Astérisque
331, 2010, p. 117–178

REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, DEMI-PLAN p-ADIQUE ET RÉDUCTION MODULO p

par

Christophe Breuil & Ariane Mézard

Résumé. — On calcule par voie cohomologique la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). Les calculs exploitent la géométrie du demi-plan p-adique. Ils permettent de retrouver certaines formules de la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

Abstract **(Semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, p-adic half-plane and modulo p reduction)**
We compute by cohomological means the reduction modulo p of some p-adic semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). The calculations use the geometry of the p-adic upper half plane. They allow to recover some of the formulae of the reduction modulo p of p-adic semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, π une uniformisante de $\mathfrak{O}$ et $\mathbb{F} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{O}/(\pi)$. Dans [**14**], Teitelbaum calcule par voie cohomologique la réduction modulo π d'un réseau invariant dans le dual (algébrique) de la représentation $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L$ Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour $k \geq 2$ entier pair ($|\ |$ est la norme p-adique). Plus précisément, si $B(k)$ désigne le Banach p-adique complété de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathfrak{O}$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$, alors le dual $B(k)^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes L$ où $\mathscr{X}$ est le schéma formel du demi-plan p-adique et ω le faisceau inversible des différentielles « régulières » sur $\mathscr{X}$. La réduction modulo π $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes \mathbb{F}$ ci-dessus est alors isomorphe à la représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2} \otimes \mathbb{F})$ qui se calcule explicitement en utilisant la géométrie de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$.

Dans [**4**], d'autres complétés de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à des réseaux invariants qui ne sont pas de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ont été définis. Ils

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes semi-stables, correspondance de Langlands p-adique, demi-plan p-adique.

font intervenir un paramètre supplémentaire $\mathscr{L} \in L$ et sont notés $B(k,\mathscr{L})$. De plus, la réduction modulo π de $B(k,\mathscr{L})$, ou du dual $B(k,\mathscr{L})^*$, est reliée à la réduction modulo π des représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**4**], [**2**]) et est donc plus intéressante à étudier que celle de $B(k)$. Il était donc naturel d'essayer d'étendre le calcul cohomologique de [**14**] à ces nouvelles complétions. C'est l'objet du présent article.

On définit dans un premier temps pour k pair, $2 \leq k \leq p+1$ et $\mathscr{L} \in L$ un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sans torsion $\omega(k,\mathscr{L})$ pour la topologie de Zariski sur le schéma formel $\mathscr{X}$, extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par un faisceau cohérent. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et est construit de telle sorte que $B(k,\mathscr{L})^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes L$. Dans cet article, nous calculons $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes \mathbb{F}$ pour k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.1.1. — *Supposons k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Alors, on a une suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:*

$$0 \to \left\{ f \in \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\right) \otimes \omega \circ \det, a(\mathscr{L})T_p f = f \right\}$$
$$\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes \mathbb{F} \to \left\{ f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = a(\mathscr{L}) f \right\} \to 0$$

où $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathscr{L}-2(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i})\big)\Big) \in \mathfrak{O}$, où ω est le caractère cyclotomique modulo p (vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$), où $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ est l'induite compacte usuelle sans condition de support et où T_p est un certain opérateur de Hecke sur cette induite (voir §1.2).

Le cas $k=2$ est trivial mais se comporte un peu différemment (cf. [**4**, §4.5]) . Un corollaire immédiat de ce théorème est que, sous les conditions de l'énoncé, $B(k,\mathscr{L})$ est non nul et admissible au sens de [**12**] (cf. [**4**, Prop.4.4.4]). Mais ces résultats sont maintenant connus sans restriction sur k ou $\mathscr{L}$ par une méthode complètement différente ([**7**], [**8**]). Notons que, lorsque $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$, l'induite de gauche dans la suite exacte est nulle de sorte que l'on a dans ce cas $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = 0\}$. Lorsque $k \leq p-1$ (et sous les autres conditions du théorème 1.1.1), la semi-simplifiée modulo p de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ correspondant à $B(k,\mathscr{L})$ est, à une torsion convenable près, $\omega\mathrm{nr}(a(\mathscr{L})^{-1}) \oplus \mathrm{nr}(a(\mathscr{L}))$ si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) = 0$ (où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathrm{Frob\ arith}) \overset{\text{déf}}{=} \lambda$) et la représentation irréductible de dimension 2 correspondant au caractère fondamental de niveau 2 si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$ (voir [**6**]). Dans les deux cas, on retrouve bien exactement un cas particulier de la correspondance modulo p définie dans [**3**] (dualisée), de sorte que les calculs de cet article sont en quelque sorte l'analogue côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des calculs galoisiens de [**6**] pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le théorème 1.1.1 se déduit aussi par une méthode complètement différente des résultats généraux de [**2**] (combinés avec les calculs de [**6**]) sur cette correspondance modulo p. Signalons que nous avons également calculé la représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F}$ lorsque $\mathrm{val}(\mathscr{L}) < 0$, ce qui fait apparaître des formules analogues à celles du théorème 1.1.1 mais différentes (voir **[6]** pour le côté Galois). Néanmoins, devant la technicité de ces calculs, nous avons finalement renoncé à les rédiger.

Donnons quelques brèves indications sur la preuve du théorème 1.1.1.

Le calcul se fait en deux étapes. Dans la première, on détermine la représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F})$, dans la deuxième, on détermine $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F}$. Contrairement au cas purement cohérent de **[14]**, ces deux représentations sont ici différentes.

Commençons par $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F})$. On calcule d'abord la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1, (\omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ où $\mathbb{P}^1$ est une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, ce qui donne (cf. §4.2) :

Proposition 1.1.2. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *:*

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{k/2-2} \mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2 \otimes \omega^{i+1} \circ \det \to H^0(\mathbb{P}^1, (\omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1}) \to \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1 \to 0$$

où $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *des matrices triangulaires supérieures modulo* p*.*

Puis on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ (un arbre infini de $\mathbb{P}^1$) par toutes ses composantes irréductibles. La condition de « recollement » aux points d'intersection des composantes fait apparaître une condition faisant intervenir l'opérateur de Hecke T_p et on trouve (cf. §4.4) :

Théorème 1.1.3. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{k/2-2} \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\right) \otimes \omega^{i+1} \circ \det \to H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F}) \to$$
$$\left\{ f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L}) f \right\} \to 0$$

où $a(\mathscr{L})$ *est comme au théorème 1.1.1.*

Passons maintenant à $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L})) \otimes \mathbb{F}$. Toutes les sections de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathbb{F})$ se relèvent dans $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$. Mais toutes les sections de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ ne se relèvent pas dans $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^2)$. Le calcul du défaut de recollement modulo p^2 des sections modulo π du théorème 1.1.3 montre que, dans $\oplus_{i=0}^{k/2-2} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\big) \otimes \omega^{i+1} \circ \det$, seules se relèvent les sections f de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\big) \otimes \omega \circ \det$ satisfaisant $a(\mathscr{L}) T_p f = f$. Mais c'est là la seule obstruction, au sens où les sections qui se relèvent modulo p^2 se relèvent alors modulo p^n pour tout n (et finalement se relèvent dans $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}))$). On obtient ainsi le théorème 1.1.1.

L'article est organisé comme suit. Dans le paragraphe 2, on rappelle la définition des espaces $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ comme espaces de fonctions sur le demi-plan p-adique (§2.1), la définition du schéma formel $\mathscr{X}$ de ce demi-plan (§2.2) puis les calculs de Teitelbaum (§2.3). Dans le paragraphe 3, on définit les faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})$ (§3.1) et quelques variantes (§3.2). Dans le paragraphe 4, après des préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $\mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ pour certains i (§4.1), on détermine les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.2) et $H^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.3), puis $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ et $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ (§4.4). Dans le paragraphe 5, après des considérations de cohomologie de Čech (§5.1) et quelques calculs préliminaires (§5.2), on détermine le défaut de recollement des sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ modulo p^2, ce qui définit des classes de Čech dans $\check{H}^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ que l'on identifie (§5.3), puis on en déduit par dévissage la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ (§5.4). Deux appendices rassemblent les calculs les plus techniques de l'article. Le premier donne des résultats combinatoires et les calculs permettant de déterminer la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$, le deuxième donne des calculs de classes de cohomologie de Čech dans $\check{H}^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ utilisés au §5.3.

Les calculs de cet article sont parfois techniques mais ont au moins l'avantage d'être entièrement géométriques. Nous ignorons si l'on peut définir un autre faisceau que $\omega(k,\mathscr{L})$ qui aurait les mêmes sections globales tensorisées par L mais donnerait lieu à des calculs plus simples. Peut-on par exemple définir un tel faisceau cohérent, ou est-on condamné à travailler avec un faisceau analogue à $\omega(k,\mathscr{L})$, c'est-à-dire mélange d'un faisceau cohérent et d'un faisceau de type fini ? Y-a-t'il une théorie intéressante de tels faisceaux « hybrides » ? Peut-on simplifier les calculs en rajoutant des puissances divisées dans la partie cohérente du faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$?

Signalons pour finir que les calculs présentés dans cet article ont aussi une valeur historique. Ce sont eux qui ont suggéré, dès juillet 2002 ([**3**],[**4**]), la définition des représentations $B(k,\mathscr{L})$, ou de leur duale $B(k,\mathscr{L})^*=H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes L$.

Le deuxième auteur remercie B. Edixhoven et V. Maillot pour plusieurs discussions.

1.2. Notations. — Dans tout cet article, on travaille avec des coefficients dans une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dont on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, π une uniformisante et $\mathbb{F}$ le corps résiduel.

On note $G \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $K \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $I\subset K$ le sous-groupe d'Iwahori, i.e. le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p, et N le normalisateur de I dans G. Le groupe N est engendré par les scalaires, K et la matrice $w_p \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}$.

On note val la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$, $|\ | \stackrel{\text{déf}}{=} p^{-\mathrm{val}}$ la norme p-adique et $\chi : G\to\{1,-1\}$ le caractère $\chi(g)\stackrel{\text{déf}}{=}(-1)^{\mathrm{val}(\det(g))}$. Si n, m sont des entiers positifs ou nuls, on note $\sigma(n,m)$ la représentation de dimension $n+1$ de K

sur $\mathbb{F}$ donnée par l'action à gauche suivante sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\oplus_{i=0}^{n}\mathbb{F}u^i$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u^i \overset{\text{déf}}{=} (ad-bc)^m(au+c)^i(bu+d)^{n-i},\ \ 0 \leq i \leq n.$$

Cette action se factorise en une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On étend cette action de manière tacite à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en faisant agir p par l'identité.

Si $x \in \mathbb{F}_p$, on note $[x] \in \mathbb{Z}_p^\times$ le représentant multiplicatif de x. Si $H \subset G$ est un sous-groupe ouvert contenant $\mathbb{Q}_p^\times$ et σ une représentation de dimension finie de H sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V, on note $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions quelconques $f : G \to V$ telles que $f(hg) = h \cdot f(g)$ $(h \in H,\ g \in G)$ muni de l'action à gauche de G donnée par $(g \cdot f)(g') \overset{\text{déf}}{=} f(g'g)$. Si $g \in G$ et $v \in V$, on note $[g, v]$ l'unique fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ à support dans Hg^{-1} telle que $[g, v](g') \overset{\text{déf}}{=} g'g \cdot v$ si $g'g \in H$. Toute fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ s'écrit de manière unique comme une somme (infinie en général) de fonctions $[g, v]$ où g parcourt un système de représentants fixé de $H\backslash G$.

Lorsque $\sigma = \sigma(n, m)$ et $H = K\mathbb{Q}_p^\times$, on dispose d'un G-entrelacement canonique $T_p : \mathrm{Ind}_H^G\sigma \to \mathrm{Ind}_H^G\sigma$ donné par linéarité sur chaque $[g, v]$ par la formule ([**1**], [**3**]) :

$$T_p([g, v]) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{g'H \in G/H} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)]$$

où $\varphi : G \to \mathrm{End}_K(\sigma(n, m))$ est l'unique fonction à support dans $H\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}H$ telle que $\varphi(h_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}h_2) = h_1 \circ \varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}) \circ h_2$ avec $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix})(u^i) = 0$ si $0 < i \leq n$ et $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix})(1) = 1$. On en déduit en particulier la formule :

$$T_p([\mathrm{Id}, 1]) = \sum_{y \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & [y] \end{pmatrix} [\mathrm{Id}, u^n]. \tag{1}$$

On peut munir les représentations $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ d'une topologie « faible » naturelle pour laquelle l'espace sous-jacent est compact et les opérateurs T_p ci-dessus continus. Néanmoins, dans cet article, nous avons pris le parti de ne pas insister sur ces aspects topologiques. Le lecteur scrupuleux pourra vérifier que toutes les applications G-équivariantes de cet article sont continues pour cette topologie.

Si V est un L-espace vectoriel topologique localement convexe, on note V^* son dual, c'est-à-dire le L-espace vectoriel des formes linéaires continues sur V.

On note $\mathbb{C}_p$ le complété p-adique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et, si $\mathscr{L} \in L$, $\log_{\mathscr{L}}$ l'unique logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ tel que $\log_{\mathscr{L}}(p) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{L}$. On note ε le caractère cyclotomique p-adique $\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$: il envoie p sur 1 et est l'identité sur $\mathbb{Z}_p^\times$.

On note $H_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$ et $H_n \overset{\text{déf}}{=} 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ pour n entier > 0. Pour des entiers n, m tels que $0 \leq m \leq n$, on note $\binom{n}{m}$ les coefficients binômiaux habituels. Si $m < n$ ou si $m < 0$, on convient que $\binom{n}{m} = 0$.

2. Préliminaires

On rappelle la définition des représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$, la construction du modèle formel du demi-plan p-adique, et le calcul géométrique (dû à Teitelbaum) de la réduction modulo π de $B(k)^*$.

2.1. Rappels sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$. — Dans ce paragraphe, on rappelle la définition des représentations p-adiques $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ de G ([**4**],[**5**]) en termes de fonctions sur le demi-plan p-adique.

On munit $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ de l'action à gauche de G donnée par $z \mapsto z|_g \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+c}{bz+d}$ pour $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$. Soit $\mathfrak{W} \subset \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ l'affinoïde des points z tels que $0 < |z| < 1$, $|z-[x]| = 1$ et $|\frac{p}{z} - [x]| = 1$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Pour $g \in G$, on pose $\mathfrak{W}_g \overset{\text{déf}}{=} \{z|_g, z \in \mathfrak{W}\} \subset \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$. Les ouverts rigides $\mathfrak{W}_g$ recouvrent $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ quand g varie. On note $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$ le L-espace vectoriel des fonctions rigides analytiques L-rationnelles h sur $\mathfrak{W}_g$. C'est un espace de Banach pour la norme $\max_{z\in\mathfrak{W}_g} |h(z)|$ naturellement muni d'une action à gauche de $g^{-1}Ng$ par $h \mapsto h(z|_{g^{-1}ng})$. Il s'identifie aux fonctions sur $\mathfrak{W}_g$ de la forme $z \mapsto h(z|_{g^{-1}})$ avec $h \in O(k)_{\mathfrak{W}}$. On note $O(k)^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k)_{\mathfrak{W}}$ stable par N et $O(k)^0_{\mathfrak{W}_g} \overset{\text{déf}}{=} \{z \mapsto h(z|_{g^{-1}}), h \in O(k)^0_{\mathfrak{W}}\}$. C'est une boule unité de $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$.

On définit $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ comme le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathfrak{W} \to \mathbb{C}_p$ de la forme :

$$f(z) = h(z) + \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \sum_{i=0}^{k-2} c_{x,i} z^i \log_{\mathscr{L}}(z-[x]) + \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \sum_{i=0}^{k-2} d_{x,i} z^i \log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{z} - [x]\big)$$

avec $h \in O(k)_{\mathfrak{W}}$ et $c_{x,i}$, $d_{x,i} \in L$. C'est encore un espace de Banach car $O(k)_{\mathfrak{W}}$ y est d'indice fini et on note $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ stable par N (pour l'action $f \mapsto (z \mapsto f(z|_n))$. Pour $g \in G$, on définit $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (resp. $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}_g}$) comme le L-espace vectoriel (resp. le $\mathfrak{O}$-module) des fonctions $\mathfrak{W}_g \to \mathbb{C}_p$, $z \mapsto f(z|_{g^{-1}})$ avec $f \in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ (resp. $f \in O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$). C'est encore naturellement un L-espace de Banach (resp. une boule unité). On pose enfin (cf. [**4**, §3 et §4]) :

$$\begin{aligned}
O(k) &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f : \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k)_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\big\}\\
O(k,\mathscr{L}) &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f : \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\big\}\\
O(k)^0 &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{f \in O(k), f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k)^0_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\Big\}\\
O(k,\mathscr{L})^0 &\overset{\text{déf}}{=} \Big\{f \in O(k,\mathscr{L}), f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\Big\}.
\end{aligned}$$

Les espaces fonctionnels $O(k)$ et $O(k,\mathscr{L})$ sont naturellement des espaces de Fréchet, tandis que les espaces fonctionnels $O(k)^0$ et $O(k,\mathscr{L})^0$ sont naturellement des modules compacts (cf. [**4**]). De plus, $O(k)^0 \otimes L$ (resp. $O(k,\mathscr{L})^0 \otimes L$) est topologiquement isomorphe et de façon G-équivariante au dual tordu (muni de la topologie faible) $B(k)^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (resp. $B(k,\mathscr{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$) d'un espace de Banach p-adique $B(k)$ (resp.

$B(k,\mathscr{L})$) muni d'une action continue de G. En fait, $B(k)$ (resp. $B(k,\mathscr{L})$) est un G-Banach p-adique unitaire au sens de [**4**] et [**5**] et admet aussi une description directe qui ne passe pas par le demi-plan p-adique (voir [**5**, §3]). Par ailleurs, $B(k)$ s'identifie avec son action de G au complété p-adique de la représentation localement algébrique $|\det|^{k/2-1}\otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2\otimes_L$ Steinberg par rapport à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant de type fini sur $\mathfrak{O}[G]$ (cf. [**4**, §4]).

2.2. Rappels sur le modèle formel semi-stable de $\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$. — Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction explicite du modèle formel semi-stable du demi-plan p-adique.

Chaque $\mathfrak{W}_g$ pour $g\in G$ (cf. §2.1) admet un modèle formel affine naturel $\mathscr{W}_g=\mathrm{Spf}(\mathscr{A}_g)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ où :

$$\mathscr{A}_g\overset{\text{déf}}{=}\frac{\mathfrak{O}[u_g,v_g]}{(u_gv_g-p)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}},\frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]^{\wedge}$$

($^\wedge$ désigne le complété p-adique). Notons $\mathscr{U}_g\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[u_g][\frac{1}{u_g-u_g^p}]^\wedge)\subset\mathscr{W}_g$ et $\mathscr{V}_g\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[v_g][\frac{1}{v_g-v_g^p}]^\wedge)\subset\mathscr{W}_g$. Les schémas formels $(\mathscr{W}_g)_{g\in G}$ se recollent (pour la topologie de Zariski) en un schéma formel $\mathscr{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ via les données de recollement suivantes (voir [**13**] pour plus de détails) :

(i) $\mathscr{W}_g\overset{\sim}{\to}\mathscr{W}_{g'}$, $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(v_g,u_g)$ si $g'g^{-1}=w_p$ et $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(\frac{du_g-c}{-bu_g+a},\frac{d'v_g-c'}{-b'v_g+a'})$ si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=w_p\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}w_p\in I\mathbb{Q}_p^\times$;

(ii) $\mathscr{U}_g\overset{\sim}{\to}\mathscr{U}_{g'}$, $u_{g'}\mapsto\frac{du_g-c}{-bu_g+a}$ si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in K\mathbb{Q}_p^\times$;

(iii) $\mathscr{V}_g\overset{\sim}{\to}\mathscr{V}_{g'}$, $v_{g'}\mapsto\frac{dv_g-c}{-bv_g+a}$ si $g'g^{-1}=w_p\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}w_p\in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$.

Lorsque $g=1$, on oublie dans la suite l'indice 1 dans $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{A}_1$, u_1, etc. On a une action à droite de G sur $\mathscr{X}$ induite par $g:\mathscr{W}_{g'}\overset{\sim}{\to}\mathscr{W}_{g'g}$, $(u_{g'g},v_{g'g})\mapsto(u_{g'},v_{g'})$. Elle est telle que $\mathscr{W}$ est stable sous l'action de N, $\mathscr{U}$ est stable sous l'action de $K\mathbb{Q}_p^\times$ et $\mathscr{V}$ est stable sous l'action de $w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$. Explicitement, si $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in K\mathbb{Q}_p^\times$, l'action $g:\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ est donnée sur $f\in\mathfrak{O}[u][\frac{1}{u-u^p}]^\wedge$ par $f(u)\mapsto f(\frac{au+c}{bu+d})$ et si $g=w_p\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}w_p\in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, l'action $g:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ est donnée sur $f\in\mathfrak{O}[v][\frac{1}{v-v^p}]^\wedge$ par $f(v)\mapsto f(\frac{av+c}{bv+d})$.

On note $X\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{X}\times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})}\mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ la fibre spéciale de $\mathscr{X}$. On voit que X est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ d'un arbre infini de $\mathbb{P}^1$, chaque $\mathbb{P}^1$ étant coupé « perpendiculairement » par un $\mathbb{P}^1$ différent en chacun de ses points fermés rationnels sur $\mathbb{F}_p$ (de sorte que chaque $\mathbb{P}^1$ coupe exactement $p+1$ autres $\mathbb{P}^1$). On vérifie que $W_g\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{W}_g\times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})}\mathrm{Spf}(\mathbb{F})=\mathrm{Spec}(A_g)$ où :

$$A_g\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{A}_g\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}=\frac{\mathbb{F}[u_g,v_g]}{(u_gv_g)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}},\frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]$$

est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ de l'ouvert égal à deux $\mathbb{P}^1$ se coupant « perpendiculairement » au point $(u_g, v_g) = (0,0)$ privés de leurs autres points définis sur $\mathbb{F}_p$. De même, $U_g \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{U}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « horizontal » de W_g privé de tous ses points définis sur $\mathbb{F}_p$ et $V_g \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{V}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « vertical » privé de ses points définis sur $\mathbb{F}_p$.

On note dans la suite C une composante irréductible quelconque de X et P un point singulier quelconque de X. On appelle « ouvert central » l'ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(A_1) = \mathrm{Spec}(A)$ et « composante centrale » la composante C associée à la variable u de A (en termes d'arbre de Bruhat-Tits, l'ouvert central correspond à l'arête centrale non orientée et la composante centrale au sommet central). Pour chaque C, on note $d(C) \in \mathbb{N}$ la distance à la composante centrale, i.e. la longueur de la chaîne de $\mathbb{P}^1$ reliant C à la composante centrale avec la convention $d(\text{composante centrale}) \overset{\text{déf}}{=} 0$.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$, on dit que $\mathscr{F}$ est G-équivariant si pour tout $g \in G$ l'isomorphisme $g : \mathscr{X} \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}$ induit des isomorphismes de faisceaux de $\mathfrak{O}$-modules $g^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$ vérifiant des relations de composition évidentes que l'on laisse au lecteur. Pour un tel faisceau, les groupes de cohomologie $H^i(\mathscr{X}, \mathscr{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F})$ sont alors munis d'une action à gauche $\mathfrak{O}$-linéaire de G. Rappelons enfin que X étant un schéma séparé, pour définir un faisceau sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$ il suffit de le définir sur les ouverts affines de X.

2.3. Rappels sur les résultats de Teitelbaum. — Dans ce paragraphe, on rappelle le calcul cohomologique ([**14**]) pour $k \geq 4$ pair de la réduction modulo π (et aussi modulo p) de $B(k)^*$.

On note ω le faisceau inversible sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ des « différentielles régulières », c'est-à-dire l'unique faisceau cohérent tel que $\Gamma(\mathrm{Spf}(\mathscr{A}_g), \omega) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{A}_g \frac{du_g}{u_g} = \mathscr{A}_g \frac{dv_g}{v_g}$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ω^n la puissance tensorielle n-ième de ω. Les faisceaux ω^n sont G-équivariants de sorte que les groupes de cohomologie $H^i(\mathscr{X}, \omega^n)$ sont munis d'une action $\mathfrak{O}$-linéaire de G.

Théorème 2.3.1. — *Soit k un entier pair positif et non nul.*
(i) *La G-représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2})$ est un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k)^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*
(ii) *On a $H^1(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) = 0$.*

Démonstration. — Le (i) résulte de [**14**, Theorem 17] (voir aussi [**10**, Theorem 4.2]) et de [**4**, Proposition 4.3.5 et Proposition 4.6.1] (on peut aussi procéder comme dans la proposition 3.1.2). Le (ii) est démontré dans [**14**, Corollary 24] (voir aussi [**10**, Theorem 2.1]). □

On note $\overline{\omega} \overset{\text{déf}}{=} \omega \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ qui s'identifie au faisceau G-équivariant inversible des (vraies) différentielles régulières sur X (cf. [**14**]) et, pour k positif et pair, $\overline{\omega}^{k/2}$ la puissance tensorielle $k/2$-ième de $\overline{\omega}$. Si C (resp. P) est une composante irréductible de X (resp.

un point singulier de X), on note $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$) où i est l'immersion fermée $C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$) et i^* est au sens des faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules. Par exemple $\overline{\omega}^{k/2}|_P = \mathbb{F}(\frac{du_g}{u_g})^{k/2} = \mathbb{F}(\frac{dv_g}{v_g})^{k/2}$ pour $g \in G$ convenable. On a de plus une suite exacte évidente de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{2}$$

où la flèche $\overline{\omega}^{k/2} \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ est induite par les restrictions sur les diverses composantes irréductibles de X et la flèche $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ est induite par les restrictions sur les divers points singuliers de X multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (pour chaque composante C).

Remarque 2.3.2. — L'action naturelle de G sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ dans (2) (induite par $g : (du_g/u_g)^{k/2} \mapsto (du/u)^{k/2}$) doit être tordue par le caractère χ pour que la suite (2) soit G-équivariante.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe $k \geq 4$ et k pair. Soit $D \overset{\text{déf}}{=} \amalg P$ le diviseur des points singuliers de X et $\overline{\omega}^{k/2}(1) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{k/2}(-D)$ le sous-faisceau G-équivariant inversible de $\overline{\omega}^{k/2}$ des différentielles s'annulant aux points singuliers. On définit comme précédemment $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2}(1))$ si $i : C \hookrightarrow X$ et les restrictions induisent dans ce cas un isomorphisme G-équivariant :

$$\overline{\omega}^{k/2}(1) \xrightarrow{\sim} \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C). \tag{3}$$

On a de plus les deux suites exactes, respectivement K-équivariante et G-équivariante :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C \to \prod_{i:P\hookrightarrow C} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{4}$$

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1) \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{5}$$

où le produit dans (4) est sur les points singuliers P de X contenus dans C et dans (5) sur les points singuliers P de X.

Lemme 2.3.3. — *On a* $H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}) = H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) = H^1(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) = 0$.

Démonstration. — La nullité des deux premiers est démontrée dans [**14**, Lemma 28] et [**10**, Theorem 2.1]. Pour le dernier, on a $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathscr{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)$ et $H^1(C, \mathscr{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)) = 0$ car $(k/2-1)(p+1)-k \geq -1$ si $k \geq 4$. □

Du lemme 2.3.3 et de (2), (3), (4) et (5), on déduit immédiatement :

Corollaire 2.3.4. — (i) *On a un isomorphisme G-équivariant* $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} H^0(X, \overline{\omega}^{k/2})$.

(ii) *Pour chaque composante C, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0.$$

(iii) *On a un diagramme commutatif de suites exactes de G-représentations :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X, \overline{\omega}^{k/2}) & \to & \prod_C H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) & \to & \prod_C H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) & \to & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où les deux surjections de droite sont les restrictions multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (comparer avec la remarque 2.3.2).

Nous allons préciser les K-représentations et G-représentations supportées par certains des espaces vectoriels du corollaire 2.3.4.

Proposition 2.3.5. — (i) *Soit C la composante centrale et $n_k \overset{\text{déf}}{=} (p-1)(k/2-1)-2$. L'application :*

$$\frac{u^i (du)^{k/2}}{(u-u^p)^{(k-2)/2}} \mapsto u^i,\ 0 \le i \le n_k$$

induit un isomorphisme K-équivariant :

$$H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \sigma(n_k, 1).$$

(ii) *L'application :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X} H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to \operatorname{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

qui envoie $(s_g(u_g))_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $K\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g) = s_g(u)$ pour tout $g \in J$ induit via (i) *un isomorphisme G-équivariant :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X} H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k, 1).$$

Démonstration. — Voir [**14**, Proposition 27] et aussi [**10**, §3]. Notons que $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ agit trivialement sur $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et que l'application définie en (ii) ne dépend bien sûr pas du choix de J. □

On en déduit par le (iii) du corollaire 2.3.4 :

Corollaire 2.3.6. — *On a un isomorphisme de G-représentations* $H^0(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k, 1)$.

Lemme 2.3.7. — *On a une suite exacte G-équivariante, scindée si* $p > 2$ *:*

$$0 \to \mathrm{Ind}_N^G 1 \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \to \mathrm{Ind}_N^G \chi \to 0. \tag{6}$$

Démonstration. — Si $f \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$, on note $\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} (g \mapsto f(w_p g)) \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$. La flèche de gauche dans la suite exacte est l'injection canonique et celle de droite donnée par $f \mapsto f - \sigma(f)$. L'exactitude de la suite (pour tout p) est laissée au lecteur. Si $p > 2$, un scindage s'obtient en écrivant $f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$. □

Corollaire 2.3.8. — *La suite exacte de G-représentations :*

$$0 \to \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0$$

du (iii) *du corollaire 2.3.4 est isomorphe à la suite exacte (6) tordue par* $\chi^{k/2}$.

Démonstration. — L'application $\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathbb{F}(\frac{du}{u})^{k/2}$ qui envoie $(c_g(\frac{du_g}{u_g})^{k/2})_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $I\mathbb{Q}_p^\times \backslash G$ et $c_g \in \mathbb{F}$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g) = c_g(\frac{du}{u})^{k/2}$ pour tout $g \in J$ induit un isomorphisme G-équivariant indépendant de J :

$$\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \simeq \chi^{k/2} \otimes \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1.$$

On définit de manière similaire un isomorphisme G-équivariant $\prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$ et la commutation du diagramme avec la suite exacte (6) est laissée au lecteur. Noter que la torsion par χ dans le terme de droite de (6) est bien compatible avec la torsion par χ de la remarque 2.3.2. □

La colonne verticale de gauche dans le (iii) du corollaire 2.3.4 se récrit donc :

Corollaire 2.3.9. — *On a une suite exacte G-équivariante :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k, 1) \to H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \to \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \to 0.$$

Nous reprendrons cette suite exacte au §4.1.

3. Définition des faisceaux

3.1. Les faisceaux $\omega(k, \mathscr{L})$ et $\overline{\omega}(k, \mathscr{L})$. — Dans ce paragraphe, on définit pour $2 \leq k \leq p+1$, k pair et $\mathscr{L} \in L$ un faisceau G-équivariant de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k, \mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$ muni d'un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant $\omega(k, \mathscr{L}) \to \omega^{k/2}$. On montre que les sections globales $H^0(\mathscr{X}, \omega(k, \mathscr{L}))$ sont isomorphes à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans $B(k, \mathscr{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$.

Soit $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_g}(\omega^{\frac{k}{2}-1}(\mathscr{W}_g),\mathscr{A}_g)$ telle que $\langle(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1},(\frac{du_g}{u_g})^{k/2-1}\rangle = 1$ (resp. $\langle(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1},(\frac{dv_g}{v_g})^{k/2-1}\rangle = 1$) avec la convention $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = 1$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1} = 1$) si $k = 2$. On a $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = (-1)^{k/2-1}(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$. On note aussi $\frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g)$ (resp. $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g)$) telle que $\left\langle\frac{1}{du_g^{k/2-1}}, du_g^{k/2-1}\right\rangle = 1$ (resp. $\left\langle\frac{1}{dv_g^{k/2-1}}, dv_g^{k/2-1}\right\rangle = 1$) avec encore $\frac{1}{du_g^{k/2-1}} = 1$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}} = 1$) si $k = 2$.

Soit $[\mathscr{L}^{-1}] \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0 \\ \mathscr{L}^{-1} & \text{si } \mathrm{val}(\mathscr{L}) < 0 \end{cases}$, de sorte que l'on a toujours $[\mathscr{L}^{-1}] \in \mathfrak{O}$ et $[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L} \in \mathfrak{O}$. Dans la définition des $\mathfrak{O}$-modules ci-dessous, on convient que $\sum_{i=0}^{j} \overset{\text{déf}}{=} 0$ si $j < 0$. On définit pour $g \in G$ les $\mathfrak{O}$-modules :

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g) \;&\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\right)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{V}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Pour le moment, les formules à droite avec des $\log_{\mathscr{L}}$ sont juste des symboles formels qui vont prendre leur sens avec les flèches de restriction et les flèches de recollement. Si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ est un ouvert affine tel que $\mathscr{Z}_g$ n'est inclus ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g).$$

Si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{U}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U}_g)$$

et si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{V}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{V}_g).$$

Soit $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, on définit une application de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \to \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g \cap \mathscr{U}_g)$ comme la restriction usuelle sur le faisceau $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme suit sur les « symboles » :

$$[\mathscr{L}^{-1}]\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])+\textstyle\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\Big)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \mapsto [\mathscr{L}^{-1}]\left(\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$$
$$\oplus\,[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$$

$$[\mathscr{L}^{-1}]\Big(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])+\textstyle\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\Big)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}]\left(\sum_{j\geq\frac{k}{2}-1-i}\frac{p^{j+i-\frac{k-2}{2}}}{j[x]^ju_g^j}\right)$$
$$\times\,\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}$$

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \mapsto [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$$

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}p^{i-\frac{k-2}{2}}\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}$$
$$\oplus(-1)^{\frac{k}{2}}[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)p^{i-\frac{k-2}{2}}\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}.$$

Noter que, pour les termes en v_g, on a juste écrit $v_g = \frac{p}{u_g}$ et développé $\log_{\mathscr{L}}(\frac{p}{u_g}-[x]) = \log_{\mathscr{L}}(1-\frac{p}{[x]u_g})$. On définit de manière strictement analogue $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \to \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g \cap \mathscr{V}_g)$ en remplaçant (u_g,v_g) par (v_g,u_g). On vérifie facilement que cela définit un faisceau $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ sur $\mathscr{W}_{g,\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini (engendré par les « symboles » avec des $\log_{\mathscr{L}}$) par le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}|_{\mathscr{W}_g}$.

Proposition 3.1.1. — *Les faisceaux $(\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g})_{g\in G}$ se recollent en un faisceau G-équivariant $\omega(k,\mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par le faisceau inversible $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$.*

Démonstration. — Nous allons recoller les $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ suivant les données de recollement (i), (ii) et (iii) du §2.2.

(i) Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = w_p$, $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$ et $\mathscr{Z}_{g'} \subseteq \mathscr{W}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{W}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{Z}_{g'}$ sur le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'},v_{g'}) \mapsto (v_g,u_g)$ dans les logarithmes, en remplaçant $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g)(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$

lorsque ce terme apparaît par $(-1)^{k/2-1}([\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}-[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g))(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$. Soit $(g,g')\in G^2$ tels que $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=w_p\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}w_p\in I\mathbb{Q}_p^\times$, on définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_{g'})\xrightarrow{\sim}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ comme l'isomorphisme déjà défini sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(\frac{du_g-c}{-bu_g+a},\frac{d'v_g-c'}{-b'v_g+a'})$ dans les logarithmes (en les développant). Explicitons le calcul pour les trois types de matrices qui engendrent I. Si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & [y](1+pz)\end{pmatrix}$ avec $y\in\mathbb{F}_p^\times$ et $z\in\mathbb{Z}_p$, on développe formellement :

$$\begin{aligned}\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g-[x]) &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\log_{\mathscr{L}}\left(1+pz\frac{u_g}{u_g-[xy^{-1}]}\right)\\ &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])-\sum_{j\geq 1}\frac{p^j(-z)^ju_g^j}{j(u_g-[xy^{-1}])^j}\end{aligned}$$

où $x\in\mathbb{F}_p^\times$. Un calcul (formel) donne alors pour $i\in\{0,\cdots,k-2\}$:

$$\begin{aligned}\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^j(1+pz)^ju_g^j}{j} &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^ju_g^j}{j}\\ &\quad+\sum_{j_1+j_2\geq k/2-2-i}*\cdot p^{j_1}u_g^{j_2}\end{aligned}$$

où $*\in\mathscr{A}_g$. En multipliant par $[\mathscr{L}^{-1}]([y](1+pz))^{i-k/2+1}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$, on obtient bien au final une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g)\oplus\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^ju_g^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])$. Noter que, si $x=0$ (et $i\geq k/2-1$), le calcul devient trivial en écrivant $\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g)=\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz))+\log_{\mathscr{L}}(u_g)$. Si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ pz & 1\end{pmatrix}$ avec $z\in\mathbb{Z}_p$, on développe encore formellement :

$$\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz-[x])=\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])-\sum_{j\geq 1}\frac{p^jz^j}{j(u_g-[x])^j}$$

si $x\neq 0$, et un calcul donne encore pour $i\in\{0,\cdots,k-2\}$:

$$\begin{aligned}\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}]^j(u_g-pz)^j}{j} &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}]^ju_g^j}{j}\\ &\quad+\sum_{j_1+j_2\geq k/2-2-i}*\cdot p^{j_1}u_g^{j_2}\end{aligned}$$

avec $* \in \mathscr{A}_g$. En multipliant par $[\mathscr{L}^{-1}]\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}$ et en développant $(u_g-pz)^i$, on obtient bien (après un calcul simple) une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g) \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{i} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-\ell}\frac{[x^{-1}]^j u_g^j}{j}\right)\frac{u_g^\ell}{du_g^{k/2-1}}.$$

Si $x=0$, on écrit pour $i \geq k/2-1$:

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}} = [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}} + [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

En développant $(u_g-pz)^i\frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ et en remplaçant $\frac{p^{i-j}u_g^j}{du_g^{k/2-1}}$ dans le développement par $(-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{v_g^{k-2-j}}{dv_g^{k/2-1}}$ si $j \leq k/2-2$, le premier terme se récrit comme un élément de :

$$\bigoplus_{j=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot([\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L} - [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g))\frac{v_g^j}{dv_g^{k/2-1}} \oplus \bigoplus_{j=k/2-1}^{i}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^j}{du_g^{k/2-1}}.$$

Pour le deuxième, si $z \in p\mathbb{Z}_p$, on écrit $\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g) = -\sum_{j\geq 1}\frac{z^j v_g^j}{j}$ et si $z \in \mathbb{Z}_p^\times$, on écrit $\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g) = \log_{\mathscr{L}}(z)+\log_{\mathscr{L}}(v_g-z^{-1})$, $\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}} = (-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^i v_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ puis on corrige $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g-z^{-1})p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^i v_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ par des éléments de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g)$ de manière à faire apparaître $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x]) + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-2-\ell}\frac{[x^{-1}]^j v_g^j}{j}\right)\frac{v_g^\ell}{dv_g^{k/2-1}}$ où $x \overset{\text{déf}}{=} z^{-1}$ modulo p. On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])$ que l'on épargne au lecteur. Enfin, si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{Z}_p$, les calculs sont strictement analogues en échangeant u_g et v_g.

(ii) Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in K\mathbb{Q}_p^\times$, $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{U}_g$ un ouvert affine et $\mathscr{Z}_{g'} \subseteq \mathscr{U}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{U}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $u_{g'} \mapsto \frac{du_g-c}{-bu_g+a}$ dans les logarithmes (que l'on développe). Les calculs sont analogues au cas (i) en plus simples car il n'y a plus à distinguer entre $x=0$ et $x\neq 0$.

(iii) Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = w_p\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}w_p \in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{V}_g$ un ouvert affine et $\mathscr{Z}_{g'} \subseteq \mathscr{V}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{V}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $v_{g'} \mapsto \frac{dv_g-c}{-bv_g+a}$ dans les logarithmes.

Ces isomorphismes de recollement sont compatibles avec les flèches de restriction (vérification formelle) et permettent donc de définir un faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est clairement G-équivariant. $\square$

En particulier, on a une action $\mathfrak{O}$-linéaire de G sur $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$. Le faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$ a été fabriqué pour satisfaire la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. — *Soit k un entier pair compris entre 2 et $p+1$. La G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$ est isomorphe à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k,\mathscr{L})^*\otimes\varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*

Démonstration. — Tout élément de $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$ s'écrit (formellement) de manière unique sous la forme $\frac{s(u)}{du^{k/2-1}}+\frac{t(v)}{dv^{k/2-1}}$ où $s(u)$ (resp. $t(v)$) est somme d'un élément de $\mathscr{A}$ avec uniquement des u (resp. des v) et de termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u)^j}{j}\right)u^i$ ou $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u)u^i$ (resp. avec u à la place de v). À tout élément de $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$, on associe la fonction $f:\mathfrak{W}\to\mathbb{C}_p$, $z\mapsto s(z)+(-p)^{k/2-1}t(p/z)z^{2-k}$. Il est facile de voir que cela définit un isomorphisme N-équivariant entre $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$ et un $\mathfrak{O}$-réseau ouvert $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$ stable par N dans le Banach $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ (cf. §2.1). Si $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$, à tout élément $\frac{s(u_g)}{du_g^{k/2-1}}+\frac{t(v_g)}{dv_g^{k/2-1}}\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ on associe de même une fonction $f:\mathfrak{W}_g\to\mathbb{C}_p,\ z\mapsto(ad-bc)^{1-k/2}(-bz+a)^{k-2}\left(s(\frac{dz-c}{-bz+a})+(-p)^{k/2-1}t(\frac{p(-bz+a)}{dz-c})(\frac{-bz+a}{dz-c})^{k-2}\right)$ qui induit un isomorphisme entre $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ et $g^{-1}\cdot O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}\subset O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (où, si $f\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$, $g^{-1}.f\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ est la fonction $z\mapsto f(z|_{g^{-1}})$). Avec les définitions de $O(k,\mathscr{L})$ et $O(k,\mathscr{L})^0$ données au §2.1, on a donc clairement un isomorphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant :

$$\begin{aligned}H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))&\xrightarrow{\sim}\{f\in O(k,\mathscr{L})\mid f|_{\mathfrak{W}_g}\in g^{-1}\cdot O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}\ \forall\,g\in G\}\\&=O(k,\mathscr{L})^0\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Soit $\mathscr{P}(k)\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ l'unique sous-faisceau G-équivariant tel que, si $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{W}_g$ est un ouvert affine non vide, on a :

$$\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}\oplus\bigoplus_{i=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g)$$

lorsque $\mathscr{Z}_g$ n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, $\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{U}_g$ est non vide et $\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{V}_g$ est non vide.

Proposition 3.1.3. — *La différentiation $k-1$-ième induit un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant $\omega(k,\mathscr{L})\to\omega^{k/2}$ de noyau $\mathscr{P}(k)$.*

Démonstration. — C'est le même argument que celui à la base de la construction du complexe $\omega^{-k/2+1} \xrightarrow{d^{k-1}} \omega^{k/2}$ en notant que les logarithmes disparaissent en différentiant (la différentiation sur les "logarithmes formels" étant celle naturelle). $\square$

Remarque 3.1.4. — Le lecteur aura remarqué que la définition des faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ et de leur recollement nécessite seulement $k/2-1<p$. Néanmoins, les autres calculs de cet article sont strictement limités à $k \leq p+1$.

On note dans la suite $\overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} \omega(k,\mathscr{L}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ le faisceau modulo π sur X_{Zar}.

3.2. Les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P$. — Dans ce paragraphe, on définit des faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ (resp. $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P$) pour la topologie de Zariski sur une composante C (resp. un point singulier P) et on montre que l'on a une suite exacte de faisceaux sur X_{Zar} : $0 \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \Pi_C i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \Pi_P i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \to 0$ où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$).

Soit $C \simeq \mathbb{P}^1$ une composante de X et $i : C \hookrightarrow X$ l'immersion fermée correspondante. On note $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}})$. Pour $P \in C$ un point singulier quelconque de X, on note $W_P \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points singuliers autres que } P\}$ et u_{g_P} une coordonnée sur C nulle au point P. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_P) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right)\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=\frac{k}{2}-1}^{k-2} \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

Si $u_{g'_P}$ est une autre coordonnée sur C nulle au point P, on a $u_{g'_P} = \frac{du_{g_P}-c}{-bu_{g_P}+a}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I\mathbb{Q}_p^\times$ et en développant les logarithmes exactement comme dans le (i) de la preuve de la proposition 3.1.1, on voit que l'on reste bien dans $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P)$ de sorte que $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P)$ ne dépend pas du choix de la coordonnée u_{g_P}. Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine contenant P, on pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(Z) \oplus_{\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_{C(W_P)}} \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P).$$

Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine ne contenant pas P (donc $Z \subseteq C \setminus \{\text{points singuliers}\} = U$), on pose $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}(k,\mathscr{L})(Z)$. Les applications de restriction $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z\cap U)$ sont définies comme au §3.1 et permettent par recollement de définir un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriel $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ sur C, extension d'un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie par le faisceau inversible $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. On a de plus une application naturelle de faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ définie comme suit sur les ouverts W_{g_P} de X (cf. §2.2) où $g_P \in G$ est tel que $i^{-1}(W_{g_P}) = W_P$: sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ c'est l'application canonique de restriction, sur les termes u_{g_P} c'est l'identité (i.e. on garde la même formule), les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_{g_P})\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ (pour $i \geq k/2$) sont envoyés sur 0 et les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}v_{g_P})^j}{j}\right)\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x \in \mathbb{F}_p^{\times}$ sont envoyés sur 0 (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$ et pas $k/2-2-i$ et voir §3.1 pour la définition de $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})(W_{g_P})=\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_{g_P})\otimes\mathbb{F}$).

Soit $P \in X$ un point singulier, u_{g_P} une coordonnée sur une composante C contenant P qui est nulle au point P et $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{F}(\frac{u_{g_P}}{du_{g_P}})^{k/2-1}$. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \oplus \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$

qui ne dépend pas du choix de la coordonnée u_{g_P} par les formules de développement du logarithme comme précédemment et en écrivant :

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{w_pg_P})\frac{u_{w_pg_P}^{k/2-1}}{du_{w_pg_P}^{k/2-1}} = (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}} \oplus (-1)^{k/2}[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

On a de même une application naturelle évidente $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ où $i : P \hookrightarrow C$ qui est l'application canonique sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ et qui, sur les ouverts contenant P, envoie les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right)\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x \in \mathbb{F}_p^{\times}$ sur 0 (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$), les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $i \leq k/2$ sur 0 et est l'identité sur $\mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$.

Proposition 3.2.1. — *On a une suite exacte naturelle G-équivariante de faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels :*

$$0 \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \to 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que la suite est exacte en restriction à chaque ouvert W_g de X (car ces ouverts recouvrent X), ce qui est évident. Noter que, comme au §2.3, $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ est l'application induite par les restrictions ci-dessus sur les divers points singuliers de X multipliées par $(-1)^{d(C)}$ et que l'action de G sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ doit être tordue par χ (voir la remarque 2.3.2). □

4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la G-représentation $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ pour $4 \leq k \leq p+1$, k pair et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$.

4.1. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(n_k, 1)$. — On commence par l'étude des facteurs de Jordan-Hölder de la K-représentation $\sigma(n_k, 1)$ (cf. proposition 2.3.5).

Pour $0 \leq n \leq p-1$ et m quelconque, rappelons que la représentation $\sigma(n, m)$ (cf. §1.2) est irréductible (voir par exemple [**1**]). Rappelons aussi les deux lemmes suivants :

Lemme 4.1.1 **([3])**. — *Soit $n \in \{p+1, \cdots, 2p-2\}$. On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \to \sigma(n-p-1, 1) \oplus \sigma(n+1-p, 0) \to \sigma(n, 0) \to \sigma(2p-n-2, n+1-p) \to 0$$

où l'injection $\sigma(n-p-1, 1) \hookrightarrow \sigma(n, 0)$ est donnée par $u^{n-p-1-i} \mapsto (u^p - u)u^{n-p-1-i}$ et où $\sigma(n+1-p, 0)$ est la sous-représentation engendrée par $1 \in \sigma(n, 0)$.

Lemme 4.1.2 **([9])**. — *Soit $n \geq 2p-1$ et écrivons $n = j + m(p-1)$ avec $p+1 \leq j \leq 2p-1$. On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-p-1, 1) \overset{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n, 0) \longrightarrow \sigma(n, 0)/\sigma(n-p-1, 1) \longrightarrow 0$$

où $\sigma(n, 0)/\sigma(n-p-1, 1)$ est isomorphe à $\sigma(j, 0)/\sigma(j-p-1, 1)$.

On rappelle que $n_k = (k/2-1)p - k/2 - 1 = (k/2-2)(p+1) + p + 1 - k$. Si $k = 4$, on voit que $\sigma(n_k, 1)$ est irréductible et vaut $\sigma(p-3, 1)$. Pour $k \geq 6$, on a :

Lemme 4.1.3. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-(i+1)(p+1), 1) \overset{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n-i(p+1), 0) \longrightarrow \sigma \longrightarrow 0$$

où σ est une extension de $\sigma(2(i+1), p-3-2i)$ par $\sigma(p-3-2i, 0)$.

Démonstration. — On écrit $n - i(p+1) = (k/2-3-i)(p-1) + 2p - 2i - 4$. Pour $j = 2p-2i-4$, on a $p+1 \leq j \leq 2p-4$ et, d'après le lemme 4.1.2, on a la suite exacte :

$$0 \to \sigma(n-(i+1)(p+1), 1)) \to \sigma(n-i(p+1), 0) \to \sigma(j, 0)/\sigma(j-p-1, 1) \to 0.$$

Par le lemme 4.1.1 appliqué à $\sigma(2p-2i-4, 0) = \sigma(j, 0)$, on a :

$$0 \to \sigma(p-2i-5, 1) \oplus \sigma(p-3-2i, 0) \to \sigma(j, 0) \to \sigma(2(i+1), p-3-2i) \to 0$$

avec $\sigma(j-p-1, 1) \simeq \sigma(p-2i-5, 1)$. On en déduit le résultat annoncé. □

D'après le lemme 4.1.3, les composantes de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k, 1)$ pour $6 \leq k \leq p+1$ sont donc d'une part $\sigma(p-3, 1)$, $\sigma(p-5, 2)$ etc. jusqu'à $\sigma(p-3-2(k/2-2), k/2-1)$ et d'autre part $\sigma(2, -1)$, $\sigma(4, -2)$ etc. jusqu'à $\sigma(k-4, 2-k/2)$. On a en fait une structure assez simple de la K-représentation $\sigma(n_k, 1)$:

Lemme 4.1.4. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(p-3,1) \oplus \sigma(p-5,2) \oplus \cdots \oplus \sigma(p-k+1,k/2-1) \longrightarrow \sigma(n_k,1) \longrightarrow \\ \sigma(2,-1) \oplus \sigma(4,-2) \oplus \cdots \oplus \sigma(k-4,2-k/2) \longrightarrow 0$$

où $\sigma(p-3-2i,i+1)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ est la sous-K-représentation de $\sigma(n_k,1)$ engendrée par $(u-u^p)^i$.

Démonstration. — Soit n un entier positif ou nul de la forme $n = rp - s$ avec r et s entiers tels que $0 < r < s \leq p$, alors le sous-$\mathbb{F}$-espace vectoriel de $\sigma(n,0)$ engendré sous K par 1 est de dimension $p-(s-r)$ (développer $(bu+d)^n = (bu^p+d)^{r-1}(bu+d)^{p-s}$ et regrouper les mêmes puissances de $b^i d^{n-i}$). En prenant $n = n_k - i(p+1) = (k/2-1-i)p - (k/2+1+i)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ et en utilisant le lemme 4.1.3, on en déduit que la sous-représentation de $\sigma(n_k,1)$ engendrée sous K par $(u-u^p)^i$ est de dimension $p-2(i+1)$ et est isomorphe à $\sigma(p-3-2i,i+1)$. La somme directe $\sigma(p-3,1) \oplus \sigma(p-5,2) \oplus \cdots \oplus \sigma(p-k+1,k/2-1)$ est donc une sous-représentation de $\sigma(n_k,1)$. Le quotient admet les facteurs de Jordan-Hölder restants, et on verra dans la preuve du lemme 4.3.4 qu'il s'agit encore d'une somme directe. □

4.2. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$. — Dans cette partie, on se place sur la composante centrale C de X et on détermine la représentation $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ de K sous les conditions du §4 en utilisant le §4.1 et la proposition 2.3.5.

Notons $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*([\mathscr{L}^{-1}]\overline{\omega}^{k/2})$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2})$) où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $i : P \hookrightarrow X$). Comme dans la proposition 3.1.3 et sachant que $k-2 \leq p-1$, la différentiation $(k-1)$-ième induit un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire K-équivariant $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ (resp. un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P \to \overline{\omega}^{k/2}|_P$) de noyau contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ (resp. $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P$).

Lemme 4.2.1. — *La différentiation $k-1$-ième $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit une injection de K-représentations :*

$$H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \hookrightarrow H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

Démonstration. — Notons $\overline{\mathscr{P}}(k)|_C$ le noyau de $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$, on a donc une suite exacte :

$$0 \to H^0(C, \overline{\mathscr{P}}(k)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

De plus, $\overline{\mathscr{P}}(k)|_C$ est contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. Or $H^0(C, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) = 0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \cong \mathscr{O}_C(-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2)$ et $-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2 < 0$. D'où aussi $H^0(C, \overline{\mathscr{P}}(k)|_C) = 0$ et l'injection voulue. □

Pour déterminer la K-représentation $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, nous allons déterminer les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$ qui se relèvent en des sections de $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'application du lemme 4.2.1. On note dans la suite $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ un point de C défini sur $\mathbb{F}_p$ et $W_y \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_\mathrm{p} \text{ autres que } y\}$. Rappelons que $U = C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_p\}$ (cf. §2.2). On note u_y une coordonnée sur C nulle en y et telle que $u_y|_U = u - y$ si $y \neq \infty$, $u_y|_U = u^{-1}$ si $y = \infty$ (où u est la variable sur U, cf. §2.2). Par abus de notation, on note aussi $u = u_0$.

Pour les calculs qui vont suivre, nous utiliserons la description alternative suivante de $\overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C(W_y)$ (où $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$) :

$$\begin{aligned}\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_y) = \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y) \;&\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_y x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y - x)^i}{du_y^{k/2-1}}\\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathbb{F}(\log_{\mathscr{L}}(u_y))\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

(pour revenir à la description du §3.2, il suffit de développer le terme $(u_y - x)^i$ en facteur des logarithmes à droite et de remarquer que $\frac{u_y^{j+i}}{du_y^{k/2-1}}$ est déjà dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y)$ pour $j > k/2 - 2 - i$).

Pour $\alpha \in \{1, \cdots, k/2-1\}$, considérons les sections $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5). En prenant une « primitive $(k-1)$-ième » sur chaque ouvert W_y de la section globale $(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(-1)^{\alpha-1}\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$, définissons les sections locales suivantes $s_{\alpha,y} \in H^0(W_y, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$:

$$s_{\alpha,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha} u_\infty^{\alpha-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{((u_\infty - x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\begin{aligned}s_{\alpha,y} \stackrel{\text{déf}}{=} &\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_y x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y - x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} + \log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\\ &+ \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Lemme 4.2.2. — *Le $(p+1)$-uplet $(s_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section $s_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les restrictions $s_{\alpha,y}|_U$ ne dépendent pas de y. Les sections locales $s_{\alpha,y}|_U$ se récrivent :

$$\begin{aligned}s_{\alpha,\infty}|_U &= (-1)^{k/2-\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} u_\infty^{\alpha-1}x^{-k+1+\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty - x)\frac{(u_\infty - x)^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}\\ s_{\alpha,y}|_U &= \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u_y - x)\frac{(u_y - x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

car $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j})\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}=0$ et $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(u_y-x)^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_y x^{-1})^j}{j}=-u_y^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}$ modulo p. On vérifie alors que :

$$s_{\alpha,\infty}|_U=s_{\alpha,y}|_U=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-x)\frac{(u-x)^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}\in H^0(U,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$$

d'où le résultat. □

Nous renvoyons à la fin de l'appendice A.2 pour la preuve de la proposition qui suit :

Proposition 4.2.3. — (i) *Soit $2\le\alpha\le k/2-1$ et :*

$$r_\alpha\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}$ un élément de la sous-représentation :

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Alors r_α n'admet pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.
(ii) *Il existe une section $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.

Corollaire 4.2.4. — *On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0\to H\to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to\operatorname{ind}_I^K\chi^{k/2}\to 0$$

où $H\subseteq\sigma(n_k,1)$ est la sous-K-représentation (cf. lemme 4.1.4) :

$$H\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\sigma(p-3-2i,i+1).$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, nous omettons les torsions par les caractères centraux. D'après le lemme 4.1.3, pour $0\le i\le k/2-2$, $\sigma(n_k-i(p+1))$ est une sous-représentation de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Soit H_i son image inverse dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1 (ne pas confondre avec $H_i=1+\cdots+1/i!$). Nous allons démontrer par récurrence descendante sur $0\le i\le k/2-2$ que $H_i=\oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$. Pour $i=k/2-2$, la sous-représentation $\sigma(p-k+1)$ de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est engendrée par $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ (lemme 4.1.4). Or, par le lemme 4.2.2, il existe une section $s_1\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ qui s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ par l'injection du lemme 4.2.1. On en déduit donc $H_{k/2-2}=\sigma(p-k+1)$.

Supposons $0 \leq i \leq k/2-3$ et la récurrence établie pour $i+1$. Notons Q_i le conoyau $0 \to H_{i+1} \to H_i \to Q_i \to 0$. On a un diagramme commutatif dont toutes les flèches verticales sont des injections :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H_{i+1} & \to & H_i & \to & Q_i & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \sigma(n_k-(i+1)(p+1)) & \to & \sigma(n_k-i(p+1)) & \to & \tilde{\sigma}_{n_k,i} & \to 0 \end{array}$$

avec $0 \to \sigma(p-3-2i) \to \tilde{\sigma}_{n_k,i} \to \sigma(2i+2) \to 0$ par le lemme 4.1.3. La section $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}} \in \sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est un générateur de $\sigma(p-3-2i)$ par le lemme 4.1.4. Or, la section globale $s_{k/2-1-i} \in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}$ par l'injection du lemme 4.2.1 (cf. lemme 4.2.2). On en déduit que Q_i contient $\sigma(p-3-2i)$. Toute section de $\sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ de la forme :

$$\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

où $f(u)(du)^{k/2} \in \sigma(n_k-(i+1)(p+1))$ n'a pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ d'après le (i) de la proposition 4.2.3. Une telle section s'envoie donc nécessairement vers un élément non nul de $\sigma(2i+2)$ (sinon, elle aurait un antécédent pour un certain $f(u)$ par ce qui précède et la K-équivariance des flèches). Comme $\sigma(2i+2)$ est irréductible, aucune section de $\sigma(2i+2)$ ne peut donc se relever dans H_i et $Q_i = \sigma(p-3-2i)$. Comme H est scindé, on a donc $H_i = H_{i+1} \oplus \sigma(p-3-2i) = \oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$ et la récurrence est établie. Enfin, d'après le (ii) de la proposition 4.2.3, il existe une section $r_{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme $r_{k/2} = \big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\big)(du)^{k/2}$ avec $f(u)(du)^{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. De plus, on vérifie facilement que, dans la suite exacte $0 \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2} \to 0$ (cf. le (ii) du corollaire 2.3.4), la section $r_{k/2}$ s'envoie vers la fonction $f \in \mathrm{ind}_I^K 1 \simeq \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$ telle que $f(g)=1$ si $g \in I$ et $f(g)=0$ sinon, donc vers un générateur de $\mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$. Ceci achève la preuve. □

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \xrightarrow{\sim} H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ puisque, dans ce cas, $\sigma(p-3,1)=\sigma(n_4,1)=H \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5).

Remarque 4.2.5. — Les formules explicites des sections s_α du lemme 4.2.2 montrent que leurs images par $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ (où $P \in C$ est défini sur $\mathbb{F}_p$, cf. §3.2) sont nulles. On en déduit que la sous-représentation H du corollaire 4.2.4 est dans le noyau de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$.

4.3. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^1(\mathbb{P}^1,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$. — On détermine la K-représentation $H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. On conserve les hypothèses et notations du §4.2.

Soit $\mathscr{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ le faisceau sur C de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie défini comme suit. Pour $W_y \subset C$ et $U \subset C$ comme au §4.2 (où $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ est un point de C défini sur $\mathbb{F}_p$), on pose :

$$\mathscr{I}(k)(W_y) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{k/2-1}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{u_y^{i+1}}$$

$$\mathscr{I}(k)(U) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}}.$$

Par un calcul élémentaire, on vérifie que les applications de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient bien $\mathscr{I}(k)(W_y)$ dans $\mathscr{I}(k)(U)$ (le seul point non évident est lorsque $y=\infty$). De plus, $\mathscr{I}(k)(W_y)$ (resp. $\mathscr{I}(k)(U)$) est stable sous l'action de I (resp. de K). Si $Z \subset W_y$ est un ouvert affine contenant y, on pose $\mathscr{I}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{I}(k)(W_y)$ et si $Z \subset U$ est un ouvert non vide, on pose $\mathscr{I}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{I}(k)(U)$. Cela permet de définir un sous-faisceau K-équivariant $\mathscr{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$.

Lemme 4.3.1. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'inclusion $\mathscr{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit des isomorphismes de K-représentations $H^i(C,\mathscr{I}(k)) \xrightarrow{\sim} H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. En particulier, on a $H^1(C,\mathscr{I}(k)) = 0$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que l'inclusion de faisceaux $\mathscr{I}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}|_C$ admet un scindage. Définissons en effet un autre sous-faisceau $\mathscr{S}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ comme suit :

$$\mathscr{S}(k)(W_y) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i\geq k-1}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}u_y^i(du_y)^{k/2}$$

$$\mathscr{S}(k)(U) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i\geq k-1}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}u^i(du)^{k/2}.$$

Si $Z \subset W_y$ (resp. $Z \subset U$) est un ouvert affine contenant y (resp. un ouvert affine non vide) défini en inversant un polynôme $f(u_y)$ (resp. $f(u)$) ne s'annulant pas aux points de $\mathbb{F}_p$, on pose $\mathscr{S}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{S}(k)(W_y) \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{f(u_y)^{i+1}}$ (resp. $\mathscr{S}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{S}(k)(U) \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{f(u)^{i+1}}$). Les flèches de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient encore $\mathscr{S}(k)(W_y)$ dans $\mathscr{S}(k)(U)$ (vérifier pour $y=\infty$) ce qui permet donc de définir un sous-faisceau $\mathscr{S}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ satisfaisant de manière évidente $\mathscr{S}(k) \oplus \mathscr{I}(k) \xrightarrow{\sim} \overline{\omega}^{k/2}|_C$. Comme $H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) = 0$ (car $\overline{\omega}^{k/2}|_C \simeq \mathscr{O}_C(k/2(p+1)-k)$ et $k/2(p+1)-k = k/2(p-1) \geq 0$), on a en particulier $H^1(C,\mathscr{I}(k)) = 0$ d'où $H^1(C,\mathscr{I}(k)) = H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. On a déjà calculé que $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ était engendré sous K par les sections suivantes :

$$\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n_k}\mathbb{F}\frac{u^i(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}.$$

Comme toutes ces sections globales sont déjà dans $H^0(C,\mathscr{I}(k))$ qui est stable par K, on a $H^0(C,\mathscr{I}(k)) = H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. Enfin, les deux espaces $H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ et $H^i(C,\mathscr{I}(k))$ sont nuls pour $i \geq 2$ puisque C est une courbe. $\square$

On peut alors compléter le lemme 4.2.1 par la proposition :

Proposition 4.3.2. — *On a une suite exacte longue de cohomologie K-équivariante :*

$$0\to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to 0.$$

Démonstration. — Il n'est pas difficile de vérifier que le faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C/\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)$ est canoniquement isomorphe au sous-faisceau $\mathscr{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (un isomorphisme équivariant est donné en dérivant formellement $k-1$ fois les parties avec les logarithmes). En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \mathscr{I}(k) \to 0$ et en utilisant les lemmes 4.2.1 et 4.3.1, on a le résultat. $\square$

Corollaire 4.3.3. — *On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \to \sigma(n_k,1)/H \to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to 0$$

où $H \subseteq \sigma(n_k,1)$ est défini dans le corollaire 4.2.4.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 4.3.2 et du corollaire 4.2.4. $\square$

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \xrightarrow{\sim} H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ puisque $H = \sigma(n_4,1)$.

Comme $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \simeq \mathscr{O}_C(k-2-(p+1)(k/2-1)) = \mathscr{O}_C(2-n_k)$ et $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathscr{O}_C(n_k)$, on a par dualité de Serre un isomorphisme K-équivariant $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^* \simeq \sigma(n_k,1)^*$. La proposition 4.3.2 donne donc une flèche :

$$\delta : H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^*,$$

c'est-à-dire une flèche K-équivariante $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$.

Lemme 4.3.4. — *L'image de la flèche $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$ s'identifie dans $\sigma(n_k,1)^*$ au dual de $\sigma(n_k,1)/H$.*

Démonstration. — Il faut montrer que, si un élément est dans l'image de δ, son accouplement contre un élément quelconque de $H \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ par la dualité de Serre est nul. On peut vérifier cette nullité par un calcul explicite mais donnons un argument théorique. Lorsque $k < (p+5)/2$, les facteurs de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k,1)/H$ sont tous distincts des facteurs de Jordan-Hölder de H (cf. §4.1 pour la liste de ces facteurs), et comme tous ces facteurs irréductibles sont auto-duaux (car le caractère central de $\sigma(n_k,1)$ est trivial), l'image de $\sigma(n_k,1)$ dans $\sigma(n_k,1)^*$ se factorise nécessairement en un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \xrightarrow{\sim} (\sigma(n_k,1)/H)^*$. Cela démontre au passage que la représentation $\sigma(n_k,1)/H$ est scindée (car ses facteurs de Jordan-Hölder sont distincts pour $k \leq p+1$), i.e. que l'on a un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \simeq \sigma(2,-1) \oplus \sigma(4,-2) \oplus \cdots \oplus \sigma(k-4,2-k/2)$ pour $k \geq 6$ (cf. lemme

4.1.4). Mais le calcul de résidus (issu de la définition explicite de la dualité de Serre, cf. §B.1) donnant $\langle\delta(s),h\rangle=0$ pour $s\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et $h\in H\subseteq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ lorsque $k<(p+5)/2$, i.e. $\langle\delta(s),s_\alpha\rangle=0$ pour s_α comme au lemme 4.2.2, est un calcul purement combinatoire qui ne voit pas la condition $k<(p+5)/2$ et qui est donc valable pour $4\leq k\leq p+1$. On en déduit le résultat. □

Corollaire 4.3.5. — *La surjection $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\twoheadrightarrow H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ du corollaire 4.3.3 induit un isomorphisme de K-représentations $H^*\xrightarrow{\sim}H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$.*

Notons que, H étant scindé, on a aussi un isomorphisme K-équivariant $H^*\simeq H$.

4.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$. — On détermine la G-représentation $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ (sous les conditions du §4) en combinant le corollaire 4.2.4 avec la proposition 3.2.1.

L'injection $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})\to\prod_{i:C\hookrightarrow X}i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ (cf. proposition 3.2.1) induit une injection de G-représentations :

$$H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\hookrightarrow\prod_{i:C\hookrightarrow X}H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C). \tag{7}$$

Pour y un point de la composante centrale de X défini sur $\mathbb{F}_p$, on note encore W_y l'ouvert de X défini au §2.2 « centré » en y et (u_y,v_y) les coordonnées sur W_y. Avec les notations du §2.2, on a $W_y=W_{g_y}$ (et $(u_y,v_y)=(u_{g_y},v_{g_y})$) où $g_y\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}1&0\\ [y]&1\end{pmatrix}\in K$ si $y\in\mathbb{F}_p$ et $W_\infty=W_{g_\infty}$ (et $(u_\infty,v_\infty)=(u_{g_\infty},v_{g_\infty})$) où $g_\infty\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in K$. On note également $V_y\overset{\text{déf}}{=}V_{g_y}$ l'ouvert des points non rationnels de la composante « verticale » au point y et on remarque que $U_{g_y}=U$ pour tout y. Par abus de notation, on note aussi $u=u_0$ et $v=v_0$.

Lemme 4.4.1. — *Soit $\alpha\in\{1,\cdots,k/2-2\}$. La section $s_\alpha\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ (cf. lemme 4.2.2) se prolonge par zéro via l'injection (7) en une section $\widetilde{s}_\alpha\in H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ à support dans la composante centrale.*

Démonstration. — On va construire directement une section $\widetilde{s}_\alpha$ dans $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ qui s'envoie sur s_α par l'injection (7). On définit des sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}\in H^0(W_y,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ pour $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$ par les mêmes formules qu'au §4.2 :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty}\overset{\text{déf}}{=}(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\left(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\right)\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\alpha,y}\overset{\text{déf}}{=}&\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\left(\log_{\mathscr{L}}(u_y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}\right)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\\ &+\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ sont telles que $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_U$ est indépendant de y et $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} = 0$ pour tout y. Le premier calcul est déjà fait (preuve du lemme 4.2.2). Pour le deuxième, on trouve en utilisant les applications de restriction du §3.1 (i.e. en remplaçant u_y par p/v_y et en développant les logarithmes) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}_{\alpha,\infty}|_{V_\infty} &= (-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{-k+1+\alpha}}{p^{k/2-\alpha}}\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_\infty x}-1\big)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_\infty^i}\Big)\frac{(p-v_\infty x)^{k-1-\alpha}}{dv_\infty^{k/2-1}}\\
\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} &= (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\\
&\quad+\frac{(-1)^{k/2-1}}{p^{k/2-1}}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y x}-1\big)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_y^i}\Big)\frac{(p-v_y x)^{k-1-\alpha}v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\\
&\quad+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^i}{i}\binom{k-1-\alpha}{i}\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}
\end{aligned}$$

et un calcul facile montre que toutes ces sections locales sont nulles (modulo p). □

L'analogue du lemme 4.4.1 pour les sections de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ s'envoyant sur un générateur de $\mathrm{Ind}_I^K\chi^{k/2}$ (cf. corollaire 4.2.4) est plus subtil. Rappelons que l'on a déjà défini un relèvement $s_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ du générateur de $\mathrm{Ind}_I^K\chi^{k/2}$ donné par la fonction identité à support dans I (voir la fin de la preuve du corollaire 4.2.4 et le lemme A.2.2).

De la proposition 3.2.1, on déduit une suite longue de cohomologie G-équivariante :

(8)
$$\begin{aligned}
0\to H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\to\prod_{i:C\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C))\to\prod_{i:P\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P))\\
\to H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\to\prod_{i:C\hookrightarrow X}H^1(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C))\to 0
\end{aligned}$$

et rappelons que l'action de G sur $\prod_{i:P\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P))$ est l'action naturelle tordue par χ (cf. remarque 2.3.2). Rappelons aussi que l'action de K sur $H^i(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, $H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ etc. est étendue à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en envoyant p vers l'identité.

Lemme 4.4.2. — (i) *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X}H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$$

qui envoie $(s_g(u_g,v_g))_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $K\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g)=s_g(u)$ pour tout $g\in J$.

(ii) *On a des isomorphismes G-équivariants :*

$$\prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \chi\otimes \mathrm{Ind}_N^G H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

où le premier isomorphisme envoie $\big(c_g(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathscr{L}}(u_g)(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}\big)_{g\in J}$ *où J est un système de représentants quelconque de $N\backslash G$ et $c_g,d_g\in\mathbb{F}$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que* $f(g)=c_g(\frac{u}{du})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathscr{L}}(u)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ *pour tout $g\in J$ et où le deuxième isomorphisme envoie f sur l'unique couple de fonctions (h,l) dans les induites de droite tel que $h(g)=c_g+\frac{1}{2}\mathscr{L}d_g$ et $l(g)=-d_g$.*

Démonstration. — Le (i) et le premier isomorphisme du (ii) sont laissés au lecteur. Pour le deuxième isomorphisme du (ii), il suffit de remarquer que l'action naturelle de N dans la base $\mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}\oplus\mathbb{F}\big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ de $H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ réalise un isomorphisme de cette représentation avec $\chi^{k/2-1}\oplus\chi^{k/2}$ (regarder l'action de w_p et utiliser $\log_{\mathscr{L}}(p)=\mathscr{L}$). Comme il faut tordre par χ cette action naturelle (cf. ci-dessus), on en déduit le résultat. $\square$

Notons $\phi:\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$ le morphisme induit par la suite exacte longue (8) (et en utilisant le lemme 4.4.2). Par la remarque 4.2.5, ϕ se factorise par le quotient $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2}$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ et définit donc un morphisme $\overline{\phi}:\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2}\to\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$, c'est-à-dire un morphisme :

$$\overline{\phi}:\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}\to\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

via l'isomorphisme du lemme 2.3.7 (car $p>2$).

Rappelons que $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) s'identifie au $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{F}$ définies sur les sommets (resp. les arêtes non orientées) de l'arbre de Bruhat-Tits pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On note T_p (resp. U_p) l'endomorphisme de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) défini par $(T_pf)(s)=\sum_{s'}f(s')$ (resp. $(U_pf)(a)=\sum_{a'}f(a')$), la somme portant sur les $p+1$ sommets (resp. les $2p$ arêtes) adjacents au sommet s (resp. issues de l'arête a) (T_p coïncide avec l'endomorphisme déjà noté T_p défini au §1.2). Le lemme suivant est immédiat et laissé au lecteur :

Lemme 4.4.3. — *On a un diagramme commutatif G-équivariant :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0\\ & & \| & & \downarrow {\scriptstyle T_p-1} & & \downarrow {\scriptstyle U_p} & & \\ 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0\end{array}$$

où l'application $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\to\mathrm{Ind}_N^G 1$ envoie $f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ sur la fonction $a\mapsto f(o(a))+f(t(a))$ en notant $o(a)$ et $t(a)$ les deux sommets de l'arête a.

Lemme 4.4.4. — *Soit* $a(\mathscr{L}) \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathscr{L}-2H_{k/2-1}\big)\big) \in \mathfrak{O}$ *(où* $H_i = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}$, *cf. §1.2). L'endomorphisme* $\overline{\phi}$ *de* $(\mathrm{Ind}_N^G 1 \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi) \otimes \chi^{k/2}$ *est donné (à multiplication près par un scalaire non nul) par une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} (U_p+1)+(-1)^{k/2-1}a(\mathscr{L}) & * \\ 0 & -k(k/2-1) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Reprenons la section $s_{k/2}(u) \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ précédente (où C désigne la composante centrale) et notons $s_{k/2}(v) \stackrel{\text{déf}}{=} w_p(s_{k/2}(u))$ (i.e. on remplace u par v dans la formule de $s_{k/2}(u)$, la notation étant légitime puisque $w_p u = v$, cf. §2.2). En revenant à la définition du scindage $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2} \simeq \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi^{k/2+1}$ (cf. preuve du lemme 2.3.7), on voit qu'il suffit de calculer $\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big)$ et $\phi\big(s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)\big)$ en terme des fonctions $(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ et $\big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ (vues comme fonctions dans l'induite à support dans N). Notons $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u))$ (resp. $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(v))$ la restriction de $s_{k/2}(u)$ (resp. $s_{k/2}(v)$) au point rationnel y de la composante support de $s_{k/2}(u)$ (resp. de $s_{k/2}(v)$). Posons $\Delta_{k/2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)}$ et $b_{k/2,k/2} \stackrel{\text{déf}}{=} k/2(k/2-1)\Delta_{k/2}$, on trouve pour $y \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}$ d'après la démonstration du lemme A.2.1 et d'après le lemme A.2.3 (en se rappelant que $s_{k/2} = s'_{k/2}$, cf. la fin de la preuve de la proposition 4.2.3 dans l'appendice A.2) :

$$\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1}, \quad \mathrm{res}_y(s_{k/2}(v)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}$$

et, pour $y = 0 \in \mathbb{F}_p$:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_0(s_{k/2}(u)) &= -\big(\Delta_{k/2}-b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ \mathrm{res}_0(s_{k/2}(v)) &= -\big(\Delta_{k/2}-b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(v)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

En se rappelant que, dans le morphisme ϕ de la suite exacte (8), on multiplie les restrictions par -1 dès que l'on « change de branche », on obtient :

$$\begin{aligned} \phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big) &= -\Delta_{k/2}\Big(\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1} - \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}\Big) \\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2-1})(\Delta_{k/2}-b_{k/2,k/2}H_{k/2-1})\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2})b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ &\quad +(-1)^{k/2+1}b_{k/2,k/2}\mathscr{L}\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Or, dans $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2} \simeq \chi \otimes \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}$, on a :

$$U_p\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} = \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}} \Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1} + (-1)^{k/2-1} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}} \Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}.$$

On trouve donc pour $\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big)$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{k/2}\Big(U_p+2-k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1}+\mathscr{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si} \quad (-1)^{k/2}=1 \\ *\oplus \Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si} \quad (-1)^{k/2}=-1 \end{aligned}$$

où le premier terme est dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$ et le deuxième dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$ (on n'aura pas besoin de la formule pour $*\in\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$). Par un calcul analogue, on obtient pour $\phi\big(s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)\big)$:

$$\begin{aligned} *\oplus \Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si} \quad (-1)^{k/2}=1 \\ -\Delta_{k/2}\Big(U_p+2-k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1}+\mathscr{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si} \quad (-1)^{k/2}=-1. \end{aligned}$$

En remarquant que l'image de $s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)$ (resp. $s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)$) dans $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G\chi^{k/2}$ est dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$ si $(-1)^{k/2}=1$ (resp. si $(-1)^{k/2}=-1$), on en déduit facilement le résultat. □

Corollaire 4.4.5. — (i) *Le morphisme $\overline{\phi}$ est surjectif.*
(ii) *Le noyau de $\overline{\phi}$ est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_pf=a(\mathscr{L})f\}$.*

Démonstration. — Tout endomorphisme $\mu T_p-\lambda$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ avec $(\mu,\lambda)\in\mathbb{F}$, $\mu\lambda\neq 0$ est surjectif (vérification facile), on en déduit donc (i) par le lemme 4.4.3 combiné avec le lemme 4.4.4. On voit aussi que le noyau de ϕ est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_pf=(-1)^{k/2}a(\mathscr{L})f\}\otimes\chi^{k/2}$. Mais cette dernière représentation de G est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_pf=a(\mathscr{L})f\}$, d'où (ii). □

De la suite exacte longue (8), des résultats du §2.3, du §4.2 et du §4.3, on déduit alors facilement :

Corollaire 4.4.6. — (i) *On a une suite exacte G-équivariante :*

$$0\to\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H\to H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\to\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_pf=a(\mathscr{L})f\}\to 0.$$

(ii) *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\simeq\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^*.$$

5. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ pour $4\leq k\leq p+1$, k pair et $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$.

5.1. Cohomologie de Čech. — On compare les groupes H^1 et $\check{H}^1$ pour les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})$.

Reprenons les notations du §4.2 et considérons le recouvrement $(W_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C. On munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ d'une relation d'ordre total par $0<1<\cdots<p-1<\infty$. Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur C_{Zar}, on définit le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(C,\mathscr{F})\overset{\text{déf}}{=}\Big(\prod_{\substack{y<z\\(y,z)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}}\mathscr{F}(U)\Big)/\sim$$

où $(s_{y,z})_{y<z}\sim(t_{y,z})_{y<z}$ si et seulement s'il existe $s_y\in\mathscr{F}(W_y)$ pour tout $y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ tel que $s_{y,z}-t_{y,z}=s_z|_U-s_y|_U$ pour tout $y<z$. Si le faisceau $\mathscr{F}$ est K-équivariant, on a une action naturelle de K sur $\check{H}^1(C,\mathscr{F})$.

Lemme 5.1.1. — *On a un isomorphisme canonique K-équivariant :*

$$\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\xrightarrow{\sim}H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C).$$

Démonstration. — Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$, on sait par la théorie générale (cf. e.g. [**11**, §III.4]) qu'il y a un morphisme canonique (K-équivariant si $\mathscr{F}$ l'est) $\check{H}^1(C,\mathscr{F})\to H^1(C,\mathscr{F})$. En revenant à la preuve de la proposition 4.3.2, on a pour tout ouvert affine V de C et tout $i\geq 1$ une suite exacte courte $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\to H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to H^i(V,\mathscr{I}(k))$. Or, $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)=0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ est quasi-cohérent et $H^i(V,\mathscr{I}(k))=0$ car $\mathscr{I}(k)$ est un facteur direct de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (cf. preuve du lemme 4.3.1) et $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ est aussi quasi-cohérent, d'où $H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)=0$. Comme les ouverts W_y et U du recouvrement sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**11**, Ex.III.4.11]) entraîne alors en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ est un isomorphisme. □

Considérons un système de représentants $J\subset G$ de $N\backslash G$ et le recouvrement affine $(W_g)_{g\in J}$ de X correspondant. Pour toute relation d'ordre total $<$ sur J et tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur X, définissons le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(X,\mathscr{F})\overset{\text{déf}}{=}\Big(\prod_{\substack{g<h\\(g,h)\in J^2}}\mathscr{F}(W_g\cap W_h)\Big)/\sim$$

où $(s_{g,h})_{g<h}\sim(t_{g,h})_{g<h}$ si et seulement s'il existe $s_g\in\mathscr{F}(W_g)$ pour tout $g\in J$ tel que $s_{g,h}-t_{g,h}=s_h|_{W_g\cap W_h}-s_g|_{W_g\cap W_h}$ pour tout $g<h$. Si le faisceau $\mathscr{F}$ est G-équivariant, on a une action naturelle de G sur $\check{H}^1(C,\mathscr{F})$.

Lemme 5.1.2. — *On a un isomorphisme canonique G-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\xrightarrow{\sim}H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})).$$

Démonstration. — Définissons un sous-faisceau $\mathscr{J}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}$ sur X comme suit (avec les notations du §2.2) :

$$\mathscr{J}(k)(W_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{(u_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{(v_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{u_g^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{v_g^{i+1}}$$

$$\mathscr{J}(k)(U_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{k/2}}{(u_g-x)^{i+1}}$$

$$\mathscr{J}(k)(V_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{k/2}}{(v_g-x)^{i+1}}$$

et $\mathscr{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(W_g)$ (resp. $\mathscr{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(U_g)$, resp. $\mathscr{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(V_g)$) si $Z \subseteq W_g$ et $Z \not\subseteq U_g$, $Z \not\subseteq V_g$ (resp. $Z \subseteq U_g$ et $Z \neq \varnothing$, resp. $Z \subseteq V_g$ et $Z \neq \varnothing$). Comme pour la preuve de la proposition 4.3.2, on a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}} \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \mathscr{J}(k) \to 0$ qui induit pour tout ouvert $V \subset X$ et tout $i \geq 1$ des suites exactes $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}) \to H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \to H^i(V,\mathscr{J}(k))$. Si V est affine, le premier groupe est nul car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ est quasi-cohérent et le troisième aussi car $\overline{\omega}^{k/2}$ est quasi-cohérent et car on peut montrer, comme dans la preuve du lemme 4.3.1, que l'injection de faisceaux $\mathscr{J}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}$ admet un scindage. Comme toutes les intersections du recouvrement $(W_g)_{g\in J}$ sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**11**, Ex.III.4.11]) donne en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \to H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ est un isomorphisme. □

On obtient alors :

Corollaire 5.1.3. — *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C).$$

Démonstration. — Cela découle du (ii) du corollaire 4.4.6 et des lemmes 5.1.1 et 5.1.2. □

5.2. Modifications de sections. — On effectue quelques modifications sur les sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq k/2-1}$ du lemme 4.4.1. Ces calculs serviront au paragraphe suivant.

Reprenons les notations du §4.4 et notons de plus $\mathscr{W}_y \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{W}_{g_y}$, $\mathscr{V}_y \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{V}_{g_y}$ et $(u_y,v_y) \stackrel{\text{déf}}{=} (u_{g_y},v_{g_y})$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ (voir §2.2). On remarque que $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{g_y}$ et on note aussi $(u,v) = (u_0,v_0)$.

Pour $\alpha \in \{1,\cdots,k/2-1\}$, nous avons défini au lemme 4.4.1 des sections globales $\widetilde{s}_\alpha \in H^0(\mathscr{X},\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ à support dans la composante centrale C par recollement de sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(W_y,\omega(k,\mathscr{L}))$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$. Notons encore $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(\mathscr{W}_y,\omega(k,\mathscr{L}))$ la section locale en caractéristique zéro définie par (presque) les mêmes formules :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty[x]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{((u_\infty-[x])[x]^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\widetilde{s}_{\alpha,y} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_y[x]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y-[x])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}+\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$

où rappelons que $[x]\in\mathbb{Z}_p$ désigne le représentant de Teichmüller de x.

Lemme 5.2.1. — *Pour $y\in\mathbb{F}_p$, on a :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-[y]-[x])\frac{(u-[y]-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\Big(-\log_{\mathscr{L}}v_y\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}+\big(\mathscr{L}-H_{k-1-\alpha}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\Big)+p^2*$$

où $*\in\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_y)$.

Démonstration. — La première formule est laissée au lecteur. Pour la deuxième, on a :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}\,|_{\mathscr{V}_y}=(-1)^{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y[x]}-1\big)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(p[x]^{-1})^j}{jv_y^j}\Big)\frac{(p-v_y[x])^{k-1-\alpha}v_y^{\alpha-1}}{(pdv_y)^{k/2-1}}$$
$$+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$
$$+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$

d'où on déduit la formule de l'énoncé en développant les logarithmes puis en utilisant le lemme A.1.2 et $\log_{\mathscr{L}}(p)=\mathscr{L}$. □

Remarque 5.2.2. — Par le (i) du lemme 4.4.1, les sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ se recollent en fait en une section globale de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (et pas seulement de $H^0(\mathscr{X},\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$) à support dans la composante centrale.

Nous allons modifier les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ pour $y\in\mathbb{F}_p$ sans changer leur réduction modulo p. Cela nous servira dans la paragraphe suivant pour mener à bien les calculs dans $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$.

Pour $0 \leq j \leq p-1$ et $y \in \mathbb{F}_p$, posons :

$$t_{\alpha,y}^j \overset{\text{déf}}{=} p \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} [x]^j \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y - [x]) + \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{([x]^{-1}u_y)^i}{i}\Big) \frac{(u_y - [x])^{k-2-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} \in p\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y).$$

Lemme 5.2.3. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ par un élément dans $\oplus_{1\leq j\leq p-1}\mathfrak{O}t_{\alpha,y}^j$ de telle sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x]) \frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p(k-1-\alpha)\frac{A_y(u)}{du^{k/2-1}} - p\frac{B_y(u)}{du^{k/2-1}} + p^2 *$$

où $* \in \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U})$ et :

$$A_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^i \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{[x]^{-j}}{j}(u-[y])^j(u-[x+y])^{k-2-\alpha}$$

$$B_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\neq y}[x]^i(u-[x])^{k-2-\alpha}.$$

Démonstration. — Un calcul formel de développement des logarithmes donne (voir lemmes 5.2.1 et A.3.3) :

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y]) \frac{(u-[x]-[y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y])\frac{(u-[x+y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$
$$- p(k-1-\alpha)\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\delta_{x,y}\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y])\frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$
$$- p\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\delta_{x,y}\frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p^2 *$$

où $* \in \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U})$ et $\delta_{x,y} \overset{\text{déf}}{=} -\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[y]^{p-j}[x]^j \in \mathbb{Z}_p$ (cf. lemme A.3.2). Il suffit alors de corriger $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par $-(k-1-\alpha)\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[y]^{p-j}t_{\alpha,y}^j$. Un dernier calcul fournit $A_y(u)$ et $B_y(u)$. □

Lemme 5.2.4. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y) + p\mathfrak{O}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+[y]) + \sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\frac{(u_y[y]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+[y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ de telle* *sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$
$$+p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}} - p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$

où :

$$\alpha'_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{k-1-\alpha}{k-1-\alpha-i}(-1)^{\alpha+i+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{\binom{k-2-\alpha}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\alpha}$$
$$+\sum_{j=i}^{k-2-\alpha}\binom{k-2-\alpha}{j}\frac{(-1)^{\alpha+1+j}}{k-1-\alpha-j}\binom{j}{i}.$$

Démonstration. — En modifiant la section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ du lemme 5.2.3 par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y)$ (cf. lemme A.3.4), on peut supposer déjà :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}.$$

Puis en ajoutant à $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ le terme $-p\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+[y]) + \sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\frac{(u_y[y]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+[y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ dont la restriction à $\mathscr{U}$ est :

$$-p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$
$$-p*\frac{(u-[y])^{k/2-1}}{du^{k/2-1}}$$

avec $*\in\mathbb{Z}_p[u-[y]]$ et en rajoutant encore $p*\frac{u_y^{k/2-1}}{du_y^{k/2-1}}\in p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y)$ (pour le même $*$), on obtient une restriction comme dans l'énoncé. □

Posons :

$$\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \alpha'_i + \sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}\in\mathbb{Z}_p \tag{9}$$

(on ne fait pas apparaître la dépendance en α dans l'écriture α_i), on a donc pour $y \in \mathbb{F}_p$:

$$\text{(10)}\quad \widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$

et notons que :

$$\text{(11)}\quad \widetilde{s}_{\alpha,\infty}\,|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}.$$

Reprenons maintenant le calcul de $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y}$ du lemme 5.2.1 :

Lemme 5.2.5. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on a (avec $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ comme dans le lemme 5.2.4) :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\Big(-\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} + \big(\mathscr{L}-H_{k-1-\alpha}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\Big) + p*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*_2$$

où $*_1 \in \mathbb{Z}_p$ et $*_2 \in \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_y)$.

Démonstration. — Par le lemme 5.2.1, il suffit de vérifier que les modifications des lemmes 5.2.3 et 5.2.4 sont des termes de la forme $p*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*_2$ en restriction à $\mathscr{V}_y$. Prenons par exemple $t^j_{\alpha,y}$ (lemme 5.2.3), on a :

$$t^j_{\alpha,y}\,|_{\mathscr{V}_y} = p(-1)^{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^j\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}-[x]\big) + \sum_{i=1}^{k/2-2}\Big(\frac{p[x]^{-1}}{v_y}\Big)^i\frac{1}{i}\Big)\frac{(\frac{p}{v_y}-[x])^{k-2-\alpha}v_y^{k-2}}{(pdv_y)^{k/2-1}}$$

et en développant les logarithmes, un calcul donne :

$$t^j_{\alpha,y}\,|_{\mathscr{V}_y} = p\frac{(-1)^{k/2-\alpha}}{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p}[x]^{k/2-1-\alpha+j}\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2 * .$$

On laisse les autres termes correctifs (lemme 5.2.4) au lecteur. □

5.3. Défauts de recollement. — On calcule explicitement les classes de cohomologie dans $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ provenant du défaut de recollement modulo p^2 des sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ modifiées du §5.2.

Un examen soigneux des preuves des parties 2, 4 et 5.1 (et des preuves utilisées de l'appendice) montre d'abord que tous les résultats concernant $H^i(X,\overline{\omega}^{k/2})$ et $H^i(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ $(i = 0,1)$ s'étendent à l'identique à $H^i(X,\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)$ et $H^i(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à condition de remplacer le corps $\mathbb{F}$ des coefficients par la

$\mathbb{F}$-algèbre artinienne $\mathfrak{O}/p$. En particulier (cf. corollaires 4.4.6 et 5.1.3), on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p) \to H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1_{\mathfrak{O}/p} \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\} \to 0$$

et des isomorphismes :

$$\check{H}^1(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq H^1(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p)^*.$$

Pour $n \geq 2$, la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1} \xrightarrow{p} \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n \longrightarrow \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}) \longrightarrow H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n) \longrightarrow \\ H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \xrightarrow{\psi_n} H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}). \end{aligned}$$

Pour voir si $s \in H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ se relève en une section de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n)$, il suffit donc de calculer son image par l'application :

$$\psi_n : H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \longrightarrow H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}).$$

On détermine maintenant les images dans $H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq \check{H}^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ par ψ_2 des sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq k/2-1}$ de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ (cf. §5.2).

Pour $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ et $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, on définit $g_{y_z} \in G$ comme suit. Si $y \in \mathbb{F}_p$ et $z \in \mathbb{F}_p$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} [y] & 1 \\ p+[yz] & [z] \end{pmatrix}$. Si $y \in \mathbb{F}_p$ et $z = \infty$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p & 0 \\ [y] & 1 \end{pmatrix}$. Si $y = \infty$ et $z \in \mathbb{F}_p$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [z] & p \end{pmatrix}$ et si $y = \infty$ et $z = \infty$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{W}_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{W}_{g_{y_z}}$, $W_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} W_{g_{y_z}}$ (cf. §2.2) et on remarque que $\mathscr{W}_{y_0} = \mathscr{W}_y$ et $W_{y_0} = W_y$. Les ouverts W_{y_z} recouvrent (dans X) la composante C_y « perpendiculaire » au point y à la composante centrale C et on a $W_{y_z} \times_X C_y = C_y \backslash \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_{\mathrm{p}} \text{ autres que } y_z\}$ et $\mathscr{W}_{y_z} \cap \mathscr{W}_{y_{z'}} = \mathscr{V}_y$ (avec les notations du §5.2) si $z \neq z'$. Dans la suite, un élément de $\check{H}^1(C_y, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ (resp. de $\check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C)$) est écrit dans le recouvrement $(W_{y_z})_{z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C_y dans X (resp. $(W_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C dans X) avec l'ordre total $y = y_0 < y_1 < \cdots < y_{p-1} < y_\infty$ (resp. $0 < 1 < \cdots < p-1 < \infty$), cf. §5.1 (le faisceau $(\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C$ est défini exactement comme au §3.2 en remplaçant $\mathbb{F}$ par $\mathfrak{O}/p$).

Lemme 5.3.1. — *Soit $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1 + \frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)(\mathscr{L} - 2H_{k/2-1})\big) \in \mathfrak{O}$ (cf. lemme 4.4.4). L'image de $\widetilde{s}_{k/2-1}$ par ψ_2 est donnée dans $\Pi_C \check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C)$ par :*
- *sur C_y pour $y \in \mathbb{F}_p$ par la classe dans $\check{H}^1(C_y, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ du uplet :*

$$-\frac{a(\mathscr{L})}{k/2(k/2-1)}\Big(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}}, \cdots, \frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}}, 0, \cdots, 0\Big)$$

• *sur C (la composante centrale) par la classe dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ du uplet :*

$$\frac{(-1)^{k/2}}{k/2(k/2-1)}\Big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\Big)$$

et par 0 *sur les autres* $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.

Démonstration. — L'image par ψ_2 d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est simplement donnée dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ par la classe du uplet $(-p^{-1}\hat{s}_y\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,-p^{-1}\hat{s}_y\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0)$ où $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ est un relevé local de $s|_{W_y}$. Par le lemme 5.2.5, on obtient donc pour $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1})$:

$$(-1)^{k/2}\Big((\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,$$
$$(\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big).$$

En effet, les uplets de la forme $\big(\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\big)$ (qui apparaissent avec le terme correctif $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ dans le lemme 5.2.5) ont une classe nulle dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ car la section locale $\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ appartient à $H^0(W_y,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Par ailleurs, on l'égalité dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ d'après le lemme B.2.2 :

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)=$$
$$H_{k/2-2}\Big(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)$$

d'où la première égalité de l'énoncé en remarquant que $\mathscr{L}-H_{k/2-2}-H_{k/2}=\frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}a(\mathscr{L})$. Passons à la deuxième. L'image par ψ_2 d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est donnée dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe du uplet $(p^{-1}(\hat{s}_z|_{W_y\cap W_z}-\hat{s}_y|_{W_y\cap W_z}))_{y<z}$ où les $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ sont des relevés locaux des $s|_{W_y}$, $y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$. En développant $(u-[y])^i=\sum_{r=0}^{k/2-1}\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$ et en utilisant (10), (11) et le lemme B.2.2, un calcul donne dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$:

$$\big((\widetilde{s}_{k/2-1,z}|_{W_y\cap W_z}-\widetilde{s}_{k/2-1,y}|_{W_y\cap W_z})\big)_{y<z}=$$
$$-p\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big(0,\cdots,0,\big(\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

où rappelons que α_i est défini en (9). Mais par le lemme A.3.8, on a :

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i=\frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}$$

d'où la deuxième égalité de l'énoncé. Le fait que l'on trouve une classe nulle sur les autres composantes (en particulier la composante « perpendiculaire » au point ∞ à la composante centrale) est un calcul facile laissé au lecteur. □

Lemme 5.3.2. — *Soit $\alpha\in\{1,\cdots,k/2-2\}$. L'image de $\widetilde{s}_\alpha$ par ψ_2 est donnée dans $\Pi_C\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ (où C est la composante centrale) du uplet :*

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\Big(\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big)\Big(\Big((z^{k-\alpha-1-r}-y^{k-\alpha-1-r})\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_z}\Big)_{y<z,z\neq\infty},$$
$$\Big(-y^{k-\alpha-1-r}\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_\infty}\Big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

et par 0 sur les autres $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.

Démonstration. — On utilise (10) et (11) comme précédemment et on développe $(u-[y])^i=\sum_{r=0}^{i}\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$. La dernière assertion provient du lemme 5.2.5 et du fait que les termes correctifs en $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ ne contribuent pas (cf. preuve précédente). □

Remarque 5.3.3. — La formule sommatoire du lemme 5.3.2 est encore valable pour $\alpha=k/2-1$, mais dans le lemme 5.3.1, on a complètement identifié la classe de Čech « centrale » dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ en utilisant le lemme B.2.2.

5.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. — On détermine la G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ (sous les conditions du §5).

Proposition 5.4.1. — *Soit $a(\mathscr{L})\in\mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
(i) *L'application $\psi_2:H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\to H^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ est surjective.*
(ii) *On a un isomorphime de G-représentations :*

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)}\big)=\Big\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p),a(\mathscr{L})T_pf=f\Big\}.$$

Démonstration. — Nous allons montrer que $\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)}$ est surjectif et calculer son noyau. Rappelons que :

$$H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p=\bigoplus_{j=0}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p$$

et que chaque représentation $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ est engendrée sous K par la section globale $\widetilde{s}_{k/2-1-j}\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (voir le lemme

4.4.1, la preuve du corollaire 4.2.4 et le début du §5.3). Rappelons aussi que $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*$ (voir le début du §5.3). Montrons que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur la composante centrale est non nulle modulo π. Pour cela, considérons le uplet du lemme 5.3.2 (et aussi le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) vu dans $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ et calculons son accouplement avec la section :

$$\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}}=(-1)^{k/2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}s_{k/2-1-j}\in H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\mid_C)$$

donné par la dualité de Serre entre $H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\mid_C)$ et $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Un calcul facile de résidus donne :

$$(-1)^{k/2-1-j}\sum_{r=0}^{k/2-2}\begin{pmatrix}k-2-r\\k/2-2-j\end{pmatrix}\sum_{i=r}^{k/2-2}\begin{pmatrix}i\\r\end{pmatrix}(-1)^{i-r}\alpha_i$$

qui est dans $\mathbb{Z}_p^\times$ d'après le lemme A.3.8. Comme la section $\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}}$ a un antécédent dans $H^0(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$, on en déduit par le corollaire 4.3.5 que le uplet du lemme 5.3.2 (et le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) est vraiment non nul modulo π dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Comme $\widetilde{s}_{k/2-1-j}$ engendre sous K la représentation « irréductible » $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (au sens où cette représentation n'admet pas de sous-représentation stricte non nulle facteur direct comme $\mathfrak{O}/p$-module), ψ_2 est injectif en restriction à $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$. Lorsque $j>0$, on sait de plus par la dernière assertion du lemme 5.3.2 que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur les composantes non centrales est nulle. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi_2\mid_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)})=0$ et $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)^*\subset\mathrm{Im}(\psi_2)$ pour $j>0$. Pour $j=0$, on déduit facilement du lemme 5.3.1 que :

$$\begin{aligned}\psi_2\mid_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)}:\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)&\longrightarrow\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*\\&\simeq\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)\end{aligned}$$

s'identifie (à multiplication près par un scalaire non nul) à l'endomorphisme surjectif $-a(\mathscr{L})T_p+\mathrm{Id}$. En effet, les éléments de Čech $\big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\big)$ et $(-1)^{k/2-1}\big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\big)$ s'envoient nécessairement respectivement sur 1 et $-u^{p-3}$ dans $\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (à homothétie près) via un isomorphisme $(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)^*\xrightarrow{\sim}\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (pour le premier, cela découle du fait qu'il est la projection de l'image de $\widetilde{s}_{k/2-1}$ et pour le deuxième, on applique $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$). On applique alors la formule (1) donnant $T_p([\mathrm{Id},1])$ en remarquant que $\begin{pmatrix}0&1\\p&[-y]\end{pmatrix}u=v_y$ sur $\mathscr{X}$ (§2.2). Donc ψ_2 est finalement surjectif (et même surjectif en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$) et son noyau en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$ est exactement donné par les $f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)$ tels que $a(\mathscr{L})T_pf=f$. $\square$

Proposition 5.4.2. — *L'image de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$ dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ se relève dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$ via l'application*

$$H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p).$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, on note $\omega(k,\mathscr{L})/p^n$ pour $\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n$. Par la proposition 5.4.1, l'application $\psi_2 : H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$ est surjective. En reprenant la suite exacte longue de cohomologie définissant ψ_2, on en déduit que l'application $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)$ est nulle et que l'application $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$ est injective. Par ailleurs, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & \omega(k,\mathscr{L})/p^2 & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathscr{L})/p^3 & \to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \to 0\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0\to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathscr{L})/p^2 & \to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \to 0
\end{array}$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^3) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) & \xrightarrow{\psi_3} & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\\
\downarrow & & \| & & \downarrow\\
H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) & \overset{\psi_2}{\twoheadrightarrow} & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)
\end{array}$$

où la flèche verticale de droite est injective. Cela implique immédiatement que ψ_3 est surjectif et que l'on a un isomorphisme $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\xrightarrow{\sim}H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$. Comme ψ_3 est surjectif, on peut recommencer le raisonnement précédent avec ψ_3 au lieu de ψ_2, puis ψ_4 au lieu de ψ_3 etc. et on obtient par récurrence des isomorphismes pour tout $n\geq 1$:

$$H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\xrightarrow{\sim}H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p).$$

On a des diagrammes commutatifs analogues au précédent :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+m}) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n) & \to & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^m)\\
\downarrow & & \| & & \downarrow\wr\\
H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+1}) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n) & \to & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)
\end{array}$$

d'où on déduit des isomorphismes pour tous $n,m>0$:

$$\operatorname{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+m})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\Big)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+1})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\Big).\tag{12}$$

En passant à la limite projective sur n sur les suites exactes :

$$0\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n-1})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\to \operatorname{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\Big)\to 0$$

et en remarquant que le quotient de droite est constant par (12) appliqué avec $n = 1$ et que les conditions de Mittag-Leffler sont satisfaites sur les noyaux par (12) encore, on en déduit :

$$H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L})) \otimes \mathfrak{O}/p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L})/p^2) \to H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L})/p)\Big)$$

d'où le résultat. □

On en déduit le résultat principal de cet article (théorème 1.1.1) :

Théorème 5.4.3. — *Soit $a(\mathscr{L}) \in \mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
(i) *Si* $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$*, on a un isomorphisme de G-représentations :*

$$H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \simeq \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_p f = 0\}.$$

(ii) *Si* $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) = 0$*, on a un isomorphisme de G-représentations :*

$$\begin{aligned} 0 \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(p-3,1), a(\mathscr{L})T_p f = f\} \to H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \to \\ \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_p f = a(\mathscr{L})f\} \to 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — Noter que (ii) lorsque $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$ redonne (i) puisque la représentation de gauche est alors nulle. Par le lemme 5.4.2, on voit donc qu'il suffit de montrer le même énoncé que (ii) pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$ avec la G-représentation image de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^2)$ dans $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$, c'est-à-dire avec $\mathrm{Ker}(\psi_2)$. Par le corollaire 4.4.6, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p) \to H^0(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\} \to 0$$

et par la proposition 5.4.1, on a :

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H\otimes\mathfrak{O}/p)}\big) = \Big\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (\sigma(p-3,1) \otimes \mathfrak{O}/p), a(\mathscr{L})T_p f = f\Big\}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\psi_2) \subset H^0(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ s'envoie encore surjectivement vers la représentation quotient $\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\}$. Soit $\bar{s}$ un élément de cette représentation quotient et $s \in H^0(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ un relevé de $\bar{s}$. Comme l'application ψ_2 est surjective en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p)$ (cf. preuve de la proposition 5.4.1), il existe $s' \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p)$ tel que $\psi_2(s') = \psi_2(s)$ et l'élément $s - s' \in \mathrm{Ker}(\psi_2)$ s'envoie encore sur $\bar{s}$. Ceci achève la preuve. □

Corollaire 5.4.4. — *Supposons k pair, $k \leq p+1$ et* $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$.
(i) *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(k,\mathscr{L})$ est non nul et admissible.*
(ii) *La correspondance définie dans* [**4**] *est compatible à la réduction modulo p.*

Démonstration. — Le (i) résulte de [**4**, Prop.4.4.4]. Le (ii) résulte de [**6**] et de la définition de cette correspondance ([**3**]). □

Appendice A
Calculs de sections

A.1. Calculs combinatoires

Lemme A.1.1. — *Soit $1 \leq n \leq p-2$ et $0 \leq \ell \leq p-1$. On a les égalités dans $\mathbb{F}_p(u)$:*

$$\begin{aligned}\frac{u^\ell}{(u-u^p)^n} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{\ell+i-n}}{(u-x)^i}\binom{\ell}{\ell+i-n}+\begin{cases}\frac{1}{u^{n-\ell}} & si\ 0\leq \ell\leq n-1\\ 0 & sinon\end{cases}\\ \frac{1}{u(u-u^p)^n} &= \frac{1}{u^{n+1}}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{j-n-1}}{(u-x)^j}.\end{aligned}$$

Démonstration. — La première égalité se démontre par récurrence sur $\ell \geq 0$. La deuxième se démontre en remarquant que :

$$\frac{1}{(u-u^p)^n}=\frac{1}{u^n}+\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{x^{-n+i-1}}{(u-x)^{i-1}}+(-1)^{n-i}\frac{x^{-n+i}}{(u-x)^i}.\qquad\square$$

Lemme A.1.2. — *Soit $1 \leq \ell \leq n$. On a (dans $\mathbb{Q}$) :*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{n}{\ell-j}=\binom{n}{\ell}(H_{n-\ell}-H_n).$$

Démonstration. — La somme $\sum_{1\leq j\leq\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{n}{\ell-j}$ est le coefficient de degré ℓ dans le développement en série entière de $z\mapsto -(1+z)^n\log(1+z)$. En dérivant $(1+z)^x = \sum_{i\geq 0}\binom{x}{i}z^i$ par rapport à x, on obtient par ailleurs :

$$(1+z)^x\log(1+z)=\sum_{i\geq 1}z^i\frac{d}{dx}\binom{x}{i}.$$

Or, si x n'est pas un entier de 0 à $i-1$, on a par dérivation logarithmique :

$$\frac{d}{dx}\binom{x}{i}=\binom{x}{i}\sum_{0\leq j\leq i-1}\frac{1}{x-j}=\binom{x}{i}(H_x-H_{x-i})$$

où $H_x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n>0}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ pour tout nombre complexe $x\notin \mathbf{Z}_{<0}$ (avec $H_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$). Donc le coefficient de degré ℓ dans le développement en série entière de $z\mapsto(1+z)^x\log(1+z)$ est $\binom{x}{\ell}(H_x-H_{x-\ell})$ lorsque $x\in\mathbb{C}_p-\{0,\cdots,\ell-1\}$. On en déduit le résultat. $\square$

Lemme A.1.3. — *Soit $1 \leq m \leq n$ des entiers et $M \overset{\text{déf}}{=} (M_{i,l})_{\substack{0\leq i\leq m\\ 0\leq l\leq m}}$ la matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$ définie par $M_{i,0} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i}{i}$ pour $0 \leq i \leq m$ et $M_{i,l} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i-l}{i}\sum_{j=1}^{l}\frac{(-1)^j}{j}\binom{n+i}{l-j}$ pour $1\leq l\leq m$ et $0\leq i\leq m$. Alors $\det(M)=\frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$.*

Démonstration. — Par le lemme A.1.2, on a $M_{i,l} = \binom{n+i-l}{i}\binom{n+i}{l}(H_{n+i-l} - H_{n+i})$ pour $1 \leq l \leq m$ et $0 \leq i \leq m$. On en déduit :

$$\det(M) = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & 1/n & 1/(n-1) & \dots & 1/(n-m+1) \\ 1 & 1/(n+1) & 1/n & \dots & 1/(n-m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1/(n+m) & \dots & \dots & 1/(n+1) \end{vmatrix} \prod_{0\leq i,l\leq m} \binom{n}{l}\binom{n+i}{n}.$$

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on reconnaît des déterminants de Cauchy. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \Big(\prod_{i=1}^{m} \frac{(n+i)!}{i!} \prod_{l=1}^{m} \frac{l!}{(n-l)!} \frac{\prod_{\substack{0\leq i<l\leq m \\ i,l\neq j}} (l-i) \prod_{1\leq i<l\leq m}(-l+i)}{\prod_{\substack{1\leq l\leq m, 0\leq i\leq m \\ i\neq j}} (n+1+i-l)} \Big) \\ &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\frac{1}{j!(m-j)!} \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!}}{\frac{(n+j-m)!}{(n+j)!}} \\ &= \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+j}{m}\binom{m}{j}. \end{aligned}$$

On en déduit $\det(M) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$. □

La démonstration du lemme combinatoire qui suit est laissée en exercice au lecteur.

Lemme A.1.4. — *Soit $1 \leq m \leq n$ des entiers et $M' = (M'_{i,l})_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq l\leq m}}$ la matrice obtenue à partir de la matrice M du lemme A.1.3 en ajoutant à la dernière colonne le terme :*

$$M'_{i,m} = M_{i,m} + (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{i-j}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Alors $\mathrm{Ker}({}^tM')$ *est de dimension* 1 *et est engendré par le vecteur colonne* $(c_i)_{0\leq i\leq m}$ *où* $c_i \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+1}{i+1+n-m}(-1)^{n+i}$. *En particulier, on a :*

$$\sum_{i=0}^{m} M_{i,m}c_i = (-1)^m \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j}\binom{n+i}{i-j} c_i = \frac{(-1)^{n+1}}{m}.$$

A.2. Calculs de sections modulo p. — Rappelons que $n_k = (k/2-1)(p-1)-2$ avec $4 \leq k \leq p+1$ et k pair. Dans ce paragraphe, on détermine si les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$:

$$\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}, \ \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}, \ 0 \leq r \leq n_k$$

admettent un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ (via l'injection du lemme 4.2.1 et pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$). Par décomposition en éléments simples (lemme A.1.1), les fractions

$\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}$ et $\frac{u^r}{(u-u^p)^{k/2-1}}$ pour $0 \leq r \leq n_k$ appartiennent à :

$$\bigoplus_{i=1}^{k/2-1} \bigoplus_{\alpha=1}^{p-1} \mathbb{F} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k/2} \mathbb{F} \frac{1}{u^i}.$$

Reprenons les notations du §4.2. On commence par « intégrer » formellement $k-1$ fois la section locale $(-1)^i(i-1)!(k-1-i)!\frac{(du)^{k/2}}{u^i}$ pour $1 \leq i \leq k/2$ par rapport à la variable $u = u_0$, puis par rapport à u_∞, enfin par rapport à u_y pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$. On obtient, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:

$$\begin{aligned} t_{i,0} &\overset{\text{déf}}{=} -\log_{\mathscr{L}}(u_0)\frac{u_0^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}} \\ t_{i,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+1}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}} \\ t_{i,y} &\overset{\text{déf}}{=} -\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+y) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j(u_y y^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y)^{k-i-1}}{du_y^{k/2-1}}. \end{aligned}$$

Puis on fait de même avec $(k-1-i)!(i-1)!(-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i}(du)^{k/2}$:

$$\begin{aligned} t_{i,\alpha,0} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_0-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{u_0^j x^{-j}}{j}\Big)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}} \\ t_{i,\alpha,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}} \\ &\quad +(-1)^{k/2+\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{-k+1+\alpha}(u_\infty-x)^{k-1-i}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}} \\ t_{i,\alpha,y} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times \\ x\neq y}} x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+y-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}} \\ &\quad +(-1)^{\alpha-i}y^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}. \end{aligned}$$

Les éléments $(t_{i,y})_{1\leq i\leq k/2}$ et $(t_{i,\alpha,y})_{\substack{1\leq i\leq k/2-1\\ 1\leq\alpha\leq p-1}}$ sont des sections dans $H^0(W_y, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p$. Ce ne sont pas, en général, des sections dans $H^0(W_\infty, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y = \infty$ à cause des termes $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$, $1 \leq \alpha \leq k/2-1$ (ce sont alors seulement des sections dans $H^0(U, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$).

Rappelons la convention $\binom{n}{m} = 0$ si $m > n$ ou $m < 0$.

Lemme A.2.1. — (i) *Pour $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$, $1\leq i\leq k/2-1$ et $1\leq\alpha\leq p-1$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:*

$$t_{i,\alpha,0}|_U=(-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}x^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_0-x)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{k/2-1-j}(-1)^{j+1}\frac{u_0^{k-1-\alpha}}{du_0^{k/2-1}} & si\ k/2\leq\alpha\leq k-2\\ 0 & sinon,\end{cases}$$

$$t_{i,\alpha,\infty}|_U=(-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases}(-1)^{k/2+1}\binom{k-1-i}{k-1-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}+(-1)^{k/2}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}} & si\ \alpha\leq k/2\\ 0 & sinon\end{cases}$$

et, pour $y\in\mathbb{F}_p^\times$:

$$\begin{aligned}t_{i,\alpha,y}|_U&=y^{i-\alpha}(-1)^{\alpha-i}\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}\\&+(-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\x\neq y}}x^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_y+y-x)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}\\&-\sum_{l=1}^{k/2-1}\binom{k-i-l-1}{\alpha-i}y^{k-1-\alpha-l}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{l-j}\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

(ii) *Pour $y\in\mathbb{F}_p^\times$, $1\leq i\leq k/2$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:*

$$t_{i,y}|_U=-\log_{\mathscr{L}}(u_y+y)\frac{(u_y+y)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}+\sum_{r=1}^{k/2-1}y^{k-1-i-r}\sum_{j=1}^{r}\binom{k-i-1}{r-j}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\frac{u_y^r}{du_y^{k/2-1}}.$$

Démonstration. — Nous démontrons seulement le cas de $t_{i,\alpha,y}|_U$, laissant les autres cas au lecteur. On observe que, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\x\neq y}}x^{i-\alpha}(u_y+y-x)^{k-1-i}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j}=$$
$$\sum_{l=1}^{k/2-1}u_y^l\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{l-j}(-1)^{-1+i-l+j}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\x\neq y}}(x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha}$$

et, par le lemme A.3.1 :

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}(x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha}=-\binom{k-1-i-l}{\alpha-i}(-y)^{k-1-l-\alpha}.$$

On en déduit la formule de l'énoncé. $\square$

Lemme A.2.2. — *Pour $2\le\alpha\le k/2$ et $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$, notons :*

$$s'_{\alpha,y}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}t_{i,\alpha,y}\ \textit{si}\ 2\le\alpha\le k/2-1$$

$$s'_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{i=1}^{k/2-1}b_{i,k/2}t_{i,k/2,y}+b_{k/2,k/2}t_{k/2,y}$$

où les $b_{i,\alpha}$ sont dans $\mathbb{F}$. Il existe un unique choix de $(b_{i,\alpha})_{1\le i\le\alpha}$ dans $\mathbb{F}$, qui est en fait dans $\mathbb{F}_p$, de telle sorte que :

(i) $b_{\alpha,\alpha}=\begin{cases}\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!} & \textit{si}\quad 2\le\alpha\le k/2-1,\\ \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2} & \textit{si}\qquad \alpha=k/2\end{cases}$ *;*

(ii) *les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1\le i\le\alpha-2$ et $y\in\mathbb{F}_p$ sont nuls ;*

(iii) *le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.*

De plus, pour $\alpha=k/2$, l'élément $s'_{k/2}$ ainsi défini s'obtient localement par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) d'un élément :

$$r_{k/2}=\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$.

Démonstration. — Définissons une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ avec $\alpha-1$ lignes par :

$$M_{i,0}\overset{\text{déf}}{=}\binom{k-1-i}{\alpha-i},\quad 1\le i\le\alpha-1$$

$$M_{i,\ell}\overset{\text{déf}}{=}\binom{k-i-\ell-1}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\ell-j},\quad 1\le\ell\le\alpha-2,\ 1\le i\le\alpha-1.$$

Les conditions (ii) et (iii) imposent que $(b_{i,\alpha})_{1\le i\le\alpha-1}$ est solution du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^{\alpha-1}M_{i,0}b_{i,\alpha}=-b_{\alpha,\alpha}$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha-1}M_{i,\ell}b_{i,\alpha}=-\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{\ell-j}b_{\alpha,\alpha}\quad 1\le\ell\le\alpha-2$$

(voir lemme A.2.1 en notant que, pour $\ell \leq \alpha - 2 \leq k/2 - 2$, on peut remplacer les sommes $\sum_{j=1}^{k/2-1}$ par $\sum_{j=1}^{\ell}$ car $\binom{k-1-\alpha}{\ell-j} = 0$ pour $j > \ell$). Or, en changeant i en $\alpha - i$, on observe que la matrice M est une matrice du même type que celle définie au lemme A.1.3, donc M est inversible, i.e. $M \in \mathrm{GL}_{\alpha-1}(\mathbb{Z}_p)$. On en déduit l'existence et l'unicité $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq \alpha-1}$ (dans $\mathbb{F}_p$). Par construction, $s'_{k/2,y}$ s'obtient par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) de :

$$r_{k/2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{a_{k/2}}{u^{k/2}}(du)^{k/2} + \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i=1}^{k/2-1} a_i \frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}(du)^{k/2} \tag{13}$$

avec $a_{k/2} = 1$ et $a_i = (-1)^{k/2+1}(k-1-i)!(i-1)!b_{i,k/2}$ pour $1 \leq i \leq k/2 - 1$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite $(a'_i)_{2\leq i\leq k/2-1}$ dans $\mathbb{F}_p$ telle que :

$$r_{k/2} = \Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}} + \sum_{i=2}^{k/2-1} a'_i \frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)(du)^{k/2}$$

où on remarque que les sections $\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^i}\big)_{2\leq i\leq k/2-1}$ sont dans $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (le terme $\frac{u^{p-k/2}(du)^{k/2}}{u-u^p}$ n'y est pas). Pour cela, on constate que le système :

$$\Big(\Big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\Big)$$

est échelonné en $\big(\big(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}\big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{1}{u^{k/2}}\big)$ (utiliser le lemme A.1.1) et que l'expression de $r_{k/2}$ comme en (13) dans la base $\big(\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}(du)^{k/2}\big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\big)$ ne fait pas intervenir de termes en $\frac{u^{p-k/2}}{u-u^p}$. En effet, la matrice de changement de base $(A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq k/2\\ 1\leq j\leq k/2}}$ est donnée par :

$$A_{i,j} = \begin{cases} \binom{n+i}{n+j} & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k/2-1 \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq k/2 \\ (-1)^{k/2-1+j} & \text{si} \quad i = k/2 \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq k/2-1 \\ 1 & \text{si} \quad i = j = k/2 \end{cases}$$

avec $n \stackrel{\text{déf}}{=} p - k/2 - 1$. On a donc $A^{-1}_{i,1} = \binom{k/2-1}{i-1}$ si $1 \leq i \leq k/2-1$ et $A^{-1}_{k/2,1} = -1$. On doit vérifier la nullité de $a'_1 = \sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k/2-1}{i-1}a_i - a_{k/2}$. Or la condition (iii) implique :

$$\sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k-1-i}{k/2-i} b_{i,k/2} = -b_{k/2,k/2}.$$

En remplaçant $b_{i,k/2}$ par son expression en fonction de a_i, on obtient $a'_1 = 0$. Ceci achève la preuve du lemme. □

Lemme A.2.3. — *Soit $2 \leq \alpha \leq k/2$, les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u_y^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$ (avec $s'_{\alpha,\infty}$ et $s'_{\alpha,y}$ comme au lemme A.2.2 pour* *le choix de $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq\alpha}$ du lemme A.2.2) sont tous égaux à :*

$$\Delta_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}} \quad \text{si } 2\leq\alpha\leq k/2-1$$

$$\Delta_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)} \quad \text{si } \alpha=k/2.$$

Démonstration. — Définissons une matrice carrée $N=(N_{i,\ell})_{\substack{1\leq i\leq\alpha\\0\leq\ell\leq\alpha-1}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ par :

$$N_{i,\ell} \overset{\text{déf}}{=} M_{i,\ell},\ 1\leq i\leq\alpha-1,\ 0\leq\ell\leq\alpha-2$$

$$N_{i,\alpha-1} \overset{\text{déf}}{=} \binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}+(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j},\ 1\leq i\leq\alpha$$

$$N_{\alpha,\ell} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{\ell-j},\ 1\leq\ell\leq\alpha-2$$

$$N_{\alpha,0} \overset{\text{déf}}{=} 1.$$

En changeant i en $\alpha-i$, on reconnait la matrice M' définie dans le lemme A.1.4 avec $m=\alpha-1$ et $n=k-\alpha-1$. Donc le vecteur $(c_{i,\alpha}\overset{\text{déf}}{=}b_{\alpha-i,\alpha})_{0\leq i\leq\alpha-1}$ est l'unique vecteur du noyau de N avec $c_{0,\alpha}=b_{\alpha,\alpha}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et $c_{0,k/2}=b_{k/2,k/2}=\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2}$. En particulier, on a :

$$-\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}\binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}=\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}.$$

Via le lemme A.2.1, on remarque que le terme de gauche s'identifie au coefficient de $u_y^{\alpha-1}y^{k-2\alpha}$ dans $s'_{\alpha,y}$ et que celui de droite s'identifie au coefficient de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$. Via le lemme A.2.2, on remarque que les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont égaux à $\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et à $\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2k/2(k/2-1)}$ si $\alpha=k/2$. On conclut en observant que $(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}=(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}$. □

On démontre maintenant la proposition 4.2.3, dont on rappelle l'énoncé :

Proposition A.2.4. — (i) *Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et :*

$$r_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}$ un élément de la sous-représentation :

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Alors r_α n'admet pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.
(ii) *Il existe une section $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.

Démonstration. — Commençons par le (i). Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et $r_\alpha=\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ avec $f(u)(du)^{k/2}\in\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)$. D'après le lemme A.1.1, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}&=\sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{j-\alpha}}{(u-x)^j}(-1)^{\alpha-j}\\ f(u)&\in\bigoplus_{j=1}^{\alpha-1}\mathbb{F}\frac{1}{u^j}\oplus\bigoplus_{j=1}^{\alpha-1}\bigoplus_{\beta=1}^{p-1}\mathbb{F}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{j-\beta}}{(u-x)^j}.\end{aligned}$$

Lorsque l'on « intègre » $k-1$ fois r_α (comme au début du paragraphe), on obtient une expression de la forme $s''_y\overset{\text{déf}}{=}s'_{\alpha,y}+s'_{\neq\alpha,y}$ avec :

$$\begin{aligned}s'_{\alpha,y}&=\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}t_{i,\alpha,y}\\ s'_{\neq\alpha,y}&=\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{p-1}\sum_{i=1}^{\alpha-1}b_{i,\beta}t_{i,\beta,y}+\sum_{j=1}^{\alpha-1}b_it_{i,y}\end{aligned}$$

où $b_{\alpha,\alpha}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ et $b_{i,\beta},b_i\in\mathbb{F}$ (notons que s''_y dépend de α ce que n'indique pas la notation). Si $(s''_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section globale de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ alors on a d'une part $s''_y\in H^0(W_y,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$, d'autre part $s''_y|_U=s''_{y'}|_U$ pour $y,y'\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$. En particulier, les coefficients de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans s''_∞ pour $1\leq\beta\leq k/2-1$ doivent être nuls. D'après le lemme A.2.1, les termes $(t_{i,\alpha,\infty})_{1\leq i\leq\alpha}$ (resp. $(t_{i,\beta,\infty})_{\substack{1\leq i\leq\alpha-1\\ \beta\neq\alpha}}$ et $(t_{i,\infty})_{1\leq i\leq\alpha-1}$) n'introduisent que des termes en $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ (resp. en $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ pour $\beta\neq\alpha$), donc qui ne se mélangent pas. On en déduit en particulier que le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ doit être nul.

La condition $s''_\infty|_U=s''_0|_U$ entraîne que les coefficients de $\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans s''_∞ déterminent les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans s''_0 pour $1\leq\beta\leq k/2-1$. Comme on intègre

$k-1$ fois des fractions rationnelles sans partie principale, les coefficients de $\frac{u_0^j}{du_0^{k/2-1}}$ dans s_0'' pour $j \geq k-1$ sont nuls. Enfin, les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans s_0'' pour $k/2 \leq \beta \leq k-2$ sont déterminés par le lemme A.2.1. Tout ceci fait que la partie « polynomiale » de s_0'' s'écrit :

$$\sum_{\beta=1}^{k-2} u_0^{k-1-\beta} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} a_{i,\beta} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} u_0^{k-1-i} b_i a_i$$

où les coefficients $a_{i,\beta}$, a_i (dans $\mathbb{F}$) sont déterminés par le lemme A.2.1.

La condition $s_y''|_U = s_0''|_U$ pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$ entraîne l'égalité de polynômes (en développant $u_0^{k-1-\beta} = (u_y + y)^{k-1-\beta}$) :

$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Big(\sum_{\beta=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{k-1-\beta}{l} a_{i,\beta} b_{i,\beta} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i a_i \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Big) =$$
$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Big(\sum_{\beta=1}^{k-1-l} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i c_{i,l} \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Big)$$

où les coefficients $c_{i,\beta,l}$ $c_{\beta,l}$ sont déterminés par le lemme A.2.1. En identifiant les coefficients de chaque u_y^l pour $l > 0$, on obtient que certains polynômes en y de degré inférieur ou égal à $k-3$ sont nuls en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$. Comme $k-3 \leq p-2$, ces polynômes sont donc identiquement nuls. Pour $l = 0$, on obtient de même la nullité d'un polynôme en y de degré $\leq k-2$ en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$, et même en $y = 0$ car $c_{i,k-1,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ par le lemme A.2.1. Ce polynôme est donc aussi identiquement nul. Finalement, on en déduit pour tout $1 \leq \beta \leq k-2$ et tout $0 \leq l \leq k/2-1$:

$$\binom{k-1-\beta}{l} \sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\beta} b_{i,\beta} + \binom{k-1-\beta}{l} \begin{cases} b_\beta a_\beta & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} =$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} + \begin{cases} b_\beta c_{\beta,l} & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, pour $\beta = \alpha$ et $l = 0$, on a $\sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\alpha} b_{i,\alpha} = 0$ car $c_{i,\alpha,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ (utiliser que, dans l'expression de $t_{i,\alpha,y}|_U$ du lemme A.2.1, la somme $\sum_{l=1}^{k/2-1}$ commence à $l = 1$). On en déduit que les coefficients de $\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont nuls pour $1 \leq l \leq k/2-2$.

En résumé, si $r_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ a un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|C)$, alors il existe $(b_{i,\alpha})_{1 \leq i \leq \alpha}$ avec $b_{i,\alpha} \in \mathbb{F}$ tels que $s'_{\alpha,y} = \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha} t_{i,\alpha,y}$ ($y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$) vérifie :

(i) $b_{\alpha,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$;

(ii) les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1 \leq i \leq k/2-2$ et $y \in \mathbb{F}_p$ sont nuls ;

(iii) le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty) \frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.

Par les lemmes A.2.2 et A.2.3, on voit qu'il n'existe pas de tel élément s'_α pour $\alpha \leq k/2-1$, et r_α n'admet donc pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $\alpha \leq k/2-1$. Ceci démontre le (i) de la proposition. Quant au (ii), i.e. au cas $\alpha = k/2$, il a déjà fait l'objet du lemme A.2.2 en posant $s_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} s'_{k/2}$. □

A.3. Calculs de sections modulo p^2. — On rappelle que k est un entier pair compris entre 4 et $p+1$.

Les lemmes A.3.1 à A.3.4 ci-dessous interviennent au §5.2.

Lemme A.3.1. — *Soit $y \in \mathbb{F}_p^\times$ et $0 < s \leq r$. On a :*

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times \\ x\neq y}} (x-y)^r x^{-s} = -\binom{r}{s}(-y)^{r-s}.$$

Lemme A.3.2. — *Soient $x,y \in \mathbb{F}_p$ et $\delta_{x,y} \overset{\text{déf}}{=} \frac{[x]+[y]-([x]+[y])^p}{p}$. On a $[x]+[y] = [x+y]+p\delta_{x,y}$ avec :*

$$\delta_{x,y} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[x+y]^i[y]^{p-i}(-1)^{p-i} = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[x]^i[y]^{p-i}.$$

Lemme A.3.3. — *Soit $n \geq 2$. On a :*

$$\begin{aligned}(u-[x]-[y])^n \log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y]) = \\ -p\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1} + (u-[x+y])^n\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) \\ -np\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1}\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) + p^2 *\end{aligned}$$

où $*$ est une série de Laurent en $u-[x+y]$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. — On écrit :

$$\log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y]) = \log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]-p\delta_{x,y}) = \log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) - p\frac{\delta_{x,y}}{u-[x+y]} + p^2 *$$

et on développe $(u-[x]-[y])^n\log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y])$. □

Lemme A.3.4. — *Soit $0 \leq \ell \leq k/2-1$, $y \in \mathbb{F}_p$ et définissons les éléments suivants de $\mathbb{Z}_p[u]$:*

$$A_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^i\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{[x]^{-j}}{j}(u-[y])^j(u-[x+y])^{k-2-\ell}$$

$$B_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\neq y}[x]^i(u-[x])^{k-2-\ell}.$$

On a modulo $p\mathbb{Z}_p[u]$:

$$\begin{aligned} A_y(u) &= \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-i}}{p} y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i \sum_{j=1}^{i} \frac{\binom{k-2-\ell}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\ell} + (u-y)^{k/2-1} * \\ B_y(u) &= \sum_{i=0}^{k/2-2} y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i \sum_{j=i}^{k-2-\ell} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p}\binom{k-2-\ell}{j}\binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1}* \end{aligned}$$

où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$.

Démonstration. — Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$:

$$\begin{aligned} a_y(u,i) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^i \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{x^{-j}}{j}(u-y)^j(u-x-y)^{k-2-\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u-y)^j}{j} \sum_{n=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{n}(u-y)^n(-1)^{k-2-\ell-n} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-j+k-2-\ell-n}. \end{aligned}$$

Pour $1 \le i \le p-1$, $1 \le j \le k/2-2$ et $0 \le n \le k-2-\ell$, on a $-k/2+3 \le i-j+k-2-\ell-n \le 2p-2$. En posant $\binom{k-2-\ell}{n} = 0$ si $n \notin \{0,\cdots,k-2-\ell\}$, on peut écrire $a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{1}{j}\Big(\binom{k-2-\ell}{j-i}(u-y)^{i+k-2-\ell}(-1)^{i-j} + \binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j}\Big)$. Comme $0 \le \ell \le k/2-1$, on a :

$$a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{\binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}}{j}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j} + (u-y)^{k/2-1}*$$

avec $* \in \mathbb{F}_p[u]$. On obtient alors la formule donnant $A_y(u)$ modulo p en remarquant que $A_y(u) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p} y^{p-i} a_y(u,i)$ modulo p. Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$:

$$b_y(u,i) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\neq y} x^i(u-x)^{k-2-\ell} = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j \sum_{x\neq y} x^{i+j}.$$

Pour $n \ge 0$, on a :

$$\sum_{x\neq y} x^n = \begin{cases} p-1-y^{p-1} & \text{si } n \equiv 0(p-1) \\ p-y^n & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où, comme $1 \le i+j \le 2p-2$:

$$\begin{aligned} b_y(u,i) &= -\binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i - \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j y^{i+j} \\ &= -y^i(u-y)^{k-2-\ell} - \binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i. \end{aligned}$$

On en déduit $B_y(u) \equiv \sum_{i=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{i} u^{k-2-\ell-i} \frac{\binom{p}{p-1-i}}{p} y^{i+1} + (u-y)^{k/2-1}*$ modulo p où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$. En posant $j = k-2-\ell-i$, on a donc modulo p (avec $* \in \mathbb{Z}_p[u]$) :

$$B_y(u) = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} u^j + (u-y)^{k/2-1} *.$$

En développant $u^j = (u-y+y)^j$, on obtient finalement modulo p :

$$\begin{aligned} B_y(u) &= \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (u-y)^i y^{j-i} + (u-y)^{k/2-1} * \\ &= \sum_{i=0}^{k/2-2} (u-y)^i y^{k-1-\ell-i} \sum_{j=i}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} \binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1} *. \quad \square \end{aligned}$$

Les lemmes A.3.5 à A.3.8 interviennent dans les preuves des lemmes 5.3.1 et 5.4.1.

Lemme A.3.5. — *Soit* $0 \le i < n$ *et* $\gamma(n,i) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^n \sum_{i \le j \le n-1} \frac{(-1)^j}{n-j} \binom{n-1}{j} \binom{j}{i}$. *On a :*

$$\gamma(n,i) = -\frac{1}{n}\binom{n}{i}.$$

Démonstration. — En inversant l'ordre de sommation, on a :

$$\gamma(n,i) = \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i}.$$

Or, on a $\frac{n}{j}\binom{n-1}{n-j}\binom{n-j}{i} = \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$ et :

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n-i}} \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}.$$

Le coefficient de x^i dans le développement de $(x+y+1)^n$ est donc d'une part $\binom{n}{i}(y+1)^{n-i}$, d'autre part $\sum_{0 \le j \le n-i} y^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$. En particulier, lorsque $y=-1$, on obtient pour $i < n$:

$$\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} = 0$$

d'où $\sum_{1 \le j \le n-i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j}\binom{n-j}{i} = \frac{-n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n}$ soit $\gamma(n,i) = -\frac{1}{n}\binom{n}{i}$. $\square$

Lemme A.3.6. — *Soit* $0 \le r < \ell \le n$ *et* $\beta(n,r) \overset{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-r} \sum_{1 \le j \le r} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{r-j}$. *Posons :*

$$\alpha(n,\ell,r) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^r \sum_{r \le i \le \ell} \binom{i}{r} (-1)^i (\beta(n,i) + \gamma(n,i))$$

avec $\gamma(n,i)$ comme au lemme A.3.5. On a :

$$\alpha(n,\ell,r)=\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{\ell-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_{n-1-r-i}-H_n).$$

Démonstration. — Puisque, pour $i\geq r$, $\binom{i}{r}\binom{n}{i}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{i-r}$, on a d'après les lemmes A.1.2 et A.3.5 :

$$\alpha(n,\ell,r)=\binom{n}{r}\sum_{r\leq i\leq \ell}(-1)^{i-r}\binom{n-r}{i-r}(H_{n-1-i}-H_n)$$

d'où le résultat en changeant i en $i-r$. □

Lemme A.3.7. — *Soit n, ℓ et s des entiers positifs ou nuls tels que $\ell\leq s<n$. Posons :*

$$\begin{aligned} A(n,\ell,s) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^i\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{i-j}\\ B(n,\ell,s) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\alpha(n,\ell,r).\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n}{r}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=0}^{s-r}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}\binom{n-r}{i}.$$

Démonstration. — Par le lemme A.1.2, on a :

$$\begin{aligned} A(n,\ell,s) &= \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\binom{n}{i}(H_n-H_{n-i})\\ &= \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_n-H_{n-r-i}).\end{aligned}$$

Par le lemme A.3.6, on a :

$$B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_{n-1-r-i}-H_n).$$

En sommant les deux nouvelles expressions de $A(n,\ell,s)$ et $B(n,\ell,s)$, on obtient le résultat. □

Lemme A.3.8. — *Soit n, ℓ et s des entiers positifs ou nuls tels que $\ell\leq s<n$. On a avec les notations du lemme A.3.7 :*

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\frac{(-1)^{\ell+1}}{n-\ell}\binom{n}{\ell}^{-1}.$$

En particulier, pour $\ell = k/2-2-j$, $s = k/2-2$ et $n = k/2+j$, on obtient :

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2-j}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i = \frac{(-1)^{k/2-1-j}}{2j+2}\binom{k/2+j}{k/2-2-j}^{-1}$$

où $\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-i}(-1)^{n+i}\sum_{m=1}^{i}\frac{\binom{n-1}{i-m}}{m}(-1)^{i-m+n} + \sum_{m=i}^{n-1}\binom{n-1}{m}\frac{(-1)^{n+m}}{n-m}\binom{m}{i} + \sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{i-m}$.

Démonstration. — Posons :

$$S(n,\ell,s) \overset{\text{déf}}{=} A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s) = \sum_{\substack{0\le i+r\le s\\ 0\le i,r}}\binom{n}{r}\binom{n-r}{i}\binom{n+\ell-r}{\ell}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}$$

(la deuxième égalité résulte du lemme A.3.7). Comme $\binom{n}{r}\binom{n-r}{i} = \binom{n}{r+i}\binom{r+i}{i}$, on a :

$$S(n,\ell,s) = \sum_{j=0}^{s}\frac{1}{n-j}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i}.$$

Or on a l'égalité $\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i} = (-1)^{j+1}\binom{n+\ell-j}{\ell-j}$ car c'est le coefficient de x^ℓ dans $(-1)^{j+1}x^j(1+x)^{n+\ell-j} = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{j}{i}(1+x)^i(1+x)^{n+\ell-j}$, d'où :

$$S(n,\ell,s) = \sum_{j=0}^{s}\frac{(-1)^{j+1}}{n-j}\binom{n}{j}\binom{n+\ell-j}{n}.$$

Ainsi $S(n,\ell,s)$ s'identifie au coefficient de degré s de :

$$(1+x)^nG(x) \overset{\text{déf}}{=} (1+x)^n\sum_{i\ge 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}\frac{(-1)^{s+1+i}}{n-s+i}x^i.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\ge 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}(-1)^{s+1+i}t^{n-s-1+i}dt\\ &= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\ge n+\ell-s}\binom{i}{n}(-1)^{n+\ell+1+i}t^{-1-\ell+i}dt\\ &= x^{-n+s}\int_0^x t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}\sum_{i\ge n}\binom{i}{n}(-1)^{n+i}t^{i-n}dt\\ &= x^{-n+s}\int_0^x\frac{t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}}{(1+t)^{n+1}}dt. \end{aligned}$$

Le coefficient de degré s de $(1+x)^nG(x)$ s'obtient donc par intégrations par parties successives et donne l'énoncé cherché. □

Appendice B

Calculs de Čech

B.1. Calculs de résidus. — On reprend les notations du début du §5.1 et on note $\Omega^1 \simeq \mathscr{O}_C(-2)$ le faisceau des différentielles de Kähler sur la courbe $C \simeq \mathbb{P}^1$. L'isomorphisme $\check{H}^1(C,\Omega^1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$ qui est à la base de la dualité de Serre est induit par l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}: & \prod\limits_{\substack{y<z\\ y,z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}} \Omega^1(U) & \to & \mathbb{F} \\ & (s_{y,z})_{y<z} & \mapsto & \sum\limits_{y<z}\big(\mathrm{res}_z(s_{y,z})-\mathrm{res}_y(s_{y,z})\big) \end{array}$$

où res_x est le résidu au point fermé x de la forme différentielle rationnelle $s_{y,z}\in\Omega^1(U)=\Omega^1(W_y\cap W_z)$. En effet, on vérifie que l'application tr est nulle sur le sous-espace engendré par $\big(s_z|_U - s_y|_U\big)_{y<z}$ où $(s_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ est tel que $s_y\in H^0(W_y,\Omega^1)$ (voir e.g. [**11**, §III.7]).

Lemme B.1.1. — *Soient r,l,i des entiers positifs ou nuls.*
(i) *On a* $\mathrm{res}_x\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big)=\binom{r}{l-1}x^{r-l+1}$.
(ii) *On a :*

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)-\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)=\begin{cases}\binom{r}{l-1} & \textit{si } r-l+1\equiv 0\ (p-1)\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

(iii) *On a :*

$$\sum_{\substack{x<y\\ x,y\in\mathbb{F}_p}}(y^i-x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)-\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)$$
$$-\sum_{x\in\mathbb{F}_p}x^i\Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)-\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)=$$
$$\begin{cases}-\binom{r}{l-1} & \textit{si } i+r-l+1\equiv 0\ (p-1)\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. — Pour (i), on a :

$$\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)=\mathrm{res}_0\Big(\frac{(u+x)^r du}{(u-u^p)^l}\Big)=\sum_{j=0}^r\binom{r}{j}x^{r-j}\mathrm{res}_0\Big(\frac{u^{j-l}du}{(1-u^{p-1})^l}\Big)=\binom{r}{l-1}x^{r-l+1}.$$

Comme $\mathrm{res}_\infty\left(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\right)$ ne dépend pas de x, on a $\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_\infty\left(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\right) = 0$ et on obtient alors (ii) en appliquant (i). Pour (iii), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x<y\\x,y\in\mathbb{F}_p}}(y^i-x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)-\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) &= \sum_{\substack{x<y\\x,y\in\mathbb{F}_p}}(y^i-x^i)(y^{r-l+1}-x^{r-l+1})\binom{r}{l-1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_p}(y^i-x^i)(y^{r-l+1}-x^{r-l+1})\binom{r}{l-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

et on obtient (iii) en appliquant (ii). □

On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement donné par la dualité de Serre :

$$\check{H}^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\times H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)\to\check{H}^1(C,\Omega^1)\xrightarrow[\sim]{\mathrm{tr}}\mathbb{F}. \tag{14}$$

En appliquant le lemme B.1.1, on obtient alors :

Lemme B.1.2. — *Soit $i\leq n$ des entiers positifs ou nuls et α, r des entiers tels que $1\leq\alpha\leq k/2-1$ et $0\leq r\leq(p+1)\alpha-k$. On a :*

$$\Big\langle\Big(\Big((z^{n-i}-y^{n-i})\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_z}\Big)_{\substack{y<z\\z\neq\infty}},\Big(-y^{n-i}\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_\infty}\Big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big),\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}\Big\rangle = \begin{cases}-\binom{r+i}{\alpha-1} & \text{si } n+r-\alpha+1\equiv 0\ (p-1)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

B.2. Calculs de classes de cohomologie

Lemme B.2.1. — *Pour tout $n\geq 1$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{i}=-2H_n.$$

Démonstration. — Posons :

$$S_n\overset{\text{déf}}{=}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{i}.$$

Comme $\sum_{i=j}^n\binom{i}{j}\frac{1}{i}=\sum_{i=j}^n\binom{i-1}{j-1}\frac{1}{j}=\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{j-1}=\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+1}{j}-\binom{i}{j}=\frac{1}{j}\binom{n}{n-j}$, on a :

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{j}\binom{n}{n-j}\frac{1}{j}.$$

Or $(-1)^j\binom{n+j}{j} = \frac{(-n-1)\cdots(-n-j)}{j!} = \binom{-n-1}{j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^n \binom{-n-1}{j}\binom{n}{n-j}\frac{1}{j}$ est le coefficient de degré n dans le développement limité à l'ordre n en $x=0$ de la fonction :

$$f(x) \overset{\text{déf}}{=} (1+x)^n \int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t}dt.$$

Comme $\frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t} = -\sum_{i=0}^n (1+t)^{i-n-1}$, on a :

$$\int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t}dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-1}{i-n}\big((1+x)^{i-n}-1\big) - \ln(1+x)$$

et $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i}\big((1+x)^i - (1+x)^n\big) - (1+x)^n\ln(1+x)$. Le coefficient de degré n du développement limité de $f(x)$ donne donc :

$$S_n = -H_n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}\frac{(-1)^i}{i} = -2H_n$$

en utilisant le lemme A.1.2. □

Dans l'énoncé qui suit, on reprend les notations du §5.3.

Lemme B.2.2. — (i) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$:

$$\Big(\Big(((-y)^{p-1-j} - (-z)^{p-1-j})\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_z}\Big)_{y<z,z\neq\infty}, \Big((-y)^{p-1-j}\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\Big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big) =$$
$$(-1)^{j+1}\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0\Big).$$

(ii) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$:

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1}, \cdots, \log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0\Big) =$$
$$H_{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0\Big).$$

(iii) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$:

$$\Big(\Big((z^{k/2-i} - y^{k/2-i})\frac{u^i}{du^{k/2-1}})|_{W_y\cap W_z}\Big)_{y<z,z\neq\infty}, \Big(-y^{k/2-i}\frac{u^i}{du^{k/2-1}})|_{W_y\cap W_\infty}\Big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big) =$$
$$-\binom{k-i-2}{k/2-2}\Big(0, \cdots, 0, \frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, \cdots, \frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\Big).$$

Démonstration. — (i) D'après le corollaire 4.3.5, il suffit de montrer que les deux éléments de Čech considérés accouplés contre les sections de $H \subseteq H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$

par la dualité de Serre (14) donnent la même valeur. Par le lemme 4.1.4 (ou plutôt sa preuve), il est facile de voir qu'une section $h \in H$ s'écrit sous la forme :

$$h = \sum_{\substack{(b,d)\in\mathbb{F}_p^2 \\ 1\leq\alpha\leq k/2-1}} a_{b,d,\alpha} \frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

avec $a_{b,d,\alpha} \in \mathbb{F}$ et il suffit donc de vérifier que les deux accouplements contre les sections $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ coïncident. Par le lemme B.1.2, on a (avec r et α comme au lemme B.1.2) :

$$\left\langle \left(\left(((-y)^{p-1-j} - (-z)^{p-1-j}) \frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}} |_{W_y\cap W_z} \right)_{y<z,z\neq\infty}, \left((-y)^{p-1-j} \frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}} |_{W_y\cap W_\infty} \right)_{y\in\mathbb{F}_p} \right), \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle = \begin{cases} (-1)^j\binom{k/2-2+j+r}{\alpha-1} & \text{si } r\equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par un calcul de résidus :

$$\left\langle \left(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}} |_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}} |_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0 \right), \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle = \begin{cases} -\binom{r+k/2-2}{\alpha-1} & \text{si } r\equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $(bu+d)^{\alpha(p+1)-k} = \sum_{r=0}^{\alpha(p+1)-k}\binom{\alpha(p+1)-k}{r}b^r d^{\alpha(p+1)-k-r}u^r$, l'accouplement du premier élément de Čech contre $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ donne la somme :

$\sum_{m=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha}\binom{\frac{k}{2}-2+j+m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha}{\alpha-1}(-1)^j b^{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha}d^{\alpha(p+1)-k-m(p-1)+\frac{k}{2}-1-\alpha}$

qui vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ (-1)^j\binom{k/2-2-j}{k/2-2}d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

car, pour $1\leq\alpha\leq k/2-1$ et $0\leq m<\alpha$, on a modulo p :

$$\binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-k/2+1+\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha,m)=(k/2-1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même, on trouve :

$$\left\langle \left(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}} |_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}} |_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0 \right), \frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ -d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

d'où (i). Pour (ii), considérons le $(p+1)$-uplet de sections locales :

$$\Big(0, \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_x-(-x)) + \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{u_x^i(-x)^{-i}}{i}\Big)\frac{(u_x-(-x))^{k/2-2}}{du_x^{k/2-1}},$$
$$(-1)^{k/2-1}\Big(-\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}} + \big(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i}\big)\frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}}\Big)\Big)$$

où la section 0 de gauche est vue dans $H^0(W_0, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, les sections avec u_x dans $H^0(W_x, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ et la dernière section dans $H^0(W_\infty, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. Les intersection deux à deux de ces sections (comme au §5.1) donnent un élément de Čech qui est nul par définition. Cette nullité donne (par un calcul simple et en utilisant (i)) l'égalité dans $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$:

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z\\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) + \big(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i}\big)\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z\\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) =$$
$$\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^{j+1}\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\sum_{i=j}^{k/2-2}\frac{\binom{i}{j}}{i}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z\\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big).$$

Or $\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\sum_{i=j}^{k/2-2}\frac{\binom{i}{j}}{i} = -2H_{k/2-2}$ par le lemme B.2.1, d'où (ii) puisque $H_{k/2-2} = \sum_{i=1}^{k/2-2} 1/i$. Le (iii) se démontre de manière analogue au (i). □

On a aussi un énoncé strictement analogue à celui du lemme B.2.2 en remplaçant $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ par $\check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C)$ (voir le début du §5.3). La preuve est la même en utilisant la dualité :

$$\check{H}^1(C, (\omega^{-\frac{k-2}{2}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C) \times H^0(C, (\omega^{k/2}(1) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C) \to \mathfrak{O}/p.$$

Références

[1] L. Barthel & R. Livné – Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[2] L. Berger – Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, *Astérisque* **330** (2010), p. 263–279.

[3] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[4] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[5] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[6] C. Breuil & A. Mézard – Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l=p$, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 205–310.

[7] P. Colmez – Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`.

[8] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[9] D. J. Glover – A study of certain modular representations, *J. Algebra* **51** (1978), p. 425–475.

[10] E. Grosse-Klönne – Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane, *Math. Ann.* **329** (2004), p. 463–493.

[11] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer, 1977.

[12] P. Schneider & J. T. Teitelbaum – Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[13] J. T. Teitelbaum – On Drinfel′d's universal formal group over the p-adic upper half plane, *Math. Ann.* **284** (1989), p. 647–674.

[14] ______, Modular representations of PGL_2 and automorphic forms for Shimura curves, *Invent. Math.* **113** (1993), p. 561–580.

C. Breuil, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr
Url : www.ihes.fr/~breuil/

A. Mézard, LMV, Université Versailles Saint-Quentin, 78035 Versailles, France
E-mail : ariane.mezard@math.uvsq.fr • *Url :* www.math.uvsq.fr/~mezard/