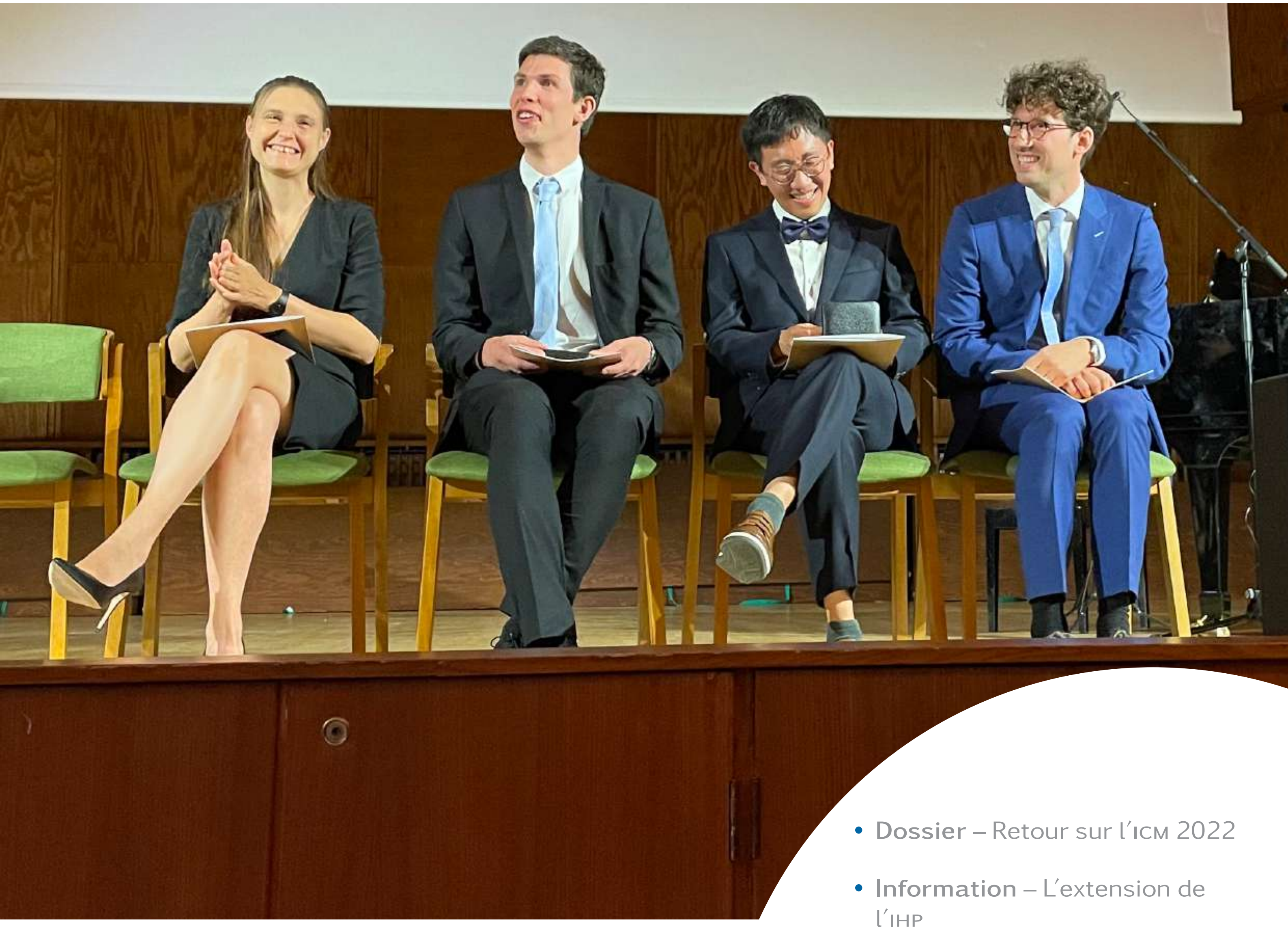
JUILLET 2023 – N° 177

la Gazette
de la Société Mathématique de France



- **Dossier** – Retour sur l'ICM 2022
- **Information** – L'extension de l'IHP
- **Carnet** – Yuri Ivanovich Manin

Société Mathématique de France

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Pauline Lafitte
CentraleSupélec
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Rédacteurs

Mickael De la Salle
Institut Camille Jordan, Lyon
delasalle@math.univ-lyon1.fr

Christophe Eckès
Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Charlotte Hardouin
Université de Toulouse
charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr

Mylene Maïda
Université de Lille
mylene.maida@univ-lille.fr

Magali Ribot
Université d'Orléans
magali.ribot@univ-orleans.fr

Gabriel Rivière
Université de Nantes
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

Susanna Zimmermann
Université Paris-Saclay
susanna.zimmermann@universite-paris-saclay.fr

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Moment joyeux au Töölö hall de l'université de Aalto, Helsinki, 5 juillet 2022, lors de la cérémonie de remise des médailles Fields à [a] Maryna Viazovska, James Maynard, June Huh et Hugo Duminil-Copin (de gauche à droite). La *Gazette* remercie chaleureusement les médaillés d'avoir accepté la publication de cette photographie ainsi que Christophe Besse, qui en est l'auteur. (crédit : Christophe Besse).

a. https ://www.mathunion.org/icm/imu-award-ceremony-2022

Nº 177

Éditorial

À vous qui lisez La *Gazette*,

un an (déjà !) après la tenue du Congrès International de Mathématiques, le comité de rédaction a voulu revenir sur les trois jours précédant son ouverture.

En effet, les 3 et 4 juillet 2022 a eu lieu l'assemblée générale de l'Union Internationale des Mathématiques (IMU) ainsi que, le 5 juillet, la remise de ses très prestigieux prix dont les Médailles Fields et le prix Carl Friedrich Gauss, qui sont l'objet de plusieurs des contributions que nous vous proposons dans ce numéro.

Fabrice Planchon et Bertrand Rémy, respectivement membre et président du Comité National Français des Mathématiques (CNFM) [1], et présents à l'assemblée générale à ce titre, en ont rédigé pour vous un compte rendu. Vous y (re)découvrirez où se tiendra l'ICM en 2026, que deux personnalités françaises ont été élues, notamment au poste de secrétaire général, et qu'une AG peut « dérailler » sur fond de tension géopolitique.

Vous aurez certainement reconnu les quatre personnes en couverture, et peut-être deviné à leur mine réjouie que c'est bien leurs médailles Fields qui sont posées sur leurs genoux. Maryna Viazovska, dont la *Gazette* avait évoqué les travaux en 2019 à travers la traduction de l'excellent article d'Henry Cohn [2], a été unanimement célébrée dans les médias, comme vous le lirez dans une revue de presse collaborative du comité de rédaction [3]. James Maynard a accepté de répondre aux questions de Sary Drappeau et Hugo Duminil-Copin à celles de Christophe Garban en exclusivité pour la *Gazette*, qu'ils en soient encore une fois remerciés. Leurs témoignages sont notamment enrichissants dans leur description d'autres systèmes que le milieu français. Et leur message final est le même : c'est la passion qui anime, encore et toujours, la recherche mathématique ! En regard des travaux de June Huh, Erwan Brugallé nous éclaire, patiemment, sur un premier énoncé « Les coefficients du polynôme caractéristique d'un matroïde forment une

1. https ://www.cnfm-math.fr/
2. H. Cohn. « Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères ». *Gazette de la Société Mathématique de France* 162, nº 4 (2019). `https://smf.emath.fr/system/files/filepdf/Gaz-162.pdf`
3. Merci beaucoup Mylène !

suite log-concave » en consacrant à chacun des termes une section. Cela en fait une parfaite introduction à l'édification des travaux de Huh qu'il décrit comme une véritable épopée.

Le prix Carl Friedrich Gauss, donné conjointement par l'IMU et la Deutsche Mathematiker-Vereinigung (Société mathématique allemande), a été décerné à la même occasion à Elliott Hershel Lieb, pour ses « contributions exceptionnelles en mécanique quantique, en mécanique statistique, en chimie computationnelle et en théorie de l'information quantique ». Certains de ses résultats sont au cœur de l'article de Mathieu Lewin, qui nous fait comprendre le rôle central de l'équation de Schrödinger. Il commence par remonter au début du XX^{e} siècle pour évoquer les chamailleries historiques de Hilbert, von Neumann, Heisenberg, Born, Schrödinger et Dirac autour du berceau des mathématiques de la mécanique quantique. En traitant des molécules complexes, il nous mène véritablement au coeur de la matière. En particulier, il nous donne un aperçu inédit du tableau périodique des éléments, dont on a l'impression, vertigineuse, de découvrir l'envers... Tous les résultats et conjectures énoncés témoignent des progrès scientifiques réalisés, notamment par Elliott Lieb, et des chemins qui sont ouverts. Les générations futures ont de quoi réfléchir !

Un autre prix très prestigieux, le prix Wolf, a été décerné à Ingrid Daubechies en 2022. Elle a accordé à cette occasion un entretien à Jean-Michel Morel si riche que le comité a décidé de le distiller en trois fois dans la *Gazette*, afin de vous tenir en haleine. Dans ce numéro, elle décrit sa formation de manière très personnelle. Vous apprendrez en particulier qu'elle savait fabriquer des hologrammes dès sa deuxième année d'université, dans les années 1970 ! Et qu'elle a eu un coup de cœur pour Jean Bourgain...

Vous qui vous rendîtes au 11 rue Pierre et Marie Curie au cours de ces cinq dernières années, vous n'avez pas manqué de voir le chantier de rénovation et d'extension de l'Institut Henri Poincaré. Sa directrice, Sylvie Benzoni-Gavage, et Clotilde Fermanian Kammerer, présidente du Comité de culture mathématique de l'IHP, nous plongent au cœur des aventures de ce chantier pharaonique qui aboutira en septembre 2023, enfin, à l'ouverture du bâtiment Jean Perrin. Vous pourrez y découvrir ses nouveaux espaces de travail et, surtout, la Maison Poincaré, le très attendu musée des mathématiques. À la lecture de l'article, vous aurez certainement envie d'aller voir le mystérieux Rulpidon !

Nous vous proposons un deuxième reportage, centré sur la première occurrence au CIRM de « Maths·C·pour·L ». Cette initiative, particulièrement chère à la SMF, d'immersion dans un stage de recherche est destinée à des étudiantes de licence. Le comité d'organisation saisit l'occasion pour lancer un appel au soutien de la communauté mathématique pour de futures éditions.

Enfin, un hommage est rendu dans ce numéro à Yuri Manin, disparu en janvier, à travers de très beaux témoignages rassemblés par Jean-Pierre Bourguignon et Michel Demazure, mais également une recension de son livre, complexe et fascinant, « Les mathématiques comme métaphore ».

Nous espérons que ce numéro de juillet de la *Gazette*, à nouveau riche en sujets de réflexion et perspectives intrigantes pour les mois à venir, saura trouver une place dans vos bagages pour l'été, que nous vous souhaitons excellent !

Pauline Lafitte

la Gazette
de la Société Mathématique de France

N° 177

Sommaire

la Gazette
de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Nº 177

Mot du président

Chères collègues, chers collègues,

C'est dans le numéro de juillet de la *Gazette* qu'habituellement est publié le rapport moral. Cette année fait exception faute de place en raison des très nombreux sujets qui y sont traités. Vous trouverez le rapport moral sur le site de la SMF. Je profite donc de ce « mot du président » pour vous donner quelques détails sur ce rapport moral concernant les projets récents et à venir en matière d'édition et de stages de mathématiques que la SMF organise.

L'activité éditoriale de la SMF a fortement évolué lors de l'année écoulée. Nos trois collections, *Cours Spécialisés*, *Panoramas et Synthèses*, et *Séminaires et Congrès*, suivent désormais le modèle *Buy-to-Open* (B2O) : une fois un seuil de ventes dépassé, les livres sont librement téléchargeables depuis le site de la SMF. De plus, tous les livres parus avant 2020 sont d'ores et déjà accessibles gratuitement. En 6 mois, ces livres ont été téléchargés plus de 1600 fois. Nous souhaitons ainsi rendre accessibles au plus grand nombre les travaux publiés dans nos collections. Si vous avez des projets de livres et que vous êtes intéressés par le B2O alors n'hésitez pas à nous contacter. Peu, très peu, d'éditeurs proposent ce modèle. Par ailleurs, la SMF doit publier plus de livres accessibles au niveau Master, doctorat et pour les jeunes chercheuses et chercheurs. C'est important pour la pérennité de notre modèle économique et pour être un éditeur reconnu. À noter que nous souhaitons publier surtout en anglais pour une raison très simple, les livres écrits en français ne se vendent pas, disons trop peu. Il y a évidemment de rares exceptions. Pour nos revues, nous tentons l'expérience en 2023 du Subscribe-to-Open pour le *Bulletin de la SMF*. Il s'agit du même principe que le B2O, au-delà d'un nombre d'abonnés atteint, les articles de l'année deviennent accessibles à toutes et à tous jusqu'à la fin de l'année civile. Notre campagne d'abonnements gratuits à nos revues pour les institutions africaines se poursuit. Une trentaine d'universités africaines en bénéficie. En parallèle, nous avons offert plusieurs centaines de livres à une partie de ces établissements. Toujours concernant l'édition, la SMF envisage de créer une nouvelle collection qui accueillerait des ouvrages portant des regards distanciés sur la recherche en mathématiques sans être à proprement parler de la recherche. Elle s'adresserait à un public plus large que celui des enseignantes-chercheuses et enseignants-chercheurs : les amateurs et amatrices de mathématiques. Le format et la mise en page seraient originaux tout en restant relativement académiques. Ce seraient de beaux livres avec une riche iconographie. Les sujets qui pourraient y être traités sont les mathématiques grand public vues par des chercheuses et chercheurs, l'histoire des mathématiques, la sociologie de notre communauté, des problématiques d'enseignement, tous sujets intéressant un public dépassant celui de nos laboratoires et départements.

Nos activités récurrentes vers le grand public ont repris un cours normal. L'une d'entre elles me tient particulièrement à cœur. Il s'agit du programme *MathC2+*. C'est un dispositif qui est de nature à pouvoir toucher des populations d'élèves pour lesquels les débouchés qu'offrent les mathématiques paraissent obscurs voire inexistants. Je pense aux élèves d'établissements en REP ou REP+ pour lesquels ces stages présentent une valeur ajoutée bien supérieure à ce qu'elle serait pour de bons établissements de centre-ville. En 2022-2023, *MathC2+* a repris son rythme d'avant COVID. Ce sont plus de 1500 élèves qui ont pu en bénéficier. C'est à la fois beaucoup et peu. Dépasser ce volume présente au moins deux difficultés. L'une est financière, *MathC2+* finance partiellement ces stages. Il faut donc trouver des ressources supplémentaires. L'autre concerne les ressources humaines. Ces stages mobilisent beaucoup de personnes, la plupart du temps bénévoles. L'équation n'est pas simple à résoudre mais la SMF s'emploie à toucher le maximum d'élèves du secondaire. Pour compléter ce dispositif, la SMF s'est lancée dans l'organisation de stages non mixtes pour étudiantes de licence visant à leur faire découvrir le monde de la recherche en mathématiques : *Maths·C·pour·L*. Vous pourrez lire plus de détails à ce sujet dans ce numéro. Nous cherchons à en faire profiter les étudiantes dont l'entourage n'a que peu de connaissance du milieu scientifique et des débouchés afférents. Cette année deux stages ont eu lieu pour un total de 46 étudiantes. Des collègues se sont montrés intéressés pour accueillir en 2024 des stages supplémentaires. Forte du succès de cette nouvelle initiative, la SMF va travailler à la structuration de ce nouveau programme afin que plus d'étudiantes en profitent et soient stimulées pour poursuivre vers les métiers de la recherche. Les deux stages réalisés montrent qu'elles sont très peu à y songer pour de multiples raisons. Au travers des activités proposées, nous souhaitons les amener à envisager de tels parcours. Leurs réactions à l'issue de ces rencontres semblent indiquer que nous contribuons à leur faire revisiter leur avenir. Il faudra bien entendu analyser l'impact de ces stages. La SMF y réfléchit.

Je vous souhaite un bel été. Bien à vous

Le 2 juillet 2023

Fabien DURAND, président de la SMF

L'équation de Schrödinger pour les atomes et les molécules

• M. Lewin

Nous présentons l'équation de Schrödinger modélisant le comportement quantique des électrons dans les atomes et les molécules. Nous faisons une revue des résultats mathématiques importants et mentionnons quelques problèmes ouverts célèbres.

L'équation de Schrödinger va bientôt fêter ses cent ans. Malgré cet âge avancé, elle n'a pas pris une ride et joue un rôle toujours croissant dans de nombreuses applications technologiques. Elle permet de décrire très précisément le comportement de la matière à l'échelle microscopique et ses effets aux échelles supérieures. Une compréhension fine de cette équation pourrait même aider dans la lutte contre le changement climatique [2].

L'équation de Schrödinger est aussi la source d'un grand nombre de questions mathématiques intéressantes, certaines reliées à des phénomènes physiques très subtils. Après les travaux fondateurs de John von Neumann de la fin des années 1920, une forte activité de recherche mathématique y a été consacrée à partir des années 1950. Les questions restées ouvertes font toujours l'objet de multiples travaux.

Dans cet article, nous discutons de l'équation de Schrödinger pour les électrons dans les atomes et les molécules, et de ses propriétés mathématiques. C'est le modèle favori des chimistes, qui cherchent à comprendre la géométrie et le comportement précis de molécules (par exemple pour trouver de nouveaux médicaments). Le texte qui suit repose principalement sur un livre de niveau master « Théorie spectrale et mécanique quantique » [5], édité par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et qui vient de paraître chez Springer. Le lecteur intéressé pourra y trouver tous les détails manquants, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

1. Les matrices infinies de Hilbert

Avant de se lancer dans les détails mathématiques, il est utile de rappeler rapidement le contexte historique dans lequel l'équation de Schrödinger a été inventée et, surtout, du rôle qu'ont joué les mathématiciens dans cette révolution.

La scène se passe dans les années 1925-30. À Göttingen en Allemagne, les acteurs principaux sont Max Born et Werner Heisenberg du côté physique, avec David Hilbert et John von Neumann du côté mathématique. Les autres protagonistes les plus célèbres sont Erwin Schrödinger à Vienne en Autriche et Paul Dirac à Cambridge au Royaume-Uni.

En 1925, Heisenberg et Born inventent la nouvelle mécanique quantique. Leur modèle repose principalement sur deux « matrices infinies » P et Q dont le commutateur vaut

$$QP - PQ = i. \tag{1}$$

Ici $i^2 = -1$ et nous avons ici pris $\hbar = 1$ pour simplifier. En prenant la trace on voit qu'il ne peut exister deux matrices de taille finie satisfaisant à cette relation, d'où la nécessité de travailler en dimension infinie. Les deux physiciens s'inspirent ici largement de travaux fondateurs de Hilbert de 1905-06, où ce dernier avait reformulé certaines équations fonctionnelles linéaires à l'aide des coefficients de Fourier de la fonction inconnue, menant ainsi à des systèmes linéaires infinis. Ce problème avait naturellement amené Hilbert à étudier les opérateurs linéaires agissant sur l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$ des suites de carré sommable, qui étaient justement vus comme des « matrices infinies ». À cette occasion, il avait en particulier introduit le terme « spectre », en référence probablement aux fréquences de vibration des objets comme une corde ou un tambour. Born connaissait parfaitement ces travaux car il avait suivi les cours de Hilbert et avait même été son assistant en 1904-05. Selon Heisenberg,

> « *Indirectly Hilbert exerted the strongest influence on the development of quantum mechanics in Göttingen. This influence can be fully recognized only by one who studied in Göttingen during the twenties.* » [10]

Quelques mois plus tard, Erwin Schrödinger propose sa célèbre équation. Il suggère qu'il faut plutôt voir la matière comme une onde et en déduit une équation aux dérivées partielles décrivant la dynamique et les états d'équilibre d'un système quantique. Même si les prédictions étaient exactement identiques, il ne semblait exister aucun lien avec la théorie des matrices infinies. Heisenberg aurait même qualifié l'équation de Schrödinger de « dégoûtante ». Plus tard, Hilbert rira bien de cette affaire :

> « *when [Born, Heisenberg and the Göttingen theoretical physicists] first discovered matrix mechanics they were having, of course, the same kind of trouble that everybody else had in trying to solve problems and to manipulate and to really do things with matrices. So they had gone to Hilbert for help and Hilbert said the only times he ever had anything to do with matrices was when they came up as a sort of by-product of the eigenvalues of the boundary-value problem of a differential equation. So if you look for the differential equation which has these matrices you can probably do more with that. They had thought it was a goofy idea and that Hilbert didn't know what he was talking about. So he was having a lot of fun pointing out to them that they could have discovered Schrödinger's wavemechanics six months earlier if they had paid a little more attention to him.* » [10]

De l'autre côté de la Manche, Dirac tente de réconcilier les deux visions dans sa « théorie des transformations », publiée en 1927. À la place de matrices infinies, il utilise des sortes de matrices à paramètres continus que l'on appellerait maintenant des noyaux intégraux. Mais Hilbert restait très sceptique car, pour la matrice identité infinie, Dirac avait dû introduire une étrange « fonction » notée δ, valant 0 partout sauf à l'origine où elle est infinie, de sorte que son intégrale sur tout $\mathbb{R}$ soit égale à 1. Un tel objet ne pouvait faire sens pour les mathématiciens de l'époque...

À son arrivée à Göttingen, von Neumann est donc chargé par Hilbert de clarifier la situation. Le jeune prodige de 23 ans trouve rapidement une formulation mathématique convenable. Les matrices infinies sont remplacées par des opérateurs linéaires auto-adjoints sur un espace de Hilbert (la définition abstraite de ces espaces a été introduite à cette occasion). L'équation de Schrödinger est, pour les états d'équilibre, l'équation aux valeurs propres associée à ces opérateurs. En quelques mois, von Neumann produit ainsi une dizaine de travaux fondateurs sur ce sujet, qui révolutionneront à la fois l'analyse fonctionnelle et la physique mathématique.

Mais les travaux exceptionnels de von Neumann n'ont pas tellement été du goût de son mentor. Ils impliquent en effet que les matrices infinies de Hilbert ne sont pas la bonne façon de formuler le problème ! Deux opérateurs auto-adjoints (non bornés) peuvent très bien avoir les mêmes coefficients $\langle e_n, Ae_m \rangle$ dans une base hilbertienne (e_n) et pourtant être très différents, par exemple avoir des spectres complètement disjoints [5, p. 75].

Hilbert a très peu publié sur la mécanique quantique, mais ce n'est pas à cause des affronts de von Neumann. En réalité, il semblait avoir décidé d'attaquer son célèbre « 6ème problème » concernant la formalisation de la physique en concentrant ses efforts sur l'enseignement plutôt que sur la publication d'articles de recherche. Il avait auprès de lui un assistant physicien dont le rôle était de le tenir au courant des développements physiques les plus récents [10, 12]. Dès qu'il les avait compris et reformulés, Hilbert les enseignait ensuite à ses élèves. Ceci a contribué à créer une atmosphère extrêmement propice à Göttingen, où questionnements physiques et raisonnements mathématiques se sont mutuellement influencés.

Dans les décennies qui ont suivi, la mécanique quantique est restée très liée aux mathématiques. Une grande partie de l'analyse moderne trouve sa source dans les travaux de Hilbert et von Neumann, suscités par leurs interactions avec les physiciens. Inversement, la mécanique quantique est probablement la branche de la physique qui repose le plus sur des mathématiques avancées.

2. L'atome d'hydrogène

Passons maintenant à la formulation mathématique du problème, suivant une présentation plus moderne [5]. Nous commençons par l'atome d'hydrogène, pour lequel on peut tout résoudre explicitement. Rappelons que c'est le plus petit atome du tableau périodique et qu'il comprend un proton de charge $+e$ et de masse M, ainsi qu'un électron de charge $-e$ et de masse m. Le proton est bien plus lourd que l'électron ($M \simeq 1836m$) et nous supposerons donc pour simplifier l'exposé que c'est une particule classique ponctuelle immobile, placée en $0 \in \mathbb{R}^3$. En d'autres termes, nous nous intéressons seulement à la dynamique rapide dans le système, qui est celle de l'électron. La force électrostatique est prépondérante et traduit l'attraction des deux particules de charge opposée. Les autres forces (gravitationnelle, forte et faible) sont négligeables à cette échelle.

2.1 – En mécanique classique

Commençons par l'atome d'hydrogène classique, où l'électron est vu comme une particule ponctuelle se déplaçant à une vitesse donnée. Mathématiquement, il est décrit par le vecteur $(x,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ où x désigne sa position et $p = mv$ sa quantité de mouvement, aussi appelée impulsion (v est la vitesse). Nous travaillerons dans le système des unités atomiques pour lequel $m = e^2/(4\pi\varepsilon_0) = 1$. Nous devons alors étudier le *système Hamiltonien* basé sur l'énergie

$$E(x,p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1}{|x|}. \tag{2}$$

Ici $|p|$ et $|x|$ désignent la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. Le premier terme est l'énergie cinétique, c'est-à-dire le coût d'imposer une certaine vitesse à l'électron. Le second est l'énergie électrostatique traduisant l'attraction avec le noyau placé en 0. L'évolution de l'électron est donnée par les équations de Hamilton, qui forment un système de 6 équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \nabla_p E(x(t),p(t)) = p(t), \\ \dot{p}(t) = -\nabla_x E(x(t),p(t)) = -\dfrac{x(t)}{|x(t)|^3}. \end{cases}$$

En insérant la première ligne dans la seconde, on trouve l'équation de Newton

$$\ddot{x}(t) = -\frac{x(t)}{|x(t)|^3}.$$

L'énergie E est constante le long des trajectoires, qui sont des coniques comme la Lune tournant autour de la Terre.

Lorsqu'on étudie un système hamiltonien, on s'intéresse d'ordinaire aux *points stationnaires* du système, qui sont par définition les solutions $(x(t),p(t)) = (x_0,p_0)$ indépendantes du temps. Parmi ces points stationnaires, ceux pour lesquels E est un *minimum strict local* sont encore plus intéressants. Sous l'hypothèse que la dérivée seconde est définie positive, les lignes de niveau de E ressemblent à des ellipsoïdes dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, de sorte que de tels points sont stables : une trajectoire qui démarre dans leur voisinage y reste indéfiniment.

Ici on devrait avoir $p_0 = 0$ et $x_0|x_0|^{-3} = 0$ mais la seconde équation n'admet aucune solution. Il n'existe donc aucun point d'équilibre. Plus inquiétant, l'énergie n'est pas minorée puisqu'on peut faire tendre x vers 0 indépendamment de p :

$$\inf_{(x,p)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} E(x,p) = -\infty. \tag{3}$$

Ceci n'a pas d'effet dramatique tant que le système reste isolé, mais peu devenir problématique lorsque notre atome interagit avec le monde extérieur. La non-minoration de l'énergie signifie physiquement que notre électron est une sorte de réservoir infini d'énergie. Il va donc avoir tendance à s'effondrer sur le noyau en libérant cette énergie. Pourtant l'hydrogène réel est clairement très stable, et le modèle classique n'est donc pas convenable.

En plus d'être instable, le modèle classique ne décrit pas non plus les résultats expérimentaux. En effet, si on réalise une expérience de spectroscopie et que l'on observe la lumière émise par un gaz d'hydrogène excité, on trouve un spectre de raies. Ceci traduit l'existence de points stationnaires ayant des énergies particulières (quantifiées) entre lesquelles l'électron navigue par des procédés d'excitation / désexcitation. Un tel phénomène pourrait éventuellement être décrit par un potentiel $V(x)$ ayant des points critiques à certaines énergies spéciales, mais certainement pas avec notre potentiel électrostatique, qui n'a aucun point stationnaire.

La non-minoration de E suit de la possibilité de faire tendre x vers 0 indépendamment de p qui peut rester fixe. S'il y avait un lien entre x et p de sorte que $|p| \to +\infty$ quand $|x| \to 0$, l'énergie cinétique pourrait compenser la divergence de l'énergie potentielle et rendre l'énergie totale E minorée. C'est ce qui est réalisé par le formalisme quantique.

2.2 – En mécanique quantique

La mécanique quantique repose sur deux procédés mathématiques.

(i) **Le recours à une modélisation probabiliste.** On décrit le système par deux mesures de probabilité : μ qui donne la probabilité que l'électron soit en $x \in \mathbb{R}^3$ et ν qui fournit celle qu'il ait une quantité de mouvement $p \in \mathbb{R}^3$. L'énergie moyenne est alors bien sûr donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|p|^2}{2} \mathrm{d}\nu(p) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}\mu(x)}{|x|}.$$

(ii) **L'instauration d'un lien entre les deux probabilités μ et ν**, qui soit tel que $\int_{\mathbb{R}^3} |p|^2 \mathrm{d}\nu(p)$ diverge lorsque μ est trop concentrée en un point, afin de stabiliser le système.

L'étape (i) seule ne résout rien du tout, puisqu'on peut toujours prendre $\mu = \delta_x$ et $\nu = \delta_p$, ce qui nous ramène au modèle classique précédent. Le lien (ii) entre μ et ν est par définition donné par la **fonction d'onde**. C'est une fonction de carré sommable $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$, avec le postulat que

- $\mu(x) = |\psi(x)|^2$ est la densité de probabilité que l'électron soit en $x \in \mathbb{R}^3$;
- $\nu(p) = |\widehat{\psi}(p)|^2$ est la densité de probabilité qu'il ait une quantité de mouvement $p \in \mathbb{R}^3$.

Dans la formule de ν,

$$\widehat{\psi}(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \psi(x) e^{-ix\cdot p} \mathrm{d}x$$

est la transformée de Fourier, normalisée pour que ce soit une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ et que ν soit une probabilité. La constante de Planck $\hbar$ apparaît habituellement dans la définition de ν mais dans notre système d'unités nous avons $\hbar = 1$. Les deux variables classiques (x, p) dans l'espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de dimension 6 ont donc été remplacées par une seule variable ψ dans la sphère unité de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ de dimension infinie.

Rappelons qu'une fonction très concentrée en espace a une transformée de Fourier très étalée. Ceci implique que si μ est très localisée au voisinage d'un point x_0 (on connaît très bien la position de la particule), alors ν est nécessairement très étalée (on connaît mal sa vitesse). C'est le *principe d'incertitude de Heisenberg*, fondement de la mécanique quantique, qui stipule que position et vitesse ne peuvent être parfaitement connues simultanément. Ce principe est en pratique réalisé par la transformée de Fourier et c'est lui qui doit stabiliser le système. Il reste à le vérifier rigoureusement.

Il est commode d'exprimer l'énergie à l'aide de notre nouvelle variable ψ, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\psi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |p|^2 |\widehat{\psi}(p)|^2 \mathrm{d}p - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(x)|^2}{|x|} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4}$$

en utilisant le fait que $p\widehat{\psi}(p) = -i\widehat{\nabla\psi}(p)$ et le théorème de Plancherel $\|\psi\|_{L^2} = \|\widehat{\psi}\|_{L^2}$. Après intégration par parties nous pouvons aussi écrire l'énergie (4) sous la forme

$$\mathcal{E}(\psi) = \left\langle \psi, \left(-\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{|x|} \right) \psi \right\rangle_{L^2},$$

avec le produit scalaire $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$ et le Laplacien $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_{jj}$. Ainsi l'énergie quantique $\mathcal{E}$ est la forme quadratique associée à l'opérateur

$$H = -\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{|x|},$$

qui s'appelle le Hamiltonien. On peut trouver ce dernier directement à partir de l'énergie classique E dans (2) en remplaçant l'impulsion p par $-i\nabla$, une substitution appelée « quantification » qui, comme nous l'avons vu, est réalisée par la transformée de Fourier. Les trois opérateurs différentiels $P_j := -i\partial_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, décrivent donc la projection de l'impulsion quantique selon les axes de coordonnées. Ils sont solutions de la relation de Heisenberg (1) avec $Q_j = x_j$ (opérateur de multiplication par x_j).

En conclusion, nous devons étudier les propriétés mathématiques de l'énergie $\mathcal{E}$ ou, ce qui revient au même, de l'opérateur H. Mais continuons de décrire le modèle quantique de façon informelle avant de passer aux résultats rigoureux concernant $\mathcal{E}$ et H.

Comme en mécanique classique, le modèle quantique est un système hamiltonien et l'énergie $\mathcal{E}$ est constante le long des trajectoires. La structure hamiltonienne repose sur le fait que ψ est à valeurs complexes. En écrivant $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, on trouve $\mathcal{E}(\psi) = \mathcal{E}(\psi_1) + \mathcal{E}(\psi_2)$. On obtient alors un système hamiltonien (en dimension infinie) en croisant les dérivées sous la forme $\partial_t \psi_1 = \nabla_{\psi_2} \mathcal{E} = 2H\psi_2$ et $\partial_t \psi_2 = -\nabla_{\psi_1} \mathcal{E} = -2H\psi_1$. Ces deux équations peuvent se réécrire en une seule ligne

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = 2H\psi. \tag{5}$$

C'est l'équation de Schrödinger pour la dynamique de l'électron. Généralement on l'énonce sans le facteur 2, ce qui revient à remplacer le temps t par $2t$. On peut vérifier que, comme il se doit, l'énergie $\mathcal{E}$ est conservée le long des trajectoires. Une autre quantité conservée importante est la norme $\|\psi(t)\|_{L^2} = 1$, ce qui est crucial pour que notre interprétation probabiliste du carré de la fonction d'onde persiste au cours du temps.

Nous devons enfin définir les états stationnaires qui sont, comme d'habitude, les points critiques de la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{E}$. Une petite difficulté est que nous devons travailler sur la sphère unité de $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$, à cause de la contrainte que ψ doit être normalisée. On cherche donc les points critiques de $\mathcal{E}$ sur cette variété. Ce sont les fonctions propres de l'opérateur H :

$$H\psi_0 = \lambda\psi_0, \tag{6}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ peut être interprété comme un multiplicateur de Lagrange. C'est l'équation de Schrödinger stationnaire faisant l'objet de cet article. Une telle fonction propre fournit la solution $\psi(t) = e^{-2i\lambda t}\psi_0$ à l'équation (5). Cette solution dépend du temps mais avec une phase triviale ne jouant aucun rôle dans le modèle. En particulier, $\mu = |\psi|^2$ et $\nu = |\hat{\psi}|^2$ sont bien indépendantes du temps.

Passons maintenant aux résultats mathématiques concernant $\mathcal{E}$ et H. Nous souhaitons d'abord montrer que l'énergie (4) est minorée, ce qui traduit la stabilité de l'atome d'hydrogène quantique. Il s'agit de voir que si le second terme de (4) est très grand, c'est-à-dire ψ est très concentrée à l'origine, alors le premier terme est aussi très grand et compense la divergence. Intuitivement, il faut utiliser le fait qu'une fonction très concentrée a nécessairement une très grande dérivée, mais il faut encore rendre tout ceci quantitatif.

Théorème 1 (Stabilité de l'atome d'hydrogène). *Pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C})$ telle que $\nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)$ et $\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|^2\,dx = 1$, on a*

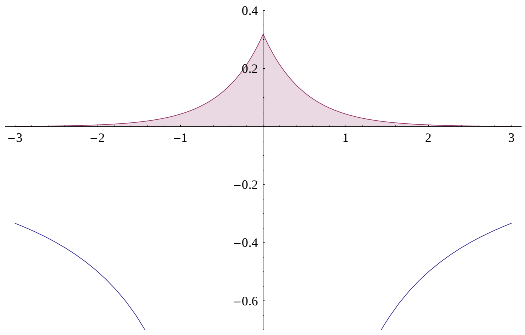
$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi(x)|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\psi(x)|^2}{|x|}\,dx \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{7}$$

avec égalité si et seulement si $\psi(x) = e^{i\theta}\pi^{-\frac{1}{2}}\,e^{-|x|}$ pour un $\theta \in [0,2\pi[$. Cette dernière fonction résout l'équation de Schrödinger

$$\left(-\frac{\Delta}{2} - \frac{1}{|x|}\right)\psi = -\frac{1}{2}\,\psi. \tag{8}$$

Ici $\nabla\psi$ et l'équation (8) sont compris au sens des distributions [7]. L'hypothèse $\nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)$ signifie simplement que $|p|\hat{\psi}(p)$ est de carré sommable. D'après le théorème, cette condition implique que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|^2/|x|\,dx$ est finie.

Figure 1 – Probabilité de présence $\pi^{-1}e^{-2r}$ de l'électron dans le potentiel $-1/r$ du proton



Le théorème 1 énonce que l'énergie minimale de l'électron quantique vaut $-1/2$, et qu'il existe un unique état d'équilibre correspondant

$$\psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{2}}\,e^{-|x|},$$

modulo une phase triviale $e^{i\theta}$. On l'appelle *état fondamental* (« ground state » en anglais). Dans cet état, la position moyenne de l'électron est centrée sur le noyau, $\int_{\mathbb{R}^3}x|\psi_0(x)|^2 dx = 0$ et la variance vaut $\int_{\mathbb{R}^3}|x|^2|\psi_0(x)|^2 dx = 3$ (figure 1). On notera que la seule trace de la divergence du potentiel à l'origine est la non-régularité de la fonction ψ_0 en 0, qui n'est pas C^1 mais est quand même continue.

Preuve. Nous supposons que ψ est assez lisse pour que toutes les manipulations soient justifiées. On commence par développer le carré

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\psi(x) + \frac{x}{|x|}\psi(x)\right|^2 dx$$

dont le terme croisé vaut

$$\begin{aligned}2\mathfrak{Re}&\int_{\mathbb{R}^3}\overline{\psi(x)}\frac{x}{|x|}\cdot\nabla\psi(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{x}{|x|}\cdot\nabla|\psi|^2(x)\,dx = -2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\psi(x)|^2}{|x|}\,dx,\end{aligned}$$

puisque $\nabla|\psi|^2 = 2\mathfrak{Re}(\overline{\psi}\nabla\psi)$ et après une intégration par parties. Ainsi, nous avons montré que

$$\mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\nabla\psi(x) + \frac{x}{|x|}\psi(x)\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x)|^2\,dx.$$

Chez nous la dernière intégrale vaut 1 et (7) est donc démontrée puisque le premier terme est positif. De plus, $\mathscr{E}(\psi)$ est égal à $-1/2$ si et seulement si le premier terme s'annule, c'est-à-dire $\nabla\psi(x) = -\frac{x}{|x|}\psi(x)$. Ce sont les fonctions données dans l'énoncé et on peut aussi vérifier par le calcul qu'elles sont solutions de (8). □

Le fait que le minimum ψ_0 de l'énergie sur la sphère unité soit une solution de l'équation de Schrödinger (8) n'est pas une surprise, puisque nous avons vu que $\mathscr{E}$ est la forme quadratique associée à l'opérateur H. Pensons à la dimension finie : les points critiques d'une forme quadratique $q(v) = v^*Mv$ sur la sphère unité de $\mathbb{C}^d$ sont les vecteurs propres de la matrice hermitienne M et les valeurs critiques associées sont ses valeurs propres. La plus petite valeur propre s'obtient en minimisant q alors que la plus grande s'obtient en maximisant q. Les autres sont des points cols. On s'attend donc à la même chose pour notre opérateur H.

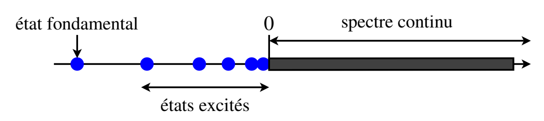
Une difficulté notable est de définir proprement H en tant qu'opérateur auto-adjoint, afin de pouvoir donner un sens à son spectre. Rappelons qu'en dimension infinie le spectre dépend du domaine sur lequel l'opérateur est défini ! Nous n'aborderons pas cette question ici et renvoyons à [5] pour une présentation détaillée de la théorie. Nous nous autoriserons donc à parler du « spectre de H » sans plus de formalités.

Théorème 2 (Spectre de H). *Le spectre de H vaut*

$$\sigma(H) = \left\{-\frac{1}{2n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup [0;+\infty[.$$

Chacune des valeurs propres négatives $-1/(2n^2)$ est de multiplicité finie. Il n'y a aucune valeur propre positive.

Figure 2 – Spectre de H



Le spectre négatif est discret, « quantifié », et la manifestation principale des effets « quantiques » (figure 2). Ces énergies négatives très spéciales correspondent aux états stationnaires entre lesquels l'électron peut naviguer en fonction de l'énergie qu'il échange avec le monde extérieur. C'est l'explication du spectre de raies que l'on obtient lors d'expériences de spectroscopie. Les valeurs trouvées $-1/(2n^2)$ reproduisent d'ailleurs le spectre expérimental avec une excellente précision. La première valeur propre $-1/2$ est notre énergie fondamentale trouvée au théorème 1. Les autres fonctions propres s'appellent « états excités ». Le spectre positif est lui purement continu et il correspond aux énergies d'un électron arraché du proton, qui peut se déplacer librement dans tout l'espace et ne possède aucune position d'équilibre. [1]

3. Atomes et molécules

Nous avons vu que l'on pouvait tout calculer pour l'électron dans l'atome d'hydrogène. Malheureusement, les calculs exacts s'arrêtent ici car il ne semble exister aucune formule explicite pour les systèmes comprenant plus d'un électron et un proton. Décrivons le modèle en question.

3.1 – Le modèle

Nous considérons une molécule qui comprend

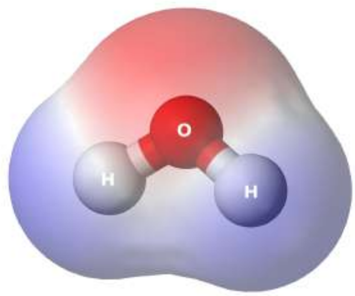
- N électrons quantiques
- M noyaux ponctuels de charges $z_1, \dots, z_M$ et situés en $R_1, \dots, R_M \in \mathbb{R}^3$.

Les z_m sont des entiers qui correspondent aussi au nombre de protons dans chaque noyau. Rappelons que ces derniers contiennent aussi des neutrons assurant l'équilibre des forces nucléaires. Comme nous nous intéressons seulement aux forces électrostatiques, la composition exacte des noyaux ne joue pas de rôle et nous voyons chaque noyau comme une entité unique ponctuelle. Pour faire plus court, nous noterons $R := (R_1, \dots, R_M)$ et $z := (z_1, \dots, z_M)$ la collection des positions et des charges des M noyaux.

1. Le spectre « continu » d'un opérateur auto-adjoint contient les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels on peut résoudre l'équation aux valeurs propres de façon approchée sans qu'elle n'admette de solution. C'est-à-dire il existe une suite (ψ_n) normalisée telle que $(H-\lambda)\psi_n \to 0$, alors que $\ker(H-\lambda) = \{0\}$. C'est le cas pour le Laplacien sans potentiel extérieur décrivant un électron libre. Son spectre est $\sigma(-\Delta) = [0;+\infty[$, sans aucune valeur propre. Plus précisément, le Laplacien admet les fonctions propres « généralisées » $e^{ik\cdot x}$ avec $k \in \mathbb{R}^d$, de valeur propre $|k|^2$, mais elles ne sont pas de carré sommable. On peut les tronquer pour obtenir une suite ψ_n de fonctions propres approchées [5, Thm. 2.35].

Exemple 1. Pour la molécule d'eau H_2O représentée à la figure 3, nous avons $N = 10$ électrons et $M = 3$ noyaux. Deux d'entre eux sont de charge $z_1 = z_2 = 1$ (pour les deux hydrogènes) et le dernier est de charge $z_3 = 8$ (pour l'oxygène). Si nécessaire, nous pouvons toujours supposer par symétrie que l'oxygène est en $R_3 = 0 \in \mathbb{R}^3$, que le premier hydrogène R_1 est sur l'axe x et que le second R_2 est dans le plan xy. La molécule d'eau est donc paramétrée par deux longueurs (celles des liaisons O–H) et un angle.

FIGURE 3 – Molécule d'eau H_2O (les couleurs représentent la polarisation)



Quid de nos N électrons? Ces derniers sont maintenant modélisés par une fonction d'onde $\Psi \in L^2((\mathbb{R}^3)^N, \mathbb{C})$ normalisée, avec l'interprétation que

- $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est la densité de probabilité que l'électron n° 1 soit en x_1, que l'électron n° 2 soit en x_2, etc;
- $|\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2$ est la densité de probabilité que l'électron n° 1 ait une quantité de mouvement p_1, que l'électron n° 2 ait une quantité de mouvement p_2, etc.

L'énergie se déduit aisément de l'interaction électrostatique entre les divers composants de notre molécule. En raisonnant comme pour l'atome d'hydrogène on trouve la formule suivante :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{R,z}(\Psi) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^{3N}} |\nabla_{x_j}\Psi(x_1,\dots,x_N)|^2\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ - \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^{3N}} \frac{z_m|\Psi(x_1,\dots,x_N)|^2}{|R_m - x_j|}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant N}\int_{\mathbb{R}^{3N}} \frac{|\Psi(x_1,\dots,x_N)|^2}{|x_j - x_k|}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \\ + \sum_{1\leqslant \ell<m\leqslant M}\frac{z_\ell z_m}{|R_\ell - R_m|}. \qquad (9)\end{aligned}$$

Les termes correspondent dans l'ordre à l'énergie cinétique des N électrons, l'interaction entre ces derniers et les M noyaux, la répulsion entre les électrons, et finalement la répulsion entre les noyaux. L'énergie $\mathscr{E}_{R,z}$ est aussi la forme quadratique associée à l'opérateur hamiltonien

$$\begin{aligned}H(R,z,N) = -\frac{1}{2}\Delta - \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{z_m}{|R_m - x_j|} \\ + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant N}\frac{1}{|x_j - x_k|} + \sum_{1\leqslant \ell<m\leqslant M}\frac{z_\ell z_m}{|R_\ell - R_m|} \qquad (10)\end{aligned}$$

agissant dans l'espace de Hilbert $L^2((\mathbb{R}^3)^N, \mathbb{C})$. L'équation de Schrödinger pour les points d'équilibre du système s'écrit donc

$$H(R,z,N)\Psi = \lambda\Psi. \qquad (11)$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire, en très grande dimension (dans $\mathbb{R}^{3N}$). On peut modéliser n'importe quelle molécule avec les formules ci-dessus!

Mais revenons sur une subtilité que nous avons passée sous silence. L'interprétation que nous avons donnée de $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ et $|\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2$ plus haut laisse entendre que nous pouvons mettre des étiquettes sur les électrons et savoir qui est qui à tout instant. En fait, si nous observons le système à deux instants différents, il est impossible de savoir quel électron est allé où, puisqu'ils sont exactement identiques. Notre modélisation n'est donc pas adéquate et il faut la modifier légèrement. Plus précisément, nous désirons que $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ et $|\widehat{\Psi}(p_1, \dots, p_N)|^2$ soient *symétriques* par rapport aux échanges de leurs variables, afin que la numérotation des électrons ne joue pas de rôle. Il se trouve qu'il existe seulement deux contraintes linéaires possibles :

- soit on suppose que Ψ est *symétrique*, c'est-à-dire $\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \Psi(x_1, \dots, x_N)$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$;
- soit on demande que Ψ est *anti-symétrique*, c'est-à-dire $\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \varepsilon(\sigma)\Psi(x_1, \dots, x_N)$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, où $\varepsilon(\sigma)$ est sa signature.

Ces deux contraintes impliquent que $|\Psi|^2$ et $|\widehat{\Psi}|^2$ sont symétriques, comme désiré. Par ailleurs, ce sont des contraintes linéaires qui imposent simplement de travailler dans les sous-espaces correspondants de $L^2((\mathbb{R}^3)^N, \mathbb{C})$. Dit autrement, seules les fonctions propres Ψ symétriques ou anti-symétriques nous intéressent pour l'équation de Schrödinger (11).

Le choix de la condition de symétrie ou d'anti-symétrie dépend du type de particule étudié. Celles qui sont modélisées par des Ψ symétriques s'appellent des **bosons**, alors que celles pour lesquelles Ψ est anti-symétrique s'appellent des **fermions**. Le « modèle standard » de la physique des particules nous apprend que toutes les particules élémentaires composant la matière sont des fermions (exemples : électron, quark), alors que toutes les particules permettant les échanges d'énergie sont des bosons (exemples : photon, gluon, Higgs). Pour les électrons nous devons donc supposer que Ψ est une fonction anti-symétrique.

Au premier abord, les contraintes de symétrie et d'anti-symétrie peuvent sembler techniques voire anecdotiques. Il est difficile d'imaginer une grande différence entre les deux. Pourtant, nous verrons que le comportement des électrons serait très différent s'ils étaient des bosons ! La matière bosonique est instable, ce qui fournit une explication mathématique *a posteriori* du fait que les électrons doivent être des fermions.

L'instabilité des systèmes bosoniques se manifeste en présence de forces trop attractives lorsque le nombre de particules grandit. Les bosons sont des particules très sociables qui aiment beaucoup être ensemble, ce qui peut engendrer une trop forte concentration, source d'instabilité. Par exemple, on peut mettre N bosons dans le même état en prenant $\Psi(x_1,\dots,x_N) = u(x_1)\cdots u(x_N)$ qui s'appelle un condensat de Bose-Einstein. C'est la version quantique des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées en théorie des probabilités. Dans ce cas les N bosons font tous exactement la même chose.

Les fermions ne peuvent adopter un tel comportement. L'anti-symétrie de Ψ induit une forme de répulsion entre les particules qui peut servir à stabiliser le système. Elle implique, par exemple, que deux fermions ne peuvent jamais être au même endroit (si Ψ est une fonction continue, on a $\Psi(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_N) = 0$). Comprendre le mécanisme mathématique précis de la stabilisation due à l'anti-symétrie s'est révélé être extrêmement délicat et a beaucoup occupé les chercheurs en physique mathématique ces dernières décennies. Tout n'est pas encore résolu, comme nous le verrons.

Comme pour l'atome d'hydrogène, nous sommes particulièrement intéressés par l'état de plus basse énergie qui vaut

$$E_a(R,z,N) := \min \sigma_a\Big(H(R,z,N)\Big) = \inf_{\substack{\Psi \text{ anti-sym.} \\ \int_{\mathbb{R}^{3N}} |\Psi|^2=1}} \mathcal{E}_{R,z}(\Psi).$$

L'indice a signifie que l'on restreint l'opérateur au sous-espace des fonctions anti-symétriques. Pour $N = 1$ nous n'imposons bien sûr aucune contrainte et nous notons simplement $E(R,z,1)$.

L'énergie $E_s(R,z,N)$ définie de façon similaire avec des fonctions symétriques est moins physique, mais sera tout de même considérée par curiosité. Notons que l'énergie des bosons est plus basse que celle des fermions :

$$E_s(R,z,N) < E_a(R,z,N), \qquad \text{pour } N \geqslant 2.$$

On peut en fait montrer que $E_s(R,z,N)$ est égal au bas du spectre de $H(R,z,N)$ sans aucune contrainte de symétrie. Ceci suit de [7, Thm. 7.8] mais nous n'en dirons pas plus ici.

La valeur propre $E_a(R,z,N)$ représente l'énergie du système lorsque les électrons sont dans leur position la plus stable. Une molécule est à l'équilibre lorsque les noyaux sont eux aussi dans leur position d'énergie minimale, ce qui revient à minimiser la fonction

$$R = (R_1,\dots,R_M) \in (\mathbb{R}^3)^M \mapsto E_a(R,z,N)$$

par rapport aux positions des M noyaux. Cette minimisation est l'objectif principal en chimie quantique. En cas de plusieurs minima, appelés isomères, on cherche ensuite les divers points cols pour déterminer les réactions chimiques possibles entre eux, ce que nous discuterons rapidement à la section 5.

L'équation de Schrödinger (11) s'est trouvée être d'une extraordinaire précision pour établir de telles prédictions, du moins pour les petites molécules comme H_2O. À titre d'exemple, les expériences en laboratoire sur la molécule d'eau à l'équilibre fournissent une longueur de 0,958 Å pour les deux liaisons O–H et un angle de 104,48°. Une petite simulation numérique de $E_a(R,z,N)$, réalisée sur mon ordinateur portable fournit une longueur de 0,954 Å et un angle de 104,54°. [2] Une telle précision est vraiment remarquable !

2. J'ai utilisé le logiciel PySCF en Python, avec la méthode CCSD(T) dans la base de discrétisation cc-pVQZ. L'optimisation de la position des noyaux a pris environ 10 minutes en démarrant avec un angle de 90° et une distance de 1 Å.

Malheureusement, il est impossible de réaliser des calculs si précis pour les molécules plus grosses, qui intéressent le plus les chimistes. Ceci vient de la très grande dimension $3N$ dans laquelle est posée l'équation de Schrödinger. Pour la molécule d'eau, (11) est déjà une équation aux dérivées partielles linéaire dans $\mathbb{R}^{30}$! Il est donc inenvisageable d'obtenir des résultats très précis lorsque N est grand. Or, une grande précision est nécessaire pour reproduire fidèlement les phénomènes chimiques. À titre d'exemple, pour la molécule d'eau je trouve dans ma simulation numérique une énergie de $-76,3431$ en mettant les deux atomes d'hydrogène à distance 1 Å avec un angle droit. La différence relative avec l'énergie $-76,3818$ de la configuration optimale n'est que d'ordre 10^{-4}...

Pour contourner cette difficulté, les chimistes et physiciens ont développé toute une panoplie de modèles approchés [3]. Ils sont la plupart non linéaires et permettent des calculs en un temps record. La qualité de l'approximation dépend néanmoins des situations.

3.2 – Stabilité

Tournons-nous maintenant vers les propriétés mathématiques de l'opérateur $H(R,z,N)$ de l'équation (10) et les problèmes ouverts le concernant. Comme pour $N = M = 1$, l'énergie du même système classique est non minorée car on peut faire tomber l'un des électrons sur l'un des noyaux en fixant tous les autres. Nous allons commencer par montrer que le modèle quantique est, lui, stable pour tous R, z, N, c'est-à-dire que l'énergie minimale $E_{a/s}(R,z,N)$ est finie. Ensuite nous étudierons la forme du spectre de l'opérateur $H(R,z,N)$.

Théorème 3 (Stabilité de toutes les molécules). *Soit $R = (R_1,\dots,R_M) \in (\mathbb{R}^3)^M$ avec $M \in \mathbb{N}$ et $z = (z_1,\dots,z_M) \in (\mathbb{R}_+)^M$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a*

$$E_a(R,z,N) \geqslant E_s(R,z,N) \geqslant -\frac{N}{2}\left(\sum_{m=1}^{M} z_m\right)^2. \qquad (12)$$

L'inégalité (12) est une simple extension de (7) pour l'atome d'hydrogène. En fait on retrouve exactement (7) pour $N = M = 1$, $R_1 = 0$ et $z_1 = 1$. Notons que l'énergie $E_s(R,z,N)$ est infinie si deux R_m sont égaux, à cause du dernier terme dans (9). Nous pouvons donc toujours supposer que $R_\ell \neq R_m$ pour $\ell \neq m$.

Preuve. Commençons par le cas d'un seul électron ($N = 1$) placé au milieu de M noyaux. Nous écrivons $E(R,z,1) = \tilde{E}(R,z,1) + W(R,Z)$, où $W(R,z)$ est le dernier terme de (9) (la répulsion entre les noyaux) et

$$\tilde{E}(R,z,1) = \inf_{\int_{\mathbb{R}^3}|\psi|^2=1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V|\psi|^2\right\} \qquad (13)$$

avec $V = -\sum_{m=1}^{M} z_m|x-R_m|^{-1}$. Le terme de droite est un infimum de fonctions linéaires par rapport à la fonction V et est donc concave en V. En écrivant $V = -\sum_{m=1}^{M}(z_m/Z)V_m$ avec $Z = \sum_{m=1}^{M} z_m$ et $V_m(x) = Z|x-R_m|^{-1}$, nous en déduisons par concavité que

$$\tilde{E}(R,z,1) \geqslant \sum_{m=1}^{M}\frac{z_m}{Z}\,\tilde{E}(R_m,Z,1). \qquad (14)$$

Ici, $\tilde{E}(R_m,Z,1)$ est l'énergie minimale d'un électron avec un seul noyau de charge Z placé en R_m. Celle-ci est indépendante de la position R_m du noyau :

$$\tilde{E}(R_m,Z,1) = \tilde{E}(0,Z,1), \qquad \forall\, m = 1,\dots,M.$$

Pour le voir, remplacer ψ par $\psi(\cdot - R_m)$ dans (13). Nous déduisons de (14) que

$$\tilde{E}(R,z,1) \geqslant \tilde{E}(0,Z,1), \qquad Z = \sum_{m=1}^{M} z_m.$$

L'interprétation est que l'énergie d'un électron au milieu de M noyaux est minimale lorsque tous les noyaux coïncident et forment un super noyau de charge $Z = \sum_{m=1}^{M} z_m$. Finalement, en remplaçant ψ par $Z^{-3/2}\psi(x/Z)$ dans (7) nous voyons que $\tilde{E}(0,Z,1) = -Z^2/2$, ce qui démontre bien l'inégalité (12) pour $N = 1$.

Pour traiter le cas de $N \geqslant 2$ électrons, nous pouvons ignorer les deux derniers termes de (9) car ils sont positifs. Pour les deux premiers nous utilisons l'inégalité que nous venons de démontrer

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\psi|^2 - \sum_{m=1}^{M} z_m\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\psi|^2}{|x-R_m|} \geqslant -\frac{Z^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\psi|^2$$

pour Ψ dans chaque direction x_j en fixant toutes les autres variables. Ceci génère le facteur N supplémentaire dans (12). □

3.3 – Spectre

Nous avons montré que l'énergie des électrons quantiques au sein d'une molécule était minorée. Nous aimerions ensuite savoir s'il existe un état d'équilibre correspondant, c'est-à-dire si $E_a(R,z,N)$

et $E_s(R,z,N)$ sont des valeurs propres. Nous nous demandons également s'il existe d'autres valeurs propres formant un spectre discret. On s'attend à ce que tout ceci soit vrai uniquement si N n'est pas trop grand. Un nombre donné de noyaux ne doit pas pouvoir maintenir auprès de lui un nombre arbitraire d'électrons ! Il ne doit donc exister aucun état d'équilibre lorsque N est trop grand.

Le théorème suivant précise que la charge totale est le bon critère pour déterminer la forme du spectre de $H(R,z,N)$.

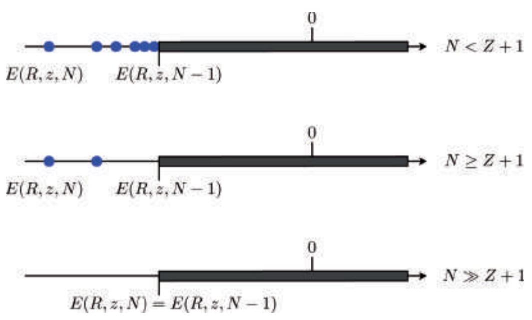
Théorème 4 (Spectre de $H(R,z,N)$). *Soit $M \in \mathbb{N}$, $z = (z_1,\ldots,z_M) \in (\mathbb{R}_+)^M$ et $R = (R_1,\ldots,R_M) \in (\mathbb{R}^3)^M$ avec $R_\ell \neq R_m$ si $\ell \neq m$. On appelle $Z = \sum_{m=1}^{M} z_m$ la charge totale des noyaux. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur $H(R,z,N)$ restreint soit au sous-espace des fonctions symétriques, soit à celui des fonctions anti-symétriques.*

- *Le spectre continu de $H(R,z,N)$ est la demi-droite*

$$\sigma_{\text{cont}}\Big(H(R,z,N)\Big) = \Big[E_{a/s}(R,z,N-1)\,;+\infty\Big[. \qquad (15)$$

- *Si $N < Z+1$, $H(R,z,N)$ possède une infinité de valeurs propres sous son spectre continu, qui convergent vers $E_{a/s}(R,z,N-1)$.*
- *Si $N \geqslant Z+1$, $H(R,z,N)$ possède au plus un nombre fini de valeurs propres sous son spectre continu.*
- *Si N est assez grand, $H(R,z,N)$ ne possède aucune valeur propre sous son spectre continu, et on a $E_{a/s}(R,z,N) = E_{a/s}(R,z,N-1)$.*

FIGURE 4 – Spectre de $H(R,z,N)$



Le théorème est un résumé de résultats obtenus dans la période 1960-80 et dont les références précises pourront être trouvées dans [5, Chap. 6]. Comme l'énoncé est valable à la fois pour les fermions et les bosons, nous avons utilisé la notation $E_{a/s}(R,z,N)$ pour signifier que l'indice peut être indifféremment pris égal à a ou s partout.

La formule (15) s'appelle le théorème HVZ et est due à Hunziker, Van Winter et Zhislin. Elle signifie que le spectre continu commence lorsqu'un électron a été arraché du système, alors que $N-1$ restent dans un voisinage des noyaux. Sa preuve n'est pas si simple puisqu'il faut comparer un problème dans $\mathbb{R}^{3N}$ avec un autre dans $\mathbb{R}^{3(N-1)}$.

Les autres assertions du théorème signifient que la charge totale du système est le bon critère permettant de déterminer s'il y a des valeurs propres sous le spectre continu, ainsi que leur nombre. Un système neutre ou chargé positivement possède toujours une infinité de valeurs propres. La charge totale $Z = \sum_{m=1}^{M} z_m$ des noyaux est suffisante pour maintenir les N électrons. À l'inverse, un système globalement négatif n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, voire aucune si le nombre d'électrons est trop grand (figure 4). Il faut noter que si les z_m sont tous entiers (comme c'est le cas en réalité), alors la condition devient $N \leqslant Z$ ou $N > Z$. Toutefois, le théorème est valable lorsque les z_m sont des réels positifs quelconques.

Une question importante est de déterminer à partir de quelle valeur de N la molécule n'admet plus de valeur propre, c'est-à-dire quel est le degré d'ionisation négative maximal d'une molécule. C'est la conjecture d'ionisation discutée plus bas à la section 6.

4. La stabilité de la matière

Prenons un verre d'eau. Il contient de l'ordre de 10^{23} molécules d'eau, donc N et M sont tous deux d'ordre 10^{23}. Comme nous ne connaissons pas les positions précises R_m des noyaux, notons simplement $E(N) := E_a(R,z,N)$ l'énergie de ce très gros système, sans toutefois oublier que $M = 3N/10$ est aussi très grand.

Si $E(N)$ n'a pas un comportement linéaire en fonction du nombre d'atomes lorsque N est très grand, nous avons un problème. En effet, supposons que $E(N) \sim_{N\to\infty} cN^\alpha$ avec $c \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ et réunissons deux verres d'eau. L'énergie libérée $E(2N)-2E(N) \sim c(2^\alpha-2)N^\alpha$ est énorme et nos deux verres d'eau forment une sorte de bombe. Ce n'est clairement pas le cas en réalité ! L'énergie $E(N)$ doit donc être plus ou moins linéaire à la limite $N \to \infty$.

L'estimée que nous avons donnée en (12) n'est pas du tout linéaire. Puisque $z_m \in \{1,8\}$ pour des molécules d'eau, elle est d'ordre $NM^2 \sim N^3$. Évidemment, notre preuve de (12) n'est pas optimale puisque nous avons négligé la répulsion entre les noyaux et entre les électrons, qui doit jouer un rôle crucial.

Démontrer que la matière est stable, c'est-à-dire que son énergie est linéaire par rapport à N et M a demandé le développement d'outils mathématiques très sophistiqués. Cette propriété a été conjecturée par David Ruelle et Michael Fischer en 1964, puis résolue par Freeman Dyson et Andrew Lenard en 1965, mais avec une preuve extrêmement technique. La première preuve plus accessible (et surtout plus conceptuelle) a été découverte en 1975 par Elliott Lieb et Walter Thirring. Elle repose sur une inégalité en théorie spectrale que l'on appelle maintenant l'*inégalité de Lieb-Thirring* [8].

La difficulté principale de ce résultat est qu'il n'est valable que pour les fermions ! Comme nous l'avons annoncé précédemment, la matière bosonique est instable lorsque N devient grand. Le résultat est le suivant.

Théorème 5 (Stabilité et instabilité pour $N \gg 1$).
• ***(fermions)*** *Pour tous $N, M \in \mathbb{N}^*$, $z \in (\mathbb{R}_+)^M$ et $R \in (\mathbb{R}^3)^M$, on a*

$$E_a(R, z, N) \geqslant -\frac{N}{2} - z_{\max}^2 N^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}} \tag{16}$$

où $z_{\max} = \max z_m$ est la charge maximale des noyaux.

• ***(bosons)*** *Pour tout N_0, on peut trouver $N_0 \leqslant N = M \in \mathbb{N}$ et $R \in (\mathbb{R}^3)^M$ tels que, pour $z = (1, \ldots, 1)$,*

$$E_s(R, z, N) \leqslant -\frac{N^{\frac{5}{3}}}{200}. \tag{17}$$

Les deux inégalités (16) et (17) ne sont pas du tout optimales mais nous les avons choisies pour leur simplicité. La première (16) a été démontrée par Elliott Lieb et Walter Thirring et sa preuve peut être par exemple lue dans [8, Thm 7.1]. Comme $N^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}} \leqslant N + M$, ceci fournit la minoration linéaire souhaitée sur l'énergie des fermions. Si les noyaux ne sont pas trop proches les uns des autres, il existe aussi une majoration linéaire en $N + M$.[3] L'inégalité (17) est elle due à Elliott Lieb seul et est discutée dans l'article de revue [6]. Il existe par ailleurs une borne inférieure similaire, de sorte que l'énergie est vraiment d'ordre $N^{5/3}$. L'énergie des bosons est donc vraiment beaucoup plus basse que celle des fermions. En conclusion, la matière serait instable si les électrons étaient des bosons (ce qui, heureusement, n'est pas le cas).

Les méthodes développées pour montrer (16) et (17) ont fait l'objet de multiples développements ultérieurs en physique mathématique et en analyse fonctionnelle [4]. Les travaux d'Elliott Lieb ont été récompensés cette année au congrès international de mathématiques par le prix Carl Friedrich Gauss.

5. Existence des molécules et conjecture sur les réactions chimiques

Maintenant que nous avons mieux compris pourquoi les électrons doivent absolument être des fermions, revenons à l'étude de petites molécules.

5.1 – Configurations d'équilibre

Nous avons largement discuté de l'état fondamental des électrons lorsque les M noyaux d'une molécule sont placés en $R_1, \ldots, R_M \in \mathbb{R}^3$. Ceci nous a mené à l'étude de la première valeur propre $E_a(R, z, N)$ de l'opérateur $H(R, z, N)$. Les chimistes s'intéressent particulièrement aux *configurations d'équilibre* de la molécule, pour lesquelles les noyaux sont eux aussi au minimum d'énergie. Ceci revient à minimiser la fonction $E_a(R, z, N)$ par rapport à $R = (R_1, \ldots, R_M) \in (\mathbb{R}^3)^M$. C'est un problème en dimension finie $3M$, même si bien sûr $E_a(R, z, N)$ est la première valeur propre d'une équation en dimension infinie.

Commençons par voir quand de telles positions d'équilibre existent. Pour les molécules neutres, il se trouve que de faibles corrélations quantiques à longue distance induisent une force attractive de type Van Der Waals, qui permet au minimum de toujours être atteint.

Théorème 6 (Liaison des molécules neutres). *On suppose que $N = \sum_{m=1}^M z_m$. Alors la fonction*

$$R = (R_1, \ldots, R_M) \in (\mathbb{R}^3)^M \mapsto E_a(R, z, N)$$

atteint son minimum. Ce dernier est strictement inférieur à l'énergie d'une molécule coupée en morceaux :

$$\min_{R \in (\mathbb{R}^3)^M} E_a(R, z, N) < \liminf_{\min_{\ell \neq m} |R_\ell - R_m| \to \infty} E_a(R, z, N). \tag{18}$$

3. L'énergie $E_a(R, z, N)$ diverge lorsque deux noyaux se rapprochent à cause du dernier terme dans (9). Il ne peut donc pas exister de majoration linéaire pour toute configuration des noyaux.

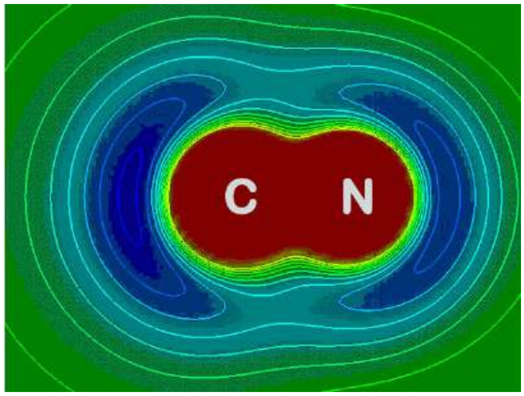
Rappelons que $E_a(R,z,N)$ est toujours une valeur propre dans le cas neutre, d'après le théorème 4. Le théorème 6 est (encore) dû à Elliott Lieb et Walter Thirring [9]. L'énoncé signifie que *toutes* les molécules neutres imaginables admettent une configuration dans laquelle noyaux et électrons sont à l'équilibre, ce qui peut paraître surprenant au premier abord. En réalité, la différence entre les deux termes de (18) peut être extrêmement petite, de sorte que toutes ne seront pas observables dans la nature à cause des fluctuations dues à la température et au caractère quantique des noyaux.

5.2 – Réactions chimiques

Après la détermination des états d'équilibre, les chimistes s'intéressent aux réactions chimiques pouvant avoir lieu entre eux. Une isomérisation est un chemin continu $t \in [0;1] \mapsto R(t)$ reliant deux minima locaux de $E_a(R,z,N)$. Physiquement, les chemins qui « montent le moins haut possible » seront favorisés, par souci de toujours minimiser l'énergie employée. De tels chemins doivent nécessairement passer par un point col, appelé *état de transition*. La différence d'énergie avec les minima est appelée *énergie d'activation* et sa grandeur détermine la faisabilité ou non de la réaction chimique.

Exemple 2. La molécule HCN (le cyanure d'hydrogène, un poison dangereux) existe aussi sous la forme CNH. Lors de la réaction chimique, l'atome d'hydrogène H tourne simplement autour des atomes C et N qui eux bougent très peu. La figure 5 fournit le calcul numérique des lignes de niveau de l'énergie $E_a(R,z,N)$ en fonction de la position de l'atome H dans le plan horizontal, en supposant que les deux atomes C et N sont fixes. Les deux régions en bleu foncé représentent les deux minima locaux pour l'atome d'hydrogène (celui à gauche pour HCN est plus profond). L'énergie de CNH est assez haute par rapport à celle de HCN mais le point col entre les deux (dans la région en bleu clair) est lui vraiment très haut. Cette haute barrière énergétique explique l'absence de CNH sur terre. Ce dernier est cependant abondamment répandu dans le milieu interstellaire et est très utilisé en astrochimie pour étudier la formation des étoiles dans les gaz moléculaires. Son étonnante stabilité est assurée par la hauteur du point col.

Figure 5 – La réaction HCN→CNH selon [13].



Comme toutes les molécules existent à température nulle, il semble naturel de penser que toutes les réactions chimiques sont également possibles, en cas de plusieurs minima locaux.

Conjecture 1 (Réactions chimiques). *On suppose que $N = \sum_{m=1}^{M} z_m$. Si la fonction $R \mapsto E_a(R,z,N)$ admet deux minima locaux stricts (modulo translation des R_m), alors la réaction chimique entre les deux a lieu sans couper la molécule en morceaux.*

Notre énoncé est volontairement un peu vague. Nous souhaitons que le long des chemins continus reliant les deux minima locaux, les positions des noyaux restent à distance finie même si on requiert que l'énergie maximale le long du chemin est la plus petite possible. Nous renvoyons à [1] pour un travail récent sur le sujet, incluant l'énoncé rigoureux de la conjecture 1.

6. La conjecture d'ionisation

Nous avons vu au théorème 4 qu'un ensemble donné de noyaux ne peut maintenir près de lui qu'un nombre fini d'électrons. Pour chaque R,z nous appelons $N_{a/s}(R,z)$ le nombre maximal possible d'électrons. On peut le définir comme le plus petit entier tel que

$$E_{a/s}(R,z,N) = E_{a/s}(R,z,N-1), \qquad \forall N > N_{a/s}(R,z).$$

Dans la nature on n'observe jamais d'atome avec plus d'un ou deux électrons supplémentaires. Ceci mène à une célèbre conjecture énoncée dans les années 1980 [4, Chap. 34].

Conjecture 2 (Ionisation). *On a*

$$N_a(R,z) \leqslant Z + CM$$

avec $Z := \sum_{m=1}^{M} z_m$ *et une constante universelle* C *(valant probablement 1 ou 2).*

L'estimée la plus simple connue à ce jour est valable pour les fermions et les bosons et vaut

$$N_{a/s}(R,Z) < 2Z + M. \tag{19}$$

Elle est due à Elliott Lieb en 1984. Des estimées plus précises sont connues pour $M = 1$ (atomes). Pour les fermions un célèbre résultat dû à Phan Thành Nam en 2012 énonce que

$$N_a(0,Z) < 1.22\,Z + 3\,Z^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{pour } M = 1. \tag{20}$$

De nouvelles estimées apparaissent régulièrement dans la littérature et la question est toujours d'actualité.

Une fois de plus le caractère fermionique des électrons doit jouer un rôle crucial pour la conjecture 2. Cette dernière est fausse pour les bosons, comme nous le verrons à la section 7, où nous déterminerons le comportement exact de $N_{a/s}(0,Z)$ au premier ordre à la limite $Z \to \infty$, dans le cas des atomes ($M = 1$). Personne n'a encore compris comment l'anti-symétrie de Ψ empêche l'existence de molécules avec plus d'un nombre borné d'électrons supplémentaires par atome.

Dans la définition du nombre maximal d'électrons $N_{a/s}(R,z)$, nous n'avons pas considéré le premier N pour lequel $E(R,z,N) = E(R,z,N-1)$, mais plutôt le dernier pour lequel l'inégalité est stricte. En principe, il se pourrait que l'on ait $E(R,z,N) = E(R,z,N-1)$ pour un N, puis que l'inégalité redevienne strict pour un N plus grand. Mais ceci semble très improbable et n'a jamais été observé en réalité. La raison est que l'on pense que la conjecture suivante est également vraie.

Conjecture 3 (Monotonie de l'affinité). *Pour tous* $M \in \mathbb{N}^*$, $R \in (\mathbb{R}^3)^M$ *et* $z \in (\mathbb{R}_+)^M$ *fixés, la fonction* $N \mapsto E_{a/s}(R,z,N)$ *est convexe, c'est-à-dire vérifie*

$$\begin{aligned} E_{a/s}(R,z,N-1) - E_{a/s}(R,z,N)& \\ \geqslant E_{a/s}(R,z,N) - E_{a/s}(R,z,N+1) &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{21}$$

pour tout $N \geqslant 2$.

Cette conjecture signifie que l'énergie nécessaire pour ajouter un électron (aussi appelée affinité) décroît en valeur absolue jusqu'à ce qu'elle devienne identiquement nulle. Elle est encore complètement ouverte.

7. Une excursion dans le tableau périodique

Terminons cet article par une promenade dans le tableau périodique. Rappelons que ce dernier contient tous les atomes neutres, donc avec $M = 1$ et $N = Z$. Ce tableau doit théoriquement s'arrêter à $Z = 137$ à cause d'effets relativistes qui ont été négligés dans cet article. Pour les particules non relativistes on peut continuer à avancer indéfiniment. Même si l'équation de Schrödinger est de plus en plus compliquée et fait intervenir des fonctions d'onde Ψ dépendant d'un nombre croissant de variables, il se trouve que de grandes simplifications apparaissent à la limite $N = Z \to \infty$. Comme nous allons le voir, le premier ordre est donné par un modèle non linéaire de type « champ moyen » posé sur $\mathbb{R}^3$.

Afin d'en savoir plus sur le comportement de la matière quantique, nous allons nous autoriser à visiter des « tableaux périodiques généralisés », certains sans aucune réalité physique. Nous supposerons $N \sim \kappa Z$ avec $\kappa > 0$ au lieu de juste $N = Z$ (pour étudier la stabilité des atomes fortement ionisés). Nous autoriserons aussi les électrons à être des bosons.

Pour énoncer le théorème suivant, il est utile d'introduire la densité électronique

$$\rho_\Psi^{(1)}(x) := N \int_{(\mathbb{R}^3)^{N-1}} |\Psi(x,x_2,\dots,x_N)|^2 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_N \tag{22}$$

qui donne le nombre local moyen d'électrons pour une fonction d'onde Ψ. Le résultat suivant est un résumé de plusieurs travaux de recherche obtenus pendant les années 1980-90 et dont toutes les références pourront être trouvées dans [5, Chap. 6].

Théorème 7 (Atomes avec $N \sim \kappa Z \to \infty$). *On prend* $M = 1$, $R_1 = 0$ *et* $z_1 = Z$. *Soit* $\kappa > 0$ *fixé.*

- *(bosons) On a*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N/Z\to\kappa}} \frac{E_s(0,Z,N)}{N^3} = \inf_{\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2=1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{\kappa |x|}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\}. \tag{23}$$

Le problème à droite admet un unique minimiseur u_κ *positif, lorsque* $\kappa \leqslant \kappa_c \simeq 1.21$, *et aucun pour*

$\kappa > \kappa_c$. Le nombre maximal d'électrons satisfait à

$$\lim_{Z\to\infty} \frac{N_s(0,Z)}{Z} = \kappa_c \simeq 1.21. \tag{24}$$

Toute suite de vecteurs propres Ψ_N associés à la valeur propre $E_s(0,Z,N)$ de $H(0,Z,N)$ vérifie

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N/Z\to\kappa}} \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^3} \left|\rho^{(1)}_{\Psi_N}(x) - N^4 u_\kappa(Nx)^2\right| \mathrm{d}x = 0 \tag{25}$$

lorsque $0 < \kappa \leqslant \kappa_c$.

- ***(fermions)** On a*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N/Z\to\kappa}} \frac{E_a(0,Z,N)}{N^{7/3}} = \inf_{\substack{\rho\geqslant 0\\ \int_{\mathbb{R}^3}\rho=1}} \left\{\frac{3}{5}c_{\mathrm{TF}}\int_{\mathbb{R}^3}\rho(x)^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(x)}{\kappa|x|}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\} \tag{26}$$

où $c_{\mathrm{TF}} = \pi^{4/3}2^{-1/3}3^{2/3}$. Le problème à droite admet un unique minimiseur ρ_κ lorsque $\kappa \leqslant 1$, et aucun pour $\kappa > 1$. Le nombre maximal d'électrons satisfait

$$\lim_{Z\to\infty} \frac{N_a(0,Z)}{Z} = 1. \tag{27}$$

Toute suite de vecteurs propres Ψ_N associés à la valeur propre $E_a(0,Z,N)$ de $H(0,Z,N)$ vérifie

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N/Z\to\kappa}} \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^3} \left|\rho^{(1)}_{\Psi_N}(x) - N^2\rho_\kappa(N^{\frac{1}{3}}x)\right| \mathrm{d}x = 0 \tag{28}$$

lorsque $0 < \kappa \leqslant 1$.

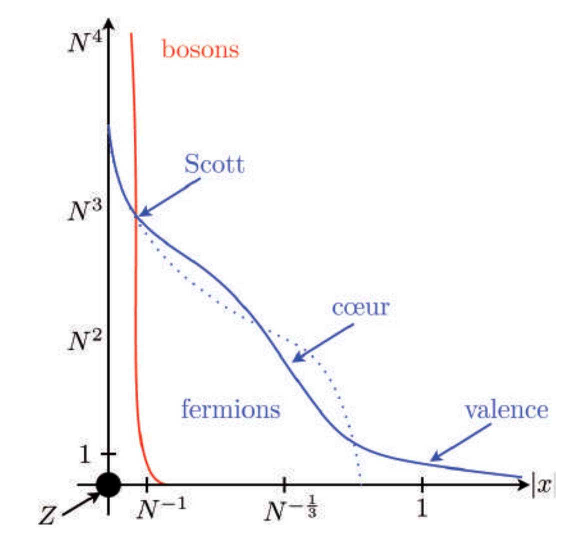
Pour nos atomes où les électrons sont des fermions, l'énergie est d'ordre $N^{7/3}$ d'après (26). Ceci ne contredit pas la stabilité de la matière (16) puisque le noyau est ici très lourd, de charge $Z \to \infty$. La constante multiplicative est donnée par le problème à droite de (26), appelé le modèle de Thomas-Fermi. Ce problème de minimisation est non linéaire et il n'a de solution que sous l'hypothèse que $\kappa \leqslant 1$, où κ est la proportion limite du nombre électrons par rapport à la charge du noyau. C'est cette propriété qui permet de montrer la limite (27). Si c'est une indication forte que la conjecture 2 d'ionisation est vraie, il y a cependant encore un long chemin à parcourir entre $N_a(0,Z) = Z + o(Z)$ et $N_a(0,Z) = Z + O(1)$.

La limite (28) semble suggérer que

$$\rho^{(1)}_{\Psi_N}(x) \approx N^2\rho_\kappa(N^{\frac{1}{3}}x), \tag{29}$$

lorsque $N \to \infty$ et $N/Z \to \kappa$, ce qui n'est malheureusement pas vrai ponctuellement. On pense néanmoins que le terme de droite fournit une bonne représentation des différentes échelles en jeu dans la densité électronique $\rho^{(1)}_{\Psi_N}$, c'est-à-dire que le terme de gauche est soit équivalent, soit au moins comparable au terme de droite, en fonction de la région où x se situe [6]. La forme générale du terme de droite est fournie à la figure 6.

Figure 6 – Densité électronique d'un atome neutre à la limite $N \to \infty$, d'après [6]



Les « électrons de cœur » vivent proche du noyau, à distance $|x| \sim N^{-1/3}$. En effectuant le changement de variable $x = N^{-1/3}y$, la limite (28) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\rho^{(1)}_{\Psi_N}(N^{-\frac{1}{3}}y)}{N^2} \to \rho_\kappa(y),$$

dans $L^1(\mathbb{R}^3)$, de sorte que (29) est vérifiée en ce sens. Cette région contient donc la majorité des N électrons du système. Ils compensent la grande charge Z du noyau, avec une très forte densité d'ordre N^2 dont le profil est donné par ρ_κ.

Éloignons-nous maintenant du noyau et prenons $|x| \gg N^{-1/3}$. Lorsque $\kappa = 1$, la densité de Thomas-Fermi satisfait à $\rho_1(y) \sim 3^5\pi^3/(2|y|^6)$ lorsque $|y| \to \infty$, de sorte que les puissances de N s'éliminent exactement et le terme à droite de (29) se comporte comme

$$N^2\rho_1(N^{\frac{1}{3}}x) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{3^5\pi^3}{2|x|^6}.$$

Une conjecture célèbre énonce que $\rho^{(1)}_{\Psi_N}$ est aussi bornée et strictement positive à distance finie du noyau [6]. Ceci traduirait l'existence d'un nombre fini d'« électrons de valence », qui sont soumis à un potentiel électrostatique fini puisque la charge élevée du noyau est compensée par les électrons de cœur. Ces électrons de valence participent à tous les phénomènes chimiques. Lorsque $\kappa < 1$, ρ_κ est à support compact comme représenté en pointillé à la figure 6 et on s'attend à l'absence totale d'électrons de valence. La charge du noyau n'est pas assez bien écrantée.

Finalement, retournons très proche du noyau, à distance $|x| \ll N^{-1/3}$. Comme on a $\rho_\kappa(y) \sim \sqrt{2}/(3\pi^2\kappa|y|^{3/2})$ lorsque $y \to 0$, on obtient

$$N^2\rho_\kappa(N^{\frac{1}{3}}x) \underset{|x|N^{\frac{1}{3}}\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{3\pi^2}\left(\frac{N}{\kappa|x|}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ceci suggère que la densité remonte brutalement et est d'ordre N^3 à distance $|x| \sim N^{-1}$. Ceci a été démontré et s'appelle la « correction de Scott ».

Un atome « bosonique » a un comportement totalement différent. D'après (25) il est bien plus concentré, à l'échelle N^{-1}, et s'effondre complètement sur lui-même. Aucun électron de valence ne subsiste, même pour $\kappa = 1$, car u_κ décroît très vite (comme $e^{-|x|}$ si $\kappa < \kappa_c$ et $e^{-\sqrt{|x|}}$ pour $\kappa = \kappa_c$). L'énergie minimale est aussi bien plus basse (d'ordre $-N^3$) que celle des fermions (d'ordre $-N^{7/3}$). Comme $\kappa_c \simeq 1.21 > 1$, les atomes bosoniques peuvent être fortement ionisés négativement d'après (24), ce qui ne correspond à aucune réalité physique. En particulier, la conjecture 2 d'ionisation est fausse pour les bosons.

Il peut paraître étonnant que l'équation *linéaire* associée à la première valeur propre $E_{a/s}(R,z,N)$ du Hamiltonien $H(R,z,N)$ se simplifie comme aux limites (23) et (26), et mène de plus à des problèmes *non linéaires*. C'est un phénomène très courant pour les systèmes très denses (classiques ou quantiques), où un grand nombre de particules occupe un petit espace. L'idée générale est que chaque particule est soumise à un grand nombre de collisions car elle a beaucoup de voisins. Par la loi des grands nombres, l'interaction est alors remplacée par une « interaction moyenne », vue par toutes les particules du système, qui est à l'origine de la non linéarité du problème limite. Ceci s'appelle un régime de « champ moyen » [11].

Conclusion

Dans cet article nous avons fourni une sélection de quelques résultats et problèmes ouverts concernant l'équation de Schrödinger pour les atomes et les molécules. Le lecteur intéressé à en savoir plus pourra lire par exemple [3, 8, 5].

Références

[1] I. Anapolitanos et M. Lewin. « Compactness of molecular reaction paths in quantum mechanics ». *Arch. Rat. Mech. Anal.* **236**, nº 2 (2020), p. 505-576. doi : 10.1007/s00205-019-01475-5. eprint : 1809.06110.

[2] K. Burke. *The Importance of Quantum Mechanics to Saving Our Planet*. Youtube video. Recorded talk at the Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore. 2019. url : https://youtu.be/g-csy93y06U.

[3] É. Cancès, C. Le Bris et Y. Maday. *Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction*. **53**. Collection Mathématiques et Applications. Springer, 2006.

[4] R. L. Frank et al., éd. *The Physics and Mathematics of Elliott Lieb : The 90th Anniversary Volume (2 books)*. EMS Press, 2022. isbn : 978-3-98547-019-8. doi : 10.4171/90. url : https://ems.press/books/standalone/234.

[5] M. Lewin. *Théorie spectrale et mécanique quantique*. Mathématiques et Applications. Springer International Publishing, 2022. isbn : 978-3-030-93435-4. doi : 10.1007/978-3-030-93436-1. url : https://link.springer.com/book/9783030934354.

[6] E. H. Lieb. « The stability of matter : from atoms to stars ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **22**, nº 1 (1990), p. 1-49. issn : 0273-0979.

[7] E. H. Lieb et M. Loss. *Analysis*. 2nd. **14**. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001, p. xxii+346. isbn : 0-8218-2783-9.

[8] E. H. Lieb et R. Seiringer. *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*. Cambridge Univ. Press, 2010.

[9] E. H. Lieb et W. E. Thirring. « Universal Nature of Van Der Waals Forces for Coulomb Systems ». *Phys. Rev. A* **34** (1986), p. 40-46.

[10] C. Reid. *Hilbert*. IX. With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1970.

[11] N. Rougerie. *Théorèmes de de Finetti, limites de champ moyen et condensation de Bose-Einstein.* Cours Peccot au Collège de France (2014). Paris : Spartacus-idh, 2016.

[12] A. Schirrmacher. *Establishing quantum physics in Göttingen. David Hilbert, Max Born, and Peter Debye in context, 1900–1926.* English. Cham : Springer, 2019, p. ix + 120. isbn : 978-3-030-22726-5/pbk; 978-3-030-22727-2/ebook.

[13] H. Umeda et al. « Multiphoton dissociation dynamics of hydrogen cyanide in nonstationary laser fields : important role of dipole moment function ». *Chemical Physics Letters* **229** (oct. 1994), p. 233-238. doi : `10.1016/0009-2614(94)01035-8`.

Mathieu Lewin

ceremade, université Paris-Dauphine psl

`mathieu.lewin@math.cnrs.fr`

`https://www.ceremade.dauphine.fr/~lewin/`

Mathieu Lewin travaille en physique mathématique avec des outils principalement issus de l'analyse (calcul des variations, théorie spectrale, équations aux dérivées partielles). Il s'intéresse particulièrement à la mécanique quantique et la physique statistique. Il a obtenu un prix de l'ems en 2012 et a été orateur invité à l'icm 2022.

La conjecture de Heron-Rota-Welsh : un théorème d'Adiprasito-Huh-Katz

• E. Brugallé

June Huh a reçu la médaille Fields en juillet 2022 pour

> l'introduction d'idées de la théorie de Hodge en combinatoire, la preuve de la conjecture de Dowling-Wilson pour les treillis géométriques, la preuve de la conjecture de Heron-Rota-Welsh pour les matroïdes, le développement de la théorie des polynômes lorentziens, et la preuve de la conjecture forte de Mason.[1]

L'ambition de ce texte est de présenter au lectrice *néophyte* la conjecture de Heron-Rota-Welsh, et de donner un aperçu de la profondeur et la beauté du chemin qui aura abouti à sa preuve par Adiprasito, Huh et Katz. Notre premier travail sera de rendre intelligible l'énoncé cabalistique suivant.

Théorème 1 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). *Les coefficients du polynôme caractéristique d'un matroïde forment une suite log-concave.*

1. Quésaco ?

1.1 – Suites log-concaves

Ce théorème peut être vu comme une vaste généralisation de l'observation suivante :

$$\binom{n}{k}^2 \geqslant \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}.$$

Point de mystère dans cette inégalité puisque

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \times \frac{n-k+1}{n-k} \geqslant 1.$$

Bien que facile à démontrer, cette inégalité est cependant remarquable dans le sens où de nombreuses situations en mathématiques font apparaître des suites satisfaisant à une propriété similaire. On dit qu'une suite de nombres réels $a_0, \ldots, a_n$ est *log-concave* si elle vérifie

$$\forall k = 1, \ldots, n-1, \quad a_k^2 \geqslant a_{k-1}a_{k+1}.$$

La suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0\ldots n}$ est donc log-concave, et nous renvoyons à la très belle synthèse de Stanley [23] pour de nombreux autres exemples.

Devant l'ubiquité de ces suites log-concaves, il est raisonnable de chercher des phénomènes généraux responsables de leurs apparitions. De nombreuses pistes d'investigations s'offrent à nous, et nous renvoyons encore une fois à l'article de Stanley [23] pour une description de plusieurs d'entre elles. Nous nous bornerons ici à indiquer brièvement pourquoi la géométrie algébrique est grande pourvoyeuse de suites log-concaves, fournissant ainsi une source d'inspiration féconde dans des situations parfois bien éloignées.

Mais n'allons pas trop vite et poursuivons le décryptage de l'énoncé du théorème 1. Voyons tout d'abord ce qu'est un matroïde.

1.2 – Des familles de vecteurs...

Considérons une famille $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque. Le *polynôme caractéristique* de E est défini par

$$\chi_E(q) = \sum_{I \subset E} (-1)^{|I|} q^{\mathrm{rg}(E)-\mathrm{rg}(I)},$$

où $|I|$ désigne le cardinal de l'ensemble I, et $\mathrm{rg}(I)$ désigne le rang de la famille de vecteurs I. On adopte ici la convention $\mathrm{rg}(\emptyset) = 0$.

Exemple 1. Si E est formé des vecteurs d'une base de V, alors toute famille $I \subset E$ est de rang $|I|$. On a donc

$$\chi_E(q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k q^{n-k} = (q-1)^n.$$

1. Traduction libre de « *bringing the ideas of Hodge theory to combinatorics, the proof of the Dowling-Wilson conjecture for geometric lattices, the proof of the Heron-Rota-Welsh conjecture for matroids, the development of the theory of Lorentzian polynomials, and the proof of the strong Mason conjecture* ».

Exemple 2. On suppose ici que (v_1, v_2, v_3) est une base de V, et on considère

$$E_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_1+2v_2+v_3\} \text{ et } E_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_1+2v_2\}.$$

On calcule alors

$$\chi_{E_1}(q) = q^3-4q^2+6q-3 \text{ et } \chi_{E_2}(q) = q^3-4q^2+5q-2.$$

Une remarque importante est que le polynôme $\chi_E(q)$ dépend essentiellement de la fonction rang

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{rg}: & \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & I & \longmapsto & \mathrm{rg}(I) \end{array}$$

plutôt que de la famille E à proprement parler. Un peu d'algèbre linéaire nous montre que pour tous sous-ensembles I et J de E, on a

(R1) $\mathrm{rg}(I) \leqslant |I|$;

(R2) $\mathrm{rg}(I) \leqslant \mathrm{rg}(J)$ si $I \subset J$;

(R3) $\mathrm{rg}(I \cup J) + \mathrm{rg}(I \cap J) \leqslant \mathrm{rg}(I) + \mathrm{rg}(J)$.

Étant maintenant donné un ensemble fini E, toute fonction $\mathrm{rg} : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}$ vérifiant les trois conditions (R1), (R2) et (R3) provient-elle d'une famille de vecteurs indexés par E ? La réponse est non, et c'est le début de la théorie des matroïdes initiée par Whitney dans les années 1930.

1.3 – ... aux matroïdes...

Un *matroïde* M est la donnée d'un ensemble fini E et d'une fonction $\mathrm{rg} : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{N}$ vérifiant les trois conditions (R1), (R2) et (R3). Le *rang* de M est par définition $\mathrm{rg}(E)$. On dira de plus que M est *sans boucle* si $\emptyset$ est le seul élément de $\mathscr{P}(E)$ vérifiant $\mathrm{rg}(I) = 0$ (dans le cas d'une famille de vecteurs, cela signifie que le vecteur nul n'appartient pas à la famille). Tous les matroïdes seront supposés sans boucle dans ce texte. Étant donné un corps $\mathbb{K}$, on dit qu'un matroïde est $\mathbb{K}$-*linéaire* s'il peut être construit comme précédemment à partir d'une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un matroïde est *linéaire* s'il est $\mathbb{K}$-linéaire pour un certain corps $\mathbb{K}$.

Exemple 3. Étant donné $n \geqslant 1$, le matroïde *uniforme* M_n est défini par la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{rg}: & \mathscr{P}(\{1,\ldots,n\}) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & I & \longmapsto & |I| \end{array}.$$

Le matroïde M_n est donc le matroïde linéaire associé à la configuration de vecteurs de l'exemple 1.

Comme mentionné plus haut, il existe des matroïdes non linéaires et nous en verrons un exemple un peu plus loin. En fait, s'il existe des matroïdes linéaires sur tout ensemble fini E, leur proportion tend vers 0 lorsque le cardinal de E tend vers l'infini [20]. Les matroïdes constituent ainsi une généralisation combinatoire des relations de dépendance en algèbre linéaire. En particulier, étant donné un matroïde M, on définit son polynôme caractéristique en parfaite analogie avec le cas des familles de vecteurs :

$$\chi_M(q) = \sum_{I \subset E} (-1)^{|I|} q^{\mathrm{rg}(M)-\mathrm{rg}(I)}.$$

Le théorème d'Adiprasito-Huh-Katz affirme ainsi que les coefficients de ce polynôme forment toujours une suite log-concave.

Exemple 4. Les polynômes

$$(q-1)^n \qquad q^3-4q^2+6q-3 \qquad q^3-4q^2+5q-2$$

des exemples 1 et 2 sont donc des polynômes caractéristiques de matroïdes, pour lesquels on observe bien la log-concavité des coefficients.

En fait, le théorème 1 est conséquence d'un énoncé plus fort encore. Il n'est pas trop difficile de voir que $\chi_M(1) = 0$, et on appelle polynôme caractéristique *réduit* de M le polynôme

$$\overline{\chi}_M(q) = \frac{\chi_M(q)}{q-1}.$$

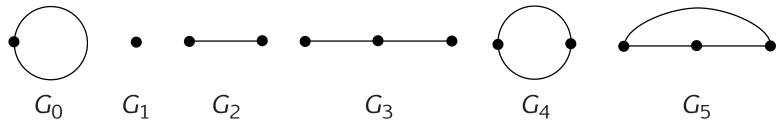
Théorème 2 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). *Les coefficients du polynôme caractéristique réduit d'un matroïde forment une suite log-concave.*

On peut montrer que le théorème 2 implique le théorème 1. Ce dernier a été conjecturé sous cette forme générale par Welsh dans les années 1970, généralisant ainsi une conjecture de Hoggar en théorie des graphes.

1.4 – ... en passant par le théorème des quatre couleurs

En effet, à un facteur q^c près, certains polynômes caractéristiques de matroïdes étaient connus dès le début du xx^e^ siècle sous le nom de *polynômes chromatiques* de graphes. Ces polynômes ont été introduits par Birkhoff en 1912 pour les graphes planaires dans une tentative de démontrer le théorème des quatre couleurs. Si la tentative de Birkhoff s'est finalement avérée vaine, le polynôme chromatique est quant à lui devenu un objet

Figure 1 – Quelques graphes



central en combinatoire. Il a été généralisé à tous les graphes par Whitney et Tutte dans les années 1930. Un graphe fini G est la donnée d'un ensemble fini de sommets et d'arêtes, chaque arête reliant deux sommets (potentiellement égaux, on parlera alors de boucle). Étant donné $q \in \mathbb{N}$, on note $\chi_G(q)$ le nombre de manières de colorier les sommets de G avec q couleurs et sans qu'aucune des arêtes de G ne relie deux sommets de même couleur. En particulier $\chi_G(q) = 0$ dès que G contient une arête reliant un sommet à lui-même. Il se trouve que la fonction $\chi_G(q)$ est un polynôme en q, qui vérifie la relation de contraction-suppression suivante :

$$\chi_G(q) = \chi_{G\setminus e}(q) - \chi_{G/e}(q),$$

où e est une arête quelconque de G, le graphe $G \setminus e$ est obtenu en supprimant l'arête e, et G/e est le graphe obtenu en contractant l'arête e.

Exemple 5. Calculons les polynômes chromatiques des graphes représentés à la figure 1. On a clairement $\chi_{G_0}(q) = 0$ et $\chi_{G_1}(q) = q$. En utilisant la relation de contraction-suppression, on obtient

$$\begin{aligned}
\chi_{G_2}(q) &= \chi_{G_1}(q)^2 - \chi_{G_1}(q) = q(q-1)\\
\chi_{G_3}(q) &= \chi_{G_1}(q)\chi_{G_2}(q) - \chi_{G_2}(q) = q(q-1)^2\\
\chi_{G_4}(q) &= \chi_{G_2}(q) - \chi_{G_0}(q) = q(q-1)\\
\chi_{G_5}(q) &= \chi_{G_3}(q) - \chi_{G_4}(q) = q(q-1)(q-2).
\end{aligned}$$

Remarquons que le théorème des quatre couleurs est équivalent à $\chi_G(4) > 0$ pour tout graphe planaire G (un graphe est dit planaire sans boucle s'il peut être dessiné dans $\mathbb{R}^2$ sans que ses arêtes se coupent, par exemple les graphes représentés à la figure 1). Nous renvoyons au bel article de Julien Marché [19] dans la *Gazette* pour l'apparition du polynôme chromatique des graphes en topologie quantique.

Le théorème 1 démontre en particulier la log-concavité des coefficients du polynôme chromatique d'un graphe, démontrant ainsi une conjecture de Hoggar des années 1960. En effet, on peut associer un matroïde linéaire M_G à un graphe G de sorte que les polynômes chromatiques et caractéristiques sont reliés par la relation

$$\chi_G(q) = q^c\,\chi_{M_G}(q),$$

où c est le nombre de composantes connexes de G. Pour construire M_G, on choisit au préalable une orientation pour chaque arête e de G. On considère ensuite la matrice A_G dont les lignes et colonnes sont indexées par les sommets et arêtes de G respectivement, et dont le coefficient $c_{v,e}$ est défini par

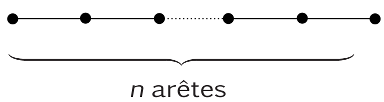
$$c_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e \text{ est orientée vers le sommet } v\,; \\ -1 & \text{si l'arête } e \text{ est orientée depuis le sommet } v\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le matroïde M_G est alors le matroïde construit à partir des vecteurs colonnes de la matrice A_G. On pourra vérifier à titre d'exercice que la fonction rg de M_G a la description combinatoire suivante : pour tout sous-ensemble I des arêtes de G, en notant $\mathrm{v}(I)$ le nombre de sommets adjacents aux éléments de I et $\mathrm{c}(I)$ le nombre de composantes connexes du sous-graphe de G dont les arêtes sont les éléments de I, on a

$$\mathrm{rg}(I) = \mathrm{v}(I) - \mathrm{c}(I).$$

Exemple 6. Le matroïde associé au graphe représenté à la figure 2 est le matroïde uniforme M_n rencontré dans les exemples 1 et 3.

Figure 2 – Graphe de matroïde uniforme



2. Dualité : de l'algèbre à la géométrie

Comme nous l'avons déjà évoqué, la géométrie algébrique est une source de suites log-concaves. Une idée pour attaquer la conjecture de Heron-Rota-Welsh est alors d'associer à un matroïde M un cadre géométrique attestant de la ln-concavité des coefficients de $\overline{\chi}_M(q)$. La dualité vecteur-hyperplan en algèbre linéaire fournit un tel cadre pour les matroïdes linéaires.

Considérons pour simplifier l'espace vectoriel $V = \mathbb{C}^d$. À chaque vecteur non nul $v = (a_1, \dots, a_d)$ de $\mathbb{C}^d$ correspond l'hyperplan de $\mathbb{C}^d$ d'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_d x_d = 0.$$

À une collection $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^d$ est donc associée une collection $\mathscr{F} = \{\mathscr{H}_1, \dots, \mathscr{H}_n\}$ d'hyperplans de $\mathbb{C}^d$. La fonction rang sur la famille de vecteurs E se traduit en la fonction codimension sur la famille $\mathscr{F}$:

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \mathrm{rg}(v_i)_{i \in I} = d - \dim \bigcap_{i \in I} \mathscr{H}_i,$$

avec la convention $\bigcap_{i \in \emptyset} \mathscr{H}_i = V$. Rappelons que le polynôme caractéristique réduit $\overline{\chi}_M(q)$ est obtenu en divisant par $q-1$ le polynôme caractéristique $\chi_M(q)$. Cette opération algébrique possède une incarnation géométrique : la *projectivisation* de la famille $\mathscr{F}$. On peut décrire simplement cette dernière en termes affines de la manière suivante. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut toujours supposer que l'hyperplan d'équation $x_d = 0$ est en position générique par rapport à la famille $\mathscr{F}$, ce qui signifie

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \bigcap_{i \in I} \mathscr{H}_i \subset \{x_d = 0\} \Longleftrightarrow \bigcap_{i \in I} \mathscr{H}_i = \{0\}.$$

On considère alors la famille, aussi appelée *arrangement*, d'hyperplans affines $F = \{H_1, \dots, H_n\}$ où $H_i = \mathscr{H}_i \cap \{x_d = 1\}$. En d'autres termes, si $\mathscr{H}_i$ est l'hyperplan vectoriel de $\mathbb{C}^d$ correspondant au vecteur $v_i = (a_1, \dots, a_d)$, l'hyperplan affine $H_i \subset \mathbb{C}^{d-1}$ est d'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{d-1} x_{d-1} = -a_d.$$

Exemple 7. Reprenons l'exemple 1 dans le cas $n = d = 3$, et considérons une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{C}^3$. À changement de coordonnées près, on peut toujours supposer que

$$v_1 = (1,0,0), \; v_2 = (0,1,0), \; v_3 = (0,0,1).$$

Le plan d'équation $x_3 = 0$ est alors un élément de la famille $\mathscr{F}$, et n'est donc pas en position générique par rapport à $\mathscr{F}$. Considérons plutôt le changement de coordonnées de $\mathbb{C}^3$ tel que

$$v_1 = (1,0,0), \; v_2 = (0,1,0), \; v_3 = (1,1,-1).$$

Le plan d'équation $x_3 = 0$ est maintenant en position générique par rapport à la famille $\mathscr{F}$, et les droites affines de l'arrangement F sont données dans $\mathbb{C}^2$ par les équations (voir la figure 3a)

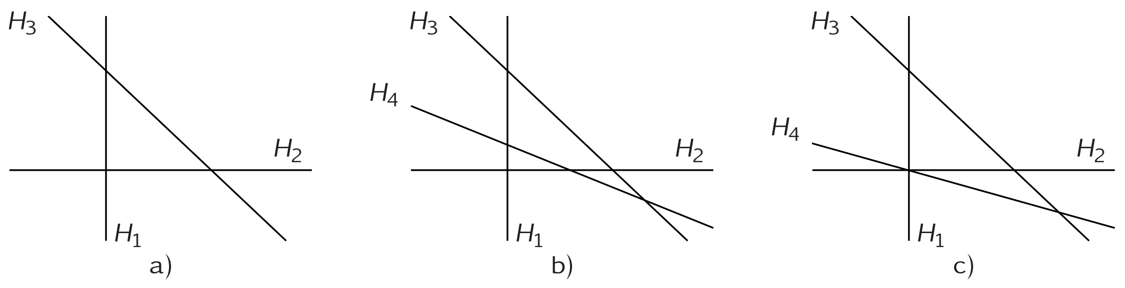
$$H_1 : \; x_1 = 0 \qquad H_2 : \; x_2 = 0 \qquad H_3 : \; x_1 + x_2 = 1.$$

On voit avec l'exemple précédent qu'un changement de coordonnées linéaire sur $\mathbb{C}^d$ a une influence sur la position précise des hyperplans de F. Cependant les dimensions des intersections des éléments de F sont indépendantes de tels changements de coordonnées génériques. En effet la fonction rang sur la famille de vecteurs E se traduit de nouveau en la fonction codimension sur la famille F, avec maintenant la convention $\dim \emptyset = -1$:

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \quad \mathrm{rg}(v_i)_{i \in I} = d - 1 - \dim \bigcap_{i \in I} H_i. \qquad (1)$$

Encore une fois, nous ne nous intéresserons donc pas tant ici à la position précise des hyperplans de F, mais plutôt à leurs positions mutuelles données en termes d'intersections à travers la fonction codimension. C'est ce qu'on appelle la *combinatoire* d'un arrangement d'hyperplans.

FIGURE 3 – Droites correspondant aux familles de vecteurs des exemples 1 et 2



Exemple 8. Revenons maintenant à l'exemple 2, et considérons les deux familles de vecteurs

$$E_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,-1),(2,3,-1)\}$$

et

$$E_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,-1),(1,2,0)\}.$$

Les droites affines de l'arrangement correspondant sont respectivement données par les équations (voir les figures 3b et 3c) :

$$\begin{array}{ll} H_1 : x_1 = 0 & H_2 : x_2 = 0 \\ H_3 : x_1 + x_2 = 1 & H_4 : 2x_1 + 3x_2 = 1, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} H_1 : x_1 = 0 & H_2 : x_2 = 0 \\ H_3 : x_1 + x_2 = 1 & H_4 : x_1 + 2x_2 = 0. \end{array}$$

Grâce à la formule (1), on peut lire directement sur les figures 3b et 3c la fonction rg_{E_i} du matroïde associé à la famille de vecteurs E_i :

$$\mathrm{rg}_{E_1}(I) = |I| \text{ si } |I| \leqslant 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{E_1}(\{1,2,3,4\}) = 3, \text{ et}$$

$$\mathrm{rg}_{E_2}(I) = |I| \text{ si } |I| \leqslant 2, \quad \mathrm{rg}_{E_2}(\{1,2,4\}) = 2,$$
$$I \neq \{1,2,4\}.$$

Cette représentation géométrique d'une famille de vecteurs et la formule (1) permettent d'extraire d'un cours de géométrie affine élémentaire un exemple de matroïde non linéaire.

Exemple 9. Le théorème de Pappus affirme que les points d'intersection

$$(AB') \cap (A'B), \quad (AC') \cap (A'C), \quad \text{et} \quad (BC') \cap (B'C)$$

sur la figure 4a sont alignés, ou dit autrement sont contenus dans une même droite L. Comme à l'exemple 8, on peut définir à partir de cet arrangement de 9 droites un matroïde linéaire M de rang 3 : les 9 droites constituent les éléments de E, et la fonction rg_M est donnée par leurs intersections via la formule (1). Ainsi par exemple

$$\mathrm{rg}_M(I) = |I| \text{ si } |I| \leqslant 2, \quad \mathrm{rg}_M(\{(AB),(AB'),(AC')\}) = 2,$$
$$\mathrm{rg}_M(\{L,(CB'),(BC')\}) = 2,$$
$$\mathrm{rg}_M(\{(AB'),(CB'),(BC')\}) = 3.$$

Considérons maintenant le matroïde $\widetilde{M}$ de rang 3 défini sur le même ensemble E et dont la fonction $\mathrm{rg}_{\widetilde{M}}$ coïncide avec la fonction rg_M sauf pour la valeur suivante [2] :

$$\mathrm{rg}_{\widetilde{M}}(\{L,(CB'),(BC')\}) = 3.$$

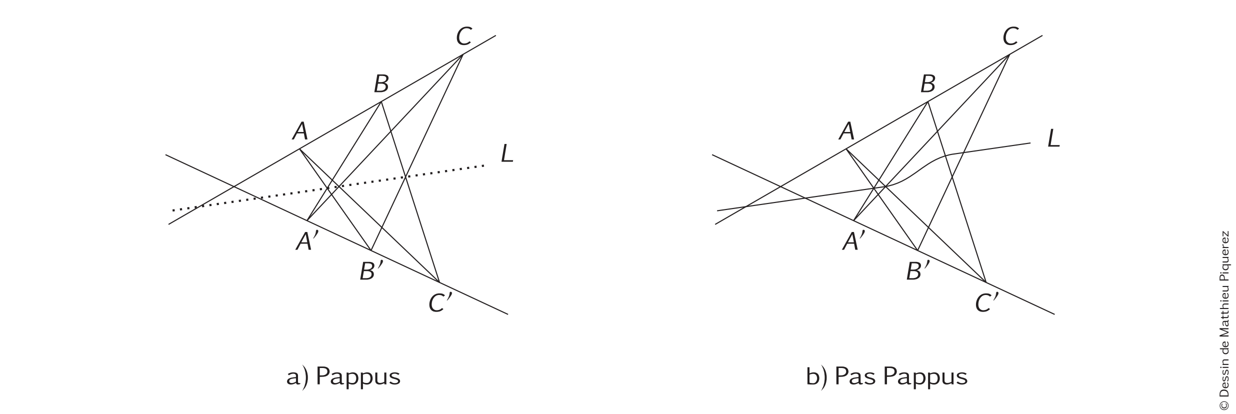
Cela correspond à considérer l'arrangement de « peudo-droites » représenté à la figure 4b, obtenu à partir de la figure 4a en faisant éviter le point d'intersection $(BC') \cap (B'C)$ à la droite L. Il découle du théorème de Pappus que le matroïde $\widetilde{M}$ ne peut pas être linéaire.

3. Intermezzo : suites log-concaves et formes quadratiques pseudo-lorentziennes

Attardons-nous un instant sur les suite log-concaves à trois termes. On peut reformuler la définition de ln-concavité sous forme matricielle :

$$\forall k = 1, \ldots, n-1, \quad \det\begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix} \leqslant 0,$$

Figure 4 – Pas Pappus : un matroïde non linéaire



2. On obtient bien ainsi un matroïde par [22, Proposition 1.5.13].

ou autrement dit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix}$ est indéfinie, ou de manière équivalente *pseudo-lorentzienne*. Une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ est dite pseudo-lorentzienne si elle est de signature $(1, r-1)$, c'est-à-dire si elle s'exprime dans un système de coordonnées adéquat par

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_r^2.$$

Si $r = n$, c'est-à-dire si q est non dégénérée, on dit que q est *lorentzienne*. On peut extraire beaucoup de suites log-concaves à 3 termes à partir d'une forme quadratique pseudo-lorentzienne. Si v et w sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ avec $q(v) > 0$, alors la restriction de q au sous-espace vectoriel engendré par v et w est pseudo-lorentzienne à son tour [3]. Ainsi, en notant ϕ la forme polaire de q, on a :

$$\det \begin{pmatrix} q(v) & \phi(v,w) \\ \phi(v,w) & q(w) \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

En d'autres termes la suite $q(v),\ \phi(v,w),\ q(w)$ est ln-concave.

Qui produit des formes quadratiques pseudo-lorentziennes produit donc des suites log-concaves. La géométrie algébrique, à travers le théorème de l'indice de Hodge, est justement une fantastique usine à formes lorentziennes.

4. La géométrie algébrique fait son entrée

4.1 – Géométrie algébrique condensée

Une *variété algébrique affine* est [4] l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}^n$ d'un système d'équations

$$\begin{cases} P_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ P_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ P_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

où les P_i sont des polynômes à coefficients complexes en n variables. Une telle variété a une dimension (complexe) : une droite est de dimension 1, un plan de dimension 2, une surface de dimension 2, etc.

Mise en garde. Il convient en vérité de distinguer les variétés non singulières (sympathiques) des variétés singulières (plus sauvages), mais nous ferons fi de cette distinction ici. En première approximation, toute variété algébrique sera non singulière. Dans le même ordre d'idée le principe du maximum implique que les variétés algébriques affines ont le même défaut de compacité que $\mathbb{C}^d$, ce qui n'est pas toujours pratique. L'espace projectif $\mathbb{C}P^d$, obtenu en ajoutant un hyperplan à l'infini à $\mathbb{C}^d$, offre une compactification de $\mathbb{C}^d$ pour laquelle la compactification des variétés algébriques affines se comporte bien. La compactification dans $\mathbb{C}P^d$ d'une variété algébrique affine est appelée une *variété algébrique projective*, et dans ce texte toute les variétés algébriques seront supposées projectives et non singulières [a]. Le lectrice peu familier avec les espaces projectifs est cependant autorisée à penser en termes de variétés affines, c'est-à-dire à remplacer tous les $\mathbb{C}P$ qui suivent par des $\mathbb{C}$.

a. Pire encore, nous n'autorisons même pas le remplacement de $\mathbb{C}$ par un autre corps.

En ajoutant des équations au système définissant une variété algébrique X, on obtient des *sous-variétés algébriques* de X. Il se trouve que les intersections de ces sous-variétés algébriques obéissent à des contraintes très fortes. Le théorème de l'indice de Hodge pour les surfaces en est le premier exemple. À une surface algébrique S est associé un couple $(A^1(S), \circ)$, où $A^1(S)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique $\circ$ vérifiant :

1. chaque courbe algébrique C de S détermine un élément $[C]$ de $A^1(S)$;
2. $A^1(S)$ est engendré par les courbes algébriques de S;
3. si C_1 et C_2 sont deux courbes algébriques de S s'intersectant en k points, alors $[C_1] \circ [C_2] = k$.

La forme bilinéaire symétrique $\circ$ s'appelle la *forme d'intersection* de S.

Exemple 10. Si $S = \mathbb{C}P^2$ (rappelez-vous l'autorisation de penser $S = \mathbb{C}^2$), alors $A^1(S) = \mathbb{R}$ et $\circ$ est la

3. Sinon elle serait définie positive contredisant ainsi la signature de q.
4. Adresser toute réclamation directement à Hermann Weyl : *« Mon travail a toujours cherché à concilier vérité et beauté, mais lorsque j'avais à choisir entre l'une et l'autre, généralement je préférais la beauté. »*

multiplication usuelle. Une courbe C de S est dite de degré p si elle est définie par l'équation

$$P(z_1, z_2) = 0$$

où le polynôme $P(z_1, z_2)$ est de degré p. On a alors $[C] = p$ dans $A^1(S)$. Le point (3) ci-dessus est une reformulation du théorème de Bézout stipulant que deux courbes algébriques planes de degrés respectifs d_1 et d_2 s'intersectent en $d_1 d_2$ points.

Le théorème suivant, dû à Hodge dans les années 1930, est un résultat majeur dans l'étude des surfaces algébriques.

Théorème 3 (Théorème de l'indice de Hodge). *La forme d'intersection d'une surface algébrique est lorentzienne.*

Les surfaces algébriques constituent donc une source formidable de suites log-concaves à trois termes. Par exemple, on peut interpréter la ln-concavité de la suite

$$1 = \binom{2}{0},\ 2 = \binom{2}{1},\ 1 = \binom{2}{2}$$

en considérant l'union des trois droites représentée à la figure 3a. Autrement dit, la ln-concavité des coefficients de $\overline{\chi}_{M_3}(q) = (q-1)^2$ s'explique en considérant l'arrangement de trois droites non concourantes dans $\mathbb{C}P^2$ correspondant à M_3.

Aparté
pour géomètres algébristes : $2^2 \geqslant 1 \times 1$.
Soit S l'éclaté de $\mathbb{C}P^2$ en les 3 points d'intersection des droites H_i. On note α le relevé dans le groupe de Chow $A^1(S)$ de la classe d'une droite dans $\mathbb{C}P^2$, et $\beta \in A^1(S)$ la classe telle que $\alpha + \beta$ soit la classe réalisée par l'union des transformées strictes des trois droites et des trois diviseurs exceptionnels. La matrice d'intersection des classes α et β est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et le théorème de l'indice de Hodge nous assure maintenant que cette matrice est de déterminant négatif.

En adaptant cette stratégie à tous les arrangements de droites dans $\mathbb{C}P^2$, on peut démontrer le théorème 2 pour tout matroïde $\mathbb{C}$-linéaire de rang 3. Plus généralement, la preuve du théorème 2 dans le cas d'un matroïde $\mathbb{C}$-linéaire quelconque s'obtient en utilisant la généralisation suivante du théorème de l'indice de Hodge.

De manière similaire au cas des surfaces, on peut associer à toute variété algébrique projective X de dimension d un couple $(A^1(X), \circ)$, où $A^1(X)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme d-linéaire symétrique $\circ$ vérifiant :

1. chaque sous-variété algébrique D de codimension 1 de X détermine un élément $[D]$ de $A^1(X)$;
2. $A^1(X)$ est engendré par les sous-variétés algébriques de codimension 1 de X ;
3. si $D_1, \dots, D_d$ sont d sous-variétés algébriques de codimension 1 de X s'intersectant en k points, alors $[D_1] \circ [D_2] \circ \cdots \circ [D_d] = k$.

Le théorème suivant peut se démontrer en se ramenant au cas des surfaces algébriques et en utilisant le théorème de l'indice de Hodge. Étant donné $\alpha \in A^1(X)$, on utilise la notation

$$\alpha^k = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha}_{k}.$$

Théorème 4 (Khovanskii-Teissier). *Soit X une variété algébrique de dimension d, et α et β deux éléments sympathiques*[5] *de $A^1(X)$. Alors la suite $(\alpha^k \circ \beta^{d-k})_{k=0,\dots,d}$ est log-concave.*

4.2 – Le cas des matroïdes $\mathbb{C}$-linéaires, esquisse

Nous pouvons maintenant donner les (très) grandes lignes de la preuve du théorème 2 dans le cas d'un matroïde $\mathbb{C}$-linéaire M. L'idée principale est de considérer non pas l'arrangement d'hyperplans F associé à M décrit à la section 2, mais plutôt son *complémentaire*

$$X^\circ = \mathbb{C}P^{\mathrm{rg}(M)-1} \setminus \bigcup_{H \in F} H.$$

C'est une variété algébrique affine clairement non compacte. Toute l'astuce consiste maintenant à

5. Pour les initiés : les classes α et β doivent être numériquement effectives.

choisir une compactification adéquate X_M de X° de telle sorte que la combinatoire de l'arrangement F d'hyperplans se retrouve dans les propriétés de la forme d'intersection sur $A^1(X_M)$. Une telle compactification a été introduite dans les années 1990 par De Concini et Procesi [10], et Huh et Katz ont démontré dans [17] que le k-ième coefficient de $\overline{\chi}_M(q)$ est égal à $\alpha^k \circ \beta^{\mathrm{rg}(M)-1-k}$ pour α et β deux éléments sympathiques [6] dans $A^1(X_M)$.

Ce travail, faisant suite à un premier travail de Huh [16], démontre ainsi le théorème 2 dans le cas des matroïdes $\mathbb{C}$-linéaires. Un premier pas remarquable dans la résolution de la conjecture de Heron-Rota-Welsh, près de quarante ans après son énoncé ! Il est à noter que la paire $(A^1(X_M), \circ)$ ainsi que les éléments α et β ont une description entièrement combinatoire à partir du matroïde M. Cela amènera Huh et Katz à écrire dans [17] :

> Our proof is largely combinatorial except for establishing the Khovanskii-Teissier inequality in Lemma 3.3 [...]. For that reason, we do not know if our proof can be extended to general matroids.

5. La géométrie algébrique fait sa sortie

5.1 – Le cas général, (esquisse)[2]

Le tour de force qu'ont réussi Adiprasito, Huh et Katz en démontrant les théorèmes 1 et 2 a donc été de se défaire de toute utilisation de la géométrie algébrique pour établir la ln-concavité de la suite $(\alpha^k \circ \beta^{d-k})_{k=0,\dots,d}$. Comme souvent en mathématiques, ils ont pour cela démontré un résultat bien plus fort.

À un matroïde M de rang $d+1$ est associée une algèbre graduée

$$A^*(M) = \bigoplus_{i=0}^{d} A^i(M),$$

appelée l'*anneau de Chow* de M. L'adjectif *graduée* signifie ici que le produit d'un élément de $A^i(M)$ et d'un élément de $A^j(M)$ est dans $A^{i+j}(M)$, en posant $A^i(M) = \{0\}$ lorsque $i \notin \{0,\dots,d\}$. Ces anneaux ont été introduits par Feichtner et Yuzvinsky dans [12], étendant ainsi à tous les matroïdes les aspects combinatoires des travaux de De Concini et Procesi concernant les compactifications magnifiques des complémentaires d'arrangements d'hyperplans. Ainsi lorsque le matroïde M est $\mathbb{C}$-linéaire, l'anneau $A^*(M)$ fournit une description combinatoire d'un objet bien connu en géométrie algébrique : l'anneau de Chow de la variété X_M construite par De Concini et Procesi. Ces anneaux de Chow en géométrie algébrique complexe sont connus pour satisfaire à trois propriétés très fortes : la dualité de Poincaré, le théorème de Lefschetz vache, et les relations de Hodge-Riemann.

Le théorème principal d'Adiprasito, Huh et Katz dans [1] stipule que ces trois propriétés continuent d'être vérifiées pour l'anneau de Chow d'un matroïde quelconque. Si on se rappelle qu'une infime proportion des matroïdes sont linéaires, ce résultat est tout simplement fantastique. Une version combinatoire du théorème de Khovanskii-Teissier, et donc le théorème 2, se déduit maintenant des trois propriétés de dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz vache, et relations de Hodge-Riemann.

5.2 – Fil d'Ariane tropical

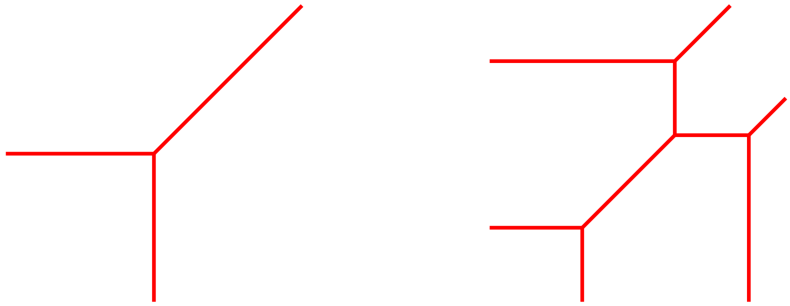
Bien qu'ayant graduellement disparu de la preuve finale, la géométrie algébrique a donc joué un rôle important dans l'établissement du théorème 2. La réalisation progressive que l'approche de [17] pour les matroïdes $\mathbb{C}$-linéaires pouvait se généraliser à tout matroïde s'est faite notamment grâce à une autre géométrie, la *géométrie tropicale*. En première approximation, la géométrie tropicale peut se voir comme la géométrie algébrique construite à partir de $\mathbb{R}$ muni des deux opérations suivantes :

$$\text{“}x + y\text{”} = \max(x, y) \qquad\qquad \text{“}x \times y\text{”} = x + y.$$

Cette algèbre curieuse produit des objets géométriques curieux, appelés variétés tropicales et dont quelques spécimens sont représentés aux figures 5 et 6.

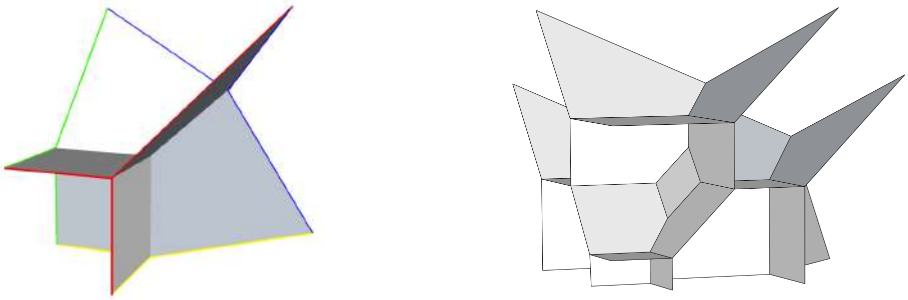
6. Pour les amateurs : la variété X_M est obtenue en éclatant $\mathbb{C}P^{\mathrm{rg}(M)-1}$ le long des intersections des hyperplans de F ; la classe α est le relevé de la classe d'un hyperplan de $\mathbb{C}P^{\mathrm{rg}(M)-1}$, et $\beta = \partial X_M - \alpha$ où ∂X_M est la classe de $X_M \setminus X^\circ$.

Figure 5 – Courbes tropicales planes



a) une droite b) une conique

Figure 6 – Surfaces tropicales spatiales



a) un plan b) une quadrique

Un théorème de Sturmfels affirme que tout matroïde a une réalisation comme complémentaire d'arrangement d'hyperplans en géométrie tropicale. Ainsi tout matroïde, linéaire ou non, a finalement une incarnation géométrique. La figure 6a est par exemple le pendant tropical du complémentaire de l'arrangement de droites représenté à la figure 3b. Les quatre droites tropicales rouge, verte, bleue et jaune formant le bord du plan tropical correspondent exactement aux quatre droites de la figure 3b. En fournissant un cadre où s'entremêlent géométrie algébrique et combinatoire, la géométrie tropicale procure une intuition géométrique sur des objets combinatoires comme les matroïdes. Et c'est précisément cette intuition qui permet d'entrevoir que l'idée folle que la preuve de [17] puisse se généraliser à tout matroïde, n'est peut-être finalement pas si folle que ça.

5.3 – Bouquet final

Pour les lectrices familiers des dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz vache, et autres relations de Hodge-Riemann, terminons en précisant le théorème principal de [1]. Étant donné un endomorphisme linéaire L de $A^*(M)$, on notera $L : A^*(M) \to A^{*+1}(M)$ si

$$L(A^i(M)) \subset A^{i+1}(M) \quad \forall i \geqslant 0,$$

et on notera L^k pour la composée k-ième de L. De manière analogue, on notera

$$P : A^*(M) \times A^{d-*}(M) \to \mathbb{R}$$

pour une fonction définie sur les couples $(x, y) \in A^i(M) \times A^{d-i}(M)$ pour $i = 0, \ldots, d$. On renvoie par exemple à [2, 1] pour la description précise de l'ensemble $\mathscr{K}$ dans le théorème ci-dessous.

Théorème 5 (Adiprasito-Huh-Katz, [1]). *Pour tout matroïde M de rang $d+1$, il existe une forme bilinéaire symétrique $P : A^*(M) \times A^{d-*}(M) \to \mathbb{R}$ et un cône convexe $\mathscr{K}$ d'opérateurs $L : A^*(M) \to A^{*+1}(M)$ tels que*

1. Dualité de Poincaré : *l'appariement*

$$P : A^i(M) \times A^{d-i}(M) \to \mathbb{R}$$

est non dégénéré pour tout $i = 0, \ldots, d$.

2. Théorème de Lefschetz vache : *pour tout* $L \in \mathcal{K}$ *et tout* $i = 0, \dots, d$*, l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} L^{d-2i}: & A^i(M) & \longrightarrow & A^{d-i}(M) \\ & x & \longmapsto & L^{d-2i}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

3. Relations de Hodge-Riemann : *pour tout* $L \in \mathcal{K}$ *et tout* $i = 0, \dots, d$*, l'application bilinéaire*

$$\begin{array}{ccc} A^i(M) \times A^i(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (-1)^i P(x, L^{d-2i}(y)) \end{array}$$

est symétrique, et est définie positive sur le noyau de L^{d-2i+1}.

Comme mentionné plus haut, la théorie de Hodge assure que le théorème 5 est vrai pour les matroïdes $\mathbb{C}$-linéaires. Que ce théorème persiste pour tout matroïde est remarquable.

6. Et après ?

Outre la conjecture de Heron-Rota-Welsh, June Huh et ses collaborateurs se sont attaqués avec succès à plusieurs conjectures anciennes en théorie des matroïdes. Ainsi, la conjecture de Dowling-Wilson [6], la conjecture forte de Mason [7], ou encore la conjecture de Brylawski-Dawson [5] ont pu être démontrées en utilisant chaque fois une théorie de Hodge combinatoire adéquate. Dans une autre direction, Amini et Piquerez ont généralisé le théorème 5 aux variétés tropicales kähleriennes [3]. Il est frappant que bien que toutes les preuves des conjectures mentionnées soient similaires, aucune preuve unifiée n'est actuellement connue. Pour citer June Huh :

> The known proofs of the Poincaré duality, the hard Lefschetz property, and the Hodge-Riemann relations for the objects listed above have certain structural similarities, but there is no known way of deducing one from the others. Could there be a Hodge-theoretic framework general enough to explain this miraculous coincidence ?

La théorie des polynômes lorentziens récemment initiée par Bränden et Huh dans [7], ainsi que les travaux cités d'Amini et Piquerez, ont pour but d'apporter quelques éléments de réponses à cette question. Comme tout résultat fondamental, loin d'être le point final d'une histoire, les travaux de June Huh constituent au contraire le début d'une épopée.

7. Pour quelques détails de plus

Nous n'avons fait qu'effleurer les travaux de June Huh. Le lecteur désireuse d'aller plus loin pourra consulter les articles de synthèse [2, 21, 4, 11, 14, 15]. Concernant les autres aspects abordés ici, nous renvoyons la lecteur à [22] pour une référence classique sur les matroïdes, à [13] pour une introduction à la géométrie algébrique, à [24] pour un panorama sur la théorie de Hodge, et à [8, 9, 18] pour une introduction à la géométrie tropicale.

Références

[1] K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz. « Hodge theory for combinatorial geometries ». *Ann. of Math. (2)* **188**, nº 2 (2018), p. 381-452.

[2] K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz. « Hodge theory of matroids ». *Notices of the AMS* **64**, nº 1 (2017).

[3] O. Amini et M. Piquerez. « Hodge theory for tropical varieties ». *arXiv preprint arXiv :2007.07826* (2020).

[4] F. Ardila. « The geometry of geometries : matroid theory, old and new ». *arXiv preprint arXiv :2111.08726* (2021).

[5] F. Ardila, G. Denham et J. Huh. « Lagrangian combinatorics of matroids ». *arXiv preprint arXiv :2109.11565* (2021).

[6] T. Braden et al. « Singular Hodge theory for combinatorial geometries ». *arXiv preprint arXiv :2010.06088* (2020).

[7] P. Brändén et J. Huh. « Lorentzian polynomials ». *Annals of Mathematics* **192**, nº 3 (2020), p. 821-891.

[8] E. Brugallé. « Un peu de géométrie tropicale. » *Quadrature* **74** (2009), p. 10-22.

[9] E. Brugallé et al. « Brief introduction to tropical geometry ». In : *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2014.* Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2015, p. 1-75.

[10] C. De Concini et C. Procesi. « Wonderful models of subspace arrangements ». *Selecta Math. (N.S.)* **1**, nº 3 (1995), p. 459-494.

[11] C. Eur. « An Essence of independence : Recent works of June Huh on combinatorics and Hodge theory ». *arXiv preprint arXiv :2211.05724* (2022).

[12] E. M. Feichtner et S. Yuzvinsky. « Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices ». *Invent. Math.* **155**, nº 3 (2004), p. 515-536.

[13] K. Hirsch et I. Shafarevich. *Basic algebraic geometry*. Springer Berlin/Heidelberg, 1977.

[14] J. Huh. « Combinatorial applications of the Hodge–Riemann relations ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Rio de Janeiro 2018*. World Scientific. 2018, p. 3093-3111.

[15] J. Huh. « Combinatorics and Hodge theory ». In : *Proc. Int. Cong. Math.* 2022.

[16] J. Huh. « Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs ». *Journal of the American Mathematical Society* **25**, nº 3 (2012), p. 907-927.

[17] J. Huh et E. Katz. « Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids ». *Mathematische Annalen* **354** (2012), p. 1103-1116.

[18] D. Maclagan et B. Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*. **161**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, p. xii+363.

[19] J. Marché. « Le nombre d'or et la topologie quantique ». *Gazette de la Société Mathématique de France* **172** (2022), p. 21-29.

[20] P. Nelson. « Almost all matroids are nonrepresentable ». *Bull. Lond. Math. Soc.* **50**, nº 2 (2018), p. 245-248.

[21] A. Okounkov. « Combinatorial geometry takes the lead ». *arXiv preprint arXiv :2207.03875* (2022).

[22] J. Oxley. *Matroid theory*. Second. **21**. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2011, p. xiv+684.

[23] R. P. Stanley. « Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry ». In : *Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986)*. Vol. 576. Ann. New York Acad. Sci. New York Acad. Sci., New York, 1989, p. 500-535.

[24] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. **10**. Cours Spécialisés [Specialized Courses]. Société Mathématique de France, Paris, 2002, p. viii+595.

Erwan Brugallé

Nantes Université

`erwan.brugalle@math.cnrs.fr`

Erwan Brugallé est enseignant-chercheur à Nantes Université. Ses travaux portent essentiellement sur la géométrie algébrique réelle et la géométrie tropicale.

Ce texte reflète ce que j'ai retiré du groupe de travail en théorie de Hodge tropicale à Nantes Université au printemps 2022. Je remercie chaleureusement Hanine Awada, Benoît Bertrand, Vincent Franjou, Gurvan Mével, Matthieu Piquerez et Salim Rivière pour leur participation enthousiaste. Un grand merci aussi à Omid Amini, Yann Chaubet, Anatole Joseph Stouls, Assia Mahboubi, Enzo Pasquereau, Matthieu Piquerez et Gabriel Rivière pour leurs nombreuses remarques sur les versions préliminaires de cet article. La présentation générale du texte doit beaucoup à l'influence de François Laudenbach. Je profite de l'occasion pour le remercier de l'attention constante, toujours bienveillante, qu'il porte à son entourage.

Un entretien avec James Maynard

Propos recueillis par Sary Drappeau

Est-ce que ton contexte familial a favorisé ton chemin vers les mathématiques ? As-tu par exemple le souvenir d'avoir été en contact avec des mathématiques avancées avant les études ?

Mon milieu familial n'a pas de lien particulier avec les mathématiques ; mes parents étaient des professeurs dans le secondaire, en français et en allemand. Leur travail d'enseignant m'a probablement encouragé à apprendre et à explorer mes centres d'intérêt, mais j'ai découvert les mathématiques à l'école, ainsi qu'avec mes lectures en dehors de l'école. Je n'ai pas du tout eu d'apprentissage accéléré, si ce n'est qu'étant intéressé par les mathématiques, il m'est arrivé d'en lire pour le plaisir.

Te souviens-tu du premier problème de mathématiques que tu t'es posé et/ou as résolu par toi-même ?

J'ai été intéressé par les mathématiques depuis très jeune, mais j'étais aussi assez obstiné, et cela m'a amené à réfléchir souvent par moi-même à des problèmes de mathématiques. Je ne suivais pas de guide particulier pour apprendre les mathématiques, donc cela m'est arrivé de temps en temps de travailler sur des problèmes un peu au hasard (en imaginant parfois que c'étaient de nouvelles découvertes !) avant d'apprendre que c'était du matériel standard que j'apprendrais en tant qu'étudiant quelques années plus tard. Il a donc dû se produire plusieurs fois où je me suis posé des problèmes très secondaires par moi-même, que j'ai résolus ensuite, même à un âge plutôt jeune.

Le Royaume-Uni a une tradition plutôt ancienne en théorie analytique des nombres (d'après Math Genealogy, tu es l'arrière-arrière-petit-fils de J. E. Littlewood). As-tu le sentiment que cela a favorisé le fait que tu choisisses de travailler sur la théorie analytique des nombres ?

J'étais passionné de théorie des nombres en général depuis longtemps, mais ce n'est que durant ma quatrième année à Cambridge que j'ai découvert la théorie analytique des nombres comme sujet d'étude ; avant cela, j'en avais seulement vaguement entendu parler. Si cela ne s'était pas produit, j'aurais très bien pu m'orienter vers une autre partie de la théorie des nombres. Je suis certain que la place du Royaume-Uni dans l'histoire de la théorie analytique des nombres a rendu beaucoup plus probable l'éventualité qu'un tel cours soit dispensé (ce n'est pas systématiquement le cas dans toutes les institutions au Royaume-Uni), et cela a aussi contribué à la présence de très bon·nes mathématicien·nes disponibles pour m'encadrer en thèse.

Si je me souviens bien, tu as travaillé pour le secteur privé à un moment donné. Est-ce que cela a influencé ton opinion sur les mathématiques fondamentales, ou leurs rôles dans l'économie ou la société ?

J'ai effectué un stage à la banque d'investissement JPMorgan durant l'été 2007. J'utilisais les mathématiques pour analyser des stratégies de trading financier, et trouver de nouvelles stratégies. Cette expérience m'a été très précieuse : elle m'a montré que les mathématiques jouent un rôle important dans notre compréhension du monde. Mais cela m'a aussi confirmé que la recherche fondamentale académique était ma vraie passion (bien que j'aie beaucoup apprécié ce stage !)

Sur les petits écarts entre nombres premiers et Polymath8.
Notons $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers et $d_n := p_{n+1} - p_n$. Le théorème des nombres premiers peut être réécrit comme le fait que $d_n/\ln n$ converge vers 1 en moyenne de Cesaro, et l'on a donc immédiatement $\liminf d_n/\ln n \leqslant 1$. Ce résultat est très loin de la conjecture des nombres premiers jumeaux, laquelle prédit que $\liminf d_n = 2$, et à vrai dire, jusqu'en 2008, l'on ne savait pas prouver que $\liminf d_n/\ln n$ vaut zéro. Ceci fut démontré en 2008 par Goldston-Pintz-Yıldırım (GPY) [6], sous une forme quantitative.
Puis en 2013, Zhang a surpris la communauté en prouvant dans [15] que $M := \liminf d_n \leqslant 7 \times 10^7$, ce qui est « à une constante près » de la conjecture des

nombres premiers jumeaux (une constante plutôt grande, certes !). La stratégie reprend celle de GPY en y incorporant de nouvelles idées, notamment sur les nombres premiers en progressions arithmétiques.
Un travail collaboratif en ligne lancé en 2013, le projet Polymath8a [2], a permis d'améliorer certains aspects de l'argument, avec pour conséquence la majoration $M \leqslant 4680$.
Enfin, en 2013 aussi, Maynard a introduit dans [12] une idée nouvelle dans le crible GPY qui lui a permis, non seulement d'améliorer la valeur quantitative ($M \leqslant 600$) sans faire appel directement aux travaux de Zhang, mais aussi et de façon plus significative encore, de montrer que pour tout $m \geqslant 1$, l'on a $\liminf(d_n + d_{n+1} + \ldots + d_{n+m}) < \infty$: autrement dit, l'on peut trouver une infinité d'intervalles d'entiers bornés contenant un nombre *arbitraire*, fixé à l'avance, de nombres premiers.
Ces travaux ont fait l'objet d'un article de survol dans la *Gazette* (avril 2014) [1].

Le premier résultat qui t'a fait connaître est ton travail sur les écarts entre les nombres premiers [12]. C'était un sujet bouillonnant depuis le milieu des années 2000, avec les travaux de Goldston, Pintz et Yıldırım [6], et bien sûr ensuite le travail de Yitang Zhang en 2013 [15] qui a franchi un cap psychologique important. Ces résultats sont parus vers la fin de ta thèse. Lorsque le manuscrit de Zhang a été rendu public, est-ce que tu travaillais déjà sur des questions similaires ?

J'avais commencé à travailler sur une approche différente du problème des écarts entre nombres premiers à peu près six mois avant l'annonce de Zhang. Cependant, je n'avais à ce moment-là que des preuves-de-concept plutôt que des résultats. À l'époque, je pensais que mes idées ne pourraient pas prouver qu'il y a une infinité d'écarts bornés entre nombres premiers, mais qu'elles pourraient améliorer un petit peu ce qui était connu. Je me souviens avoir été très enthousiaste de la percée de Zhang, à la fois parce que cela constituait un résultat spectaculaire mais aussi parce que j'étais optimiste sur le fait que mes idées pouvaient contribuer à améliorer ces résultats.

Dans ton premier papier connu sur ce sujet [12], l'argument repose sur une construction liée à un crible [1], qui se rapproche du crible de Goldston-Pintz-Yildirim. La réussite de cette entreprise n'avait rien d'évident à l'avance (on ne sait pas si on va gagner avant d'être parvenu à la ligne d'arrivée), surtout vu l'attention et l'enthousiasme qu'ont suscités les méthodes de GPY puis de Zhang ; il y avait toutes les raisons du monde d'être pessimiste. Comment cela s'est-il déroulé ?

J'ai commencé par essayer de comprendre les travaux antérieurs de Goldston-Pintz-Yıldırım, et pourquoi leurs poids de crible fonctionnaient si bien. (J'ai toujours trouvé que la meilleure façon de progresser dans un problème est de comprendre à fond les papiers importants sur le sujet). Dans les cas particuliers les plus simples (plutôt artificiels), je pouvais évaluer les choses de façon explicite et je me suis rendu compte que l'on pouvait mieux faire en utilisant des poids différents, bien que dans ces cas particuliers cela n'eût pas beaucoup de signification. Cela m'a donné confiance pour explorer davantage cette stratégie. En généralisant cela à des situations plus compliquées (mais plus pertinentes), cela m'a amené à des améliorations des résultats de Zhang et Polymath8 sous certaines conjectures (comme la conjecture d'Elliott-Halberstam). Ces travaux préliminaires m'ont mené à la résolution du cas général.

À peu près au même moment, le projet Polymath8 se déroulait [2, 13]. Permets-moi de citer un texte que tu as écrit à ce sujet [14] : « J'étais conscient qu'en tant que jeune chercheur sans poste permanent, il se pouvait que je ne sois pas très reconnu, aux yeux des commissions de recrutement, pour ma participation au sein d'un projet atypique comme Polymath, où il est difficile de jauger le mérite de ma contribution. Dans mon cas, le fait que le projet était si proche de mes travaux antérieurs, et le fait que je trouvais ce projet si intéressant ont fait que j'étais heureux d'y participer (bien que j'aie dû faire un effort délibéré pour continuer à travailler sur d'autres projets en même temps). Cependant, je pense que tout·e jeune chercheur·se devrait avoir conscience de cela avant de s'engager sur un tel projet. Globalement, j'ai beaucoup apprécié l'aventure Polymath. » Rétrospectivement, qu'en a-t-il été ? As-tu eu des échos des commissions de recrutement vis-à-vis de ta participation à ce projet ?

1. Au sens où on l'entend ici, un crible est une fonction arithmétique essentiellement localisée sur les entiers n'ayant que des grands facteurs premiers (ce qui les rend utiles pour détecter des nombres premiers), tout en restant proche de la constante 1 au sens de la convolution de Dirichlet (ce qui les rend analytiquement maniables).

Dans mon cas les choses se sont plutôt bien passées ensuite ! Je suis toujours enclin à inciter à la prudence un·e jeun·e mathématicien·ne qui envisage de participer à un projet atypique comme Polymath, mais il me semble clair à présent que ce type de projet peut aussi ouvrir des opportunités importantes. En particulier, dans mon cas, je trouve que les bénéfices l'ont largement emporté sur les inconvénients – avoir fait l'expérience du projet Polymath m'a sans aucun doute beaucoup apporté.

Sur les grands écarts entre nombres premiers.
Notons (d_n) la suite des écarts entre nombres premiers. Le comportement asymptotique de $g_N := \max_{n<N} d_n$ est, à l'heure actuelle, entouré de mystères. Le théorème des nombres premiers implique trivialement que $\liminf g_N/\ln N \geqslant 1$. On conjecture généralement que la quantité $g_N/(\ln N)^2$ est comprise entre deux bornes positives pour $N \geqslant 2$. L'existence inconditionnelle de ces deux bornes est loin d'être démontrée. Cependant, on sait depuis 1938 qu'il existe $c > 0$ tel que

$$g_N/\ln N \geqslant c\frac{\ln_2 N \ln_4 N}{(\ln_3 N)^2}$$

pour tout N suffisamment grand, où $\ln_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme. Pendant soixante-quinze ans, les chercheurs n'ont pas trouvé le moyen d'améliorer cette borne au-delà de la valeur numérique de c. Paul Erdős, qui a travaillé sur ce sujet et affectionnait par ailleurs de mettre des conjectures à prix, a promis 10.000$ à qui saurait prouver que l'on peut choisir la constante c arbitrairement grande. Ce qui arriva... en août 2014 par des méthodes très différentes et à quelques jours d'intervalles par Ford-Green-Konyagin-Tao [4] d'un côté et Maynard [10] de l'autre. La meilleure minoration connue actuellement, qui est établie par ces cinq auteurs dans un article ultérieur [5], est

$$g_N/\ln N \geqslant c\frac{\ln_2 N \ln_4 N}{\ln_3 N}.$$

L'idée introduite par Maynard fait intervenir, de façon surprenante, les poids de crible qu'il a utilisés dans son travail sur les petits écarts entre nombres premiers.

Par la suite, tu t'es tourné vers les grands écarts entre nombres premiers. Ta collaboration sur ce sujet avec Ford, Green, Konyagin et Tao a une histoire intéressante : Ford-Green-Konyagin-Tao et toi travailliez simultanément, sans le savoir, à résoudre une conjecture ancienne d'Erdős (et y êtes parvenus !) par des méthodes différentes [10, 4]. Puis vous avez collaboré pour améliorer ces résultats [5]. Il n'était cependant pas si clair que chaque partie avait quelque chose de pertinent à apporter au travail de l'autre. Comment cela s'est-il passé ? Avez-vous commencé à travailler sur ta stratégie, en utilisant leurs résultats sur les longues progressions arithmétiques de nombres premiers ?

Nous avons tous commencé par essayer de comprendre quelles étaient les idées clés dans les deux approches. Il était clair que les estimations sur les nombres premiers qui sous-tendaient mon approche pouvaient être rendues quantitatives plus facilement. Nous avons donc envisagé initialement quelque chose plus proche de ce que j'avais fait. Cependant, nous nous sommes rendu compte que pour en extraire le meilleur résultat possible, il fallait contourner plusieurs limitations techniques de ma méthode. Heureusement, certaines techniques d'échantillonnage aléatoire provenant de leur papier convenaient parfaitement pour cela.

Après tes travaux sur les écarts entre nombres premiers, tu es revenu physiquement au Royaume-Uni, et mathématiquement à une grande variété de sujets : les chiffres des nombres premiers, la combinatoire additive (avec Thomas Bloom), et bien entendu l'approximation diophantienne (avec Dimitris Koukoulopoulos). Est-ce que cela avait quelque chose à voir avec la proximité relative des universités au Royaume-Uni ? (C'est une spéculation !)

Lorsque je suis revenu au Royaume-Uni, j'étais enthousiaste pour me diversifier et explorer d'autres sujets. J'étais très certainement influencé par d'autres collègues au Royaume-Uni. Mon collègue Ben Green à Oxford est une source inépuisable d'idées et de problèmes intéressants, et je suis sûr qu'il a influencé mon intérêt pour la combinatoire additive comme outil en théorie analytique des nombres. De même, j'ai entendu parler du problème de Duffin-Schaeffer par Sanju Velani lorsque je suis allé donner un exposé à l'université de York. Je n'aurais probablement jamais travaillé dessus si ce dernier ne m'en avait pas parlé à ce moment-là.

Est-ce que tu peux nous raconter une ou deux histoires de collaborations, par exemple avec Kaisa Matomäki et Fernando X. Shao sur le théorème de

Vinogradov [9], ou avec Andrew Granville et Dimitris Koukoulopoulos sur les poids de crible [7] ?

Ma collaboration avec Andrew Granville et Dimitris Koukoulopoulos a commencé lorsque j'étais en post-doctorat à Montréal. Andrew voulait comprendre quelques questions provenant de mon travail sur les petits écarts entre nombres premiers, et je lui donnais des réponses très « analytiques » sur la régularité des fonctions test en jeu. Andrew s'est rendu compte qu'il devait y avoir une façon « combinatoire » de donner les mêmes réponses, et que cela mènerait à une compréhension des poids de crible par « l'anatomie des entiers ». Ce dernier sujet est l'une des spécialités de Dimitris. Il était naturel que nous travaillions sur ce problème ensemble.

Notre travail fournit une méthode relativement complète pour comprendre les poids que les coefficients de crible attribuent à différents entiers selon leur factorisation. Ceci nous a permis d'approfondir un résultat de Dress-Iwaniec-Tenenbaum, qui montre que dans certaines situations, les cribles ne sont pas concentrés sur les entiers ayant de grands facteurs premiers.

Ma collaboration avec Kaisa Matomäki et Fernando Shao s'est passée lorsque Fernando et moi étions post-doctorants à Oxford. Il avait une vaste collaboration avec Kaisa sur la façon d'utiliser les idées de Green et Tao (issues de leur travail sur les nombres premiers en progressions arithmétiques) dans d'autres contextes, mais il voulait mieux comprendre le crible de Harman qui est une technique importante mais complexe dans plusieurs des situations que Kaisa et lui étudiaient. Étant moi-même très porté sur le crible de Harman, nous avons commencé à en discuter lorsque nous étions à Oxford. Nous nous sommes alors rendu compte que nous pouvions combiner des idées de la combinatoire additive avec le crible de Harman, pour obtenir des améliorations à divers résultats autour du théorème des trois nombres premiers de Vinogradov.

Sur l'approximation diophantienne.
La question classique suivante remonte à Khintchine (1924) : étant donnée une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, que peut-on dire de l'ensemble A_ψ des nombres α dans $[0,1]$ pour lesquels il existe une infinité de paires d'entiers a, q où q est strictement positif, avec la propriété que

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{\psi(q)}{q} \quad ? \tag{1}$$

Le théorème de Dirichlet assure que $A_\psi = [0,1]$ lorsque $\psi(q) = 1/q$ pour tout q. Ce type de résultats peut s'étendre à des fonctions plus générales en excluant des ensembles de mesure nulle. Une conséquence facile du théorème de Borel-Cantelli assure ainsi que [a]

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) < \infty \Longrightarrow \mathrm{Leb}(A_\psi) = 0.$$

Khintchine a prouvé que si la fonction $q \mapsto \psi(q)$ est décroissante, alors l'on a

$$\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) = \infty \Longrightarrow \mathrm{Leb}(A_\psi) = 1.$$

Il est naturel de se demander ce qu'il advient si l'on considère le sous-ensemble B_ψ de A_ψ formé des α pour lesquels une infinité de couples (a,q) d'entiers *premiers entre eux* satisfont à l'encadrement (1). Une fois encore, le théorème de Borel-Cantelli assure que [b]

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q}\psi(q) < \infty \Longrightarrow \mathrm{Leb}(B_\psi) = 0.$$

La question de Duffin-Schaeffer [3], résolue par Koukoulopoulos-Maynard [8], consiste à prouver l'implication complémentaire :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q}\psi(q) = \infty \Longrightarrow \mathrm{Leb}(B_\psi) = 1.$$

C'est la condition de coprimalité qui rend le problème beaucoup plus délicat. La question porte, dans le fond, sur une certaine propriété d'indépendance relative à des plus grands diviseurs communs.

a. Ici Leb désigne la mesure de Lebesgue.
b. Ici $\varphi(q)$ désigne l'indicatrice d'Euler.

Un peu plus tard, en 2019, tu as résolu avec Dimitris Koukoulopoulos [8] une conjecture de Duffin et Schaeffer (1941) en approximation diophantienne. Comment cette collaboration a-t-elle débuté ? C'est un sujet *a priori* éloigné des nombres premiers.

Il y a plusieurs années, j'ai donné un exposé à l'université de York, et Sanju Velani (un expert en approximation diophantienne) m'a parlé de ce problème. J'y ai réfléchi un peu dans le train au retour, et j'avais l'impression que des idées de théorie analytique des nombres (et notamment « l'anatomie des entiers ») pouvaient offrir une perspective utile sur ce problème. J'ai été ensuite distrait par d'autres choses, puis il y a eu un semestre de recherche au msri à Berkeley (États-Unis), et en discutant avec Dimitris Koukoulopoulos (un expert de l'anatomie des entiers), je me suis souvenu de ce problème et je lui ai suggéré qu'on y réfléchisse ensemble. Il s'est avéré que l'anatomie des entiers n'était finalement pas si importante, mais après avoir commencé à discuter de cette question, nous étions captivés. La présence de plusieurs experts en approximation diophantienne au msri à ce moment-là nous a été d'une grande aide.

Là aussi, votre approche n'était pas gagnée d'avance. Est-ce que vous aviez des résultats partiels dans votre construction, qui vous rendaient optimistes sur l'issue ?

Je suis tout à fait convaincu que notre approche à la conjecture ne partait pas gagnante ! Nous n'avions pas de résultats intermédiaires publiables. Tout en progressant dans le problème, nous estimions qu'il était assez plausible que tous nos efforts soient vains.

Je crois que ce qui nous poussait à continuer était la présence, au cœur de notre approche, d'une question indépendante et intéressante de combinatoire additive, ce qui signifiait qu'il y avait un vrai phénomène arithmétique qui demandait à être étudié et compris pour lui-même.

Parmi tes travaux publiés, est-ce que tu as une idée ou construction favorite ? Est-ce que tu peux la décrire en quelques phrases ?

Je me souviens avoir été très content d'une réinterprétation géométrique de quelques estimations classiques de sommes d'exponentielles sur les nombres premiers, dans mon papier « Primes with restricted digits » [11]. Cette interprétation s'est avérée très importante pour prouver le résultat principal de ce papier [2]. Ce n'était certainement pas l'idée la plus importante que j'ai eue. Cependant, le fait d'avoir découvert un nouvel éclairage sur un objet très étudié par ailleurs, et que ce point de vue permette de distinguer très clairement deux types de comportement de ces sommes d'exponentielles (ce qui m'a permis de résoudre la question principale de ce papier), fut quelque chose de très gratifiant.

Est-ce que tu t'es intéressé à d'autres domaines scientifiques dans le cadre de tes travaux ? Est-ce que des intuitions provenant de la physique, par exemple, t'ont été utiles ?

Je trouve certainement très utile d'essayer d'imaginer les objets que j'étudie et d'utiliser une intuition géométrique pour reformuler les choses visuellement. Je n'ai pas beaucoup d'intuitions très utiles provenant des sciences naturelles directement (bien que cela tienne probablement au fait que je n'en connais pas assez). Cependant certaines parties de mes travaux peuvent être expliquées par la physique statistique. Une chose que je trouve fréquemment utile est de voir certains problèmes mathématiques comme un jeu de pari ; reformuler les choses de façon probabiliste m'aide beaucoup à avancer sur un problème, et transformer cela en un jeu m'aide à réfléchir aux compromis quantitatifs qui se produisent fréquemment dans les mathématiques auxquelles je suis confronté.

Une question sur la parentalité... Un collègue ayant requis l'anonymat m'a dit un jour qu'il a gardé un souvenir ému des soirs où il réfléchissait à des maths en endormant ses enfants pendant leurs premières années. Est-ce que cela fait écho à ta propre expérience ?

Je suis encore en train de m'habituer à l'équilibre entre parentalité et mathématiques, mais je me suis très certainement rendu compte que dans les premiers temps de la parentalité il est important d'exploiter tout le temps libre disponible. Je me suis donc retrouvé à réfléchir à des problèmes de mathématiques en endormant mon fils, ou en me promenant avec lui. J'essaie d'être prudent avec cela, cependant, car j'ai une tendance à réfléchir de façon obsessive à ces problèmes, et risque donc d'être trop distrait par les maths !

Plus sérieusement : le thème de la parité dans la communauté mathématique est un sujet d'actualité, en France en tout cas, et l'on y débat régulièrement [3] des freins institutionnels à la parité. L'un de ces freins est par exemple la règle de « non-promotion locale » (quelqu'un ne devrait pas être recruté comme professeur là où il ou elle a été maître

2. Le résultat dont il est question est que pour tout $a \in \{0,\dots,9\}$, une infinité de nombres premiers n'ont pas le chiffre a dans leur écriture en base 10.

3. Notamment dans les rubriques « Parité » de la *Gazette*.

de conférences). Qu'en est-il au Royaume-Uni ? Est-ce que tu as le sentiment qu'il y a aussi des raisons systémiques similaires qui tendraient à déséquilibrer la parité des genres dans la communauté ?

J'ai eu la chance que ma situation personnelle soit telle que j'aie eu la possibilité de passer du temps dans d'autres pays et universités, et que mes nouvelles responsabilités familiales arrivent au moment où j'ai un poste stable. Clairement, tout le monde ne peut pas profiter de toutes ces opportunités de voyage et collaboration tout en ayant une charge familiale. Cela a certainement un impact qui affecte les femmes de façon disproportionnée. Je pense qu'il y a clairement un certain nombre de raisons structurelles qui affectent les femmes de façon disproportionnée, en particulier avec les contraintes pratiques de la parentalité. Au Royaume-Uni, il n'y a pas d'équivalent d'une règle de non-promotion locale comme en France, bien qu'avoir travaillé dans plusieurs institutions est vu positivement. Mais je ne suis pas sûr que le Royaume-Uni s'en sorte mieux que la France lorsqu'il s'agit du ratio homme-femme global. Cet état des choses résulte clairement d'une combinaison complexe de facteurs sociaux et systémiques. Il m'est donc difficile d'estimer l'impact précis d'un facteur en particulier.

Que dirais-tu à un·e jeune étudiant·e qui souhaite étudier les mathématiques ?

Je crois que la chose la plus importante, de loin, est de poursuivre ce que tu apprécies de faire (plutôt que des domaines où tu penses que tu es meilleur·e, par exemple). Il y a plein de moments où tu seras complètement bloqué·e sur un problème de maths (que ce soit un devoir à la maison au lycée, ou un problème de recherche réputé) et il est très important de rester motivé·e. La principale raison qui fait que je continue à travailler sur un problème, est que je suis véritablement fasciné par la question que j'étudie.

Merci beaucoup !

James Maynard, mathématicien britannique, est spécialiste de théorie des nombres. Après avoir soutenu sa thèse à Oxford en 2013, il a exercé à Montréal, Berkeley, Princeton, puis Oxford, où il est professeur de théorie des nombres depuis 2018. Ses recherches portent sur la théorie analytique des nombres, et plus particulièrement la répartition des nombres premiers et les méthodes de crible. Il a reçu de nombreux prix pour ses travaux.

Références

[1] R. de la Bretèche. « Petits écarts entre nombres premiers et polymath : une nouvelle manière de faire de la recherche en mathématiques? » *Gaz. Math., Soc. Math. Fr.* **140** (2014), p. 19-31. issn : 0224-8999.

[2] W. Castryck et al. « New equidistribution estimates of Zhang type ». *Algebra Number Theory* **8**, n° 9 (2014), p. 2067-2199. issn : 1937-0652. doi : 10.2140/ant.2014.8.2067.

[3] R. J. Duffin et A. C. Schaeffer. « Khintchine's problem in metric diophantine approximation. » *Duke Math. J.* **8** (1941), p. 243-255. issn : 0012-7094. doi : 10.1215/S0012-7094-41-00818-9.

[4] K. Ford et al. « Large gaps between consecutive prime numbers ». *Ann. of Math. (2)* **183**, n° 3 (2016), p. 935-974. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2016.183.3.4.

[5] K. Ford et al. « Long gaps between primes ». *J. Amer. Math. Soc.* **31**, n° 1 (2018), p. 65-105. issn : 0894-0347. doi : 10.1090/jams/876.

[6] D. A. Goldston, J. Pintz et C. Y. Yildirim. « Primes in tuples. I ». *Ann. of Math. (2)* **170**, n° 2 (2009), p. 819-862. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2009.170.819.

[7] A. Granville, D. Koukoulopoulos et J. Maynard. « Sieve weights and their smoothings ». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **54**, n° 5 (2021), p. 1089-1177. issn : 0012-9593. doi : 10.24033/asens.2478.

[8] D. Koukoulopoulos et J. Maynard. « On the Duffin-Schaeffer conjecture ». *Ann. of Math. (2)* **192**, nº 1 (2020), p. 251-307. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2020.192.1.5.

[9] K. Matomäki, J. Maynard et X. Shao. « Vinogradov's theorem with almost equal summands ». *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **115**, nº 2 (2017), p. 323-347. issn : 0024-6115. doi : 10.1112/plms.12040.

[10] J. Maynard. « Large gaps between primes ». *Ann. of Math. (2)* **183**, nº 3 (2016), p. 915-933. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2016.183.3.3.

[11] J. Maynard. « Primes with restricted digits ». *Invent. Math.* **217**, nº 1 (2019), p. 127-218. issn : 0020-9910. doi : 10.1007/s00222-019-00865-6.

[12] J. Maynard. « Small gaps between primes ». *Ann. of Math. (2)* **181**, nº 1 (2015), p. 383-413. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2015.181.1.7.

[13] D. H. J. Polymath. « Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes ». *Res. Math. Sci.* **1** (2014). Id/No 12, p. 83. issn : 2522-0144. doi : 10.1186/s40687-014-0012-7.

[14] D. H. J. Polymath et al. « The "Bounded gaps between primes" Polymath project – a retrospective analysis ». *Eur. Math. Soc. Newsl.* **94** (2014), p. 13-23. issn : 1027-488X.

[15] Y. Zhang. « Bounded gaps between primes ». *Ann. of Math. (2)* **179**, nº 3 (2014), p. 1121-1174. issn : 0003-486X. doi : 10.4007/annals.2014.179.3.7.

Un entretien avec Hugo Duminil-Copin

Propos recueillis par Christophe Garban

Comment et quand as-tu commencé à t'intéresser aux mathématiques ?

Entre mon père prof de sport et ma mère danseuse, je n'étais pas trop destiné à faire des maths. L'immense majorité de mon enfance, je la passe à faire autre chose que des maths. J'essaye beaucoup de choses, par exemple un club d'astronomie pendant quelques années, mais ma vraie passion en tant qu'enfant, c'est très clairement le sport.

Le déclic concernant les maths vient paradoxalement d'un échec. Après une année de Seconde au lycée Louis le Grand, j'intègre la « Première S1 », une classe un peu spéciale. Et là, au premier contrôle de maths, je prends une véritable « claque » en me retrouvant dans les tout derniers... Du coup, je me suis dit, il faut bosser beaucoup plus. Contrairement à la Seconde, il ne suffit plus de relire le cours, et je dois passer par un vrai apprentissage de la résolution de problèmes. Et là, j'ai trouvé ça génial ! Le fait de devoir vraiment réfléchir, d'essayer d'être imaginatif etc. j'ai adoré...

À l'issue des classes préparatoires, tu es reçu à l'X et à l'Éns, est-ce que le choix est facile pour toi ?

Oui, c'était très clair dans ma tête, j'avais très envie d'intégrer une Éns car à ce moment-là, je pensais devenir enseignant. En fait, je n'avais pas forcément l'idée de devenir chercheur en sortant de prépa.

À l'Éns, tu optes pour le parcours maths ou maths/physique ?

J'avais toujours eu cette envie de faire de la physique. J'avais par exemple mieux réussi en physique qu'en maths au concours général. Malgré tout, le rapport à la notion de vérité en physique était plus complexe pour moi et du coup, au moment d'entrer à l'Éns, je me suis dit que ce serait un niveau trop élevé de faire les deux et je décide de me concentrer sur les maths. Je suis revenu plus tard vers la physique au moment d'entrer dans le domaine de la « physique statistique ». C'est un sujet qui provient de la physique mais que l'on traite de façon totalement mathématique. Donc là, je me suis retrouvé pile à l'endroit que je voulais, mais par un chemin un peu détourné parce qu'il y a un moment où en effet j'abandonne totalement la physique...

Des cours qui t'ont particulièrement marqué (toutes disciplines confondues) ?

Il y a pas mal de cours que j'ai bien aimés. C'est clair et net que le cours qui m'a le plus marqué, c'est le cours de probas que donnait Jean-François Le Gall. C'est vraiment pour ça que j'ai choisi de faire des probas alors que c'était pas du tout évident au départ. Je me souviens bien : au bout de deux mois de cours de Jean-François, je ne comprenais toujours pas ce qu'était une variable aléatoire... J'avais un vrai problème en fait à comprendre l'intérêt de la chose. Pour moi c'était juste une fonction. Je ne comprenais pas pourquoi on appelait ça « variable aléatoire ». Ça m'a pris beaucoup de temps d'apprécier le concept.

C'est sans doute une situation typique pour un mathématicien ou une mathématicienne, de tomber amoureux d'un problème ou de sa solution après avoir galéré à essayer de le comprendre ou de le résoudre. C'est peut-être un peu ce qui s'est passé pour moi avec les probas, vu que j'avais eu tellement de mal à en comprendre la subtilité.

Au moment où j'ai enfin compris la notion de variable aléatoire et en particulier celle de « couplage » qui lui est intimement liée, j'ai trouvé ça génial et en fait, à partir de là, j'ai déroulé en quelque sorte. Je me suis dit, OK, voilà, c'est vraiment les maths que j'aime. Même si je n'ai pas particulièrement cartonné à l'examen final, je me suis dit, c'est un type de maths qui me parle par sa subtilité, son élégance, je trouvais aussi qu'il y avait un peu de tout : de l'analyse, de la théorie de la mesure, un peu de combinatoire, voire même parfois, ça allait chercher dans l'algèbre pour les aspects qui nécessitaient plus de structure. Et donc voilà, j'ai vraiment beaucoup aimé.

Un autre cours peut-être en dehors des probabilités ?

L'autre cours que j'ai beaucoup aimé justement, c'était le cours de théorie de Galois de Marc Rosso, parce que c'était un peu l'opposé d'un certain point de vue. Comment dire, comme pour beaucoup d'analystes j'imagine, il y a un truc que j'aime bien avec les probas c'est que par moments il faut mettre un peu les mains dans le cambouis... Bien sûr, on commence par essayer de comprendre les structures, d'avoir une stratégie globale, mais à un moment il va falloir se retrousser les manches. La théorie de Galois me donnait exactement l'impression inverse. C'est une théorie qui est tellement impeccable que quelque part, on ne peut pas la toucher. C'était comme dans un film, de voir les choses se dérouler de façon aussi parfaite. Et du coup, j'ai pris beaucoup de plaisir à suivre cette théorie. C'était complètement évident pour moi que je n'allais pas travailler là-dessus car c'était un type d'abstraction qui ne correspondait pas trop à mon intuition mathématique. Mais par contre j'ai adoré ! C'était un peu de l'algèbre appliquée d'un certain point de vue, parce que concrètement, on essaie de résoudre ces équations et on introduit ces structures pour expliquer ce qu'on peut résoudre, ce qu'on ne peut pas résoudre etc. J'ai trouvé que c'était vraiment la quintessence de l'algèbre pour moi.

À quand remonte l'envie chez toi de devenir chercheur ?

Ça a été très tardif. Je pense que mon résultat à l'agrégation (2ème) m'a surpris, je ne m'attendais pas à avoir un tel résultat. Avant l'agrégation, j'avais de bons résultats, mais rien d'exceptionnel et c'était souvent assez inégal. En fait, ce résultat m'a donné énormément de confiance en moi, mathématiquement. C'est un peu ironique, parce qu'à ce moment-là je voulais devenir enseignant, donc a priori une bonne place à l'agrégation aurait dû me renforcer dans le fait de devenir un enseignant. Mais ce gain soudain de confiance en soi a changé la donne et juste après, les choses se sont accélérées : je suis parti en stage de M2 à Vancouver où j'ai découvert un peu le fait d'être seul face à son problème de maths. Ça m'a plu, le stage s'est bien passé et du coup je me suis dit OK, pourquoi pas faire une thèse finalement.

En 2008, direction Genève pour commencer ta thèse avec Stanislav Smirnov, peux-tu nous raconter ces années de thèse ?

Je pars à Genève un peu contre mon gré en fait. À ce moment-là, je me projetais à fond dans un doctorat avec Wendelin Werner, dont le cours de M2 m'avait marqué. Mais Wendelin me dit que pour moi, c'est mieux d'aller à Genève avec Stanislav Smirnov (Stas), qu'il y a plein de trucs qui bougent autour de lui. Du coup, on m'a en quelque sorte mis dans le train et j'arrive à Genève... Je découvre cette ville un peu petite par rapport à Paris. Je découvre ce département. Et puis là, je discute avec Stas et tout de suite, les maths me parlent. Une espèce de mélange d'analyse, de probas et de combinatoire que je trouve vraiment hyper riche. Et la personnalité de Stas ..., c'est le coup de cœur, il est super, il a du mal à finir une phrase, il repart sur la phrase d'après tout de suite, tout en ouvrant une parenthèse :-). Il me parle de plein de problèmes différents. Je sens que c'est un moment de sa carrière où les choses se débloquent et j'ai l'impression d'arriver dans un endroit où les maths sont en mouvement. Donc tout de suite, je me mets au boulot !

Bon ce qui est marrant c'est que je me mets au boulot essentiellement sur des choses que Stas me dit de ne pas faire…

En effet, Stas à l'époque est surtout intéressé par l'*invariance conforme* des modèles de physique statistique en dimension deux (2d). Mais moi, mon sentiment c'est que ces modèles, on ne les comprend pas du tout. Il y a des questions infiniment plus simples que celle de l'invariance conforme pour laquelle on n'a aucun angle d'attaque rigoureux. Par exemple, on ne sait pas démontrer quelle est la température critique. Le point de vue, le style, de Stas c'est de viser tout de suite le sommet de la montagne, c'est-à-dire de tout démontrer d'un coup, par un tour de force : l'invariance conforme au point critique en même temps que le lieu de la transition de phase et ses exposants critiques etc. Mais moi, je ne suis pas du tout comme ça, je préfère opter pour le sentier de randonnée plus long et je ne vise pas du tout l'invariance conforme. Je m'attelle plutôt à l'objectif plus réaliste de localiser mathématiquement le lieu de ces transitions de phase.

Et là, il y a une personne hyper importante pour ma carrière, Vincent Beffara, qui est en détachement à Genève pour deux ans. On se met à discuter énormément de ces questions de calcul de points critiques et c'est une discussion hyper fructueuse. On aime beaucoup travailler ensemble, et il devient clairement le grand collaborateur de mon début de carrière. On parvient à démontrer ensemble l'un des deux résultats majeurs pendant ma thèse à savoir que le paramètre critique de la percolation FK de paramètre q se situe à $p_c(q) = \sqrt{q}/(1 + \sqrt{q})$ (quand $q \geqslant 1$). (*N.B le second résultat majeur sur les marches auto-évitantes, avec Smirnov, est évoqué vers la fin de cet entretien*).

Tu as gravi tous les échelons à l'université de Genève (Unige), peux-tu nous dire ce que l'environnement académique Suisse t'a apporté ?

D'abord, ils m'ont fait confiance immédiatement et ils ont une flexibilité qui n'existe peut-être pas totalement en France. Par exemple, le soir même de mon doctorat ils m'ont dit, voilà, on t'offre un poste de professeur-assistant à Genève. Bien sûr, ça a mis un peu de temps à se mettre en place, mais ma vie privée gravitait déjà beaucoup autour de Genève à l'époque et j'étais très heureux de pouvoir y rester. Deux ans plus tard, du fait essentiellement du prix Oberwolfach, ils me proposent un poste de professeur ordinaire. Du coup au final, tout est allé très vite et je ne me suis jamais vraiment posé la question de ce que m'apportait le système suisse par rapport à d'autres. Même les États-Unis n'ont jamais été vraiment attractifs par rapport à ma situation à Genève. Il faut dire qu'un poste de professeur en Suisse, c'est agréable : l'enseignement est raisonnable, les tâches administratives aussi. Même si on en a beaucoup, ça reste plus léger qu'en France. J'aime aussi le fait d'être dans une institution qui est de taille humaine. Tout le monde se connaît, s'apprécie.

De manière générale, la répartition des tâches et des enseignements est faite dans l'intérêt de tous. C'est-à-dire que, par exemple, à un moment où ça marchait très bien au niveau recherche, j'ai demandé si on pouvait me libérer un petit peu pendant deux trois ans de certaines tâches un peu lourdes. Et ça s'est fait naturellement, les gens ont été OK, on contrebalancerait par la suite. Aujourd'hui par exemple certaines tâches de type représentativité auprès de la tête de l'université ou autre, eh bien c'est plutôt moi qui m'en charge. Je trouve qu'il y a eu un équilibre intelligent et j'ai toujours aimé cette flexibilité, ce côté « tout le monde s'entraide » pour optimiser le rayonnement global.

Tu es également professeur à l'Ihés depuis 2016, est-ce que ça t'a donné de nouveaux horizons scientifiques ?

D'abord j'ai vécu enfant à Bures-sur-Yvette. Et en 2016, ma mère habitait encore dans la même ville, mon père était à Palaiseau… Du coup, pour moi l'Ihés, c'était vraiment le retour aux sources.

Ce que j'aime beaucoup à l'Ihés, c'est le fait qu'il y a une temporalité hyper intéressante : les choses vont lentement, la journée se passe tranquillement… Et c'est quelque chose qui, moi, m'a rendu assez créatif.

De la même manière, les membres de mon groupe à l'Ihés avaient plus de temps eux aussi. Ils étaient beaucoup plus libres de faire de la recherche. Je vois une vraie différence même par rapport à Genève par exemple. Donc voilà, avec ce groupe très libre, on a vécu des années très fructueuses.

En fait, en arrivant à l'Ihés, je venais de terminer un certain nombre de projets et je me posais un peu la question de savoir dans quelle direction aller. L'Ihés m'a laissé l'opportunité d'explorer différentes directions, qui par la suite ont quasiment toutes fonctionné. Ça a été un moment d'expansion au niveau de ma recherche, et ça, je pense que ça n'aurait pas été possible sans cette temporalité différente qu'on peut avoir à l'Ihés par rapport à l'université.

Quels sont les mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui qui t'ont le plus influencé ?

C'est une question qui est difficile pour moi parce que la lecture d'un article a toujours été quelque chose d'assez laborieux. Du coup, c'est très rare pour moi qu'en lisant un article, je me dise « mon Dieu, c'est tellement beau » que je tombe amoureux de tel mathématicien ou telle mathématicienne. En revanche, il est possible de s'identifier. Et une personne à qui je m'identifie énormément parce que j'aime beaucoup son style, et aussi parce que j'ai l'impression qu'on a un peu la même intuition des maths, c'est Harry Kesten. Il y a quelque chose d'assez pédestre dans sa façon de faire. C'est-à-dire que parfois, il y a une stratégie naturelle et il faut prendre le courage d'y aller, de ne pas tourner autour du pot. Il arrive qu'il y ait juste plus court, plus astucieux. Quand je parlais de Stas, mon directeur de thèse, et bien c'est typiquement la personne qui trouve le chemin le plus court, le plus vertical, parfois via un truc miraculeux. Mais moi, ça correspond moins à mon intuition, ça n'explique pas vraiment ce qui se passe. Avec Kesten, si physiquement ça doit se passer d'une façon, et bien on utilise le rouleau compresseur dans cette direction. Je trouve qu'il y a une certaine élégance dans ce comportement de vouloir faire marcher son intuition première. Et donc, j'ai beaucoup d'admiration pour lui.

J'ai eu la chance de le rencontrer. C'était en 2010 au congrès international. Et ça a été vraiment quelque chose de fort pour moi parce que j'avais en tête ce monstre sacré de notre discipline, hyper intimidant dans ma tête, et je vois arriver ce petit bonhomme d'une modestie infinie. Et puis, certains de mes travaux, c'était un peu la continuation finalement de ce qu'il faisait, en particulier sur la percolation. J'avais passé un temps fou à revisiter les arguments de Kesten. De le voir en vrai, ça m'a fait quelque chose. Je pense que c'est vraiment la rencontre qui m'a le plus impressionné.

Sinon, mon plus grand regret mathématique, c'est d'avoir rencontré Oded Schramm la semaine juste avant qu'il décède en 2008, à Montréal. On a discuté seulement une vingtaine de minutes ensemble sur le trajet du retour dans le train, le dernier jour de la conférence... Une semaine plus tard j'entendais qu'il s'était tué en montagne. Ça restera un grand regret pour moi parce que je pense que j'aurais beaucoup aimé travailler avec lui. Ça avait l'air d'être quelqu'un qui rayonnait vraiment sur toute la communauté.

Parmi tes résultats les plus importants, le modèle d'Ising tient une place majeure, est-ce que tu peux nous en parler ?

En fait, on parle beaucoup du modèle d'Ising quand on parle de mes travaux, mais pour moi ce n'est pas du tout l'objet central de mes travaux. Le cœur de mon savoir-faire, c'est la percolation. En fait, depuis le début de ma carrière, mon but est de comprendre ce qui se passe pour les modèles de percolations dépendantes. On connaissait très bien avant que j'arrive, ce qu'on appelle la percolation dite de Bernoulli. C'est une percolation où l'on tire un graphe au hasard et puis chaque arête est tirée au hasard, indépendamment des autres arêtes. Ce qui est merveilleux avec la théorie de la percolation, c'est qu'elle s'applique à plein d'autres modèles. Typiquement, les liens entre les modèles de percolations et d'autres modèles se font grâce à des modèles de percolations dépendantes. Par exemple, on va tirer au hasard les arêtes, mais cette fois il y a un lien entre le tirage de telle arête et le tirage de telle autre arête.

Et quand on arrive en 2008, avec tous les jeunes qui sont aujourd'hui actifs en théorie de la percolation, on ne comprend pas très bien ce qui se passe pour ces modèles sans indépendance. Toute personne qui a fait un peu de théorie des probabilités sait que l'indépendance ça aide beaucoup, donc là sans indépendance on reste bloqué. Tout le but de mon début de carrière, c'était de comprendre ce qui se passe pour les modèles avec dépendance. Sauf qu'une conséquence directe du développement de la théorie de la percolation dépendante, c'est qu'il s'est mis à y avoir des applications, par exemple pour le modèle d'Ising qui est un modèle pour les phénomènes coopératifs. En utilisant ce savoir-faire de percolation dépendante, on a pu revisiter les grandes questions du modèle d'Ising, en particulier pour les dimensions $d \geqslant 3$. La dimension deux pour le modèle d'Ising est spéciale, le modèle dans ce cas est « intégrable », c'est-à-dire qu'on peut calculer beaucoup de choses explicitement. Mais dès qu'on considère des dimensions supérieures, ça n'est plus intégrable. Du coup, l'approche qui consiste à étudier le modèle d'Ising à travers la théorie de la percolation dépendante apporte énormément. Ça permet de démontrer plein de nouvelles choses sur le modèle d'Ising en particulier en dimensions trois et quatre.

Peux-tu nous en dire plus, notamment sur le fait que paradoxalement, la dépendance s'est avérée être utile pour certaines conjectures ?

Oui, c'est quelque chose que j'aime bien rappeler. J'ai énormément essayé de développer la théorie de la percolation dépendante pour me débarrasser de l'indépendance et je me suis rendu compte a posteriori que certains problèmes étaient plus simples, par exemple la grande question ouverte de percolation, c-à-d la continuité de la transition de phase en dimension trois. Avec Michael Aizenman et Vladas Sidoravicius, on est parvenu à la démontrer pour le modèle d'Ising via le modèle de percolation dépendante associé. Il y a donc quelque chose d'assez fascinant. Parfois, la dépendance vient avec une structure supplémentaire qui vous aide !

Quelles sont tes contributions, tes résultats préférés ?

Très clairement, le résultat dont je suis le plus fier, ce n'est pas du tout le résultat que les gens ont le plus retenu. Pour moi, c'est la continuité de la transition de phase des « modèles FK » pour $q \leqslant 4$. C'est un résultat avec Vladas Sidoravicius et Vincent Tassion dans lequel nous établissons une dichotomie entre différents comportements possibles pour les modèles de percolation planaires. Cette dichotomie revient à intervalles réguliers, c'est un résultat qui a été extrêmement central dans mon travail. C'est aussi quelque chose qui a complètement débloqué une question qui n'était pas claire pour moi au début de ma carrière : à savoir, parviendrions-nous à décrire le comportement critique de ces modèles ? En effet d'une certaine manière, les deux résultats principaux que j'avais obtenus pendant ma thèse permettaient de localiser à quel endroit précis se trouve la transition de phase. Mais à ce stade-là, on avait très peu d'informations sur ce qui se passe au point critique. Ce résultat de continuité pour $q \leqslant 4$ est le moment pivot où je comprends qu'on peut avoir de l'information sur ce qui se passe au point critique. À partir de là, un grand nombre de mes résultats ont suivi, mais avant ça, pour moi c'était juste inimaginable de comprendre comment décrire le comportement critique d'une large classe de modèles.

Quel est le théorème que tu préfères, en général ?

Le théorème que je préfère, clairement c'est le théorème de Kesten, 1980, qui énonce que $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$. C'est un théorème difficile qui confirme ce que l'intuition suggère immédiatement pour la valeur du point critique de la percolation Bernoulli en $2d$.

Ça reste mon premier « waouh probabiliste », qui plus est présenté par Wendelin Werner dans son cours de M2. Vraiment je trouvais ce théorème absolument merveilleux. Plus tard, je l'ai redécouvert de tellement de façons différentes : en lisant l'article, en lisant tel ou tel papier, en travaillant sur ses généralisations etc. que c'est un peu une partie de ma vie quand même, ce théorème ! Et en prime, le fait que ça vienne de Kesten...

Un nombre important de tes travaux est motivé par la physique théorique : est-ce que tu peux nous en dire plus ? Est-ce que par exemple tu puises ton intuition dans les travaux des physiciens ?

Alors c'est assez ironique parce que, effectivement, la physique statistique se pose des questions très similaires sur les transitions de phases. Malgré tout, je puise rarement mon intuition dans des papiers de physiciens. C'est comme si, d'un certain point de vue, les physiciens étaient déjà au niveau de compréhension d'après et du coup leurs intuitions ne m'aident pas beaucoup au final. En fait, les intuitions qu'ils manipulent sont trop évoluées pour moi. Je vais juste donner quelques exemples d'intuitions auxquelles je reste complètement hermétique alors que ce sont des concepts hyper importants. Tous les aspects d'intégrabilité en physique, c'est quelque chose qui ne me parle pas du tout. Autre exemple, quand on prend le modèle XY, pour la transition topologique dite de BKT, toutes ces histoires de vortex, ça ne me parle pas. Pourtant, je sais que ce sont des intuitions extrêmement puissantes, c'est juste qu'elles ne me parlent pas, et que je reste du coup quasi imperméable aux articles physiques. En fait, quand je vous disais que j'ai des difficultés à lire des articles mathématiques, et bien les articles de physiques :-) c'est encore un niveau tout autre ... Peut-être qu'à force, ils finissent inconsciemment par m'inspirer, mais je pense que je tire plus d'intuition par analogie à des processus simplifiés. Par exemple, comme je l'ai déjà dit, pour de la percolation dépendante, je vais d'abord m'inspirer de la percolation indépendante. Pour comprendre des chemins auto-évitants ou des chemins non-markoviens, je vais puiser mon intuition dans les marches aléatoires, etc.

Peux-tu expliquer en termes simples quel est ton résultat de « trivialité du champ $\phi^4_{d=4}$ » et quel est son impact y compris en physique ?

Mmh, oui, essayons :) Le modèle d'Ising c'est un modèle où l'on assigne des +1 ou des −1 à des sommets d'un graphe et on peut imaginer ça comme une espèce de champ aléatoire. Ce champ aléatoire s'avère être extrêmement irrégulier et, comme on le ferait avec une distribution de Schwartz, on peut l'intégrer contre une fonction plus lisse et essayer de comprendre le comportement des moyennes que l'on obtient ainsi. On peut se demander en particulier quelle est la loi de ces moyennes. Et quand on est au point critique, on s'attend à ce que ce champ associé au modèle d'Ising soit quelque chose de très subtil, du moins quand on regarde des moyennes sur des échelles de plus en plus grandes.

Mais en dimension $d \geqslant 4$, il se trouve qu'il y a un mécanisme simplificateur qui entre en jeu, et qui fait que ces grandes moyennes vont commencer à ressembler à des gaussiennes. Même si on n'a pas fait de probabilités, je pense qu'on a déjà vu une variable gaussienne quelque part. Donc, à grande échelle on peut finalement décrire ces grandes moyennes, elles vont avoir la loi gaussienne. Ce n'est pas du tout facile à démontrer. Ça a été démontré en dimension $d \geqslant 5$ par Michael Aizenman et Jürg Fröhlich avant que je sois né en 1982. Et avec Michael Aizenman , on est parvenu à étendre ce résultat à la dimension $d = 4$, où on montre qu'on obtient également un processus gaussien à la limite.

L'importance de ce résultat, on peut la voir de deux manières. D'abord, il y a la théorie (constructive) des champs quantiques. Quand on essaie de construire des théories des champs quantiques, les physiciens ont un outil, *le théorème d'Osterwalder-Schrader* qui permet de réinterpréter la question en essayant cette fois de construire des distributions aléatoires. Pour pouvoir bien définir ces choses-là, il faut faire très attention, il y a plein de choses qui sont mal définies. On introduit alors ce qu'on appelle des « cut-offs ». Dans notre cas, en quelque sorte, ça revient à essayer de comprendre des discrétisations de ces objets-là et le modèle d'Ising émerge naturellement comme étant une telle discrétisation. Le problème c'est que notre théorème montre que le comportement des moyennes ressemble à grande échelle à des gaussiennes. Et malheureusement, quand un physicien réinterprète notre théorème à travers Osterwalder-Schrader, cela implique que la théorie des champs correspondante est « triviale » et ne décrit que des particules qui n'intéragissent pas entre elles... Du coup, c'est quelque chose de décevant pour un physicien parce que « l'Hamiltonien » qui correspondrait à cette discrétisation Ising, c'est un peu l'Hamiltonien le plus simple qu'on puisse imaginer pour commencer à introduire de l'interaction entre des particules. C'est l'interprétation qui intéresserait peut-être les physiciens et qui est décevante d'un certain point de vue, on aurait préféré l'inverse. Ce résultat de trivialité était d'ailleurs anticipé depuis très longtemps, on ne peut pas dire que ça a été une surprise pour les physiciens. Si tout le monde était à peu près d'accord sur le fait que ça allait avoir ce comportement, l'enjeu dans cette partie de la physique, c'est tout de même de construire rigoureusement le bon objet. C'était donc important je pense d'avoir une preuve rigoureuse du fait qu'une telle approche ne marchait pas.

Maintenant, le deuxième point de vue, la véritable motivation en fait pour Michael Aizenman et moi-même, ne venait pas de là. Notre véritable but, plus inspiré par la physique statistique que par la théorie des champs, était de comprendre la loi de ces moyennes. Ainsi, démontrer qu'elles sont gaussiennes, c'est donner beaucoup d'informations sur cette limite d'échelle. C'est le premier pas vers une compréhension totale de ce qu'on appelle le comportement critique du système. Donc ce qui est une impasse du point de vue de la physique, s'avère être en fait un théorème extrêmement positif du point de vue des maths.

Quelles sont les plus grandes émotions que t'ont apportées les mathématiques ?

Il y en a deux qui me viennent tout de suite à l'esprit.

La première, c'est pendant ma thèse. J'étais en train de nager et tout à coup, je fais un lien nouveau. Je me rends compte qu'une technique que j'essaye désespérément de faire marcher pour la percolation FK depuis des mois, implique en fait quelque chose d'assez spectaculaire pour le modèle des *marches auto-évitantes*. C'est un modèle célèbre en probabilités/combinatoire et sur lequel Stas m'avait déconseillé de travailler car il paraissait trop hors de portée. Stas avait trouvé une magnifique observable, dont il m'avait fait part au début de ma thèse, et qui procurait « la moitié » des informations qui pourraient permettre de démontrer la limite d'échelle de cet objet. J'étais tout à fait d'accord avec lui sur le fait qu'il manquait la deuxième moitié des contraintes pour espérer résoudre ce problème. Mais ce jour-là, en nageant, je me rends compte qu'en utilisant cette technique qui ne voulait pas marcher pour la percolation FK et en l'associant à l'observable de Stas, on pouvait réussir à localiser l'endroit de la transition de phase pour les marches auto-évitantes, où de manière équivalente à établir leur taux de croissance exponentielle. Le temps de revenir à ma serviette, la preuve était complète et c'est ainsi qu'on a démontré avec Stas que le nombre de chemins auto-évitants de longueur n sur une une grille hexagonale se comporte comme $(\sqrt{2+\sqrt{2}})^n$. Cette conjecture due à Nienhuis en 1982, c'était la première conjecture énoncée par Wendelin dès le premier quart d'heure de son cours de M2. C'était assez grisant de se dire que quelques années plus tard, on l'avait démontrée.

Le deuxième moment qui m'a beaucoup marqué c'était en 2015, je prenais un café avec Vincent Tassion, qui est l'un de mes plus proches collaborateurs et il me raconte un argument qu'il avait trouvé avec Vincent Beffara, son directeur de thèse. C'était un argument qui semblait prometteur mais qui n'était pas totalement fini, pas tout à fait clair. Et là, j'ai tout de suite vu que cet argument, on pouvait l'écrire différemment et que modulo une info qui manquait encore, ça donnait cette fois quelque chose de très substantiel ! Mais, pour la classe de modèles qui nous intéressait à cette époque (la percolation FK), il manquait tout de même cette information non triviale. Et c'est là que Vincent me fait remarquer tout à coup que cette information est évidente dans le cas du modèle plus simple de la percolation de Bernoulli (qu'on n'avait pas en tête à ce stade de la discussion). À la suite de cet échange, en forme de « ping-pong », qui a duré en tout et pour tout 5 minutes, on venait ainsi de trouver une preuve entièrement nouvelle et beaucoup plus simple d'un résultat classique des années 80 en percolation : *la décroissance exponentielle de la percolation dans le régime sous-critique*. Les preuves de ce résultat qui dataient des années 80 étaient toutes longues et difficiles et constituaient une part importante de tous les cours de M2 dédiés à la percolation. C'était un moment assez incroyable, très court dans la durée, un moment de perfection mathématique en quelque sorte. On était vraiment super heureux avec Vincent.

Tu as eu de nombreux doctorants, postdoctorants, peux-tu nous décrire quel est ton mode d'encadrement ?

Je n'ai pas l'impression d'avoir des étudiants en thèse ou des post-docs, j'ai toujours l'impression d'avoir des collaborateurs et collaboratrices. Ça ne veut pas dire que je ne donne pas de conseils, que je ne les dirige pas dans telle ou telle direction, mais j'aime bien penser que quand on commence à discuter de maths, on est tous à égalité, chacun peut donner son point de vue, débattre, être content comme mécontent. Je pense que ça a bien fonctionné pour les mettre en confiance. Au fond, j'ai un peu reproduit ce que j'avais vécu moi en thèse. Stas m'avait laissé une liberté totale. Il ne m'a jamais vraiment considéré comme un élève, mais plus comme un mathématicien dès le tout début. Ça m'avait donné confiance en moi.

Comment apprends-tu que tu reçois la médaille Fields et qu'est-ce que ça implique pour toi ?

La petite anecdote marrante, c'est qu'en janvier 2022, l'email qui me proposait un rendez-vous téléphonique avec Carlos Kenig (Président de l'imu) est arrivé dans mes spams… Du coup, quelques jours plus tard je reçois, cette fois pour de bon, un email un petit peu étonné, qui m'apprend que je n'ai pas répondu au premier mail et que Carlos Kenig souhaiterait s'entretenir avec moi… J'ai tout de suite compris bien évidemment, mais il a fallu encore quelques heures avant qu'on puisse se parler au téléphone avec Carlos Kenig. En fait, avec ma compagne, on était malade ce jour-là. À tel point, qu'on est même parti dormir sans même avoir la force de fêter cette nouvelle :-).

Ensuite, je suis passé directement à l'étape d'après où je me suis dit, bon, maintenant il va falloir assurer… Parce que ça implique une responsabilité de représentativité, non pas dans la communauté mathématique, mais plutôt auprès du grand public. Et évidemment, on n'est pas du tout sélectionné pour ça… Donc, il y a ce moment de vertige où j'ai peur de ne pas réussir à être à la hauteur auprès du grand public. En plus, Cédric Villani avait vraiment rempli ce rôle à merveille peu de temps avant moi.

À ce moment-là, j'éprouvais aussi un sentiment de frustration de ne recevoir que des prix individuels pour des travaux collectifs. Et en particulier dans le cas présent, c'était renforcé par le fait que j'apprends la nouvelle en janvier. Il y a Vincent Tassion et Ioan Manolescu, mes collaborateurs ultra proches, qui ont collaboré sur la plupart des gros travaux de ma carrière et j'ai même pas le droit de leur dire avant juillet. Garder le secret auprès d'eux, ça a renforcé le sentiment d'isolation et le décalage entre le fait que c'est une médaille que j'aurais aimé partager avec eux et le fait que je n'étais même pas autorisé à leur dire. (*Voir la photo ci-après*). Ce long silence, ce n'était pas très agréable, et en plus en février avec la guerre en Ukraine qui a démarré, cette période a été vraiment déprimante. J'ai vécu la cérémonie en juillet à Helsinki comme un moment de bonheur et aussi comme un soulagement quelque part.

Quels conseils donnerais-tu à un/e jeune mathématicien/ne ?

Rien de très original, mais il faut bien évidemment choisir un domaine qui vous intéresse vraiment, parce qu'on ne peut pas être efficace dans un domaine pour lequel on n'est pas passionné. Ensuite, au moment du M2, trouver la bonne directrice, le bon directeur de thèse, c'est-à-dire quelqu'un avec qui vous partagez finalement une certaine forme de vision des mathématiques. Un conseil un peu plus concret, ce serait dans la mesure du possible de ne pas avoir un seul problème mais deux ou trois de difficultés variables. Parce que je trouve que c'est primordial de se poser des questions sur un problème très dur, mais c'est important aussi, quand on est complètement bloqué, de repasser à un problème un peu moins dur, voire un problème assez pédestre, un problème qui avance de façon régulière pour pouvoir gérer justement les moments « mous », les moments difficiles. Pour moi, c'est quelque chose qui est crucial dans mon activité de tous les jours, en tant que mathématicien.

Hugo Duminil-Copin entouré de Vincent Tassion et Ioan Manolescu, deux de ses plus proches collaborateurs (Photo prise à Helsinki en juillet 2022, le jour de la cérémonie IMU).

Hugo Duminil-Copin,

Date de naissance : 26 août 1985

Études

2005-2008. Éns Paris

2008-2012. Thèse puis postdoctorat, université de Genève

Emplois

2013-2014. Professeur-assistant, université de Genève

2014-. Professeur ordinaire, université de Genève

2016-. Professeur, Ihés.

Distinctions

2022 médaille Fields. 2019 prix Dobrushin. 2018 orateur invité, ICM Rio. 2017 prix Loeve. 2017 Grand Prix Jacques Herbrand de l'Académie des sciences. 2017 prix New Horizons in Mathematics. 2016 prix de la Société mathématique européenne. 2015 prix Early Career Award de l'international Association of Mathematical Physics. 2015 cours Peccot du Collège de France. 2013 prix Oberwolfach. 2012 prix Rollo Davidson (avec V. Beffara).

La médaille Fields de Maryna Viazovska dans les médias

Une revue de presse du comité éditorial

Lors du Congrès International des mathématiciens (icm) 2022, Maryna Viazovska reçoit la médaille Fields « for the proof that the E_8 lattice provides the densest packing of identical spheres in 8 dimensions, and further contributions to related extremal problems and interpolation problems in Fourier analysis ». L'annonce de cette récompense a eu un grand écho dans la presse généraliste comme dans les publications plus spécialisées. La raison principale est en avant tout son impressionnant succès dans la résolution d'une question mathématique emblématique. Le problème de l'empilement de sphères, appelé aussi problème de Kepler, est de ces problèmes mathématiques aussi faciles à énoncer que difficiles à résoudre. À cela s'ajoute le fait qu'elle est seulement la deuxième mathématicienne à recevoir cette récompense, et également qu'elle la reçoit à un moment dramatique pour son pays d'origine, l'Ukraine.

Maryna Viazovska, qui suscitait déjà en 2016 une grande admiration dans la communauté mathématique, a vu sa notoriété s'étendre bien audelà des cercles spécialisés. En juillet 2022, on peut lire dans beaucoup de grands quotidiens ou sites d'information en ligne des titres comme : *Maryna Viazovska, l'Ukrainienne qui a résolu un problème vieux de plusieurs siècles* (bbc News Monde), un plus sobre *Maryna Viazovska, mathématicienne ukrainienne, reçoit la médaille Fields* (*Le Monde*), ou encore *Fields medal : Kyiv-born professor and Oxford expert among winners* (*Le Guardian*), *Maryna Viazovska : Second to none in any dimension* (*New York Times*), etc. Elle a répondu à de très nombreuses interviews et de nombreux articles décrivent en détail les différents aspects de ses travaux. Dans ce court texte, le comité éditorial de la *Gazette* vous en propose une petite sélection, partielle et subjective, pour découvrir son œuvre et sa personnalité.

L'article de référence que l'on peut conseiller pour comprendre le résultat le plus connu de Maryna Viazovska, l'optimalité de E_8, est sans doute celui rédigé par Henry Cohn [10] pour les *Notices de l'ams* en 2017. Cet article a valu à Cohn le prix Levi L. Conant 2018 pour l'exceptionnelle clarté de son exposé. La *Gazette* avait publié dans son numéro d'octobre 2019 la traduction en français [11] de cet article.

Le problème dit de Kepler pose la question de quel est l'empilement de boules superposables dans $\mathbb{R}^n$ de densité maximale. Si le problème est trivial en dimension 1, il est déjà assez difficile de donner une preuve rigoureuse du fait qu'en dimension 2, un empilement basé sur le réseau triangulaire est optimal. La conjecture initiale de Kepler concerne la dimension 3 et prévoit que l'empilement de l'épicier doit être optimal. Il faut attendre 2005 pour obtenir une preuve (longue, difficile et en grande partie assistée par ordinateur) de ce fait en dimension 3, donnée par Thomas Hales. À partir de décennies de travaux antérieurs, Henry Cohn et Noam Elkies ont établi des bornes de programmation linéaire pour la densité maximale d'un empilement pour chaque dimension. Dans cette approche du problème, on utilise des fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés d'interpolation pour obtenir des bornes sur la densité. La percée de Viazovska consiste en une nouvelle technique pour construire ces fonctions auxiliaires. Selon Cohn, « Le 14 mars 2016 [...], le monde des mathématiques reçut une surprise exceptionnelle quand Maryna Viazovska posta sur arXiv une solution au problème de l'empilement de sphères en dimension 8 », en produisant précisément la fonction magique qui permet d'atteindre la borne optimale. Cette solution a tout de suite fasciné par sa simplicité. Citons encore la traduction du texte de Cohn pour le plaisir de savourer son enthousiasme : « On peut mesurer la complexité d'une démonstration par le temps nécessaire à la communauté pour la digérer. De ce point de vue, la démonstration de Viazovska est remarquablement simple. Elle a été comprise par plusieurs personnes dans les quelques jours qui ont suivi sa parution sur arXiv, et a conduit en une semaine à de nouveaux progrès : Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko et moi-même avons travaillé avec Maryna Viazovska pour adapter ses méthodes afin de démontrer que le réseau de Leech était un empilement de sphères optimal en dimension 24 ». L'un des coauteurs de cette nouvelle avancée, Danylo Radchenko qualifie cette période de « probably the craziest week of [his] life ». Tout cela est d'autant plus frappant qu'il avait fallu littéralement des années à la communauté mathématique pour valider la démonstration de Hales pour la dimension 3.

L'une des questions qui se posent est celle du rôle des dimensions 8 et 24. En quoi ces dimensions sont-elles particulières ? Cohn insiste déjà sur le fait que c'est un mystère et c'est ce qui inspire le titre d'un très bel article [13] intitulé « The magic of 8 and 24 » écrit par Andrei Okounkov en 2022 et à paraître dans les *Proceedings* de l'ICM 2022. Dans un style que ne renierait pas la *Gazette*, il y dresse également un beau panorama de ces travaux et de leur contexte. Si l'article de Cohn s'adresse à un public généraliste de mathématiciens, celui d'Okounkov est très progressif et encore plus pédagogique. Il pourra donner lieu à une bonne lecture pour des étudiants et étudiantes motivés ainsi qu'à leurs professeurs. Okounkov annonce humblement : « Our modest goal in these notes is to share our personal excitement about the amazing math that goes into both the statement and the proof of these theorems with the broadest possible audience of mathematics enthusiasts ». Tout au long des quelques cinquante pages de l'article, les enthousiastes voyageront à travers des paysages mathématiques divers, depuis la géométrie discrète permettant d'énoncer le problème jusqu'à la théorie des nombres et aux formes modulaires qui permettent de construire la fonction magique en passant par l'analyse harmonique qui a été déterminante pour fournir des bornes précises sur les densités.

Mais les mathématiques de Viazovska vont au-delà de ses deux prouesses les plus frappantes, dont nous venons de parler. Pour en savoir plus sur d'autres travaux de Viazovska et ses collaborateurs, les lecteurs intéressés pourront aussi consulter l'exposé au séminaire Bourbaki d'Yves Meyer [1]. Plutôt que de mettre l'accent sur le problème des empilements de sphères, il replace cette question dans un contexte plus général, en lien avec les mesures cristallines et le traitement du signal. Il s'adresse ici à des lecteurs un peu plus avertis que ceux des papiers de Cohn ou Okounkov mais leur permettra d'apprécier les différents aspects des travaux de Viazovska ainsi que leur vaste champ d'application. Le tout dans un style qui aurait également eu sa place dans la *Gazette* !

L'article d'Okounkov constitue également une très bonne source bibliographique avec de nombreux liens vers des articles spécialisés mais aussi vers des articles d'exposition à destination du grand public. Sans reproduire l'ensemble de la bibliographie, on pourra citer quelques articles de vulgarisation, notamment ceux [2, 3, 4] parus dans *Quanta Magazine* et un article plus spécialisé [12], qui après une exposition techniquement précise des deux preuves pour les dimensions 8 et 24, présente une interview de Cohn, Kumar, Miller, Radchenko et Viazovska, qui retrace notamment la semaine folle qui a mené de l'idée fulgurante de Viazovska pour la dimension 8 à sa généralisation. Parmi les articles grand public, certains apprécieront également le lyrisme de la Carte blanche [5] d'Étienne Ghys parue en 2016 dans *Le Monde* intitulée *Bienvenue dans la vingt-quatrième dimension*.

De nombreuses autres interviews de Maryna Viazovska elle-même évoquent des aspects plus personnels. À ce titre, la courte vidéo [6] de présentation diffusée pendant la cérémonie de remise de la médaille Fields est particulièrement touchante. On y découvre le parcours et le portrait d'une mathématicienne tenace et passionnée mais aussi d'une femme préoccupée par les drames de son pays d'origine. L'interview [7] produite par l'International Mathematical Union dans le cadre de l'ICM 2022 a été menée par Andrei Okounkov et Andrei Konyaev ; elle suit de manière assez chronologique le parcours mathématique de Maryna Viazovska. La première partie s'attarde sur la formation de son goût pour les mathématiques, le type de problèmes qu'elle aimait, sa manière d'aborder la résolution des problèmes, l'influence du lycée spécialisé en mathématiques et en physique qu'elle a fréquenté à Kiev et des Olympiades Internationales. Sont évoqués ensuite ses débuts dans le monde de la recherche, son orientation progressive vers la théorie des nombres, l'importance de sa rencontre avec Don Zagier, qui a été son directeur de thèse, jusqu'à ses premiers résultats. L'interview se clôt sur les résultats que l'on connaît, l'annonce de la médaille et l'évocation de son rôle futur, mathématique mais aussi éventuellement politique.

Si cette interview officielle peut paraître un peu froide, Ken Ono dans son interview [8] pour *Springer Nature* a su amener la mathématicienne à se livrer de manière beaucoup plus personnelle. Après une esquisse rapide des résultats qui lui ont valu la médaille Fields, Viazovska convoque de manière émouvante les professeurs qui l'ont influencée tout au long de son parcours, parfois dès les petites classes. Elle évoque si bien « the iron lady » and « the super iron lady » qu'elles a rencontrées à l'école primaire qu'on a presque peur de se faire gronder ! Avec humour, elle compare aussi le Max Planck Institute où elle est venue faire sa thèse au quai $9\frac{3}{4}$ et Don

Zagier à un sorcier dans *Harry Potter*. Ono n'hésite pas non plus à aborder avec Viazoska la difficulté d'être une mathématicienne ukrainienne qui vit loin de son pays d'origine. Elle évoque avec émotion et lucidité son espoir de temps meilleurs.

Parmi les interviews que nous avons lues, nous avons aussi particulièrement apprécié celle [9] menée par Nathalie Braun pour *CultureMath*, dans laquelle Viazovska répond avec profondeur à des questions un peu inhabituelles sur le rôle des émotions, de l'imagination, du doute et de la déception dans sa façon de faire des mathématiques.

Pour conclure, laissons à Maryna le mot de la fin : « mathematics offers simple and pure intellectual joy for those with the passion for the subject in their heart ».

Références

[1] `https://www.bourbaki.fr/TEXTES/Exp1194-Meyer.pdf`.

[2] `https://www.quantamagazine.org/universal-math-solutions-in-dimensions-8-and-24-20190513/`.

[3] `https://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/`.

[4] `https://www.quantamagazine.org/the-math-of-social-distancing-is-a-lesson-in-geometry-20200713/`.

[5] `https://www.lemonde.fr/sciences/article/2016/06/13/bienvenue-dans-la-vingt-quatrieme-dimension_4949699_1650684.html`.

[6] `https://www.youtube.com/watch?v=yAyuipqM5uQ`.

[7] `https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2022/Maryna_Viazovska%20_Interview.pdf`.

[8] `https://link.springer.com/article/10.1007/s00283-022-10225-7`.

[9] `https://culturemath.ens.fr/thematiques/femmes-et-mathematiques/entretien-avec-maryna-viazovska`.

[10] H. Cohn. « A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing ». *Notices of the American Mathematical Society* **64**, n° 2 (2016), p. 102-115.

[11] H. Cohn. « Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères ». *Gazette de la Société Mathématique de France* **162**, n° 4 (2019). `https://smf.emath.fr/system/files/filepdf/Gaz-162.pdf`.

[12] D. de Laat et F. Vallentin. « A Breakthrough in Sphere Packing : The Search for Magic Functions » (2016).

[13] A. Okounkov. « The magic of 8 and 24 » (2022). `https://arxiv.org/abs/2207.03871`.

Assemblée Générale de l'Union Mathématique Internationale

Un rapport (plutôt) succinct sur cette dernière AG (Helsinki, 3-4 juillet 2022)

• F. Planchon
• B. Rémy

Nous le savons tous, le Congrès International des Mathématiques (ICM) n'a pas eu lieu physiquement l'été dernier. La guerre déclenchée par l'État russe à l'encontre de l'Ukraine a eu raison de la manifestation qui devait se dérouler à Saint-Pétersbourg du 7 au 14 juillet 2022. De ce fait, l'ICM 2022 a principalement été un congrès virtuel, auquel se sont ajoutés des conférences ou événements satellites physiques mais délocalisés, dans certains domaines mathématiques. Sur le plan scientifique, une intéressante campagne d'information du CNRS avait été mise en place en amont, donnant notamment la parole aux mathématiciennes et mathématiciens provenant du système académique français et invité·e·s à cette occasion.

Nous savons peut-être moins que l'Assemblée Générale (AG) de l'Union Mathématique Internationale (IMU) précède traditionnellement l'ICM, et s'est donc tenue quelques jours auparavant à Helsinki. En réalité, c'est non seulement cette Assemblée Générale mais aussi la cérémonie d'ouverture de l'ICM 2022 qui ont eu lieu du 3 au 5 juillet en Finlande. Les distinctions décernées sous la responsabilité de l'IMU l'ont ainsi été le 5 juillet 2022, en présence de la plupart des lauréates et des lauréats.

Nous le savons sans doute encore moins : c'est le Comité National Français des Mathématiques (CNFM) qui a la responsabilité d'envoyer une délégation française à l'AG de l'IMU tous les quatre ans. Le CNFM est une institution dont la principale raison d'être consiste précisément à assurer la liaison entre la communauté mathématique française et l'IMU (pas seulement à l'occasion des ICM, du reste).

Le principal objectif du présent texte est de rendre compte de l'AG 2022 de l'IMU. C'est une opportunité de présenter une partie du fonctionnement de l'IMU et l'activité du CNFM sur ce point. Pour celles et ceux qui souhaiteraient en savoir plus sur le CNFM, la première source d'informations est bien entendu le site du comité lui-même (`http://www.cnfm-math.fr/index.html`). En outre, la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM) a eu la gentillesse d'accueillir dans son Bulletin numéro 49 (juin 2020) un texte de présentation générale du CNFM (`http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/bulletin-de-liaison-49-juin-2020/`); l'organisation du centenaire de l'IMU à Strasbourg y était également évoquée.

Revenons à l'AG de l'IMU, en suivant l'ordre du jour tel que les délégations l'ont vécu.

La délégation française pour l'AG de l'IMU

La délégation française était composée de 5 collègues car la France dispose de 5 voix pour les votes (c'est le nombre maximal prévu par les statuts de l'IMU : les pays membres sont répartis par catégories, du groupe I disposant d'une voix jusqu'au groupe V disposant de 5 – l'interpolation va de soi, et le montant de la cotisation est corrélé aux voix). Voici sa composition : Christophe Besse, Jean-Stéphane Dhersin, Fabrice Planchon, Bertrand Rémy et Alessandra Sarti. Les lectrices et lecteurs perspicaces remarqueront une forte présence de la direction de l'Insmi, qui devait par ailleurs assister à la cérémonie de remise des prix qui a suivi l'AG : n'est-ce pas là une ingénieuse façon de limiter le bilan carbone de l'opération ?

Premier jour (dimanche 3 juillet 2022) : on fait les bilans moraux et on décide de l'ICM 2026

La journée commence par une photo de groupe (un must pour beaucoup) et les discours des deux principaux responsables de l'IMU : Carlos Kenig (président) et Helge Holden (secrétaire général). La guerre en Ukraine et la pandémie de covid-19 sont évoquées. Dès ces discours, les règles de vote sont mentionnées ; une possibilité de vote électronique est testée avec succès, mais en pratique (hélas ?) c'est la méthode du vote à main levée qui sera privilégiée in fine. Les pays qui ne sont pas à jour de leur cotisation sont exclus des votes, conformément aux statuts, représentant 9 voix sur environ 180.

Le rapport d'activité de l'IMU sur les quatre dernières années est ensuite présenté (notamment : bilan des nouvelles adhésions et des améliorations de statuts – passage d'un groupe à l'autre de certains pays ; hébergement des locaux de l'IMU à Berlin – il est à noter que l'Allemagne soutient, au-delà de sa cotisation, l'IMU de façon importante à travers la mise à disposition de locaux et de personnels pour son siège à Berlin). Cinq importantes commissions font également leur bilan :

ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ; CDC (Commission for Developing Countries) ; ICHM (International Commission on the History of Mathematics) ; CEIC (Committee on Electronic Information and Communication) ; CWM (Committee for Women in Mathematics).

Le début de l'après-midi est consacré aux bilans de deux commissions liées à l'ICM 2022 : le comité de structure (présidé par Terry Tao) rapporte sur ses travaux concernant la répartition thématique des exposés du congrès ; le comité de programme (présidé par Martin Hairer) rapporte sur la constitution des sous-comités travaillant, dans l'anonymat, aux invitations des oratrices et orateurs.

Le morceau central de cet après-midi est ensuite la candidature de Philadelphie pour organiser l'ICM 2026. Cette année, il n'y a qu'une candidature – celle des États-Unis (contrairement à 2018 où la France avait maintenu jusqu'à l'AG de l'IMU une candidature alternative à celle de la Russie préconisée par la direction de l'IMU, perdant par 63 voix contre 83, une situation similaire s'étant produite en 1998 où un vote entre plusieurs candidatures maintenues jusqu'au bout avait conduit à choisir la candidature de Pékin 2002). Le dossier de candidature présenté est parfaitement conforme aux attentes, sans originalité notoire. L'AG aura lieu à New York, ce qui représente un coût non négligeable (statutairement, les dépenses de l'AG sont payées par le pays organisateur quoi qu'il en soit). Certaines questions prennent un peu plus de temps que prévu ; ce sont des points importants tels que le coût de la participation à l'ICM (hors AG), l'octroi des visas pour certaines nationalités en particulier. L'ordre du jour est un peu modifié en conséquence car ces questions inquiètent de nombreuses délégations. Finalement, le vote (à main levée...) est très largement en faveur de cette unique candidature (la France a voté pour).

Les candidatures personnelles pour des postes individuels dans les instances de l'IMU sont ensuite présentées ; certaines présentations sont très humaines, voire émouvantes, notamment à l'évocation de certains parcours de vie.

Second jour (lundi 4 juillet 2022) : nominations personnelles, finances et finalement l'Ukraine

Après les présentations des candidatures la veille, a lieu un vote (électronique) pour les nominations individuelles. Le nouveau président élu de l'IMU est Hiraku Nakajima (Japon). Notre collègue Christoph Sorger est élu secrétaire général ; c'est un poste-clé dans l'organigramme de l'IMU, sans doute aussi le plus éprouvant. L'élection pour le comité exécutif donne lieu à un peu plus de suspens puisqu'il y a 6 postes pour 8 candidat·e·s dans ce cas. Le classement mérite sans doute une analyse géographique ; on peut imaginer quelques difficultés en la matière pour le mandat à venir du comité exécutif (la Chine n'est, notamment, pas représentée). Les votes suivants portent sur la commission pour les pays en voie de développement (CDC) ; notre collègue Ludovic Rifford – qui a précédemment dirigé le CIMPA – est élu « secretary for policy » de cette commission (c'est-à-dire secrétaire du CDC en charge de la coordination des activités du CDC avec le staff de l'IMU). En ce qui concerne la commission à l'histoire des mathématiques, celle-ci sera in fine complètement européenne.

Ensuite, le trésorier de l'IMU fait un rapport synthétique de l'exercice financier 2018-2021 ; beaucoup de détails sont fournis dans les documents de travail écrits et disponibles dans un nuage dédié. L'augmentation de la cotisation est de 2,1% pour tout le monde, ce qui est raisonnable compte tenu de l'inflation ambiante à anticiper. Concrètement, l'« unité de cotisation » passe de 1430€ à 1460€. La cotisation de la France pour les quatre années à venir sera de 17520€ par an (ce qui correspond à 12 unités de cotisation, en lien avec l'appartenance au groupe V).

Le train-train de l'AG déraille quand un collègue ukrainien demande un soutien en matière de cotisation. La délégation des USA propose d'aller plus loin (dans la dénonciation de la situation en Ukraine) et la délégation russe suggère de ne pas introduire de politique dans le fonctionnement de l'IMU. La délégation polonaise soutient les propositions de résolution ukrainienne et américaine; idem pour la délégation belge. Un collègue russe s'étonne qu'on s'intéresse plus à l'Ukraine qu'à d'autres pays du monde. Carlos Kenig mène avec beaucoup de doigté les débats, qui restent mesurés dans leur formulation. La délégation turque réclame une clarification des énoncés concernant les retards de paiement et leur mode de résolution. La délégation allemande intervient pour annoncer qu'elle versera 9k€ pour soutenir un fonds consacré à des situations d'urgence; la France et le Royaume-Uni feront une déclaration similaire à la reprise des débats en début d'après-midi.

Différentes autres structures dépendant de l'IMU font ensuite des présentations de leur bilan; là encore l'Ukraine refait surface quand Marie-Françoise Roy (pour la Commission for Women in Mathematics) mentionne avec émotion Yula Zdanovska, une jeune ukrainienne lauréate d'olympiades et tuée par un bombardement à Kharkiv.

Le début de l'après-midi est consacré à l'élaboration d'une motion concernant la guerre en Ukraine; les mots sont pesés et très discutés, nous sommes dans une AG où une centaine de nationalités sont représentées.

L'après-midi se termine par l'examen des situations de délégations en défaut de paiement, et l'AG se conclut finalement dans les temps.

Quelques documents supplémentaires

Pour celles et ceux qui souhaitent en apprendre davantage sur le fonctionnement de l'IMU, le site (`https://www.mathunion.org`) est assez complet. On y trouvera en particulier la composition du comité exécutif qui vient d'être élu (`https://www.mathunion.org/organization/imu-executive-committee`), ainsi que les résolutions votées en juillet (`https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Organization/GA/GA_2022/Resolutions2022.pdf`).

Une conclusion personnelle des rédacteurs de ce compte-rendu

Nous espérons que cette présentation de l'AG de l'IMU aura rendu les institutions impliquées plus incarnées (ce n'est malheureusement pas le lieu pour fournir davantage de détails, qui auraient certainement facilité l'entreprise). À l'évocation des discussions mentionnées ci-dessus, il est difficile de ne pas penser aux années de guerre froide, mais nous ignorons dans quelle mesure ce rapprochement est pertinent. En ce qui concerne l'organisation des futurs ICM, l'évolution des budgets des dernières candidatures retenues (très à la hausse, au point que la question de leur sincérité se pose, quatre ans en amont de l'évènement) suggèrent, à notre avis, que les instances de l'IMU seront peut-être amenées à revoir les modalités d'organisation des futurs ICM (conditionnées notamment par une très grande capacité d'accueil pour la cérémonie d'ouverture et la remise des prix), sous peine que le vivier des pays candidats se réduise drastiquement. Le bon déroulé de la cérémonie de remise des prix à Helsinki, à taille plus humaine, et la couverture médiatique associée qui n'a pas semblé faiblir, devrait inciter à réfléchir à la direction et au sens premier à donner aux ICM.

Christoph Sorger (Secrétaire général de l'IMU) et Ludovic Rifford (Secretary for policy du CDC)

© Christophe Besse.

Un entretien avec Ingrid Daubechies

(partie 1)

Propos recueillis par Jean-Michel Morel.
L'interview d'Ingrid Daubechies va être publiée en trois parties : la première parle de sa formation, la deuxième de l'aventure des ondelettes et la troisième du temps de la reconnaissance et des distinctions. Ne manquez pas les prochains numéros de la *Gazette* !

Quelle influence a eue sur toi le système belge d'enseignement ?

L'enseignement belge quand j'étais petite était probablement différent de ce qu'il est maintenant. Mais à l'époque même l'enseignement officiel était séparé entre filles et garçons.

Dans toutes les classes où j'ai été jusqu'à l'université il y avait seulement des filles et je crois que ça a une influence parce que jusqu'à l'université je n'ai donc jamais été exposée au point de vue que parce qu'on était une fille, on était moins bonne en maths. Les bonnes en maths étaient en minorité, mais ça c'est partout, et ce n'était pas parce qu'on était une fille, car on était toutes des filles. Ce n'est plus le cas maintenant, les écoles sont mixtes, et à l'époque je trouvais que c'était une mauvaise chose d'avoir des écoles seulement pour filles, ou seulement pour garçons car finalement ces jeunes gens doivent apprendre à vivre ensemble. Mais, finalement, en regardant en arrière je crois que c'était une bonne chose parce que cela m'a certainement donné plus de confiance. Bon, j'étais différente des autres ; on est tous différents des autres évidemment ; mais, ce n'était pas parce que j'étais une fille. Je suis née dans un tout petit patelin parce que mon père était ingénieur des mines. Les mines se situent là où il y a le charbon. Donc il n'y a pas nécessairement un village. Ce village a grandi parce qu'il y avait le charbonnage. Cela veut dire aussi que c'était un endroit qui était très paternaliste parce que c'était une seule grosse entreprise qui dominait la scène économique. Alors il y avait des magasins, et il y avait toute une économie autour, mais du coup on était en retard d'une génération sur les usages sociaux. Par exemple, il était tout à fait normal que les femmes d'ingénieurs ne travaillent pas. C'était comme ça. Ce n'était pas une règle mais c'était comme ça. Ma mère qui avait pourtant fait des études universitaires supérieures et qui s'attendait à mener une carrière au moment où elle a fait ses études, quand elle a épousé mon père, elle s'est retrouvée dans une situation où ça ne se faisait pas. Au début, ce n'était pas grave, elle avait plein de choses à faire, mais quand les enfants ont grandi elle se sentait en manque intellectuel et elle a été très, très amère, et en fait elle est retournée à l'université en même temps que moi. Ses études avaient été en économie, cela avait beaucoup changé et elle a refait des études de criminologie et a travaillé dans le secteur public pour aider des jeunes à se réinsérer, des jeunes de parents criminels dont les parents étaient en prison, ou des jeunes qui avaient eux-mêmes commis des délits et qui étaient dans un cheminement dangereux.

C'était mon enfance, et il est remarquable aussi qu'il y avait des écoles d'état et des écoles catholiques. Les écoles catholiques étaient plus chères, il fallait payer, pas énormément mais quand même. Du coup, tous les enfants d'ingénieurs allaient à l'école catholique et nous étions les seuls enfants d'ingénieur dans l'école d'état, et donc ça nous mettait un peu à part. Pour mes parents, aller à l'école publique était une question de principe. Quand j'étais à l'école maternelle il n'y avait pas encore d'école publique.

Donc la première année où l'école publique s'est faite, à l'école maternelle j'étais encore chez les nonnettes. Elles nous avaient dit qu'une nouvelle école se construisait et qu'il ne fallait pas aller là, que ce n'était pas une bonne école. Je suis rentrée chez moi et j'ai dit ça, mais mon père a dit : pas question, tu vas aller à cette école et j'ai éclaté en pleurs : « on nous a dit que ce n'était pas une bonne école ». Mon père a dit que ce n'était pas à eux de dire des choses comme ça aux enfants.

J'ai toujours aimé l'école et j'ai toujours aimé apprendre. J'aime encore toujours apprendre. Bon, pas seulement en sciences. J'aime parler avec des gens qui connaissent vraiment bien quelque chose et qui parlent avec enthousiasme de ce qu'ils font parce que j'aime cet enthousiasme, j'aime apprendre, j'aime voir ou comprendre des choses nouvelles.

Il y avait des maîtres comme cela à l'école ?

Il y en avait et même si eux n'étaient pas nécessairement entièrement enthousiastes, à l'école j'adorais apprendre ces nouvelles choses. J'étais bonne à l'école, j'étais bonne en tout car j'aimais apprendre. J'aimais apprendre, dans mon école j'ai appris à tricoter et j'aimais apprendre à tricoter.

C'est très utile pour les mathématiques

En fait, oui et le tricot est plus compliqué que tu ne le crois ; il y a quatre façons de faire un point de tricot. Certains sont plus adéquats pour faire quelque chose en rond. La plupart des gens n'essayent pas mais si on veut essayer de tricoter un tore, il y a certains points qui s'y prêtent mieux que d'autres ! Il y a les conditions de bord à respecter, mais pas seulement ça, c'est la façon d'engager son aiguille, avec une torsion qui s'accommode mieux de certaines choses que d'autres.

J'aimais l'école et j'aimais les maths. Je posais des questions, je voulais toujours savoir pourquoi les choses étaient comme ça, comme tous les enfants. Et mon père aimait bien expliquer. Il se lançait dans des explications qui étaient souvent plus longues que ce que je voulais, mais il a beaucoup suscité mon intérêt pour les sciences et pour les maths. J'ai aussi compris relativement tôt quand même, j'avais dix-douze ans, que mes parents étaient très fiers (de moi). Mon père a dit par exemple « elle sait déjà dériver une fonction ». Mais je savais que je n'avais pas vraiment compris ce qui se passait, j'avais appris une recette, et apprendre une recette ou vraiment comprendre à fond ce qu'on fait, ce sont des choses différentes. Une fois que j'ai réalisé cela, j'ai voulu comprendre les choses plus à fond plutôt que de faire des recettes. Faire les recettes c'était pour épater le public, mais vraiment comprendre, c'est cela qui m'intéressait le plus.

Les enfants apprennent l'addition et la multiplication mais on ne leur explique pas la théorie, ils l'apprennent par la pratique.

Ils l'apprennent par la pratique et les enseignants ne se rendent pas compte. Par exemple quand ma fille a été à l'école primaire, le professeur m'a dit en fin de première année qu'il fallait qu'elle ait des cours supplémentaires l'été car elle n'avait pas compris, elle se trompait dans la recette pour additionner. Parfois elle faisait un report d'un côté, et parfois de l'autre. L'institutrice n'avait pas réalisé que cela voulait dire que ma fille n'avait pas bien compris le système décimal. D'abord j'ai regardé s'il y avait des outils développés pour des enseignants : ils étaient très chers en fait. Alors j'ai dit, je ne vais pas dépenser cet argent. J'ai acheté des rondelles et des grosses épingles de sûreté et je lui ai dit : écoute, dix petites rondelles dans une épingle c'est 10. Puis j'en ai mis dix dans une grande et ça faisait 100.

Elle aurait pu utiliser un boulier ?

Oui, mais je voulais des choses qu'elle puisse manipuler : ouvrir, sortir, remettre ensemble. Je lui ai expliqué comme ça le système pour écrire des nombres, on a beaucoup joué, et puis on a fait l'addition et elle a vu que ce qu'elle faisait c'était ouvrir et refermer ces choses et que c'était pour cela qu'il fallait reporter un 1 d'un côté et pas de l'autre. Et plus jamais elle n'a fait cette erreur.

Mais je veux dire donc : le fait qu'elle se trompait dans la recette, l'institutrice croyait qu'elle n'avait pas bien retenu qu'il fallait toujours faire (la retenue) à gauche. Alors que pour moi il était essentiel de lui expliquer : écoute, ce système est un système qui a une signification et c'est ça la signification. Une fois qu'on l'a, on ne se trompe plus, on sait ce qu'on fait.

Le système de calcul arithmétique positionnel on ne sait pas très bien d'où il est venu, mais en Europe il a fallu des siècles pour qu'il soit assimilé...

Oui, au XIe ou XIIe siècle en Europe, mais en fait il existait en Asie depuis longtemps. Évidemment il rend les choses beaucoup plus simples. Il rend aussi beaucoup plus simple, j'en parle encore quand je donne un cours d'introduction aux maths, quand je parle du fait que nous prenons des limites de nombres. Pour nous, et déjà pour des enfants à la fin de l'école primaire, c'est intuitif bien qu'ils ne sachent pas l'analyse réelle, parce qu'on sait bien que si on ajoute des décimales on a de plus en plus de précision sur le nombre, et qu'il y a des nombres qu'on peut écrire qui ne se répètent jamais, mais parce qu'on peut les écrire, on leur donne de plus en plus de précision ; on s'imagine en train de faire un zoom de plus en plus grand. Tout cela est quelque chose qui est inhérent quand on a le système positionnel, et pas autrement. Donc le système de notation peut avoir une grande influence.

Le système positionnel c'est les basses fréquences à gauche et les hautes fréquences à droite, cela nous mène directement aux ondelettes ? Si on a bien compris les nombres on peut faire des ondelettes ?

Oui, l'idée d'une progression exponentielle en échelle est tout à fait logique.

Est-ce que d'autres matières t'ont marquée au lycée ?

Et alors, au lycée j'ai beaucoup aimé le latin, j'ai fait six années de latin. On avait 6h de latin par semaine, 7h de maths.

Tu n'as quand même pas fait des calculs en latin.

Non, et je n'ai pas fait de grec. Et puis après, c'était l'université.

En mathématiques au lycée tu as des souvenirs ? C'était une période un peu charnière, on introduisait la théorie des ensembles ?

Non, mon frère a eu la théorie des ensembles, moi pas. Mais nous avions un professeur qui aimait expliquer. Parfois pendant la récré il nous amenait ses « maths modernes ». Aussi, il m'avait expliqué un peu de géométrie non euclidienne que j'avais beaucoup aimée. C'était un prof tout jeune. En fait je l'ai rencontré beaucoup plus tard. Il y avait encore à cette époque le service militaire en Belgique ; et pour ne pas faire le service militaire on pouvait travailler pendant un certain nombre d'années dans des pays en voie de développement. Il a fait la coopération et est allé dans ce qu'on appelait alors le Zaïre, maintenant le Congo à nouveau, et il a fait toute sa carrière d'enseignement là. Mais il était en attente d'avoir fini toute la paperasserie, donc il est resté, et c'était le bon prof qu'on a eu en dernière année, et il était très enthousiaste en maths. Il était en Belgique pour un an et on ne le savait pas car c'est la seule année qu'on l'a eu. C'était juste avant que j'aille à l'université.

C'est comme ça que tu t'es orientée vers les mathématiques à l'université ?

En fait je ne me suis pas orientée vers les mathématiques mais vers la physique. Parce que mon père était ingénieur, je voulais devenir ingénieure. En Belgique à ce moment-là pour entrer dans les études d'ingénieur qui étaient de cinq ans au lieu de quatre, il fallait faire un examen d'entrée parce que c'était un peu comme Polytechnique qui est différent en France de l'université, il fallait faire un examen d'entrée et j'ai fait cet examen d'entrée. C'était un examen écrit plus oral de maths.

Toujours non mixte ?

Non, c'était mixte. Et nous avions visité... La Belgique est toute petite. Donc pour les élèves qui voulaient aller à l'université, les écoles organisaient des voyages pour visiter des campus. Nous avons visité les campus de Gand et d'Anvers. Et à Gand, l'ingénierie civile était très importante et en fait c'est l'endroit où on a inventé le béton sous tension. Quand on insère le métal à l'intérieur du béton, c'est ce qui le rend plus fort, mais quand on met ce métal sous tension puis qu'après on coule le béton, puis qu'on relâche, alors le béton est encore plus résilient. Cela avait été inventé à Gand et donc ils en étaient très fiers. Donc là, leur truc d'ingénierie, il y avait des labos avec des grands blocs en béton et des machines qui faisaient Fhou ! Fhou ! pour mesurer (la résistance) et je me disais, c'est comme dans le magasin d'Ikea, où il y avait des machines pour montrer à quel point leurs meubles étaient forts. Cela ne m'inspirait pas vraiment, je veux dire, ça n'était pas ce à quoi j'aspirais.

Du coup je me suis dit que j'aimerais peut-être plus apprendre la physique que l'ingénierie, au grand enthousiasme de mon père car lui était devenu ingénieur parce que ses parents à lui ne savaient rien de ce qu'on pouvait faire avec les études. Quand ses enseignants à l'école secondaire avaient dit que ce serait bien si mon père pouvait étudier, ils savaient qu'il ne pouvait pas devenir médecin parce qu'il n'aimait pas la vue du sang, que certainement il ne deviendrait pas prêtre, donc pour eux il ne restait que les ingénieurs car ils venaient du Borinage et ils ne connaissaient rien d'autre. C'étaient des ouvriers, et donc mon père est devenu ingénieur par défaut, mais en fait il aurait préféré faire de la physique. Il s'est rendu compte beaucoup plus tard qu'il aurait préféré. Donc quand j'ai voulu faire de la physique, il était très content. Par contre ma mère disait que c'était terrible parce que « physicien, physicien c'est comme devenir artiste, jamais tu ne gagneras ta vie avec ça ! »

Mais il est intéressant que bien qu'elle fût femme à la maison, ménagère, elle avait toujours envisagé pour moi, et j'ai toujours envisagé pour moi-même, que je gagnerais ma vie par moi-même. Jamais je n'ai vu que je me marierais et que je resterais à la maison, jamais! Et elle non plus. Je veux dire, ce n'est pas une question que je me suis posée, simplement je n'envisageais pas d'autre avenir. J'envisageais d'avoir une famille, d'avoir des enfants, mais je voulais aussi avoir la possibilité que si le mariage ne marchait pas, je puisse pourvoir économiquement pour mes enfants donc de ne pas dépendre économiquement d'un partenaire. Et ça je crois que c'est une volonté que ma mère m'a passée presque par osmose bien que ce ne fût pas son cas dans ses 25 premières années de vie mariée.

Donc elle était inquiète que ces études de physiques te mènent à une impasse. Tu n'avais pas d'idée d'une carrière universitaire, elle ne savait pas ce que c'était?

Non, elle n'envisageait pas, je crois. En plus avec la physique on peut faire des tas d'autres choses qu'une carrière académique. C'est à l'université que je me suis rendu compte que j'aimais la physique mais j'aimais beaucoup l'aspect mathématique. Donc en fait j'ai pensé pendant la première année à peut-être changer de direction et pendant les deux premières années j'ai passé tous les examens pour pouvoir passer en licence de mathématiques plutôt qu'en physique. Donc j'ai fait les deux en cumul. Mais en deuxième année en physique nous avons eu un cours d'optique non linéaire, donc non géométrique, absolument fantastique. C'est là qu'on a fait toutes les dérivations théoriques pour montrer qu'une lentille fait une transformée de Fourier analogue et c'était une réalisation fantastique, le fait qu'un faisceau parallèle est focalisé en un point, qu'inversement si tu pars d'un Delta tu obtiens 1.

En plaçant le plan à la bonne distance.

Exactement, dans le plan focal. Mais on a aussi la phase, pas seulement l'intensité et donc nous avons, dans le labo de ce cours, fabriqué des hologrammes. C'était dans les années 70, il y a très longtemps, donc la plupart des gens n'avaient jamais entendu parler d'hologramme. Et nous en avons fait dans le labo, on voyait l'objet tridimensionnel se former; c'était fantastique et je suis restée en physique.

Oui en physique, mais tu avais rencontré la transformée de Fourier.

Exactement mais donc j'ai continué des études de physique et j'ai eu énormément de cours de physique et je n'ai jamais regretté, parce que ça m'a donné pour beaucoup de choses un point de vue différent. Les maths que je n'ai pas vues, je les ai apprises sur le tas après. Pour l'analyse réelle j'ai fouiné dans les livres et je me la suis apprise. Mais cette physique je ne sais pas si j'aurais pu.

C'est seulement pendant mes études universitaires que j'ai rencontré l'attitude : « mais tu es une fille, tu es bonne en maths? » Mais j'avais dix-huit ans; j'avais passé l'âge où ces propos auraient pu m'influencer. Je considérais que s'ils avaient cette attitude, cette attitude les caractérisait eux, plutôt que moi.

J'étais dans la même année que Jean Bourgain, donc nous étions copains de promotion et lui aimait beaucoup parler de maths. J'ai eu un crush immédiat pour lui, car c'était le premier garçon que j'aie pu rencontrer qui était plus intelligent que moi (rires). Mais bon, c'est passé, et à l'époque il n'était pas très sociable. On discutait beaucoup de maths et c'est à ce moment-là que je me suis rendu compte qu'il y avait moyen de faire une thèse et de rester à l'université après la licence.

Suite au prochain numéro!

Ingrid Daubechies est une mathématicienne belge et américaine, elle a été professeure à Princeton University et est maintenant professeure à Duke University. Elle est spécialiste de la théorie des ondelettes et de leurs applications en compression d'image et dans des domaines variés. Elle a été présidente de l'UMI et a reçu de très nombreux prix, en particulier le prix Wolf en 2023.

Maths·C·pour·L : un stage de découverte de la recherche mathématique pour étudiantes en Licence

- G. Chapuisat
- F. Durand
- É. Janvresse
- G. Toulemonde

Le premier stage Maths·C·pour·L a eu lieu au cirm du 20 au 24 février 2023.

1. Pourquoi un tel stage ?

Intention

Il s'agit d'une session non mixte d'initiation à la recherche pour des étudiantes de nos licences en mathématiques dont l'environnement socio-culturel n'est a priori pas propice à la mise en valeur des études et carrières scientifiques. Le but est de faire découvrir la recherche en mathématiques afin d'encourager les participantes à poursuivre des études de haut niveau en mathématiques. Au programme : des maths, des rencontres avec des mathématiciennes et mathématiciens, mais aussi du sport et beaucoup d'échanges impromptus.

Inspirations

Le stage Maths·C·pour·L s'est inspiré de plusieurs expériences réussies de stages de découverte de la recherche mathématique.

Les stages MathC2+[1] ont été créés en 2011 par *Animath*, tout particulièrement par Martin Andler et Charles Torossian. Ils étaient inspirés par deux stages organisés depuis 2010 à Orléans (Centre Galois) et en Seine-Saint-Denis (association *Science Ouverte*) en collaboration avec *Animath*. Ces stages de 2 à 5 jours accueillent un public jeune, de la classe de Quatrième à la Terminale. Ils sont l'occasion de leur faire découvrir le monde de la recherche. Ces stages ciblent prioritairement les élèves de milieux pour lesquels les études scientifiques ne sont pas traditionnellement un choix d'orientation. Ils sont généralement accueillis dans des laboratoires de mathématiques et sont en contact avec des chercheuses et chercheurs au gré des activités du programme.

Initialement conventionné entre le ministère de l'Éducation nationale, *Animath* et la Fédération des sciences mathématiques de Paris (fsmp), la smf a accepté en 2020 d'en reprendre la gestion administrative et financière à la place de la fsmp et une nouvelle convention associant le ministère, *Animath* et la smf a été signée en janvier 2021.

Depuis novembre 2019, les cigales[2], qui ont lieu au cirm, ont repris le format de ces stages MathC2+ avec la particularité de n'accueillir que des lycéennes. Recevant de très nombreuses candidatures, les organisateurs ont rapidement décidé de faire deux éditions par an à partir de 2021, une à l'automne et une au printemps. Le format de ces stages est désormais repris dans plusieurs villes (Les cigogne à Strasbourg...)

Les premiers stages non mixtes pour les filles avaient été initiés par *Femmes et Mathématiques* et *Animath* aux niveaux collège/lycée avec les journée *Filles, maths et informatique : une équation lumineuse* (démarrées en 2009, près de 150 journées organisées) ou les *Rendez-vous des jeunes mathématiciennes et informaticiennes* (démarrés en 2016)[3] ...

1. `smf.emath.fr/la-smf/mathc2plus`
2. `www.fr-cirm-math.fr/lescigales.html`
3. Voir `filles-et-maths.fr` pour plus d'informations.

Profil des étudiantes

Pour les stages MATHS·C·POUR·L, notre choix s'est porté vers des étudiantes de licence dont l'origine socio-culturelle ne prédestine pas aux métiers de la recherche ou aux carrières en mathématiques. Ce choix faisait suite au constat, partagé par nombre d'entre nous, d'avoir été confrontés à des étudiantes qui, malgré de bons résultats, ne poursuivaient pas vers les masters de mathématiques, soit parce qu'elles n'imaginaient pas les débouchés à l'issue des masters, soit par auto-censure projetant une image du « mathématicien » assez décalée de la réalité.

Pour ce stage au CIRM, nous avons donc souhaité éviter de sélectionner des candidates ayant déjà une connaissance marquée des études supérieures et qui sont socialement favorisées. En effet, le bénéfice de ce type de stage est bien plus important pour des étudiantes ne connaissant pas du tout ou très peu ce milieu.

Pourquoi non mixte ?

Comme l'ont montré de nombreuses études, les stéréotypes de genre en sciences et particulièrement en mathématiques sont très présents dans la population française mais aussi mondiale. Ces stéréotypes induisent un biais dans les choix de poursuite d'études et de carrière professionnelle des jeunes femmes. Ils impactent également la vision que les étudiantes ont d'elles-mêmes et en particulier de leurs résultats académiques.

Ces stéréotypes peuvent être renforcés chez toute personne dès qu'elle identifie une situation semblant confirmer le stéréotype. Par exemple, si une femme et un homme cherchent à résoudre un même problème et que l'homme y parvient avant la femme, cela risque de renforcer le stéréotype que « les hommes sont meilleurs en mathématiques » aussi bien chez l'homme que chez la femme. Le fait que l'homme ait éventuellement passé plus de temps sur le problème, qu'il ait déjà vu des notions similaires par le passé ou toute autre raison ne viendra qu'en second temps et dans tous les cas, le stéréotype aura été renforcé.

Conduire une découverte de la recherche en mathématiques avec un public d'étudiantes paraissait donc prioritaire. Pour éviter de renforcer éventuellement le stéréotype de genre chez ces étudiantes. Il paraissait également important qu'elles se retrouvent à ne chercher la solution de problèmes mathématiques qu'entre femmes. En revanche, il nous a paru important qu'elles puissent aussi échanger avec des hommes sur le domaine de la recherche en mathématiques ou sur les problèmes de l'égalité homme-femme. Les encadrants et les différents intervenants pouvaient donc être hommes comme femmes bien que nous ayons fait très attention à la présence de *roles models* féminins parmi ceux-là !

2. La réalisation

Les sociétés savantes coopèrent

La problématique de la représentativité des femmes dans nos métiers concerne tout aussi bien la SFdS, la SMAI que la SMF. Ces trois sociétés savantes ont donc naturellement collaboré pour qu'ait lieu cette première édition. L'un des enjeux de cette coopération est de travailler à la pérennisation de cette initiative.

Sélection et profil des étudiantes

Avec plus de cent candidatures reçues, la sélection a été difficile. Nous avions sélectionné 28 étudiantes de Licence (5 L1, 6 L2, 17 L3) : 27 d'entre elles étaient présentes et provenaient de 20 universités différentes (liste détaillée ci-dessous). Nous avons délibérément choisi des étudiantes pouvant venir de loin estimant que le déplacement fait partie de la vie des chercheuses et chercheurs.

Certaines étudiantes étaient en double licences, maths-physique, maths-éco, maths (sciences)-philo, souvent de milieux défavorisés, certaines de milieu rural, issues de l'immigration ou étrangères.

Voici la liste des universités de provenance des candidates sélectionnées ainsi que le nombre de candidates retenues entre parenthèses : université d'Angers (1), université de Franche Comté (2), université de Bretagne Occidentale (1), université de Picardie Jules Verne (2), université du Littoral Côte d'Opale (1), université Grenoble Alpes (1), université Polytechnique des Hauts-de-France (1), université Claude Bernard Lyon 1 (2), université de Montpellier (2), université de Lorraine (1), université de Nantes (1), université Côte d'Azur (1), université Paris Cité (1), Sorbonne université (5), université de Pau et des pays de l'Adour (1), université Rennes 1 (1), université de la Réunion (1), université Jean Monnet (1), université de Tours (1), université de Versailles Saint-Quentin en Yvelines (1).

Financement des étudiantes

Les étudiantes ont totalement été prises en charge : par l'organisation pour l'hébergement en pension complète et par le département de mathématiques dans lequel elles étudiaient pour le transport jusqu'au lieu du stage.

Il est important de remercier les collègues qui nous ont fait confiance en nous accordant des subventions (ANR, IUF, autres). Ils sont indiqués plus bas.

La pérennisation d'un tel stage est évidemment conditionnée par son financement. Le coût global de cet événement est de 20 000 euros. Pour les prochaines éditions nous sollicitons l'aide et le soutien financier de la communauté.

3. Le programme

Les étudiantes sont arrivées le dimanche soir. Dès 9h00, le lundi, les sujets de « recherche » ont été présentés par plusieurs collègues et choisis par des petits groupes d'étudiantes. Lors de cette session les sujets choisis ont été les suivants.

- Ramla Abdellatif : Qui est-ce ? et codes correcteurs d'erreur.
- Ramla Abdellatif : Somme de carrés.
- Fabien Durand : Conjecture de Toeplitz : 4 points sur une courbe fermée pour un carré.
- Florence Hubert : Motifs et Turing.
- Florence Hubert : Matrice de Leslie et dynamique des populations.
- Élise Janvresse : Conjecture de Cusick, somme des chiffres des entiers en base 2.
- Élise Janvresse : Pavages aléatoires.
- Étienne Moutot : Light out.
- Lionel Nguyen Van The : Ballon et polygones.

Toutes les matinées ont été dévolues à l'étude de ces problèmes et se sont terminées par une discussion avec une ou un collègue.

Chaque après-midi a été ponctuée d'une balade dans les calanques sauf le mercredi après-midi où une visite guidée du quartier du Panier a été organisée. Les après-midi se sont poursuivies par des rencontres avec des chercheuses et chercheurs que les étudiantes questionnaient. Nous avions demandé aux intervenantes et intervenants de rester au moins lors d'un repas et si possible une nuit sur place. Leur présence appuyé est très importante, comme peut en témoigner, par exemple, Jérôme Lelong, le directeur d'AMIES, qui s'est retrouvé assailli de questions le lendemain de son intervention lors du petit déjeuner. Il était venu parler de la place des mathématiques pour et dans les entreprises.

L'un des grands intérêts du CIRM pour un tel stage, au sein duquel nous souhaitons favoriser le maximum d'échanges et de prises d'informations par les étudiantes, est que les participantes sont en permanence au contact de chercheuses et chercheurs. Cette même semaine avait lieu *AlgoCrypt* au CIRM. Les étudiantes ont ainsi pu dialoguer avec Jade Nardi et Elena Bernardini deux chercheuses du domaine. Elles ont parlé de leur parcours, leurs choix, leur trajectoire, ...

Le repas du soir ne déroge pas à cette règle et se poursuit souvent très tard. Ramla Adbellatti a souvent dû répondre à de très nombreuses questions pratiques. Parmi les questions qui reviennent et qui reflètent leurs inquiétudes pour leur avenir : « agreg ou pas agreg avant le master Recherche ? », « le meilleur endroit pour faire sa thèse ? », « perd-on l'agreg avec un postdoc ? », ...

Il faut bien avoir en tête que pour ces étudiantes tout est totalement nouveau. Le CIRM est évidemment un lieu enchanteur qu'elles découvrent et apprécient immédiatement. Elles sont surprises par la proximité que cela procure avec les chercheuses et chercheurs présents. Pour beaucoup d'entre elles nous sommes des figures inaccessibles. Cela rend la projection vers nos métiers difficilement envisageable voire hors de propos pour ces jeunes femmes. Lors de cette semaine au cirm elles s'aperçoivent que de nouveaux chemins existent, des carrières, des parcours; inconnus hier, envisageables et envisagés désormais, tel est l'un des buts de ce stage. Les étudiantes nous ont écrit à l'issue de ce stage de nombreuses lettres et messages qui en témoignent.

Un autre intérêt du cirm est sa bibliothèque et son agencement très propice aux petits groupes de travail. Les étudiantes en ont profité et se sont installées souvent très tard dans la nuit dans ces petites salles de travail.

Il y a eu deux moments très marquants pendant ce stage.

Nous avons organisé une balade plus longue descendant à Morgiou pour remonter par la calanque de Sugiton puis son col. Nous avons surestimé notre capacité à gérer un groupe de 27 étudiantes pas toutes sportives : plusieurs passages empruntent des câbles ou une échelle et parfois il faut s'aider des mains pour franchir quelques obstacles. Elle a duré bien trop longtemps au goût de plusieurs étudiantes qui pensaient s'en sortir avec des chaussures de ville. Certaines ont adoré, d'autres ont détesté, mais toutes en parleront avec humour. Nous les avons sorties de leur zone de confort et cela a vraisemblablement aidé à la cohésion de notre groupe.

L'autre temps fort a eu lieu le même jour en soirée. Mélanie Guenais est intervenue pour échanger sur le thème de la mixité et des ressentis divers et variés des étudiantes sur leurs choix d'orientation, leurs projets, leurs études, leurs relations avec leurs environnements, … L'objectif était de mettre en évidence la présence de signaux de discriminations de genre pour aider à les identifier et s'en « protéger ».

Mélanie a d'abord organisé un tour de table où les étudiantes étaient invitées à répondre aux questions suivantes :

1. Nom, université et filière, lycée d'origine, projets (poursuite d'étude, projets professionnels, autres) ?
2. Quels sont les facteurs qui vous ont conduites à faire des études de mathématiques ? personnes, faits, contexte, goût, choix, … ?
3. Avez-vous reçu du soutien ? de qui ? ou pas ?
4. Comment vous percevez-vous dans vos études et votre contexte de travail académique ? (Bien ? À l'aise ? En confiance ?)
5. Pensez-vous que ce serait différent si vous aviez été un garçon ?

Il en est ressorti une séance d'échanges intenses et riches de retours d'expériences qui permettent d'améliorer la compréhension de ces parcours atypiques de filles, souvent de milieux défavorisés, ruraux, en mathématiques. Deux heures étaient prévues. La séance a duré plus de trois heures en raison de l'intérêt manifesté par les étudiantes. Il y a eu beaucoup d'émotions lors de ces échanges, des larmes, des prises de conscience, des colères, beaucoup de rires, des histoires marquantes, poignantes. Beaucoup de réconfort apporté les unes aux autres.

Le vendredi matin ont eu lieu les restitutions. De l'avis unanime des collègues présentes et présents la qualité des rendus était de très grande qualité, aussi bien du point de vue des mathématiques que de la prestation scénique.

À l'issue du stage Ramla a créé à la demande des étudiantes un serveur Discord sur lequel elles ont continué, et continuent à échanger, notamment sur les mathématiques.

4. L'encadrement

Les organisatrices sont Guillemette Chapuisat (Aix-Marseille Université, SMAI), Fabien Durand (université de Picardie Jules Verne, SMF), Élise Janvresse (université de Picardie Jules Verne), Gwladys Toulemonde (université de Montpellier, SFdS).

Les différentes intervenantes ont été Ramla Abdellatif (université de Picardie Jules Verne), Elena Berardini (CNRS, université de Bordeaux), Mélanie Guenais (université Paris-Saclay), Florence Hubert (Aix-Marseille Université), Jérôme Lelong (université Grenoble Alpes, ENSIMAG, AMIES), Jade Nardi (CNRS, université de Rennes), Lionel Nguyen Van The (Aix-Marseille Université), Benoîte de Saporta (université de Montpellier) et Élisabeth Remy (Aix-Marseille Université)

Nous avons aussi eu quelques visiteuses et visiteurs : Julien Cassaigne (CNRS, Aix-Marseille U.), Mitra Fouladirad (Centrale Marseille), Pascal Hubert (directeur du CIRM).

5. Le budget, les sponsors

Sponsors

Nous remercions INRIA, Claire Amiot et Franck Sueur (université de Bordeaux), Valeria Banica, Anne-Laure Dalibard et Patrice Le Calvez (IUF, Sorbonne Université), Karine Beauchard et Arnaud Debussche (IUF, ENS Rennes), Benoît Claudon (IUF, université Rennes 1), Laurent Desvillettes (IUF, université Paris Cité), Christophe Garban et Christophe Sabot (IUF, Université Lyon 1), Elisabeth Gassiat (IUF, université Paris Saclay), Elise Goujard (IUF, université de Bordeaux), Matthieu Hillairet (IUF, université de Montpellier), Jean-Michel Marin (université de Montpellier), Rémi Rhodes (IUF, Aix-Marseille Université).

Pérennisation du programme ?

Le souhait de nos trois sociétés savantes est que nous puissions réaliser un tel stage au CIRM chaque année. La prochaine édition devrait avoir lieu du 19 au 23 février 2024 sous réserve de réunir un financement suffisant.

L'initiative ayant été très bien relayée par nos correspondants locaux et les directeurs d'unité, nous avons obtenu bien plus de candidatures que de places. Afin que plus d'étudiantes puissent bénéficier d'une telle opportunité, nous espérons pouvoir motiver des collègues à travers la France pour organiser ce type de stage en sélectionnant les étudiantes qui n'auraient pas été choisies pour participer à ce stage au CIRM.

Dans cette dynamique, un deuxième stage a eu lieu du 5 au 9 juin 2023 à Amiens organisé par Frédéric Paccaut, Élise Janvresse, Fabien Durand (Université de Picardie Jules Verne) et Olivier Goubet (Université de Lille).

La difficulté pour les organisateurs est de trouver des financements pour subvenir au coût du logement des étudiantes. À Amiens, le stage pour 20 étudiantes logées a eu un coût de 9 000 euros sans les déplacements (à la charge des établissements des étudiantes).

L'an prochain, en plus du stage au cirm, deux groupes de collègues envisagent d'organiser une édition dans leurs universités. Nous travaillerons en équipe pour que ces projets voient le jour pour le plus grand bénéfice de nos étudiantes.

L'extension de l'IHP : un chantier au long cours

• S. Benzoni-Gavage
• C. Fermanian Kammerer

La Maison des mathématiques, le projet IHP+, le Musée Poincaré Perrin, la Maison Poincaré... Qui, dans la communauté mathématique, n'a pas entendu parler de ce projet dont le nom a évolué au fil des années et dont il faut souvent réexpliquer les contours ?

Nous parlons du projet d'extension de l'IHP au bâtiment d'en face, l'ancien laboratoire de chimie physique de Jean Perrin, contemporain du bâtiment historique de l'IHP fondé par Émile Borel. Pour faire court, l'IHP a désormais deux bâtiments, dont chacun porte le nom de son bâtisseur : Borel et Perrin.

Tandis que la livraison du bâtiment Perrin magnifiquement réhabilité et l'ouverture au public de la partie musée, appelée Maison Poincaré, sont (enfin !) prévues d'ici la fin de l'année, remontons aux origines. L'idée de cette promenade dans le temps est de raconter comment le projet a mûri et s'est concrétisé. Ceci donnera un aperçu de ce qui attend la communauté scientifique, habituée de l'IHP, mais aussi les autres publics, derrière la porte du bâtiment Perrin.

Les contours et missions de l'IHP

Depuis sa refondation à la fin des années 1980, la maison des mathématiques et de la physique théorique qu'est l'Institut Henri Poincaré est vouée à une triple mission : favoriser les échanges et interactions scientifiques au niveau international, permettre aux chercheurs et chercheuses venant à l'IHP de disposer d'une documentation scientifique au plus haut niveau, et favoriser le dialogue entre science et société.

Les deux premiers volets du triptyque sont assurés par ses deux départements historiques : la bibliothèque et le Centre Émile Borel. Le troisième volet s'est développé au fil des années, et se structure depuis 2020 au sein d'un troisième département : la Maison Poincaré.

La bibliothèque et le Centre Émile Borel sont bien ancrés dans le bâtiment Borel, la première occupant tout le 1er étage (après un passage au 4e entre 1954 et 1994) et le second offrant des espaces de travail au 2e étage aux participantes et participants des programmes scientifiques depuis 1994. Ce sont deux lieux que vous connaissez bien, avec le rez-de-chaussée, ses amphithéâtres en bois et son espace cafeteria. Ils ont bénéficié en 2019-2021 de rénovations et mises aux normes d'accessibilité (avec changement de l'ascenseur tant décrié) grâce à une petite partie du budget du projet d'extension.

Dans le bâtiment Perrin, des espaces neufs et lumineux seront disponibles pour les activités scientifiques, tandis que le rez-de-chaussée et le sous-sol (hors locaux techniques) seront réservés à la médiation scientifique, qui se trouvera ainsi dotée d'un espace dédié à l'IHP : la Maison Poincaré, nom officiel du musée piloté par le département du même nom.

Voici donc l'IHP déployé sur deux bâtiments. Dans le détail, outre la bibliothèque et le Centre Émile Borel, le bâtiment Borel abrite les services administratifs et techniques de l'IHP au 3e étage, ainsi que les sociétés savantes (SMF, SMAI, SFdS, SFP, SIF) au 4e. Il offre à la réservation deux amphithéâtres, quatre salles de séminaire et deux salles de réunion. Le bâtiment Perrin abrite les espaces d'expositions et d'ateliers de la Maison Poincaré, son équipe ainsi que les associations Animath, femmes & mathématiques, MATh.en.JEANS, le Fonds de dotation de l'IHP et la Fondation Sciences mathématiques de Paris. Il offre à la réservation deux amphithéâtres (dont l'amphithéâtre Perrin à l'intérieur du musée, soumis à des conditions particulières), une salle de séminaire, deux salles de réunion et des bureaux, le tout attenant à de nombreux espaces de discussion (salons, terrasses, jardin).

Retour en arrière : la genèse du projet

Tout commence avec une lavallière et une araignée. Le Centre Émile Borel est à l'étroit, il n'y a pas assez de bureaux de passage pour la communauté nationale et Cédric Villani défend l'idée d'un « musée des maths à l'IHP ». De fil en aiguille, de rendez-vous en interview, il convainc...

Un audit patrimonial du bâtiment Perrin est réalisé par l'agence d'architectes Arcs&Sites en décembre 2013. Il révèle son état aussi vétuste que fascinant, avec notamment un puits desservant par un ascenseur minuscule des salles d'expériences dans les anciennes carrières, à 30 m de profondeur.

L'agrandissement de l'IHP à ce bâtiment se trouve inscrit au Contrat de Plan État-Région (CPER) 2015-2020, cette liste de projets d'infractructures remontés par les acteurs locaux, proposés au soutien des organismes de recherche en ce qui concerne l'enseignement supérieur et la recherche, et validés ensuite par l'État.

C'est donc sous l'impulsion de Cédric Villani et Jean-Philippe Uzan, alors directeur et directeur adjoint de l'IHP, que le CNRS et l'université Pierre et Marie Curie (aujourd'hui Sorbonne Université) s'engagent en 2014 à soutenir le projet d'agrandissement de l'IHP, projet porté par la Région Île-de-France et la Ville de Paris, qui promettent d'y investir respectivement 3 et 8 millions d'euros.

On parle du projet IHP+ : il comprend la réhabilitation du bâtiment abritant alors le laboratoire de chimie physique - matière et rayonnement (LCPMR) issu du laboratoire fondé par Jean Perrin en 1926. Il s'agit d'accueillir des espaces supplémentaires pour les activités scientifiques et pour les structures hébergées par l'IHP, ainsi que ce « qui pourrait devenir une mini MISS maths » (MISS en référence à la Maison d'Initiation et de Sensibilisation aux Sciences située à Orsay).

Le 17 octobre 2014, l'IHP célèbre le 20e anniversaire de sa renaissance et annonce son extension au bâtiment Perrin pour ... 2018! En tout cas le projet est lancé, l'université Pierre et Marie Curie prévoit le déménagement du LCPMR à Jussieu (celui-ci aura lieu effectivement début 2017), les premières réunions visent à rédiger la présentation du projet pour le concours d'architecte.

Début 2016, le CNRS recrute une cheffe de projet, Marion Liewig, le *Fonds de dotation de l'IHP* est créé par le CNRS, l'Université Pierre et Marie Curie, les sociétés savantes et le Cercle des entreprises partenaires, fondé en 2015, afin de lever des fonds privés. L'IHP se dote d'un *Comité de culture mathématique*, laboratoire d'idées pour les actions grand public. Tout est en place pour travailler dans les meilleures conditions!

Du côté du bâtiment, les choses se précisent en 2017. On parle maintenant de la « Maison des mathématiques 2020 ». Face à un cahier des charges précis (un amphi, une grande salle de séminaire, un salon, des espaces de discussion...), 65 candidats déposent un pré-projet, 4 d'entre eux sont sélectionnés pour proposer un projet. C'est finalement *Atelier Novembre* qui est choisi. Le jury est conquis par les espaces lumineux et les lignes sobres d'un projet qui respecte et met en valeur la brique orangée de ce beau bâtiment des années 1920. Atelier Novembre s'appuie sur l'agence *Du & Ma* pour la scénographie de l'espace d'exposition. Le film *La Maison des mathématiques 2020*, chapitre 1, suivi plus tard du chapitre 2 décrit bien l'état d'esprit des porteurs du projet à cette époque.

Du côté du musée, le pré-projet de 2014 ne bouge pas jusqu'en 2018. On hésite d'ailleurs à utiliser le terme de musée, les collections patrimoniales de l'IHP étant malgré tout modestes et le projet ne répondant pas exactement aux stricts critères de l'appellation « musée de France ». À l'extérieur, on parle prudemment d'un « espace d'exposition dédié aux mathématiques ». En interne, c'est « Le musée », avec un grand « L », bien sûr!

Le budget CPER

État :	2M€
Région IdF :	3M€
Paris :	8,25M€
Sorbonne U. :	1,75M€ dont 0,85M€ France Relance
CNRS :	1M€

Le budget global

CPER :	16M€
Sorbonne U. :	9M€ valeur bâtiment
FDD IHP :	0,7M€ mécenat
CNRS :	0,23M€ crédits FEI
Asso. PIHP :	0,14M€ convention
Région :	0,07M€ « Sciences pour tous »

Le chantier en quelques dates

09/07/15	CPER 2015-2020
26/04/16	Fonds de dotation de l'IHP
10/05/17	Atelier Novembre et Du&Ma
14/11/18	première pierre
19/11/18	début du curage du bâtiment
28/03/19	MuseoScience
15/07/19	permis de construire
05/11/19	fin du curage
17/01/20	nom *Maison Poincaré*
10/04/20	avant-projet scéno. Du&Ma
18/06/21	démarrage réhabilitation
08/07/21	dernier comité de pilotage
08/22	arbitrage surcoûts par SU
07/23	livraison du bâtiment
27/09/23	inauguration

De nouveaux espaces pour la recherche

Le projet d'extension de l'IHP a été pensé pour donner de l'air aux activités scientifiques, aussi bien les conférences et workshops que les rencontres informelles. Ce fut un vrai défi pour Atelier Novembre d'aménager des espaces fonctionnels, modernes, aux normes de confort et d'accessibilité, dans le cadre patrimonial du bâtiment Perrin.

Casser, curer, reconstruire, aménager des « espaces d'attente sécurisés », créer des escaliers, des toilettes (cela peut paraître évident, et pourtant il a fallu en réclamer pour le 3e étage !), installer un ascenseur desservant les quarts de niveau imposés par l'existant, caser une porte automatique derrière la lourde porte de l'entrée (ce n'était pas prévu initialement, là aussi il a fallu réclamer, et rogner ailleurs sur le budget), poser des dizaines de mètres de gaines d'aération et les faire émerger sous une énorme pergola technique, ajouter des brise-soleil

côté sud (compromis trouvé avec l'architecte pour le confort thermique), se raccorder aux différents réseaux (le raccordement à l'égout à la toute fin a failli retarder encore le chantier), faire une tranchée entre les deux bâtiments pour le réseau informatique, etc.

Le bâtiment Perrin réhabilité offre sur deux niveaux une place précieuse et des locaux adaptés aux activités de recherche, notre cœur de métier et métier de cœur ! Tout ce qui fait de l'IHP la maison de la communauté mathématique et physique se trouve ainsi amélioré en confort et en espace.

Des bureaux. En libérant des bureaux dans le bâtiment Borel, le bâtiment Perrin augmente la capacité d'accueil du Centre Émile Borel pour les programmes thématiques. Surtout, il offre de nouvelles possibilités d'accueil temporaires, pour les groupes « Research in Paris » mais aussi des « bureaux de passage », pour se retrouver à l'IHP avec un collaborateur, une collaboratrice, venant chacun de son université, l'une arrivant Gare du Nord, l'autre à Montparnasse... N'oubliez pas de réserver au préalable, comme vous en avez l'habitude aujourd'hui !

Un grand salon. Lumineux et donnant sur deux terrasses, ce salon est surplombé d'une agréable mezzanine avec vue imprenable sur le jardin. Il peut accueillir les collègues qui cherchent un endroit où se poser, une table, un tableau... Ces personnes arrivent souvent d'extrémités différentes de lignes de RER et discutent ensemble à l'IHP, le grand salon est fait pour elles ! C'est par ailleurs un lieu idéal pour les pots, cocktails, pauses gourmandes et autres festivités en marge des événements scientifiques.

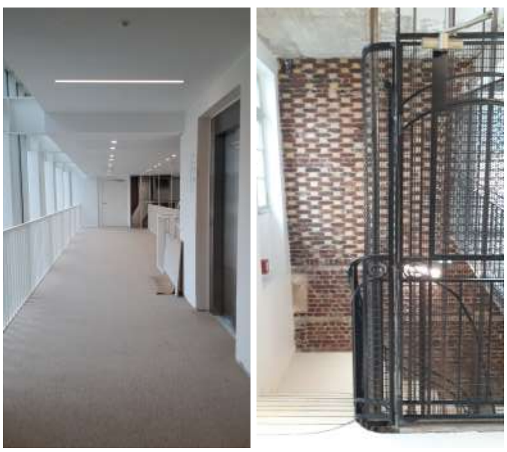
Un amphi en gradin. Le bloc cubique autrefois dédié à l'expérimentation est maintenant doté d'un double tableau coulissant à craie et des fonctions technologiques que l'on s'attend à trouver dans un amphi moderne, notamment des chaises rembourrées qui, évidemment, n'auront pas le charme des bancs en bois des amphis Darboux et Hermite...

Une salle de séminaire. D'une capacité de 38 places, cette salle à la double exposition est-ouest est une alternative confortable à la salle Grisvard. Nul doute qu'elle sera prisée par les organisateurs et organisatrices de séminaires récurrents !

S'ajoute à cela l'amphi Perrin du rez-de-chaussée, en bois mais équipé de coussins, d'une capacité de 89 places et réservable en dehors des horaires d'ouverture du musée pour des événements scientifiques bien cadrés. Voici donc l'IHP avec trois salles de conférences supplémentaires, des espaces de discussion et de réunion répartis dans les 2 600 m^2 utiles du bâtiment Perrin, à comparer avec les 4 000 m^2 du bâtiment Borel.

La réalisation de ce chantier aura mobilisé sur le terrain les équipes de Sorbonne Université et de l'IHP pendant près de cinq ans. Chaque nouvelle étape était attendue avec impatience et saluée en images sur nos réseaux de communication interne : le démarrage des travaux bien sûr, en commençant par l'installation de la « base vie » (les locaux temporaires de chantier) ; l'arrivée des très belles nouvelles fenêtres en chêne, dont certaines courbées pour l'angle du bâtiment ; la fin de l'assourdissant sablage, le démontage des échafaudages et le dévoilement de la belle couleur des façades ; la pose des carreaux de ciment (qui ont failli nous coûter 6 mois de retard), des moquettes, des parquets ; le coulage des résines ; l'installation des gradins ; le départ et le retour de la porte d'entrée après changement du sens d'ouverture, le démontage de la base vie etc.

Bien sûr, tout ne sera pas parfait. On aurait voulu une capacité plus grande pour l'amphithéâtre : impossible malgré sa hauteur majestueuse (plus de 10 m), pour des raisons d'accès et d'évacuation. La sécurité incendie a aussi conduit à transformer deux bureaux deux places en un bureau quatre places. Il n'y a pas autant de tableaux à craie qu'on aurait voulu, certains espaces de discussion s'y prêtant moins que prévu. Celui de l'amphithéâtre a seulement deux pans, choix de la maîtrise d'œuvre que l'on a constaté trop tard. Car les caractéristiques du tableau n'étaient pas visibles sur les plans et il y a eu quiproquo à la livraison : faux espoir en voyant 4 pans livrés, le tableau avait été livré en double ! On a échappé de peu à une chaire métallique, qui aurait fait mauvais ménage avec les ordinateurs. L'ascenseur moderne se prend à l'intérieur du musée au rez-de-chaussée, l'ascenseur historique est hors service par manque de budget pour sa mise aux normes.



Outre la question budgétaire, qui bénéficie du soutien du Fonds de dotation de l'IHP et de l'association des publications de l'IHP (propriétaire des *Annales de l'IHP*), il est difficile de prévoir tous les équipements mobiliers et techniques sans commettre d'oubli ou erreur. La prise en main du bâtiment va sans doute demander des adaptations à l'usage. Nous comptons sur la bienveillance de la communauté.

La Maison Poincaré et son exposition permanente

Si le chantier bâtiment a été naturellement piloté par la maîtrise d'ouvrage (Sorbonne Université, Épaurif) et la maîtrise d'œuvre (Atelier Novembre, en interaction avec Du&Ma), la conception de l'exposition permanente est restée entre les mains de l'IHP : les spécialistes étaient là, avec la muséographe Céline Nadal, pour nourrir le contenu de la coquille imaginée par le scénographe Rémi Dumas. C'est cette aventure que nous vous racontons en levant le voile sur le résultat muséographique.

Commençons par un aperçu chronologique : c'est en 2018 qu'est lancé le travail de fond sur le contenu de ce fameux « espace d'exposition » que l'on évite alors d'appeler musée.

15 mai 2018. Une séance spéciale du Comité de culture mathématique, sous la présidence d'Olivier Druet, est élargie à tous ceux et celles qui s'intéressent au projet de musée. Dans un amphi de Jussieu, participantes et participants se voient proposer de rejoindre les groupes de travail dédiés aux différents espaces du musée : un groupe par espace, avec la mission de réfléchir au contenu. Les mots-clés de l'époque sont : les fondateurs (hall), la galerie de portraits (amphi), la communication (salle de thé), les mathématiques c'est quoi ? (atrium), les bases des mathématiques et les piliers des mathématiques (grande salle), sachant que l'« espace Alice » est d'ores et déjà réservé pour l'expérience en réalité mixte Holo-Math (encore à l'état de prototype). Il y a encore du travail !

22 mai 2018. Céline Nadal, muséographe et physicienne de formation, prend contact avec Sylvie Benzoni, via Rémi Monasson alors directeur adjoint de l'IHP. D'aucunes parleraient d'alignement de planètes. Les choses se précisent en juin, notamment après une réunion avec l'Opérateur du patrimoine et des projets immobiliers de la culture (OPPIC) et l'Épaurif, qui nous autorise à faire appel à Céline Nadal au regard de son expertise unique.

5 juillet 2018. Nous réunissons les pilotes des groupes de travail à qui nous présentons Céline Nadal. Entre-temps, elle a repensé les thèmes des différents espaces selon des verbes d'action, des verbes dont la mise en scène par Rémi Dumas se traduira plus tard en grandes lettres capitales suspendues. Et oui, il s'agit de montrer les maths en action ! Durant l'année universitaire 2018-2019, les groupes vont travailler, parfois en se rencontrant, souvent en Skype (c'était le monde d'avant...), et au téléphone. Elles et ils vont échanger, solliciter des collègues dont l'expertise leur est nécessaire, rédiger des textes, choisir des illustrations. Leurs pilotes sont en contact étroit avec l'équipe projet : Marion Liewig, Céline Nadal et Sylvie Benzoni.

28 mars 2019. Céline Nadal présente en amphi Darboux son programme muséographique, un document de 27 pages où l'on trouve la majeure partie des idées aujourd'hui mises en œuvre. Toujours autour des verbes, dont certains ont mis du temps à converger : connecter, devenir, inventer, modéliser, partager, visualiser. Le document s'étoffera pour devenir une annexe de 59 pages à l'appel d'offres des lots de muséographie en septembre 2021. Vous découvrirez le résultat à l'ouverture, modulo quelques modifications inhérentes aux projets d'envergure : il y eut en effet des surprises, des changements de ligne et surtout des défis à relever.

1er janvier 2022. Élodie Cheyrou arrive à l'IHP comme responsable de la Maison Poincaré. Elle prend la suite de Marion Liewig, partant pour d'autres aventures en Bretagne occidentale, et apporte son expertise et ses idées, nourries notamment par son expérience de coordinatrice nationale de la Fête de la science. On entre dans la phase de réalisation suivie par un quatuor, les autrices de ce texte, en tant que conseillères scientifiques, la muséographe, Céline Nadal, et la responsable de la Maison Poincaré, Élodie Cheyrou. À cette petite équipe s'ajoute souvent un ou une scientifique.

C'est finalement cette phase de réalisation concrète qui prend le plus de temps. Pour l'expérience de réalité mixte Holo-Math, on peut parler de huit ans de travail, de 2015 à 2023, avec des périodes creuses et d'autres plus intenses, avec des partenaires qui déposent leur bilan et d'autres qui reprennent le flambeau, avec des problèmes de financement évidemment, étant donné le coût de développement de cette technologie innovante.

La réalisation des productions audiovisuelles plus classiques commence en 2020 : les premiers films sont tournés en pleine période de Covid, la réalisation du théâtre optique, des films pédagogiques ou esthétiques s'étale de 2021 à 2023. La production des dispositifs physiques ou interactifs, des panneaux, fiches et cartels, avec son lot interminable de « bons à tirer » à relire à plusieurs paires d'yeux, se fait sur l'année 2022-2023.

À chaque fois, il faut se faire comprendre des prestataires et parfois les convaincre que, si, c'est possible ! Ce fut notre premier public : dessinatrices, monteurs sons et/ou images, artistes, réalisateurs, écrivaines, programmeurs,...

Quelques défis de la muséographie

Si l'exposition permanente s'appuie sur des verbes, c'est pour montrer les maths en action : *Connecter, Devenir, Inventer, Modéliser, Partager, Visualiser* ! Vous avez trouvé l'intrus ? *Devenir* est un verbe d'état. En effet, ces mathématiques en action, ces mathématiques vivantes, sont le fait de femmes et d'hommes.

L'espace *Devenir* a l'ambition de présenter quelques-unes de ces personnes, de façon attractive pour les jeunes, en montrant la variété de leurs métiers et engagements. Ces visages d'aujourd'hui constituent une galerie de portraits côtoyant deux personnalités historiques ayant eu ce lieu comme bureau de direction : Jean Perrin puis Yvette Cauchois.

Ce musée parle de mathématiques et de celles et ceux qui les pratiquent. Montrer des mathématiques incarnées, proches des gens, a nécessité de choisir de mettre en valeur telle ou telle personnalité, tout en gardant un certain équilibre entre les sujets et les époques. Dès les premières réunions des groupes de travail, il a fallu choisir, privilégier certains sujets plutôt que d'autres, en écarter qui pourtant tenaient à cœur à tel ou telle membre du groupe. Ne pouvant tout dire, nous avons collectivement fait des choix.

Parmi les choix sensibles : le genre ! À l'automne 2018, les groupes travaillent, on tâtonne un peu... Dans certains espaces, on est à 20%, 30% de présence féminine. Est-ce représentatif ? D'un point de vue historique, pas vraiment. Mais si on baisse, cela fait vraiment peu. Et puis, qu'entend-on par « représentatif » ? Que veut-on « représenter », ou plutôt, présenter ? Quelle image voulons-nous donner ? Sous cet angle, le problème a une solution.

Au printemps 2019, l'équipe projet tranche : 50% ! On va présenter autant de portraits de femmes que d'hommes : cela n'est pas si difficile. Et puisqu'on doit choisir des thèmes dans l'immense champ des mathématiques, choisissons autant de sujets qui soient incarnés par des femmes que par des hommes !

Cette décision s'avère libératrice pour les pilotes de groupes car elle les dote d'un mandat clair : 50% ! Ce mandat est réalisable dans bon nombre de dispositifs : même peu nombreuses et souvent méconnues, les femmes existent en mathématiques.

Un enjeu sociétal consiste à s'adresser à tout le monde. Comme la musique ou les arts plastiques, les mathématiques ont quelque chose à dire à tous les humains. Cette conviction a orienté le travail tout au long de la conception de l'exposition. Elle a aidé les pilotes des groupes de travail en affinant le public cible : la Maison Poincaré doit être accessible aux jeunes en fin de collège, un niveau d'éducation qui inclut la grande majorité des adultes. Là encore, il y a un choix, mais les élèves plus jeunes seront aussi touchés, au travers des parcours prévus pour les familles comme des visites pour les enseignantes et enseignants du premier degré dont ils bénéficieront par ricochet.

S'adresser à tous et toutes implique également de veiller à l'accessibilité des dispositifs afin que tous les publics en bénéficient au mieux, qu'il s'agisse de non francophones, de personnes à mobilité réduite, de déficients visuels ou auditifs... Ceci a été une préoccupation constante de l'équipe projet, une volonté à affirmer et ré-affirmer à chaque étape, y compris auprès des architectes qui connaissent pourtant bien les normes. En matière d'accessibilité physique, nous avons un regret : Atelier Novembre n'a pas trouvé moyen de rendre la chaire de l'amphi Perrin accessible aux personnes en fauteuil roulant.

Cependant, c'est avec les scénographes que nous avons le plus ferraillé en matière d'accessibilité. Ne serait-ce que pour avoir des textes en anglais sur les panneaux (sans parler d'une 3e langue, inimaginable à caser pour les graphistes). Pour cela nous avons dû faire des compromis, réduire la longueur des textes : optimiser le contenu et le nombre de SEC (signes espaces comprises) est devenu notre leitmotiv. Prévoir l'incrustation des sous-titres et du doublage en langue des signes sur les films. Faire de la place pour le braille, sur des fiches encastrées (ah, l'épaisseur des fiches, tout un sujet!) et sur des panneaux surtout pas à la verticale. Grandir au maximum les tailles de caractères. Choisir des couleurs que les daltoniens et (plus rares) daltoniennes puissent distinguer. Une vigilance à maintenir jusqu'à la dernière touche de réalisation !

Les sens mobilisés dans l'exposition permanente

Faire des mathématiques autrement. Un objectif de cette exposition est de faire vivre une expérience variée et inattendue des mathématiques, au travers de divers supports de médiation : vidéos, films, panneaux, livres, jeux, manipulations, dispositifs audio, multimedia, interactifs, esthétiques... Voici quelques histoires liées à leur conception. Nous vous dévoilons ainsi quelques aspects de l'exposition mais, n'ayez crainte, il vous restera beaucoup à découvrir !

Nous sommes en décembre 2021. Peu avant les congés de fin d'année, l'IHP se lance dans un casting. Nous cherchons des mains ! Il ne s'agit pas de participer à une publicité pour vernis à ongles mais de tourner une œuvre intitulée *Reflets d'invention*, donnant à **voir** des mains en train d'écrire des mathématiques sur un tableau noir. Elle est destinée à l'espace *Inventer*, vous l'avez deviné : l'invention passe par l'écriture... Casting donc sélection. Nous voilà sélectionnant 4 mains, deux hommes, deux femmes, travaillant dans des domaines différents et disponibles pour venir à l'IHP une demi-journée pour se livrer à l'exercice d'écrire. Surprise à l'arrivée, il s'agit bien d'écrire des maths, sur un tableau noir, mais celui-ci est à l'horizontale : une idée fixe du réalisateur, qui veut pouvoir faire tourner sa caméra autour de la main sans être gêné par le reste du corps. Voilà donc nos quatre mains mathématiques qui viennent écrire, à tour de rôle, à l'horizontale, sur le tableau de la salle Grisvard, préalablement descendu du mur, posé sur des tables, sous l'œil d'une caméra placée en surplomb, et qui tourne… Chut, vous n'en saurez pas plus.

Retour en arrière, à l'automne 2019, les choses s'avèrent compliquées dans l'espace *Partager*. Après le tableau de nombres qui est devenu tableau de nœuds – en forçant quelque peu la main du scénographe – c'est maintenant le projet de cabinet de curiosités qui patine. Parmi les objets fétiches chers aux mathématiciens, la chaussure de randonnée revient inexorablement, et l'idée d'exposer des chaussures de randonnée dans la salle de thé n'enthousiasme plus grand monde. Il faut faire évoluer le dispositif. Il s'appuyait sur un partage d'expériences vécues auquel des collègues avaient bien voulu se livrer. Utilisons donc ces histoires ! Le cabinet de curiosités se transforme en *livre sonore* : une écrivaine compose de courtes histoires à partir des récits de nos mathématiciennes et mathématiciens, une dessinatrice illustre chacun de ces contes et une actrice le lit, en français et en anglais. Il y a à *voir* et à *entendre*.

Février 2023, studio Octopus : ce sont six voix mathématiques qui sont attendues. Il s'agit de contribuer à une expérience auditive d'immersion dans la langue mathématique, le *Chuchoteur de formules*. Six mois plus tôt, sur Overleaf, il y avait un fichier collaboratif où une bonne de dizaines de mathématiciens en herbe ou confirmés avaient entré leurs formules préférées. Stress des personnes en charge de la réalisation du dispositif : il y a trop de formules. Négociations : on s'arête à 36. Ça sonne bien, 36 formules de mathématiques, que le dispositif permet de visualiser et d'entendre en même temps.

Février 2023, une curieuse dalle est coulée et accueille le Rulpidon géant, financé par les mécènes du Fonds de dotation de l'IHP. Il est installé dans l'espace *Respirer* encore en plein chantier. Ah oui ! on ne vous en a pas encore parlé, *Respirer* est le verbe qui va naturellement avec le jardin.

Le Rulpidon est devenu la mascotte de la Maison Poincaré (vous comprendrez mieux pourquoi en arrivant dans le hall) et l'objet d'ateliers géométrico-topologiques qui pourront se dérouler dans la grande salle de médiation, au sous-sol à côté de l'espace d'expositions temporaires.

On manipulera dans les ateliers de la Maison Poincaré, mais également dans l'exposition permanente. Sur l'îlot de l'espace *Connecter*, il y aura une valise à ranger, un ballon à habiller, une roue à faire tourner pour dessiner, en lien avec les objets entourant une grande *Carte de métro mathématique*. Les lignes desservant cette ville imaginaire sont matérialisées par des tendeurs colorés et symbolisent quelques grands domaines des maths. Elles traversent les quartiers des nombres, des formes, des structures etc, en reliant des stations comme la géométrie différentielle ou le calcul des variations.

L'équipe de médiation pourra manipuler ces lignes, les faire passer par d'autres stations en expliquant les interconnexions entre différentes branches des mathématiques et les relier aux objets que l'on pourra *toucher*. On pourra aussi toucher les petites boules représentant un ensemble de données en 3D, que l'on pourra séparer visuellement en tournant autour du dispositif. On pourra également agir sur des mouvements de foule en plaçant des obstacles sur un jeu de l'espace *Modéliser* qui recalculera en direct l'évacuation des individus. On pourra toucher du doigt le mouvement brownien et plonger dans ses échelles, en réalité mixte dans l'espace *Visualiser* avec l'expérience Holo-Math.

Voir, entendre, toucher... Vous l'aurez compris, à la Maison Poincaré, on verra des maths, on en entendra, et on pourra toucher des objets mathématiques. La plupart des sens du visiteur et de la visiteuse seront sollicités... Il manque le goût et l'odorat, nous direz-vous, mais nous comptons combler cette lacune avec l'exposition temporaire *Dans ma cuisine!* développée par la Maison des mathématiques et de l'informatique à Lyon.

La programmation des expositions temporaires est en cours. Alors, contactez-nous si vous avez des idées d'exposition à développer!

Les espaces du bâtiment Perrin

Salle atelier	Alicia Boole Stott 74m^2 39 pl.	R-1
Espace expo.	Laurent Schwartz 170m^2 34 pl.	R-1
Amphi conf.	Jean Perrin 95m^2 89 pl.	RdC
Salle réunion	Yulia Zdanowska 20m^2 8 pl.	R+1
Salle réunion	Marcel Berger 34m^2 12 pl.	R+1
Salle séminaire	Yvette Cauchois 71m^2 38 pl.	R+2
Salon réception	Cédric Villani 33m^2 12 pl.	R+2
Salon réception	Emmy Noether 89 m^2 89 pl.	R+2
Amphi conf.	Yvonne Choquet-Bruhat 77m^2 54 pl.	R+2
Jardin	Jacqueline Ferrand	

Nous développerons en détail les remerciements lors de l'inauguration, en sérigraphie dans le hall et sur l'« ours » de l'exposition permanente. Mentionnons dès à présent les tutelles de l'IHP, dont l'écoute et le soutien ne se sont pas relâchés, les différents financeurs sans qui rien n'aurait été possible, les équipes de l'IHP dont l'enthousiasme n'a pas faibli, les architectes, scénographes et muséographe qui ont conçu et concrétisé le projet avec nous. Nos chaleureux remerciements vont également à tous les scientifiques et professionnels de l'éducation ou de la médiation qui ont été sollicités et ont répondu avec générosité en donnant de leur temps et de leur expertise, contribuant ainsi à ancrer la Maison Poincaré dans un esprit collaboratif.

Yuri Ivanovich Manin

1937-2023

à Xenia, avec affection

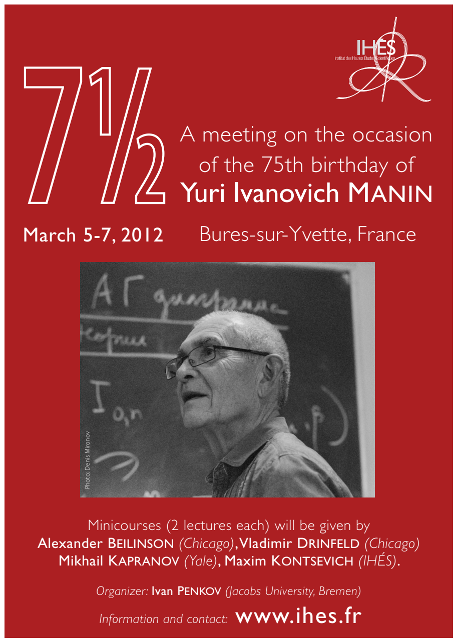
Né le 16 février 1937 à Simferopol (Crimée), Yuri Manin (Юрий Иванович Манин) est décédé le 7 janvier 2023 à Bonn (Allemagne). Après des études secondaires dans sa ville natale, il entre à l'Université de Moscou en 1953 et passe sa thèse en 1960 à l'Institut Steklov sous la direction de Chafarievitch. Il tirera de sa rencontre avec Grothendieck, lors d'un bref séjour en France en 1967, le premier article paru sur les motifs. Longtemps interdit de voyage à l'étranger ensuite pour raisons politiques, il est tout de même venu en France en 1989 pour une visite dont il reste un enregistrement vidéo [1] d'une discussion avec Bernard Julia, Jean-Michel Kantor et Jean-Pierre Serre. Après la chute du mur, il passe une année au MIT en 1991, puis devient en 1992 un des directeurs du *Max-Planck Institut für Mathematik* à Bonn. En 2005 il devient émérite, mais est resté toujours actif jusqu'à ses derniers moments.

Dès 1966 Manin se fait connaître de la communauté internationale par sa preuve de la conjecture de Mordell-Weil pour les corps de fonctions. Son nom deviendra d'ailleurs vite commun : connexion de Gauss-Manin, obstruction de Brouwer-Manin, construction d'Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin pour les instantons sur la sphère S^4.

Ses intérêts débordent largement les mathématiques : philosophie, linguistique, littérature, psychologie, esthétique, ... Il écrit des poèmes. Polyglotte, il a par exemple traduit en russe la poésie de François Villon. Il aimait citer le mot italien *varietà* de la Renaissance comme le pilier central de sa vie intellectuelle.

Auteur de 13 monographies, de plusieurs centaines d'articles, directeur de plus de cinquante thèses, il balaye les sujets mathématiques les plus divers (géométrie algébrique, formes modulaires, physique mathématique, « science fiction » comme il aimait dire). On ne peut mieux le décrire en quelques lignes que ne l'a fait Roy Abrams en conclusion du texte accompagnant ses entretiens passionnants avec David Eisenbud filmés pour la *Simons Foundation* [2] : « *With his formidable erudition and a self-deprecating wit – he calls some of his more outlandish notions "science fiction" – Yuri has explored the interplay of ostensibly dissimilar areas of mathematics and shown time and again that the boundaries that divide them from one another, and from the culture at large, are porous.* »

Après sa brève mais très féconde visite en 1967, Manin a visité l'IHÉS plusieurs fois dans sa carrière, notamment en 1989, 2000, 2008, et 2012 à l'occasion de la conférence « 7 1/2 » célébrant son 75e anniversaire, avec des mini-cours de certains de ses meilleurs étudiants, dont voici le poster :



Les témoignages que nous avons rassemblés attestent de la profondeur de sa vision et aussi de sa personnalité si attachante.

J.-P. Bourguignon (IHÉS), M. Demazure

1. https://e.pcloud.link/publink/show?code=XZ6vFhZPSubSQd8x5JhGlq8hLYJA7dbMwjy
2. https://www.simonsfoundation.org/2012/01/27/yuri-manin/

Phillip Griffiths, IAS, Princeton

Yuri Manin was truly a Renaissance person. As much as anyone I have known, both from within the mathematics community and from outside it, his interests ranged far and wide. These were not just casual interests; they involved substantive engagement, be it in physics, psychology, philosophy, or the other areas Yuri touched on. And in mathematics his interests and contributions ranged across our field in the manner of Hermann Weyl.

On a personal note, I think that for most of us there are a very few works in mathematics that shaped our understanding of and work in our subject. For me, Yuri's papers on Mordell's conjecture over function fields were absolutely seminal. Periods of integrals of algebraic functions are generally transcendental. Among their many beautiful properties none is more fundamental than that they satisfy algebraic differential equations. The general modern formulation of this, christened by Grothendieck as the Gauss-Manin connection, appeared in Yuri's papers. And although I had studied them, there is nothing quite like having had the experience of Yuri explaining them to me in person as he did in Mumbai in 1968. Our community was immeasurably enriched by the research, the work and the overall mathematical presence in all its aspects of Yuri Manin.

Jean-Michel Kantor, Paris

J'ai fait la connaissance de Yuri Manin l'hiver 1976, alors que je me glissais en débutant dans les séminaires mathématiques de l'université de Moscou MGU, ceux d'Arnold, de Gelfand, de Manin. Les étudiants comme les professeurs ne semblaient pas attirés par un jeune étranger (on était en pleine période brejnévienne), seul Yuri Manin m'a demandé des nouvelles des mathématiciens de Paris qu'il n'avait pas visités depuis une dizaine d'années.

Une longue conversation naquit entre nous, qui se prolongea au fil des années, facilitée par internet. Je fus vite fasciné par son goût pour toutes les cultures : dans sa jeunesse il a traduit Villon en russe, il a étudié en profondeur la psychologie, la psycho-linguistique, la psychanalyse – Freud comme Jung… – En témoigne le passionnant recueil [6]. Son amour pour toute la culture et son attachement à son unité vont de pair avec un regard critique : Manin reste à distance des phénomènes, des structures organisées, il s'intéresse en profondeur à la philosophie, à la politique, à la psychanalyse, sans adhérer, et garde ainsi le pouvoir d'une critique créative. Ce choix s'exprime aussi par un humour communicatif, que l'on retrouve dans certains de ses articles comme celui sur la théorie des motifs (cf. [5]) avec un exergue emprunté à Raymond Queneau.

L'idée des métaphores parcourt la pensée de Manin depuis longtemps (cf. [4] et [6]), et a sans doute inspiré son rôle moteur à partir des années quatre-vingt dans le rapprochement entre mathématiciens et physiciens. Ce rapprochement spectaculaire fut au cœur de la discussion avec Jean-Pierre Serre et Bernard Julia (cf. note 1) que j'ai organisée en 1989 lors du retour de Manin à Paris après vingt ans d'absence.

C'est sous forme métaphorique que Manin évoquait la relation entre mathématiques et physique dans son Séminaire de l'automne 1977. Manin explique (selon les notes de Vladimir Drinfeld [3]) que l'étude de la physique pour un mathématicien est comparable à celle de l'éthique humaine pour un Martien. Heureusement, dit-il, il y a des sources pour aider le Martien : les fables d'Ésope (mais elles pourraient perdre le Martien avec ses renards et ses loups) et l'éthique de Spinoza. Pour l'étude de la physique, le mathématicien dispose des leçons de Feynmann (elles correspondent aux fables d'Ésope) et des volumes de Landau-Lifschitz (l'analogue de Spinoza). C'est une autre forme de métaphore, mathématique celle-là, que Manin voit dans la preuve d'existence de Dieu par Anselme, devenue preuve d'existence des infinis dans la théorie des ensembles, où interviennent les mathématiciens membres d'une secte mystique, les Adorateurs du Nom, à l'origine de l'école de Moscou [4]. Manin, installé au *Max Planck Institut* à Bonn depuis 1993, lit notre livre et un jour je reçois des poèmes que cette histoire lui a inspirés (cf. [6] en russe). Les vers sont associés au spectacle des barges circulant sur le Rhin, chacune avec un nom propre, qu'il observe depuis son appartement. En voici un extrait :

Des barges sur le Rhin *(élégie) - Extrait*
IMMACULATA se câline timidement
vers la rive gauche ; elle tente de celer
son visage du voile d'une faible fumée.
Dieu ne peut être connu, mais il peut être nommé.
Le Nom de Dieu est Dieu lui-même,

3. `https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?option_lang=rus&eventID=1&confid=2229`
4. Graham, Loren, Kantor, Jean-Michel, *Au Nom de l'infini : une histoire vraie de mysticisme religieux et de création mathématique*, Belin, 2010.

Ils le croyaient les Adorateurs du Nom.
Starets Ilarion, Pavel Florensky.
Et l'infini ne peut être perçu et connu,
mais il peut être nommé (les Alephs de Cantor).
Qui peut connaître les chalands ?
Qui les nomme ?
Ils – ou Elles – sont tout autant
au-delà de la compréhension des mortels.

Pour conclure ce souvenir ému, une pensée qu'il prononça à plusieurs reprises, reflet d'une vie réussie : *« Le destin m'a trop bien traité, j'ai eu le meilleur professeur, le meilleur des métiers et la meilleure des femmes »*. Ou encore ce vers de T.S. Eliot qu'il citait volontiers (*Four quartets, II*) *« For us, there is only the trying. The rest is not our business. »*

Arkady Vaintrob, University of Oregon

I met Yuri I. Manin quite by chance. Yakov G. Sinai, with whom I was working on a problem from ergodic number theory, sent me to Manin to ask what else could be done in the area. Manin gave some advice and, in passing, mentioned that one could start working not with problems but with the study of interesting topics and only then look at what could be done there. I really liked this approach and, after some time, I asked to become Manin's student. Subconsciously, I sensed that he was a divine messenger sent to reveal mathematical miracles and mysteries to mere mortals.

Manin's scope of mathematical interests was immense; he had worked on number theory, algebraic geometry, integrable systems, mathematical logic, homological algebra, differential equations, theory of super-manifolds, quantum groups, coding theory, gauge theory, string theory, quantum computers, and more. When choosing his next area of study, Yu.I. was guided solely by his own internal logic. He was an extraordinarily independent person who completely ignored fashion and the spirit of competition. Manin's circle of scholarly interests was not limited to mathematics and physics; he was equally enthusiastic about linguistics, psychology, literary criticism, and poetry.

Many outsiders may have seen decadence and snobbery in Manin's manners and breadth of interests, but his close friends and students knew that he was a true Renaissance man, a knight of science driven solely by the thirst for knowledge and truth. It is no wonder that Manin was the inspiration for mathematician Vecherovsky, the character of the Strugatsky brothers' novel *One billion years before the end of the world.* Vecherovsky was so fanatically devoted to science that he decided to continue the research of several other scientists who were forced to abandon their work due to the universe's colossal resistance threatening their well-being.

One of Manin's lifelong passions was poetry. Half-jokingly, he said that five generations of the Manin family had inherited a "passion for versifying" starting with his grandfather. Indeed, his poetic sensibility emerged earlier than his mathematical talent. He recalled how, at six years of age, he was tasked with learning the Soviet anthem in kindergarten and was appalled by its poor rhymes. Seven decades later, Yu.I. was the only mathematician whose poetry was included in the fundamental anthology *Russian Poetry 1950-2000*.

I would like to conclude by sharing a poem in memory of Yu.I. Manin's passing on Christmas Day this year, written by my wife, Yulia Nemirovskaya :

Amidst the fir trees and winter mulled wine,
The Lord sighed that he was not with Him.
He spoke: "Long have I waited for him,
For feeling, for pondering.
I'll bestow him a part of heaven,
An uncharted region of the mind..."
And as a Christmas gift, he took him -
Leaving us only these twinkles behind.

David Eisenbud, Berkeley

I first met Yuri when we were both visiting to lecture in Madrid at the Universidad Complutense – I think it was in the Spring of 1991. My high-school-age son Daniel was with me and Xenia was along with Yuri. It had just become possible for Russians to travel to the West, and I believe that it was Yuri and Xenia's very first such trip.

We all had the week-end free and decided to go together to the ancient town of Toledo, an easy train ride and a place of great historical significance. Daniel spoke Spanish the best of us and could translate if needed. I remember approaching the walled city on foot, the path leading up the wall from the outside; Yuri remarked that we might have been in the Middle Ages.

Once inside the town we went first to admire the El Greco Museum and then wandered the ancient city. Yuri knew far more than I did, of both history and art. He never showed off his knowledge, but he was a wonderful teacher.

We bought some local ham, cheese and bread for a picnic; but where to eat it? We happily sat in the shade against a wall on a quiet street. I remember a Spanish couple passing by; they looked down at us and one said to the other, with considerable annoyance: "Roma!" (Gypsies!). We were, indeed, mathematical wanderers.

Later in the day, we sat at leisure in a café, enjoying the warm sun and the view. Yuri mused that he had never expected that being a mathematician would lead to traveling in this way...

Years later, I visited Yuri and Xenia in Bonn, where he was a Director of the *Max Planck institut*. I was impressed by the cool elegance of their apartment, which perfectly matched my sense of the couple. I remember Yuri's expounding on the character of the "trickster" across literature and culture. Yuri's calm persona seemed to me opposite to the trickster's – perhaps one source of his interest.

Yes, we also talked about mathematics. I was then working on some aspect of the Bernstein-Gel′fand-Gel′fand correspondence, and remarked on the close relation of that idea to Beilinson's famous resolution of the diagonal on projective space. Yuri knew both sides of the story and suggested the key to the connection: *"Both Beilinson and Gel′fand"*, he said, *"were in a lecture that I gave..."*

Still later, when I was working at the Simons Foundation, I initiated a series of long-form video interviews with eminent scientists called *"Science Lives"*. Each subject was asked to name a "listener" – someone sympathetic who would understand enough of the subject's mathematics so that some of the talk could be technical, as well as personal, typically a former student or long-time colleague. Yuri was an obvious candidate for the series and agreed to take part. When I asked him whom he would like to have in as listener, I was surprised and pleased that he chose me (see footnote 2)!

Maxim Kontsevitch, IHÉS

In the beginning of January, just a few days after the sad news about Yu.I. Manin's death spread among his friends and students, a small memorial event was held in Bonn (it was totally ephemeral, there is no record left). I was asked to do a review of Manin's mathematical work – my goodness! Even the mere listing of topics makes one dizzy.

His legendary seminars were held 2 to 3 times a week for about two decades in Moscow, and then continued in Bonn and other places in the West after the perestroika. It was a fantastic school of *Mathematica Universalis*, an immersion in a whirlpool of ideas and topics, both for his students and for those who simply attended his seminars (such as, in my time, Alexander Goncharov or myself). In my opinion, this was one of the most important seminars (along with the Gelfand seminar) – not only in Moscow – of the second half of the last century, but in the entire history of mathematics. Many new topics and ideas were born there. I recommend that the reader turns to [3] recording just the period 1984-1986.

The seminars were held in different formats, often given by his students (Alexander Beilinson and Mikhail Kapranov in my time, in the 1980s), or by Manin himself when he gave a mini-course, or sometimes a talk on someone else's work (for example, Donaldson's theorem for Hermitian Yang-Mills, or even once on a very unserious topic: Conway's recursion $0 \to 10 \to 1110 \to 3110 \to 132110 \to \ldots$).

At any given moment Manin seemed to move completely from a previous subject to a new one. When I was present, there were not even a whiff of initial interest from another era in, say, rationality questions, p-divisible groups or modular forms. An apocryphal story from the 70s : after the summer break, a student came to Manin explaining his new results in number theory, and got in response: *"Didn't you know that it's been 3 months since I switched to logic?"*.

About preparing lectures, he was writing a very precise "battle plan" of the talk on a piece of paper in the landscape format, with the predefined places where on the blackboard to put definitions, examples etc.

When writing, he was always looking for the ideal phrase. I have witnessed it firsthand during my collaboration with Manin in the early 90s at the *Max Planck Institut in Mathematik*, in the infancy of what we baptised Gromov-Witten invariants. Some find his perfectionism a bit annoying, as for instance my own teacher Israel Gelfand, who once told me that Manin's mathematical texts reminded him of an omelet that was too perfectly cooked.

Around New Year's Eve time, Manin had a personal tradition of writing "the formula of the past year" on a piece of paper. For him mathematics was an infinite journey in which new horizons were always opening up. He worked essentially every day, and until the very end.

Manin was a mathematician-philosopher, like e.g. Henri Poincaré or Alexander Grothendieck, and a magnificent wordsmith. He was very prone to introspection, wrote extensively about the "purpose" of mathematics and its dialogue with physics, and made numerous forays into psychology, linguistics, comparative literature, etc. (I suggest consulting the wonderful collection [6] in the language of your choice English/French/Russian, – preferably the latest edition).

Several times, different currents of ideas and themes in Manin's universe suddenly started talking to each other. Perhaps the best example is when the Langlands programme began to interact with the ideas of integrability in mathematical physics, and after that with quantum groups and braid symmetry (in the works of Vladimir Drinfeld and of Ivan Cherednik). Rationality issues from Manin's youth were resurrected later in the idea of height counting functions developed together with Yuri Tschinkel and Victor Batyrev, making resonances with the nascent minimal model programme (and the central role of the sign of the canonical class, also ubiquitous in differential geometry), and then having beautifully behaving analogs in quantum cohomology.

I remember back in Bonn around 1992-1993 when we collaborated on the translation of Edward Witten's paper on topological σ-model to a rigorous formalism. Manin told me then he hadn't felt such a pleasure in doing math in a long time. The subject of quantum cohomology and mirror symmetry opened a completely new and unexpected face of algebraic geometry, and both Manin and I have been enchanted by mirror symmetry for years.

Manin used to say that the ultimate question of mathematics is: "what is a space"?. In the talk opening the *Arbeitstagung* in 1984 (delivered by Sir Michael Atiyah), he made a very inspiring proposal/prediction well ahead of his time. His "manifold 2000" has three types of dimensions, it should be a super scheme over $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ with the Calabi-Yau metric on the set of complex points.

My guess is that eventually he found the realms of algebraic geometry and number theory too narrow, and started to explore the new extremely fertile worlds offered by theoretical physics, with supersymmetry, with a built-in infinite-dimensionality, with amazing new algebraic structures (compared with traditional pure mathematics), etc.

His later writings deal with some new categorical directions, that (to my knowledge) are not yet understood/digested by our community, except for a few close collaborators.

Yuri Manin is for me an eternal hero, one of few truly universal mathematicians, not only a discoverer of new results, theories and concepts, but also a knight of mathematics who helped to preserve the honour of our science.

Athanase Papadopoulos, CNRS Strasbourg

La première fois où j'ai parlé avec Yuri Manin, c'était en juillet 1994. J'étais invité pour quelques mois à l'Institut Max Planck de Bonn, et Manin était déjà là-bas comme un des directeurs de l'Institut. Je venais de terminer la lecture des *Mémoires* d'Andrei Tarkovski des années 1970-1986, publié par les *Cahiers du Cinéma*. Dans les premières pages, Tarkovski parle de Manin. Ce jour-là, à l'heure du thé, j'ai rencontré Manin, et je lui ai dit que Tarkovski parlait de lui dans son livre. Il m'a demandé « *Quel Tarkovski ?* » C'est vrai qu'il y a le père, Arseni Tarkovski, le poète, et le fils, Andrei. Je lui ai dit : « *Andrei, le cinéaste.* » J'avais le livre dans mon bureau et je le lui ai montré. Il était visiblement touché. Il a photocopié quelques pages du livre et il m'a demandé de lui en acheter une copie quand j'irais de nouveau en France. Dans ce passage, Tarkovski relate un débat qui a eu lieu, après la première projection de son film *Andrei Roublev*, à l'université de Moscou, après laquelle Manin était intervenu. Parlant de ce débat, Tarkovski écrit : « *Quel niveau ! Nul et débile. Mais il y a eu une intervention, celle d'un professeur de mathématiques, lauréat du prix Lénine, un certain Manin (il ne doit pas avoir plus de trente ans) qui est remarquable. Je partage son point de vue. évidemment, on ne peut pas dire ces choses-là de soi-même. Mais c'est exactement ce que je pensais quand j'ai fait* Andrei Roublev. *Et pour ces paroles, je dis merci à Manin.* » Tarkovski rapporte ensuite une partie de ce que Manin a dit.

Plusieurs années plus tard, nous avons reparlé de cet épisode. C'était pendant le covid, et on correspondait par mail. Yuri m'écrit, le 20 mars 2020 : « *[. . .] I am trying to be quiet and keep my feelings.*

My ultimate joke about all of it : after all, we have read Gogol, Kafka, etc. [. . .] Let us watch Tarkovski. » Le titre du mail était d'ailleurs « Tarkovski ». Il m'a rappelé alors son intervention à l'université, au moment de la projection d'*Andrei Roublev*. Je reproduis ici une partie du mail : « *It was the first ever public screening of* Rublev *; it was at the Moscow University Club (a former Orthodox Church, now again). I was then a young math professor at the university, and I was invited to attend it. After the screening, several persons from the public (I do not know who, probably, a party committee required it from them) delivered very critical speeches. I was very angry, ran to the podium and defended Tarkovski and his creativity.* »

La nouvelle de la disparition de Manin fut pour moi, comme pour tous ceux qui l'avaient connu, un choc. Il était certainement l'un des plus grands mathématiciens de notre temps, mais aussi un humaniste, philosophe, écrivain, poète et artiste. Il était surtout tout cela ensemble, c'est-à-dire un homme de la Renaissance vivant aux xx^e et xxi^e siècles.

Caterina Consani, John Hopkins University

It was Spring 1995, and with some friends, we drove from Hyde Park to Evanston: at Northwestern University, Yuri Manin gave his course in the afternoon. A few years earlier, Manin published an original article (cf. [1]) proposing a theory I hoped to connect with the results of my Ph.D. thesis. In Arakelov geometry, an arithmetic surface is completed by enlarging the group of divisors with formal linear combinations of the "closed fibers at infinity." In that paper, Manin mathematically justified the idea that the dual graph of any such fiber is describable by an infinite tangle of bounded geodesics in a hyperbolic handlebody endowed with a Schottky uniformization. Following the viewpoint that a "fiber at infinity" is "maximally degenerate," I constructed a complex of real differential forms endowed with an operator acting as the logarithm of the (local) monodromy at infinity. The outcome was the proof of a question – hinted by Manin in his article – that the Archimedean factor of the zeta function of an arithmetic surface is the (inverse of the) characteristic polynomial of an Archimedean Frobenius acting on a space of monodromy invariants.

Excited about this result, I wanted to reach him after one class to discuss this topic, knowing that Manin supported young mathematicians' work. A few years later, at the *Max-Planck Institut* in Bonn, I had this opportunity when, at his seminar, I presented the connections we found, with Matilde Marcolli, in the context of dynamical systems and by implementing techniques of non-commutative geometry [5].

Yuri Manin was an attentive and respectful listener, not used to overwhelming people with the big wave of his mathematical knowledge. Once, he asked, as if he had never considered this topic before: *"What do you think of* $\mathbb{F}_1$*?"* This is the "field with one element" that Jacques Tits envisioned many years before while developing his theory of spherical buildings (cf. note 4). Manin noticed the need for this fundamental structure in Arakelov geometry and imported the ideas of Tits on $\mathbb{F}_1$ into arithmetic geometry combined with André Weil's suggestive analogies on the structures of global fields of different characteristics. He proposed the existence of a common core under $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Together with Alain Connes [6], we pursued this intuition which led us to the development of a geometric theory where the initial object $\mathbb{Z}$ of the category of rings is replaced by the (categorical) sphere spectrum $\mathbb{S}$, which plays the role of the coefficients of an absolute geometry of topos type.

In common with Alexander Grothendieck, Yuri Manin had a tremendous mathematical vision. He perceived the presence of number theoretic entities in quantum physics and successfully motivated why logic speaks to quantum mechanics and noncommutative geometry connects to mathematical physics. With him, we lost a charismatic mathematician and a refined discoverer of hidden symmetries in sciences. I dedicate this poem [7] to his memory:

О милых спутниках, которое наш свет
Своим сопутствием для хас животворили,
Не гобори с тоской: их нет;
Но с благодарностию: были.

Василий Андреїевич Жуковский

Matilde Marcolli, CalTech

Je me tiens au milieu de ce qui reste de sa vie : des cartons remplis de feuilles manuscrites laissées dans son bureau à l'institut, des livres à choisir dans sa bibliothèque personnelle, des fichiers inachevés

5. C. Consani, M. Marcolli, *Non-commutative geometry, dynamics, and* ∞*-adic Arakelov geometry*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2) (2004), 167-251.

6. A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for* $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. ArXiv:2205.01391.

7. Voilà une traduction proposée par Maxim Kontsevitch : *De chers compagnons, qui par leur présence à nos côtés\Nous ont apporté la vivacité\Ne dites pas avec tristesse : ils sont partis ;\Mais avec reconnaissance : ils étaient.\Vasilii Andreïevich Joukovski.*

dans l'ordinateur éteint. Qu'a-t-il laissé derrière lui, au-delà de ce grand vide ? Comment lire ce long testament, de plus de trois cents articles, d'une douzaine de livres, de plus de soixante élèves ? On dit que j'ai été la personne avec qui il a le plus collaboré. Cela, c'est vrai, mais je n'ai été qu'une apparition tardive à l'horizon de sa vie, et je ne suis pas bonne interprète de tout ce qui s'est passé avant mon temps. Néanmoins, je dois tenter de donner un sens à cette perte immense : je n'arrête pas de parcourir les anciens articles, essayant d'imaginer ce qu'était cet esprit si familier, à l'époque où je ne le connaissais pas encore.

La seule façon dont je peux décrire les mathématiques de Yuri est comme l'œuvre d'un poète. J'ai été témoin de la touche légère et élégante avec laquelle il composait ses œuvres, de ses métaphores mathématiques audacieuses qui révélaient des liens surprenants, de son intuition, de la palette de couleurs des émotions sous-jacentes. Comment aurais-je pu ne pas aimer tout cela intensément ? Il m'a appris à regarder les mathématiques comme un voyage d'exploration intérieure, comme une expression lyrique de notre créativité. Il m'a fait voir les mathématiques comme un langage des sentiments, comme une substance subtile de l'alchimie, la puissance de sa pensée mathématique étant toujours consacrée à la poursuite de la beauté plutôt qu'à celle du pouvoir.

Il a été mon ami le plus cher, il a été pour moi la lyre d'Orphée.

Nous avons collaboré pendant vingt-trois ans, jusqu'à la fin de sa vie, et je suis douloureusement consciente que je ne connaîtrai plus jamais rien de semblable dans le reste de la mienne. Mais au jeu de la vie, la phase finale requiert une stratégie très difficile et tragique. L'envie, le besoin, de maintenir le même niveau de créativité mathématique devient une lutte jusqu'au dernier sang. Oui, il faut parler de sang, d'une course contre le temps, d'une partie d'échecs avec la mort, pour ralentir le passage des années, des mois qui restent. Les mathématiques, c'est aussi cela.

Je n'avais jamais compris comme au cours de ces deux ou trois dernières années à quel point Yuri avait besoin des mathématiques dans sa vie, presque comme si c'était une nécessité physiologique. J'ai vécu cette accélération finale : les derniers vers du poète, le dernier sang, les dernières pensées mathématiques. Je l'ai vue de l'intérieur, jusqu'à la fin. Des mois plus tard, je me tiens au milieu de ce qui reste de sa vie, cherchant toujours un moyen de lui dire adieu.

Bruno Vallette, univ. Sorbonne Paris Nord

Toutes celles et tous ceux qui ont connu Yuri Ivanovich Manin ont ressenti un immense vide à l'annonce de sa disparition. Une partie du monde et de son humanité nous avait quittés. Mais rapidement, un autre sentiment plus positif, s'est imposé, celui d'avoir eu le privilège de croiser la vie d'un tel géant et d'une si belle personne. On ne peut pas résumer Yuri Ivanovich Manin qui fut à la fois mathématicien, physicien, logicien, linguiste, philosophe, poète, etc. bref un humaniste universaliste. Il faudra beaucoup de témoignages pour apprécier tous les aspects de sa vie.

Ces dernières années, j'ai eu la chance de pouvoir discuter de nombreuses fois avec Yuri Ivanovich et même d'avoir été son collaborateur. À cette occasion, il m'avait raconté sa vision de la rédaction des livres en mathématique, et il en a beaucoup écrit ! Pour lui, tout commençait avec l'émergence d'un monstre tapis dans un coin : un nouveau domaine à comprendre. Lui, modeste chevalier, s'attelait donc à le combattre, c'est-à-dire à le circonscrire, à le digérer. Ce long travail exigeait de prendre des notes. À la fin du combat, soit le monstre l'avait emporté et Yuri Ivanovich s'avouait épuisé devant l'immensité de la tâche, soit le monstre était vaincu et Yuri Ivanovich pensait avoir bien cerné toutes les idées en jeu. Dans tous les cas, restaient ses fameuses notes et il se trouve qu'elles pourraient sûrement être utiles à d'autres, disait-il. Il décidait donc de les publier, sait-on jamais.

Nous, francophones, avons la chance que son livre de réflexions « *Les mathématiques comme métaphore* » vient non seulement d'être traduit et publié en français, mais surtout que cette nouvelle version ait été enrichie notamment de ses poèmes. Une partie de son univers y est toujours vivant et je conseille vivement à quiconque de s'y plonger, certainement une source de joie. À chaque fois que je pense à Yuri Ivanovich, j'ai en fait en tête le couple qu'il forme avec Xenia Glebovna, à qui vont toutes mes pensées et mon affection aujourd'hui.

Alain Connes, Collège de France

C'est le privilège de quelques mathématiciens de réussir à laisser un héritage durable grâce à leurs travaux révolutionnaires, garantissant que leurs idées continuent d'inspirer et d'influencer de nombreuses générations bien après leur disparition. Cette capacité remarquable est incarnée par les esprits brillants d'Évariste Galois, Bernhard Riemann, Jacques Tits, Alexandre Grothendieck et, plus récemment, Yuri Manin. Il est étonnant que ce soit la partie inachevée de leurs travaux qui soit la plus féconde, la lettre énigmatique de Galois écrite la veille de son duel, l'Hypothèse de Riemann, le « corps à un élément » de Tits et les motifs de Grothendieck par exemple. Leurs contributions au domaine des mathématiques ont laissé un impact considérable et durable, qui va bien au-delà de leurs travaux publiés et continue d'alimenter notre imagination.

C'est Yuri Manin qui a le premier reconnu (cf. [2]) la nécessité de « coefficients absolus » en géométrie d'Arakelov, indépendamment des premières idées avancées par Robert Steinberg [8] et Tits [9] dans le contexte des groupes de Chevalley. L'objectif est de décrire un cadre géométrique pour les corps de nombres, analogue à celui qu'André Weil a utilisé dans sa preuve de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions. Plus précisément, on cherche un remplacement pour la surface $C \times_{\mathbb{F}_q} C$, où C est une courbe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, et dont le corps de fonctions est le corps global donné. Manin a postulé l'existence du point absolu $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_1$, ce qui permettrait d'appliquer la stratégie de Weil à l'étude de la fonction zêta de Riemann. Pour le schéma algébrique $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, on pourrait alors utiliser le spectre du produit tensoriel $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ comme substitut pour la surface $C \times_{\mathbb{F}_q} C$.

Yuri Manin a toujours prôné la fécondité des interactions inattendues entre différentes approches d'un problème mathématique. La recherche du point absolu $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_1$ et des coefficients absolus a été une source constante d'inspiration dans notre travail commun avec Katia Consani au cours des quinze dernières années et engendré les interactions surprenantes avec la théorie des topos, celle des semi-anneaux de caractéristique 1 et celle des spectres en topologie algébrique où la version combinatoire $\mathbb{S}$ du spectre en sphères donne un candidat idéal comme coefficient absolu. Il ne saurait en être question en plus de détails ici mais citons simplement ce court extrait de l'article (cf. [1]) : « *The central question we address can be provocatively put as follows : if numbers are similar to polynomials in one variable over a finite field, what is the analogue of polynomials in several variables ? Or, in more geometric terms, does there exist a category in which one can define "absolute Descartes powers"* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \times \cdots \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *?* » dont nous avons très récemment admiré la préscience en réalisant (cf. note 6) l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ comme anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$.

Le point clé est que l'addition [10] de polynômes $P(X) = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j \; X^j, \quad \alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$ avec des coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$ est identique à l'addition de vecteurs de Witt pour le corps fini $\mathbb{F}_3$. L'addition $P+Q$ de deux polynômes de degré $\leqslant n$ donne un polynôme de degré $\leqslant n+1$ et la seule règle non évidente à préciser est la somme des deux polynômes constants : $1 + 1 := X - 1$. Au niveau conceptuel, l'important est que l'image de la section de Teichmüller pour $\mathbb{F}_3$ est contenue dans $\mathbb{Z}$, tandis que les vecteurs de Witt avec un nombre fini de composantes non nulles forment un sous-anneau de l'anneau de Witt, et que ce sous-anneau est $\mathbb{Z}$!

Les « puissances absolues de Descartes » suggérées par Yuri Manin nécessiteront la compréhension des produits tensoriels de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}[\pm 1]$, ce qui constituera le prochain test du point de vue visionnaire de Manin.

Références

[1] Y. I. Manin. « Three-dimensional hyperbolic geometry as ∞adic Arakelov geometry ». *Inventiones mathematicae* **104**, nº 1 (1991), p. 223-243.

[2] Y. Manin. « Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa) ». In : 228. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). 1995, p. 4, 121-163.

[3] Y. I. Manin. « K-theory, Arithmetic and Geometry ». *Lect. Notes Math.*, nº 1289, Springer Verlag (1987).

[4] Y. I. Manin. « Mathematics as metaphor ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Kyoto*. 1990.

[5] Y. I. Manin. « Forgotten motives : the varieties of scientific experience ». In : *Alexandre Grothendieck : a mathematical portrait*. Int. Press, Somerville, MA, 2014, p. 299-307.

[6] Y. I. Manin. *Les mathématiques comme métaphore*. Paris, Les Belles lettres (2021), éditions en russe (complète) et en anglais. La réédition en russe contiendra une autobiographie de la jeunesse de Y. Manin.

8. R. Steinberg, *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (2) (1951), pp. 274–282.

9. J. Tits, *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*. Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles 19-22 décembre 1956, Centre Belge de Recherches Mathématiques établissements Ceuterick, Louvain ; Librairie Gauthier-Villars, Paris (1957), 261-289.

10. Une fois que l'addition est définie, le produit suit de manière unique en utilisant $X^j \times X^k = X^{j+k}$.

Les Mathématiques comme Métaphore
Yuri MANIN
L'Âne d'or, Les Belles Lettres, 2021. 598 p. ISBN : 978-2-25145-172-5

À elle seule, la liste des livres publiés par Yuri Manin au long de sa carrière est une démonstration incontestable de son plaisir d'écrire et de la variété de ses centres d'interêts. On y trouve, parmi d'autres, des monographies de physique mathématique et d'arithmétique (je vous laisse faire le calcul

$$\left(\frac{a^3-3^6}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3+\left(\frac{-a^3+3^5a+3^6}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3+\left(\frac{3^3a^2+3^5a}{3^2a^2+3^4a+3^6}\right)^3$$

qui ouvre *Cubic forms*, comprendre le théorème démontré par cette formule, voire vous attaquer au problème toujours ouvert que ce théorème laisse en suspens...), des livres à portée philosophique sur le lien entre mathématiques et physique, une introduction encyclopédique à la théorie des nombres écrite avec Alexei Pantchichkine et des livres de cours, écrits à deux ou quatre mains, sur des sujets aussi variés que la logique et l'algèbre homologique et dont certains sont devenus des classiques. On se croit donc averti au moment d'entrer dans *Les mathématiques comme métaphore*, ouvrage certainement moins intimidant que les lectures du jeune Yuri Ivanovich :

> N'ayant ni le temps ni la patience de suivre des cours d'« italien accéléré », j'ai essayé de lire deux livres en même temps : *Le Superficie Algebriche* de Federigo Enriques et *La Divina Commedia*, et à chaque fois que j'ouvrais le *Enriques* (ou d'ailleurs les SGA), je me répétais avec accablement : ... *lasciate ogni speranza voi ch'entrate*...

Chapitre II.4, *Motifs oubliés*, p. 319.

Les mathématiques comme métaphore est divisé en trois parties. La première, qui porte le même titre que l'ouvrage, se veut « une brève autoprésentation des ethno-mathématiques de la culture occidentale, observées du point de vue de la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle. » La deuxième, « Mathématiques et physique », contient notamment la traduction d'un court ouvrage en anglais de 1981 portant le même titre mais également un très beau texte partageant un rêve (Manin parle d'une conjecture) : celui d'une physique « adélique », dont nous ne percevrions que les aspects archimédiens.

> Au niveau fondamental, notre monde n'est ni réel, ni p-adique, il est adélique. Pour des raisons qui reflètent la nature physique du type de matière vivante qui est le nôtre (par exemple le fait que nous sommes composés de particules massives), nous avons tendance à projeter l'image adélique du monde sur son côté réel. Nous pouvons tout aussi bien la projeter sur son côté non archimédien, et calculer arithmétiquement les choses les plus importantes.

Chapitre II.3, *La physique arithmétique*, p. 307.

La dernière partie, « Essais variés », rassemble des textes extrêmement divers : articles sur l'apparition du langage ou les formalistes russes, recension d'ouvrages (dont celle des traductions russes de *Tristes tropiques* et *Anthropologie structurale* de Lévi-Strauss, publiées près de trente ans après), entretien, recueil de poèmes...

Chacune de ces parties est à son tour divisée en chapitres, correspondant en général à des publications initialement indépendantes. La sélection de ces publications ne correspond pas tout à fait aux éditions russe et anglaise.
Il ne faut pas surestimer la structure apportée par ce découpage, dont la rigidité n'est qu'apparente. D'abord, aucun effort n'est fait – et c'est très bien – pour masquer la grande hétérogénéité des textes, écrits pour des publics, des époques et des formats très variés, et qui ne sont finalement unis que par une réflexion très générale sur le lien entre mathématiques et langage(s).
Mais surtout, cette structure n'empêche nullement des échos, tout au long du livre, de certains thèmes chers à Manin. Certains ne sont pas surprenants pour le lectorat de la *Gazette* (la démonstration euclidienne de l'infinitude des nombres premiers, Bourbaki ou encore le théorème de Gödel reviennent par exemple très fréquemment à l'appui de l'argumentation de l'auteur), même s'il est frappant de constater à quel point Manin se nourrit constamment de logique, plus que de géométrie ou de théorie des nombres, dans sa réflexion sur les mathématiques.
D'autres sont moins attendus. Parmi ceux-ci, trois thèmes extra-mathématiques entremêlés reviennent très fréquemment. Le premier est la différence entre les deux hémisphères cérébraux, et l'évolution de leur rôle à travers l'histoire de l'humanité. Manin semble sur ce point très influencé par « l'esprit bicaméral » postulé par le psychologue Julian Jaynes. Vient ensuite la figure du *trickster*, initialement identifiée par l'anthropologue Paul Radin dans certaines mythologies nord-américaines, puis élevée au rang d'archétype jungien de personnage rusé et chaotique, tel le goupil Renart, le dieu nordique Loki, ou – selon Manin – le frère de Moïse, Aaron. Enfin, le dernier thème de cette trinité est l'origine du langage humain.
L'auteur leur consacre des chapitres entiers, sur un mode souvent assez spéculatif. Comme le dit Manin lui-même, dans un propos sur Lévi-Strauss qui est peut-être aussi un plaidoyer *pro domo* :

> Comme dans d'autres domaines scientifiques, des reconstructions d'une telle profondeur frappent certains professionnels par cette profondeur même, et d'autres par leur caractère arbitraire. Les constructions de Claude Lévi-Strauss prêtent le flanc aux critiques, qui lui sont venues de différents côtés.

Chapitre III.9, *Soleil, pauvre totem*, p. 307.

Quelle que soit notre appétence pour ces thèmes, il est difficile de ne pas être séduit par l'ensemble du livre, que l'on peut aussi bien lire par petites touches, en profitant de l'enthousiasme de Manin, de son humour parfois un peu acidulé (à propos de la théorie des solitons et de l'équation de Korteweg-de Vries, il note par exemple que « le nombre des équations d'ondes non linéaires qui se sont révélées posséder des propriétés analogues a suivi, avec le temps, une progression linéaire, et le nombre de publications consacrées à elles a crû, lui, exponentiellement. »), voire d'un certain sens de l'aphorisme (« Non seulement le fait de calculer interrompt temporairement la pensée, mais la justification ultime de l'acte de calculer est qu'il remplace l'acte de penser (ou l'une de ses étapes) par un interlude quasiment mécanique, afin de fournir un niveau d'efficacité plus élevé au prochain acte de pensée »).
La traduction, qui n'est pas complètement exempte d'erreurs peu gênantes sur certains termes techniques, réussit à rendre la lecture du texte très agréable, sans éliminer une diffuse et plaisante impression d'étrangeté. On pourra simplement regretter le nombre de coquilles qui ont survécu aux relectures, surprenant pour une maison d'édition comme Les Belles Lettres.
Comme le fait remarquer Pierre Lochak dans sa postface, *Les mathématiques comme métaphore* est un livre extraordinairement intelligent. Original et stimulant, il nous donne un accès précieux à la pensée éclectique et féconde d'un des grands mathématiciens de notre temps.

Maxime Bourrigan
Lycée Sainte-Geneviève (Versailles)

Instructions aux autrices et auteurs

Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Dupliprint – 733 rue Saint Léonard – 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.