéré par Witten consiste à définir une TQFT en dimension $3+1$, pour laquelle les invariants des variétés de dimension quatre sans bord sont ceux de Donaldson, et les espaces associés aux variétés de dimension trois sont les homologies de Floer. C'est la poursuite de ce programme qui a conduit Ozsváth et Szabó à la définition de l'homologie de Heegard-Floer [6, 7]. Cette homologie, qui a plusieurs variantes, est définie pour les variétés de dimension trois avec entrelacs. Dans le cas d'un nœud dans la sphère de dimension trois, la caractéristique d'Euler graduée d'une version de cette homologie est égale au polynôme d'Alexander. On dit que l'homologie de Heegard-Floer *catégorifie* le polynôme d'Alexander.

La catégorification des invariants polynomiaux des nœuds et entrelacs évoqués plus haut conduit à des théories d'homologie d'entrelacs (*link homology*). La première en date est l'homologie de Khovanov qui catégorifie le polynôme de Jones. Ces théories ont des propriétés fonctorielles : les cobordismes plongées dans $[0,1]\times S^3$ agissent sur ces groupes d'homologie. Ce sont en réalité des invariants 4-dimensionnels. Ils contiennent par exemple des informations sur le genre d'un nœud dans la boule de dimension quatre. Notons que l'homologie de Heegard-Floer quant à elle détecte le genre d'un nœud dans la sphère et répond au problème de fibration sur le cercle du complément ; elle semble plus puissante que l'homologie de Khovanov et ses variantes pour répondre à des questions de nature géométrique ou topologique.

La catégorification des invariants d'entrelacs produits par les groupes quantiques supporte des approches algébriques variées qui sont au cœur de la théorie des représentations. Le passage d'une algèbre de Lie classique au groupe quantique correspondant consiste à déformer son algèbre enveloppante, ce qui enrichit la théorie de représentation, et la rend intéressante pour produire des TQFTs en dimension $2+1$. L'étape suivante en cours (voir par exemple [5]) consiste à catégorifier le groupe quantique et ses représentations, ce qui devrait en général produire des TQFTs en un sens à préciser en dimension $3+1$.

6. Références

[1] Atiyah, M. — *Topological Quantum Field Theory.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 68 (1988), p. 175-186

[2] Blanchet, C. Habegger, N. Masbaum, G. Vogel, P. — Topology *Topological Quantum Field Theories derived from the Kauffman bracket.* (1995) 883-927.

[3] Jones, V. — *A polynomial invariant for links via von Neuman algebras.* Bull. Amer. Math. Sot. 12 (1985).

[4] KHOVANOV, M. — *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. 101, n° .3, 359-426 (2000).
[5] KHOVANOV, M. LAUDA A. — *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, II, III*, arXiv :0803.4121, arXiv :0804.2080, arXiv :0807.3250.
[6] OZSVÁTH, P. SZABÓ, Z. — *Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds.* Ann. of Math. (2) 159 (2004), n° .3, 1027-1158.
[7] OZSVÁTH, P. SZABÓ, Z. — *Holomorphic disks and three-manifold invariants : properties and applications.* Ann. of Math. (2) 159 (2004), n° .3, 1159-1245.
[8] RESHETIKHIN, N. TURAEV, V. — *Invariants of* 3*-manifolds via link polynomials and quantum groups.* Invent. Math. 103 (1991), n° .3, 547-597
[9] TURAEV V. — *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds*, De Gruyter Studies in Math. 18, 1994.
[10] WITTEN E. — *Topological Quantum Field Theory.* Comm. Math. Phys., 117 (1988), 353-386.
[11] WITTEN E. — *Quantum Field Theory and the Jones polynomial.* Comm. Math. Phys., 121 (1989), 351-399.

La méthode probabiliste

Marie Heyvaert[1], F. Thomas Bruss[2]

1. Introduction

La *méthode probabiliste* désigne l'utilisation de raisonnements probabilistes dans la résolution de problèmes purement déterministes. Nous partons d'un problème qui n'a rien d'aléatoire. Nous lui associons un espace de probabilités judicieusement choisi. C'est en travaillant à l'intérieur de celui-ci que nous aboutirons à une conclusion qui pourra fournir une solution au problème non probabiliste de départ.

Cette méthode s'est révélée très efficace dans l'établissement de nombreux théorèmes tant en théorie des graphes qu'en combinatoire ou en théorie des nombres. On trouve également des résultats obtenus par cette méthode en théorie des jeux, en théorie de la complexité, en géométrie, et en analyse.

Dans la section 2, nous décrivons des techniques souvent utilisées dans les démonstrations via la méthode probabiliste. Ensuite, la section 3 présente une série d'exemples piochés dans plusieurs domaines où les techniques probabilistes ont été appliquées avec succès. La plupart de ces exemples illustrent les arguments de la section 2. Mais il y en a aussi qui font appel à d'autres raisonnements. La démonstration de l'égalité dite *égalité min-max* en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, est, à notre connaissance, neuve.

La méthode probabiliste peut également servir à fournir des arguments heuristiques (non rigoureux) pour conforter les mathématiciens dans l'idée qu'une certaine conjecture est vraie. Nous aborderons cet aspect dans la section 4. En fait, nous tenterons d'appliquer la méthode à deux grands problèmes de la théorie des nombres : la conjecture de Goldbach et le théorème de Green-Tao. Nous leur associerons un modèle probabiliste. Cependant, contrairement aux exemples de la section 3, nous ne pourrons pas prouver, ici, que le résultat obtenu dans le contexte probabiliste est encore vrai dans le contexte initial car nous n'avons pas de preuve que le modèle choisi décrit correctement la situation réelle.

Nous nous sommes principalement basés sur le livre de Alon et Spencer [1] et sur celui de Diestel [5] pour rédiger la section 3 de ce travail. Quant à la section 4, elle est inspirée de notes non publiées rédigées par le deuxième auteur.

Le but de ce travail est de donner un bref aperçu de ce qu'il est possible de faire avec la méthode probabiliste, d'exposer ses concepts de base et de montrer la diversité des questions qu'elle peut traiter. Ce qui nous intéresse dans toutes les démonstrations qui suivent, c'est en effet plus la manière de procéder que les

[1] Université Libre de Bruxelles
[2] Université Libre de Bruxelles

résultats obtenus. Nous voulons souligner la puissance et l'élégance qui se cachent derrière les calculs. En exprimant un problème dans le langage probabiliste, nous pouvons gagner en simplicité. Dans l'histoire des mathématiques, la méthode probabiliste est une technique de preuve relativement récente. Sans doute est-elle loin de la fin de ses possibilités.

2. Deux techniques clés

2.1. La technique de base

Le principe de base de la méthode probabiliste peut être décrit de la manière suivante : pour prouver l'existence d'une structure combinatoire jouissant de certaines propriétés, nous construisons un espace de probabilités approprié au problème et nous montrons qu'un élément choisi de façon aléatoire dans cet espace possède les propriétés désirées avec une probabilité strictement positive.

Remarquons que, dans certains ouvrages, c'est ce principe-ci qui porte le nom de *méthode probabiliste*. Sa première apparition remonte à l'année 1943 avec la publication, par Szele, d'un résultat sur l'existence de graphes complets orientés contenant un grand nombre de chemins hamiltoniens.[3] Cependant, c'est Paul Erdös qui est considéré comme le véritable promoteur de cette méthode. En introduisant des probabilités là où personne n'en attendait, il démontra un grand nombre de théorèmes provenant principalement de la théorie des graphes. Depuis, cette approche s'est étendue à d'autre domaines.

2.2. L'argument de l'espérance

Un deuxième argument probabiliste est fréquemment utilisé pour garantir l'existence d'une structure vérifiant une propriété particulière. Il fait intervenir l'espérance d'une variable aléatoire. Le voici :

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités (Ω, A, P). Si l'espérance $E[X]$ de X est égale à μ, alors il existe un point ω_1 dans Ω pour lequel

$$X(\omega_1) \leqslant \mu$$

et, de même, il existe un point ω_2 dans Ω pour lequel

$$X(\omega_2) \geqslant \mu.$$

La démonstration, par l'absurde, est évidente. Le meilleur moyen d'illustrer ces techniques de preuves est bien entendu de les appliquer à des exemples concrets. Quelques-uns sont présentés ci-dessous. Le lecteur intéressé en trouvera d'autres dans le livre de Alon et Spencer [1].

[3] La démonstration de Szele est donnée dans le livre de Alon et Spencer [1], à la page 15.

3. Diverses applications

3.1. Nombres de Ramsey

Commençons par exposer un résultat de la théorie des graphes. Nous désignons par K_n le graphe complet à n sommets et par V son ensemble de sommets.

Définition 1 (Nombre de Ramsey). *Le* nombre de Ramsey $R(k,l)$ *est le plus petit entier n tel que pour toute coloration des arêtes de K_n en deux couleurs, disons bleu et rouge, il y ait soit un K_k rouge (c'est-à-dire un sous-graphe complet à k sommets dont toutes les arêtes sont coloriées en rouge), soit un K_l bleu.*

Ramsey a montré en 1930 que ces nombres sont tous finis. En 1947, Erdös utilise les probabilités pour obtenir des bornes inférieures pour les nombres de Ramsey diagonaux $R(k,k)$. C'est le premier problème qu'il traite avec sa méthode probabiliste.

Théorème 1 (Erdös, 1947). *Si les entiers positifs n et k satisfont à l'inégalité $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, alors $R(k,k) \geqslant n$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous remarquons que prouver ce théorème revient à montrer l'existence d'une coloration des arêtes de K_n sans K_k rouge ni K_k bleu.

Supposons que chaque arête est coloriée soit en bleu, soit en rouge avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et ceci indépendamment des autres arêtes. Formellement, nous venons de créer un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que les éléments de Ω sont les $2^{\binom{n}{2}}$ colorations possibles des arêtes de K_n en deux couleurs. Ces éléments sont tous équiprobables.

Pour tout ensemble S de k sommets, soit A_S l'événement que le sous-graphe de K_n induit par S est unicolore. Clairement, pour chaque S,

$$P(A_S) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Soit B l'événement qu'il y ait au moins un K_k unicolore dans une coloration de K_n. Alors

$$P(B) = P\left(\bigcup_{\substack{S\subseteq V\\ |S|=k}} A_S\right) \leqslant \sum_{\substack{S\subseteq V\\ |S|=k}} P(A_S) = \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$$

et le dernier terme est strictement inférieur à 1 par hypothèse. Par conséquent,

$$P(B^c) = 1 - P(B) > 0.$$

Cela assure l'existence d'un point de notre espace de probabilité pour lequel l'événement B^c se réalise. Autrement dit, il existe une coloration de K_n pour laquelle il n'y a aucun K_k unicolore. Ceci termine la preuve. $\square$

Ce premier exemple est une application directe de la méthode probabiliste de base décrite dans la section 2. Notons que cette méthode est *non constructive*. Aucune indication n'est fournie quant à la manière d'obtenir une telle coloration sans K_k unicolore.

Corollaire 2. *$R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$ pour tout $k \geqslant 3$.*

Démonstration. Le résultat découle directement du Théorème 1 en choisissant $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. En effet, dans ce cas, on obtient :

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \;<\; \frac{n^k}{k!} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \;=\; \frac{2^{1+k/2}}{k!} \frac{n^k}{2^{k^2/2}} \;<\; 1.$$

□

Remarquons encore que $R(2,2) = 2$. Nous allons maintenant montrer que le résultat du Théorème 1 peut être amélioré. Cette fois, c'est la deuxième technique de la section 2 qui nous servira.

Théorème 3. *$R(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ quels que soient les entiers n et k.*

Démonstration. Le début de la preuve est identique à celui de la preuve du Théorème 1. À nouveau, nous considérons une coloration aléatoire des arêtes de K_n obtenue en coloriant indépendamment chaque arête soit en bleu, soit en rouge. Chaque couleur a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être choisie.

Pour tout ensemble S de k sommets, soit X_S la variable aléatoire indicatrice définie par

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{si le sous-graphe de } K_n \text{ induit par } S \text{ est unicolore} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de K_k unicolores dans une coloration de K_n.

$$X = \sum_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=k}} X_S$$

En calculant l'espérance de X, nous obtenons

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=k}} E[X_S] \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq V \\ |S|=k}} P(\text{le sous-graphe de } K_n \text{ induit par } S \text{ est unicolore}) \\ &= \mu \end{aligned}$$

où $\mu = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. Ceci certifie l'existence d'une coloration des arêtes de K_n pour laquelle $X \leqslant \mu$. Fixons une telle coloration. Ensuite, supprimons de K_n un sommet dans chaque K_k unicolore. Au plus μ sommets sont supprimés. Après leur suppression, il nous reste un graphe complet d'au moins $n - \mu$ sommets. Plus aucun K_k unicolore n'apparaît dans sa coloration.

Nous pouvons alors en conclure que $R(k,k) > n - \mu$. □

Il nous semble intéressant de souligner une particularité du raisonnement qui précède : il utilise le *principe de l'altération* qui existe dans d'autres démonstrations via la méthode probabiliste. Dans un premier temps, un argument probabiliste prouve l'existence d'une structure (ici, une coloration) qui n'a pas toutes les propriétés souhaitées mais qui possède quelques *défauts*. Ensuite, grâce à de petites modifications, les défauts sont effacés pour laisser apparaître la structure désirée.

3.2. Ensemble dominant de sommets dans un graphe

Voici encore un résultat concernant la théorie des graphes.

Définition 2 (Degré minimum). *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple (non dirigé). Nous désignons l'ensemble des voisins d'un sommet v de G par $N(v)$. Le nombre $d(v) := |N(v)|$ est le* degré *du sommet v et $\delta(G) := min\{d(v) \mid v \in V\}$ est le* degré minimum *de G.*

Définition 3 (Ensemble dominant). *Dans un graphe $G = (V, E)$, un ensemble de sommets $U \subseteq V$ est appelé dominant si tout sommet $v \in V \backslash U$ possède au moins un voisin dans U.*

Théorème 4. *Si $G = (V, E)$ est un graphe de n sommets dont le degré minimum est $\delta > 1$, alors G a un ensemble dominant d'au plus $n\left(\frac{1+ln(\delta+1)}{\delta+1}\right)$ sommets.*

Démonstration. Nous commençons par définir un espace de probabilités à l'intérieur duquel nous travaillerons. L'idée est la suivante : posons $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$, choisissons aléatoirement et indépendamment chaque sommet de V avec une probabilité p et considérons X l'ensemble aléatoire formé de tous les sommets sélectionnés.

Formellement, ceci signifie que nous travaillons dans un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est l'ensemble des sous-ensembles X de V, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω et où la mesure de probabilité P est définie de façon à ce que les événements $[v \in X] \equiv \{X \in \Omega \mid v \in X\}$ soient indépendants avec $P(v \in X) = p$ pour tout $v \in V$. L'ensemble X considéré est un élément quelconque de cet espace.

Soit Y_X l'ensemble des sommets de $V \backslash X$ qui n'ont aucun voisin dans X. L'espérance de $|X|$ est clairement égale à np. La variable aléatoire $|Y_X|$ peut s'écrire comme une somme de n variables indicatrices χ_v $(v \in V)$ où

$$\chi_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in Y_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque sommet $v \in V$,

$$\begin{aligned} P(v \in Y_X) &= P(v \text{ et ses voisins ne sont pas dans } X) \\ &= (1-p)^{1+d(v)} \\ &\leqslant (1-p)^{1+\delta}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} E[|X| + |Y_X|] &= np + \sum_{v \in V} E[\chi_v] \\ &= np + \sum_{v \in V} P(v \in Y_X) \\ &\leqslant np + n(1-p)^{1+\delta}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(1-x) \leqslant e^{-x}\ \forall x \in \mathbb{R}$, et en remplaçant p par sa valeur $\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E[|X|+|Y_X|] &\leqslant np + ne^{-p(\delta+1)} \\ &= n\left(\frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right) + ne^{-\ln(\delta+1)} \\ &= n\left(\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right). \end{aligned}$$

Donc, il existe au moins un choix de $X \subseteq V$ pour lequel

$$|X|+|Y_X| \leqslant n\left(\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right).$$

Pour un tel X, l'ensemble $U = X \cup Y_X$ est un ensemble dominant d'au plus $n\left(\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right)$ sommets. □

Deux ingrédients classiques de la méthode probabiliste sont incorporés à cette preuve. Il s'agit de l'argument de l'espérance et du principe d'altération, car l'ensemble aléatoire X ne fournit pas immédiatement l'ensemble dominant recherché. Nous devons le modifier en lui ajoutant Y_X.

3.3. Graphes avec nombre chromatique et tour de taille arbitrairement grands

Voici une dernière application en théorie des graphes.

Le *tour de taille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur de son plus petit cycle. $\alpha(G)$ est la taille du plus grand stable dans G et $\chi(G)$ est le nombre chromatique de G.

Théorème 5 (Erdös, 1959)**.** *Pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, il existe un graphe H avec $\chi(H) > k$ et $g(H) > l$.*

En 1959, Erdös a démontré ceci grâce à la méthode probabiliste. Pour beaucoup, c'est l'application la plus surprenante de la méthode car personne ne s'attend à une preuve non constructive de ce genre de théorème. La démonstration d'Erdös combine la technique de base (cf. section 2.1), le principe d'altération (cf. fin section 3.1) et l'inégalité de Markov. Nous décrivons ci-dessous le raisonnement suivi et les arguments probabilistes utilisés. Nous renvoyons le lecteur au livre de Diestel [5] pour le détail des calculs.

Démonstration. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Prenons un réel $\varepsilon \in]0, 1/l[$ et posons $p = n^{\varepsilon-1} \in [0,1]$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ est un paramètre qui sera fixé plus tard. Définissons un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est l'ensemble des graphes sur les sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$, où $\mathcal{A}$ contient toutes les parties de Ω et où la mesure de probabilité P est définie de façon à ce que les événements

$$A_{i,j} \equiv \{G \in \Omega \mid \{i,j\} \text{ est une arête de } G\}$$

soient indépendants avec $P(A_{i,j}) = p$ pour toute paire $\{i,j\}$ de sommets.

Tirons au hasard un graphe G dans Ω. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de cycles de longueur au plus l dans G. Nous pouvons alors montrer (cf. Diestel [5]) que, pour n suffisamment grand, nous avons

(i) $P(\alpha(G) \geqslant \frac{n}{2k}) < 1/2$
(ii) $E[X] < n/4$.

Par l'inégalité de Markov, (ii) implique que $P(X \geqslant \frac{n}{2}) < 1/2$. Donc, en fixant n suffisamment grand, nous obtenons

$$\begin{aligned} P\Big(\alpha(G) < \frac{n}{2k} \text{ et } X < \frac{n}{2}\Big) &= 1 - P\Big(\alpha(G) \geqslant \frac{n}{2k} \text{ ou } X \geqslant \frac{n}{2}\Big) \\ &\geqslant 1 - P\Big(\alpha(G) \geqslant \frac{n}{2k}\Big) - P\Big(X \geqslant \frac{n}{2}\Big) \\ &> 1 - 1/2 - 1/2 = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la technique de base de la méthode probabiliste, nous venons ainsi de prouver l'existence d'un graphe G^* dans Ω avec $\alpha(G^*) < \frac{n}{2k}$ et ayant moins de $n/2$ cycles de longueur au plus l.

Il reste une dernière étape d'altération à effectuer. En supprimant de G^* un sommet par cycle de longueur inférieur ou égale à l, nous faisons apparaître un nouveau graphe H. Ce H n'a plus de cycle de longueur inférieur ou égale à l. D'où $g(H) > l$.

De plus,

$$\chi(H) \geqslant \frac{\text{nombre de sommets de } H}{\alpha(H)} \geqslant \frac{n/2}{\alpha(H)} \geqslant \frac{n/2}{\alpha(G^*)} > \frac{n/2}{n/2k} = k.$$

$\square$

3.4. Ensemble sans somme

La méthode probabiliste a aussi été utilisée pour prouver un théorème de théorie combinatoire des nombres.

Définition 4 (Ensemble sans somme). *Un sous-ensemble A d'un groupe abélien $(G, +)$ est appelé* sans somme *si $(A + A) \cap A = \varnothing$, c'est-à-dire si l'équation $a_1 + a_2 = a_3$ n'a pas de solution avec a_1, a_2, $a_3 \in A$.*

Théorème 6 (Erdös, 1965). *Tout ensemble $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de n entiers non nuls contient un sous-ensemble sans somme A de taille $|A| > \frac{n}{3}$.*

Démonstration. Soit p un nombre premier de la forme $p = 3k+2$ avec p strictement supérieur à $2\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i|$. L'existence de p est garantie par le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet. [4]

Posons $C = \{k+1, k+2, \dots, 2k+1\}$. Clairement C est un sous-ensemble sans somme du groupe cyclique $\mathbb{Z}_p$.

Munissons $\{1, 2, \dots, p-1\}$ d'une distribution uniforme et choisissons au hasard un entier x dans cet ensemble. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, définissons d_i par $d_i \equiv xb_i \pmod p$, $0 \leqslant d_i < p$. Puisque x peut prendre toutes les valeurs entre 1 et $p-1$

[4] Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet : pour tous naturels non nuls a et b premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a + nb$, où $n > 0$.

et puisque b_i est non nul (par hypothèse), alors d_i, lui, peut être n'importe quel élément non nul de $\mathbb{Z}_p$. D'où, pour $i = 1, \dots, n$,

$$P(d_i \in C) = \frac{|C|}{p-1} = \frac{k+1}{3k+1} > \frac{1}{3}.$$

Appelons A l'ensemble (aléatoire) de tous les éléments b_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) pour lesquels $d_i \in C$. Alors

$$\begin{aligned} E[|A|] &= \text{le nombre moyen de } d_i \text{ qui sont dans } C \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(d_i \in C) \\ &> n \cdot \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Par l'argument de l'espérance (cf. section 2.2), nous sommes certains qu'il existe un $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tel que $|A| > \frac{n}{3}$. Fixons un tel x. Ainsi, on obtient un sous-ensemble A de B de taille $|A| > \frac{n}{3}$ dont tous les éléments $a \in A$ vérifient $xa \pmod p \in C$.

Il ne reste plus qu'à montrer que ce A est sans somme. Par l'absurde, supposons qu'il existe a_1, a_2, $a_3 \in A$ tels que $a_1 + a_2 = a_3$. Alors nous aurions $xa_1 + xa_2 \equiv xa_3 \pmod p$. Mais ceci contredit le fait que C est un sous-ensemble sans somme de $\mathbb{Z}_p$. □

3.5. Théorème d'approximation de Weierstrass

Poursuivons avec une très belle application de la méthode probabiliste dans le domaine de l'analyse. C'est le célèbre théorème d'approximation uniforme de Weierstrass. Ce théorème affirme que l'ensemble des polynômes réels sur $[0, 1]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues réelles sur $[0, 1]$. Formellement, il s'énonce comme suit :

Théorème 7 (Weierstrass). *Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $p(x)$ tel que $|p(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 1]$.*

Parmi toutes les preuves de ce théorème, celle de Bernstein [2] est sûrement la plus élégante. (Voir aussi [7].) C'est une preuve constructive. L'utilisation des probabilités la rend particulièrement intéressante. Elle repose sur les propriétés de la distribution binomiale et sur l'inégalité de Chebyshev que nous rappelons : si X est une variable aléatoire réelle de moyenne μ et de variance σ^2, alors

$$\forall \lambda > 0 : P(|X - \mu| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$

Voici la preuve probabiliste du Théorème 7 donnée par Bernstein :

Démonstration. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur un domaine compact, nous avons

(i) f est uniformément continue ;
(ii) f est bornée.

Par (i), il exite un $\delta > 0$ tel que si $x, x' \in [0,1]$ et si $|x - x'| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/2$. De plus, (ii) implique l'existence d'un $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|f(x)| \leqslant M$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in]0,1[$, nous définissons $B_{n,x}$ comme étant une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et x. Donc, $B_{n,x}$ compte le nombre de succès obtenus en répétant de façon indépendante n épreuves de paramètre de succès x. Par conséquent

$$\forall j = 0, 1, \ldots, n : P(B_{n,x} = j) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

L'espérance de $B_{n,x}$ est nx et sa variance est $nx(1-x)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$P\left(|B_{n,x} - nx| \geqslant n^{2/3}\right) \leqslant \frac{nx(1-x)}{n^{4/3}} \leqslant \frac{1}{n^{1/3}}$$

où la première inégalité résulte de l'inégalité de Chebyshev et la deuxième vient du fait que $x(1-x) \leqslant 1$ lorsque $x \in]0,1[$. Dès lors, nous pouvons choisir un entier n suffisamment grand de façon à ce que les deux inégalités suivantes soient satisfaites :

$$P\left(|B_{n,x} - nx| \geqslant n^{2/3}\right) < \frac{\varepsilon}{4M} \tag{1}$$

et

$$\frac{1}{n^{1/3}} < \delta. \tag{2}$$

Nous définissons le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

et nous vérifions que $|P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$. Si $x = 0$ ou $x = 1$, $P_n(x) = f(x)$. Soit donc $x \in]0,1[$.

D'abord, remarquons que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right)\right|.$$

Puis, en appliquant l'inégalité triangulaire à deux reprises, nous obtenons

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| \quad \leqslant & \sum_{i;|i-nx|<n^{2/3}} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \\ & + \sum_{i;|i-nx|\geqslant n^{2/3}} \underbrace{\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}}_{P\left(B_{n,x}=i\right)} \underbrace{\left(\left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right| + |f(x)|\right)}_{\leqslant 2M} \end{aligned}$$

Dans la première somme, nous avons

$$\left|\frac{i}{n} - x\right| = \frac{|i - nx|}{n} < \frac{n^{2/3}}{n} = \frac{1}{n^{1/3}} < \delta \qquad \text{par (2)}$$

et donc

$$\left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon/2.$$

Nous pouvons majorer cette première somme par

$$\varepsilon/2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \varepsilon/2 \cdot 1 = \varepsilon/2.$$

La deuxième somme quant à elle est majorée par

$$\begin{aligned} \sum_{i;|i-nx|\geqslant n^{2/3}} P\left(B_{n,x} = i\right) 2M &= P\left(|B_{n,x} - nx| \geqslant n^{2/3}\right) \cdot 2M \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} 2M && \text{par (1)} \\ &= \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Nous pouvons enfin conclure :

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon.$$

$\square$

Pour une autre application de la méthode probabiliste en analyse, nous citons le travail de [3] sur une approche probabiliste du polynôme de Taylor.

3.6. Égalité Min-Max

Voici une autre facette d'un raisonnement probabiliste pour un résultat purement déterministe, à savoir, pour ce qu'on appelle l'Égalité Min-Max. Notre démonstration semble être neuve.

Théorème 8. *Tout n-uplet de réels $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfait à l'égalité*

$$\begin{aligned} \max\{x_1, \ldots, x_n\} &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k - \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n} \min\{x_{k_1}, x_{k_2}\} \\ &\quad + \sum_{1\leqslant k_1<k_2<k_3\leqslant n} \min\{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}\} \\ &\quad - \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \min\{x_1, \ldots, x_n\}. \end{aligned}$$

Comment prouver une telle égalité ? Une approche standard serait celle par induction sur n, mais les calculs sont laborieux. Voici notre approche.

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels fixés. Posons $m := \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $M := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Nous introduisons une variable aléatoire continue Y de loi uniforme sur $[m, M]$.

$$\Longrightarrow P(Y \leqslant y) = \frac{y-m}{M-m} \qquad \text{pour tout } y \in [m, M].$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, appelons A_i l'événement $[Y \leqslant x_i]$ et calculons de deux manières la probabilité de l'événement $\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]$.
D'une part,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P(\ Y \leqslant x_1 \text{ ou } Y \leqslant x_2 \text{ ou } \ldots \text{ou } Y \leqslant x_n) \\ &= P(\ Y \leqslant \max\{x_1, \ldots, x_n\}) \\ &= P(\ Y \leqslant M) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

D'autre part, la formule d'inclusion-exclusion fournit

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_i P(A_i) \ - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \ - \ \ldots \\ &\quad +(-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \\ &= \sum_i P(Y \leqslant x_i) \ - \sum_{i<j} P(Y \leqslant \min\{x_i, x_j\}) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} P(Y \leqslant \min\{x_i, x_j, x_k\}) \ - \ \ldots \\ &\quad +(-1)^{n-1} P(Y \leqslant \min\{x_1, \ldots, x_n\}) \\ &= \sum_i \left(\frac{x_i - m}{M-m}\right) \ - \sum_{i<j} \left(\frac{\min\{x_i, x_j\} - m}{M-m}\right) \\ &\quad + \sum_{i<j<k} \left(\frac{\min\{x_i, x_j, x_k\} - m}{M-m}\right) \ - \ \ldots \\ &\quad +(-1)^{n-1} \left(\frac{\min\{x_1, \ldots, x_n\} - m}{M-m}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

En multipliant (3) et (4) par $M - m$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M - m &= \sum_i (x_i - m) - \sum_{i<j} (\min\{x_i, x_j\} - m) + \sum_{i<j<k} (\min\{x_i, x_j, x_k\} - m) \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n-1}(\min\{x_1, \ldots, x_n\} - m) \\ &= \sum_i x_i - \sum_{i<j} \min\{x_i, x_j\} + \sum_{i<j<k} \min\{x_i, x_j, x_k\} \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n-1} \min\{x_1, \ldots, x_n\} \\ &\quad - \underbrace{\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\right]}_{=1} m. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à additionner m aux deux membres de l'égalité pour faire apparaître le résultat souhaité. □

4. Quelques arguments probabilistes heuristiques

4.1. Conjecture de Goldbach

Nous allons à présent nous intéresser à l'une des plus célèbres et des plus anciennes conjectures de la théorie des nombres. La conjecture de Goldbach, qui date de 1743 et qui aujourd'hui encore reste non résolue, s'énonce comme suit :

Conjecture 9 (Conjecture de Goldbach)**.** *Tout entier pair strictement supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.*

Nous présentons ici deux arguments probabilistes qui montrent que nous avons de bonnes raisons de penser que la conjecture est vraie. Tous deux reposent sur le théorème des nombres premiers démontré simultanément et indépendamment par Jacques Hadamard (France) et Charles de la Vallée Poussin [4] (Belgique) en 1896.

Théorème 10 (Hadamard et de la Vallée Poussin, 1896)**.**

$$\frac{\#\{p \leqslant n \mid p \text{ est un nombre premier}\}}{n} \sim \frac{1}{\ln(n)}$$

Premier argument Soit $2n$ un entier pair strictement supérieur à 2. Il existe n façons de le décomposer en une somme de la forme $m + (2n - m)$ avec $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $N(2n)$ le nombre de telles décompositions pour lesquelles m et $2n - m$ sont des nombres premiers. Choisissons un entier m au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. La probabilité que ce m et $2n - m$ soient tous les deux des nombres premiers est

$$\frac{\#\text{ choix de } m \text{ pour lesquels } m \text{ et } 2n - m \text{ sont premiers}}{\#\text{ choix possibles pour } m} = \frac{N(2n)}{n}.$$

De plus, si on fait l'hypothèse que les événements [m est premier] et [$2n - m$ est premier] sont indépendants, cette même probabilité est asymptotiquement

$$\frac{1}{(\ln(n))^2}.$$

En effet, $P(m \text{ et } 2n-m \text{ premiers})$

$$\begin{aligned}
&= P(m \text{ premier}) \cdot P(2n-m \text{ premier})\\
&= \left(\frac{\#\{p \leqslant n \mid \text{p premier}\}}{n}\right) \cdot \left(\frac{\#\{n+1 \leqslant p \leqslant 2n \mid \text{p premier}\}}{n}\right)\\
&= \left(\frac{\#\{p \leqslant n \mid \text{p premier}\}}{n}\right) \cdot \left(\frac{\#\{p \leqslant 2n \mid \text{p premier}\}}{n} - \frac{\#\{p \leqslant n \mid \text{p premier}\}}{n}\right)
\end{aligned}$$

et, par le théorème des nombres premiers, ceci se comporte asymptotiquement comme

$$\frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{2}{\ln(2n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right) \sim \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{2}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}\right) \sim \frac{1}{(\ln(n))^2}.$$

Donc, nous en déduisons que

$$N(2n) \sim \frac{n}{(\ln(n))^2}$$

et la fonction à droite tend vers ∞ lorsque n tend vers ∞.

Autrement dit, plus n est grand, plus nous devons nous attendre à ce qu'il existe un grand nombre de décompositions de n en somme de deux nombres premiers. Donc, plus n est grand, moins nous aurons de chances de trouver un contre-exemple à la conjecture de Goldbach (et nous savons déjà qu'elle a été vérifiée par ordinateur pour tous les entiers pairs jusqu'à $1,1 \times 10^{18}$ ...) !

Deuxième argument Pour un entier pair $2n$ strictement supérieur à 2, considérons le modèle probabiliste suivant : tout nombre de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ est un nombre premier avec probabilité (asymptotique) $\frac{1}{\ln(2n)}$ indépendamment des autres nombres de l'ensemble. Nous pouvons estimer la probabilité que, dans notre modèle, $2n$ ne soit pas la somme de deux nombres premiers.

Appelons E_n l'événement qui correspond à un tel *échec*, c'est-à-dire E_n est l'événement $[N(2n) = 0]$. En utilisant les hypothèses faites dans notre modèle, nous calculons la probabilité (asymptotique) d'un *échec*.

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= P(\ \forall 1 \leqslant m \leqslant n,\ m \text{ ou } 2n-m \text{ n'est pas premier})\\
&= \prod_{m=1}^{n} P(m \text{ ou } 2n-m \text{ n'est pas premier})\\
&\sim \left(1 - \frac{1}{(\ln(2n))^2}\right)^n\\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{(\ln(2n))^2}\right)^{(\ln(2n))^2}\right]^{n/(\ln(2n))^2}\\
&\sim e^{-n/(\ln(2n))^2}
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/(\ln(2n))^2} < \infty$, nous avons aussi que $\sum_{n=2}^{\infty} P(E_n) < \infty$ et le lemme de Borel-Cantelli implique alors que

$$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$$

c'est-à-dire

$$0 \;=\; P(\cap_n \cup_{i\geqslant n} E_i) \quad = \quad P(\;\forall n\ \exists i \geqslant n \text{ tq } N(2i) = 0)$$

ou encore

$$P(\text{il n'y a qu'un nombre fini d'}\textit{échecs}) = 1.$$

Autrement dit, dans notre modèle, pour n suffisamment grand, la conjecture de Goldbach est vraie avec probabilité 1.

Les deux raisonnements ci-dessus sont de nature heuristique, car nous n'avons pas la preuve que notre modèle décrit correctement la situation réelle. En fait, nous savons même que le modèle n'est pas exact puisqu'il ignore l'existence de corrélations entre, par exemple, les événements [m premier] et [$2n - m$ premier]. Il faut donc bien faire une distinction entre, d'une part, ce que le modèle probabiliste montre et, d'autre part, ce qui pourrait être la situation réelle.

4.2. Théorème de Green-Tao

En 2004, Ben Green et Terence Tao (lauréat de la médaille Fields en 2006) démontrent un résultat qui fait progresser remarquablement la recherche dans le domaine des nombres premiers. Voici leur théorème :

Théorème 11 (Green-Tao, 2004)**.** *La suite des nombres premiers contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues, c'est-à-dire que pour tout entier* $k \geqslant 3$*, il existe des nombres premiers* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *tels que*

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = \ldots = p_k - p_{k-1}.$$

Plus précisément, Green et Tao ont démontré le résultat ci-dessous.

Pour tout entier $k \geqslant 3$, il existe une constante $\delta_k > 0$ telle que

$$\#\left\{(n,d) \in [1,N]^2 \mid n, n+d, \ldots, n+(k-1)d \text{ sont premiers}\right\} \geqslant \delta_k \frac{N^2}{(\ln(N))^k}.$$

Pour vérifier que ce résultat implique le théorème de Green-Tao, il suffit de remarquer que pour tout $\delta_k > 0$, le terme $\delta_k \frac{N^2}{(\ln(N))^k}$ est supérieur à 1 pour N suffisamment grand.

Un argument probabiliste semblable à ceux présentés dans le cadre de la conjecture de Goldbach suggère que le théorème de Green-Tao est vrai. Fixons un entier $k \geqslant 3$ et N un grand nombre naturel. Soit

$$X_N := \#\left\{(n,d) \in [1,N]^2 \mid n, n+d, \ldots, n+(k-1)d \text{ sont premiers}\right\}.$$

Comme précédemment, nous définissons notre modèle probabiliste en supposant que chaque nombre de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, kN\}$ est un nombre premier avec probabilité asymptotique $\frac{1}{\ln(kN)}$ indépendamment des autres nombres de l'ensemble.

Choisissons au hasard deux nombres n et d dans $\{1, 2, \dots, N\}$. La probabilité que (n, d) donne une progression arithmétique de nombres premiers (dont le premier nombre est n, la raison d et la longueur k) est

$$P(n, n+d, n+2d, \dots, n+(k-1)d \text{ sont tous premiers})$$
$$= \frac{\#\text{ choix de } (n,d) \text{ pour lesquels ces } k \text{ nombres sont premiers}}{\#\text{ choix possibles pour } (n,d)} = \frac{X_N}{N^2}.$$

D'autre part, puisque $n+(k-1)d \geqslant kN$, notre hypothèse d'indépendance implique que cette probabilité est égale au produit

$$\prod_{i=1}^{k} P(\ n+(i-1)d \quad \text{est premier})$$

qui est asymptotiquement

$$\frac{1}{(\ln(kN))^k} \sim \frac{1}{(\ln(N))^k}.$$

Donc,

$$X_N \sim \frac{N^2}{(\ln(N))^k}$$

et cette fonction tend vers ∞ lorsque N tend vers ∞.

Ceci signifie que plus N est grand, plus nous devons nous attendre à ce que beaucoup de couples $(n, d) \in [1, N]^2$ fournissent des progressions arithmétiques de nombres premiers de longueur k. A nouveau, ce raisonnement n'est en rien une démonstration du théorème de Green-Tao car, dans la réalité, les événements $[n$ premier$]$, $[n+d$ premier$]$, $\dots$, $[n+(k-1)d$ premier$]$ ne sont pas indépendants.

La preuve de Green et Tao repose sur ce raisonnement probabiliste. Les auteurs ont réussi l'admirable tour de force de tourner tous les arguments heuristiques en des arguments parfaitement rigoureux. Ils se sont intéressés à des observations du type : si p est pair alors p, $p+d$, $p+2d$ ne peuvent pas être tous premiers car au moins deux d'entre eux sont pairs ; par contre, si p est premier et d est impair alors la probabilité que p, $p+d$, $\dots$, $p+(k-1)d$ soit une progression de nombres premiers est clairement plus élevée. Ils vont mettre en place des techniques sophistiqués pour formaliser tout cela et obtiendront finalement la constante $\delta_k > 0$ de leur résultat. Pour l'entièreté de leur preuve voir [6].

5. Références

[1] Alon, N. and Spencer, J.H. (1992). *The Probabilistic Method*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, New-York.

[2] Bernstein, S. N. (1912). *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*. Communications de la Société mathématique de Kharkow, 13, n° 2, pp. 1-2.

[3] Bruss, F. T. (1982). *A Probabilistic Approach to an Approximation Problem*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 96, Vol. 2, pp. 91-97.

[4] de la Vallée Poussin, C. (1896). *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 20, part II, pp. 183-256, 281-397.

[5] Diestel, R. (2005) *Graph Theory*. 3e édition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173, Springer-Verlag, New York, pp. 299-301.

[6] Green, B. and Tao, T. (2008). *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*. Annals of Mathematics, Vol. 167, N° 2, pp. 481-547. (http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :math/0404188.)

[7] Sheynin, O. (2004). *A demonstration of the Weierstrass theorem based on the theory of probability by S.N. Bernstein*. The Math. Scientist, Vol. 29, pp. 127-128.

Une histoire de cordes et de diagonales

Jean-Claude Thomas[1]

Dans ces notes nous expliquons comment les applications diagonales relevées à l'espace des cordes permettent de définir toutes les opérations qui constituent la *topologie des cordes*. Les premières opérations ont été introduites par M. Chas et D. Sullivan, de manière élémentaire, en 1999. Depuis cette date la topologie des cordes a connu un développement rapide et ceci en interaction avec différents domaines des mathématiques qui seront évoqués dans le dernier chapitre. Bien que la définition de toutes les opérations soit un sujet ardu nous avons essayé d'en fournir une présentation la plus simple possible. Ceci est réalisable grâce à la notion d'application de Gysin d'une application continue, [17], qui met en évidence le caractère topologique de ces opérations et permet surtout une présentation commune du cas différentiable et du cas des espaces classifiants. La topologie des cordes peut être vue comme une partie de la Théorie Topologique des Cordes[2] introduite par Witten dans l'étude de la théorie (physique) des cordes. (La théorie topologique des cordes est intimement reliée à différents domaines des mathématiques tels que, la théorie de Chern-Simons, les invariants de Gromov-Witten, la symétrie miroir,...) Ce texte peut être lu « en diagonale » et sans aucun pré-requis en physique.

1. Retour sur l'application diagonale.

Diagonale et cup produit. Ici les termes « homologie » et « cohomologie » signifient homologie singulière et cohomologie singulière à coefficients dans un corps $I\!k$ fixé[3]. Pour tout espace[4] X l'application diagonale

$$\Delta : X \to X \times X \,, x \mapsto (x, x)$$

induit un *produit en cohomologie*, appelé le *cup produit*

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \xrightarrow{H^*(\Delta)} H^*(X)\,, \qquad a \otimes b \mapsto a \cup b$$

Ce produit est associatif, commutatif au sens gradué (i.e. $a \cup b = (-1)^{ij} b \cup a$ si $a \in H^i(X)$, $b \in H^j(X)$) et admet une unité. Ces propriétés se résument en écrivant que $H^*(X)$ est une *$I\!k$-algèbre graduée commutative*. Lorsque X est connexe par arcs $H^0(X)$ est canoniquement isomorphe à $I\!k$. L'unité du cup produit $1 \in H^0(X)$ correspond à l'unité $1 \in I\!k$ dans cet isomorphisme. Précisons que si X est une variété différentiable et si $I\!k = \mathbb{R}$ alors l'algèbre graduée $H^*(X)$ coïncide avec la cohomologie de de Rham de la variété munie du produit induit par celui des formes différentielles.

[1] Université d'Angers-CNRS UMR6093.

[2] Topologique signifie que la théorie ne dépend pas d'une structure géométrique additionnelle : différentiabilité, structure complexe, métrique, connexion, gerbe,...). Elle ne constitue qu'une première approximation de la théorie correspondante des physiciens, [34].

[3] Cette hypothèse simplificatrice nous permettra d'identifier la cohomogie avec le dual de l'homologie.

[4] Nous supposons toujours que $I\!k$ et X vérifient $\dim H_i(X) < \infty$ pour tout $i \geqslant 0$. Ceci nous permet d'identifier l'homologie d'un produit avec le produit tensoriel des homologies.

Dualité de Poincaré. [7, Chap.VI-§6] Un *lk-espace à dualité de Poincaré de dimension d* est un espace 1-connexe X tel qu'il existe, pour chaque $i \geqslant 0$, un isomorphisme

$$D_X : H_i(X) \to H^{d-i}(X)$$

appelé *dualité de Poincaré*. La classe d'homologie $[X] \in H_d(X)$ telle que $D_X([X]) = 1$ est appelée une *classe d'orientation* de X.

Par exemple une variété différentiable de dimension d, 1-connexe, compacte, sans bord et orientée est un *lk-espace à dualité de Poincaré de dimension d* et ceci pour tout corps *lk*.

Soit $f : X \to X'$ une application entre deux *lk*-espaces à dualité de Poincaré de dimensions respectives d, d'. Les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} H^i(X') \arrow[r, "H^*(f)"] \arrow[d, "D_{X'}^{-1}"', "\cong"] & H^i(X) \arrow[d, "\cong"', "D_X^{-1}"] \\ H_{d'-i}(X') \arrow[r, "f_!"] & H_{d-i}(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_i(X) \arrow[r, "H_*(f)"] \arrow[d, "D_X"', "\cong"] & H_i(X') \arrow[d, "\cong"', "D_{X'}"] \\ H^{d-i}(X) \arrow[r, "f^!"] & H^{d'-i}(X') \end{tikzcd}$$

définissent *l'application de Gysin* en homologie $f_!$ et en cohomologie $f^!$ de l'application f. Si nous désignons par $(\,)^\#$ la dualité linéaire degré par degré nous obtenons la relation

$$(f_!)^\# = f^!\,.$$

Dans la section §3 nous étendrons la notion de *lk*-espace à dualité de Poincaré et celle d'application de Gysin.

Diagonale et produit d'intersection. Soit X un *lk*-espace à dualité de Poincaré de dimension d. Notons $\mathbb{H}_*(X)$ l'homologie dé-suspendue définie par : $\mathbb{H}_i(X) := H_{d+i}(X)$. Lorsque $f = \Delta : X \to X \times X = X'$ désigne la diagonale, les applications

$$H_i(X) \otimes H_j(X) \xrightarrow{\Delta_!} H_{i+j-d}(X)\ ,\ a{\otimes}b \mapsto a{\bullet}b := D_X\left(D_X^{-1}(a) \cup D_X^{-1}(b)\right)$$

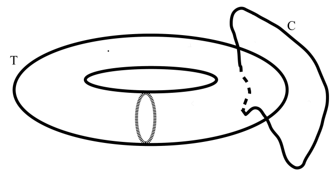
définissent un produit

$$\mathbb{H}_*(X) \otimes \mathbb{H}_*(X) \to \mathbb{H}_*(X)\,, \qquad a \otimes b \mapsto a \bullet b\,.$$

appelé le *produit d'intersection*. Il résulte des propriétés du cup produit que $\mathbb{H}_*(X)$ est une algèbre graduée commutative.

Il est important de préciser ici que, contrairement au cup produit, le produit d'intersection ne provient pas d'un produit défini globalement sur les chaînes singulières. Il a été défini par Lefchetz, bien avant le cup produit, à l'aide des *chaînes simpliciales transverses*. L'exemple suivant illustre cette construction.

Exemple 1. Les sous-variétés C et T ci-dessous, une fois triangulées, représentent deux chaînes simpliciales transverses d'une variété X de dimension 3.



Fixons les classes d'orientation $[C] \in H_1(C) \cong \mathbb{Z}$ et $[T] \in H_2(T) \cong \mathbb{Z}$ et considérons les inclusions

$$C \xhookrightarrow{i_C} X \xhookleftarrow{i_T} T$$

Posons $a = H_1(i_C)([C]) \in H_1(X)$ et $a' = H_2(i_T)([T]) \in H_2(X)$ alors $a \bullet a' \in H_0(X)$ est la classe représentée par la sous-variété canoniquement orientée réduite à deux points $C \cap T$.

2. Premiers pas en topologie des cordes.

L'espace des cordes. Soient X un espace topologique et X_0, X_1 deux sous-espaces de X. Une *corde* entre X_0 et X_1 est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) \in X_0$ et $\gamma(1) \in X_1$. Nous nous limiterons ici au cas des *cordes fermées* sur X (Cf [36] pour un cadre plus général). Une corde, appelée aussi un *lacet libre*, est une application continue de $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\,, |z| = 1\}$ munie de l'orientation canonique dans un espace topologique X. Si $X = \mathbb{R}^3$ (ou la sphère S^3) une corde est génériquement un *nœud orienté*.

L'*espace des cordes*, noté usuellement LX, est muni d'une topologie telle que *l'application d'évaluation*

$$ev : LX \to X\,, \quad \gamma \mapsto \gamma(1)$$

qui associe au lacet libre γ son origine $\gamma(1)$, soit continue (c'est même une fibration). Elle admet la *section canonique* $s : X \to LX$ qui, à un point de X, associe le lacet constant en ce point.

Le produit de Chas-Sullivan. Soit X une variété différentiable de dimension d, 1-connexe, compacte, sans bord et orientée. Posons $\mathbb{H}_*(LX) = H_{*+d}(LX)$. M. Chas et D. Sullivan [9] ont construit[5] un produit

$$\mathbb{H}_*(LX) \otimes \mathbb{H}_*(LX) \to \mathbb{H}_*(LX)\,, \qquad a \otimes b \mapsto a \odot b\,,$$

appelé maintenant *produit de Chas-Sullivan*, tel que :

a) $\mathbb{H}_*(LX)$ est une algèbre graduée commutative dont l'unité est $H_*(s)([X]) \in \mathbb{H}_0(LX)$.

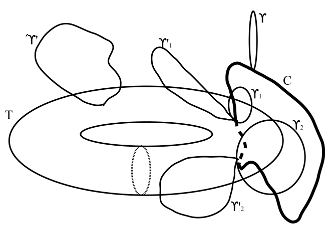
[5] Sous des hypothèses plus générales.

b) le diagramme suivant est commutatif,

$$\begin{tikzcd} H_i(LX)\otimes H_j(LX) \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "H_*(ev)\otimes H_*(ev)"'] & H_{d-i-j}(LX) \arrow[d, "H_*(ev)"] \\ H_i(X)\otimes H_j(X) \arrow[r, "\bullet"'] & H_{d-i-j}(X) \end{tikzcd}.$$

Le point b) signifie que $\mathbb{H}_*(ev)$ est un homomorphisme d'algèbres graduées et aussi que le produit de Chas-Sullivan « relève le produit d'intersection au niveau des cordes » [6]. Ce produit a été défini à l'aide de chaînes simpliciales transverses sur LX. (Cf. [29] pour une définition précise.) Une *chaîne simpliciale de LX* est une famille de lacets libres de X dont les origines sont situées sur une chaîne simpliciale de X. Le produit de Chas-Sullivan est obtenu en mélangeant le produit d'intersection de deux chaînes simpliciales de X avec la composition des lacets. Illustrons cette construction en continuant l'exemple 1 ci-dessus.

Exemple 2. La classe $\alpha \in H_1(LX)$ (resp. $\alpha' \in H_2(LX)$) au-dessus de $a \in H_1(X)$ (resp. au dessus de $a' \in H_2(X)$) est représentée par la sous-variété C (resp. T) décorée en chaque point par un lacet libre de X dont l'origine est située sur C (resp. T). Le produit de Chas-Sullivan $\alpha \odot \alpha' \in H_0(LX)$ est la classe représentée par les deux lacets $\gamma_1 * \gamma_1'$ et $\gamma_2 * \gamma_2'$ lorsque $*$ désigne la composition de deux lacets ayant même origine.



Comparaison avec l'algèbre de Pontryagin. Revenons à l'espace des cordes LX d'un espace quelconque et fixons un point $x_0 \in X$. Le sous-espace $\Omega(X, x_0) := ev^{-1}(\{x_0\})$ est appelé *l'espace des lacets de X en x_0*. Cet objet joue un rôle fondamental en théorie de l'homotopie. En particulier, la composition des lacets,

$$\mathrm{Comp} : \Omega(X,x_0)\times\Omega(X,x_0) \to \Omega(X,x_0)\,, \qquad (\gamma,\gamma')\mapsto \gamma*\gamma'\,,$$

induit un produit appelé *produit de Pontryagin*, noté $a\otimes b \mapsto a\cdot b$,

$$H_*(\Omega(X,x_0))\otimes H_*(\Omega(X,x_0)) \xrightarrow{H_*(\mathrm{Comp})} H_*(\Omega(X,x_0))\,,$$

qui définit sur $H_*(\Omega X)$ une structure d'algèbre graduée <u>non commutative</u>. L'unité de cette algèbre est la classe du lacet constant en x_0.

Supposons maintenant que X est une variété différentiable de dimension d, 1-connexe, compacte, sans bord et orientée. M. Chas et D. Sulivan, [9], ont construit

[6] C'est la démarche des physiciens lorsqu'ils considèrent une particule non pas comme un point mais comme une corde oscillante d'un certain espace-temps de dimension $\leqslant 11$.

un homomorphisme d'algèbres graduées, comme « a transversal intersection with a fiber of *ev* »,

$$I : \mathbb{H}_*(LX) \to H_*(\Omega(X, x_0)) .$$

L'image de I, [18, Theorem 7], [17, Theorem 8], est contenue dans le centre[7] de l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega X, x_0)$. L'homomorphisme I admet une définition en termes d'algèbre homologique classique, [19, §9]. Dans la section suivante nous donnerons un sens à la phrase « I est en une application de Gysin de l'inclusion » $j_X : \Omega(X, x_0) \to LX$".

3. Promenade en topologie des cordes.

Application de Gysin d'une application continue. Étant donné une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces 1-connexes, sous certaines hypothèses, il est possible de définir à l'aide des techniques de l'homotopie algébrique[8] (et non plus seulement à l'aide de celles de l'homologie algébrique), [17], une application de Gysin (admettant un certain de degré $d \in \mathbb{Z}$),

$$f^! : H^*(X) \to H^{*+d}(Y)$$

qui vérifie :
a) $f^!$ est $H^*(Y)$-linéaire ($H^*(X)$ est un $H^*(Y)$-module via $H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$).
b) Deux morphismes de Gysin de f diffèrent d'une constante multiplicative.
c) Si f et g sont homotopes alors $f^! = g^!$.

En particulier, il résulte de b) :
Fait 1. *Si $f : X \to X'$ est une application entre deux lk-espaces à dualité de Poincaré de dimensions respectives d, d' alors l'application de Gysin de degré $d' - d$ coïncide, après normalisation, avec celle définie dans la section 1.*

Le résultat suivant établit l'existence d'une application de Gysin pour le produit des diagonales sur une large classe d'espaces, appelés *lk-espaces de Gorenstein*. Ces espaces ont été introduits dans [14]. Il s'agit d'une généralisation de la notion classique d'anneaux de Gorenstein aux algèbres différentielles graduées sur un corps *lk*. Il nous suffit ici de savoir qu'un *lk-espace de Gorenstein admet une dimension* $d \in \mathbb{Z}$ et que :
a) si X est un *lk*-espace à dualité de Poincaré de dimension n alors X est un *lk*-espace de Gorenstein de dimension $d = n$,
b) l'espace classifiant d'un groupe de Lie connexe G de dimension m est un *lk*-espace de Gorenstein de dimension $d = -m$ pour tout corps *lk*.
c) Plus généralement, si G opère sur X, le quotient homotopique $EG \times_G X$ est un *lk*-espace de Gorenstein de dimension $d = n - m$ pour tout corps *lk*.
d) Un *lk*-espace de Gorenstein est, par définition, supposé 1-connexe.

[7] C'est le sous-espace des éléments qui commutent avec tous les autres. Cet espace étant « très petit », [18], il est sans espoir d'utiliser I afin de contrôler la croissance des nombres de Betti de $H_*(LX)$ (Cf. problème des géodésiques fermées).
[8] La définition d'une application de Gysin et celle d'espace de Gorenstein reposent sur la notion de « Ext différentiel » qui est un « Hom » dans la catégorie dérivée des algèbres différentielles graduées. Ces applications sont définies au niveau des cochaînes singulières (et non simplement en cohomologie). Par suite, la théorie des DG-modèles des espaces permet des calculs explicites.

Théorème 1. [17] *Soit X un lk-espace de Gorenstein de dimension d. Notons Δ_s l'application diagonale $X \to X^{\times s}, x \mapsto (x, ..., x)$. Pour chaque décomposition $k = k_1 + \cdots + k_r$ le produit des diagonales*

$$\Delta_{k_1,\cdots,k_r} := \Delta_{k_1} \times ... \times \Delta_{k_r} : X^{\times r} \to X^{\times k_1} \times ... \times X^{\times k_r} = X^{\times k}, \quad r < k,$$

admet une application de Gysin en cohomologie, de degré $d(k-r) \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta^!_{k_1,\cdots,k_r} : H^*(X^{\times r}) \to H^{*+d(k-r)}(X^{\times k}).$$

Il résulte des propriétés d'unicité à une constante multiplicative près que :

Fait 2. *Si la fibre homotopique $F \simeq \Omega(X, x_0)^{\times k-r}$ de $\Delta_{k_1,\cdots,k_r}$ est un lk-espace à dualité de Poincaré alors $\Delta^!_{k_1,\cdots,k_r}$ coïncide, après normalisation, avec l'intégration le long de la fibre*

$$\int_F^* : H^*(X^{\times r}) \longrightarrow H^{*+d(k-r)}(X^{\times k}) ,$$

définie usuellement, à l'aide de la suite spectrale de Serre.

Le théorème suivant permet de relever de manière unique une application de Gysin[9].

Théorème 2. [17] *Soit le diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{où} \begin{cases} B \text{ est 1-connexe} \\ \pi \text{ est une fibration} \\ \dim H^i(E) < \infty \text{ pour tout } i \geqslant 0 \end{cases} .$$

Si f admet une application de Gysin $f^! : H^*(B') \to H^{*+d}(B)$ alors il existe une **unique** *application $H^*(E)$-linéaire, $g^!$, telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} H^*(E') \arrow[r, "g^!"] & H^{*+d}(E) \\ H^*(B') \arrow[u, "H^*(\pi')"] \arrow[r, "f^!"] & H^{*+d}(B) \arrow[u, "H^*(\pi)"'] \end{tikzcd} .$$

Théorème 3. [17] *Si X est une variété différentiable de dimension d, connexe, compacte, sans bord et orientée et $j_X : \Omega(X, x_0) \to LX$ désigne l'inclusion naturelle alors $j^!_X$ existe et coïncide avec l'homomorphisme $I : \mathbb{H}_*(LX) \to H_*(\Omega(X, x_0))$ considéré en §2.*

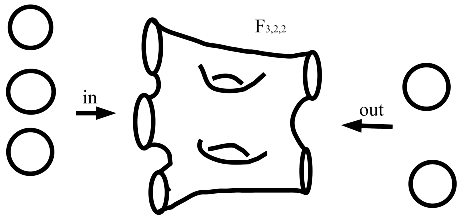
Des surfaces d'un certain genre. Rappelons que les surfaces compactes orientées avec bord orienté sont topologiquement classifiées par trois entiers : *le genre g*, le nombre p (resp. q) des composantes de bord *entrantes* (resp. *sortantes*). Ces

9 Par abus, nous notons de la même manière le relevé d'une application de Gysin et une application de Gysin. Les propriétés d'unicité permettent d'éviter les confusions. Dans le cas différentiable le relevé d'une applications de Gysin a été défini, [13] et [10], à l'aide de la technologie de Thom-Pontryagin étendue en dimension infinie. Il coïncide avec notre définition.

dernières sont distinguées par la compatibilité de leur paramétrisation avec l'orientation bord. À une telle surface est associé le *2-cobordisme orienté*[10] :

$$\sqcup_{i=1}^{p} S^1 \xrightarrow{\quad in \quad} F_{g,p+q} \xleftarrow{\quad out \quad} \sqcup_{i=1}^{q} S^1$$

Exemple

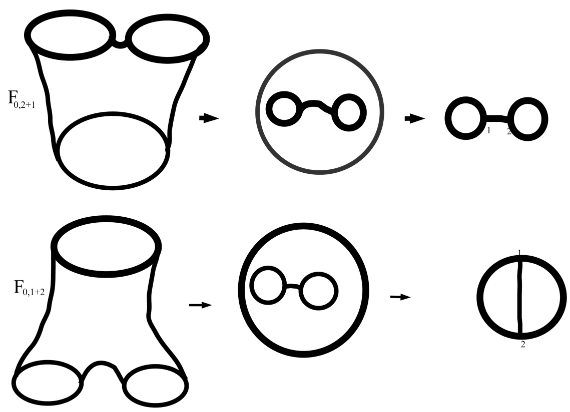


Notons map(Y, X) l'espace des applications continues de Y dans X muni de la topologie compacte ouverte. (En particulier, map$(S^1, X) = LX$). Pour chaque espace X, un cobordisme orienté $F_{g,p+q}$, définit le diagramme,

$$(LX)^{\times p} = \mathrm{map}\,(\sqcup_{i=1}^{p}(S_i^1, X) \xleftarrow{r_{in}} \mathrm{map}\,(F_{g,p+q}, X) \xrightarrow{r_{out}} \mathrm{map}\,(\sqcup_{j=1}^{q}(S_j^1, X) = (LX)^{\times q}$$

avec r_{in} et r_{out} désignant les restrictions[11] définies par : $r_{in}(f) = f \circ in$ et $r_{out}(f) = f \circ out$.

Définition des opérations de cordes. À un 2-cobordisme orienté $F_{g,p+q}$ est associé un graphe, appelé un *diagramme de cordes*, constitué d'une réunion disjointe de p cercles (les cercles entrants) et d'une réunion disjointe finie d'arbres dont les extrémités sont situées sur les cercles (Cf [13] pour une définition précise). Contentons-nous de dessins.



[10] Dans l'optique de [5], un cobordime orienté est vu comme le bord d'un voisinage tubulaire d'un diagramme de Feyman.

[11] Les injections *in* et *out* sont des cofibrations. Par suite r_{in} et r_{out} sont des fibrations.

Le nombre d'arbres r et le nombre d'extémités k vérifient $k-r=2-2g-p-q=:$ χ (la caractéristique d'Euler de $F_{g,p+q}$).

Théorème 4. *Les hypothèses et notations sont celles du théorème 1. Il existe un diagramme cartésien (à homotopie près) et qui vérifie les hypothèses du Théorème 2,*

$$\begin{tikzcd} map(F_{g,p+q},X) \arrow[r, "r_{in}"] \arrow[d] & map\left(\sqcup_{j=1}^{p} S_j^1, X\right) = (LX)^{\times p} \arrow[d] \\ X^{\times r} \arrow[r, "\Delta_{k_1,\cdots,k_r}"] & X^{\times k} \end{tikzcd}$$

et où les flèches verticales désignent certaines applications d'évaluation définies ci-après.

Il résulte alors des théorèmes 1 et 2 que $\Delta^!_{k_1,\cdots,k_r}$ et $r^!_{in}$ existent et en dualisant (lk est un corps) nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_*(LX)^{\otimes p} \arrow[r, "(r_{in})_!"] \arrow[d, "H_*(ev)^{\otimes p}"'] & H_{*+d\chi}(\mathrm{map}(F_{g,p+q},X)) \arrow[r, "H_*(r_{out})"] & \left(H_*(LX)^{\otimes q}\right)_{*+d\chi} \arrow[d, "H_*(ev)^{\otimes q}"] \\ H_*(X)^{\otimes p} \arrow[rr, "(\Delta_{k_1,\cdots,k_r})_!"] & & \left(H_*(X)^{\otimes q}\right)_{*+d\chi} \end{tikzcd}$$

La composée $\Phi_{g,p+q} := H_*(r_{out} \circ (r_{in})_! : H_*(LX)^{\otimes p} \to \left(H_*(LX)^{\otimes q}\right)_{*+d\chi}$ est appelée une *opération de cordes*.

Conséquences des faits 1 et 2.

(1) *Cas différentiable.* Si X désigne une variété différentiable de dimension n, 1-connexe compacte sans bord et orientée alors $d=n>0$ et les $\Phi_{p,q}$ coïncident avec les opérations d'ordres supérieurs définies par R. Cohen et V. Godin, [13]. En particulier, $\Phi_{0,2+1}$ est le produit de Chas-Sullivan. Il est démontré dans [35] que les opérations $\Phi_{g,p+q}$ sont nulles si $g \geqslant 1$ ou $q \geqslant 3$.

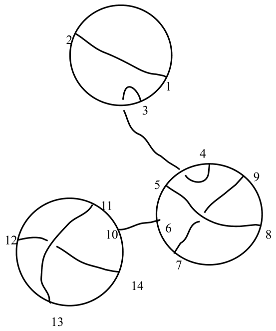
(2) *Cas d'un classifiant.* Si $X=BG$ désigne l'espace classifiant d'un groupe de Lie compact connexe de dimension n alors $d=-n<0$ et $\Phi_{p,q}$ coïncident avec les opérations d'ordres supérieurs définies par D. Chataur et L. Menichi, [12]. Rappelons à ce propos que $H_*(LBG)$ est isomorphe à l'homologie équivariante du groupe G muni de l'opération adjointe (Cf. [20]).

Idée de la démonstration du théorème 4. (Comparer avec [13].)

Soit C un *diagramme de cordes de Sullivan* associé à un 2-cobordisme orienté $F_{g,p+q}$ dont les arbres sont notés T_1,..., T_r et les extrémités e_1, ..., e_k. Considérons les deux partitions

$$\{e_1,...,e_k\} = \sqcup_{i=1}^{r} K_i = \sqcup_{j=1}^{p} L_j\,, \quad \begin{cases} e_s \in K_i \Longleftrightarrow e_s \text{ est l'extrémité d'un arbre } T_i \\ e_s \in L_j \Longleftrightarrow e_s \in in(S_j^1) \end{cases}$$

Par exemple, la surface $F_{2,3+2}$ représentée ci-dessus admet le diagramme de cordes



où $r = 7$, $k = 14$, $L_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $L_2 = \{e_4, ..., e_9\}$, $L_3 = \{e_{10}, ..., e_{14}\}$, $K_1 = \{e_1, e_2\}$, $K_2 = \{e_3, e_4\}$, $K_3 = \{e_5, e_8\}$, $K_4 = \{e_7, e_9\}$, $K_5 = \{e_6, e_{10}\}$, $K_6 = \{e_{11}, e_{13}\}$, $K_7 = \{e_{12}, e_{14}\}$.

Dans le cas général, ces deux partitions déterminent le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{map}(F_{g,p+q}, X) \arrow[rr, "r_{in}"] \arrow[d, "\mathrm{map}(\subset, X)"', "\simeq"] & & \mathrm{map}\left(\sqcup_{j=1}^{p} S^1_j, X\right) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{map}(C, X) \arrow[d, "\mathrm{map}(\subset, X)"'] & & (LX)^{\times p} \arrow[d, "ev_{L_1} \times \ldots \times ev_{L_p}"] \\
\mathrm{map}(\sqcup_{i=1}^{r} T_i, X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{map}(T_i, X) \arrow[rr, "ev_{K_1} \times \ldots \times ev_{K_r}"] \arrow[d, "\mathrm{map}(\subset, X)"', "\simeq"] & & X^{\times k} \\
\mathrm{map}(\sqcup_{i=1}^{r} \{*_i\}, X) = X^{\times r} \arrow[rru, "\Delta_{k_1} \times \ldots \times \Delta_{k_r}"'] & &
\end{tikzcd}$$

où

(1) les applications verticales de gauche sont induites par les inclusions évidentes (C étant considéré comme un rétract par déformation de $F_{g,p+q}$ et $T_i \simeq *_i$)

(2) si $E = \{e_{i_1}, ..., e_{i_s}\}$ alors ev_E désigne l'application d'évaluation $f \mapsto (f(e_{i_1}), ..., f(e_{i_s}))$.

(3) le rectangle est cartésien et le triangle est commutatif (tous deux à homotopie près)[12].

□

4. Pour aller plus loin.

Algèbre de Frobenius. Un espace vectoriel gradué $E_* = \{E_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une algèbre de Frobenius de degré d s'il existe
a) des applications linéaires $\mu : E_i \otimes E_j \to E_{i+j-d}$, $\quad a \otimes b \mapsto ab$,

[12] Rappelons que la fibration associée à la diagonale Δ est l'application, $\mathrm{map}([0,1], X) \to X \times X$, $\gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$, et que l'image réciproque de cette fibration le long de Δ est la fibration $ev : LX \to X$.

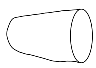
b) des applications linéaires $\varphi : E_i \to \oplus_{j+k=i} E_i \otimes E_k$, $\quad a \mapsto \sum_i a_i \otimes a'_i$,
telles que

(1) μ est un produit associatif et commutatif au sens gradué sur $\mathbb{E} := E_{*+d}$,

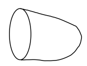
(2) la composée $E^\# \otimes E^\# \subset (E \otimes E)^\# \overset{\Delta^\#}{\to} E^\#$ est un produit associatif et commutatif au sens gradué,

(3) $\Delta(ba) = \sum_i (ba_i \otimes a'_i) = \sum_i (-1)^{(d+|a_i|)|b|} a_i \otimes ba'_i$ pour tout $a \in E$.

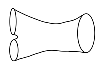
Une algèbre de Frobenius E dont le produit μ admet une unité équivaut, [2], à la donnée d'une *théorie topologique des champs quantiques*[13] de dimension 2 (abréviation anglo-saxonne 2-TQFT). Une 2-TQFT est une correspondance qui permet d'associer à un réunion disjointe de n cercles ($n \geqslant 0$) l'espace vectoriel gradué $E^{\otimes n}$ ($E^0 = \mathit{lk}$) et à un 2-cobordisme orienté $F_{g,p+q}$ une application linéaire $E^{\otimes p} \to E^{\otimes q}$. Cette correspondance est astreinte à vérifier cinq axiomes, [27, 1.2.23] ou [4]. Les figures ci-dessous illustrent cette correspondance[14] entre 2-cobordisme orienté et « opération » sur E.



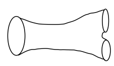
$$:= \left(\varnothing \overset{\text{cobordisme}}{\curvearrowright} S^1 \right) \longleftrightarrow \left(\mathit{lk} \overset{\text{unité}}{\to} E \right)$$



$$:= \left(S^1 \overset{\text{cobordisme}}{\curvearrowright} \varnothing \right) \longleftrightarrow \left(E \overset{\text{co-unité}}{\to} \mathit{lk} \right)$$



$$:= \left(S^1 \sqcup S^1 \overset{\text{cobordisme}}{\curvearrowright} S^1 \right) \longleftrightarrow \left(E^{\otimes 2} \overset{\text{produit}}{\to} E \right)$$



$$:= \left(S^1 \overset{\text{cobordisme}}{\curvearrowright} S^1 \sqcup S^1 \right) \longleftrightarrow \left(E \overset{\text{co-produit}}{\to} E^{\otimes 2} \right)$$

Conjecture 1. *Soit X un lk-espace de Gorenstein de dimension d. Les opérations de cordes*

$$\Phi_{0,2+1} : H_*(LX)^{\otimes 2} \to H_{*-d}(LX) \text{ et } \Phi_{0,1+2} : H_*(LX) \to H_{*-d}(LX)^{\otimes 2}$$

définissent une structure d'algèbre de Frobenius sur $H_*(LX)$.

Une démonstration de cette conjecture a été obtenue par R. Cohen et V. Gaudin [13] dans le cas différentiable ($d > 0$), par D. Chataur et L. Menichi [12] dans le cas d'un classifiant ($d < 0$) et par K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu, [6] dans le cas d'un quotient homotopique.

Algèbre de Batalin-Vilkovisky. Une *algèbre de Gerstenhaber graduée* (en abrégé Ge-algèbre) est une algèbre commutative graduée $H_* = \{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ munie d'un crochet

$$H_i \otimes H_j \to H_{i+j+1} , \quad x \otimes y \mapsto \{x, y\}$$

[13] même remarque qu'en [1].

[14] Dans la suite de [5] et [9] le produit (resp. le coproduit) correspond à la fusion (resp. la fission).

tel que pour tout $a, a', a'' \in H$:
(a) $\{a, a'\} = (-1)^{(|a|-1)(|a'|-1)}\{a', a\}$
(b) $\{a, \{a', a''\}\} = \{\{a, a'\}, a''\} + (-1)^{(|a|-1)(|a'|-1)}\{a', \{a, a''\}\}$.

Une *algèbre de Batalin-Vilkovisky* (en abrégé BV-algèbre), [5],[28], est une algèbre commutative graduée $H_* = \{H_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ munie d'une application linéaire

$$\Delta_* : H_* \to H_{*+1}$$

telle que
(1) $\Delta_* \circ \Delta_* = 0$
(2) le crochet, $\{a, a'\} := (-1)^{|a|}\left(\Delta_*(aa') - \Delta_*(a)a' - (-1)^{|a|}ab\Delta_*(a')\right)$, définit sur H_* une structure de Ge-algèbre.

Rappelons que, pour tout espace X, le groupe multiplicatif S^1 opère sur LX par translation de l'origine. En particulier, cette action ρ induit $H_*(\rho) : H_*(S^1) \otimes H_*(X) \to H_*(X)$. Une application linéaire $\Delta_* : H_*(X) \to H_{*+1}(X)$ est alors définie par la relation $\Delta_*(a) = H_*(\rho)([S^1] \otimes a)$.

Conjecture 2. *Soit X un lk-espace de Gorenstein de dimension d.*

a) L'opération de cordes $\Phi_{0,2+1} : H_*(LX)^{\otimes 2} \to H_{*-d}(LX)$ et Δ_* définissent sur $\mathbb{H}_*(LX)$ une structure de BV-algèbre.

b) L'opération de cordes dualisée $(\Phi_{0,1+2})^{\#} : H^*(LX)^{\otimes 2} \to H^{*-d}(LX)$ et l'application linéaire $(\Delta_*)^{\#} : H^*(X) \to H^{*-1}(X)$ définissent sur $\mathbb{H}^*(LX)$ une structure de BV-algèbre.

Une démonstration de cette conjecture a été obtenue par M. Chas et D. Sullivan [9] (Cf aussi [10]) dans le cas différentiable ($d > 0$) et par D. Chataur et L. Menichi [12] dans le cas d'un classifiant ($d < 0$). Dans chacun de ces cas, existe une *théorie homologique des champs conformes* (abréviation anglo-saxonne HCFT), [38], qui induit la structure de BV- algèbre, [24],[12].

(co)Homologie de Hochschild. Notons $HH_*(A; M)$ (resp. $HH^*(A; M)$) l'homologie (resp. la cohomologie) de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée A (non nécessairement commutative) à coefficients dans un A-bimodule différentiel M. Cf. par exemple [15] pour une définition avec les bons signes. Le paradigme d'une Ge-algèbre est justement la structure canonique définie sur $HH^*(A; A)$ par Gerstenhaber, [21].

Théorème 5. [15] *Pour tout espace 1-connexe X il existe un isomorphisme de Ge-algèbres*

$$HH^*(C^*(X); C^*(X)) \cong HH^*(C_*(\Omega(X, x_0)); C_*(\Omega(X, x_0)))$$

Ici $C^*(X)$ (resp. $C_*(\Omega(X, x_0))$) désigne l'algèbre différentielle graduée des cochaînes singulières normalisées, (resp. des chaînes singulières).

Conjecture 3. *Si X est un lk-espace de Gorenstein de dimension d alors il existe sur*

$$HH^*(C^*(X); (C^*(X))^{\#}) \text{ et sur } HH_*(C^*(X); C^*(X))$$

une structure de BV-algèbre qui est définie de manière purement algébrique. De plus,
a) il existe un isomorphisme de BV-algèbres $HH^*(C^*(X); (C^*(X))^{\#}) \to \mathbb{H}_*(LX)$ (Cf. Conj. 2-a)).

b) il existe un isomorphisme de BV-algèbres $HH_*(C^*(X); C^*(X)) \to \mathbb{H}^*(LX)$ *(Cf. Conj. 2-b)).*

Dans le cas différentiable une structure de BV-algèbre a été définie ([37] si $lk = \mathbb{Q}$ et [31] pour un lk quelconque) sur $HH^{*-d}(C^*(X); (C^*(X))^{\#})$ ainsi qu'un isomorphisme de Ge-algèbres avec $HH^*(C^*(X); C^*(X))$. Dans le cas d'un classifiant une structure de BV-algèbre a été définie, [33] pour tout corps, sur $HH_{*-d}(C^*(X); C^*(X))$ ainsi qu'un isomorphisme de Ge-algèbres avec $HH^*(C^*(X); C^*(X))$. La partie a) a été démontrée [16] si $lk = \mathbb{Q}$ et X est un $\mathbb{Q}$-espace à dualité de Poincaré.

Autres domaines d'application. La topologie des cordes intervient dans de nombreux sujets d'étude en y apportant une source de problèmes nouveaux. Il n'est pas possible de les détailler en peu de pages. Citons seulement quelques exemples, la K-théorie équivariante tordue [8],[20], la théorie topologique des champs, [34], [30], la géométrie symplectique [3], la théorie de Morse [23], [11], [29], la géométrie de Poisson [1], la théorie des gerbes et des « stacks » [6], la géométrie non commutative [25], la dualité de Van den Bergh [33], les algèbres et les catégories de Calabi-Yau [22], [26], ...

5. Références

[1] H. Abbaspour and M. Zeinalian, *String bracket and flat connections*, Algebraic & Geometric Topology **7** (2007) 197-231.

[2] L. Abrams, *Two dimensional quantum field theory and Frobenius algebras*, J. of Knot Theory Ramifications **5** (1996) 569-587.

[3] A. Abbondandolo and M. Schwartz, *On the Floer homology of cotangent bundle*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 254-316.

[4] C. Blanchet, *TQFT : De la théorie de champs à la topologie quantique*, Gazette des mathématiciens, SMF ce même numéro.

[5] I.A Batalin et G.A Vilkovisky, *Gauge Algebra and quantization*, Phys. Lett. **102 B** (1981) 27-31.

[6] K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi and P. Xu, *String topology for loop stacks*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007) 247-252.

[7] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **139** Springer-Verlag 1993.

[8] U. Bunke and I. Schöder, *Twisted K-theory and TQFT*, Seminars Winter Term 2004/2005, 33-80, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2005.

[9] M. Chas and D. Sullivan, *String topology*, ArXiv :mathGT/0107.187.

[10] D. Chataur, *A bordism approach to string topology*, Inter. Math. Research Notices **46** (2005) 2829-2875.

[11] D. Chataur and J.-F. Leborgne, *Homology of spaces of regular loops in the sphere*, ArXiv :mathAT/0811.3319.

[12] D. Chataur and L. Menichi, *String topology of classifying spaces*, ArXiv :mathAT/ 088.1174.

[13] R. Cohen et V. Godin, *A polarized view of string topology*, London Math. Soc. Lecture Notes **308**, Cambridge University press, (2005) 127-154.

[14] Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Adv. in Math. **71** (1988) 92-112.

[15] Y. Félix, L. Menichi and J.-C. Thomas, *Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology*, Journal of Pure and Applied Algebra **199** (2005) 43-59.

[16] Y. Félix and J.-C. Thomas, *Rational BV algebra in string topology*, Bull. SMF **136** (2008) 311-327.

[17] Y. Félix and J.-C. Thomas, *String topology on Gorenstein spaces*, Mathematische. Annalen **345** (2009) 417-452.

[18] Y. Félix, J.-C. Thomas and M. Vigué-Poirrier, *The Hochschild cohomology of a closed manifold*, Publ. IHÉS **99** (2004) 235-252.
[19] Y. Félix, J.-C. Thomas and M. Vigué-Poirrier, *Rational String Topology*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2006) 123-156.
[20] D. S. Freed , *The Verlinde algebra is twisted equivariant K-theory*, Turk. J. math. **25** (2001) 159-167.
[21] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. Math. **78** (1963) 59-103.
[22] V. Ginsburg, *Calabi-Yau algebras*, ArXiv :mathAG/0612139v3(Janv. 2007).
[23] M. Goresky and N. Higston, *Loop product and closed geodesics*, Duke Math. J. **150** (2009) 117-209.
[24] V. Godin, *Higher string topology operations*, ArXiv :mathAT//0711.4859.
[25] A. Hamilton and A. Lazarev, *Cohomology theories for homotopy algebras and noncommutative geometry*, Journal of A.G.T **9** (2009) 1503-1583.
[26] P. Jørgensen, *Calabi-Yau categories and Poincaré duality spaces*, ArXiv :mathRT//082052v1.
[27] J. Kock, *Frobenius algebra and 2D topological quantum fields theories*, Student texts **59** London Mathematical Society, Cambridge University Press 2003.
[28] J.-L. Koszul, *Le crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque (Hors série) (1985) 257-271.
[29] F. Laudenbach, *A note on the Chas-Sullivan product*, ArXiv :mathGT/0903.2801. À paraître, Enseignement Mathématique.
[30] J. Lurie, *On the classification of topological field theory*, ArXiv :math.CT 0905.0465.
[31] L. Menichi, *Batalin-Vilkoviski algebra structures on Hochschild cohomology*, Bull. Soc. Math. de France **137** (2009) 277-295.
[32] L. Menichi, *String topology for spheres*, Comment. Math. Helv. **84** (2009) 135-157.
[33] L. Menichi, *Van Den Bergh isomorphisms in String Topology* , ArXiv :mathGT/0907.2105. À paraître au J. Non Commutative Geom.
[34] G. Segal, *Topological structures in string theory*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. Math Phys. Eng. Sci. **359** (2001) 1389-1398.
[35] H. Tamanoi, *Triviality of string operations associated to higher genus orientable surfaces*, ArXiv :mathAT/0706.1276v1.
[36] H. Tamanoi, *String operations in orientable open-closed string topology*, ArXiv :mathAT/0803.1038.
[37] T. Tradler et M. Zeinalian, *Infinity structure of Poincaré duality spaces* Algebr. Geom. Topol. **7** (2007) 233-260, Appendix by D. Sullivan.
[38] E. Witten, *Introduction to cohomological field theories*, Internat. J. Modern Phys. in Topological Methods in Quantum Physics - Triestre 1990 **16** (1991) 2775-2792.

L'auteur remercie François Laudenbach et Luc Menichi
pour leurs remarques pertinentes.

ENSEIGNEMENT

L'égalité scientifique dans les programmes de 1925

la ruine de la culture générale scientifique[1]

Eric Barbazo[2]

Le projet ministériel, qui confond tous les élèves dans les mêmes classes, aura pour conséquence certaine un affaiblissement général de l'enseignement scientifique.
Maurice Fréchet[3]

Durant l'Entre-deux-guerres, une réforme de l'enseignement secondaire français, appelée réforme de *l'égalité scientifique*, impose au lycée un enseignement identique des sciences en général et des mathématiques en particulier, pour tous les élèves jusqu'en classe de première. Quelles sont les raisons affichées mais également non dites de cette réforme ? Comment est-elle perçue et quelles en sont les conséquences ? L'histoire de l'A.P.M.E.S.P.[4] apporte quelques éléments de réponses.

L'égalité scientifique dans les programmes

Le journal officiel du 13 décembre 1923 publie les horaires et programmes de l'enseignement secondaire, applicables pour les mathématiques dans toutes les classes du lycée. La particularité essentielle de ces programmes réside dans l'unification des contenus enseignés aux élèves. Désormais, il s'agit d'enseigner le même programme de mathématiques à tous les élèves depuis la classe de sixième jusqu'à la classe de première incluse. La diversification en séries des sections « classique » et « moderne », instaurées par la réforme de 1902 n'a ainsi plus d'existence

[1] Extrait de la déclaration de l'A.P.M.E.S.P. sur la réforme des programmes de 1923-1925. Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public n° 40, avril 1925.

[2] Président de l'A.P.M.E.P.

[3] *La réforme de l'Enseignement secondaire*, Revue générale des sciences pures et appliquées, 30 avril 1925. Article reproduit dans le *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 42, octobre 1925.

[4] L'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public (A.P.M.E.S.P.) regroupe depuis 1910 des professeurs de l'enseignement secondaire des lycées, enseignants des classes de sixième jusqu'aux classes préparatoires aux grandes écoles. À partir de 1945, l'A.P.M.E.S.P. se transforme en A.P.M.E.P. dans le but de permettre un accès aux postes éligibles de l'association aux autres ordres d'enseignement, notamment aux universitaires.

puisque l'enseignement secondaire des lycées ne distingue plus d'orientation avant l'âge de spécialisation en dernière année de lycée et seulement dans le choix d'un baccalauréat mathématiques ou philosophie. Initiée par le Ministre Léon Bérard[5] dès le début des années 1920, la réforme se poursuit malgré le changement de gouvernement et l'arrivée du Cartel des gauches au pouvoir à partir des élections législatives de mai 1924, qui réintroduit la section moderne[6] mais ne modifie pas l'intention première de la réforme. Le Journal officiel du 5 juin 1925 reprend donc les principes élaborés deux ans auparavant et conforte le principe *d'égalité scientifique* dans les programmes de mathématiques. Les instructions relatives à l'enseignement des mathématiques publiées en même temps que les nouveaux plans d'études, indiquent l'intention première du principe de l'égalité scientifique en ces termes :

« Désormais, les élèves des sections classiques pourront, au sortir de la première, entrer dans la classe de mathématiques et s'orienter vers les cours préparatoires aux grandes écoles scientifiques, dans les mêmes conditions que leurs camarades des sections modernes. »

Il s'agit donc officiellement de corriger l'un des travers de la réforme de 1902 dont les caractéristiques principales avaient été de mettre fin au monopole de l'éducation classique et humaniste et d'instaurer un enseignement scientifique aux valeurs éducatives reconnues et aux débouchés rapidement recherchés par les bons élèves[7]. En revanche, la réforme de 1902 n'a pas été capable de développer un enseignement scientifique suffisamment solide et complet pour les élèves des séries A et B, basés sur l'apprentissage traditionnel des langues anciennes. Ce manque, dénoncé tant par les littéraires que par les scientifiques durant les années précédant la Première guerre mondiale, permet au ministère d'argumenter sur cette faiblesse des plans d'études de 1902 pour justifier les nécessités de sa réforme. Mais au delà des intentions affichées, c'est bien une volonté de réhabiliter un enseignement classique et recentré sur les humanités dont il est question. Pour s'en convaincre, il suffit de lire les premières intentions affichées par le ministre Léon Bérard lors de la séance du Conseil supérieur de l'Instruction publique en décembre 1921, qui adopte les vœux suivants[8] :

« La création de deux enseignements vraiment secondaires de culture générale et désintéressée, donnés par les mêmes maîtres dont l'un à base gréco-latine, l'autre à base de français. Dans l'enseignement gréco-latin, le latin sera étudié à partir de la sixième, le grec à partir de la cinquième. Désireux de voir se développer simultanément la culture scientifique et la culture littéraire, le C.S. demande que la bifurcation n'ait lieu qu'à la fin de la première, repoussant la proposition faite

---

[5] Léon Bérard est ministre de l'Instruction publique du 27/11/1919 au 20/01/1920 et du 16/01/1921 au 30/03/1924.

[6] Hulin Nicole, in Gispert Hélène, Hulin Nicole, Robic Marie-Claire, *Science et enseignement, l'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX^e^ siècle*, Vuibert, Paris 2007.

[7] La série C latin-sciences constitue la série la plus réussie et recherchée de la réforme.

[8] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 23, décembre 1921.

par plusieurs membres d'établir cette bifurcation à la fin de la seconde. Cette résolution s'applique aux deux types d'enseignements. »

Renforcé par la Première guerre mondiale, le sentiment de renouveau d'une culture française dont l'enseignement des humanités constitue le premier symbole, prend ainsi une réalité dans la réforme Bérard, malgré l'apparition de nouveaux acteurs du système éducatif que sont les associations de spécialistes créées pour la plupart d'entre elles entre 1905 et 1914. Parmi elles, la récente association des professeurs de mathématiques s'oppose dès la publication des plans d'études, d'une manière frontale et virulente, aux intentions de la réforme dans lesquelles elle voit une revanche des perdants de 1902[9] :

« Elle [l'association] voit dans ce principe d'égalité scientifique ainsi entendu, une affirmation a priori, éminemment contestable, qui méconnaît les réalités de l'expérience pédagogique, les nécessités de la vie moderne et les aspirations intellectuelles de l'heure présente. Elle reconnaît en particulier à l'origine de ce principe, – à coté du désir légitime auquel elle s'est toujours associée, de donner aux sections littéraires du plan d'études de 1902 un minimum indispensable de culture scientifique, – la volonté très nette chez certains de retirer aux sciences le rôle éducatif qu'elles ont reçu dans ce plan d'études de 1902, pour leur rendre seulement le rôle d'appoint qu'elles avaient avant cette date. »

L'association n'est donc pas dupe de la réalité des intentions et le combat qui s'engage en 1921 et dure jusqu'à la Seconde guerre mondiale contre ce qui s'appellera par la suite le *« dogme de l'égalité scientifique »* est avant tout d'ordre politique et non uniquement pédagogique. La communauté scientifique dénonce également ces plans d'études, par les soutiens de Paul Appell lors des séances du Conseil supérieur de l'Instruction public[10] où se discutent les projets, ou de Maurice Fréchet, professeur à l'université de Strasbourg qui alerte sur les risques d'un affaiblissement de l'enseignement scientifique en général et à long terme. C'est ce qui semble s'avérer dans les années qui suivent.

La ruine de la culture générale scientifique

La réforme de 1923-1925 induit deux conséquences immédiates sur l'enseignement des mathématiques : une réduction des horaires et une réorganisation des programmes d'enseignement pour les adapter à l'ensemble des élèves dorénavant traités de manière identique.

Le premier effet de la réforme de 1925 est visible dans les horaires des nouvelles classes qui accueillent désormais tous les élèves sans distinction de séries. On peut constater une réduction importante, d'environ une heure hebdomadaire, du volume horaire de mathématiques dans toutes les classes de la sixième B à la troisième B,

[9] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public*, n° 40, avril 1925.
[10] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 39, février 1925.

alignés sur ceux de la série A[11]. Ainsi, les élèves de la série B du premier cycle, jugés pourtant plus faibles et devant bénéficier d'un enseignement plus concret d'après les instructions officielles de 1902, se trouvent-ils confrontés à un programme qui lui, se rapproche davantage de celui de la série A. Pour le second cycle, la classe de seconde voit son horaire porté à 4h, soit réduit d'une demi-heure par rapport à celui des séries C et D et augmenté de 2h pour les anciennes secondes A et B. Pour la nouvelle classe de première, la diminution est d'une heure, entre la classe de première C-D de 1902 et la première commune de 1925 qui propose un nouvel horaire à tous les élèves, de 4h. Enfin, la classe de mathématiques passe de 8h plus 2h de dessin géométrique dans les plans d'études de 1902 à 9h30 dans la réforme de 1925, soit une perte d'une demi-heure. Ainsi, la réforme de 1925 impose une baisse des horaires qui concerne essentiellement les classes à dominante scientifique issues de la réforme de 1902 tout en augmentant de manière significative l'horaire de mathématiques pour les élèves des anciennes séries classiques A et B amenés à suivre des programmes désormais uniques. Les instructions officielles qui accompagnent les nouveaux programmes indiquent très clairement cet état de fait et présentent en particulier le nouveau programme de la classe de mathématiques comme« *nettement plus spécialisé que l'ancien*[12] ». Dans les faits, l'intention de donner un enseignement scientifique plus étoffé aux élèves des anciennes séries classiques est ainsi réalisé au détriment des séries scientifiques.

Le second effet de la réforme est évidemment la nécessité d'adapter les nouveaux programmes aux horaires. Afin que tous les élèves puissent suivre le contenu enseigné jusqu'en classe de première incluse, beaucoup de notions d'un niveau donné sont reportées dans la classe supérieure. Ainsi, l'apprentissage de toute la trigonométrie, la géométrie descriptive et l'introduction des dérivées est repoussé dans la classe de mathématiques, mettant à mal l'enseignement pyramidal et progressif qu'avait institué la réforme de 1902. Cette caractéristique qui permettait une progression raisonnée des contenus d'apprentissage sur les trois années précédant le baccalauréat était appréciée par les professeurs de l'enseignement secondaire[13]. Dans la réforme de 1925, les professeurs de mathématiques dénoncent une classe terminale très spécialisée qui entraîne des sauts conceptuels très importants que beaucoup d'élèves n'arrivent pas à franchir. Ainsi, les années qui suivent la mise en place de la réforme ne tardent pas à faire apparaître des difficultés croissantes pour les élèves et les professeurs qui voient se profiler un danger pour l'existence même de la classe de mathématiques[14] :

---

[11] Il faut rappeler que la série A du premier cycle permet une orientation dans toutes les séries A, B, C et D du second cycle qui débute en seconde. En revanche, les élèves de la série B du premier cycle, plus faibles en général, n'ont qu'une possibilité d'orientation en seconde D. L'alignement des horaires est donc sur les plus faibles en volume mais réservés aux meilleurs élèves.

[12] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public*, n° 41, septembre 1925.

[13] Dans sa déposition en 1913 devant la commission parlementaire chargée de réformer les plans d'études de 1902, M. Huard, membre du comité de l'APMESP et représentant des agrégés au Conseil supérieur de l'Instruction publique, insiste sur les changements qu'apporte la réforme de 1902 à cet égard (*Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 10, avril 1913).

[14] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 56, juin 1928.

« Mais le danger le plus sérieux, et qui paraît surtout préoccuper nos collègues, est celui qui menace l'avenir de la classe de Mathématiques. Les élèves, qui dans deux ans, se présenteront dans cette classe, ignoreront à peu près tout ce que les programmes de 1902 avaient introduit dans l'enseignement des mathématiques ; ils seront sensiblement dans le même état qu'autrefois les élèves venant de Rhétorique. »

La classe de mathématiques contient, au dire des professeurs de mathématiques qui s'expriment dans le bulletin de l'A.P.M.E.S.P., de plus en plus d'élèves en grande difficultés qui ne savent plus calculer ou utiliser de trigonométrie et qui deviennent un poids mort de fond de classe. Cet état de faits contribue à un sentiment général de baisse du niveau qui se propage jusque dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques, à tel point que, en 1931, l'association des professeurs de mathématiques lance une grande enquête sur les répercussions des plans d'études de 1925 sur le recrutement des élèves des classes préparatoires aux grandes écoles[15]. Le rapport qui en est réalisé en 1932 est sans appel[16] sur les difficultés rencontrées dans ces classes : la classe de mathématiques ne joue plus son rôle de sélection pour une orientation scientifique choisie par les élèves désireux de faire des sciences qui se trouvent mélangés aux autres et obtiennent leur baccalauréat quitte à le présenter plusieurs fois. Les classes préparatoires connaissent ainsi un afflux considérable d'étudiants mal préparés, à l'esprit peu scientifique, attirés par les débouchés des grandes écoles mais qui ne peuvent faire face au niveau exigé.

Les enseignants de mathématiques condamnent massivement le principe d'égalité scientifique puisqu'un sondage réalisé auprès des adhérents de l'A.P.M.E.S.P. en 1933 établit que 75% rejettent la réforme de 1925. Le retour aux principes de la réforme de 1902 constitue désormais le leitmotiv de l'association jusqu'à la Seconde guerre mondiale[17].

Les effets néfastes de la réforme de l'égalité scientifique se traduisent par une diminution importante du taux de réussite à la seconde partie du baccalauréat mathématiques qui passe de 75% sous le régime de 1902 à 38% en 1933[18]. La réforme de 1925 laisse d'importantes traces et traumatismes dans la communauté enseignante et scientifique comme en témoigne en 1960 Gilbert Walusinski[19] :

« On sait aussi que les tenants les plus acharnés de cette égalité scientifique étaient les apôtres des études littéraires anciennes ; certains d'entre eux y voyaient une protection (au sens douanier du mot) contre la fuite des meilleurs élèves des lycées vers les sections scientifiques. »

---

[15] *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 69, avril 1931. Depuis 1927, une Union des professeurs de spéciales existe également.

[16] Rapport de M. Flavien sur le niveau des élèves dans les classes préparatoires aux grandes écoles, *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire public* n° 74, avril 1932.

[17] En 1941, Jérôme Carcopino rétablit des sections spécialisées qui mettent fin au dogme de l'égalité scientifique.

[18] Chiffres donnés par Nicole Hulin, *ibid.*

[19] Président de l'A.P.M.E.P. de 1955 à 1958 et personnage majeur de l'histoire de l'association. *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public*, n° 206, mars 1960.

Instituer un enseignement unique à tous les élèves jusqu'en classe de première relève donc d'une opposition entre formation humaniste et formation scientifique. Cette dernière s'impose pourtant, depuis les années 1960, en substituant à l'impérialisme d'une formation classique, un universalisme scientifique obligatoire à toute orientation. Depuis, les filières de l'enseignement secondaire essaient, tant bien que mal, de proposer un équilibre entre ces deux conceptions d'enseignement et de formation. La solution est-elle dans la mise en place d'un tronc commun d'humanités jusqu'en classe de première, première étape d'un lycée unique ?

MATHS A VENIR 2009

Ce dossier a été préparé par Marie-Françoise Roy avec l'aide d'Aline Bonami. Plus d'informations sur MATHS A VENIR 2009 sont disponibles sur `www.maths-a-venir.org`.

Déroulement du colloque[1]

Le colloque MATHS A VENIR 2009 a eu lieu les 1er et 2 décembre 2009 à la Maison de la Mutualité à Paris.

Rappelons tout d'abord la genèse du colloque.

Depuis quelques années un certain nombre de collègues souhaitaient organiser un colloque de réflexion sur les évolutions des mathématiques en France au cours des ving dernières années, et l'avenir de la discipline. Le colloque Maths A Venir 1987 avait marqué les esprits et eu des retombées très positives tant du côté du financement de la recherche en mathématiques que de l'image des mathématiques auprès des pouvoirs publics, des médias, du grand public. D'où l'idée d'un nouveau colloque MATHS A VENIR 20 ans après.

L'initiative du colloque MATHS A VENIR 2009 a été prise par les trois sociétés savantes de mathématiques (SFdS, SMAI et SMF) en 2008, avec le soutien de Femmes et Mathématiques (f&m). Pour en accroître l'impact il a été décidé par ces quatre sociétés savantes et association de s'associer avec quatre institutions, l'Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS (INSMI-CNRS), l'Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), et l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS).

Un comité de programme a été constitué dès 2008, avec des représentants des huit organisations partenaires, auxquels ont été adjoints Nalini Anantharaman et Josselin Garnier dans les derniers mois. Le comité de programme a décidé que le colloque ne s'adresserait pas en priorité à un public de mathématiciens professionnels, mais à un public scientifique plus large, aux médias, aux décideurs du public ou du privé, aux industriels et entrepreneurs. Il s'agissait donc d'un colloque prospectif, non pas du point de vue de la science elle-même mais du point de vue de sa place dans la société. Cette décision a conditionné le choix des conférenciers et des tables rondes, ainsi que celui du lieu du colloque.

Au vu de l'importance de l'événement, il a été décidé de s'adresser aux pouvoirs publics pour obtenir leur parrainage et leur soutien financier, et de rechercher

[1] Ce texte repose sur l'article de François Murat publié dans *Matapli* 91.

également le soutien d'industriels et entrepreneurs. Ceux-ci ont accepté par ailleurs de participer à une table ronde précédant la clôture du colloque.

Dans ce but a été créé un comité de parrainage, composé de neuf grandes entreprises (Alcatel-Lucent, Areva, Caisse des Dépôts, Crédit Agricole, EADS, EDF, Faurecia, Schlumberger, SFR), qui s'étaient engagées à soutenir le colloque, en particulier financièrement, mais pas seulement financièrement. Ce comité de parrainage était présidé par Philippe Camus, président d'Alcatel-Lucent et co-gérant du groupe Lagardère (et aussi ancien normalien et agrégé de physique), qui a consacré nombre d'heures à la préparation du colloque, qui a prononcé, après les présidents de la SFdS, de la SMAI et de la SMF, un discours d'ouverture, et qui a participé très activement à la table ronde finale.

Le colloque MATHS A VENIR 2009 était placé sous le patronage du Premier ministre, François Fillon, et de la Ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Valérie Pécresse.

Le colloque MATHS A VENIR 2009 fut un événement exceptionnel. Exceptionnel par la taille (plus de 700 participants) et le lieu (un lieu « grand public » et non universitaire), mais surtout par son but et sa structure.

Le programme comprenait cinq conférences plénières, données par Corinna Cortes (Google Research New York), Olivier Faugeras (INRIA Sophia Antipolis), Étienne Ghys (ÉNS Lyon), Pierre-Louis Lions (Collège de France) et Wendelin Werner (Orsay et ÉNS), ainsi que cinq tables rondes, animées par des journalistes professionnels : *Maths et Industrie*, *Maths et science contemporaine*, *Maths et société*, *Formation par les maths et métiers des maths*, et *Les mathématiques, ressource stratégique pour l'avenir*. Ces conférences et tables rondes ont connu un grand succès, en raison bien sûr de la qualité des intervenants, mais en raison aussi de la participation et de l'implication du public. Il est impossible de les résumer ici, mais on peut les visionner en ligne sur le site : `http://www.maths-a-venir.org/`

On peut donc facilement se repasser les meilleurs moments des conférences ou des tables rondes qu'on a aimées, ou les voir pour la première fois confortablement installé dans son fauteuil, au bureau ou chez soi. Pour ceux qui préfèrent les documents papier à la vidéo, des actes seront publiés avant la fin de l'année 2010.

À côté des conférences et des tables rondes, le programme du colloque comprenait un débat entre lycéens et mathématiciens sur le thème *Bonheur et frustration des lycéens et lycéennes en cours de mathématiques*, débat que l'on peut aussi visionner en ligne à l'adresse mentionnée ci-dessus, et des présentations de logiciels sur de magnifiques écrans. Il comprenait aussi un grand cocktail, qui a eu lieu le jeudi soir à l'Atrium de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), toute proche de la maison de la Mutualité.

Au cours du colloque a eu lieu une conférence de presse, qui a rassemblé une quinzaine de journalistes (au lieu des un ou deux journalistes en général présents à ce genre de réunion). Cela a eu pour conséquence une bonne présence médiatique dans la presse quotidienne et à la radio (notamment avec un article en première page du *Monde* daté du 5 décembre et une émission *Le téléphone sonne* sur

France Inter le 2 décembre), même si rien n'est passé à la télévision (mais des contacts, dont on peut espérer qu'ils seront fructueux, ont été établis avec *Arte*).

Le colloque s'est terminé par une adresse du Premier ministre, François Fillon, que l'on peut lire en ligne sur le site. Puis a eu lieu une séance de présentation des conclusions du colloque, conclusions que l'on peut également lire en ligne, et qui sont reproduites ci-après. Souhaitons que ces conclusions soient reprises et mises en pratique, et en particulier leur dernier paragraphe : *« Les mathématiques sont devenues un enjeu stratégique pour l'avenir, et c'est en donnant du temps de recherche à la communauté des mathématiciens qu'on la mobilisera de la façon la plus efficace pour qu'elle puisse relever les défis formidables proposés par la société d'aujourd'hui et de demain. »*

Discours[1] de Philippe Camus

Président du Comité de Parrainage

Mesdames, Mesdemoiselles, Messieurs,

J'ai l'honneur et le plaisir d'ouvrir les travaux du colloque MATHS A VENIR 2009.

Votre présence, nombreuse, démontre la vitalité de la communauté des mathématiciennes et mathématiciens français et de l'intérêt qu'elle soulève car nous avons le plaisir d'avoir de nombreux participants qui ne viennent pas directement de la sphère mathématique.

Ces deux journées de colloque sont l'aboutissement de travaux préparatoires qui ont duré deux ans, mobilisant de nombreuses équipes d'enseignement et/ou de recherche travaillant au sein d'ateliers comprenant parfois des représentants des entreprises ou d'autres disciplines académiques.

L'État ne s'y est pas trompé puisque ce colloque est placé sous le haut parrainage du Premier Ministre et du Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. L'État manifeste ainsi tout l'intérêt qu'il porte à nos travaux et à l'avenir des Mathématiques, des Mathématiciennes et des Mathématiciens au sein de la Nation. L'initiative du colloque MATHS A VENIR 2009 revient à trois sociétés savantes :

– la Société Française de Statistique,
– la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles,
– la Société Mathématique de France.

Les coorganisateurs sont :

– la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris,
– l'Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS,
– l'Institut des Hautes Études Scientifiques,
– l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique,

[1] Il s'agit d'une version raccourcie, la version complète, comprenant une présentation du programme, se trouve sur le site web.

avec le soutien de l'Association « Femmes et Mathématiques ».

Des grandes entreprises se sont également mobilisées apportant leur contribution aux réflexions ou leur soutien financier. Il s'agit de : Alcatel-Lucent, Areva, la Caisse des Dépôts, le Crédit Agricole, EADS, EDF, Faurecia, Schlumberger et SFR. Une mention spéciale également pour LCI.

Vous constaterez comme moi que l'intérêt soulevé par l'avenir des mathématiques est grand et que la mobilisation est profonde et puissante. C'est que les Mathématiques sont importantes, irriguent la vie de la société et sont stratégiques.

La plupart des objets ou services de la vie quotidienne n'existeraient pas sans les mathématiques. Le téléphone portable, la dépollution des eaux usées, les avions de ligne, internet et ses moteurs de recherche, les prévisions météorologiques, le scanner médical, les produits des banques, les fibres optiques, les cartes de crédit. Réciproquement nombre de travaux de mathématiques viennent en réponses aux besoins de l'Industrie. On a parlé de l'efficacité déraisonnable des mathématiques, mais on est bien forcé de constater cette efficacité, gage du maintien de notre compétitivité entre autres. On s'est aussi étonné de la cohérence de l'édifice mathématique, de son caractère non contradictoire, mais c'est l'honneur de l'esprit humain d'avoir réussi ce tour de force qui doit être poursuivi.

Pourquoi ce colloque, ces « États Généraux » peut-on dire, maintenant en 2009 ?

La première édition de MATHS A VENIR remonte à 1987. À cette époque, la communauté des Mathématiciennes et Mathématiciens français s'interrogeait sur nombre de questions concernant leur profession et leur discipline :

– le décalage entre la réalité des Mathématiques et l'image que s'en font nos concitoyens ;

– la pénurie inquiétante de mathématiciens de toutes catégories (chercheurs, ingénieurs, professeurs de lycées et de collèges) avec à peine 10% des chercheurs ayant moins de 35 ans ;

– l'organisation du système d'éducation et la place des mathématiques dans le système ;

– le petit nombre de chercheurs en mathématiques au CNRS (219 sur 10 000) ;

– l'attraction des centres mathématiques américains.

Tout cela justifiait parfaitement l'appel de Jean-François Méla, Président de la Société Mathématique de France, dans son allocution d'ouverture du colloque de 1987 :*« Serons-nous encore présents, à la place qui nous revient, dans 25 ans d'ici ? »*

Nous sommes aujourd'hui, 22 ans plus tard.

La bonne nouvelle est qu'il y a toujours des mathématiciennes et des mathématiciens français et que l'École Française de Mathématiques est toujours au tout premier rang mondial.

Mais un certain nombre de questions soulevées en 1987 demeurent, ou plus précisément, on peut se demander si les effets très positifs du Colloque de 1987, perceptibles jusqu'en 1996, ne se sont un peu estompés depuis lors.

Nous constatons une certaine désaffection vis-à-vis des études scientifiques. Certes il y a plus de chercheurs, et plus de moyens qu'en 1987, mais les besoins de la société sont aujourd'hui considérables et se sont élargis à des domaines peu développés en 1987. Je pense en particulier à l'informatique, aux sciences du vivant et à l'économie.

L'image des Mathématiques reste toujours un peu la même. Plus repoussantes – car elles restent un instrument de sélection – que séduisantes – car elles sont un domaine de connaissance –, les Mathématiques sont assez facilement prises à partie par l'opinion publique. Le rôle des mathématiques financières dans la crise économique mondiale actuelle a donné lieu à des prises de position tonitruantes même si, dans ce cas, je pense, comme Stéphane Jaffard, que, si certains mathématiciens financiers ont fait preuve d'une certaine irresponsabilité, les fautes sont partagées entre les différents acteurs, y compris, soit dit en passant, par les autorités financières et politiques, pourtant en charge du contrôle et de la sécurité du système financier. Il y a là matière à réflexion sur le bon usage des mathématiques et leur finalité morale.

Quelles sont les questions d'aujourd'hui qui motivent la tenue de ce colloque extraordinaire ?

Je vous répondrai avec mon expérience de dirigeant d'entreprise et ma formation de physicien et de mathématicien (j'ai eu la chance de suivre les cours de DEA d'Analyse Numérique de Jacques-Louis Lions à l'Institut Henri Poincaré).

L'accélération de la pression concurrentielle dans la plupart des secteurs économiques, se caractérise par des rattrapages de plus en plus rapides des écarts de recherche et d'innovation entre acteurs d'un même segment. Dans ce contexte, l'innovation déterminante, celle qui va apporter une vraie différentiation, est très dépendante des méthodes et résultats de la recherche scientifique. Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans l'évolution de ces méthodes. Le lien entre innovation, science et mathématiques se resserre pour répondre à des besoins de développements plus rapides. Cette interdépendance est particulièrement forte là où l'innovation a les conséquences sociales les plus marquées. Les développements dans les domaines des biotechnologies, de la communication, de l'environnement ou de l'énergie renforcent encore ce rôle. La recherche fondamentale y joue un rôle prépondérant, sa composante mathématique y tient une place particulièrement importante. Cependant, quelques défis structurels demandent à être résolus.

– Les pressions économiques et concurrentielles se rejoignent pour que les activités de recherche et développement se concentrent sur des projets de plus en plus étroitement définis, limitant les champs d'investigation scientifique.
– De même la tendance à l'externalisation de la R&D s'accélère impliquant une recherche en réseau et non en silos.
– Le potentiel des mathématiques à apporter des innovations est également impacté par la formidable croissance des capacités de calcul aujourd'hui disponibles. Réciproquement ce sont des calculs avec des nombres premiers qui permettent de tester le bon fonctionnement des microprocesseurs. Mais il en va de la recherche

appliquée comme de toutes nos activités électroniques : traiter plus d'information demande plus de temps, plus d'outils, de meilleures méthodes afin de transformer cette information brute en connaissance exploitable. Il faut donc plus de mathématiques.

« Organiser l'information mondiale, la rendre universellement accessible intelligible et exploitable », pour reprendre le « mission statement » de Google, est une entreprise essentiellement mathématique. Nos systèmes économiques, informatiques et financiers sont totalement dépendants de cœurs mathématiques de plus en plus importants et sophistiqués. Il est significatif que les plus grosses entreprises mondiales en capitalisation (PetroChina, Exxon, Industrial & Commercial Bank of China, China Mobile, Microsoft, Petrobras, BP), comme les françaises (Total, EDF, GDF-Suez, Sanofi-Aventis, BNP Paribas) appartiennent toutes à des secteurs d'activités dont la R&D est hautement dépendante des mathématiques. Même Wal Mart au 6^{e} rang consacre maintenant de gros moyens scientifiques à l'analyse fine du comportement de ses clients ce qui est une des applications de plus en plus étendues de la statistique au sens le plus pur du terme. Il en est de même pour les secteurs qui mobilisent le plus de capital-risque. Dans le domaine des biotechnologies ou du médical par exemple, la progression exponentielle du recueil de données concernant l'observation des comportements des molécules et des cellules conduit actuellement à une vraie révolution technologique : la meilleure analyse quantitative de mécanismes biophysiques ou biochimiques accélère le rythme d'innovation dans la production de nouveaux matériaux biologiques (comme cette peau artificielle pouvant être greffée aux grands brûlés annoncée il y a quelques jours).

Enfin, les mathématiques constituent un langage universel pour les modèles ou processus d'analyse, d'optimisation et de contrôle. La communication des progrès scientifiques a connu une accélération fulgurante avec Internet. Les travaux les plus réservés sont maintenant « chroniqués », sans être pour autant compris. Il s'en suit une pression du corps social qui demande à être « informé », rassuré, protégé. On observe simultanément, l'exigence des consommateurs pour plus de qualité et plus de sécurité. Cela demande des progrès significatifs dans les méthodes de modélisation et de validation de plus en plus complexes qui ne peuvent se faire sans les mathématiques. Les mathématiques sont contingentes du principe de précaution maintenant inscrit dans la Constitution. Je préfère que ce principe, pourtant contestable, soit géré par des scientifiques et non par des juges.

C'est ainsi un paradoxe français que de devoir faire face à une sorte de consensus trouvant qu'on accorde trop d'importance à la filière mathématique/scientifique, alors que le besoin de la société en mathématiciens est croissant.

On estime qu'il y a près de 100 000 mathématiciens dans le monde qui consacrent l'essentiel de leur temps à la recherche. Les français sont au nombre de 6 000, dont 2000 environ dans des entreprises. Cela semble peu mais c'est beaucoup plus qu'en 1987. Les mathématiciens restent très fortement liés à l'enseignement supérieur (90%) sur les 4000 du secteur public, et 355 sont au CNRS (soit 3,1% des chercheurs du CNRS) ce qui est mieux là aussi qu'en 1987.

Mais la courbe démographique présente des signes inquiétants. 14% des enseignants-chercheurs ont moins de 35 ans (environ 10% en 1987) ; 41% des professeurs et 26% des maîtres de conférences partent à la retraite dans les 10 ans. Du côté des entrants ce n'est pas beaucoup mieux. Nous stagnons à 2100 étudiants en dernière année de Master (à Bac +5 depuis la célèbre loi LMD). Quand on intègre les écoles (je n'utilise pas le mot « grandes » car cette notion recouvre aujourd'hui des situations très différentes), on observe une stagnation des études scientifiques depuis le début du 21^{e} siècle. Si l'on ajoute à cela, l'attrait considérable exercé par les mathématiques financières, qui vampirisent des pourcentages importants des promotions (Louis Gallois, président exécutif d'EADS cite le chiffre de 25% d'une promotion de Polytechnique), on voit que la question de l'attrait des études mathématiques, de la recherche en mathématiques, et des débouchés en dehors de la sphère financière se pose avec beaucoup d'acuité. Si nous n'agissons pas, nous aurons d'énormes difficultés à maintenir le potentiel scientifique et technologique du pays. Dans le monde global où nous vivons, je puis vous assurer, en tant qu'industriel, que les conséquences économiques, sociales, culturelles et stratégiques seront considérables et si j'ose ce mot dans cette enceinte : incalculables.

Voila pourquoi je suis profondément convaincu que développer les mathématiques est une priorité, qu'il faut entretenir notre potentiel scientifique et que cela passe par de multiples actions, en particulier la fluidification des transferts de connaissances et la fertilisation croisée entre l'Enseignement, la Recherche et les Entreprises dans le respect des objectifs et des compétences de chacun. Il en va de notre modèle de société et de notre positionnement global dans le concert des nations.

L'homme a toujours cherché à comprendre le monde qui l'entoure. Les mathématiques ont probablement été inventées avant l'écriture, car nécessaires à des échanges de base. L'étude du ciel a été également l'une des grandes sources de problèmes de mathématiques pour les Anciens. L'homme a toujours vécu avec et grâce aux mathématiques.

Les mathématiques sont réputées pour être le fleuron de la recherche française. Pourtant, on entend trop peu parler d'elles et, quand c'est le cas, pas toujours en bien. Le colloque sera l'occasion de faire le point sur les diverses idées vraies ou fausses qui circulent au sujet des mathématiques, de débattre de leur rôle comme ressource stratégique pour l'ensemble des activités sociales, économiques et industrielles, et de proposer des initiatives susceptibles de renforcer les échanges bénéfiques entre la communauté mathématique, les autres sciences, l'industrie, et la société en général.

Les débats seront sûrement passionnants et animés.

Je souhaite à tous, deux très bonnes journées.

Conclusions du Colloque[1]

Ces conclusions ont été rédigées par le comité de programme du colloque MATHS A VENIR 2009, comprenant des représentants des sociétés savantes, Société Française de Statistique (SFdS), Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), Société Mathématique de France (SMF) et des représentants de l'association Femmes & Mathématiques (f&m), du Centre National de la Recherche Scientifique (Institut des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions) (INSMI du CNRS), de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP), de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS), et de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA). Elles sont soutenues par le comité de parrainage du colloque, en la personne de son président, Philippe Camus (Président d'Alcatel-Lucent, co-gérant du groupe Lagardère).

L'intervention des sciences mathématiques dans le développement des sociétés modernes a crû considérablement dans les vingt dernières années. Elles interviennent de manière cruciale dans de nombreuses sciences naturelles, humaines ou sociales, dans la technologie moderne, et dans la vie de tous les jours, même si on n'en a pas toujours conscience. Elles sont utilisées pour l'imagerie médicale, les jeux vidéo, les moteurs de recherche sur internet, la téléphonie mobile, dans les modèles climatiques, dans la finance, pour ne citer que quelques applications. La vitalité et la santé de l'école mathématique française sont donc devenues un enjeu stratégique.

Tous les indicateurs qualitatifs et quantitatifs mettent en évidence que l'école mathématique française est une des toutes meilleures du monde et que les mathématiques sont le domaine scientifique d'excellence de la France. Pourtant, l'évolution de la place des mathématiques y est préoccupante. Beaucoup de personnes en France en ont une image plutôt négative. Elles gardent un mauvais souvenir de leur enseignement à l'école. Elles leur reprochent souvent un rôle exagéré lors de l'orientation au lycée et au collège. Elles ignorent que les mathématiques sont vivantes et utiles. Faute d'une vision claire des enjeux, ces critiques peuvent ouvrir la voie à une diminution de la place qu'occupe l'enseignement des mathématiques au lycée, avec pour conséquence un niveau de compétence trop faible pour tous, et une formation insuffisante pour les futurs scientifiques. De plus, depuis plusieurs années, les effectifs d'étudiants en mathématiques diminuent dans les universités, alors que l'essentiel du potentiel de recherche y est concentré. Enfin, une diminution du nombre des postes universitaires à l'occasion des nombreux départs à la retraite prévus dans les prochaines années est à craindre, suivie d'une baisse brutale du nombre de postes offerts aux jeunes pendant la période suivante où les départs à la retraite se seront taris. Tout ceci risque d'affecter gravement le potentiel futur de la recherche française.

Si le niveau de sa recherche est globalement excellent, la France est loin d'être exemplaire en ce qui concerne les liens entre les mathématiciens et le monde des

[1] Ce texte définitif diffère très légèrement du texte lu en séance par Josselin Garnier et qui a été diffusé par Matapli 91.

entreprises. La formation initiale des ingénieurs français en mathématiques est reconnue internationalement comme un de leurs points forts, mais le fossé entre grandes écoles et universités a pour conséquence que beaucoup d'ingénieurs n'ont pas de contact avec le monde de la recherche mathématique pendant leurs études. Une formation solide en mathématiques incluant les modes d'applications de celles-ci leur est pourtant indispensable. Par ailleurs, la reconnaissance professionnelle des étudiants mathématiciens titulaires d'un master ou d'une thèse reste insuffisante, même si la situation a récemment évolué du fait de la prise de conscience que le doctorat ou PhD est le diplôme de référence au niveau international.

Le colloque MATHS A VENIR 2009 a mis en évidence la nécessité d'une évolution pour la communauté mathématique, avec un renforcement du dialogue avec d'autres communautés techniques et scientifiques, et plus généralement avec l'ensemble de la société. Ces évolutions doivent s'inscrire dans un contexte européen. L'accompagnement des pouvoirs publics est indispensable pour réussir cette mutation.

Nous souhaitons que soient ouverts les chantiers suivants :

Mieux faire connaître le rôle des mathématiques dans les sociétés modernes et leurs débouchés

Vu le rôle croissant des mathématiques dans la vie économique et sociale, un effort important doit être fait en matière de diffusion de la culture mathématique, et de formation de mathématiciennes et mathématiciens. Quand nous parlons de mathématiciens dans la suite de ce texte, il s'agit toujours, évidemment, de femmes et d'hommes.

D'une part un plus grand nombre de mathématiciens doivent se montrer capables de dialoguer avec les spécialistes d'autres domaines. D'autre part plus de personnes doivent mieux saisir les enjeux des sciences mathématiques et de leurs applications, tant dans leur vie professionnelle que dans l'exercice de leur citoyenneté.

Une campagne d'information sur l'importance et la vitalité des mathématiques, et sur la variété de leurs débouchés, doit être organisée, visant notamment à faire mieux connaître les métiers des mathématiques. Les enjeux économiques, politiques, culturels liés à la démocratisation de la science en général et des mathématiques en particulier doivent être mieux perçus. Sans action volontariste dans ce domaine, la communauté mathématique restera, notamment, largement masculine.

La communauté mathématique elle-même a besoin d'acquérir une meilleure vision de ces enjeux. Elle doit travailler à rénover l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux, collèges, lycées, grandes écoles et universités, en partenariat avec les autres disciplines, en tenant compte notamment de la variété et du niveau des publics vers lesquels elle doit se tourner et des débouchés possibles, présents et à venir.

Renforcer l'attractivité de l'école mathématique française

La France doit se donner les moyens de maintenir l'excellence actuelle de son école mathématique. Il lui faut pour cela rester attractive pour les meilleurs étudiants et les meilleurs chercheurs et enseignants-chercheurs, au niveau mondial.

La position atteinte par l'école mathématique française s'appuie sur un tissu de laboratoires de très bon niveau répartis sur le territoire national. Il est nécessaire de veiller au maintien de ces forces en gardant un juste équilibre entre ceux-ci et des centres d'excellence ciblés.

Dans le domaine de l'attractivité, il y a à la fois des constantes et des évolutions notables : d'une part des pays comme les États-Unis continuent à être attractifs, d'autre part certains pays émergents ont maintenant les moyens et la volonté à la fois de retenir leurs propres étudiants et chercheurs et d'attirer des chercheurs du plus haut niveau venus de l'extérieur. Nous sommes à un tournant, et il est impératif de pouvoir proposer des conditions de travail et de recherche à la hauteur des meilleures institutions équivalentes à l'étranger.

L'attractivité scientifique d'un pays passe également par la qualité des outils mis à la disposition des scientifiques : des centres de rencontres permettant l'organisation de colloques internationaux, des instituts permettant à des visiteurs étrangers de faire des séjours de recherche par exemple. La communauté mathématique française a su se doter de structures efficaces et reconnues comme telles dans le monde entier. Les moyens dont disposent ces institutions sont cependant très inférieurs à ceux que reçoivent les institutions équivalentes à l'étranger, et doivent être renforcés.

Maintenir l'excellence de la recherche mathématique en France nécessite enfin de respecter l'autonomie intellectuelle des chercheurs : on ne peut pas connaître à l'avance ce qui, dans la recherche fondamentale, donnera lieu à application, comme l'illustre par exemple l'utilisation de la théorie des nombres en cryptographie.

Un juste équilibre entre recherche laissée à la libre initiative des chercheurs et recherche sur projets ciblés doit être trouvé.

Développer les interactions entre les entreprises et les mathématiciens

Les interactions entre laboratoires académiques et industriels doivent être développées. Il s'agit de relations bénéfiques pour les deux parties : les entreprises y gagneront en compétitivité en élargissant leur panoplie d'outils, les mathématiciens y trouveront leur compte en sources de nouveaux problèmes, en accès à de nouveaux moyens, et en reconnaissance de leur utilité pour la société.

Ceci réclame une évolution de l'état d'esprit de tous, dans le respect des objectifs et des compétences de chacun, et une réflexion sur les moyens nécessaires pour donner une impulsion à ces initiatives. Au niveau de l'enseignement, des départements de sciences mathématiques devraient être créés dans les écoles d'ingénieurs en collaboration avec les universités.

Au niveau de la recherche, différents types d'actions doivent être envisagés, en particulier l'organisation de forums de discussion et de semaines de modélisation pendant lesquelles des acteurs du monde de l'entreprise présentent des problèmes à des groupes de mathématiciens, ou encore la mise en place de structures nationales qui seraient des lieux privilégiés pour lancer des collaborations et former des ingénieurs mathématiciens à double culture. De telles structures ont été mises en place avec succès dans des pays voisins, comme par exemple l'Institut Fraunhofer en Allemagne. Enfin, les activités de conseil doivent être développées comme un moyen souple d'initier des collaborations entre le monde académique et le monde de l'entreprise.

Renforcer les interactions entre les mathématiques et les autres sciences

La communauté mathématique doit s'organiser pour donner une réponse adéquate aux importants besoins en mathématiques venant des autres domaines scientifiques. Lors du colloque, on a pu constater l'explosion des champs d'applications des mathématiques, y compris vers les sciences humaines et sociales. Il s'agit de favoriser les contacts entre mathématiciens et scientifiques d'autres disciplines pour créer des réseaux d'équipes pluri-disciplinaires. Pour donner un exemple, il faudrait faire émerger rapidement une dynamique de collaborations autour des applications en biologie, interface cruciale qu'il est urgent de développer et de densifier.

Approfondir la réflexion sur la responsabilité et l'éthique des mathématiciens

Le temps est venu pour les mathématiciens de s'interroger sur leurs responsabilités vis-à-vis de l'utilisation qui est faite des outils et des techniques qu'ils développent. La question est d'autant plus importante que le décalage temporel entre le développement des outils conceptuels et leur utilisation s'est considérablement réduit.

Les mathématiciens sont aujourd'hui dans une situation similaire à celle qu'ont connue d'autres scientifiques avant eux, les physiciens avec l'arme atomique et l'énergie nucléaire, les chimistes avec les questions de pollution, ou les biologistes avec les manipulations génétiques. Les mathématiciens actifs dans les applications ont une responsabilité particulière dans ce processus, mais celle-ci doit toutefois être assumée par l'ensemble de la communauté. Établir des relations nouvelles entre mathématiques et société impose à la communauté mathématique de s'interroger sur son éthique.

Les moyens à mettre en œuvre

Pour conclure, on doit se poser la question des moyens à mettre en œuvre pour réussir ces évolutions. Le défi majeur est d'organiser une recherche et un enseignement beaucoup plus collaboratifs, où seront mobilisées et interagiront des compétences multiples, qu'elles soient internes aux mathématiques ou qu'elles soient partagées comme on l'a discuté précédemment.

D'une part, la question des moyens mis à la disposition de la recherche est évidemment très importante, alors qu'on a souvent tendance à la sous-estimer pour les mathématiques. On ne peut pas soutenir les échanges internationaux ni le développement nécessaire des interactions industrielles sans une aide significative des pouvoirs publics et des partenaires du monde économique.

D'autre part, il est clair que, dans le contexte actuel, le facteur primordial est le facteur humain : la mise en place de nouvelles orientations et de nouveaux comportements demande que plus de chercheurs aient plus de temps à leur consacrer. Nous souhaitons souligner les dangers de la situation actuelle : départs en retraite importants, diminution des effectifs étudiants scientifiques, manque d'attractivité des carrières académiques. Le défi à relever est donc considérable et demande qu'une attitude extrêmement volontariste soit adoptée. Il est impératif qu'il y ait plus de chercheurs qui puissent se consacrer à la réalisation de projets novateurs et interactifs. Cela peut vouloir dire plus d'emplois permanents consacrés à la recherche, mais aussi plus de facilité donnée aux chercheurs et enseignants-chercheurs pour se consacrer au montage de projets d'interactions. Parallèlement il faut encourager par des mesures statutaires et fiscales toutes les mobilités, qui sont reconnues comme l'outil le plus efficace pour susciter des interactions : mobilité entre laboratoires de différentes disciplines, mobilité entre organismes de recherche et universités, mobilité entre monde académique et monde de l'entreprise.

Les mathématiques sont devenues un enjeu stratégique pour l'avenir, et c'est en donnant du temps de recherche à la communauté des mathématiciens qu'on la mobilisera de la façon la plus efficace pour qu'elle puisse relever les défis formidables proposés par la société d'aujourd'hui et de demain.

Quelques points de vue au sein du comité d'organisation

La *Gazette* a demandé aux organisateurs de MATHS A VENIR 2009 les leçons qu'ils tirent du colloque. Elle a reçu une contribution à plusieurs voix, de Jean-Pierre Bourguignon, Laurence Broze, Véronique Chauveau et Marie-Françoise Roy, et quelques commentaires de Jean-Michel Poggi.

Contribution à plusieurs voix

J.-P. Le fait qu'un certain nombre d'industriels aient accepté de soutenir financièrement le colloque à un niveau substantiel et d'être présents dans les tables rondes est un point positif. C'est particulièrement vrai pour Philippe Camus, qui a tenu toutes les promesses qu'il avait faites aux organisateurs, tant en faisant débloquer de l'argent qu'en donnant de son temps (pendant de nombreuses semaines, une conférence téléphonique d'une heure à une heure trente est, pour quelqu'un de son niveau d'occupation, une implication exceptionnelle). Je pense qu'il faut voir là la preuve que la question du futur de l'activité mathématique en France intéresse les industriels les plus conscients des enjeux techniques du futur. Il convient, à mon avis, de trouver le moyen de capitaliser sur cet intérêt et cela devrait passer peut-être par la constitution d'un club d'industriels qui accepteraient d'accompagner la communauté mathématique dans ses efforts pour rendre les problèmes qui se posent à la discipline plus évidents aux décideurs en tous genres, notamment politiques.

V. Certains industriels sont de plus en plus conscients qu'ils ont besoin de mathématiciens mais, malheureusement, le nombre d'étudiants en mathématiques diminue et les écoles d'ingénieurs ont beaucoup de difficultés à convaincre leurs étudiants de s'engager en mathématiques.

M.-F. On peut noter la participation aux tables rondes, aux ateliers préparatoires, et la présence lors du colloque, de nombreux scientifiques d'autres disciplines. Il est important que ceux-ci expriment ce qu'ils attendent des mathématiques et ce qu'ils en ont déjà reçu, et je crois qu'ils ont bien apprécié qu'on le leur demande. Bien entendu, l'image des mathématiques qui en ressort n'est pas exactement celle que s'en font les mathématiciens eux mêmes. Mais ce décalage est en lui-même un phénomène intéressant. Je suis frappée par la grande variété des secteurs des sciences mathématiques qui ont été évoqués par les autres scientifiques : la statistique, bien entendu, mais aussi la géométrie, la théorie des nombres, la logique, à côté des méthodes numériques.

J.-P. Un autre point tout à fait positif a été le fait que tant le format du colloque que le lieu choisi, le Palais de la Mutualité, se sont révélés tout à fait adaptés, et que l'organisation matérielle a tellement bien fonctionné que l'on ne s'en est presque pas rendu compte. Cela n'a été possible que grâce à l'engagement personnel de toute l'équipe qui était mobilisée sur le projet, et tout particulièrement celle de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, qui a fait un travail exceptionnel. Rien de tout cela n'était évident au moment où le projet a été lancé, et même plus avant jusqu'au sprint final. Cela montre que la communauté est capable, quand elle travaille de façon collective, de monter des événements significatifs rassemblant plusieurs centaines de personnes, qui ne sont pas toutes liées directement à elle.

M.-F. Nous n'avons pas réalisé tout ce que nous avions en tête, cependant. Une volonté affirmée du comité de programme était d'assurer une présence des femmes dans tous les aspects du colloque. Cette voloné était le reflet des progrès importants accomplis depuis 20 ans en matière de visibilité des femmes dans la communauté mathématique : en 1987, par exemple, une table ronde spécifique avait eu lieu, alors que là notre choix était d'avoir des femmes partout. Mais les résultats ont été mitigés. On a continué à flirter avec les stéréotypes : beaucoup de femmes très dévouées au comité d'organisation, aucune dans la table ronde stratégique finale, une présence minimale parmi les conférenciers invités ou dans la table ronde industrielle, et une forte présence dans la table ronde parlant d'enseignement.

L. Effectivement, il a été très difficile d'associer au colloque des mathématiciennes autres que celles que nous aurions retrouvées dans une table-ronde spécifique si notre choix avait porté sur cette modalité, autres que celles qui se sont investies dans le comité d'organisation. Le nombre dérisoire de femmes dans les niveaux les plus élevés de la hiérarchie académique ou industrielle fait que celles-ci sont débordées d'engagements ou se sentent peu enclines à être sollicitées juste parce qu'elles sont des femmes. Elles sont souvent nommées dans un grand nombre de structures et comités pour que ceux-ci atteignent une certaine dose de parité. Beaucoup de celles qui ont été invitées à participer au colloque ont été contraintes de refuser en raison d'engagements importants extérieurs.

V. Et dans la salle ? Le public était très masculin. J'ai voulu en avoir le cœur net, j'ai compté le nombre de femmes présentes : une personne sur quatre. Effectivement, le seul moment où nous étions plus nombreuses, dans la salle et à la tribune, c'était bien pour la table-ronde sur « Formation des maths et métiers des maths ».

J.-P. Un point négatif est la faible couverture de presse que nous sommes parvenus à engendrer malgré les efforts considérables et systématiques faits de notre côté. La « une » du *Monde* ne doit pas faire illusion : elle n'a été obtenue que sur intervention personnelle de Philippe Camus, sinon rien ne serait sorti. Dans le même ordre d'idées, Sylvestre Huet n'est pas parvenu à faire sortir le moindre entrefilet sur la manifestation dans la version papier de Libération et l'entretien qu'il a enregistré avec moi n'est sorti que sur son blog. L'émission « Le téléphone sonne » sur France-Inter a été un succès mais cette émission sur le thème des mathématiques n'a été obtenue que grâce à la relation très particulière que plusieurs d'entre nous ont avec une journaliste de la station. Rien n'est sorti à la télévision, mais cela n'est pas une surprise. Le problème de la présentation dans les média des problèmes que posent les sciences est plus global, et les journalistes scientifiques rencontrent de plus en plus de difficultés à faire passer les articles qu'ils préparent. Je pense que cette question devrait être abordée franchement avec d'autres partenaires scientifiques car la situation est devenue vraiment critique.

V. C'est un cercle vicieux : l'image des mathématiques dans le grand public n'est pas bonne, elles sont toujours considérées comme un instrument de sélection, et donc les journalistes ne souhaitent pas en parler dans les journaux. Énoncer l'objectif « plus de personnes comprenant plus de mathématiques et plus de mathématiciens capables de dialoguer avec les autres scientifiques et le monde de l'industrie et des services » peut être un outil pour faire bouger les mentalités. Les mathématiques ne laissent personne indifférent. Les adultes, même longtemps après avoir fini leurs études, ont des souvenirs très vivaces concernant les maths. Les lycéens qui ont participé au débat « Bonheurs et frustrations en mathématiques » apprécient plutôt les mathématiques : ils sont en Terminale S et étaient volontaires pour venir au colloque. Néanmoins, ils ont évoqué le côté trop abstrait et trop difficile de la discipline, un enseignement trop mécanique. En Terminale S, les élèves doivent assimiler beaucoup de notions mathématiques en un temps trop court. Ils se rendent bien compte qu'ils ne maîtrisent pas toutes les notions et cela joue dans leurs choix d'orientation. « C'est intéressant mais ce n'est pas pour moi » disent-ils. Nous avons là une lourde responsabilité.

M.-F. Une autre faiblesse qu'il faut signaler me semble-t-il est le caractère très franco-français du débat, écueil qui avait été mieux évité en 1987. À l'époque le ministre de la recherche Hubert Curien avait parlé du développement des programmes de recherche européens, et une table ronde avait été consacrée aux mathématiques dans les pays en voie de développement et s'était faite l'écho du travail du CIMPA. Cette fois-ci, en partie à cause du format choisi, qui proposait beaucoup moins de tables rondes qu'en 1987, la situation internationale n'a été abordée que dans les conclusions, et les enjeux liés à la fracture scientifique, notamment avec l'Afrique, n'ont même pas été évoqués.

J.-P. Le problème est maintenant de savoir ce que la communauté va être capable de tirer de l'événement. Deux points délicats : d'une part savoir comment les conclusions vont alimenter la réflexion de la communauté et d'autre part comment elles vont pouvoir être portées vers les autorités. Elles doivent être maintenant déclinées dans des actions de nature à mobiliser un nombre suffisant de collègues afin de déboucher sur des résultats tangibles et aussi continuer à être nourries d'informations provenant de différents contextes locaux. Que ces conclusions ne donnent lieu à aucune action et à aucun prolongement pourrait être pire que le vide sur l'analyse de la situation qui a été, pour certains des organisateurs, le moteur pour donner naissance à MATHS A VENIR 2009. Il y a là une urgence qui ne peut être traitée que si une coopération assez étroite entre les partenaires qui se sont engagés dans MATHS A VENIR 2009, voire d'autres, est perpétuée d'une façon ou d'une autre.

Quelques commentaires sur MATHS A VENIR 2009 par Jean-Michel Poggi[1]

Je vais débuter ce court commentaire par deux remarques en disant tout d'abord la satisfaction de voir la statistique, par le truchement de la SFdS initiatrice du projet, prendre toute sa place dans l'organisation, la conception et le contenu du colloque. En second lieu, je souhaite rendre justice au processus collectif que nous avons su mettre en place pour, partant de premières réunions riches mais un peu chaotiques, par confrontations, échanges et débats, converger vers un colloque qui marquera sans nul doute une date pour la communauté, unie et diverse, un moment singulier dans une période critique de transformation profonde du système de formation et de recherche, non exempte de risques de fragmentation.

Plutôt que de m'exprimer sur mon appréciation du colloque, je vais me contenter de quelques traits plus personnels qui sont en fait le reflet de mes discussions et des commentaires entendus et débattus à son terme.

Bien sûr, les moments préférés diffèrent d'une personne à l'autre, mais, malgré des interventions que l'on aurait souhaitées différentes, des messages que l'on aurait voulus plus forts, chacun s'est reconnu dans le visage d'une communauté dont le portait s'est dessiné peu à peu au cours de ces deux jours. La densité de l'événement, la variété des points de vue, la diversité des parcours et la qualité des orateurs et des personnalités présentes ont permis interventions, réactions et discussions et ont, petit à petit, construit l'image d'une communauté vivante, diverse, puissante et ouverte.

Le choix de la Mutualité était excellent : le colloque a invité et accueilli à la fois les membres de la communauté mathématique, plus largement le monde scientifique mais aussi des acteurs du monde économique, médiatique. Tout le monde s'est senti gratifié et surpris parce que chacun était dans un lieu neutre et exceptionnel, symbolique incarnant le message des mathématiques dans la société. Le paradoxe est que le colloque MATHS A VENIR 2009, destiné prioritairement à l'extérieur, aux décideurs et à la société, s'il a connu quelques échos médiatiques et diffusé quelques-uns de nos messages, a probablement aussi et surtout séduit la communauté en lui donnant une image d'elle-même qui nous oblige aujourd'hui à

[1] Membre des comités MATHS A VENIR 2009. Vice-président de la Société Française de Statistique.

poursuivre nos efforts pour faire vivre les conclusions et approfondir la trace de ce colloque au travers du site, des actes, des initiatives de promotion.

Quelques initiatives à la suite du colloque

MATHS A VENIR sera présent au Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques Place Saint-Sulpice du 27 au 30 mai, avec notamment la brochure MATHS A VENIR Express, réalisée en partenariat avec le CIJM, et une exposition.

Les conclusions du colloque seront imprimées et diffusées largement.

Les vidéos des exposés et tables-rondes sont disponibles sur le site du colloque. Les discussions en table ronde ont été transcrites et feront l'objet d'un supplément à la *Gazette* et à *Matapli*. Le site web va être maintenu avec un système de mots clefs qui permettra de mettre en valeur les ressources qu'il contient. Des contributions rentrant dans les thématiques du colloque pourront y être rajoutées par la suite.

Une nouvelle version de la brochure *Explosion des Mathématiques* est en préparation, à l'initiative des trois sociétés savantes.

Un travail avec l'ONISEP, permettant de mieux mettre en valeur les métiers des mathématiques sur leur site est prévu.

Enfin des contacts ont été pris avec ARTE et pourront peut-être déboucher sur des émissions ou petits films sur les mathématiques. La fondation Cartier pour l'Art Contemporain a aussi un projet d'exposition...

INFORMATIONS

Démarrage du projet EuDML

La bibliothèque numérique européenne de mathématiques

Thierry Bouche[1]

Les mathématiciens et les utilisateurs de résultats mathématiques dépendent de façon critique d'un accès aux textes originaux dont le contenu a été scientifiquement validé. Le corpus constitué par l'ensemble de ces textes interdépendants (articles, monographies, mémoires ou synthèses) forme un réseau complexe, chaque texte fournissant les fondations de travaux ultérieurs, tout en reposant sur un ensemble de textes et de connaissances auquel il se réfère, parfois implicitement.

Les mathématiciens se sont organisés au fil des siècles pour disposer à travers le monde de bibliothèques de référence leur permettant de travailler. Ils se sont également investis très tôt dans les outils leur permettant de découvrir les articles utiles pour leurs recherches (journaux recensant les parutions, classifications par sujet). La littérature imprimée étant en cours de disparition rapide, ils se sont pris à rêver d'une bibliothèque numérique mondiale et exhaustive, dans laquelle tout article un peu ancien serait accessible d'un clic.

Au niveau national, particulièrement en Europe, les programmes de numérisation ont consacré au cours de la dernière décennie des efforts considérables en vue de construire des archives numériques de la littérature mathématique éditée dans le monde entier. Il existe en outre de nombreux projets pluridisciplinaires qui comportent quantités de textes mathématiques importants. Cependant, ce corpus n'est pas encore aussi accessible et utilisable qu'il devrait l'être. Ceci est dû principalement à un manque de coordination parmi des parties prenantes, si bien que les archives existantes ne sont pas interopérables. Les références d'un article dans une archive fournissent rarement le lien vers leur cible dans une archive différente. Les outils de recherche des différents services ont des capacités variables et beaucoup de textes ne disposent pas des métadonnées essentielles pour pouvoir être correctement indexés et faciles à trouver. Un plan d'action pour une conservation concertée du corpus mathématique numérique sur le long terme est également nécessaire.

Contexte

La mathématique, science exacte par excellence, dépend entièrement de sa littérature. La mathématique étant la mère de toutes les sciences, lesquelles ont besoin de bases fiables, les résultats mathématiques publiés doivent être soigneusement vérifiés, et les versions vérifiées doivent être conservées indéfiniment, sans

[1] Institut Fourier & Cellule MathDoc, CNRS/Université de Grenoble I.

modification. Le stockage doit être soigneusement organisé, avec un catalogue propre et détaillé, de sorte qu'il sera possible à tout moment de faire référence sans ambiguïté à chacun de ces textes. Le graphe des références devrait être construit et conservé aussi, de sorte que l'on puisse faire confiance aux nouvelles avancées reposant en partie sur des travaux antérieurs.

Puisque les utilisateurs des résultats mathématiques ne se servent pas uniquement de la production mathématique récente, c'est tout le corpus qui doit être facilement accessible sur de longues périodes.

Les modes évoluent : les critères de sélection de telles archives ne devraient pas être la popularité d'un auteur ou d'un sujet à une époque, mais la conformité à des normes rigoureuses de production et validation. Chaque résultat nouveau doté d'une preuve originale qui a été soigneusement vérifiée par des experts indépendants peut devenir une référence cruciale pour des développements inattendus, et trouver des applications spectaculaires dans d'autres domaines scientifiques ou technologiques.

Ces considérations expliquent pourquoi les mathématiciens ont toujours pris grand soin de leurs bibliothèques, qui sont l'infrastructure centrale de tous les laboratoires de mathématiques dans le monde. La bibliothèque idéale devrait être exhaustive, acquérir les nouvelles publications en temps réel, et être largement ouverte (dans le temps et à tous les visiteurs). Grâce à l'obstination de la communauté mathématique, les bibliothèques (papier) approchant de cette situation idéale ne sont pas rares, et bien distribuées dans les pays développés. Cependant, chaque laboratoire ayant ses sujets de prédilection, et un budget limité, aucune de ces bibliothèques de laboratoire ne conserve la totalité du corpus mathématique. Le prêt interbibliothèque assemble cependant ces bibliothèques dispersées en une ressource globale virtuelle (certes un peu lourde) qui remplit à peu près la fonction attendue. Mais le papier en tant que format d'archivage est en perte de vitesse rapide (il existe de plus en plus de ressources uniquement numériques, mais il faut aussi savoir que le tirage papier d'un original numérique peut avoir une durée de vie extrêmement courte en fonction des technologies et des supports utilisés).

Un point à souligner est que la valeur de ce système de bibliothèque de référence ne peut être réduite à la possibilité pour les chercheurs d'un accès rapide aux ressources les plus demandées. Pour parer immédiatement un de nos travers contemporains : ça n'est pas le *nombre* d'accès à un texte qui détermine son importance ou l'utilité de le conserver. Au contraire : la littérature mathématique est d'abord difficile pour les non-spécialistes, elle a donc une toute petite audience et est peu consultée, mais il serait tout simplement impossible de faire de la science sans les bases fiables fournies par le corpus mathématique dans son ensemble.

La naissance de communication électronique à la fin du 20^{e} siècle, qui est devenue un moyen omniprésent, presque exclusif de diffuser les connaissances de nos jours, n'a pas changé radicalement les besoins de la science. Elle a créé de nouvelles opportunités pour une diffusion plus facile et plus rapide, et des outils de fouille parmi les résultats scientifiques plus puissants. Malheureusement, elle a également stimulé un tel niveau de concurrence et de désorganisation parmi les fournisseurs de contenu numérique que beaucoup de scientifiques font maintenant face à une difficulté croissante pour accéder aux références publiées nécessaires à leur travail :

– La compression des budgets des bibliothèques et la multiplication des *big deals* (vente forcée de bouquets électroniques) font que la part du corpus papier disponible physiquement à la bibliothèque locale est en forte décroissance.

– Les bibliothèques locales conservent des versions papier éphémères (tirages laser, p. ex.) et des abonnements à des services en ligne dont les contenus originaux (numériques) ne sont pas archivés de façon sérieuse : le risque d'avoir perdu des pans entiers du corpus récent d'ici quelques années est réel.

– L'offre électronique a pris rapidement un tel essor que pratiquement tous les journaux vivants ont une édition électronique, une partie substantielle des journaux anciens a été rétronumérisée. Les livres, les thèses, les actes de séminaires ou de congrès, ainsi que d'autres composants utiles d'une bibliothèque de recherche en mathématiques sont de plus en plus souvent disponibles numériquement. Mais tout cela est dispersé parmi une myriade de fournisseurs, chacun ayant une politique spécifique sur les conditions d'accès à son contenu numérique. En outre, ces fournisseurs, leurs services, leurs serveurs sont très volatils : des collections entières se déplacent, ou disparaissent, quand des compagnies d'édition sont vendues, fusionnées, ou font faillite.

– Quelques ressources importantes sont bien souvent inaccessibles parce qu'elles ne sont pas référencées dans l'un des services professionnels de fouille dans la littérature, ou parce que l'URL fournie par ces services ne fournit pas le type d'accès qui a pourtant été payé.

Notre vision

Considérant les besoins des mathématiciens, de la science dans son ensemble, et que la bibliothèque papier se transforme peu à peu en une archive morte, nous concluons qu'il faut une nouvelle infrastructure fournissant le service attendu de la bibliothèque mathématique de référence dans le paradigme numérique. Comme un travail considérable a déjà été effectué pour convertir les textes mathématiques (anciens et actuels) au format numérique, nous estimons que l'effort devrait porter maintenant sur l'intégration de ce contenu dispersé dans une bibliothèque numérique distribuée de mathématiques.

Les résultats principaux du service de bibliothèque envisagé seraient de mettre en place un réseau d'institutions où les textes numériques seraient physiquement archivés. Chaque institution *locale* se chargerait de la sélection, de l'acquisition, du développement, de la maintenance, du catalogage et de l'indexation, ainsi que de la préservation de ses propres collections selon des politiques clairement établies : elle recevrait une sorte de « dépôt légal » pour une partie bien définie du corpus mathématique.

Le réseau formé par l'ensemble de ces institutions constituerait *une bibliothèque virtuelle globale* disposant d'un point d'accès au contenu distribué, au travers d'interfaces faciles à utiliser. En outre, le recours à des standards éprouvés permettrait à cette bibliothèque virtuelle de servir de couche d'infrastructure interopérable avec n'importe quelle composante de l'environnement de travail des scientifiques, permettant de transformer une référence intellectuelle à un résultat en un lien effectif vers sa rédaction.

Mon article [2] expose cette vision en détail, et aborde quelques-uns des défis qui restent à relever pour la réaliser. Une de ses conclusions est qu'on ne peut pas espérer voir chaque acteur se conformer spontanément à des standards d'interopérabilité exigeants et coûteux, que la seule voie réaliste vers l'intégration passera donc par des solutions automatisées pour produire des métadonnées peut-être approximatives, mais permettant à un tel système de fonctionner.

Le projet EuDML

À l'échelle mondiale, il n'a pas été possible d'atteindre un consensus parmi les acteurs de la documentation mathématique (les mathématiciens en tant qu'auteurs, en tant qu'éditeurs ou en tant qu'utilisateurs, mais aussi d'autres scientifiques, les éditeurs de toute sorte, les documentalistes, les agrégateurs d'information scientifique et technique, les responsables d'organisations scientifiques...). Le projet pilote EuDML implémentera cette vision à l'échelle européenne, avec un nombre de partenaires réduit mais représentant une masse critique en termes de contenus et de diversité structurelle. La stratégie est d'élargir progressivement le groupe initial pour approcher ainsi par itérations successives du but visé.

Il faut saluer le soutien de l'Union européenne, qui permet la première avancée réelle dans ce domaine depuis plus de dix ans ! Ce projet a en effet obtenu l'appui de la Commission européenne dans le cadre du programme « Compétitivité & Innovation » (CIP ICT PSP, « libre accès à l'information scientifique », projet n° 250503). Il a formellement démarré le 1er février 2010 pour une durée de 36 mois avec un budget global de plus de 3 M€, pour un financement européen maximal de 1,6 M€. La réunion de lancement a eu lieu à Lisbonne les 4 et 5 février.

Le consortium EuDML

Le consortium EuDML se compose de 14 partenaires européens[2]. Une dizaine d'entre eux sont des institutions publiques qui contribuent les principales collections de mathématiques numériques (en majorité numérisées) en Europe[3]. Un seul éditeur commercial (EDP Sciences) fait partie du consortium. Il contribue cinq journaux français dont la série ESAIM, éditée sous les auspices de la SMAI et les descendants de la revue RAIRO qui ont été numérisés par NUMDAM et sont en cours de mise en ligne. De nombreux autres éditeurs sont associés au projet, à travers leurs archives numérisées ou plus directement parce qu'ils utilisent pour leur édition électronique l'une des plates-formes partenaires du projet[4]. L'ensemble des

[2] La liste détaillée se trouve sur le site web du projet : `www.eudml.eu`. La Cellule MathDoc a une multiplicité 2 du fait de son statut d'unité mixte.

[3] Projets « nationaux » déjà opérationnels : les tchèque DML-CZ, français NUMDAM, espagnol DML-E, polonais DML-PL, portugais PtDML, grec HDML, et des projets émergents comme le bulgare BulDML.

[4] Ce qui signifie qu'environ 90 revues fourniront directement leurs articles récents : elles sont diffusées par EDP Sciences, le projet CEDRAM de la Cellule MathDoc, ou le service ELibM de la SME et du FIZ. Leurs éditeurs sont pour la plupart des petites structures, allant d'une équipe de volontaires à des sociétés savantes en passant par des structures académiques ou de petites sociétés privées.

partenaires représente une diversité impressionnante des compétences techniques, depuis les bibliothèques numériques et les services d'édition électronique jusqu'au traitement automatisé du savoir mathématique.

Le consortium est renforcé par l'apport de ses deux partenaires associés, qui ne recevront pas de financement européen : la Société mathématique européenne (SME) est associée au projet comme autorité morale fixant les objectifs et évaluant l'utilité des résultats du projet. Elle présidera un comité scientifique consultatif. La bibliothèque universitaire de Göttingen contribuera les journaux numérisés par les projets ERAM et RusDML, ainsi que la plus grande collection de livres numérisés de mathématiques.

Le coordonnateur général du projet (gestion administrative, financière et technique) est José Borbinha, de l'Instituto Técnico superior (Lisbonne, Portugal), qui a été associé à la numérisation du journal *Portugaliae Mathematica* par la Bibliothèque nationale du Portugal, et a une grande expérience dans le secteur des bibliothèques numériques. J'en suis le coordonnateur scientifique (ce qui signifie surtout que je vais essayer de faire en sorte que les activités qui démarrent ne produisent pas un prototype éphémère, mais un service utile).

La situation actuelle

Vers l'an 2000 naissait en Amérique du Nord le concept DML (*Digital mathematics library* ou bibliothèque numérique de mathématiques, John Ewing a écrit l'un des textes fondateurs [7] à la demande de Philippe Tondeur, qui était alors à la tête de la division mathématique de la NSF). La bibliothèque de l'université de Cornell décrochait en 2002 une bourse de la NSF pour « planifier » la mise en œuvre du concept, qui s'est décliné par la suite dans le monde entier (WDML alias World DML de l'Union mathématique internationale (UMI), EMANI de Springer et quelques bibliothèques, DML nationales, etc.), sans jamais prendre corps.

Rétrospectivement, le principal bénéfice de ces initiatives aura été de motiver des projets nationaux, entre lesquels une certaine interaction a été maintenue par la participation à quelques conférences. Voir la table 1 pour une image très approximative des collections existantes[5]. On peut aussi recommander deux sources d'information sur l'état des collections numériques [8, 6].

J'ai publié un panorama de la situation en France et dans le monde il y a quelques années [1] (texte publié en 2008, mais rédigé pour l'essentiel en 2005). J'y constate que la situation mondiale est au point mort, essentiellement à cause de conflits d'intérêts[6], tandis que le microcosme français, très en pointe dans ce domaine, préfigure toutes les composantes prévues de la DML et leurs interactions[7].

[5] Les textes considérés sont des textes originaux de mathématiques, plutôt niveau recherche, comme des livres, des articles de revues ou des thèses. En fonction des sources mentionnées ci-dessous, il n'est pas toujours possible de déterminer une estimation, même grossière. Une borne inférieure pour le nombre de textes numériques actuellement disponibles est suggérée par les 1,2 million de liens directs enregistrés dans les bases de données *Math. Reviews* et *Zentralblatt*.

[6] Pour donner une idée de ces conflits, posons-nous quelques questions en apparence naïves... À qui appartient la littérature mathématique ? À qui doit-elle profiter ? À qui appartient son catalogue ?

[7] NUMDAM comme bibliothèque des journaux et séminaires français (60 séries depuis 1810, 40 000 articles sur 1 million de pages en 2010) alimentée par numérisation et par un nombre croissant d'éditeurs (à ce jour : Elsevier/IHP et ÉNS, Springer/IHÉS, CEDRAM/laboratoires

TAB. 1. Estimation du contenu DML existant.

Amériques : JSTOR (235 000 textes), project Euclid (100 000), Canadian Math. Society (4 000)
Asie : DML-JP (30 000 textes)
Europe : partenaires **EuDML**, *associés* et envisagés (205 000 textes)

- **Allemagne :** **ELibM**, *Mathematica, ERAM/JFM* (85 000 textes)
- **Bulgarie :** **BulDML** (2 500 textes)
- **Espagne :** **DML-E** (5 000 textes)
- **France :** *Gallica-Math, TEL*, **NUMDAM, CEDRAM** (50 000 textes)
- **Grèce :** **HDML** (15 000 textes)
- **Pologne :** **DML-PL** (13 000 textes)
- **Portugal :** **SPM/BNP** (2 000 textes)
- **Rép. Tchèque :** **DML-CZ** (26 000 textes)
- **Russie :** *RusDML* (13 000 textes)
- **Serbie :** bibliothèque informelle (3 700 textes)
- **Suisse :** SwissDML (5 000 textes)

Commercial : 700 000 textes ?

- **Springer :** 14 journaux chez *GDZ*, 1 chez **NUMDAM**, 120 dans Online Archives, 179 vivants (300 000 textes)
- **Elsevier :** 4 journaux chez **NUMDAM**, 63 dans Backfiles, 100 vivants (320 000 textes)
- **Autres :** Cambridge University Press : 20 journaux, Oxford University Press : 30, Hindawi : 18, Walter de Gruyter : 13, Wiley : 42, Taylor & Francis : 58...

Plusieurs conclusions du projet NSF de Cornell [9] sont toujours pertinentes. Tandis qu'un certain nombre d'entre elles mène à une impasse parce qu'aucun accord n'a été conclu à travers le monde sur des questions importantes comme la sélection des textes, le droit d'auteur ou le modèle économique, d'autres sont consensuelles et ont de fait été approuvées par l'UMI en 2002 (navigation et métadonnées libres, libre accès à terme [3]) et 2006 (meilleures pratiques pour la rétronumérisation [5], une vision pour la DML [4]).

Cependant, de nombreuses activités ont eu lieu dans l'intervalle, ce qui modifie profondément le paysage, et pose des problèmes différents. Le contenu mathématique numérique disponible est maintenant considérable, particulièrement en Europe où les projets nationaux ont réuni une partie significative du corpus au format numérique (voir la table 2). Les éditeurs commerciaux, qui étaient peu disposés à investir dans la numérisation et espéraient le déblocage de fonds publics, ont maintenant sauté le pas, et proposent une version privatisée de la fonction bibliothèque qui soulève quelques interrogations sur les critères de sélection des collections ou la pérennité d'une telle entreprise.

---

français, EDP Sciences/SMAI, IMS/Euclid/IHP, SFdS). Rayons spéciaux de la DML française non encore intégrés à NUMDAM : Gallica-Math, archives Bourbaki, publications d'Orsay... CEDRAM, plate-forme d'édition exemplaire en terme d'ergonomie et d'interopérabilité. LiNum et Mini-DML, bases de donnée basiques permettant de chercher dans plusieurs collections à travers le monde (y compris certaines qui ne sont pas cherchables sur leur propre site !), supposées démontrer la faisabilité de la DML telle que je la conçois, mais illustrant aussi les difficultés car des dizaines de sources en principe favorables au projet ne nous fournissent pas de données exploitables.

TAB. 2. Services intégrés ou intégrables dans EuDML.

Partenaires EuDML : bibliothèques numériques

DML-CZ : DML tchèque : `http://dml.cz/`
NUMDAM : DML journaux français (Cellule MathDoc) : `http://www.numdam.org/`
HDML : DML grecque : `http://dspace.eap.gr/dspace/handle/123456789/46`
DML-PL : DML polonaise : `http://matwbn.icm.edu.pl/`
SPM/BNP : *Portugaliae Mathematica* numérisée : `http://purl.pt/index/pmath/PT/index.html`
DML-E : DML espagnole : `http://dmle.cindoc.csic.es/en/portada_en.php`

Partenaires EuDML : édition électronique

CEDRAM : Centre de diffusion de revues académiques mathématiques (Cellule MathDoc) : `http://www.cedram.org/?lang=en`
ELibM : Bibliothèque de journaux sur le serveur EMIS : `http://www.emis.de/journals/`
EDP Sciences : 5 revues mathématiques : `http://www.edpsciences.org/`

Partenaires & collections associés à EuDML

Gallica-Math : Contenu mathématique de Gallica indexé par la Cellule MathDoc : `http://math-doc.ujf-grenoble.fr/GALLICA/`
TEL : Thèses électroniques françaises : `http://tel.archives-ouvertes.fr/`
GDZ : Collections Mathematica et RusDML de la bibliothèque de Göttingen : `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/` et DigiZeitschriften : `http://www.digizeitschriften.de/`

Futurs associés d'EuDML ?

Serbie: eLibrary of Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts : `http://elib.mi.sanu.ac.rs/`
Suisse : SwissDML : `http://retro.seals.ch/`
Italie : DIGIMAT (projet de l'Unione Matematica Italiana)

EuDML : `http://www.eudml.eu/`

Tandis que des bibliothèques numériques locales étaient créées, une communauté de recherche active, basée principalement en Europe, a émergé sous l'intitulé MKM (*Mathematics knowledge management*, gestion automatisée des savoirs mathématiques). Elle vise à développer des outils pour gérer les savoirs mathématiques au format numérique, faisant un pont entre les mathématiques formalisées et les outils de démonstration automatique et... les textes relativement peu structurés que les humains écrivent. Il existe déjà des logiciels de reconnaissance optique de formules mathématiques, d'autres pour l'extraction ou l'inférence automatique de métadonnées. D'autres logiciels permettent de mettre en relation une citation écrite et les entrées correspondantes dans plusieurs bases de données. Ces technologies ne sont pas toutes directement exploitables en production, mais elles permettent d'envisager des chaînes de traitement largement automatisées pour extraire des métadonnées riches à partir desquelles on peut imaginer changer de paradigme pour la recherche de textes mathématiques.

La conservation à long terme du corpus mathématique est une question importante. Il est certain que de mauvaises décisions à cet égard ont déjà affecté des articles édités au début de l'ère électronique, et ce probablement jusqu'à très récemment. Nous espérons qu'il est encore possible d'identifier rapidement les textes en danger et de les sauver avant leur obsolescence.

EuDML : stratégie, actions et calendrier

Il nous semble que c'est le moment opportun pour inviter les parties concernées à coordonner leurs efforts, et créer une infrastructure utile et efficace. Le contexte européen est assez diversifié, tout en restant de dimension maniable, pour y concevoir et réaliser une version réduite mais pleinement fonctionnelle de la DML. Nous comptons sur l'effet catalytique du financement européen pour réaliser rapidement un premier prototype du service envisagé, ouvrant d'emblée un accès libre et facilité à un ensemble important de textes fondamentaux hébergés par nos partenaires. Au cours de la seconde phase du projet, tandis que les partenaires technologiques s'efforceront de rendre le système plus performant, nous tenterons de convaincre les utilisateurs et les contributeurs potentiels des bénéfices qu'ils pourront tirer de ce service. De la sorte, nous allons définir non seulement des normes techniques d'interopérabilité, mais aussi des standards non contraignants de coopération entre les différents acteurs. L'extension à de nouveaux partenaires devrait alors se faire naturellement.

La première étape des travaux, qui vient de commencer, consiste à agréger un dépôt central de métadonnées et doter chaque texte d'un identifiant permanent. C'est le degré zéro de l'intégration : la création d'une base de données unique de tous les textes contribués par les partenaires du projet. Cette tâche sera réalisée au cours de la première année, tandis que le système central et les services associés seront conçus et réalisés. Nous comptons avoir un site web fonctionnel en service autour de l'été 2011, et un système beaucoup plus sophistiqué vers la fin 2012. Nous en appellerons à la communauté mathématique pour tester le système quand ces jalons importants seront atteints.

Tous les services à valeur ajoutée seront développés à partir de cette plate-forme de base.

– Les humains pourront interroger la base EuDML par l'intermédiaire d'une interface web, les programmes disposeront de services web. Pour une meilleure implication des utilisateurs et une grande interactivité, nous ajouterons des dispositifs Web 2.0 comme la possibilité de créer un environnement personnalisé de travail. Il sera par exemple possible d'enregistrer des annotations personnelles sur des textes de la bibliothèque. Elles pourront être privées, partagées avec une communauté d'intérêt, ou finalement intégrées dans la base. Songez que les deux articles qui démontrent le théorème des nombres premiers ne l'appellent jamais ainsi !

– Puisque les métadonnées existantes sont très hétérogènes, souvent incomplètes et monolingues, nous voulons les améliorer en ayant recours à toutes les technologies dont nous pourrons disposer. Ce sera un processus itératif et continu utilisant toutes les relations entre objets indexés pour en déduire des métadonnées plausibles. Parmi ces techniques, citons

  – la reconnaissance optique de caractère : textuelle, structurée, mathématique, avec pour but ultime une version XML/MathML exploitable des textes ;
  – l'exploitation des formules mathématique comme métadonnée ;
  – l'identification des citations ;
  – la génération de liens internes tous azimuts.

– Pour améliorer la fouille dans notre corpus, nous voulons profiter du fait que le contenu de ces collections est par nature fortement mathématique (au lieu de le subir comme une punition !). Nous aurons recours à des techniques MKM pour surmonter les barrières linguistiques, pour mettre en relation des textes sur la base de leur contenu mathématique comme par exemple la similarité des formules employées.

– Nous nous efforcerons aussi de rendre notre contenu plus accessible, notamment aux utilisateurs malvoyants ou dyslexiques, en le rendant disponible aux formats *ad hoc*.

– Pour montrer l'utilité de notre entreprise, nous escomptons faire apparaître des références à des textes mathématiques fondateurs sous la forme de liens dans de nombreux sites, en fournissant à leurs auteurs les outils pour ce faire. Un versement du contenu EuDML dans la bibliothèque numérique européenne (www.europeana.eu) est prévu, et des expositions temporaires pourront y être organisées. Certains collègues vont jusqu'à prétendre que cela fera remonter la cote des mathématiques européennes parmi les citoyens de l'Union, et suscitera donc plus de vocations au sein de la jeunesse !

En parallèle, nous inviterons tous les acteurs qui le souhaitent (les utilisateurs, les éditeurs, les documentalistes, les organismes de recherche, etc.) à discuter des politiques à long terme en vue de la pérennisation du service au-delà de la durée de vie du projet. L'objectif ultime étant de définir une politique raisonnée d'archivage pérenne et de libre accès à terme pour le corpus mathématique.

Le versant français

Les partenaires français du projet EuDML sont : EDP Sciences, l'université Joseph-Fourier et le CNRS, ces deux derniers apparaissant en fait comme tutelles de la Cellule MathDoc (UMS 5638). EDP Sciences contribue 5 journaux, une expertise dans la production, la gestion et la conversion de métadonnées, et le point de vue d'un éditeur privé proche des communautés scientifiques. La Cellule MathDoc contribue ses 65 séries (en ligne ou en cours de traitement), ses outils de création de liens, son expérience sur tous les fronts du chantier DML depuis plus de dix ans, et l'auteur de ces lignes, promoteur infatigable de la DML, mandaté par la SME pour réunir un consortium et définir le projet qui vient donc de démarrer.

NUMDAM abrite la quasi-totalité des revues vivantes de mathématiques éditées en France, et sert plus ou moins de tête de pont pour le réseau français des centres de numérisation de textes mathématiques (notamment à travers ses collaborations avec la BNF, le RNBM, les bibliothèques d'Orsay, de Polytechnique, de Jussieu, etc.). Nous comptons servir d'intermédiaire pour contribuer toutes les collections mathématiques françaises qui le souhaiteront.

Toutes les revues de la SMAI sont donc concernées par ce projet, des archives numérisées par NUMDAM aux articles nouveaux publiés soit par EDP Sciences, soit par le CEDRAM. Le *Bulletin* et les *Mémoires* de la SMF, numérisés par NUMDAM jusqu'en l'an 2000, sont également de la partie, mais la chaîne d'acquisition pour la production post-numérisation n'est pas encore en place : espérons que ce projet soit l'occasion de faire avancer ce dossier !

Outre le rôle d'animation et de communication qui échoit au coordinateur scientifique, la Cellule MathDoc supervise la définition des standards de métadonnées et le moissonnage des collections partenaires. Elle adaptera aussi les outils qui font de NUMDAM et CEDRAM des services salués par les mathématiciens du monde entier (notamment les liens vers les bases de données de référence et vers les articles cités, les métadonnées duales TeX/MathML). Elle espère apprendre de ses partenaires des techniques qui lui font aujourd'hui défaut et enrichir ses services. Finalement, elle espère contribuer à la réussite du projet en relevant quelques défis (qui ne sont pas tous technologiques), et voir enfin ses projets de bibliothèque numérique portés à l'échelon européen.

La prochaine réunion du consortium est prévue en juillet à Paris, à l'occasion de la tenue au CNAM de la série de conférences CICM (Conferences on Intelligent Computer Mathematics), dont l'atelier DML où devraient être présentés les premiers résultats du projet.

Références

[1] T. Bouche – « Toward a digital mathematics library ? », in *Communicating mathematics in the digital era* (J. Borwein, E. Rocha & J. Rodrigues, éds.), AK Peters Ltd, 2008, p. 47–73.

[2] ———, « Digital Mathematics Libraries : The Good, the Bad, the Ugly », *Mathematics in Computer Science* **3** (2010), special issue on Authoring, Digitalization and Management of Mathematical Knowledge (Serge Autexier, Petr Sojka, and Masakazu Suzuki eds.), sous presse.

[3] Committee on Electronic Information Communication of the International Mathematical Union – « Best Current Practices : Recommendations on Electronic Information Communication », *Notices of the AMS* **49** (2002), no. 8, p. 922–925.

[4] ———, « Digital Mathematics Library : A Vision for the Future », http://www.ceic.math.ca/Publications/dml_vision.pdf, August 2006.

[5] ———, « Some Best Practices for Retrodigitization », http://www.ceic.math.ca/Publications/retro_bestpractices.pdf, August 2006.

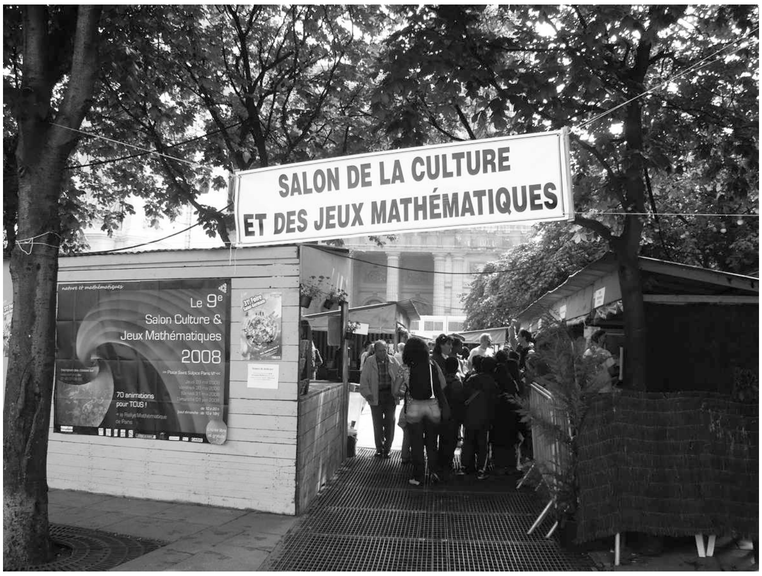
[6] AMS Digital Mathematics Registry : http://www.ams.org/dmr/JournalList.html.

[7] J. Ewing – « Twenty Centuries of Mathematics : Digitizing and Disseminating the Past Mathematical Literature », *Notices of the AMS* **49** (2002), no. 7, p. 771–777.

[8] U. Rehmann – *Retrodigitized Mathematics Journals and Monographs* : http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/dml_links.html

[9] S. E. Thomas, R. K. Dennis & J. Poland (éds.) – *Digital Mathematics Library. A one-year (2002-2003) planning project coordinated by Cornell University Library and funded by the U.S. National Science Foundation (NSF) toward the establishment of a comprehensive, international, distributed collection of digital information and published knowledge in mathematics. Final Report*, Cornell University Library, October 2004, http://www.library.cornell.edu/dmlib/DMLreport_final.pdf.

Le salon 2009...



... place Saint-Sulpice

En 2010, le salon de la culture et des jeux mathématiques autour du thème « Mathématiques et Avenir »

Marie-José Pestel

Un salon qui a onze ans déjà !

Du 27 au 30 mai 2010, de 10 heures à 18 heures, se tiendra, place Saint-Sulpice, au cœur de Paris, une manifestation originale, atypique, unique dans son genre en Europe : le salon de la culture et des jeux mathématiques. Soutenu par la mairie de Paris, qui l'a inscrit en très bonne place dans son programme « Sciences sur Seine », partie prenante de l'historique Foire Saint-Germain, le salon est devenu un événement culturel incontournable. Monté uniquement par des bénévoles enthousiastes, géré par une association d'associations, le Comité International des Jeux Mathématiques (`www.cijm.org`), persuadé qu'ensemble on est plus fort pour faire aimer les maths, soutenu par un Comité d'honneur prestigieux, le salon de la culture et des jeux mathématiques tient le pari de mettre la culture mathématique à la portée de tous.

Avec plus de 25 000 visiteurs de 3 à 103 ans, qui manipulent, jouent et apprennent, son public, fidèle et curieux, s'élargit et se diversifie au fil des ans.

Des classes entières, de la maternelle à l'université, soit plus de 4000 élèves venant de Paris, mais aussi d'Ile-de-France et de province, sont accueillies. Le monde enseignant attend notre manifestation comme une source d'enrichissement et de renouvellement pour ses pratiques pédagogiques. Le CIJM est fier d'avoir su convaincre et fidéliser ce public car il est vrai que diffuser l'information et la culture scientifique est difficile et plus encore quand il s'agit de mathématiques.

Comment le Salon a réussi ce pari ?

Tout est mis en œuvre pour que les visiteurs soient au cœur de la manifestation. Chaque année, un thème est choisi, associant les mathématiques à un autre domaine, une brochure et une exposition sont réalisées. Ainsi l'occasion est donnée à des chercheurs de s'exprimer pour le plus grand nombre. Quelques exemples ? Mathématiques et Nature, Mathématiques et Images, Mathématiques et Europe, Mathématiques et Physique, Mathématiques et Astronomie... sont les thèmes des dernières années. Autour de ce thème s'organise le Salon. Des dizaines d'ateliers d'animations proposent de manipuler pour comprendre et présentent des mathématiques qui interpellent et surprennent. Les jeux sont à l'honneur, pour leur rôle de cohésion sociale bien sûr, mais aussi pour leurs liens importants avec la culture mathématique. Jeux inédits ou traditionnels accrochent le visiteur et lui font bien souvent oublier sa montre ! Des expositions sont conçues avec des images qui interrogent et un minimum de textes. L'exposition « Découvertes mathématiques d'aujourd'hui », que nous avons réalisée avec la SMF et les talents artistiques du photographe Ed Aldcock, a un impact évident sur le grand public. Elle associe une photo, belle et inattendue, d'un jeune mathématicien (ou mathématicienne) et un panneau parlant de ses travaux. Le portrait sert de porte d'entrée au travail de recherche. Enfin, sur le salon, des compétitions et concours sont des moments d'échanges inter générationnels importants. Des conférences, tables rondes et bars des mathématiques sont autant d'occasions de débattre, de questionner, de chercher à comprendre et de se rencontrer.

Rencontre est le maître mot sur le salon

En s'inscrivant dans le programme de cette Foire Saint-Germain, qui depuis 32 ans se tient en juin sur la place Saint-Sulpice, Foire où se rencontrent poètes et gens de théâtre, artisans et céramistes, jeunes artistes et antiquaires, le salon des mathématiques a donné à sa dimension culturelle un cadre et une ouverture riche de promesses et de prolongements. Le Salon est un point de rencontre original, unique, entre les grands organismes scientifiques et muséographiques, les jeunes des ateliers scientifiques venus de tous les horizons géographiques et culturels, les enseignants bénévoles, les associations de spécialistes et le public.

Les rencontres se font sur les 75 stands d'animations présentés par des centres de recherche comme le CNRS, l'INRIA, le CEA, l'université Pierre et Marie Curie, l'Observatoire de Paris, des musées comme le Palais de la découverte, des sociétés savantes comme la SMF, la SMAI, la SFdS, femmes & mathématiques, des associations de spécialistes ou de diffusion de culture mathématique comme l'APMEP, Animath, les petits débrouillards, Planète Sciences, Fondation 93... Enfin des enseignants bénévoles, des jeunes d'Ateliers scientifiques, des créateurs de jeux, des éditeurs de livres et de logiciels font vivre ce salon.

Tous mettent leur énergie à proposer au visiteur de découvrir et de comprendre. Les chercheurs qui nous rejoignent, quittent leur laboratoire pour venir faire partager leur passion pour la recherche à des jeunes et des moins jeunes, à des non initiés comme aux spécialistes. Des artistes nous proposent des passerelles entre les mathématiques et leur art créant ainsi des moments de surprise qui incitent aux questionnements culturels. Des stands d'animation tenus par nos adhérents étrangers (Allemagne, Belgique, Canada, Italie, Luxembourg, Suisse, Tunisie, Ukraine,...), donnent à ce salon une véritable ouverture internationale.

Le 11e salon « Mathématiques et Avenir »

Le comité d'organisation du salon a voulu, cette année, parler de Mathématiques et Avenir ; il se plaçait ainsi dans la thématique du colloque MATHS A VENIR 09 qui s'est tenu en décembre dernier à la Mutualité à Paris. Il est alors apparu comme évident que la richesse des questions soulevées lors des débats trouve leur prolongement sur le Salon de la culture et des jeux mathématiques en direction d'un vaste public curieux et attentif.

Il est bien clair pour tous, même si parfois des responsables politiques ou autres font semblant de ne pas s'en apercevoir, que notre société ne peut se développer sans recherche mathématique avancée. Dès lors de nombreuses questions peuvent et doivent être débattues entre chercheurs et grand public. Citons entre autres :

– Comment expliquer l'intérêt social de maintenir une recherche hors des besoins immédiats ?

– Comment aborder les problèmes éthiques posés par les découvertes, leurs dangers potentiels, les difficultés d'une modélisation mal maîtrisée, (finance) ?

– Comment montrer la contribution essentielle des mathématiques dans des domaines les plus variés ? Les exemples abondent : cryptologie, industrie pharmaceutique, développement durable, problèmes énergétiques, médecine, exploration de l'univers, transports,...

Il faudra aussi se poser la question du lieu des savoirs et des conditions de la communication, pour réfléchir sur la démocratisation des connaissances, les problèmes d'éducation et de formation... Tous les grands thèmes développés dans le colloque trouveront leur écho sur le salon et laisseront une trace dans la brochure MATHS A VENIR Express que nous allons éditer en collaboration avec le Comité d'organisation du colloque et les contributions des intervenants des différentes conférences et tables rondes. Cette brochure gratuite, éditée en 10 000 exemplaires, assurera une large diffusion des idées fortes du colloque.

Des questions débattues pendant le colloque MATHS A VENIR 2009, de nos mobilisations dans nos disciplines, de notre ouverture sur les médias, de notre capacité à intéresser, dépendra pour beaucoup le changement de mentalité nécessaire à une meilleure compréhension des problèmes scientifiques, à un retour en grâce des disciplines scientifiques et à la reconnaissance des mathématiques dans la culture. L'activité, développée sur et autour du salon, apportera sa pierre aux efforts indispensables pour que cessent la désaffection pour les études scientifiques ainsi que la dissociation entre une image éventuellement positive de notre discipline et l'engagement professionnel dans les métiers des mathématiques. Tout doit être fait pour que le grand public comprenne le rôle essentiel que les mathématiques jouent dans le paysage culturel et scientifique d'aujourd'hui.

Pour conclure et puisque ces quelques lignes ne peuvent dire tout ce qui se fait sur le Salon, je vous invite à consulter notre site `www.cijm.org` et surtout je vous donne rendez-vous du 27 au 30 mai prochain, place Saint-Sulpice à Paris, pour des rencontres et d'intenses moments d'activités ludiques, artistiques et scientifiques.

À bientôt !

Appel à projets pour écoles de recherche CIMPA en 2012

Le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées CIMPA a pour objectif de promouvoir la coopération internationale au profit des pays en développement, dans le domaine de l'enseignement supérieur et la recherche en mathématiques et leurs interactions, ainsi que dans les disciplines connexes, l'informatique notamment.

Notre action se concentre aux endroits où les mathématiques émergent et se développent, et où un projet de recherche est envisageable. Le CIMPA est un centre de l'UNESCO, basé à Nice, financé par le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche (France), par l'université de Nice Sophia Antipolis (France), par le Ministerio de Ciencia e Innovacion (Espagne) et par l'UNESCO.

Nous organisons des écoles de recherche d'environ deux semaines dans les pays en voie de développement. Le but de ces écoles est de contribuer à la formation par la recherche de la nouvelle génération de mathématiciennes et de mathématiciens.

Une fois sélectionnées par le Conseil scientifique et le Conseil d'administration du CIMPA, les écoles sont organisées localement avec l'aide du CIMPA. La contribution financière du CIMPA est proposée essentiellement aux jeunes des pays voisins, pour qu'ils puissent assister à l'école de recherche. Le CIMPA peut aider à obtenir des fonds provenant d'autres sources. La feuille de route disponible sur le site du CIMPA donne des précisions supplémentaires. Vous pouvez aussi écrire au CIMPA. L'appel à projets d'écoles de recherche commence le 1er mars 2010.

La date limite pour déposer un pré-projet est le 15 juin 2010. Le projet complet devra être déposé avant le 1er octobre 2010. Le formulaire se trouve sur le site du CIMPA (`http://www.cimpa-icpam.org`), vous pouvez aussi écrire à cimpa@unice.fr.

Financement des colloques : le CIRM passe à la vitesse supérieure !

Pascal Chossat

Le CIRM, établissement de la SMF associé au CNRS au sein de l'UMS 822, est considéré de façon unanime par ses tutelles comme un pilier de la recherche mathématique française et une fenêtre ouverte sur l'international de l'excellence mathématique de notre pays.

Le nouvel institut de mathématiques et ses interactions du CNRS (INSMI) a décidé d'augmenter son soutien au CIRM à partir de 2010 pour permettre une amélioration substantielle des subventions accordées aux rencontres qui se tiennent dans ce centre.

Il résulte de cette décision que dès 2010, le CIRM offre la gratuité totale des séjours pour les petits groupes de travail et les modules de « recherche en binômes ». À partir de 2011 il prendra aussi en charge les frais de séjours de 40 participants par colloque. Ce montant pourra être supérieur sur demande motivée des organisateurs et après accord du conseil scientifique.

Cette nouvelle politique de financement, qui représente quasiment un doublement des subventions antérieures, permet de simplifier les démarches d'organisation, notamment pour les organisateurs étrangers à la France. Elle permettra aussi d'inviter davantage de jeunes chercheurs et de chercheurs de pays émergents.

Le CIRM accueille près de 3000 visiteurs par an : environ 1/4 d'entre eux sont européens et 1/4 viennent d'autres pays étrangers (une cinquantaine de pays). Les activités se déroulent tout au long de l'année, sur 50 semaines. Plusieurs activités sont organisées en parallèle chaque semaine. Le centre fonctionne déjà quasiment au maximum de ses capacités.

Alors que le CIRM s'apprête à fêter ses 30 ans en 2011, les conditions financières avantageuses qu'il est désormais en mesure d'offrir vont renforcer encore son attractivité et élever la qualité des activités et des prestations proposées. Pour plus d'information : `http://www.cirm.univ-mrs.fr`

TRIBUNE LIBRE

L'appel de la chaire

À une époque où les pouvoirs publics cherchent à transformer radicalement la recherche française, où ce sont de plus en plus des projets de courte durée que les agences de moyens financent, où les crédits récurrents des laboratoires de recherche diminuent au profit de ces financements et où, en contrepartie, nous entendons en permanence dire qu'il faut créer des synergies entre recherche publique et entreprises privées, voire que nos laboratoires doivent trouver une partie de leurs financements dans les entreprises, il peut être utile d'essayer de comprendre où mènent ces évolutions. Nous nous proposons de mettre en évidence les côtés pervers d'un tel système sur un exemple, celui des chaires.

Qu'est-ce qu'une chaire ?

Une grande entreprise privée peut se faire opérateur de recherche à divers titres : en possédant son propre département de recherche ; en employant sous contrat à durée déterminée et/ou partielle des chercheurs du secteur public ; ou en finançant une partie des travaux de recherche d'une équipe de chercheurs du secteur public. Dans le premier cas, l'entreprise définit ses propres objectifs, elle emploie ses propres salariés et elle oriente leurs travaux suivant des stratégies qui sont en accord avec les intérêts particuliers de ses dirigeants et de ses actionnaires. Dans le deuxième cas, elle définit ses objectifs conjointement avec les chercheurs du secteur public, dans un équilibre à trouver entre ses intérêts particuliers et l'intérêt général poursuivi par les chercheurs du secteur public. Dans le dernier cas, celui du mécénat, soit l'entreprise contribue à un *fonds* abondé par plusieurs autres bailleurs et on parle alors de *fondation*, soit elle alloue des moyens dans le cadre d'un *partenariat bilatéral* souvent appelé *chaire* (à ne pas confondre avec une chaire en Sorbonne ou au Collège de France, ici la chaire n'est pas personnifiée).

Étude de cas

Prenons l'exemple du groupe Wotanis, géant imaginaire des industries phytosanitaire et pharmaceutique. À côté de son département de recherche et développement, à côté des contrats de recherche que ce groupe signe régulièrement avec des chercheurs et des doctorants de divers établissements publics et universités, le groupe Wotanis finance une partie du programme de recherche et d'enseignement d'une équipe de recherche, fictive elle aussi, disons l'équipe d'épidémiologie de l'École Supérieure de Sciences, et ce à hauteur d'un million d'euros répartis sur cinq ans. Sur le papier, la « chaire Wotanis » ne donne pas d'ordres concernant les activités de l'équipe de recherche puisque celles-ci sont toujours déterminées par contrat avec l'État. Elle finance simplement, sans autre contrepartie que la publicité de ce partenariat, missions, équipement ainsi que contrats à durée déterminée en lien avec ces activités. *Sur le papier seulement*, car en filigrane se dessine clairement le danger de l'ingérence sans garde-fous d'intérêts particuliers dans l'orientation de la recherche publique.

Étant par nature opportuniste, au sens où elle ne prend pas de direction privilégiée *a priori*, la recherche est particulièrement vulnérable à la présence d'offres substantielles sur des thèmes choisis à l'avance, comme par exemple « la promotion de la recherche dans le domaine de l'alimentation dans ses dimensions biologiques, sociales et humaines » (fondation Nestlé), « l'encouragement à la recherche dans le domaine de l'art d'être et de paraître » (fondation d'entreprise l'Oréal), « les approches systémiques des différences individuelles de longévité » (chaire Axa), « un enseignement à la pointe de la recherche dans des secteurs hautement innovants tels que : les nanotechnologies, l'informatique, les réseaux de communication, le transfert et le cryptage de données » (chaire d'innovation technologique Liliane Bettencourt). Sans une réflexion préalable sur la part, y compris financière, de l'effort de recherche consacrée à des thèmes imposés, la recherche publique, *parce qu'elle ne sait pas dire non*, s'expose à un détournement, une captation de ses ressources, en défaveur de l'inconnu et du long terme, si ce n'est du bien public.

Un exemple récent en est donné par les déboires des mathématiques en finance. L'effet de séduction provoqué par l'intérêt des banquiers pour un domaine des mathématiques qui s'était développé jusqu'alors loin des applications aura permis à ce thème de prendre une importance démesurée, aussi bien en termes de filières d'enseignement et de diplômés qu'en termes de publications et de recrutements universitaires, avec les effets désastreux que l'on sait, sinon pour l'économie mondiale, en tous cas pour l'image des mathématiques dans la société. Combien plus précieuse pour tous – sauf sans doute pour les catégories les plus fortunées de la société – eût été une posture plus indépendante et critique, posture qu'au moins en principe, le statut de chercheur du secteur public permettait pourtant.

Mais ce n'est pas uniquement là que le bât blesse.

Une contre-révolution de velours

Tout d'abord, la prise de participation des grandes entreprises transnationales dans la recherche fondamentale constitue un changement de paradigme radical dans l'organisation de la société. La redistribution des bénéfices privés au profit d'activités d'intérêt général est une règle intemporelle de justice sociale, qui passe ordinairement par une double étape cruciale : le prélèvement, puis la ventilation par l'État. Cette charnière garantit un contrôle démocratique de la redistribution. Mais elle se démode. D'une part, des changements récents de législation favorisent la participation des capitaux privés dans le budget des universités et des grandes écoles et la présence de dirigeants d'entreprises dans leurs conseils d'administration. D'autre part, le mécénat ainsi que les activités privées de recherche et d'innovation sont encouragés fiscalement : sous l'appellation mécénat, les grandes firmes obtiennent des déductions d'impôts égalant 60% de la somme versée, si bien que les financements « privés » sont en fait majoritairement constitués d'argent public. Au coût inconnu de cette mesure s'ajoutent quatre milliards d'euros de créance du crédit d'impôt recherche, dispositif non évalué mais connu selon la Cour des comptes pour ses effets d'aubaine, et qui, malgré les objectifs affichés, bénéficie surtout aux grandes sociétés, au premier chef les banques et les assurances. L'abandon partiel de la case impôt dans le processus de redistribution constitue ainsi un transfert de prérogatives de l'État au profit des grands groupes privés : non seulement ce sont ces groupes qui décident comment répartir une partie des ressources publiques, mais les mêmes en tirent en termes d'image un bénéfice symbolique qui est usurpé dans de très larges proportions.

Un tel transfert de pouvoir constitue une vraie contre-révolution, dont ne s'émouvront peut-être que quelques esprits militants. Mais cette contre-révolution aura néanmoins de lourdes conséquences qu'il faut anticiper. Car les chaires font florès. En premier lieu, entre la Fédération bancaire française et certaines écoles d'ingénieurs et de commerce, mais également entre lesdites grandes écoles et de grands groupes transnationaux, comme, dans l'exemple type de l'École Polytechnique : Thalès, Suez, EADS, Axa, AGF, la Société Générale, Veolia, etc. Certaines écoles doctorales sont aussi concernées (fondation Bettencourt-Schueller) et le Centre international de rencontres mathématiques (CIRM) à Marseille envisage même la création d'une chaire avec la firme Total.

L'effet papillon de la généralisation des chaires

À s'en tenir aux faits, dans notre exemple fictif de départ, la chaire Wotanis semble une manne dont les épidémiologistes de l'École Supérieure de Sciences auraient peut-être tort de se priver. Mais la multiplication des chaires ne se fera pas sans dommages collatéraux car l'avenir se lit ici *en creux*.

En premier lieu, *le creux des crédits publics*. Dans de nombreux cas, ce que la main du privé nous donne aujourd'hui sera tôt ou tard retiré de la main publique. Ce principe des vases communicants qui, malgré les belles annonces gouvernementales, s'est appliqué en son temps à l'Agence nationale pour la recherche (ANR) au détriment du CNRS, s'appliquera aux fondations et aux chaires. Et il accentuera d'autant plus le transfert de compétences entre État et intérêts privés dont il était question plus haut. Dans quelques cas, et ce n'est pas moins grave, c'est au contraire là où est déjà allé l'argent que l'argent retournera, créant de petits pôles mandarinaux aspirant la majeure partie des financements sur projets, publics comme privés.

En deuxième lieu, *le creux des inégalités du financement par mécénat*. En plus de celles mentionnées plus haut, ces inégalités sont de trois types : inégalités *économiques entre institutions*, inégalités *démographiques entre sous-disciplines*, inégalités *économiques entre collègues*.

Entre institutions, le tableau est déjà clair puisque l'écrasante majorité des partenaires publics des chaires sont des grandes écoles et non des universités. Que la raison en soit sociologique (connivence entre anciens élèves), pragmatique (on ne prête qu'aux riches) ou politique (crainte de voir contestée dans les universités la venue de capitaux privés), cette préférence va creuser un écart qui est déjà très préoccupant. Et son contrôle échappe maintenant aux mains des citoyens et à celles des chercheurs.

L'inégalité entre sous-disciplines résulte du *brain-drain* des étudiants vers les filières riches et s'apparente *de facto* à une orientation de la recherche en faveur de ces filières : combien de carrières dans la recherche en mathématiques, les métiers de l'ingénieur ou la haute fonction publique, ont-elles été détournées par l'explosion des offres de recherche en mathématiques financières ?

L'inégalité économique entre collègues, enfin, est en train de prendre un tournant historique avec l'apparition des primes individualisées encouragées par la loi dite Liberté et responsabilité des universités (LRU). Elle va bientôt prendre une ampleur sans espoir de retour lorsque les chaires s'accompagneront – la loi le permet déjà même si l'usage n'en est pas encore répandu – *d'indemnités individuelles de contrats*, compléments de salaires pouvant doubler ou même tripler le traitement d'un chercheur du secteur public.

En troisième lieu, *le creux de la vague du mécénat*. Car Wotanis n'a certainement pas vocation à distribuer des crédits de façon récurrente à une équipe de recherche fondamentale. Quelle sera alors la situation d'une équipe subitement privée de centaines de milliers d'euros ? Peut-on certifier que Wotanis ne soumettra pas la prorogation de son mécénat à certaines orientations dans les thèmes de recherche de l'équipe, voire dans les thèmes d'enseignement de l'École Supérieure de Sciences ? Dans le cas où le manque créé n'est finalement pas comblé, il sera sain de s'interroger, d'une part sur les conséquences scientifiques de ce manque, d'autre part sur la nécessité initiale de la chaire. S'il est comblé, il le sera soit par d'autres mécénats, contribuant ainsi à la généralisation de ce système, soit par des fonds publics, dans ce qui s'apparentera de nouveau à une captation de ressources publiques.

En quatrième lieu, *le creux de l'avancée des connaissances*. En concentrant l'effort de recherche vers certains thèmes privilégiés, nous allons délaisser une multiplicité de directions potentiellement fructueuses. Du point de vue fondamental, par exemple en mathématiques, la recherche finalisée consiste le plus souvent à ponctionner des gisements de résultats théoriques obtenus dans le passé au prix d'efforts de longue haleine. Pendant ce temps, qui s'occupe d'alimenter de nouveaux gisements ? Dans notre exemple, pour des raisons de rentabilité, Wotanis se désintéresse aujourd'hui du traitement de certaines espèces envahissantes qui ne survivent pas sous nos latitudes. Que faire le jour où, changement climatique aidant, ces espèces séviront en Europe ?

Les nouveaux pouvoirs accordés au mécène

Et enfin, on ne parle jamais de la stratégie de Wotanis. Ce n'est qu'en partie une stratégie de communication – dont les chercheurs sont les naïves cautions. Une meilleure appréhension de cette stratégie est pourtant indispensable. Un chercheur est aussi un citoyen qui avant de signer doit chercher à savoir si les avantages que Wotanis va tirer de sa chaire sont conformes à l'intérêt général. Et dans une affirmative tout hypothétique, cette compréhension éviterait de concéder dans la négociation des avantages cachés exorbitants.

La stratégie de Wotanis est avant tout une stratégie d'*outsourcing* de son effort d'innovation et de la formation de ses salariés. Autrement dit, en établissant des liens humains, en jetant des passerelles administratives aujourd'hui, puis demain en pesant dans les programmes de recherche, voire d'enseignement de l'École Supérieure de Sciences, Wotanis obtient que des services de recherche et de formation de haut niveau soient mis à sa disposition. Ces services reposent sur des structures déjà existantes de la recherche publique : structures de réseau entre chercheurs, infrastructures, ressources humaines, chacune étant le fruit d'années de travail collectif et d'investissements publics. Tous ces services, toutes ces structures, Wotanis obtient de pouvoir les utiliser sans aucun recrutement ni investissement.

Et bien sûr, comme dans toute opération de mécénat, la chaire est également censée soigner l'image de Wotanis. Mais cette stratégie de communication n'est que très secondairement destinée aux consommateurs. Elle est principalement destinée à ses futurs salariés et à ses futurs clients, pour certains formés à l'École Supérieure de Sciences. Elle vise à garantir l'adhésion, si ce n'est la docilité, des premiers et la préférence des seconds. Mais elle est également destinée *aux futurs décideurs publics*. Car le développement d'un géant comme Wotanis est sans cesse soumis au bon vouloir politique : autorisations de mise sur le marché, régulation de la publicité, régulation de la concurrence, obtention de marchés publics, etc. Il est donc crucial de soigner son image parmi les futurs acteurs de la vie publique. Et pourquoi pas avec la caution affichée de nos collègues ?

La parole est à la défense

Malgré toutes nos mises en garde, vous entendrez pourtant les zélateurs des chaires en défendre le principe. Nous leur donnons ici la réplique.

« Il faut rapprocher le secteur privé et la recherche publique. » Si cette incantation sempiternelle se trouve un jour exaucée, ce ne sera sûrement pas le fait des chaires, puisqu'elles n'ont pas pour but de faire collaborer les chercheurs des secteurs privé et public. Néanmoins l'idée qu'un dialogue constructif puisse s'établir de temps à autre entre chercheurs du secteur public et entreprises privées dans l'intérêt de chaque partie ne nous est pas totalement étrangère, du moment que nos chercheurs en restent avares et que soit garantie une totale autonomie de la recherche fondamentale, comme dans le cas d'un audit. Maintenant, si les entreprises françaises veulent profiter de la capacité d'innovation de nos docteurs, qu'elles les embauchent, sans contrepartie. On peut rêver.

« Les crédits publics vont diminuant, il faut diversifier les financements de la recherche. » Doit-on assumer, voire accélérer, cette tendance au désengagement de l'État ? Le faire dans des conditions qui accentuent les inégalités de traitement entre universités et grandes écoles et donnent des prérogatives léonines aux grands groupes privés ? Un préalable *a minima* serait alors de privilégier les partenariats multi-bailleurs qui encadrent mieux les pouvoirs des donateurs, et au moins de doter tout partenariat de type mécénat de conseils de surveillance et d'instances de contrôle scientifiques. En tout état de cause, une muraille doit être dressée entre le bailleur et les chercheurs.

« Cet argent nous est offert, à quoi bon le refuser, faisons-en simplement bon usage, » diront bien sûr les bénéficiaires. Que diront les autres, ceux qui n'auront pu participer *à aucun appel d'offres*, sans publicité, sans évaluation par les pairs ? Et peut-on certifier qu'accepter cet argent n'aura pas de conséquence sur la disponibilité d'autres sources de financement (public) ?

« Ces fonds seront plus utiles dans notre escarcelle que dans celle des actionnaires. » Voilà un sophisme qui aurait pu sortir de la bouche de ce fameux personnage humoristique qui, pour faire des économies, préfère courir derrière les taxis plutôt que derrière les autobus. Mais pour en rire il faut volontairement se cacher les conséquences prévisibles de la multiplication des chaires et se voiler la face devant les nouveaux pouvoirs accordés aux mécènes. On peut aussi pousser le sophisme plus loin : ces fonds, en particulier en période de crise, plutôt que d'atterrir dans notre escarcelle ou dans celle des actionnaires, seraient sans doute mieux dans celle des salariés ou dans celle de l'État.

Alors, que faire ?

Peut-on éviter les chaires ? Regardons bien, les bénéficiaires d'aujourd'hui sont déjà souvent les mieux dotés par l'État, ils n'ont donc pas besoin d'elles pour exercer convenablement leur métier de chercheur. Ces chaires ne sont souvent qu'un prétexte à des combats entre ces poids-lourds, que ce soit pour le prestige, pour l'attractivité ou pour l'intéressement personnel.

Le monde de la recherche est une société de petites équipes en équilibre fragile entre la compétition et la coopération. Ces nouveaux flux financiers introduisent de nouvelles règles du jeu qui vont perturber cet équilibre, en provoquant la surdotation de certaines stars, l'habitude du luxe, la connivence avec les milieux dirigeants, la promotion sur l'aptitude à la levée de fonds (*fundraising*), l'amalgame entre la qualité de la science et celle du champagne, mais aussi et d'abord, tout simplement, en important dans le monde de la recherche une culture de l'accumulation et de l'accaparement ayant peut-être un sens dans le monde de l'entreprise mais radicalement opposée à l'esprit de notre profession.

Pour toutes ces raisons, il nous apparaît clairement que, dans la situation actuelle, il faut dire non aux chaires. L'appropriation de cette question par les chercheurs eux-mêmes et une position claire de refus du principe même de ces chaires sont les seules garanties permettant d'éviter les dérives évoquées ci-dessus ainsi que les pressions, internes ou externes aux laboratoires, qui s'exerceraient immanquablement sur les responsables de nos équipes de recherche.

Signataires

Yann Bugeaud (Professeur à l'université de Strasbourg, membre de l'Institut universitaire de France), Jean-Baptiste Caillau (Professeur à l'université de Bourgogne), Fabienne Castell (Professeur à l'université Aix-Marseille 1), Peggy Cénac (Maître de conférences à l'université de Bourgogne), Brigitte Chauvin (Professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin), Dario Cordero-Erausquin (Professeur à l'université Paris 6), Jean-Pierre Demailly (Professeur à l'université Grenoble 1, membre de l'Académie des sciences), Yves Derriennic (Professeur émérite à l'université de Brest), Zindine Djadli (Professeur à l'université Grenoble 1), Pascal Hubert (Professeur à l'université Aix-Marseille 3), Jean-Pierre Kahane (Professeur à l'université Paris Sud, membre de l'Académie des sciences), Amaury Lambert (Professeur à l'université Paris 6), Arnaud Le Ny (Maître de conférences à l'université Paris Sud), Emmanuel Lesigne (Professeur à l'université de Tours, ancien président CNU 26), Pierre Mathieu (Professeur à l'université Aix-Marseille 1, membre de l'Institut universitaire de France), Marc Peigné (Professeur à l'université de Tours, président CNU 25), Didier Piau (Professeur à l'université Grenoble 1), Nicolas Pouyanne (Maître de conférences à l'université de Versailles Saint-Quentin, vice-président CNU 25), Stéphane Rigat (Maître de conférences à l'université Aix-Marseille 1), Cyril Roberto (Maître de conférences à l'université de Marne-la-Vallée), Alain Rouault (Professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin).

⋆ ⋆ ⋆

Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.
Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.

COURRIER DES LECTEURS

À propos de l'Institut Henri Poincaré

Chers collègues,

Suscités, je veux bien le croire, par les meilleures intentions du monde, les termes durs employés en relation avec l'Institut Henri Poincaré dans l'éditorial de la *Gazette* de janvier 2010 ne me semblent pas rendre compte objectivement de la situation. Je remercie les rédacteurs pour la bonne grâce avec laquelle ils m'accordent un droit de réponse.

Je tiens en premier lieu à rassurer les lecteurs : l'IHP n'est pas, et ne deviendra pas, une simple « façade » de l'université Pierre et Marie Curie. L'IHP est avant tout l'IHP, un organisme unique en France, à vocation nationale et internationale, bénéficiant d'un soutien considérable de l'UPMC et d'un soutien non moins considérable du CNRS, ainsi que d'une aide précieuse des universités Paris VII (Paris-Diderot) et Paris-Sud Orsay. La gestion de proximité par une grande université met l'IHP à l'abri des aléas financiers et matériels, et lui assure un suivi régulier par une équipe importante, que l'IHP ne pourrait héberger. Pour y être confronté au quotidien, je peux témoigner des avantages de ce statut conçu avec clairvoyance au moment de la refondation des années 1990.

Le dernier Conseil d'Administration a voté une proposition, soutenue par la direction de l'IHP et par ses tutelles, augmentant la redevance d'hébergement : de là à parler de « négation du rôle national de l'IHP », il y a une interprétation trop hardie. Si la nouvelle direction de l'IHP a défendu (et assume pleinement) le principe de l'augmentation, c'est parce que nous sommes convaincus, Jorge Kurchan et moi-même, que les locaux de l'IHP – locaux chargés d'histoire, idéalement situés, dont le rôle fédérateur est unanimement reconnu – constituent un bien public précieux qui doit être géré avec une grande rigueur, dans les actes comme dans la comptabilité (à ce sujet, l'UPMC avait déjà recommandé l'augmentation des loyers il y a près de 10 ans comme l'attestent les comptes rendus du Conseil d'Administration). Le régime de quasi-gratuité en vigueur jusqu'à présent encourageait les dérives et participait aux tensions internes, bien réelles depuis des années, entravant le bon fonctionnement de l'institut. Aujourd'hui c'est sensiblement plus de la moitié des bureaux de l'IHP (aussi bien en nombre qu'en superficie) qui est occupée par des activités d'administration de la recherche ; ces activités (promotion des mathématiques auprès des jeunes et du grand public, édition, etc.) sont indispensables et participent au rayonnement des mathématiques françaises, s'inscrivant ainsi dans les missions de l'IHP ; elles sont encore appelées à se développer, mais ne doivent jamais avoir préséance sur les activités de recherche proprement dites. Face à une situation explosive, la coopération de tout le monde s'impose.

Pour vous convaincre que je ne noircis pas le tableau, je donnerai quelques chiffres. À l'heure où j'écris ces lignes, l'IHP accueille 175 invités dans le cadre du programme sur la théorie de Galois ; seuls 45 d'entre eux disposent d'un bureau... ou plutôt d'un demi-bureau ($6m^2$). Les invités qui viennent en dehors de ce programme sont logés dans des bureaux normalement réservés à l'accueil des visiteurs de passage ; les trois revues des Annales de l'IHP n'ont droit en tout et pour tout qu'à un coin de bureau partagé avec l'infirmerie... Dans un tel contexte de pénurie, il convient de bien réaliser combien l'espace est précieux ; si l'augmentation des loyers, tout en restant dans des limites modestes, a permis de catalyser cette prise de conscience, son but a été atteint.

Bien entendu, j'appelle de mes vœux – et ne négligerai aucune piste pour obtenir – une augmentation globale de l'espace à disposition de l'IHP, qui seule pourra résoudre durablement la pénurie, et donner à nos invités les conditions de travail qu'ils méritent, tout en permettant à l'IHP et à ses partenaires (sociétés et associations de promotion des mathématiques) de se développer. De nouveaux chantiers sont en cours à l'IHP, pour le développement des actions doctorales, des programmes d'invitation de courte durée, des échanges avec l'étranger, des relations avec le grand public ; si l'on veut les mener à bien, ces projets demanderont de l'argent, mais aussi de l'espace. Je n'oublie pas non plus la question du logement, déjà bien inscrite dans les préoccupations des refondateurs de l'IHP : vingt ans plus tard, les capacités de logement mises à disposition de l'IHP restent négligeables.

Certains d'entre vous m'ont fait part de leur vive inquiétude quant aux conséquences de l'augmentation de loyer, en particulier sur le fonctionnement de la SMF. En l'absence de données quantitatives, ces inquiétudes étaient légitimes, mais rassurez-vous, nous ne sommes pas en train de parler de sommes colossales ; le prix fixé par le Conseil d'Administration est de l'ordre de la moitié du « prix du marché », l'augmentation est progressive, et si elle est entièrement reportée sur les cotisations, il en coûtera à terme (en 2012) à chaque adhérent environ 1 EUR par an pour chaque bureau utilisé par la SMF. À titre de comparaison, le déficit de l'IHP pour l'exercice 2009 (déficit entièrement épongé par l'UPMC) représente 25 fois cette somme ; l'ensemble des loyers de toutes les associations hébergées, même après augmentation, n'aurait pas suffi à combler ce trou, loin de là.

Revenant au fonctionnement de l'IHP, maison des mathématiciens et physiciens théoriciens, examinons la façon dont il est administré. Toutes les décisions importantes sont prises par le Conseil d'Administration, au sein duquel ni le directeur de l'IHP ni le président de l'UPMC ne votent. Ce Conseil comporte des représentants de l'UPMC (4/26 ces dernières années), mais aussi des représentants des autres universités, du CNRS, des sociétés savantes, du Ministère, de l'Académie des Sciences, des personnels de l'IHP, des usagers de la Bibliothèque. C'est ce Conseil, fait de gens a priori raisonnables et en aucun cas aux ordres de l'UPMC, qui après une longue discussion contradictoire a voté à une très forte majorité la mesure tant décriée d'augmentation des loyers.

D'ailleurs la dernière séance du

Conseil d'Administration ne s'est pas limitée à une discussion des redevances d'hébergement; on y a aussi voté des modifications de statuts qui, sans engager de bouleversement majeur, diminuent le rôle de l'UPMC dans la prise de décisions : la place de la physique et du CNRS a été renforcée par l'attribution d'un deuxième siège au représentant du président du CNRS; le rôle des universités hors UPMC a été renforcé par l'attribution de deux nouveaux sièges, et l'instauration (ou la réinstauration) d'un vote national; le rôle des sociétés savantes a été renforcé par l'attribution d'un siège à la Société Française de Statistique. Je profite de cette occasion pour exprimer la fierté de l'IHP de collaborer étroitement avec des sociétés et associations qui réalisent au quotidien un travail admirable.

Quant au Conseil Scientifique, ou Conseil de Programmation Scientifique, qui selon les statuts donne son avis sur toute l'activité scientifique présente au sein de l'IHP, il est fait de douze membres triés sur le volet, dont l'indépendance, la compétence et la diversité sont jalousement surveillées. Dans la configuration actuelle, les membres de ce conseil viennent de Lyon, Montpellier, Nice, Orsay, Oxford, Paris-ÉNS, Princeton, Rennes, Rome, Stanford, Toulouse. Il se trouve (c'est un hasard) qu'actuellement aucun d'entre eux n'est en poste à l'UPMC.

Coupons court aux rumeurs de plan, voire de complot, pour faire déménager l'IHP à Jussieu. Comme le rappelle la version finale du rapport de Bernard Larrouturou sur l'enseignement supérieur, p.120, l'IHP reste propriété indivise des treize universités parisiennes, personne actuellement ne souhaite faire évoluer ce statut et c'est pourquoi ce bâtiment n'apparaît nulle part dans le projet de convention de dévolution entre l'État et l'UPMC. Propriété et gestion sont deux choses distinctes, et c'est bien la gestion qu'assure l'UPMC, affectant temps, argent et personnel au bon fonctionnement de ce bâtiment depuis sa rénovation. Au reste, il y a seulement quelques années, ce que l'on redoutait pour l'IHP c'était bien le désengagement de l'UPMC, qui aurait signifié la faillite de l'institut.

Je conclurai avec deux recommandations pour ceux qui souhaitent soutenir l'IHP. La première est de vous adresser directement à moi pour toutes demandes de renseignements, réclamations et revendications en rapport avec l'IHP; je réponds toujours. La seconde est de vous impliquer dans les prochaines élections au Conseil d'Administration, qui se tiendront début mai 2010. Ces dernières années limitées à un petit cercle, les élections d'enseignants/chercheurs hors UPMC seront désormais nationales, afin précisément de refléter la vocation nationale de l'IHP. Tous les électeurs du CNU (sections 25, 26 et 29), ainsi que ceux du Comité National (sections 01 et 02), sont invités à se présenter et à voter. La loi nous interdisant une consultation électronique, ce scrutin sera organisé par une urne, placée à la Bibliothèque de l'IHP du 3 au 7 mai 2010. La longue durée du scrutin, et la possibilité de procuration (jusqu'à deux procurations par votant) devraient faciliter, autant que possible, la participation de tous. Être membre du Conseil d'Administration n'implique guère d'obligations (deux réunions par an), et vous donnera pleine légitimité à faire valoir votre opinion, vos conseils, vos idées pour que l'IHP croisse et embellisse, et remplisse au mieux ses missions au service de toute la communauté, nationale et internationale, des mathématiciens et physiciens théoriciens.

Cédric Villani
Professeur de l'ENS Lyon,
Directeur de l'Institut Henri Poincaré

Complément à l'article de Marc Chaperon paru dans le numéro 122 de la Gazette

J'ai beaucoup apprécié le « petit cours » dans lequel M. Chaperon nous rappelle qu'Élie Cartan a été le précurseur de la théorie des connexions développée par la suite, en particulier par Paulette Libermann. Les exemples présentés dans cet article étant tous relatifs à des connexions d'ordre 1 sur le fibré tangent je souhaiterais leur ajouter un exemple de connexion d'ordre 2, et rappeler que c'est la théorie des repères mobiles, constitués de sphères, imaginée par Élie Cartan, qui matérialise les connexions conformes sur les variétés riemanniennes. Je ne sais si cette identification a fait l'objet de publications autres que la thèse de troisième cycle rédigée par Alfred Touré d'après les notes que je lui avais données, soutenue le 7 juillet 1981 (université Pierre et Marie Curie). J'ai moi-même étudié les géodésiques de cette structure, qui vérifient une équation différentielle d'ordre 3, en les comparant aux courbes de courbure conforme nulle introduites par Élie Cartan[1].

J'ai alors apprécié la précision de la théorie d'Élie Cartan qui, en ramenant l'utilisateur à des calculs précis, lui évite les erreurs auxquelles peut conduire le caractère abstrait des fibrés d'ordre quelconque. Le plus bel exemple de ce type d'erreur est celui de la démonstration donnée par le grand géomètre D. V. Alekseevskii du théorème (inexact) suivant[2]

(A) *Soit M une variété différentiable et C un groupe fermé d'automorphismes d'une G-structure de type fini sur M. Si tous les sous-groupes d'isotropie de C sont compacts, alors C agit proprement sur M.*

La notoriété de son auteur a fait admettre pendant 20 ans la validité de ce résultat jusqu'à ce qu'en 1992 R. J. Zimmer construise un contre-exemple montrant que cet énoncé n'était même pas valable lorsque la variété M est compacte.

En fait, le but d'Alekseevskii était de prolonger aux variétés non nécessairement compactes les démonstrations apportées par M. Obata[3] et moi-même[4] (sans hypothèse de connexité) de la « conjecture de Lichnerowicz » relative à la réductivité du groupe conforme d'une variété riemannienne compacte.

La deuxième partie du mémoire d'Alekseevskii restant valable, il suffisait donc de prouver que l'assertion (A) était vraie dans le cas où $G = C(M)$ est le groupe des automorphismes conformes d'une variété riemannienne M.

Avertie par R. Gutschera, élève de R. J. Zimmer, j'ai pu, non sans peine, en donner une démonstration en utilisant les invariants conformes globaux que j'avais construits en 1972[5]. Mais cette démonstration, assez longue à exposer en toute rigueur et généralité, et qui n'utilisait aucune structure algébrique

[1] Réf. C.R.A.S. t. 96, pp 681-684 et Lecture Notes Springer 1013, pp 76-86.
[2] Math. USSR Sbornik 1972.
[3] J. diff. geometry 1970-1971.
[4] Mém. Acad. Royale de Belgique 1971 et C.R.A.S. (1969).
[5] C.R.A.S. Paris 1972 et J. diff. geometry 1973.

a été refusée par le « Journal of differential geometry » qui avait pourtant accepté ma construction d'invariants conformes globaux ; et il me fallut l'aide de J.-P. Bourguignon et R.J. Zimmer pour être accueillie par d'autres revues[6]. Était-il donc hérétique d'utiliser les propriétés des transformations quasi-conformes qui avaient permis à G. D. Mostow d'établir son théorème de rigidité des espaces hyperboliques ?

Pour terminer je voudrais faire remarquer que l'erreur commise dans la démonstration de (A) est d'autant plus naturelle qu'en géométrie différentielle classique, toutes les applications considérées sont supposées « suffisamment différentiables », ce qui peut faire oublier que la limite d'une suite uniformément convergente d'applications différentiables n'est pas nécessairement différentiable : ce n'est qu'en 1970 que E. Calabi et P. Hartman ont prouvé que la limite uniforme d'isométries différentiables est différentiable ! J'ai essayé de prouver qu'il en est de même pour les transformations conformes mais je ne suis pas sûre que ma démonstration soit exempte de toute erreur[7] ; et je voudrais émettre le vœu que les publications mathématiques soient soumises à des contrôles aussi rigoureux que possible malgré leur multiplication !

Jacqueline Ferrand
Université Pierre et Marie Curie

[6] Math. Annalen 1996 J. Analyse Math. 1996 et Geometriae dedicata 1996 résumés dans C.R.A.S. 1994.
[7] Lecture notes 743 (1979) Springer Verlag.

LIVRES

Chez les Weil - André et Simone
S. Weil
Buchet Chastel, 2009. 272 p. ISBN : 978-2-283-02369-3. 18 €

L'auteure a un héritage lourd à porter : elle est la fille d'un mathématicien, André Weil (1906-1998) qui a apporté des contributions fondamentales aux mathématiques du XX^{e} siècle et la nièce d'une philosophe hors norme, Simone Weil (1909-1943), que l'auteure n'a pas connue mais qui a très probablement exercé une influence considérable sur sa vie personnelle. Comme Sylvie Weil l'écrit, la référence à sa tante a été bien souvent un guide dans l'éducation qu'elle a reçue de ses parents et de ses grands-parents et aussi un lourd tribut qu'elle doit assumer par une ressemblance frappante avec sa tante.

L'auteure, n'étant ni mathématicienne ni philosophe au sens où on l'entend lorsqu'on évoque le nom de Simone Weil, fait un récit très vivant de la vie d'une famille d'intellectuels du siècle dernier. Elle montre comment le poids d'une éducation familiale a conduit son père, jeune normalien, à quitter cette famille pour aller débuter une carrière en Inde où il a été très influencé par les modes de vie et notamment tout ce qui touchait à la richesse d'une civilisation ancienne, bien plus ancienne que la civilisation occidentale, c'est sans doute pendant son séjour en Inde que André Weil a perfectionné sa connaissance du sanscrit qu'il maîtrisait parfaitement. Il est difficile de savoir comment les premières années d'une vie riche ont influencé les choix qui ont conduit son père à des voyages imprévus en Finlande où il a été accusé d'espionnage au profit de l'Union soviétique au début de la guerre 1939-1945, ce qui lui a valu une condamnation à laquelle il a échappé à la suite d'une intervention de dernière minute du mathématicien finlandais, Nevanlinna, bien introduit dans les milieux politiques finlandais. Pendant ce temps, dans une France en pleine débâcle, le soldat Weil était considéré comme déserteur ce qui lui a valu un procès et une condamnation qui a été levée par la suite. Néanmoins André a pu quitter la France, avec sa famille, pour aller aux États-Unis, mais là-bas il ne s'intégrera pas à la communauté française exilée et il poursuivra une carrière mathématique commencée en France ; il faut rappeler ici que André Weil est l'un des fondateurs, voire l'un des initiateurs, du groupe Bourbaki.

Sylvie Weil montre bien les incidences de cet épisode de la guerre sur la carrière et la vie de famille de son père ; ce livre est aussi une tentative touchante de réintégration de son père dans la communauté mathématique française ; elle est très pudique, comme son père, sur les périodes douloureuses qui correspondent à certains moments de leur vie commune. Les récits qu'elle fait de promenades avec son père au jardin du Luxembourg, en Israël, au Japon témoignent d'une piété filiale et de complicités disparues à la mort de son père. En fait comme elle l'explique, Sylvie souhaiterait que son livre contribue à réintégrer André Weil dans la communauté mathématique française, si son œuvre mathématique est connue et respectée, pour ce qui concerne sa vie il subsiste des réticences qui devraient être levées définitivement. Que Sylvie se rassure elle a suivi le bon chemin et il est à espérer que la communauté trouvera un moyen de cette réintégration qui placera André Weil auprès de sa sœur, même s'il est un peu osé de penser que le grand public pourra deviner la richesse cachée derrière les noms de André et Simone Weil.

Mais un autre aspect passionnant de l'ouvrage porte sur les « relations » de Sylvie avec sa tante, qu'elle n'a pas connue, mais qui ont fortement influencé sa vie et peut-être aussi contribué à se libérer des liens trop forts dus à sa naissance au sein son illustre famille. À la lecture de ce livre on reste un peu perplexe en se demandant si l'Histoire est l'assemblage de destins individuels ou si les destins individuels fabriquent, a posteriori, l'Histoire ! Le livre se lit facilement, le seul regret que l'on pourrait formuler est que la pudeur de tous les intervenants, y compris la pudeur de l'auteure, est si grande qu'il est possible de se sentir frustré de ne pas en savoir plus sur cette famille exceptionnelle qui laissera des traces dans l'histoire.

Gérard Tronel,
Université Paris VI

Formes quadratiques sur un corps
B. Kahn
Société Mathématique de France 2008. 303 p. ISBN : 978-2-85629-261-7, 55 €

On peut sans doute faire remonter la théorie des formes quadratiques à Apollonius de Perge, puis bien plus tard Diophante. On distingue aujourd'hui deux courants : la théorie arithmétique, concernant des questions profondes sur $\mathbb{Z}$ et plus généralement sur les anneaux d'entiers de corps de nombres, qui contient de très beaux résultats dûs entre autres à Hermite, Siegel, Minkovski et Hasse, et la théorie proprement algébrique, qui elle est bien plus récente et s'intéresse dès l'origine aux propriétés générales sur les corps. Il a fallu en effet attendre curieusement les travaux de Witt à la fin des années trente, pour que la théorie algébrique des formes quadratiques sur les corps commence à se dégager en tant que sujet autonome. N'est-ce pas Emil Artin qui considérait, comme un scandale, que le théorème d'extension de Witt n'ait pas été prouvé plus tôt ? Après une période relativement confidentielle la théorie s'est imposée universellement à la suite d'articles fondamentaux d'Arason et Pfister, dans les années soixante. Elle a été grandement popularisée par T.Y. Lam dans son premier livre sur le sujet : « Algebraic theory of quadratic forms » paru en 1972, et s'est beaucoup développée depuis. Aujourd'hui, le cadre de la théorie est celui des formes quadratiques sur les anneaux et plus généralement sur les schémas, et la théorie sur les corps y est centrale. L'école russe issue de Saint Petersbourg a joué un grand rôle dans la dernière période, entre autres sur les conjectures de Milnor, dont la preuve a valu à Voevodsky la médaille Fields. Il faut noter aussi que jusqu'à une période relativement récente, la théorie n'était pas dans la tradition française. Tel qu'il apparaît maintenant, le sujet combine des méthodes d'algèbre élémentaire avec d'autres beaucoup plus avancées, de géométrie algébrique, de théorie des représentations et des algèbres simples, de K-théorie algébrique, de cohomologie galoisienne...

Le livre de B. Kahn est le premier en français sur le sujet. Il a pour origine un cours donné par l'auteur à une école du CIMPA en Argentine. Il se démarque des traités déjà existants par l'importance donnée aux corps de fonctions des quadriques, et son ouverture vers des aspects d'actualité comme l'impact des correspondances algébriques sur les formes quadratiques, à travers leur quadrique associée. Il est constitué de deux parties égales en volume mais de natures distinctes.

La première est un cours systématique sur certains aspects de la théorie algébrique des formes quadratiques sur les corps, en caractéristique différente de 2. La lecture en est abordable dès le Master, mais le niveau va croissant au cours des chapitres. Le premier expose la théorie classique de Witt et on y trouve tout de suite un résultat crucial de Springer, sur la conservation de l'anisotropie d'une forme quadratique par extension de degré impair. L'importance des formes de Pfister est mis en évidence dès le second chapitre. La façon la plus naturelle de rendre isotrope une forme quadratique qui ne l'est pas est de passer au corps des fonctions de la quadrique associée, en analogie avec le corps de rupture d'un polynôme. Les trois chapitres qui suivent tournent autour du comportement des formes quadratiques par extension au corps des fonctions d'une quadrique. La théorie du déploiement générique de Knebusch en constitue le centre : elle évoque la construction du corps de décomposition d'un polynôme. Sont exposés ensuite les invariants à valeur dans le groupe de Brauer et dans la cohomologie galoisienne, et leurs relations avec les conjectures de Milnor. Un chapitre sur les formes en basse dimension montre la complexité de la théorie à un niveau élémentaire. Un dernier chapitre sur des problèmes de descente est très lié aux préoccupations de l'auteur.

La seconde partie est constituée d'appendices : les 3 premiers concernent des rappels utilisés dans la première partie sur le groupe de Brauer, la cohomologie galoisienne et les courbes algébriques. Le suivant est une introduction à la théorie des formes quadratiques en caractéristique 2 par A. Laghribi, essentiellement l'esquisse d'un livre en projet avec Hoffmann. Enfin le dernier appendice reproduit un exposé de l'auteur au séminaire Bourbaki, pour la lecture duquel la première partie peut être utile, mais qui se place à un tout autre niveau. Il y est question de développements récents de la théorie dûs à Vishik et Rost, concernant l'étude des motifs des quadriques. Ce sont des motifs géométriquement de Tate purs et donc relativement élémentaires. Leurs applications à la théorie des formes quadratiques, en particulier aux formes de Pfister est remarquable. On trouvera aussi dans cet exposé des ingrédients décisifs de la preuve des conjectures de Milnor par Voevodsky : le motif de Rost et les opérations de Steenrod dans un cadre motivique. Cette étude est précédée d'une introduction à la théorie des formes quadratiques qui fait un peu double emploi avec la première partie du livre. Mais la caractéristique 2 n'y est pas exclue et la vision y est plus large, par exemple sur le théorème de Springer évoqué ci-dessus.

C'est un livre riche, varié, très bien écrit et composé, qui amène à des questions d'actualité et donne envie d'approfondir certains des sujets qui y sont abordés. On ne peut qu'en recommander la lecture et même l'acquisition à tous ceux intéressés par les développements récents de la théorie des formes quadratiques.

Jean-Louis Cathelineau, Nice

Galois Groups and Fundamental Groups
T. Szamuely
Cambridge University Press, 2009. 270 p. ISBN : 978-0-521-88850-9. £30

Le sujet de ce livre est assez classique : il s'agit d'explorer l'analogie entre la notion de groupe de Galois et celle de groupe fondamental, et de montrer comment on peut tirer profit de leurs interactions.

La lecture des quatre premiers chapitres, soit un peu plus de la moitié du livre, ne nécessite pas de connaissances préalables autres que des notions de base sur les corps commutatifs, des rudiments de topologie générale, et de variable complexe. Par contre, il est certainement préférable d'avoir une certaine maîtrise de la géométrie algébrique, et en particulier de la théorie des schémas, pour aborder la lecture des deux chapitres finaux, plus spécialisés.

D'emblée, on est curieux de savoir comment le livre va se distinguer d'un autre ouvrage, *Algèbre et théories galoisiennes* de Régine et Adrien Douady, dont le sujet, le niveau, et même le procédé narratif, fondé sur la mise en parallèle d'énoncés algébriques et topologiques, sont tout à fait semblables. Et, en fait, on est agréablement surpris par une démarche complètement nouvelle.

Le premier chapitre donne un résumé rapide, mais complet, de la théorie de Galois des corps, pour aboutir à la formulation moderne, due à Grothendieck : l'anti-équivalence entre la catégorie des algèbres finies étales sur un corps et celle des ensembles finis munis d'une action continue du groupe de Galois.

Dans le deuxième chapitre, l'auteur commence par démontrer l'énoncé topologique analogue, où l'on remplace les algèbres étales par les revêtements d'un espace topologique convenable donné, et le groupe de Galois par le groupe fondamental. L'exposé est vraiment plaisant à ce point, où un juste équilibre est trouvé entre les différents aspects (homotopique, fonctoriel) du groupe fondamental topologique. Le chapitre se conclut avec un aperçu sur la correspondance de Riemann-Hilbert.

On aborde le cœur du sujet dans le troisième chapitre, où l'on confronte les deux points de vue, lorsque l'on s'intéresse d'une part aux extensions de type fini de degré de transcendance 1 de $\mathbb{C}$, et aux surfaces de Riemann compactes d'autre part. On arrive à la conclusion que tout groupe fini est groupe de Galois d'une extension de $\mathbb{C}(t)$. L'auteur présente une preuve originale en adaptant à la situation complexe la méthode de recollement de revêtements due à Harbater et Pop dans le cadre p-adique. Le parti pris pédagogique, déjà présent dans le deuxième chapitre, est de donner, dans un cadre topologique simplifié, la justification de constructions algébriques sophistiquées, et cela fonctionne à merveille.

Dans le quatrième chapitre, on améliore ces résultats pour tenir compte de la ramification éventuelle des revêtements, en introduisant de manière ad hoc les courbes algébriques et leurs groupes fondamentaux. On précise, lorsque le corps de base est algébriquement clos, la structure de ces groupes, et lorsqu'il ne l'est pas, on constate comment son groupe de Galois absolu intervient. À mon avis, il ne s'agit pas du meilleur passage du livre, car la multiplication des points de vue différents sur les courbes algébriques a de quoi décontenancer le lecteur. Cependant, la fin du chapitre constitue une introduction utile à la philosophie anabélienne, ainsi qu'à la conjecture des sections.

Le cinquième chapitre donne la construction générale du groupe fondamental d'un schéma. Celle-ci est rendue très naturelle par le travail préparatoire fait dans le deuxième chapitre. L'auteur évite habilement la notion de catégorie galoisienne, ce qui rend son exposé plus abordable que l'exposé magistral de Grothendieck dans SGA1. Mais le meilleur reste à venir, lorsque l'on passe en revue les résultats connus sur la structure du groupe fondamental, principalement dans le cadre abélien, pour aboutir à la théorie du corps de classes géométrique.

Enfin, le sixième et dernier chapitre est consacré à un traitement assez exhaustif de la théorie de Tannaka, et à un aperçu de deux applications, les groupes de Galois différentiels et le schéma en groupe fondamental de Nori. Cette partie est plus technique, et certainement moins originale que le reste du livre.

L'ouvrage fourmille de remarques intéressantes, et même un lecteur possédant déjà une certaine expertise du sujet en tirera certainement profit. Deux exemples tirés du premier chapitre : l'auteur motive l'introduction de la topologie des groupes profinis en racontant la découverte par Dedekind de ce qu'on appellerait de nos jours des sous-groupes non fermés des groupes de Galois. Quelques pages plus loin, il mentionne le résultat récent de Nikolov et Segal prouvant que pour tout groupe profini topologiquement de type fini, les sous-groupes d'indices finis sont précisément les sous-groupes ouverts. La bibliographie est excellente.

Bien sûr, on peut émettre quelques critiques. Le calcul du groupe fondamental topologique des surfaces de Riemann compactes n'est pas vraiment traité. On peut aussi regretter que la théorie de la descente, qui est pourtant souvent sous-jacente, n'ait pas été exposée de manière plus systématique. Enfin, certaines définitions sont parfois un peu floues : par exemple lorsqu'on définit une homotopie entre chemins, il n'est pas spécifié clairement que les extrémités des chemins restent fixes.

Mais, on l'aura compris, les points forts du livre l'emportent largement, et comme celui-ci donne un point de vue vivant et actuel sur le sujet, il complétera utilement votre bibliothèque au côté des autres ouvrages cités.

Niels Borne,
Université Lille 1, Villeneuve d'Ascq

Mathématiques et risques financiers
N. Bouleau
Odile Jacob, économie, 2009. 268 p. ISBN : 978-2-7381-2285-8. 24,50 €

L'auteur est ingénieur, mathématicien, enseignant à l'École des Ponts et Chaussées. En France il a été parmi les premiers à s'intéresser aux mathématiques financières. Le livre reprend et prolonge le contenu d'un ouvrage du même auteur publié en 1998 sous le titre « Martingales et marchés financiers ». La nouvelle version prend en compte des conséquences de la crise récente, dont certaines sont analysées dans la cinquième partie : « Les risques : entre philosophie et mathématiques ».

Dans la préface et dans l'avant-propos, Nicolas Bouleau souligne que ce livre n'est pas un bréviaire dans lequel figureraient tous les principes permettant aux lecteurs de devenir des spécialistes de la finance, voire des banquiers astucieux qui gagneraient à tous les coups beaucoup d'argent car ils disposeraient de connaissances et d'outils mathématiques en accord avec des règles « déontologiques » aux contours flous. Le but de cet ouvrage est d'expliquer ce qu'est la finance et ses relations avec l'économie, la psychologie et les mathématiques. Comme le climat, la médecine, la finance n'est pas une science exacte, si elle fait appel aux mathématiques, elle relève aussi des sciences sociales. Actuellement des contre-courants viennent brouiller la vision que l'on pouvait avoir de la science, ainsi des physiciens réfléchissent à la question : « La physique est-elle une science ? » La finance deviendrait-elle alors une pseudo-science ?

Le découpage du livre en cinq parties permet de rentrer progressivement dans le sujet, mais des réserves, des références variées, des retours en arrière donnent à la lecture un aspect non linéaire d'ailleurs revendiqué par l'auteur.

La première partie développée dans les chapitres I à III est largement historique. Pour le mathématicien et le joueur de casino la signification du hasard n'est pas la même ; le premier chapitre est d'ailleurs sous-titré : « Le hasard au casino », il contient aussi des références à la littérature, notamment au « Joueur » de Dostoïevski. La partie historique se réfère à la thèse de Bachelier datant de 1900 ; Bachelier est considéré comme le premier à avoir introduit les mathématiques pour tenter une explication de certains phénomènes boursiers. On peut aussi trouver des informations sur la naissance des premiers marchés boursiers, par exemple celui de Chicago portant sur des marchandises, en particulier le blé. Depuis la thèse de Bachelier, jusqu'aux années 1970, les mathématiques se sont développées en dehors de la finance. Le calcul des probabilités – lié à l'origine aux lois du hasard dans les jeux – a mis en place des outils et des techniques d'ingénierie financière, parmi les plus utilisés on peut citer l'intégrale de Itô et plus généralement le calcul stochastique.

La deuxième partie, trois chapitres, est une analyse d'un problème particulier : « La couverture des options : une rupture épistémologique». L'auteur fait remonter à 1970 les changements fondamentaux qui ont complètement modifiés les données et les méthodes dans le domaine de la finance, notamment l'arrivée de mathématiques de haut niveau avec comme conséquence la véritable naissance des mathématiques financières. Avant cette date, il était assez clair que l'économie et la finance n'étaient pas déconnectées, mais dans le grand public, elles étaient souvent liées à des scandales retentissants comme le financement du canal de Panama, le scandale des piastres ; de même l'histoire des emprunts russes peut être envisagée comme modèle de relations incestueuses entre économie, finance et politique. La rupture épistémologique, Nicolas Bouleau la situe au lancement des premiers produits financiers ; c'est semble-t-il à partir de là que se met en place un marché de la finance que l'on pourrait présenter de manière caricaturale comme un moyen de faire de l'argent avec de l'argent en lançant des produits largement virtuels : les fonds de pension, les « subprimes » liées au marché de l'immobilier : ces placements « concrets et sûrs », se sont avérés être des bulles qui n'ont pas manqué d'exploser.

La troisième partie intitulée « Science et spéculation », chapitres VII à IX, contient des expressions qui peuvent paraître choquantes ; à titre d'exemple citons « spéculer est un métier » ! Dans le chapitre VIII, « Illusions du Hasard » l'auteur écrit : « Les krachs comme ceux de 1929, de fin 1987 ou de l'automne 2008 résultent de situations de panique dont les causes apparaissent minimes »- petites causes, grands effets ! On peut être inquiet de cette appréhension du monde de la finance car il semblerait que, pour des mathématiciens, un minimum de rationalité serait nécessaire. L'explication de la « signification économique des actifs » est précisée par la phrase : « Leur lecture économique – par des opérateurs – de la situation les incite à juger irréalistes certains cours et ils tendent à rétablir des prix dans des fourchettes plus normales à leurs yeux ». Des exemples concrets illustrent les propos de l'auteur : la vente d'oranges en euros, avant la récolte, oranges qui plus tard seront revendues sous forme de jus, en dollars, alors que, entre les deux, les cours de l'euro et du dollar vont fluctuer de manière aléatoire. Il analyse aussi le comportement de certains traders qui ont défrayé la chronique – Nick Leeson, Jérôme Kerviel notamment. La situation se complique avec la titrisation qui permet aux banquiers de jouer aux vertueux alors que dans les coulisses ils laissent faire.

La quatrième partie traite des « Enjeux et des pouvoirs » dont le premier chapitre comporte un paragraphe introduit par un sous-titre qui pourrait relever de l'oxymore : « Motif de croire et théorie de l'utilité » il est aussi question de « Théorie des probabilités subjectives » ou encore de la constatation que « L'efficience des marchés est une notion subjective ». Je soumets à la sagacité du lecteur une citation (page 163) : « Le principe de couverture apporte un éclairage original à cette vaste question – de l'efficience des marchés. Il n'est pas une réponse au dilemme efficience/non-efficience. Il dit simplement que chacun est parfaitement en droit de considérer que certaines ressources sont mal allouées, qu'il serait plus rentable de mettre des capitaux ailleurs pour qu'ils soient mieux rémunérés. Il est de fait que les divers intervenants sur les marchés ont des convictions différentes. Mais si un opérateur utilise de telles convictions pour gérer un produit dérivé, il prend un risque là où il était possible de ne pas en prendre en réalisant une couverture par suivi de marché. »

La cinquième partie est une nouveauté qui a été suggérée par les avatars de la dernière crise financière. L'auteur tente une explication pour essayer de dédouaner les mathématiciens de la finance pris comme boucs-émissaires alors qu'ils auraient dû être les garants des critères quantitatifs de la finance ; ils auraient dû prévoir un imprévisible qui leur échappait. Je recommande une lecture attentive de cette partie dont je ne ferai pas une analyse détaillée, elle serait trop longue et truffée de citations, je me limiterai dans le chapitre XVI, « Les limites de l'économisation », à un paragraphe intitulé « Inversement, toute quantification de la valeur crée la possibilité d'un marché »- pages 213-214 ; le « Inversement » se justifie car il vient après « La mathématisation des risques ajoute des risques aux risques ». Ce paragraphe traite aussi d'un sujet d'une actualité brûlante, le voici : « L'exemple de la notation des chercheurs par les citations selon le science citation « index » ou le web « of science » est extrêmement révélateur d'une époque qui tente d'exploiter toutes les régulations sociales qui peuvent être fournies par l'économie de marché. Il est instructif à cause de son double mouvement : il quantifie en imaginant un équilibre économique, et cette quantification contribue à une économisation réelle des métiers de la science dans le marché international du travail.

Le processus est très simple et aisément mis en œuvre par l'informatisation des publications scientifiques. Il est itératif. Le principe est grosso modo le suivant (il est d'ailleurs exposé en toute transparence sur le site du web of science) : on regarde dans une liste de revues d'une discipline celles qui sont les plus citées par les bibliographies des articles. Ce qui fait un premier choix des revues. On classe alors les auteurs en fonction du nombre de leurs articles dans les « meilleures » revues. On perfectionne ensuite le classement des revues en tenant compte de la « qualité » des auteurs. Et on itère. On a ainsi un algorithme qui converge vers un équilibre qui serait celui d'une « économie » ou chaque chercheur devrait payer pour être publié dans une revue d'autant plus cher que la revue est plus réputée, étant entendu qu'un auteur réputé est aussi plus recherché. Les promoteurs du système prétendent avoir démontré que le processus converge toujours vers un équilibre par une sorte de théorème du point fixe. » Cette citation devrait attirer l'attention sur les dangers de la bibliométrie qui voudrait quantifier la production scientifique, la création, l'imagination à coups de « facteurs » d'impact, G, H, etc. et ceci en vue d'une évaluation de l'efficacité et de la productivité de la recherche et plus particulièrement des chercheurs.

À la fin du livre un glossaire permet de s'y retrouver dans une terminologie qui utilise de nombreux acronymes et du vocabulaire anglais. Un index détaillé est bienvenu, il permet de retrouver des noms propres et situe dans le texte les notions définies dans le glossaire. La bibliographie comporte une centaine de références, pour la plupart accessibles. Ce livre de Nicolas Bouleau ne rassurera pas tout le monde, mais il a le mérite d'essayer de nous expliquer le fonctionnement d'un système relativement abstrait alors que tout le monde pense que tout ce qui touche à l'argent serait du concret quotidien. Le contenu de cet ouvrage constitue une première étape permettant de mieux comprendre ce que cache la mondialisation de la finance, les marchés boursiers et peut-être aussi de forger des arguments pour combattre les effets pervers de l'économie de marché, et d'aider à contrer ceux qui se satisfont de la situation actuelle à tel point que certains d'entre eux s'autorisent à proclamer : « Vive la crise ».

Gérard Tronel,
Université Paris VI

Précession et nutation, Volume I/7 des Œuvres complètes de d'Alembert
M. Chapront-Touzé, J. Souchay
CNRS, 2006. 490 p. ISBN : 978-2-271-06456-1 . 60 €

Toutes sortes de lecteurs peuvent s'intéresser aux Œuvres complètes de d'Alembert et en particulier à leur volume I/7, *Précession et nutation*, publié sous la direction de Michelle Chapront-Touzé et Jean Souchay : historien·ne·s des sciences, mécanicien·ne·s célestes, astronomes, mathématicien·ne·s. Cette recension, écrite pour la *Gazette des mathématiciens*, s'adresse donc à ces derniers, sans présupposer chez eux de connaissances en astronomie ou en histoire.

Il est question ici de *précession* et de *nutation* – du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité. Il y a le plan de l'écliptique, celui de l'orbite (elliptique, comme nous l'a appris Kepler) de la planète autour du Soleil. Il y a la direction perpendiculaire à ce plan, appelée ici, très improprement, « verticale[1] » (entre guillemets). On le sait, cette « verticale » n'est pas la direction de l'axe de rotation de la Terre, celui qui joint les pôles Sud et Nord : ces deux directions font entre elles un angle d'environ 23°, et cette inclinaison fait qu'il y a des saisons, et

[1] La verticale du point où vous êtes lorsque vous lisez cet article, c'est la direction de la droite joignant ce point au centre de la Terre, tous les astronomes vous le diront.

entre celles-ci des équinoxes[2]. Voir la figure 1. Le mouvement de la Terre autour de son centre est assez compliqué. Principalement, c'est un mouvement de rotation : la Terre tourne autour de son axe. Plus caché mais bien réel est le mouvement de précession de l'axe : l'axe de la Terre décrit un cône de révolution autour de notre « verticale ». Avec quelques conséquences : la précession... des équinoxes

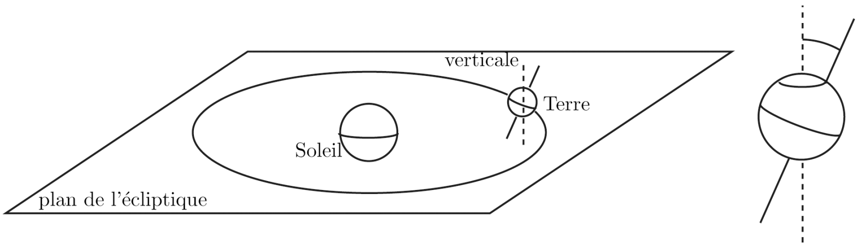


FIG. 1. La position de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'écliptique

– fait bouger les saisons (dans 13 000 ans, le mois d'avril sera en automne[3]),

– elle fait aussi bouger les étoiles, l'extrémité de l'axe décrit un petit cercle sur cette sphère idéale qu'est la voûte céleste[4]. Voir la figure 2. Aujourd'hui, le point de ce cercle où en est l'axe est près de l'étoile polaire (*Alpha Ursae Minoris*) mais il y a cinq mille ans, c'était α du Dragon (*Alpha Draconis*)... cinq mille ans, à l'échelle de l'histoire des observations astronomiques, c'est loin d'être l'éternité, et lorsqu'avril sera en automne, c'est Véga de la lyre qui nous (?) indiquera le nord.

Avant de revenir à cette histoire, évoquons enfin la partie la plus cachée du mouvement de notre planète, la nutation. En réalité, ce n'est pas tout à fait un cône de révolution que décrit notre axe de rotation, il y a des petits festons, des oscillations, *nutare*[5], écrit Newton dans les *Principia* en 1687, *nutation*, invente en français Émilie du Châtelet, en 1759[6], *nutation*, a déjà écrit en anglais Bradley, en 1728. Si la période de la précession (25 800 ans) est longue, la nutation est un phénomène ténu : la période n'est que de 18,6 ans, mais l'amplitude est minuscule, $17''$ (secondes d'arc).

C'est donc de précession et de nutation que s'occupe d'Alembert dans son mémoire de 1749 – après Newton dans les *Principia* soixante-deux ans plus tôt. Ce mémoire représente la plus grande part du volume I/7, qui contient aussi, notamment, le rapport écrit sur ce mémoire par les académiciens qui l'ont examiné, Clairaut et de Montigny, et des observations faites par d'Alembert sur des mémoires d'Euler).

[2] Ou des solstices.

[3] *April in Paris* ne verra plus les *chestnuts in blossom*, mais les marrons luisants tombés à terre... une prédiction très optimiste quant à l'avenir de la planète.

[4] Le cône coupe cette sphère en deux cercles, bien sûr, mais il y a une bonne raison (autre que géopolitique) de s'intéresser ici de préférence au ciel boréal : les étoiles proches de la direction du sud sont beaucoup moins brillantes que celles citées ici.

[5] chanceler, vaciller, osciller, dit le *Gaffiot*.

[6] Lorsque l'on dit qu'Émilie du Châtelet a traduit les *Principia* en français, ce qui est vrai, on oublie peut-être de penser qu'il s'agit d'une traduction du latin, et donc aussi de la toute première traduction en langue vulgaire.

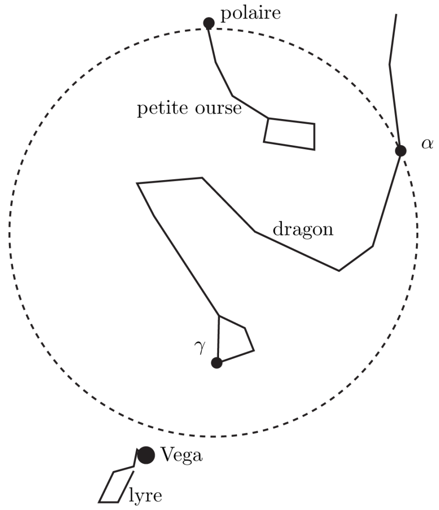


FIG. 2. Les différentes étoiles « polaires » au cours du temps

Tout le monde est d'accord, la Terre est un sphéroïde aplati (de combien ? tout le monde n'est pas d'accord). Tout le monde est d'accord, si l'on coupe ce sphéroïde (incliné, comme on l'a dit plus haut) en deux par le plan de l'écliptique, les deux moitiés, n'étant pas à la même distance du Soleil, ne sont pas attirées par lui de la même manière (ici, nouveau désaccord, pour quantifier cette différence : considérer la Terre comme homogène ou pas ?). Tout le monde est encore d'accord, l'attraction de la Lune doit jouer son rôle elle aussi (mais en quelle proportion de celle du Soleil ?).

Très schématiquement, Newton considérait la Terre comme un sphéroïde aplati, la différence entre le grand axe et le petit étant de $1/230$, et aussi comme un milieu homogène. Partant de ces modèles, il a fait des calculs et obtenu des résultats numériques.

Et puis, il est mort, en 1727, au moment où un astronome britannique, James Bradley, équipé d'un « secteur zénithal », appareil permettant de déterminer très précisément la position des étoiles proches du zénith, et qui observe donc γ du Dragon (*Gamma Draconis*, au zénith de Londres)... et ce qu'il observe, c'est la nutation, avec ses $17''$ d'amplitude pour sa période de 18,6 ans, beaucoup moins apparente que ce que Newton avait prévu (une période de quinze jours), il attend d'avoir observé une période entière pour rendre ses observations publiques (1747–48). Entre temps, l'Académie des sciences de Paris a envoyé deux équipes[7] mesurer un degré du méridien terrestre, l'une en Laponie (un peu au-dessus du cercle polaire, vers $66°$ de latitude), l'autre près de l'équateur (en Équateur, justement), leurs observations fournissant une différence de $1/178$ entre les axes – la Terre devenait beaucoup plus aplatie que ne l'avait cru Newton.

[7] En ce temps-là, la science était une activité dangereuse, romanesque et aventureuse. Maupertuis et Clairaut (pour ne citer que les noms qui ont des chances d'être connus des lecteurs) ont vraiment passé plus d'un an à trianguler et mesurer le méridien terrestre près du pôle.

Et d'Alembert reprend tout ça, plus le fait que la Terre n'est pas homogène, avec beaucoup de difficultés, le problème « m'a coûté beaucoup plus qu'aucun de ceux que j'ai jamais résolus », écrira-t-il et, si vous voulez savoir la suite, eh bien lisez son mémoire...

... et les excellentes notes qui l'accompagnent, et surtout l'introduction qui le précède, à la fois savante, documentée, rigoureuse, et aussi passionnante qu'un bon roman, de la découverte de la précession des équinoxes par Hipparque, astronome grec[8] du IIe siècle avant JC, à ce dont il a été question plus haut, en passant par Newton, Bradley, Maupertuis, les « vraies » mesures de la Terre, l'effet de la guerre de succession d'Autriche sur la communication entre les scientifiques, les différents modèles que d'Alembert a essayés, l'utilisation du « principe de d'Alembert » (conservation de la quantité de mouvement), l'invention de l'axe instantané de rotation, la discussion de la théorie de Newton, la polémique avec Clairaut, et j'en passe.

Quelques mots (pour terminer) sur la présentation matérielle du volume. Comme pour les autres volumes parus des Œuvres complètes, elle est parfaite, et en particulier d'une lisibilité très agréable.

Michèle Audin,
Université de Strasbourg et CNRS

[8] Dont le nom a été immortalisé par l'*Almageste* de Claude Ptolémée (au IIe siècle) et l'*On a marché sur la Lune* d'Hergé (au XXe).