

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 170 ESPACES DE CONFIGURATION
Nouvelle série GÉNÉRALISÉS

ESPACES TOPOLOGIQUES
i-ACYCLIQUES

SUITES SPECTRALES BASIQUES

2 0 2 1

A. ARABIA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Yann BUGEAUD
François DAHMANI
Béatrice de TILLIÈRE
Clotilde FERMANIAN
Wendy LOWEN

Laurent MANIVEL
Julien MARCHÉ
Kieran O'GRADY
Emmanuel RUSS
Eva VIEHMANN

Marc HERZLICH (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)

Abonnement électronique : 113 € (\$ 170)

Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memoires@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2021

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-934-0

doi:10.24033/msmf.478

Directeur de la publication : Fabien DURAND

ESPACES DE CONFIGURATION
GÉNÉRALISÉS
ESPACES TOPOLOGIQUES i -ACYCLIQUES
SUITES SPECTRALES BASIQUES

Alberto Arabia

A. Arabia

Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain,
bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.

40, rue Pascal, 75013, Paris.

E-mail : alberto.arabia@imj-prg.fr, alberto.arabia@gmail.com

Url : <http://webusers.imj-prg.fr/~alberto.arabia/>

Reçu le 26 juillet 2018, révisé le 28 octobre 2019, accepté le 31 octobre 2019.

Classification mathématique par sujets (2000). – 55R80, 20-XX, 20.20, 20C30, 18G40, 55-XX, 55R20, 11B73.

Mots-clefs. – Caractère polynomial, cohomologie intérieure, espaces i -acycliques, espaces de configuration, FI-modules, fonction de Möbius, groupes de permutations, groupes symétriques, nombres de Stirling, stabilité de représentation, suite spectrale de Leray, suite spectrale basique.

Key words and phrases. – Basic spectral sequences, configuration spaces, FI-modules, i -acyclic spaces, interior cohomology, Leray spectral sequence, Möbius function, polynomial family of characters, permutation group, representation stability, Stirling numbers, symmetric groups.

ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS

ESPACES TOPOLOGIQUES i -ACYCLIQUES

SUITES SPECTRALES BASIQUES

Alberto Arabia

Résumé. – Ce mémoire présente une nouvelle approche pour l'étude de la cohomologie à supports compacts des espaces de configuration *généralisés*

$$\begin{aligned}\Delta_{\leq \ell} M^m &:= \{(x_1, \dots, x_m) \in M^m \mid \#\{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} M^m &:= \Delta_{\leq \ell} M^m \setminus \Delta_{< \ell} M^m \quad \text{et} \quad F_m(M) := \Delta_m M^m,\end{aligned}$$

pour les espaces localement compacts M . L'approche comporte deux volets.

Le premier s'applique uniquement aux espaces i -acycliques, dont la classe contient les espaces contractiles non compacts, et, si X est i -acyclique, contient aussi les ouverts de X et les produits $X \times M$ par tout espace M . Pour un espace i -acyclique X , étant donné $i, m \in \mathbb{N}$, les familles de représentations des groupes de permutations $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(F_{m-a}(X)) \mid a \leq m\}$ et $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(X^{m-a}) \mid a \leq m\}$ se trouvent entrelacées par une matrice universelle de foncteurs d'induction de la catégorie de FI-modules. Cette propriété remarquable permet de transposer certaines questions sur la première famille en termes de la seconde, où elles sont, *a priori*, plus simples à étudier. Cela permet d'exprimer le caractère du \mathcal{S}_m -module module par une formule universelle dépendant uniquement du quadruplet $(?, i, \ell, m)$ et des nombres de Betti compacts de X . La méthode nous permet également d'étendre les théorèmes de stabilité de Church aux familles $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a} X^m\}_{m \geq a}$.

Le deuxième volet décrit un procédé qui permet l'extrapolation des propriétés cohomologiques des espaces de configuration pour les espaces i -acycliques X aux espaces topologiques généraux M . L'outil principal est la *suite spectrale basique* qui converge vers $H_c(F_m(M))$ et dont la première page est constituée de représentations induites des divers $H_c(F_{m-a}(M \times \mathbb{R}))$, pour $0 \leq a \leq m$. La suite spectrale a suffisamment de functorialité pour suivre, page après page, les différents rangs de monotonie et stabilité de ses termes, permettant ainsi l'estimation de ceux de son aboutissement. Comme application du procédé, les théorèmes de stabilité de représentations connus pour les familles $\{F_m(M)\}_m$ où M est une variété topologique, sont généralisés aux familles

$\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a}M^m\}_{m \geq a}$, où M est une pseudovariété. En particulier, les variétés algébriques complexes, qu'elles soient lisses ou non, vérifient ces généralisations.

Abstract (Generalized Configuration Spaces, i -Acyclic Spaces, Basic Spectral Sequences)

This memoir presents a new approach to *generalized configuration spaces*

$$\begin{aligned} \Delta_{\leq \ell}M^m &:= \{(x_1, \dots, x_m) \in M^m \mid \#\{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell}M^m &:= \Delta_{\leq \ell}M^m \setminus \Delta_{< \ell}M^m \text{ and } F_m(M) := \Delta_mM^m \end{aligned}$$

of a locally compact space M . The approach is two-fold.

The first part applies only to *i -acyclic* spaces, which class contains noncompact contractible spaces, and, if X is *i -acyclic*, contains also the open subspaces of X and the products $X \times M$ by any space M . For an *i -acyclic* space X , given $i, m \in \mathbb{N}$, the families of representations of symmetric groups $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(F_{m-a}(X)) \mid a \leq m\}$ and $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(X^{m-a}) \mid a \leq m\}$ are intertwined by a universal invertible matrix of induction functors in the category of FI-modules. This notable feature allows questions about the first family to be swapped to the second, where they are, a priori, more tractable. In this way we were able to express the character of the \mathcal{S}_m -module by a universal formula depending only on the quadruplet $(?, i, \ell, m)$ and the compact Betti numbers of X . The method also allowed us to extend Church's stability theorems to the families $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a}X^m\}_{m \geq a}$.

The second part describes a procedure which extrapolates cohomological properties of configuration spaces of *i -acyclic* spaces X to general topological spaces M . The main tool is the *basic spectral sequence* which converges to $H_c(F_m(M))$ and whose first page terms are induced representations of the various $H_c(F_{m-a}(M \times \mathbb{R}))$, for $0 \leq a \leq m$. The spectral sequence keeps track, page after page, of stability ranks, thereby giving estimates of them at the abutment. As an application, Church's representation stability theorems for the family $\{F_m(M)\}_m$ where M is an oriented manifold, are generalized to the families $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a}M^m\}_{m \geq a}$, where M is no more smooth. In particular, irreducible complex algebraic varieties, whether they are smooth or not, verify these generalizations.

TABLE DES MATIÈRES

Synopsis of main results	ix
Synopsis des résultats principaux	xiii
0. Introduction (in English)	1
0.1. Poincaré polynomials of configuration spaces	2
0.2. Generalized configuration spaces	4
0.3. i -acyclic spaces	5
0.4. The fundamental complex of X for $\Delta_{\leq \ell} X^m$	5
0.5. The Poincaré polynomials of $\Delta_{\ell} X^m$ and $\Delta_{\leq \ell} X^m$	6
0.6. The character of $H_c(\Delta_{\ell} X^m)$	7
0.7. The families of representations $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{\ell} X^m)\}_m$	8
0.8. Basic spectral sequences	12
0.9. The character of $H_c(F_m(X))$	14
0.10. The Poincaré polynomial of $H_c(F_m(X)/H)$	14
0.11. Stationary rank of the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$	15
0.12. Degeneracy of the Leray spectral sequences	16
0.13. Miscellanea of i -acyclic spaces	17
0.14. About hypotheses	17
0.15. Other approaches	17
0. Introduction (en français)	19
0.1. Polynômes de Poincaré des espaces de configuration	20
0.2. Les espaces de configuration généralisés	22
0.3. Les espaces i -acycliques	23
0.4. Le complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$	24
0.5. Les polynômes de Poincaré de $\Delta_{\ell} X^m$ et de $\Delta_{\leq \ell} X^m$	24
0.6. Le caractère de $H_c(\Delta_{\ell} X^m)$	25
0.7. Les familles de représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{\ell} X^m)\}_m$	27
0.8. Les suites spectrales basiques	30
0.9. Le caractère de $H_c(F_m(X))$	33
0.10. Les polynôme de Poincaré de $H_c(F_m(X)/H)$	33
0.11. Rangs de stabilité des familles $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$	34
0.12. La dégénérescence des suites spectrales de Leray	34

0.13. Exemples et contre-exemples d'espaces i -acycliques	35
0.14. À propos des hypothèses	36
0.15. D'autres approches	36
1. Espaces i-acycliques	39
1.1. Généralités sur les espaces topologiques considérés	39
1.2. Cohomologies	39
1.3. Résolution Φ -molle canonique	40
1.4. Suite exacte longue de cohomologies à support compact	40
1.5. Isomorphismes de Künneth	41
1.6. Espaces i -acycliques et \cup -acycliques	41
1.7. i -acyclicité	41
1.8. (Totale) \cup -acyclicité	41
1.9. Caractérisations de la i -acyclicité	42
1.10. Complémentaires des parties finies d'un espace i -acyclique	44
1.11. Trivialité de la monodromie de $H_c(X \setminus \mathbf{a})$	44
2. Espaces de configuration généralisés	47
2.1. Définitions et notations	47
2.2. Fibrations des espaces de configuration généralisés	48
2.3. Sous-espaces $F_p(X)$ et décomposition de $\Delta_\ell X^m$	50
2.4. Dimension et finitude cohomologique de $\Delta_{\gamma_\ell} X^m$	51
3. Théorèmes de scindageet complexes fondamentaux	53
3.1. Théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$	53
3.2. Complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$	56
3.3. Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} F^\lambda(X)$	56
3.4. Sous-espaces $F^q(X)$ et sous-groupes $\mathcal{S}^q \subseteq \mathcal{S}_m$	59
3.5. Complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} F^q(X)$	61
3.6. Complexes fondamentaux et suite spectrales	61
4. Cohomologie des espaces de configuration, cas i-acyclique	65
4.1. Généralités sur le polynôme de Poincaré	65
4.2. Polynômes de Poincaré de $F_m(X)$ et de $\Delta_{\leq m-1} X^m$	66
4.3. Polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leq \ell} X^m$	69
4.4. Polynôme universel pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$	69
5. Représentations du groupe symétrique	71
5.1. Notations pour le décompositions et les diagrammes de Young	71
5.2. Décomposition ouverte \mathcal{S}_m -stable de $\Delta_\ell M^m$	72
5.3. Foncteurs d'induction $\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et Υ_ℓ^m	73
5.4. Opérateurs d'inductions itérées $\Upsilon(\sigma)$ et Θ_ℓ^m	75
6. Cohomologie des espaces de configuration, cas général	77
6.1. Cohomologie de Borel-Moore	77

6.2. Images-inverses en <i>cohomologie</i> de Borel-Moore	79
6.3. Approximation de $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ à l'aide d'espaces <i>i</i> -acycliques	83
6.4. Une suite spectrale pour $H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))$	84
6.5. La suite spectrale « basique » pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$	92
6.6. Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$	94
6.7. Relèvement spectral de $p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))$	104
7. Stabilité des familles de représentations	109
7.1. Motivations	109
7.2. Catégorie des FI-modules	110
7.3. Caractères polynomiaux et stabilité des FI-modules	113
7.4. Monotonie et stabilité des FI-modules	115
7.5. Poids d'un FI-module	118
7.6. Les FI-modules $\mathcal{M}_a^H(W)$	121
7.7. Catégorie des FB-modules	122
7.8. Les FI-modules $\mathcal{M}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$	122
7.9. Monotonie, stabilité et co-invariants	125
8. Foncteurs d'induction dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])$	133
8.1. Les foncteurs d'induction ind_λ et $\text{ind}_{\rho,\lambda}$	133
8.2. Les foncteurs d'induction Υ^a , $\Upsilon(\mathbf{a})$ et Θ^a	142
9. Stabilité des familles $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$	145
9.1. Structure de FI-module de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$	145
9.2. Les familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$	147
9.3. Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$	150
10. Calcul du caractère de \mathcal{S}_m-module de $H_c(F_m(X))$	163
10.1. Série de caractères de \mathcal{S}_m	163
10.2. Séries de caractères de $F^q(X)$	164
10.3. Séries de traces pour un <i>m</i> -cycle	164
10.4. Séries des traces pour une puissance d'un <i>m</i> -cycle	166
10.5. Séries des traces pour une permutation générale	169
10.6. Comparaison entre $\chi_c(F_m(X))$ et $\chi_c(F_m(X \setminus \mathbf{a}))$	171
10.7. Comparaison entre $\chi_c(F_{b+a}(X))$ et $\chi_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})) \cdot \chi_c(F_a(X))$	172
11. Quotients d'espaces de configuration généralisés	175
11.1. Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{?l}X^m)/H$	175
11.2. Espace de configurations cycliques $CF_m(X)$	176
11.3. Espace de configuration non-ordonné $BF_m(X)$	177
11.4. Sur le rang de stabilité de la famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$	179
11.5. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(X))\}_m$, pour <i>X</i> <i>i</i> -acyclique.	182
11.6. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$, cas général	188
11.7. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$, cas général	191

12. Suites spectrales de Leray	193
12.1. Cohomologie à support π -propre	193
12.2. Localisation du théorème de scindage	196
12.3. Constance des faisceaux de cohomologie à support π -propre	199
12.4. Dégénérescence des suites spectrales de Leray	203
13. Questions diverses sur les espaces i-acycliques	211
13.1. Recouvrements fermés i -acycliques	211
13.2. Espaces de configuration généralisés	211
13.3. Variétés toriques affines	213
13.4. Groupes de Lie non-compacts	213
13.5. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$	214
13.6. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$	214
13.7. Ouverts non i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$	216
13.8. Courbes algébriques i -acycliques	217
13.9. Bouquet d'espaces i -acycliques	218
13.10. Sommes amalgamées d'espaces i -acycliques	219
13.11. La bouteille de Klein épointée	221
13.12. Revêtements non i -acycliques à base i -acyclique	224
13.13. Fibrations non i -acycliques à fibre et base i -acycliques	225
14. Rappels sur les nombres de Stirling	227
14.1. Factorielles croissantes et décroissantes	227
14.2. Nombres de Stirling de première espèce	227
14.3. Nombres de Stirling de deuxième espèce	228
14.4. Nombres de Stirling non signés et cardinaux	230
Bibliographie	233
Notations	237
Index	245

SYNOPSIS OF MAIN RESULTS

The “fundamental complex of M for $\Delta_{\leq \ell} M^m$ ” is the complex of graded \mathcal{S}_m -modules:

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_1 M^m)[1-\ell] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\Delta_{\ell-1} M^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell M^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0,$$

constructed by concatenating the sequences

$$H_c(\Delta_{\leq (\ell-1)} M^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell M^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m),$$

extracted from the long exact sequence of compact support cohomology associated with the open/closed decomposition $\Delta_{\leq \ell} M^m = \Delta_\ell M^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} M^m$.

THEOREM AND DEFINITION (3.2.3). – *Call i -acyclic a space M such that the natural map $H_c(M) \rightarrow H(M)$ is the zero map.*

1. *The fundamental complexes of an i -acyclic space are exact.*
2. *An oriented manifold is i -acyclic if and only if its fundamental complexes are exact.*

Examples of i -acyclic spaces are given by noncompact contractible spaces, and, if X is an i -cyclic space, by open subsets $U \subseteq X$, quotients X/W by finite groups W , and products $X \times M$ by arbitrary M .

The fact that the fundamental complex is an \mathcal{S}_m -module resolution for $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ allows recursive methods to approach questions about Betti numbers, character formulas or representation stability, on any generalized configuration space.

In this work, we provide a list of results that follow from this idea.

– We generalize the well-known Macdonald’s formula for the polynomial character of the action of \mathcal{S}_m on $H_c(X^m)$ ([27]), to that of $H_c(F_m(X))$, showing, as an aside, that it depends only on m and the compact Betti numbers of X .

THEOREM (10.5.3). – *Let X be an i -acyclic space. For $\alpha \in \mathcal{S}_m$, we have*

$$\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^m d^{X_d(\alpha)} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{X_d(\alpha)},$$

where: $\chi_c(F_m)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha: H_c^i(F_m)) (-T)^i$, $X_i(\alpha)$ is the number of i -cycles in the decomposition of α in disjoint cycles, so that $(1^{X_1(\alpha)}, 2^{X_2(\alpha)}, \dots, m^{X_m(\alpha)})$ is

the type of the permutation α , $\mu(_)$ is the Möbius function, $\mathcal{P}_c(_)$ is the Poincaré polynomial of $H_c(_)$, and $a^r := (a - 0)(a - 1) \cdots (a - (r - 1))$ is the falling factorial.

– We determine the Poincaré polynomial $\mathcal{P}_c(F_m(X)/H)(T)$ for the compact support cohomology of the quotient of $F_m(X)$ by a finite subgroup H of \mathcal{S}_m , showing that it depends only on m , the subgroup H and the compact Betti numbers of X .

As examples of quotients, we explicitly compute the case of the *cyclic* configuration space $CF_m(X) := F_m(X)/C_m$, where $C_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, as well as that of the *unordered* configuration space $BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m$.

The following equalities hold for an i -acyclic space X .

THEOREM (4.2.1). – We have

$$\frac{\mathcal{P}_c(F_m(X))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(-T)}{T} \right)^m.$$

THEOREM (11.2.1). – We have

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

THEOREM (11.3.1). – We have

$$\frac{\mathcal{P}_c(BF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{x_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{x_d},$$

where $\phi(_)$ the Euler totient function, $\mu(_)$ the Möbius function, and h_λ is the cardinality of the set of permutations in \mathcal{S}_m of type $\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m})$.

– The particularly simple expression of the Poincaré polynomial of $H_c(F_m(X))$ suggests that the fibrations $F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ should be cohomologically trivial and that the associated Leray spectral sequences for compact support cohomology should degenerate. We show that this is indeed the case when X is i -acyclic (Th. 12.4.9).

– For representation stability questions, we replace ordinary cohomology by a shift of Borel-Moore homology. We set ⁽¹⁾

$$H_{\text{BM}}^i(M) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^{d_M-i}(M); \mathbb{Q}),$$

so that $H_{\text{BM}}(M) = H(M)$, whenever M is an oriented manifold. We then prove the following generalization of Church’s stability theorems.

THEOREM (9.3.15). – Let M be a connected space such that $\dim(H_c^{d_M}(M)) \leq 1$.

For all $a, i \in \mathbb{N}$,

⁽¹⁾ Although the notation is questionable since $H_{\text{BM}}^i(M)$ is not dual to Borel-Moore homology $H_i^{\text{BM}}(M) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M), \mathbb{Q})$, but merely a degree shift $H_{\text{BM}}^i(M) := H_{d_M-i}^{\text{BM}}(M)$, it happens to be the right substitute for $H^i(M)$ in Church’s stability theorems.

(i) the FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ is monotone and representation stable for

$$m \geq \begin{cases} 4(i+a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+2a), & \text{if } d_M \geq 3, \end{cases}$$

(ii) the FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ is monotone and representation stable for

$$m \geq \begin{cases} 4(i+2a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+d_M a), & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

The corresponding sequences of characters and (Borel-Moore) Betti numbers are polynomial and $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant, within the same ranges of m .

Statement (i) was originally proved by Church ([9], 2012), for an oriented topological manifold M and for the family $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}(F_m(M))\}_m$.

Theorem 9.3.15 generalizes Church's in two directions. First, by removing the smoothness assumption in M (replacing ordinary cohomology $H(_)$ by $H_{\text{BM}}(_)$), and second, by incorporating the families of generalized configuration spaces $\{\Delta_{\leq m-a}M^m\}_m$, for fixed $a \in \mathbb{N}$, for which there were no conjectures. (Notice that these latter spaces are singular even when M is smooth.)

Our approach is new. While the work of Church relies on the work of Totaro ([34]) on the Leray spectral sequence associated with the embedding $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, for M smooth, our strategy is to begin proving the theorem for $\{\mathcal{S}_m : F_m(X)\}_m$, where X is an i -acyclic space, in which case, we can take advantage of the exactness of the fundamental complexes and reduce the determination of the monotonicity and stability ranks of the family $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m$ to those of $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(X^m)\}_m$, which are simpler to estimate (Thm. 9.2.4). We then deal with the case of a non- i -acyclic space M , noting that M is the difference $M = M_{\geq 0} \setminus M_{> 0}$ where $M_{\geq 0} := M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $M_{> 0} := M \times \mathbb{R}_{> 0}$ are clearly i -acyclic. But then, the additional fact that $M_{\geq 0}$ has zero compact support cohomology, easily implies that $H_{\text{BM}}(F_m(M_{\geq 0})) = 0$ and, hence, that there exists an isomorphism of \mathcal{S}_m -modules (cf. 6.5.1-(18))

$$H_{\text{BM}}(F_m(M)) \simeq H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_{> 0}^m))[m-1] \otimes \sigma_m,$$

where σ_m is the signature of \mathcal{S}_m .

The space $\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_{> 0}^m)$ has the natural open cover $\mathcal{U}^m = \{\mathcal{U}_1^m, \dots, \mathcal{U}_m^m\}$, with:

$$\mathcal{U}_i^m := \Delta_m(M_{\geq 0} \times \dots \times \overbrace{M_{> 0}}^i \times \dots \times M_{\geq 0}),$$

which led us to construct the *Borel-Moore spectral sequence of \mathcal{S}_m -modules attached to the cover \mathcal{U}^m* , which we denote $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (cf. 6.5.2).

The spectral sequence converges to $H_{\text{BM}}(F_m(M))$, but what is remarkable is that the terms in its \mathbb{E}_1 page concerns only the i -acyclic space $M_{> 0}$. We have (cf. 9.3.13-(b)):

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{> 0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M)),$$

where $Q := i - (m - (p + 1))(d_M - 1)$, $\sigma_{m-(p+1)}$ is the signature of $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$, $\mathcal{T}(p+1, m)$ is the set of Young tableaux τ of m boxes with first column $(m - p, \dots, m)$, and where $\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ is the stabilizer of τ acting on $\sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}(F_{p+1}(M_{>0}))$.

This spectral sequence, which we call “the basic spectral sequence of M for $F_m(M)$,” establishes a bridge from the cohomology of configuration spaces of the i -acyclic space $M_{>0}$, to that of M . The sequence has enough functoriality properties allowing to estimate the ranks of monotonicity and stability of $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ in terms of those of families $\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}$ occurring in the \mathbb{E}_1 's pages, already settled.

After that, the ranks of $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}$ follow applying ad hoc induction functors to $\{H_{\text{BM}}^i(F_{m-a}(M))\}_m$. To finish, the ranks of $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}$ are recursively determined thanks to the long exact sequences

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-(a+1)}M^m)\} \rightarrow .$$

Section 9 is entirely devoted to these questions.

– In Theorem 9.3.15, the *stationary* rank of the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ follows automatically from the monotonicity and stability rank. However, for X i -acyclic, the description of the character $\chi_c(F_m(X))$ (Thm. 10.5.3) gives more accurate information on the multiplicity of the trivial representation of \mathcal{S}_m in $H_{\text{BM}}(F_m(X))$, which allows better estimates of the stationary rank.

PROPOSITION (11.5.3). – *Let X be an i -acyclic space of dimension $d_X \geq 2$ and such that $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$.*

Then, for all $i \in \mathbb{N}$, the family $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(X))\}_m$ is constant for all $m \geq i$.

The use of basic spectral sequences then gives estimates for the stationary rank of the family $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$ for general M . We prove the following theorem:

THEOREM (11.7.1). – *Let M be connected locally compact of dimension $d_M \geq 2$ and such that $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$. Let $a, i \in \mathbb{N}$.*

(a) *The sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant for*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 2a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + 2a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

(b) *The sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant for*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 4a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + d_M a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

SYNOPSIS DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Le « complexe fondamental de M pour $\Delta_{\leq \ell} M^m$ », est le complexe de \mathcal{S}_m -modules :
 $0 \rightarrow H_c(\Delta_1 M^m)[1-\ell] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\Delta_{\ell-1} M^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell M^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0$,
 obtenu en concaténant les suites

$$H_c(\Delta_{\leq (\ell-1)} M^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell M^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m),$$

extraites des suites exactes longues de cohomologie à supports compacts associées à la décomposition ouverte/fermée $\Delta_{\leq \ell} M^m = \Delta_\ell M^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} M^m$.

THÉORÈME ET DÉFINITION (3.2.3). – *Un espace M dont l'application naturelle $H_c(M) \rightarrow H(M)$ est nulle est dit i -acyclique.*

- (a) *Les complexes fondamentaux d'un espace i -acyclique sont exacts.*
- (b) *Une variété topologique orientable est i -acyclique si et seulement si ses complexes fondamentaux sont exacts.*

Les espaces contractiles non compacts et, si X est i -acyclique, tout ouvert $U \subseteq X$, tout quotient X/W par un groupe fini W , et tout produit $X \times M$, où M est arbitraire, sont des exemples d'espaces i -acycliques.

Le fait que le complexe fondamental puisse être une *résolution* de \mathcal{S}_m -module de $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ ouvre la voie à une approche par des méthodes récursives des questions concernant nombres de Betti, formules des caractères ou stabilité des représentations, pour tout espace de configuration généralisé.

Dans ce travail, nous obtenons de nombreux résultats suivant cette méthode.

– Nous généralisons la formule bien connue de Macdonald du polynôme de caractères de l'action de \mathcal{S}_m sur $H_c^*(X^m)$ ([27]), au cas de $H_c^*(F_m(X))$, et montrons, en passant, qu'il ne dépend que de m et des nombres de Betti compacts de X .

THÉORÈME (10.5.3). – *Soit X un espace i -acyclique. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, nous avons*

$$\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^m d^{X_d(\alpha)} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{X_d(\alpha)},$$

où : $\chi_c(F_m)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha : H_c^i(F_m))(-T)^i$, $X_i(\alpha)$ est le nombre des i -cycles dans la décomposition de α en cycles, de sorte que $(1^{X_1(\alpha)}, 2^{X_2(\alpha)}, \dots, m^{X_m(\alpha)})$ est le

type de la permutation α , $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $\mathcal{P}_c(_)$ est le polynôme de Poincaré de $H_c(_)$, et $a^r := (a-0)(a-1)\cdots(a-(r-1))$ est la factorielle décroissante.

– Nous déterminons le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(F_m(X)/H)(T)$ pour la cohomologie à supports compacts des quotients de $F_m(X)$ par un sous-groupe H de \mathcal{S}_m , et montrons qu'il dépend uniquement de m , de H et des nombre de Betti compacts de X .

Comme exemples de quotients, nous calculons explicitement ces polynômes pour les espaces de configurations *cycliques* $CF_m(X) := F_m(X)/C_m$, où $C_m := \langle(1, \dots, m)\rangle$, de même que celui des espaces de configurations *non-ordonnées* $BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m$.

Les égalités suivantes sont valables pour tout espace i -acyclique X .

THÉORÈME (4.2.1). – *Nous avons*

$$\frac{\mathcal{P}_c(F_m(X))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(-T)}{T} \right)^m.$$

THÉORÈME (11.2.1). – *Nous avons*

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

THÉORÈME (11.3.1). – *Nous avons*

$$\frac{\mathcal{P}_c(BF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{x_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{x_d},$$

où $\phi(_)$ est la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, et h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations dans \mathcal{S}_m de type $\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m})$.

– L'expression particulièrement simple du polynôme de Poincaré de $H_c(F_m(X))$ suggère une forme de trivivialité cohomologique des fibrations $F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ et, donc, le fait que les suites spectrales de Leray puissent être dégénérées. Nous montrons que c'est en effet le cas lorsque X est i -acyclique (th. 12.4.9).

– Pour les questions de stabilité de représentations, nous avons été amenés à remplacer la cohomologie ordinaire par un décalage de l'homologie de Borel-Moore, noté ⁽²⁾

$$H_{\text{BM}}^i(M) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^{d_M-i}(M); \mathbb{Q}),$$

de sorte que l'on a une identification $H_{\text{BM}}(M) = H(M)$, lorsque M est une variété topologique orientée. Nous prouvons alors la généralisation suivante des théorèmes de stabilité de Church.

⁽²⁾ Bien que la notation soit discutable puisque $H_{\text{BM}}^i(M)$ n'est pas le dual de l'homologie de Borel-Moore $H_i^{\text{BM}}(M) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M), \mathbb{Q})$, mais seulement le décalage $H_{\text{BM}}^i(M) := H_{d_M-i}^{\text{BM}}(M)$, il s'avère être le bon substitut pour $H^i(M)$ dans les théorèmes de stabilité de Church.

THÉORÈME (9.3.15). – Soit M un espace connexe tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) \leq 1$.

Pour tout $a, i \in \mathbb{N}$,

(i) le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour

$$m \geq \begin{cases} 4(i+a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+2a), & \text{if } d_M \geq 3, \end{cases}$$

(ii) le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour

$$m \geq \begin{cases} 4(i+2a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+d_M a), & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

Les suites correspondantes de caractères et de nombres de Betti (de Borel-Moore) sont polynomiales et $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante, sur les mêmes intervalles.

L'assertion (i) était originellement prouvée par Church ([9], 2012), dans le cas où M est une variété topologique orientée.

Notre énoncé généralise celui de Church dans deux directions. Premièrement, en nous affranchissant des hypothèses de lissité sur M (et donc en remplaçant la cohomologie ordinaire $H(_)$ par $H_{\text{BM}}(_)$), et deuxièmement en considérant les familles d'espaces de configuration généralisés $\{\Delta_{\leq m-a}M^m\}_m$, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, pour lesquels il n'y avait pas de conjecture. (Remarquer que ces espaces sont généralement singuliers même lorsque M ils lisse.)

Notre approche est nouvelle. Alors que Church s'appuie sur le travail de Totaro qui explicite les termes de la suite spectrale Leray associée au plongement $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, pour M lisse ([34]), notre stratégie est de démontrer l'abord le théorème pour la famille $\{F_m(X)\}_m$, où X est i -acyclique, auquel cas nous bénéficions de l'exactitude des complexes fondamentaux qui permettent de réduire la détermination des rangs de monotonie et stabilité de $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m$ à ceux de $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(X^m)\}_m$, bien plus simples à estimer (thm. 9.2.4).

Nous nous occupons ensuite des espaces M non nécessairement i -acycliques, en remarquant l'égalité $M = M_{\geq 0} \setminus M_{> 0}$, où $M_{\geq 0} := M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $M_{> 0} := M \times \mathbb{R}_{> 0}$ sont clairement i -acyclique. Le fait additionnel que $M_{\geq 0}$ n'a pas de cohomologie à support compact, implique aisément que l'on a $H_{\text{BM}}(F_m(M_{\geq 0})) = 0$ et, donc, qu'il existe un isomorphisme de \mathcal{S}_m -modules (cf. 6.5.1-(18))

$$H_{\text{BM}}(F_m(M)) \simeq H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m))[m-1] \otimes \sigma_m,$$

où σ_m est le caractère signature \mathcal{S}_m .

L'espace $\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m)$ a le recouvrement ouvert $\mathcal{U}^m = \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$, avec :

$$\mathbb{U}_i^m := \Delta_m(M_{\geq 0} \times \cdots \times \overbrace{M_{> 0}}^i \times \cdots \times M_{\geq 0}),$$

ce qui nous amène à introduire la suite spectrale de Borel-Moore de \mathcal{S}_m -modules attachée au recouvrement \mathcal{U}^m , notée $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ (cf. 6.5.2).

La suite spectrale converge vers $H_{\text{BM}}(F_m(M))$, et possède la propriété remarquable que les termes de sa page \mathbb{E}_1 concernent seulement des espaces de configuration de l'espace i -acyclique $M_{>0}$.

Nous avons (prop. 9.3.13-(b)) :

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M)),$$

où $Q := i - (m - (p + 1))(d_M - 1)$, $\sigma_{m-(p+1)}$ est la signature de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$, $\mathcal{T}(p+1, m)$ est l'ensemble des tableaux de Young τ à m boîtes avec comme première colonne $(m-p, \dots, m)$, et où $\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ est le stabilisateur de τ agissant sur $\sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}(F_{p+1}(M_{>0}))$.

La suite spectrale, que nous appelons « suite spectrale basique de M pour $F_m(M)$ », établit un pont allant de la cohomologie des espaces de configuration de l'espace i -acyclique $M_{>0}$, vers celle de M . La suite a suffisamment de fonctorialité pour permettre l'estimation des rangs de monotonie et stabilité de $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ en termes de ceux des familles $\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}$ intervenant dans les pages \mathbb{E}_1 , et dont les rangs ont été préalablement déterminés.

Après cela, les rangs de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}$ s'obtiennent en appliquant des foncteurs d'induction convenables aux familles $\{H_{\text{BM}}^i(F_{m-a}(M))\}_m$. Pour terminer, les rangs de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}$ sont déterminés récursivement à l'aide de la suite exacte longue

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-(a+1)}M^m)\} \rightarrow \dots$$

La section 9 est entièrement dédiée à ces questions.

– L'estimation du rang de *stationnement* de la suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ est automatique dans le théorème 9.3.15 à partir du rang de monotonie et stabilité. Cependant, pour X i -acyclique, la description du caractère $\chi_c(F_m(X))$ (thm. 10.5.3) donne une information très précise de la multiplicité de la représentation triviale de \mathcal{S}_m dans $H_{\text{BM}}(F_m(X))$, ce qui permet une meilleure estimation du rang en question.

PROPOSITION (11.5.3). – *Soit X un espace i -acyclique de dimension $d_X \geq 2$ tel que $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$.*

Alors, pour tous $i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(X))\}_m$ est constante pour $m \geq i$.

La suite spectrale basique donne ensuite une estimation du rang de stationnement pour $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$ où M est général. Nous prouvons le théorème suivant :

THÉORÈME (11.7.1). – *Soit M un espace connexe et tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$.*

Pour tous $a, i \in \mathbb{N}$.

(a) *La suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 2a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + 2a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

(b) *La suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 4a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + d_M a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

CHAPTER 0

INTRODUCTION (IN ENGLISH)

The “generalized configuration spaces” of a topological space M are the subspaces of M^m denoted by $\Delta_{\gamma\ell}M^m$, for $0 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, defined as

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_{\leq \ell}M^m & := \{(z_1, \dots, z_m) \in M^m \mid \text{Card}\{z_1, \dots, z_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell}M^m & := \Delta_{\leq \ell}M^m \setminus \Delta_{\leq \ell-1}M^m \text{ and } F_m(M) := \Delta_m M^m. \end{cases}$$

They are endowed with the action of the symmetric group \mathfrak{S}_m permuting coordinates.

The aim of this work was to find large families of *topological spaces* M ⁽³⁾ where we could answer through uniform methods that depend only on the Betti numbers of M , classical cohomology questions ⁽⁴⁾ of the usual configuration spaces $F_m(M)$, and then, try to extrapolate conclusions to the generalized configuration spaces $\Delta_{\gamma\ell}M^m$.

We were convinced from the outset of the various advantages of replacing ordinary cohomology with *compact support cohomology*, in particular to free ourselves from smoothness hypotheses and be able to examine cohomology of configuration spaces of singular algebraic varieties, which, until then had received little attention.

Among the questions we considered, we found quite complete answers for the following:

- Find a universal formula for the character of the representation $\mathfrak{S}_m : H_c^i(\Delta_{\gamma\ell}M^m)$ depending only on $(?, i, \ell, m)$ and the *compact Betti numbers* ⁽⁵⁾ of M .
- Find a universal formula for the *Poincaré polynomial* of $H_c(\Delta_{\gamma m-a}M^m/H)$ for any subgroup $H \subseteq \mathfrak{S}_m$. Given $a \in \mathbb{N}$, show that the family of i -th compact Betti numbers of the spaces $\Delta_{\gamma m-a}M^m$ is given by a *universal* polynomial on m , depending only in $(?, a, i)$ and the compact Betti numbers of M .

⁽³⁾ Locally compact spaces and, for simplicity’s sake, countable at infinity and locally contractible, for Example CW-complexes, stratified spaces and pseudomanifolds. Conditions under which simplicial, singular and sheaf cohomology coincide (cf. Section 0.14).

⁽⁴⁾ Over the field $k = \mathbb{Q}$ of rational numbers in this introduction. Elsewhere, over any field, except in questions concerning group representations in which it will always be restricted to $k = \mathbb{Q}$.

⁽⁵⁾ We denote by $\mathcal{P}_c(M) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H_c^i(M) T^i$ (resp. $\mathcal{P}(M) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H^i(M) T^i$) the Poincaré polynomial for the compact support (resp. ordinary) cohomology of M . The number $\dim(H^i(Z))$ (resp. $\dim(H_c^i(Z))$) is the i -th (resp. compact) Betti number of Z .

- Find conditions to the degeneracy of Leray spectral sequences associated with the projections $F_{b+a}(M) \twoheadrightarrow F_a(M)$.
- Find estimates for the ranks of *representation stability* and of *character polynomiality*, in the Church-Farb sense ([12]), of the family $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$.
- Find estimates for the *stationary* rank of the sequence $\{\text{Betti}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$.

We now review the results obtained for each of these questions.

0.1. Poincaré polynomials of configuration spaces

0.1.1. – For all $Z \subseteq M^m$, we will denote

$$\Delta_{?l}Z := Z \cap \Delta_{?l}M^m,$$

endowed with the induced action of \mathcal{S}_m when Z is \mathcal{S}_m -stable.

The cartesian product $M \times F_m(M)$ contains the configuration space $F_{m+1}(M)$ as open subset. Its complement is the space $\Delta_m(M \times F_m(M)) \subseteq F_{m+1}(M)$, which is itself the disjoint union of m closed subspaces:

$$\Delta_{(0,k)}(M \times F_m(M)) := \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in M \times F_m(M) \mid x_0 = x_k\},$$

each clearly homeomorphic to $F_m(M)$. we therefore have a canonical isomorphism

$$(2) \quad H_c(\Delta_m(M \times F_m(M))) \simeq H_c(F_m(M))^m.$$

Besides, the open/closed decomposition

$$(3) \quad M \times F_m(M) = F_{m+1}(M) \sqcup \Delta_m(M \times F_m(M)),$$

gives rise to the exact long sequence of compact support cohomology ⁽⁶⁾

$$(4) \quad \rightarrow H_c(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{j_!} H_c(M \times F_m(M)) \xrightarrow{i^*} H_c(\Delta_m(M \times F_m(M))) \xrightarrow{c} H_c(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{+1} \rightarrow,$$

where $j_!$ is the extension by zero homomorphism, i^* is the restriction homomorphism, and c is the connecting homomorphism.

We then deduce immediately, through (2), the inductive step relation between the following Euler-Poincaré's characteristics $\chi_c(_) := \mathcal{P}_c(_-)(-1)$ of compact support cohomologies:

$$(5) \quad \chi_c(F_{m+1}(M)) = (\chi_c(M) - m) \cdot \chi_c(F_m(M)),$$

hence the equality

$$\chi_c(F_{m+1}(M)) = \chi_c(M)^{\underline{m+1}},$$

where $a^{\underline{m+1}} := (a-0) \cdots (a-m)$ is the *falling factorial* of $a \in \mathbb{Z}$ (cf. Section 14.1).

⁽⁶⁾ With coefficients in a field k of arbitrary characteristic, except for questions concerning symmetric groups representations, where the field k will be the field \mathbb{Q} of rational numbers.

0.1.2. Comment. – The analogous procedure in ordinary cohomology involves local cohomology and gives rise to the long exact sequence

$$(6) \quad \rightarrow H_{\Delta_m(M \times F_m(M))}(M \times F_m(M)) \xrightarrow{i_!} H(M \times F_m(M)) \xrightarrow{j^*} H(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{c}_{[+1]} .$$

When M is an *oriented* topological manifold, the embedding

$$\Delta_m(M \times F_m(M)) \subseteq M \times F_m(M)$$

is a closed embedding of an oriented submanifold of codimension d_M . We can therefore apply Gysin isomorphism and state that we have isomorphisms

$$H_{\Delta_m(M \times F_m(M))}(M \times F_m(M)) \simeq H(\Delta_m(M \times F_m(M)))[d_M] \simeq H(F_m(M))[d_M]^m.$$

Hence, the relation between the Euler-Poincaré’s characteristics $\chi(_) := \mathcal{P}(_-)(-1)$ of ordinary cohomology analogous to (5):

$$(7) \quad \chi(F_{m+1}(M)) = (\chi(M) - (-1)^{d_M} m) \cdot \chi(F_m(M)).$$

However, if M is not an oriented manifold, Gysin isomorphism can fail to be satisfied and relation (7) cannot be stated, contrary to (5). This highlights an important reason for preferring compact support cohomology to ordinary cohomology when studying the cohomology of configuration spaces of general topological spaces.

That said, although the Euler-Poincaré characteristic χ_c is an important invariant, it does not tell us much about the value of each individual Betti number. To do so, we need somehow to split the long exact sequence (4) in short exact sequences. In fact, it was an early positive example of this, that of locally compact groups, which stimulated our interest, and on which our initial research focussed.

0.1.3. Locally compact groups. – When M is a locally compact group G , assumed connected and noncompact, quite elementary reasons show that the restriction homomorphism

$$i^* : H_c(G \times F_m(G)) \rightarrow H_c(\Delta_m(G \times F_m(G)))$$

is the zero map, in which case the short sequences

$$(8) \quad 0 \rightarrow H_c(F_m(G))[-1] \xrightarrow{c}_{[+1]} H_c(F_{m+1}(G)) \xrightarrow{j_!} H_c(G) \otimes H_c(F_m(G)) \rightarrow 0,$$

extracted from (4) are exact. Indeed, following our preliminary Remarks 0.1, the homomorphism i^* is the sum of the restrictions, for $k = 1, \dots, m$,

$$i_k^* : H_c(G \times F_m(G)) \rightarrow H_c(\Delta_{(0,k)}(G \times F_m(G))).$$

But, on the other hand, since G is a group, we have the maps

$$\varphi_k : G \times F_m(G) \rightarrow G \times F_m(G), \quad (g, \bar{x}) \mapsto (g \cdot x_k^{-1}, \bar{x}),$$

which are clearly homeomorphisms exchanging the inclusions:

$$\left(\begin{array}{c} G \times F_m(G) \\ \cup \\ \Delta_{(0,k)}(G \times F_m(G)) \end{array} \right) \xleftrightarrow{\varphi_k} \left(\begin{array}{c} G \times F_m(G) \\ \cup \\ \{e\} \times F_m(G) \end{array} \right).$$

In this way, the vanishing of i_k^* is equivalent to the vanishing of the restriction

$$H_c(G \times F_m(G)) = H_c(G) \otimes H_c(F_m(G)) \rightarrow H_c(\{e\}) \otimes H_c(F_m(G)),$$

itself equivalent to the vanishing of the restriction $H_c(G) \rightarrow H_c(\{e\})$, hence to the noncompactness of G . \square

Splitting of the sequence (4) by the vanishing of i^* , allows complete determination of the Betti numbers for $H_c(F_m(G))$, since the exactness of short sequences (8) give the inductive step relation

$$\mathcal{P}_c(F_{m+1}(G))(T) = (\mathcal{P}_c(G)(T) + mT) \cdot \mathcal{P}_c(F_m(G))(T),$$

hence, the formula

$$(9) \quad \mathcal{P}_c(F_{m+1}(G))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}_c(G)(T) + iT).$$

0.1.4. Lie groups. – When G is a Lie group, the configuration space $F_{m+1}(G)$ is a manifold of dimension $\dim(G)^{m+1}$. We can then apply Poincaré duality to the equality (9), which gives the formula for the Poincaré polynomial of the cohomology of the configuration space $F_{m+1}(G)$:

$$(10) \quad \mathcal{P}(F_{m+1}(G))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}(G)(T) + iT^{\dim G - 1}).$$

0.1.5. Comment. – Formulas (9) and (10) are of the type we were looking for, but since the open/closed decomposition (3) of $M \times F_m(M)$ lacks symmetry, this approach does not allow us to relate the symmetric group *representations* $\{\mathcal{S}_{m+1} : H_c(F_{m+1}(M))\}$ and $\{\mathcal{S}_m : H_c(F_m(M))\}$ to each other, which led us to incorporate *generalized* configuration spaces into our research.

0.2. Generalized configuration spaces

Generalized configuration spaces, introduced by (1), are of interest to us because the open/closed decompositions

$$(11) \quad \Delta_{\leq \ell} M^m = \Delta_{\ell} M^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} M^m$$

are \mathcal{S}_m -stable. Hence, the short sequences (not necessary exact)

$$(12) \quad 0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} M^m)[-1] \xrightarrow[\substack{c \\ [+1]}]{\substack{c \\ [+1]}} H_c(\Delta_{\ell} M^m) \xrightarrow{j_!} H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0,$$

analogous to (8), extracted from the long exact sequences of compact support cohomology associated with (11), are now sequences in the category of \mathcal{S}_m -modules.

0.2.1. The splitting theorem. – In trying to prove the exactness of the short sequences (12) when M is a group, we realized that as for (8), it is not the fact that M has a group structure, but rather that, its *interior cohomology*⁽⁷⁾ vanishes, that is at the heart of the splitting phenomenon, so giving us the following key result.

SPLITTING THEOREM 0.2.2 (3.1.1). – *Consider the following properties of a locally compact space X .*

- (A) *The interior cohomology of X vanishes.*
- (B) *For all $0 \leq \ell \leq m$, the short exact sequences (8) and (12) are exact.*

Then,

- (a) (A) \Rightarrow (B).
- (b) *If X is an oriented manifold, then (A) \Leftrightarrow (B).*

0.3. i -acyclic spaces

The splitting theorem established, we focused on spaces satisfying the property (A), spaces which we call *i -acyclic*.

Examples of i -acyclic spaces include:

- Contractible noncompact spaces, e.g., $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty[$ and $\mathbb{R}_{> 0} :=]0, \infty[$.
- Open subsets of i -acyclic spaces.
- Every product $X \times M$, on an i -acyclic space X by any other space M .
- Lie groups G whose identity component G_0 is not compact.
- Quotients of i -acyclic spaces by finite groups.

0.4. The fundamental complex of X for $\Delta_{\leq \ell} X^m$

The concatenation of the short exact sequences (12) give rise, for $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, to the complex of \mathcal{S}_m -graded modules

$$(13) \quad 0 \rightarrow H_c^{*-\ell+1}(\Delta_1 M^m) \rightarrow \cdots \rightarrow H_c^{*-1}(\Delta_{\ell-1} M^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\ell} M^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0,$$

called the “fundamental complex of X for $\Delta_{\leq \ell} X^m$ ”.

These complexes are important to the following theorem, itself an immediate corollary of the splitting theorem.

THEOREM (3.2.3). – (a) *The fundamental complexes of an i -acyclic space are exact.*
 (b) *An oriented topological manifold is i -acyclic if and only if its fundamental complexes are exact.*

⁽⁷⁾ This is the name of the image of the natural map $H_c(X) \rightarrow H(X)$.

An important part of this memoir is about the consequences of the fact that the fundamental complex is an \mathcal{S}_m -module resolution of $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$. This fact allows to address questions about Betti numbers and character formula using recursive methods. For example, we can express the \mathcal{S}_m -character of $H_c^i(F_m(X))$ as the sum of the character of $H_c(X^m)$ (already known) and the characters of $H_c^{i-a}(\Delta_{m-a} X^m)$, with $a > 0$, which are extensions of the \mathcal{S}_{m-a} -modules $H_c^{i-a}(F_{m-a}(X))$, hence, the ideas both of an algorithm for calculating characters and of a device to study monotony and stability of representations through an inductive approach.

0.5. The Poincaré polynomials of $\Delta_\ell X^m$ and $\Delta_{\leq \ell} X^m$

The arguments in 0.1.3, being based only on the exactness of the short sequences (8), can be applied automatically to any i -acyclic space thanks to the splitting Theorem 0.2.2. We can therefore state:

PROPOSITION 0.5.1 (4.2.1). – *Let X be an i -acyclic space.*

The Poincaré polynomial of $H_c(F_m(X))$ is given by the equality

$$\frac{\mathcal{P}_c(F_m(X))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(-T)}{T} \right)^m,$$

where $a^x := (a-0)(a-1)\cdots(a-(r-1))$ is the falling factorial.

From this result, passing from $F_m(X)$ to $\Delta_\ell X^m$ is straightforward since $\Delta_\ell X^m$ is the disjoint union of a family of open-closed subspaces, each homeomorphic to $F_\ell(X)$, indexed by partitions of the interval $[[1, m]] \subseteq \mathbb{N}$ into ℓ nonempty subsets. The following proposition then states that $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell X^m)$ depends only on $\mathcal{P}_c(X)$, the link being given by some *universal* polynomial of the ring $\mathbb{Z}[P, T]$.

PROPOSITION (4.2.5). – *Let X be an i -acyclic space.*

The Poincaré polynomial of $H_c(\Delta_\ell X^m)$ is obtained by evaluating in $P := \mathcal{P}_c(X)$ the homogeneous polynomial of degree ℓ in the polynomial ring $\mathbb{Z}[P, T]$:

$$Q_\ell^m(P, T) = |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \prod_{i=0, \dots, \ell-1} (P + iT),$$

where $\mathfrak{P}_\ell(m)$ denotes the set of partitions of $[[1, m]] \subseteq \mathbb{N}$ in ℓ nonempty subsets.

The Poincaré polynomial of $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ is then given by the alternating sum of the polynomials $\mathcal{P}_c(\Delta_{\ell-a} X^m)(T) \cdot T^a$, since fundamental complexes are exact.

PROPOSITION (4.3.1). – *Let X be an i -acyclic space.*

The Poincaré polynomial of $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ is obtained by evaluating in $P := \mathcal{P}_c(X)$ the homogeneous polynomial of degree ℓ in the polynomial ring $\mathbb{Z}[P, T]$:

$$Q_{\leq \ell}^m(P, T) = \sum_{0 \leq a < \ell} \left((-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \prod_{i=0, \dots, \ell-a} (P + iT) \cdot T^a \right).$$

0.6. The character of $H_c(\Delta_{? \ell} X^m)$

For every subspace $Z \subseteq X^m$ stable under the action of \mathfrak{S}_m , denote by $\chi_c(Z, i)$ the character of the \mathfrak{S}_m -module $H_c^i(Z; \mathbb{Q})$ ⁽⁸⁾. The following theorem follows immediately from the exactness of the short sequences (12) and of the fundamental complexes (13).

THEOREM 0.6.1 (5.3.3). – *Let X be an i -acyclic space.*

(a) *The character $\chi_c(F_m(X), i)$ of the \mathfrak{S}_m -module $H_c^i(F_m(X))$ verifies the equality*

$$\chi_c(F_m(X), i) = \chi_c(X^m, i) + \chi_c(\Delta_{\leq m-1} X^m, i-1).$$

(b) *The character $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i)$ of the \mathfrak{S}_m -module $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ verifies the equality*

$$(14) \quad \chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq a < \ell} \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell-a}(m)} (-1)^a \operatorname{ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_m} \chi_c(F_{\ell-a}(X), i-a),$$

where $\mathcal{Y}_{\ell-a}(m)$ denotes the set of decompositions of m in $\ell-a$ positive integers, and where, for $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-a}) = (\lambda_1^{\mu_1}, \dots, \lambda_r^{\mu_r})$, we have denoted

$$G_\lambda := N_{\mathfrak{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda) / \mathcal{P}_\lambda = \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\mu_r},$$

with $\mathcal{P}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_{\ell-a}}$.

The character $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ appears in (b) as a linear combination of induced characters from the characters $\chi_c(F_a(X))$, for all $a \leq \ell$. Moreover, each of the latter can be expressed, thanks to (a) for $m := a$, as the sum of $\chi_c(X^a) = \chi_{\mathfrak{S}_a}(H_c(X)^{\otimes a})$, known following Macdonald [27] (cf. 10.5.4), and $\chi_c(\Delta_{\leq a-1} X^a)$. Hence we have all the ingredients to determine recursively the characters of $H_c(F_m(X))$ and $H_c(\Delta_{? \ell} X^m)$ using only the characters $\chi_c(X^\ell)$, for all $\ell \leq m$.

This observation is developed further in Section 5.3 where the induction operators in (b) are combined to define the operator

$$(15) \quad \Upsilon_\ell^m := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \operatorname{ind}_{G_\lambda}^{\mathfrak{S}_m} : \operatorname{Mod}(\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_\ell]) \rightsquigarrow \operatorname{Mod}(\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_m]),$$

which allows us to rewrite equality 14 in 0.6.1-(b) as:

$$(16) \quad \chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \Upsilon_{\ell-a}^m (\chi_c(F_{\ell-a}(X), i-a)).$$

This expression, taken with $\ell = m$, and m taking all values in the interval $[[1, m]]$, give, in matrix terms the equality of *virtual representations*:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} H_c^i(X^m) \\ H_c^{i-1}(X^{m-1}) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(X^2) \\ H_c^{i-m+1}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_m^m & -\Upsilon_{m-1}^m & \dots & * \Upsilon_2^m & * \Upsilon_1^m \\ & \Upsilon_{m-1}^{m-1} & \dots & * \Upsilon_2^{m-1} & * \Upsilon_1^{m-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \Upsilon_2^2 & -\Upsilon_1^2 \\ & & & & \Upsilon_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c^i(F_m(X)) \\ H_c^{i-1}(F_{m-1}(X)) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(F_2(X)) \\ H_c^{i-m+1}(F_1(X)) \end{pmatrix},$$

⁽⁸⁾ Recall that in questions which concern the representations of \mathfrak{S}_m , the coefficients field is \mathbb{Q} .

where $*\Upsilon_j^i$ stands for $(-1)^{i-j}\Upsilon_j^i$, and where $\Upsilon_i^i = \text{id}$.

The matrix $(*\Upsilon_j^i)$ is of the form $\mathbf{1} - \mathbf{N}$ where \mathbf{N} is nilpotent. Its inverse is therefore the geometric series $\mathbf{1} + \mathbf{N} + \mathbf{N}^2 + \cdots + \mathbf{N}^{m-1}$ where the coefficients are, once again, induction operators in the Grothendieck groups of the categories of representations of symmetric groups, denoted by

$$(18) \quad \Theta_\ell^m : K_0(\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_\ell])) \rightsquigarrow K_0(\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m])).$$

We thus have the equality

$$(19) \quad \begin{pmatrix} H_c^i(F_m(X)) \\ H_c^{i-1}(F_{m-1}(X)) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(F_2(X)) \\ H_c^{i-m+1}(F_1(X)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m^m & \Theta_{m-1}^m & \cdots & \Theta_2^m & \Theta_1^m \\ & \Theta_{m-1}^{m-1} & \cdots & \Theta_2^{m-1} & \Theta_1^{m-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \Theta_2^2 & \Theta_1^2 \\ & & & & \Theta_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c^i(X^m) \\ H_c^{i-1}(X^{m-1}) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(X^2) \\ H_c^{i-m+1}(X) \end{pmatrix},$$

allowing us to intertwine, in the next theorem, the characters of compact support cohomologies of generalized configuration spaces of X to that of its cartesian powers.

THEOREM 0.6.2 (5.4.1-(a)). – *Let X be an i -acyclic space.*

For all $m \geq \ell > 0$ and all $i \in \mathbb{N}$, we have

- (i) $\chi_c(F_m(X), i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta_{m-a}^m(\chi_c(X^{m-a}, i-a)),$
- (ii) $\chi_c(\Delta_\ell X^m, i) = \Upsilon_\ell^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell} \Theta_{\ell-a}^\ell(\chi_c(X^{\ell-a}, i-a)) \right),$
- (iii) $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq b < \ell} (-1)^b \Upsilon_{\ell-b}^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell-b} \Theta_{\ell-b-a}^{\ell-b}(\chi_c(X^{\ell-b-a}, i-b-a)) \right).$

From this point, we followed two research paths. The first, in Sections 7–9, was to examine the stability of representation families $\{H_c^i(\Delta_{?m-a} X^m)\}_m$, and the second, in Section 10, to compute the character $\chi_c(F_m(X))$.

0.7. The families of representations $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{?m-a} X^m)\}_m$

Much research on configuration spaces is about the asymptotic behavior of cohomological invariants. The classic example is Arnold's pioneering result (1970 [3]) which states that for $i \in \mathbb{N}$, the sequence $\{\text{Betti}^i(F_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m)\}_m$ is stationary, or, more recently, that of Church (2012 [9]) who showed that if X is an oriented manifold of dimension $d_X \geq 2$, the multiplicities of irreducible representations of \mathcal{S}_m in $H^i(F_m(X))$ are stationary (in the sense of Church-Farb ([12]), cf. 7.4).

These questions are qualitative in nature, so are particularly well suited to being approached using fundamental complexes, which suggest also taking into account the families of generalized configuration spaces $\{\Delta_{?m-a} X^m\}_m$, for each fixed $a \in \mathbb{N}$. Sections 7-9 address this subject within the framework of the theory of FI-modules

of Church-Ellenberg-Farb ([10]). An FI-module is a covariant functor of the category FI of finite sets and injective maps to the category of \mathbb{Q} -vector spaces. Such a functor is represented by a family of linear maps $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$, where V_m is a \mathcal{S}_m -module and ϕ_m is compatible with the actions of \mathcal{S}_m and \mathcal{S}_{m+1} under natural identification $\mathcal{S}_m := \text{Stab}_{\mathcal{S}_{m+1}}(m+1)$. Much of the theory is concerned about studying the *ranks* of “monotony,” “stability” and “polynomiality” of FI-modules (7.4.6). On this subject, we prove the following result inspired by Church’s results.

THEOREM 0.7.1 (9.2.4). – *Let X be an i -acyclic space of dimension $d_X \geq 2$ and such that $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$.*

For $a, i \in \mathbb{N}$, the family of representations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} X^m)\}_m$ is monotone for $m \geq i + a$, and is monotone and representation stable for

$$m \geq \begin{cases} 4(i + a), & \text{if } d_X = 2, \\ 2(i + 2a), & \text{if } d_X \geq 3. \end{cases}$$

The corresponding families of characters and Betti numbers are polynomial and the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} X^m / \mathcal{S}_m; \mathbb{Q})\}_m$ is stationary, within the same ranges of m .

But before commenting on the terms of this statement and its proof, it is worth recalling the reasons that led us to adopt the “cohomology” H_{BM} used in this memoir.

0.7.2. Homology and “cohomology” of Borel-Moore. – As the reader has already noticed, the results in the previous sections all concern *compact support* cohomology and not ordinary cohomology. The reason for this restriction is that the splitting theorem *is not valid* in ordinary cohomology. Of course, if X is an oriented manifold, the spaces $F_m(X)$ and X^m are also oriented manifolds and the equalities 0.6-(17),(19) intertwining the families $\{\mathcal{S}_m : H_c(F_m(X))\}_m$ and $\{\mathcal{S}_m : H_c(X^m)\}_m$ can be rewritten for ordinary cohomology with the cohomology degree’s shifts usual in Poincaré duality. But beyond these cases, e.g., for non-oriented manifolds or singular spaces, our methods do not apply for ordinary cohomology. On this point, notice that the spaces $\Delta_{\leq \ell}(X^m)$ are usually singular even when X is smooth.

On the other hand, in Theorem 0.7.1 above, when X is an oriented manifold, the representation stability constraints are expressed by simple inequalities between the ordinary cohomology degree i and the index m , a relation that becomes rather messy in terms of complementary degrees in *compact support* cohomology.

It thus appears that compact support cohomology is best adapted to the cohomological study of generalized configuration spaces, but degrees of ordinary cohomology, or of Poincaré’s dual of compact support cohomology, are best suited to the statements concerning representation stability.

Thus, insofar as the *Borel-Moore Homology* of a locally compact space M is the dual of the compact support cohomology :

$$H_i^{\text{BM}}(M; \mathbb{Q}) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}),$$

we are led to define the *Borel-Moore* cohomology of degree i of a locally compact space M of finite dimension d_M , by the equality ⁽⁹⁾

$$(20) \quad \boxed{H_{\text{BM}}^i(M; \mathbb{Q}) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^{d_M-i}(M; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})}.$$

Obviously, when M is an oriented manifold, we have a canonical identification $H_{\text{BM}}^i(M; \mathbb{Q}) = H^i(M; \mathbb{Q})$, for all $i \in \mathbb{N}$, due to Poincaré duality.

This “cohomology” (20) therefore is best suitable for studying representation stability properties of the families $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$, whether M is an oriented manifold or not. ⁽¹⁰⁾

0.7.3. Comments on Theorem 0.7.1. – We first consider the case of the family of representations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$.

Given that the notions of *monotony* and *representation stability* are specific to FI-modules, we must first provide the family $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ with such structure. Since in the present case the space M is such that $\dim(H_c^{d_M}(M)) \leq 1$, we choose a generator $[M] \in H_c^{d_M}(M)$ and define the arrows joining the consecutive terms of the families $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ and $\{H_{\text{BM}}^i(M^m)\}_m$ as the homomorphisms

$$\begin{cases} p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)), \\ p_m^* : H_{\text{BM}}^i(M^m) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(M^{m+1}), \end{cases}$$

adjoints to the *integration along fibers* defined by the projections $p_m(\bar{x}, x_{m+1}) := \bar{x}$,

$$\begin{cases} \int_{[M]} : H_c(F_{m+1}(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))[-d_M], \\ \int_{[M]} : H_c(M^{m+1}) \rightarrow H_c(M^m)[-d_M]. \end{cases}$$

(Notice that if $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 0$, these maps are the zero maps.)

0.7.3.1. – We then consider the FI-modules

$$\begin{cases} \mathcal{V}(i) & := \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))\}_m, \\ \mathcal{W}(i) & := \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(M^{m+1}) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(M^m)\}_m, \end{cases}$$

where the action of \mathcal{S}_m on $H_{\text{BM}}(_)$ is the adjoint action of $\text{Hom}(H_c(_)[d_M], \mathbb{Q})$ *twisted by the signature character* σ_m of \mathcal{S}_m . By this choice, when M is an oriented manifold,

⁽⁹⁾ Although this notation is questionable since $H_{\text{BM}}^i(M)$ is not the dual of Borel-Moore Homology $H_{\text{BM}}^i(M) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M), \mathbb{Q})$, but a mere shift of it $H_{\text{BM}}^i(M) := H_{d_M-i}^{\text{BM}}(M)$, it turns out to be the right substitute for $H^i(M)$ in the generalizations of Church’s theorems for singular spaces.

⁽¹⁰⁾ Care must be taken that Borel-Moore *cohomology* does not extend the ordinary cohomology *functor* since its functoriality is *covariant* and restricted to *proper* maps. It is nevertheless possible to construct for some maps $f : M \rightarrow N$ an equivalent to the pullback $f^* : H(N) \rightarrow H(M)$. For example, if f is a locally trivial fibration of oriented manifolds with fiber F , the integration along fibers $\int_{[F]} : H_c(M)[d_M] \rightarrow H_c(N)[d_N]$, is identified by Poincaré duality to f^* . This idea is used for the the projections $p_m : F_{m+1}(M) \rightarrow F_m(M)$, $p_m(\bar{x}, x_{m+1}) := \bar{x}$, when M comes equipped with a *fundamental class*, as is the case of pseudomanifolds or of irreducible complex algebraic varieties.

the maps p^* and the action of \mathcal{S}_m coincide, through Poincaré duality, with the usual pullback actions in ordinary cohomology (see more details in 6.2.4.3).

0.7.3.2. – With this in mind, Künneth’s theorem for Borel-Moore homology gives the equality $H_{\text{BM}}(M^m) = H_{\text{BM}}(M)^{\otimes m}$, and the ranks of monotony “ rg_m ” and of monotony and stability “ rg_{ms} ” of the FI-modules $\mathcal{W}(i)$ are easy to compute and well-known following the fundamental work [10] (cf. 8.1.8 and 9.2.3-(A)). We have (if $d_M > 1$)

- (i) $(\dim H_c^{d_M}(M) = 0) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ and } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) \leq i),$
- (ii) $(\dim H_c^{d_M}(M) = 1) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ and } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) \leq 2i),$
- (iii) $(\dim H_c^{d_M}(M) > 1) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ and } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) = \infty).$

In (i), moreover, $H_{\text{BM}}^i(M^m) = H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) = 0$, for all $m > i$ ⁽¹¹⁾, so the only really interesting case to look at is where $\dim H_{\text{BM}}^0(M) = \dim H_c^{d_M}(M) = 1$, which explains why we come across this hypothesis so often.

0.7.3.3. – A natural way of studying the FI-modules $\mathcal{V}(i)$ when M is i -acyclic is to use the intertwining functors $\Theta_{m-a}^m : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])$, for $1 \leq a \leq m$ (18), already used in Theorem 0.6.2. Together, these functors define functors in the category $\text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])$ of FI-modules

$$\Theta^a : \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI]) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])_{\geq a},$$

which, thanks to 0.6.2, give rise to the equality

$$(21) \quad \mathcal{V}(i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta^a(\mathcal{W}(d_M(m-a) - (i-a))).$$

Hence, we need to understand to what extent the functor Θ^a modifies the ranks of monotony and stability of FI-modules. Section 8 is devoted to this question, which concludes with the theorem:

THEOREM (8.2.3). – (a) *The functor $\Theta^a : \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI]) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])_{\geq 2a}$ is covariant, additive and exact.*

(b) *If \mathcal{V} is (of finite type) generated in degrees $\leq d$, the FI-module $\Theta^a(\mathcal{V})$ is (of finite type) generated in degrees $\leq \sup(d+a, 2a)$.*

(c) *We have $\text{rg}_{\text{ms}}(\Theta^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 4a$ and $\text{rg}_m(\Theta^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_m(\mathcal{V}) + a$.*

Theorem 0.7.1 then results by estimating how much ranks are modified in equation (21), taking care of the particular form of the indices $(d_X(m-a) - (i-a))$. The details of the computation make up Section 9.2.3-(B). To finish, the polynomiality of the characters and the stationary rank of the sequence of Betti numbers for the unordered configuration space come automatically. On this point, we will give more

⁽¹¹⁾ The Poincaré polynomial of $H_{\text{BM}}(M)$ is the polynomial $\mathcal{P}_{\text{BM}}(M)(T) := \mathcal{P}_c(M)(1/T)T^{d_Y}$. When M i -acyclic, we have $\mathcal{P}_{\text{BM}}(F_m(M)) = \prod_{i=0}^{m-1} (\mathcal{P}_{\text{BM}}(M)(T) + mT^{d_M-1})$, after 0.5 4.2.1. Hence, when $H_{\text{BM}}^0(M) = 0$, either $d_M > 1$ in which case $H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) = 0$ pour $m > i$, or $d_M = 1$ in which case $\dim H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) > (m-i)!$ and $\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{V}(i) = \infty$.

accurate estimates of the stationary rank of the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(F_m(X)/\mathcal{S}_m)\}_m$, once the character of $H_c(F_m(X))$, for X i -acyclic, is made explicit (cf. 0.9 and 0.11).

0.8. Basic spectral sequences

0.8.1. – Generalization of Theorem 0.7.1 to general spaces is based on the elementary fact that any locally compact space is a difference of two i -acyclic spaces.

Indeed, if M is locally compact, the spaces $M_{\geq 0} := M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $M_{> 0} := M \times \mathbb{R}_{> 0}$, are i -acyclic and

$$M \simeq M_0 = M_{\geq 0} \setminus M_{> 0}.$$

The space $F_m(M_0)$ is closed and \mathcal{S}_m -stable in $F_m(M_{\geq 0})$, its complement is the open subspace

$$(22) \quad \mathbb{U}^m := F_m(M_{> 0}) \setminus F_m(M_0) = \Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m).$$

We therefore have the exact long sequence of \mathcal{S}_m -modules:

$$\rightarrow H_c^i(\mathbb{U}^m) \rightarrow H_c^i(F_m(M_{\geq 0})) \rightarrow H_c^i(F_m(M_0)) \rightarrow,$$

where, since $H_c(\mathbb{R}_{\geq 0}) = 0$, we easily see that the central term $H_c(F_m(M_{\geq 0}))$ vanishes. Hence, $H_c(F_m(M_0)) \simeq H_c(\mathbb{U}^m)[1]$, and an isomorphism of graded \mathcal{S}_m -modules

$$(23) \quad \boxed{H_{\text{BM}}(F_m(M_0)) \simeq H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m)[m-1] \otimes \sigma_m},$$

where σ_m is the signature character of \mathcal{S}_m .

The space \mathbb{U}^m has the obvious open cover $\mathcal{U}^m = \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$, where:

$$\mathbb{U}_i^m := \Delta_m(M_{\geq 0} \times \cdots \times \overset{i}{\widehat{M}_{> 0}} \times \cdots \times M_{\geq 0}) \subseteq F_m(M_{\geq 0}).$$

We show that for $\mathbb{U}_{i_1, \dots, i_r}^m := \mathbb{U}_{i_1}^m \cap \cdots \cap \mathbb{U}_{i_r}^m$, there exists a canonical decomposition

$$(24) \quad \boxed{H_c(\mathbb{U}_{i_1, \dots, i_r}^m) = \bigoplus_{\mathcal{F}(r, m)} H_c(F_r(M_{> 0})) [m-r]},$$

where $\mathcal{F}(r, m)$ denotes the set of maps $f : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$, such that $f(t) > t$ for all $t \leq m-r$, and that $f(t) = t$ otherwise.

0.8.1.1. – We thus see that the space \mathbb{U}^m admits a cover by open subspaces whose intersections behave, from the point of view of compact support cohomology, as configuration spaces associated with the i -acyclic space $M_{> 0}$. Hence our interest in introducing the Borel-Moore spectral sequence attached to the cover \mathcal{U}^m (cf. 6.4.6), which we do in Section 6, where the sequence is denoted by $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)$, and is called “the basic spectral sequence”. Associated with any locally compact space M , the sequence converges to $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ and has the remarkable property that its first page \mathbb{E}_1 entails only the compact support cohomology of the i -acyclic space $M_{> 0} := M \times \mathbb{R}_{> 0}$.

THEOREM (6.5.2). – *Let M be a locally compact space of finite cohomological dimension. The basic spectral sequence $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma_m$ converges as spectral sequence of \mathcal{S}_m -modules towards the bi-graded \mathcal{S}_m -module associated with the filtered \mathcal{S}_m -module $H_{\text{BM}}(F_m(M))[1 - m]$. For $i \in \mathbb{Z}$, we have:*

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M)),$$

where $q = i + (m - (p + 1))$ and $Q := i - (m - (p + 1))(d_M - 1)$, where $\mathcal{T}(p + 1, m)$ is the set of Young tableaux with m boxes and first column $(m - p, \dots, m)$, and where \mathcal{H}_τ is the stabilizer of τ in $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$, whose action on $H_c(F_{p+1}(M_{>0}))$ is twisted by the signature character $\sigma_{m-(p+1)}$ of $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$.

0.8.2. – Another notable property of basic spectral sequences is their compatibility with the homomorphisms $p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))$, which enable us to keep track of the ranks of monotony and representation stability, page after page, and thereby to generalize Theorem 0.7.1 to more general spaces, e.g., to pseudomanifolds and, in particular, complex algebraic varieties.

THEOREM 0.8.3 (9.3.15). – *Let M be a connected space of dimension $d_M \geq 2$, and such that $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$. For all $a, i \in \mathbb{N}$,*

(i) *the FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ is monotone and representation stable for*

$$m \geq \begin{cases} 4(i + a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i + 2a), & \text{if } d_M \geq 3, \end{cases}$$

(ii) *the FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ is monotone and representation stable for*

$$m \geq \begin{cases} 4(i + 2a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i + d_M a), & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

The corresponding families of characters and Betti numbers are polynomial, and the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}X^m/\mathcal{S}_m; \mathbb{Q})\}_m$ is stationary, within the same ranges of m .

0.8.4. Comment. – The Theorem 0.8.3 is due to Church ([9], 2012) in the case of an oriented manifold M and for the family $\{H(F_m(M))\}_m$. We have thus generalized his result in two directions. First, avoiding the hypothesis of smoothness of M (hence replacing $H(_)$ by $H_{\text{BM}}(_)$), and, second, by incorporating the families $\{\Delta_{\leq m-a}M^m\}_m$, for fixed $a \in \mathbb{N}$, for which no previous conjecture existed (notice that these can be singular spaces, even if M is smooth.)

Our approach is different from Church's, in that, whereas Church builds on Totaro's ([34]) explicit description of the Leray spectral sequence associated with the embedding $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, for smooth M , we first consider the case of families $\{F_m(X)\}_m$ where X is i -acyclic, a case where the exactness of the fundamental complexes reduces study of the ranks of monotony and stability of $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m$ to that of $\{H_{\text{BM}}^i(X^m)\}_m$, where answers are simpler (cf. Theorem 0.7.1).

We then take advantage of the ability of basic spectral sequences to establish, for a general space M , a bridge from configuration spaces of the i -acyclic space $M_{>0}$ to those corresponding to M , enabling us to estimate the ranks of monotony and representation stability of the family $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ in terms of those, already settled, of $\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}$ occurring in the \mathbb{E}_1 page of the basic spectral sequence.

The ranks of $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}$ then follow easily with the help of the induction functors Υ_{m-a}^m (15), and, to finish, the ranks of the families $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}$ emerge from inspection of the long exact sequences of FI-modules (cf. Proposition 9.1.1-(a))

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\} \rightarrow .$$

Section 9 is devoted entirely to these questions.

0.9. The character of $H_c(F_m(X))$

In Section 10, we return to i -acyclic spaces, where, following Macdonald ([27]), we consider the “character series” of an \mathcal{S}_m -stable subspace $Z \subseteq X^m$, defined as

$$\chi_c(Z)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}(\alpha : H_c^i(Z)) T^i, \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m.$$

The full computation of $\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)$ is possible thanks to the exactness of the fundamental complexes of X . We prove:

THEOREM 0.9.1 (10.5.3). – *Let X be an i -acyclic space.*

For $\alpha \in \mathcal{S}_m$, we have

$$\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1, \dots, m} d^{\mathcal{X}_d(\alpha)} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{\mathcal{X}_d(\alpha)},$$

where $\mathcal{X}_d(\alpha)$ is the number of d -cycles in the decomposition of α in cycles, $\mu(_)$ is the Möbius function and $a^{\underline{r}} := (a-0)(a-1)\cdots(a-(r-1))$ is the falling factorial.

0.10. The Poincaré polynomial of $H_c(F_m(X)/H)$

The previous theorem applies immediately, giving dimensions of the invariant subspaces $H_c^i(F_m(X))^H$, for every subgroup $H \subseteq \mathcal{S}_m$, which are the Betti numbers of $H_c(F_m(X)/H)$. Section 11 illustrates the procedure for the “cyclic” configuration space $CF_m(X) := F_m(X)/C_m$, where $C_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, and the *unordered* configuration space $BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m$.

If X is an i -acyclic space, we have :

THEOREM (11.2.1). – *We have*

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

THEOREM (11.3.1). – *We have*

$$\frac{\mathcal{P}_c(BF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{X_1}, \dots, m^{X_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1, \dots, m} d^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{X_d},$$

where $\phi(_)$ is the Euler totient function, $\mu(_)$ the Möbius function and h_λ is the cardinality of the set of permutations in \mathcal{S}_m of type $\lambda := (1^{X_1}, \dots, m^{X_m})$.

0.11. Stationary rank of the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$

Although according to the Theorem 0.8.3, we already have an automatic estimation the *stationary rank* of the sequence $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(F_m(M)/\mathcal{S}_m)\}_m$, the explicit formula of the character $\chi_c(F_m(X))$ for an i -acyclic space X (thm. 0.9.1), gives us more accurate information about the multiplicity of the trivial representation of \mathcal{S}_m in $H_c^i(F_m(X))$, permitting a better estimate of the rank in question.

PROPOSITION (11.5.3). – *Let X be an i -acyclic space such that $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$.*

For $i \in \mathbb{N}$, the family $\{\text{Betti}^i(BF_m(X; \mathbb{Q}))\}_m$ is constant for all $m \geq i$.

This result then extends in the following theorem using the basic spectral sequences, which ends the section on stability questions.

THEOREM (11.7.1). – *let M be a connected space such that $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$.*

For all $a, i \in \mathbb{N}$,

(a) *the family $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant for*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 2a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + 2a, & \text{if } d_M \geq 3, \end{cases}$$

(b) *the family $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ is constant for*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 4a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + d_M a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

0.12. Degeneracy of the Leray spectral sequences

Given $a, b \in \mathbb{N}$, let $\pi_a : X^{b+a} \rightarrow X^a$ be the projection onto the last a coordinates. Its restriction to $F_{b+a}(X)$ is a surjection $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ ⁽¹²⁾ whose fibers are of the form $X \setminus \mathbf{a}$ where \mathbf{a} denotes a subset of X of cardinality a . Clearly, the space $X \setminus \mathbf{a}$ has nothing canonical, unlike the graded vector space $H_c(X \setminus \mathbf{a})$ which is indeed intrinsic when X is i -acyclic (Sections 1.10, 1.11), once more justifying our interest in this class of spaces. In that case, moreover, the simple expression of the Poincaré polynomial of $H_c(F_m(X))$ in Proposition 0.5.1 gives us the equality

$$\mathcal{P}_c(F_{b+a}(X)) = \mathcal{P}_c(F_a(X)) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})),$$

suggesting that there might exist some form of cohomological triviality for the fibration π_a , which turns out indeed to be the case, and is dealt with in Section 12.

Denote more generally by $\Delta_{\ell}^{[a]} X^m$, for $0 < a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, the open subset of m -tuples in $\Delta_{\ell} X^m$ with the last a coordinates different from each other:

$$\Delta_{\ell}^{[a]} X^m := \Delta_{\ell} X^m \cap (X^{m-a} \times F_a(X)).$$

Section 12.4 is devoted to the study of the Leray spectral sequences for (vertical) compact support cohomology associated with the map

$$\pi_a : \Delta_{\ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X),$$

whose fiber above the point $\bar{x} \in F_a(X)$ is $F := \Delta_{\ell}(X^{m-a} \times \bar{x})$.

This led us to take a closer look at cohomology with π_a -proper support, which we denote by $H_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)$, and to the associated sheaves of π_a -proper cohomology:

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{\ell}^{[a]} X^m}).$$

The main result for these sheaves is the following.

THEOREM (12.3.2-(c)). – *Let X be an i -acyclic space.*

The sheaves $\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)$ are constant above the connected components of $F_a(X)$.

That result simplifies the study of the Leray spectral sequences for the cohomologies $H_c(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)$ and $H_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)$, and we are able to prove the following theorem which concludes this work.

THEOREM (12.4.9). – *Let X be an i -acyclic space.*

For all $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, denote by

$$(\mathbb{E}_r) \quad (\mathbb{E}_r(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)_c, d_r) \text{ and } (\mathbb{E}_r(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m)_{\pi!}, d_r)$$

⁽¹²⁾ Generally not locally trivial, except if X is a connected manifold of dimension $d_X > 1$.

the Leray spectral sequences associated with the map $\pi_a : \Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$ respectively converging to $H_c(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m)$ and $H_{\pi!}(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m)$. Then:

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m)_c \sim H_c^p(F_a(X)) \otimes H_c^q(F) \Rightarrow H_c^{p+q}(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m), \\ \mathbb{E}_2(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m)_{\pi!} \sim H^p(F_a(X)) \otimes H_c^q(F) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{\gamma\ell}^{[a]} X^m), \end{cases}$$

where F is any fiber of π_a .

The spectral sequences (\mathbb{E}_r) are degenerate, i.e. $d_r = 0$ for all $r \geq 2$.

0.13. Miscellanea of i -acyclic spaces

Section 13 is an appendix giving examples and counterexamples of relevant properties of i -acyclic spaces.

0.14. About hypotheses

When we started this work, our goal was to generalize Church's theorems to complex algebraic varieties, because we found that they have enough properties favorable to such a project. As these properties were essentially those of pseudomanifolds, in the first written version of this work, we placed ourselves in the context of these. However, a posteriori, such a restriction is somewhat excessive, as the reviewer himself pointed out. The work, as is now presented, applies to *countable at infinity, locally contractile and locally compact spaces (for example CW-complexes, stratified spaces and PL-manifolds)*, properties that place us in a very flexible framework where simplicial, singular and sheaf cohomology theories are interchangeable. This choice respond solely to a concern for flexibility that allows us to freely use methods specific to one or the other of the theories. It is a choice that could be refined up to *locally compact spaces*, which we leave to the concerned reader.

For the same reason, coefficients rings will be fields k of arbitrary characteristic, except in matters related to the theory of representations of symmetric groups, where it will be of characteristic zero, in fact $k = \mathbb{Q}$ for the most, a choice that guarantees that the categories of representations are semi-simple.

0.15. Other approaches

When writing this memoir we learned about the work of Dan Petersen [30] (2016) where he associates with a stratified topological space a specific spectral sequence that computes its Borel-Moore homology in terms of that of its closed strata. Applying his results to the configuration space $F_m(M)$, he finds Getzler's spectral sequence [19] (1999) which generalizes Totaro's spectral sequence ([34]) (1996) for the embedding $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, from the case where M is a differentiable manifold to the case where M is general. Petersen is then able to show for an irreducible complex algebraic variety M , that the FI-modules $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ are of finite type. Representation

stability then automatically follows but without any estimation of the corresponding ranks of monotony and stability.

The reviewer pointed out that Getzler, in his unpublished work [20] (1995), already noticed that since M^m is the union of the locally closed \mathcal{S}_m -invariant strata $\Delta_\ell M^m$, for $\ell \leq m$, any invariant which is additive over stratifications, like Euler characteristic with compact support or Hodge-Deligne polynomial, gives rise to an upper triangular system of equations relating the values of this invariant on $\{M^m\}_m$ and on $\{F_m(X)\}_m$. If this invariant moreover satisfies a Künneth formula then after inverting this system one gets an expression for the invariant (equivariantly) on each space $F_m(M)$ in terms of M . Getzler's approach for $M^m = \bigcup_{1 \leq \ell \leq m} \Delta_\ell M^m$ coincides then with ours assuming the fundamental complex of M for M^m to be exact, in which case we do not need to take Euler characteristics and we get explicit formulas for the \mathcal{S}_m -character of each individual cohomology group of $F_m(M)$ in terms of M . Plugging in a formal parameter T in Getzler's formulas, and then developing the resulting expressions, should give the \mathcal{S}_m -character $\chi_c(F_m(M))$ in the i -acyclic case, as in Theorem 10.5.3.

Conclusion. – We believe that even if there are many questions still to be settled, the usefulness of fundamental complexes as a combinatorial tool in the case of i -acyclic spaces, and that of the basic spectral sequences in overcoming the i -acyclicity restriction, should be clear following this work.

Acknowledgments. – To Dan Petersen for the particular interest he has shown for our work in [31], to the reviewer for his many thoughtful remarks and to Frances Cowell for her wise comments that helped to improve this work.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION (EN FRANÇAIS)

Les *espaces de configuration généralisés* d'un espace topologique M sont les sous-espaces $\Delta_{\ell} M^m \subseteq M^m$ définis, pour $0 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, par

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_{\leq \ell} M^m & := \{(z_1, \dots, z_m) \in M^m \mid \text{Card}\{z_1, \dots, z_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} M^m & := \Delta_{\leq \ell} M^m \setminus \Delta_{\leq \ell-1} M^m \text{ et } F_m(M) := \Delta_m M^m. \end{cases}$$

Ils sont munis de l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_m par permutation de coordonnées.

Notre motivation aux débuts de ce travail a été la recherche de larges familles d'*espaces topologiques* M ⁽¹³⁾ pour lesquels on peut répondre, par des méthodes uniformes ne dépendant que des nombres de Betti de M , aux questions classiques sur la cohomologie ⁽¹⁴⁾ des espaces de configuration $F_m(M)$, et ensuite de tenter d'extrapoler les conclusions aux espaces de configuration généralisés $\Delta_{\ell} M^m$.

Dès les premiers résultats positifs, nous avons été convaincus de l'intérêt de remplacer la cohomologie ordinaire par la cohomologie à supports compacts, notamment pour nous affranchir des hypothèses de lissité des espaces et pouvoir envisager l'étude cohomologique des espaces de configuration des variétés algébriques complexes singulières, jusque-là peu considérées, du moins à l'époque.

Parmi les questions abordées, les suivantes ont trouvé des réponses très complètes.

- Trouver une formule universelle pour le *caractère* de la représentation de \mathcal{S}_m sur $H_c^i(F_m(M))$, déterminée par (i, m) et ne dépendant que des nombres de Betti *compacts* de M . Extrapoler au cas des espaces de configuration généralisés $\Delta_{?m-a} M^m$.

⁽¹³⁾ Des espaces localement compacts et, pour simplifier, dénombrables à l'infini et localement contractiles, par exemple CW-complexes, espaces stratifiés et pseudovariétés. Conditions sous lesquelles cohomologies singulière, simpliciale et de faisceaux coïncident (cf. section 0.14).

⁽¹⁴⁾ Sur le corps $k = \mathbb{Q}$ des nombres rationnels dans cette introduction, autrement sur un corps quelconque, sauf dans les questions liées à la théorie des représentations toujours limitées à $k = \mathbb{Q}$.

- Trouver une formule universelle pour le *polynôme de Poincaré*⁽¹⁵⁾ de $H_c(F_m(M))$ déterminée par m et ne dépendant que des nombres de Betti compacts de M . Même question pour espaces de configuration généralisés $\Delta_{?m-a}M^m$.
- Trouver une formule universelle pour le polynôme de Poincaré de $H_c^i(\Delta_{?m-a}M^m/H)$ pour tout sous-groupe $H \subseteq \mathcal{S}_m$ déterminée par $(?, i, m, a, W)$ et ne dépendant que des nombres de Betti compacts de M .
- Étudier la *dégénérescence* des différentes suites spectrales de Leray associées aux projections $\pi_a : F_{b+a}(M) \rightarrow F_a(M)$, $\pi_a : (z_1, \dots, z_b, x_1, \dots, x_a) \mapsto (x_1, \dots, x_a)$.
- Généraliser des théorèmes de Church (2012 [9]) sur les rangs de *monotonie et stabilité de représentation* et de *polynomialité de caractère* de la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H(F_m(M))\}_m$ du cas où M est une variété différentielle, au cas où M est un espace singulier. Estimer, pour tous $a, i \in \mathbb{N}$, ces mêmes rangs pour les familles $\{\mathcal{S}_m : H(\Delta_{m-a}(M^m))\}_m$.
- Pour $a, i \in \mathbb{N}$, estimer le rang de *stationnement* de $\{\text{Betti}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$.

Nous passons maintenant en revue les résultats obtenus dans chacune de ces questions.

0.1. Polynômes de Poincaré des espaces de configuration

0.1.1. – Pour tout $Z \subseteq M^m$, posons $\Delta_\ell Z := Z \cap \Delta_\ell M^m$.

Le produit $M \times F_m(M)$ contient $F_{m+1}(M)$ comme partie ouverte. Son complémentaire est le fermé $\Delta_m(M \times F_m(M))$, réunion disjointe des m sous-espaces fermés :

$$\Delta_{(0,k)}(M \times F_m(M)) := \{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in M \times F_m(M) \mid x_0 = x_k\},$$

clairement homéomorphes à $F_m(M)$, d'où un isomorphisme

$$(2) \quad H_c(\Delta_m(M \times F_m(M))) \simeq H_c(F_m(M))^m.$$

La décomposition ouverte/fermée

$$(3) \quad M \times F_m(M) = F_{m+1}(M) \sqcup \Delta_m(M \times F_m(M))$$

donne lieu alors à la suite exacte longue de cohomologie⁽¹⁶⁾ à support compact

$$(4) \quad \rightarrow H_c(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{j_!} H_c(M \times F_m(M)) \xrightarrow{i^*} H_c(\Delta_m(M \times F_m(M))) \xrightarrow{c}_{[+1]},$$

où $j_!$ est le prolongement par zéro, i^* est restriction et c est la connexion.

On en déduit, moyennant (2), la relation de récurrence entre les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi_c(_) := \mathcal{P}_c(_-)(-1)$ des cohomologies à support compact :

$$(5) \quad \chi_c(F_{m+1}(M)) = (\chi_c(M) - m) \cdot \chi_c(F_m(M)),$$

⁽¹⁵⁾ Le polynôme $\mathcal{P}(Z)(T) := \sum_i \dim(H^i(Z))T^i$ (resp. $\mathcal{P}_c(Z)(T) := \sum_i \dim(H_c^i(Z))T^i$) est le polynôme de Poincaré de $H(Z)$ (resp. de $H_c(Z)$). Le nombre $\dim(H^i(Z))$ (resp. $\dim(H_c^i(Z))$) est le i -ème nombre de Betti (resp. compact) de Z .

⁽¹⁶⁾ À coefficients dans un corps k de caractéristique quelconque, sauf dans les questions concernant la théorie des représentations de groupes où k sera le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} .

d'où l'égalité

$$\chi_c(F_{m+1}(M)) = \chi_c(M)^{\frac{m+1}{m}},$$

où $a^{\frac{m+1}{m}} := (a - m) \cdots (a - 0)$ est la *factorielle décroissante* (cf. section 14.1).

0.1.2. Commentaire. – La procédure analogue en cohomologie ordinaire fait intervenir la cohomologie locale et donne la suite exacte longue

$$(6) \quad H_{\Delta_m(M \times F_m(M))}(M \times F_m(M)) \xrightarrow{i_!} H(M \times F_m(M)) \xrightarrow{j^*} H(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{c} H(F_{m+1}(M)) \xrightarrow{+1} \dots$$

Lorsque M est une variété topologique connexe et *orientée*, le plongement

$$\Delta_m(M \times F_m(M)) \subseteq M \times F_m(M)$$

est un plongement de variété orienté de codimension d_M . L'isomorphisme de Gysin permet alors d'écrire

$$H_{\Delta_m(M \times F_m(M))}(M \times F_m(M)) \simeq H(\Delta_m(M \times F_m(M)))[d_M] \simeq H(F_m(M))[d_M]^m,$$

d'où la relation récurrence entre caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(_) := \mathcal{P}(_-)(-1)$ des cohomologies ordinaires analogue de (5) :

$$(7) \quad \chi(F_{m+1}(M)) = (\chi(M) - (-1)^{d_M} m) \cdot \chi(F_m(M)).$$

Par contre, lorsque M n'est pas une variété topologique orientée, l'isomorphisme de Gysin n'est plus valable et la relation (7) n'a plus raison d'être. On voit là déjà un raison *a priori* importante pour préférer la cohomologie à support compact à la cohomologie ordinaire dans l'étude cohomologique des espaces de configuration.

Cela étant dit, même si la caractéristique d'Euler-Poincaré χ_c est un invariant important, il ne nous renseigne pas sur la valeur de chaque nombre de Betti séparément, ce pour quoi il faudrait disposer d'un certain scindage de la suite (4). Et c'est bien sur ce point précis qui se sont concentrées nos premières recherches, notamment stimulées par un premier exemple favorable, celui des groupes topologiques.

0.1.3. Le cas des groupes localement compacts. – Lorsque M est un groupe localement compact G *connexe et non compact*, des raisons très simples nous ont montré que le morphisme de restriction

$$i^* : H_c(G \times F_m(G)) \rightarrow H_c(\Delta_m(G \times F_m(G)))$$

est nul, et donc que les suites courtes

$$(8) \quad 0 \rightarrow H_c(F_m(G))[-1]^m \xrightarrow{c} H_c(F_{m+1}(G)) \xrightarrow{j_!} H_c(G) \otimes H_c(F_m(G)) \rightarrow 0$$

extraites de (4) sont exactes. Rappelons pourquoi. D'après nos remarques préliminaires 0.1.1, le morphisme i^* est somme des restrictions, pour $k = 1, \dots, m$,

$$i_k^* : H_c(G \times F_m(G)) \rightarrow H_c(\Delta_{(0,k)}(G \times F_m(G))).$$

Mais, d'un autre côté, puisque G est un groupe, on dispose des applications

$$\varphi_k : G \times F_m(G) \rightarrow G \times F_m(G), \quad (g, \bar{x}) \mapsto (g \cdot x_k^{-1}, \bar{x}),$$

qui sont clairement des homéomorphismes échangeant les inclusions :

$$\left(\begin{array}{c} G \times F_m(G) \\ \cup \\ \Delta_{(0,k)}(G \times F_m(G)) \end{array} \right) \xleftrightarrow{\varphi_k} \left(\begin{array}{c} G \times F_m(G) \\ \cup \\ \{e\} \times F_m(G) \end{array} \right).$$

Ainsi, l'annulation de i_k^* équivaut à l'annulation du morphismes de restriction

$$H_c(G \times F_m(G)) = H_c(G) \otimes H_c(F_m(G)) \rightarrow H_c(\{e\}) \otimes H_c(F_m(G)),$$

elle-même équivalente à l'annulation de la restriction $H_c(G) \rightarrow H_c(\{e\})$, autrement dit à la non compacité de G . \square

Le scindage de la suite longue (4) par l'annulation de i^* , va nous permettre d'être beaucoup plus précis dans la détermination des nombres de Betti de $F_m(G)$ puisque l'exactitude des suites courtes (8) donne la relation de récurrence ⁽¹⁷⁾

$$\mathcal{P}_c(F_{m+1}(G))(T) = (\mathcal{P}_c(G)(T) + mT) \cdot \mathcal{P}_c(F_m(G))(T),$$

d'où la formule

$$(9) \quad \mathcal{P}_c(F_{m+1}(G))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}_c(G)(T) + iT).$$

0.1.4. Le cas des groupes de Lie. – Lorsque G est un groupe de Lie, l'espace de configuration $F_{m+1}(G)$ est une variété différentielle de dimension $\dim(G)^{m+1}$, et la dualité de Poincaré appliquée à l'égalité (9) donne l'expression du polynôme de Poincaré de $F_{m+1}(G)$ sous la forme

$$(10) \quad \mathcal{P}(F_{m+1}(G))(T) = \prod_{i=0, \dots, m} (\mathcal{P}(G)(T) + iT^{\dim G - 1}).$$

0.1.5. Commentaire. – Les formules (9) et (10) sont bien du type cherché, mais la décomposition ouverte/fermée (3) de $M \times F_m(M)$ ne permet pas de relier les représentations des groupes symétriques $\{\mathcal{S}_{m+1} : H_c(F_{m+1}(M))\}$ et $\{\mathcal{S}_m : H_c(F_m(M))\}$, ce qui nous a conduits à incorporer les espaces de configuration généralisés.

0.2. Les espaces de configuration généralisés

Les espaces de configuration généralisés ont déjà été introduits par les formules (1). L'espace $\Delta_{\leq \ell} M^m$ est muni de l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_m et la décomposition ouverte/fermée

$$(11) \quad \Delta_{\leq \ell} M^m = \Delta_{\ell} M^m \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} M^m$$

⁽¹⁷⁾ On note $\mathcal{P}_c(M) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H_c^i(M) T^i$ (resp. $\mathcal{P}(M) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{Q}} H^i(M) T^i$) le polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support compact (resp. ordinaire) de M .

est une décomposition en parties \mathcal{S}_m -stables. Elle donne donc lieu à une suite courte extraite de la suite longue de cohomologie à support compact associée à (11), analogue à la suite (8), mais cette fois de \mathcal{S}_m -modules (*a priori* non exacte)

$$(12) \quad 0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} M^m)[-1] \xrightarrow{c}_{[+1]} H_c(\Delta_\ell M^m) \xrightarrow{j_1} H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0.$$

0.2.1. Le théorème de scindage. – C'est en cherchant à démontrer l'exactitude de (12) lorsque M est un groupe, comme pour (8), que nous avons réalisé que ce n'était pas tant le fait que M possède une structure de groupe, mais plutôt le fait que sa *cohomologie intérieure* ⁽¹⁸⁾ est nulle, qui est à l'origine du phénomène de scindage. A ce sujet, nous avons obtenu le résultat clef suivant.

THÉORÈME DE SCINDAGE 0.2.2 (3.1.1). – *Soient les propriétés suivantes pour un espace X .*

- (A) *La cohomologie « intérieure » de X est nulle.*
- (B) *Pour tous $0 \leq \ell \leq m$, les suites courtes (8) et (12) sont exactes.*

Alors,

- (a) (A) \Rightarrow (B).
- (b) *Si X est une variété topologique orientable, alors (A) \Leftrightarrow (B).*

0.3. Les espaces i -acycliques

À partir du théorème de scindage, une partie importante de notre travail va se concentrer dans les espaces vérifiant la propriété (A), i.e. *sans cohomologie intérieure*. Ce sont les espaces que nous appelons « i -acycliques ».

La classe des espaces i -acycliques comporte :

- Les espaces contractiles non compacts, p.e. $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty[$ et $\mathbb{R}_{> 0} :=]0, \infty[$.
- Les ouverts des espaces i -acycliques.
- Tout produit $X \times M$, où X est i -acyclique et M est quelconque.
- Les groupes de Lie G dont la composante neutre G_0 n'est pas compacte.
- Les quotients des espaces i -acycliques par des groupes finis.

⁽¹⁸⁾ On appelle ainsi l'image de l'application naturelle $H_c(X) \rightarrow H(X)$.

0.4. Le complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$

La concaténation des suites courtes (12) donne lieu, pour $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, au complexe de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$(13) \quad 0 \rightarrow H_c^{*- \ell + 1}(\Delta_1 M^m) \rightarrow \cdots \rightarrow H_c^{*-1}(\Delta_{\ell-1} M^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_\ell M^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} M^m) \rightarrow 0,$$

que nous appelons « complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$ ». Son principal intérêt réside dans le théorème suivant, corollaire immédiat du théorème de scindage 0.2.2.

THÉORÈME (3.2.3). – (a) *Les complexes fondamentaux d'un espace i -acyclique sont exacts.*

(b) *Une variété topologique orientable est i -acyclique si et seulement si ses complexes fondamentaux sont exacts.*

Une large partie de ce mémoire s'intéresse aux conséquences du fait que le complexe fondamental est une résolution par \mathcal{S}_m -modules de $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$. Cela nous permettra par exemple d'exprimer le caractère de $H_c^i(F_m(X))$ comme somme du caractère (connu) de $H_c^i(\Delta_{\leq m} X^m) = H_c(X^m)$ et des caractères des $H_c^{i-a}(\Delta_{m-a} X^m)$, avec $a > 0$, extensions faciles à décrire des représentations $H_c^{i-a}(F_{m-a}(X))$ des \mathcal{S}_{m-a} . D'où un algorithme de calcul des caractères, mais aussi un dispositif permettant d'aborder les questions de monotonie et stabilité de représentations dans une approche inductive.

0.5. Les polynômes de Poincaré de $\Delta_\ell X^m$ et de $\Delta_{\leq \ell} X^m$

Les remarques de 0.1.3, étant basées sur l'exactitude des suites courtes (8), elles s'appliquent à tout espace i -acyclique grâce au théorème de scindage. On a donc :

PROPOSITION 0.5.1 (4.2.1). – *Soit X un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré compact de $F_m(X)$ est donné par l'égalité*

$$\frac{\mathcal{P}_c(F_m(X))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(-T)}{T} \right)^m,$$

où $a^{\underline{r}} := (a-0)(a-1)\cdots(a-(r-1))$ est la factorielle décroissante.

À partir de là, le passage de $F_m(X)$ à $\Delta_\ell X^m$ est assez simple dans la mesure où $\Delta_\ell X^m$ admet une décomposition en parties ouvertes-fermées homéomorphes à $F_\ell(X)$ indexée par les partitions de l'intervalle $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides. La proposition suivante établit alors que $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell X^m)$ seul dépend de $\mathcal{P}_c(X)$, le lien étant donné par un certain polynôme « universel » de l'anneau $\mathbb{Z}[P, T]$.

PROPOSITION (4.2.5). – Soit X un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré compact de $\Delta_{\ell} X^m$ s'obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_c(X)$ le polynôme homogène de degré ℓ de $\mathbb{Z}[P, T]$:

$$Q_{\ell}^m(P, T) = |\mathfrak{P}_{\ell}(m)| \cdot \prod_{i=0, \dots, \ell-1} (P + iT),$$

où $\mathfrak{P}_{\ell}(m)$ désigne l'ensemble des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides.

Le polynôme de Poincaré compact de $\Delta_{\leq \ell} X^m$ s'obtient alors comme somme alternée des polynômes $\mathcal{P}_c(\Delta_{\ell-a} X^m)(T) \cdot T^a$ par l'exactitude des complexes fondamentaux.

PROPOSITION (4.3.1). – Soit X un espace i -acyclique. Le polynôme de Poincaré compact de $\Delta_{\leq \ell} X^m$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(X), T]$ de degré ℓ , donné par la somme alternée

$$\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \mathcal{P}_c(F_{\ell-a}(X)) \cdot T^a.$$

0.6. Le caractère de $H_c(\Delta_{\ell} X^m)$

Dans la suite, pour tout sous-espace \mathcal{S}_m -stable $Z \subseteq X^m$, on note $\chi_c(Z, i)$ le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(Z)$ ⁽¹⁹⁾. Le théorème suivant est conséquence immédiate de l'exactitude des suites courtes (12) et des complexes fondamentaux (13).

THÉORÈME 0.6.1 (5.3.3). – Soit X un espace i -acyclique.

(a) Le caractère $\chi_c(F_m(X), i)$ du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(F_m(X))$ vérifie

$$\chi_c(F_m(X), i) = \chi_c(X^m, i) + \chi_c(\Delta_{\leq m-1} X^m, i-1).$$

(b) Le caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i)$ du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ vérifie

$$(14) \quad \chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq a < \ell} \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell-a}(m)} (-1)^a \operatorname{ind}_{G_{\lambda}}^{\mathcal{S}_m} \chi_c(F_{\ell-a}(X), i-a),$$

où $\mathcal{Y}_{\ell-a}(m)$ est l'ensemble des décompositions de m en $\ell-a$ entiers positifs, et où, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-a}) = (\lambda_1^{\mu_1}, \dots, \lambda_r^{\mu_r})$, on a noté

$$G_{\lambda} := N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_{\lambda}) / \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{S}_{\mu_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\mu_r},$$

avec $\mathcal{P}_{\lambda} := \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\ell-a}}$.

Le caractère $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ apparaît dans l'assertion (b) comme combinaison linéaire des induits des caractères $\chi_c(F_a(X))$, pour $a \leq \ell$. Ces derniers s'expriment à leur tour, grâce à l'assertion (a) pour $m := a$, comme la somme du caractère $\chi_c(X^a) = \chi_{\mathcal{S}_a}(H_c(X)^{\otimes a})$, bien connu d'après le travail de Macdonald [27] (cf. 10.5.4), et du caractère $\chi_c(\Delta_{\leq a-1} X^a)$. On a donc tous les ingrédients pour la détermination récursive des caractères de $H_c(F_m(X))$ et de $H_c(\Delta_{\ell} X^m)$ à partir uniquement des caractères $\chi_c(X^{\ell})$ pour $\ell \leq m$.

⁽¹⁹⁾ Dans les questions concernant les caractères de \mathcal{S}_m , le corps des coefficients est \mathbb{Q} .

Cette observation est développée dans la section 5.3 où les opérateurs d'induction dans (b) se combinent pour donner lieu à l'opérateur d'induction

$$(15) \quad \Upsilon_\ell^m := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} : \text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m])$$

permettant la réécriture de l'égalité (14) dans l'assertion 0.6.1-(b) sous la forme :

$$(16) \quad \chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \Upsilon_{\ell-a}^m(\chi_c(F_{\ell-a}(X), i-a)).$$

Cette expression, prise avec $\ell = m$ et en faisant prendre à m toutes les valeurs dans l'intervalle $\llbracket 1, m \rrbracket$, donne en écriture matricielle l'égalité de *représentations virtuelles* :

$$(17) \quad \begin{pmatrix} H_c^i(X^m) \\ H_c^{i-1}(X^{m-1}) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(X^2) \\ H_c^{i-m+1}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_m^m & -\Upsilon_{m-1}^m & \cdots & * \Upsilon_2^m & * \Upsilon_1^m \\ & \Upsilon_{m-1}^{m-1} & \cdots & * \Upsilon_2^{m-1} & * \Upsilon_1^{m-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \Upsilon_2^2 & -\Upsilon_1^2 \\ & & & & \Upsilon_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c^i(F_m(X)) \\ H_c^{i-1}(F_{m-1}(X)) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(F_2(X)) \\ H_c^{i-m+1}(F_1(X)) \end{pmatrix},$$

où $* \Upsilon_j^i$ remplace $(-1)^{i-j} \Upsilon_j^i$, et où $\Upsilon_i^i = \text{id}$.

La matrice $(* \Upsilon_j^i)$ est de la forme $\mathbf{1} - \mathbf{N}$ où \mathbf{N} est nilpotente, son inverse est la série géométrique $\mathbf{1} + \mathbf{N} + \mathbf{N}^2 + \cdots + \mathbf{N}^{m-1}$ dont les coefficients sont encore des opérateurs d'induction dans les groupes de Grothendieck des catégories de représentations des groupes symétriques. Nous les notons

$$(18) \quad \Theta_\ell^m : K_0(\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_\ell])) \rightsquigarrow K_0(\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m])).$$

On a donc l'égalité

$$(19) \quad \begin{pmatrix} H_c^i(F_m(X)) \\ H_c^{i-1}(F_{m-1}(X)) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(F_2(X)) \\ H_c^{i-m+1}(F_1(X)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m^m & \Theta_{m-1}^m & \cdots & \Theta_2^m & \Theta_1^m \\ & \Theta_{m-1}^{m-1} & \cdots & \Theta_2^{m-1} & \Theta_1^{m-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \Theta_2^2 & \Theta_1^2 \\ & & & & \Theta_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_c^i(X^m) \\ H_c^{i-1}(X^{m-1}) \\ \vdots \\ H_c^{i-m+2}(X^2) \\ H_c^{i-m+1}(X) \end{pmatrix},$$

qui permet, dans le théorème suivant, de relier les caractères des cohomologies à support compact des espaces de configuration généralisés de X à ceux des puissances cartésiennes de X .

THÉORÈME 0.6.2 (5.4.1-(a)). – Soit X un espace i -acyclique. Pour tout $m \geq \ell > 0$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a

- (i) $\chi_c(F_m(X), i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta_{m-a}^m(\chi_c(X^{m-a}, i-a)),$
- (ii) $\chi_c(\Delta_\ell X^m, i) = \Upsilon_\ell^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell} \Theta_{\ell-a}^\ell(\chi_c(X^{\ell-a}, i-a)) \right),$
- (iii) $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m, i) = \sum_{0 \leq b < \ell} (-1)^b \Upsilon_{\ell-b}^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell-b} \Theta_{\ell-b-a}^{\ell-b}(\chi_c(X^{\ell-b-a}, i-b-a)) \right).$

À partir de là, nous avons suivi deux voies de recherche, l'une sur les stabilités des familles de représentations $\{H_c^i(\Delta_{\gamma_{m-a}} X^m)\}_m$, dans les sections 7 à 9, et l'autre pour la détermination explicite des caractères $\chi_c(F_m(X))$, dans la section 10.

0.7. Les familles de représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i(\Delta_{\gamma_{m-a}} X^m)\}_m$

Bien de recherches sur les espaces de configuration concernent le comportement asymptotique des invariants cohomologiques. L'exemple classique est le résultat pionnier d'Arnold (1970 [3]) qui établit que pour $i \in \mathbb{N}$, la suite $\{\text{Betti}^i(F_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m)\}_m$ est stationnaire, ou, plus récemment, celui de Church (2012 [9]) qui montre que si X est une variété topologique connexe orientable et que $d_X \geq 2$, les multiplicités des facteurs irréductibles des représentations de \mathcal{S}_m dans $H^i(F_m(X))$ sont stationnaires.

Dans ces questions de nature qualitative, les complexes fondamentaux s'avèrent particulièrement commodes et suggèrent de s'intéresser aussi aux familles d'espaces de configuration $\{\Delta_{\gamma_{m-a}} X^m\}_m$, pour chaque $a \in \mathbb{N}$ fixé. Les sections 7 à 9 abordent ces questions dans le cadre de la théorie des FI-modules de Church-Ellenberg-Frab ([10]). Rappelons qu'on appelle FI-module tout foncteur covariant de la catégorie FI des ensembles finis et des applications injectives vers la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels. Un tel foncteur se représente comme la donnée d'une famille d'applications linéaires $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_{m \in \mathbb{N}}$, où V_m est un \mathcal{S}_m -module et ϕ_m est compatible aux actions de \mathcal{S}_m et \mathcal{S}_{m+1} pour l'identification naturelle $\mathcal{S}_m := \text{Stab}_{\mathcal{S}_{m+1}}(\{m+1\})$.

Les concepts importants en théorie des FI-modules sont ceux des *rangs* de « monotonie », de « stabilité » et de « polynomialité » d'un FI-module (cf. 7.4.6). À ce sujet, nous prouvons le résultat suivant inspiré des résultats de Church.

THÉORÈME 0.7.1 (9.2.4). – Soit X un espace i -acyclique de dimension $d_X \geq 2$ et tel que $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$. Alors, pour tous $a, i \in \mathbb{N}$ fixés, la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\gamma_{m-a}} X^m)\}_m$ est monotone pour $m \geq i+a$ et est monotone et stable pour

$$m \geq \begin{cases} 4(i+a), & \text{si } d_X = 2, \\ 2(i+2a), & \text{si } d_X \geq 3. \end{cases}$$

Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont polynomiales et la suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\gamma_{m-a}} X^m/\mathcal{S}_m; \mathbb{Q})\}_m$ est constante, sur les mêmes intervalles.

Mais avant de commenter cet énoncé et sa preuve, il convient de rappeler le choix de la cohomologie, notée H_{BM} , utilisée dans ce mémoire.

0.7.2. Homologie et Cohomologie de Borel-Moore. – Tous les résultats des sections précédentes concernent la cohomologie à *support compact* et non pas la cohomologie ordinaire. La raison fondamentale de cette restriction est que le théorème de scindage *n'est pas vrai* en cohomologie ordinaire. Bien sûr, si X est une variété topologique orientée, les espaces $F_m(X)$ et X^m le sont aussi et les égalités 0.6-((17),(19)) qui comparent les familles $\{\mathcal{S}_m : H_c(F_m(X))\}_m$ et $\{\mathcal{S}_m : H_c(X^m)\}_m$ peuvent être réécrites pour la cohomologie ordinaire moyennant les changements de degrés cohomologiques habituels à la dualité de Poincaré. Mais au delà de ces cas, dans le cas des variétés non orientées ou de espaces singuliers, nos méthodes n'ont pas prise sur la cohomologie ordinaire des espaces de configuration. À signaler, sur ce point, que les espaces $\Delta_{\leq \ell}(X^m)$ sont généralement singuliers même lorsque X ne l'est pas.

D'un autre côté, dans le théorème 0.7.1 ci-dessus, lorsque X est une variété topologique orientée, les contraintes de stabilité s'expriment par des inégalités simples entre le degré de cohomologie ordinaire i et l'indice m , relation qui devient moins parlante en termes des degrés complémentaires de la cohomologie à *support compact*.

Il apparaît ainsi que c'est la cohomologie à support compact qui est la mieux adaptée à l'étude cohomologique des espaces de configuration, mais que c'est le degré de la cohomologie ordinaire, ou du dual de Poincaré de la cohomologie à support compact, qui convient dans les énonces de stabilité de représentation.

C'est ainsi que, dans la mesure où l'*homologie de Borel-Moore* d'un espace localement compact M est définie comme le dual de la cohomologie à support compact :

$$H_i^{\text{BM}}(M; \mathbb{Q}) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}),$$

nous avons été amenés à définir la cohomologie *de Borel-Moore* d'un espace localement compact M de dimension finie d_M , par l'égalité ⁽²⁰⁾

$$(20) \quad \boxed{H_{\text{BM}}^i(M; \mathbb{Q}) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^{d_M-i}(M; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})}.$$

Ainsi, lorsque M est une variété topologique orientée, on a $H_{\text{BM}}^i(M; \mathbb{Q}) = H^i(M; \mathbb{Q})$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, par dualité de Poincaré.

C'est donc cette « cohomologie » (20) qui possède les propriétés les plus favorables pour l'étude de la stabilité de représentation des familles $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} M^m)\}_m$, et ce, que M soit une variété topologique orientée ou non. ⁽²¹⁾

⁽²⁰⁾ Bien que la notation soit discutable puisque $H_{\text{BM}}^i(M)$ n'est pas dual de l'homologie de Borel-Moore $H_i^{\text{BM}}(M) := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^i(M), \mathbb{Q})$, mais un simple décalé $H_{\text{BM}}^i(M) := H_{d_M-i}^{\text{BM}}(M)$, elle s'avère être le bon substitut de $H^i(M)$ dans les généralisations des théorèmes de Church's aux espaces singuliers.

⁽²¹⁾ Il faut prendre garde du fait que la *cohomologie* de Borel-Moore n'étend pas le *foncteur* de cohomologie ordinaire puisque sa fonctorialité est covariante et limitée aux applications propres. Il

0.7.3. Commentaires sur le théorème 0.7.1. – Limitons-nous d'abord au cas de la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$.

Étant donné que les notions de *monotonie* et de *stabilité de représentation* sont relatives à la donnée d'une structure de FI-module sur $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$, on doit commencer par préciser ce point. Dans le cas en considération, où M est tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) \leq 1$, le choix d'un *générateur* $[M] \in H_c^{d_M}(M)$ permet de relier les termes des familles $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ et $\{H_{\text{BM}}^i(M^m)\}_m$ par les homomorphismes

$$\begin{cases} p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)), \\ p_m^* : H_{\text{BM}}^i(M^m) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(M^{m+1}), \end{cases}$$

adjoints des intégrations sur les fibres associées projections $p_m(\bar{x}, x_{m+1}) := \bar{x}$,

$$\begin{cases} \int_{[M]} : H_c(F_{m+1}(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))[-d_M], \\ \int_{[M]} : H_c(M^{m+1}) \rightarrow H_c(M^m)[-d_M]. \end{cases}$$

(On remarquera que lorsque $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 0$, les applications p_m^* sont nulles.)

0.7.3.1. – On considère alors les FI-modules

$$\begin{cases} \mathcal{V}(i) := \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))\}_m, \\ \mathcal{W}(i) := \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(M^{m+1}) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(M^m)\}_m, \end{cases}$$

où l'action de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(_)$ est l'action adjointe sur $(H_c(_)[d_M])^\vee$ tordue par le caractère signature σ_m de \mathcal{S}_m . Choix qui, lorsque M est une variété topologique orientée, rend les applications p^* et l'action de \mathcal{S}_m concordantes, via la dualité de Poincaré, aux images-inverses habituelles en cohomologie ordinaire (cf. 6.2.4.3).

0.7.3.2. – Cela étant posé, le théorème de Künneth pour la *cohomologie* de Borel-Moore établit l'égalité $H_{\text{BM}}(M^m) = H_{\text{BM}}(M)^{\otimes m}$. Les rangs de monotonie « rg_m » et de monotonie et stabilité « rg_{ms} » des FI-modules $\mathcal{W}(i)$ sont alors faciles à déterminer et bien connus depuis le travail fondateur [10] (cf. 8.1.8 et 9.2.3-(A)). On a (si $d_M > 1$)

- (i) $(\dim H_c^{d_M}(M) = 0) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ et } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) \leq i),$
- (ii) $(\dim H_c^{d_M}(M) = 1) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ et } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) \leq 2i),$
- (iii) $(\dim H_c^{d_M}(M) > 1) \Rightarrow (\text{rg}_m(\mathcal{W}(i)) \leq i \text{ et } \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}(i)) = \infty).$

est néanmoins possible de retrouver pour certaines applications $f : Y \rightarrow M$ l'équivalent de l'image-inverse $f^* : H^i(M) \rightarrow H^i(Y)$. Par exemple, si f est une fibration localement triviale de fibre orientable F , on dispose de l'intégration sur les fibres $\int_{[F]} : H_c^i(Y) \rightarrow H_c^{i-d_F}(M)$, dont le dual s'identifie à f^* lorsque M et Y sont des variétés topologiques orientables. C'est cette idée qui est utilisée pour les espaces de configuration pour les projections $p_m : F_{m+1}(M) \rightarrow F_m(M)$, $p_m(\bar{x}, x_{m+1}) := \bar{x}$, lorsque M est muni d'un *générateur*, comme c'est le cas des variétés algébriques complexes.

Dans (i), en plus, $H_{\text{BM}}^i(M^m) = H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) = 0$ pour tout $m > i$ ⁽²²⁾. Cela fait que le seul cas vraiment intéressant à étudier est celui où $\dim H_{\text{BM}}^0(X) = \dim H_c^{d_X}(X) = 1$. Ce qui explique la fréquence de cette hypothèse dans nos énoncés.

0.7.3.3. – Lorsque M est un espace acyclique X , l'idée pour étudier les FI-modules $\mathcal{V}(i)$ est d'utiliser les foncteurs d'induction $\Theta_{m-a}^m : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])$, pour $1 \leq a \leq m$, de (18), déjà utilisés dans le théorème 0.6.2. Ces foncteurs se recollent définissant des foncteurs dans la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])$ de FI-modules $\Theta^a : \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI]) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])_{\geq a}$, et donnent l'égalité de FI-modules virtuels

$$(21) \quad \mathcal{V}(i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta^a(\mathcal{W}(d_X(m-a) - (i-a))).$$

D'où la nécessité de comprendre comment le foncteur Θ^a perturbe les rangs de monotonie et de stabilité et des FI-modules. La section 8 est entièrement consacrée à cette question. Le théorème qui suit en est la principale conclusion.

THÉORÈME (8.2.3). – (a) *Le foncteur $\Theta^a : \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI]) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])_{\geq 2a}$ est covariant, additif, exact.*

(b) *Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le FI-module $\Theta^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d+a, 2a)$.*

(c) *On a $\text{rg}_{\text{ms}}(\Theta^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 4a$ et $\text{rg}_{\text{m}}(\Theta^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + a$.*

Le théorème 0.7.1 résulte alors par une analyse fine des rangs prenant soin de la forme des indices $(d_X(m-a) - (i-a))$ dans la formule (21). Les détails des calculs constituent la section 9.2.3-(B). Enfin, la polynomialité des caractères et le rang de stationnement des nombres de Betti de l'espace de configuration non-ordonné en sont des conséquences automatiques. Sur ce point, nous aurons une estimation plus précise du rang de stationnement de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(F_m(X)/\mathcal{S}_m)\}_m$ grâce à la détermination explicite du caractère de $H_c(F_m(X))$ pour X i -acyclique (cf. 0.9 et 0.11).

0.8. Les suites spectrales basiques

0.8.1. – L'extension du théorème 0.7.1 aux espaces plus généraux est basée sur le fait élémentaire que tout espace localement compact est la différence de deux espaces i -acycliques. En effet, si M est localement compact, les espaces $M_{\geq 0} := M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$

⁽²²⁾ Le polynôme de Poincaré d'un espace Y pour la *cohomologie* de Borel-Moore est le polynôme $\mathcal{P}_{\text{BM}}(Y)(T) := \mathcal{P}_c(Y)(1/T) T^{d_Y}$. Lorsque M est un espace i -acyclique X , on a, d'après 0.5,

$$\mathcal{P}_{\text{BM}}(F_m(X)) = \prod_{i=0}^{m-1} (\mathcal{P}_{\text{BM}}(X)(T) + mT^{d_X-1}).$$

Ainsi, lorsque $H_{\text{BM}}^0(X) = 0$, soit $d_X > 1$ et alors $H_{\text{BM}}^i(F_m(X)) = 0$ pour $m > i$, soit $d_X = 1$ et alors $\dim H_{\text{BM}}^i(F_m(X)) > (m-i)!$ et $\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{V}(i) = \infty$.

et $M_{>0} := M \times \mathbb{R}_{>0}$, sont i -acycliques et $M_{\geq 0} \setminus M_{>0} = M_0 \sim M$. L'espace $F_m(M_0)$ est un fermé \mathcal{S}_m -stable dans $F_m(M_{\geq 0})$, de complémentaire l'ouvert

$$(22) \quad \mathbb{U}^m := F_m(M_{\geq 0}) \setminus F_m(M_0) = \Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m),$$

d'où la suite exacte longue de \mathcal{S}_m -modules :

$$\rightarrow H_c^i(\mathbb{U}^m) \rightarrow H_c^i(F_m(M_{\geq 0})) \rightarrow H_c^i(F_m(M_0)) \rightarrow,$$

où, du fait que $H_c(\mathbb{R}_{\geq 0}) = 0$, on déduit que le terme central $H_c(F_m(M_{\geq 0}))$ est nul. Par conséquent, $H_c(F_m(M_0)) \simeq H_c(\mathbb{U}^m)[1]$, d'où l'égalité de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$(23) \quad H_{\text{BM}}(F_m(M_0)) \simeq H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m)[m-1] \otimes \sigma_m,$$

où σ_m est le caractère signature de \mathcal{S}_m .

Nous munissons alors l'ouvert \mathbb{U}^m du recouvrement $\mathcal{U}^m = \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$, où :

$$\mathbb{U}_i^m := \Delta_m(M_{\geq 0} \times \cdots \times \overbrace{M_{>0}}^i \times \cdots \times M_{\geq 0}) \subseteq F_m(M_{\geq 0}),$$

et nous montrons, pour $\mathbb{U}_{i_1, \dots, i_r}^m := \mathbb{U}_{i_1}^m \cap \cdots \cap \mathbb{U}_{i_r}^m$, l'existence d'une décomposition

$$(24) \quad H_c(\mathbb{U}_{i_1, \dots, i_r}^m) = \bigoplus_{\mathcal{F}(r,m)} H_c(F_r(M_{>0}))[m-r],$$

où $\mathcal{F}(r,m)$ est l'ensemble des applications $f : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que $f(t) > t$ pour $t \leq m-r$, et $f(t) = t$ autrement.

0.8.1.1. – On voit ainsi que l'ouvert \mathbb{U}^m admet un recouvrement par des ouverts dont les intersections se comportent, du point de vue de la cohomologie à support compact, comme des espaces de configuration associés à l'espace i -acyclique $M_{>0}$, d'où l'intérêt d'étudier la suite spectrale de Borel-Moore attachée au recouvrement \mathcal{U}^m (cf. 6.4.6).

La section 6 est consacrée à la définition de cette suite spectrale, $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)$, que nous appelons « basique ». Associée à un espace général M , elle converge vers $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ et a la propriété remarquable de ne faire intervenir que la *cohomologie* de Borel-Moore d'espaces de configuration associés à l'espace i -acyclique $M_{>0} := M \times \mathbb{R}_{>0}$.

THÉORÈME (6.5.2). – *Soit M un espace localement compact de dimension finie. La suite spectrale basique $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma_m$ converge en tant que suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué filtré $H_{\text{BM}}(F_m(M))[1-m]$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_{1^{p,q}} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M)),$$

où $q = i + (m - (p+1))$ et $Q := i - (m - (p+1)) (d_M - 1)$, où $\mathcal{J}(p+1,m)$ est l'ensemble des tableaux de Young à m boîtes et première colonne $(m-p, \dots, m)$, et où \mathcal{H}_τ est le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$, dont l'action sur $H_c(F_{p+1}(M_{>0}))$ est tordue par le caractère signature $\sigma_{m-(p+1)}$ de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$.

0.8.2. – Une autre propriété remarquable de ces suites est leur compatibilité aux morphismes $p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))$, ce qui permet de généraliser le théorème 0.7.1 aux espaces plus généraux, dont les variétés algébriques complexes.

THÉORÈME 0.8.3 (9.3.15). – *Soit M un espace localement compact connexe de dimension $d_M \geq 2$, et tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$. Alors, pour $a, i \in \mathbb{N}$,*

(i) *le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour*

$$m \geq \begin{cases} 4(i+a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+2a), & \text{if } d_M \geq 3, \end{cases}$$

(ii) *le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour*

$$m \geq \begin{cases} 4(i+2a), & \text{if } d_M = 2, \\ 2(i+d_M a), & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondants sont polynomiales et la suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante, sur ces mêmes intervalles de m .

0.8.4. Commentaire. – Le théorème 0.8.3 est dû à Church ([9], 2012) pour une variété topologique M et pour la famille $\{H(F_m(M))\}_m$. Nos énoncés généralisent les siens dans deux directions. Premièrement, en s'affranchissant de l'hypothèse de lissité de M (remplaçant alors $H(_)$ par $H_{\text{BM}}(_)$), et, deuxièmement, en incorporant les familles $\{\Delta_{\leq m-a}M^m\}_m$, pour $a \in \mathbb{N}$ fixé, pour lesquelles il n'y avait pas de conjecture (à noter qu'il s'agit d'espaces singuliers, même si M ne l'est pas.)

Notre approche est différente de celle de Church. Alors que Church s'appuie sur les travaux de Totaro ([34]) autour de la suite spectrale de Leray associée au plongement $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, pour M lisse, notre stratégie a consisté à étudier dans un premier temps à la famille $\{F_m(X)\}_m$ où X est i -acyclique, cas où l'exactitude des complexes fondamentaux réduit l'étude des rangs de monotonie et stabilité de $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m$ à ceux de $\{H_{\text{BM}}^i(X^m)\}_m$ où la réponse est simple (cf. théorème 0.7.1).

Nous utilisons ensuite la propriété des suites spectrales basiques d'établir, pour un espace général M , un pont allant des espaces de configuration de l'espace i -acyclique $M_{>0}$ vers ceux correspondant à M , pour estimer les rangs de monotonie et de stabilité de la famille $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ en termes de ceux des familles $\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}$ intervenant dans la page \mathbb{E}_1 de ladite suite spectrale.

Une fois les rangs de $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ estimés, ceux de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ s'en suivent par l'utilisation des foncteurs d'induction Υ_{m-a}^m (15). Enfin, l'estimation des rangs des familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ résulte de l'inspection des suites exactes longues de FI-modules (cf. proposition 9.1.1-(a))

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\} \rightarrow .$$

La section 9 est entièrement dédiée à ces questions.

0.9. Le caractère de $H_c(F_m(X))$

Dans la section 10, on revient sur les espaces i -acycliques. On y considère suivant Macdonald ([27]), la « série de caractères » d'une partie \mathcal{S}_m -stable $Z \subseteq X^m$:

$$\chi_c(Z)(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}(\alpha : H_c^i(Z)) T^i, \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m.$$

Le calcul des séries $\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)$ peut être mené à terme grâce notamment à l'exactitude des complexes fondamentaux de X . On prouve :

THÉORÈME 0.9.1 (10.5.3). – *Soit X un espace i -acyclique. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a*

$$\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1, \dots, m} d^{X_d(\alpha)} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{X_d(\alpha)},$$

où $X_d(\alpha)$ est le nombre des cycles de longueur d dans la décomposition de α en cycles disjoints, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius et $a^x := (a-0)(a-1) \cdots (a-(x-1))$ est la factorielle décroissante.

0.10. Les polynôme de Poincaré de $H_c(F_m(X)/H)$

Le théorème précédent s'applique aussitôt pour donner les dimensions des sous-espaces invariants $H_c^i(F_m(X))^H$, quel que soit le sous-groupe $H \subseteq \mathcal{S}_m$. Ce sont les dimensions des espaces $H_c^i(F_m(X)/H)$. La section 11 illustre le procédé pour l'espace de configurations « cycliques » $CF_m(X) := F_m(X)/C_m$, où $C_m := \langle (1, \dots, m) \rangle \subseteq \mathcal{S}_m$, et celui de l'espace de configurations « non-ordonnées » $BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m$.

Pour un espace i -acyclique X , on obtient :

THÉORÈME (11.2.1). – *Nous avons*

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d}.$$

THÉORÈME (11.3.1). – *Nous avons*

$$\frac{\mathcal{P}_c(BF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1, \dots, m} d^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{X_d},$$

où $\phi(_)$ la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ la fonction de Möbius, et h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_m de type $\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m})$.

0.11. Rangs de stabilité des familles $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$

Bien que d'après le théorème 0.8.3, on dispose d'une estimation automatique du *rang de stationnement* de la suite $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(F_m(M)/\mathcal{S}_m)\}_m$, le fait de disposer pour un espace i -acyclique X d'une formule explicite du caractère $\chi_c(F_m(X))$ (thm. 0.9.1), nous donne des informations plus précises sur la multiplicité de la représentation triviale de \mathcal{S}_m dans $H_c^i(F_m(X))$, ce qui permet une meilleure estimation du rang en question.

PROPOSITION (11.5.3). – *Soit X un espace i -acyclique tel que $\dim(H_c^{d_X}(X; \mathbb{Q})) \leq 1$. Pour $i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\text{Betti}^i(BF_m(X; \mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour tout $m \geq i$.*

Ce résultat s'étend ensuite à l'aide des suites spectrales basiques. La proposition suivante termine alors la section sur les question de stabilité.

THÉORÈME (11.7.1). – *Soit M un espace connexe et tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$. Soient $a, i \in \mathbb{N}$.*

(a) *La famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante pour*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 2a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + 2a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

(b) *La famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante pour*

$$m \geq \begin{cases} 2i + 4a, & \text{if } d_M = 2, \\ i + d_M a, & \text{if } d_M \geq 3. \end{cases}$$

0.12. La dégénérescence des suites spectrales de Leray

Pour $a, b \in \mathbb{N}$, notons $\pi_a : X^{b+a} \rightarrow X^a$ la projection sur les a dernières coordonnées. Sa restriction à $F_{b+a}(X)$ est la fibration $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ ⁽²³⁾ de fibres de la forme $X \setminus \mathbf{a}$ où \mathbf{a} désigne un sous-ensemble de X de cardinal a . Bien entendu, les espaces $X \setminus \mathbf{a}$ n'ont en général rien de canonique, cependant, et cela justifie une fois de plus l'intérêt dans les espaces i -acycliques, l'espace vectoriel gradué $H_c(X \setminus \mathbf{a})$ est bien intrinsèque (cf. sections 1.10, 1.11).

D'autre part, toujours lorsque X est i -acyclique, l'expression du polynôme de Poincaré compact dans 0.5.1 montre que l'on a

$$\mathcal{P}_c(F_{b+a}(X)) = \mathcal{P}_c(F_a(X)) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})).$$

Tout ceci suggère l'existence d'une certaine forme de trivialité cohomologique pour la fibration π_a . C'est en effet le cas et c'est le sujet de la section 12.

⁽²³⁾ Généralement non localement triviale, excepté lorsque X est une variété topologique connexe de dimension $d_X > 1$.

Notons, plus généralement $\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m$, pour $0 < a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, l'ouvert des m -uplets de $\Delta_{? \ell} X^m$ dont les a dernières coordonnées sont deux à deux distinctes, soit :

$$\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m := \Delta_{? \ell} X^m \cap (X^{m-a} \times F_a(X)).$$

La section 12.4 est consacrée à l'étude des suites spectrales de Leray associées à l'application $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$ dont la fibre au-dessus de $\bar{x} \in F_a(X)$ est $\Delta_{? \ell}(X^{m-a} \times \bar{x})$. Cela nous a amenés à nous intéresser aussi à la cohomologie à support π_a -propre que nous notons $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$, et aux faisceaux de cohomologie à support π_a -propre :

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m}).$$

Le principal résultat concernant ces faisceaux est le suivant.

THÉORÈME (12.3.2-(c)). – *Si X est i -acyclique, les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$ sont constants sur les composantes connexes de $F_a(X)$.*

À partir de là, l'étude des suites spectrales de Leray pour les cohomologies $H_c(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$ se simplifie et nous montrons le théorème suivant.

THÉORÈME (12.4.9). – *Soit X un espace i -acyclique. Pour $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, notons*

$$(\mathbb{E}_r) \quad (\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)_c, d_r) \text{ et } (\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)_{\pi!}, d_r)$$

les suites spectrales de Leray associées à $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$ qui convergent respectivement vers $H_c(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$ et $H_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)$. On a alors :

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)_c \sim H_c^p(F_a(X)) \otimes H_c^q(F) \Rightarrow H_c^{p+q}(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m), \\ \mathbb{E}_2(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m)_{\pi!} \sim H^p(F_a(X)) \otimes H_c^q(F) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{? \ell}^{[a]} X^m), \end{cases}$$

où F est une fibre quelconque de π_a .

Les suites spectrales (\mathbb{E}_r) sont dégénérées, i.e. $d_{r=0}$ pour tout $r \geq 2$.

0.13. Exemples et contre-exemples d'espaces i -acycliques

La section 13 est un appendice destiné à donner des exemples d'espaces i -acycliques, ainsi que des contre-exemples à certaines propriétés les concernant.

0.14. À propos des hypothèses

Lorsque nous avons commencé ce travail, nous nous sommes fixé comme objectif la généralisation des théorèmes de Church aux variétés algébriques complexes, car elles nous semblaient présenter suffisamment de propriétés favorables pour un tel projet. Comme ces propriétés étaient celles des pseudovariétés, nous nous sommes placés dans le contexte de ces dernières lors de la première rédaction de ce travail. Cependant, à posteriori, une telle restriction est quelque peu excessive, tout comme le rapporteur l'a lui même signalé. Ce travail, tel qu'il est présenté actuellement, s'applique aux espaces topologiques *dénombrables à l'infini, localement contractiles et localement compacts* (par exemple des CW-complexes, les espaces stratifiés et les pseudovariétés), des propriétés qui nous placent d'emblée dans un cadre très souple où cohomologies simpliciale, singulière et de faisceaux sont interchangeable. Ces restrictions répondent uniquement à un souci de souplesse, nous permettant d'utiliser librement les méthodes de l'une ou l'autre de ces théories. C'est un choix qui pourrait être raffiné jusqu'aux espaces *localement compacts*, ce que nous laissons aux soins du lecteur désireux de plus de généralité.

Pour les mêmes raisons, les anneaux de coefficients seront des corps k de caractéristique arbitraire, sauf dans les questions liées à la théorie des représentations des groupes symétriques, où il s'agira d'un corps de caractéristique nulle, en fait $k = \mathbb{Q}$ pour l'essentiel, ce qui garantit la semisimplicité des catégories de représentations.

0.15. D'autres approches

Lors de l'écriture de ce mémoire nous avons eu connaissance du travail de Dan Petersen [30] (2016) où il associe à un espace topologique stratifié une suite spectrale qui calcule l'homologie de Borel-Moore de l'espace en termes de celle de ses strates fermées. Dans le cas des espaces de configuration $F_m(M)$, il retrouve la suite spectrale de Getzler [19] (1996) qui généralise celle de Totaro ([34]) (1996) pour le plongement $F_m(M) \hookrightarrow M^m$, du cas où M est une variété différentielle au cas où M est générale. Petersen est alors en mesure de montrer, lorsque M est une variété algébrique complexe, que les FI-modules $\{H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$ sont de type fini. Leur stabilité en découle mais sans pour autant permettre d'obtenir des indications sur les rangs de monotonie et stabilité correspondants.

Le rapporteur souligne que Getzler, dans son travail non publié [20] (1995), avait déjà remarqué que puisque M^m était l'union des strates localement fermées \mathcal{S}_m -invariantes $\Delta_\ell M^m$, pour $\ell \leq m$, tout invariant additif sur les stratifications, comme la caractéristique d'Euler à support compact ou le polynôme de Hodge-Deligne, donne lieu à un système d'équations triangulaire supérieur reliant les valeurs de cet invariant sur $\{M^m\}_m$ et sur $\{F_m(X)\}_m$. Si cet invariant répond en outre à une formule de Künneth, après inversion de ce système, on obtient une expression (équivariante) pour l'invariant sur chaque espace $F_m(M)$ en fonction de sa valeur sur M . L'approche de Getzler pour $M^m = \bigcup_{1 \leq \ell \leq m} \Delta_\ell M^m$ coïncide alors avec la nôtre basée sur l'exactitude

du complexe fondamental de M pour M^m , auquel cas on obtient les formules pour le caractère de chaque groupe de cohomologie de $F_m(M)$ en termes de ceux de M^m . Autrement dit, dans le cas i -acyclique, en rajoutant un paramètre formel T dans les formules de Getzler, puis en développant les expressions résultantes, on devrait retrouver l'expression de $\chi_c(F_m(M))$ telle que donnée dans le théorème 10.5.3.

Conclusion. – Nous pensons que même s'il reste beaucoup de questions ouvertes, l'utilité des complexes fondamentaux en tant qu'outil d'approche combinatoire dans le cas des espaces i -acycliques, et l'utilité des suites spectrales basiques pour atteindre le cadre plus large des espaces localement compacts, devrait être clair d'après ce travail.

Remerciements. – À Dan Petersen pour l'intérêt particulier qu'il a manifesté pour notre travail dans [31], au rapporteur pour ses nombreuses remarques avisées, à Frances Cowell pour ses commentaires judicieux ayant contribué à améliorer ce travail.

CHAPITRE 1

ESPACES i -ACYCLIQUES

1.1. Généralités sur les espaces topologiques considérés

Dans ce travail, on appelle *espace*, noté M, N, X, Y, Z, \dots , tout espace topologique métrisable, localement contractile et localement compact dénombrable à l'infini. Des hypothèses garantissent aux cohomologies singulière, simpliciale et de faisceau de coïncider ⁽²⁴⁾. Les CW -complexes, les *pseudovariétés* ⁽²⁵⁾, et en particulier les variétés algébriques, constituent une large famille d'exemples de tels espaces ⁽²⁶⁾.

1.2. Cohomologies

On désignera par k un corps de caractéristique arbitraire sauf mention explicite du contraire. On note \underline{k}_X le faisceau constant sur X de fibre k , puis $\text{Mod}(\underline{k}_X)$ la catégorie des faisceaux de k -espaces vectoriels sur X . Les espaces de cohomologie respectivement : ordinaire, à support compact et à support dans une partie localement fermée $Z \subseteq X$, notés $H(X; k)$, $H_c(X; k)$, et $H_Z(X, k)$, sont les foncteurs dérivés des foncteurs de sections globales

$$\Gamma(X; _), \Gamma_c(X; _), \Gamma_Z(X; _) : \text{Mod}(\underline{k}_X) \rightarrow \text{Vec}(k).$$

On a donc

$$H^i(X; k) := \mathbb{R}^i \Gamma(X; \underline{k}_X), \quad H_c^i(X; k) := \mathbb{R}^i \Gamma_c(X; \underline{k}_X),$$

$$H_Z^i(X; k) := \mathbb{R}^i \Gamma_Z(X; \underline{k}_X).$$

L'indication du corps sera généralement omise dans les notations lorsque celui-ci est sous-entendu ou non essentiel à la compréhension des énoncés.

⁽²⁴⁾ Dans Bredon [8], chapitre III, Comparison with other cohomology theories.

⁽²⁵⁾ On rappelle qu'une pseudovariété est un espace connexe X , stratifié, de singularité X_{sing} de codimension ≥ 2 , et de partie régulière X_{reg} orientable. En particulier, le morphisme de prolongement par zéro $\iota_! : H_c^{d_X}(U) \rightarrow H_c^{d_X}(X)$ est un isomorphisme pour tout ouvert connexe $U \subseteq X_{\text{reg}}$.

⁽²⁶⁾ Dans Haefliger [6] (p. 1), et dans Borel [6], (V-§ 2.1, p. 60).

1.3. Résolution Φ -molle canonique

La résolution du faisceau constant \underline{k}_X de référence sera celle des faisceaux de « germes de cochaînes d'Alexander-Spanier de X »⁽²⁷⁾, noté $(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k), d_*)$. Les faisceaux $\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^i(X; k)$ sont Φ -mous pour toute famille paracompactifiante Φ (*loc. cit.*), ils sont donc $\Gamma(X, _)$, $\Gamma_c(X; _)$ et $\Gamma_Z(X, _)$ -acycliques. Le complexe des cochaînes d'Alexander-Spanier

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{k}_X \rightarrow \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^0(X; k) \xrightarrow{d_0} \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^1(X; k) \xrightarrow{d_1} \dots$$

est une résolution Φ -molle de \underline{k}_X et l'on a

$$\begin{aligned} H^i(X; k) &:= h^i(\Gamma(X; \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k))), & H_c^i(X; k) &:= h^i(\Gamma_c(X; \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k))), \\ H_Z^i(X; k) &:= h^i(\Gamma_Z(X; \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k))). \end{aligned}$$

1.3.1. – Notons $(\mathcal{K}(X), \subseteq)$ la famille des parties compactes $K \subseteq X$ munie de l'ordre d'inclusion. Le morphisme naturel en homologie singulière

$$\varinjlim_{K \in \mathcal{K}(X)} H_*(K; k) \xrightarrow{\simeq} H_*(X; k)$$

est un isomorphisme et induit par dualité l'isomorphisme en cohomologie ordinaires

$$H^*(X) \rightarrow \simeq \varprojlim_{K \in \mathcal{K}(X)} H^*(K)$$

qui fait correspondre à une classe de cohomologie $\omega \in H^*(X)$ la famille de ses restrictions $\{\omega|_K \in H^*(K)\}_{K \in \mathcal{K}(X)}$.

De manière duale, nous disposons pour chaque $K \in \mathcal{K}(X)$ d'un morphisme naturel en cohomologie $H_K^*(X) \rightarrow H_c^*(X)$. La limite inductive de ces morphismes

$$\varinjlim_{K \in \mathcal{K}(X)} H_K^*(X) \xrightarrow{\simeq} H_c^*(X)$$

est alors aussi un isomorphisme.

1.4. Suite exacte longue de cohomologies à support compact

Si $X = U \sqcup Z$ est une partition en parties respectivement ouverte et fermée, dont on note $j : U \rightarrow X$ et $\iota : Z \rightarrow X$ les inclusions, on dispose de la suite longue de cohomologie à support compact

$$(1) \quad \rightarrow H_c^{i-1}(Z) \rightarrow H_c^i(U) \xrightarrow{j^!} H_c^i(X) \xrightarrow{\iota^*} H_c^i(Z) \rightarrow H_c^{i+1}(U) \rightarrow \dots,$$

où $j^!$ est le « prolongement par zéro » et ι^* est le morphisme de « restriction ».

⁽²⁷⁾ Dans Godement [21], § 2.5, exemple 2.5.2, p. 134, puis § 3.7, exemple 3.7.1, p. 157.

1.5. Isomorphismes de Künneth

Si $p : X \times Y \rightarrow X$ et $q : X \times Y \rightarrow Y$ sont les projections canoniques, les morphismes

$$\boxtimes : \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^a(X; k) \otimes \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^b(Y; k) \rightarrow \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^{a+b}(X \times Y; k)$$

induits par le cup-produit de cochaînes $\boxtimes : \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \boxtimes \beta := p^*(\alpha) \cup q^*(\beta)$ induisent des morphismes gradués

$$H_c(X) \otimes H_c(Y) \xrightarrow[\simeq]{} H_c(X \times Y) \text{ et } H(X) \otimes H(Y) \xrightarrow[\simeq]{} H(X \times Y),$$

où le premier est un isomorphisme, et le second, toujours injectif, est bijectif lorsque l'une de cohomologies $H(X)$ ou $H(Y)$ est de dimension finie.

Le cup-produit en cohomologie résulte alors du morphisme de restriction à la diagonale, soit des composées

$$\begin{aligned} \cup : H(X) \otimes H(X) &\xrightarrow{\boxtimes} H(X \times X) \xrightarrow{\delta_X^*} H(\Delta_X), \\ \cup : H_c(X) \otimes H_c(X) &\xrightarrow{\boxtimes} H_c(X \times X) \xrightarrow{\delta_X^*} H_c(\Delta_X). \end{aligned}$$

1.6. Espaces i -acycliques et \cup -acycliques

1.7. i -acyclité

Pour tout espace X , on notera $\epsilon_X : H_c(X) \rightarrow H(X)$ le morphisme induit par l'inclusion $\Gamma_c(X; _) \subseteq \Gamma(X; _)$. L'image de ϵ_X dans $H(X)$, souvent notée $H_1(X)$, est appelée « cohomologie intérieure de X », on pose donc

$$H_1(X) := \text{im}(\epsilon_X : H_c(X) \rightarrow H(X)).$$

On dira que X est « i -acyclique » lorsque $H_1(X) = 0$.

1.8. (Totale) \cup -acyclité

Le plongement diagonal $\delta_X : \Delta_X \hookrightarrow X \times X$ induit des morphismes de restriction rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} H_c(X) \otimes H_c(X) & \xrightarrow[\simeq]{\boxtimes} & H_c(X \times X) & \xrightarrow{\delta_X^*} & H_c(\Delta_X) \\ \epsilon_X \downarrow \otimes \epsilon_X & & \epsilon_X \downarrow \times X & & \epsilon_X \downarrow \Delta_X \\ H(X) \otimes H(X) & \xrightarrow[\simeq]{\boxtimes} & H(X \times X) & \xrightarrow{\delta_X^*} & H_c(\Delta_X). \end{array}$$

On dira que X est « \cup -acyclique » lorsque $\delta_X^* : H_c(X \times X) \rightarrow H_c(\Delta_X)$ est nul, autrement dit, lorsque le cup-produit $\cup : H_c(X) \otimes H_c(X) \rightarrow H_c(X)$ est nul.

Plus généralement, on dira que X est « totalement \cup -acyclique » lorsque le cup-produit $\cup : H_c(X) \otimes H_c(U) \rightarrow H_c(U)$ est nul pour tout ouvert $U \subseteq X$.

1.8.1. Premières propriétés d'espaces i -acycliques. – La condition d' i -acyclicité est une condition de non compacité, aussi, son étude nous place d'emblée en opposition aux espaces compacts.

- PROPOSITION 1.8.2. – (a) *Un espace contractile non compact est i -acyclique.*
 (b) *i -acyclique \Rightarrow totalement \cup -acyclique.*
 (c) *Sur une variété topologique orientable, i -acyclique $\Leftrightarrow \cup$ -acyclique⁽²⁸⁾.*
 (d) *Un ouvert U d'un espace i -acyclique X , est i -acyclique. Et de même en remplaçant i -acyclique par totalement \cup -acyclique.*
 (e) *Un produit cartésien $X \times Y$ est i -acyclique si et seulement si l'un des facteurs l'est.*

Démonstration. – (a) Comme X est contractile, $H^i(X) = 0$ pour $i > 0$ et comme X est connexe non-compacte $H_c^0(X) = 0$, dans tous les cas $H_1^i(X) = 0$.

(b) Si ω et ϖ sont des cocycles à support compact d'un espace i -acyclique, on a $\omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α (à support fermé), mais alors $\omega \cup \varpi = d\alpha \cup \varpi = d(\alpha \cup \varpi)$ où $\alpha \cup \varpi$ est clairement à support compact.

(c) Supposons que pour $\omega \in H_c(X)$ on ait $\epsilon_X(\omega) \neq 0$. Il existe alors, par dualité de Poincaré, une classe $\varpi \in H_c(X)$ telle que $\int_X \omega \cup \varpi = 1$, mais alors $\omega \cup \varpi \neq 0$ dans $H_c(X)$ et X n'est pas \cup -acyclique.

(d) Résulte du fait que $\epsilon_U : H_c(U) \rightarrow H(U)$ est la composée de

$$\begin{array}{ccc} H_c(U) & \xrightarrow{\epsilon_U} & H(U) \\ \parallel & & \parallel \\ H_c(U) & \xrightarrow{j} H_c(X) \xrightarrow{\epsilon_X} H(X) \xrightarrow{r} & H(U), \end{array}$$

où j désigne le prolongement par zéro et r est le morphisme de restriction.

(e) La condition est suffisante d'après le factorisation de Künneth :

$$\begin{array}{ccc} H_c(X \times Y) & \xrightarrow{\epsilon_{X \times Y}} & H(X \times Y) \\ \parallel & & \uparrow \kappa \\ H_c(X) \otimes H_c(Y) & \xrightarrow{\epsilon_X \otimes \epsilon_Y} & H(X) \otimes H(Y), \end{array}$$

où $\kappa(\alpha \otimes \beta) = p_X^*(\alpha) \cup p_Y^*(\beta)$. La nécessité résulte de l'injectivité de κ . □

1.9. Caractérisations de la i -acyclicité

THÉORÈME 1.9.1. – *Pour un espace X , il y a équivalence entre*

- (a) *X est i -acyclique.*

⁽²⁸⁾ Voir 13.11, p. 221, pour un contre-exemple si la variété n'est pas orientable.

- (b) Pour tout espace Y et toute application continue $f : Y \rightarrow X$, le morphisme image-inverse $f^* : H_c(X) \rightarrow H(Y)$ est nul.
- (c) Pour tout espace compact K et toute application continue $f : K \rightarrow X$, le morphisme de restriction $f^* : H_c(X) \rightarrow H(K) = H_c(K)$ est nul.
- (d) Étant donnés Z et Y et une application continue $f : Z \rightarrow X \times Y$, notons $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$, $(x, m) \mapsto m$, puis $f_2 := p_2 \circ f$. Soit $j : V \hookrightarrow Y$ un plongement ouvert, notons $f'_2 : f^{-1}(V) \rightarrow V$ la restriction de f_2 , et considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & Z & \xrightarrow{f} & X \times Y \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & V & \hookrightarrow j & Y. \end{array}$$

Alors, si f et f'_2 sont propres et si $j_! : H_c(V) \rightarrow H_c(Y)$ est surjective, on a

$$(f^* : H_c(X \times Y) \rightarrow H_c(Z)) = 0.$$

Démonstration. – (a) \Leftrightarrow (b) Évident.

(a) \Leftrightarrow (c) Le morphisme $f^* : H_c(X) \rightarrow H(K)$ se factorise à travers ϵ_X puisque l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c(X) & \xrightarrow{f^*} & H_c(K) \\ \epsilon_X \downarrow & & \parallel \epsilon_K \\ H(X) & \xrightarrow{f^*} & H(K). \end{array}$$

L'implication (a) \Rightarrow (c) en résulte. Réciproquement, soit $(\mathcal{K}(X), \subseteq)$ l'ensemble des parties compactes de X , ordonné par inclusion. La famille des morphismes

$$H_c(X) \xrightarrow{\epsilon_X} H(X) \xrightarrow{(_) |_{\mathcal{K}}} H(K),$$

avec $K \in \mathcal{K}(X)$ induit alors un morphisme sur la limite projective

$$H_c(X) \xrightarrow{\epsilon_X} H(X) \xrightarrow[\simeq]{\varprojlim (_) |_{\mathcal{K}}} \varprojlim_{K \in \mathcal{K}(X)} H(K),$$

dont la composée est nulle lorsque (b) est vérifié. L'espace X est donc i -acyclique puisque le morphisme $\varprojlim (_) |_{\mathcal{K}}$ est bijectif (cf. section 1.3.1).

(a) \Rightarrow (d) Soient $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ la projection canonique et $f_1 := p_1 \circ f$. Pour (d), il suffit, par Künneth, de montrer que pour tous cocycles à support compact $\omega \in \mathcal{Z}_c(X)$ et $\varpi \in \mathcal{Z}_c(Y)$, le cocycle

$$(2) \quad f_1^* \omega \cup f_2^* \varpi \in \mathcal{Z}_c(Z)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support compact de Z .

Or, il existe par hypothèse $\tau \in \mathcal{Z}_c(V)$ qui représente ϖ dans $H_c(Y)$. On peut donc remplacer dans (2) $f_2^* \varpi$ par $f_2^* \tau$, et affirmer que $f_2^* \tau$ est à support compact dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans Z .

Cela étant, comme X est i -acyclique, on a $f_1^*\omega = d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de Z (à support non nécessairement compact), et alors

$$f_1^*\omega \cup f_2^*\tau = d(\alpha \cup f_2^*\tau),$$

où $\alpha \cup f_2^*\tau$ est une cochaîne à support compact de Z puisqu'il en est ainsi de $f_2^*\tau$. Par conséquent, $f^*(\omega \otimes \varpi) = 0 \in H_c(Z)$.

(d) \Rightarrow (c) Dans (d), on prend Z compact, $Y := \{\text{pt}\}$ et $V := Y$. \square

1.10. Complémentaires des parties finies d'un espace i -acyclique

Pour $a \in \mathbb{N}$, la notation « $X \setminus a$ » sera un raccourci pour « X privé de a points ». On rappelle qu'en dehors du cas où X est une variété topologique connexe de dimension > 1 , le type d'homéomorphie de $X \setminus a$ dépend des points qu'on enlève. Cependant, lorsque $H_c^0(X) = 0$, p.e. si X est i -acyclique, la suite

$$0 \rightarrow H_c(F)[-1] \rightarrow H_c(X \setminus F) \rightarrow H_c(X) \rightarrow 0$$

est exacte pour tout $F \subseteq X$ fini. La famille $\{\text{Betti}_c^i(X \setminus F)\}_{i \in \mathbb{N}}$, et donc le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(X \setminus F)$, seul dépend de X et de $\#F$.

1.11. Trivialité de la monodromie de $H_c(X \setminus a)$

Lorsque X est un espace i -acyclique, la remarque précédente peut être raffinée pour montrer l'existence d'une *action par monodromie* de $\Pi_1(F_a(X), \bar{x})$ sur $H_c(\pi_a^{-1}(\bar{x}))$ où $\pi_a : F_{1+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ est la projection sur les a dernières coordonnées, et ce, *même lorsque cette projection n'est pas localement triviale*. Pour le voir, considérons dans un premier temps le cas où $a = 1$.

Notons $\mathcal{K}(C)$ la famille des parties compactes connexes contenues dans une composante connexe C de X . Étant donné $z \in Z \in \mathcal{K}(C)$, on dispose, d'après 1.9.1-(c) du morphisme naturel de suites exactes courtes

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c^{i-1}(Z) & \longrightarrow & H_c^i(X \setminus Z) & \longrightarrow & H_c^i(X) \longrightarrow 0 \\ & & \rho(Z)_z \downarrow & & \rho(Z) \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H_c^{i-1}(z) & \longrightarrow & H_c^i(X \setminus z) & \longrightarrow & H_c^i(X) \longrightarrow 0, \end{array}$$

où le prolongement par zéro $\rho(Z)$ est bijectif en degrés cohomologiques $i \leq 1$ et induit pour $i \geq 2$ l'isomorphisme canonique :

$$\tilde{\rho}(Z)_z : \frac{H_c^i(X \setminus Z)}{H_c^{i-1}(Z)} \xrightarrow{\cong} H_c^i(X \setminus z), \quad \forall z \in Z.$$

Cette construction est naturelle par rapport à l'inclusion de compacts. Le système $(\mathcal{K}(C), \subseteq)$ étant inductif et filtrant, on déduit, pour $i > 1$, un isomorphisme *canonique*

$$H_c^i(X) = \varprojlim_{Z \in \mathcal{K}(C)} \frac{H_c^i(X \setminus Z)}{H_c^{i-1}(Z)} \xrightarrow{\cong} H_c^i(X \setminus x), \quad \forall x \in C.$$

L'isomorphisme

$$(4) \quad \phi(Z)_{y,x} := (\tilde{\rho}(Z)_y \circ \tilde{\rho}(Z)_x^{-1}) : H_c^i(X \setminus x) \rightarrow H_c^i(X \setminus y)$$

est donc indépendant du compact connexe $Z \supseteq \{x, y\} \subseteq C$.

Une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ détermine ainsi l'isomorphisme canonique

$$(5) \quad \phi_\gamma := \phi(\gamma([0, 1]))_{\gamma(1), \gamma(0)} = H_c(X \setminus \gamma(0)) \rightarrow H_c(X \setminus \gamma(1)),$$

qui seul dépend des extrémités de γ , car, en effet, si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de mêmes d'extrémités, on peut prendre $Z := \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1])$ dans (4). En particulier, si γ est un lacet, i.e. $\gamma(0) = \gamma(1)$, l'action par *monodromie le long de γ* est triviale.

Ces remarques se généralisent à tout $a \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 1.11.1. – *Pour $a \in \mathbb{N}$, soit $\pi_a : F_{1+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ la projection sur les dernières a coordonnées. Lorsque X est i -acyclique, il existe pour tout $\bar{x} \in F_a(X)$ une action par monodromie de $\Pi_1(F_a(X), \bar{x})$ sur $H_c(\pi_a^{-1}(\bar{x}))$. Cette action est triviale.*

Démonstration. – Commençons par justifier l'existence de l'action.

Soit $\bar{\gamma} := (\gamma_1, \dots, \gamma_a) : [0, 1] \rightarrow F_a(X)$ un chemin continu. Par compacité, il existe une famille finie $\mathcal{I} := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1\}$ telle que pour chaque $0 \leq s < r$ la famille $\{Z(s)_k := \gamma_k([t_s, t_{s+1}])\}_{1 \leq k \leq a}$, est constituée de parties compactes connexes deux à deux disjointes. Notons $Z(s) := \bigcup_k Z(s)_k$.

Reprenons le diagramme (3) pour $\bar{z} := \{z_k \in Z(s)_k\}_k$, on a

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c(Z(s))[-1] & \longrightarrow & H_c(X \setminus Z(s)) & \longrightarrow & H_c(X) \longrightarrow 0 \\ & & \rho(Z(s))_{\bar{z}} \downarrow & & \rho(Z(s)) \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_k H_c(z_k)[-1] & \longrightarrow & H_c(X \setminus \bar{z}) & \longrightarrow & H_c(X) \longrightarrow 0, \end{array}$$

où $\rho(Z(s))$ est un isomorphisme en degrés ≤ 1 et induit, pour $i \geq 2$, l'isomorphisme canonique :

$$\tilde{\rho}(Z(s))_{\bar{z}} : \frac{H_c^i(X \setminus Z(s))}{H_c^{i-1}(Z(s))} \xrightarrow{\cong} H_c^i(X \setminus \bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in Z(s)_1 \times \dots \times Z(s)_a,$$

d'où l'isomorphisme

$$\phi_s := \rho(Z(s))_{\bar{\gamma}(t_{s+1})} \circ \rho(Z(s))_{\bar{\gamma}(t_s)}^{-1} : H_c(X \setminus \bar{\gamma}(t_s)) \cong H_c(X \setminus \bar{\gamma}(t_{s+1})).$$

La composée des ϕ_s , dont on vérifie aisément qu'elle ne dépend que de $\bar{\gamma}$ et non pas de la famille \mathcal{I} , est notée

$$\phi_{\bar{\gamma}} : H_c(X \setminus \bar{\gamma}(0)) \rightarrow H_c(X \setminus \bar{\gamma}(1)).$$

Montrons, par induction sur a , que $\phi_{\bar{\gamma}}$ seul dépend des extrémités de $\bar{\gamma}$. Lorsque $a = 1$, c'est l'indépendance (5). Dans le cas où $a \geq 2$, notons $\bar{\gamma}' := (\gamma_1, \dots, \gamma_{a-1})$ le chemin dans $F_{a-1}(X)$. La naturalité de la construction de l'action par monodromie

donne lieu à un morphisme des suites courtes, extraites de suites longues de Mayer-Vietoris,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_c(X \setminus \bar{\gamma}(0)) & \longrightarrow & H_c(X \setminus \bar{\gamma}'(0)) \oplus H_c(X \setminus \gamma_a(0)) & \longrightarrow & H_c(X) \longrightarrow 0 \\ & & \phi_{\bar{\gamma}} \downarrow & & \phi_{\bar{\gamma}'} \downarrow & & \downarrow \phi_{\gamma_a} \quad \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H_c(X \setminus \bar{\gamma}(1)) & \longrightarrow & H_c(X \setminus \bar{\gamma}'(1)) \oplus H_c(X \setminus \gamma_a(1)) & \longrightarrow & H_c(X) \longrightarrow 0, \end{array}$$

où les lignes sont exactes puisque X est i -acyclique. Comme $\phi_{\bar{\gamma}'}$ et ϕ_{γ_a} seul dépendent de leurs extrémités par hypothèse de récurrence, il en est de même pour $\phi_{\bar{\gamma}}$.

En conclusion, lorsque $\bar{\gamma}$ est un lacet « l'action par monodromie le long de $\bar{\gamma}$ » est triviale. \square

1.11.2. Commentaire. – On verra dans la section consacrée aux suites spectrales de Leray associées à $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ (cf. remarque 12.3.3), que l'action par monodromie de $\Pi_1(F_a(X), \bar{x})$ sur $H_c(\pi_a^{-1}(\bar{x}))$ existe et est triviale plus généralement pour tout $b > 1$.

CHAPITRE 2

ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS

2.1. Définitions et notations

Nous rappelons quelques notations habituelles et introduisons d'autres nouvelles.

N-1) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et pour tout sous-ensemble $Z \subseteq X^m$, « l'ensemble de configuration généralisé dans Z pour le cardinal $\leq \ell$ (resp. $= \ell$) », est

$$\begin{cases} \Delta_{\leq \ell} Z := \{(z_1, \dots, z_m) \in Z \mid \text{Card}\{z_1, \dots, z_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} Z := \{(z_1, \dots, z_m) \in Z \mid \text{Card}\{z_1, \dots, z_m\} = \ell\}. \end{cases}$$

On remarquera que d'un point de vue strictement logique, on a $\Delta_{?0} X^0 = \{\text{pt}\}$, alors que, pour $m > 0$, cas implicite tout au long de ce travail, on a $\Delta_{?0} X^m = \emptyset$.

N-2) L'« espace de configurations à m éléments (ordonnés) de X » :

$$F_m(X) := \Delta_m X^m, \text{ si } m > 0, \quad F_0(X) = \{\text{pt}\}.$$

N-3) Pour $Z \subseteq X^m$, et $0 < a \in \mathbb{N}$, on note

$$Z^{[a]} := Z \cap (X^{m-a} \times F_a(X)) = \{(z_1, \dots, z_m) \in Z \mid \text{Card}\{z_{m-a+1}, \dots, z_m\} = a\}.$$

N-4) Pour $0 < a \leq m \in \mathbb{N}$, on note

$$\pi_a = X^m \rightarrow X^a, \quad (\text{resp. } p_a = X^m \rightarrow X^a)$$

la projection sur les a dernières coordonnées $\pi_a(\bar{x}) := (x_{m-a+1}, \dots, x_m)$ (resp. les a premières coordonnées $(\bar{x}) := (x_1, \dots, x_a)$). Les restrictions de π_a seront notées par abus de la même manière, par exemple dans l'écriture, pour $m \geq a$ et $Z \subseteq X^m$,

$$\pi_a : Z^{[a]} \rightarrow F_a(X).$$

2.1.1. Abréviation de notations. – La notation $\Delta_{? \ell}$ désignera l'un quelconque des opérateurs $\Delta_{\leq \ell}$ ou Δ_{ℓ} .

Lorsque la référence à l'espace est superflue et sous-entendue elle pourra être omise dans les notations. Ainsi, ' $\Delta_{2\ell}^m$ ' et ' F_m ' désigneront respectivement $\Delta_{? \ell} X^m$ et $F_m(X)$.

2.1.2. Topologie et caractéristique d'Euler-Poincaré. – Lorsque X est un espace topologique, X^m est muni de la topologie produit et tout $Z \subseteq X^m$ de la topologie induite. Pour $\ell, m \in \mathbb{N}$, et $Z \subseteq X^m$, l'espace $\Delta_{\leq \ell} Z$ admet la décomposition ouverte/fermée $\Delta_{\leq \ell} Z = \Delta_{\ell} Z \sqcup \Delta_{\leq \ell-1} Z$, d'où la suite exacte longue de cohomologie à support compact que l'on rencontrera fréquemment dans ce travail

$$\cdots \rightarrow H_c^*(\Delta_{\ell} Z) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} Z) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell-1} Z) \rightarrow \cdots .$$

Dans le cas où $Z = X \times F_{m-1}(X)$ et $\ell = m$, on obtient

$$\cdots \rightarrow H_c^*(F_m(X)) \rightarrow H_c^*(X \times F_{m-1}(X)) \rightarrow H_c^*(\Delta_{m-1}(X \times F_{m-1}(X))) \rightarrow \cdots ,$$

où $\Delta_{m-1}(X \times F_{m-1}(X))$ est la réunion disjointe de $m-1$ copies de $F_{m-1}(X)$, ce qui permet une récurrence pour la détermination de la caractéristique d'Euler-Poincaré de $F_m(X)$. La proposition suivante en découle aussitôt.

PROPOSITION (4.2.1). – *Supposons $\dim(H_c(X)) < +\infty$ et notons $\chi_c(F_m(X))$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de la cohomologie à support compact de $F_m(X)$. Alors,*

$$\chi_c(F_m(X)) = \prod_{i=0}^{m-1} (\chi(X) - i).$$

Et la série génératrice

$$\sum_{m \geq 0} \chi_c(F_m(X)) \frac{t^m}{m!} = (1+t)^{\chi_c(X)}.$$

REMARQUE 2.1.3. – On trouve cette série déjà dans Félix-Thomas ([15], 2000) pour la cohomologie ordinaire et lorsque X est une variété topologique orientable de dimension paire (cas auquel $\chi_c(X) = \chi(X)$).

2.2. Fibrations des espaces de configuration généralisés

La proposition suivante est une extension (modeste) du théorème de trivialité locale de la projection $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ de Fadell-Neuwirth ([14]), elle nous a servi dans l'élaboration de la section 12.2 où l'hypothèse de lissité sur X s'est avérée superflue *a posteriori*.

PROPOSITION 2.2.1. – *Si X une variété topologique et $a \leq \ell \leq m$, l'application*

$$\pi_a : \Delta_{\ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$$

est une fibration localement triviale.

Démonstration. – Soit G le groupe des homéomorphismes $\phi : X \rightarrow X$ dont le support $|\phi| := \overline{\{x \in X \mid \phi(x) \neq x\}}$ est compact. Soit $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une distance. Munissons G de la distance $d_G(\phi, \phi') := \sup_{x \in X} d_X(\phi(x), \phi'(x))$. Le groupe G , muni de la topologie associée à d_G , est un groupe topologique et pour chaque $x \in X$, l'application d'évaluation $\text{ev}_x : G \rightarrow X$, $\phi \mapsto \phi(x)$, est continue.

Pour $\bar{x} \in F_a$, notons $\mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon)$ le produit des boules ouvertes $\prod_{i=1}^a \mathbb{B}(x_i, \epsilon)$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a $\mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon) \subseteq F_a$ et l'application $\prod \text{ev}_{x_i} : G \rightarrow F_a$ admet des sections locales continues $\sigma : \mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon) \rightarrow G$, soit

$$\sigma(\bar{y})(\bar{x}) = \bar{y}, \quad \mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon) \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma} \\ \searrow \subseteq \end{array} G \xrightarrow{\prod \text{ev}_{x_i}} F_a.$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon) \times \pi_a^{-1}(\bar{x}) &\rightarrow \pi_a^{-1}(\mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon)) \subseteq \Delta_{\leq \ell}^{[a]} X^m, \\ \bar{y} \times \bar{w} &\mapsto \sigma(\bar{y})(\bar{w}) \end{aligned}$$

avec $\bar{w} = (\bar{x}, x_{a+1}, \dots, x_m)$ et $\sigma(\bar{y})(\bar{w}) = (\bar{y}, \sigma(\bar{y})(x_{a+1}), \dots, \sigma(\bar{y})(x_m))$ est alors un homéomorphisme et une trivialisaton de π_a au-dessus de $\mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon)$.

De manière entièrement analogue, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon) \times \pi_a^{-1}(\bar{x}) &\rightarrow \pi_a^{-1}(\mathbb{B}(\bar{x}, \epsilon)) \subseteq F_{b+a}(X) \\ \bar{y} \times \bar{w} &\mapsto \sigma(\bar{y})(\bar{w}) \end{aligned}$$

est une trivialisaton locale de π_a . La fibre $\pi_a^{-1}(\bar{x})$ est canoniquement homéomorphe au sous-espace $F_b(X \setminus \bar{x}) \subseteq X^b$. \square

2.2.2. Remarque à propos des fibres de π_a . – Si X est une variété topologique connexe de dimension ≥ 2 , il existe des homéomorphismes $\phi : X \rightarrow X$ tels que $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$, et les fibres de $\pi_a : \Delta_{\leq \ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a$ sont deux à deux homéomorphes (cf. section 1.10). Mais si X n'est pas connexe, cette propriété peut faire défaut. Par exemple, si $X = U \sqcup V$ est une réunion disjointe d'ouverts non vides, les fibres de $\pi_2 : F_3(X) \rightarrow F_2(X)$ en $(x, y) \in F_2(X)$ sont de la forme :

$$U \setminus \{x, y\} \sqcup V, \quad U \sqcup V \setminus \{x, y\}, \quad U \setminus \{x\} \sqcup V \setminus \{y\}$$

suivant que $(x, y \in U)$, que $(x, y \in V)$, ou que $(x \in U$ et $y \in V)$.

Il est facile de trouver des exemples pour U et V tels que, non seulement il n'y a pas d'homéomorphisme entre ces trois types de fibres, mais il n'y a pas, non plus, d'isomorphisme entre leurs cohomologies. Lorsque X est i -acyclique et que $\dim(H_c(X)) < \infty$, la situation change et les nombres de Betti compacts des fibres sont constants.

Par exemple, si $U = \mathbb{R}^2$ et $V = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$, on a $H_*(\pi_1^{-1}(u, v)) = k(0)^2 \oplus k(1)^3$ quel que soit (u, v) . Dans ce cas, les algèbres de cohomologie à support compact $H_c(\pi_1^{-1}(u, v))$ sont isomorphes (car *cup-produit* nul (cf. 1.8.2)), mais pas les algèbres de cohomologie ordinaire qui valent

$$\begin{cases} H(U \setminus \{u, v\}) \oplus H(V) = \frac{k[X, Y]}{(X, Y)^2} \oplus \frac{k[Z]}{(Z)^2} \\ H(U) \oplus H(V \setminus \{u, v\}) = k \oplus \frac{k[X, Y, Z]}{(X, Y, Z)^2} \end{cases}$$

et où l'on remarque que dans la première $\text{Annul}_{H^0}(H^1) = 0$, tandis que dans la seconde $\text{Annul}_{H^0}(H^1) = k \cdot (1, 0)$.

Tout ceci indique que même lorsque X est une variété topologique i -acyclique, les fibres des faisceaux localement constants :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a!} \underline{k}_{\Delta_{\ell}^{[a]} X^m} \\ \mathcal{H}_{\pi*}^i(\Delta_{\ell}^{[a]} X^m) := \mathbb{R}^i \pi_{a*} \underline{k}_{\Delta_{\ell}^{[a]} X^m}, \end{cases}$$

respectivement $H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ et $H(\pi_a^{-1}\bar{x})$ (en dualité), ont peu de chances d'être les mêmes sur $F_a(X)$ tout entier. On verra dans la section 12.3, consacrée à leur étude, que ces faisceaux sont en fait constants sur toute composante connexe de $F_a(X)$, lorsque X est i -acyclique (cf. comm. 1.11.2 et th. 12.3.2-(c)).

2.3. Sous-espaces $F_{\mathfrak{p}}(X)$ et décomposition de $\Delta_{\ell} X^m$

2.3.1. Partitions d'un ensemble. – Pour tout ensemble E et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_{\ell}(E)$ l'ensemble des *partitions* de E en ℓ parties non vides. On pose ensuite $\mathfrak{P}(E) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}_{\ell}(E)$.

Une partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ définit une relation d'équivalence ' $\sim_{\mathfrak{p}}$ ' sur E par

$$(x \sim_{\mathfrak{p}} y) \Leftrightarrow (\exists I \in \mathfrak{p})(\{x, y\} \subseteq I).$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{P}_{\ell}(m) := \mathfrak{P}_{\ell}(\llbracket 1, m \rrbracket)$.

2.3.2. Les sous-espaces $F_{\mathfrak{p}}(X)$. – Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)$, on notera $F_{\mathfrak{p}}(X)$ l'ensemble des m -uplets (x_1, \dots, x_m) tels que $(x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \sim_{\mathfrak{p}} j)$.

PROPOSITION 2.3.3. – *Pour $0 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, on a la décomposition en parties ouvertes :*

$$(1) \quad \Delta_{\ell} X^m = \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)} F_{\mathfrak{p}}(X)$$

(cf. notation 2.1-N-2) où $F_{\mathfrak{p}}(X) \simeq F_{\ell}(X)$. En particulier,

$$H_c(\Delta_{\ell} X^m) = H_c(F_{\ell}(X))^{|\mathfrak{P}_{\ell}(m)|},$$

où le nombre $|\mathfrak{P}_{\ell}(m)|$ est le nombre de Stirling de seconde espèce (cf. 14.4) :

$$|\mathfrak{P}_{\ell}(m)| = \left\{ \begin{matrix} m \\ \ell \end{matrix} \right\} := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m.$$

De plus,

(a) Notons $\{C_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ la famille des composantes connexes de X . On a la décomposition en parties ouvertes

$$F_{\ell}(X) = \prod_{\epsilon: \llbracket 1, \ell \rrbracket \rightarrow \mathfrak{A}} F(C_{\epsilon(1)} \times \dots \times C_{\epsilon(\ell)}) = \prod_{\epsilon: \llbracket 1, \ell \rrbracket \rightarrow \mathfrak{A}} \left(\prod_{\alpha \in \text{im}(\epsilon)} F_{|\epsilon^{-1}(\alpha)|}(C_{\alpha}) \right).$$

- (b) Si X est une variété topologique connexe de dimension > 1 , l'espace $F_{\ell}(X)$ est connexe et la décomposition (1) est la décomposition de $\Delta_{\ell} X^m$ en composantes connexes.

Démonstration. – Élémentaire, laissée aux soins du lecteur. \square

2.4. Dimension et finitude cohomologique de $\Delta_{\ell} X^m$

DÉFINITION 2.4.1. – Soit X un espace topologique. Notons $\mathcal{D}_k(X; k)$ l'ensemble des $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout ouvert $U \subseteq X$, on ait $H_c^i(U; k) = 0$, $\forall i > d$.

Si $\mathcal{D}_k(X; k) = \emptyset$, on dit que X est de dimension (cohomologique) infinie (sur k) et l'on pose $d_X := \dim(X) = +\infty$ (cf. [6] V, def. 1.15, p. 55). Autrement, X est dit de dimension (cohomologique) finie (sur k), et sa dimension est le nombre

$$d_X := \dim(X) =_{\text{def}} \inf(\mathcal{D}_k(X; k)).$$

PROPOSITION 2.4.2. – Soient $0 \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Si X est respectivement localement compact, localement connexe (par arcs), localement contractile, il en est de même des espaces $\Delta_{\ell} X^m$. De plus,

- (a) Le sous-complexe $(\underline{\Omega}_X^{\bullet}, d_{\bullet}) := \tau_{\leq d_X}(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^{\bullet}(X; k), d_*)$ du complexe des germes de chaînes d'Alexander-Spanier, à savoir

$$\underline{\Omega}_X^i = \begin{cases} \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^i(X; k), & \text{si } i < d_X, \\ \underline{\ker}(d_{d_X}), & \text{si } i = d_X, \\ 0, & \text{si } i > d_X \end{cases}$$

est une résolution c -molle de \underline{k}_X .

Pour toute partie $Y \subseteq X$ localement fermée, les complexes $\Gamma(Y; (\underline{\Omega}_X^{\bullet}, d_{\bullet}))$ et $\Gamma_c(Y; (\underline{\Omega}_X^{\bullet}, d_{\bullet}))$ calculent respectivement $H(Y; k)$ et $H_c(Y; k)$.

- (b) On a $\dim(\Delta_{\ell} X^m) = \ell d_X$.
(c) Si $\dim_k H_c(X; k) < \infty$, alors $\dim_k H_c(\Delta_{\ell} X^m; k) < \infty$.

Indication. – Les assertions préliminaires concernant la structure locale sont immédiates pour X^m , puis pour $F_m(X)$ car ouvert dans X^m , et alors pour $\Delta_{\ell} X^m$ d'après la décomposition 2.3.3-(1). Le cas de $\Delta_{\leq \ell} X^m$ résulte de la même décomposition qui montre qu'il est réunion finie des fermés $\overline{F_p}(X)$, tous homéomorphes à X^{ℓ} .

(a) Voir [6] V, S 1.14 (p. 55) ou [25] exercice II.9 (p. 132).

(b) De $\dim(X^m) = m d_X$, on tire $\dim(F_m(X)) \leq m d_X$, et donc $\dim(\Delta_{\ell} X^m) \leq \ell d_X$. Ensuite, U est un ouvert de $\Delta_{\leq \ell} X^m$, la suite longue de cohomologie à support compact

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_c^{i-1}(U \cap \Delta_{\leq \ell-1} X^m) \rightarrow H_c^i(U \cap \Delta_{\ell} X^m) \rightarrow H_c^i(U) \rightarrow \dots$$

et un raisonnement inductif sur $\ell \geq 0$ permettent de voir que l'on a

$$(3) \quad \dim(\Delta_{\leq \ell} X^m) \leq \ell d_X.$$

L'assertion (b) en découle aussitôt lorsque $d_X = 0$. Lorsque $d_X \geq 1$, on fait une récurrence sur m . Les cas où $m \leq 1$ étant triviaux, soit $m \geq 2$, et supposons l'assertion établie pour $m - k$, pour $k > 0$. Faisons alors une récurrence sur $\ell \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

Les cas $\ell \leq 1$ étant triviaux, soit $1 < \ell < m$. On a $\dim(\Delta_\ell X^m) = \dim(F_\ell(X)) = \ell d_X$ par hypothèse inductive, et comme $\dim(\Delta_\ell X^m) \leq \dim(\Delta_{\leq \ell} X^m)$, on conclut que $\dim(\Delta_{\leq \ell} X^m) = \ell d_X$ grâce à (3).

Enfin, pour $\ell = m$, on a clairement

$$\dim(F_m(X)) = \dim(\Delta_m X^m) \leq \dim(\Delta_{\leq m} X^m) = \dim(X^m) = m d_X$$

et l'assertion (b) découlera du fait de trouver un ouvert $W \subseteq F_m(X)$ tel que $H_c^{m d_X}(W) \neq 0$.

Or, soit U un ouvert de X^m tel que $H_c^{m d_X}(U) \neq 0$, et posons

$$W := U \cap F_m(X) \text{ et } F := U \cap \Delta_{m-1} X^m.$$

La suite exacte longue associée à la décomposition ouverte/fermée $U = W \sqcup F$ autour du degré $m d_X$ est

$$\rightarrow H_c^{m d_X - 1}(F) \rightarrow H_c^{m d_X}(W) \rightarrow H_c^{m d_X}(U) \rightarrow H_c^{m d_X}(F) \rightarrow,$$

(≠0) (≠0)

où $H_c^{m d_X}(F) = 0$ puisque F est un ouvert de l'espace $\Delta_{m-1} X^m$ dont on sait qu'il est de dimension $(m - 1)d_X$. L'exactitude de la suite implique alors que $H_c^{m d_X}(W) \neq 0$.

(c) On raisonne par induction sur ℓ . Si $\ell \leq 1$, l'assertion est claire, quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Dans le cas général, on suppose la proposition établie pour $\ell - 1$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Par la suite exacte longue (cf. 2.1.2)

$$\rightarrow H_c^*(\Delta_\ell X^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell - 1} X^m) \rightarrow,$$

on a $\dim H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) < +\infty$ si et seulement si $\dim H_c(\Delta_\ell X^m) < +\infty$, donc, si et seulement si $\dim H_c(F_\ell(X)) < +\infty$ (proposition 2.3.3). Or, l'utilisation de la suite exacte longue

$$\rightarrow H_c^*(F_\ell(X)) \rightarrow H_c^*(X)^{\otimes \ell} \rightarrow H_c^*(\Delta_{\leq \ell - 1} X^\ell) \rightarrow,$$

associée à la décomposition $X^\ell = F_\ell(X) \sqcup \Delta_{\leq \ell - 1} X^\ell$, montre qu'une condition suffisante pour $\dim H_c(F_\ell(X)) < +\infty$ est que $\dim H_c(\Delta_{\leq \ell - 1} X^\ell) < +\infty$, ce qui fait partie de l'hypothèse inductive. \square

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE SCINDAGE ET COMPLEXES FONDAMENTAUX

3.1. Théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$

Dans ce travail, en parlant d'une suite exacte longue, on dira qu'elle est « scindée » lorsque un morphisme sur trois est nul. La suite exacte longue se scinde alors en une famille dénombrable de suites exactes courtes. Par exemple,

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \longrightarrow & C^{-1} & \xrightarrow{(0)} & C^0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & C^2 & \xrightarrow{(0)} & C^3 & \longrightarrow & C^4 & \longrightarrow & C^5 & \xrightarrow{(0)} & C^6 & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \twoheadrightarrow & C^{-1} & & C^0 & \twoheadrightarrow & C^1 & \twoheadrightarrow & C^2 & & C^3 & \twoheadrightarrow & C^4 & \twoheadrightarrow & C^5 & & C^6 & \twoheadrightarrow & \dots \end{array}$$

Le théorème suivant donne deux scindages de suites longues de cohomologie à support compact qui ont motivé notre intérêt pour les espaces i -acycliques. Nous verrons que de tels scindages sont intimement liés à la dégénérescence des suites spectrales de Leray (cf. section 12.3.2) pour les surjections $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$ introduites dans la section 2.2.

THÉORÈME 3.1.1 (de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$). – (a) *Soit X un espace i -acyclique. Pour $m \in \mathbb{N}$, le morphisme de restriction*

$$(1) \quad H_c(X \times F_m(X)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq m}(X \times F_m(X)))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition ouverte/fermée $X \times F_m = (F_{m+1}(X)) \sqcup (\Delta_{\leq m}(X \times F_m))$ est scindée en suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_c(F_m(X))[-1]^m \rightarrow H_c(F_{m+1}(X)) \rightarrow H_c(X \times F_m(X)) \rightarrow 0.$$

(b) *Soit X un espace i -acyclique. Pour $0 < \ell \leq m \in \mathbb{N}$, le morphisme de restriction*

$$(2) \quad H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} X^m)$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition ouverte/fermée $\Delta_{\leq \ell} X^m = (\Delta_{\ell} X^m) \sqcup (\Delta_{\leq \ell-1} X^m)$ est scindée en suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} X^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell} X^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow 0.$$

- (c) Soit X une variété topologique orientable. L'annulation des morphismes (1) pour tout m (resp. des morphismes (2) pour tous $\ell \leq m$) équivaut à la i -acyclicité de X .

Démonstration. – (a) L'ensemble $\Delta_{\leq m}(X \times F_m)$ est celui des $(m+1)$ -uplets d'éléments de X de la forme (y, x_1, \dots, x_m) avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et où $y \in \{x_1, \dots, x_m\}$. On comprend donc que dans le diagramme commutatif (d'après la convention 2.1.1)

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leq m}(X \times F_m) & \hookrightarrow & f \rightarrow X \times F_m \\ & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & F_m, \end{array}$$

où f est l'inclusion fermée, l'application $f_2 := p_2 \circ f$ est un revêtement trivial à m nappes. Les hypothèses de 1.9.1-(d) sont donc vérifiées et le morphisme (1) est nul.

(b) Si $\ell = 1$, on a $\Delta_{\leq 1}^m \simeq X$ et $\Delta_{\leq 0}^m = \{\text{pt}\}$, donc (2) est immédiate. Nous sommes alors réduits aux cas où $\ell > 1$. On raisonne par récurrence pour $m \geq 2$. Supposons l'assertion établie pour $(m-1)$, et soit $1 < \ell \leq m$. Par la factorisation d'inclusions : $\Delta_{\leq \ell-1}^m \subseteq X \times \Delta_{\leq \ell-1}^{m-1} \subseteq \Delta_{\leq \ell}^m$, l'assertion résulte de montrer que le morphisme de restriction $H_c(X \times \Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1})$ est nul. On considère pour cela le diagramme commutatif suivant, où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte),

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}) & \hookrightarrow & \Delta_{\leq \ell-1}^m & \hookrightarrow & f \rightarrow X \times \Delta_{\leq \ell-1}^{m-1} \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & \Delta_{\leq \ell-1}^{m-1} & \hookrightarrow & j \rightarrow \Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}. \end{array}$$

La restriction f'_2 de $f_2 := p_2 \circ f$ est une application propre. En effet, $f_2^{-1}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1})$ est l'ensemble des m -uplets $(y, x_1, \dots, x_{m-1}) \in \Delta_{\leq \ell-1}^m$ tels que $\#\{x_1, \dots, x_{m-1}\} = \ell - 1$ et $y \in \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$, de sorte que f'_2 est une fibration trivial à $\ell - 1$ nappes au-dessus de chaque composante ouverte F_p de $\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}$ (proposition 2.3.3-(b)). Comme $\ell - 1 \geq 1$ le morphisme $j_i : H_c(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1})$ est surjectif par hypothèse de récurrence. Ainsi, les conditions d'application de 1.9.1-(d) sont vérifiées, $f^* = 0$, et donc (2) est nul aussi.

(c) En prenant $m = 1$ dans (a), ou $m = \ell = 2$ dans (b), l'espace X est \cup -acyclicque donc i -acyclicque d'après la proposition 1.8.2-(c). \square

3.1.2. Remarques sur le théorème de scindage

- (a) Les preuves des assertions 3.1.1-(a) et (b) montrent aussi l'exactitude des suites courtes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_c(\Delta_m Z)[-1]^m &\rightarrow H_c(\Delta_{m+1}(X \times \Delta_m Z)) \rightarrow H_c(X \times \Delta_m Z) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} Z)[-1] &\rightarrow H_c(\Delta_\ell Z) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} Z) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

avec $Z \subseteq X^m$ de la forme $Y_1 \times \dots \times Y_m$ où les Y_i sont des sous-espaces i -acyclicques de X tels que l'ensemble $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ est totalement ordonné par inclusion.

- (b) (Remarque relative à 3.3.2.) Dans 3.1.1-(b) l'hypothèse $\ell \leq m$ est indispensable. En effet, lorsque $\ell > m$, on a $\Delta_{\leq \ell-1} X^m = \Delta_{\leq \ell} X^m = X^m$ et le morphisme (2) est l'identité. Dans un tel cas, on a aussi $\Delta_{\ell-1}^{m-1} = \emptyset$ et l'argument à la fin de la démonstration précédente, basé sur la surjectivité de j_i , ne s'applique pas.

REMARQUE 3.1.3 (et corollaire). – Notons \mathring{X} le complémentaire dans X d'un singleton $\{\bullet\}$. Lorsque X est i -acyclique, il en est de même de \mathring{X} et nous avons grâce à 3.1.1-(a) un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_c(F_m(\mathring{X}))[-1]^m & \rightarrow & H_c(F_{m+1}(\mathring{X})) & \rightarrow & H_c(\mathring{X}) \otimes H_c(F_m(\mathring{X})) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H_c(F_m(X))[-1]^m & \rightarrow & H_c(F_{m+1}(X)) & \rightarrow & H_c(X) \otimes H_c(F_m(X)) & \rightarrow & 0, \end{array}$$

qui permet de montrer, par induction sur $m \geq 1$, que le prolongement par zéro $H_c(F_m(\mathring{X})) \rightarrow H_c(F_m(X))$ est un morphisme surjectif.

Notons aussi que l'on a

$$F_m(X) \setminus F_m(\mathring{X}) = \left(\coprod_{i=1, \dots, m} F_m^{x_i=\bullet}(X) \right) =: F_m^\bullet(X),$$

où $F_m^{x_i=\bullet}(X)$ est l'ensemble des $\bar{x} \in F_m(X)$ avec $x_i = \bullet$. On a $F_m^{x_i=\bullet}(X) \simeq F_{m-1}(\mathring{X})$.

Le espace $F_m(X) \setminus F_m(\mathring{X})$ se voit alors comme réunion disjointe fermée de m copies de $F_{m-1}(\mathring{X})$. On a ainsi montré le corollaire (utilisé dans 10.6.1).

COROLLAIRE. – *Soit X un espace i -acyclique.*

La suite de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$0 \rightarrow H_c(F_m^\bullet(X))[-1] \rightarrow H_c(F_m(\mathring{X})) \rightarrow H_c(F_m(X)) \rightarrow 0$$

est exacte.

3.1.4. À propos des différentes hypothèses d'acyclicité. – Dans le théorème de scindage 3.1.1, l'hypothèse d' i -acyclicité n'est pas optimale même lorsque X est une variété topologique. En effet, nous verrons dans 13.11 que la bouteille de Klein époincée vérifie les scindages (a) et (b) alors qu'elle n'est pas i -acyclique. On y montre aussi qu'elle n'est pas totalement \cup -acyclique (cf. section 1.6), mais qu'elle est \cup -acyclique. En somme, la i -acyclicité est une condition suffisante et la \cup -acyclicité est une condition nécessaire, mais en dehors du cas où X est une variété topologique orientable, nous ne connaissons pas de condition sur X équivalente aux scindages. Nous verrons cependant, plus loin, que la condition de i -acyclicité est bien nécessaire et suffisante pour la localisation des scindages (cf. section 12.2.4), ce qui conforte l'idée que la i -acyclicité est la bonne hypothèse de travail.

3.2. Complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$

3.2.1. Action du groupe symétrique. – L'espace X^m est muni de l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_m par permutation des coordonnées. On pourra noter cette action par ' $\mathcal{S}_m : X^m$ ', et de même pour les sous-espaces \mathcal{S}_m -stables $Z \subseteq X^m$, leurs cohomologies $\mathcal{S}_m : H_c^i(Z)$, $\mathcal{S}_m : H^i(Z)$, etc. Les espaces de configuration généralisés $\Delta_{\geq \ell} X^m$ et leurs cohomologies sont considérés munis de cette action de \mathcal{S}_m .

DÉFINITION 3.2.2. – Pour $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, le complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$ est, par définition, la suite des morphismes de \mathcal{S}_m -modules gradués

$$(3) \quad 0 \rightarrow H_c(1)[- \ell + 1] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\ell - 1)[-1] \rightarrow H_c(\ell) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow 0,$$

avec $H_c(a) := H_c(\Delta_a X^m)$, où le morphisme $H_c(a - 1)[-1] \rightarrow H_c(a)$ est la composée

$$H_c(\Delta_{a-1}^m)[-1] \xrightarrow{\iota_{a-1}[-1]} H_c(\Delta_{\leq a-1}^m)[-1] \xrightarrow{c_a} H_c(\Delta_a^m),$$

où ι_{a-1} est le prolongement par zéro et c_a est le morphisme de liaison de la suite longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $\Delta_{\leq a}^m = \Delta_a^m \sqcup \Delta_{\leq a-1}^m$.

La suite (3) est un complexe de \mathcal{S}_m -modules puisque, par construction, $\iota_a \circ c_a = 0$.

THÉORÈME 3.2.3. – (a) Les complexes fondamentaux d'un espace i -acyclique sont exacts.

(b) Une variété topologique orientable est i -acyclique si et seulement si ses complexes fondamentaux sont exacts.

Démonstration. – (a) Immédiat d'après 3.1.1-(b), et (b) s'ensuit par 3.1.1-(c). \square

3.3. Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} F^\lambda(X)$

Nous étendons dans cette section le théorème de scindage 3.1.1-(b) à d'autres espaces que X^m , à savoir : aux produits $F^\lambda := F_{\lambda_1} \times \cdots \times F_{\lambda_r}$, et aux espaces $F^{\mathfrak{q}} \subseteq X^m$ où \mathfrak{q} est une partition de $[[1, m]]$ (cf. 3.4).

Ces généralisations seront utilisées dans la section 10 pour la détermination du caractère de la représentation de $\mathcal{S}_m : H_c(F_m(X))$, notamment pour expliciter la trace de l'action sur $H_c(F_m(X))$ d'une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$ dont la décomposition en produit cycles disjoints est de type λ (cf. 10.5.3).

On considère les suites (peut être vides) de nombres entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ avec $\lambda_i > 0$ et $r \geq 0$. Lorsque $r > 0$, on note $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ et on pose

$$F^\lambda(X) := F_{\lambda_1}(X) \times \cdots \times F_{\lambda_r}(X).$$

Pour la suite vide $()$, on conviendra que $|()| = 0$ et que $F_{()}(X) = \{\text{pt}\}$.

La « concaténation » de deux suites $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ est, par définition, la suite $\lambda \vee \lambda' := (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$. On a donc

$$F_{\lambda \vee \lambda'} = F_\lambda \times F_{\lambda'},$$

ainsi que les égalités évidentes

$$F^{(1, \dots, 1)}(X) = X^m, \quad F^{(m)}(X) = F_m(X) = \Delta_m F^{(1, \dots, 1)}(X).$$

THÉORÈME 3.3.1 (de scindage). – *Soit X un espace i -acyclique.*

(a) *Pour $a \geq 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$, la décomposition ouverte/fermée*

$$\Delta_\ell(X \times F_a \times F^\lambda) = \Delta_\ell(F_{1+a} \times F^\lambda) \sqcup \Delta_\ell((\Delta_a(X \times F_a)) \times F^\lambda)$$

donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie à support compact scindée en suites courtes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_c(\Delta_\ell(F_{1+a} \times F^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_\ell(X \times F_a \times F^\lambda)) \\ \rightarrow H_c(\Delta_\ell(\Delta_a(X \times F_a) \times F^\lambda)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

(b) *Pour $\ell \leq |\lambda|$, le morphisme de restriction $H_c(\Delta_{\leq \ell}(F^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(F^\lambda))$ est nul. La suite exacte longue de cohomologie associée à la décomposition ouverte/fermée $\Delta_{\leq \ell}(F^\lambda) = \Delta_\ell(F^\lambda) \sqcup \Delta_{\leq \ell-1}(F^\lambda)$ est scindée en suites exactes courtes :*

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(F^\lambda))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_\ell(F^\lambda)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(F^\lambda)) \rightarrow 0.$$

Démonstration. – L'assertion (a) est évidente si $a = 0$. Pour $a > 0$, notons $m := 1 + a + |\lambda|$ et considérons l'inclusion

$$X \times F_a \times F^\lambda \subseteq X \times X^a \times X^{|\lambda|} = X^m.$$

Comme $m > 0$, le cas $\ell = 0$ est immédiat, on peut donc supposer que $\ell > 0$. Nous avons montré dans 2.3.3 que $\Delta_\ell X^m$ se décompose en réunion disjointe des sous-espaces ouverts $F_{\mathfrak{p}}(X)$ où $\mathfrak{p} := \{I_1, I_2, \dots, I_\ell\}$ désigne une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides. L'ensemble $F_{\mathfrak{p}}(X)$ est l'ensemble des m -uplets (x_1, \dots, x_m) tels que $(x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$ où l'on note $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists k)(\{i, j\} \subseteq I_k)$ (cf. 2.3.1). Il s'ensuit que $X \times F_a \times F_{\lambda_1} \times \dots \times F_{\lambda_r}$ est la réunion des $F_{\mathfrak{p}}$ tels que la relation $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$ n'est pas vérifiée lorsque i et j sont des coordonnées correspondantes à un même facteur F_a ou F_{λ_i} . On obtient ainsi une partition de $\Delta_\ell(X \times F_a \times F^\lambda)$ en sous-espaces ouverts et fermés de $\Delta_\ell X^m$. Ces mêmes remarques s'appliquent à $\Delta_\ell(F_{1+a} \times F^\lambda)$ qui est alors aussi un sous-espace ouvert et fermé de $\Delta_\ell X^m$, de même donc qu'à son complémentaire $\Delta_\ell(\Delta_a(X \times F_a) \times F^\lambda)$. On donc une décomposition en somme directe

$$H_c(\Delta_\ell(X \times F_a \times F^\lambda)) = H_c(\Delta_\ell(F_{1+a} \times F^\lambda)) \oplus H_c(\Delta_\ell(\Delta_a(X \times F_a) \times F^\lambda)),$$

dont on déduit aussitôt (a).

Le preuve de l'assertion (b) utilise le lemme suivant.

LEMME PRÉLIMINAIRE. – *Si $Z \subseteq X^m$ est telle que*

$$(4) \quad (H_c(\Delta_{\leq \ell} Z) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} Z)) = 0, \quad \forall \ell \leq m,$$

alors, on a aussi

$$(5) \quad (H_c(\Delta_{\leq \ell}(X \times Z)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(X \times Z))) = 0, \quad \forall \ell \leq m + 1.$$

Preuve du lemme. – On suppose $\ell - 1 > 0$. L'inclusion $\Delta_{\leq \ell - 1}(X \times Z) \subseteq \Delta_{\leq \ell}(X \times Z)$ se factorise en $\Delta_{\leq \ell - 1}(X \times Z) \xrightarrow{f} X \times \Delta_{\leq \ell - 1}Z \xrightarrow{f} \Delta_{\leq \ell}(X \times Z)$, et il suffit de montrer que f^* est nulle. On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 f_2^{-1}(\Delta_{\ell - 1}Z) & \xrightarrow{\quad} & \Delta_{\leq \ell - 1}(X \times Z) & \xrightarrow{f} & X \times \Delta_{\leq \ell - 1}Z \\
 & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\
 & & \Delta_{\ell - 1}Z & \xrightarrow{j} & \Delta_{\leq \ell - 1}Z,
 \end{array}$$

où $f_2 := p_2 \circ f$. On raisonne comme pour 3.1.1-(b). L'application $j_! : H_c(\Delta_{\ell - 1}Z) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell - 1}Z)$ est surjective par l'hypothèse (4). Si $\Delta_{\ell - 1}Z = \emptyset$, on déduit que $H_c(X \times \Delta_{\leq \ell - 1}Z) = 0$ et alors $f^* = 0$. Autrement, la restriction f'_2 de f_2 est propre ($\ell - 1 > 0$), les hypothèses de 1.9.1-(d) sont vérifiées et à nouveau $f^* = 0$. Ce qui termine la preuve du lemme. \square

On démontre maintenant l'assertion (b) par induction sur le nombre r des termes de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Cas $r \leq 1$. – Si $r = 0$, on a $\ell \leq 0$ et donc $\Delta_{\ell - 1}(_) = \emptyset$. Si $r = 1$, F^λ est de la forme F_a , mais alors $\ell \leq a$ et $\Delta_{\leq \ell}F_a \neq \emptyset$ seulement si $\ell = a$, auquel cas $\Delta_{\ell - 1}F_a = \emptyset$.

Cas $r > 1$. – Supposons (b) établie pour toute suite λ comportant r termes avec $r \geq 1$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et montrons, par induction sur l'entier a , que $F_a \times F^\lambda$ vérifie également (b).

Le cas $a = 1$ était l'objet du lemme préliminaire. Supposons maintenant que $F_a \times F^\lambda$ vérifie (b) et montrons qu'il en est de même de $F_{1+a} \times F^\lambda$.

Pour $\ell \leq 1 + a + |\lambda|$, on considère le diagramme commutatif (\mathcal{D}_ℓ) suivant où l'on a omis d'écrire le symbole $H_c(_)$ pour gagner de la place.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowright & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \circlearrowleft & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell - 1}(F_{1+a} \times F^\lambda)[-1] & \xrightarrow{\gamma} & \Delta_\ell(F_{1+a} \times F^\lambda) & \longrightarrow & \Delta_{\leq \ell}(F_{1+a} \times F^\lambda) \circlearrowright \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{D}_\ell) & \circlearrowleft & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell - 1}(X \times F_a \times F^\lambda)[-1] & \xrightarrow{\quad} & \Delta_\ell(X \times F_a \times F^\lambda) & \twoheadrightarrow & \Delta_{\leq \ell}(X \times F_a \times F^\lambda) \circlearrowright \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & \\
 \circlearrowleft & \rightarrow & \Delta_{\leq \ell - 1}(aF_a \times F^\lambda)[-1] & \longrightarrow & \Delta_\ell(aF_a \times F^\lambda) & \xrightarrow{\beta} & \Delta_{\leq \ell}(aF_a \times F^\lambda) \circlearrowright \\
 & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowright & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
 \end{array}$$

On y a noté aF_a , l'espace qui consiste en a copies de l'espace F_a , ce qui correspond très exactement à $\Delta_a(X \times F_a)$. Le diagramme (\mathcal{D}_ℓ) se prolonge indéfiniment par ses quatre côtés via les suites longues de cohomologie à support compact. Dans ce prolongement, le nombre ℓ reste bien sûr constant et seuls les degrés cohomologiques changent. Les quatre flèches marquées '◉' y sont nulles. Cela résulte, pour la colonne et la ligne centrales, respectivement par l'assertion (a) et par le lemme préliminaire.

Lorsque $\ell \leq a + |\lambda|$, l'hypothèse inductive s'applique et les flèches ' \ominus ' sont nulles. Le morphisme β est surjectif et on en déduit la surjectivité de α . Les flèches ' \otimes ' sont donc nulles. Comme ces propriétés sont également vérifiées sur le diagramme $(\mathcal{D}_{\ell-1})$ et que les flèches ' \otimes ' de $(\mathcal{D}_{\ell-1})$ sont les flèches ' \ominus ' de (\mathcal{D}_ℓ) , on conclut que ces dernières sont nulles. À partir de là, une chasse au diagramme élémentaire montre que les flèches ' \otimes ' sont également nulles, ce qui prouve l'assertion (b) pour l'espace $F_{1+a} \times F^\lambda$ et pour $\ell \leq a + |\lambda|$.

Soit maintenant $\ell = 1+a+|\lambda|$. Les flèches de la première colonne de $(\mathcal{D}_{1+a+|\lambda|})$ marquées ' \ominus ' sont nulles puisqu'elles coïncident avec les flèches ' \otimes ' du diagramme $(\mathcal{D}_{a+|\lambda|})$ dont la nullité a déjà été établie. On en déduit l'injectivité de γ , et donc la nullité des flèches ' \otimes '. Ceci prouve l'assertion (b) pour l'espace $F_{1+a} \times F^\lambda$ et pour $\ell = 1+a+|\lambda|$.

La récurrence par rapport à a est terminée et l'assertion (b) est vérifiée par $F_a \times F^\lambda$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \leq a + |\lambda|$. Ceci à son tour termine la récurrence par rapport au nombre r dans $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. L'assertion (b) est par conséquent vérifiée par F^λ pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \leq |\lambda|$. \square

REMARQUE 3.3.2. – On prendra garde du fait que l'analogue de 3.3.1-(a) pour l'opérateur $\Delta_{\leq \ell}$, i.e. l'exactitude des suites

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(F_{1+a} \times F^\lambda)) &\rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(X \times F_a \times F^\lambda)) \\ &\rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(\Delta_a(X \times F_a) \times F^\lambda)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

n'est pas vrai pour $\ell = 1 + a + |\lambda|$, cas auquel on peut effacer $\Delta_{\leq \ell}(_)$.

Dans ce cas, le morphisme de droite est la restriction $H_c(X \times F_a \times F^\lambda) \rightarrow H_c(aF_a \times F^\lambda)$ qui est nulle d'après 3.1.1-(a), alors que le morphisme de gauche n'est généralement pas injectif. On remarquera que la démonstration du théorème prouve cependant que la suite en question est bien exacte pour $\ell \leq a + |\lambda|$.

3.4. Sous-espaces $F^q(X)$ et sous-groupes $\mathcal{S}^q \subseteq \mathcal{S}_m$

3.4.1. Les sous-espaces $F^q(X)$. – Soit $\mathfrak{q} = \{I_1, \dots, I_r\}$ une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en parties non vides, notons $\lambda_i := |I_i|$ et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, fixons arbitrairement une bijection $\varphi_i : I_i \rightarrow \llbracket 1, \lambda_i \rrbracket$. Notons ensuite $\varphi : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ la bijection

$$t \in I_i \mapsto \varphi(t) = \sum_{j < i} \lambda_j + \varphi_i(t),$$

et soit $\Phi : X^m \rightarrow X^m$ l'homéomorphisme $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(m)})$. L'ensemble

$$F^q(X) := \Phi^{-1}(F^\lambda(X)) = \Phi^{-1}(F_{\lambda_1} \times \dots \times F_{\lambda_m})$$

est indépendant de l'indexation des parties $I_i \in \mathfrak{q}$ et des choix des bijections φ_i , il dépend uniquement de la partition \mathfrak{q} .

3.4.2. Commentaire à propos des notations. – Il convient de souligner la différence entre les notation $F_{\mathbf{p}}(X)$ et $F^{\mathbf{q}}(X)$. Dans les deux cas, \mathbf{p} et \mathbf{q} désignent des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$ et nous avons ⁽²⁹⁾

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_m) \in F_{\mathbf{p}}(X) &\Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j) \left((i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j) \right) \\ (x_1, \dots, x_m) \in F^{\mathbf{q}}(X) &\Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j) \left((i \underset{\mathbf{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j) \right). \end{aligned}$$

3.4.3. Sous-groupe $\mathcal{S}^{\mathbf{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$. – Pour toute partie $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, notons

$$\mathcal{S}_I := \text{Fix}_{\mathcal{S}_m}(\llbracket 1, m \rrbracket \setminus I) = \{ \alpha \in \mathcal{S}_m \mid \alpha(j) = j \quad \forall j \notin I \},$$

puis, si $\mathbf{q} = \{I_1, \dots, I_r\}$ est une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$, posons

$$\mathcal{S}^{\mathbf{q}} := \mathcal{S}_{I_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{I_r}.$$

On a $\mathcal{S}_I \sim \mathcal{S}_{|I|}$ et $\mathcal{S}^{\mathbf{q}} \sim \mathcal{S}_{|I_1|} \times \dots \times \mathcal{S}_{|I_r|}$.

L'action de $\mathcal{S}^{\mathbf{q}}$ sur X^m laisse clairement stables les sous-espaces $\Delta_{\ell}(F^{\mathbf{q}})$, quel que soit ℓ . La section suivante 3.5 étend les résultats de la section 3.2 qui concernaient les \mathcal{S}_m -espaces $\Delta_{\ell}X^m$, au cas des $\mathcal{S}^{\mathbf{q}}$ -espaces $\Delta_{\ell}F^{\mathbf{q}}(X)$.

DÉFINITION 3.4.4. – Deux partitions $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, m \rrbracket)$ sont dites « transverses », et l'on note, $\mathbf{p} \pitchfork \mathbf{q}$, si l'on a $(\forall i \neq j) (i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j \Rightarrow i \not\underset{\mathbf{q}}{\sim} j)$ (cf. 3.4.2). On note

$$\mathbf{q}^{\pitchfork} := \{ \mathbf{p} \in \mathfrak{P}(\llbracket 1, m \rrbracket) \mid \mathbf{p} \pitchfork \mathbf{q} \}.$$

La relation de transversalité est une relation symétrique.

PROPOSITION 3.4.5. – (a) Pour $\mathbf{q} \in \mathfrak{P}(m)$, on a $F^{\mathbf{q}}(X) := \prod_{\mathbf{p} \pitchfork \mathbf{q}} F_{\mathbf{p}}(X)$.

(b) Le sous-groupe $\mathcal{S}^{\mathbf{q}} \subseteq \mathcal{S}_m$ (3.4.3) fixe \mathbf{q} et laisse stable \mathbf{q}^{\pitchfork} .

Démonstration. – (a) On rappelle que l'on a, par définition 3.4.2,

$$\left\{ \begin{aligned} \left((x_1, \dots, x_m) \in F_{\mathbf{p}} \right) &\iff (\forall i \neq j) \left((i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j) \right), \\ \left((x_1, \dots, x_m) \in F^{\mathbf{q}} \right) &\iff (\forall i \neq j) \left((i \underset{\mathbf{q}}{\sim} j) \Rightarrow (x_i \neq x_j) \right). \end{aligned} \right.$$

L'inclusion $F_{\mathbf{p}} \subseteq F^{\mathbf{q}}$ est alors immédiate si $\mathbf{p} \pitchfork \mathbf{q}$. Réciproquement, un élément $\bar{x} \in F^{\mathbf{q}}$ définit la partition $\mathbf{p}_{\bar{x}}$ qui regroupe dans une même partie les indices des coordonnées identiques, i.e. $(i \underset{\mathbf{p}_{\bar{x}}}{\sim} j) \Leftrightarrow (x_i = x_j)$, or $(x_i = x_j) \Rightarrow (i \not\underset{\mathbf{q}}{\sim} j)$. Par conséquent, $\mathbf{p}_{\bar{x}} \pitchfork \mathbf{q}$ et $\bar{x} \in F_{\mathbf{p}_{\bar{x}}} \subseteq F^{\mathbf{q}}$.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$, si $\mathbf{p} \pitchfork \mathbf{q}$, on a $\alpha \cdot \mathbf{p} \pitchfork \alpha \cdot \mathbf{q}$. D'autre part, si $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathbf{q}}$, l'égalité $\alpha \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$ est évidente. \square

⁽²⁹⁾ Pour une partition \mathbf{p} de $\llbracket 1, m \rrbracket$, on écrit $(i \underset{\mathbf{p}}{\sim} j)$ pour « il existe $I \in \mathbf{p}$ tel que $\{i, j\} \subseteq I$ ».

3.5. Complexe fondamental de X pour $\Delta_{\leq \ell} F^{\mathfrak{q}}(X)$

3.5.1. Le théorème de scindage pour $\Delta_{\leq \ell} F^{\mathfrak{q}}(X)$. – Compte tenu de l'homéomorphisme $F^{\lambda} \sim F^{\mathfrak{q}}$ de 3.4.1, le corollaire suivant du théorème de scindage 3.3.1 est immédiat.

COROLLAIRE 3.5.2. – *Soit X un espace i -acyclique. Pour toute partition \mathfrak{q} de $[[1, m]]$ et pour tout $\ell \leq m$, le morphisme de restriction*

$$H_c(\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(F^{\mathfrak{q}}))$$

est nul. La suite exacte longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition ouverte/fermée $\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}}) = \Delta_{\ell}(F^{\mathfrak{q}}) \sqcup \Delta_{\leq \ell-1}(F^{\mathfrak{q}})$ est scindée en suites exactes courtes

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}(F^{\mathfrak{q}}))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell}(F^{\mathfrak{q}})) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}})) \rightarrow 0.$$

DÉFINITION 3.5.3. – *Soit \mathfrak{q} une partition de $[[1, m]]$ et soit $\ell \leq m$. Le complexe fondamental de X associé à $\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}})$ est le complexe de $\mathbb{S}^{\mathfrak{q}}$ -modules gradués*

$$0 \rightarrow H_c(1)[- \ell + 1] \rightarrow \cdots \rightarrow H_c(\ell - 1)[-1] \rightarrow H_c(\ell) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}}(X))) \rightarrow 0,$$

avec $H_c(a) := H_c(\Delta_a(F^{\mathfrak{q}}))$, obtenu par concaténation des suites courtes du corollaire 3.5.2 (cf. 3.2.2).

THÉORÈME 3.5.4. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Le complexe fondamental de $\Delta_{\leq \ell}(F^{\mathfrak{q}})$ est un complexe de $\mathbb{S}^{\mathfrak{q}}$ -modules gradués exact.

Démonstration. – Conséquence du corollaire 3.5.2. □

3.6. Complexes fondamentaux et suite spectrales

Le but de cette section⁽³⁰⁾ est de replacer le complexe fondamental dans son contexte le plus naturel, celui de la première page de la suite spectrale pour la cohomologie à supports compacts associée à l'espace filtré

$$(6) \quad (\Delta_{\leq \ell} M^m)_{\bullet} := (\emptyset \subseteq \Delta_{\leq 0} M^m \subseteq \Delta_{\leq 1} M^m \subseteq \cdots \subseteq \Delta_{\leq \ell-1} M^m \subseteq \Delta_{\leq \ell} M^m).$$

⁽³⁰⁾ Cette section a été suggérée par plusieurs relecteurs, dont le rapporteur.

3.6.1. Suite spectrale pour la cohomologie à support compact. – Soit Y un espace muni d’une filtration croissante et finie par parties fermées :

$$Y_\bullet := (\emptyset = Y_{-1} \subseteq Y_0 \subseteq \cdots \subseteq Y_{\ell-1} \subseteq Y_\ell := Y).$$

Posons $U_i := Y \setminus Y_{i-1}$, et considérons la filtration décroissante par parties ouvertes

$$Y = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots \supseteq U_\ell \supseteq U_{\ell+1} = \emptyset.$$

Rappelons que pour toute partie localement compacte $Z \subseteq Y$, le complexe

$$\Omega_c(Z) := \Gamma_c(Z; (\underline{AS}^\bullet(X; k), d_*))$$

calcule la cohomologie à supports compacts de Z , puisque les restrictions des faisceaux des germes de cochaînes d’Alexander-Spanier $\underline{AS}^k(X; k)$ aux parties localement compactes restent Φ -molles ⁽³¹⁾.

On dispose alors des suites exactes courtes de complexes, pour $0 \leq i \leq \ell$:

$$0 \rightarrow \Omega_c(U_i) \xrightarrow{j_i} \Omega_c(Y) \xrightarrow{\rho} \Omega_c(Y_{i-1}) \rightarrow 0,$$

où j_i est le prolongement par zéro. Les injections induites $j_i : \Omega_c(U_{i+1}) \rightarrow \Omega_c(U_i)$ définissent alors la filtration décroissante de $\Omega_c(Y)$ par des sous-complexes

$$\Omega_c(Y) = \Omega_c(U_0) \supseteq \Omega_c(U_1) \supseteq \cdots \supseteq \Omega(U_\ell) \supseteq \Omega(U_{\ell+1}) = 0,$$

qui est clairement *régulière*, car finie.

On peut donc appliquer le formalisme des suites spectrales associées aux complexes différentiels gradués munis de filtrations décroissantes régulières ⁽³²⁾.

3.6.1.1. – On a

$$\mathbb{E}_0^{p,q} := \frac{\Omega_c^{p+q}(U_p)}{\Omega_c^{p+q}(U_{p+1})} = \Omega_c^{p+q}(U_p \setminus U_{p+1}),$$

d’où les termes de la page \mathbb{E}_1 :

$$\mathbb{E}_1^{p,q} = H_c^{p+q}(U_p \setminus U_{p+1}).$$

La différentielle $d_1 : \mathbb{E}_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_1^{p+1,q}$ s’identifie alors à l’application

$$d_1 : H_c^{p+q}(U_p \setminus U_{p+1}) \rightarrow H_c^{p+q+1}(U_{p+1} \setminus U_{p+2}),$$

obtenue en concaténant les suites courtes ⁽³³⁾

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^{p+q}(U_p) & \longrightarrow & H_c^{p+q}(U_p \setminus U_{p+1}) & \xrightarrow{c} & H_c^{p+q+1}(U_{p+1}) & \longrightarrow \\ & & & \vdots & & \uparrow & \\ & & & d_1 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \longrightarrow & H_c^{p+q+1}(U_{p+1}) & \xrightarrow{\rho} & H_c^{p+q+1}(U_{p+1} \setminus U_{p+2}) & \xrightarrow{c} & H_c^{p+q+2}(U_{p+2}) & \longrightarrow \end{array}$$

⁽³¹⁾ Godement [21], § 3.5, thm. 3.5.5, p. 154. Kashiwara-Schapira [25] § 2.5, prop. 2.5.7, p. 105.

⁽³²⁾ Godement [21], § 4, p. 75.

⁽³³⁾ Godement [21], § 4.7, p. 85.

à travers le terme $H_c^{p+q+1}(U_{p+1})$, autrement dit, on a

$$d_1 := \rho \circ c.$$

3.6.1.2. – Une autre description de la page (\mathbb{E}_1, d_1) est possible du fait de l'égalité d'ensembles $U_p \setminus U_{p+1} = Y_p \setminus Y_{p-1}$. On a donc

$$\mathbb{E}_1^{p,q} = H_c^{p+q}(U_p \setminus U_{p+1}) = H_c^{p+q}(Y_p \setminus Y_{p-1})$$

et la différentielle $d_1 : \mathbb{E}_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_1^{p+1,q}$ se voit comme une application

$$d_1 : H_c^{p+q}(Y_p \setminus Y_{p-1}) \rightarrow H_c^{p+q+1}(Y_{p+1} \setminus Y_p),$$

qui n'est autre que la concaténation des suites courtes

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^{p+q-1}(Y_{p-1}) & \xrightarrow{[+1]} & H_c^{p+q}(Y_p \setminus Y_{p-1}) & \xrightarrow{j_!} & H_c^{p+q}(Y_p) & \longrightarrow \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & \downarrow d_1 & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_c^{p+q}(Y_p) & \xrightarrow{[+1]} & H_c^{p+q+1}(Y_{p+1} \setminus Y_p) & \longrightarrow & H_c^{p+q+1}(Y_{p+1}) & \longrightarrow \end{array}$$

à travers le terme $H_c^{p+q}(Y_p)$.

En effet, étant donné que le morphisme de restriction $(_)_{|Y_p} : \Omega_c(Y) \rightarrow \Omega_c(Y_p)$ est surjectif, le prolongement par zéro $j_! \alpha \in \Omega_c(Y_p)$, d'un cocycle $\alpha \in \Omega_c(Y_p \setminus Y_{p-1})$, est la restriction d'une certaine cochaîne $\widetilde{j_! \alpha} \in \Omega_c(Y)$. On a clairement :

$$(\widetilde{j_! \alpha}|_{Y_{p+1}})_{|Y_p} = j_! \alpha \text{ et } (\widetilde{j_! \alpha}|_{U_p})_{|U_p \setminus U_{p+1}} = \alpha.$$

Ainsi, par la définition du morphisme de connexion c dans (7), on a :

$$(9) \quad d_1([\alpha]) = [d(\widetilde{j_! \alpha}|_{U_p})_{|U_{p+1} \setminus U_{p+2}}],$$

tandis que dans (8), on a

$$(10) \quad d_1([\alpha]) = [d(\widetilde{j_! \alpha}|_{Y_{p+1}})_{|Y_{p+1} \setminus Y_p}],$$

où (9) et (10) représentent la même classe de cohomologie, à savoir $[d(\widetilde{j_! \alpha}|_{Y_{p+1} \setminus Y_p})]$, puisque différentielle et restrictions commutent.

3.6.2. Le cas des espaces de configuration généralisés. – Dans le cas de l'espace $Y := \Delta_{\leq \ell} M^m$, on pose $Y_p := \Delta_{\leq p} M^m$, pour $p \leq \ell$, auquel cas $\mathbb{E}_1^p = H_c(\Delta_p M^m)[p]$, et le complexe (\mathbb{E}_1, d_1) s'identifie, par la description 3.6.1.2, au complexe fondamental de M pour $\Delta_{\leq \ell} M^m$, défini dans 3.2.2, dont on a tronqué le dernier terme $H_c(\Delta_{\leq \ell} M^m)[\ell]$

$$\xrightarrow{d_1} H_c(\Delta_p M^m)[p] \xrightarrow{d_1} H_c(\Delta_{p+1} M^m)[p+1] \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_1} H_c(\Delta_\ell M^m)[\ell].$$

La proposition suivante est alors immédiate.

PROPOSITION 3.6.3. – *Supposons le complexe fondamental de M pour $\Delta_{\leq \ell} M^m$ exact. Alors, la suite spectrale pour la cohomologie à supports compacts associée à l'espace filtré $(\Delta_{\leq \ell} M^m)_\bullet$ (6) est dégénérée.*

Démonstration. – Si le complexe fondamental est exact, on a

$$\mathbb{E}_2^p = 0 \text{ si } p \neq \ell, \text{ et } \mathbb{E}_2^\ell = H_c(\Delta_\ell M^m)[\ell]$$

et la suite spectrale est dégénérée, car $(d_r : \mathbb{E}_r^p \rightarrow \mathbb{E}_r^{p+r}) = 0$, pour tout $r \geq 2$. \square

3.6.4. Commentaire. – La i -acyclicité de M apparaît donc comme une condition de concentration de la deuxième page de la suite spectrale associée à l'espace filtré $(\Delta_{\leq \ell} M^m)_\bullet$ sur le terme \mathbb{E}_2^ℓ . C'est donc, en particulier, une condition de dégénérescence simultanée des suites spectrales associées à tous ces espaces.

CHAPITRE 4

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE CONFIGURATION, CAS i -ACYCLIQUE

4.1. Généralités sur le polynôme de Poincaré

4.1.1. Polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué. – Le *polynôme de Poincaré* d'un k -espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$ de dimension finie est le polynôme $\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T, 1/T]$

$$\mathcal{P}(V)(T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k(V^i) T^i.$$

LEMME 4.1.2. – (a) *Si $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$ est une suite exacte courte d'espaces vectoriels gradués, on a $\mathcal{P}(V_2) = \mathcal{P}(V_1) + \mathcal{P}(V_3)$.*

(b) $\mathcal{P}(V[-1])(T) = T \cdot \mathcal{P}(V)$ ⁽³⁴⁾,

(c) $\mathcal{P}(V_1 \otimes_k V_2) = \mathcal{P}(V_1) \cdot \mathcal{P}(V_2)$,

(d) $\mathcal{P}(\text{Homgr}_k(V_1, V_2))(T) = \mathcal{P}(V_1)(1/T) \cdot \mathcal{P}(V_2)(T)$.

4.1.3. Polynômes de Poincaré d'un espace topologique. – Un espace X sera dit *de type fini* (sur k) lorsque

$$\dim_k(H_c(X; k)) < +\infty \text{ et } \dim_k(H(X; k)) < +\infty.$$

Les *polynômes de Poincaré* pour la cohomologie ordinaire et à support compact d'un espace topologique X de *type fini* sont notés

$$\mathcal{P}(X, k)(t) := \mathcal{P}(H(X, k)) \text{ et } \mathcal{P}_c(X, k)(t) := \mathcal{P}(H_c(X, k)).$$

Le corps k sera omis de ces notations lorsque son indication sera superflue.

REMARQUE 4.1.4 (et notation). – Comme déjà signalé dans la remarque 1.10, lorsque $H_c^0(X) = 0$, pour toute partie finie $F \subseteq X$, le polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support compacte de $X \setminus F$ seul dépend du cardinal $a := \#F$. C'est le sens de la notation $\mathcal{P}_c(X \setminus \mathbf{a})$, p.e. dans l'assertion (c) du lemme suivant.

LEMME 4.1.5. – *Si X et Y sont des espaces topologiques de type fini, on a*

⁽³⁴⁾ On rappelle que $V[-1]^i := V^{i-1}$, par convention.

- (a) $\mathcal{P}(X \times Y) = \mathcal{P}(X) \cdot \mathcal{P}(Y)$ et $\mathcal{P}_c(X \times Y) = \mathcal{P}_c(X) \cdot \mathcal{P}_c(Y)$.
 (b) (*Dualité de Poincaré*) Si de plus X est une variété topologique orientable, de dimension d_X et de type fini, on a

$$\mathcal{P}(X)(T) = \mathcal{P}_c(X)(1/T) \cdot T^{d_X}.$$

- (c) Si $H_c^0(X) = 0$ (p.e. si X est *i*-acyclique), on a

$$\mathcal{P}_c(X \setminus \mathbf{a})(T) = \mathcal{P}_c(X)(T) + \mathbf{a} \cdot T,$$

et donc

$$\frac{\prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{P}_c(X \setminus \mathbf{i})(T)}{T^m} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(T)}{T} \right)^{\overline{m}},$$

où $a^{\overline{m}} := (a+0)(a+1) \cdots (a+(r-1))$ est la factorielle croissante (cf. 14.1).

4.2. Polynômes de Poincaré de $F_m(X)$ et de $\Delta_{\leq m-1} X^m$

La proposition suivante est une application immédiate du théorème de scindage 3.1.1-(a). Elle donne une formule fermée pour les polynômes de Poincaré de deux espaces de configuration.

Avertissement. – Jusque la fin de cette section, on suppose que $\dim(H_c(X)) < \infty$.

PROPOSITION 4.2.1. – *Soit X un espace *i*-acyclique.*

- (a) *Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(F_m(X))$ est le polynôme*

$$\mathcal{P}_c(F_m(X))(T) = \prod_{i=0, \dots, m-1} \mathcal{P}_c(X \setminus \mathbf{i})(T) = \prod_{i=0, \dots, m-1} \left(\mathcal{P}_c(X)(T) + i \cdot T \right),$$

soit,

$$\mathcal{P}_c(F_m(X))(T) = T^m \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(T)}{T} \right)^{\overline{m}}.$$

- (b) *L'espace $\Delta_{\leq m-1} X^m$ est « la diagonale épaisse de X^m », son polynôme de Poincaré est le polynôme $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq m-1} X^m)$ homogène de degré $m-1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(X), T]$, vérifiant*

$$\frac{\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq m-1} X^m)(T)}{T^{m-1}} = \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(T)}{T} \right)^{\overline{m}} - \left(\frac{\mathcal{P}_c(X)(T)}{T} \right)^m.$$

Démonstration. – (a) La suite exacte courte de 3.1.1-(a) et les lemmes 4.1.2 et 4.1.5 donnent aussitôt la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(F_{m+1}) &= \mathcal{P}_c(X) \cdot \mathcal{P}_c(F_m) + m \cdot T \cdot \mathcal{P}_c(F_m) \\ &= (\mathcal{P}_c(X) + m \cdot T) \cdot \mathcal{P}_c(F_m) = \mathcal{P}_c(X \setminus \mathbf{m}) \cdot \mathcal{P}_c(F_m), \end{aligned}$$

qui permet de conclure.

- (b) Montrons la surjectivité du morphisme de prolongement par zéro

$$(1) \quad H_c(F_m) \rightarrow H_c(X^m).$$

On raisonne par induction. Si $H_c(F_{m-1}) \rightarrow H_c(X^{m-1})$ est surjectif, le morphisme $H_c(X \times F_{m-1}) \rightarrow H_c(X \times X^{m-1})$, l'est aussi (par Künneth), et, composé à $H_c(F_m) \rightarrow H_c(X \times F_{m-1})$, surjectif d'après 3.1.1-(a), on conclut que (1) l'est aussi.

Maintenant, le complémentaire de l'ouvert F_m dans X^m est la diagonale épaisse $\Delta_{\leq m-1}X^m$, et la suite longue de cohomologie à support compact associée à la décomposition $X^m = F_m \sqcup \Delta_{\leq m-1}^m$ est scindée au niveau du prolongement par zéro (1). On a donc la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq m}^m)[-1] \rightarrow H_c(F_m) \rightarrow H_c(X^m) \rightarrow 0,$$

dont résulte l'assertion (b). □

REMARQUE 4.2.2. – Dans 4.2.1, si X est une variété topologique i -acyclique orientable de dimension d_X , l'ouvert $F_m \subseteq X^m$ (de dimension md_X) l'est également et la dualité de Poincaré 4.1.5-(b) s'applique pour donner l'égalité analogue à 4.2.1-(a) :

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(F_m(X))(T) &= \prod_{i=0, \dots, m-1} \mathcal{P}(X \setminus \mathbf{i})(T) = \prod_{i=0, \dots, m-1} \mathcal{P}(X)(T) + i \cdot T^{d_X-1} \\ &= T^{(d_X-1)m} \left(\frac{\mathcal{P}(X)(T)}{T^{d_X-1}} \right)^{\overline{m}}, \end{aligned}$$

où $a^{\overline{m}} := (a+0)(a+1) \cdots (a+(r-1))$ est la factorielle croissante (cf. 14.1).

On observera que si $d_X = 1$, la formule (2) se simplifie en $\mathcal{P}(F_m(X))(T) = \mathcal{P}(X)(T)^{\overline{m}}$, auquel cas $\text{Betti}^0(F_m) = \text{Betti}^0(X)^{\overline{m}} \geq m!$.

REMARQUE 4.2.3. – Soient $1 \leq a \leq m \in \mathbb{N}$ et $\pi_a : F_m \rightarrow F_a$ la projection sur les a dernières coordonnées.

Pour tout ouvert $U \subseteq F_a$, notons $UF_m := \pi_a^{-1}(U)$. La même preuve de 3.1.1-(a) (cf. rem. 3.1.2-(a)) montre que la suite

$$(3) \quad 0 \rightarrow H_c(UF_m)[-1]^m \rightarrow H_c(UF_{m+1}) \rightarrow H_c(X \times UF_m) \rightarrow 0$$

est exacte. On en déduit, comme pour 4.2.1-(a), que l'on a

$$\mathcal{P}_c(UF_{b+a}) = \mathcal{P}_c(UF_{b-1+a}) \cdot (\mathcal{P}_c(X) + (b-1+a)T)$$

et par itération (cf. 12.2.8) :

$$\mathcal{P}_c(UF_{b+a}(X)) = \mathcal{P}_c(U) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})).$$

Il est intéressant d'observer qu'une condition nécessaire pour l'exactitude des suites (3) pour tout $U \subseteq X$, est que X soit totalement \cup -acyclique. En effet, dans un tel cas et si $m = 1$, le morphisme $H_c(X) \otimes H_c(U) \rightarrow H_c(U)$ doit être nul. On ignore si la totale \cup -acyclicité suffit à l'exactitude des suites (3) lorsque, par exemple, X est une variété topologique non orientable.

REMARQUE 4.2.4. – Les fibres des applications $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ sont de la forme $F_b(X \setminus \mathbf{a})$ et, d’autre part, ce qui précède montre que l’on a

$$(4) \quad \mathcal{P}_c(\pi_a^{-1}C) = \mathcal{P}_c(C) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})),$$

pour toute composante connexe C de F_a .

Cette observation qui suggère l’existence d’une forme de trivialité cohomologique pour les applications π_a , est à l’origine de l’étude de la section 12.4 destinée à prouver la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées à π_a lorsque X est i -acyclique (mais pas forcément de type fini).

Plus précisément, on y montre que si C est une composante connexe de $F_a(X)$ et si $\bar{x} \in C$, le terme \mathbb{E}_2 de la suite spectrale de Leray pour la cohomologie à support compact de la fibration $\pi_a : \pi_a^{-1}C \rightarrow C$ est

$$\mathbb{E}_2 = H_c(C) \otimes H_c(\pi_a^{-1}\bar{x}) \Rightarrow H_c(\pi_a^{-1}C).$$

On observera déjà à ce niveau que lorsque X est de type fini, l’égalité (4) force l’annulation des différentielles de la suite spectrale en question (\mathbb{E}_r, d_r) pour $r \geq 2$, car autrement $\dim(\mathbb{E}_\infty) < \dim(\mathbb{E}_2)$, ce qui n’est pas le cas.

COROLLAIRE 4.2.5. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_\ell X^m)$ s’obtient en évaluant en $P := \mathcal{P}_c(X)$ le polynôme homogène $Q_\ell^m(P, T) \in \mathbb{Z}[P, T]$, de degré ℓ :

$$Q_\ell^m(P, T) = T^\ell \cdot |\mathfrak{P}_\ell(m)| \cdot \left(\frac{P}{T}\right)^\ell.$$

Démonstration. – Clair d’après les propositions 2.3.3 et 4.2.1-(a). □

4.2.6. Commentaire. – Notre approche des polynômes de Poincaré de $F_m(X)$ pour variété topologique orientable X repose sur l’annulation du morphisme de restriction $\delta_X^* : H_c(X \times X) \rightarrow H_c(X)$ (cf. proposition 1.8.2-(c)). Cela restreint considérablement la portée de la méthode, mais n’exclut pas qu’elle puisse être appliquée à d’autres cas, et même pour X compact. Par exemple, lorsque X est un groupe de Lie compact connexe K de dimension d_K , il est avantageux de profiter de l’action diagonale libre de K sur $F_m(X)$. Notons $\mathring{K} = K \setminus \{e\}$. On a la bijection

$$\Psi : F_{m-1}(\mathring{K}) \times K \rightarrow F_m(K), \quad (\bar{x}, g) \mapsto (x_1g, \dots, x_{m-1}g, g),$$

et ceci donne aussitôt l’égalité $H_c(F_m(K)) = H_c(F_{m-1}(\mathring{K})) \otimes H_c(K)$, où \mathring{K} n’est plus compact. On peut alors se demander si \mathring{K} est \cup -acyclique.

Comme K est compact, le prolongement par zéro $H_c(\mathring{K}) \rightarrow H(K)$ identifie $H_c(\mathring{K})$ à $H^+(K)$ et nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_c(\mathring{K}) \otimes H_c(\mathring{K}) & \xrightarrow{\rho_{\mathring{K}}} & H_c(\Delta_{\mathring{K}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(K) \otimes H(K) & \xrightarrow{\rho_K} & H(\Delta_K), \end{array}$$

où ρ_K est le cap-produit. Si $\rho_{\hat{K}} = 0$, nous devons avoir

$$H^+(K) \wedge H^+(K) = 0,$$

mais ceci n'est possible, par dualité de Poincaré, que si le groupe de Lie K à la même homologie qu'une sphère.

Lorsque le corps des coefficients est \mathbb{Q} , cela arrive seulement dans trois cas $K = \mathbb{S}^0$, $K = \mathbb{S}^1$ et $K = \mathbb{S}^3 \simeq \text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$.

Dans ces cas la proposition 4.2.1-(a) s'applique et on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(F_m(K)) &= \mathcal{P}_c(K) \cdot \mathcal{P}_c(F_{m-1}(\hat{K})) = \mathcal{P}_c(K) \cdot T^{m-1} \cdot (\mathcal{P}_c(\hat{K})/T)^{\overline{m-1}} \\ &= (T^{d_K} + 1) \cdot T^{m-1} \cdot (T^{d_K-1})^{\overline{m-1}}. \end{aligned}$$

4.3. Polynômes de Poincaré de $\Delta_{\leq \ell} X^m$

Une application immédiate de l'exactitude du complexe fondamental est la détermination du polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ lorsque X est de type fini. L'assertion suivante généralise la proposition 4.2.1.

COROLLAIRE 4.3.1. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Le polynôme de Poincaré $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ est le polynôme homogène de $\mathbb{Z}[\mathcal{P}_c(X), T]$, de degré ℓ , donné par la somme alternée (cf. 2.3.3)

$$\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot \mathcal{P}_c(F_{\ell-a}(X)) \cdot T^a,$$

avec comme termes de plus bas et plus haut degrés en T :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) &= |\mathfrak{P}_{\ell}(m)| \cdot \mathcal{P}_c(X)^{\ell} \cdot T^0 + \dots \\ &+ \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \cdot |\mathfrak{P}_{\ell-a}(m)| \cdot (\ell - a - 1)! \cdot \mathcal{P}_c(X) \cdot T^{\ell-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. – Résulte de l'application du théorème 3.2.3, de l'explicitation du corollaire 4.2.5 et du fait que le terme de plus haut degré en T de $\mathcal{P}_c(F_{\ell-a}(X))$ est $(\ell - a - 1)! \cdot \mathcal{P}_c(X) \cdot T^{\ell-a-1}$ d'après 4.2.1-(a). \square

4.4. Polynôme universel pour $\Delta_{\leq \ell} X^m$

Le corollaire 4.3.1 montre que le polynôme de Poincaré de $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ s'obtient en évaluant un certain polynôme homogène de l'anneau $\mathbb{Z}[P, T]$, degré ℓ , en $P = \mathcal{P}_c(X)$. Ce polynôme est indépendant de X et il est unique. Le « polynôme universel pour la cohomologie à support compact des espaces $\Delta_{\leq \ell}^m$ », noté $Q_{\leq \ell}^m(P, T)$, est le polynôme de $\mathbb{Z}[P, T]$, homogène de degré total ℓ , donné par

$$Q_{\leq \ell}^m(P, T) := T^{\ell} \sum_{a=1, \dots, \ell} (-1)^{\ell-a} \cdot |\mathfrak{P}_a(m)| \cdot \left(\frac{P}{T}\right)^{\bar{a}},$$

où (cf. 2.3.3)

$$|\mathfrak{P}_a(m)| := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0, \dots, \ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} j^m.$$

REMARQUE 4.4.1. – Il peut y avoir beaucoup de simplifications dans l'expression donnant ces polynômes. Par exemple, sachant que $\Delta_{\leq m} X^m = X^m$, on peut anticiper l'égalité $Q_{\leq m}^m(P, T) = P^m$, ce qui est loin d'être une évidence uniquement à partir de la définition de $Q_{\leq \ell}^m$.

4.4.2. Un exemple de polynômes universels. – Voici les six polynômes universels pour $m = 6$:

$$Q_{\leq 1,6}(P, T) = PT^0,$$

$$Q_{\leq 2,6}(P, T) = 31 P^2 T^0 + 30 PT,$$

$$Q_{\leq 3,6}(P, T) = 90 P^3 T^0 + 239 P^2 T + 150 PT^2,$$

$$Q_{\leq 4,6}(P, T) = 65 P^4 T^0 + 300 P^3 T + 476 P^2 T^2 + 240 PT^3,$$

$$Q_{\leq 5,6}(P, T) = 15 P^5 T^0 + 85 P^4 T + 225 P^3 T^2 + 274 P^2 T^3 + 120 PT^4,$$

$$Q_{\leq 6,6}(P, T) = P^6 T^0.$$

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Dans 3.2.2 nous avons muni les espaces $\Delta_{\ell} M^m$ de l'action de \mathcal{S}_m . Nous allons maintenant explorer en détail la structure de \mathcal{S}_m -espace de $\Delta_{\ell} M^m$.

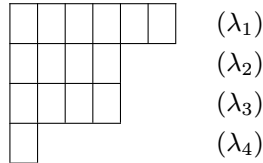
5.1. Notations pour les décompositions et les diagrammes de Young

- Une « décomposition » λ d'un entier $m \geq 0$, notée $\lambda \vdash m$, est la donnée d'une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda := (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0)$ telle que $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell$. On note $|\lambda| = m$ et $\ell(\lambda) := \ell$.
- Étant données une famille d'entiers naturels $\{X_1, \dots, X_m\}$, telle que $m = \sum_i X_i i$, on notera de manière équivalente

$$\underbrace{(m, \dots, m)}_{X_m} \underbrace{(m-1, \dots, m-1)}_{X_{m-1}} \dots \underbrace{(1, \dots, 1)}_{X_1} = (1^{X_1}, 2^{X_2}, \dots, m^{X_m}).$$

- Un « diagramme de Young » est un empilement vertical de juxtapositions horizontales de boîtes dont le nombre, λ_i , décroît. La suite $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ est une décomposition du nombre $m := |\lambda|$ appelé *la taille du diagramme*. On identifie ainsi décompositions et diagrammes. On note $\mathcal{Y}_\ell(m)$ l'ensemble des diagrammes à m boîtes et à ℓ lignes, soit donc

$$\mathcal{Y}_\ell(m) := \{(\lambda \vdash m) \ \& \ (\ell(\lambda) = \ell)\}.$$



- Un « tableau de Young standard » est un diagramme de Young λ dont on remplit les boîtes par les entiers $1, 2, \dots, |\lambda|$. On note $\tau(\lambda)$ le tableau obtenu par une

numérotation successive, de gauche à droite et de haut en bas, tel qu'indiqué dans la figure ci-dessous :

$$\tau(\lambda) := \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & 10 & & \\ \hline 11 & 12 & 13 & 14 & & \\ \hline 15 & & & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

- Si $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note \mathcal{P}_λ le sous-groupe de \mathcal{S}_m des permutations qui conservent les lignes de $\tau(\lambda)$. On a $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$.
- Un diagramme $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$ décompose l'intervalle $[[1, m]]$ suivant les ℓ sous-intervalles définis par les lignes de $\tau(\lambda)$. On note $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathfrak{P}_\ell(|\lambda|)$ la partition ainsi déterminée.

Le sous-groupe $\mathcal{S}_\lambda := N_{\mathcal{S}_m} \mathcal{P}_\lambda$, où $N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$ désigne le normalisateur de \mathcal{P}_λ dans \mathcal{S}_m , est le sous-groupe des éléments de \mathcal{S}_m qui fixent la partition \mathfrak{p}_λ .

LEMME 5.1.1. — *On fait agir \mathcal{S}_m sur $\mathfrak{P}_\ell(m)$ par son action naturelle (cf. 2.3.1). Pour toute partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$, on note $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de \mathcal{S}_m qui fixe \mathfrak{p} .*

- (a) *Chaque orbite de \mathcal{S}_m rencontre une unique partition de la forme \mathfrak{p}_λ . On a*

$$\mathfrak{P}_\ell(m) = \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot \mathfrak{p}_\lambda \simeq \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_\lambda,$$

où λ parcourt l'ensemble $\mathcal{Y}_\ell(m)$ des décompositions de m en ℓ entiers $\neq 0$.

- (b) *Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = ((\lambda_1)^{\times \lambda_1}, \dots, (\lambda_\ell)^{\times \lambda_\ell})$, on a*

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\mathfrak{p}_\lambda} = N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda), \quad G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda \simeq \mathcal{S}_{\times \lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\times \lambda_\ell}, \quad \text{et } \mathcal{S}_\lambda = G_\lambda \ltimes \mathcal{P}_\lambda.$$

5.2. Décomposition ouverte \mathcal{S}_m -stable de $\Delta_\ell M^m$

Par le lemme 5.1.1 la décomposition ouverte de Δ_ℓ^m de 2.3.3 s'écrit

$$\Delta_\ell M^m = \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \cdot F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M).$$

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 5.2.1. — *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (1^{\times \lambda_1}, \dots, m^{\times \lambda_m}) \in \mathcal{Y}_\ell(m)$.*

- (a) *Le groupe $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$ est le sous-groupe de \mathcal{S}_m des permutations qui agissent comme l'identité sur $F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M)$. Son normalisateur \mathcal{S}_λ est le sous-groupe de \mathcal{S}_m qui laisse stable $F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M)$.*

Soit maintenant la surjection canonique de groupes

$$\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda := \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda \simeq \mathcal{S}_{\times \lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\times \lambda_\ell} \subseteq \mathcal{S}_\ell$$

et considérons $F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M)$ muni de sa structure de G_λ -espace.

(b) *L'application*

$$\phi_\lambda : F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M) \rightarrow F_\ell(M), \quad \phi_\lambda : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (y_1, \dots, y_\ell),$$

avec $y_k := x_{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$, est un isomorphisme de G_λ -espaces.

(c) *L'application*

$$\Psi_\lambda : \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_\lambda} F_\ell(M) \rightarrow \mathcal{S}_m \cdot F_{\mathfrak{p}_\lambda}(M) \subseteq M^m, \quad (\alpha, \bar{x}) \mapsto \alpha \cdot \phi^{-1}(\bar{x}),$$

est un isomorphisme de \mathcal{S}_m -espaces.

5.2.2. Caractères de \mathcal{S}_m associés à $\Delta_{\leq \ell} M^m$. – Pour toute partie $Z \subseteq M^m$, de type fini et stable sous l'action de \mathcal{S}_m , les espaces $H_c^i(Z, k)$ et de $H^i(Z, k)$ sont les \mathcal{S}_m -modules de dimension finie, leurs caractères seront respectivement notés :

$$\begin{cases} \chi_c(Z; i) : \mathcal{S}_m \rightarrow k, & \chi_c(Z; i)(\alpha) := \text{tr}(\alpha : H_c^i(Z; k)), \\ \chi(Z; i) : \mathcal{S}_m \rightarrow k, & \chi(Z; i)(\alpha) := \text{tr}(\alpha : H^i(Z; k)). \end{cases}$$

5.2.3. Commentaire. – Si M est une variété topologique orientable, $F_m(M)$ l'est également et $H^i(F_m)$ et $H_c^{m d_M - i}(F_m)$ sont des \mathcal{S}_m -modules duaux modulo la puissance d_M du caractère signature σ_m de \mathcal{S}_m . Le caractère $\chi_c(F_m(M), *)$ détermine donc $\chi(F_m(M), *)$ (cf. 6.2.4.3). En dehors de ce cas, nos méthodes ne s'appliquent pas à l'étude de la cohomologie ordinaire $H(\Delta_{\ell} M^m)$, ni en tant qu'espace vectoriel ni, a fortiori, en tant que \mathcal{S}_m -module. Elles s'appliqueront par contre à la *cohomologie* de Borel-Moore $H_{\text{BM}}(\Delta_{\ell} M^m)$ (cf. 6.1).

Avertissement. – Dans toutes les sections concernant les représentations des groupes symétriques on supposera que $\text{car}(k) = 0$ (cf. 7.3.4).

5.3. Foncteurs d'induction $\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$ et Υ_ℓ^m

Pour $0 < \ell \leq m$, et tout $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on note

$$(\text{ind}) \quad \boxed{\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])}$$

le foncteur $\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \circ \text{res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell}$ où \mathcal{S}_λ agit à travers de la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \rightarrow G_\lambda$ de 5.2.1-(a). On considère ensuite le foncteur

$$(\Upsilon) \quad \boxed{\Upsilon_\ell^m := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_\ell]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_m])}.$$

(Remarquer que l'on a $\Upsilon_m^m = \text{id}$.) On notera par la même notation l'opérateur linéaire d'induction $\Upsilon_\ell^m : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]$ défini sur les fonctions centrales.

PROPOSITION 5.3.1. – *Pour $0 < \ell \leq m$, on a un isomorphisme de \mathcal{S}_m espaces :*

$$\Delta_\ell M^m \cong \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(m)} \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_\lambda} F_\ell(M).$$

En particulier, on a

$$\chi_c(\Delta_\ell M^m; i) = \Upsilon_\ell^m(\chi_c(F_\ell(M); i)) \text{ et } \chi(\Delta_\ell M^m; i) = \Upsilon_\ell^m(\chi(F_\ell(M); i)).$$

Démonstration. – Corollaire du lemme 5.1.1 et de la proposition 5.2.1-(c). □

5.3.2. Présentation du \mathcal{S}_m -module de $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} X^m)$. – Nous pouvons à présent rassembler les résultats précédents pour donner une présentation de la représentation de \mathcal{S}_m sur $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ lorsque X est i -acyclique.

THÉORÈME 5.3.3. – *Soit X un espace i -acyclique tel que $\dim H_c(X) < \infty$.*

(a) *Le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(F_m(X))$ vérifie*

$$\chi_c(F_m(X); i) = \chi_c(X^m; i) + \chi_c(\Delta_{\leq m-1} X^m; i-1).$$

(b) *Pour $0 < \ell \leq m$, le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ vérifie*

$$\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m; i) = \sum_{0 \leq a < \ell} (-1)^a \Upsilon_{\ell-a}^m(\chi_c(F_{\ell-a}(X); i-a)).$$

Démonstration. – Par 3.2.3, la suite de \mathcal{S}_m -modules

$$0 \rightarrow H_c^{i-\ell+1}(\Delta_1^m) \rightarrow \dots \rightarrow H_c^{i-1}(\Delta_{\ell-1}^m) \rightarrow H_c^i(\Delta_\ell^m) \rightarrow H_c^i(\Delta_{\leq \ell}^m) \rightarrow 0$$

est exacte. On a donc l'égalité $\chi_c(\Delta_{\leq \ell}^m; i) = \sum_{0 \leq a \leq \ell} (-1)^a \chi_c(\Delta_{\ell-a}^m; i-a)$ à laquelle on applique la proposition 5.3.1. □

5.3.4. Expression de $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m; *)$ en termes de $\chi_c(X^\ell; *)$. – Le théorème 5.3.3 est la base d'un algorithme de calcul pour $\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m; i)$. En effet, l'égalité (b) l'exprime comme combinaison des induits des $\chi_c(F_{\ell'}(X), i')$ pour $\ell' \leq \ell$ et $i' \leq i$, et l'égalité (a) exprime chaque $\chi_c(F_{\ell'}(X), i')$ comme la somme de $\chi_c(X^{\ell'}, i')$, calculé par Macdonald dans [27] (cf. aussi 10.5.4), et de $\chi_c(\Delta_{\leq \ell'-1} X^{\ell'}, i')$, avec (donc) $\ell' - 1 < \ell$. La section suivante précise cette idée.

5.4. Opérateurs d'inductions itérées $\Upsilon(\sigma)$ et Θ_ℓ^m

Pour toute suite d'entiers positifs $\sigma = (m_0 > m_1 > \dots > m_{t-1} > m_t)$ strictement décroissante, on pose $|\sigma| := t$ et

$$(\Upsilon(\sigma)) \quad \begin{cases} \text{si } |\sigma| = 0, & \Upsilon((m_0)) := \text{id} : k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \\ \text{si } |\sigma| > 0, & \Upsilon(\sigma) := \Upsilon_{m_1}^{m_0} \circ \dots \circ \Upsilon_{m_t}^{m_{t-1}} : k_c[\mathcal{S}_{m_t}] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_{m_0}] \end{cases}$$

et l'on définit pour $\ell \leq m$, l'opérateur d'inductions itérées :

$$(\Theta) \quad \boxed{\Theta_\ell^m := (-1)^{m-\ell} \sum_{\sigma: m \searrow \ell} (-1)^{|\sigma|-1} \Upsilon(\sigma) : k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]},$$

où la sommation est indexée par l'ensemble des suites strictement décroissantes qui partent de m et aboutissent à ℓ .

On remarquera l'égalité $\Theta_m^m = \text{id}$.

THÉORÈME DU CARACTÈRE UNIVERSEL 5.4.1. – Soient X et Y des espaces i -acycliques à cohomologie à support compact de dimension finie.

(a) Pour tous $0 < \ell \leq m$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$(i) \quad \chi_c(F_m(X); i) = \sum_{0 \leq a < m} \Theta_{m-a}^m(\chi_c(X^{m-a}; i-a)),$$

$$(ii) \quad \chi_c(\Delta_\ell X^m; i) = \Upsilon_\ell^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell} \Theta_{\ell-a}^\ell(\chi_c(X^{\ell-a}; i-a)) \right),$$

(iii)

$$\chi_c(\Delta_{\leq \ell} X^m; i) = \sum_{0 \leq b < \ell} (-1)^b \Upsilon_{\ell-b}^m \left(\sum_{0 \leq a < \ell-b} \Theta_{\ell-b-a}^{\ell-b}(\chi_c(X^{\ell-b-a}; i-b-a)) \right).$$

(b) On a

$$(\chi_c(\Delta_{? \ell} X^m, *) = \chi_c(\Delta_{? \ell} Y^m, *)) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_c(X) = \mathcal{P}_c(Y)).$$

Démonstration. – (a-i) On procède par récurrence sur m . Lorsque $m = 1$, on a $F_1(X) = X$, $a = 0$, la somme est réduite à un seul terme et l'égalité est immédiate. Dans le cas général, l'égalité du théorème 5.3.3-(b) pour $\ell = m$ donne l'égalité :

$$\chi_c(F_m; i) = \chi_c(X^m; i) - \sum_{m > m-a > 0} (-1)^a \Upsilon_{m-a}^m(\chi_c(F_{m-a}; i-a)),$$

où l'on peut remplacer, par hypothèse inductive,

$$\chi_c(F_{m-a}; i-a) = \chi_c(X^{m-a}; i-a) + \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a}(\chi_c(X^{m-a-b}; i-a-b)).$$

On exprime ainsi $\chi_c(F_m; i)$ comme somme de deux termes.

$$\begin{cases} A := \chi_c(X^m; i) + \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \Upsilon_{m-a}^m (\chi_c(X^{m-a}; i-a)), \\ B := \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \Upsilon_{m-a}^m \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a} (\chi_c(X^{m-a-b}; i-a-b)). \end{cases}$$

Le terme A contient $\Theta_m^m = \Upsilon((m))$ et les opérateurs $(-1)^{a+1} \Upsilon((m, m-a))$ qui interviennent dans le développement de Θ_{m-a}^m pour $a > 0$. Le terme B , quant à lui, contient exactement tous les opérateurs qui manquent encore pour reconstruire le second membre de (a-i). En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{m > m-a > 0} (-1)^{a+1} \Upsilon_{m-a}^m \sum_{m-a > m-a-b > 0} \Theta_{m-a-b}^{m-a} &= \sum_{\substack{\sigma: m-a \searrow m-a-b > 0 \\ a > 0}} (-1)^{a+1} \Upsilon_{m-a}^m (-1)^b (-1)^{|\sigma|-1} \Upsilon(\sigma) \\ &= (-1)^{a+b} \sum_{\substack{\sigma: m \searrow m-(a+b) \\ |\sigma| \geq 2}} (-1)^{|\sigma|} \Upsilon(\sigma). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de l'égalité (a-i). La formule (a-ii) en découle aussitôt puisque $\chi_c(\Delta_\ell X^m; i) = \Upsilon_\ell^m(\chi_c(F_\ell(X); i))$ (proposition 5.3.1), et (a-iii) en résulte par 5.3.3-(b).

(b) L'implication (\Rightarrow) est immédiate en prenant $m = \ell = 1$. Pour la réciproque, il suffit, grâce à (a), de montrer que les caractères $\chi_c(X^m; i)$ sont déterminés par $\mathcal{P}_c(X)$. Or, ceci est clair d'après le travail de Macdonald [27] (eq. 4.5) (cf. aussi 10.5.4 pour la formule explicite). \square

5.4.2. Commentaire. – L'appellation du théorème 5.4.1 veut attirer l'attention sur le fait que, pour chaque catégorie d'espaces $F_m(X)$, $\Delta_\ell X^m$ et $\Delta_{\leq \ell} X^m$, il existe une expression unique (universelle) pour le caractère de l'action de \mathfrak{S}_m , dépendant uniquement des nombres de Betti compacts de l'espace X .

CHAPITRE 6

COHOMOLOGIE DES ESPACES DE CONFIGURATION, CAS GÉNÉRAL

6.1. Cohomologie de Borel-Moore

Comme nous l'avons déjà indiqué dans 5.2.3, l'utilisation des complexes fondamentaux limite la portée de nos méthodes sur au moins deux aspects : les espaces X qui sont i -acycliques et la cohomologie qui est à support compact. Ce sont des limitations contraignantes, notamment lorsque l'on veut entreprendre l'étude du comportement asymptotique de la cohomologie *ordinaire* de $F_m(X)$ suivant les *tours* de représentations des groupes symétriques, les « FI-modules » (cf. 9.2), de la forme

$$(1) \quad \cdots \rightarrow H^i(F_{m-1}(X)) \xrightarrow{p_{m-1}^*} H^i(F_m(X)) \xrightarrow{p_m^*} H^i(F_{m+1}(X)) \rightarrow \cdots,$$

où $p_m : F_{m+1}(X) \rightarrow F_m(X)$ est la projection sur les m premières coordonnées.

La première question qui se pose est de comprendre comment construire de telles tours lorsque l'on est contraint de n'utiliser que la cohomologie à support compact.

Pour une variété topologique orientée M , la dualité de Poincaré établit un isomorphisme canonique entre la suite (1) et la suite

$$(2) \quad \cdots \rightarrow H_c^{d_{F_{m-1}} - i}(F_{m-1})^\vee \xrightarrow{p_{m-1}!} H_c^{d_{F_m} - i}(F_m)^\vee \xrightarrow{p_m!} H_c^{d_{F_{m+1}} - i}(F_{m+1})^\vee \rightarrow \cdots,$$

où F_m est un raccourci pour $F_m(M)$ et où

$$(3) \quad p_m! : H_c^{d_{F_{m+1}} - i}(F_{m+1}(M)) \rightarrow H_c^{d_{F_m} - i}(F_m(M))$$

désigne le morphisme d'intégration sur les fibres (cf. 6.2.1-[ad-4]).

Or, l'intégration sur les fibres (3) a un sens plus généralement pour tout espace topologique Y localement compact de dimension finie d_Y muni d'une *classe fondamentale*, un générateur $[Y] \in H_c^{d_Y}(Y)$, par exemple une pseudovariété, ou, plus concrètement, une variété algébrique complexe. Dans ces cas, la suite (2) est bien définie, mais, bien sûr, l'équivalence entre cohomologie ordinaire et cohomologie à support compact donnée par la dualité de Poincaré n'est plus assurée. C'est ainsi que dans

notre projet d'étendre les résultats de stabilité de représentation de la suite (1) aux pseudovariétés Y , nous avons été amenés à remplacer ⁽³⁵⁾

$$H^i(Y; k) \leftrightarrow H_c^{d_Y - i}(Y; k)^\vee,$$

et à introduire la *terminologie* de « **cohomologie** » de Borel-Moore de Y .

DÉFINITION 6.1.1. – L'« **homologie de Borel-Moore de Y** », notée $H_*^{\text{BM}}(Y; k)$, est le dual vectoriel de la cohomologie à support compact, i.e. $H_i^{\text{BM}}(Y, k) := H_c^i(Y, k)^\vee$. Lorsque Y est de dimension finie d_Y (définition 2.4.1), nous définissons sa « **cohomologie de Borel-Moore** » par

$$(4) \quad \boxed{H_{\text{BM}}^i(Y; k) := H_c^{d_Y - i}(Y; k)^\vee},$$

de sorte que si Y est une variété topologique orientée, on a $H(Y) = H_{\text{BM}}(Y)$.

On remarquera l'équivalence entre l'écriture (4) et les écritures :

$$(5) \quad H_{\text{BM}}(Y)[d_Y] := H_c(Y)^\vee \text{ et } H_{\text{BM}}(Y) := (H_c(Y)[d_Y])^\vee.$$

6.1.2. Functorialité de la cohomologie de Borel-Moore. – La functorialité de la *cohomologie* de Borel-Moore provient de celle de la cohomologie à support compact, ce qui implique certaines limitations. Par exemple, si $f : Y \rightarrow Z$ est une application continue *propre*, l'image-inverse des cochaînes d'Alexander-Spanier induit bien un morphisme contravariant $f^* : H_c(Z) \rightarrow H_c(Y)$ et, par (5), un morphisme *covariant*

$$(f^*)^\vee : H_{\text{BM}}(Y)[d_Y] \rightarrow H_{\text{BM}}(Z)[d_Z],$$

qui est l'analogue du morphisme de Thom-Gysin en cohomologie ordinaire.

La *cohomologie* de Borel-Moore est donc *a priori covariante* relativement aux applications continues *propres*. Or, dans l'étude des tours de représentations (1) à l'aide de la *cohomologie* de Borel-Moore, nous avons plutôt besoin d'un analogue de l'image-inverse en cohomologie ordinaire (donc contravariante), ce qui n'existe pas toujours.

On est ainsi amené à s'intéresser aux applications $f : Y \rightarrow Z$ disposant d'une *image-directe* $f_! : H_c(Y)[d_Y] \rightarrow H_c(Z)[d_Z]$ dont l'adjoint $(f_!)^\vee : H_{\text{BM}}(Z) \rightarrow H_{\text{BM}}(Y)$ correspond à l'image-inverse $f^* : H(Z) \rightarrow H(Y)$ lorsque Y et Z sont des variétés topologiques orientées.

⁽³⁵⁾ Si V est un espace vectoriel sur k , on note $V^\vee := \text{Hom}_k(V, k)$. Si $\alpha : V \rightarrow W$ est une application linéaire de k -espaces vectoriels, on note $\alpha^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$ l'application adjointe.

6.2. Images-inverses en cohomologie de Borel-Moore

6.2.1. Le cas des variétés topologiques. – Supposons M et N des variétés topologiques orientées de dimensions respectives d_M et d_N . Notons $\langle _, _ \rangle_M$ l'accouplement de la dualité de Poincaré sur M (resp. N), à savoir

$$\langle _, _ \rangle_M : H(M) \times H_c(M) \rightarrow k, \quad \langle \nu, \mu \rangle_M := \int_M \nu \wedge \mu.$$

Pour toute application $f : M \rightarrow N$ continue, notons

$$f_! : H_c(M)[d_M] \rightarrow H_c(N)[d_N]$$

l'adjoint à droite pour la dualité de Poincaré de l'image-inverse $f^* : H(N) \rightarrow H(M)$. Il est caractérisée par l'égalité

$$\langle f^*(\nu), \mu \rangle_M = \langle \nu, f_!(\mu) \rangle_N, \quad \forall \nu \in H(N), \quad \forall \mu \in H_c(M).$$

On dit alors que le couple $(f^*, f_!)$ est un « couple adjoint ». On notera $(_)_M^\vee$ l'adjonction pour la dualité de Poincaré sur M .

On a quatre situations importantes pour nous.

[ad-1] L'application $\iota : N \subseteq M$ est l'inclusion d'une sous-variété fermée orientée.

L'adjoint à droite de l'image-inverse de restriction $\iota^* : H(M) \rightarrow H(N)$ est le morphisme $\iota_! : H_c(N)[d_N] \rightarrow H_c(M)[d_M]$ donnée par la multiplication par la classe de Thom du plongement $N \subseteq M$.

L'image-inverse de restriction est aussi définie en cohomologie à support compact, puisque ι est propre. On a $\iota^* : H_c(M) \rightarrow H_c(N)$, et son adjoint à gauche est encore le morphisme $\iota_! : H(N)[d_N] \rightarrow H(M)[d_M]$ donnée par la multiplication par la classe de Thom du plongement $N \subseteq M$.

[ad-2] L'application $j : U \subseteq M$ est une inclusion ouverte.

L'adjoint à droite de l'image-inverse de restriction $j^* : H(M) \rightarrow H(U)$ est le prolongement par zéro $j_! : H_c(U) \rightarrow H_c(M)$.

[ad-3] L'application $f : M \rightarrow N$ est une fibration localement triviale de fibre F orientée, i.e. munie d'une classe fondamentale $[F] \in H_c^{d_F}(F)$, et l'orientation de M est compatible à celles de N et de F .

L'adjoint à droite de l'image-inverse $f^* : H(N) \rightarrow H(M)$ est l'intégration sur les fibres $f_! := \int_{[F]} : H_c(M)[d_M] \rightarrow H_c(N)[d_N]$ (cf. Bott-Tu [7] p. 61).

[ad-4] L'application $f : M \rightarrow M$ est un homéomorphisme.

Soit $M = \coprod_{i \in \Pi_0(M)} M_i$ la décomposition en composantes connexes. Notons par $f_i : M_i \rightarrow M_{f(i)}$ la restriction de f à la composante M_i . Chaque f_i est un homéomorphisme de variétés topologiques connexes et orientées. On note $\sigma_M(f_i)$ le scalaire défini par l'action de f_i^* sur les classes fondamentales, par :

$$f_i^*([M_{f(i)}]) = \sigma_M(f_i) \cdot [M_i].$$

Pour tous $\mu \in H(M)$ et $\nu \in H_c(M)$, on a

$$\nu \cup \mu = \langle \nu, \mu \rangle_M [M] + (\text{termes de plus bas degré}).$$

On a donc les égalités

$$\begin{aligned} f^*(\nu) \cup f^*(\tilde{\nu}) &= \sum_i^* (\nu_{f(i)} \cup \mu_{f(i)}) = \sum_i (\nu_{f(i)}, \mu_{f(i)}) M_i \cdot f_i^*([M_i]) + \dots \\ &= \sum_i (\nu_{f(i)}, \mu_{f(i)}) M_i \cdot \sigma_M(f_i) \cdot [M_i] + \dots \\ &= \sum_i (\nu_{f(i)}, \sigma_M(f_i) \cdot \mu_{f(i)}) M_i \cdot [M_i] + \dots, \end{aligned}$$

dont on déduit la formule

$$\langle f^*(\nu), \mu \rangle_M = \left\langle \nu, \sum_i \sigma_M(f_i) \cdot (f_i^{-1})^*(\mu_i) \right\rangle_M.$$

Par conséquent, l'adjoint à droite de l'image-inverse $f^* : H(M) \rightarrow H(M)$ pour l'accouplement $\langle _, _ \rangle_M$ est donné par l'application

$$(6) \quad f_! (\mu) := \sum_i \sigma_M(f_i) \cdot f_{i,*}(\mu_i),$$

où $f_{i,*} : H_c(M_i) \rightarrow H_c(M_{f(i)})$ est le morphisme image-directe $(f_i^{-1})^*$.

On observera que lorsque M est connexe ou que $\sigma_M(f_i)$ est indépendant de i , la formule (6) devient :

$$(7) \quad f_! = \sigma_M(f) \cdot f_*.$$

La proposition suivante découle aussitôt de ces observations

PROPOSITION 6.2.2. – *Soit G un groupe agissant par des homéomorphismes sur une variété topologique orientée M . Pour $g \in G$, notons $g_* : H_c(M) \rightarrow H_c(M)$ le morphisme image-directe $g_* := (g^{-1})^*$. On suppose $\sigma_M(g_i)$ est indépendant de la composante connexe $i \in \Pi_0(M)$ (par exemple si M est connexe). Alors, l'action de $g \in G$ par image-inverse en cohomologie $g^* : H(M) \rightarrow H(M)$ vérifie l'égalité*

$$(8) \quad g^* = \sigma_M(g) (g_*)^\vee,$$

où $g_*^\vee : H_c(M)^\vee \rightarrow H_c(M)^\vee$ est l'adjoint de g_* et $\sigma_M : G \rightarrow k^*$ est un caractère. Autrement dit, on a l'identification de G -modules

$$\boxed{H(M)[d_M] = \sigma_M \otimes H_c(M)^\vee},$$

où σ_M est la représentation de dimension 1 sur k , de caractère σ_M .

6.2.3. Commentaire. – Plus généralement, si M est un espace localement compact tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$, l'homomorphisme g^* sur $\sigma_M \otimes H_c^{d_M}(M)^\vee$ défini par (8) est toujours l'identité, et ce indépendamment de l'action de g sur $H_c^{d_M}(M)$.

6.2.4. Images inverses en cohomologie de Borel-Moore. – La substitution de la cohomologie ordinaire $H(M)$ d'une variété orientable M par sa cohomologie de Borel-Moore $H_{\text{BM}}(M)$ crée un cadre de travail dont la portée s'étend naturellement à toute pseudovariété M , et plus généralement à tout espace localement compact M , tel que $\dim(H_c^{d_M}(M)) = 1$. Dans ce cadre, l'accouplement de Poincaré $\langle _, _ \rangle_M$ est remplacé par l'accouplement vectoriel $(_, _) : V^\vee \times V \rightarrow k$, $(\alpha, v) := \alpha(v)$. Les adjonctions (ad 1-4) sont alors des définitions d'images-inverses en cohomologie de Borel-Moore.

6.2.4.1. Terminologie. – Un espace M où les composantes connexes C sont de même dimension d_M , telles que $\dim(H_c^{d_M}(C)) = 1$ et chacune munie d'un générateur $[C] \in H_c^{d_M}(C)$, sera (abusivement) appelé *espace muni d'une classe fondamentale* ⁽³⁶⁾. Les variétés topologiques orientées, les pseudovariétés (cf. bas de page 25, p. 39) et les variétés algébriques complexes, sont des exemples de tels espaces.

6.2.4.2. Définition d'image-inverse associée à une fibration. – La projection

$$p_b : F_{b+a}(M) \rightarrow F_b(M), \quad p_b(x_1, \dots, x_{b+a}) = (x_1, \dots, x_b)$$

est composée de l'inclusion ouverte $\iota : F_{b+a}(M) \subseteq F_b(M) \times M^a$ et de la projection $p(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}$, soit

$$\begin{array}{ccc} F_{b+a}(M) & \xrightarrow{\iota} & F_b(M) \times M^a \\ & \searrow p_b & \downarrow p \\ & & F_b(M). \end{array}$$

L'opération « d'intégration sur les fibres » de [ad-3]

$$p_b! : H_c(F_{b+a}(M)[a \cdot d_M]) \rightarrow H_c(F_b(M))$$

se décompose en

$$p_b! := p_! \circ \iota_!$$

où $\iota_! : H_c(F_{b+a}(M)) \rightarrow H_c(F_b(M) \times M^a)$ est le prolongement par zéro (cf. [ad-2]), et

$$p_! : H_c(F_b(M)) \otimes H_c(M^a) \rightarrow H_c(F_b(M))[-a d_M], \quad \omega \otimes \varpi \mapsto \omega \left(\int_{M^a} \varpi \right),$$

est l'intégration sur les fibres (cf. [ad-3]).

Le morphisme image-inverse induit par p_b en cohomologie de Borel-Moore est :

$$(9) \quad \boxed{p_b^* := (p_b!)^\vee : H_{\text{BM}}(F_b(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}(F_{b+a}(M))}.$$

⁽³⁶⁾ La terminologie est abusive dans la mesure où il n'y a *a priori* pas de faisceau d'orientation.

6.2.4.3. *Définition de l'action de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(F_m(M))$.* – D'après 6.2.1-[ad-4], l'action de $g \in \mathcal{S}_m$ par image-inverse sur $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ doit être l'adjoint à gauche du morphisme $g_i : H_c(F_m(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))$ défini par l'égalité (6) dans 6.2.1-[ad-4].

L'espace $F_m(M)$ est un ouvert \mathcal{S}_m -stable de M^m , et le scalaire $\sigma_{F_m(M)}(g_i)$, qui coïncide avec $\sigma_{M^m}(g_j)$ pour un certain $j \in \Pi_0(M^m)$, est en fait indépendant de la composante connexe i , car on a

$$[M^m] = p_1^*([M]) \wedge \cdots \wedge p_m^*([M]),$$

où $p_i : M^m \rightarrow M$ est la projection sur la i -ème coordonnée. Pour $g \in \mathcal{S}_m$, on a donc

$$g^*([M^m]) = p_{g^{-1}(1)}^*([M]) \wedge \cdots \wedge p_{g^{-1}(m)}^*([M]) = \text{sgn}(g)^{\dim M} [M^m],$$

où $\text{sgn}(_)$ est la signature d'une permutation de \mathcal{S}_m . Par conséquent,

$$(10) \quad \sigma_{M^m}(g) := \text{sgn}(g)^{\dim M}.$$

On peut maintenant s'inspirer de la proposition 6.2.2 et définir, en toute généralité, l'image-inverse g^* en *cohomologie* de Borel-Moore suivant la formule (8), soit

$$(11) \quad \boxed{g^* := \text{sgn}(g)^{\dim M} \cdot (g_*)^\vee : H_{\text{BM}}(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}(F_m(M))},$$

où $g_* := (g^{-1})^* : H_c(F_m(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))$ est l'image-directe en cohomologie à support compact.

6.2.5. Remarques

- (a) L'image-inverse (9) est compatible aux actions des groupes symétriques (11), moyennant l'identification $\mathcal{S}_b = \text{Fix}_{\mathcal{S}_{b+a}}(b+1, \dots, b+a)$.
- (b) Si M et N munis de classes fondamentales, il est facile de vérifier que l'on a :
 - (i) l'application $\mathcal{S}_m \ni g \mapsto \sigma_{(M \times N)^m}(g) \in k^*$ est un caractère multiplicatif;
 - (ii) pour tout $g \in \mathcal{S}_m$, on a $\sigma_{(M \times N)^m}(g) = \sigma_{M^m}(g) \cdot \sigma_{N^m}(g)$.
- (c) Prendre garde du fait que la formule (11) n'est pas valable pour les espaces $\Delta_{? \ell} M^m$, pour $\ell < m$. Par exemple, déjà sur $\Delta_1 M^m = M$, l'action de \mathcal{S}_m est triviale.

6.2.6. Suite exacte longue de *cohomologie* de Borel Moore. – Étant donnée une inclusion fermée $\iota : N \subseteq M$ d'espaces de dimensions $d_N < d_M$, l'ouvert complémentaire $U := M \setminus N$ est de dimension $= d_M$ (cf. 2.4.1). Soit $j : U \subseteq M$ l'inclusion. On dispose alors de la suite exacte longue

$$(12) \quad \rightarrow H_c^{i-1}(N) \rightarrow H_c^i(U) \xrightarrow{j_i} H_c^i(M) \xrightarrow{\iota^*} H_c^i(N) \rightarrow H_c^{i+1}(U) \rightarrow \cdots$$

dont le dual vectoriel est « la suite exacte longue de *cohomologie* de Borel-Moore » :

$$(13) \quad \rightarrow H_{\text{BM}}(N)[d_N] \xrightarrow{(\iota^*)^\vee} H_{\text{BM}}(M)[d_M] \xrightarrow{(j_i)^\vee} H_{\text{BM}}(U)[d_U] \rightarrow \cdots$$

Lorsque M et N sont des variétés topologiques orientées, la dualité de Poincaré identifie $(j_!)^\vee$ à j^* , le morphisme de restriction (cf. [ad-2]), et $(\iota^*)^\vee$ à $\iota_!$, la multiplication par la classe de Thom de $N \subseteq M$ (cf. [ad-1]), et l'on retrouve la *suite exacte de Gysin* :

$$\rightarrow H(N)[d_N] \xrightarrow{\iota_!} H(M)[d_M] \xrightarrow{j^*} H(U)[d_U] \rightarrow .$$

6.2.7. Ingérence de la signature des permutations dans $H_{\text{BM}}(F_m(M))$. – Dans 6.2.4.3 nous avons perturbé l'action duale de \mathcal{S}_m sur $H_c(F_m(M))^\vee$ de façon à retrouver une action de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(M^m)$ qui corresponde à son action en cohomologie ordinaire $H(M^m)$ lorsque M est lisse. Ceci fait partie, comme expliqué dans la section 0.7.2 de l'introduction, d'un ensemble de modifications dans les généralisations des énoncés concernant les familles de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$, sans quoi le phénomène de stabilité disparaît. Aussi, devant un morphisme entre cohomologies de Borel-Moore pour d'espaces de configuration généralisés, il faudra toujours contrôler sa compatibilité avec l'action du groupe symétrique. La proposition suivante en est un exemple important.

PROPOSITION 6.2.8 (et notation). – *Étant donnés des espaces M et X , et un point $x \in X$, posons $M_X := M \times X$ et $M_x := M \times \{x\}$.*

L'adjoint du morphisme de restriction $\rho : H_c(F_m(M_X)) \rightarrow H_c(F_m(M_x))$ est le morphisme de \mathcal{S}_m -modules

$$\rho^\vee(_) \otimes 1 : H_{\text{BM}}(F_m(M_x)) \otimes (\sigma_m)^{\otimes \dim X} \rightarrow H_{\text{BM}}(F_m(M_X))[d_{X^m}],$$

où σ_m est le caractère signature de \mathcal{S}_m et où $H_{\text{BM}}(M_x)$ et $H_{\text{BM}}(M_X)$ sont munis des structures de \mathcal{S}_m -modules définies dans 6.2.4.3.

Démonstration. – D'après (11), la représentation de \mathcal{S}_m sur $H_{\text{BM}}(F_m(M_X))$ est la représentation duale sur $H_c(F_m(M_X))^\vee$ tordue par $\sigma_{(M \times X)^m} = \sigma_{M^m} \cdot \sigma_{X^m}$ (remarque 6.2.5-(b)) tandis que sur $H_{\text{BM}}(F_m(M_x))$, on tord par σ_{M^m} . La différence est $\sigma_{X^m} = (\sigma_m)^{\otimes \dim X}$, d'après (10), donc 1 si $\dim X$ est paire, et le caractère signature sinon. \square

6.3. Approximation de $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ à l'aide d'espaces i -acycliques

Dans les sections 3 et 4 (resp. la section 10), les méthodes pour la détermination du polynôme de Poincaré (resp. du caractère de \mathcal{S}_m -module) de $H_c(F_m(M))$ s'appliquent lorsque M est i -acyclique (cf. 4.2.1, 4.2.2), mais pas lorsque M est général, ce pour quoi il faut une nouvelle idée, comme celle que nous donnons à continuation qui permet d'approcher $H_{\text{BM}}(F_m(M))$, où M est un espace localement compact *arbitraire*, à l'aide d'une suite spectrale dont les termes sont de la forme $H_{\text{BM}}(F_\ell(M \times X))$ avec $\ell \leq m$, et, surtout, avec X *i -acyclique*, suite que l'on appellera « la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ » (cf. thm. 6.5.2). L'idée est basée sur le fait élémentaire suivant.

LEMME 6.3.1. – *Tout espace localement compact M peut être réalisé comme fermé dans un espace i -acyclique, de complémentaire (donc) également i -acyclique.*

Démonstration. – Si X est i -acyclique et si $x \in X$, l'espace M s'identifie au fermé $M_x := M \times \{x\}$ de l'espace i -acyclique $M_X := M \times X$ (proposition 1.8.2-(e)). \square

On note alors $V := X - x$ et $M_V := M \times V$ et l'on remarque que dans la suite longue de cohomologie :

$$(14) \quad \rightarrow H_c(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m)) \xrightarrow{\iota} H_c(F_m(M_X)) \xrightarrow{\rho} H_c(F_m(M_x)) \rightarrow,$$

on a $\rho = 0$. En effet, le prolongement par zéro $H_c(M_V) \rightarrow H_c(M_X)$ est surjectif, les arguments de la remarque 3.1.3 s'appliquent et établissent la surjectivité du prolongement par zéro $\tilde{\iota} : H_c(F_m(M_V)) \rightarrow H_c(F_m(M_X))$. La surjectivité de ι en résulte, car $\text{im}(\iota) \supseteq \text{im}(\iota')$, et la nullité de ρ s'ensuit.

Ces arguments et la proposition 6.2.8 prouvent aussitôt la proposition suivante.

PROPOSITION 6.3.2. – *Soient M et X des espaces où X est i -acyclique. Soit $x \in X$.*

(a) *La suite courte de \mathcal{S}_m -modules*

$$0 \rightarrow H_c(F_m(M_x))[-1] \rightarrow H_c(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m)) \rightarrow H_c(F_m(M_X)) \rightarrow 0$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support compact (14), est exacte.

(b) *La suite de \mathcal{S}_m -modules (pour l'action 6.2.4.3)⁽³⁷⁾*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{BM}}(F_m(M_X))[md_X - 1] &\rightarrow H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))[md_X - 1] \\ &\rightarrow H_{\text{BM}}(F_m(M_x)) \otimes (\sigma_m)^{\otimes \dim X} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

extraite de la suite longue de cohomologie de Borel-Moore, est exacte.

Le polynôme de Poincaré de $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ est donc déterminé par celui de $H_{\text{BM}}(F_m(M_X))$, déjà connu, et par celui de $H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))$, qui fera l'objet d'étude des sections suivantes.

6.4. Une suite spectrale pour $H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))$

6.4.1. Rappel : cochaînes simpliciales, ordonnées et alternées. – Étant donnée une famille finie d'ouverts $\mathcal{U} = \{\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_m\}$ d'un espace topologique X , on rappelle que l'on dispose classiquement de trois notions de p -cochaînes de Čech pour le foncteur des section locales. À savoir,

⁽³⁷⁾ L'énoncé est vrai indépendamment de l'existence de classes fondamentales, sauf pour ce qui est des structures de \mathcal{S}_m -modules que nous n'avons pas définies dans telle généralité.

— Le groupe des « p -cochaînes simpliciales (non-ordonnées) »

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, _) := \bigoplus_{(i_0, \dots, i_p)} \Gamma(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}, _),$$

où (i_0, \dots, i_p) est un suite d'éléments deux à deux distincts de $[[1, m]]$.

— Le groupe des « p -cochaînes (simpliciales) ordonnées »

$$\check{C}_{<}^p(\mathcal{U}, _) := \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} \Gamma(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}, _).$$

— Le groupe des « p -cochaînes (simpliciales) alternées » $\check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _)$. C'est le sous-groupe des p -cochaînes $\omega \in \check{C}^p(\mathcal{U}, _)$ vérifiant pour $\alpha \in \mathcal{S}_{[[0, p]]}$:

$$(15) \quad \omega_{i_0, \dots, i_p} = \text{sgn}(\alpha) \omega_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}}.$$

Remarquons en passant que l'application « d'antisymétrisation »

$$(E) \quad \varepsilon_p : \check{C}_{<}^p(\mathcal{U}, _) \rightarrow \check{C}_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}, _)$$

définie, suivant la même égalité (15), par $\varepsilon_p(\omega)_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}} := \text{sgn}(\alpha) \omega_{i_0, \dots, i_p}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_{[[0, p]]}$ et tout $1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m$, est bijective.

Dans les trois cas, l'opérateur cobord $\delta_p : \check{C}_{?}^p(\mathcal{U}, _) \rightarrow \check{C}_{?}^{p+1}(\mathcal{U}, _)$

$$(\delta\omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0, \dots, p+1} (-1)^k \omega_{i_0, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_{p+1}} |_{\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

a un sens et respecte chaque type de cochaîne. L'antisymétrisation

$$\varepsilon_* : (\check{C}_{<}^*(\mathcal{U}, _), \delta_*) \rightarrow (\check{C}_{\varepsilon}^*(\mathcal{U}, _), \delta_*)$$

est alors un isomorphisme de complexes.

L'assertion suivante est classique (cf. Godement [21], §I.3.8, p. 58).

PROPOSITION 6.4.2. — *Les inclusions de complexes*

$$(16) \quad (\check{C}_{<}^*(\mathcal{U}, _), \delta_*) \subseteq (\check{C}^*(\mathcal{U}, _), \delta_*) \supseteq (\check{C}_{\varepsilon}^*(\mathcal{U}, _), \delta_*)$$

sont des quasi-isomorphismes.

Les complexes (16) sont donc interchangeable pour les besoins du calcul de la cohomologie de Čech.

6.4.3. Faisceaux et complexes de Čech \mathcal{S}_m -équivariants. – Revenons sur le cas de l'espace $\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m)$ de 6.3.2. Munissons-le du recouvrement $\mathcal{U}^m = \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$, où :

$$\mathbb{U}_i^m := \Delta_m(M_X \times \cdots \times \overset{i}{M_V} \times \cdots \times M_X) \subseteq F_m(M_X),$$

avec $V := X \setminus \{x\}$. Notons ensuite

$$\mathbb{U}^m := \mathbb{U}_1^m \cup \cdots \cup \mathbb{U}_m^m, \quad \mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m := \mathbb{U}_{i_0}^m \cap \cdots \cap \mathbb{U}_{i_p}^m,$$

et même $\mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_p)}$: une copie de $\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m$ paramétrée par l'uplet (i_0, \dots, i_p) .

Le groupe \mathcal{S}_m agit sur \mathbb{U}^m par permutation des coordonnées, nous avons donc $g \cdot \mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m = \mathbb{U}_{g(i_0), \dots, g(i_p)}^m$, pour tout $g \in \mathcal{S}_m$.

DÉFINITION 6.4.4. – *Un faisceau \mathcal{G} sur \mathbb{U}^m est dit « \mathcal{S}_m -équivariant » s'il est muni d'une famille d'isomorphismes $\{\phi_{g,V} : \Gamma(gV; \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{G})\}_{(g,V)}$, indexée par les couples (g, V) où $g \in \mathcal{S}_m$ et V est un ouvert de \mathbb{U}^m , telle que la relation cocyclique $\phi_{h,gV} \circ \phi_{g,V} = \phi_{hg,V}$ est satisfaite pour $h, g \in \mathcal{S}_m$ et tout ouvert V de \mathbb{U}^m . Les définitions de morphisme \mathcal{S}_m -équivariant entre faisceaux \mathcal{S}_m -équivariants et de catégorie des faisceaux \mathcal{S}_m -équivariants s'ensuivent.*

Les faisceaux des germes de cochaînes de Borel-Moore $\underline{\Omega}_{\text{BM}, \mathbb{U}^m}^i$ sur \mathbb{U}^m , que nous allons introduire dans 6.4.6, constituent le principal exemple dans ce travail de faisceau \mathcal{S}_m -équivariant. Définis comme duaux des cofaisceaux des cochaînes d'Alexander-Spanier à support compact $\underline{\Omega}_{\text{c}, \mathbb{U}^m}^{d_M - i}$, les faisceaux $\underline{\Omega}_{\text{BM}, \mathbb{U}^m}^i$ héritent naturellement de l'action duale de l'action de \mathcal{S}_m sur $\underline{\Omega}_{\text{c}, \mathbb{U}^m}$.

PROPOSITION 6.4.5. – *Munissons $\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m = \Delta_m(M_X^{m-(p+1)} \times M_V^{p+1})$ de l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ par permutation de coordonnées.*

(a) *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_p : \mathcal{S}_m \times_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}} \mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m &\rightarrow \coprod_{(i_0, \dots, i_p)} \mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_p)}^m \\ (g, x) &\mapsto g(x) \in \mathbb{U}_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m, \end{aligned}$$

où (i_0, \dots, i_p) est une suite d'éléments distincts de $\llbracket 1, m \rrbracket$, est un homéomorphisme.

Soit maintenant \mathcal{G} un faisceau \mathcal{S}_m -équivariant sur \mathbb{U}^m . On note $\sigma \mapsto g \star \sigma$ l'action de $g \in \mathcal{S}_m$ sur une section locale $\sigma \in \mathcal{G}$.

(b) *Le morphisme image-directe défini par l'homéomorphisme Φ_p , à savoir*

$$\begin{aligned} \Phi_p! : \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}) &\rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}) = \bigoplus_{(i_0, \dots, i_p)} \Gamma(\mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_p)}^m; \mathcal{G}) \\ (g, \sigma) &\mapsto g \star \sigma \in \Gamma(\mathbb{U}_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m; \mathcal{G}), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il induit sur $\check{C}^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$ l'action $\omega \mapsto g \diamond \omega$ de \mathcal{S}_m :

$$(h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_p} := h \star (\omega_{h^{-1}(i_0), \dots, h^{-1}(i_p)}).$$

Cette action est compatible au cobord des cochaînes simpliciales.

Le complexe de Čech augmenté :

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathbb{U}^m; \mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \dots$$

est un complexe de \mathcal{S}_m -modules.

- (c) Le complexe des cochaînes alternées $(\check{C}_\varepsilon^*(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}), \delta_*)$ est un sous-complexe de \mathcal{S}_m -modules du complexe des cochaînes simpliciales $(\check{C}^*(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}), \delta_*)$. L'antisymétrisation $\varepsilon_* : (\check{C}_<^*(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}), \delta_*) \rightarrow (\check{C}_\varepsilon^*(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}), \delta_*)$ transfère cette structure et munit chaque groupe $\check{C}_<^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$ de l'action $\omega \mapsto g \star \omega$ de \mathcal{S}_m .

Le complexe de cochaînes ordonnées de Čech augmenté :

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathbb{U}^m; \mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon} \check{C}_<^0(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}_<^1(\mathcal{U}; \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta_1} \dots$$

est un complexe de \mathcal{S}_m -modules. De plus, l'application

$$\Psi_p : \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}) \otimes \sigma_{p+1} \rightarrow \check{C}_<^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G}) = \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} \Gamma(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m; \mathcal{G})$$

$$(g, \sigma) \mapsto g \diamond \sigma \in \Gamma(g(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m); \mathcal{G}),$$

où ' \diamond ' désigne l'action ' \star ' de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ tordue par le caractère signature σ_{p+1} de \mathcal{S}_{p+1} , est un isomorphisme de \mathcal{S}_m -modules.

Démonstration. – (a) L'application Φ_p est définie sur la réunion disjointe de copies de $\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m$ indexées par les éléments $\bar{g} \in \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_{m-(p+1)}$. Pour chaque $g \in \mathcal{S}_m$, la restriction de Φ_p à $(\bar{g}, \mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m)$ est un homéomorphisme sur $\mathbb{U}_{(g(m-p), \dots, g(m))}^m$. On conclut que Φ_p est bijective en remarquant que le cardinal $|\mathcal{S}_m / \mathcal{S}_{m-(p+1)}|$ est précisément celui de l'ensemble des $(p+1)$ -uplets (i_0, \dots, i_p) d'éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, m \rrbracket$.

(b) résulte de (a) et des identités :

$$\begin{aligned} \delta(h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} &= \sum_{j=0}^{p+1} (h \diamond \omega)_{i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{p+1}} \Big|_{\mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \\ &= \sum_{j=0}^{p+1} \left(h \star (\omega_{h^{-1}(i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{p+1})}) \right) \Big|_{\mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \\ &= h \star \left(\sum_{j=0}^{p+1} \omega_{h^{-1}(i_0, \dots, \widehat{i}_j, \dots, i_{p+1})} \Big|_{\mathbb{U}_{h^{-1}(i_0, \dots, i_{p+1})}^m} \right) = (h \diamond \delta \omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}}. \end{aligned}$$

(c) Soit $\omega \in \check{C}_\varepsilon^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$. Pour $\alpha \in \mathcal{S}_{\llbracket 0, p \rrbracket}$ et $h \in \mathcal{S}_m$, on a :

$$\begin{aligned} (h \diamond \omega)_{i_{\alpha(0)}, \dots, i_{\alpha(p)}} &= h \star (\omega_{h^{-1}(i_{\alpha(0)}), \dots, h^{-1}(i_{\alpha(p)})}) \\ &= \text{sgn}(\alpha) h \star (\omega_{h^{-1}(i_0), \dots, h^{-1}(i_p)}) \\ &= \text{sgn}(\alpha) (h \diamond \omega)_{i_0, \dots, i_p}, \end{aligned}$$

et $\check{C}_\varepsilon^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$ est bien un sous- \mathcal{S}_m -module de $\check{C}_\varepsilon^p(\mathcal{U}^m; \mathcal{G})$.

Le sous-espace $\varepsilon_p(\Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}))$ est stable sous $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ dont l'action est tordue par le caractère signature de \mathcal{S}_{p+1} . Le morphisme de \mathcal{S}_m -modules Ψ_p est donc bien défini et il est surjectif puisque $\varepsilon_p(\Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m; \mathcal{G}))$ engendre clairement

$\check{C}_\varepsilon^p(U^m; \mathcal{G})$ en tant que \mathcal{S}_m -module. Le fait que Ψ_p est bijectif résulte alors du fait que $|\mathcal{S}_m/(\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1})|$ est également le cardinal de l'ensemble des parties $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que $|I| = p + 1$. \square

6.4.6. Suite spectrale de Borel-Moore attachée à un recouvrement ouvert

Nous rappelons maintenant, pour un G -espace donné, les bases théoriques de la construction de la suite spectrale de G -modules associée à un recouvrement ouvert G -stable et qui converge vers la *cohomologie* de Borel-Moore.

6.4.6.1. *Faisceaux de germes de cochaînes de Borel-Moore.* – Soit M un espace localement compact de dimension d_M muni de l'action d'un groupe fini G . Dans 2.4.2-(a) nous avons introduit la résolution c -molle

$$0 \rightarrow \underline{k}_M \hookrightarrow \underline{\Omega}_M^0 \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}_M^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{d_M-1}} \underline{\Omega}_M^{d_M} \rightarrow 0,$$

qui est une résolution dans la catégorie des faisceaux G -équivariants 6.4.4. Pour tout ouvert $U \subseteq M$, le complexe des « cochaînes à support compact »

$$(\Omega_c^*(U), d) := \Gamma_c(U; (\underline{\Omega}_M^*, d_*))$$

calcule la cohomologie à support compact $H_c^*(U)$, et si U est en plus stable sous l'action de G , c'est aussi un complexe de G -modules pour l'action d'image-directe.

Si $\iota_{V \subseteq U} : V \subseteq U$ est une inclusion ouverte, le prolongement par zéro

$$\iota_{V \subseteq U}! : (\Omega_c^*(V), d_*) \rightarrow (\Omega_c^*(U), d_*)$$

est une inclusion de complexes, et la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega_c^*(U), d_*) \\ \uparrow & & \uparrow \iota_{V \subseteq U} \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega_c^*(V), d_*) \end{array}$$

définit un complexe $(\underline{\Omega}_{M,c}^*, d_*)$ de *pré-cofaisceaux flasques* sur M qui sont en fait des *cofaisceau* puisque les $\underline{\Omega}_{M,c}^i$ sont c -mous (cf. [8] V.1.6, p. 282).

Pour tout ouvert $U \subseteq M$, le « complexe des cochaînes de Borel-Moore sur U » est défini par dualité et décalage :⁽³⁸⁾

$$(17) \quad (\Omega_{\text{BM}}^*(U), d_*) := ((\Omega_c^*(U), d_*)^\vee)[-d_M].$$

⁽³⁸⁾ On remarquera l'abus de notation qui consiste à noter de la même manière les différentielles des deux complexes $(\Omega_c^*(U), d_*)$ et $(\Omega_{\text{BM}}^*(U), d_*)$.

6.4.7. Commentaire. – Lorsque U est G -stable, chaque $\Omega_{\text{BM}}^i(U)$ est *a priori* muni de l'action de G duale de son action par image-directe sur $\Omega_c^i(U)$, mais rappelons que cette action ne correspond pas à l'action de G par image-inverse lorsque U est une variété topologique orientée, et qu'il faudra tordre cette action duale par le caractère σ_U tel qu'expliqué dans 6.2.4.3. C'est ainsi que, pour un espace localement compact U muni d'une classe fondamentale, on notera ' \star ' l'action duale de G sur $\Omega_c^i(U)$ tordue par σ_U , de manière à garder une compatibilité avec la définition dans 6.2.4.3.

Dans tous les cas, le complexe (17) est un complexe de G -modules qui calcule la *cohomologie* de Borel-Moore $H_{\text{BM}}^*(U)$. De plus, la correspondance

$$\begin{array}{ccc} U & \rightsquigarrow & (\Omega_{\text{BM}}^*(U), d_*) \\ \uparrow & & \downarrow \iota_{V \subseteq U}^* \\ V & \rightsquigarrow & (\Omega_{\text{BM}}^*(V), d_*) \end{array}$$

où $\iota_{V \subseteq U}^* := (\iota_{V \subseteq U})^\vee$, est le complexe $(\underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^*, d_*)$ des « faisceaux (flasques) de germes de cochaînes de Borel-Moore » sur M . C'est un complexe de faisceaux G -équivalariants.

6.4.7.1. Bicomplexe de cochaînes Čech-Borel-Moore. – Soit $\mathcal{U}^m = \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$ une famille G -stable d'ouverts de M , c'est-à-dire telle qu'il existe une action de G sur $[[1, m]]$ vérifiant $g(\mathbb{U}_i^m) = \mathbb{U}_{g(i)}^m$. On pose

$$\mathbb{U}^m := \mathbb{U}_1^m \cup \dots \cup \mathbb{U}_m^m, \quad \mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m := \mathbb{U}_{i_0}^m \cap \dots \cap \mathbb{U}_{i_p}^m,$$

et l'on considère le bicomplexe $(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{c, \bullet}^*, \partial_\bullet, d_\bullet)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \partial_0 \downarrow & & \partial_0 \downarrow & & \partial_0 \downarrow \\ (\check{C}_c) & 0 & \longrightarrow & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}_0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, c}^2) \xrightarrow{d_2} \\ & & \epsilon \downarrow & & \epsilon \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{M, c}^0(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\Omega}_{M, c}^1(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\Omega}_{M, c}^2(\mathbb{U}^m) \xrightarrow{d_2} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0, \end{array}$$

dont les colonnes sont les complexes de « chaînes de Čech à valeurs dans un cofaisceau » et sont exactes puisque les cofaisceaux $\underline{\Omega}_{M, c}^i$ sont flasques⁽³⁹⁾.

En dualisant, on obtient un bicomplexe de colonnes exactes

⁽³⁹⁾ Cf. Bredon [8] chap. VI. Cosheaves and Čech Homology, corollary VI.4.5, p. 426.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^1(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^2) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \delta_0 \uparrow & & \delta_0 \uparrow & & \delta_0 \uparrow \\
 (\check{C}_{\text{BM}}) & 0 & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^0) & \xrightarrow{d_0} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^1) & \xrightarrow{d_1} & \check{C}^0(\mathcal{U}^m, \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^2) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \epsilon \uparrow & & \epsilon \uparrow & & \epsilon \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^0(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{d_0} & \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^1(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{d_1} & \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^2(\mathbb{U}^m) \xrightarrow{d_2} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

qui est un bicomplexe de G -modules puisque l’analogie du théorème 6.4.5 est vérifié pour les données en cours.

On appellera « bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de \mathcal{U}^m », le bicomplexe du premier quadrant

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*} := (\check{C}^\bullet(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{M, \text{BM}}^*), \delta_\bullet, d_*).$$

6.4.7.2. *Filtration régulière de $H_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m)$ et suite spectrale.* – En raison de l’exactitude des colonnes de (\check{C}_{BM}) , le morphisme d’augmentation ϵ induit un quasi-isomorphisme de complexes de G -modules

$$\epsilon_* : (\Omega_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m), d_*) \rightarrow \text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}),$$

où ‘tot’ désigne le complexe simple associé. On a donc un isomorphisme de G -modules

$$h^i(\epsilon_*) : H_{\text{BM}}^i(\mathbb{U}^m) \simeq h^i(\text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}))$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, k}^{\bullet,*}$ le sous-bicomplexe de $\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$ défini par

$$\begin{cases} \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, k}^{i,*} = 0, & \text{si } i < k, \\ \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, k}^{i,*} = \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{i,*}, & \text{si } k \leq i \leq m - 1. \end{cases}$$

On a la filtration décroissante de bicomplexes de G -modules

$$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*} = \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, 0}^{\bullet,*} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, 1}^{\bullet,*} \supseteq \check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, 2}^{\bullet,*} \supseteq \cdots,$$

induisant une filtration positivement graduée décroissante et régulière du complexe $\text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ de même donc que pour $H_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m)$ pour lequel on pose

$$H_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m)_k := h(\epsilon_*)^{-1}(h^*(\text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}, k}^{\bullet,*}))).$$

On notera $\mathbb{F}H_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m)$ et $\mathbb{F}\text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ ces objets filtrés.

REMARQUE 6.4.8. – Dans ce qui précède, nous aurions tout aussi bien pu considérer les cochaînes de Čech ordonnées ou alternées, ce qui aurait fournit les bicomplexes de G -modules $\check{C}_{<}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$ et $\check{C}_\epsilon(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*}$.

La proposition suivante est bien connue ⁽⁴⁰⁾.

PROPOSITION 6.4.9. – *La suite spectrale de G -modules $\mathbb{E}(\mathcal{U}^m) := (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ associée au complexe de G -modules gradué filtré $\mathbb{F}\text{tot}^*(\check{C}_?(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet,*})$ converge vers le bigradué de $\mathbb{F}H_{\text{BM}}^*(\mathbb{U}^m)$. On a*

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} := \check{C}_?^p(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(_))$$

et

$$(E) \quad \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_2^{p,q} := \check{H}^p(\mathcal{U}^m, \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(_)) \implies \text{Gr}^{p,q}(\mathbb{F}H_{\text{BM}}^*(\mathcal{U}^m)).$$

Le théorème suivant est maintenant corollaire immédiat de 6.4.9 et de 6.4.5.

THÉORÈME 6.4.10. – *Soient des espaces M et X et un point $x \in X$. Le \mathcal{S}_m -module $H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))$ (pour l'action 6.2.4.3) est l'aboutissement de la suite spectrale $\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)$ de 6.4.9 pour le recouvrement $\mathcal{U}^m := \{\mathbb{U}_1^m, \dots, \mathbb{U}_m^m\}$, où*

$$\mathbb{U}_i^m := \Delta_m(M_X \times \dots \times \overbrace{M_{X-x}^m}^i \times \dots \times M_X) \subseteq F_m(M_X).$$

L'identification de 6.4.5-(c) pour le groupe des p -cochaînes ordonnées

$$\check{C}_{<}^p(\mathcal{U}^m; \underline{\Omega}_{\mathbb{U}^m, \text{BM}}^*) = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m; \underline{\Omega}_{\mathbb{U}^m, \text{BM}}^*) \otimes \sigma_{p+1}$$

munit $(\check{C}_{<}^*(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$ d'une structure de complexe de \mathcal{S}_m -modules. Les termes $(\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ de la suite spectrale $\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)$ héritent d'une structure de complexe de \mathcal{S}_m -modules et la suite spectrale converge au sens de suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué $H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_X^m \setminus M_x^m))$ muni de filtration régulière de la proposition 6.4.9. Dans le cas particulier où $r = 1$, on a

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma_{p+1},$$

et $d_1 : \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p-1,q} \rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q}$ un morphisme de \mathcal{S}_m -modules.

REMARQUE 6.4.11. – Le même énoncé est valable pour le complexe des cochaînes non-ordonnées $(\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _), \delta_*)$, auquel cas on a

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m),$$

en raison de l'égalité $\check{C}^p(\mathcal{U}^m, _) = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \Gamma(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m, _)$ de 6.4.5-(b).

⁽⁴⁰⁾ Cf. Godement [21] chap. I.4, thm. 4.2.2.

6.5. La suite spectrale « basique » pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$

Nous nous restreignons maintenant à une situation qui simplifie sensiblement les considérations précédentes. C'est le cas où l'espace X est l'espace $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, \infty[$, puis $x := 0$ et $V := \mathbb{R}_{> 0}$. Dans la suite, M sera localement compact de dimension finie d_M (cf. 2.4.1), et l'on notera

$$M_{\geq 0} := M \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad M_0 := M \times \{0\}, \quad M_{> 0} := M \times \mathbb{R}_{> 0}.$$

Les espaces $M_{\geq 0}$ et $M_{> 0}$ sont i -acycliques et

$$M \simeq M_0 = (M_{\geq 0} \setminus M_{> 0}).$$

On remarquera que puisque $H_c(\mathbb{R}_{\geq 0}) = 0$, on a (proposition 4.2.1-(a))

$$H_c(F_m(M_{\geq 0})) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

6.5.1. – La proposition 6.3.2 se simplifie et donne des isomorphismes de \mathcal{S}_m -modules

$$H_c(F_m(M)) \simeq H_c(\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m))[1].$$

De plus, pour les structures de \mathcal{S}_m -modules (pour l'action 6.2.4.3), on a ⁽⁴¹⁾

$$(18) \quad \boxed{H_{\text{BM}}(F_m(M)) \simeq H_{\text{BM}}(\Delta_m(M_{\geq 0}^m \setminus M_0^m))[m-1] \otimes \sigma_m},$$

où l'apparition du caractère signature a été justifiée dans 6.2.8.

Avec ces données, la suite spectrale de 6.4.10 convenablement modifiée par le caractère σ_m , converge vers $H_{\text{BM}}(F_m(M))[1-m]$, on l'appellera « la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$ ».

THEORÈME DES SUITES SPECTRALES BASIQUES 6.5.2. – *Soit M un espace localement compact de dimension finie ⁽⁴²⁾. La suite $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m) := \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma_m$ converge, en tant que suite spectrale de complexes de \mathcal{S}_m -modules, vers le \mathcal{S}_m -module bi-gradué associé au \mathcal{S}_m -module gradué $H_{\text{BM}}(F_m(M))[1-m]$ (pour l'action 6.2.4.3) muni de filtration régulière induite par l'isomorphisme (18) ci-dessus. De plus,*

(a) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\boxed{\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M))},$$

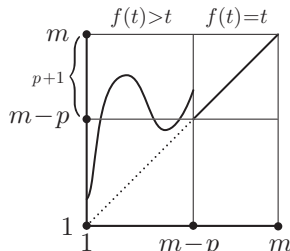
avec $q = i + (m - (p + 1))$. Dans cette écriture, le groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ opère sur $H_{\text{BM}}(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m)$ par image-inverse 6.2.4.3 et le caractère $\sigma_{m-(p+1)}$ affecte uniquement l'action du sous-groupe $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times 1$.

(b) *On a une décomposition canonique d'espaces vectoriels*

$$\boxed{\Xi_{p+1}^m : H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \simeq \bigoplus_{f \in \mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}^{q-(m-(p+1))d_M}(F_{\mathbf{p}(f)}(M_{> 0}))},$$

⁽⁴¹⁾ Dans le cas général où M n'est pas muni d'une classe fondamentale, on a toujours un isomorphisme d'espaces vectoriels, mais on perd l'aspect représentation de \mathcal{S}_m (cf. note (37), p. 84).

⁽⁴²⁾ Comme dans la note précédente, si l'on néglige l'aspect représentations, l'énoncé reste valable plus généralement pour les espaces localement compacts de dimension finie.



où nous avons noté $\mathcal{F}(p+1, m)$ l'ensemble des applications $f : [[1, m]] \rightarrow [[1, m]]$ qui fixent l'intervalle $[[m-p, m]]$ et qui sont telles que $f(t) > t$ si $t < m-p$. On a $|\mathcal{F}(p+1, m)| = (m-1)!/p!$. La paramétrisation associée à $f \in \mathcal{F}(p+1, m)$ est un sous-espace

$$F_{\mathbf{p}(f)}(M_{>0}) \subseteq \Delta_{p+1}(M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times F_{p+1}(M_{>0})),$$

où $\mathbf{p}(f)$ est la partition de $[[1, m]]$ définie par les fibres de l'application f (cf. section 2.3.2).

- (c) Pour avoir $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \neq 0$, il faut que $(m-(p+1))d_M \leq q \leq m d_M$.
 (d) Pour $i \in \mathbb{N}$ donné, les termes de $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)_r^{p,q}$, pour $r \geq 1$, qui contribuent à $H_{\text{BM}}^i(F_m(M))$ sont ceux pour lesquels on a $(m-(p+1))(d_M-1) \leq i$.

Indication. – (a) Le foncteur $(_) \otimes \sigma_m$ étant exact, la convergence de $\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)$ vers $H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma_m$ est assurée. Ensuite, l'égalité classique⁽⁴³⁾

$$\begin{aligned} & \left(\text{ind}_{\mathbb{S}_{m-(p+1)} \times \mathbb{S}_{p+1}}^{\mathbb{S}_m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma_{p+1} \right) \otimes \sigma_m \\ &= \text{ind}_{\mathbb{S}_{m-(p+1)} \times \mathbb{S}_{p+1}}^{\mathbb{S}_m} \left(H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \otimes \sigma_{p+1} \otimes \text{res}_{\mathbb{S}_{m-(p+1)} \times \mathbb{S}_{p+1}}^{\mathbb{S}_m} \sigma_m \right) \end{aligned}$$

explique le changement de σ_{p+1} en $\sigma_{m-(p+1)}$ dans l'énoncé 6.4.10. L'égalité $p+q = i + (m-1)$ découle quant à elle de 6.5.1-(18).

(b) Puisque $H_c(M_{\geq 0}) = 0$, le morphisme de liaison dans la suite longue de cohomologie à support compact 2.1.2 pour $Z := M_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times M_{>0}^b)$, à savoir

$$H_c(\Delta_{\leq a-1+b}(M_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times M_{>0}^b))) \rightarrow H_c(\Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times M_{>0}^b))[1],$$

est un isomorphisme. Comme d'autre part, la projection sur les dernières coordonnées

$$\pi_{a-1+b} : \Delta_{\leq a-1+b}(M_{\geq 0} \times \Delta_{a-1+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times M_{>0}^b)) \rightarrow \Delta_{a-1+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times M_{>0}^b).$$

est un revêtement trivial à $(a-1+b)$ nappes paramétrées par les éléments $t \in [[2, a+b]]$.

On a un isomorphisme canonique

$$H_c(\Delta_{a-1+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times M_{>0}^b))^{a-1+b}[-1] \simeq H_c(\Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times M_{>0}^b)),$$

et par induction

$$H_c(F_b(M_{>0}))^{(a+b-1)!/(b-1)!}[-a] \simeq H_c(\Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times M_{>0}^b)),$$

⁽⁴³⁾ Étant donnée une inclusion de groupes $H \subseteq G$, un H -module V et un G -module W , on a $\text{ind}_H^G V \otimes_k W \cong \text{ind}_H^G (V \otimes_k \text{res}_H^G W)$.

où $(a + b - 1)! / (b - 1)! = |\mathcal{F}(b, a + b)|$.

Par conséquent,

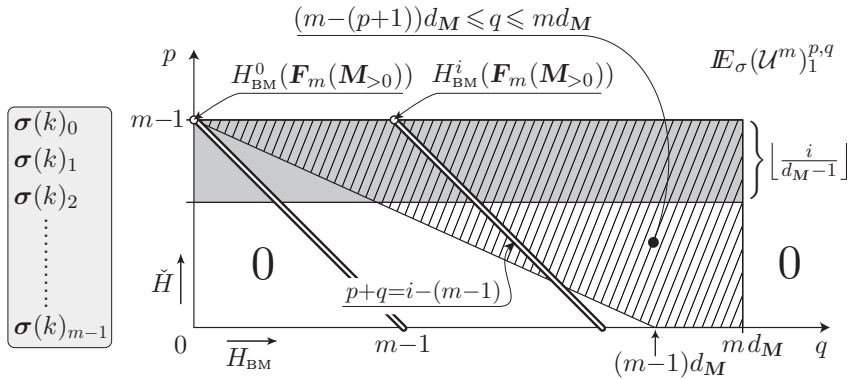
$$\begin{aligned} H_c(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) &= H_c(\Delta_m(M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times M_{> 0}^{p+1})) \\ &= \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_c(F_{p+1}(M_{> 0}))[-(m - (p + 1))], \end{aligned}$$

et par dualité, l'isomorphisme annoncé dans (b)

$$(19) \quad H_{\text{BM}}(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \xrightarrow[\simeq]{\Xi_{p+1}^m} \bigoplus_{\mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}(F_{p+1}(M_{> 0}))[-(m - (p + 1)) d_M].$$

(c) Étant donné que l'on a $H_{\text{BM}}^i(F_{p+1}(M_{> 0})) = 0$, pour tout $i \notin \llbracket 0, (p + 1) d_M \rrbracket$, puisque $H_c^i(F_{p+1}(M_{> 0})) = 0$ si $i < p + 1$ (proposition 4.2.1-(a)), on comprend par (19) que pour si $H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \neq 0$, alors $q \in \llbracket (m - (p + 1)) d_M, m d_M \rrbracket$, d'où (c). À partir de là, si l'on fixe $i \in \mathbb{N}$, la majoration (d) résulte du fait de l'égalité $q = i + m - (p + 1)$. \square

6.5.3. Termes non nuls de la suite spectrale basique. – La figure suivante illustre les assertions 6.5.2-(c) et (d). Les termes $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}_r^m)^{p, q}$ non nuls pour $r \geq 1$ sont dans la région hachurée, et, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, ceux qui contribuent à $H_{\text{BM}}^i(F_m(M))$ sont dans la région à la fois hachurée et grisée.



Le petit tableau à gauche rappelle que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ par image-inverse sur les termes de la ligne p est tordue par le caractère $\sigma_{m-(p+1)}$.

6.6. Naturalité de la suite spectrale basique pour $H_{\text{BM}}(F_m(M))$

6.6.1. – On rappelle que l'on note $p_m : F_{m+1}(M) \rightarrow F_m(M)$ la projection sur les m premières coordonnées. Nous supposons M muni d'une classe fondamentale⁽⁴⁴⁾. Le

⁽⁴⁴⁾ Si dans les précédentes sections cette hypothèse n'était pas vraiment indispensable, maintenant elle l'est car autrement nous ne voyons pas comment donner un sens au morphisme d'image-inverse en *cohomologie* de Borel-Moore.

morphisme d'intégration sur les fibres $p_{m!} : H_c(F_{m+1}) \rightarrow H_c(F_m)[-d_M]$ est alors bien défini, ainsi que son dual, l'image-inverse $p_m^* : H_{\text{BM}}(F_m) \rightarrow H_{\text{BM}}(F_{m+1})$ (cf. 6.2.4.2).

Dans cette partie nous préparons le terrain pour l'étude ultérieure en 9.2 de certaines propriétés asymptotiques des familles des morphismes d'image-inverse en *cohomologie* de Borel-Moore

$$\left\{ H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \xrightarrow{p_m^*} H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)) \right\}_{m \in \mathbb{N}}.$$

Notre but est la construction d'un morphisme de suites spectrales (cf. 6.6.7)

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*) : (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r),$$

induisant par passage à la limite, les bi-gradués des morphismes p_m^* pour les filtrations du théorème 6.5.2, but qui sera atteint dans le théorème 6.7.1.

6.6.2. Compatibilité des opérations d'intégration sur les fibres. – En accord avec les notations de 6.4.3, où nous avons introduit l'ouvert

$$\mathbb{U}^{m+1} := F_{m+1}(M_{\geq 0}) \setminus F_{m+1}(M_0)$$

et son recouvrement $\mathcal{U}^{m+1} := \{\mathbb{U}_1^{m+1}, \dots, \mathbb{U}_{m+1}^{m+1}\}$, on note maintenant

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^{m+1} &:= (F_m(M_{\geq 0}) \times M_{\geq 0}) \setminus (F_m(M_0) \times M_0) \\ &= (\mathbb{U}^m \times M_{\geq 0}) \cup (F_m(M_{\geq 0}) \times M_{> 0}) \end{aligned}$$

et son recouvrement $\mathcal{W}^{m+1} := \{\mathbb{W}_1^{m+1}, \dots, \mathbb{W}_{m+1}^{m+1}\}$, avec

$$\begin{cases} \mathbb{W}_i^{m+1} := \mathbb{U}_i^m \times M_{\geq 0}, & \text{si } i \leq m, \\ \mathbb{W}_{m+1}^{m+1} := F_m(M_{\geq 0}) \times M_{> 0}. \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \cap \mathbb{U}^{m+1} := \{\mathbb{W}_i^{m+1} \cap \mathbb{U}^{m+1} = \mathbb{U}_i^{m+1}\}.$$

Le diagramme suivant, où les flèches verticales désignent les morphismes de prolongement par zéro, est un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & H_c(\mathbb{U}^{m+1}) & \longrightarrow & H_c(F_{m+1}(M_{\geq 0})) & \longrightarrow & H_c(F_{m+1}(M_0)) & \xrightarrow{c_{m+1}} \\ & \downarrow \iota_{\mathbb{U}^!} & & \downarrow & & \downarrow \iota_{F^!} & \\ \longrightarrow & H_c(\mathbb{W}^{m+1}) & \longrightarrow & H_c(F_m(M_{\geq 0}) \times M_{\geq 0}) & \longrightarrow & H_c(F_m(M_0) \times M_0) & \xrightarrow{c'_{m+1}} \end{array}$$

et comme la colonne centrale est nulle, il en résulte le diagramme commutatif où les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} H_c(F_{m+1}(M_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_c(\mathbb{U}^{m+1})[1] \\ \downarrow \iota_{F^!} & & \downarrow \iota_{\mathbb{U}^!} \\ H_c(F_m(M_0) \times M_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_c(\mathbb{W}^{m+1})[1]. \end{array}$$

D'autre part, pour $m \geq 1$, l'ouvert $\mathbb{W}^{m+1} \subseteq F_m(M_{\geq 0}) \times M_{\geq 0}$ est réunion de deux ouverts $H_c(_)$ -acycliques

$$(21) \quad \mathbb{W}^{m+1} = \mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1} \cup \mathbb{W}_F^{m+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1} := (\mathbb{U}^m \times M_{\geq 0}) \\ \mathbb{W}_F^{m+1} := (F_m(M_{\geq 0}) \times M_{> 0}). \end{cases}$$

Le morphisme de liaison dans la suite de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support compact relative à $\{\mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1}, \mathbb{W}_F^{m+1}\}$ est donc un isomorphisme :

$$H_c(W^{m+1}) \xrightarrow[\simeq]{c_{MV}} H_c(\mathbb{U}^m \times M_{> 0})[1].$$

PROPOSITION 6.6.3. – Soit M un espace muni d'une classe fondamentale. Pour tout $m \geq 1$, le diagramme suivant où les flèches horizontales sont des isomorphismes, est commutatif au signe près.

$$\begin{array}{ccc} H_c(F_{m+1}(M_0)) & \xrightarrow[\simeq]{c_{m+1}} & H_c(\mathbb{U}^{m+1})[1] \\ \downarrow \iota_{F!} & \text{(I)} & \downarrow \iota_{\mathbb{U}!} \\ H_c(F_m(M_0)) \otimes H_c(M_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_{m+1}} & H_c(\mathbb{W}^{m+1})[1] \xrightarrow[\simeq]{c_{MV}} H_c(\mathbb{U}^m) \otimes H_c(M_{> 0})[2] \\ \downarrow \text{id} \otimes \int_{M_0} & \text{(II)} & \downarrow \text{id} \otimes \int_{M_{> 0}} \\ H_c(F_m(M_0))[-d_M] & \xrightarrow[\simeq]{c_m[-d_M]} & H_c(\mathbb{U}^m)[1][-d_M]. \end{array}$$

Plus précisément, (I) est commutatif, et dans (II) on a

$$(22) \quad \int_{M_{> 0}} (c_{MV} \circ c'_{m+1})(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_m \left(\int_{M_0} \alpha \otimes \beta \right).$$

Démonstration. – La commutativité de (I) est celle du diagramme (20). Pour le sous-diagramme (II), on utilise le fait que les cofaisceaux $\underline{\Omega}_c(_)$ sont flasques. Quitte à prendre des recouvrements assez fins, un cocycle $\omega \in \Omega_c(F_m(M_0)) \otimes \Omega_c(M_0)$ s'exprime comme la restriction $\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ de

$$\tilde{\omega} = \sum_i \tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i, \quad \text{avec } \tilde{\alpha}_i \in \Omega_c(F_m(M_{\geq 0})) \text{ et } \tilde{\beta}_i \in \Omega_c(M_{\geq 0}).$$

On a donc $c'_{m+1}(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i) = \sum_i d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i + \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i$, avec $d\tilde{\alpha}_i \otimes \tilde{\beta}_i \in \Omega_c(\mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1})$ et $\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_c(\mathbb{W}_F^{m+1})$. Et alors, par le morphisme de liaison de Mayer-Vietoris c_{MV} relatif à $\{\mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1}, \mathbb{W}_F^{m+1}\}$, on a

$$(c_{MV} \circ c'_{m+1}) \left(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \right) = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} d\tilde{\alpha}_i \otimes d\tilde{\beta}_i \in \Omega_c(\mathbb{U}) \otimes \Omega_c(M_{> 0}),$$

de sorte que

$$\int_{M_{> 0}} (c_{MV} \circ c'_{m+1}) \left(\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \right) = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|+|\beta_i|} d\tilde{\alpha}_i \int_{M_0} \beta_i,$$

puisque, avec les conventions en cours, $\int_{M_{>0}} d\tilde{\beta} = (-1)^{|\beta|} \int_{M_0} \beta$.

On conclut par le fait que si $\alpha \in \mathcal{Z}_c(F_m(M_0))$, on a $c_m(\alpha) = d\tilde{\alpha}$. □

REMARQUE 6.6.4 (pour le cas $m = 0$). – L'énoncé de 6.6.3 doit être modifié, puisqu'alors les morphismes c_{MV} et c_m sont nuls. En effet, dans ce cas $F_m(M_{\geq 0}) = F_m(M_0) = \{\text{pt}\}$, et alors $\mathbb{U}^m = \emptyset$. Donc, $c_m = 0$ et le premier terme de l'égalité (22) est nul, ce qui entraîne la nullité de c_{MV} . On a aussi $\iota_F = \text{id}$, $\iota_{\mathbb{U}} = \text{id}$ et $c_{m+1} = c'_{m+1}$. Le diagramme de la proposition devient

$$\begin{array}{ccc} H_c(M_0) & \xrightarrow[\simeq]{c'_1} & H_c(M_{>0})[1] & \text{où } \int_{M_{>0}} c'_1(\beta) = (-1)^{|\beta|} \int_{M_0} \beta. \\ \downarrow f_{M_0} & & \swarrow f_{M_{>0}} & \\ H_c(\text{pt})[-d_M] & & & \end{array}$$

6.6.5. Renormalisation des morphismes de liaison. – Sur le sous-diagramme suivant de la proposition 6.6.3

$$\begin{array}{ccccc} H_c(F_{m+1}(M_0)) & \xrightarrow{\boxed{\gamma_{m+1}}} & H_c(\mathbb{U}^{m+1})[1] & \xrightarrow{\boxed{q_{m!}}} & H_c(\mathbb{U}^m)[1] \\ \downarrow f_{M_0} & & \downarrow \iota_{\mathbb{U}} & & \downarrow \text{id} \otimes f_{M_{>0}} \\ H_c(F_m(M_0))[-d_M] & \xrightarrow{\boxed{\gamma_m[-d_M]}} & H_c(\mathbb{W}^{m+1})[1] & \xrightarrow[\simeq]{c_{\text{MV}}} & H_c(\mathbb{U}^m) \otimes H_c(M_{>0})[2] \\ & & & & \downarrow \\ & & & & H_c(\mathbb{U}^m)[1] \\ & & & & \downarrow \\ & & & & H_c(\mathbb{U}^m)[1] \end{array}$$

on a noté, pour $m \geq 1$,

$$q_{m!} : H_c(\mathbb{U}^{m+1}) \rightarrow H_c(\mathbb{U}^m)[-d_M], \quad q_{m!} := \left(\text{id} \otimes \int_{M_{>0}} \right) \circ c_{\text{MV}} \circ \iota_{\mathbb{U}},$$

et nous avons remplacé $c_m : H_c(F_m(M_0)) \rightarrow H_c(\mathbb{U}^m)[1]$ par

$$\gamma_m : H_c(F_m(M_0)) \rightarrow H_c(\mathbb{U}^{m+1})[1], \quad \gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m + \frac{m(m-1)}{2}d_M} c_m(\omega).$$

PROPOSITION 6.6.6. – *Soit M un espace muni d'une classe fondamentale.*

(a) *Pour $m \geq 1$, le diagramme suivant de morphismes compatibles aux actions des groupes symétriques par image-directe, est un diagramme commutatif,*

$$\begin{array}{ccc} H_c(F_{m+1}(M_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_{m+1}} & H_c(\mathbb{U}^{m+1})[1] \\ \downarrow p_{m!}[-d_M] & & \downarrow [-d_M] q_{m!} \\ H_c(F_m(M_0)) & \xrightarrow[\simeq]{\gamma_m} & H_c(\mathbb{U}^m)[1]. \end{array}$$

(b) *Le diagramme suivant obtenu en dualisant et concaténant les diagrammes de (a) et où l'on a noté F_i pour $F_i(M_0)$, est un diagramme commutatif,*

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{\text{BM}}(F_1) & \xrightarrow{p_1^*} & H_{\text{BM}}(F_2) & \xrightarrow{p_2^*} & \cdots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(F_m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}(F_{m+1}) & \longrightarrow \\
 \gamma_1^* \uparrow [0] & & \gamma_2^* \uparrow [-1] & & & & \gamma_m^* \uparrow [1-m] & & \gamma_{m+1}^* \uparrow [-m] & \\
 H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^1) & \xrightarrow{q_1^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^2)[1] & \xrightarrow{q_2^*} & \cdots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m)[m-1] & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^{m+1})[m] & \longrightarrow .
 \end{array}$$

Les morphismes y sont compatibles aux actions des groupes symétriques de 6.2.4.3. Les suites horizontales sont des FI-modules (cf. 7.2.2) et la famille $\{\gamma_m^[1-m]\}$ est un isomorphisme de FI-modules.*

Démonstration. – (a) Notons $Q(m) = \frac{m(m-1)}{2}d_M$. Compte tenu de 6.6.3-(22), on a

$$\begin{aligned}
 (q_{m!} \circ \gamma_{m+1})(\omega) &= (-1)^{|\omega|+m+Q(m+1)} c_m(p_{m!}(\omega)) \\
 &= (-1)^{(|\omega|-d_M)m+Q(m)} c_m(p_{m!}(\omega)) = (\gamma_m \circ p_{m!})(\omega).
 \end{aligned}$$

La compatibilité par rapport aux actions des groupes symétriques est claire.

(b) On verra dans 7.2.2 que la condition pour que les suites horizontales soient des FI-modules est que pour tous $m < n$, on ait

$$(p_{n-1}^* \circ \cdots \circ p_m^*)(H_{\text{BM}}(F_m(M_0))) \subseteq H_{\text{BM}}(F_n(M_0))^{\mathbf{1}_m \times \mathcal{S}_{n-m}}$$

et de même pour la deuxième ligne. C'est évident pour la première ligne, et donc aussi pour la seconde qui en est isomorphe. \square

6.6.7. L'image-inverse sur les suites spectrales basiques. – Nous allons relever le morphisme $q_m^* : H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^{m+1})[1]$, pour $m \geq 1$, de 6.6.6 en un morphisme $\mathbb{E}(q_m^*) : \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \rightarrow \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0]$ de suites spectrales basiques, de sorte que nous aurons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^{m+1})[1] \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0],
 \end{array}$$

répondant ainsi à la principale motivation de cette section 6.6 (cf. 6.6.1).

Les morphismes q_m^* sont les duaux des morphisme $q_{m!}$ qui on été définis comme la composée de trois morphismes

$$\begin{array}{c}
 H_c(\mathbb{U}^{m+1}) \xrightarrow{t_{\mathbb{U}^1}} H_c(\mathbb{W}^{m+1}) \xrightarrow{c_{\text{MV}}} H_c(\mathcal{U}^m \times M_{>0})[1] \xrightarrow{p_{m!} := \int_{M>0}} H_c(\mathcal{U}^m)[-d_M] \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{q_{m!}} \uparrow
 \end{array}$$

Dans ce qui suit, nous montrerons que le dual de chacun de ces morphismes admet un relèvement spectral. Rappelons maintenant quelques notations.

– L'ouvert $\mathcal{U}^{m+1} \subseteq F_{m+1}(M_{\geq 0})$ est muni du recouvrement (cf. 6.4.3)

$$\mathcal{U}^{m+1} = \{\mathcal{U}_1^{m+1}, \dots, \mathcal{U}_{m+1}^{m+1}\} \quad \text{où} \quad (\bar{x} \in \mathcal{U}_i^{m+1} \Leftrightarrow x_i \notin M_0).$$

— L'ouvert $\mathbb{W}^{m+1} \subseteq F_m(M_{\geq 0}) \times M_{\geq 0}$ est muni du recouvrement (cf. 6.6.2)

$$\mathcal{W}^{m+1} := \{\mathbb{W}_1^{m+1}, \dots, \mathbb{W}_{m+1}^{m+1}\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbb{W}_i^{m+1} := \mathbb{U}_i^m \times M_{\geq 0}, & \text{si } i \leq m, \\ \mathbb{W}_{m+1}^{m+1} := F_m(M_{\geq 0}) \times M_{> 0}. \end{cases}$$

On décompose \mathbb{W}^{m+1} en réunion de deux ouverts $H_c(_)$ -acycliques

$$\mathbb{W}^{m+1} = \mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1} \cup \mathbb{W}_F^{m+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbb{W}_{\mathbb{U}}^{m+1} := (\mathbb{U}^m \times M_{\geq 0}) \\ \mathbb{W}_F^{m+1} := (F_m(M_{\geq 0}) \times M_{> 0}). \end{cases}$$

6.6.7.1. *Relèvement spectral de \mathbb{U}^* .*— Comme le recouvrement \mathcal{U}^{m+1} est la trace sur \mathbb{U}^{m+1} du recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , i.e.

$$\mathcal{U}^{m+1} = \mathcal{W}^{m+1} \cap \mathbb{U}^{m+1} := \{\mathbb{W}_i^{m+1} \cap \mathbb{U}^{m+1} = \mathbb{U}_i^{m+1}\},$$

la naturalité de bicomplexes de cochaînes de Čech-Borel-Moore vis-à-vis des restrictions ouvertes, induit un morphisme de bicomplexes de degré (0,0)

$$(\iota_{\mathbb{U}}^*)_{\bullet, *}: \check{C}_{<}(\mathcal{W}^{m+1})_{\text{BM}}^{\bullet, *} \rightarrow \check{C}_{<}(\mathcal{U}^{m+1})_{\text{BM}}^{\bullet, *}$$

et donc un morphisme de suites spectrales

$$(\iota_{\mathbb{U}, r}^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r).$$

PROPOSITION A (RELÈVEMENT DE $i_{\mathbb{U}}^*$). — *Le morphisme*

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p, q} = \check{C}^p(\mathcal{W}; \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(_)) \xrightarrow{(\iota_{\mathbb{U}, 1}^*)_{p, q}} \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p, q} = \check{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{H}_{\text{BM}}^q(_)),$$

en fonction de $p \geq 0$ et de $1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m+1$, prend les valeurs suivantes.

— Si $p = 0$, on a $(\iota_{\mathbb{U}, 1}^*)_{0, q} = 0$ puisque les \mathbb{W}_i^{m+1} sont $H_{\text{BM}}(_)$ -acycliques.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{0, q})_{i_0} & \xrightarrow{(\iota_{\mathbb{U}, 1}^*)_{0, q} = 0} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{0, q})_{i_0} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(\mathbb{W}_{i_0}^{m+1}) = 0 & & H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0}^{m+1}). \end{array}$$

— Si $p > 0$ et $i_p < m+1$, on a aussi $(\iota_{\mathbb{U}, 1}^*)_{p, q} = 0$ puisque

$$\mathbb{W}_{i_0, \dots, i_p}^{m+1} = \mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m \times M_{\geq 0}$$

est $H_{\text{BM}}(_)$ -acyclique.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p, q})_{i_0, \dots, i_p} & \xrightarrow{(\iota_{\mathbb{U}, 1}^*)_{p, q} = 0} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p, q})_{i_0, \dots, i_p} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m \times M_{\geq 0}) = 0 & & H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^{m+1}). \end{array}$$

— Si $p > 0$ et $i_p = m + 1$, on a

$$\mathbb{W}_{i_0, \dots, i_p=m+1}^{m+1} = \mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times M_{>0},$$

et $\mathcal{U}_{\mathbb{U},1}^*$ s'identifie à la restriction de $(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times M_{>0})$ à $\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}, m+1}^{m+1}$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p=m+1} & \xrightarrow{(t_{\mathbb{U},1}^*)_{p,q}} & (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p=m+1} \\ \parallel & & \parallel \\ H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}}^m \times M_{>0}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_{p-1}, m+1}^{m+1}). \end{array}$$

6.6.7.2. *Relèvement spectral de c_{MV}^* .* — On commence par un scholie sur les bicomplexes $\check{C}_{<}^{\bullet,*}(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^*)$ de cochaînes de Čech ordonnées, relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ et à valeurs dans le complexe de faisceaux de cochaînes de Borel-moore $(\underline{\Omega}_{\text{BM}}^*, d_*)$ (cf. 6.4.6), ce que nous notons

$$\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}) := \check{C}_{<}^{\bullet,*}(\mathcal{U}; \underline{\Omega}_{\text{BM}}^*).$$

Soient $\mathcal{U}' := \{U_1, \dots, U_m\}$ et $\mathcal{U}'' := \{U_{m+1}\}$ dont on remarquera tout de suite que $\check{C}^p(\mathcal{U}') = 0$ si $p \geq m$, et $\check{C}^p(\mathcal{U}'') = 0$ si $p \geq 1$.

Définissons les restrictions de cochaînes de Čech ρ', ρ'' :

$$\begin{aligned} \rho : \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}) &\rightarrow \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}'') \\ \omega &\mapsto (\rho'(\omega), \rho''(\omega)) \end{aligned}$$

par

$$\begin{cases} \rho'(\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \omega_{i_0, \dots, i_p} \in \Omega^*(U_{i_0, \dots, i_p}), & \text{où } 1 \leq i_0, \dots, i_p \leq m, \\ \rho''(\omega)_0 = \omega_{m+1} \in \Omega^*(U_{m+1}). \end{cases}$$

Posons ensuite $\mathcal{U}''' := \{U_1 \cap U_{m+1}, \dots, U_m \cap U_{m+1}\}$, et définissons

$$(23) \quad c : \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}''') \rightarrow \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U})$$

par

$$c(\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \begin{cases} \omega_{i_0, \dots, i_{p-1}}, & \text{si } i_p = m + 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

PROPOSITION. — *La suite*

$$(24) \quad 0 \rightarrow \check{C}^{\bullet}(\mathcal{U}''') \xrightarrow{c} \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}) \xrightarrow[\rho', \rho'']{\rho} \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^{\bullet+1}(\mathcal{U}'') \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de morphismes de bicomplexes. Les morphismes qu'elle induit sur les cohomologies des complexes simples associés coïncident alors avec les morphismes de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $\cup \mathcal{U} = (\cup \mathcal{U}') \cup (\cup \mathcal{U}'')$, soit

$$\rightarrow H_{\text{BM}}^*(\cup \mathcal{U}''') \xrightarrow{\text{cMV}} H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}) \xrightarrow{\rho} H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}') \oplus H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}'') \rightarrow H_{\text{BM}}^{*+1}(\cup \mathcal{U}'') \rightarrow .$$

En particulier, le morphisme de liaison c_{MV} est l'aboutissement du morphisme des suites spectrales $(c_r) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}'''), d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}''')[1, 0], d_r)$ induit par le morphisme de bicomplexes (23) et dont la restriction aux termes \mathbb{E}_1 est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{U}''')_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_p} \cap U_{m+1}) \\ (c_1)_{p,q} \downarrow & & \\ \mathbb{E}(\mathcal{U})_1^{p+1,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} H_{\text{BM}}^q(U_{i_0, \dots, i_{p+1}}), \end{array}$$

où, si $\omega \in (\mathbb{E}(\mathcal{U}''')_1^{p,q})_{i_0, \dots, i_p}$, on a

$$((c_1)_{p,q}(\omega))_{k_0, \dots, k_{p+1}} = \begin{cases} \omega, & \text{si } (k_0, \dots, k_{p+1}) = (i_0, \dots, i_p, m+1) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. – Le fait que ρ est un morphisme de bicomplexes surjectif de bidegré $(0, 0)$ est immédiat. Son noyau $\ker^\bullet(\rho)$ est le sous-bicomplexe de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U})$ vérifiant

$$\ker^0(\rho) = 0 \text{ et } (\forall p > 0)(\omega \in \ker^p(\rho) \Leftrightarrow \omega_{i_0, \dots, i_p} = 0, \text{ si } i_p \leq m),$$

où l'on reconnaît l'image de $c : \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U})$. La suite (24) est donc bien une suite exacte courte de bicomplexes.

Notons

$$U := \cup \mathcal{U}, \quad U' := \cup \mathcal{U}', \quad U'' := \cup \mathcal{U}'', \quad U''' := \cup \mathcal{U}'''.$$

La suite courte de Mayer-Vietoris de bicomplexes

$$0 \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) \xrightarrow{\alpha} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U'') \xrightarrow{\beta} \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U''') \rightarrow 0$$

est exacte puisque le faisceau $\underline{\Omega}_{\text{BM}}^*$ est flasque. Comme on a $\mathcal{U} \cap U' \supseteq \mathcal{U}'$ et $\mathcal{U} \cap U'' \supseteq \mathcal{U}''$, on dispose de morphismes de restriction de cochaînes de Čech r', r'' et du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\alpha} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U'') & \xrightarrow{\beta} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U} \cap U''') \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow r'' \\ 0 \rightarrow \check{C}^{\bullet-1}(\mathcal{U}''') & \xrightarrow{c} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\rho} & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}') \oplus \check{C}^\bullet(\mathcal{U}'') \rightarrow 0 \\ & & \downarrow r' & & \downarrow r'' \end{array}$$

où r' et r'' induisent des quasi-isomorphismes sur les complexes simples associés.

Il en résulte un isomorphisme canonique en cohomologie

$$\xi_* : h^* \text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \cap U''')) \rightarrow h^* \text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U}'''))$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 h^{*-1}\text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U} \cap U''')) & \xrightarrow{\gamma} & h^*\text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})) \\
 \downarrow \xi_{*-1} & \oplus & \downarrow \text{id} \\
 h^{*-1}\text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(U''')) & \xrightarrow{c} & h^*\text{tot}(\check{C}^{\bullet,*}(\mathcal{U})),
 \end{array}$$

où γ correspond au morphisme de liaison $c_{MV} : H_{BM}(U''') \rightarrow H_{BM}(U)[1]$ de la suite longue de Mayer-Vietoris pour le recouvrement $U = U' \cup U''$. À partir de là la suite de la proposition est claire. \square

Cette proposition, appliquée au recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , fournit le relèvement spectral du morphisme de liaison $c_{MV}^* : H_{BM}(U^m \times M_{>0}) \rightarrow H_{BM}(\mathbb{W}^{m+1})[1]$

PROPOSITION B (RELÈVEMENT DE c_{MV}^*). – On munit \mathbb{W}^{m+1} du recouvrement \mathcal{W}^{m+1} , et $U^m \times M_{>0}$ du recouvrement $\mathcal{U}^m \times M_{>0}$ et l'on note $(\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_r, d_r)$ et $(\mathbb{E}(U^m \times M_{>0})_r, d_r)$ les suites spectrales correspondantes. Alors, il existe un morphisme de suites spectrales

$$(c_{MV,r}^*) : (\mathbb{E}(U^m \times M_{>0})_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_r, d_r)[1, 0]$$

convergeant vers le bigradué du morphisme de liaison

$$c_{MV}^* : H_{BM}(U^m \times M_{>0}) \rightarrow H_{BM}(\mathbb{W}^{m+1})[1].$$

L'action de $(c_{MV,r}^*)$ sur \mathbb{E}_1 est donnée par le plongement canonique

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E}(U^m \times M_{>0})_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{BM}^q(U_{i_0, \dots, i_p}^m \times M_{>0}) \\
 \downarrow (c_{MV,1})_{p,q} & & \parallel \\
 \mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p+1,q} & \longleftarrow & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{BM}^q(\mathbb{W}_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}).
 \end{array}$$

6.6.7.3. Relèvement spectral de $(\int_{M_{>0}})^*$. – On commence par rappeler que le morphisme d'intégration sur les fibres a un sens déjà au niveau des complexes de cochaînes à support compact :

$$p_m! = \int_{M_{>0}} : \Omega_c(_) \otimes \Omega_c(M_{>0}) \rightarrow \Omega_c(_-)[-d_M - 1]$$

et c'est un morphisme compatible à l'opération de cobord. Par dualité et naturalité vis-à-vis des inclusions ouvertes, on obtient le morphisme de bicomplexes de cochaînes de Čech-Borel-Moore de degré $[0, 0]$

$$(25) \quad (p_m^*)_{\bullet,*} : \check{C}(U^m)_{BM}^{\bullet,*} \rightarrow \check{C}(U^m \times M_{>0})_{BM}^{\bullet,*}.$$

Le théorème suivant est immédiat.

PROPOSITION C (RELÈVEMENT DE p_m^*). – Par passage aux complexes simples associés, le morphisme de bicomplexes (25) induit le morphisme image-inverse

$$p_m^* : H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m) \rightarrow H_{\text{BM}}(\mathcal{U}^m \times M_{>0}).$$

Il induit également un morphisme de suites spectrales

$$(p_{m,r}^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m \times M_{>0})_r, d_r).$$

L'action de $(p_{m,r}^*)$ sur \mathbb{E}_1 est donnée par les morphismes image-inverse :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m) \\ \downarrow (p_{m,1}^*)_{p,q} & & \downarrow p_m^* \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m \times M_{>0})_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m \times M_{>0}). \end{array}$$

6.6.7.4. Conclusion. – La composition des morphismes des suites spectrales des propositions A B C donne le morphisme de suites spectrales annoncé dans 6.6.7

$$\mathbb{E}(q_m^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1, 0].$$

Le diagramme commutatif suivant traque sa valeur sur les termes \mathbb{E}_1

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m) \\ \downarrow (p_{m,1}^*)_{p,q} & & \downarrow p_m^* \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m \times M_{>0})_1^{p,q} & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m \times M_{>0}) \\ \downarrow (c_{\text{MV},1})_{p,q} & & \parallel \\ \mathbb{E}(\mathcal{W}^{m+1})_1^{p+1,q} & \xleftarrow{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{W}_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}) \\ \downarrow (\iota_{\mathbb{U},1}^*)_{p,q} & & \downarrow \iota_{\mathbb{U}}^* \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} & \xleftarrow{\quad} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}). \end{array}$$

Toutes ces observations conduisent à l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.6.8. – Soit M un espace muni d'une classe fondamentale.

Il existe un morphisme de suites spectrales basiques

$$\mathbb{E}(q_m^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1, 0],$$

qui est compatible aux actions des groupes symétriques (pour l'action 6.2.4.3) et qui rend le diagramme suivant commutatif⁽⁴⁵⁾.

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m) & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^{m+1})[1] \\ \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel \\ \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})[1, 0]. \end{array}$$

De plus, l'action de $\mathbb{E}(q_m^*)$ sur les termes $\mathbb{E}(_)_1$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} & \xrightarrow{\mathbb{E}(q_m^*)_1^{p,q}} & \mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} \\ \parallel & & \uparrow \\ \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p}^m) & \xrightarrow{\bigoplus p_m^*} & \bigoplus_{1 \leq i_0 < \dots < i_p \leq m} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{i_0, \dots, i_p, m+1}^{m+1}). \end{array}$$

6.7. Relèvement spectral de $p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))$

Si nous combinons la proposition précédente 6.6.8 aux théorèmes 6.6.6 et 6.5.2, nous obtenons les suites de représentations de groupes symétriques

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\text{BM}}(F_1) & \xrightarrow{p_1^*} & H_{\text{BM}}(F_2) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(F_m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}(F_{m+1}) & \longrightarrow \\ \uparrow \gamma_1^* \simeq [0] & & \uparrow \gamma_2^* \simeq [-1] & & & & \uparrow \gamma_m^* \simeq [1-m] & & \uparrow \gamma_{m+1}^* \simeq [-m] & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \\ H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^1) & \xrightarrow{q_1^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^2)[1] & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m)[m-1] & \xrightarrow{q_m^*} & H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^{m+1})[m] & \longrightarrow \\ \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & & & & \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel & \\ \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^1) & \longrightarrow & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^2)[1, 0] & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)[m-1, 0] & \longrightarrow & \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})[m, 0] & \longrightarrow, \\ \mathbb{E}_\sigma(q_1^*) & & & & & & \mathbb{E}_\sigma(q_m^*) & & & \end{array}$$

où la ligne centrale doit être tordue par les caractères σ_m correspondants. L'énoncé suivant est alors corollaire de 6.6.8 et 6.5.2.

THÉORÈME DU RELÈVEMENT SPECTRAL DE p_m^* 6.7.1. – Soit M un espace muni d'une classe fondamentale.

⁽⁴⁵⁾ On rappelle que γ_m^* est la renormalisation donnée dans la section 6.6.5 du morphisme de liaison $c_m^* : H_{\text{BM}}(\mathbb{U}^m) \rightarrow H_{\text{BM}}(F_m(M_0))[1-m]$. On a $\gamma_m(\omega) = (-1)^{|\omega|m + \frac{m(m-1)}{2}} d_M c_m(\omega)$.

(a) *Le morphisme de suites spectrales basiques*

$$\mathbb{E}(q_m^*) : (\mathbb{E}(\mathcal{U}^m)_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}(\mathcal{U}^{m+1})_r, d_r)[1, 0]$$

définit, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, chaque couple (p, q) tel que $q = i + (m - (p + 1))$ et chaque $r \geq 1$, une suite indexée par $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r^{p+1,q},$$

qui est un FI-module. La somme de ces suites pour chaque $r \geq 1$ converge vers le bi-gradué du morphisme de \mathcal{S}_m -modules (pour l'action 6.2.4.3)

$$p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)),$$

pour les filtrations régulières induites par les isomorphismes γ_m^* et γ_{m+1}^* .

(b) *Sur la page $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^*)_1$ les FI-modules en question, sont naturellement isomorphes aux FI-modules définis par les morphismes*

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} (p_m^*),$$

qui rendent commutatif le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) & \Longrightarrow & H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \\ \downarrow \mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} & & \downarrow \text{ind}(p_m^*) \\ \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m+1}^{m+1}) & \Longrightarrow & H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)), \end{array}$$

où σ indique que l'action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}$ est tordue $\sigma_{m-(p+1)}$.

(c) *Modulo les isomorphismes Ξ de 6.5.2-(b), on a le diagramme commutatif*

$$(26) \quad \begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m+1}^{m+1}) \\ \Xi_{p+1}^m \downarrow \simeq & & \uparrow (\Xi_{p+2}^{m+1})^{-1} \\ \bigoplus_{f \in \mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}^Q(F_{\mathfrak{p}(f)}(M_{>0})) & \xrightarrow{\bigoplus p_{p+1}^*} & \bigoplus_{f^\bullet \in \mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)} H_{\text{BM}}^Q(F_{\mathfrak{p}(f^\bullet)}(M_{>0})), \end{array}$$

où nous avons noté

- $Q := q - (m - (p + 1))d_M = i - (m - (p + 1))(d_M - 1)$.
- $\mathcal{F}(p + 1, m) :=$ ensemble des applications $f : \llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que $(x < f(x) \leq m, \text{ si } x < m - p)$ et $(f(x) = x, \text{ autrement})$.
- $\mathcal{F}^\bullet(p + 2, m + 1) :=$ ensemble des applications $f : \llbracket 1, m + 1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$ telles que $(x < f(x) \leq m, \text{ si } x < m - p)$ et $(f(x) = x, \text{ autrement})$.
- $\mathfrak{p}(f)$ la partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ définie par les fibres de f et $f^\bullet : \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$ est le prolongement de f qui vérifie $f^\bullet(m + 1) = m + 1$.

Démonstration. – (a),(b) L’identification des morphismes $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q}$ comme morphismes induits résulte de 6.5.2 qui montre que l’on a

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p,\dots,m}^m),$$

et comme $\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q}$ est un morphisme de \mathcal{S}_m -modules (proposition 6.6.8), il est déterminé par sa restriction à $\sigma_{m-(p+1)} \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p,\dots,m}^m)$ qui n’est autre que $\text{id} \otimes p_m^*$ où id désigne l’identité sur $\sigma_{m-(p+1)}$. Le fait que l’on obtient ainsi un FI-module est alors immédiat. À partir de là, on conclut grâce à la compatibilité des différentielles d_r avec les actions des groupes symétriques et au fait que la catégorie des FI-modules est abélienne (cf. section 7.2).

(c) Compte tenu de 6.5.2-(b), nous avons seulement à justifier la ligne du bas dans le diagramme (26), somme directe des duaux des morphismes d’intégration sur les fibres

$$p_{m!} : H_c(\mathbb{U}_{m-p,\dots,m+1}^{m+1}) \rightarrow H_c(\mathbb{U}_{m-p,\dots,m}^m)[-d_{M_{>0}}],$$

où, en notant $F_{p+2} := F_{p+2}(M_{>0})$ pour simplifier,

$$\mathbb{U}_{m-p,\dots,m+1}^{m+1} = \Delta_{m+1}(M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times F_{p+2}).$$

Avertissement. – Dans un souci d’allègement de notations, nous allons omettre d’écrire ‘ $H_c(_)$ ’ autour des termes des diagrammes qui vont suivre.

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, le morphisme d’intégration sur la dernière coordonnée

$$(27) \quad p! : \Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1}) \rightarrow \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b)$$

est défini dans 6.2.4.2 à travers l’inclusion ouverte

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1}) & \xrightarrow{\iota} & \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b) \times M_{>0} \\ & \searrow p! & \swarrow \int_{M_{>0}} \\ & & \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b)[-d_{M_{>0}}], \end{array}$$

et lorsque $a > 0$, on est conduit à considérer le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1}) & \xrightarrow{\iota} & \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b) \times M_{>0} \xrightarrow{\int_{M_{>0}}} \\ \downarrow j & & \downarrow j \times \text{id} \\ M_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1}) & \xrightarrow{\iota'} & [M_{\geq 0} \times \Delta_{a+b-1}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_b)] \times M_{>0} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \times \text{id} \\ \coprod_{\mathcal{F}(a+b,a+b+1)} \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1}) \xrightarrow{\iota''} & & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1,a+b)} \Delta_{a+b-1}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_b) \times M_{>0} \xrightarrow{\int_{M_{>0}}} \\ c \downarrow [+1] & & c \times \text{id} \downarrow [+1] \end{array}$$

où les colonnes sont les suites exactes longues de cohomologie à support compact habituelles dans nos théorèmes de scindage (cf. 3.1.1).

Les termes de la deuxième ligne sont nuls puisque $M_{\geq 0}$ apparaît en facteur, les flèches de liaison c sont donc des isomorphismes et la question que nous cherchons à comprendre concerne l'interprétation de $p_!$ dans (27) en termes de la dernière ligne du diagramme. Or, la flèche en pointillé n'est pas tout à fait bien définie. En effet, les composantes du fermé $\coprod_{\mathcal{F}(a+b, a+b+1)} \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1})$ sont bien les traces des composantes de $\coprod_{\mathcal{F}(a+b-1, a+b)} \Delta_{a+b-1}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_b) \times M_{> 0}$ sur l'ouvert $M_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1})$, que l'on va noter \mathbb{U} dans la suite, à l'exception près de celle indexée par la fonction $f_0 : \llbracket a+b+1 \rrbracket$ définie par $f_0(1) = a+b+1$, composante, par ailleurs, clairement fermée dans l'ouvert $\Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b) \times M_{> 0}$ que l'on va noter \mathbb{V} dans la suite.

On a donc l'inclusion fermée

$$(M_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1}))_{f_0} \subseteq \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$$

et tout cocycle ω d'Alexander-Spanier (faisceau c -mou) à support compact de cette composante se prolonge en une cochaîne ϖ à support compact de $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$. Le morphisme de liaison donne alors $c(\omega) = d\varpi$, ce qui est un cocycle à support compact dans $\Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1})$. Or,

$$p_!(c(\omega)) = \int_{M_{> 0}} \iota(c(\omega)) = \int_{M_{> 0}} d\varpi = 0,$$

puisque $\varpi \in \mathcal{Z}_c(\mathbb{V})$ et que \mathbb{V} est le domaine de définition de $\int_{M_{> 0}}$.

Ces remarques prouvent la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mathcal{F}(a+b, a+b+1)} \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1})[-1] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(a+b-1, a+b)} \Delta_{a+b-1}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_b)[-d_{M_{> 0}}][-1] \\ \downarrow \simeq c & & \downarrow \simeq c \\ \Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1}) & \xrightarrow{p_!} & \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b)[-d_{M_{> 0}}], \end{array}$$

où maintenant ι'' est bien définie. Sa valeur, qui dépend des composantes, vaut

$$\iota'' = \begin{cases} 0 \text{ sur } (M_{\geq 0} \times \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1}))_{f_0}, \\ p_! : \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_{b+1}) \rightarrow \Delta_{a+b-1}(M_{\geq 0}^{a-1} \times F_b), \text{ autrement.} \end{cases}$$

L'itération de ces idées conduit au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\mathcal{F}(b+1, a+b+1)} F_{b+1}[-a] & \xrightarrow{\iota''} & \coprod_{\mathcal{F}(b, a+b)} F_b[-d_{M_{> 0}}][-a] \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \Delta_{a+b+1}(M_{\geq 0}^a \times F_{b+1}) & \xrightarrow{p_!} & \Delta_{a+b}(M_{\geq 0}^a \times F_b)[-d_{M_{> 0}}], \end{array}$$

où $\iota'' = 0$ sur les composantes indexées par les fonctions $f : \llbracket 1, a+b+1 \rrbracket$ telles que $|f^{-1}(a+b+1)| > 1$, et c'est l'intégration sur les fibres autrement.

En dualisant, on obtient la description de la ligne du bas du diagramme (26). \square

CHAPITRE 7

STABILITÉ DES FAMILLES DE REPRÉSENTATIONS

7.1. Motivations

Le comportement lorsque $m \mapsto \infty$ des invariants associés aux espaces $F_m(M)$, notamment leurs groupes d'homotopie, leurs nombres de Betti, les caractères de leurs cohomologies en tant que \mathcal{S}_m -modules, ont été l'objet de très nombreux travaux. Un des résultats pionniers dans ces questions est dû à V.I. Arnold (1969) et concerne la détermination de la cohomologie des groupes de tresses d'E. Artin (1925) à un moment où l'on savait, grâce aux travaux de Fadell-Neuwirth et Fox-Neuwirth ([14, 16], 1962), que les espaces $F_m(\mathbb{C})$ et $BF_m(\mathbb{C}) := F_m(\mathbb{C})/\mathcal{S}_m$ étaient sphériques, de groupes fondamentaux $\Pi_1 F_m(\mathbb{C}) = P_m$: le groupe des tresses colorées à m brins, et $\Pi_1 BF_m(\mathbb{C}) = B_m$: le groupe des tresses non colorées à m brins, et donc que les cohomologies des espaces $F_m(\mathbb{C})$ et $BF_m(\mathbb{C})$ étaient canoniquement isomorphes à celles des groupes de tresses. C'est ainsi que Arnold procède dans [3, 4] où il énonce son *théorème de stabilité*. Ce théorème qui établit que, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, le morphisme naturel $H^i(BF_m(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^i({}_{m+1}\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ est bijectif pour $m \geq 2i - 2$. C'est un résultat remarquable que ne révèle pas la connaissance explicite du polynôme de Poincaré de $F_m(M)$ (voir thm. 11.3.1). On notera que le même phénomène de stabilité pour l'espace $F_m(M)$ ne se produit pour ainsi dire jamais, déjà si nous appliquons la formule de la remarque 4.2.2 pour $M = \mathbb{C}$, nous voyons que l'on a $\mathcal{P}(F_m(\mathbb{C}))(T) = (1 + (m-1)T) \cdots (1 + 2T)(1 + T)$, et donc $\text{Betti}^1(F_m(\mathbb{C})) = \binom{m}{2}$ (expression polynomiale en m tout de même!).

Il faut attendre les années 2011 pour comprendre le lien entre ces deux phénomènes grâce aux travaux de T. Church et B. Farb ([9, 12]). En s'intéressant, non pas à la famille $\{\text{Betti}^i(BF_m(\mathbb{C}))\}_m$, mais à la famille des représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i(F_m(\mathbb{C}))\}_m$, Church et Farb se livrent à des calculs explicites en s'appuyant sur les recherches de Lehrer ([26], 1987) qui donnaient déjà la « polynomialité » des caractères de cette famille (cf. 7.3.1), et sont conduits à conjecturer que les multiplicités des composantes irréductibles des représentations $\{\mathcal{S}_m : H^i(F_m(M))\}_m$ sont stationnaires (dans un sens qui sera précisé dans 7.4.1), de sorte que, la polynomialité des caractères en découle par un résultat classique de Macdonald (7.3.8, 1995). Church et Farb

développent alors la théorie de « FI-modules » (cf. 7.2) et remarquent que le phénomène de multiplicités stationnaires pouvait s'expliquer comme conséquence de ce qu'ils ont appelé la *stabilité de représentations* (cf. 7.4.1) de la famille de morphismes $\{p_m^* : H^i(F_m(M)) \rightarrow H^i(F_{m+1}(M))\}_m$, ce qui s'avéra être effectivement le cas.

THÉORÈME (Church [9], 2012). – *Soit M une variété topologique, connexe et orientable. Pour $i \in \mathbb{N}$ fixé, la famille $\{p_m^* : H^i(F_m(M)) \rightarrow H^i(F_{m+1}(M))\}_m$ est stable pour $m \geq 2i$ si $\dim M \geq 3$, et pour $m \geq 4i$ si $\dim M = 2$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont polynomiales et la famille $\{\text{Betti}^i(F_m(M)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante, sur les mêmes rangs.*

Le théorème de stabilité d'Arnold apparaît de lors comme le fait que la famille des sous-représentations triviales $\{H^i(F_m(\mathbb{C}))^{\mathcal{S}_m}\}_m$ est stationnaire.

Les paragraphes qui suivent rappellent les bases de la théorie de FI-modules ([10]) qui a servi à prouver le théorème de Church. Nous introduirons ensuite certains foncteurs d'induction dans la catégorie des FI-modules qui permettent de généraliser le théorème de Church aux familles $\{\mathcal{S}_m : \Delta_{?m-a} X^m\}_m$ où X est un espace localement compact tel que $\dim(H_c^{d_X}(X)) \leq 1$. On procédera en deux temps. D'abord, en supposant que X est i -acyclique (thm. 9.2.4). Ensuite, dans un deuxième temps, sans cette hypothèse (thm. 9.3.15) à l'aide des suites spectrales basiques (cf. 6.5.2).

7.2. Catégorie des FI-modules

DÉFINITION 7.2.1. – *Suivant Church-Ellenberg-Farb [10], on note FI la catégorie des ensembles finis et des applications injectives. Si \mathcal{A} est un anneau, on note $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$ la catégorie dont les objets, les « $\mathcal{A}[\text{FI}]$ -modules » (et même simplement FI-modules lorsque \mathcal{A} est sous-entendu), sont les foncteurs covariants $\mathcal{V} : \text{FI} \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. Si \mathcal{V} et \mathcal{W} sont des FI-modules, on note $\text{Hom}_{\text{FI}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{V} vers \mathcal{W} .*

Conventions et notations. – Dans ce qui suit, on identifie pour tous $b \geq 0$

$$\mathcal{S}_m = \text{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}}[[m+1, m+b]] \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b = \text{Fix}_{\mathcal{S}_{m+b}}[[1, m]],$$

ce qui donne le sens à l'inclusion $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b \subseteq \mathcal{S}_{m+b}$.

Dans une notation $V_m \boxtimes \mathcal{A}_b$, on désigne par V_m un \mathcal{S}_m -module et par \mathcal{A}_b la représentation triviale de \mathcal{S}_b dans \mathcal{A} . Le produit tensoriel en question est alors le $\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b$ -module défini par $(\alpha, \beta) \cdot (v \otimes w) := (\alpha \cdot v, \beta \cdot w)$.

7.2.2. Une équivalence de catégories. – La restriction d’un FI-module à la sous-catégorie pleine des intervalles de la forme $\llbracket 1, m \rrbracket \subseteq \mathbb{N}$ est une équivalence de catégories entre $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$ et la catégorie des familles $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$, où les V_m sont des $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$ -modules et où les ϕ_m sont des morphismes de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$ -modules dont les composées

$$(1) \quad \phi_{m+b,m} := \phi_{m+b} \circ \cdots \circ \phi_{m+1} \circ \phi_m, \quad \forall b \in \mathbb{N},$$

vérifient

$$(2) \quad \phi_{m+b,m}(V_m) \subseteq (V_{m+b})^{\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b}, \quad \forall m, b \in \mathbb{N}.$$

Les morphismes $\phi_{m+b,m}$ sont appelés les « morphismes de transition de \mathcal{V} ». Ils se factorisent suivant le diagramme

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} V_m & \xrightarrow{\iota} & \text{ind}_{\mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{m+b}}(V_m \boxtimes \mathcal{A}_b) & \xrightarrow{\Phi_{m+b,m}} & V_{m+b} \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\phi_{m+b,m}} & & \uparrow \end{array}$$

où $\iota : V_m \rightarrow V_m \boxtimes \mathcal{A}$ est le plongement $v \mapsto v \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$, et où $\Phi_{m+b,m}$ est le morphisme de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_{m+b}]$ -modules induit ⁽⁴⁶⁾.

Dans cette équivalence, un morphisme $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ de FI-modules se voit comme une famille $\{f_m : V_m \rightarrow W_m\}_m$ de morphismes de $\mathcal{A}[\mathcal{S}_m]$ -modules vérifiant $\phi_m \circ f_m = f_{m+1} \circ \phi_m$. Les familles $\{\ker(f_m)\}_m$ et $\{\text{coker}(f_m)\}_m$

$$\begin{array}{ccccccc} \ker(f_m) & \hookrightarrow & V_m & \xrightarrow{f_m} & W_m & \twoheadrightarrow & \text{coker}(f_m) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_m & & \downarrow \phi_m & & \downarrow \\ \ker(f_{m+1}) & \hookrightarrow & V_{m+1} & \xrightarrow{f_{m+1}} & W_{m+1} & \twoheadrightarrow & \text{coker}(f_{m+1}) \end{array}$$

\oplus

munies des morphismes de transition induits sont des FI-modules et font de $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$ une catégorie abélienne ⁽⁴⁷⁾.

7.2.3. Troncatures de FI-modules. – Soit $q \in \mathbb{N}$.

Pour tout FI-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$, on notera $\mathcal{V}_{\geq q} = \{W_m \rightarrow W_{m+1}\}$ le sous-FI-module de \mathcal{V} avec $W_m := 0$ si $m \leq q - 1$, et $W_m := V_m$ autrement.

⁽⁴⁶⁾ La condition (2) qui porte sur les $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_b$ -invariants est vide pour $b = 1$ et n’est donc pas transitive, il suffit par contre qu’elle soit vérifiée pour $b = 2$ et tout $m \in \mathbb{N}$.

⁽⁴⁷⁾ Dans [33], Sam et Snowden donnent une équivalence de catégories explicite entre $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$ et une catégorie de modules sur un anneau.

On pose ensuite $\mathcal{V}_{\leq q-1} := \mathcal{V}/\mathcal{V}_{\geq q}$, d'où la suite exacte courte de FI-modules

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \mathcal{V}_{\geq q} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\
 \mathcal{V} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & V_q & \longrightarrow & V_{q+1} & \longrightarrow & V_{q+2} & \longrightarrow \\
 \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathcal{V}_{\leq q-1} & \longrightarrow & V_{q-2} & \longrightarrow & V_{q-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow .
 \end{array}$$

On notera $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])_{\geq q}$ (resp. $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])_{\leq q}$) la sous catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$ dont les objets sont les FI-modules tronqués $\mathcal{V}_{\geq q}$ (resp. $\mathcal{V}_{\leq q}$).

Les correspondances $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\geq q}$ et $\mathcal{V} \rightsquigarrow \mathcal{V}_{\leq q}$ sont fonctorielles covariantes et exactes.

7.2.4. Les FI-modules $\mathcal{M}(\mathbf{a})$. – Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{a} := \llbracket 1, a \rrbracket$, et ensuite $\mathcal{M}(\mathbf{a}) :=$ le foncteur covariant représenté par $\mathbf{a} \in \text{FI}$, soit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\mathbf{a}) : \text{FI} &\rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{A}) \\
 S &\rightsquigarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_S := \mathcal{A}[\text{Mor}_{\text{FI}}(\mathbf{a}, S)].
 \end{aligned}$$

La famille $\{\phi_m : \mathcal{M}(\mathbf{a})_m \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_{m+1}\}_m$ est alors caractérisée par

$$\begin{cases} \text{si } b < 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = 0 \\ \text{si } b \geq 0, & \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} = \text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b}^{\mathfrak{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b, \end{cases}$$

et le morphisme de transition $\phi_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b+1}$ est celui induit à partir de l'identification de $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$ -modules $k[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b = k[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1}$,

$$\begin{array}{ccc}
 k[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b & \xlongequal{\quad} & k[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b}^{\mathfrak{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b & \xrightarrow{\phi_{a+b}} & \text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_{b+1}}^{\mathfrak{S}_{a+b+1}} \mathcal{A}[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_{b+1},
 \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les inclusions canoniques.

7.2.5. – Par le lemme de Yoneda, pour tout FI-module \mathcal{V} l'application

$$Y : \text{Hom}_{\text{FI}}(\mathcal{M}(\mathbf{a}), \mathcal{V}) \rightarrow V_a, \quad Y(f) = f(\text{id}_{\mathbf{a}}),$$

est bijective. Si $v \in V_a$, on note $\text{ev}_{\mathbf{a}}(v) := Y^{-1}(v)$, il s'agit du morphisme de foncteurs dont les valeurs $\text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} : \mathcal{M}(\mathbf{a})_{a+b} \rightarrow V_{a+b}$ sont

$$\begin{cases} \text{si } b < 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} = 0 \\ \text{si } b = 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a : \mathcal{A}[\mathfrak{S}_a] \rightarrow V_a, \text{ ev}_{\mathbf{a}}(v)_a(\alpha) = \alpha \cdot v \\ \text{si } b > 0, & \text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_{a+b} \text{ est la composée :} \end{cases}$$

$$\text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b}^{\mathfrak{S}_{a+b}} \mathcal{A}[\mathfrak{S}_a] \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\text{ind}(\text{ev}_{\mathbf{a}}(v)_a)} \text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b}^{\mathfrak{S}_{a+b}} V_a \boxtimes \mathcal{A}_b \xrightarrow{\Phi_{a+b,a}} V_{a+b}.$$

7.2.6. Sous-FI-modules et FI-modules quotients. – On appelle « sous-FI-module » d'un FI-module \mathcal{V} tout sous-foncteur $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. En termes des familles dénombrables $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ (7.2.2), l'inclusion $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ équivaut à la donnée d'une famille de sous- \mathcal{S}_m -modules $W_m \subseteq V_m$ vérifiant $\phi_m(W_m) \subseteq W_{m+1}$, auquel cas $\mathcal{W} := \{\phi_m|_{W_m} : W_m \rightarrow W_{m+1}\}$.

- L'intersection d'une famille de sous-FI-modules est un sous-FI-module.
- On définit dualement la notion de « FI-module quotient ».

7.2.7. Systèmes générateurs de FI-modules. – Soit \mathcal{V} un FI-module. Pour tout sous-ensemble $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$, le « sous-FI-module engendré par Σ », noté $\langle \Sigma \rangle$, est l'intersection de la famille des sous-FI-modules \mathcal{W} de \mathcal{V} tels que $\Sigma \subseteq \coprod_m W_m$.

Pour $a \in \mathbb{N}$, notons $\Sigma_a := \Sigma \cap V_a$. D'après 7.2.4, chaque $s \in \Sigma_a$ détermine un et une unique morphisme de FI-modules

$$\text{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \mathcal{M}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathcal{V}, \quad \text{ev}_{\mathbf{a}}(s)(\text{id}_{\mathbf{a}}) = s.$$

Le lemme suivant est alors immédiat.

LEMME ([10] 2.3.2). – *Le sous-FI-module $\langle \Sigma \rangle \subseteq \mathcal{V}$ est l'image du morphisme*

$$\prod_{0 < a \in \mathbb{N}, s \in \Sigma_a} \text{ev}_{\mathbf{a}}(s) : \bigoplus_{0 < \mathbf{a}; s \in \Sigma_a} \mathcal{M}(\mathbf{a}) \rightarrow \mathcal{V}.$$

7.2.8. FI-modules de type fini. – Soit \mathcal{V} un FI-module.

- (a) \mathcal{V} est dit « engendré en degrés $\leq d$ » si $V = \langle \Sigma \rangle$ avec $\Sigma \subseteq \coprod_{a \leq d} V_a$.
- (b) \mathcal{V} est dit « de type fini » si $\mathcal{V} = \langle \Sigma \rangle$ avec Σ fini.

PROPOSITION 7.2.9 ([10] Finitude et noëthérianité). – (a) *Un FI-module \mathcal{V} est de type fini si et seulement si il admet une surjection $\bigoplus_i \mathcal{M}(\mathbf{a}_i) \rightarrow \mathcal{V}$ pour une certaine famille finie $\{\mathbf{a}_i\}$*

- (b) *Un quotient d'un FI-module de type fini est de type fini.*
- (c) *Si \mathcal{A} est noëthérien, un sous-FI-module d'un FI-module de type fini de $\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$, est aussi de type fini.*⁽⁴⁸⁾

7.3. Caractères polynomiaux et stabilité des FI-modules

Avertissement. – L'anneau \mathcal{A} est un corps k de caractéristique nulle.

⁽⁴⁸⁾ Prouvé dans [10] en supposant $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}$, et dans [11] en général.

7.3.1. Famille de caractères (éventuellement) polynomiale. – Si $\mathcal{W} := \{S_m : W_m\}_m$ est une famille de représentations de dimensions finies, on note $\chi(\mathcal{W}) := \{\chi_{S_m}(W_m)\}_m$ la famille de leurs caractères.

Pour chaque m , il existe un polynôme $P_m \in k[X_1, \dots, X_m]$ tel que pour $\alpha \in S_m$, on a

$$\chi_{S_m}(W_m)(\alpha) = P_m(X_1, \dots, X_m)(\alpha),$$

où $X_i(\alpha)$ est le nombre des cycles de longueur i dans la décomposition de α en produit de cycles disjoints. La famille $\chi(\mathcal{W})$ peut ainsi être décrite par des familles $\{P_m\}_m$ de polynômes de l'algèbre $k[\overline{X}] = k[X_1, X_2, \dots]$.

DÉFINITION 7.3.2. – La famille de représentations \mathcal{W} est dite « à caractère éventuellement polynomial » s'il existe $N, r \in \mathbb{N}$ et $P \in k[X_1, \dots, X_r]$ tels que

$$(4) \quad \chi_{S_m}(W_m)(\alpha) = P(X_1, \dots, X_r)(\alpha), \quad \forall m \geq N, \forall \alpha \in S_m.$$

On dit alors que $\chi(\mathcal{W})$ « est polynomiale pour $m \geq N$ ».

7.3.3. Remarques

1. Un caractère du groupe S_m admet plusieurs écritures dans $k[X_1, \dots, X_m]$ (cf. 11.4.3), par contre, lorsque la condition (4) est satisfaite, le polynôme P est unique (cf. note (67), p. 182).
2. Notons $\dim_k(\mathcal{W}) := \{\dim_k W_m\}_m$. Lorsque $\chi(\mathcal{W})$ est éventuellement polynomiale, on a, pour m assez grand,

$$\dim_k W_m = P(X_1, X_2, \dots, X_r)(\mathbb{I}_m) = P(m, 0, \dots, 0)$$

et la suite $\dim_k(\mathcal{W})$ est éventuellement polynomiale en m .

7.3.4. Représentations irréductibles $V(\lambda)_m$. – On rappelle que sous l'hypothèse en cours de $\text{car}(k) = 0$, les représentations des groupes symétriques sont semi-simples et les représentations simples sont définies sur \mathbb{Q} . Les décompositions en composantes irréductibles sont alors “indépendantes” du corps $k \supseteq \mathbb{Q}$.

7.3.5. Reparamétrisation des représentations irréductibles. – Pour $0 < a \in \mathbb{N}$, les représentations irréductibles de S_a sur k sont paramétrées par les décompositions $\lambda \vdash a$. On note V_λ la représentation irréductible de S_a correspondante à $\lambda \vdash a$.

DÉFINITION 7.3.6. – Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell) \vdash a$. Pour tout $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on note $\lambda[m] \vdash m$ la décomposition $(m - |\lambda|, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \end{array} \right\} \mapsto \lambda[m] := \left\{ \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \end{array} \right\} \cdots \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (m - |\lambda|) \\ (\lambda_1) \\ \vdots \\ (\lambda_\ell) \end{array} \right\}.$$

Pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on note $V(\lambda)_m$ la représentation irréductible de \mathcal{S}_m correspondante à $\lambda[m]$, on pose donc :

$$\boxed{V(\lambda)_m := V_{\lambda[m]}}.$$

Les notations $V(0)_m$ et $V(1)_m = V(\square)_m$ désignent ainsi respectivement la représentation triviale et la représentation standard de dimension $m - 1$ de \mathcal{S}_m .

7.3.7. Remarques

- (a) Une décomposition $\mu \vdash m$ s'écrit d'une et d'une unique manière sous la forme $\mu = \lambda[m]$. Si $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell)$, on a $\lambda = (\mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell)$ et $\lambda \vdash a := m - \lambda_1$ (la valeur $a = 0$ est acceptée).
- (b) Dans la notation ' $\lambda[m]$ ', le nombre ' m ', qui vérifie $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, indique la taille finale du diagramme. On a $\ell(\lambda[m]) = \ell(\lambda) + 1$, et si $m \leq n$, on a $(\lambda[m])[n] \neq \lambda[n]$.⁽⁴⁹⁾
- (c) Si $\lambda[m] \in \mathcal{Y}_\ell(m)$, on a $|\lambda| \leq m - \left\lceil \frac{m}{\ell} \right\rceil$.

7.3.8. – Les familles $\{V(\lambda)_m\}_m$ apparaissent déjà dans le livre de Macdonald [28] comme exemple de famille de représentations à caractère polynomial. L'auteur y établit par un calcul explicite le fait suivant (ex. I.7.14, p. 122).

PROPOSITION ([28]). – Pour $\lambda \vdash a$, il existe $P_\lambda \in k[\overline{X}]$ tel que, pour tout $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, on a

$$P_\lambda(\alpha) = \chi_{\mathcal{S}_m}(V(\lambda)_m)(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathcal{S}_m.$$

7.4. Monotonie et stabilité des FI-modules

7.4.1. Stabilité. – Suivant Church-Ellenberg-Farb [10], un FI-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$ est dit « (uniformément) éventuellement stable », s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites pour $m \geq N$.

- (a) *Injectivité.* Les applications $\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}$ sont injectives.
- (b) *Surjectivité.* V_{m+1} est engendré en tant que \mathcal{S}_{m+1} -module par $\text{im}(\phi_m)$.
- (c) *Multiplicités*⁽⁵⁰⁾. Dans la décomposition en représentations irréductibles⁽⁵¹⁾

$$V_m = \bigoplus_{\lambda} c(\lambda)_m V(\lambda)_m,$$

les multiplicités $c(\lambda)_m$ ne dépendent pas de m .

⁽⁴⁹⁾ On désigne par $[x] \in \mathbb{Z}$ la *partie entière par excès* de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $[x] - 1 < x \leq [x]$. Dans (c), le terme $[m/\ell]$ représente le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, il faudrait donc convenir que $[0/0] = 0$.

⁽⁵⁰⁾ L'adverbe « uniformément » est utilisé dans [10] pour distinguer du cas où la condition de stabilité de multiplicités (c) est demandée séparément pour chaque λ .

⁽⁵¹⁾ Nous adoptons les notations de [10] où les multiplicités $c(\lambda)_m$ apparaissent comme facteur multiplicatif et non pas comme exposant.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que \mathcal{V} est un FI-module « stable pour $m \geq N$ ». Le « rang de stabilité de \mathcal{V} », noté $\text{rg}_s(\mathcal{V})$, est la borne inférieure de tels N , et si \mathcal{V} n'est pas stable, on pose $\text{rg}_s(\mathcal{V}) = +\infty$.

Remarque. – La famille de caractères $\chi(\mathcal{V})$ est polynomiale pour $m \geq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V})$ (7.3.8).

7.4.2. Monotonie. – Suivant la terminologie de Church ([9]), un FI-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ est dit « monotone pour $m \geq N$ » lorsque pour tout $m \geq N$ et tout $W_m \subseteq V_m$ isomorphe à $V(\lambda)_m^{\oplus k}$ pour certain λ et k , le sous- \mathcal{S}_{m+1} -module $\mathcal{S}_{m+1} \cdot \phi_m(W) \subseteq V_{m+1}$ contient un sous-module isomorphe à $V(\lambda)_{m+1}^{\oplus k}$. On notera $\text{rg}_m(\mathcal{V})$ le plus petit des ces N .

Fait. – Les morphismes de transition de \mathcal{V} sont injectifs pour $m \geq \text{rg}_m(\mathcal{V})$.

LEMME ET DÉFINITION 7.4.3. – On appellera « rang de monotonie et stabilité » d'un FI-module \mathcal{V} , le nombre

$$\boxed{\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) := \sup \{ \text{rg}_m(\mathcal{V}), \text{rg}_s(\mathcal{V}) \}}.$$

Pour tout FI-module \mathcal{V} et tout $s \in \mathbb{N}$, on a $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) \leq \sup \{ \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}_{\geq s}), s \}$, et pour $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}_{\geq s})$, seul deux cas sont possibles

- (i) $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}_{\geq s}) = \sup \{ \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}), s \}$, ou bien
- (ii) $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}_{\geq s}) = 0$, auquel cas $\mathcal{V}_{\geq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V})} = 0$ et $s \geq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V})$.

Démonstration. – Notons $r := \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V})$. L'assertion (i) est claire et immédiate lorsque $\mathcal{V}_{\geq r} \neq 0$ et aussi lorsque $\mathcal{V}_{\geq r} = 0$ et que $s < r$. Le cas restant est celui où $\mathcal{V}_{\geq r} = 0$ et que $s \geq r$, cas auquel $\mathcal{V}_{\geq s} = 0$ et donc $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}_{\geq s}) = 0$. □

PROPOSITION 7.4.4. – Dans les énoncés qui suivent, ‘monotone’ est un raccourci pour ‘monotone pour $m \geq N$ ’, et de même pour ‘monotone-stable’.

- (a) Un sous-FI-module d'un FI-module monotone est monotone.
- (b) Tout quotient monotone \mathcal{Q} d'un FI-module monotone-stable \mathcal{V} est monotone-stable ainsi que le noyau de la surjection canonique $\nu : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Q}$.
- (c) Soit $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$ une suite exacte de FI-modules où \mathcal{W} est monotone-stable. Alors, si \mathcal{V} est monotone (resp. monotone-stable), \mathcal{Q} l'est aussi.
- (d) Soit $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$ une suite exacte de FI-modules. Alors Si \mathcal{K} et \mathcal{Q} sont monotones (resp. monotones-stables), \mathcal{V} l'est aussi.
- (e) Soit $\dots \rightarrow \mathcal{V}_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{V}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{V}_1 \rightarrow \dots$ un complexe de FI-modules. Alors
 - (i) Si \mathcal{V}_{-1} est monotone-stable et \mathcal{V}_0 est monotone, $H^0(\mathcal{V}_*)$ est monotone.
 - (ii) Si \mathcal{V}_{-1} et \mathcal{V}_0 sont monotones-stables et \mathcal{V}_1 est monotone, alors $H^0(\mathcal{V}_*)$ est monotone-stable.

Démonstration. – (a) Immédiat d’après la définition de monotonie.

(b) Le noyau $\mathcal{K} := \ker(\nu)$ est monotone d’après (a). La monotonie assure la condition d’*injectivité* 7.4.1-(a) pour \mathcal{K} , \mathcal{V} et \mathcal{Q} , mais aussi le fait que les multiplicités $c(\lambda)_m$ pour K_m , V_m et Q_m sont non décroissantes pour $m \geq N$. Il s’ensuit que si \mathcal{V} est monotone-stable, les familles de multiplicités sont constantes et la condition de *multiplicités* 7.4.1-(c) est satisfaite. Enfin, la condition de *surjectivité* 7.4.1-(b) est une conséquence logique des propriétés de *monotonie* et de *multiplicités constantes*.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{K} & & V(\lambda)_n^{\oplus l} & \xrightarrow{\phi_n} & K_n'' \subseteq K_{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{V}' & & V(\lambda)_n^{\oplus k} \oplus V(\lambda)_n^{\oplus l} & \xrightarrow{\phi_n} & V_n'' \subseteq V_{n+1}' \\
 \nu \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Q}' & & V(\lambda)_n^{\oplus k} & \xrightarrow{\phi_n} & Q_n'' \subseteq Q_{n+1}'
 \end{array}$$

(c) Pour la monotonie, il suffit, pour λ et $n \geq N$ donnés, de se restreindre au sous-FI-module $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$ engendré par $V(\lambda)_n^{\oplus k} \subseteq Q_n$. On note \mathcal{V}' le sous-FI-module de \mathcal{V} défini par $V_n' = \pi_m^{-1}(Q_m')$, d’où la suite exacte $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{Q}' \rightarrow 0$ avec \mathcal{V}' monotone d’après (a). On considère ensuite le diagramme des morphismes de transition restreint aux composantes λ -isotypiques en n ci-contre. La composante λ -isotypique de $Q_n'' := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(V(\lambda)_n^{\oplus k}) \subseteq Q_{n+1}'$ est celle de $V_n'' := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(V(\lambda)_n^{\oplus k+l})$ modulo celle de $K_n'' := \mathcal{S}_{n+1} \cdot \phi_n(V(\lambda)_n^{\oplus l})$. Or, cette dernière est de multiplicité exactement l puisque \mathcal{K} est supposé monotone-stable, tandis que celle en V_n'' est de multiplicité $\geq k+l$ puisque \mathcal{V}' est supposée (seulement) monotone. Par conséquent \mathcal{Q} vérifie la condition de monotonie pour λ en n . Cette conclusion étant valable pour tout $n \geq N$ et tout λ , le FI-module \mathcal{Q} est bien monotone. Maintenant, si l’on suppose \mathcal{V} monotone et stable, \mathcal{Q} est monotone d’après ce qui précède et, donc, monotone-stable par (b).

(d) Même type de raisonnements que pour (c).

(e). (i) Si \mathcal{V}_0 est monotone, $\ker(d_0)$ est monotone par (a), $\text{im}(d_{-1})$ est monotone-stable par (b), et on applique (c) à $\text{im}(d_{-1}) \hookrightarrow \ker(d_0) \rightarrow H^0(\mathcal{V}_*)$. (ii) Si \mathcal{V}_0 est monotone-stable et que \mathcal{V}_1 est monotone, $\ker(d_0)$ est monotone-stable par (a) et $H^0(\mathcal{V}_*)$ est monotone-stable à nouveau par (c). \square

On en déduit le corollaire suivant, reformulation des résultats de Church concernant les concepts de monotonie et de stabilité (*loc. cit.* prop. 2.5, p. 475).

COROLLAIRE 7.4.5. – (a) La sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\text{rg}_{\text{ms}} \leq N}(k[\text{FI}])$ des FI-modules monotones pour $m \geq N$, est stable par extensions dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])$.

(b) La sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\text{rg}_{\text{ms}} \leq N}(k[\text{FI}])$ des FI-modules monotones-stables pour $m \geq N$, est une sous-catégorie abélienne⁽⁵²⁾ de $\text{Mod}(k[\text{FI}])$ stable par extensions dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])$. En particulier,

⁽⁵²⁾ Une sous-catégorie \mathcal{B} d’une catégorie abélienne \mathcal{A} est dite *sous-catégorie abélienne* si elle est abélienne et si ses noyaux, conoyaux, images et co-images sont ceux dans \mathcal{A} .

- (i) Si (\mathcal{V}_*, d_*) est un complexe de $\text{Mod}_{\text{rg}_{\text{ms}} \leq N}(k[\text{FI}])$, ses FI-modules de cohomologie $h^i(\mathcal{V}_*, d_*)$ vérifient aussi $\text{rg}_{\text{ms}}(h^i(\mathcal{V}_*, d_*)) \leq N$.
- (ii) Dans le groupe $K_0(\text{Mod}(k[\text{FI}]))$, un FI-module \mathcal{V} appartient au sous-groupe $K_0(\text{Mod}_{\text{rg}_{\text{ms}} \leq N}(k[\text{FI}]))$, si et seulement si $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) \leq N$.

7.4.6. Commentaire. – Un théorème important de la théorie de Church et Farb établit l'équivalence pour un FI-module entre le fait d'être de *type fini* et être *éventuellement monotone et stable* et (donc) à caractère polynomial ([10], thm. 1.13), mais ce type d'affirmation, de nature uniquement qualitative, ne renseigne pas sur les valeurs des rangs concernés. Les notions de « poids » et de « degré de stabilité » d'un FI-module ont été introduites dans le but de préciser cette question (cf. 7.9.8). Les sections 7.5–7.9 qui vont suivre rappellent ces notions.

7.5. Poids d'un FI-module

7.5.1. Règles de branchement pour les représentations de S_m . – Elles expliquent les manipulations à effectuer sur le diagramme de Young μ d'une représentation simple V_μ d'un groupe symétrique, pour décrire les composantes irréductibles de ses induits et ses restrictions. Le lemme suivant rappelle ces règles ⁽⁵³⁾.

LEMME 7.5.2 ([10], Lemma 3.2.3). – *Soit k un corps de caractéristique nulle.*

- (a) [Règle de Pieri] *Soit V_ν la représentation irréductible de S_a correspondante à un diagramme de Young $\nu \vdash a$. On a :*

$$\text{ind}_{S_b \times S_a}^{S_{a+b}} k_b \boxtimes V_\nu \sim \text{ind}_{S_a \times S_b}^{S_{a+b}} V_\nu \boxtimes k_b = \bigoplus_{\mu \vdash a+b} V_\mu,$$

où les diagrammes $\mu \vdash a + b$ sont ceux qui s'obtiennent en rajoutant une boîte sur b colonnes distinctes du diagramme ν .

- (b) *Soit V_μ la représentation irréductible de S_{a+b} correspondante à un diagramme de Young $\mu \vdash a + b$. On a :*

$$\left(\text{res}_{S_a \times S_b}^{S_{a+b}} V_\mu\right)_{S_b} = \bigoplus_{\nu \vdash a} V_\nu,$$

où les diagrammes $\nu \vdash a$ sont ceux qui s'obtiennent en enlevant une boîte sur b colonnes distinctes du diagramme μ .

⁽⁵³⁾ Voir Fulton-Harris [18], exercices 4.42–45, pp. 57–59. Les règles de branchement découlent plus généralement de la règle de Littlewood-Richardson *loc. cit.* appendice A, eq. (A.8) p. 456.

7.5.3. Définitions

- (a) Soit $m > 0$. Le « poids » d'un \mathcal{S}_m -module W , noté $\mathcal{P}(W)$, est le plus grand des $|\lambda|$ tels que $V_{\lambda[m]}$ est facteur irréductible de W . Si $W = 0$, on pose $\mathcal{P}(W) := 0$. On a toujours $\mathcal{P}(W) < m$ (cf. remarque 7.3.7-(c)).
- (b) Le « poids » d'un FI-module $\mathcal{V} = \{V_m\}$, noté $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, est la borne supérieure de l'ensemble $\{\mathcal{P}(V_m)\}$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

PROPOSITION 7.5.4. – Pour $\ell, a \in \mathbb{N}$, soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell) \vdash \ell + a$ et notons $\underline{\ell} := \#\{i \mid \lambda_i > 1\}$. Pour tout \mathcal{S}_ℓ -module W , on a

$$\mathcal{P}(\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{\ell+a}} W) \leq \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a.$$

Démonstration. – On a

$$(5) \quad \mathcal{P}_\lambda \trianglelefteq (\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}) \trianglelefteq_{(1)} N_{\mathcal{S}_{|\lambda|}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_\lambda,$$

d'où une surjection de $\mathcal{S}_{|\lambda|}$ -modules

$$(6) \quad M := \text{ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W \twoheadrightarrow \text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W.$$

(C'est même un isomorphisme lorsque $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\underline{\ell}})$ est strictement décroissante, car, dans ce cas, l'inclusion $\trianglelefteq_{(1)}$ dans (5) est une égalité.) On remarque alors que le terme de gauche de (6) n'est autre que le $\mathcal{S}_{\ell+a}$ -module

$$M = \text{ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{\underline{\ell}} + \ell - \underline{\ell}}} k_{\lambda_1} \boxtimes \dots \boxtimes k_{\lambda_{\underline{\ell}}} \boxtimes \text{res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W,$$

puisque dans l'action de $\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}$ à travers G_λ , les \mathcal{S}_{λ_i} agissent trivialement sur W . L'itération de la règle de Pieri 7.5.2-(a) conduit alors à la majoration

$$\mathcal{P}(M) \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_{\underline{\ell}} + \mathcal{P}(\text{res}_{\mathbf{1}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W),$$

avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + a$ et où

$$(7) \quad \mathcal{P}(\text{res}_{\mathbf{1}_{\underline{\ell}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} W) \leq \mathcal{P}(W).$$

En effet, un cas particulier de 7.5.2-(b) dit que $\mathcal{P}(\text{res}_{\mathbf{1}_{1+n} \times \mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_{1+n}} M) \leq \mathcal{P}(M)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout \mathcal{S}_{1+n} -module M , ce qui conduit à (7) par itération. On a donc montré que $\mathcal{P}(M) \leq \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a$ et la proposition résulte puisque $\mathcal{P}(M)$ majore le poids des quotients de M , en particulier (6). \square

REMARQUE 7.5.5. – Dans 7.5.4, l'égalité $\mathcal{P}(\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} W) = \mathcal{P}(W) + \underline{\ell} + a$ peut être atteinte. En effet, soit $W = V(\nu)_\ell$. Par la règle 7.5.2-(b), $V(\nu)_{\ell-\underline{\ell}}$ est facteur de $\text{res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} V(\nu)_\ell$ si et seulement si

$$\ell - \underline{\ell} - |\nu| \geq \nu_1,$$

auquel cas $\mathcal{P}(\text{res}_{\mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_\ell} V(\nu)_\ell) = |\nu|$ est le plus grand poids possible.

Notons $M := \text{ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_{\underline{\ell}}} \times \mathcal{S}_{\ell-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_{|\lambda|}} V(\nu)_{\ell-\underline{\ell}}$. De ce qui précède et par itération de la règle de Pieri 7.5.2-(a), on a $\mathcal{P}(M) = |\nu| + \underline{\ell} + a$, si et seulement si $\ell - \underline{\ell} - |\nu| \geq$

$\sup\{\nu_1, \lambda_1\}$. Or, cette condition est vérifiée si $\lambda = (\nu_1, \nu_1 - 1, \nu_1 - 2, \dots, 1, \dots, 1)$, auquel cas $\ell = \nu_1 - 1$ et (*) est vérifiée dès que $\ell \geq |\nu| + 2\nu_1 - 1$. Enfin, pour un tel λ , on a bien $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda$ et donc $\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\lambda} V(\nu)_\ell = M$.

7.5.6. Scindage d'un FI-module par le poids. – Soit la décomposition

$$W_m = \bigoplus_{|\mu| < m} c(\mu)_m V(\mu)_m$$

en facteurs irréductibles d'un \mathcal{S}_m -module W_m . Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_m^{(\geq t)} := \bigoplus_{|\mu| \geq t} c(\mu)_m V(\mu)_m$$

et *mutatis mutandis* pour $W_m^{(>t)}$, $W_m^{(\leq t)}$, $W_m^{(<t)}$ et $W_m^{(=t)}$, aussi noté $W_m^{(t)}$.

PROPOSITION 7.5.7 (Troncatures de FI-modules). – Soit $\mathcal{W} := \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}_m$ un FI-module.

(a) On a $\phi_m(W_m^{(>t)}) \subseteq W_{m+1}^{(>t)}$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. On définit alors

(i) le sous-FI-module $\mathcal{W}^{(>t)} \subseteq \mathcal{W}$ déterminé par les restrictions $\phi_m^{(>t)}$ des morphismes de transition ϕ_m aux sous-modules $W_m^{(>t)}$, soit

$$\mathcal{W}^{(>t)} := \{\phi_m^{(>t)} : W_m^{(>t)} \rightarrow W_{m+1}^{(>t)}\}_m ;$$

(ii) le FI-module quotient $\mathcal{W}/\mathcal{W}^{(>t)}$

$$\mathcal{W}^{(\leq t)} := \{\phi_m^{(\leq t)} : W_m^{(\leq t)} \rightarrow W_{m+1}^{(\leq t)}\}_m := \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{W}^{(>t)}} ;$$

(iii) le FI-module $\mathcal{W}^{(t)}$ sous-quotient de \mathcal{W} « de poids unique t »

$$\mathcal{W}^{(t)} := \{\phi_m^{(t)} : W_m^{(t)} \rightarrow W_{m+1}^{(t)}\}_m := \frac{\mathcal{W}^{\geq t}}{\mathcal{W}^{>t}}.$$

(Remarquer l'abus de notation pour les morphismes de transition induits.)

(b) Un FI-module \mathcal{W} tel que $\mathcal{P}(\mathcal{W}) < \infty$, est extension successive de ses FI-modules à poids unique $\mathcal{W}^{(t)}$, $t \leq \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

(c) On a $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\{\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(>t)}), \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(\leq t)})\}$, $\forall t \in \mathbb{N}$. En particulier

$$\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \sup\{\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(t)}) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

Et de même avec rg_m à la place de rg_{ms} .

Démonstration. – (a) Si $V(\mu)_m$ est un facteur irréductible de W_m , le sous- \mathcal{S}_{m+1} -module engendré par $\phi_m(V(\mu)_m)$ est un quotient de $\text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$. Or, la règle de Pieri 7.5.2-(a) stipule que les composantes irréductibles de $\text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$ sont les $V(\nu)_{m+1}$ dont le diagramme de Young est obtenu en rajoutant une boîte sur une colonne du diagramme de $V(\mu)_m$. Ces composantes sont donc de multiplicité 1 et de poids $|\nu| \geq |\mu|$, (avec égalité $|\nu| = |\mu|$ si et seulement si $\mu = \nu$). Ceci établit l'inclusion $\phi_m(W_m^{(>t)}) \subseteq W_{m+1}^{(>t)}$. La suite de (a) est alors immédiate.

(b) Lorsque $t := \mathcal{P}(W) < \infty$, on a $\mathcal{W}^{(\geq t)} \neq 0$ et $\mathcal{W}^{(>t)} = 0$ auquel cas $\mathcal{W}^{(\geq t)} = \mathcal{W}^{(t)}$. On donc la suite exacte courte de FI-modules

$$0 \rightarrow \mathcal{W}^{(t)} \hookrightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}^{(<t)} = \mathcal{W}/\mathcal{W}^{(\geq t)} \rightarrow 0,$$

où, par construction, $\mathcal{P}(\mathcal{W}^{(<t)}) < t$. Un raisonnement par induction sur le poids termine la preuve.

(c) On a $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \sup \{\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(>t)}), \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(\leq t)})\}$ par la définition même de rg_{ms} . L'égalité $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \sup \{\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^{(t)}) \mid t \in \mathbb{N}\}$ s'ensuit par (b) et par la stabilité par extensions de $\text{Mod}_{\text{rg}_{\text{ms}} \leq N}(k[\text{FI}])$ (corollaire 7.4.5-(b)). La preuve du cas rg_{m} à la place de rg_{ms} est essentiellement la même moyennant 7.4.5-(a). \square

7.6. Les FI-modules $\mathcal{M}_a^H(W)$.

Pour tout $0 < a \in \mathbb{N}$ et tout sous-groupe $H \subseteq \mathcal{S}_a$, on définit le foncteur

$$\mathcal{M}_a^H : \text{Mod}(k[H]) \rightarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq a}$$

par

$$\mathcal{M}_a^H(W)_{a+b} = \begin{cases} 0, & \text{si } b < 0, \\ \text{ind}_{H \times \mathcal{S}_b}^{\mathcal{S}_{a+b}} W \boxtimes k_b, & \text{si } b \geq 0. \end{cases}$$

Pour tous $0 \leq b_1 \leq b_2$, l'égalité $W \boxtimes k_{b_1} = W \boxtimes k_{b_2}$ induit le morphisme de $H \times \mathcal{S}_{b_1}$ -modules de $W \boxtimes k_{b_1} \rightarrow \text{ind}_{H \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2}$, d'où le morphisme (canonique) de transition

$$\phi_{a+b_2, a+b_1} : \text{ind}_{H \times \mathcal{S}_{b_1}}^{\mathcal{S}_{a+b_1}} W \boxtimes k_{b_1} \rightarrow \text{ind}_{H \times \mathcal{S}_{b_2}}^{\mathcal{S}_{a+b_2}} W \boxtimes k_{b_2},$$

dont l'image est clairement invariante sous l'action de $\mathbf{1}_{a+b_1} \times \mathcal{S}_{b_2-b_1}$. La famille $\mathcal{M}_a^H(W) : \{\phi_{m+1, m} : \mathcal{M}_a^H(W)_m \rightarrow \mathcal{M}_a^H(W)_{m+1}\}$ définit donc bien un FI-module.

L'action du foncteur \mathcal{M}_a^H sur les morphismes suit le même principe d'induction et ne sera pas détaillée.

7.6.1. – Les FI-modules $\mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}(k[\mathcal{S}_a])$ et $\mathcal{M}(a)$ de 7.2.4 sont les mêmes. Dans la suite on notera $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$.

PROPOSITION 7.6.2 ([10]). – (a) *Le foncteur $\mathcal{M}_a^H : \text{Mod}(k[H]) \rightarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq a}$ est additif, exact et fidèle. Il est aussi l'adjoint à gauche du foncteur « d'évaluation en a », i.e. pour tout H -module W et tout FI-module \mathcal{V} , on a :*

$$\text{Hom}_{\text{FI}}(\mathcal{M}_a(W), \mathcal{V}) = \text{Hom}_H(W, V_a).$$

En particulier, le FI-module $\mathcal{M}_a(W)$ est un objet projectif de $\text{Mod}(k[\text{FI}])$.

- (b) *Le foncteur $\mathcal{M}_a := \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$ est pleinement fidèle.*
- (c) *$\mathcal{M}_a^H(W)$ est un FI-module de type fini si et seulement si $\dim_k W < \infty$.*
- (d) ⁽⁵⁴⁾ *Pour tout \mathcal{S}_a -module W , on a $\mathcal{P}(\mathcal{M}_a(W)) = a$.*

⁽⁵⁴⁾ [10], prop. 3.2.4.

- (e) ⁽⁵⁵⁾ Pour tout \mathcal{S}_a -module W , le FI-module $\mathcal{M}_a^H(W)$ est éventuellement monotone et stable. On a

$$\mathrm{rg}_m(\mathcal{M}_a^H(W)) \leq a \text{ et } \mathrm{rg}_s(\mathcal{M}_a^H(W)) \leq 2a.$$

En particulier, si $\dim_k W < \infty$, la famille de caractères $\chi(\mathcal{M}_a^H(W))$ est polynomiale à partir de $m = 2a$.

Indication. – (a), (b) et (c) sont immédiates. (d) et (e) résultent d’une étude fine des règles de branchement 7.5.2 par Church. Lorsque $W = V_\lambda$ on a même $\mathrm{rg}_s(\mathcal{M}_a(V_\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1$. La dernière partie de (e) découle du calcul de Macdonald 7.3.8. \square

7.7. Catégorie des FB-modules

L’article [10] s’intéresse également aux représentations de la sous-catégorie pleine $\mathrm{FB} \subseteq \mathrm{FI}$ des ensembles finis et leurs bijections. Un $k[\mathrm{FB}]$ -module est alors, par définition, un foncteur covariant $\mathcal{R} : \mathrm{FB} \rightarrow \mathrm{Vec}(k)$, ce qui équivaut à la donnée d’une famille de représentations de groupes finis $\mathcal{R} := \{\rho_m : \mathcal{S}_m \mapsto \mathrm{Gl}_k(W_m)\}_m$. On a donc

$$\mathrm{Mod}(k[\mathrm{FB}]) = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Mod}(k[\mathcal{S}_m]).$$

Dans $\mathrm{Mod}(k[\mathrm{FB}])$, la notion de FB-module de type fini est inintéressante car équivalente à la donnée d’une famille de représentations $\{W_m\}_m$ presque toutes nulles. Par contre, les notions de « stabilité des multiplicités des représentations $V(\lambda)_m$ » (cf. 7.4.1-(c)) et de « polynomialité de caractères » (7.3.1) ont encore un intérêt. ⁽⁵⁶⁾

DÉFINITION. – On dit que un FB-module est « (éventuellement) stable » lorsque la condition 7.4.1-(c) est satisfaite pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

7.8. Les FI-modules $\mathcal{M}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$

On introduit un certain quotient $\mathcal{V}(\lambda) := \{\phi_m : V(\lambda)_m \rightarrow V(\lambda)_{m+1}\}_m$ du FI-module $\mathcal{M}_{|\lambda|+\lambda_1}(V(\lambda)_{|\lambda|+\lambda_1})$ (cf. section 7.6) qui rassemble les représentations $V(\lambda)_m$. La proposition 7.8.2 donne ses principales propriétés, notamment pour la description des catégories $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg}_m \leq s}(k[\mathrm{FI}])$ et $\mathrm{Mod}_{\mathrm{rg}_m \leq s}(k[\mathrm{FI}])$.

⁽⁵⁵⁾ Hemmer [24] thm. 2.4, Church [9] §5 thm. 2.8, p. 494.

⁽⁵⁶⁾ Dans [2], on prouve l’équivalence des deux conditions et l’on compare les rangs.

7.8.1. Définition de $\mathcal{V}(\lambda)$. – Étant donnée une décomposition λ , notons le FI-module $\mathcal{M}_{|\lambda|}(V_\lambda)$ de 7.6 plus simplement par

$$\mathcal{M}(\lambda) := \{\phi_m : M(\lambda)_m \rightarrow M(\lambda)_{m+1}\}_m.$$

D'après les règles de Pieri 7.5.2-(a), pour $m \geq |\lambda|$, la multiplicité $c(\mu)_m$ de $V(\mu)_m$ dans la décomposition en facteurs irréductibles

$$M(\lambda)_m := \text{ind}_{\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_{m-a}}^{\mathfrak{S}_m} V(\lambda)_a \boxtimes k = \bigoplus_{\mu} c(\mu)_m V(\mu)_m$$

est le nombre de fois que l'on peut obtenir le diagramme $\mu[m]$ en rajoutant une boîte sur $m-|\lambda|$ colonnes distinctes de λ . On a

$$c(\mu)_m > 0 \Rightarrow (|\lambda| \leq |\mu| \leq |\lambda| + \lambda_1),$$

et le FI-module $\mathcal{M}(\lambda)^{(|\lambda|)}$ (le sous-quotient de $\mathcal{M}(\lambda)$ à poids unique $|\lambda|$ (cf. 7.5.7-(a))), est un quotient de $\mathcal{M}(\lambda)$:

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda)_m & & \\ \iota \downarrow & & \\ M(\lambda)_m & \xrightarrow{\phi_m} & M(\lambda)_{m+1} \\ & & \nu \downarrow \\ & & V(\lambda)_{m+1}. \end{array}$$

D'autre part, on a $c(\lambda)_m = 1$ pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, puisque $|\mu| = |\lambda|$ équivaut à $\mu = \lambda$. Ceci implique que la composée $\nu \circ \phi_m \circ \iota$ ci-contre, où ν est la surjection canonique, est une injection dont l'image engendre $V(\lambda)_{m+1}$. On note alors

$$\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : V(\lambda)_m \rightarrow V(\lambda)_{m+1}\} := \frac{\mathcal{M}(\lambda)^{(\geq |\lambda|)}}{\mathcal{M}(\lambda)^{(> |\lambda|)}}.$$

PROPOSITION ET NOTATIONS 7.8.2. – (a) *Pour toute décomposition λ , on a*

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| \text{ et } \text{rg}_m(\mathcal{V}(\lambda)) = 0 \text{ et } \text{rg}_s(\mathcal{V}(\lambda)) = |\lambda| + \lambda_1.$$

(b) *Soit $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}_m$ un FI-module à poids unique t .*

Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, si $W_n = \bigoplus_{|\mu|=t} c(\mu)_n V(\mu)_n$ est la décomposition en composantes irréductibles, on note

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}, n) := \bigoplus_{|\mu|=t} c(\mu)_n \mathcal{V}(\mu)_{\geq n}.$$

(i) *Pour tout λ et tout $n \geq |\lambda| + \lambda_1$, l'application canonique*

$$\text{Hom}_{\text{FI}}(\mathcal{V}(\lambda)_{\geq n}, \mathcal{W}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V(\lambda)_n, W_n)$$

est bijective.

Dans les assertions suivantes, on note $\mathcal{S}(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \rightarrow \mathcal{W}$ le morphisme de FI-modules correspondant à l'identité en degré n .

(ii) *$\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) \leq s$ si et seulement si $\mathcal{S}(s) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, s) \rightarrow \mathcal{W}_{\geq s}$ est bijectif.*

(iii) $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) \leq s$ si et seulement si $\mathcal{S}(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \rightarrow \mathcal{W}$ est injectif pour tout $n \geq s$.

En particulier, si $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) \leq s$ et si $W_m \sim V(\lambda)_m$ pour tout $m \geq s$, alors

$$\mathcal{W}_{\geq s} \simeq \mathcal{V}(\lambda)_{\geq s}.$$

(c) Si \mathcal{W} est tel que $s := \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) < \infty$, le FI-module $\mathcal{W}_{\geq s}$ est extension de FI-modules de la forme $\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}$ où $|\mu| + \mu_1 \leq s$.

(d) Un FB-module $\mathcal{W} = \{W_m\}_m$ est stable pour $m \geq N$ si et seulement si il existe un FI-module $\mathcal{Z} = \{\phi_m : Z_m \rightarrow Z_{m+1}\}_m$ monotone et stable pour $m \geq N$, tel que $W_m = Z_m$ pour tout $m \geq N$.

Démonstration. – (a) est implicite dans la définition 7.8.1. (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, la règle de Pieri 7.5.2-(a), nous dit que $V(\mu)_{m+1}$, vu comme \mathcal{S}_m -module, contient une et une seule composante irréductible de poids $|\mu|$, à savoir $V(\mu)_m$ et que sa multiplicité est égale à 1. Il s’ensuit que la restriction $\phi(\mu)_m$ du morphisme de transition de \mathcal{W}

$$\phi_m : \left(W_m = \bigoplus_{|\mu|=t} c(\mu)_m V(\mu)_m \right) \rightarrow \left(W_{m+1} = \bigoplus_{|\mu|=t} c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1} \right)$$

à $c(\mu)_m V(\mu)_m$ est à valeurs dans $c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1}$. Les sous-familles

$$\mathcal{W}(\mu) := \{ \phi(\mu)_m : c(\mu)_m V(\mu)_m \rightarrow c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1} \}_m$$

sont donc des sous-FI-modules de \mathcal{W} et nous avons la décomposition

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{|\mu|=t} \mathcal{W}(\mu).$$

Chaque morphisme $\phi(\mu)_m$ se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} c(\mu)_m V(\mu)_m & \xrightarrow{\phi(\mu)_m} & c(\mu)_{m+1} V(\mu)_{m+1} \\ \iota(\mu)_m \downarrow & \nearrow \Phi(\mu)_m & \uparrow \Psi(\mathcal{W})(\mu)_{m+1} \\ c(\mu)_m \text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m & \xrightarrow{\pi(\mu)_m} & c(\mu)_m V(\mu)_{m+1}, \end{array}$$

où $\phi(\mu)_m = \Phi(\mathcal{W})(\mu)_m \circ \iota(\mu)_m$ est la factorisation standard 7.2.2-(3), où $\pi(\mu)_m : \text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m \twoheadrightarrow V(\mu)_{m+1}$ est la surjection canonique sur l’unique composante irréductible de $\text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_m$ de poids $|\mu|$, et où $\Psi(\mathcal{W})(\mu)_m$ est induit par $\Phi(\mu)_m$.

En additionnant, on obtient la factorisation de $\phi_m = \sum_{\mu} \phi(\mu)_m$:

$$(8) \quad W_m \xhookrightarrow{\iota_m} \text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W_m \xrightarrow{\pi_m} [\text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W_m]_t \xrightarrow{\Psi(\mathcal{W})_{m+1}} W_{m+1},$$

où $[M]_t$ est la somme des composantes irréductibles de poids t d’un \mathcal{S}_{m+1} -module M .

La même démarche pour le FI-module $\mathcal{U} := \mathcal{V}(\mathcal{W}, n)$ conduit au même type de factorisation (8) (à ceci près que $\Psi(\mathcal{U})_{m+1}$ un isomorphisme). La naturalité de la factorisation permet de construire, à partir d’un morphisme $f_n : U_n \rightarrow W_n$ donné, une

famille (unique) de morphismes $\{f_m : U_m \rightarrow W_m\}_{m \geq n}$ qui constitue un morphisme de FI-modules $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$.

En effet, supposons avoir défini f_{n+1}, \dots, f_z de manière compatible aux morphismes de transition de \mathcal{U} et \mathcal{W} . On a alors le morphisme de factorisations (8)

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} U_z & \xhookrightarrow{\iota_z} & \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} U_z & \xrightarrow{\pi_z} & \llbracket \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} U_z \rrbracket_t & \xrightarrow[\sim]{\Psi(\mathcal{U})_{z+1}} & U_{z+1} \\ \downarrow f_z & & \downarrow \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} f_z & & \downarrow \llbracket \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} f_z \rrbracket_t & & \downarrow f_{z+1} \\ W_z & \xhookrightarrow{\iota_z} & \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} W_z & \xrightarrow{\pi_z} & \llbracket \text{ind}_{\mathcal{S}_z}^{\mathcal{S}_{z+1}} W_z \rrbracket_t & \xrightarrow{\Psi(\mathcal{W})_{z+1}} & W_{z+1}, \end{array}$$

où les flèches en pointillé sont induites par f_z et sont uniques à rendre commutatifs les sous-diagrammes (I) et (II). Enfin, comme $\Psi(\mathcal{U})_{z+1}$ est bijectif, l'existence et unicité de f_{z+1} sont claires, ce qui termine la preuve de (b-i).

On remarque alors que lorsque f_z est un isomorphisme, f_{z+1} est un isomorphisme si et seulement si $\Psi(\mathcal{W})_{z+1}$ l'est. Or cette dernière condition est une condition de monotonie et stabilité sur \mathcal{W} , de sorte que si $s := \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W})$, le morphisme $\mathcal{S}(s) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, s) \rightarrow \mathcal{W}_{\geq s}$ est un isomorphisme, d'où (b-ii).

De manière analogue, lorsque f_z est une injection, on note $W'_z := \text{im}(f_z)$, et l'on fixe une décomposition $W_z = W'_z \oplus N_z$. La dernière ligne de (9) se décompose alors en somme directe de deux lignes, ce qui permet de voir que f_{z+1} est injective si et seulement si la restriction de $\Psi(\mathcal{W})_{z+1}$ à $\llbracket \text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}} W'_z \rrbracket_t$ l'est. Or, ceci est très précisément la condition de monotonie en z pour \mathcal{W} , et l'assertion (b-iii) s'ensuit.

(c) Résulte de (b) et de 7.5.7-(b) et (c). □

7.9. Monotonie, stabilité et co-invariants

7.9.1. Co-invariants. – Dans [10] (paragraphe 3.1), pour $t, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq t \leq m$, on définit le foncteur des « \mathcal{S}_{m-t} -co-invariants » (pour l'inclusion $\mathcal{S}_t \times \mathcal{S}_{m-t} \subseteq \mathcal{S}_m$) par :

$$\begin{aligned} (_)_{\mathcal{S}_{m-t}} : \text{Mod}(\mathcal{S}_m) &\rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{S}_t) \\ W &\rightsquigarrow W_{\mathcal{S}_{m-t}} := k \otimes_{k[\mathcal{S}_{m-t}]} W. \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout FI-module $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}$ et tous $t, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq t$, notons par $\nu_m : W_m \twoheadrightarrow (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$ la surjection $w \mapsto 1 \otimes w$. Alors, la composée $\nu_{m+1} \circ \phi_m$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & W_m & \xrightarrow{\phi_m} & W_{m+1} & \longrightarrow \\ & \searrow \nu_{m+1} \circ \phi_m & & \downarrow \nu_{m+1} & \\ & & & (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}} & \end{array}$$

se factorise à travers $\nu_m : W_m \rightarrow (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$ en un unique morphisme de \mathcal{S}_t -modules $(\phi_m) : (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} \rightarrow (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & W_m & \xrightarrow{\phi_m} & W_{m+1} & \longrightarrow \\ & \nu_m \downarrow & & \downarrow \nu_{m+1} & \\ & (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}} & \xrightarrow{(\phi_m)} & (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{m+1-t}} & \end{array}$$

7.9.2. Le foncteur Φ_t . – Pour $t \in \mathbb{N}$, on note dans [10] (déf. 3.1.2)

$$\Phi_t : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}^{\mathbb{N}}(k[\mathcal{S}_t][T])$$

le foncteur qui fait correspondre à $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}_m$ le \mathcal{S}_t -module positivement gradué $\Phi_t(\mathcal{W})^*$ défini par

$$\Phi_t(\mathcal{W})^{m-t} := (W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}, \quad \forall m \geq t,$$

muni de l'action de degré +1 de T qui vaut (ϕ_m) sur $(W_m)_{\mathcal{S}_{m-t}}$.

7.9.2.1. À propos des notations. – Le foncteur $(_)_{\mathcal{S}_{m-t}} : \text{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{S}_t)$ de co-invariants sera parfois aussi noté $\Phi_t(_) : \text{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{S}_t)$. En particulier, on pourra écrire

$$\Phi_t(\mathcal{W})^{m-t} = \Phi_t(W_m) \text{ et } (\phi_m) = \Phi_t(\phi_m).$$

LEMME 7.9.3. – Soit $\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : V(\lambda)_m \rightarrow V(\lambda)_{m+1}\}$ le FI-module de 7.8.

Pour tout $m \geq t$, le morphisme de \mathcal{S}_t -modules

$$\Phi_t(\phi_m) : \Phi_t(V(\lambda)_m) \rightarrow \Phi_t(V(\lambda)_{m+1})$$

est injectif, et il est bijectif si $t < |\lambda|$ ou si $m \geq t + \lambda_1$.

En particulier, si

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{\lambda} c(\lambda)\mathcal{V}(\lambda) = \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\},$$

le morphisme $\Phi_t(\phi_m)$ est injectif pour tout $m \geq t$.

Démonstration. – Pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$ numérotions le diagramme de Young de $\lambda[m]$ de haut en bas et de gauche à droite comme dans le tableau :

$$\tau_{\ell}(m) := \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{8} & \boxed{10} & \cdots & \boxed{\cdots} & \boxed{m} \\ \boxed{2} & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{11} & & & \\ \boxed{3} & \boxed{7} & & & & & \\ \boxed{4} & & & & & & \end{array}$$

Notons (suivant [18] § 4.1) $L_{\lambda}(m)$, P_{λ} et Q_{λ} les sous-groupes de \mathcal{S}_m qui laissent respectivement stables, la première ligne, les autres lignes et les colonnes du diagramme sous-jacent à $\tau_{\ell}(m)$. Notons ensuite, dans $k[\mathcal{S}_m]$,

$$l_{\lambda}(m) := \sum_{\alpha \in L_{\lambda}(m)}, \quad \mathbf{a}_{\lambda} := \sum_{\alpha \in P_{\lambda}}, \quad \mathbf{b}_{\lambda} := \sum_{\alpha \in Q_{\lambda}} \text{sgn}(\alpha)\alpha.$$

Le « symétriseur de Young » associé à $\tau_\lambda(m)$ est l'élément de $k[\mathcal{S}_m]$

$$\mathbf{c}_\lambda(m) := \mathbf{l}_\lambda(m) \cdot \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{b}_\lambda$$

et le sous- \mathcal{S}_m -module à gauche $k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) \subseteq k[\mathcal{S}_m]$ est isomorphe à la représentation irréductible $V(\lambda)_m$. On a aussi (*loc. cit.* ex. 4.4)

$$k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) = k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda \cdot \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{l}_\lambda(m).$$

Soient maintenant $|\lambda| + \lambda_1 \leq m \leq n$. D'après le choix du schéma de numérotations des tableaux, il est clair que par le plongement $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$ on a

$$\mathbf{l}_\lambda(m) \cdot \mathbf{l}_\lambda(n) = (m - |\lambda|)! \mathbf{l}_\lambda(n).$$

La multiplication à droite par $\mathbf{l}_\lambda(n)$ définit par conséquent un morphisme de \mathcal{S}_m -modules à gauche injectif :

$$\phi_{n,m} : k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda \cdot \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{l}_\lambda(m) \xrightarrow{(_) \cdot \mathbf{l}_\lambda(n)} k[\mathcal{S}_n] \cdot \mathbf{b}_\lambda \cdot \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{l}_\lambda(n).$$

On remarque ensuite que toute permutation $\alpha \in \mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ fixe l'image de $\phi_{n,m}$ puisque, d'une part, α commute à $k[\mathcal{S}_m]$ donc à $k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{b}_\lambda \cdot \mathbf{a}_\lambda$ et, d'autre part, on a $\alpha \cdot \mathbf{l}_\lambda(n) = \mathbf{l}_\lambda(n)$ parce que $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m} \subseteq \mathbf{l}_\lambda(n)$.

Si nous notons maintenant $\phi_m = \phi_{m+1,m}$, l'injection $\phi_{n,m}$ est multiple de la composée $\phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_m$ et la famille $\mathcal{W}(\lambda)$ dont les termes W_m sont nuls pour $m < |\lambda| + \lambda_1$ et qui, pour $m \geq |\lambda| + \lambda_1$, coïncide avec

$$\{\phi_m : k[\mathcal{S}_m] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m) \rightarrow k[\mathcal{S}_{m+1}] \cdot \mathbf{c}_\lambda(m+1)\}_m$$

est un FI-module canoniquement isomorphe à $\mathcal{V}(\lambda)$ d'après 7.8.2-(b-iii).

Ce qui précède justifie l'égalité

$$\Phi_t(V(\lambda)_m) = k \left[\mathcal{S}_{m-t} \setminus \mathcal{S}_m \right] \cdot \mathbf{l}_\lambda(m) \cdot \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{b}_\lambda, \quad \forall m \geq t,$$

et $\Phi_t(\phi_m)$ sera injective si et seulement si le morphisme induit par la multiplication à droite par $\mathbf{l}_\lambda(m+1)$:

$$k \left[\mathcal{S}_{m-t} \setminus \mathcal{S}_m \right] \cdot \mathbf{l}_\lambda(m) \rightarrow k \left[\mathcal{S}_{m+1-t} \setminus \mathcal{S}_{m+1} \right] \cdot \mathbf{l}_\lambda(m+1)$$

est injectif. Or, ceci revient à montrer que l'application naturelle

$$\mathcal{S}_{m-t} \setminus \mathcal{S}_m / L_\lambda(m) \rightarrow \mathcal{S}_{m+1-t} \setminus \mathcal{S}_{m+1} / L_\lambda(m+1)$$

est injective, ce qui résulte d'une analyse élémentaire.

Maintenant, du fait de l'injectivité de $\Phi_t(\phi_m)$, sa bijectivité résulte du décompte des composantes irréductibles de $\Phi_t(V(\lambda)_{m+1})$ en tant que \mathcal{S}_t -module. La règle de branchement 7.5.2-(b) nous dit que ce nombre est le nombre des manières d'enlever $m+1-t$ boîtes de colonnes différentes de $\lambda[m+1]$. Il s'ensuit que si $m+1-t > \lambda_1$, on est obligé d'enlever la dernière boîte de la première ligne de $\lambda[m+1]$ et l'on retrouve alors le nombre des composantes irréductibles de $\Phi_t(\mathcal{V}(\lambda)_m)$ par la même règle de branchement.

Le assertion concernant $\mathcal{W} = \bigoplus_{\lambda} c(\lambda)\mathcal{V}(\lambda)$ est conséquence immédiate du cas où la somme et les multiplicités sont finies, ce qui est clair d'après la première assertion. \square

DÉFINITION 7.9.4. – *Le « degré de stabilité (resp. d'injectivité) en $t \in \mathbb{N}$ » d'un FI-module \mathcal{W} , noté $\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})$ (resp. $\text{deg-ini}_t(\mathcal{W})$), est le plus petit $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que l'application $T : \Phi_t(\mathcal{W})^n \rightarrow \Phi_t(\mathcal{W})^{n+1}$ est bijective (resp. injective) pour tout $n \geq d$.*

PROPOSITION 7.9.5. – *On fixe $t \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Le foncteur $\Phi_t : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}^{\mathbb{N}}(k[\mathcal{S}_t][T])$ est covariant et exact.*
 (b) *Soit λ une partition. Pour tous $m \geq t$, notons $\mathcal{J}_t(V(\lambda)_m)$ la famille des partitions $\nu \vdash t$ telles que V_{ν} est un facteur irréductible de $\Phi_t(V(\lambda)_m)$, répétées autant de fois que leurs multiplicités.*

Alors, on a des inclusions

$$\mathcal{J}_t(V(\lambda)_m) \subseteq \mathcal{J}_t(V(\lambda)_{m+1}), \quad \forall m \geq t,$$

et ces inclusions sont des égalités si et seulement si $m \geq t + \lambda_1$.

- (c) *Soit λ une partition et soit $\mathcal{V}(\lambda)$ le FI-module de 7.8.2. Alors,*

- (i) *Pour tout $t \in \mathbb{N}$,*

$$\text{deg-ini}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geq s}) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

- (ii) *$t < |\lambda| \Leftrightarrow \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda)) = 0$. Dans ces cas,*

$$\text{deg-stab}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geq s}) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

- (iii) *$t = |\lambda| \Leftrightarrow \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} = V_{\lambda}$ et $T = \text{id}$. Dans ces cas,*

$$\text{deg-stab}_{|\lambda|}(\mathcal{V}(\lambda)_{\geq s}) = \sup \{ \lambda_1, s - |\lambda| \}, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

- (iv) *Si $t \geq |\lambda|$ et $m \geq t + \lambda_1$, on a*

$$\Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} \simeq \text{ind}_{\mathcal{S}_{|\lambda|} \times \mathcal{S}_{t-|\lambda|}}^{\mathcal{S}_t} V_{\lambda} \boxtimes k,$$

et $T : \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m-t} \rightarrow \Phi_t(\mathcal{V}(\lambda))^{m+1-t}$ est bijective. Dans ces cas,

$$\text{deg-stab}_t(\mathcal{V}(\lambda)_{\geq s}) = \sup \{ \lambda_1, s - t \}, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. – (a) est immédiat.

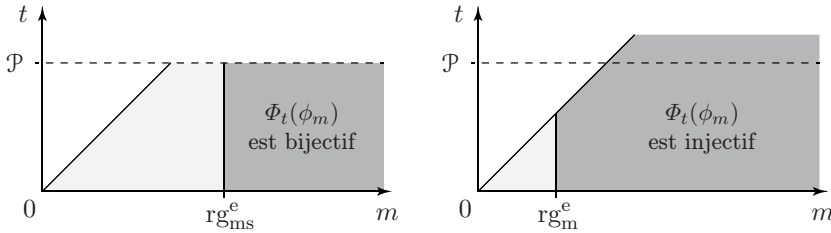
(b) et (i) par l'injectivité de (ϕ_m) du lemme 7.9.3.

(ii)-(iv) c'est le lemme 3.2.7 de [10], qui résulte également du lemme 7.9.3 et de la règle de branchement 7.5.2-(b). Nous omettons les détails. \square

7.9.6. Suite du commentaire 7.4.6. – L'intérêt du poids et du degré de stabilité d'un FI-module \mathcal{W} apparaît dans la proposition 3.3.3 de [10] qui établit la majoration $\text{rg}_s(\mathcal{W}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{W}) + \text{deg-stab}(\mathcal{W})$ ⁽⁵⁷⁾. Un outil important dans notre travail est le foncteur d'induction $\text{ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])$ qui sera introduit dans la section 8. Ce foncteur est un 'recollement' des foncteurs $\text{ind}_{G_\lambda \setminus m}^{\mathbb{S}_m}$ de 5.3.3-(b) et lorsqu'il est appliqué à un FI-module \mathcal{W} , il est crucial de comprendre le rapport entre les rangs de \mathcal{W} et ceux de $\text{ind}_\lambda(\mathcal{W})$. En ce sens, la proposition 3.3.3 *loc. cit.* était *a priori* intéressante dans la mesure où nous avons un meilleur contrôle de la perturbation de $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ et de $\text{deg-stab}(\mathcal{W})$ lors de ces inductions (cf. 7.5.4). Cela n'a pourtant pas suffi et nous avons été amenés à caractériser autrement les rangs de \mathcal{W} . La suite décrit cette nouvelle approche. Elle conduira au théorème 8.1.5 qui donne les majorations $\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{W})) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) + 2|\lambda|$ et $\text{rg}_m(\text{ind}_\lambda(\mathcal{W})) \leq \text{rg}_m(\mathcal{W}) + |\lambda|$.

7.9.7. Rangs étendus. – Les « rangs étendus » de $\mathcal{W} = \{\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}\}_m$ sont les nombres

$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W}) := \inf \{s \in \mathbb{N} \mid \Phi_t(\phi_m) \text{ est bijective } \forall m \geq s, \forall t \leq \mathcal{P}(\mathcal{W}) \leq m\}, \\ \text{rg}_m^e(\mathcal{W}) := \inf \{s \in \mathbb{N} \mid \Phi_t(\phi_m) \text{ est injectif } \forall m \geq s, \forall t \leq m\}. \end{cases}$$



PROPOSITION 7.9.8. – Pour tout FI-module \mathcal{W} , on a

$$\boxed{\text{rg}_m(\mathcal{W}) = \text{rg}_m^e(\mathcal{W}) \quad \text{et} \quad \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W})}.$$

La démonstration résultera du lemme suivant.

LEMME 7.9.9. – (a) Soit $\text{rg}^e \in \{\text{rg}_m^e, \text{rg}_{\text{ms}}^e\}$.

(i) Si $0 \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow 0$ est une suite exacte de FI-modules, on a

$$\text{rg}^e(\mathcal{W}) \leq \sup \{\text{rg}^e(\mathcal{X}), \text{rg}^e(\mathcal{Y})\}.$$

(ii) Si $\{\mathcal{W}^{(t)}\}$ est la famille des sous-quotients à poids unique de \mathcal{W} , on a

$$\text{rg}^e(\mathcal{W}) = \sup \{\text{rg}^e(\mathcal{W}^{(t)})\}.$$

(b) Si \mathcal{W} est à poids unique 7.5.7-(a-iii), on a

$$\text{rg}_m(\mathcal{W}) = \text{rg}_m^e(\mathcal{W}) \quad \text{et} \quad \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}) = \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W}).$$

⁽⁵⁷⁾ Le « degré de stabilité » de \mathcal{W} y est défini par $\text{deg-stab}(\mathcal{W}) := \sup_{t \in \mathbb{N}} \{\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})\}$. Il ne sera pas utilisé dans ce travail.

Preuve du lemme. – (a-i) Pour chaque $t \in \mathbb{N}$, la suite de $k[\mathcal{S}_t][T]$ -modules gradués

$$0 \rightarrow \Phi_t(\mathcal{X}) \rightarrow \Phi_t(\mathcal{W}) \rightarrow \Phi_t(\mathcal{Y}) \rightarrow 0$$

est exacte (proposition 7.9.5-(a)), auquel cas

$$\text{deg-stab}_t(\mathcal{W}) \leq \sup \{ \text{deg-stab}_t(\mathcal{X}), \text{deg-stab}_t(\mathcal{Y}) \},$$

et de même pour deg-ini_t .

(a-ii) On suppose $\mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$.

Montrons que pour le plus petit entier a tel que $\mathcal{W}^{(a)} \neq 0$, on a

$$(10) \quad \text{rg}^e(\mathcal{W}) = \sup \{ \text{rg}^e(\mathcal{W}^{(>a)}), \text{rg}^e(\mathcal{W}^{(a)}) \}.$$

En effet, (i) donne déjà l'inégalité ' \leq '. Ensuite, $\text{rg}^e(\mathcal{W}) \geq \text{rg}^e(\mathcal{W}^{(a)})$ vient de ce que si $t \leq a$, on a $\Phi_t(\mathcal{W}^{>a}) = 0$ et alors $\Phi_t(\mathcal{W}) \sim \Phi_t(\mathcal{W}^{(a)})$. Il nous reste

$$(11) \quad \text{rg}^e(\mathcal{W}) \geq \text{rg}^e(\mathcal{W}^{(>a)}).$$

Le cas où $\text{rg}^e = \text{rg}_m^e$ est clair car $\Phi_t(\mathcal{W}^{(>a)})$ est un sous- $k[\mathcal{S}_t][T]$ -module de $\Phi_t(\mathcal{W}^{(>a)})$.

Le cas $\text{rg}^e = \text{rg}_{\text{ms}}^e$, résulte en se plaçant dans la situation où $a < t \leq \mathcal{P} \leq \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W}) \leq m$ et en considérant le diagramme de colonnes exactes

$$\begin{array}{ccc} \Phi_t(W_m^{(>a)}) & \xrightarrow{(\phi_m^{>a})} & \Phi_t(W_{m+1}^{(>a)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_t(W_m) & \xrightarrow[\simeq]{(\phi_m)} & \Phi_t(W_{m+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_t(W_m^{(a)}) & \xrightarrow{(\phi_m^a)} & \Phi_t(W_{m+1}^{(a)}), \end{array}$$

où (ϕ_m^a) est bijective, car injective d'après 7.9.5-(c-i) et surjective d'après les autres flèches. On en déduit la bijectivité de $(\phi_m^{>a})$ d'où (11) et donc (10). À partir de là, l'assertion (a-ii) résulte par un argument inductif qui affirme que $\mathcal{W}^{(>a)}$ la vérifie.

(b) pour $\text{rg}_m(\mathcal{W})$. On a tout de suite que

$$(12) \quad \Phi_t(\phi_m) \text{ est injectif, } \forall t < \mathcal{P}(\mathcal{W}), \forall m,$$

tout simplement parce que $\Phi_t(\mathcal{W}) = 0$ pour tout $t < \mathcal{P}(\mathcal{W})$ (cf. 7.9.5-(c-ii)).

Pour étudier les cas où $t \geq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, on rappelle que d'après 7.8.2-(b-iii), $\text{rg}_m(\mathcal{W})$ est le plus petit des $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{S}(n) : \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \rightarrow \mathcal{W} \text{ est injectif } \forall n \geq s.$$

Si nous appliquons, pour $\mathcal{P}(\mathcal{W}) \leq t \leq n$, le foncteur $\Phi_t(_)$ au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) & & V(\mathcal{W}, n)_n \xrightarrow{\phi_{n',n}^W} V(\mathcal{W}, n)_{n'} \\ \mathcal{S}(n) \downarrow & & \mathcal{S}(n)_n \parallel \downarrow \mathcal{S}(n)_{n'} \\ \mathcal{W} & & W_n \xrightarrow{\phi_{n',n}^W} W_{n'} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{array}{ccc} \Phi_t(\mathcal{V}(\mathcal{W}, n)) & & \Phi_t(V(\mathcal{W}, n)_n) \hookrightarrow \Phi_t(V(\mathcal{W}, n)_{n'}) \\ \Phi_t(\mathcal{S}(n)) \downarrow & & \Phi_t(\mathcal{S}(n)_n) \parallel \downarrow \Phi_t(\mathcal{S}(n)_{n'}) \\ \Phi_t(\mathcal{W}) & & \Phi_t(W_n) \xrightarrow{\Phi_t(\phi_{n',n}^W)} \Phi_t(W_{n'}), \end{array}$$

où clairement $\Phi_t(\phi_{n',n}^W)$ est injective. Par conséquent, et compte tenu de (12), on a

$$(13) \quad \text{rg}_m^e(\mathcal{W}) \leq \text{rg}_m(\mathcal{W}).$$

Si cette inégalité était stricte, il y existerait $m > \mathcal{P}(\mathcal{W})$ tel que $\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}$ n'est pas monotone alors que $\Phi_t(\phi_m)$ serait injective pour tout $t \leq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, ce qui est impossible déjà pour $t = \mathcal{P}(\mathcal{W})$. L'inégalité (13) est donc une égalité. \square

Démonstration de la proposition 7.9.8. – Le cas non trivial est $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{W}) < +\infty$. Dans ce cas, si $\{\mathcal{W}^{(t)}\}$ est la famille des sous-quotients à poids unique de \mathcal{W} , on a vu dans (a-ii) du lemme et dans 7.5.7-(c) que l'on a

$$\text{rg}^e(\mathcal{W}) = \sup_{t \leq \mathcal{P}} \{\text{rg}^e \mathcal{W}^{(t)}\} \quad \text{et} \quad \text{rg}(\mathcal{W}) = \sup_{t \leq \mathcal{P}} \{\text{rg} \mathcal{W}^{(t)}\},$$

avec $\text{rg} \in \{\text{rg}_m, \text{rg}_{\text{ms}}\}$. La proposition résulte alors de l'assertion (b) du lemme 7.9.9 qui établit les égalités $\text{rg}_m(\mathcal{W}^{(t)}) = \text{rg}_m^e(\mathcal{W}^t)$ et $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{W}^t) = \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W}^t)$. \square

CHAPITRE 8

FONCTEURS D'INDUCTION DANS $\text{Mod}(k[\text{FI}])$

Nous introduisons certains foncteurs d'« induction » dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])$ qui *recollent* naturellement les foncteurs $\text{ind}_{G_\lambda}^{S_{|\lambda|}}$, Υ_m^{m+a} et Θ_m^{m+a} des sections 5.3 et 5.4. Nous étudions ensuite la perturbation du rang de monotonie et stabilité des FI-modules sous l'influence de ces foncteurs (cf. 8.1.5-(d)).

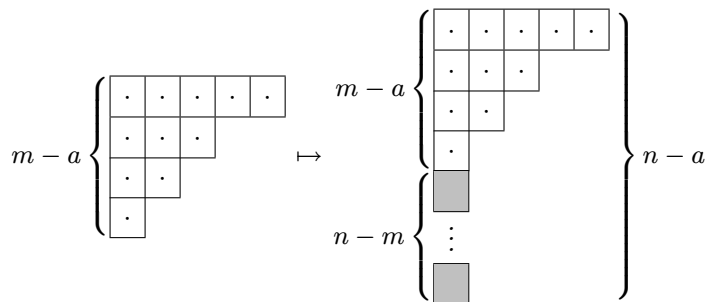
8.1. Les foncteurs d'induction ind_λ et $\text{ind}_{\rho,\lambda}$

LEMME ET NOTATION 8.1.1. – Pour $\lambda = (1^{X_1}, 2^{X_2}, \dots, m^{X_m}) \vdash m$ et $n \geq m$, on note

$$\lambda \setminus n := (1^{(n-m)+X_1}, 2^{X_2}, \dots, m^{X_m}) \vdash n.$$

Alors, pour tous $a \in \mathbb{N}$ et $n \geq m \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{m-a}(m) &\rightarrow \mathcal{Y}_{n-a}(n) \\ \lambda &\mapsto \lambda \setminus n \end{aligned}$$



est bijective dès que $m \geq 2a$. On a donc $|\mathcal{Y}_a(2a)| = |\mathcal{Y}_{m-a}(m)|$.

Démonstration. – En effet, les décompositions de $\lambda \vdash m$ vérifient l'inégalité

$$m = X_1 + 2X_2 + \dots + mX_m \geq X_1 + 2(X_2 + \dots + X_m) = X_1 + 2(m - a - X_1),$$

dont on déduit que $X_1 \geq m - 2a$. Il en résulte que si $m \geq 2a$ toute décompositions $\lambda \vdash m$ comporte au moins $m - 2a$ singletons, le fait de les enlever ou de les rajouter établit la bijection entre $\mathcal{Y}_{m-a}(m)$ et $\mathcal{Y}_a(2a)$. \square

8.1.2. Remarques et notations

- (a) Dans la notation ' $\lambda \setminus n$ ', le nombre ' n ', qui vérifie $n \geq |\lambda|$, indique la taille finale du diagramme. On a (comparer à 7.3.7-(b)) :

$$\ell(\lambda \setminus n) = \ell(\lambda) + (n - |\lambda|),$$

et si $n \leq n'$,

$$(\lambda \setminus n) \setminus n' = \lambda \setminus n'.$$

- (b) Étant donné $\lambda = (1^{X_1}, 2^{X_2}, 3^{X_3}, \dots) \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$, on pose

$$\underline{\ell} := \ell - X_1 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda} = (1^0, 2^{X_2}, 3^{X_3}, \dots) \in \mathcal{Y}_{\underline{\ell}}(\underline{\ell} + a).$$

Les données suivantes sont associées au diagramme $\lambda \setminus \mu$:

$$(\lambda \setminus m) \left\{ \begin{array}{l} (\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} X_1 \\ \vdots \\ m - |\lambda| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \ell \\ \left. \begin{array}{l} (\underline{\lambda}) \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \square & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} |\underline{\lambda}| = \ell + a \\ |\lambda| = |\lambda| - X_1 \leq 2a \\ \#\{\square\} = a \end{array} \right\} \underline{\ell} := \ell - X_1 \end{array} \right. \end{array}$$

On a en particulier : $\lambda \setminus \mu = \underline{\lambda} \setminus m, \forall m \geq |\lambda|$, ce qui nous conduit à étendre la portée des notations en posant

$$\lambda \setminus m := \underline{\lambda} \setminus m, \quad \forall m \geq |\underline{\lambda}| = |\lambda| - X_1.$$

8.1.3. Le foncteur ind_λ sur $\text{Mod}(k[\text{FB}])$. – Pour $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ donné,

$$\text{ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\text{FB}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FB}])_{\geq |\underline{\lambda}|}$$

est le foncteur qui fait correspondre à un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} , le \mathcal{S}_m -module

$$W_m := \begin{cases} 0, & \text{si } m < |\underline{\lambda}|, \\ \text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a}, & \text{si } m \geq |\underline{\lambda}|. \end{cases}$$

et qui fait correspondre à un morphisme de FI-modules $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, la famille de morphismes :

$$\text{ind}_\lambda(f) := \left\{ \text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} (f_{m-a}) : \text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \rightarrow \text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} W_{m-a} \right\}_{m \geq |\underline{\lambda}|}.$$

La proposition suivante étend la définition de ind_λ à la catégorie des FI-modules. Le théorème 8.1.5 établit ensuite le fait que le foncteur est exact et respecte la finitude des FI-modules. Le théorème décrit également son influence sur le rang de monotonie et stabilité des FI-modules.

PROPOSITION ET DÉFINITION DU FONCTEUR ind_λ SUR $\text{Mod}(k[\text{FI}])$ 8.1.4. – Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et soient $0 \leq |\underline{\lambda}| \leq m \leq n$.

(a) L'inclusion $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$ induit des inclusions (voir 5.1, 5.1.1)

$$\mathcal{P}_{\lambda \setminus m} \subseteq \mathcal{P}_{\lambda \setminus n}, \quad \mathcal{S}_{\lambda \setminus m} \subseteq \mathcal{S}_{\lambda \setminus n}, \quad G_{\lambda \setminus m} \subseteq G_{\lambda \setminus n}.$$

(b) Un homomorphisme $\phi_{n,m} : V_{m-a} \rightarrow V_{n-a}$ d'un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} vers un \mathcal{S}_{n-a} -module V_{n-a} , compatible à l'action de \mathcal{S}_{m-a} et telle que $\text{im}(\phi_{n,m}) \subseteq V_{n-a}^{\mathbb{I}_{m-a} \times \mathcal{S}_{n-m}}$, admet un unique prolongement en un homomorphisme compatible à l'action de \mathcal{S}_m

$$\text{ind}_\lambda(\phi_{n,m}) : \text{ind}_{G_{\lambda \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \rightarrow \text{ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}.$$

De plus,

$$\text{im}(\text{ind}_\lambda(\phi_{n,m})) \subseteq (\text{ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a})^{\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}}.$$

(c) Dans (b), si l'on suppose en plus que $k[\mathcal{S}_{n-a}] \cdot \text{im}(\phi_{n,m}) = V_{n-a}$, on a

$$k[\mathcal{S}_n] \cdot \text{im}(\text{ind}_\lambda \phi_{n,m}) = \text{ind}_\lambda V_{n-a}.$$

(d) Pour tout FI-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}$, le FB-module $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})$ muni de la famille d'homomorphismes $\text{ind}_\lambda(\phi_m)$ est un FI-module qui sera pareillement noté. De plus, si $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ est un morphisme de FI-modules, les morphismes $\text{ind}_\lambda(\phi_{\mathcal{V}})$ et $\text{ind}_\lambda(\phi_{\mathcal{W}})$ commutent au morphisme $\text{ind}_\lambda(f)$ de 8.1.3.

Les correspondances $\mathcal{V} \rightsquigarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V})$, $f \rightsquigarrow \text{ind}_\lambda(f)$ définissent ainsi un foncteur

$$(\text{ind}_\lambda) \quad \boxed{\text{ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq |\underline{\lambda}|}}.$$

Démonstration. – (a) Résulte du fait de remarquer que $\mathcal{P}_{\lambda \setminus m} = \mathcal{P}_{\underline{\lambda}} \times \mathbb{I}_{m-|\underline{\lambda}|}$, ce qui implique que si X_r est le nombre des $\lambda_i = r$, on a $G_\lambda = \mathcal{S}_{X_{\lambda_1}} \times \cdots \times \mathcal{S}_{X_2} \times \mathcal{S}_{X_1}$ alors

$$G_{\lambda \setminus m} = \mathcal{S}_{X_{\lambda_1}} \times \cdots \times \mathcal{S}_{X_2} \times \mathcal{S}_{X_1+m-|\lambda|}.$$

(b) Par (a), le prolongement $\text{ind}_\lambda(\phi)$ est bien défini et est unique. L'image de $\text{ind}_\lambda \phi$ est le sous- \mathcal{S}_m -module de $\text{ind}_{G_{\lambda \setminus n}}^{\mathcal{S}_n} V_{n-a}$ engendré par $\text{im}(\phi)$. Le fait que $\text{im}(\text{ind}_\lambda \phi)$ est invariant sous l'action de $\mathbb{I}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ résulte de ce que ce groupe commute à l'action de $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_n$, qu'il est contenu dans $\mathcal{S}_{\lambda \setminus n}$, et que, par la surjection $\mathcal{S}_{\lambda \setminus n} \twoheadrightarrow G_{\lambda \setminus n}$, il est en bijection avec $\mathbb{I}_{m-a} \times \mathcal{S}_{n-m}$ qui, lui, fixe $\text{im}(\phi)$ par hypothèse.

(c), (d) Clairs. □

THÉORÈME DES RANGS 8.1.5. – Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$. Notons $\underline{\ell} := \ell(\underline{\lambda})$.

(a) Le foncteur $\text{ind}_\lambda : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq |\underline{\lambda}|}$ de 8.1.4-(d), est covariant, additif et exact. Il est fidèle sur la sous-catégorie $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq \underline{\ell}}$.

(b) Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le FI-module $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d + a, |\underline{\lambda}|)$.

(c) On a $\mathcal{P}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\underline{\lambda}|$.

(d) On a $\boxed{\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\underline{\lambda}| \text{ et } \text{rg}_{\text{m}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + a}$.

Démonstration. – (a) Clair. (b) Un FI-module $\mathcal{V} = \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$ est engendré en degrés $\leq d$ si et seulement si $k[\mathbb{S}_{d+n}] \cdot \text{im}(\phi_{d+n,d}) = V_{d+n}$, pour tout $d \geq 0$. L'assertion 8.1.4-(c) montre alors que $\text{ind}_\lambda \mathcal{V}$ est bien engendré en degrés $\leq \sup(\underline{\lambda}, d) + a$. La deuxième partie de (b) résulte de même, puisque \mathcal{V} est de type fini si et seulement si il est engendré en degrés $\leq d$ (pour d assez grand), et $\dim_k V_m < +\infty$ pour tout $m \leq d$. (c) est établi dans 7.5.4.

(d) L'inégalité concernant $\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V})$.

Si $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) = +\infty$ on n'a rien à prouver, on suppose donc $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) < +\infty$.

(A) *Réduction au cas $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\mu)$.* – Soit \mathcal{V} un FI-module et notons pour simplifier

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{V}) \text{ et } s := \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}).$$

Par 7.8.2-(c), $\mathcal{V}_{\geq s}$ est extension de FI-modules $\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}$ où $|\mu| + \mu_1 \leq s$. Maintenant, pour toute extension de deux tels FI-modules

$$0 \rightarrow \mathcal{V}(\mu)_{\geq s} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}(\mu')_{\geq s} \rightarrow 0,$$

la suite

$$0 \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}) \rightarrow \text{ind}_\lambda \mathcal{W} \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu')_{\geq s}) \rightarrow 0$$

est exacte et on aura

$$(1) \quad \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{W}) \leq s + 2|\underline{\lambda}|,$$

en appliquant 7.4.5-(b) si les extrémités vérifient cette majoration.

Or, on a $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}) = \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))_{\geq s+a}$ et

$$\begin{aligned} \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))_{\geq s+a}) &\leq \sup \{ \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))), s+a \} \\ &= \sup \{ |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|, s+a \} \leq s + 2|\underline{\lambda}|, \end{aligned}$$

et de même pour le terme en μ' , en supposant (d) vérifiée pour les extrémités.

En itérant l'idée, la majoration (1) est vérifiée pour toute extension finie de FI-modules $\mathcal{V}(\mu)_{\geq s}$, donc par $\mathcal{V}_{\geq s}$. On considère alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}_{\geq s}) \rightarrow \text{ind}_\lambda \mathcal{V} \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}_{< s}) \rightarrow 0,$$

où $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}_{< s})_m = 0$ pour tout $m \geq s+a$. On a donc bien

$$\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V}) = \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}_{\geq s})) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\underline{\lambda}|.$$

(B) *Le cas $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mu)$.* – Nous devons prouver la majoration :

$$\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))) \leq |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|,$$

ce pour quoi il suffira de prouver que l'on a

$$(2) \quad \sup_{0 \leq t \leq |\mu| + |\underline{\lambda}|} \{ t + \text{deg-stab}_t(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))) \} \leq |\mu| + \mu_1 + 2|\underline{\lambda}|,$$

par 7.9.8-(b) et puisque $\mathcal{P}(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))) \leq |\mu| + |\underline{\lambda}|$ par (c).

Dans ces questions il sera important de savoir à partir de quel $m \in \mathbb{N}$ le poids de $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}(\mu))$ est atteint. Les idées de la remarque 7.5.5 montrent que pour avoir $\mathcal{P}(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V(\mu)_{m-a}) = |\mu| + |\lambda|$, il faut $\mu[m-a]_1 \geq \underline{\ell} + \sup\{\lambda_1, \mu_1\}$

$$\mu[m-a] := \begin{array}{cccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & & \\ \square & & & \end{array} \cdots \begin{array}{cccc} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & & \\ \square & & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (m-a-|\mu|) \geq \underline{\ell} + \sup\{\lambda_1, \mu_1\} \\ (\mu_1) \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

autrement dit, il faudra que

$$(3) \quad \boxed{m \geq |\mu| + |\lambda| + \sup\{\mu_1, \lambda_1\}},$$

ce que nous supposons désormais.

La preuve de (2) demande plusieurs étapes.

(B₁) Réduction de $\text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V(\mu)_{m-a}$ à $\text{ind}_{\mathbb{1}_{|\underline{\lambda}|} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} V(\mu)_{m-a}$. – D'après 8.1.4, on a $\mathcal{S}_{\lambda \setminus m} = \mathcal{S}_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}$, d'où

$$G_{\underline{\lambda} \setminus m} = G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|} \subseteq \mathcal{S}_{m-a}.$$

On considère alors le morphisme surjectif de \mathcal{S}_m -modules

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} \text{ind}_{\mathbb{1}_{|\underline{\lambda}|} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} & \xrightarrow{\rho_m} & \text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V_{m-a} \\ \parallel & & \parallel \\ k[\mathcal{S}_m] \otimes_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a} & \xrightarrow{\rho_m} & k[\mathcal{S}_m] \otimes_{G_{|\underline{\lambda}|} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a}. \end{array}$$

On remarque ensuite que la surjection (4) établit un isomorphisme de \mathcal{S}_m -modules

$$(5) \quad \left(k[\mathcal{S}_m] \otimes_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a} \right)^{G_{\underline{\lambda}}} \xrightarrow{\simeq} k[\mathcal{S}_m] \otimes_{G_{|\underline{\lambda}|} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a},$$

où le groupe $G_{\underline{\lambda}}$ agit à droite sur le terme de gauche par

$$(P \otimes v) \cdot \alpha := P\alpha \otimes \alpha^{-1}(v).$$

Maintenant, si $\phi_{m-a} : V(\mu)_{m-a} \rightarrow V(\mu)_{m+1-a}$ est un morphisme de transition de $\mathcal{V}(\mu)$, le morphisme induit

$$k[\mathcal{S}_m] \otimes_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a} \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi_{m-a}} k[\mathcal{S}_{m+1}] \otimes_{\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\lambda}|}} V_{m+1-a},$$

qui est un morphisme de $\mathcal{S}_{m \setminus \underline{\lambda}}$ -bimodules. Il suffira alors que le morphisme de transition entre co-invariants

$$(6) \quad \Psi_{m,t} : \left(k[\mathcal{S}_m] \otimes_{\mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}} V_{m-a} \right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{(\text{id} \otimes \phi_{m-a})} \left(k[\mathcal{S}_{m+1}] \otimes_{\mathcal{S}_{m+1-|\underline{\lambda}|}} V_{m+1-a} \right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

soit un isomorphisme de \mathcal{S}_t -modules (à gauche) pour qu'il soit aussi un isomorphisme de $G_{\underline{\lambda}}$ -modules à droite et donc pour qu'il induise un isomorphisme sur le sous- \mathcal{S}_t -module des $G_{\underline{\lambda}}$ -invariants à droite, autrement dit, pour que le morphisme induit

$$\left(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m}}^{\mathcal{S}_m} V(\mu)_{m-a} \right)_{\mathcal{S}_{m-t}} \xrightarrow{(\text{ind}_{\lambda} \phi_{m-a})} \left(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda} \setminus m+1}}^{\mathcal{S}_{m+1}} V(\mu)_{m+1-a} \right)_{\mathcal{S}_{m+1-t}}$$

soit un isomorphisme ⁽⁵⁸⁾.

(B₂) *Équivalences dans la description du morphisme $\Psi_{m,t}$ dans (6).* – Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, identifions le groupe \mathcal{S}_L des bijections de L , au sous-groupe de \mathcal{S}_m qui fixe $i \notin L$. Le centralisateur de \mathcal{S}_L dans \mathcal{S}_m est le sous-groupe $\mathcal{S}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L}$ qui fixe $i \in L$. Tout comme dans 7.9.1, le foncteur des \mathcal{S}_L -co-invariants est le foncteur

$$\begin{aligned} (_)_{\mathcal{S}_L} : \text{Mod}(\mathcal{S}_m) &\rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{S}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L}) \\ W &\rightsquigarrow W_{\mathcal{S}_L} := k \otimes_{k[\mathcal{S}_L]} W. \end{aligned}$$

On note ensuite $L' := L \sqcup \{m+1\} \subseteq \llbracket 1, m+1 \rrbracket$. Pour tout FI-module \mathcal{W} , le morphisme de transition $\phi_m : W_m \rightarrow W_{m+1}$ passe aux co-invariants où il définit le morphisme de $\mathcal{S}_{\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L}$ -modules

$$(\phi_m) : (W_m)_{\mathcal{S}_L} \rightarrow (W_{m+1})_{\mathcal{S}_{L'}}.$$

Maintenant, pour $t \leq m$ fixés, notons

$$L := \llbracket t+1, m \rrbracket \quad \text{et} \quad A := \llbracket |\underline{\lambda}|+1, m \rrbracket.$$

L'étude de $\Psi_{m,t}$ se ramène alors à l'étude du morphisme de $\mathcal{S}_t \times G_{\underline{\lambda}}$ -bimodules

$$(7) \quad k \otimes_{\mathcal{S}_L} k[\mathcal{S}_m] \otimes_{\mathcal{S}_A} V(\mu)_{m-a} \xrightarrow{\Psi_{m,t}} k \otimes_{\mathcal{S}_{L'}} k[\mathcal{S}_{m+1}] \otimes_{\mathcal{S}_{A'}} V(\mu)_{m+1-a}.$$

LEMME 1. – *On a des identifications de \mathcal{S}_A -modules à droite*

$$k \otimes_{\mathcal{S}_L} k[\mathcal{S}_m] = k \left[\mathcal{S}_L \setminus \mathcal{S}_m \right] = \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_L)} k \left[\mathcal{S}_{A \cap \alpha L} \setminus \mathcal{S}_A \right],$$

d'où un isomorphisme canonique de foncteurs sur $\text{Mod}(k[\mathcal{S}_{m-a}])$

$$\left(\text{ind}_{\mathcal{S}_A}^{\mathcal{S}_m} (_) \right)_{\mathcal{S}_L} \simeq \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_A \setminus \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_L)} (_)_{\mathcal{S}_{A \cap \alpha L}}.$$

Preuve du lemme. – Les représentations en question ont les même caractères. □

⁽⁵⁸⁾ La réciproque n'est *a priori* pas vraie, et nos estimations pour les degrés de stabilité ne seront donc pas toujours optimales, elles le seront lorsque l'action de $G_{\underline{\lambda}}$ sur $V(\mu)_m$ est triviale, par exemple si la suite $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ est strictement décroissante.

Grâce à ce lemme, le morphisme (7) se voit comme le morphisme

$$\bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathfrak{S}_A \setminus \mathfrak{S}_m / \mathfrak{S}_L)} (V(\mu)_{m-a})_{\mathfrak{S}_{A \cap \alpha L}} \xrightarrow{\Psi_{m,t}} \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathfrak{S}_{A'} \setminus \mathfrak{S}_{m+1} / \mathfrak{S}_{L'})} (V(\mu)_{m+1-a})_{\mathfrak{S}_{A' \cap \alpha L'}}$$

induit terme à terme par le morphisme de transition ϕ_{m-a} via l'inclusion naturelle

$$(8) \quad (\mathfrak{S}_A \setminus \mathfrak{S}_m / \mathfrak{S}_L) \subseteq (\mathfrak{S}_{A'} \setminus \mathfrak{S}_{m+1} / \mathfrak{S}_{L'}).$$

LEMME 2. – *L'inclusion (8) est une égalité lorsque*

$$(9) \quad m \geq |\lambda| + t,$$

auquel cas, on a un isomorphisme de foncteurs sur $\text{Mod}(k[\mathfrak{S}_{m-a}])$

$$(\text{ind}_{\mathfrak{S}_{m-|\lambda|}}^{\mathfrak{S}_m} (-))_{\mathfrak{S}_{m-t}} \simeq \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathfrak{S}_A \setminus \mathfrak{S}_m / \mathfrak{S}_L)} (-)_{\mathfrak{S}_{|A \cap \alpha L|}}.$$

De plus, on a

$$(10) \quad \underline{\ell} \leq ((m-a) - |A \cap \alpha L|) \leq \underline{\ell} + t$$

et $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ est tel que $A \cap \alpha L$ est l'intervalle des derniers $|A \cap \alpha L|$ éléments dans $\llbracket 1, m \rrbracket$.

Preuve du lemme 2. – Pour toute double classe $\bar{\alpha} \in (\mathfrak{S}_{A'} \mathfrak{S}_{m+1} \mathfrak{S}_{L'})$, on a

$$|A' \cap \alpha L'| \geq |L'| + |A'| - (m+1) = (m - (|\lambda| + t)) + 1,$$

et lorsque (9) est vérifié, il existe $\alpha \in \bar{\alpha}$ tel que $L' \cap \alpha A'$ est l'intervalle des derniers $|L' \cap \alpha A'|$ éléments de $\llbracket 1, m+1 \rrbracket$, en particulier $\alpha \in \mathfrak{S}_m$. Dans ce cas, on a $L' \cap \alpha A' = (L \cap \alpha A) \sqcup \{m+1\}$ et l'inclusion 8 est bien une égalité. La fin de la preuve du lemme 2 est alors immédiate d'après le lemme 1. \square

(B₃) *Condition d'isomorphie du morphisme $\Psi_{m,t}$ dans (6).* – Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'inégalité (2). D'après le lemme 2, l'application $\Psi_{m,t}$ sera bijective lorsque $m \geq |\lambda| + t$ et que les

$$(11) \quad (V(\mu)_{m-a})_{\mathfrak{S}_{|A \cap \alpha L|}} \xrightarrow{(\phi_{m-a})} (V(\mu)_{m+1-a})_{\mathfrak{S}_{|A' \cap \alpha L'|}}$$

sont bijectifs. Or, si nous notons $t'' := (m-a) - |A \cap \alpha L|$, on sait par 7.9.5-(c) que l'application (11) est bijective dès que $m-a \geq t'' + \mu_1$, et comme $t'' \leq \underline{\ell} + t$ d'après (10), et que $t \leq |\mu| + |\lambda|$ dans (2), on voit qu'il suffit que

$$m \geq a + \underline{\ell} + |\mu| + |\lambda| + \mu_1 = |\mu| + \mu_1 + 2|\lambda|$$

(condition qui garantit aussi (3)) pour que $\Psi_{m,t}$ soit bijective. L'inégalité (2) est donc bien satisfaite et ceci termine la preuve de la partie de (d) qui concerne $\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V})$.

(d) Pour l'inégalité concernant $\text{rg}_{\text{m}}(\text{ind}_\lambda \mathcal{V})$, on suit la même démarche que pour rg_{ms} .

(A) Réduction au cas \mathcal{V} est à poids unique t ⁽⁶⁰⁾. – Soit p est le plus petit poids tel que $\mathcal{V}^{(p)} \neq 0$. On a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{(>p)} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^{(p)} \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte d'extensions

$$0 \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(>p)}) \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}) \rightarrow \text{ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(p)}) \rightarrow 0.$$

Maintenant, si (d) satisfaite par les extrémités, on aura

$$\begin{aligned} \text{rg}_m(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})) &\leq \sup \{ \text{rg}_m(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(>p)})), \text{rg}_m(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V}^{(p)})) \} \\ &= \sup \{ \text{rg}_m(\mathcal{V}^{(>p)}) + a, \text{rg}_m(\mathcal{V}^{(p)}) + a \} = \text{rg}_m(\mathcal{V}) + a. \end{aligned}$$

par 7.4.5-(a) et d'après 7.5.7-(c), et $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})$ vérifie (d).

L'itération de cette idée montre que si (d) est satisfaite par les FI-modules à poids unique, elle sera satisfaite par les quotients $\mathcal{V}^{(\leq t)}$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, donc par \mathcal{V} , qu'elle soit de poids fini ou non.

(B) Le cas où \mathcal{V} est à poids unique. – Notons ϕ_m^λ le morphisme de transition à l'ordre m de $\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})$ et utilisons l'égalité $\text{rg}_m = \text{rg}_m^e$ de 7.9.8-(b). On a donc

$$\text{rg}_m(\text{ind}_\lambda(\mathcal{V})) = \text{ind} \{ s \in \mathbb{N} \mid \Phi_t(\phi_m^\lambda) \text{ est injective } \forall m \geq s, \forall t \leq m \}.$$

L'étude de l'injectivité de $\Phi_t(\phi_m^\lambda)$ suit les mêmes étapes (B_i) que pour le cas rg_{m_s} , mais en plus simple puisque seul l'injectivité nous intéresse. De ce fait, on ne rencontre aucune contrainte sur m en (B_1) et (B_2), mais on en rencontre en (B_3). Dans ce dernier cas, il faudra que $\Phi_t(\phi_{m-a})$ soit injective, autrement dit que $m - a \geq \text{rg}_m(\mathcal{V})$, grâce, une fois de plus, à l'égalité $\text{rg}_m = \text{rg}_m^e$ de 7.9.8-(b).

ICI se termine la démonstration du théorème des rangs 8.1.5. □

8.1.6. Le foncteur d'induction tordue $\text{ind}_{\rho,\lambda}$. – Lors de l'étude de rangs de monotonie et stabilité des termes des suites spectrales basiques de 9.3.14, nous aurons besoin d'une version légèrement plus élaborée des foncteurs d'induction ind_λ .

Étant donnés $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et une représentation $\rho : \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \text{Gl}_k(\sigma)$ d'un sous-groupe $\mathcal{H}_\lambda \subseteq \mathcal{S}_\lambda$, on définit le foncteur

$$(\text{ind}_{\rho,\lambda}) \quad \boxed{\text{ind}_{\rho,\lambda} : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}]_{\geq |\underline{\lambda}|})},$$

qui fait correspondre à un \mathcal{S}_{m-a} -module V_{m-a} , le \mathcal{S}_m -module

$$W_m := \begin{cases} 0 & \text{si } m < |\underline{\lambda}|, \\ \text{ind}_{\mathcal{H}_\lambda \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\lambda}|}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes V_{m-a} & \text{si } m \geq |\underline{\lambda}|. \end{cases}$$

⁽⁵⁹⁾ Cette étape n'est pas indispensable, mais elle simplifie quelque peu l'étape (B).

8.1.6.1. *Théorème des rangs pour les inductions tordues.* – Les analogues de la proposition 8.1.4 et du théorème 8.1.5 sont encore vérifiés. En particulier, on contrôle toujours le rang de monotonie et stabilité.

THÉORÈME 8.1.7. – *Soit $\lambda \in \mathcal{Y}_\ell(\ell + a)$ et $\rho : \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \text{Gl}_k(\sigma)$ une représentation d'un sous-groupe $\mathcal{H}_\lambda \subseteq \mathcal{S}_{|\lambda|}$. Alors, $\mathcal{P}(\text{ind}_{\rho,\lambda}\mathcal{V}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\lambda|$ et*

$$\boxed{\text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_{\rho,\lambda}\mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 2|\lambda|, \quad \text{rg}_{\text{m}}(\text{ind}_{\rho,\lambda}\mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + a.}$$

Indication. – On a une surjection naturelle de \mathcal{S}_m -modules

$$\text{ind}_{\mathcal{H}_\lambda \times \mathcal{S}_{m-|\lambda|}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \boxtimes (\text{res}_{\mathcal{S}_{m-|\lambda|}}^{\mathcal{S}_{m-a}} V_{m-a}) \twoheadrightarrow \text{ind}_{\mathcal{H}_\lambda \times \mathcal{S}_{m-|\lambda|}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes V_{m-a}$$

et les règles de Littlewood-Richardson (cf. note ⁽⁵³⁾, p. 118) appliquées au \mathcal{S}_m -module de gauche confirment le majorant $\mathcal{P}(\mathcal{V}) + |\lambda|$. La preuve de 8.1.5 s'applique alors telle quelle grâce à la réduction B_1 qui fait abstraction de la représentation σ . \square

8.1.8. **Rangs des produits tensoriels d'un espace gradué.** – Étant donné un k -espace vectoriel positivement gradué

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^i \in \text{Vec}^{\mathbb{N}}(k), \quad \text{avec } \mathcal{A}^0 = k,$$

on munit $\mathcal{A}^{\otimes m} := \underbrace{\mathcal{A} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathcal{A}}_m$ de l'action de $\alpha \in \mathcal{S}_m$

$$\alpha \cdot (a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) := a_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\alpha^{-1}(m)}.$$

L'application $\phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes m+1}$, $\omega \mapsto \omega \otimes \mathbf{1}_k$, où $\mathbf{1}_k \in \mathcal{A}^0$, est alors un morphisme de \mathcal{S}_m -modules positivement gradués, et

$$(A^\otimes) \quad \mathcal{A}^\otimes := \{ \phi_m : \mathcal{A}^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes m+1} \}_m$$

est un FI-module.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, les restrictions des ϕ_m aux composantes homogènes de degré i donnent le sous-FI-module de $(\mathcal{A}^\otimes)^i \subseteq \mathcal{A}^\otimes$

$$(A^\otimes)^i \quad (\mathcal{A}^\otimes)^i := \{ \phi_m : (\mathcal{A}^{\otimes m})^i \rightarrow (\mathcal{A}^{\otimes m+1})^i \}_m.$$

PROPOSITION 8.1.9 ([10]). – *Soit \mathcal{A} un k -espace vectoriel positivement gradué avec $\mathcal{A}^0 = k$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{P}((\mathcal{A}^\otimes)^i) \leq i, \quad \text{rg}_{\text{m}}((\mathcal{A}^\otimes)^i) \leq i \quad \text{et} \quad \text{rg}_{\text{ms}}((\mathcal{A}^\otimes)^i) \leq 2i.$$

Démonstration. – Pour tout $m \geq i$, on a un isomorphisme

$$(12) \quad (\mathcal{A}^{\otimes m})^i = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_i(2i)} \text{ind}_{G_\lambda \times \mathcal{S}_{m-\ell}}^{\mathcal{S}_m} \underbrace{\mathcal{A}^{\lambda_1-1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_\ell-1}}_{\ell} \boxtimes \underbrace{k \otimes \cdots \otimes k}_{m-\ell},$$

où $G_\lambda \times \mathcal{S}_{m-\ell}$ est sous-groupe de $\mathcal{S}_\ell \times \mathcal{S}_{m-\ell} \subseteq \mathcal{S}_m$. Les règles de Littlewood-Richardson 7.5.1 montrent aussitôt que le poids de chaque induit est majoré par $\ell = \ell(\lambda) \leq i$. Chaque terme de la somme (12) n'est autre que le FI-module

$\mathcal{M}_{\underline{\ell}}^{G_{\underline{\lambda}}}(\mathcal{A}^{\lambda_1-1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_{\ell}-1})$ de 7.6 dont le rang de monotonie est majoré par $\underline{\ell}$ et celui de stabilité par $2\underline{\ell}$ d'après 7.6.2-(e). \square

8.1.10. Commentaire. – Si W est une représentation de $G_{\underline{\lambda}}$, la famille de foncteurs $\{\text{ind}_{G_{\underline{\lambda}} \times \mathcal{S}_{m-\underline{\ell}}}^{\mathcal{S}_m} W \boxtimes (_)\}_m$ se recolle en un foncteur $\text{ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes (_)$ défini sur $\text{Mod}(k[\text{FI}])$. Il est alors possible d'adapter la démarche des théorèmes 8.1.5 et 8.1.7 pour démontrer que l'on a

$$\mathcal{P}(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{V}) + \underline{\ell} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 2\underline{\ell}, \\ \text{rg}_{\text{m}}(\text{ind}_{G_{\underline{\lambda}}} W \boxtimes \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + \underline{\ell}. \end{cases}$$

Le cas $W := \mathcal{A}^{\lambda_1-1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^{\lambda_{\ell}-1}$ et $\mathcal{V} := \mathcal{V}(0)$ aurait alors fourni une nouvelle preuve de 8.1.9.

8.2. Les foncteurs d'induction Υ^a , $\Upsilon(a)$ et Θ^a

Dans la section 5.3, nous avons introduit le foncteur $\Upsilon_{\ell}^{\ell+a}$ qui associe à une représentation de \mathcal{S}_{ℓ} une représentation de $\mathcal{S}_{\ell+a}$ en induisant suivant tous les diagrammes de Young $\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell}(\ell+a)$:

$$(\Upsilon) \quad \Upsilon_{\ell}^{\ell+a} : \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{\ell}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\mathcal{S}_{\ell+a}]), \quad \Upsilon_{\ell}^{\ell+a} := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell}(\ell+a)} \text{ind}_{G_{\lambda}}^{\mathcal{S}_{\ell+a}}.$$

Ce foncteur apparaît naturellement dans l'étude des espaces $\Delta_{\ell} X^{\ell+a}$. Il intervient notamment dans la proposition 5.3.1, où il donne l'égalité

$$\chi_c(\Delta_{\ell} X^{\ell+a}; i) = \Upsilon_{\ell}^{\ell+a}(\chi_c(F_{\ell}(X); i)).$$

8.2.1. Théorème des rangs pour les inductions itérées. – Nous allons maintenant recoller la famille des foncteurs $\{\Upsilon_{m-a}^m\}_m$ en un unique foncteur $\Upsilon^a : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])$ dans le but d'étudier la stabilité (cf. 7.7) des $k[\text{FB}]$ -modules $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} X^m)\}_m$ et $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} X^m)\}_m$ (cf. section 9.1).

Dans la section 8.1.4, nous avons associé à chaque $\lambda \in \mathcal{Y}_{\ell}(\ell+a)$ un foncteur

$$\text{ind}_{\lambda} : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq |\underline{\lambda}|}.$$

Sa définition est telle que $\text{ind}_{\lambda} = \text{ind}_{\underline{\lambda}}$ où $|\underline{\lambda}| \leq 2a$, de sorte que la correspondance

$$\left(\bigcup_{1 \leq i \leq a} \mathcal{Y}_i(i+a) \right) \ni \lambda \mapsto \text{ind}_{\lambda}$$

est surjective sur l'ensemble de tels foncteurs. Mieux encore, le lemme 8.1.1 montre que cette correspondance devient bijective pour peu que l'on tronque les foncteurs : $\mathcal{Y}_a(2a) \ni \lambda \xrightarrow[\simeq]{\longleftarrow} \text{ind}_{\lambda}(_)_{\geq 2a}$. On pose alors pour $a \in \mathbb{N}$:

$$(\Upsilon^a) \quad \boxed{\Upsilon^a := \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_a(2a)} \text{ind}_{\lambda}(_)_{\geq 2a} : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}},$$

qui est un foncteur exact, fidèle sur $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq a}$.

8.2.2. – Nous introduisons l’analogie des inductions composées $\Upsilon(\sigma)$ et $\Theta_\ell^{\ell+a}$ de 5.4.

Pour $a \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{A}(a)$ l’ensemble des suites d’entiers $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, avec $a_i > 0$ et tels que $a = \sum_i a_i$. On pose pour chaque $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)$:

$$\Upsilon(\mathbf{a}) := \Upsilon^{a_1} \circ \Upsilon^{a_2} \circ \dots \circ \Upsilon^{a_r} : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}.$$

C’est un foncteur exact. La valeur de troncature de l’image, fixée à $2a$, est plus large que nécessaire, mais elle est ainsi indépendante de \mathbf{a} . De même, le noyau de $\Upsilon(\mathbf{a})$ dépend beaucoup de la suite \mathbf{a} . La figure suivante illustre ces remarques, en grisé la zone de fidélité d’un foncteur composé pour $a = 20$.

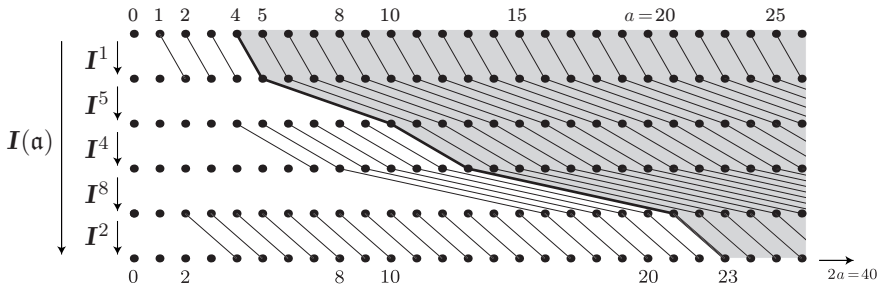


FIGURE 1. Foncteur d’inductions composées $\Upsilon(\mathbf{a}) = \Upsilon(2, 8, 4, 5, 1)$

On pose ensuite

$$(\Theta^a) \quad \boxed{\Theta^a := (-1)^a \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)} (-1)^{|\mathbf{a}|} \Upsilon(\mathbf{a}) : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightarrow K(\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a})},$$

où la présence de signes indique que l’on a affaire à des FI-modules virtuels.

Le corollaire suivant du théorème 8.1.5 est immédiat.

THÉORÈME 8.2.3. – Soient $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}(a)$ et désignons par L^a l’un des trois foncteurs $\Upsilon^a, \Upsilon(\mathbf{a}), \Theta^a$.

- (a) Le foncteur $L^a : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}$ est covariant, additif, exact.
- (b) Si \mathcal{V} est (de type fini) engendré en degrés $\leq d$, le FI-module $L^a(\mathcal{V})$ est (de type fini) engendré en degrés $\leq \sup(d + a, 2a)$.
- (c) On a

$$\boxed{\text{rg}_{\text{ms}}(L^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V}) + 4a \text{ et } \text{rg}_{\text{m}}(L^a \mathcal{V}) \leq \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{V}) + a}.$$

CHAPITRE 9

STABILITÉ DES FAMILLES $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$

Dans cette section on généralise le théorème de stabilité de Church ([9]) à propos des familles $\{F_m(M)\}_m$ où M est une variété différentielle orientée, au cas des familles $\{\Delta_{?m-a}M^m\}_m$ où M est une *pseudovariété*, et plus généralement un espace muni d'une classe fondamentale (cf. 6.2.4.1), et où $a \in \mathbb{N}$ est quelconque.

9.1. Structure de FI-module de $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$

Précédemment (cf. 6.1 et 6.6.5), nous avons muni les familles $\{H_{\text{BM}}^i(M^m)\}_m$ et $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ de structures de FI-modules par intégration sur les fibres des projections $p_m : M^{m+1} \rightarrow M^m$. On étend maintenant ces structures aux familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$ pour tout espace M muni d'une classe fondamentale. Pour cela on considère le diagramme commutatif de décompositions ouvertes-fermées

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_{m+1-a}M^{m+1} & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m+1-a}M^{m+1} & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a}M^{m+1} \\
 \downarrow j & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \Delta_{m-a}M^m \times M & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m-a}M^m \times M & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a-1}M^m \times M \\
 \downarrow p_m & & \downarrow p_m & & \downarrow p_m \\
 \Delta_{m-a}M^m & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \Delta_{\leq m-a}M^m & \xleftarrow{\text{fermé}} & \Delta_{\leq m-a-1}M^m,
 \end{array}$$

où j est une inclusion ouverte et les inclusions i sont fermées entre des espaces de même dimension cohomologique $(m-a)d_M$ et mêmes orientations. On en déduit par les règles de functorialité de la *cohomologie* de Borel-Moore, le diagramme commutatif

de suites exactes longues :

(1)

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m+1-a}M^{m+1}) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m+1-a}M^{m+1}) & \longleftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_M}(\Delta_{\leq m-a}M^{m+1}) & \longleftarrow \\
 \uparrow (j_i)^\vee & & \uparrow (i^*)^\vee & & \uparrow (i^*)^\vee & \\
 H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m-a}M^m \times M) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m-a}M^m \times M) & \leftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}M^m \times M) & \leftarrow \\
 \uparrow p_m^* & & \uparrow p_m^* & & \uparrow p_m^* & \\
 H_{\text{BM}}^*(\Delta_{m-a}M^m) & \longleftarrow & H_{\text{BM}}^*(\Delta_{\leq m-a}M^m) & \longleftarrow & H_{\text{BM}}^{*-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}M^m) & \longleftarrow ,
 \end{array}$$

où les composées des flèches verticales sont compatibles à l'action des groupes symétriques et vérifient la condition pour définir des FI-modules.

Ces observations constituent l'essentiel de la preuve des assertions (a),(b) de proposition suivante.

PROPOSITION ET DÉFINITIONS 9.1.1. – *Soit M un espace muni d'une classe fondamentale. Soient $0 < a \leq m$.*

(a) *Dans le diagramme (1), les colonnes sont les FI-modules $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$, et les lignes définissent la suite exacte longue de FI-modules*

$$\rightarrow \{H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-a-1}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\} \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\} \rightarrow .$$

(b) *Les complexes fondamentaux de la famille $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$, obtenus en dualisant les complexes 3.2.2, s'organisent naturellement en un « complexe fondamental de FI-modules »*

$$(2) \quad 0 \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m \rightarrow H(m-a) \rightarrow H(m-a-1) \rightarrow \cdots \rightarrow H(1) \rightarrow 0,$$

où nous avons noté

$$H(m-a-b) := \{H_{\text{BM}}^{i-b(d_M-1)}(\Delta_{m-a-b}M^m)\}_m$$

et où $i \geq b(d_M - 1)$.

Lorsque M est un espace i -acyclique X , le complexe fondamental (2) est exact et l'on a l'égalité suivante dans $K(\text{Mod}(k[\text{FI}]))$,

$$\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}X^m)\} = \sum_{0 \leq b < m-a} (-1)^b (\{H_{\text{BM}}^{i-b(d_X-1)}(\Delta_{m-a-b}X^m)\}_{m-a-b}).$$

(c) *Le foncteur $\Upsilon^a : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}$ identifie les FI-modules*

$$\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_{m \geq 2a} = \Upsilon^a(\{H_{\text{BM}}^i(F_{m-a}(M))\}_{m-a}).$$

(d) Si X est un espace i -acyclique, les foncteurs $\Theta^a, \Upsilon^a : \text{Mod}(k[\text{FI}]) \rightsquigarrow \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}$ donnent les identifications suivantes dans $K(\text{Mod}(k[\text{FI}]))$,

$$\begin{aligned} \{H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_{m \geq 2\tilde{i}} &= \sum_{0 \leq a < m} \Theta^a(\{H_{\text{BM}}^{i-a}(d_X-1)(X^{m-a})\}_{m-a}), \\ \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}X^m)\}_{m \geq 2a+2\tilde{i}} &= \Upsilon^a\left(\sum_{0 \leq b < m-a} \Theta^b(\{H_{\text{BM}}^{i-b}(d_X-1)(X^{m-(a+b)})\}_{m-(a+b)})\right), \\ \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}X^m)\}_{m \geq 2a+2\tilde{i}} &= \sum_{0 \leq b < m-a} (-1)^b \Upsilon^{a+b}\left(\sum_{0 \leq c < m-a-b} \Theta^c(\{H_{\text{BM}}^{i-(b+c)}(d_X-1)(X^{m-(a+b+c)})\}_{m-(a+b+c)})\right), \end{aligned}$$

avec $\tilde{i} = \lfloor i/(d_X-1) \rfloor$.

Indication. – (c) résulte de 5.3.1 et de la définition de Υ^a dans 8.2, et (d) résulte de la définition de Θ^a et des égalités 5.4.1-(a)-(i,ii,iii), le tout modulo les équivalences $H_c^i(\Delta_{\leq r}X^s)^\vee = H_{\text{BM}}^{r d_X - i}(\Delta_{\leq r}X^s)$. \square

9.2. Les familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$

9.2.1. À propos de la connexité de M . – Rappelons que nous nous plaçons dans le cadre des espaces M munis d'une classe fondamentale, ce qui, d'après notre convention 6.2.4.1, signifie de les composantes connexes sont de même dimension d_M et sont munies d'une classe fondamentale. Dans ce cas, la condition de stabilité de représentations impose sur M qu'elle soit connexe et que $\dim M \geq 2$, car, autrement, les FI-modules $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ ne sont pas de type fini. En effet, si $\dim(M) \geq 2$, on a $|\pi_0(M^m)| = |\pi_0(F_m(M))| = \pi_0(M)^m$ ce qui exclut la finitude du FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$, pour peu que $\pi_0(M) > 1$. Par contre, si M est connexe et que $\dim(M) = 1$, on a $\text{Betti}_{\text{BM}}^0(M \setminus \mathbf{a}) \geq a$, auquel cas $\text{Betti}_{\text{BM}}^0(F_m(M)) \geq \text{Betti}_{\text{BM}}^0(M)^{\overline{m}}$, d'où encore une obstruction à la finitude.

Avertissement. – Jusque la fin de cette section, on suppose M est un espace connexe muni d'une classe fondamentale et que $\dim(H_c(M)) < \infty$. Lorsque M est en plus i -acyclique, on le note $X := M$

Dans l'étude de la stabilité de représentation des familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}M^m)\}_m$ nous abordons dans un premier temps le cas des espaces i -acycliques X . Plus tard, dans 9.3, nous nous affranchirons de cette hypothèse.

9.2.2. Le cas de la cohomologie à support compact. – Ce cas est inintéressant. En effet, si X est i -acyclique, les polynômes de Poincaré pour $H_c(\Delta_{?m-a}X^m)$ sont de valuation $m - a$ d'après 4.2.5 et 4.4, ce qui implique que

$$H_c^i(\Delta_{?m-a}X^m) = 0, \quad \forall m > a + i.$$

9.2.3. Le cas de la cohomologie de Borel-Moore

(A) *Le cas de $\{\Delta_{\leq m}(X^m)\}_m$.* – On s'intéresse au FI-module

$$\mathcal{A}(X; i) := \{H_{\text{BM}}^i(X^m)\}_m.$$

La proposition 8.1.9 s'applique, car $H_{\text{BM}}^0(X; k) = k$ (cf. commentaire 6.2.3), et donne

(A) $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{A}(X; i)) \leq 2i$, et $\text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{A}(X; i)) \leq i$.

(B) *Le cas de $\{\Delta_m(X^m)\}_m$.* – On s'intéresse au FI-module

$$\mathcal{B}(X; i) := \{H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m.$$

L'égalité 9.1.1-(d) nous conduit à chercher un majorant pour les rangs de stabilité des FI-modules

$$\mathcal{B}_a(X; i) := \Theta^a(\{H_{\text{BM}}^{i-a}(d_X-1)(X^{m-a})\}_{m-a})$$

pour $0 \leq a < m$ vérifiant

(3) $a(d_X-1) \leq i$.

On sait d'après (A) que le FI-module $\{H_{\text{BM}}^{i-a}(d_X-1)(X^{m-a})\}_{m-a}$ est stable pour $m-a \geq 2(i-a(d_X-1))$ et le théorème 8.2.3-(c) permet d'évaluer les rangs de monotonie et stabilité de $\mathcal{B}_a(X; i)$. On aboutit alors aux majorations

(B)
$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{B}_a(X; i)_{\geq 2i}) \leq 2(i-a(d_X-1)) + 4a \leq \begin{cases} 4i, & \text{si } d_X = 2, \\ 2i, & \text{si } d_X \geq 3, \end{cases} \\ \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{B}_a(X; i)_{\geq 2i}) \leq (i-a(d_X-1)) + a = i-a(d_X-2) \leq i, \end{cases}$$

dont la première résulte du fait d'explicitier $2(i+(3-d_X)a)$ selon que $d_X = 2$ ou $d_X \geq 3$ et moyennant la majoration (3).

Il faut encore remarquer que le foncteurs Θ^a considérés sont à valeurs dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2a}$ et que dans tous les cas on a $2a \leq 2i$ de sorte que les majorations (B) sont aussi valables pour $\mathcal{B}(X; i)$.

(C) *Le cas de $\{\Delta_{m-a}(X)\}_m$.* – On s'intéresse au FI-module

$$\mathcal{C}_a(X; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}X^m)\}_m.$$

On raisonne exactement comme dans (B) à l'aide de la formule 9.1.1-(d), ce qui nous conduit à calculer les rangs de stabilité des FI-modules

$$\Upsilon^a \left(\sum_{0 \leq b < m-a} \Theta^b(\{H_{\text{BM}}^{i-b}(d_X-1)(X^{m-(a+b)})\}_{m-(a+b)}) \right).$$

On est conduit à trouver les bornes supérieures

$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}} \leftrightarrow \sup_{0 \leq b} \{2(i-b(d_X-1)) + 4b + 4a\} \\ \text{rg}_{\text{m}} \leftrightarrow \sup_{0 \leq b} \{(i-b(d_X-1)) + b + a\}, \end{cases}$$

sachant que $b(d_X - 1) \leq i$. On trouve les majorations

$$(C) \quad \begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{C}_a(X; i)_{\geq 2a+2\tilde{i}}) \leq \begin{cases} 4(i+a), & \text{si } d_X = 2, \\ 2(i+2a), & \text{si } d_X \geq 3, \end{cases} \\ \text{rg}_{\text{m}}(\mathcal{C}_a(X; i)_{\geq 2a+2\tilde{i}}) \leq i+a, \end{cases}$$

qui sont également valables pour $\mathcal{C}_a(X; i)$ puisque $\tilde{i} = \lfloor i/(d_X - 1) \rfloor \leq i$.

(D) *Le cas de $\{\Delta_{\leq m-a}(X)\}_m$.* – On s'intéresse au FI-module (cf. section 9.1)

$$\mathcal{D}_a(X; i) := \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}X^m)\}_m.$$

On trouve encore les mêmes majorations des rangs que dans (C). Pour s'en convaincre, on pourrait raisonner à l'aide de la formule 9.1.1-(d), mais il s'avère plus intéressant d'appliquer (C) au complexe fondamental de FI-modules pour la *cohomologie* de Borel-Moore 9.1.1-(b),

$$0 \rightarrow \{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}X^m)\}_m \rightarrow \mathcal{H}^i(m-a) \rightarrow \mathcal{H}^i(m-a-1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{H}^i(1) \rightarrow 0,$$

avec $\mathcal{H}^i(m-a-\ell) := \{H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)\ell}(\Delta_{m-a-\ell}X^m)\}_m$ et aussi $i \geq (d_X-1)\ell$, et qui est exact dans le cas présent puisque X est i -acyclique.

Le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq \ell}X^m)\}_m$ est donc la somme alternée des $\mathcal{H}^i(m-a-\ell)$ dans $K_0(\text{Mod}(k[\text{FI}]))$. Suite à un calcul rapide qui montre que leurs rangs rg_{m} et rg_{ms} sont majorés par ceux de $\mathcal{H}^i(m-a)$, on conclut que le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq \ell}X^m)\}_m$ hérite des mêmes rangs grâce au corollaire 7.4.5-(b-ii).

Résumons les conclusions de ces observations sous forme de théorème.

THÉORÈME 9.2.4. – *Soit X un espace i -acyclique connexe muni d'une classe fondamentale et de dimension $d_X \geq 2$. Pour $a, i \in \mathbb{N}$, le FI-module $\{S_m : H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}X^m)\}_m$ est monotone pour $m \geq i+a$ et est monotone et stable pour $m \geq 4(i+a)$, si $d_X = 2$, et pour $m \geq 2(i+2a)$, si $d_X \geq 3$. Les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont polynomiales sur les mêmes intervalles d'entiers m .*

REMARQUE 9.2.5. – Dans les arguments qui précèdent, $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}X^m)\}_m$ a une structure *a priori* de FI-module, celle donnée par les morphismes image-inverse (cf. section 9.1). Lorsque nous utilisons le théorème 9.1.1-(d) nous passons de la catégorie des FI-modules à son groupe de Grothendieck $K_0(\text{Mod}(k[\text{FI}]))$ mais la conclusion se fait de nouveau dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])$. Par exemple, le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}X^m)\}_m$ (†) se retrouve identifié à une somme alternée de FI-modules ayant les bons rangs de monotonie et stabilité, mais cette somme alternée provient en fait d'une résolution dans $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq ?}$ par des FI-modules à la fois monotones et stables. Le fait que la sous-catégorie pleine $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq ?}$ de ce type de FI-modules en soit une *sous-catégorie abélienne* ⁽⁶¹⁾ permet de conclure que (†) est également monotone et stable pour $m \geq ?$. C'est d'ailleurs ce que dit la proposition 7.4.5-(b-ii).

⁽⁶¹⁾ Une sous-catégorie \mathcal{B} d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est dite *sous-catégorie abélienne* si elle est abélienne et si ses noyaux, conoyaux, images et co-images sont ceux dans \mathcal{A} .

9.3. Stabilité des familles de représentations $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a} M^m)\}_m$

Nous démontrerons l’analogue du dernier théorème 9.2.4 pour la famille de représentations $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(M))\}_m$, où M n’est pas nécessairement i -acyclique.

9.3.1. Stabilité dans les suites spectrales basiques. – Le théorème 6.7.1 établit que les FI-modules définis par les morphismes

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)_1^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_1^{p+1,q}$$

sont canoniquement isomorphes aux FI-modules définis par les morphismes

$$\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}}^{\mathcal{S}_m} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) \xrightarrow{\text{ind}_{\mathcal{S}_m}^{\mathcal{S}_{m+1}}} \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+2}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma \otimes H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m+1}^{m+1}),$$

où σ indique que l’action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathbf{1}$ est tordue $\sigma_{m-(p+1)}$ et lorsque le couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ est soumis à la contrainte $q = i + (m - (p + 1))$.

Le théorème (*loc. cit.*) décrit aussi, dans son assertion (c), le diagramme commutatif d’espaces vectoriels

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m) & \xrightarrow{p_m^*} & H_{\text{BM}}^q(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m+1}^{m+1}) \\ \downarrow \cong \Xi_{p+1}^m & & \uparrow (\Xi_{p+2}^{m+1})^{-1} \\ \bigoplus_{f \in \mathcal{F}(p+1, m)} H_{\text{BM}}^Q(F_{\mathbf{p}(f)}(M_{>0})) & \xrightarrow{\bigoplus p_{p+1}^*} & \bigoplus_{f \bullet \in \mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)} H_{\text{BM}}^Q(F_{\mathbf{p}(f \bullet)}(M_{>0})), \end{array}$$

où les isomorphismes Ξ_{p+1}^m pourraient nous inciter à transporter l’action des $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ pour en faire un diagramme commutatif de représentations, quelque chose dont nous n’avons pas encore eu besoin. Or, un tel transfert formel de structure sur des sommes directes dont la définition est basée sur un ordre précis des $m - (p + 1)$ premières coordonnées ne rend pas transparent le fait que l’on est en présence de sommes directes de FI-modules. C’est pour cette raison que nous introduisons dans les sections qui suivent une nouvelle décomposition de $H_{\text{BM}}^m(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m)$ qui respecte par construction les symétries et pour laquelle les analogues du diagramme précédent seront *a priori* compatibles à l’action de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$.

9.3.2. Tableaux et fonctions de $\mathcal{F}(p + 1, m)$

Nous encodons une fonction $f \in \mathcal{F}(p + 1, m)$ sous la forme d’un tableau à $p + 1$ lignes et m boîtes.

L’idée est la suivante. Soit $a > 0$. Pour toute suite $\bar{x} = (x_1, \dots, x_a)$ d’éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, a \rrbracket$, associons la fonction $f_{\bar{x}} \in \mathcal{F}(1, a + 1)$ définie pour $i \leq a$, par la règle suivante

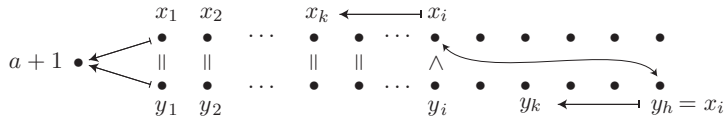
Pour $i \in \llbracket 1, a \rrbracket$, notons $I_{\bar{x}}(i) := \{j \leq i \mid x_j > x_i\}$. Alors

$$f_{\bar{x}}(x_i) = \begin{cases} a + 1, & \text{si } I_{\bar{x}}(i) = \emptyset \\ x_{\sup I_{\bar{x}}(i)}, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1, 2, \dots, a-1, a) \mapsto f_{\bar{x}}(i) = a+1, \\ \bar{x} &= (a, a-1, \dots, 2, 1) \mapsto f_{\bar{x}}(i) = \sup\{i+1, a+1\}. \end{aligned}$$

Cette correspondance est injective. En effet, si $\bar{x} \neq \bar{y}$, il existe un premier i tel que $x_i \neq y_i$. Supposons que l'on ait $x_i < y_i$. Alors, comme il existe $h > i$ avec $y_h = x_i$, on aura $f_{\bar{y}}(x_i) = f_{\bar{y}}(y_h) = y_k \neq a+1$ pour un certain $k \geq i$, tandis que $f_{\bar{x}}(x_i) = x_k = y_k$ pour un certain $k < i$, ou bien $f_{\bar{x}}(x_i) = a+1$. dans tous les cas, $f_{\bar{x}} \neq f_{\bar{y}}$.



Comme d'autre part, $a! = |\mathcal{F}(1, a+1)|$, on conclut que la correspondance en question est bijective. Cette idée est la base de la preuve du lemme suivant.

LEMME 9.3.3 (et notations). – *L'ensemble $\mathcal{F}(p+1, m)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{T}(p+1, m)$ des tableaux à $(p+1)$ lignes et m boites de formes :*

$$\tau := \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline m-p & \bullet & \bullet & & \\ \hline m-p+1 & \bullet & & & \\ \hline m-p+2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \vdots & & (j) \longleftarrow & & (i) \\ \hline m-2 & & & & \\ \hline m-1 & \bullet & & & \\ \hline m & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array} \right.$$

où les boites marquées par '•' sont remplies par les entiers de $\llbracket 1, m - (p+1) \rrbracket$ de manière biunivoque. La correspondance associe au tableau τ la fonction f_τ qui, appliquée à $i \in \llbracket 1, m - (p+1) \rrbracket$, donne le premier entier $j > i$ à gauche de i sur la ligne de τ où il figure.

L'ensemble $\mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)$ est en bijection avec l'ensemble des tableaux $\mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$ dont la ligne $(m+1)$ est de longueur 1. L'application

$$(_)^\bullet : \mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$$

qui associe à τ le tableau τ^\bullet obtenu en rajoutant la boite $(m+1)$ est bijective.

9.3.4. Décomposition symétrique de $H_c(\Delta_{a+b}(Z^a \times X^b))$. – Avant d'aborder le cas spécifique de $U_{m-p, \dots, m}^m = \Delta_m(M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times M_{> 0}^{p+1})$, on se place dans un contexte plus général avec des notations plus légères.

9.3.4.1. *Données et notations*

- (N-1) Soit $X \subseteq Z$ une inclusion d'espaces i -acycliques et $H_c(Z) = 0$.
- (N-2) Pour $I \subseteq \llbracket 1, a \rrbracket$, on note Z^I le produit $Z^{|I|}$ où les coordonnées sont indexées par I . On notera $F_I := \Delta_{|I|}(Z^I)$ et $F_b := F_b(X)$. Les notations $\Delta_{\gamma\ell}(F_I \times F_b)$ et $\Delta_{\gamma\ell}(Z^I \times F_b)$ ont alors le sens habituel de 2.1-(N-1).
- (N-3) Soit $\mathcal{T}_b(I)$ l'ensemble des tableaux à $(|I|+b)$ boîtes dont la première colonne est $(1, \dots, b)$ et dont la forme est

$$\tau := \begin{cases} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \bullet & \bullet \\ \hline 2 & \bullet & \\ \hline 3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \vdots & & & & & & \\ \hline b-2 & \bullet & \\ \hline b-1 & & \\ \hline b & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \end{cases}$$

où les boîtes ‘•’ sont remplies avec tous les éléments de I . Le groupe $\mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ agit sur $\mathcal{T}_b(I)$ par son action sur le contenu des tableaux. Par exemple,

si $\tau := \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x & y \\ \hline 2 & z & \\ \hline \end{array}$, on a $(1, 2)(x, y, z) \cdot \tau = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & y & z \\ \hline 1 & x & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x & \\ \hline 2 & y & z \\ \hline \end{array}$.

- (N-4) Pour $\tau \in \mathcal{T}_b(I)$, on notera $\mathfrak{p}(\tau)$ la partition de $I \sqcup \llbracket 1, b \rrbracket$ déterminée par les lignes de τ . Par exemple,

$$\tau := \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & x & y & z \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & a & & \\ \hline \end{array} \implies \mathfrak{p}(\tau) = \{\{1, x, y, z\}, \{2\}, \{3, a\}\}.$$

Alors, conformément à la notation de 2.3.2, on pose

$$F_\tau := F_{\mathfrak{p}(\tau)} \subseteq \Delta_b(Z^I \times F_b).$$

La projection $\pi_b : F_\tau \rightarrow F_b$ est clairement un homéomorphisme.

9.3.4.2. *Les isomorphismes Ψ_b^I .* – On définit par induction sur $|I|$ un isomorphisme de $\mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ -modules

$$\Psi_b^I : \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I)} H_c(F_\tau) \xrightarrow{+|I|} H_c(\Delta_{|I|+b}(Z^I \times F_b)).$$

On utilisera de manière systématique le complexe fondamental (cf. 3.5.4) pour l'espace $(F_I \times F_b)$. Lorsque $I \neq \emptyset$, on a $H_c(F_I \times F_b) = 0$, car $H_c(Z) = 0$, et ce complexe donne la présentation de $\mathcal{S}_{|I|} \times \mathcal{S}_b$ -modules

$$(4) \quad \Delta_{|I|+b-2}(F_I \times F_b) \xrightarrow{+1, c_2} \Delta_{|I|+b-1}(F_I \times F_b) \xrightarrow{+1, c_1} \Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b),$$

où la notation ‘ $H_c(_)$ ’ est absente pour gagner de la place.

On rappelle qu'on est sous l'hypothèse $b > 0$.

9.3.4.3. *Le cas $|I| = 0$.* – L'ensemble $\mathcal{T}_b(\emptyset)$ comporte l'unique tableau

$$\tau = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline b \\ \hline \end{array}.$$

On a clairement $F_\tau = F_b = \Delta_{|I|+b}(Z^I \times F_b)$ et l'on pose $\Psi_b^\emptyset = \text{id}_{F_b}$.

9.3.4.4. *Le cas $|I| = 1$.* – L'ensemble $\mathcal{T}_b(I)$ comporte b tableaux

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bullet \\ \hline 2 & \\ \hline \vdots & \\ \hline b & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \bullet \\ \hline \vdots & \\ \hline b & \\ \hline \end{array}, \quad \dots \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline b & \bullet \\ \hline \end{array}.$$

Le complexe fondamental (4) est réduit au seul isomorphisme

$$c_1 : H_c(\Delta_b(Z \times F_b)) \xrightarrow[+1]{\simeq} H_c(\Delta_{1+b}(Z \times F_b)),$$

où le terme de gauche se décompose naturellement en

$$H_c(\Delta_b(Z \times F_b)) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I)} H_c(F_\tau).$$

On définit alors $\Psi_b^I = c_1$, c'est un isomorphisme de $\mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ -modules

$$\Psi_b^I : \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I)} H_c(F_\tau) \xrightarrow[+|I]{\Sigma \Psi_\tau} H_c(\Delta_{1+b}(Z \times F_b)),$$

où on a noté Ψ_τ la restriction de Ψ_b^I au facteur $H_c(F_\tau)$.

9.3.4.5. *Le cas $|I| > 1$.* – Le complexe fondamental (4) fournit la surjection

$$c_1 : H_c(\Delta_{|I|+b-1}(F_I \times F_b)) \xrightarrow[+1]{\twoheadrightarrow} H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b)),$$

où le terme de gauche se décompose en

$$H_c(\Delta_{|I|+b-1}(F_I \times F_b)) = \bigoplus_{x \in I, 1 \leq j \leq b} H_c(\Delta_{|I|+b-1}^{(x,j)}(F_I \times F_b)),$$

où $\Delta_{|I|+b-1}^{(x,j)}(F_I \times F_b)$ est l'ouvert-fermé de $\Delta_{|I|+b-1}(F_I \times F_b)$ des uplets dont les éléments en coordonnées $x \in I$ et $j \in \llbracket 1, b \rrbracket$ coïncident. Notons $c_1(x, j)$ la restriction de c_1 au terme en question, i.e.

$$c_1(x, j) : H_c(\Delta_{|I|+b-1}^{(x,j)}(F_I \times F_b)) \xrightarrow[+1]{} H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b)).$$

En négligeant la coordonnée redondante x , on identifie ensuite

$$H_c(\Delta_{|I|+b-1}^{(x,j)}(F_I \times F_b)) = H_c(\Delta_{|I|+b-1}(F_{I-x} \times F_b)),$$

où le terme de droite est l'image de l'isomorphisme $\mathcal{S}_{I-x} \times \mathcal{S}_b$ -modules

$$\Psi_b^{I-x} : \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I-x)} H_c(F_\tau) \xrightarrow[+|I-x|]{\sim} H_c(\Delta_{|I|+b-1}(F_{I-x} \times F_b))$$

que l'on peut supposer déjà défini (induction). On a donc les morphismes

$$(5) \quad \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I-x)} H_c(F_\tau) \xrightarrow[+|I|]{\Psi_b^{I-x}} H_c(\Delta_{[-1]}^{(x,j)}(F_I \times F_b)) \xrightarrow[+1]{c_1(x,j)} H_c(\Delta_{[0]}(F_I \times F_b)),$$

où la notation $\Delta_{[-i]}(_)$ abrège $\Delta_{|I|+b-i}(_)$.

Maintenant, pour $\nu \in \mathcal{T}_b(I-x)$ notons $\nu+(x,j)$ le tableau de $\mathcal{T}_b(I)$ obtenu en rajoutant la case x à l'extrémité droite de la ligne j de ν . Par exemple,

$$\text{si } \nu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & u & v \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & a & \\ \hline \end{array}, \quad \nu+(x,1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & u & v & x \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & a & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et } \nu+(x,2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & u & v \\ \hline 2 & x & \\ \hline 3 & a & \\ \hline \end{array}.$$

Alors, pour chaque (x,j) et $\nu \in \mathcal{T}_b(I-x)$, on identifie $F_{\nu+(x,j)}$ à F_ν par l'oubli de la x -ième coordonnée et l'on définit le morphisme (de degré $|I|$)

$$(6) \quad \Psi_{\nu,(x,j)} : H_c(F_{\nu+(x,j)}) \xrightarrow[+|I|]{} H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b)),$$

comme la restriction de la composée de morphismes (5) à $H_c(F_\nu)$.

LEMME 9.3.5. – $\Psi_{\nu,(x,j)}$ est déterminé par le tableau $\tau := \nu+(x,j)$.

Démonstration. – **Avertissement.** Dans la suite, l'opérateur ' $H_c(_)$ ' étant omniprésent, il sera effacé dans les diagrammes. De même, la notation $\Delta_{[-i]}$ sera un raccourci pour $H_c(\Delta_{|I|+b-i}(F_I \times F_b))$.

Soient $w, x, y, z \in I$ et $i, j, k, l \in \llbracket 1, b \rrbracket$, avec $x \neq y$ et $j \neq k$, et considérons le diagramme (I) ci-dessous.

Dans le diagramme (I) :

- Les lignes (0) et (5) sont les plongements diagonaux.
- Les lignes (1,2,3) résultent d'appliquer verticalement la suite de foncteurs

$$\rightarrow H_c(\Delta_{[-1]}(_)) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq[-1]}(_)) \xrightarrow{\rho} H_c(\Delta_{\leq[-2]}(_)) \rightarrow,$$

scindée en ρ (corollaire 3.5.2). Les morphismes de liaison entre lignes (3)[-1] \rightarrow (1) sont alors injectifs, et ceux des colonnes (1) et (2) sont même bijectifs puisque l'on a $H_c(\Delta_{\leq[-1]}^{(x,j)}) = H_c(\Delta_{\leq[-1]}^{(y,k)}) = 0$.

- La flèche ' $\xrightarrow{\text{proj}}$ ' en ligne (1) est la surjection de $H_c(\Delta_{[-1]})$ sur les facteurs indiqués de sa décomposition en somme directe. Tandis que la flèche ' $\xrightarrow{\text{proj}}$ ' en ligne (4) est la projection de $H_c(\Delta_{[-2]})$, colonne par colonne, sur les sommes de facteurs indiqués, elle n'est pas nécessairement surjective.
- Les flèches ' $\xrightarrow{\text{rest}}$ ' désignent les restrictions aux les sous-espaces fermés.

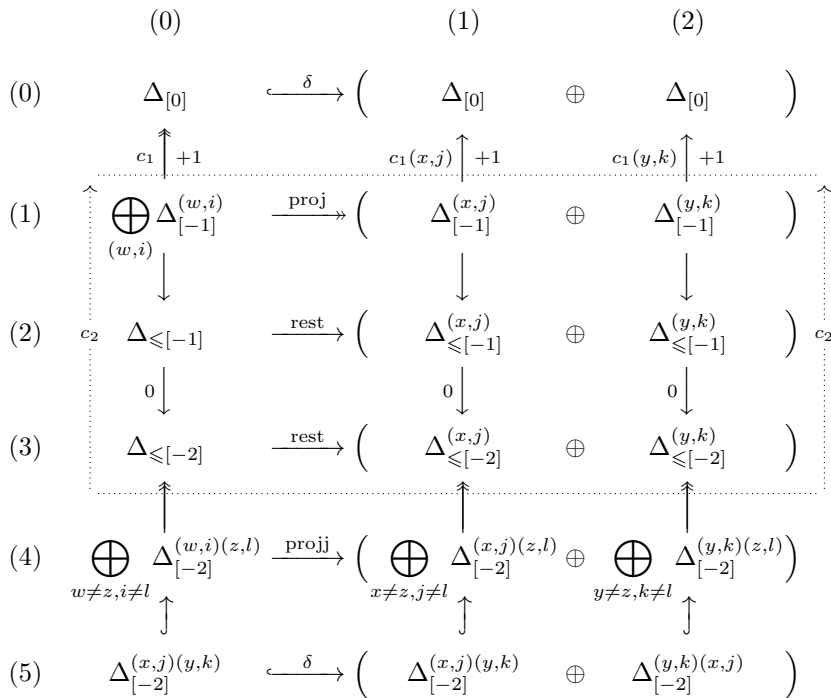


FIGURE 1. Diagramme (I)

- La ligne (5) est restriction de la (4) aux espaces indiqués et c’est un plongement diagonal. L’injection $(5) \hookrightarrow (4)$ est par prolongement par zéro.
- Le diagramme est commutatif par construction.

Suite à ces remarques, on remplace le sous-diagramme en pointillé dans le diagramme (I) par les morphismes composés c_2 de complexes fondamentaux. On obtient alors le diagramme commutatif (II) sur la page suivante.

Maintenant, pour $\tau = \begin{matrix} \vdots \\ j & \cdots & \cdots & x \\ \vdots \\ k & \cdots & y \\ \vdots \end{matrix} \in \mathcal{T}_b(I)$, notons $\tau-x$, $\tau-y$, $\tau-xy$ les tableaux

obtenus en enlevant les boîtes x, y comme indiquent les notations. Le morphisme $\Psi_{\tau-x, (x, j)}$ est, par la définition (6), la composée

$$F_{\tau-xy} \xrightarrow[+|I-xy|]{\Psi_{\tau-xy, (y, k)}} \Delta_{[-1]}(F_{I-x} \times F_b) = \Delta_{[-2]}^{(x, j)} \xrightarrow[+2]{c_1(x, j) \circ c_2(x, j)} \Delta_{[0]}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 (0) & \Delta_{[0]} & \xleftarrow{\delta} \left(\begin{array}{ccc} \Delta_{[0]} & \oplus & \Delta_{[0]} \end{array} \right) \\
 & \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_1(x,j) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_1(y,k) \end{array} \end{array} \\
 (1) & \bigoplus_{(w,i)} \Delta_{[-1]}^{(w,i)} & \xrightarrow{\text{proj}} \left(\begin{array}{ccc} \Delta_{[-1]}^{(x,j)} & \oplus & \Delta_{[-1]}^{(y,k)} \oplus \Delta_{[-1]}^{(w,l)} \end{array} \right) \\
 & \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_2(x,j) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_2(y,k) \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow +1 \\ c_2(w,l) \end{array} \end{array} \\
 (4) & \bigoplus_{w \neq z, i \neq l} \Delta_{[-2]}^{(w,i)(z,l)} & \xrightarrow{\text{proj}} \left(\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \neq z, j \neq l} \Delta_{[-2]}^{(x,j)(z,l)} & \oplus & \bigoplus_{y \neq z, k \neq l} \Delta_{[-2]}^{(y,k)(z,l)} \oplus \Delta_{[-2]}^{(w,l)} \end{array} \right) \\
 & \downarrow & \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
 (5) & \Delta_{[-2]}^{(x,j)(y,k)} & \xleftarrow{\delta} \left(\begin{array}{ccc} \Delta_{[-2]}^{(x,j)(y,k)} & \oplus & \Delta_{[-2]}^{(y,k)(x,j)} \end{array} \right)
 \end{array}$$

FIGURE 2. Diagramme II

Or, l'image de $\Psi_{\tau - xy, (x,j)}$ est contenue dans le facteur $\Delta_{[-2]}^{(x,j)(y,k)}$ de $\Delta_{[-2]}^{(x,j)}$, facteur qui est le même pour $\Psi_{\tau - xy, (y,k)}$ modulo le plongement diagonal de la ligne (5). L'égalité

$$\Psi_{\tau - x, (x,j)} = \Psi_{\tau - y, (y,k)}$$

résulte alors de ce que la projection de $c_2(\Delta_{[-2]}^{(x,j)(y,k)})$ sur un facteur de $\Delta_{[-1]}$ de la forme $\Delta_{[-1]}^{(w,l)}$ avec $(w,l) \notin \{(x,j), (y,k)\}$ est nul. Ce qui est clair déjà sur la ligne (4) où $\Delta_{[-2]}^{(x,j)(y,k)} \cap \Delta_{[-1]}^{(w,l)} = 0$ et par commutativité du diagramme. \square

Le lemme précédent montre que le morphisme $\Psi_{(\tau - x), (x,j)}$ de la définition (6) est indépendant de l'écriture $\tau = (\tau - x) + (x,j)$, raison pour laquelle il sera noté simplement

$$\Psi_\tau : H_c(F_\tau) \xrightarrow{+|I|} H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b)).$$

PROPOSITION 9.3.6. – *Le morphisme*

$$\Psi_b^I : \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I)} H_c(F_\tau) \xrightarrow{+|I|} H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b))$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ -modules.

Démonstration. – Le fait que c'est un morphisme de $\mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ -modules résulte de ce que, par construction, pour tout $\alpha \in \mathcal{S}_I \times \mathcal{S}_b$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H_c(F_\tau) & \xrightarrow{+|I|} & H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b)) \\
 \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\
 H_c(F_{\alpha(\tau)}) & \xrightarrow{+|I|} & H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b))
 \end{array}$$

est commutatif. Il est surjectif puisqu'il en est ainsi de

$$\bigoplus_{(x,j)} \Delta_{[-1]}^{(x,j)} = \Delta_{[-1]} \xrightarrow{c_1} \Delta_{[0]}$$

et que Ψ_b^{I-*} est une surjection sur chaque $\Delta_{[-1]}^{(*,\cdot)}$ par hypothèse de récurrence. Pour conclure maintenant que l'on a un isomorphisme il suffit de comparer les dimensions. On a

$$(d_1) \quad \dim \left(\bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}_b(I)} H_c(F_\tau) \right) = |\mathcal{J}_b(I)| \cdot \dim H_c(F_b)$$

et, par 6.5.2-(b),

$$(d_2) \quad \dim (H_c(\Delta_{|I|+b}(F_I \times F_b))) = |\mathcal{F}(b, |I| + b)| \cdot \dim H_c(F_b).$$

L'égalité de dimensions dans (d_1) et (d_2) résulte alors du lemme 9.3.3 qui établit que l'on a $|\mathcal{F}(b, |I| + b)| = |\mathcal{J}(b, |I| + b)| = |\mathcal{J}_b(I)|$. \square

Cette proposition achève la dernière étape de la définition inductive des isomorphismes Ψ_b^I commencée dans 9.3.4.2.

9.3.7. Structure de $\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b$ -module de $H_c(\Delta_m(Z^{m-b} \times F_b(X)))$. – On applique les considérations précédentes au cas où $I = \llbracket 1, m - b \rrbracket$ et où l'intervalle $\llbracket 1, b \rrbracket$ est décalé vers $\llbracket m - b + 1, m \rrbracket$. Il est alors avantageux de remplacer la notation de l'ensemble \mathcal{J}_b^I par celle, équivalente, de l'ensemble de tableaux $\mathcal{T}(b, m)$ de 9.3.2.

9.3.7.1. Tableaux normaux. – Chaque orbite de $\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b$ dans $\mathcal{T}(b, m)$ contient un unique tableau où la longueur des lignes est décroissante et le contenu des boîtes '•' est strictement croissant. Par exemple, si $m = 50$ et $m - b = 14$,

$$(7) \quad \tau = \left\{ \begin{array}{cccccc} \boxed{15} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \boxed{16} & 7 & 8 & 9 & & & \\ \boxed{17} & 10 & 11 & 12 & & & \\ \boxed{18} & 13 & 14 & & & & \\ \boxed{19} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \boxed{29} & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \boxed{50} & & & & & & \end{array} \right\} b$$

$\left. \begin{array}{c} \boxed{29} \\ \vdots \\ \boxed{50} \end{array} \right\} b - (m - b) = 22$

Un tel tableau sera dit « normal », leur ensemble est noté $\mathcal{T}_0(b, m)$.

REMARQUE 9.3.8. – On a indiqué en gris la plus petite colonne de lignes de cardinal 1 dans les tableaux normaux, son cardinal, $b - (m - b)$, est atteint lorsque la longueur des lignes de τ est ≤ 2 et que $m \geq 2(m - b)$. Il y a alors autant de tableaux normaux que des partitions de $\llbracket 1, m - b \rrbracket$ et l'application $(_)^\bullet : \mathcal{T}(b, m) \rightarrow \mathcal{T}^\bullet(b + 1, m + 1)$ de 9.3.3 est une bijection sur $\mathcal{T}(b + 1, m + 1)$.

LEMME ET NOTATION 9.3.9. – *Le stabilisateur \mathcal{H}_τ de τ dans $\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b$ est le produit direct*

$$\mathcal{H}_\tau = \mathcal{H}_\tau \times \mathcal{S}_{m-|\tau|},$$

où τ désigne le sous-tableau des lignes de longueur > 1 de τ , et où \mathcal{H}_τ désigne le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{|\tau|} \cap (\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b)$. On a

$$\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_{\llbracket m-b+1, m-|\tau| \rrbracket}, \mathbf{1}_{|\tau|} \times \mathcal{S}_{m-|\tau|} \subseteq \mathbf{1}_{m-b} \times \mathcal{S}_b.$$

La projection $p_2 : \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{S}_{\llbracket m-b+1, m-|\tau| \rrbracket}$ est un isomorphisme sur son image.

9.3.10. **Commentaire.** – Dans le tableau 9.3.7.1-(7), on a $\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{S}_{\llbracket 1, 14 \rrbracket} \times \mathcal{S}_{\llbracket 15, 18 \rrbracket}$. C'est le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par l'involution $\begin{pmatrix} 16 & 7 & 8 & 9 \\ 17 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 9.3.11. – *Pour toute inclusion d'espaces i -acycliques $X \subseteq Z$ avec $H_c(Z) = 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b$ -modules*

$$\Psi_b^m : \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(b,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b} H_c(F_\tau(X)) \xrightarrow[+(m-b)]{\simeq} H_c(\Delta_m(Z^{m-b} \times F_b(X))).$$

Démonstration. – Corollaire de la proposition 9.3.6. □

9.3.12. **Structure de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -module de $H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m)$.** – On reprend maintenant le sujet de 9.3 qui concerne la donnée d'un espace M non nécessairement i -acyclique. On appliquera la proposition 9.3.11 au cas où $Z := M_{\geq 0}$, où $X := M_{> 0}$ et où $b = p + 1$. Pour chaque tableau $\tau \in \mathcal{T}(p + 1, m)$, on a

$$F_\tau(M_{> 0}) := \{ \bar{x} \in M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times F_{p+1}(M_{> 0}) \mid x_i = x_{f_\tau(i)} \}.$$

PROPOSITION 9.3.13. – (a) *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -modules gradués, de degré $-(m - (p + 1))d_M$,*

$$\sigma \otimes H_{\text{BM}}(U_{m-p, \dots, m}^m) \cong \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1, m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}} \sigma^{d_M} \otimes H_{\text{BM}}(F_\tau(M_{> 0})),$$

où σ est la signature de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$. On a $|\mathcal{T}(p + 1, m)| \leq |\mathfrak{P}(m - (p + 1))|$ avec égalité pour tout $m \geq 2(m - (p + 1))$.

(b) *Le FI-module défini dans 6.7.1 par les morphismes des suites spectrales*

$$\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(U^m)_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(U^{m+1})_1^{p+1,q},$$

où $q = i + (m - (p + 1))$, est canoniquement isomorphe au FI-module défini par les morphismes

$$\bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1, m)} \left(\begin{array}{c} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau \times \mathcal{S}_{m-|\tau|}}^{\mathcal{S}_m} \sigma^{d_M} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{> 0})) \\ \downarrow \text{ind}_{p_{p+1}}^* \\ \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau \times \mathcal{S}_{m+1-|\tau|}}^{\mathcal{S}_{m+1}} \sigma^{d_M} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_{p+2}(M_{> 0})) \end{array} \right),$$

où σ est la restriction à \mathcal{H}_{τ} de la signature de $\mathcal{S}_{m-(p+1)}$, où F_{p+1} et F_{p+2} réfèrent respectivement à $F_{\mathfrak{p}(\tau)}$ et $F_{\mathfrak{p}(\tau\bullet)}$ (cf. 9.3.4.1-(N-4) et 9.3.3), et où

$$Q := q - (m - (p + 1))d_M = i - (m - (p + 1))(d_M - 1).$$

Indication. – (a) En dualisant 9.3.11 et en incorporant les caractères signature nécessaires (cf. définition 6.2.4.3), on a l’isomorphisme de $\mathcal{S}_{m-(p+1)} \times \mathcal{S}_{p+1}$ -modules

$$\begin{aligned} (\Psi_b^m)^\vee : \sigma_{m-(p+1)}^{d_M+1} \otimes \sigma_{p+1}^{d_M+1} \otimes H_{\text{BM}}(\mathbb{U}_{m-p,\dots,m}^m) \\ \xrightarrow[-(m-(p+1))d_M]{\simeq} \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(b,m)} \text{ind}_{\mathcal{H}_\tau}^{\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b} \sigma_{p+1}^{d_M+1} \otimes H_{\text{BM}}(F_\tau(X)), \end{aligned}$$

dont on conclut en simplifiant les caractères redondants (cf. note (43), p. 93). L’assertion (b) est alors une simple reformulation de 6.7.1-(b). \square

9.3.14. Monotonie et stabilité dans les suites spectrales basiques. – Pour chaque $\tau \in \mathcal{T}(p + 1, m)$, on reconnaît dans 9.3.13-(b) le FI-module

$$\text{ind}_{\rho,\tau}(\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}) \in \text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq 2(m-(p+1))},$$

où ρ désigne l’action de \mathcal{H}_τ sur $\sigma_{m-(p+1)}$ et où $\text{ind}_{\rho,\tau}$ est le foncteur d’induction introduit dans 8.1.6.

THÉOREME 9.3.15. – *Soit M un espace connexe muni d’une classe fondamentale.*

(a) *Pour $Q := i - (m - (p + 1))(d_M - 1)$ et $\tau \in \mathcal{T}(p + 1, m)$, on a*

$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_{\rho,\tau}(\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1})) \leq \begin{cases} 4i, & \text{si } d_M = 2, \\ 2i, & \text{si } d_M \geq 3, \end{cases} \\ \text{rg}_{\text{m}}(\text{ind}_{\rho,\tau}(\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1})) \leq i. \end{cases}$$

(b) *Pour $a, i \in \mathbb{N}$ fixés,*

(i) *le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour*

$$m \geq \begin{cases} 4(i + a), & \text{si } d_M = 2, \\ 2(i + 2a), & \text{si } d_M \geq 3. \end{cases}$$

(ii) *le FI-module $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}M^m)\}_m$ est monotone et stable pour*

$$m \geq \begin{cases} 4(i + 2a), & \text{si } d_M = 2, \\ 2(i + d_M a), & \text{si } d_M \geq 3. \end{cases}$$

Dans (i) et (ii), les familles des caractères et des nombres de Betti correspondantes sont polynomiales sur les mêmes intervalles d’entiers m .

Démonstration. – (a) On applique le théorème 9.2.4 à l'espace i -acyclique $M_{>0}$. Comme $\dim(M_{>0}) \geq 3$, la famille $\{H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0}))\}_{p+1}$ est monotone pour

$$(p+1) \geq Q,$$

et est monotone et stable pour

$$(p+1) \geq 2Q.$$

Le théorème 8.1.7 garantit alors que le FI-module induit par $\text{ind}_{\rho,\tau}$ est monotone pour tout

$$m \geq Q + (m - (p+1)) = i - (m - (p+1))(d_M - 2),$$

et est monotone et stable pour tout

$$(8) \quad m \geq 2Q + 4(m - (p+1)) = 2i + (m - (p+1))(4 - 2(d_M - 1))$$

et comme on dispose de l'inégalité 6.5.2-(d) : $i \geq (m - (p+1))(d_M - 1)$, le dernier terme de (8) est majoré par $4i$ si $d_M = 2$, et par $2i$ si $d_M \geq 3$.

(b) Le cas de la famille $\{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))\}_m$.

Fixons $i \in \mathbb{N}$. D'après 6.5.2 les termes $\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}$ de la suite spectrale basique $(\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r, d_r)$ qui convergent vers $H_{\text{BM}}^i(F_m(M))$ sont ceux pour lesquels on a $q = i + (m - (p+1))$. Si maintenant on fixe q , la différence $(m - p)$ est constante et si l'on augmente m et p simultanément, ces contraintes décrivent un facteur direct du FI-module défini par la famille de morphismes de suites spectrales basiques (cf. 6.7.1)

$$\{\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r^{p+1,q}\}_m,$$

facteur que nous allons noter

$$\mathcal{E}_r^{i,q} := \{\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_r^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})_r^{p+1,q} \mid q = i + (m - (p+1))\}_m.$$

Les différentielles des suites spectrales basiques définissent alors un complexe de FI-modules

$$(9) \quad (\mathcal{E}_r(q), d_r) := (\dots \rightarrow \mathcal{E}_r^{i-1, q+r-1} \xrightarrow{d_r} \mathcal{E}_r^{i, q} \xrightarrow{d_r} \mathcal{E}_r^{i+1, q-r+1} \rightarrow \dots).$$

Nous avons des isomorphismes canoniques

$$h^i(\mathcal{E}_r(q), d_r) \simeq \mathcal{E}_{r+1}^{i, q} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_r^{i, q} = \mathcal{E}_{r+1}^{i, q}, \quad \forall r > q + 1$$

et donc la condition de convergence (cf. 6.7.1-(a))

$$(10) \quad \left(\bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_{q+2}^{i, q} \right) \implies \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))\}_m.$$

LEMME. – Pour tout $r \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \text{rg}_m(\mathcal{E}_r^{i+1,q}) = \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{E}_r^{i,q}) = 0, & \forall i < 0, \\ \text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{E}_r^{i,q}) \leq \sup\{i\epsilon, 1\}, & \forall i \geq 0, \\ \text{rg}_m(\mathcal{E}_r^{i,q}) \leq \sup\{(i-1)\epsilon, 1\}, & \forall i \geq 1, \end{cases}$$

avec $\epsilon = 4$ si $d_M = 2$, et $\epsilon = 2$ si $d_M \geq 3$.

\mathcal{E}_r	\mathcal{E}_r^{-1}	\mathcal{E}_r^0	\mathcal{E}_r^1	\mathcal{E}_r^2	\mathcal{E}_r^3	\mathcal{E}_r^i
$\text{rg}_{\text{ms}} \leq$	0	1	ϵ	2ϵ	3ϵ	$i\epsilon$
$\text{rg}_m \leq$	0	0	1	ϵ	2ϵ	$(i-1)\epsilon$

Preuve du lemme. – Le cas $r = 1$. – On a par définition et par 9.3.13-(b)

$$(11) \quad (\mathcal{E}_1^{i,q})_m = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\rho,\tau} H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})).$$

L’assertion (a) donne, pour chaque $\tau \in \mathcal{T}(p+1, m)$ et tout $i \geq 0$

$$\begin{cases} \text{rg}_{\text{ms}}(\text{ind}_{\rho,\tau}(H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})))) \leq i\epsilon, \\ \text{rg}_m(\text{ind}_{\rho,\tau}(H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})))) \leq i. \end{cases}$$

La majoration $\text{rg}_m(\mathcal{E}_1^{i,q}) \leq i$ s’ensuit puisque $(_)^\bullet : \mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}(p+2, m+1)$ est toujours injective, mais pour avoir $\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{E}_1^{i,q}) \leq i\epsilon$, il faut s’assurer que si l’on a $m \geq \epsilon i$ et $H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})) \neq 0$, l’application $(_)^\bullet$ est bijective. Raisonons par l’absurde, si $(_)^\bullet$ n’est pas bijective, on a $(p+1) < m/2$, et si de plus $m \geq \epsilon i$, on a

$$(d_M - 1)(m - (p + 1)) > \frac{d_M - 1}{2}m \geq \frac{d_M - 1}{2}\epsilon i \geq i,$$

donc $Q = i - (d_M - 1)(m - p + 1) < 0$ et alors $H_{\text{BM}}^Q(F_{p+1}(M_{>0})) = 0$.

Le tableau qui suit illustre ces conclusions dont on remarquera qu’elles sont compatibles à celles du lemme pour \mathcal{E}_1 puisque $i \leq \epsilon(i-1)$ dès que $2 \leq i$.

$$(12) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_1^{-1} & \mathcal{E}_1^0 & \mathcal{E}_1^1 & \mathcal{E}_1^2 & \mathcal{E}_1^3 & \mathcal{E}_1^i \\ \hline \text{rg}_{\text{ms}} & 0 & 0 & \epsilon & 2\epsilon & 3\epsilon & i\epsilon \\ \hline \text{rg}_m & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & i\epsilon \end{array}$$

Le cas général. – En appliquant au tableau 12 les règles

$$\begin{cases} \text{rg}_m \mathcal{E}_{r+1}^i \leq \sup\{\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{E}_r^{i-1}, \text{rg}_m \mathcal{E}_r^i\} \\ \text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{E}_{r+1}^i \leq \sup\{\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{E}_r^{i-1}, \text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{E}_r^i, \text{rg}_m \mathcal{E}_r^{i+1}\}, \end{cases}$$

établies dans 7.4.4-(e), on obtient aussitôt le tableau du lemme pour \mathcal{E}_2 , et comme ce tableau est laissé stable par ces règles le lemme résulte pour tout $r \geq 1$. Ce qui termine la preuve du lemme. \square

Ceci étant, on rappelle que l'aboutissement de (10) est le bi-gradué du FI-module $\mathcal{H}^i := \{p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))\}_m$ relatif à la filtration par le degré p des cochaînes de Čech (cf. 6.4.9). Or, sous la condition $Q = i - (m - (p + 1))(d_M - 1) > 0$, la filtration en question possède un nombre fini de termes ($\leq \frac{i}{d_M - 1} + 1$), et les majorations des rangs de $\mathcal{E}_{q+2}^{i,q}$ sont aussi valables pour \mathcal{H}^i d'après 7.4.5.

Dans le cas particulier où $i = 0$, ces raisonnements donnent seulement la majoration $\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{H}^0 \leq 1$ (c'est ce qui arrive lorsque $H_{\text{BM}}^0(M) = 0$). Lorsque $H_{\text{BM}}^0(M) = k$, un calcul direct élémentaire montre que l'on a $\mathcal{H}^0 = \mathcal{V}(0)$ et donc que $\text{rg}_{\text{ms}} \mathcal{H}^0 = 0$.

(b-i) Le cas des familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} M^m)\}_m$ résulte de (a)) exactement comme dans le cas (C) des espaces i -acycliques (p. 148).

(b-ii) Pour le cas général des familles $\{H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} M^m)\}_m$, on ne peut pas faire appel au complexe fondamental des FI-modules, comme dans le cas (D) des espaces i -acycliques (p. 149), puisque ce complexe n'est plus exact. On fait plutôt appel aux suites longues de FI-modules de 9.1.1

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{\text{BM}}^{i-1}(\Delta_{\leq m-a} M^m) &\rightarrow H_{\text{BM}}^{i-1}(\Delta_{m-a} M^m) \\ &\rightarrow H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-(a+1)} M^m) \\ &\rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} M^m) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} M^m) \rightarrow, \end{aligned}$$

où l'on va raisonner par induction croissante sur $a \in \mathbb{N}$.

Pour $a = 0$, on a $\Delta_{\leq m} M^m = M^m$, et l'étude des rangs de $H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m} M^m)$ relève de la même analyse 9.2.3-(A), il est donc monotone et stable pour $m \geq 2i$. Dans chaque étape de l'induction à partir de $a = 0$, on peut donc supposer que les termes de la première et troisième ligne sont monotones et stables pour

$$(*) \quad m \geq 4(i + 2a) \quad \text{ou} \quad m \geq 2(i + d_M a),$$

suivant la valeur de d_M . En appliquant le corollaire 7.4.5-(b), on déduit la monotonie et stabilité de $H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-(a+1)} M^m)$ sur le même rang (*), car il est extension d'un noyau et conoyau de FI-modules monotones et stables sur ce rang. Le remplacement d'indice $i \mapsto i + d_M$ dans (*) complète la démonstration. \square

CHAPITRE 10

CALCUL DU CARACTÈRE DE \mathcal{S}_m -MODULE DE $H_c(F_m(X))$

On étend les résultats de Macdonald ([27]) concernant le caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c(M^m)$ au cas du \mathcal{S}_m -module $H_c(F_m(X))$ lorsque X est i -acyclique.

Avertissement. – Dans cette section et la suivante, le corps k est de caractéristique nulle. La donnée d'un espace M présuppose que $\dim_k(H_c(M)) < \infty$.

10.1. Série de caractères de \mathcal{S}_m

10.1.1. Série de caractères d'un \mathcal{S}_m -module gradué. – Nous appellerons \mathcal{S}_m -module gradué, la donnée d'un k -espace vectoriel gradué $V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$, tel que chaque V^i est un \mathcal{S}_m -module.

Lorsque, chaque V^i de dimension finie sur k , la « série de caractères de V », est l'application $\chi_V : \mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$ définie suivant MacDonald ([27] (2.3)) par

$$\mathcal{S}_m \ni \alpha \mapsto \chi_V(\alpha, T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr}(\alpha : V^i) (-T)^i.$$

Le lemme suivant, pendant du lemme 4.1.2, est élémentaire.

LEMME 10.1.2. – *On note V un \mathcal{S}_m -module gradué à termes de dimension finie, et on note α un élément de \mathcal{S}_m .*

- (a) *Si $(\cdots \rightarrow V_{i-1} \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1} \rightarrow \cdots)$ est un complexe borné ⁽⁶²⁾ de \mathcal{S}_m -modules gradués, de cohomologie $(\dots, H_{i-1}, H_i, H_{i+1}, \dots)$ on a*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \chi_{V_k}(\alpha, T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^k \chi_{H_k}(\alpha, T).$$

- (b) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \chi_{V[d]}(\alpha, T) = \chi_V(\alpha, T) \cdot (-T)^{-d}, \\ \text{(ii)} \quad \chi_{V_1 \otimes_k V_2}((\alpha_1, \alpha_2), T) = \chi_{V_1}(\alpha_1, T) \cdot \chi_{V_2}(\alpha_2, T), \\ \text{(iii)} \quad \chi_{\text{Hom}_{\text{gr}_k}(V_1, V_2)}(\alpha, T) = \chi_{V_1}(\alpha, 1/T) \cdot \chi_{V_2}(\alpha, T), \end{array} \right.$
où nous avons noté $V[d]$ dans (i), le \mathcal{S}_m -module gradué vérifiant $V[d]^i = V^{i+d}$.

⁽⁶²⁾ Autrement dit, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $V_k = 0$ si $|k| > N$.

10.1.3. Série de caractères d'un \mathcal{S}_m -espace topologique. – Si M est un espace muni d'une action de \mathcal{S}_m , les « séries de caractères de $H_c(M)$ et de $H(M)$ » seront respectivement notées

$$\chi_c(M)(_, T) := \chi_{H_c(M,k)}(_, T), \quad \text{et} \quad \chi(M)(_, T) := \chi_{H(M,k)}(_, T).$$

On a donc vis-à-vis des définitions de 5.2.2, l'égalité

$$\chi_c(M)(_, T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \chi_c(M; i)(_) T^i.$$

REMARQUE 10.1.4. – Il convient de retenir pour la suite les expressions suivantes. Pour tout espace topologique X et tout $m \geq 0$, on a :

$$\frac{\mathcal{P}_c(X^m)(-T)}{T^m} = \left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T} \right)^m, \\ \frac{\mathcal{P}_c(F_m(X))(-T)}{T^m} = \left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T} \right)^m.$$

10.2. Séries de caractères de $F^q(X)$

L'exactitude des complexes fondamentaux associés aux espaces $\Delta_{\leq \ell}(F^q)$ du théorème 3.5.4 s'avère particulièrement adaptée à la détermination des séries de caractères. La proposition suivante est un ingrédient important dans le calcul des caractères.

THÉORÈME 10.2.1. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Pour toute partition \mathfrak{q} de $[[1, m]]$, tout $\ell \leq m$ et tout $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$ (cf. 3.4.3), on a

$$\frac{\chi_c(\Delta_{\leq \ell} F^{\mathfrak{q}}(X))(\alpha, T)}{T^\ell} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{\ell-a} F^{\mathfrak{q}}(X))(\alpha, T)}{T^{\ell-a}}.$$

Démonstration. – Corollaire immédiat du théorème 3.5.4 et du lemme 10.1.2. □

10.3. Séries de traces pour un m -cycle

L'action de \mathcal{S}_m sur $[[1, m]]$ induit une action sur l'ensemble $\mathfrak{P}(m)$ des partitions de $[[1, m]]$ sous-entendue dans la suite. Pour $m > 0$ donné, on note $\sigma_m \in \mathcal{S}_m$, ou simplement σ s'il est superflu de préciser l'entier m , la permutation cyclique $(1, 2, \dots, m)$. On notera $C_m := \langle \sigma_m \rangle$ le sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par σ_m .

LEMME 10.3.1. – *Les points fixes de l'ensemble $\mathfrak{P}(m)$ sous l'action de C_m sont les partitions en orbites de $[[1, m]]$ sous l'action des différents sous-groupes de C_m . On a*

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_d(m)^{C_m} = \{[[1, m]]/\langle \sigma_m^{m/d} \rangle\}, & \text{si } d \mid m, \\ \mathfrak{P}_d(m)^{C_m} = \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $|\mathfrak{P}(m)^{C_m}| = |\{d \in \mathbb{N} \text{ t.q. } d \mid m\}|$.

Démonstration. – L'application $C_m \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$, $\alpha \mapsto \alpha(1)$ est un isomorphisme de C_m -espaces lorsque l'on munit C_m de son action par multiplications à gauche. Les partitions C_m -stables par multiplication à gauche sont aussi stables par multiplication à droite puisque C_m est abélien. Or, les partitions de C_m -stables par multiplication à droite sont les ensemble des classes d'équivalence à gauche de C_m des sous-groupes $H \subseteq C$, autrement dit, ce sont les partitions de C_m en H -orbites. Enfin, comme C_m est cyclique engendré par σ , ses sous-groupes sont les $\langle \sigma^d \rangle$ avec $d \mid m$. \square

THÉORÈME 10.3.2. – *Soit X un espace i -acyclique. Pour tout $m \geq 1$, la série de traces de l'action de σ_m sur $H_c(F_m(X))$ vérifie*

$$\boxed{\frac{\chi_c(F_m(X)(\sigma_m, T))}{T^m} = \sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^d)}{T^d}}$$

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius.

Démonstration. – Le théorème 10.2.1 appliqué à la partition $\mathfrak{q} = (1, \dots, 1)$ et pour $\ell = m$, donne l'égalité de séries de traces

$$(1) \quad \frac{\chi_c(X^m)(\sigma, T)}{T^m} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} X^m)(\sigma, T)}{T^{m-a}}$$

D'après 2.3.3, on a la décomposition

$$H_c(\Delta_{m-a} X^m) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{m-a}(m)} H_c(F_{\mathfrak{p}})$$

et la trace de l'action de σ sur $H_c(\Delta_{m-a} X^m)$ se lit sur les termes $H_c(F_{\mathfrak{p}})$ tels que $\sigma \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Or, on a vu dans le lemme 10.3.1 qu'il n'y a de telles partitions que lorsque $d := m - a$ est un diviseur de m , et dans ces cas, il y a une *et une seule* partition telle, à savoir $\mathfrak{p} := C_m \cdot \langle \sigma_m^d \rangle$. L'action de σ_m sur $F_{\mathfrak{p}}$ coïncide avec l'action de σ_d sur F_d , on a donc l'égalité de séries de traces

$$\begin{cases} \chi_c(\Delta_d X^m)(\sigma_m, T) = \chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T) & \text{si } d \mid m, \\ \chi_c(\Delta_d X^m)(\sigma_m, T) = 0 & \text{si } d \nmid m, \end{cases}$$

dont on déduit l'expression du deuxième membre de (1) suivante :

$$(2) \quad \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} X^m)(\sigma_m, T)}{T^{m-a}} = \sum_{d \mid m} \frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d}$$

Maintenant, si $p_i : X^m \rightarrow X$ est la projection $\bar{x} \mapsto x_i$, on a $\sigma^* \circ p_{\sigma_i}^* = p_i^*$ et l'action de σ sur les tenseurs simples de $H_c^k(X)^{\otimes m}$ se fait par permutation signée (cf. [27]) :

$$\sigma^*(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_m) = (-1)^{k(m-1)} (\omega_2 \otimes \omega_3 \otimes \dots \otimes \omega_1).$$

Comme l'opérateur σ^* agit sur une base de tenseurs simples de $H_c(X)^{\otimes m}$, sa trace le lit sur ceux de tels tenseurs fixés par σ , donc de la forme $\omega \otimes \cdots \otimes \omega$ pour ω appartenant à une base de $H_c(X)$. On a alors l'égalité

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\sigma^* : H_c^{km}(X^m)) = (-1)^{k(m-1)} \dim H_c^k(X) \\ \operatorname{tr}(\sigma^* : H_c^j(X^m)) = 0 \end{cases} \quad \text{si } m \nmid j,$$

et, par définition de la série des traces 10.1.1,

$$(3) \quad \begin{aligned} \chi_c(X^m)(\sigma_m, T) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^{km} \cdot (-1)^{k(m-1)} \dim H_c^k(X) \cdot T^{km} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim H_c^k(X) \cdot (T^m)^k = \chi_c(X)(\mathbf{1}, T^m). \end{aligned}$$

En reportant les égalités (2) et (3) dans la formule (1), on obtient :

$$\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^m)}{T^m} = \sum_{d|m} \frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d}, \quad \forall m \geq 1,$$

et la formule d'inversion de Möbius donne l'égalité recherchée :

$$\frac{\chi_c(F_m(X)(\sigma_m, T))}{T^m} = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^d)}{T^d}. \quad \square$$

10.3.3. Remarque pour X^m . – D'après l'égalité (3) de la preuve précédente qui donne $\chi_c(X^m)(\sigma_m, T) = \chi_c(X)(\mathbf{1}, T^m)$, l'analogie du théorème 10.3.2 pour l'espace X^m s'énonce par la même formule où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $d := m$. On retrouve alors les résultats de Macdonald ([27], formule (3.2)).

10.4. Séries des traces pour une puissance d'un m -cycle

10.4.1. Partitions en orbites q_r . – On s'intéresse maintenant au cas où $m = dr$ avec $1 \leq d \leq m$ et à la trace de l'opérateur σ_{dr}^r agissant sur $F_{dr}(X)$. Notons q_r la partition de $[[1, dr]]$ et $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$ -orbites. Pour l'étude de $\chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r, T)$ nous allons utiliser le théorème 10.2.1 avec $q := q_r$ et $\ell := dr$. Dans ce cas, on a (10.1.2-(b)-(ii))

$$\frac{\chi_c(F^{q_r}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr}} = \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r,$$

d'où l'égalité :

$$\left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{dr-a} F^{q_r}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr-a}},$$

qui nous emmène à l'étude de l'espace $\Delta_{dr-a} F^{q_r}(X)$ sous l'action de σ_m^r .

PROPOSITION 10.4.2. – Soit \mathfrak{q}_r la partition de $\llbracket 1, dr \rrbracket$ en $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$ -orbites et soit $\mathfrak{p} = \{I_1, \dots, I_\ell\} \dot{\cap} \mathfrak{q}_r$ telle que $\sigma_{dr}^r \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Alors, $\ell = dr'$, pour un certain r' vérifiant $1 \leq r' \leq r$, et l'on a une identification d'espaces munis d'actions

$$(\sigma_{dr}^r : F_{\mathfrak{p}}(X)) \simeq (\sigma_{dr'}^{r'} : F_{dr'}(X)).$$

Le cardinal de l'ensemble de telles partitions \mathfrak{p} est

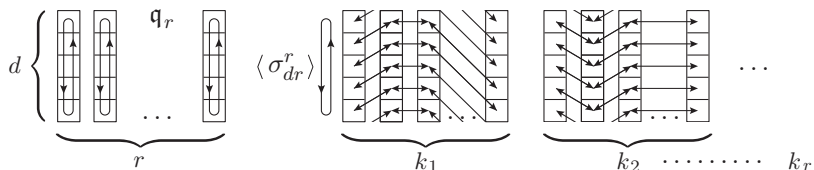
$$\left| (\mathfrak{q}^{\dot{\cap}} \cap \mathfrak{P}_{dr'}(dr))^{\sigma_{dr}^r} \right| = \left\{ \begin{matrix} r \\ r' \end{matrix} \right\} d^{(r-r')}.$$

Démonstration. – Commençons par remarquer qu'une partition $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(dr)$ vérifie $\sigma^r \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ si et seulement si la relation $\sim_{\mathfrak{p}}$ est « $\langle \sigma^r \rangle$ -équivariante », c'est-à-dire :

$$i \sim_{\mathfrak{p}} j \Rightarrow \sigma^{ra}(i) \sim_{\mathfrak{p}} \sigma^{ra}(j), \quad \forall a \in \mathbb{N}.$$

L'illustration ci-dessous représente, sur la partie gauche, la partition \mathfrak{q}_r . Chaque colonne étant l'une des parties de \mathfrak{q}_r , est remplie d'indices i de $\llbracket 1, dr \rrbracket$ pour lesquels les coordonnées x_i de $\bar{x} \in F^q$ sont deux à deux distinctes. Le cycle à l'intérieur des colonnes rappelle l'action simplement transitive du groupe $\langle \sigma^r \rangle$ sur chacune d'elles.

Sur la partie droite, on représente, à l'aide de flèches, les identifications définies par l'équivalence $\sim_{\mathfrak{p}}$. Il faut remarquer le parallélisme des flèches dans le sens vertical qui reflète la σ^r -équivariance de $\sim_{\mathfrak{p}}$.



Les regroupements $k_1, k_2, \dots, k_{r'}$ sont tels que $r = \sum_i k_i$. On voit donc bien qu'au final on a $F_{\mathfrak{p}} \simeq F_{dr'}$ et que l'action $\sigma_{dr}^r : F_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\sigma_{dr'}^{r'} : F_{dr'}$.

La partie de droite de la figure permet aussi de comprendre que pour chaque partition de l'ensemble \mathfrak{q}_r en r' parties non vides de cardinaux k_i , les différentes manières de définir les partitions $\mathfrak{p} \in (\mathfrak{q}^{\dot{\cap}})^{\sigma_{dr}^r}$ pour les regroupements k_i sont en bijection avec les différentes manières de dessiner les flèches, au nombre $d^{k_1-1} d^{k_2-1} \dots d^{k_{r'}-1} = d^{r-r'}$, qui seul dépend de r' et pas de la suite $(k_1, \dots, k_{r'})$. La proposition en découle. \square

THÉORÈME 10.4.3. – Soit X un espace i -acyclique. Pour tous $d, r \geq 1 \in \mathbb{N}$, la série de traces de l'action de σ_{dr}^r sur $H_c(F_{dr}(X))$ vérifie l'égalité :

$$\frac{\chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r,$$

soit

$$\boxed{\frac{\chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \right)^r},$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^z$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. – Dans la formule de l'introduction 10.4.1 :

$$\left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d} \right)^r = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{dr-a} F^{qr}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{T^{dr-a}},$$

nous pouvons maintenant préciser le membre de droite. Par 10.4.2, on a

$$\begin{cases} \chi_c(\Delta_\ell F^{qr}(X))(\sigma_{dr}^r, T) = 0, & \text{si } d \nmid \ell, \\ \chi_c(\Delta_{dr'} F^{qr}(X))(\sigma_{dr'}^r, T) = \{r'\} d^{(r-r')} \chi_c(F_{dr'}(X))(\sigma_{dr'}^{r'}, T). \end{cases}$$

En substituant les expressions, on obtient, pour tout $r \geq 1$,

$$\left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{(dT)^d} \right)^r = \sum_{r' \geq 1} \{r'\} \frac{\chi_c(F_{dr'}(X))(\sigma_{dr'}^{r'}, T)}{(dT^d)^{r'}},$$

soit, en écriture vectorielle,

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^1 \\ \vdots \\ \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r \end{pmatrix} = (\{i_j\}) \begin{pmatrix} \frac{\chi_c(F_{d \cdot 1}(X))(\sigma_{d \cdot 1}^1, T)}{(dT^d)^1} \\ \vdots \\ \frac{\chi_c(F_{d \cdot r}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} \end{pmatrix}.$$

La matrice $(\{i_j\})$ est la matrice des nombres de Stirling de deuxième espèce ($\underline{S}(i, j)$) (proposition 14.4.1). Son inverse est la matrice des nombres de Stirling de première espèce signés ($\underline{s}(i, j)$). Cette matrice est aussi la matrice de changement d'un système de puissances (X^1, \dots, X^r) vers un système de factorielles décroissantes $(X^{\underline{1}}, \dots, X^{\underline{r}})$ (cf. remarques 14.3.3), donc :

$$\frac{\chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r, T)}{(dT^d)^r} = \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r.$$

Le théorème découle alors de l'égalité du théorème 10.3.2 qui donne :

$$\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e}. \quad \square$$

10.4.4. Remarque pour X^m . – La remarque de l'introduction 10.4.1 est la même pour l'espace X^m , mais en plus simple. On a clairement l'égalité⁽⁶³⁾ :

$$\chi_c(X^{dr})(\sigma_{dr}^r, T) = \chi_c(X)(\mathbf{1}, T^d)^r.$$

Aussi, l'analogie du dernier théorème 10.4.3 pour l'espace X^m est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^z$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au terme d'indice $e := d$.

⁽⁶³⁾ Cf. remarque 10.3.3, mais aussi [27] (eq. 4.5).

10.5. Séries des traces pour une permutation générale

10.5.1. Permutations immiscibles. – À une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on associe la partition \mathfrak{p}_α de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en $\langle \alpha \rangle$ -orbites. Les cardinaux des $\langle \alpha \rangle$ -orbites définissent une décomposition de m que l'on note $\lambda(\alpha) = (1^{X_1(\alpha)}, 2^{X_2(\alpha)}, \dots, m^{X_m(\alpha)})$, ce qui signifie le fait qu'il y a exactement $X_i(\alpha)$ orbites de cardinal i .

Étant données deux parties non vides I et J de $\llbracket 1, m \rrbracket$ et deux permutations $\alpha \in \mathcal{S}_I$ et $\beta \in \mathcal{S}_J$ (voir 3.4.3), on dit qu'elles sont « immiscibles », si l'on a $\sum_i X_i(\alpha)X_i(\beta) = 0$, autrement dit, si les orbites de $\langle \alpha \rangle$ dans I ont toutes des cardinaux différents de celles de $\langle \beta \rangle$ dans J .

PROPOSITION 10.5.2. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Pour toute partition $\mathfrak{q} := \{J_1, \dots, J_r\} \in \mathfrak{P}(m)$, et toute famille de permutations $\{\alpha_i \in \mathcal{S}_{J_i}\}_{i=1, \dots, r}$ deux à deux immiscibles, on a

$$\chi_c(F_m(X))(\alpha, T) = \prod_{i=1}^r \chi_c(F_{|J_i|}(X))(\alpha_i, T),$$

où α désigne le recollement des α_i et où, dans les terme de droite, nous avons identifié le support J_i de α_i avec l'intervalle $\llbracket 1, |J_i| \rrbracket$.

Démonstration. – Grâce au complexe fondamental de $F^q(X)$, pour $\ell = m$ et pour α le recollement des α_i , on a l'égalité (théorème 10.2.1)

$$\frac{\chi_c(F^q)(\alpha, T)}{T^m} = \sum_{a \geq 0} \frac{\chi_c(\Delta_{m-a} F^q(X))(\alpha, T)}{T^{m-a}},$$

où, dans le premier membre, on a clairement

$$\chi_c(F^q)(\alpha, T) = \prod_{i=1}^r \chi_c(F_{|J_i|}(X))(\alpha_i, T).$$

Dans le second membre, pour $a = 0$, on a bien

$$\chi_c(\Delta_m F^q(X))(\alpha, T) = \chi_c(F_m(X))(\alpha, T),$$

ce qui nous emmène à montrer que pour tout $a \geq 1$, on a

$$(4) \quad \chi_c(\Delta_{m-a} F^q(X))(\alpha, T) = 0.$$

Or, d'après 3.4.5, on a la décomposition en sous-espaces ouverts

$$\Delta_\ell F^q(X) := \prod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m), \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{q}} F_{\mathfrak{p}}(X),$$

et la série de traces de α pour $\Delta_\ell F^q$ est concentrée sur les espaces $F_{\mathfrak{p}}$ correspondants aux partitions \mathfrak{p} vérifiant, de plus, $\alpha \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, donc, telles que

$$(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j) \implies (\alpha^r i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} \alpha^r j).$$

Maintenant, s'il existait une telle partition pour $\ell < m$, on aurait un certain couple $(i \neq j)$ vérifiant $(i \underset{\mathfrak{p}}{\sim} j)$, auquel cas, par transversalité, on aurait $(i \not\underset{\mathfrak{q}}{\sim} j)$ et il existerait

des parties $J_a \neq J_b$ de \mathfrak{q} telles que $i \in J_a$ et $j \in J_b$. En particulier, les orbites $\langle \alpha \rangle \cdot i = \langle \alpha_a \rangle \cdot i$ et $\langle \alpha \rangle \cdot j = \langle \alpha_b \rangle \cdot j$ seraient de cardinaux différents puisque α_a et α_b sont immiscibles. Si $\epsilon := \text{ord}(\alpha_a) < \text{ord}(\alpha_b)$, on aurait

$$(i \sim_{\mathfrak{p}} j) \text{ et } (i = \alpha_a^\epsilon i \sim_{\mathfrak{p}} \alpha_b^\epsilon j), \text{ et donc } (j \sim_{\mathfrak{p}} \alpha_b^\epsilon j),$$

avec $\alpha_b^\epsilon j \neq j$, et ceci contredirait la transversalité de \mathfrak{p} et \mathfrak{q} puisque $(j \sim_{\mathfrak{q}} \alpha^\epsilon j)$.

L'égalité (4) se trouve ainsi justifiée et la proposition en résulte. □

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

THÉORÈME 10.5.3. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Étant donné une permutation $\alpha \in \mathcal{S}_m$, soit $\lambda(\alpha) = (1^{X_1}, 2^{X_2}, \dots, m^{X_m})$ la décomposition de m déterminée par la partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en $\langle \alpha \rangle$ -orbites. Alors,

$$\boxed{\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{d=1}^m d^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^e)}{dT^e} \right)^{X_d}},$$

où μ est la fonction de Möbius et $(_)^x$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. – Pour chaque $d = 1, 2, \dots, m$, notons J_d la réunion des $\langle \alpha \rangle$ -orbites de $\llbracket 1, m \rrbracket$ qui sont de cardinal d . Notons \mathfrak{q} la partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$ définie par les parties J_d non vides, i.e. telles que $X_d \neq 0$.

Pour chaque $J \in \mathfrak{q}$, notons α_J la restriction de α à J . On a $\alpha \in \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}$, et ses différentes composantes α_J sont deux à deux immiscibles. On peut donc appliquer la proposition 10.5.2 à la partition \mathfrak{q} et à la permutation α . On obtient l'égalité

$$(5) \quad \frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{T^m} = \prod_{J \in \mathfrak{q}} \frac{\chi_c(F_{|J|}(X))(\alpha_J, T)}{T^{|J|}}.$$

Maintenant, comme une partie $J_d \in \mathfrak{q}$ est la réunion de X_d orbites de cardinal d , l'action de α sur J_d est équivalente à l'action de $\sigma_{dX_d}^{X_d}$ sur $\llbracket 1, dX_d \rrbracket$ et chaque terme du produit dans (5) est, d'après 10.4.3,

$$\frac{\chi_c(F_{dX_d}(X))(\sigma_{dX_d}^{X_d}, T)}{T^{dX_d}} = d^{X_d} \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^{X_d}.$$

Le théorème résulte alors du fait de remarquer que dans le produit de la formule à démontrer, les termes d'indices d tels que $X_d = 0$ sont tous égaux à 1. □

10.5.4. Remarque pour X^m . – Tout comme dans les remarques 10.3.3 et 10.4.4, l'analogie du dernier théorème 10.5.3 pour l'espace X^m est donné par la même formule où $(_)^e$ est remplacée par $(_)^r$ et où la sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$ (cf. aussi [27] (eq. 4.5)). On a donc pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ avec $\lambda(\alpha) = (1^{X_1}, 2^{X_2}, \dots, m^{X_m})$:

$$\chi_c(X^m)(\alpha, T) = \prod_{d=1}^m d^{X_d} \chi_c(X)(\mathbf{1}, T^d)^{X_d}.$$

10.6. Comparaison entre $\chi_c(F_m(X))$ et $\chi_c(F_m(X \setminus \mathbf{a}))$

Pour $\alpha \in \mathfrak{S}_m$, notons $\lambda(\alpha) = (1^{X_1(\alpha)}, 2^{X_2(\alpha)}, \dots) \vdash m$ son type. Le coefficient $X_1(\alpha)$ est le cardinal de l'ensemble des α -orbites réduites à un point, autrement dit, de l'ensemble des $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ fixés par α .

10.6.1. Le cas où $X_1(\alpha) = 0$. – On a vu dans le corollaire de 3.1.3 que si X est i -acyclique, on dispose d'une suite exacte courte de \mathfrak{S}_m -modules gradués

$$(6) \quad 0 \rightarrow H_c(F_m^\bullet(X))[-1] \rightarrow H_c(F_m(\dot{X})) \rightarrow H_c(F_m(X)) \rightarrow 0,$$

où $\dot{X} := X \setminus \{\bullet\}$ pour un certain $\bullet \in X$, et où $F_m^\bullet(X)$ est la réunion disjointe des $F_m^{x_i=\bullet}(X) := \{(x_1, \dots, x_m) \in F_m \mid x_i = \bullet\}$ où $i = 1, \dots, m$.

Or, par l'égalité évidente $\alpha(F_m^{x_i=\bullet}) = F_m^{x_{\alpha(i)=\bullet}}$, on voit que si $X_1(\alpha) = 0$, on a $\alpha(F_m^{x_i=\bullet}) \neq (F_m^{x_i=\bullet})$, et donc que $\chi_c(F_m^\bullet(X))(\alpha, T) = 0$. On conclut alors, par l'exactitude de (6), que $\chi_c(F_m(X \setminus 1))(\alpha, T) = \chi_c(F_m(X))(\alpha, T)$, d'où le lemme suivant.

LEMME 10.6.2. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Pour tout $m > 0$ et toute permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ telle que $X_1(\alpha) = 0$, on a

$$\chi_c(F_m(X \setminus \mathbf{a}))(\alpha, T) = \chi_c(F_m(X))(\alpha, T),$$

pour tout $a \in \mathbb{N}$.

REMARQUE 10.6.3. – Ce lemme peut aussi être vérifié en appliquant le théorème 10.5.3. Dans ce cas, il suffit de voir que pour tout $d > 1$ on a

$$\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X \setminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e}.$$

Or, d'après 4.1.5-(c), on a $\chi_c(X \setminus 1)(\mathbf{1}, T) = \chi_c(X)(\mathbf{1}, T) - T$, et alors

$$\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\chi_c(X \setminus 1)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^e)}{T^e} - 1 \right).$$

On conclut puisque, pour $d > 1$, on a $\sum_{e|d} \mu(d/e) = 0$, propriété bien connue de la fonction de Möbius.

10.6.4. Le cas général. – Pour $\alpha \in \mathfrak{S}_m$, notons $I := \{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \mid \alpha(i) = i\}$ et $J := \llbracket 1, m \rrbracket \setminus I$. Les permutations $\text{id}_I \in \mathfrak{S}_I$ et $\alpha|_J \in \mathfrak{S}_J$ sont clairement immiscibles et on peut appliquer 10.5.2. On a

$$\chi_c(F_m(X))(\alpha, T) = \chi_c(F_{|I|}(X))(\mathbf{1}, T) \cdot \chi_c(F_{|J|}(X))(\alpha|_J, T),$$

d'où la proposition suivante.

PROPOSITION 10.6.5. – *Soit X un espace i -acyclique. On a*

$$\frac{\chi_c(F_m(X))(\alpha, T)}{\left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T}\right)^{\mathbf{X}_1(\alpha)}} = \frac{\chi_c(F_m(X \setminus \mathbf{a}))(\alpha, T)}{\left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T} - a\right)^{\mathbf{X}_1(\alpha)}}.$$

10.7. Comparaison entre $\chi_c(F_{b+a}(X))$ et $\chi_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})) \cdot \chi_c(F_a(X))$

Dans la section 12, nous allons étudier de près les fibrations $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ de fibre $F_b(X \setminus \mathbf{a})$. Le théorème 12.4.9 établira que lorsque X est i -acyclique, la suite spectrale de Leray associée à π_a est dégénérée ($d_r = 0$, pour $r \geq 2$), auquel cas on a un isomorphisme

$$H_c(F_{b+a}(X)) \sim H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})) \otimes H_c(F_a(X)).$$

Notons \mathfrak{S}_a (resp. \mathfrak{S}_b) le sous-groupe des permutations $\alpha \in \mathfrak{S}_{b+a}$ telles que $\alpha(i) = i$ pour tout $i \leq b$ (resp. $b < i$). Le groupe \mathfrak{S}_a agit sur la base $F_a(X)$, et le groupe \mathfrak{S}_b sur la fibre $F_b(X \setminus \mathbf{a})$.

La proposition suivante montre qu'il n'est généralement pas vrai que le caractère de $\mathfrak{S}_b \times \mathfrak{S}_a$ sur $H_c(F_{b+a})$ soit le produit des deux autres caractères, i.e. *on n'a pas*, pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{S}_b \times \mathfrak{S}_a$, l'égalité :

$$(7) \quad \chi_c(F_{b+a}(X))((\beta, \alpha), T) = \chi_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))(\beta, T) \cdot \chi_c(F_a(X))(\alpha, T).$$

PROPOSITION 10.7.1. – *Soit X un espace i -acyclique.*

- (a) *Pour $d > 1$ et $r > r' \geq 1$, et pour $\pi : F_{dr}(X) \rightarrow F_{dr'}(X)$ la projection sur la réunion de r' orbites de $\langle \sigma_{dr}^r \rangle$. On a*

$$\begin{aligned} \chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r) &= (dT^d)^r Q_d(X)^r \\ \chi_c(F_b(X \setminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''}) \cdot \chi_c(F_{dr'}(X))(\sigma_{dr'}^{r'}) &= (dT^d)^r Q_d(X)^{r''} \cdot Q_d(X)^{r'}, \\ \text{où } r'' &:= r - r' \text{ et } Q_d(X) := \chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)/(dT^d). \end{aligned}$$

Dans cette situation, l'égalité (7) n'est donc jamais vérifiée.

- (b) *Pour $a, b \geq 1$. On a pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_a$,*

$$\begin{aligned} \chi_c(F_{b+a}(X))(\mathbf{1}_b \times \alpha, T) &= T^{b+a} Q_1^{b+\mathbf{X}_1(\alpha)} \cdot R \\ \chi_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))(\mathbf{1}_b, T) \cdot \chi_c(F_a(X))(\alpha, T) &= T^{b+a} (Q_1 - a)^b \cdot Q_1^{\mathbf{X}_1(\alpha)} \cdot R, \\ \text{où } Q_1 &:= (\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)/T) \text{ et } R := \chi_c(F_{b+a}(X))(\alpha', T)/T^{b+a} \text{ avec } \alpha' \text{ tel} \\ &\text{que } \mathbf{X}_1(\alpha') = 0 \text{ et } \mathbf{X}_i(\alpha') = \mathbf{X}_i(\alpha) \text{ pour les autres indices } i. \end{aligned}$$

Dans cette situation, la formule (7) est vérifiée si et seulement si $\alpha = \mathbf{1}_a$.

Démonstration. – (a) La fibre de π étant $F_{dr''}(X \setminus dr')$, on a par 10.4.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_c(F_{dr}(X))(\sigma_{dr}^r, T) = (dT^d)^r Q_d(X)^r \\ \chi_c(F_{dr'}(X))(\sigma_{dr'}^{r'}, T) = (dT^d)^{r'} Q_d(X)^{r'} \\ \chi_c(F_{dr''}(X \setminus dr'))(\sigma_{dr''}^{r''}, T) = (dT^d)^{r''} Q_d(X \setminus dr')^{r''}, \end{array} \right.$$

où, dans la troisième égalité on a $Q_d(X \setminus dr') = Q_d(X)$, d'après 10.6.2.

(b) Les égalités résultent aussitôt de 10.5.3. L'égalité (7) est vérifiée si et seulement si

$$Q_1^{b+X_1(\alpha)} = (Q_1 - a)^b \cdot Q_1^{X_1(\alpha)}$$

et la conclusion résulte de ce que $Q_1^{b+X_1(\alpha)} = Q_1^{X_1(\alpha)} \cdot (Q_1 - X_1(\alpha))^b$. \square

PROPOSITION 10.7.2. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Si α et β sont immiscibles et si $X_1(\beta) = 0$, l'égalité (7) est vérifiée.

Démonstration. – Conséquence du théorème 10.5.3 et du lemme 10.6.2. \square

CHAPITRE 11

QUOTIENTS D'ESPACES DE CONFIGURATION GÉNÉRALISÉS

La possibilité d'un algorithme de calcul des caractères de \mathfrak{S}_m -modules $H_c^i(\Delta_\ell X^m)$ donnée par le théorème 5.3.3 et évoquée dans la remarque 5.3.4, ouvre la porte à la détermination des polynômes de Poincaré de la cohomologie des espaces d'orbites $(\Delta_{\ell} X^m)/H$ où H est un sous-groupe de \mathfrak{S}_m .

11.1. Polynômes de Poincaré de $(\Delta_{\ell} X^m)/H$

L'énoncé bien connu suivant rappelle le lien entre le polynôme de Poincaré des quotients et les séries de caractères.

PROPOSITION 11.1.1. – *Soit Z un espace tel que $\dim(H_c(Z)) < +\infty$, muni d'une action de \mathfrak{S}_m . Pour tout sous-groupe $H \subseteq \mathfrak{S}_m$, on a*

$$\begin{aligned} P_c(Z/H)(-T) &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_c(Z)(h, T) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_m} \chi_c(Z)(g, T) \cdot \chi(\text{ind}_H^{\mathfrak{S}_m} \mathbf{1})(g) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{\lambda} h_{\lambda} \chi_c(Z)(g_{\lambda}, T) \cdot \chi(\text{ind}_H^{\mathfrak{S}_m} \mathbf{1})(g_{\lambda}), \end{aligned}$$

où la sommation est indexée par les décompositions $\lambda = \{1^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, m^{x_m}\}$ de m , le nombre h_{λ} est le cardinal de l'ensemble $\pi(\lambda)$ des permutations dont la décomposition en cycles disjoints est de type λ , l'élément g_{λ} est alors un représentant de $\pi(\lambda)$.

Démonstration. – Un théorème classique de Grothendieck ([23])⁽⁶⁴⁾ donne l'équivalence $H_c^i(Z/H) = H_c^i(Z)^H$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\mathcal{P}_c(Z/H)(-T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \text{tr}(h : H_c^i(Z)) \right) (-T)^i = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi_c(Z)(h, T).$$

Les autres égalités sont classiques (cf. [27] eq. (6.1) et (6.2)). □

⁽⁶⁴⁾ *Loc.cit.* théorème 5.3.1 et corollaire de la proposition 5.2.3.

11.1.2. Commentaire. – Lorsque l'espace X est i -acyclique, cette proposition et l'explicitation des séries de caractères des \mathcal{S}_m -modules $H_c(F_m(X))$ du théorème 10.5.3, donnent des formules très explicites des polynômes de Poincaré pour les espaces de configurations cycliques et non-ordonnées associés à $F_m(X)$, ce qui constitue le sujet des deux sections suivantes.

11.2. Espace de configurations cycliques $CF_m(X)$

Soit C_m le sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par le cycle $\sigma_m := (1, \dots, m)$. L'« espace de configurations cycliques de X », noté $CF_m(X)$, est l'espace

$$CF_m(X) := F_m(X)/C_m.$$

THÉORÈME 11.2.1. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}_c(CF_m)(-T) = \frac{T^m}{m} \sum_{d|m} \phi(d) d^{m/d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{m/d},$$

où $\phi(_)$ est la fonction indicatrice d'Euler, $\mu(_)$ est la fonction de Möbius et $(_)^r$ est la factorielle décroissante de 14.1.

Démonstration. – Par 11.1.1, on a

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{dr=m} \phi(d) \frac{\chi_c(F_m)(\sigma_m^r, T)}{T^m}.$$

Par 10.4.3, on a alors

$$\frac{\mathcal{P}_c(CF_m)(-T)}{T^m} = \frac{1}{m} \sum_{dr=m} \phi(d) d^r \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^r$$

et la proposition résulte de l'égalité 10.3.2 :

$$\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{T^d} = \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{T^e}. \quad \square$$

REMARQUE 11.2.2. – Un cas particulier de la proposition précédente est lorsque m est un nombre premier p . Dans ce cas, on a simplement

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}_c(CF_p)(-T)}{T^p} &= \frac{1}{p} \left(\frac{\chi_c(F_p)(\mathbf{1}, T)}{T^p} + (p-1) \frac{\chi_c(F_p)(\sigma_p, T)}{T^p} \right) \\ &= \frac{1}{p} \left(\left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T} \right)^p + (p-1) \left(\frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T^p)}{T^p} - \frac{\chi_c(X)(\mathbf{1}, T)}{T} \right) \right), \end{aligned}$$

où l'on remarquera que si nous notons $Q(T) := \chi_c(X)(\mathbf{1}, T)/T$, la dernière expression entre les grandes parenthèses est

$$Q(T)^p + (p-1)(Q(T^p) - Q(T)),$$

qui est nulle modulo p puisque l'on a

$$Q(T)^p \equiv_p Q(T)^p - Q(T) \equiv_p Q(T^p) - Q(T).$$

REMARQUE 11.2.3. – En suivant la méthode décrite dans [27], la proposition résulte également comme application de la troisième égalité de 11.1.1. Dans ce cas, $\chi(\text{ind}_{C_m}^{\mathcal{S}_m})(g_\lambda) \neq 0$ si et seulement si g_λ est conjuguée à $\sigma_m^{m/d}$ pour un certain $d \mid m$, auquel cas

$$\lambda = \{d^{m/d}\}, \quad h_\lambda = \frac{m!}{d^{m/d}}, \quad g_\lambda := \sigma_m^{m/d}, \quad \chi(\text{ind}_{C_m}^{\mathcal{S}_m})(g_\lambda) = \phi(d) \frac{d^{m/d}}{m},$$

d'où

$$\mathcal{P}_c(CF_m(X))(-T) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \phi(d) \chi_c(F_m(X))(\sigma_m^{m/d}, T)$$

et la conclusion suit par application de 10.5.3 à la décomposition λ en question, ce qui donne

$$\chi_c(F_m(X))(\sigma_m^{m/d}, T) = T^m d^{m/d} \left(\frac{\chi_c(F_d(X))(\sigma_d, T)}{dT^d} \right)^{m/d}.$$

REMARQUE 11.2.4 (pour X^m). – En accord avec la remarque 10.5.4, l'analogie du théorème 11.2.1 pour le produit cyclique $X[m] := X^m/C_m$ ⁽⁶⁵⁾ est donné par la même formule où la factorielle décroissante $(_)^z$ est remplacée par la puissance $(_)^r$ et où la deuxième sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\mathcal{P}_c(X[m])(T) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \phi(d) \mathcal{P}_c(X)((-1)^{d+1} T^d)^{m/d},$$

qui est très précisément la formule (8.4) de [27].

11.3. Espace de configuration non-ordonné $BF_m(X)$

On appelle « espace de configurations non-ordonnées de X », noté $BF_m(X)$, l'espace

$$BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m.$$

THÉORÈME 11.3.1. – Soit X un espace i -acyclique.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\mathcal{P}_c(BF_m(X))(-T)}{T^m} = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda := (1^{x_1}, \dots, m^{x_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^m d^{x_d} \left(\sum_{e \mid d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(X)(-T^e)}{dT^e} \right)^{x_d},$$

⁽⁶⁵⁾ Notation de MacDonalld [27] p. 568.

où $\mu(_)$ est la fonction de Möbius, $(_)^x$ est la factorielle décroissante (cf. 14.1), et h_λ est le cardinal de l'ensemble des permutations de \mathcal{S}_m dont la décomposition en cycles disjoints est de type $\lambda := (1^{X_1}, \dots, m^{X_m}) \vdash m$, soit :

$$h_\lambda = \frac{m!}{X_1! X_2! \dots X_m! (1!)^{X_1} (2!)^{X_2} \dots (m!)^{X_m}}.$$

Démonstration. – Corollaire immédiat de la troisième formule de 11.1.1 modulo le calcul de séries de traces de 10.5.3. La valeur de h_λ est classique et bien connue (cf. Andrews [1] thm. 13.2, p. 215). □

REMARQUE 11.3.2 (pour X^m). – Comme pour les autres remarques concernant X^m , l'analogue de 11.3.1 pour le produit symétrique $X(m) := X^m/\mathcal{S}_m$ ([27] p. 568) est donné par la même formule où $(_)^x$ est remplacé par $(_)^r$ et où la deuxième sommation est restreinte au seul terme d'indice $e := d$. On a donc :

$$\mathcal{P}_c(X(m))(T) = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda:=(1^{X_1}, \dots, m^{X_m}) \vdash m} h_\lambda \prod_{d=1}^m \mathcal{P}_c(X)((-1)^{d+1} T^d)^{X_d},$$

qui est très précisément la formule (8.3) de [27]. À ce sujet, on rappelle que Macdonald en a donné une très belle fonction génératrice (*loc. cit.* eq (8.5)) : le k -ième coefficient de $\mathcal{P}_c(X(m))$ est le coefficient en $x^k t^m$ du développement en série entière de

$$\frac{(1 + xt)^{\beta_1} (1 + x^3 t)^{\beta_3} \dots}{(1 - t)^{\beta_0} (1 - x^2 t)^{\beta_2} (1 - x^4 t)^{\beta_4} \dots},$$

où β_k est le k -ième coefficient de $\mathcal{P}_c(X)$.

Nous ne connaissons pas de résultat semblable pour $\mathcal{P}_c(BF_m(X))$. La difficulté, par rapport à l'approche de Macdonald, réside dans les factorielles décroissantes.

11.3.3. Commentaire. – Conformément au théorème 9.2.4 de monotonie et stabilité des familles $\{\mathcal{S}_m : H_{\text{BM}}^i(F_m(X))\}_m$, lorsque $d_X \geq 2$, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ fixé, la famille de polynômes de Poincaré

$$(1) \quad \left\{ \mathcal{P}_c(BF_m(X))(1/T) \cdot T^{md_M} \pmod{T^{i+1}} \right\}_m$$

est stationnaire. C'est un phénomène qui n'est pas apparent à la lecture de la formule 11.3.1. Cela nous a intrigué et nous a conduit à la rédaction de la section suivante où nous déterminons bien plus précisément le rang de stabilité de la famille de nombres $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$. On y procède en deux temps. D'abord lorsque M est un espace i -acyclique X , par le théorème 11.5.3 qui résulte de l'étude du coefficient de T^i dans développement de la série $(1/m!) \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_m} \chi_{\text{BM}}(F_m(X))(\alpha, T)$ d'après 10.5.3. Ensuite, lorsque M est général, à l'aide des suites spectrales basiques. Ce faisant, nous obtenons la proposition 11.6.1 qui est une importante amélioration de l'estimation de la plage de stabilité de la famille de nombres (1) puisque l'on passe de $\{m \geq 4i\}$ à $\{m \geq 2i\}$ si $d_M = 2$, et de $\{m \geq 2i\}$ à $\{m \geq i\}$ si $d_M \geq 3$. Cette dernière proposition généralise les théorèmes A et B de Randal-Williams [32], mais

aussi le corollaire 3 de Church ([9], p. 470) valables seulement lorsque M est une variété topologique. ⁽⁶⁶⁾

11.4. Sur le rang de stabilité de la famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$

11.4.1. Rang de stabilité des caractères polynomiaux. – Dans 7.3.1, nous avons rappelé la notion de polynomialité d’une famille de caractères $\{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$. Nous y avons introduit la fonction $X_i : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{N}$ qui fait correspondre à $\alpha \in \mathcal{S}_m$ le nombre $X_i(\alpha)$ de cycles de longueur i dans la décomposition de $\alpha \in \mathcal{S}_m$ comme produit de cycles disjoints.

11.4.2. Polynomialité des fonctions centrales. – Pour $m \geq 0$, on note $\mathbb{Q}_{\text{cl}}(\mathcal{S}_m)$ la \mathbb{Q} -algèbre des fonctions $f : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{Q}$ dites centrales, i.e. constantes sur chaque classe de conjugaison de \mathcal{S}_m . On note ensuite

$$\rho_m : k[\overline{X}] := k[X_1, X_2, \dots] \rightarrow \mathbb{Q}_{\text{cl}}(\mathcal{S}_m)$$

l’homomorphisme d’algèbres défini et faisant correspondre à X_i la fonction centrale $\alpha \mapsto X_i(\alpha)$. On a donc

$$\rho_m(X_1^{d_1} X_2^{d_2} \dots X_\ell^{d_\ell})(\alpha) := \prod_k X_k(\alpha)^{d_k}, \quad \forall d_k \in \mathbb{N}.$$

PROPOSITION 11.4.3. – L’homomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres

$$\rho_m : k[\overline{X}] \rightarrow \mathbb{Q}_{\text{cl}}(\mathcal{S}_m)$$

est surjectif et son noyau contient les polynômes :

$$(X_1 + 2X_2 + \dots + mX_m - m) \quad \text{and} \quad (X_i(X_i - 1) \dots (X_i - \lfloor m/i \rfloor)).$$

En particulier, les caractères de \mathcal{S}_m peuvent être représentés par des polynômes à coefficients rationnels en les variables X_1, \dots, X_{m-1} .

Démonstration. – Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, \lfloor m/i \rfloor \rrbracket$, soit le polynôme de $\mathbb{Z}[Z]$:

$$Z_{i,j} := Z(Z-1) \dots (\widehat{Z-j}) \dots (Z - \lfloor m/i \rfloor)$$

et notons

$$Q_{i,j} := Z_{i,j}(X_i) / Z_{i,j}(j) \in k[\overline{X}].$$

On a clairement l’égalité

$$\rho_m(Q_{i,j})(\alpha) = \delta_{X_i(\alpha), j} \text{ (delta de Kronecker).}$$

En particulier, si $\mu = (1^{a_1}, \dots, m^{a_m}) \vdash m$, l’image par ρ_m du polynôme

$$Q_\mu := \prod_{i=1}^m Q_{i, a_i}$$

⁽⁶⁶⁾ Il convient cependant de signaler que pour M une variété topologique de dimension $d_M = 2$, Church améliore encore la plage de stabilité à $\{m > i\}$ ce que nous n’avons pas établi, mais qui est néanmoins accessible avec nos méthodes.

est la fonction caractéristique de l'ensemble des permutations de type μ . \square

11.4.4. La graduation $\underline{\deg}$ de $k[\overline{X}]$. – Il s'agit de la graduation des polynômes dans l'algèbre $k[\overline{X}] := k[X_1, X_2, \dots]$ qui résulte du fait de poser $\underline{\deg} X_i = i$.

PROPOSITION 11.4.5. – Pour $P \in k[X_1, \dots, X_\ell]$, la famille de nombres

$$\left\{ \frac{1}{m!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_m} P(X_1(\alpha), \dots, X_\ell(\alpha)) \right\}_m$$

est constante pour $m \geq \underline{\deg}(P)$.

Démonstration. – Il suffit de le prouver pour les monômes $P := X_1^{d_1} X_2^{d_2} \dots X_\ell^{d_\ell}$, où $\underline{\deg}(P) > 0$, vu que pour $P = 1$ la proposition est évidente.

On introduit les ensembles $\mathcal{C}_i(m)$, pour $1 \leq i \leq m$.

On pose $\mathcal{C}_1(m) := \llbracket 1, m \rrbracket$, et, pour $i > 1$, on pose $\mathcal{C}_i(m) :=$ le sous-ensemble de \mathcal{S}_m des i -cycles. On fait agir \mathcal{S}_m sur $\mathcal{C}_1(m)$ par son action naturelle et sur $\mathcal{C}_i(m)$ par conjugaison, $\alpha \cdot \gamma := \alpha \gamma \alpha^{-1}$. On note ensuite $\mathcal{E}_i(m)$ le $k[\mathcal{S}_m]$ -module engendré par les éléments de $\mathcal{C}_i(m)$, et l'on note

$$\mathcal{E}_P(m) := \mathcal{E}_1(m)^{\otimes d_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_\ell(m)^{\otimes d_\ell},$$

muni de sa structure de \mathcal{S}_m -module produit tensoriel de représentations.

(A) *Rang de stabilité de $\dim_k(\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m})$.* – L'espace $\mathcal{E}_P(m)$ a une base paramétrée par l'ensemble de $\underline{\deg}(P)$ -uplets

$$\mathcal{C}_P(m) := \{(\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,d_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,d_2}, \dots, \gamma_{\ell,1}, \dots, \gamma_{\ell,d_\ell})\},$$

où $\gamma_{i,j} \in \mathcal{C}_i(m)$, de sorte que le sous-espace $\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m}$ admet une base paramétrée par l'ensemble $\mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m$ des orbites de l'action \mathcal{S}_m sur $\mathcal{C}_P(m)$.

L'inclusion canonique $\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{S}_{m+1}$ induit des inclusions $\mathcal{C}_P(m) \subseteq \mathcal{C}_P(m+1)$, et donc $\mathcal{E}_P(m) \subseteq \mathcal{E}_P(m+1)$, compatibles aux actions des groupes symétriques. On vérifie alors aisément que les applications induites

$$(2) \quad \mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m \subseteq \mathcal{C}_P(m+1)/\mathcal{S}_{m+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m} \subseteq \mathcal{E}_P(m+1)^{\mathcal{S}_{m+1}}$$

sont injectives.

Maintenant, pour $i > 1$ et $\gamma \in \mathcal{C}_i(m)$, notons $|\gamma|$ le « support de γ », i.e. l'ensemble des $x \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $\gamma(x) \neq x$, et pour $i = 1$ et $\gamma \in \mathcal{C}_1(m)$, notons plus simplement $|\gamma| = \{\gamma\}$. Avec ces conventions, on définit le support de $\bar{\gamma} = (\gamma_{i,j}) \in \mathcal{C}_P(m)$ par $|\bar{\gamma}| := \bigcup_{i,j} |\gamma_{i,j}|$, où la réunion est paramétrée par les couples (i, j) tels que $d_i \geq 1$ et $1 \leq j \leq d_i$.

Le support de $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_P(m)$ vérifie $\#(|\bar{\gamma}|) \leq \underline{\deg}(P)$. Lorsque $m \geq \underline{\deg}(P)$, on peut trouver, pour $\bar{\gamma}$ donné, un élément $\alpha \in \mathcal{S}_{m+1}$ tel que $|\alpha \cdot \bar{\gamma}| \subseteq \llbracket 1, \underline{\deg}(P) \rrbracket$. On vérifie alors que les injections (2) sont bijectives. Par conséquent, le nombre

$$(3) \quad \dim_k(\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m}) = \#(\mathcal{C}_P(m)/\mathcal{S}_m)$$

est indépendant de $m \geq \underline{\deg}(P)$.

(B) *Formule de traces.* – Notons $Y_i : \mathcal{S}_m \rightarrow k$ la fonction centrale définie par

$$Y_i(\alpha) := \text{tr}(\alpha : \mathcal{E}_i(m)).$$

On a

$$(4) \quad \dim_k (\mathcal{E}_P(m)^{\mathcal{S}_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_m} Y_1(\alpha)^{d_1} \cdots Y_\ell(\alpha)^{d_\ell}$$

et la sommation de droite est bien indépendant de $m \geq \text{deg}(P)$, d'après (3).

Nous devons obtenir la même conclusion en remplaçant les Y par des X .

- Pour $i = 1$, on a $Y_1(\alpha) = \text{tr}(\alpha : \mathcal{E}_1(m)) = \mathcal{C}_1(m)^{(\alpha)} = X_1(\alpha)$.
- Pour $i \geq 2$, on a $Y_i(\alpha) = \text{tr}(\alpha : \mathcal{E}_i(m)) = \mathcal{C}_i(m)^{(\alpha)} = \#\{\gamma \in \mathcal{C}_i(m) \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha\}$.

La condition $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ implique que α laisse stable l'ensemble $|\gamma|$ qui va donc se décomposer en réunion disjointe de cycles de α , tous de la même longueur puisque γ agit transitivement sur son support. Il s'ensuit que les éléments de $\mathcal{C}_i(m)^{(\alpha)}$ sont les i -cycles de \mathcal{S}_m obtenus, pour chaque $d \mid i$, en concaténant i/d cycles distincts de α de longueur d . On en déduit l'égalité

$$(5) \quad Y_i(\alpha) = \phi(i) X_i(\alpha) + \sum_{d \mid i, d < i} \phi(d) \frac{d^{(i/d)}}{i} X_d(\alpha)^{i/d},$$

où ϕ est l'indicatrice d'Euler. Il convient de remarquer que dans le membre de droite tous les termes sont de degré deg majoré par i , et que ceux après le signe somme ne concernent que des variables X_j avec $j < i$ avec un degré *polynôme* strictement supérieur à 1.

(C) *Conclusion.* – La partie (A) nous dit que la proposition est vraie pour les monômes $Y_1^{d_1} \cdots Y_\ell^{d_\ell}$. Mais, si nous remplaçons chaque Y_i par son expression en termes des X_i de (5), nous avons une somme de termes de la forme

$$Y_1^{d_1} \cdots Y_\ell^{d_\ell} = * X_1^{d_1} \cdots X_\ell^{d_\ell} + \sum * X_1^{r_1} \cdots X_\ell^{r_\ell},$$

avec $\text{deg}(X_1^{r_1} \cdots X_\ell^{r_\ell}) \leq \text{deg}(P)$, mais où le degré polynôme de $X_1^{r_1} \cdots X_\ell^{r_\ell}$ est strictement plus grand que celui de P . Il est donc envisageable de raisonner par récurrence inverse sur le degré *polynôme* des monômes $X_1^{d_1} \cdots X_\ell^{d_\ell}$, ce qui nous fait aboutir au monôme X_1^1 , pour lequel la conclusion résulte de l'égalité $X_1 = Y_1$. □

11.4.6. La série de caractères $\chi_{\text{BM}}(Y)(-, T)$. – De manière analogue à 10.1.3, nous définissons la série des caractères pour la *cohomologie* de Borel-Moore d'un espace Y muni d'une classe fondamentale (cf. définition 6.1.1) et d'une action de \mathcal{S}_m (cf. définition 6.2.1-[ad-4]), par la formule

$$\chi_{\text{BM}}(Y)(\alpha, T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \chi_{H_{\text{BM}}^i(Y)}(\alpha) T^i.$$

Nous avons donné dans 6.2.4.3-(11) l'identification de \mathcal{S}_m -modules

$$H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) = \text{sgn}(_)^{d_M} \otimes H_c^{m d_M - i}(F_m(M); k)^\vee,$$

d'où

$$\chi_{\text{BM}}(F_m(M))(\alpha, T) = (\text{sgn}(\alpha)^{d_M} (-T)^{m d_M}) \chi_c(F_m(M))(\alpha^{-1}, T^{-1}),$$

avec $\text{sgn}(\alpha)^{d_M} (-T)^{m d_M} = \prod_d (-T^d)^{d_M \chi_d(\alpha)}$, d'après un calcul élémentaire.

Maintenant, si M est un espace i -acyclique X , le théorème 10.5.3 et des manipulations simples (cf. remarque 10.1.4), nous conduisent à la formule explicite

$$(6) \quad \chi_{\text{BM}}(F_m(X))(\alpha, T) = \prod_{d=1}^m \left(\frac{(-T^d)^{d_X}}{d^{-1} T^d} \right)^{\chi_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{\mathcal{P}_c(M)(-T^{-e})}{dT^{-e}} \right)^{\chi_d},$$

où ' χ_d ' est un raccourci pour ' $\chi_d(\alpha)$ '.

11.5. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(X))\}_m$, pour X i -acyclique.

La proposition 11.5.2 qui suit, étudie la formule (6) en soi. La formule dépend seulement de la donnée de m et du $(d_X + 1)$ -uplet $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{d_X}) \subseteq \mathbb{Z}^{d_X+1}$ (tel que $\mathcal{P}_c(X) = \sum_i c_i T^i$, donc $c_i := \dim H_c^i(X)$). On notera alors synthétiquement

$$\chi(\mathbf{c})_m := \chi_{\text{BM}}(F_m(X))(\alpha, T).$$

Polynomialité de la famille $\chi^{[i]}(\mathbf{c})$. – Évaluée en $\alpha \in \mathcal{S}_m$, la formule de $\chi(\mathbf{c})_m$ donne le polynôme de $\mathbb{Z}[T, 1/T]$ noté

$$\chi(\mathbf{c})_m(\alpha) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \chi^{[i]}(\mathbf{c})_m(\alpha) T^i,$$

d'où les familles de fonctions centrales $\chi^{[i]}(\mathbf{c}) = \{\chi^{[i]}(\mathbf{c})_m : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{Z}\}_m$.

On dira d'une famille de fonctions centrales $\mathbf{f} = \{f_m : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{Z}\}_m$ qu'elle est « (éventuellement) polynomiale » s'il existe un polynôme $Q_{\mathbf{f}} \in \mathbb{Z}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots]$ tel que $f_m(\alpha) = Q_{\mathbf{f}}(\alpha)$ pour tout m (assez grand) et tout $\alpha \in \mathcal{S}_m$. Un tel $Q_{\mathbf{f}}$ est unique⁽⁶⁷⁾ et le « degré polynôme de \mathbf{f} » est alors celui de $Q_{\mathbf{f}}$. Si $f_m = Q_{\mathbf{f}}$ pour tout $m \geq N$, on dira que « \mathbf{f} est polynomiale sur $\{m \geq N\}$ ».

11.5.1. Critère de polynomialité. – Soit $\mathbf{f}(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell})$ une expression telle que pour tout m , la fonction $f_m(\alpha) := \mathbf{f}(X_{i_1}(\alpha), \dots, X_{i_\ell}(\alpha))$ soit bien définie sur \mathcal{S}_m à valeurs dans \mathbb{Z} . Alors, pour que la famille de fonctions centrales $\mathbf{f} = \{f_m : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{Z}\}$ soit polynomiale sur $\{m \geq N\}$, il est nécessaire que $\mathbf{f}(n_1, \dots, n_\ell)$ soit un polynôme en les entiers $n_j \geq 0$ tels que $\sum_j n_j \cdot i_j \geq N$.

⁽⁶⁷⁾ En effet, si $Q(X_1, \dots, X_\ell) \in \mathbb{Z}[\bar{X}]$ est non nul, il existe $a_i \in \mathbb{N}$ tels que $Q(a_1, \dots, a_\ell) \neq 0$. Il est alors facile de fabriquer des permutations $\alpha_m \in \mathcal{S}_m$, pour tout $m \geq \sum_i a_i i$, telles que $a_i = X_i(\alpha_m)$, auquel cas $Q(\alpha_m) = Q(a_1, \dots, a_\ell)$ et Q n'est pas éventuellement nulle.

Démonstration. – Pour $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_\ell)$, notons $|\mathbf{n}| = \sum_j n_j \cdot i_j$ et choisissons $\sigma(\mathbf{n}) \in \mathcal{S}_{|\mathbf{n}|}$ vérifiant $X_{i_j}(\sigma(\mathbf{n})) = n_j$, pour $1 \leq j \leq \ell$. Alors, si $Q \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ est un polynôme tel que $f_m = Q$ sur tous les \mathcal{S}_m tels que $m \geq N$, on a

$$f(n_1, \dots, n_\ell) = f_{|\mathbf{n}|}(\sigma(\mathbf{n})) = Q(\sigma(\mathbf{n})) = Q'(n_1, \dots, n_\ell),$$

où $Q' \in \mathbb{Z}[Y_1, \dots, Y_\ell]$ est obtenu de Q en posant $Y_j := X_{i_j}$ et en annulant les autres variables. □

Factorielle décroissante modifiée. – On utilisera une extension de la notion de factorielle décroissante (cf. 14.1). Pour a, b dans un anneau et $X \in \mathbb{N}$, on note

$$a^{0*(b)} = 1, \quad \text{et} \quad a^{X*(b)} := a(a-b)(a-2b) \cdots (a-(X-1)b).$$

On a alors : $b^X a^{X*(c)} = (ba)^{X*(bc)}$ et $a^{X+1*(b)} = a^{X*(b)}(a - Xb)$.

PROPOSITION 11.5.2. – *Étant donnés $d_X \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{c} = \{c_0, \dots, c_{d_X}\} \subseteq \mathbb{Z}$, on note $P_{\mathbf{c}}(T) := c_0 + c_1 T + \dots + c_{d_X} T^{d_X}$ et*

$$\chi(\mathbf{c})_m(\bar{X}, T) := \prod_{d=1}^m \left(\frac{(-T^d)^{d_X}}{d^{-1} T^d} \right)^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{P_{\mathbf{c}}(-T^{-e})}{dT^{-e}} \right)^{X_d}.$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $\chi^{[i]}(\mathbf{c})$ est éventuellement polynomiale si et seulement si $c_{d_X} \in \{0, 1\}$. Dans ce cas, on a les propriétés suivantes de $\chi(\mathbf{c})$ en fonction des valeurs possibles de d_X .

d_X	$\chi^{[i]}(c_0, \dots, c_{d_X})$
0	$\underline{\text{deg}} \chi^{[-i]}(c_0 = 1) \leq 2i, \quad \forall i \geq 0$ $\chi^{[-i]}(c_0 = 0)_m = 0, \quad \forall m, \forall i \geq 0$
1	$\chi^{[0]}(c_0 = 0, c_1) = (c_1)^{X_1*(-1)} \prod_{d>1} 0^{X_d*(-d)}$ $\chi^{[i]}(c_0 = 0, c_1)_m = 0, \quad \forall m, \forall i > 0$
2	$\underline{\text{deg}} \chi^{[i]}(c_0, c_1, c_2 = 1) \leq 2i, \quad \forall i \geq 0$ $\chi^{[i]}(c_0, c_1, c_2 = 0)_m = 0, \quad \forall m > i \geq 0$
≥ 3	$\underline{\text{deg}} \chi^{[i]}(c_0, \dots, c_{d_X} = 1) \leq i, \quad \forall i \geq 0$ $\underline{\text{deg}} \chi^{[i]}(c_0, \dots, c_{d_X} = 0) \leq \frac{i}{d_X - 1}, \quad \forall i \geq 0$

Démonstration. – Pour $d \geq 1$, notons

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{Q}_d(\mathbf{c})(X_d, T) := \left(\frac{(-T^d)^{d_X}}{d^{-1} T^d} \right)^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{P_{\mathbf{c}}(-T^{-e})}{dT^{-e}} \right)^{X_d}, \\ \mathcal{R}(\mathbf{c})_d(T) := \left(\frac{(-T^d)^{d_X}}{d^{-1} T^d} \right) \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{P_{\mathbf{c}}(-T^{-e})}{dT^{-e}} \right), \end{cases}$$

de sorte que ⁽⁶⁸⁾

$$(8) \quad \mathcal{Q}_d = (\mathcal{R}_d)^{\underline{X}_d * ((-1)^{d_X} d T^{d(d_X-1)})}.$$

Lorsque l'on évalue \mathcal{Q}_d en $\alpha \in \mathcal{S}_m$, on a $X_d(\alpha) \in \mathbb{N}$ et le développement de la factorielle décroissante génère une série

$$\mathcal{Q}_d(X_d(\alpha), T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_d^{[i]}(X_d(\alpha)) T^i,$$

où $\mathcal{Q}_d^{[i]}$ définit la famille de fonctions centrales $\{\mathcal{S}_m \ni \alpha \mapsto \mathcal{Q}_d^{[i]}(X_d(\alpha)) \in \mathbb{Z}\}_m$.

Le terme $\mathcal{R}_d(\mathbf{c})$ dans (7) vaut, suivant les cas $d = 1$ ou $d > 1$, respectivement

$$(9) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_1(\mathbf{c})(T) = \sum_{0 \leq j \leq d_X} c_j (-T)^{(d_X-j)}, \\ \mathcal{R}_d(\mathbf{c})(T) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq d_X \\ j \neq 1 \\ e|d}} c_j (-1)^{d_X-j} T^{d(d_X-1)-e(j-1)}. \end{cases}$$

Il s'agit de polynômes en $T^{\pm 1}$, en T si $d_X > 0$ et en $1/T$ si $d_X = 0$. Le coefficient du terme constant, i.e. en T^0 , est c_{d_X} , sauf si $d_X = 1$ et $d > 1$ auquel cas il est nul. Ensuite, le premier terme non constant, de la forme $?T^{\epsilon \neq 0}$, varie suivant les situations. Le calcul explicite à partir des formules (9) donne

— Si $d = 1, (\forall d_X) \quad ?T^\epsilon = -c_{d_X-1} T^{\pm 1}$.

— Si $d > 1, \begin{cases} d_X = 0, & ?T^\epsilon = c_0 T^{-d(p-1)/p}, \\ d_X = 1, & ?T^\epsilon = -c_0 \mu(d) T, \\ d_X = 2, & ?T^\epsilon = c_2 T^{d(p-1)/p}, \\ d_X \geq 3, & ?T^\epsilon = -c_{d_X-1} T^d, \end{cases}$

d'où les expressions

$$(10) \quad \begin{cases} \forall d_X, & \mathcal{Q}_1(\mathbf{c}) = (?T^{\pm 1} + c_{d_X})^{\underline{X}_1 * ((-1)^{d_X} T^{d_X-1})}, \\ d_X = 0, & \mathcal{Q}_d(\mathbf{c}) = (?T^{-d(p-1)/p} + c_0)^{\underline{X}_d * (dT^{-d})}, \\ d_X = 1, & \mathcal{Q}_d(\mathbf{c}) = (?T)^{\underline{X}_d * (-d)}, \\ d_X = 2, & \mathcal{Q}_d(\mathbf{c}) = (?T^{d(p-1)/p} + c_2)^{\underline{X}_d * (dT^d)}, \\ d_X \geq 3, & \mathcal{Q}_d(\mathbf{c}) = (?T^d + c_{d_X})^{\underline{X}_d * ((-1)^{d_X} d T^{d(d_X-1)})}, \end{cases}$$

où p désigne le plus petit facteur premier de d .

⁽⁶⁸⁾ On omet d'indiquer l'uplet ' \mathbf{c} ' lorsqu'il est sous-entendu.

Conditions nécessaires à la polynomialité. – En dehors du cas $d_X = 1$ qui pose de problèmes particuliers, dans tous les autres cas, le critère de polynomialité 11.5.1 appliqué aux expressions (10) donne aussitôt la condition

$$\left(\mathcal{Q}_d^{[i]}(\mathbf{c}) \begin{array}{c} \text{est éventuellement} \\ \text{polynomiale} \end{array} \right) \implies \left(c_{d_X} \in \{0, 1\} \right).$$

En effet, c'est déjà clairement la condition pour que $\mathcal{Q}_d^{[0]}(\mathbf{c}) = c_{d_X}^{X_d}$ soit polynomial. Ensuite, par exemple dans les cas $d_X \geq 3$, le terme qui suit est $\mathcal{Q}_d^{[d]} = ? c_{d_X}^{X_d-1} T^d$ où la même condition apparaît, etc.

Le cas $d_X = 1$. – On a $\mathbf{c} = (c_0, c_1)$ et

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(X_1, T) = (-c_0 T + c_1)^{X_1*(-1)}, \\ \mathcal{Q}_d(X_d, T) = \left(-c_0 \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) T^e \right)^{X_d*(-d)}, \text{ si } d > 1. \end{cases}$$

Le critère de polynomialité appliqué à \mathcal{Q}_1 nous emmène à regarder les produits de n facteurs

$$(-c_0 T + c_1)(-c_0 T + c_1 + 1) \cdots (-c_0 T + c_1 + (n-1)).$$

Pour chaque $i > 0$, le coefficient en T^i du produit est $(-c_0)^i (\sum x_1 \cdots x_{n-i})$, où la somme concerne les $(n-i)$ -uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble $\{c_1, c_1 + 1, \dots, c_1 + (n-1)\}$. Une telle somme est donnée par un polynôme en n de degré $n-i+1$, le coefficient en question n'est pas polynomial, sauf évidemment si $c_0 = 0$ auquel cas on a

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1^{[0]}(0, c_1) = c_1^{X_1*(-1)}, \\ \mathcal{Q}_d^{[0]}(0, c_1) = 0^{X_d*(-d)} \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{Q}_d^{[i]}(0, c_1) = 0, \quad \forall i \geq 1, \forall d \geq 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \chi^{[0]}(0, c_1) = c_1^{X_1*(-1)} \left(\prod_{d>1} 0^{X_d*(-1)} \right), \\ \chi^{[i]}(0, c_1) = 0, \quad \forall i > 0. \end{cases}$$

Les cas $d_X \in \{0, 2\}$. – Pour \mathbf{c} respectivement (c_0) et (c_0, c_1, c_2) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_d(c_0) &= \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \frac{c_0}{T^{d-e}} \right)^{X_d*(d/T^d)}, \\ \mathcal{Q}_d(c_0, c_1, c_2) &= \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) (c_0 T^{d+e} + c_1 T^d + c_2 T^{d-e}) \right)^{X_d*(d/T^d)}, \end{aligned}$$

où l'on constate aussitôt l'égalité

$$(11) \quad \mathcal{Q}_d(c_0)(X_d, 1/T) = \mathcal{Q}_d(0, 0, c_0)(X_d, T),$$

qui réduit le cas $d_X = 0$ à un cas particulier de $d_X = 2$.

Pour $d_X = 2$, on a vu dans (10) que l'on a les expressions

$$(12) \quad \begin{cases} \mathcal{Q}_1(\mathbf{c}) = (? T + c_2)^{X_1*(T)}, \\ \mathcal{Q}_d(\mathbf{c}) = (? T^{d((p-1)/p)} + c_2)^{X_d*(dT^d)}, \text{ si } d > 1, \end{cases}$$

où seuls les cas $c_2 \in \{0, 1\}$ nous intéressent.

— Pour $c_2 = 1$, on a $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$. Ensuite, les propriétés élémentaires des factorielles décroissantes dans les expressions (12) justifient les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1(X_1, T) - \mathcal{Q}_1(X_1 - 1, T) &= \mathcal{Q}_1(X_1 - 1, T) (? - (X_1 - 1)) T, \\ \mathcal{Q}_d(X_d, T) - \mathcal{Q}_d(X_d - 1, T) &= \mathcal{Q}_d(X_d - 1, T) (? T^{d((p-1)/p)} - ?(X_d - 1) T^d), \end{aligned}$$

dont on déduit, pour tout $i \geq 1$,

$$(i) \quad \underline{\deg} \mathcal{Q}_1^{[i]} \leq 2 + \underline{\deg} \mathcal{Q}_1^{[i-1]},$$

$$(ii) \quad \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]} \leq d + \sup \left\{ \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d((p-1)/p)]}, d + \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d]} \right\}.$$

On peut alors prouver par induction sur i que l'on a

$$(13) \quad \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]}(c_0, c_1, c_2 = 1) \leq 2i, \quad \forall i \geq 0, \forall d \geq 1.$$

En effet, pour $i = 0$ l'assertion est claire puisque $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$. Ensuite, si l'on suppose $\underline{\deg} \mathcal{Q}_1^{[i-1]} \leq 2(i-1)$, l'égalité (i) donne $\underline{\deg} \mathcal{Q}_1^{[i]} \leq 2i$. Pour $\mathcal{Q}_d^{[i]}$, on remarque que $2i - 2d(p-1)/p \leq 2i - d$, puisque $1/2 \leq (p-1)/p$, et, à l'aide de (ii), on tire

$$\underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]} \leq d + \sup \{ 2i - d, d + 2(i - d) \} = 2i,$$

ce qui prouve (13). Par conséquent,

$$\underline{\deg} \chi^{[i]}(c_0, c_1, c_2 = 1) \leq 2i, \quad \forall i \geq 0,$$

puisque $\chi^{[i]}(\mathbf{c}) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i} \mathcal{Q}^{[i_1]}(\mathbf{c})_1 \mathcal{Q}^{[i_2]}(\mathbf{c})_2 \dots$. On en déduit

$$\underline{\deg} \chi^{[-i]}(c_0 = 1) \leq 2i, \quad \forall i \geq 0,$$

grâce à l'égalité (11).

— Lorsque $c_2 = 0$, on a

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(X_1, T) &= (c_0 T^2 + c_1 T)^{X_1*(T)} = (-T)^{X_1} (-c_0 T - c_1)^{X_1*(-1)}, \\ \mathcal{Q}_d(X_d, T) &= \left((-T^d) \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) (-c_0) T^e \right)^{X_d*(dT^d)}, \text{ si } d > 1, \\ &= (-T^d)^{X_d} \left(\sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) (-c_0) T^e \right)^{X_d*(-d)}, \end{cases}$$

ce qui montre que pour tout m , la fonction centrale

$$\chi(c_0, c_1, c_2 = 0) : \mathfrak{S}_m \rightarrow \mathbb{Z}[T]$$

coïncide avec

$$(-T)^m \chi(c_0, -c_1) : \mathfrak{S}_m \rightarrow \mathbb{Z}[T].$$

En particulier,

$$\chi^{[i]}(c_0, c_1, c_2 = 0)_m = 0, \quad \forall m > i \geq 0,$$

alors que $\chi(c_0 = 0) = \prod_{d \geq 1} 0^{\chi_d^*(d/T^d)}$ et donc

$$\chi^{[-i]}(c_0 = 0)_m = 0, \quad \forall m \geq 1, \forall i \geq 0.$$

Les cas $d_X \geq 3$. – On suit la même démarche que pour le cas $d_X = 2$ en se restreignant (donc) aux cas où $c_{d_X} \in \{0, 1\}$.

— Pour $c_{d_X} = 1$ et tout $d \geq 1$, on a $\mathcal{Q}_d^{[0]} = 1$, et grâce à (12), la relation

$$\mathcal{Q}_d(X_d, T) - \mathcal{Q}_d(X_d - 1, T) = \mathcal{Q}_d(X_d - 1, T) (?T^d - ?(X_d - 1)T^{d(d_X - 1)}),$$

dont on déduit, pour tout $i \geq 1$, la majoration

$$(14) \quad \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]} \leq d + \sup \left\{ \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d]}, d + \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d(d_X - 1)]} \right\},$$

où $d(d_X - 1) \geq 2d$, ce qui permet de prouver, par induction sur i ,

$$\underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]}(c_{d_X} = 1) \leq i, \quad \forall i \geq 0, \forall d \geq 1$$

et donc

$$\underline{\deg} \chi^{[i]}(c_{d_X} = 1) \leq i, \quad \forall i \geq 0.$$

— Lorsque $c_{d_X} = 0$, la majoration (14) se simplifie en

$$\underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]} \leq \sup \left\{ \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d]}, d + \underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i-d(d_X - 1)]} \right\},$$

ce qui permet de prouver, par induction sur i ,

$$\underline{\deg} \mathcal{Q}_d^{[i]}(c_{d_X} = 0) \leq \frac{i}{d_X - 1}, \quad \forall i \geq 0, \forall d \geq 1$$

et donc

$$\underline{\deg} \chi^{[i]}(c_{d_X} = 0) \leq \frac{i}{d_X - 1}, \quad \forall i \geq 0,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

COROLLAIRE 11.5.3. – *Soit X un espace i -acyclique tel que $\dim(H_c(X; \mathbb{Q})) < +\infty$ et $\dim(H_c^{d_X}(X; \mathbb{Q})) \leq 1$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(X; \mathbb{Q}))\}_m$ est constante pour $m \geq i$. On a aussi,*

- (a) si $d_X = 1$, constance sur $\{m \geq 1\}$;
- (b) si $d_X = 2$ et $c_2 = 0$, nullité sur $\{m > i\}$;
- (c) si $d_X \geq 3$ et $c_{d_X} = 0$, constance sur $\{m \geq \frac{i}{d_X - 1}\}$.

Démonstration. – On applique les estimations de 11.5.2 avec $c_{d_X} \in \{0, 1\}$. Pour $d_X = 1$, seul le cas $i = 0$ et $c_0 = 0$ est à considérer. On a, pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_m} \chi^{[0]}(c_0 = 0, c_1)(\alpha) &= \frac{1}{m!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_m} (c_1)^{\chi_{1^*}(-1)} \prod_{d>1} 0^{\chi_{d^*}(-d)}(\alpha) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } c_1 = 1, \\ 0 & \text{si } c_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les estimations de 11.5.2 pour le degré deg des familles de fonctions centrales polynomiales $\chi^{[i]}(\mathbf{c})$ jointes à la proposition 11.4.5 justifient les autres assertions à l'exception du cas $d_X = 2$. Dans ce cas, le procédé donne la constance seulement sur $\{m \geq 2i\}$. Pour aller plus loin, on remarque que $\chi_{\text{BM}}^i(X)$ seul dépend des nombre de Betti compacts de X . Le cas $X = \mathbb{C}$ est connu depuis Arnold ([4]) qui montre que la cohomologie rationnelle de $BF_m(\mathbb{C})$ est nulle en degrés $i \geq 2$ et est de dimension constante 1 sur $\{m \geq i\}$ pour $i \in \{0, 1\}$, ce qui règle le cas i -acyclique avec $d_X = 2$ et $c_1 = 0$. Le cas $c_1 > 0$ résulte de la suite exacte courte de \mathcal{S}_m -modules de 10.6.1

$$(15) \quad 0 \rightarrow H_c(F_m^\bullet(X))[-1] \rightarrow H_c(F_m(\hat{X})) \rightarrow H_c(F_m(X)) \rightarrow 0,$$

où $\hat{X} := X \setminus \{\bullet\}$ pour un certain $\bullet \in X$, et où $F_m^\bullet(X)$ est la réunion disjointe des ouverts $F_m^{j=\bullet}(X) := \{\bar{x} \in F_m \mid x_i = \bullet\}$ où $j = 1, \dots, m$. On remarquera ici que $H_{\text{BM}}^k(X)$ et $H_{\text{BM}}^k(\hat{X})$ seuls diffèrent en degré $d_X - 1$ où

$$\dim H_{\text{BM}}^{d_X-1}(\hat{X}) = \dim H_{\text{BM}}^{d_X-1}(X) + 1.$$

En dualisant (15) on obtient :

$$0 \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(X)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(\hat{X})) \rightarrow \text{ind}_{\mathcal{S}_{m-1}}^{\mathcal{S}_m} H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_{m-1}(\hat{X})) \rightarrow 0$$

et donc

$$\text{Betti}^i(BF_m(\hat{X})) = \text{Betti}^i(BF_m(X)) + \text{Betti}^{i-(d_X-1)}(BF_{m-1}(\hat{X})).$$

Lorsque $d_X = 2$, ces remarques montrent que $\{\text{Betti}^i(BF_m(\mathbb{C} \setminus c_1))\}_m$ est constante pour $m \geq i$, alors que $\text{Betti}^1(\mathbb{C} \setminus c_1) = c_1$. Ceci termine la justification du cas $d_X = 2$ et achève la preuve du corollaire. \square

11.6. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$, cas général

On étend le corollaire 11.5.3 au cas des espaces M connexes munis d'une classe fondamentale. Nous procédons comme dans pour le théorème 9.3.15, à l'aide de la suite spectrale basique

$$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)_1^{p,q} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} \text{ind}_{\mathcal{J}_{\mathbb{C}_\tau}^m \times \mathcal{S}_{m-|\tau|}}^{\mathcal{S}_m} \sigma^{d_M} \otimes H_{\text{BM}}^Q(F_\tau(M_{>0})) \Rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_m(M)),$$

avec $Q = i - (d_M - 1)(m - (p + 1))$.

La compatibilité entre les morphismes $p_m^* : H_{\text{BM}}^i(F_m(M)) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M))$ et ceux des suites spectrales basiques (cf. proposition 9.3.13-(b))

$$(16) \quad \mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q} : \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})^{p+1,q},$$

y compris avec les actions des groupes symétriques, ramènent la question de la stabilité de la famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(BF_m(M))\}_m$, à celle de la stabilité des morphismes de suites spectrales de co-invariants (cf. 7.9.1) induits par (16), i.e.

$$\Phi_0(\mathbb{E}_\sigma(q_m^*)^{p,q}) : \Phi_0(\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)^{p,q}) \rightarrow \Phi_0(\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^{m+1})^{p+1,q}).$$

On est alors amené à trouver le rang de stabilité des familles de morphismes

$$(17) \quad \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+1,m)} H_{\text{BM}}^Q(F_\tau(M_{>0}))_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}} \times \mathcal{S}_{m-|\underline{\tau}|}} \xrightarrow{\sum p_\tau^*} \bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}(p+2,m+1)} H_{\text{BM}}^Q(F_\tau(M_{>0}))_{\mathcal{H}_{\underline{\tau}} \times \mathcal{S}_{m+1-|\underline{\tau}|}},$$

définis par les morphismes de $\mathcal{H}_{\underline{\tau}}$ -modules

$$(18) \quad \Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*) : \Phi_{\underline{\ell}}(H_{\text{BM}}^Q(F_\tau(M_{>0}))) \rightarrow \Phi_{\underline{\ell}}(H_{\text{BM}}^Q(F_{\tau^\bullet}(M_{>0}))),$$

où $p_\tau : F_{\tau^\bullet}(M_{>0}) \rightarrow F_\tau(M_{>0})$ est la projection sur les $p+1$ premières coordonnées, et où $\underline{\ell}$ est tel que $m-|\underline{\tau}| = (p+1) - \underline{\ell}$, conformément à la notation 8.1.2-(b). L'étude de cette question conduit à l'énoncé suivant.

PROPOSITION 11.6.1. – *Soit M un espace connexe muni d'une classe fondamentale. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, le morphisme*

$$\Phi_0(p_m^*) : \Phi_0(H_{\text{BM}}^i(F_m(M))) \rightarrow \Phi_0(H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)))$$

est bijectif pour $m \geq 2i$ si $d_M = 2$, et pour $m \geq i$ si $d_M \geq 3$.

Démonstration. – Soit $\epsilon := 2$ si $d_M = 2$, ou $\epsilon := 1$ si $d_M \geq 3$.

D'après les remarques préliminaires, la proposition résultera de montrer que les morphismes $\sum p_\tau^*$ dans (17) sont des isomorphismes pour $m \geq \epsilon i$, ce qui découle clairement de ce que pour tout $m \geq \epsilon i$, on a

- (a) le morphisme $\Phi_{\underline{\ell}}(p_\tau^*)$ dans (18) est un isomorphisme;
- (b) l'application $(_)^\bullet : \mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}(p+2, m+1)$ est bijective pour $Q \geq 0$.

Montrons ces propriétés.

Propriété (a). – Commençons par la généralisation suivante du corollaire 11.5.3.

LEMME. – *Soit X un espace i -acyclique de dimension $d_X \geq 2$ connexe muni d'une classe fondamentale. Pour tout $t \geq 0$, le morphisme induit*

$$\Phi_t(p_m^*) : \Phi_t(H_{\text{BM}}^i(F_m(X))) \rightarrow \Phi_t(H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(X)))$$

est bijectif pour $m \geq i+t$.

Preuve du lemme. – On raisonne par induction sur $t \in \mathbb{N}$ puis, pour chaque t par induction sur $i \in \mathbb{N}$. Le cas $t = 0$ est réglé pour tout $i \in \mathbb{N}$, par le corollaire 11.5.3 modulo le théorème 9.2.4 qui donne le rang de monotonie $m \geq i$. Supposons donc $t > 0$ et le lemme vérifié pour $(t - 1)$. En dualisant la suite exacte du théorème de scindage 3.1.1-(a) et en appliquant le foncteur $\Phi_t(_)$ (possible puisque $t > 0$), on a la suite exacte courte

$$(19) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{a+b=i} H_{\text{BM}}^a(X) \otimes \Phi_{t-1}(H_{\text{BM}}^b(F_{m-1})) &\rightarrow \Phi_t(H_{\text{BM}}^i(F_m)) \\ &\rightarrow \Phi_{t-1}(\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}} H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_{m-1})) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

qui montre que la bijectivité de $\Phi_t(p_m^*)$ au niveau du terme central est subordonnée par celle des termes extrêmes.

Lorsque $i = 0$, le terme de droite de (19) est nul puisque $d_X > 1$ et le lemme résulte des termes de gauche $\Phi_{t-1}(H_{\text{BM}}^0(F_{m-1}(X)))$ par l'hypothèse inductive.

Lorsque $i > 0$, le terme de droite n'est pas forcément nul. On remarque alors que la preuve du lemme 1 (p. 138) dans la démonstration du théorème 8.1.5, donnait déjà l'identification

$$\Phi_{t-1}(\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}}(_)) \simeq \bigoplus_{\bar{\alpha} \in (\mathcal{S}_{m-2} \setminus \mathcal{S}_{m-1} / \mathcal{S}_{m-t})} (_)_{\llbracket 2, m-1 \rrbracket \cap \alpha \llbracket t, m-1 \rrbracket},$$

où

$$\llbracket \llbracket 2, m-1 \rrbracket \cap \alpha \llbracket t, m-1 \rrbracket \rrbracket = (m-1) - t', \quad \text{avec } t' \in \llbracket t-1, t \rrbracket.$$

On y montrait aussi que l'application naturelle

$$(_)_{\bullet}^m : (\mathcal{S}_{m-2} \setminus \mathcal{S}_{m-1} / \mathcal{S}_{m-t}) \rightarrow (\mathcal{S}_{m-1} \setminus \mathcal{S}_m / \mathcal{S}_{m-(t-1)}),$$

où $\alpha^{\bullet} = \alpha$ sur $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$ (donc $\alpha^{\bullet}(m) = m$), est bijective dès que $m \geq t + 1$.

De ces remarques suit que sur les termes de droite de (22), l'application

$$(20) \quad \Phi_{t-1}(\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-2}}^{\mathcal{S}_{m-1}}(H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_{m-1}))) \rightarrow \Phi_{t-1}(\text{ind}_{\mathcal{S}_{m-1}}^{\mathcal{S}_m}(H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_m)))$$

sera bijective dès lors que

$$(21) \quad m \geq i + t.$$

En effet, pour que (20) soit bijective, il suffit de vérifier que

- (i) l'application $(_)_{\bullet}^m$ est bijective, donc que $m \geq t + 1$;
- (ii) l'application $\Phi_{t'}(H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_{m-1})) \rightarrow \Phi_{t'}(H_{\text{BM}}^{i-(d_X-1)}(F_m))$ est bijective pour $t' \in \llbracket t-1, t \rrbracket$, donc que $m-1 \geq i - (d_X - 1) + t'$, par hypothèses inductives puisque $i - (d_X - 1) < i$ et $t' \leq t$;

et comme $i \geq 1$, (21) suffit pour établir (i), (ii), ce qui termine la preuve du lemme. \square

Revenons à la preuve de l'assertion (a). Lorsque $d_M \geq 1$, le lemme s'applique aux morphismes (18)

$$\Phi_{\underline{\ell}}(p_{\tau}^*) : \Phi_{\underline{\ell}}(H_{\text{BM}}^Q(F_{\tau}(M_{>0}))) \rightarrow \Phi_{\underline{\ell}}(H_{\text{BM}}^Q(F_{\tau \bullet}(M_{>0})))$$

et montre que $\Phi_{\underline{\ell}}(p_{\tau}^*)$ est bijective sous les conditions

$$(22) \quad ((p+1) \geq (Q + \underline{\ell})) \quad \text{ou bien} \quad (Q < 0).$$

En substituant (cf. notations 8.1.2-(b))

$$\begin{cases} Q \leftrightarrow i - (d_M - 1)(m - (p + 1)), \\ \underline{\ell} \leftrightarrow |\underline{\tau}| - (m - (p + 1)), \\ m - (p + 1) \leftrightarrow |\underline{\tau}| - \underline{\ell}, \end{cases}$$

la première condition dans (22) s'écrit aussi

$$(23) \quad (m \geq i - (d_M - 2)|\underline{\tau}| + (d_M - 1)\underline{\ell})$$

et comme $|\underline{\tau}| \geq 2\underline{\ell}$, on voit aisément que si $d_M = 2$, l'intervalle $\{m \geq 2i\}$ est conforme à (23), tandis que si $d_M \geq 3$, c'est le cas de $\{m \geq i\}$.

Propriété (b). – On raisonne par l'absurde. Nous avons vu dans la preuve du théorème 9.3.15-(b) (p. 161) que l'application $(_)^\bullet$ n'est pas bijective si et seulement si $2(p+1) < m$. Dans ce cas, si $m \geq \epsilon i$, on a

$$Q = i - (m - (p + 1)) < i - (d_M - 1)\frac{m}{2} \leq ((2/\epsilon) + 1 - d_M)\frac{m}{2} \leq 0,$$

puisque $d_M \geq 2$, ce qui est contraire à la condition $Q \geq 0$. \square

11.7. Stabilité de $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{?m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$, cas général

Dans cette dernière section nous esquissons la démarche à suivre pour démontrer la généralisation suivante de la proposition 11.6.1.

THÉORÈME 11.7.1. – *Soit M un espace connexe muni d'une classe fondamentale. Soient $a, i \in \mathbb{N}$.*

(a) *La famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante pour*

$$\begin{cases} m \geq 2i + 2a, & \text{si } d_M = 2, \\ m \geq i + 2a, & \text{si } d_M \geq 3. \end{cases}$$

(b) *La famille $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$ est constante pour*

$$\begin{cases} m \geq 2i + 4a, & \text{si } d_M = 2, \\ m \geq i + d_M a, & \text{si } d_M \geq 3. \end{cases}$$

Indication. – Des modifications simples dans la preuve de la proposition 11.6.1 conduisent à l'énoncé suivant :

PROPOSITION (t). – Soit M un espace connexe muni d'une classe fondamentale. Pour tous $t, i \in \mathbb{N}$ fixés, le morphisme

$$\Phi_t(\mathcal{P}_m^*) : \Phi_t(H_{\text{BM}}^i(F_m(M))) \rightarrow \Phi_t(H_{\text{BM}}^i(F_{m+1}(M)))$$

est bijectif pour $m \geq \epsilon i + t$, où $\epsilon = 2$ si $d_M = 2$, et $\epsilon = 1$ si $d_M \geq 3$.

Les cas $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$. – Par la proposition 5.3.1, on a

$$\Delta_{m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m \cong \coprod_{\lambda \in \mathcal{Y}_{m-a}(m)} F_{m-a}(M)/\mathcal{S}_\lambda,$$

où $\mathcal{S}_\lambda \supseteq \mathbf{1}_a \times \mathcal{S}_{m-2a}$. La stabilité recherchée est alors majorée par celle des familles $\{\text{Betti}^i(\Phi_a H_{\text{BM}}(F_{m-a}(M)))\}$, donc par $\{m - a \geq \epsilon i + a\}$ d'après la proposition (t).

Les cas $\{\text{Betti}_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a}(M^m)/\mathcal{S}_m)\}_m$. – Par induction sur $a \in \mathbb{N}$. Le cas $a = 0$ est le lemme 4.2 de Church ([9], p. 492). Dans le cas général on considère le complexe exact de \mathcal{S}_m -modules de cohomologie de Borel-Moore :

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{\text{BM}}^{i-1}(\Delta_{\leq m-a} M^m) &\rightarrow H_{\text{BM}}^{i-1}(\Delta_{m-a} M^m) \\ &\rightarrow H_{\text{BM}}^{i-d_M}(\Delta_{\leq m-(a+1)} M^m) \\ &\rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{\leq m-a} M^m) \rightarrow H_{\text{BM}}^i(\Delta_{m-a} M^m) \rightarrow \end{aligned}$$

et le théorème résulte du lemme des cinq, exactement comme dans 9.3.15-(b-ii). \square

CHAPITRE 12

SUITES SPECTRALES DE LERAY

Cette section est consacrée à l'étude de la dégénérescence des suites spectrales de Leray associées aux fibrations $\pi_a = \Delta_{? \ell}^{[a]} X^m \rightarrow F_a(X)$, lorsque X est i -acyclique.

Avertissement. – Dans cette section, le corps k est de caractéristique quelconque. La donnée d'un espace M ne présuppose pas que $\dim_k(H_c(M)) < \infty$.

12.1. Cohomologie à support π -propre

12.1.1. Catégorie d'espaces au-dessus de B . – Soit B un espace topologique. On appelle « espace basé sur B , ou au-dessus de B », la donnée d'une application continue $\pi_Y : Y \rightarrow B$. On appelle alors « morphisme d'espaces basés sur B de $\pi_Y : Y \rightarrow B$ vers $\pi_Z : Z \rightarrow B$ », la donnée une application continue $f : Y \rightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi_Y \searrow & & \swarrow \pi_Z \\ & B & \end{array}$$

DÉFINITION 12.1.2. – Pour $\pi_Y : Y \rightarrow B$ donné, la « cohomologie à support π_Y -propre de Y », notée $H_{\pi!}(Y; B)$, et même $H_{\pi!}(Y)$ lorsque B est sous-entendu, est par définition la cohomologie du complexe

$$(1) \quad (\mathcal{C}_{\pi!}(Y; B), d_{\pi!}) := \mathbb{R}\Gamma(B, \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y).$$

Les morphismes naturels de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma_c(B, \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(B, \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(B, \mathbb{R}\pi_{Y*} \underline{k}_Y)$$

induisent des morphismes naturels en cohomologie :

$$(2) \quad H_c(Y) \rightarrow H_{\pi!}(Y; B) \rightarrow H(Y).$$

12.1.3. – On rappelle (cf. 1.3) que dans la mesure où la résolution du faisceau constant par les cochaînes d'Alexander-Spanier $\underline{k}_Y \rightarrow (\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(Y; k), d_\bullet)$ est une résolution Φ -molle pour toute famille paracompactifiante Φ de B , on dispose d'un candidat canonique pour le complexe (1), à savoir « le complexe des cochaînes à support π -propre » :

$$(\mathcal{C}_{\pi!}(Y; B), d_{\pi!}) := \Gamma(B, \pi_{Y!}(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(Y; k), d_\bullet)),$$

puisque $\pi_{Y!}$ conserve la propriété d'être c -mou⁽⁶⁹⁾ et que sur un espace localement compact dénombrable à l'infini B , un faisceau c -mou est $\Gamma(B, _)$ -acyclique⁽⁷⁰⁾. Des raisons qui expliquent aussi que $H_c(Y)$ est calculée par le complexe des « cochaînes à support compact »

$$(\mathcal{C}_c(Y; B), d_c) := \Gamma_c(B, \pi_{Y!}(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(Y; k), d_\bullet)).$$

Dans la suite on notera

$$\mathcal{Z}_{\pi!}(Y; B) := \ker(d_{\pi!}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{\pi!}(Y; B) := \text{im}(d_{\pi!})$$

et de manière analogue pour le complexe $(\mathcal{C}_c(Y; B), d_c)$.

12.1.4. – Lorsque $B = \{\text{pt}\}$, on a $H_{\pi!}(_ ; B) = H_c(_)$. La cohomologie à support π -propre étend la cohomologie à support compact et, tout comme elle, si $j : U \hookrightarrow Y$ est une inclusion ouverte, de complémentaire l'inclusion fermée $i : F \hookrightarrow Y$, on considère U et F basés sur B à travers l'application $\pi_Y : Y \rightarrow B$, et l'on dispose alors de morphismes naturels

- de prolongement par zéro $j_! : H_{\pi!}(U; B) \rightarrow H_{\pi!}(Y; B)$,
- de restriction à un fermé $i^* : H_{\pi!}(Y; B) \rightarrow H_{\pi!}(F; B)$,

et d'une suite exacte longue de cohomologie à support π -propre

$$\cdots \rightarrow H_{\pi!}^{i-1}(F; B) \rightarrow H_{\pi!}^i(U; B) \rightarrow H_{\pi!}^i(Y; B) \rightarrow H_{\pi!}^i(F; B) \rightarrow H_{\pi!}^{i+1}(U; B) \rightarrow \cdots,$$

qui est aussi un complexe de $H(B)$ -modules.

En effet, une décomposition ouverte/fermée $Y = U \sqcup F$ donne lieu à la suite exacte courte $0 \rightarrow j_! \underline{k}_U \rightarrow \underline{k}_Y \rightarrow i_! \underline{k}_F \rightarrow 0$ de $\text{Mod}(\underline{k}_Y)$, et donc au triangle exact de $D_k^+(B)$:

$$\mathbb{R}\pi_{Y!} j_! \underline{k}_U \rightarrow \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y \rightarrow \mathbb{R}\pi_{Y!} i_! \underline{k}_F \rightarrow,$$

où nous avons $\mathbb{R}\pi_{Y!} j_! = \mathbb{R}\pi_{U!}$ et $\mathbb{R}\pi_{Y!} i_! = \mathbb{R}\pi_{F!}$, puisque $j_!$ et $i_!$ sont exacts et transforment c -mous en c -mous⁽⁶⁹⁾.

Enfin, dans le modèle des cochaînes d'Alexander-Spanier, les morphismes naturels $\pi_{Y!} j_! \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}_U^i \rightarrow \pi_{Y!} \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}_Y^i$ et $\pi_{Y!} \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}_Y^i \rightarrow \pi_{Y!} \underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}_F^i$ correspondent clairement aux opérations de prolongement par zéro et de restriction habituels.

⁽⁶⁹⁾ Cf. Kashiwara-Shapira [25] proposition 2.5.7-(ii), p. 105.

⁽⁷⁰⁾ Cf. Kashiwara-Shapira [25] proposition 2.5.10, p. 106.

12.1.5. – Si $f : Z \rightarrow Y$ est une application continue et *propre* entre deux espaces au-dessus de B , le morphisme d'adjonction $\underline{k}_Y \rightarrow (\mathbb{R}f_* \circ f^{-1}) \underline{k}_Y$ donne lieu au morphisme de complexes de faisceaux

$$\mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y \rightarrow (\mathbb{R}\pi_{Y!} \circ \mathbb{R}f_*) \underline{k}_Z = (\mathbb{R}\pi_{Y!} \circ \mathbb{R}f!) \underline{k}_Z = \mathbb{R}\pi_{Z!} \underline{k}_Z,$$

d'où le morphisme « image-inverse » pour la cohomologie à support π -propre

$$f^* : H_{\pi!}(Y; B) \rightarrow H_{\pi!}(Z; B).$$

La naturalité des morphismes 12.1.1-(2), donne alors lieu au diagramme commutatif de morphismes image-inverse

$$\begin{array}{ccccc} H_c(Y) & \longrightarrow & H_{\pi!}(Y; B) & \longrightarrow & H(Y) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H_c(Z) & \longrightarrow & H_{\pi!}(Z; B) & \longrightarrow & H(Z). \end{array}$$

L'analogie pour la cohomologie $H_{\pi!}(_ ; B)$ de la propriété caractéristique des espaces i -acycliques, le théorème 1.9.1-(d), est également vérifiée.

PROPOSITION 12.1.6. – *Soit X un espace i -acyclique.*

Étant donnés des espaces basés $\pi_Z : Z \rightarrow B$ et $\pi_Y : Y \rightarrow B$, soit $\pi_{X \times Y} : X \times Y \rightarrow B$, $(x, y) \mapsto \pi_Y(y)$ et notons $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$, $(x, m) \mapsto m$. Soit $f : Z \rightarrow X \times Y$ un morphisme d'espaces au-dessus de B , notons $f_2 := p_2 \circ f$. Soit $j : V \hookrightarrow Y$ un plongement ouvert, notons $f'_2 : f^{-1}(V) \rightarrow V$ la restriction de f_2 . On a le diagramme commutatif d'espaces au-dessus de B suivants,

$$\begin{array}{ccccc} f_2^{-1}(V) & \hookrightarrow & Z & \xrightarrow{f} & X \times Y \\ & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & V & \hookrightarrow j & Y. \end{array}$$

Alors, si f et f'_2 sont propres et si $j_! : H_{\pi!}(V; B) \rightarrow H_{\pi!}(Y; B)$ est surjectif, on a

$$(f^* : H_{\pi!}(X \times Y; B) \rightarrow H_{\pi!}(Z; B)) = 0.$$

Démonstration. – C'est presque littéralement la même preuve que 1.9.1-(d).

Soient $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ la projection canonique et $f_1 := p_1 \circ f$. Par Künneth, on a $H_{\pi!}(X \times Y; B) = H_c(X) \otimes H_{\pi!}(Y; B)$ et il suffit de montrer que pour tous cocycles $\omega \in \mathcal{Z}_c(X)$ et $\varpi \in \mathcal{Z}_{\pi!}(Y; B)$, le cocycle

$$(3) \quad f^*(\omega \otimes \varpi) = f^*(p_1^* \omega \cup p_2^* \varpi) = f_1^* \omega \cup f_2^* \varpi \in \mathcal{Z}_{\pi!}(Z; B)$$

est la différentielle d'une cochaîne à support π -propre de Z . Or, il existe par hypothèse $\tau \in \mathcal{Z}_{\pi!}(Y; B)$ qui représente la classe de ϖ dans $H_{\pi!}(Y; B)$. On peut donc remplacer dans (3) $f_2^* \varpi$ par $f_2^* \tau$ qui est à support π -propre dans $f_2^{-1}(V)$ donc dans Z par le prolongement par zéro $j_!$. D'autre part, comme X est i -acyclique, on a $f_1^* \omega = f_1^* d\alpha$ pour une certaine cochaîne α de X (à support non nécessairement compact), et alors $f_1^* \omega \cup f_2^* \tau = d(f_1^* \alpha \cup f_2^* \tau)$, où $f_1^* \alpha \cup f_2^* \tau$ est à support π -propre de Z puisqu'il en est ainsi de $f_2^* \tau$. On a donc bien $f^*(\omega \otimes \varpi) = 0$ dans $H_{\pi!}(Z; B)$. \square

12.2. Localisation du théorème de scindage

12.2.1. Naturalité de $H_{\pi!}(_ ; B)$ relative aux ouverts de B . – Soit B' un ouvert de B . Étant donné $\pi_Y : Y \rightarrow B$, on note $Y' := \pi_Y^{-1}(B')$ et $\pi_{Y'} : Y' \rightarrow B'$ la restriction de π_Y . Nous avons ainsi un diagramme cartésien de plongements ouverts :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \hookrightarrow & Y \\ \pi_{Y'} \downarrow & \square & \downarrow \pi_Y \\ B' & \hookrightarrow & B \end{array}$$

et un morphisme naturel de restriction de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(B, \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(B', \mathbb{R}\pi_{Y!} \underline{k}_Y) = \mathbb{R}\Gamma(B', \mathbb{R}\pi_{Y'!} \underline{k}_{Y'}),$$

donnant lieu à un morphisme naturel de restriction :

$$H_{\pi!}(Y; B) \rightarrow H_{\pi!}(Y'; B').$$

Nous aurons besoin du résultat classique suivant ⁽⁷¹⁾.

PROPOSITION 12.2.2. – *Soit $\pi : Y \rightarrow B$ une application continue. Pour tout $b \in B$, le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{B' \ni b} H_{\pi!}(\pi^{-1}(B'); B') \rightarrow H_c(\pi^{-1}(b))$$

est un isomorphisme.

12.2.3. Notations. – Pour la suite de cette section nous fixons un espace Y et un entier $0 \leq a \in \mathbb{N}$. On notera souvent $F_a := F_a(Y)$, si $a > 0$, et $F_0 := F_0(Y) = \{\text{pt}\}$.

Pour tous $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$, nous avons introduit dans 2.1-(N-3) les espaces

$$\Delta_{? \ell}^{[a]} Y^m := \Delta_{? \ell} Y^m \cap (Y^{m-a} \times F_a(Y)),$$

que nous notons aussi $\Delta_{? \ell}^{m[a]} := \Delta_{? \ell}^{[a]} Y^m$ lorsque l'on aura besoin d'une écriture plus compacte. Nous y avons aussi introduit la projection $\pi_a : Y^m \rightarrow Y^a$ sur les dernières a coordonnées, et les espaces de base $F_a(Y)$

$$\pi_a : \Delta_{? \ell}^{m[a]} \rightarrow F_a \quad \text{et} \quad \pi_a : F_m \rightarrow F_a.$$

Maintenant, pour tout ouvert $U \subseteq F_a(Y)$, nous notons

$$U \Delta_{? \ell}^{m[a]} := \pi_a^{-1} U \cap \Delta_{? \ell}^{m[a]} \quad \text{et} \quad U F_m := \pi_a^{-1} U \cap F_m$$

et considérons les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} U \Delta_{? \ell}^{m[a]} \hookrightarrow \Delta_{? \ell}^{m[a]} & U F_m \hookrightarrow F_m & Y \times U F_m \hookrightarrow Y \times F_m \ni (x, \bar{y}) \\ \pi_a \downarrow \quad \square \quad \downarrow \pi_a & \pi_a \downarrow \quad \square \quad \downarrow \pi_a & \pi_a \downarrow \quad \square \quad \downarrow \pi_a \\ U \hookrightarrow F_a & U \hookrightarrow F_a & U \hookrightarrow F_a \ni \pi_a(\bar{y}). \end{array}$$

⁽⁷¹⁾ Bredon [8], IV-4, proposition 4.2 (page 214). Voir aussi Kashiwara-Schapira [25], proposition 2.5.2 (p. 103), ou encore Borel [6], lemme 7.12 et lemme 10.5, formule (3) (p. 158).

Les décompositions ouvertes-fermées

$$\begin{aligned} U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]} &= U\Delta_{\ell}^{m[a]} \sqcup U\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]} \\ Y \times UF_m &= UF_{1+m} \sqcup \Delta_m(Y \times UF_m) \end{aligned}$$

sont alors des décompositions d'espaces basés sur U .

On peut maintenant énoncer l'analogie du théorème 3.1.1 dans le contexte d'espaces basés sur U . Il est important de remarquer que si dans 3.1.1 la i -acyclicité était une condition suffisante, elle est maintenant également nécessaire.

THÉORÈME DE SCINDAGE LOCAL 12.2.4. – *Soient $1 \leq a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Les espaces dans cet énoncé sont des sous-espaces de l'espace basé $\pi_a : X^{m-a} \times U \rightarrow U$, où U est un ouvert non vide dans $F_a(X)$.*

L'espace X est i -acyclique si et seulement si il vérifie les assertions suivantes pour tout ouvert $U \subseteq F_a(X)$.

(a) *Pour $m \geq a \geq 1$, le morphisme de restriction*

$$H_{\pi!}(X \times UF_m) \rightarrow H_{\pi!}(\Delta_{\leq m}(X \times UF_m))$$

est nul et la suite

$$0 \rightarrow H_{\pi!}(UF_m)[-1]^m \rightarrow H_{\pi!}(UF_{m+1}) \rightarrow H_{\pi!}(X \times UF_m) \rightarrow 0,$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support π -propre, est exacte.

(b) *Pour $m \geq \ell \geq a \geq 1$, le morphisme de restriction*

$$H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})$$

est nul et la suite

$$0 \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})[-1] \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\ell}^{m[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow 0,$$

extraite de la suite longue de cohomologie à support π -propre, est exacte.

Démonstration. – On suppose que X est i -acyclique.

La preuve de (a) et (b) est la même que dans 3.1.1 modulo la version de la propriété fondamentale des espaces i -acycliques pour les espaces basés sur U de 12.1.6.

Pour (a), on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\leq m}(X \times UF_m) & \hookrightarrow & X \times UF_m \\ & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\ & & UF_m, \end{array}$$

où f_2 est propre car revêtement trivial à m nappes.

Pour (b), on raisonne par induction sur ℓ . Sa valeur la plus petite est $\ell := a$, auquel cas $\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]} = \emptyset$ et l'assertion est claire quel que soit m . Ensuite, en supposant l'assertion établie pour $\ell - 1 \geq a$, on considère le diagramme commutatif où $m \geq \ell$:

$$\begin{array}{ccccc}
 f_2^{-1}(U\Delta_{\ell-1}^{(m-1)[a]}) & \hookrightarrow & U\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]} & \hookrightarrow & X \times U\Delta_{\leq \ell-1}^{(m-1)[a]} \\
 & \searrow f'_2 & & \searrow f_2 & \downarrow p_2 \\
 & & U\Delta_{\ell-1}^{(m-1)[a]} & \hookrightarrow & U\Delta_{\leq \ell-1}^{(m-1)[a]},
 \end{array}$$

où f'_2 est propre car restriction (par l'image) de l'application propre de même nom $f'_2 : f_2^{-1}(\Delta_{\ell-1}^{m-1}) \rightarrow \Delta_{\ell-1}^{m-1}$ de la preuve de 3.1.1-(b).

Réciproquement, on prend $m = 2$ et $a = 1$. Alors, le morphisme $H_{\pi!}(X \times U) \rightarrow H_{\pi!}(\Delta_1(X \times U))$ est nul d'après (a). Or, on a $H_{\pi!}(\Delta_1(X \times U)) = H(U)$, et le morphisme en question s'identifie au cup-produit

$$\cup : H_c(X) \otimes H(U) \rightarrow H(U),$$

qui est donc nul. En prenant $U := X$, on voit que X est nécessairement i -acyclique. \square

12.2.5. – Le corollaire suivant est un résultat technique qui sera très utile pour montrer que les faisceaux des cohomologie à support π -propre de la fibration $\pi_a : F_m \rightarrow F_a$ sont constants sur les composantes connexes de F_a . Ceci participera de manière décisive à l'étude des suites spectrales de Leray correspondantes. (Voir la remarque 4.2.4.)

PROPOSITION 12.2.6. – *Soit X un espace i -acyclique. Pour $a \leq m \in \mathbb{N}$, notons*

$$\pi_{m,a} : F_m(X) \rightarrow F_a(X), \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{m-a+1}, \dots, x_m).$$

Pour tout $\bar{x} \in F_a(X)$, le morphisme de restriction

$$\rho_{m,a} : H_{\pi!}(F_m(X)) \rightarrow H_c(\pi_{m,a}^{-1}\bar{x})$$

est surjectif.

Démonstration. – On raisonne par induction sur $m \geq a$. Lorsque $m = a$, on a $\pi_a = \text{id}_{F_a}$ et donc $H_{\pi!}(F_m) = H(F_a)$, et cette cohomologie se surjecte clairement sur $H_c(\bar{x}) = H^0(\bar{x}) = k$.

Dans le cas général, on considère la décomposition ouverte/fermée

$$X \times F_m = F_{m+1} \sqcup \Delta_m(X \times F_m)$$

et la décomposition qu'elle induit sur le fermé $X \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}$, à savoir

$$X \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x} = \pi_{m+1,a}^{-1}\bar{x} \sqcup \Delta_m(X \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}).$$

On considère alors le morphisme de restrictions des suites de cohomologie à supports π -propres

$$\begin{array}{ccccccc}
 (4) & 0 & \longrightarrow & H_{\pi!}(F_m)[-1]^m & \longrightarrow & H_{\pi!}(F_{m+1}) & \longrightarrow & H_{\pi!}(X \times F_m) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & (\rho_{m,a})^m \downarrow & & \rho_{m+1,a} \downarrow & & \xi \downarrow & & \\
 & & & \longrightarrow & H_c(\pi_{m,a}^{-1}\bar{x})[-1]^m & \longrightarrow & H_c(\pi_{m+1,a}^{-1}\bar{x}) & \longrightarrow & H_c(X \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}) & \longrightarrow,
 \end{array}$$

où la première ligne est exacte d'après 12.2.4-(a) (ainsi que la seconde). La colonne de gauche est surjective puisque $\rho_{m,a}$ l'est par hypothèse de récurrence, et la colonne de droite l'est puisque le morphisme de restriction $\xi : H_{\pi!}(X \times F_m \rightarrow H_c(X \times \pi_{m,a}^{-1}\bar{x}))$ s'identifie trivialement à $\text{id} \otimes \rho_{m,a} : H_c(X) \otimes H_{\pi!}(F_m) \rightarrow H_c(X) \otimes H_c(\pi_{m,a}^{-1}\bar{x})$. Une chasse au diagramme élémentaire montre alors la surjectivité de $\rho_{m+1,a}$. \square

12.2.7. Polynôme de Poincaré de la cohomologie à support π -propre. – Pour tout ouvert $U \subseteq F_a$ et tout $\pi : Z \rightarrow U$ tel que $\dim_k H_{\pi!}(Z; U) < \infty$, on note, de manière analogue à 4.1.3,

$$\mathcal{P}_{\pi!}(Z; U)(T) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k(H_{\pi!}^i(Z; U)) T^i.$$

Le corollaire suivant de 12.2.4-(a) est un ingrédient essentiel dans la preuve de dégénérescence de la suite spectrale de Leray du théorème 12.4.9. (Comparer à 4.2.3.)

COROLLAIRE 12.2.8. – *Soit X un espace i -acyclique tel que $\dim H_c(X) < \infty$ et soit $U \subseteq F_a(X)$ un ouvert tel que $\dim H(U) < \infty$. Alors, pour tout $b > 0$,*

$$\mathcal{P}_{\pi!}(UF_{b+a}(X); U) = \mathcal{P}(U) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})).$$

Démonstration. – Par 12.2.4-(a), on a l'égalité

$$\mathcal{P}_{\pi!}(UF_m; U) = \mathcal{P}_{\pi!}(UF_{m-1}; U) \cdot (\mathcal{P}_c(X) + (m-1)T),$$

que l'on va itérer jusqu'à ce que $m-1 = a$, auquel cas $\mathcal{P}_{\pi!}(UF_a; U) = \mathcal{P}(U)$ puisque $UF_a = U$ et que $\pi_a = \text{id}_U$. Le produit résiduel

$$(\mathcal{P}_c(X) + aT) \cdots (\mathcal{P}_c(X) + (m-1)T)$$

étant alors clairement égal à $\mathcal{P}_c(F_{m-a}(X \setminus \mathbf{a}))$. \square

12.3. Constance des faisceaux de cohomologie à support π -propre

Pour $a \leq \ell \leq m$, reprenons les espaces $F_m := F_m(M)$ et $\Delta_{? \ell}^{m[a]} := \Delta_{? \ell}^{[a]} M^m$ de base $F_a := F_a(M)$ et les décompositions ouvertes-fermées de base $F_a(M)$

$$(\diamond) \quad M \times F_m = F_{1+m} \sqcup \Delta_m(M \times F_m)$$

$$(\diamond) \quad \Delta_{\leq \ell}^{m[a]} = \Delta_{\ell}^{m[a]} \sqcup \Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]}.$$

12.3.1. Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}^i(-)$ sur $F_a(M)$

Le cas $\Delta_{\ell}^{m[a]}$. – Reprenons l'application $\pi_a : \Delta_{\ell}^{m[a]} \rightarrow F_a$ et introduisons les faisceaux :

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{m[a]}) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{\ell}^{m[a]}}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

dont les fibres sont (proposition 12.2.2)

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{m[a]})_{\bar{x}} = H_c^i(\pi_a^{-1}(\bar{x})), \quad \forall \bar{x} \in F_a(M).$$

D'autre part, le foncteur $\mathbb{R}\pi_{a!}$ appliqué au triangle exact de $D_k^+(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]})$

$$j_! \underline{k}_{\Delta_{\ell}^{m[a]}} \xrightarrow{j_!} \underline{k}_{\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}} \xrightarrow{\rho} i_! \underline{k}_{\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]}} \rightarrow,$$

associé à la décomposition (\diamond_2) , où $j_!$ est le prolongement par zéro et ρ la restriction, donne la suite exacte longue de faisceaux localement constants :

$$(5) \quad \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\ell}^{m[a]}) \xrightarrow{j_!} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]}) \xrightarrow{[+1]} .$$

Le cas $F_m(M)$. – La même démarche sur la décomposition (\diamond_1) , nous conduit à la suite longue de faisceaux localement constants sur $F_a(M)$:

$$(6) \quad \xrightarrow{[+1]} \mathcal{H}_{\pi!}^i(F_{1+m}) \xrightarrow{j_{i!}} \mathcal{H}_{\pi!}^i(M \times F_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_m(M \times F_m)) \xrightarrow{[+1]} .$$

THÉORÈME DE SCINDAGE 12.3.2. – Soit X un espace i -acyclique.

(a) Pour $a \leq m \in \mathbb{N}$, les morphismes de faisceaux de la suite (6)

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(X \times F_m) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_m(X \times F_m)), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont nuls et l'on a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m X \times F_m)[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(F_{1+m}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m) \rightarrow 0.$$

(b) Pour $0 \leq a \leq \ell - 1$ et $\ell \leq m \in \mathbb{N}$, les morphismes de faisceaux dans (5)

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \xrightarrow{\rho_i} \mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]}), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

sont nuls et l'on a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow 0.$$

(c) Les faisceaux dans (a) et (b) sont constants sur les composantes connexes de $F_a(X)$.

Démonstration. – La preuve de (a) et (b) est essentiellement la même que celle de 3.1.1. On indique brièvement les modifications à faire pour prouver (b). La preuve pour (a) suit exactement la même démarche.

On reprend les notations de 12.2.3. Pour un ouvert $U \subseteq F_a$, on pose $U\Delta_{\ell}^{m[a]} := \pi_a^{-1}(U)$. On a les suites exactes courtes (théorème 12.2.4-(b)) :

$$(7) \quad 0 \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})[-1] \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow 0.$$

Cela étant, la naturalité de la cohomologie à supports propres relative à la base (12.2.1) permet de dire que si $\pi_a : Y \rightarrow F_a$ est un espace topologique basé sur F_a , et que l'on note $UY := \pi_a^{-1}(U)$, la correspondance

$$U \rightsquigarrow H_{\pi!}(UY)$$

définit le préfaisceau $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}Y$ de k -espaces vectoriels sur F_a . Cette idée appliquée aux suites (7) donne la suite exacte de préfaisceaux sur F_a :

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})[-1] \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]}) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow 0$$

et comme le faisceau engendré par $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(_)$ est précisément le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(_)$, on obtient l'exactitude de la suite courte des faisceaux sur F_a :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}) \rightarrow 0$$

et donc aussi l'annulation du morphisme ρ_i dans la suite longue (5).

COMMENTAIRE. – On remarquera que grâce à l'exactitude des ces suites courtes, l'assertion : « le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell}^{m[a]})$ est constant sur une composante connexe C de F_a » sera conséquence du fait que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq \ell-1}^{m[a]})$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]})$ vérifient cette propriété. Or, comme la plus petite valeur possible de ℓ vérifie $a = \ell - 1$ et que $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\leq a}^{m[a]}) = \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_a^{m[a]})$, une preuve de l'assertion par récurrence découle de prouver seulement que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]})$ sont constants sur C et ce, pour tout $\ell \geq a$ (et pas seulement $\ell > a$).

Preuve de (c). – Nous commençons par montrer que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(F_m)$ sont constants sur une composante connexe C de F_a .

Nous procédons par induction croissante sur $m \geq a$, le cas $m = a$ étant évident. Supposons maintenant que $\mathcal{H}_{\pi!}(F_m)$ est constant sur C . Comme $\Delta_m(X \times F_m)$ est homéomorphe à $\llbracket 1, m \rrbracket \times F_m$, le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m X \times F_m)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{\pi!}(F_m)^m$ et il est donc constant sur C . D'autre part, on a $\mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m) \simeq H_c(X) \otimes_k \mathcal{H}_{\pi!}(F_m)$ et $\mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m)$ est aussi constant sur C . Par conséquent, dans la suite exacte courte de (a)

$$(8) \quad \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_m X \times F_m)[-1] \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(F_{1+m}) \rightarrow \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m) \rightarrow 0,$$

les faisceaux de droite et de gauche sont constants. Nous allons en déduire que celui du centre l'est également.

Critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants ⁽⁷³⁾. – Dans une suite exacte courte de faisceaux sur une composante connexe C de F_a

$$0 \rightarrow \underline{A} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \underline{B} \rightarrow 0,$$

où \underline{A} et \underline{B} sont constants, le faisceau \mathcal{L} est constant, si et seulement si la suite est scindée, donc si et seulement si l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\underline{k}_{F_a}}(\underline{B}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{k}_{F_a}}(\underline{B}, \underline{B})$$

⁽⁷²⁾ Voir aussi la remarque 4.2.3.

est surjective, et comme \underline{B} est constant ceci équivaut à la surjectivité de

$$\Gamma(C, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(C, \underline{B}) = B_z, \quad \forall z \in C.$$

Dans le cas de la suite de faisceaux (8), si $\bar{x} \in F_a$ et si C est la composante connexe de F_a contenant \bar{x} , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(C, \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m)) &= \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m)_{\bar{x}} = H_c(X) \otimes \mathcal{H}_{\pi!}(F_m)_{\bar{x}} \\ &= H_c(X) \otimes H_c(\pi_a^{-1}\bar{x}), \end{aligned}$$

d'après 12.2.2.

D'autre part, le morphisme $\Gamma(C, _) \rightarrow (_)_{\bar{x}}$ « germe en \bar{x} », donne sur le *préfaisceau* $\overline{\mathcal{H}}_{\pi!} X \times F_m$

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(C, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(X \times F_m)) & \longrightarrow & \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(X \times F_m)_{\bar{x}} = \Gamma(C, \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c(X) \otimes H_{\pi!}(CF_m) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \rho_C} & H_c(X) \otimes H_c(\pi_a^{-1}\bar{x}), \end{array}$$

où l'on voit apparaître la restriction $\rho_C : H_{\pi!}(CF_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ qui est surjective comme conséquence de la surjectivité de $\rho_{m,a} : H_{\pi!}(F_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$, d'après 12.2.6, et du fait que, dans la décomposition

$$H_{\pi!}(F_m) = \bigoplus_{C' \in \Pi_0 F_a} H_{\pi!}(C' F_m),$$

la restriction $H_{\pi!}(C' F_m) \rightarrow H_c(\pi_a^{-1}\bar{x})$ est nulle si $C' \not\ni \bar{x}$. Le morphisme 9 est par conséquent surjectif. Comme d'autre part une section globale d'un préfaisceau détermine une section globale du faisceau associé, le diagramme naturel induit par les prolongements par zéro

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(C, \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(F_{1+m})) & \xrightarrow{j_!} & \Gamma(C; \overline{\mathcal{H}}_{\pi!}(X \times F_m)) \\ \downarrow & & \downarrow \text{morphisme (9)} \\ \Gamma(C, \mathcal{H}_{\pi!}(F_{1+m})) & \xrightarrow{j_!} & \Gamma(C; \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m)) \end{array}$$

permet de conclure à la surjectivité du morphisme

$$\Gamma(C, \mathcal{H}_{\pi!}(F_{1+m})) \twoheadrightarrow \Gamma(C, \mathcal{H}_{\pi!}(X \times F_m))$$

et le critère de trivialité d'extensions de faisceaux constants s'applique. Le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(F_{1+m})$ est donc bien constant sur C .

Preuve de la deuxième partie de (c). – D'après le commentaire à la fin de la preuve de (b), il suffit de prouver que les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]})$ sont constants sur les composantes connexes de F_a .

On a la décomposition en parties ouvertes (cf. 2.3.3)

$$\Delta_{\ell}^m = \coprod_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)} F_{\mathfrak{p}}.$$

L'inclusion $F_{\mathbf{p}} \subseteq \Delta_{\ell}^{m[a]}$ a lieu si et seulement si la partition \mathbf{p} de $[[1, m]]$ décompose l'intervalle $[[m - a + 1, m]]$ en singletons. Appelons une telle partition « π_a -adaptée ». Si \mathbf{p} n'est pas π_a -adaptée, on a $F_{\mathbf{p}} \cap \Delta_{\ell}^{m[a]} = \emptyset$.

Si \mathbf{p} est π_a -adaptée, la projection $\pi_a : F_{\mathbf{p}} \rightarrow F_a$ (sur les a derniers termes) est trivialement équivalente à des projections $\pi_a : F_{\ell} \rightarrow F_a$ déjà traitées. Le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(F_{\mathbf{p}})$ est donc constant sur les composantes connexes de F_a . On conclut ensuite grâce à la décomposition évidente $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]}) = \bigoplus_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_{\pi!}(F_{\mathbf{p}})$, où \mathbf{p} décrit l'ensemble des partitions $\mathbf{p} \in \mathfrak{P}_{\ell}(m)$ qui sont π_a -adaptées. \square

12.3.3. Remarque et notation. – L'assertion 12.3.2-(c) est la généralisation de la trivialité monodromique annoncée dans les commentaires 1.11.2 et 2.2.2, du fait qu'elle donne pour la fibration $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ une identification canonique des fibres du faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(F_{b+a}(X))_{\bar{x}} = H_c(F_b(X \setminus \bar{x}))$ lorsque \bar{x} parcourt une composante connexe C de $F_a(X)$.

L'assertion permet de comprendre le sens à donner à la notation ' $H_c(F_m(X \setminus \mathbf{a}))$ ' où $a, m \in \mathbb{N}$, lorsque X est i -acyclique (cf. 12.4.4).

12.4. Dégénérescence des suites spectrales de Leray

12.4.1. Critère élémentaire de dégénérescence. – Nous donnons ici un critère de dégénérescence de suites spectrales par comparaison à une suite spectrale dégénérée. Le critère est très élémentaire, mais il sera utilisé à plusieurs reprises, ce qui justifie que nous l'énoncions séparément.

Avertissement. – Comme il est d'usage, l'expression « la suite spectrale (\mathbb{E}_r, d_r) est dégénérée » sera synonyme de « $d_r = 0$, pour tout $r \geq 2$ ».

PROPOSITION 12.4.2. – *Soit $\{\varphi_r : (\mathbb{E}_r, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}'_r, d'_r) \mid r \in \mathbb{N}\}$ un morphisme de suites spectrales.*

- (a) *Si (\mathbb{E}_r, d_r) est dégénérée et φ_2 est surjectif, alors (\mathbb{E}'_r, d'_r) est dégénérée.*
- (b) *Si (\mathbb{E}'_r, d'_r) est dégénérée et φ_2 est injective, alors (\mathbb{E}_r, d_r) est dégénérée.*

Dans les deux cas on a $\varphi_r = \varphi_2$, pour tout $r \geq 2$.

Démonstration. – (a) On montre par induction sur $r \geq 2$, que $d'_r = 0$ et que $\varphi_r = \varphi_2$. Lorsque $r := 2$, le complexe (\mathbb{E}'_2, d'_2) est quotient de $(\mathbb{E}_2, 0)$ par hypothèse, donc $d'_2 = 0$. Maintenant, si nous avons montré que $d'_r = 0$, on aura $\varphi_{r+1} = \varphi_r$ et alors $\varphi_{r+1} = \varphi_2$ puisque par hypothèse inductive $\varphi_r = \varphi_2$, le morphisme de complexes φ_{r+1} est alors surjectif et $d'_{r+1} = 0$. L'assertion (b) suit d'un raisonnement dual. \square

12.4.3. Les suites spectrales de Leray. – Le théorème 12.3.2 établit que pour un espace i -acyclique X , les faisceaux

$$\mathcal{H}_{\pi!}^i(\Delta_{? \ell}^{m[a]}) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{m[a]}}), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

sont constants sur les composantes connexes de $F_a(X)$.

Notons $c : F_a \rightarrow \{\text{pt}\}$ l'application constante. Comme nous l'avons déjà rappelé dans 12.1.1, la théorie des foncteurs dérivés donne des identifications

$$\mathbb{R}(c_\phi \circ \pi_{a!})(\underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{m[a]}}) = \mathbb{R}c_\phi(\mathbb{R}\pi_{a!}(\underline{k}_{\Delta_{? \ell}^{m[a]}})), \quad \text{où } \phi \in \{*, !\},$$

dont on tire les suites spectrales de Leray

$$(\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{m[a]})_\varphi, d_r), \quad \text{où } \varphi \in \{\pi!, c\}.$$

Ces suites se décomposent en sommes directes de suites spectrales

$$\mathbb{E}_r(\Delta_{? \ell}^{m[a]})_\varphi = \bigoplus_{C \in \Pi_0 F_a} \mathbb{E}_r(C \Delta_{? \ell}^{m[a]})_\varphi,$$

où C est une composante connexe de F_a ⁽⁷⁴⁾. Les termes de $\mathbb{E}_2(C \Delta_{? \ell}^{m[a]})_\varphi$ sont

$$\mathbb{E}_2(C \Delta_{? \ell}^{m[a]})_\varphi := H_\phi(C, \mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{m[a]})), \quad \text{où } H_\phi \in \{H_{\pi!}, H_c\},$$

et comme le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{? \ell}^{m[a]})$ est constant sur C , on a respectivement

$$(\mathbb{E}_2(C)) \quad \begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q}(C \Delta_{? \ell}^{m[a]})_c := H_c^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \implies H_c^{p+q}(\Delta_{? \ell}^{m[a]}), \\ \mathbb{E}_2^{p,q}(C \Delta_{? \ell}^{m[a]})_{\pi!} := H^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \implies H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{? \ell}^{m[a]}), \end{cases}$$

où F_C désigne la fibre de $\pi_a : \Delta_{? \ell}^{m[a]} \rightarrow F_a$ au-dessus de C .

12.4.4. Remarque et notations. – Concernant l'expression « F_C est la fibre de π_a », on rappelle que bien que ces fibres ne sont généralement pas homéomorphes, nous les notons depuis 4.2.3 par ' $F_b(X \setminus \mathbf{a})$ '. C'est une notation commode mais qui demande à être réinterprétée en fonction du contexte. Par exemple, les termes $\mathbb{E}_2(F_{b+a}(X))_\varphi$ sont notés de manière succincte

$$(10) \quad \mathbb{E}_2(UF_{b+a}(X))_\varphi = H_\phi(U) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})).$$

Lorsque $U \subseteq F_a(X)$ est connexe, le fait que le faisceau $\mathcal{H}_{\pi!}(F_{b+a}(X))$ est constant au-dessus de U enlève toute ambiguïté à la notation $H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))$ (cf. 12.3.3). Autrement, l'égalité (10) sous-entend la décomposition de U en composantes connexes, notées C , et l'interprétation de $\mathbb{E}_2(UF_{b+a}(X))_\varphi$ comme la somme $\bigoplus_C \mathbb{E}_2(CF_{b+a}(X))_\varphi$ des formules $(\mathbb{E}_2(C))$ ci-dessus.

L'intérêt pratique de la notation (10) est que, dans la mesure où $\mathcal{P}_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))$ est intrinsèque d'après 4.2.3, elle donne une description immédiate du polynôme de Poincaré de termes $\mathbb{E}_2(UF_{b+a}(X))_\varphi$.

⁽⁷⁴⁾ Les composantes connexes C sont des ouverts connexes par arcs, car nos espaces sont localement contractiles.

12.4.5. Le cas où $\dim(H_c(X)) < +\infty$. – Lorsque X est i -acyclique et que $\dim H_c(X) < +\infty$, on a $H_c(F_m(X \setminus n)) < +\infty$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, d’après 2.4.2-(c). Les remarques 4.2.3 et 12.2.8 s’appliquent alors au cas de la fibration $\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$ de fibre $F_b(X \setminus a)$, de sorte que, pour tout ouvert U de $F_a(X)$, on a

- (A) si $H_c(U) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_c(UF_{b+a}(X)) = \mathcal{P}_c(U) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus a))$;
- (B) si $H(U) < +\infty$, alors $\mathcal{P}_{\pi!}(UF_{b+a}(X)) = \mathcal{P}(U) \cdot \mathcal{P}_c(F_b(X \setminus a))$.

On en déduit, respectivement dans chaque cas, que :

- (A) si $H_c(U) < +\infty$, alors

$$\dim_k \mathbb{E}_2(UF_{b+a})_c = \dim_k H_c(UF_{b+a}) = \dim_k \mathbb{E}_\infty(UF_{b+a})_c ;$$

- (B) si $H(U) < +\infty$, alors

$$\dim_k \mathbb{E}_2(UF_{b+a})_{\pi!} = \dim_k H_{\pi!}(UF_{b+a}) = \dim_k \mathbb{E}_\infty(UF_{b+a})_{\pi!} ;$$

et on conclut que les suites $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a})_c, d_r)$ et $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées, car si jamais on avait $d_r \neq 0$ pour un certain r , on aurait forcément

$$\dim(\mathbb{E}_2) \geq \dim(\mathbb{E}_r) > \dim(\mathbb{E}_{r+1}) \geq \dim(\mathbb{E}_\infty),$$

ce qui n’est pas le cas.

REMARQUE 12.4.6. – Dans cette approche, la finitude joue un rôle essentiel mais nous verrons qu’elle n’est pas nécessaire. La proposition suivante s’affranchi des hypothèses de finitude sur U , mais demande encore celle sur X . Ce sera le théorème 12.4.9 qui aura l’énoncé le plus général, i.e. sans aucune hypothèse de finitude sur X .

PROPOSITION 12.4.7. – *Soit X un espace i -acyclique tel que $\dim_k H_c(X) < \infty$. Alors, pour tout ouvert $U \subseteq F_a(X)$, les suites spectrales $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a}(X))_c, d_r)$ et $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées.*

Démonstration. – Comme $F_a(X)$ est localement connexe par arcs, il suffit de considérer le cas où U est connexe. Nous pouvons alors fixer une famille croissante $\mathcal{U} := \{\uparrow U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ d’ouverts connexes et de type fini qui recouvre $F_a(X)$. Pour chaque $U_m \in \mathcal{U}$, on considère le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} U_m \times_U UF_{b+a} & \xlongequal{\quad} & U_m F_{b+a} \hookrightarrow UF_{b+a} \\ & & \begin{array}{ccc} \pi_a \downarrow & \boxtimes & \downarrow \pi_a \\ U_m \hookrightarrow & \xrightarrow{j_m} & U. \end{array} \end{array}$$

La suite spectrale $\mathbb{E}(UF_{b+a})_c$. – Le cas où $\dim_k H_c(U) < \infty$ est celui déjà considéré dans 12.4.5-(A) où $(\mathbb{E}_r(F_a)_c, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas général on a recours au recouvrement \mathcal{U} . Les morphismes canoniques

$$j_m! \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}} = \mathbb{R}\pi_{a!} j_m! \underline{k}_{U_m F_{b+a}} \rightarrow \underline{k}_{UF_{b+a}}$$

induisent un morphisme de « prolongement par zéro » de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r) \quad j_m! : (\mathbb{E}_r(U_m), d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(U), d_r),$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme de complexes

$$(\mathbb{E}_2) \quad H_c(U_m) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})) \xrightarrow{j_m! \otimes \text{id}} H_c(U) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})).$$

Maintenant, le fait que $\varinjlim_m j_m! : \varinjlim_m H_c(U_m) = H_c(U)$ implique que le morphisme de complexes

$$\varinjlim_m j_m! \otimes \text{id} : \varinjlim_m (\mathbb{E}_2(U_m), d_2) \rightarrow (\mathbb{E}_2(U), d_2)$$

est bijectif, et alors, comme les suites $(\mathbb{E}(U_m), d_r)$ sont dégénérées, le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et $(\mathbb{E}_r(U), d_r)$ est bien dégénérée.

La suite spectrale $\mathbb{E}(UF_{b+a})_{\pi!}$. – Le cas où $\dim_k H(U) < +\infty$ est celui déjà considéré dans 12.4.5-(B) où $(\mathbb{E}_r(F_a)_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. Dans le cas général on a recours au recouvrement \mathcal{U} . Les morphismes canoniques

$$\mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{UF_{b+a}} \rightarrow \mathbb{R}j_{m*} j_m^{-1} \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{UF_{b+a}} = \mathbb{R}j_{m*} \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}}$$

donnent les morphismes « de restriction » de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(U; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{UF_{b+a}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_m; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}}),$$

d'où les morphismes de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r(UF_{b+a})_{\pi!}, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a})_{\pi!}, d_r),$$

et donc le morphisme de suites spectrales

$$(11) \quad (\mathbb{E}_r(UF_{b+a})_{\pi!}, d_r) \rightarrow \varinjlim_m (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a})_{\pi!}, d_r).$$

Or, comme l'application en homologie $\varinjlim_m H_*(U_m, k) \rightarrow H_*(U, k)$ est bijective, on a par dualité, que $H(U) = \varprojlim_m H(U_m)$ l'est également. On en déduit les identifications suivantes pour les termes \mathbb{E}_2 ,

$$\begin{aligned} U\mathbb{E}_2(F_{b+a})_{\pi!} &= H(U) \otimes H_c(F) \\ (\mathbb{E}_2) \quad &= \left(\varprojlim_m H(U_m) \right) \otimes H_c(F) = \varprojlim_m (H(U_m) \otimes H_c(F)) \\ &= \varprojlim_m \mathbb{E}_2(U_m F_{b+a})_{\pi!}, \end{aligned}$$

où on a noté $H_c(F) := H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))$ et où l'égalité de la ligne centrale est justifiée par le fait que $\dim_k H_c(F) < +\infty$. Ces identifications sont compatibles aux différentielles d_2 . Les conclusions de (B) s'appliquent aux suites $(\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a})_{\pi!}, d_r)$,

et alors $d_2 = 0$ dans $\mathbb{E}_2(UF_{b+a})_{\pi!}$. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a})_{\pi!}, d_r)$ est bien dégénérée. \square

12.4.8. Le cas général. – Nous nous affranchissons maintenant de l'hypothèse de finitude pour $H_c(X)$ et montrons la dégénérescence des suites spectrales en question en nous appuyant sur la proposition précédente 12.4.7.

THÉORÈME 12.4.9 (de dégénérescence). – *Soient $a \leq \ell \leq m \in \mathbb{N}$. Soit X un espace i -acyclique. Pour tout ouvert $U \subseteq F_a(X)$, les applications $\pi_a : U\Delta_{\ell}^{m[a]} \rightarrow U$ donnent lieu à des suites spectrales de Leray pour les cohomologies $H_c(_)$ et $H_{\pi!}(_)$ notées respectivement*

$$(\mathbb{E}_r) \quad (\mathbb{E}_r(U\Delta_{\ell}^{m[a]})_c, d_r) \text{ et } (\mathbb{E}_r(U\Delta_{\ell}^{m[a]})_{\pi!}, d_r),$$

telles que

$$\begin{cases} \bigoplus_{C \in \Pi_0 U} \mathbb{E}_2^{p,q}(C\Delta_{\ell}^{m[a]})_c = H_c^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_c^{p+q}(\Delta_{\ell}^{m[a]}), \\ \bigoplus_{C \in \Pi_0 U} \mathbb{E}_2^{p,q}(C\Delta_{\ell}^{m[a]})_{\pi!} = H^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(\Delta_{\ell}^{m[a]}), \end{cases}$$

où C désigne une composante connexe de U et où F_C désigne une fibre quelconque de π_a au-dessus de C . De plus, les suites spectrales (\mathbb{E}_r) sont dégénérées.

Démonstration. – Compte tenu des résultats qui précèdent, il ne nous reste qu'à justifier la dégénérescence des suites spectrales, ce pour quoi nous allons nous limiter aux ouverts U connexes. Les faisceaux $\mathcal{H}_{\pi!}(\Delta_{\ell}^{m[a]})$ sont donc constants sur U .

On fixe une famille croissante $:= \{\uparrow V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts V_n (pas forcément connexes) de type fini qui recouvre X .

Le cas des fibrations $\pi_a : UF_{b+a}(X) \rightarrow U \subseteq F_a(X)$

Dégénérescence de $(U\mathbb{E}_r(F_{b+a})_{c,\pi!}, d_r)$. – Compte tenu de la proposition 12.4.7, nous avons juste à vérifier le cas où $\dim_k(H_c(X)) = \infty$.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, notons $U_m := F_a(V_m) \cap U$. La famille $\mathcal{U} := \{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est clairement un recouvrement ouvert croissant de U . On remarquera aussi que l'on des inclusions ouvertes

$$U_m \subseteq F_a(V_m) \subseteq F_a(V_n) \subseteq F_a(X)$$

pour tout $m \leq n$.

Considérons ensuite les diagrammes commutatifs où $n \geq m$

$$\begin{array}{ccccccc} F_{b+a}(V_n) & \longleftarrow & U_m F_{b+a}(V_n) & \xrightarrow{C_{j_m,n}} & U_m F_{b+a}(X) & \xleftarrow{j_m} & UF_{b+a}(X) \\ \pi_a \downarrow & & \pi_a \downarrow & & \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi_a \\ F_a(V_n) & \longleftarrow & U_m & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & U_m & \xrightarrow{j_m} & U. \end{array}$$

Les sous-diagrammes (I) et (III) sont des produits fibrés et les cohomologies à support compact des fibres de π_a y sont (constantes car U est connexe) respectivement $F_b(V_n \setminus \mathbf{a})$ et $F_b(X \setminus \mathbf{a})$.

Dans le sous-diagramme (II), la base est constante et seules les fibres changent. La famille croissante de plongements ouverts $\{j_{m,n}\}_n$ recouvre $U_m F_{b+a}(X)$ et les morphismes de complexes

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}C_\phi \mathbb{R}\pi_{a!} j_{m,n}! \underline{k}_{U_m F_{b+a}(V_n)} \rightarrow \mathbb{R}C_\phi \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}(X)},$$

où $c : U_m \rightarrow \{\text{pt}\}$ est l'application constante et $\phi \in \{*, !\}$, induisent alors les morphismes de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r) \quad \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(V_n))_\varphi, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_\varphi, d_r),$$

où $\varphi \in \{\pi!, c\}$, qui s'identifient pour $r = 2$, au morphisme

$$(\mathbb{E}_2) \quad \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (H_\phi(U_m) \otimes H_c(F_b(V_n \setminus \mathbf{a}))) \xrightarrow{\text{id} \otimes j_n!} H_\phi(U_m) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})),$$

où $H_\phi \in \{H, H_c\}$ et où $j_n : H_c(V_n) \rightarrow H_c(X)$ est le prolongement par zéro. Or, comme la famille $\{F_a(V_n)\}_{n \geq m \in \mathbb{N}}$ recouvre $F_b(X \setminus \mathbf{a})$, la limite inductive des morphismes $(\text{id} \otimes j_n!)$ est un isomorphisme.

Enfin, les suites spectrales $(\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(V_n))_\varphi, d_r)$ sont dégénérées d'après 12.4.7 puisque $\dim H_c(V_n) < \infty$. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et les suite spectrales $(\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_\varphi, d_r)$ sont bien dégénérées.

Revenons maintenant au sous-diagramme (III). Ici, les fibres sont fixes et égales à $F_b(X \setminus \mathbf{a})$ mais la base change. Aussi, nous avons deux situations différentes à considérer.

La suite spectrale $(\mathbb{E}_r(U F_{b+a}(X))_c, d_r)$. – Les morphismes de complexes des prolongements par zéro

$$\varinjlim_m \mathbb{R}C! \mathbb{R}\pi_{a!} j_m! \underline{k}_{U_m F_{b+a}(X)} \rightarrow \mathbb{R}C! \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U F_{b+a}(X)}$$

induisent un morphisme de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r) \quad \varinjlim_m (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_c, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(U F_{b+a}(X))_c, d_r),$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$(\mathbb{E}_2) \quad \varinjlim_m (H_c(U_m) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))) \xrightarrow{\varinjlim_m j_m! \otimes \text{id}} H_c(U) \otimes H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a})),$$

clairement bijectif puisque $\{U_m\}$ recouvre U . Ce fait, et la dégénérescence déjà établie des suites spectrales $(\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_c, d_r)$ font que le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et la suite spectrale $(\mathbb{E}_r(U F_{b+a}(X))_c, d_r)$ est dégénérée.

La suite spectrale $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r)$. – On commence par rappeler le morphisme canonique de restriction de complexes dans $D^+(U)$

$$\mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{UF_{b+a}(X)} \rightarrow \mathbb{R}\pi_{a!} \mathbb{R}j_{m*} \underline{k}_{U_m F_{b+a}(X)} = \mathbb{R}j_{m*} \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}(X)},$$

où l'égalité est justifiée puisque (III) est un produit fibré. On en déduit le morphisme de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma(U; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{UF_{b+a}(X)}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_m; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U_m F_{b+a}(X)}),$$

qui donne lieu au morphisme de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r) \quad (\mathbb{E}_r(UF_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r) \rightarrow \varprojlim_m (\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r),$$

qui s'identifie pour $r = 2$, au morphisme

$$(\mathbb{E}_2) \quad H(U) \otimes H_c(F_b(X \setminus a)) \xrightarrow{\varprojlim_m j_m^* \otimes \text{id}} \varprojlim_m (H(U_m) \otimes H_c(F_b(X \setminus a))).$$

Or, comme $\{U_m\}$ recouvre U , on a $H(U) = \varprojlim_m H(U_m)$ et (\mathbb{E}_2) est injectif. Nous savons d'autre part, que les suites spectrales $(\mathbb{E}_r(U_m F_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r)$ sont dégénérées. Le critère de dégénérescence 12.4.2 s'applique et la suite spectrale $(\mathbb{E}_r(UF_{b+a}(X))_{\pi!}, d_r)$ est dégénérée.

Ceci termine la preuve du cas des fibrations $\pi_a : UF_{b+a}(X) \rightarrow U \subseteq F_a(X)$.

Le cas des fibrations $\pi_a : U\Delta_\ell^{[a]}X^m \rightarrow U \subseteq F_a(X)$. – Résulte du cas précédent, en raison de la décomposition ouverte ⁽⁷⁵⁾

$$\Delta_\ell^{[a]}X^m = \coprod_{\mathfrak{p}} F_{\mathfrak{p}},$$

où \mathfrak{p} est une partition π_a -adaptée de $\mathfrak{P}_\ell(m)$, et où $F_{\mathfrak{p}} \simeq F_\ell$.

Le cas des fibrations $\pi_a : U\Delta_{\leq \ell}^{[a]}X^m \rightarrow U \subseteq F_a(X)$. – Notons $j : U\Delta_\ell^{m[a]} \rightarrow U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}$ l'inclusion ouverte. Le prolongement par zéro

$$j! \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U\Delta_\ell^{m[a]}} = \mathbb{R}\pi_{a!} j! \underline{k}_{U\Delta_\ell^{m[a]}} \rightarrow \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}}$$

donne lieu aux morphismes de complexes

$$\mathbb{R}\Gamma_\phi(U; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U\Delta_\ell^{m[a]}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_\phi(U; \mathbb{R}\pi_{a!} \underline{k}_{U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]}}),$$

avec $\Gamma_\phi \in \{\Gamma, \Gamma_c\}$, qui induisent des morphismes de suites spectrales

$$(\mathbb{E}_r) \quad (\mathbb{E}_r(U\Delta_\ell^{m[a]})_\varphi, d_r) \rightarrow (\mathbb{E}_r(U\Delta_{\leq \ell}^{m[a]})_\varphi, d_r),$$

avec $\varphi \in \{\pi!, c\}$, qui s'identifient pour $r := 2$, aux morphismes

$$(\mathbb{E}_2) \quad H_\phi(U) \times H_c(F_\ell) \xrightarrow{\text{id} \otimes j!} H_\phi(U) \times H_c(F_{\leq \ell}),$$

⁽⁷⁵⁾ Cf. fin de la démonstration du théorème 12.3.2.

avec $H_\phi \in \{H, H_c\}$, et où $F_{\gamma\ell}$ désigne la fibre de $\pi_a : U\Delta_{\gamma\ell}^{m[a]} \rightarrow U$, et

$$(12) \quad j! : H_c(F_\ell) \rightarrow H_c(F_{\leq\ell})$$

est le prolongement par zéro. Or, le théorème 12.2.4-(b) établit la surjectivité du prolongement par zéro

$$(13) \quad H_{\pi!}(V\Delta_\ell^{m[a]}) \rightarrow H_{\pi!}(V\Delta_{\leq\ell}^{m[a]}),$$

pour tout $V \subseteq F_a$. Si maintenant V parcourt une base de voisinages connexes d'un point, la proposition 12.2.2 assure la surjectivité de (12), et donc aussi celle des morphismes (\mathbb{E}_2) . Comme la dégénérescence de $(\mathbb{E}_r(U\Delta_{\leq\ell}^{m[a]})_\phi, d_r)$ a été déjà établie, le critère 12.4.2 s'applique et $(\mathbb{E}_r(U\Delta_{\leq\ell}^{m[a]})_\phi, d_r)$ est aussi dégénérée. \square

12.4.10. Sur l'action de $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ sur la suite spectrale de Leray. – Reprenons la discussion de 10.7. Pour $a, b \in \mathbb{N}$, réalisons $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ comme le sous-groupe de \mathcal{S}_{b+a} des permutations laissant stables les sous-intervalles $[[1, b]]$ et $[[b+1, b+a]]$ et faisons-le agir sur F_{b+a} par son action naturelle à travers \mathcal{S}_{b+a} . Faisons-le ensuite agir sur $F_a(X)$, à travers de la projection sur \mathcal{S}_a . La projection (cf. 2.1-(N-3))

$$\pi_a : F_{b+a}(X) \rightarrow F_a(X)$$

est alors $\mathcal{S}_b \times \mathcal{S}_a$ -équivariante.

12.4.10.1. Action de \mathcal{S}_b sur $\mathbb{E}_2^{p,q}(C)$. – Notons par $\Phi_h : F_{b+a} \rightarrow F_{b+a}$ l'homéomorphisme de l'action de $h \in \mathcal{S}_b$. On a $\pi_a \circ \Phi_h = \pi_a$. L'action de Φ_h respecte donc les fibres de π_a et l'action induite sur $H_c(C, \mathcal{H}_{\pi!}^i(F_a(X)))$ correspond à l'action de \mathcal{S}_b sur le second facteur du produit tensoriel $H_c(C) \otimes H_c(F_C)$.

12.4.10.2. Action de \mathcal{S}_a sur $\mathbb{E}_2^{p,q}(\mathcal{S}_a C)$. – Les exemples de la proposition 10.7.1, montrent bien que l'action de \mathcal{S}_a sur $H_c(\mathcal{S}_a C, \mathcal{H}_{\pi!}^i(F_a(X)))$ ne correspond pas à l'action de \mathcal{S}_a sur le premier facteur des termes $H_c(\mathcal{S}_a C) \otimes H_c(F_C)$, et ne se voit donc pas sur la suite spectrale de Leray.

12.4.10.3. Conclusion. – Ces remarques montrent que seule l'action $\mathcal{S}_b \times \mathbf{1}_a$ sur les cohomologies $H_c(F_{b+a}(X))$ et $H_{\pi!}(F_{b+a}(X))$ se voit sur les termes \mathbb{E}_2 des suites spectrales de Leray (cf. 12.4.9)

$$\begin{cases} \bigoplus_C \mathbb{E}_2^{p,q}(C) := H_c^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_c^{p+q}(F_{b+a}), \\ \bigoplus_C \mathbb{E}_2^{p,q}(C) := H^p(C) \otimes H_c^q(F_C) \Rightarrow H_{\pi!}^{p+q}(F_{b+a}). \end{cases}$$

Elle se voit comme étant l'action de \mathcal{S}_b sur $H_c(F_C) = H_c(F_b(X \setminus \mathbf{a}))$.

CHAPITRE 13

QUESTIONS DIVERSES SUR LES ESPACES i -ACYCLIQUES

Nous rassemblons ici des exemples d'espaces i -acycliques ainsi que des contre-exemples à certaines propriétés liées à l' i -acyclicité.

13.1. Recouvrements fermés i -acycliques

†⁽⁷⁶⁾ Si X admet un recouvrement fini $X = \bigcup_{j=1}^n F_j$ par des parties fermées F_j , telles que les intersections finies $F_{j_1 \dots j_r}$ sont toutes i -acycliques, alors X est i -acyclique.

Démonstration. – Soit $X' := F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$. On a le morphisme de suites exactes longues de Mayer-Vietoris associées au recouvrement fermé $X = X' \cup F_n$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & H_c(X' \cap F_n) & \xrightarrow[\text{[+1]}]{c} & H_c(X) & \xrightarrow{(\rho_1, \rho_2)} & H_c(X') \oplus H_c(F_n) & \longrightarrow \\
 & \epsilon_{X' \cap F_n} \downarrow & & \epsilon_X \downarrow & & \epsilon_{X'} \downarrow & \downarrow \epsilon_{F_n} \\
 \longrightarrow & H(X' \cap F_n) & \xrightarrow[\text{[+1]}]{c} & H(X) & \xrightarrow{(\rho_1, \rho_2)} & H(X') \oplus H_c(F_n) & \longrightarrow,
 \end{array}$$

où X' et $X' \cap F_n$ vérifient les hypothèses de l'énoncé pour des recouvrements à $n - 1$ fermés, nous pouvons donc supposer par hypothèse de récurrence que ces espaces sont i -acycliques. Le diagramme ci-dessus permet alors de conclure que $\epsilon_X = 0$. \square

13.2. Espaces de configuration généralisés

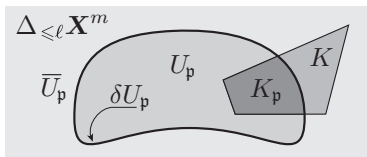
† Si X est i -acyclique, l'espace $\Delta_{?l} X^m$ est i -acyclique pour $0 < l \leq m$.

⁽⁷⁶⁾ Énoncé proposé par le rapporteur.

Démonstration. – Si X est i -acyclique, X^m l'est aussi (1.8.2-(e)), et donc aussi l'ouvert $F_m(X) \subseteq X^m$ (1.8.2-(d)) de même que tout espace $\Delta_\ell X^m$, car réunion disjointe ouverte d'espaces homéomorphes à $F_\ell(X)$ (proposition 2.3.3).

Pour établir la i -acycliticité des espaces $\Delta_{\leq \ell} X^m$, nous utilisons le critère 1.9.1-(c) selon lequel un espace Y est i -acyclique lorsque pour tout compact $K \subseteq Y$, la restriction $\rho_K : H_c(Y) \rightarrow H(K)$ est nulle. Dans le cas présent, le prolongement par zéro $j_i : H_c(\Delta_\ell X^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ est surjectif (3.1.1-(b)) et $\Delta_\ell X^m$ est réunion disjointe des ouverts $U_{\mathfrak{p}} := F_{\mathfrak{p}}(X)$, avec $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\ell(m)$ (cf. 2.3.2), de sorte que le critère en question sera validé par la nullité, pour tous \mathfrak{p} et K , des composées

$$(1) \quad H_c(U_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{j_i} H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \xrightarrow{\rho_K} H(K).$$



Pour \mathfrak{p} et K donnés, notons $\overline{U}_{\mathfrak{p}}$ l'adhérence de $U_{\mathfrak{p}}$ dans $\Delta_{\leq \ell} X^m$, puis

$$\delta U_{\mathfrak{p}} := \overline{U}_{\mathfrak{p}} \setminus U_{\mathfrak{p}} \text{ et } K_{\mathfrak{p}} := K \cap \overline{U}_{\mathfrak{p}}.$$

Les triplets d'espaces $(U_{\mathfrak{p}} \subseteq \overline{U}_{\mathfrak{p}} \supseteq \delta U_{\mathfrak{p}})$ et $(F_\ell(X) \subseteq X^\ell \supseteq \Delta_{\leq \ell-1}^\ell)$ sont homéomorphes et l'annulation de (1) résulte du lemme suivant qui généralise le théorème 3.1.1-(b).

|| LEMME. – Soit X un espace i -acyclique. Pour tout compact $\mathbb{J} \subseteq X^\ell$, le morphisme de restriction

$$(2) \quad H_c(X^\ell) \rightarrow H_c((\Delta_{\leq \ell-1} X^\ell) \cup \mathbb{J})$$

est nul. En particulier, le prolongement par zéro $H_c(F_\ell(X) \setminus \mathbb{J}) \rightarrow H_c(X^\ell)$ est surjectif.

Preuve du lemme. – On procède comme dans la démonstration de 3.1.1. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f_2^{-1}(F_{\ell-1}(X)) & \hookrightarrow & ((\Delta_{\leq \ell-1} X^\ell) \cup \mathbb{J}) \xrightarrow{f} X \times X^{\ell-1} = X^\ell \\ & \searrow f'_2 & \searrow f_2 \downarrow p_2 \\ & & F_{\ell-1}(X) \xrightarrow{j} X^{\ell-1}, \end{array}$$

où f est l'inclusion (fermée) et j est l'inclusion (ouverte). La restriction f'_2 de $f_2 := p_2 \circ f$ est propre puisque si $L \subseteq F_{\ell-1}(X)$ est compact, on a

$$f_2^{-1}(L) = (p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} X^\ell) \cup (p_2^{-1}(L) \cap \mathbb{J}),$$

où $p_2^{-1}(L) \cap \Delta_{\ell-1} X^\ell$ est compact puisque la restriction de p_2 à $\Delta_{\ell-1} X^\ell$ est un revêtement fini au-dessus de $F_{\ell-1}(X)$ (cf. *loc. cit.*). L'annulation de (2) résulte alors d'appliquer 1.9.1-(d), exactement comme dans 3.1.1. Ce qui termine la preuve du lemme. □

Dans la situation présente, ce lemme (avec $\mathbb{J} := K_{\mathfrak{p}}$) nous dit que le morphisme de prolongement par zéro

$$H_c(U_{\mathfrak{p}} \setminus K) \twoheadrightarrow H_c(\overline{U}_{\mathfrak{p}})$$

est surjectif. Une classe de cohomologie $[\alpha] \in H_c(U_{\mathfrak{p}})$ est donc représentée par une cocycle d'Alexander-Spanier $\alpha \in \underline{A}\mathcal{S}(U_{\mathfrak{p}})$ dont le support $|\alpha|$ est compact dans $U_{\mathfrak{p}} \setminus K$. Comme cette partie est ouverte dans $\Delta_{\leq \ell} X^m$, le cocycle α représente aussi l'image $j_![\alpha]$ de $[\alpha]$ dans $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$. Or, on a $|\alpha| \cap K = \emptyset$ et donc $\rho_K(j_![\alpha]) = 0$. L'annulation des morphismes (1) est ainsi établie et l'espace $\Delta_{\leq \ell} X^m$ est bien i -acyclique. \square

13.3. Variétés toriques affines

† On suppose le corps k de caractéristique nulle.

(a) Soit G un groupe fini agissant sur un espace i -acyclique X .

L'espace des orbites X/G est i -acyclique.

(b) Une variété torique affine U_{σ} associée à un cône simplicial σ est i -acyclique.

Démonstration. – (a) résulte de $H_c(X/G) = H_c(X)^G$ et ${}^c H H_c(X/G) = H_c(X)^G$ et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_c(X/G) & \Longrightarrow & H_c(X)^G & \hookrightarrow & H_c(X) \\ \downarrow & & & & \downarrow 0 \\ H(X/G) & \Longrightarrow & H(X)^G & \hookrightarrow & H(X). \end{array}$$

(b) On a $U_{\sigma} = \mathbb{A}_n(\mathbb{C})^G \times (\mathbb{C}^*)^m$, où G est un groupe abélien fini agissant sur l'espace affine complexe $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ (cf. [17], § 2.1, p. 29 et § 2.2, p. 34). \square

13.4. Groupes de Lie non-compacts

† Tout groupe de Lie réel connexe non compact est i -acyclique.

Démonstration. – Comme un groupe de Lie G est une variété différentielle orientable, il revient au même de montrer que G est \cup -acyclique (1.8.2-(c)). Pour cela, on remarque que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Delta_G \times G &\rightarrow G \times G \\ (x, x)g &\mapsto (x, xg) \end{aligned}$$

est bien un homéomorphisme échangeant les plongements fermés

$$\Delta_G \times \{e\} \subseteq \Delta_G \times G, \text{ et } \Delta_G \subseteq G \times G.$$

Le morphisme de restriction à la diagonale $H_c(G \times G) \rightarrow H_c(\Delta_G)$ s'identifie alors, moyennant Künneth, au morphisme

$$\begin{aligned} H_c(\Delta_G) \otimes H_c(G) &\rightarrow H_c(\Delta_G) \otimes H_c(\{e\}) \\ \omega \otimes \varpi &\mapsto \omega \otimes \varpi|_e, \end{aligned}$$

clairement nul lorsque G n'est pas compact.

Commentaire. – Bien que cette démonstration ait le mérite de la simplicité, on doit rappeler le résultat classique de la théorie des groupes de Lie qui dit que tout groupe de Lie G est homéomorphe à un produit $K \times \mathbb{R}^s$, où K est un sous-groupe compact maximal (cf. [5]). Dans ce cas, si G n'est pas compact $s > 0$ et la conclusion suit. \square

13.5. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

† Si $\text{car } k \neq 2$, tout ouvert propre de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est i -acyclique.

Démonstration. – Résulte de ce que $H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}); k) = 0$ pour tout $i < n$. \square

13.6. Ouverts i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

† Soit U un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire contient une hypersurface complexe Z .

- (a) Si $\text{car}(k) = 0$, l'espace U est i -acyclique.
- (b) Si $\text{car}(k) = p > 0$, l'espace U est i -acyclique si $n = 1 \pmod 2$, ou bien si $n = 0 \pmod 2$ et si les degrés des composantes irréductibles de Z sont premiers à p .

Démonstration. – Par 1.8.2-(d), l'assertion résulte aussitôt du cas où l'ouvert est $U := \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus Z$. L'ouvert U est alors une variété complexe affine lisse de dimension n . D'après un théorème de Hamm (cf. [13] th. (6.8) p. 26), il a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini de dimension réelle n . Il s'ensuit que les groupes d'homologie $H_i(X; A)$ sont nuls, pour $i > n$ et tout anneau A , et de même en cohomologie. Comme U est non singulière et orientable, on dispose de la dualité de Poincaré-Lefschetz $H_i(U; A) \simeq H_c^{2n-i}(U; A)$, et donc $H_c^i(U; A) = 0$ pour tout $i < n$. Par conséquent, on a a priori

$$(\epsilon_{U,i} : H_c^i(U; A) \rightarrow H^i(U; A)) = 0, \quad \forall i \neq n,$$

et la preuve de la proposition se réduit à montrer l'annulation de $\epsilon_{U,n}$.

Notons $j : U \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ l'inclusion ensembliste.

Le morphisme $\epsilon_{U,n}$ se factorise à travers $H^n(\mathbb{P}_n)$ suivant les morphismes

$$\begin{array}{c}
 H_c^n(U; A) \xrightarrow{j_!} H^n(\mathbb{P}_n; A) \xrightarrow{j^*} H^n(U; A), \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\epsilon_{U,n}} \uparrow
 \end{array}$$

où $j_!$ désigne le prolongement par zéro et j^* la restriction. On a aussitôt deux cas à considérer suivant la parité de n .

Le cas $n = 1 \pmod 2$. – On a $H^n(\mathbb{P}_n; A) = 0$ et donc $\epsilon_{U,n} = 0$. La proposition est alors prouvée et ce, quel que soit l'anneau de coefficients A .

Le cas $n \equiv 0 \pmod 2$. – On a $H(\mathbb{P}_n; A) = A$. Dans ce cas, on a intérêt à reprendre notre convention et considérer que l’anneau de coefficients A est un corps, auquel cas on a l’équivalence

$$(3) \quad (\epsilon_{U,n} = 0) \iff \left(\begin{array}{c} \text{le morphisme de restriction} \\ \rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(Z) \\ \text{est injectif} \end{array} \right).$$

En effet, comme $H^n(\mathbb{P}_n)$ est une droite vectorielle, l’annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaut au fait que soit $j_!$, soit j^* , est nul. Or, la dualité de Poincaré échange ces morphismes et il sont tous les deux nuls ou non nuls. Ainsi, l’annulation de $\epsilon_{U,n}$ équivaut à l’annulation de $j_!$ et donc à l’injectivité de ρ_n , par la suite exacte longue de cohomologies.

$$\dots \rightarrow H_c^n(U) \xrightarrow{j_!} H^n(\mathbb{P}_n) \xrightarrow{\rho_n} H^n(Z) \rightarrow \dots$$

Notons L l’opérateur sur $H(\mathbb{P}_n)$ et $H(Z)$ de multiplication par la classe fondamentale $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n)$ de $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P}_n$, et considérons le diagramme commutatif suivant où la deuxième ligne est la suite exacte de cohomologies

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} H^n(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(Z) & & \\ & & \downarrow L^{(n-2)/2} & & \\ & & \oplus & & \\ & & \downarrow L^{(n-2)/2} & & \\ \dots H_c^{2n-2}(U) & \xrightarrow{j_!} & H^{2n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow{\rho_{2n-2}} & H^{2n-2}(Z) \xrightarrow{c} H_c^{2n-1}(U) \dots \end{array}$$

Nous avons maintenant besoin de plus de renseignements sur le morphisme de liaison c . Pour cela, on commence par remarquer que l’on peut supposer Z irréductible. En effet, si Z' est une composante irréductible de Z , l’ouvert $U = \mathbb{P}_n \setminus Z$ est contenu dans l’ouvert $U' = \mathbb{P}_n \setminus Z'$ et il est donc i -acyclique si U' l’est (proposition 1.8.2-(d)).

Supposons donc que $Z = V(f)$ est irréductible et, compte tenu des hypothèses, que $\deg f$ n’est pas multiple de la caractéristique du corps de coefficients. L’espace vectoriel $H^{2n-2}(Z)$ est alors de dimension 1 et comme

$$(5) \quad H_c^{2n-1}(U; \mathbb{Z}) = H_1(U; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(\deg f)$$

(cf. [13] chap. 4, prop. 1.3, p. 102), on a $H_c^{2n-1}(U) = H_1(U) = 0$. Ces données reportées sur (4) assurent que ρ_{n-2} est surjective, et donc injective aussi. L’injectivité de ρ_n découle alors de la commutativité du même diagramme. \square

REMARQUE 13.6.1. – L’hypothèse dans la proposition 13.6 concernant la caractéristique du corps de coefficients de la cohomologie est optimale. En effet, si $Z = V(f) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ avec f irréductible homogène de degré p , on a pour $U := \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \setminus V(f)$ d’après (5) :

$$H_c^3(U; \mathbb{F}_p) \simeq H_1(U; \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p,$$

auquel cas, la suite exacte longue de cohomologie devient

$$H^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\rho_2} (H^2(V(f); \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \xrightarrow{c} (H^3(U; \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p) \rightarrow 0,$$

le morphisme c est bijectif, et alors nécessairement $\rho_2 = 0$.

On en déduit la surjectivité de $j_! : H_c^2(U; \mathbb{F}_p) \rightarrow H_c^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p)$ et, par dualité, l'injectivité de $j^* : H^2(\mathbb{P}_2; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^2(U; \mathbb{F}_p)$. À partir de là, la non-nullité de $\epsilon_{U;2} = j^* \circ j_!$ découle de ce que $H^2(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}); \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$. L'ouvert U n'est donc pas i -acyclique pour la cohomologie à coefficients dans \mathbb{F}_p .

REMARQUE 13.6.2. – Dans le cas où la proposition 13.6 intéresse la cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, le fait que $H_!(U)$ soit concentrée en dimension moitié n , peut aussi être justifié en invoquant le théorème de comparaison de Grothendieck entre la cohomologie des formes différentielles holomorphes (dont le degré est *a priori* majoré par n) et la cohomologie du faisceau constant.

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-2}(U) & & \\ \downarrow j_! & & \\ H^{n-2}(\mathbb{P}_n) & \xrightarrow[\sim]{L} & H^n(\mathbb{P}_n) \\ \downarrow \rho_{n-2} & & \downarrow \rho_n \\ H^{n-2}(Z) & \xrightarrow{L} & H^n(Z). \end{array}$$

Dans le même ordre d'idées, si l'on se restreint au cas où l'hypersurface est supposée non-singulière, l'injectivité de ρ_n (et donc la i -acycliticité de U) admet aussi une justification via le théorème de Lefschetz vache. En effet, notons L l'opérateur de multiplication par la classe génératrice $\omega \in H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ et considérons, pour n pair, le diagramme commutatif ci-contre.

L'injectivité de $\rho_n : H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(Z)$ découle alors par une chasse au diagramme élémentaire de ce que :

- $L : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n)$ est trivialement bijectif,
- $L : H^{(n-1)-1}(Z) \rightarrow H^{(n-1)+1}(Z)$ est bijectif d'après le théorème de Lefschetz.
- $\rho_{n-2} : H^{n-2}(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^{n-2}(Z)$ est injectif puisque $H_c^{n-2}(U) = 0$ en raison de précisément de l'affinité de U .

13.7. Ouverts non i -acycliques de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

† Un ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont le complémentaire est contenu dans un fermé F algébrique complexe (ou réel) et tel que $\dim(F) < n$, n'est pas i -acyclique.

Démonstration. – Un tel ouvert contient le complémentaire U d'un fermé algébrique Y de petite dimension. Il suffira donc, d'après 1.8.2-(d), de ne considérer que ce cas. Des suites longues de cohomologie, on retire les sous-suites

$$\begin{aligned} H^{n-1}(Y) &\rightarrow H_c^n(U) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(Y) = 0 \\ 0 = H_Y^n(\mathbb{P}_n) &\rightarrow H^n(\mathbb{P}_n) \rightarrow H^n(U) \rightarrow H_Y^{n+1}(\mathbb{P}_n), \end{aligned}$$

où $H^n(Y) = 0$ puisque $\dim(Y) < n$, et $H_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{P}_n) = H^n(Y)^\vee = 0$ ⁽⁷⁷⁾. □

13.8. Courbes algébriques i -acycliques

† Une courbe algébrique complexe C i -acyclique est rationnellement lisse. Si de plus C est affine, elle est homéomorphe à \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points.

Démonstration. – Pour chaque $x \in X$, et tout voisinage ouvert $V \ni x$, le morphisme $\alpha_x : H_x(C) \rightarrow H(C)$ se factorise à travers $H_c(C)$ de sorte que si C est supposée i -acyclique, on a $\alpha_x = 0$ d'où la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H(C) \rightarrow H(C \setminus \{x\}) \rightarrow H_x(C)[1] \rightarrow 0.$$

Il s'ensuit que lorsque C est complexe irréductible, on a $H_x^1(C) = 0$ (‡) puisque C et $C \setminus \{x\}$ sont connexes. D'autre part, la singularité Σ de C est une partie fermée de dimension 0 donc discrète, et x admet des voisinages ouverts coniques $V = \hat{c}(\mathbb{L}(x, C))$, où $\mathbb{L}(x, C)$, le « lien de x dans C », est une réunion disjointe de cercles $\sqcup_{i=1}^r \mathbb{S}^1$. On a donc d'après (‡), l'égalité

$$0 = H_x^1(C) = H_x^1(\hat{c}(\mathbb{L}(x, C))) = \overline{H}^0(\mathbb{L}(x, C)) = k^{r-1},$$

où \overline{H} désigne la cohomologie réduite. Par conséquent, $r = 1$ et x est rationnellement lisse dans C .

Supposons maintenant que C est en plus affine. Quitte à remplacer les voisinages coniques $\hat{c}(\mathbb{S}^1)$ par des disques \mathbb{D}^2 , nous pouvons supposer que C est une sous-variété fermée différentiable de $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$ à laquelle nous pouvons appliquer la théorie de Morse ⁽⁷⁸⁾. Soit $h : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de Morse. Notons $C_{<r} := \{x \in C \mid h(x) < r\}$, c'est un espace i -acyclique car ouvert de C qui l'est par hypothèse. Montrons que $C_{<r}$ est homéomorphe à un ouvert algébrique de \mathbb{C} .

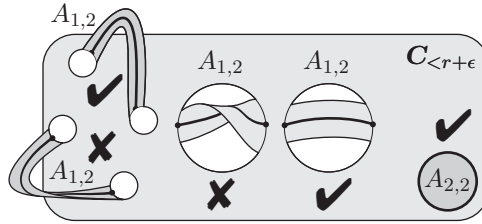
Pour r petit on a $C_r \sim \mathbb{C}$. Supposons ensuite que pour une certaine valeur critique r , l'espace $C_{<r}$ est homéomorphe à \mathbb{C} privé d'un ensemble fini de disques fermés disjoints homéomorphes à \mathbb{D}^2 . Le bord $C_r = \partial C_{<r}$ est alors une réunion finie de cercles \mathbb{S}^1 .

Par la théorie de Morse, $C_{<r+\epsilon}$ est homéomorphe au récolement de $C_{<r}$ et d'une anse $A_{1,2} = \mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$ de noyau de dimension 1, ou bien d'une anse $A_{2,2} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^0$ de noyau de dimension 2. Comme $C_{<r+\epsilon}$ est un ouvert d'une variété algébrique complexe,

⁽⁷⁷⁾ Par le formalisme de la dualité de Poincaré-Grothendieck-Verdier, cela résulte de ce que $\mathbb{D}^\bullet \mathbb{R}c_{Y!} c_Y^! \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}} = \mathbb{R}c_{Y*} c_Y^{-1} \underline{\mathbb{D}}^\bullet = \mathbb{R}c_{Y*} c_Y^{-1} \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}}[2n]$ et du fait que $\underline{\mathbb{D}}^\bullet_{\mathbb{P}} = \underline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{P}}[2n]$.

⁽⁷⁸⁾ Cf. le théorème fondamental de structure dans [29], thm. 2.7, p. 47.

il est orientable, ce qui exclut certains recollements.



Pour une anse $A_{1,2}$, il y a deux recollements orientables possibles qui résultent du fait que le bord du cœur de $A_{1,2}$, à savoir $\mathbb{D}^1 = [0, 1]$, possède deux composantes connexes $\{0, 1\}$. Ces composantes peuvent être collées tantôt sur deux composantes connexes de $\partial C_{<r}$ tantôt sur la même. Dans le premier cas, $C_{<r+\epsilon}$ serait homéomorphe à un tore $T := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ privé d'un ensemble fini de points F , mais alors on aurait la suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{H}^0(F) \rightarrow H_c^1(T \setminus F) \rightarrow H^1(T) \rightarrow 0,$$

et $H^1(T) \hookrightarrow H^1(T \setminus F)$ par dualité. Donc $\dim H_1^1(C_{r+\epsilon}) = \dim H^1(T) = 2$, ce qui contredit la i -acyclicité de $C_{<r+\epsilon}$. Dans le deuxième cas, un trou de C_r est partiellement comblé par l'anse et $C_{<r+\epsilon}$ est bien comme annoncé.

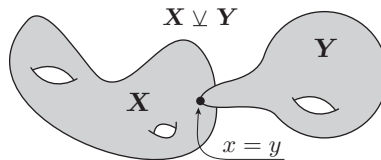
Pour une anse $A_{2,2}$. On recolle le disque \mathbb{D}^2 par son bord \mathbb{S}^1 sur le bord de $C_{<r}$. Par connexité, il n'y a qu'une seule manière de le faire et c'est en comblant l'un des trous de $C_{<r}$. L'espace $C_{<r+\epsilon}$ est donc, de nouveau, homéomorphe à \mathbb{C} privé d'un nombre fini de points. □

REMARQUE 13.8.1. – Dans la preuve de 13.8, le tore $T := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ privé d'un nombre fini non nul de points est une variété affine complexe non singulière C qui n'est pas i -acyclique. Les produits finis $P := \prod_i C_i$ de tels espaces sont des exemples de variété affine complexe non singulière non i -acycliques, contrairement à tout produit de la forme $\mathbb{C} \times P$ (1.8.2).

13.9. Bouquet d'espaces i -acycliques

† *Un bouquet d'espaces i -acycliques est i -acyclique. Et de même en remplaçant le terme « i -acyclique » par « (totalement) \cup -acyclique ».*

Démonstration. – Soient X et Y deux espaces i -acycliques. Notons $X \vee Y$ le bouquet qui identifie $x \in X$ et $y \in Y$.



On considère le morphisme suivant de suites exactes de Mayer-Vietoris associées à la décomposition en parties fermées $X \vee Y = X \cup Y$.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c(\text{pt}) & \xrightarrow{c} & H_c(X \vee Y) & \xrightarrow{\rho_c} & H_c(X) \oplus H_c(Y) & \xrightarrow{0} \longrightarrow \\ & \parallel & & \downarrow \epsilon_{X \vee Y} & & \epsilon_X \downarrow & \downarrow \epsilon_Y \\ \longrightarrow & H(\text{pt}) & \xrightarrow{c=0} & H(X \vee Y) & \xrightarrow{\rho} & H(X) \oplus H(Y) & \longrightarrow, \end{array}$$

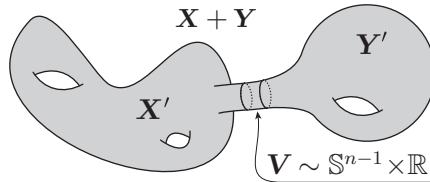
où $\rho : H(X \vee Y) \rightarrow H(X) \oplus H(Y)$ est injectif (et bijectif en degrés positifs). La nullité de $\epsilon_{X \vee Y}$ résulte alors immédiatement de celles de ϵ_X et ϵ_Y .

Le même raisonnement prouve que $X \vee Y$ est (totalement) \cup -acyclique si les espaces X et Y le sont. □

13.10. Sommes amalgamées d'espaces i -acycliques

† La somme amalgamée de variétés i -acycliques est i -acyclique si et seulement si au moins l'une des variétés est orientable.

Démonstration. – Soient (X, x) et (Y, y) deux variétés topologiques pointées i -acycliques de même dimension n . Les ouverts $X' := X \setminus \{x\}$ et $Y' := Y \setminus \{y\}$ sont i -acycliques d'après 1.8.2-(d). La somme amalgamée $X + Y$ est la variété topologique obtenue en recollant homéomorphiquement X' et Y' le long du cylindre ouvert $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ noté V bordant respectivement $x \in X'$ et $y \in Y'$.



On considère le diagramme

$$(6) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^i(V) & \xrightarrow{\alpha_i} & H_c^i(X') \oplus H_c^i(Y') & \xrightarrow{\beta_i} & H_c^i(X + Y) & \longrightarrow \\ & \downarrow \epsilon_{V,i} & & \downarrow \epsilon_{X',i} \oplus \epsilon_{Y',i} & & \epsilon_{X+Y,i} \downarrow & \\ \longleftarrow & H^i(V) & \xleftarrow{\delta_i} & H^i(X') \oplus H^i(Y') & \xleftarrow{\gamma_i} & H^i(X + Y) & \longleftarrow, \end{array}$$

où les lignes sont les suites exactes longues de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert $X + Y = X' \cup Y'$, et où

$$\begin{cases} H_c^i(V) = k(1) \otimes (k(0) \oplus k(n-1)) = k(1) \oplus k(n), \\ H^i(V) = k(0) \oplus k(n-1). \end{cases}$$

Cas $i \neq n - 1$. – Le morphisme β_i est surjectif et γ_i est injectif, soit parce que $i < n$ auquel cas $H^{i-1}(V) = 0$, soit parce que $i = n$ auquel cas les cohomologies $H^n(_)$ sont nulles. On considère alors le diagramme

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} H_c^i(X') \oplus H_c^i(Y') & \xrightarrow{\beta_i} & H_c^i(X + Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \epsilon_{X+Y,i} & & \\ H^{i-1}(V) & \longrightarrow & H^i(X + Y) & \xhookrightarrow{\gamma_i} & H^i(X') \oplus H^i(Y'), \end{array}$$

où les lignes sont exactes. On y voit que

$$\gamma_i \circ \epsilon_{X+Y,i} \circ \beta_i = \epsilon_{X',i} \oplus \epsilon_{Y',i} = 0$$

et nous concluons, indépendamment de l'orientabilité de X et Y , que

$$\epsilon_{X+Y,i} = 0, \quad \forall i \neq n - 1.$$

Cas $i = n - 1$. – La suite de Mayer-Vietoris en degré n est

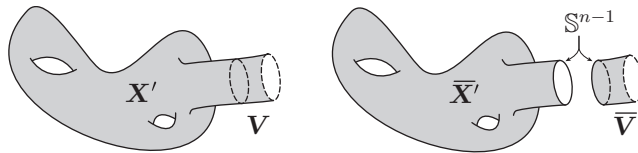
$$(8) \quad \rightarrow (H_c^n(V) = \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha_n} H_c^n(X') \oplus H_c^n(Y') \rightarrow H_c^n(X + Y) \rightarrow \mathbf{0}.$$

Elle montre que α_n est injective pour peu que X ou Y soit orientable. Dans ces cas, β_{n-1} sera surjective et le diagramme (7), pour $i = n - 1$, fournit toujours l'annulation $\epsilon_{X+Y,n-1} = 0$ puisque γ_{n-1} est injective. Ceci termine la preuve de l'un des sens de la proposition.

Réciproquement, ni X ni Y ne sont orientables, ce qui équivaut à dire que ni X' ni Y' ne le sont. Nous allons nous intéresser à des suites longues de cohomologies associées à la décomposition ouvert/fermé

$$X' = V \sqcup (X' \setminus V),$$

où $X' \setminus V$ est clairement est une variété à bord \mathbb{S}^{n-1} et d'intérieur homéomorphe à X' , raison pour laquelle on la notera $\overline{X'}$. Enfin, l'adhérence de V dans X' qui sera notée \overline{V} , est une variété à bord dont le bord \mathbb{S}^{n-1} est aussi le bord de $\overline{X'}$.



On a alors le diagramme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^{n-1}(X') & \xrightarrow{\text{rest}} & H_c^{n-1}(\overline{X'}) & \xrightarrow{c_X} & (H_c^n(V) = k) & \longrightarrow & (H_c^n(X') = 0) \\ \text{rest} \downarrow & & \text{rest} \downarrow & \text{(I)} & \text{id} \downarrow & & \text{rest} \downarrow \\ (H_c^{n-1}(\overline{V}) = 0) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\simeq} & (H_c^n(V) = k) & \longrightarrow & (H_c^n(\overline{V}) = 0). \end{array}$$

On y constate que la classe fondamentale de V se relève bien en une classe $[V_X] \in H_c^{n-1}(\overline{X'})$ et que cette classe se restreint sur la classe fondamentale $[\mathbb{S}]$ de \mathbb{S}^{n-1} , d'où le carré :

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-1}(\overline{X'}) \ni [V_X] & \xrightarrow{c_X} & [V] \\ \text{rest} \downarrow & \text{(I)} & \parallel \\ H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \ni [\mathbb{S}] & \xrightarrow{c_X} & [V]. \end{array}$$

Maintenant, en remarquant que $H_c(\overline{X'}) \xrightarrow{\text{rest}} H_c(\mathbb{S}^{n-1})$ se factorise suivant

$$H_c(\overline{X'}) \xrightarrow{\epsilon_{\overline{X'}}} H(\overline{X'}) \xrightarrow{\text{rest}} H(\mathbb{S}^{n-1}),$$

on déduit que

$$(9) \quad \epsilon_{\overline{X'}}([V_X]) \neq 0.$$

Ces observations s'appliquent telles quelles également à Y et conduisent aux mêmes conclusions où Y vient remplacer X .

Considérons à présent la décomposition ouvert/fermé

$$X + Y = V \sqcup (X + Y \setminus V) = V \sqcup (\overline{X'} \sqcup \overline{Y'})$$

et le morphisme de suites exactes de cohomologie

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-1}(X + Y) & \longrightarrow & H_c^{n-1}(\overline{X'}) \oplus H_c^{n-1}(\overline{Y'}) & \xrightarrow{c_X + c_Y} & (H_c^n(V) = k) \\ \epsilon_{X+Y} \downarrow & \text{II} & \epsilon_{\overline{X'}} \oplus \epsilon_{\overline{Y'}} \downarrow & & \epsilon_V \downarrow \\ H^{n-1}(X + Y) & \longrightarrow & H^{n-1}(\overline{X'}) \oplus H^{n-1}(\overline{Y'}) & \xrightarrow{c_X + c_Y} & (H^n(V) = 0). \end{array}$$

La classe $([V_X], -[V_Y]) \in H_c^{n-1}(\overline{X'}) \oplus H_c^{n-1}(\overline{Y'})$ appartient clairement au noyau de $c_X \oplus c_Y$ et survit au morphisme $\epsilon_{\overline{X'}} \oplus \epsilon_{\overline{Y'}}$ d'après (9). La commutativité de (II) permet alors de conclure que $\epsilon_{X+Y} \neq 0$ et donc que l'espace $X + Y$ n'est pas i -acyclique. □

13.11. La bouteille de Klein épointée

Dans l'implication (\cup -acyclique) \Rightarrow (i -acyclique) de l'assertion 1.8.2-(c), l'hypothèse d'orientabilité est indispensable. On donne ici un contre-exemple lorsque cette hypothèse fait défaut.

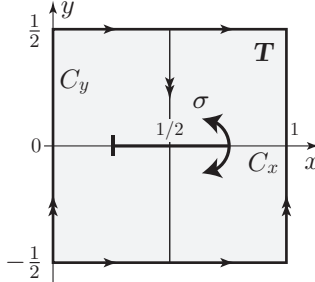
† La bouteille de Klein épointée vérifie le théorème de scindage 3.1.1. Elle n'est ni i -acyclique, ni totalement \cup -acyclique, mais elle est bien \cup -acyclique.

Notons T le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. L'anneau de cohomologie $H(T)$ est engendré par les 1-co-cycles dx et dy . Si nous notons $C_x := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$ et $C_y := \{0\} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, on peut voir que

$$H_{C_x}^1(T) = \langle dy \rangle_k \subseteq H^1(T), \quad H_{C_y}^1(T) = \langle dx \rangle_k \subseteq H^1(T).$$

L'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)$, induit sur $H(T)$ l'action $\sigma : dx \mapsto dx$ et $\sigma : dy \mapsto -dy$ et l'on a

$$H(T)^{\langle \sigma \rangle} \simeq k(0) \oplus \langle dx \rangle_k(1).$$



Comme la bouteille de Klein est le quotient $K := T/\langle \sigma \rangle$, si $\nu : T \rightarrow K$ est la surjection canonique, le morphisme $\nu^* : H(K) \rightarrow H(T)$ identifie $H(K)$ à $H(T)^{\langle \sigma \rangle}$, en d'autres termes, à $k(0) \oplus k(1)$.

On pose maintenant $X := K \setminus \text{pt}$.

\cup -acyclité de X .— L'examen des suites exactes longues

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_{\text{pt}}^i(X) = k(2) & \longrightarrow & H^i(K) & \xrightarrow{\rho_i} & H^i(X) & \longrightarrow \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & H_c^i(X) & \xrightarrow{\iota_i} & H_c^i(K) & \longrightarrow & H_c^i(\text{pt}) = k(0) \longrightarrow \end{array}$$

montre que l'on a

$$\begin{aligned} H(X) &= k(0) \oplus (\langle dx \rangle_k \oplus \langle dx \wedge dy \rangle_k)(1) = k(0) \oplus k(1)^2, \\ H_c(X) &= H^+(K) = \langle dx \rangle_k(1) = k(1) \end{aligned}$$

et $H_c(X) \wedge H_c(X) = 0$. L'espace X est donc bien \cup -acyclique.

Non i -acyclité de X .— Comme le cycle C_y est plongé (via ν) dans X , l'espace $H_c^1(X)$ est engendré par $dx \in H_{C_y}^1(X) \subseteq H_c^1(X)$ et le morphisme $\iota_1 : H_c^1(X) \rightarrow H_c^1(K)$ est bijectif. D'autre part, il est clair par la première suite dans (10) que le morphisme $\rho_1 : H^1(K) \hookrightarrow H^1(X)$ est injectif. On a donc

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^1(X) & \xrightarrow{\sim} & H_c^1(K) & & & & \\ & & \parallel & & & & \\ 0 = H_{\text{pt}}^1(K) & \xrightarrow{0} & H^1(K) & \hookrightarrow & H^1(X) & \twoheadrightarrow & H_{\text{pt}}^2(K) = k(2) \end{array}$$

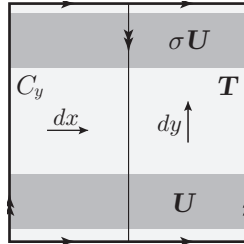
et $\epsilon_{X,1} = \rho_1 \circ \iota_1$ est non nul. L'espace X n'est donc pas i -acyclique.

Non totale \cup -acyclicité de X .— Soit maintenant U un ouvert connexe de X . Comme $H_c(X) = k(1)$, le cup-produit

$$(11) \quad \cup : H_c(X) \times H_c(U) \rightarrow H_c(U)$$

est automatiquement nul si U n'est pas orientable car alors $H_c^2(U) = 0$. Lorsque, par contre, U est orientable, la dualité de Poincaré s'applique et le cap produit (11) est nul si et seulement si la restriction $H_c^1(X) \rightarrow H(U)$ est nulle, donc si et seulement si $dx|_U = 0$ dans $H(U)$.

Deux cas sont alors possibles.



Cas $C_y \subseteq U$. La restriction du revêtement $\nu : T \rightarrow K$ à $\nu^{-1}(U)$ est triviale à deux nappes U_1 et $U_2 = \sigma U_1$, car U orientable. On peut supposer $C_y \subseteq U_1$ et alors $\sigma C_y \cap U_1 = \emptyset$. On a donc $U \simeq U_1 \subseteq T \setminus C_y$, et U est i -acyclique puisque ouvert de $T \setminus C_y \sim \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, espace i -acyclique. Maintenant, comme $C_y \subseteq U_1$, l'image de $H_{C_y}^1(X) = H_c^1(X) \rightarrow H^1(U)$ est l'image de $H_{C_y}^1(U) \rightarrow H^1(U)$, morphisme qui se factorise naturellement à travers $\epsilon_U : H_c(U) \rightarrow H(U)$, nul puisque U i -acyclique. Par conséquent, si $C_y \subseteq U$ le cup produit (11) est nul.

Cas $C_y \not\subseteq U$. Il existe des ouverts $U \subseteq X$ tels que (11) n'est pas nul. En effet, si U est l'ouvert indiqué par la figure ci-contre, on y voit que c'est un cylindre et que dx ne s'intègre pas en une fonction sur U . Par conséquent, $dx \neq 0$ dans $H^1(U)$ et l'espace X n'est pas totalement \cup -acyclique.

Le théorème de scindage 3.1.1 pour X . – L'espace X vérifie les assertions (a) et (b) de ce théorème, et la raison vient de ce que $H_c(X)$ est concentrée en degré 1. En effet, dans de tels cas, on s'aperçoit rapidement que $H_c(\Delta_{\gamma\ell} X^m)$ doit être concentré en degré ℓ , ce que l'on démontre par induction sur ℓ et prouve, en passant, les assertions en question.

Plus précisément, dans le cas des espaces F_m , on s'intéresse au morphisme

$$(12) \quad H_c(X) \otimes H_c(F_m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq m}(X \times F_m)) \sim H_c(F_m)^m,$$

où le terme de gauche est concentré en degré $m + 1$ puisque $H_c(X) = k(1)^\#$ et que $H_c(F_m) = k(m)^\#$, par hypothèse inductive. Le morphisme (12) est alors nul puisque $H_c(\Delta_{\leq m}(X \times F_m))k(m)^\#$, également par hypothèse inductive. On a donc la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_c(F_m)[-1]^m \rightarrow H_c(F_{m+1}) \rightarrow H_c(X \times F_m) \rightarrow 0,$$

et elle montre que $H_c(F_{m+1})$ est concentré en degré $m + 1$, et l'étape inductive peut être itérée.

Dans le cas des espaces $\Delta_{\leq \ell} X^m$, on s'intéresse au morphisme

$$(13) \quad H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} X^m),$$

dont la preuve de 3.1.1 montre que son annulation résulte de l'annulation de

$$H_c(X) \otimes H_c(\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1}^m).$$

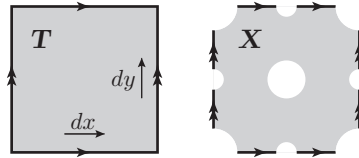
Cela résulte pour les mêmes raisons de degré que précédemment, sous l'hypothèse d'induction que $\Delta_{\leq \ell-1}^{m-1}$ est concentré en degré $\ell - 1$. À partir de là, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell-1} X^m)[-1] \rightarrow H_c(\Delta_{\ell} X^m) \rightarrow H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m) \rightarrow 0,$$

où le terme central est concentré en degré ℓ car somme directe d'espaces gradués isomorphes à $H_c(F_{\ell})$ (cf. 2.3.3). On conclut que $H_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$ est concentré en degré ℓ , et l'étape inductive peut être itérée.

13.12. Revêtements non i -acycliques à base i -acyclique

† *Un revêtement fini de base i -acyclique peut ne pas être i -acyclique.*



Une manière élémentaire de produire des contre-exemples consiste à prendre une variété orientable Y non i -acyclique, donc telle que $H_c(Y) \wedge H_c(Y) \neq 0$, et à faire agir librement sur Y un groupe fini W qui conserve l'orientation et tel que $H_c(Y)^W \wedge H_c(Y)^W = 0$.

Le tore T de dimension 2 est le domaine carré ci-contre sur lequel on a identifié les côtés opposés. Cet espace privé de quatre points, noté X , est représenté par la figure à droite. La suite exacte longue

$$(14) \quad 0 \rightarrow H_c^0(T) \rightarrow H_c^0(4) \rightarrow H_c^1(X) \rightarrow H_c^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow H_c^2(X) \rightarrow H_c^2(T) \rightarrow 0$$

montre que les 1-cocycles dx et dy dans T sont représentés par des 1-cocycles à support compact dans X . La classe fondamentale de X se retrouve alors représentée comme le produit de ces deux cocycles. Il s'ensuit que X n'est pas \cup -acyclique (ni i -acyclique). La suite (14) révèle aussi l'apparition de trois nouveaux 1-cocycles dans X provenant de $H_c^0(4)$, nous avons donc

$$H_c^0(X) = \mathbf{0}, \quad H_c^1(X) = \mathbb{Q}^5, \quad H_c^2(X) = \mathbb{Q}.$$

Voici une représentation de 1-cycles de X générant $H_c^1(X)(= H_1(X))$:



Notons maintenant $\theta : T \rightarrow T$ l'isomorphisme d'ordre 4 qui se voit par une rotation horaire d'angle $\pi/4$. Il est clair que θ agit librement sur X et préserve son orientation. L'espace quotient $B := X/\langle\theta\rangle$ est par conséquent une variété différentiable orientable et

$$H_c(B) = H_c(X)^{\langle\theta\rangle}.$$

Or, l'action de θ sur les 1-cycles se lit facilement sur (14). On y voit que

$$\theta(\gamma_0) = \gamma_0, \quad \begin{cases} \theta(\gamma_1) = \gamma_2 \\ \theta^2(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_3 \\ \theta^3(\gamma_1) = \gamma_0 - \gamma_2 + \gamma_4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta(\gamma_3) = \gamma_4 \\ \theta(\gamma_4) = \gamma_3, \end{cases}$$

de sorte que $H_c^0(B) = 0$, $H_c^1(B) = [\gamma_0]\mathbb{Q} \oplus [\gamma_3 + \gamma_4]\mathbb{Q}$, et $H_c^2(B) = \mathbb{Q}$, où $[\gamma_0] \wedge [\gamma_3 + \gamma_4] = 0$ puisque l'intersection des cycles sous-jacents est vide. On conclut que $H_c(B) \wedge H_c(B) = \mathbf{0}$ et B est \cup -acyclique et donc i -acyclique. (En fait, on peut vérifier que B est un cylindre ouvert époiné $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \setminus \bullet$.)

Le revêtement $X \rightarrow B$ est bien à base i -acyclique alors que X ne l'est pas.

13.13. Fibrations non i -acycliques à fibre et base i -acycliques

† Une fibration à fibre et base i -acycliques peut ne pas être i -acyclique.

Rappelons que la cohomologie de l'espace projectif complexe $\mathbb{P} := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'anneau gradué $\mathbb{Q}[z]/(z^{n+1})$ où $\deg(z) = 2$.

Le fibré tautologique \mathcal{TP} au-dessus de \mathbb{P} est le sous-espace de $\mathbb{P} \times \mathbb{C}^{n+1}$ des couples (\mathcal{D}, z) où \mathcal{D} est une droite vectorielle de \mathbb{C}^{n+1} et $z \in \mathcal{D}$. L'application $\pi : \mathcal{TP} \rightarrow \mathbb{P}$, $(\mathcal{D}, z) \mapsto \mathcal{D}$, est une fibration vectorielle localement triviale de fibres isomorphes à \mathbb{C} . Notons $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{TP}$ sa section nulle. La classe de Thom $\Phi_{(\mathbb{P}, \mathcal{TP})} \in H_c^2(\mathcal{TP})$ de la section nulle se restreint à la classe génératrice de $H(\mathbb{P})$, autrement dit,

$$\Phi_{(\mathbb{P}, \mathcal{TP})}|_{\mathbb{P}} = z.$$

En fait, on a

$$H_c(\mathcal{TP}) = \mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2})$$

et la restriction à la section nulle s'identifie à l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{Q}[\Phi]/(\Phi^{n+2}) \rightarrow \mathbb{Q}[z]/(z^{n+1}), \quad \Phi \mapsto z.$$

En particulier, la multiplication par $\Phi_{\mathbb{P}, \mathcal{TP}}$ n'est pas une opération nulle dans $H_c^+(\mathcal{TP})$ pour peu que $n \geq 1$.

Maintenant, si nous restreignons le fibré tautologique au complémentaire de deux points $\mathbb{P}' := \mathbb{P} \setminus 2$, nous avons la suite exacte longue

$$\mathbf{0} \rightarrow H_c^2(\mathcal{TP}') \rightarrow H_c^2(\mathcal{TP}) = \Phi \cdot \mathbb{C} \xrightarrow{\rho} H_c^2(\mathbb{C})^2 \rightarrow H_c^3(\mathcal{TP}') \rightarrow \mathbf{0},$$

d'où ρ est injective. On en déduit que $H_c^i(\mathcal{TP}) = 0$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$, puis que $H_c^3(\mathcal{TP}) = \mathbb{Q}$, et enfin que

$$(16) \quad H_c^i(\mathcal{TP}') = H_c^i(\mathcal{TP}), \quad \text{pour tout } i \geq 4.$$

Par conséquent, si $n \geq 4$ on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\dim H_c^i(\mathcal{TP}')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1	...
$\dim H_c^i(\mathbb{P}')$	0	1	1	0	1	0	1	0	1	...

et si ω est non nulle de $H_c^4(\mathcal{TP}')$, on a $\omega \wedge \omega \neq 0$ dans $H_c^8(\mathcal{TP}')$ compte tenu de 16 et du fait qu'il en est ainsi pour $H_c(\mathcal{TP})$ (pour $n \geq 3$).

Considérons maintenant \mathbb{P}' pour $n = 3$. Dans ce cas, on dispose sur $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ de l'involution θ sans point fixes :

$$\theta(\langle a, b, c, d \rangle) = \langle b, -a, d, -c \rangle,$$

dont on sait que son action sur z est $\theta z = -z$, de même par ailleurs que l'action sur le générateur de $H_c^1(\mathbb{P}')$. Il s'ensuit que l'on a

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim H_c^i(\mathcal{TP}')$	0	0	0	0	1	0	1	0	1
$\dim H_c^i(\mathbb{P}')$	0	1	1	0	1	0	1		
$\dim H_c^i(\mathbb{P}'/\langle \theta \rangle)$	0	0	0	0	1	0	0		
$\dim H^i(\mathbb{P}')$	1	0	1	0	1	1	0		
$\dim H^i(\mathbb{P}'/\langle \theta \rangle)$	0	0	1	0	0	0	0		

Et on voit bien que la variété $(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \setminus 2)/\langle \theta \rangle$ n'est pas \cup -acyclique.

CHAPITRE 14

RAPPELS SUR LES NOMBRES DE STIRLING

Pour les notions de cette section de rappels, nous renvoyons au livre de Graham-Knuth-Patashnik [22] pour un traitement plus complet.

14.1. Factorielles croissantes et décroissantes

Pour $n \in \mathbb{N}$, les « n -ièmes factorielles croissante et décroissante »⁽⁷⁹⁾ d'un élément x d'un anneau, notées respectivement $x^{\overline{n}}$ et $x^{\underline{n}}$, sont définies par

$$\begin{cases} x^{\overline{0}} := 1, & \text{et } x^{\overline{n}} := x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)), \\ x^{\underline{0}} := 1, & \text{et } x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)). \end{cases}$$

On a clairement

$$x^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n}}(x-n) \quad \text{et} \quad x^{\overline{n+1}} = x^{\overline{n}}(x+n).$$

14.2. Nombres de Stirling de première espèce

Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[X]$, le sous-module $\mathbb{Z}^n[X]$ des polynômes de degré majoré par n admet les trois bases suivantes

$$\mathcal{B} := \{x^0, x^1, \dots, x^n\}, \quad \underline{\mathcal{B}} := \{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \dots, x^{\underline{n}}\}, \quad \overline{\mathcal{B}} := \{x^{\overline{0}}, x^{\overline{1}}, \dots, x^{\overline{n}}\}.$$

Le développement des polynômes $X^{\underline{n}}$ et $X^{\overline{n}}$ en somme de monômes donne les coefficients des matrices de passage de \mathcal{B} vers les deux autres bases. On note ces matrices respectivement par $(\underline{s}(i, j))$ et $(\overline{s}(i, j))$. On a donc

$$X^{\underline{i}} = \sum_{j \geq i \geq 0} \underline{s}(i, j) X^j \quad \text{et} \quad X^{\overline{i}} = \sum_{j \geq i \geq 0} \overline{s}(i, j) X^j.$$

Les matrices $(\underline{s}(i, j))$ et $(\overline{s}(i, j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On voit clairement que $\overline{s}(i, j) \geq 0$ et que $(-1)^{i-j} \underline{s}(i, j) \geq 0$.

⁽⁷⁹⁾ *Rising and falling factorials* en anglais.

On étend la définition de $\underline{s}(i, j)$ et $\bar{s}(i, j)$ à tous les indices $i, j \in \mathbb{N}$, par la valeur 0 lorsque $j > i$. Ainsi, les sommations ci-dessous peuvent être indexées tout simplement indexées par ' $j \geq 0$ '.

DÉFINITION 14.2.1. – Pour $i, j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\bar{s}(i, j) \in \mathbb{N}$ sont « les nombres de Stirling de première espèce (non signés) », et les entiers relatifs $\underline{s}(i, j) \in \mathbb{Z}$ sont « les nombres de Stirling de première espèce (signés) ».

PROPOSITION 14.2.2. – Les nombres de Stirling de première espèce vérifient les propriétés suivantes.

(a) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\underline{s}(i, j) = (-1)^{i-j} \bar{s}(i, j)$. En particulier, si D désigne la matrice diagonale $(1, -1, \dots, (-1)^i)$, on a

$$(\underline{s}(i, j)) = D(\bar{s}(i, j))D^{-1}.$$

(b) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{s}(i, i) = 1$ et $\bar{s}(i, i) = 1$.

(c) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{s}(0, i) = \underline{s}(i, 0) = 0$ et $\bar{s}(0, i) = \bar{s}(i, 0) = 0$.

(d) Pour tous $i, j \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \underline{s}(i, j) = \underline{s}(i-1, j-1) - (i-1)\underline{s}(i-1, j), \\ \bar{s}(i, j) = \bar{s}(i-1, j-1) + (i-1)\bar{s}(i-1, j). \end{cases}$$

(e) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{s}(i, 1) = (-1)^{i-1} (i-1)!$ et $\bar{s}(i, 1) = (i-1)!$.

Démonstration. – (a) : évident puisque $X^{\bar{i}} = (-1)^i (-X)^{\underline{i}}$.

(b), (c) : pour tout $i > 0$, les polynômes $X^{\underline{i}}$ sont clairement de coefficient constant 0 et de coefficient principal 1. (d) : résulte de ce que pour $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} X^{\underline{i}} &= X^{\underline{i-1}}(X - (i-1)) = \left(\sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) X^j \right) (X - (i-1)) \\ &= \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) X^{j+1} - \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i-1, j) (i-1) X^j = \sum_{j \geq 0} \underline{s}(i, j) X^j. \end{aligned}$$

(e) : pour $i > 0$, on a

$$(\underline{s}(i, 1) = (X - 1) \cdots (X - (i-1)))|_{X=0} = (-1)(-2) \cdots (-i+1).$$

Les égalités concernant les coefficients $\bar{s}(i, j)$ résultent ensuite de (a). □

14.3. Nombres de Stirling de deuxième espèce

Les coefficients des matrices $(\underline{S}(i, j)) := (\underline{s}(i, j))^{-1}$ et $(\bar{S}(i, j)) := (\bar{s}(i, j))^{-1}$ vérifient :

$$X^{\underline{i}} = \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i, j) X^{\underline{j}} = \sum_{j \geq 0} \bar{S}(i, j) X^{\bar{j}}, \quad \forall i \geq 0.$$

Les matrices $(\underline{S}(i, j))$ et $(\bar{S}(i, j))$ sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. On verra que $\underline{S}(i, j) \geq 0$ et que $(-1)^{i-j} \bar{S}(i, j) \geq 0$.

DÉFINITION 14.3.1. – Pour $i, j \in \mathbb{N}$, les entiers naturels $\underline{S}(i, j) \in \mathbb{N}$ sont « les nombres de Stirling de seconde espèce (non signés) », et les entiers relatifs $\overline{S}(i, j) \in \mathbb{Z}$ sont « les nombres de Stirling de seconde espèce (signés) ».

PROPOSITION 14.3.2. – Les nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient les propriétés suivantes

(a) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\overline{S}(i, j) = (-1)^{i-j} \underline{S}(i, j)$. En particulier, si D désigne la matrice diagonale $(1, -1, \dots, (-1)^i)$, on a

$$(\overline{S}(i, j)) = D(\underline{S}(i, j))D^{-1}.$$

(b) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{S}(i, i) = 1$ et $\overline{S}(i, i) = 1$.

(c) Pour tout $i \geq 1$, on a $\underline{S}(0, i) = \underline{S}(i, 0) = 0$ et $\overline{S}(0, i) = \overline{S}(i, 0) = 0$.

(d) Pour tous $i, j \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \underline{S}(i, j) = \underline{S}(i-1, j-1) + j \underline{S}(i-1, j), \\ \overline{S}(i, j) = \overline{S}(i-1, j-1) - j \overline{S}(i-1, j). \end{cases}$$

(e) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $\underline{S}(i, j) \geq 0$ et $(-1)^{i-j} \overline{S}(i, j) \geq 0$.

(f) Pour tout $i \geq 0$, on a $\underline{S}(i, 1) = 1$ et $\overline{S}(i, 1) = (-1)^{i+1}$.

Démonstration. – (a) : évident d'après 14.2.2-(a).

(b), (c) : évidents. (d) : résulte de ce que pour $j \geq 0$, on a $XjX = X^{j+1} + jXj$ et alors

$$\begin{aligned} X^i &= X^{i-1}X = \left(\sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j)X^j \right) X \\ &= \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j)X^{j+1} + \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i-1, j)jX^j = \sum_{j \geq 0} \underline{S}(i, j)X^j. \end{aligned}$$

(e) : la positivité de $\underline{S}(i, j)$ résulte inductivement de (d) à partir de la positivité de $\underline{S}(0, j)$ et $\underline{S}(1, j)$, ce qui a été établi dans (b) et (c).

(f) : la question (b) fixe le cas $i = 1$, pour $i > 1$, on a

$$\underline{S}(i, 1) = \underline{S}(i-1, 0) + \underline{S}(i-1, 1) = \underline{S}(i-1, 1),$$

d'après (c) et (d), et par induction, $\underline{S}(i, 1) = \underline{S}(1, 1) = 1$. □

14.3.3. Remarques

1. *Valeurs initiales des nombres de Stirling.* Les nombres de Stirling ont été indexés par les couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Dans tous les cas, les coefficients de la colonne ($j = 0$) et la ligne ($i = 0$) sont nuls sauf pour $i = j = 0$ où ils valent 1. Tous les autres termes découlent de ces « valeurs initiales » via les quatre règles de récurrence (d) des propositions 14.2.2 et 14.3.2.

2. On remarquera aussi les égalités suivantes qui concernent les sous-matrices de nombres de Stirling d'indices non nuls :

$$\begin{cases} (\underline{S}(i, j)_{i, j \geq 1})^{-1} = (\underline{s}(i, j)_{i, j \geq 1}), \\ (\overline{S}(i, j)_{i, j \geq 1})^{-1} = (\overline{s}(i, j)_{i, j \geq 1}). \end{cases}$$

14.4. Nombres de Stirling non signés et cardinaux

Pour tous $i, j \geq 0 \in \mathbb{N}$, on définit :

- $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] :=$ cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments qui sont produits d'exactly j cycles.
 $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} :=$ cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i éléments en j parties non vides.

On remarquera l'égalité $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ qui dit qu'il y a une unique partition de l'ensemble vide en 0 parties non vides, et l'égalité $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1$ qui dit qu'il y a une unique permutation qui soit produit de 0 cycles.

PROPOSITION 14.4.1. – Pour tous $i \geq j \geq 0 \in \mathbb{N}$, on a

- (a) $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \underline{S}(i, j)$. Lorsque $i \geq 1$, on a $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} k^i$.
 (b) $\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] = \overline{s}(i, j) = (-1)^{i-j} \underline{s}(i, j)$.

Démonstration. – On a bien $1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ et $0 = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ j \end{smallmatrix} \right]$ pour tous $i, j \neq 0$. Les familles des nombres en question ont donc bien les même valeurs initiales que les nombres de Stirling.

Pour $i \geq j \geq 1$, on trie les partitions de $\mathfrak{P}_j(\llbracket 1, i \rrbracket)$ en deux parties suivant qu'elles contiennent ou non le singleton $\{i\}$. Les cardinaux de ces parties sont respectivement $\left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\}$ et $j \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\}$. On a donc :

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\} + j \left\{ \begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\},$$

ce qui correspond à la récurrence 14.3.2-(d) pour les nombres $\underline{S}(i, j)$.

De même, en triant les permutations de $\llbracket 1, i \rrbracket$, suivant qu'elles fixent ou non $\{i\}$, on obtient deux classes de cardinaux respectifs $\left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right]$ et $(i-1) \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right]$, on a donc :

$$\left[\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right] + (i-1) \left[\begin{smallmatrix} i-1 \\ j \end{smallmatrix} \right],$$

ce qui correspond à la récurrence 14.2.2-(d) pour les nombres $\overline{s}(i, j)$.

Enfin, on rappelle que la formule dans (a) provient du dénombrement des surjections de $\llbracket 1, i \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, j \rrbracket$ (modulo les permutations de $\llbracket 1, j \rrbracket$). Cet ensemble est le complémentaire F_* dans l'ensemble F de toutes les applications de $\llbracket 1, i \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, j \rrbracket$ de l'ensemble des applications qui ne sont pas surjectives. Notons F_t le sous-ensemble des applications de F qui n'atteignent pas la valeur $t \in \llbracket 1, j \rrbracket$.

Notons $F_{t_1, \dots, t_k} := F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_k}$. On a alors

$$|F_*| = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq j} |F_{t_1, \dots, t_k}| = \sum_{k=1}^j (-1)^{k-1} \binom{j}{k} (j-k)^j$$

et la formule découle aussitôt. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. E. ANDREWS – *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, Addison-Wesley, 1976.
- [2] A. ARABIA – « On the equivalence of two stability conditions of FB-modules », prépublication arXiv:1807.05032.
- [3] V. I. ARNOL'D – « The cohomology ring of the group of dyed braids », *Mat. Zametki* **5** (1969), p. 227–231, English transl. *Math. Notes* **5** (1969) 138–140.
- [4] ———, « Certain topological invariants of algebraic functions », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **21** (1970), p. 27–46, English transl. *Trans. Moscow Math. Soc.* **21** (1970) 30–52.
- [5] A. BOREL – « Sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie », Soc. Math. France, 1952, p. 271–279.
- [6] ———, *Intersection cohomology*, Progress in Math., vol. 50, Birkhäuser, 1984.
- [7] R. BOTT & L. W. TU – *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Math., vol. 82, Springer-Berlin, 1982.
- [8] G. E. BREDON – *Sheaf theory*, second éd., Graduate Texts in Math., vol. 170, Springer, 1997.
- [9] T. CHURCH – « Homological stability for configuration spaces of manifolds », *Invent. math.* **188** (2012), p. 465–504.
- [10] T. CHURCH, J. S. ELLENBERG & B. FARB – « FI-modules and stability for representations of symmetric groups », *Duke Math. J.* **164** (2015), p. 1833–1910.
- [11] T. CHURCH, J. S. ELLENBERG, B. FARB & R. NAGPAL – « FI-modules over Noetherian rings », *Geom. Topol.* **18** (2014), p. 2951–2984.
- [12] T. CHURCH & B. FARB – « Representation theory and homological stability », *Adv. Math.* **245** (2013), p. 250–314.
- [13] A. DIMCA – *Singularities and topology of hypersurfaces*, Universitext, Springer, 1992.

- [14] E. FADELL & L. NEUWIRTH – « Configuration spaces », *Math. Scand.* **10** (1962), p. 111–118.
- [15] Y. FÉLIX & J.-C. THOMAS – « Rational Betti numbers of configuration spaces », *Topology Appl.* **102** (2000), p. 139–149.
- [16] R. FOX & L. NEUWIRTH – « The braid groups », *Math. Scand.* **10** (1962), p. 119–126.
- [17] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 131, Princeton Univ. Press, 1993.
- [18] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory*, Graduate Texts in Math., vol. 129, Springer, 1991.
- [19] E. GETZLER – « Resolving mixed Hodge modules on configuration spaces », *Duke Math. J.* **96** (1999), p. 175–203.
- [20] _____, « Mixed Hodge structures of configuration spaces », prépublication 96-61, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, arXiv:alg-geom/9510018.
- [21] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1252, Hermann, 1973.
- [22] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH & O. PATASHNIK – *Concrete mathematics*, 2^e éd., Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [23] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques points d’algèbre homologique », *Tohoku Math. J.* **9** (1957), p. 119–221.
- [24] D. J. HEMMER – « Stable decompositions for some symmetric group characters arising in braid group cohomology », *J. Combin. Theory Ser. A* **118** (2011), p. 1136–1139.
- [25] M. KASHIWARA & P. SCHAPIRA – *Sheaves on manifolds*, Grundle. math. Wiss., vol. 292, Springer, 1994.
- [26] G. I. LEHRER – « On the Poincaré series associated with Coxeter group actions on complements of hyperplanes », *J. London Math. Soc.* **36** (1987), p. 275–294.
- [27] I. G. MACDONALD – « The Poincaré polynomial of a symmetric product », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), p. 563–568.
- [28] _____, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2^e éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Univ. Press, 1995.
- [29] L. NICOLAESCU – *An invitation to Morse theory*, 2^e éd., Universitext, Springer, 2011.

- [30] D. PETERSEN – « A spectral sequence for stratified spaces and configuration spaces of points », *Geom. Topol.* **21** (2017), p. 2527–2555.
- [31] ———, « Cohomology of generalized configuration spaces », *Compos. Math.* **156** (2020), p. 251–298.
- [32] O. RANDAL-WILLIAMS – « Homological stability for unordered configuration spaces », *Q. J. Math.* **64** (2013), p. 303–326.
- [33] S. V. SAM & A. SNOWDEN – « GL-equivariant modules over polynomial rings in infinitely many variables », *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), p. 1097–1158.
- [34] B. TOTARO – « Configuration spaces of algebraic varieties », *Topology* **35** (1996), p. 1057–1067.

NOTATIONS

Introduction

M, X, \dots	espaces topologiques.....	19
$\Delta_{\ell} M^m, \Delta_{\ell} M^m, F_m(M)$	espaces de configuration (ordonnés) généralisés.....	19
\mathcal{S}_m	groupe des permutations de l'intervalle $\llbracket 1, m \rrbracket \subseteq \mathbb{N}$	19
k	corps de base.....	19
$\mathcal{P}_c(_)(T)$	$:= \sum_i \dim(H_c^i(_)) T^i$, polynôme de Poincaré (compact).....	20
$\mathcal{P}(_)(T)$	$:= \sum_i \dim(H^i(_)) T^i$, polynôme de Poincaré.....	20
π_a	$: F_{b+a}(M) \rightarrow F_a(M)$, projection $(z_1, \dots, z_b, x_1, \dots, x_a) \mapsto (x_1, \dots, x_a)$	20
$\mathcal{S}_m : V$	notation pour <i>représentation linéaire de \mathcal{S}_m sur le k-espace vectoriel V</i>	20
$\chi_c(_) := \mathcal{P}_c(_-)(-1)$	caractéristique d'Euler-Poincaré de $H_c(_)$	20
$\chi(_) := \mathcal{P}(_-)(-1)$	caractéristique d'Euler-Poincaré de $H(_)$	21
G	groupe localement compact.....	21
$\mathfrak{P}_\ell(m)$	ensemble des partitions de $\llbracket 1, m \rrbracket$ en ℓ parties non vides.....	25
$\chi_c(Z, i)$	caractère du \mathcal{S}_m -module $H_c^i(Z)$	25
Υ_ℓ^m	opérateur d'induction.....	26
$\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m])$	catégorie des représentations linéaires du groupe \mathcal{S}_m sur \mathbb{Q}	26
Θ_ℓ^m	opérateur d'induction.....	26
$K_0(\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m]))$	groupe de Grothendieck de $\text{Mod}(\mathbb{Q}[\mathcal{S}_m])$	26
$H_{\text{BM}}^i(M; \mathbb{Q})$	$:= \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_c^{d_M - i}(M; \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$, <i>cohomologie</i> de Borel-Moore de M	28
$\int_{[M]}$	intégration sur les fibres pour $p_m : M^m \rightarrow M$, $(\bar{x}, x_{m+1}) \mapsto \bar{x}$	29
σ_m	caractère signature de \mathcal{S}_m	29
$\mathcal{P}_{\text{BM}}(Y)(T)$	$:= \mathcal{P}_c(Y)(1/T) T^{d_Y}$, polynôme de Poincaré (Borel-Moore).....	30
$\text{Mod}(\mathbb{Q}[FI])$	catégorie des FI-modules.....	30
$\mathbb{E}_\sigma(\mathcal{U}^m)$	suite spectrale basique attachée au recouvrement \mathcal{U}^m de \mathbb{U}^m	31
$\chi_c(_)(\alpha, T)$	$:= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr}(\alpha : H_c^i(_)) T^i$, série des caractères avec $\alpha \in \mathcal{S}_m$	33
$\mathcal{H}_{\pi^!}^i(\Delta_{\ell}^a X^m)$	faisceaux de cohomologie à support π_a -propre.....	35

1. Généralités sur les espaces i -acycliques

M, N, X, Y, Z, \dots espaces topologiques 39

$\text{Mod}(\underline{k}_X)$ catégorie des faisceaux de k espaces vectoriels sur X 39

$\text{Vec}(k)$ catégorie de k -espaces vectoriels 39

$(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k), d_*)$ complexe des faisceaux de cochaînes d'Alexander-Spanier de X 40

\underline{k}_X faisceau constant de fibre k 40

$\mathcal{K}(X)$ famille des parties compactes $K \subseteq X$ 40

ϵ_X : $H_c(X) \rightarrow H(X)$, morphisme induit par l'inclusion $\Omega_c(X) \subseteq \Omega(X)$ 41

$H_!(X) := \text{im}(\epsilon_X)$ cohomologie « intérieure » de X 41

δ_X^* : $H_c(X \times X) \rightarrow H_c(X)$, restriction à la diagonale 41

$X \setminus \mathbf{a}$ « complémentaire » dans X d'une partie finie \mathbf{a} de cardinal a 44

$\phi_{\bar{\gamma}}$: $H_c(X \setminus \bar{\gamma}(0)) \rightarrow H_c(X \setminus \bar{\gamma}(1))$, action monodromique le long du lacet $\bar{\gamma}$ 46

2. Espaces de configuration généralisés

$\Delta_{? \ell} X^m$ espace de configuration généralisé 47

$F_m(X)$ espace de configurations ordonnées classique, noté aussi $\Delta_m X^m$... 47

$Z^{[a]}$ désigne pour $Z \subseteq X^m$, l'intersection $Z \cap (X^{m-a} \times F_a(X))$ 47

$\Delta_{? \ell}^m, F_m$ raccourcis pour $\Delta_{? \ell} X^m$ et $F_m(X)$ 47

$\pi_a = X^m \rightarrow X^a$ projection sur les a dernières coordonnées 47

$p_a = X^m \rightarrow X^a$ projection sur les a premières coordonnées 47

$\mathfrak{P}_\ell(E)$ ensemble des partitions de E en ℓ parties non vides 50

$\mathfrak{P}(E)$:= $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}_\ell(E)$, ensemble des partitions de E en parties non vides . 50

$(i \sim_{\mathfrak{p}} j)$ Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(E)$, on pose $(i \sim_{\mathfrak{p}} j) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\exists I \in \mathfrak{p} \text{ t.q. } \{i, j\} \subseteq I)$ 50

$[[a, b], [[a, b[[$ intervalles d'entiers naturels m vérifiant $a \leq m \leq b$, resp. $a \leq m < b$ 50

$F_{\mathfrak{p}}(X)$ Si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}(m)$, on a $\bar{x} \in F_{\mathfrak{p}}(X) \Leftrightarrow_{\text{def}} ((x_i = x_j) \Leftrightarrow (i \sim_{\mathfrak{p}} j))$ 50

$\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ \ell \end{smallmatrix} \right\}$ nombre de Stirling de seconde espèce 50

$\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ famille des composantes connexes de X 50

$\dim(X)$ dimension cohomologique de X 51

$(\underline{\Omega}_X^\bullet, d_\bullet)$:= $\tau_{\leq d_X}(\underline{\mathcal{A}\mathcal{S}}^\bullet(X; k), d_*)$, résolution c -molle de \underline{k}_X 51

3. Théorèmes de scindage et complexes fondamentaux

• point d'un espace 55

X° l'espace X privé d'un point • 55

$F_m^{x_i = \bullet}(X)$ ensemble des $\bar{x} \in F_m(X)$ avec $x_i = \bullet$ 55

$F_m^\bullet(X)$ ensemble des $\bar{x} \in F_m(X)$ avec l'un des x_i égal à • 55

\mathcal{S}_m groupe des permutations de l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, m\}$ 56

$\mathcal{S}_m : X^m$	action de \mathcal{S}_m sur X^m par permutation des coordonnées.....	56
$\mathcal{S}_m : H_c^i(Z), \mathcal{S}_m : H^i(Z)$	actions induites, pour Z partie \mathcal{S}_m -stable de X^m	56
F^λ	$:= F_{\lambda_1} \times \cdots \times F_{\lambda_r}$, où λ est une partition de m	56
$F^q(X)$	Si $\mathfrak{q} \in \mathfrak{P}(m)$, $\bar{x} \in F^q(X) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall i \neq j) ((i \sim_j \mathfrak{q}) \Rightarrow (x_i \neq x_j))$	59
\mathcal{S}_I	$:= \text{Fix}_{\mathcal{S}_m}(\llbracket 1, m \rrbracket \setminus I) = \{\alpha \in \mathcal{S}_m \mid \alpha(j) = j \quad \forall j \notin I\}$	60
\mathcal{S}^q	$:= \mathcal{S}_{I_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{I_r}$, où $\mathfrak{q} = \{I_1, \dots, I_r\}$ est une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$	60
$\mathfrak{p} \pitchfork \mathfrak{q}$	notation pour \mathfrak{p} et \mathfrak{q} sont transverses.....	60
$\mathfrak{q}^{\pitchfork}$	ensemble des partitions transverses à \mathfrak{q}	60

4. Cohomologie des espaces de configuration, cas i -acyclique

$\mathcal{P}(V) \in \mathbb{Z}[T]$	polynôme de Poincaré d'un espace vectoriel gradué V	65
$\mathcal{P}(X), \mathcal{P}_c(X)$	polynômes de Poincaré de $H(X)$ et $H_c(X)$ respectivement.....	65
$X \setminus \mathbf{a}$	complémentaire d'un ensemble \mathbf{a} de cardinal a dans X	65
$Q_{\leq \ell}^m \in \mathbb{Z}[P, T]$	polynôme universel pour $\mathcal{P}_c(\Delta_{\leq \ell} X^m)$	69

5. Représentations du groupe symétrique

\mathcal{S}_m	group des permutations de $\llbracket 1, m \rrbracket$	71
$\lambda \vdash m$	alias pour : λ est une décomposition de m	71
$ \lambda $	nombre décomposé par λ , donc $ \lambda := \sum_i \lambda_i$	71
$\ell(\lambda)$	nombre de termes (non nuls) d'une décomposition.....	71
$\mathcal{Y}_\ell(m)$	$:= \{\lambda \vdash m \mid \ell(\lambda) = \ell\}$	71
$\tau(\lambda)$	tableau de Young standard associé à une décomposition λ	71
$\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}$	stabilisateur dans \mathcal{S}_m des lignes du tableau $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$	72
$\mathcal{S}_\lambda = N_{\mathcal{S}_m}(\mathcal{P}_\lambda)$	normalisateur de \mathcal{P}_λ dans \mathcal{S}_m	72
$\mathcal{S}_\mathfrak{p}$	sous-groupe de \mathcal{S}_m qui fixe la partition \mathfrak{p}	72
G_λ	$:= \mathcal{S}_\lambda / \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{S}_{X_1} \times \cdots \times \mathcal{S}_{X_r}$, avec $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = (d_1^{X_1}, \dots, d_r^{X_r})$	72
$\chi_c(Z; i), \chi(Z; i)$	caractères de \mathcal{S}_m -module de $H_c^i(Z, k)$ et de $H^i(Z, k)$	73
$\text{ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_m}$	$:= \text{ind}_{\mathcal{S}_\lambda}^{\mathcal{S}_m} \circ \text{res}_{G_\lambda}^{\mathcal{S}_\ell}$, où \mathcal{S}_λ agit à travers la surjection $\nu_\lambda : \mathcal{S}_\lambda \twoheadrightarrow G_\lambda$	73
Υ_ℓ^m	$: k_c[\mathcal{S}_\ell] \rightarrow k_c[\mathcal{S}_m]$, opérateur d'induction sur les fonctions centrales.....	73
$\Upsilon(\sigma)$	opérateur d'inductions itérées.....	75
Θ_ℓ^m	opérateur d'inductions itérées.....	75

6. Cohomologie des espaces de configuration, cas général

p_m	$: F_{m+1}(X) \twoheadrightarrow F_m(X)$, projection sur les m premières coordonnées..	77
$V^\vee := \text{Hom}_k(V, k)$	dual vectoriel.....	77
$p_{m!}$	$: H_c(F_{m+1}(M)) \rightarrow H_c(F_m(M))[-d_M]$, intégration sur les fibres....	77

$H_{\text{BM}}^i(Y)$	$:= H_c^{d_X-i}(Y; k)^\vee$, cohomologie de Borel-Moore	78
$\langle _, _ \rangle_M$	accouplement de la dualité de Poincaré sur M	79
$(_)^\vee_M$	adjonction pour la dualité de Poincaré sur M	79
$\sigma_M(f_i)$	action de $f_{i!}$ sur la classe fondamentale de M_i	79
$p_{b!}$	$: H_c(F_{b+a}(M) \rightarrow H_c(F_b(M))[-a d_M]$, intégration sur les fibres	81
$\text{sgn}(g)$	signature de la permutation $g \in \mathcal{S}_m$	82
$\sigma_{M^m}(g) := \text{sgn}(g)^{\dim M}$	action de $g \in \mathcal{S}_m$ sur l'orientation de M^m	82
σ_m	le caractère « signature » de \mathcal{S}_m	83
$(\check{C}^p(\mathcal{U}, _), d)$	complexe de p -cochaînes simpliciales (non-ordonnées)	85
$(\check{C}^p_{<}(\mathcal{U}, _), d)$	complexe de p -cochaînes (simpliciales) ordonnées	85
$(\check{C}^p_{\varepsilon}(\mathcal{U}, _), d)$	complexe de p -cochaînes (simpliciales) alternées	85
$\text{sgn}(\alpha)$	signature d'une permutation α	85
ε_p	$: (\check{C}^p_{<}(\mathcal{U}, _), d) \rightarrow (\check{C}^p_{\varepsilon}(\mathcal{U}, _), d)$ antisymétrisation	85
$\mathbb{U}_{(i_0, \dots, i_p)}$	une copie de U_{i_0, \dots, i_p} paramétrée par l'uplet (i_0, \dots, i_p)	86
$\mathcal{G}_{\mathbb{U}^m}$	faisceaux \mathcal{S}_m -équivariant sur \mathbb{U}^m	86
$(\Omega_c^*(U), d)$	$:= \Gamma_c(U; (\underline{\mathcal{A}}\mathcal{S}^\bullet(X; k), d_*))$, cochaînes à support compact sur U	88
$(\underline{\Omega}_{M,c}, d)$	cofaisceaux (flasques) des cochaînes à support compact sur M	88
$(\Omega_{\text{BM}}^*(U), d_*)$	le complexe des cochaînes de Borel-Moore sur $U \subseteq M$	88
$(\underline{\Omega}_{M, \text{BM}}, d_*)$	complexe de faisceaux de cochaînes de Borel-Moore de M	89
$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{c, \bullet}^*$	bicomplexe de chaînes de Čech à support compact de \mathcal{U}^m	89
$\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet, *}$	bicomplexe de cochaînes de Čech-Borel-Moore de \mathcal{U}^m	90
$\mathbb{F}H_{\text{BM}}^*(\mathcal{U}^m), \mathbb{F}\text{tot}^*(\check{C}(\mathcal{U}^m)_{\text{BM}}^{\bullet, *})$	filtrés par degrés de cochaînes de Čech	90
$\mathbb{E}_{\sigma}(\mathcal{U}^m)$	$:= \mathbb{E}(\mathcal{U}^m) \otimes \sigma_m$, suite spectrale pour \mathcal{S}_m -équivariants $\underline{\Omega}_{\mathbb{U}^m, \text{BM}}^* \otimes \sigma_m$	92
Ξ_{p+1}^m	décomposition canonique de $H_{\text{BM}}(\mathbb{U}_{m-p, \dots, m}^m)$	92
$\mathcal{F}(p+1, m)$	ensemble des applications $f : \llbracket 1, m-p \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $t < f(t) \leq m$	93
$\gamma_m(\omega) = *c_m(\omega)$	renormalisation du morphisme de liaison	97
$\mathcal{F}^\bullet(p+2, m+1)$	ensemble des application $f : \llbracket 1, m-p \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}$, telles que $t < f(t) \leq m$	105

7. Stabilité des familles de représentations

FI	catégorie des ensembles Finis et des applications Injectives	110
\mathcal{A}	anneau arbitraire	110
$\text{Mod}(\mathcal{A}[\text{FI}])$	catégorie des FI-modules	110
$\text{Mod}(\mathcal{A})$	catégorie des \mathcal{A} -modules	110
FI	catégorie des ensembles finis et injections	110
$\text{Hom}_{\text{FI}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$	ensemble des morphismes de FI-modules	110
\mathcal{V}	$= \{\phi_m : V_m \rightarrow V_{m+1}\}_m$, un FI-module	111
$\phi_{m+b, m}$	morphisme de transition itéré dans un FI-module	111

$\mathcal{V}_{\geq q}$	tronqué de \mathcal{V} qui préserve les V_m pour $m \geq q$ et annule les autres. .	111
$\mathcal{V}_{\leq q}$	tronqué de \mathcal{V} qui préserve les V_m pour $m \leq q$ et annule les autres. .	112
$\mathbf{a} := \llbracket 1, a \rrbracket$	notation pour l'ensemble fini représenté par l'intervalle $\llbracket 1, a \rrbracket$	112
$\mathcal{M}(\mathbf{a})$	le foncteur représentable $(_) \rightsquigarrow \mathcal{A}[\text{Mor}_{\text{FI}}(\mathbf{a}, _)]$	112
$\langle \Sigma \rangle \subseteq V$	sous-FI-module de V engendré par $\Sigma \subseteq \coprod_m V_m$	113
\mathcal{W}	$:= \{\mathcal{S}_m : W_m\}_m$, famille de représentations	114
$\chi(\mathcal{W})$	$:= \{\chi_{\mathcal{S}_m}(W_m)\}_m$, famille des caractères associée à \mathcal{W}	114
$\dim_k(\mathcal{W})$	$:= \{\dim_k(W_m)\}_m$, famille des dimensions associée à \mathcal{W}	114
$V(\lambda)_m$	la représentation irréductible de \mathcal{S}_m correspondante à $\lambda[m]$	115
$\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$	partie entière par excès de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. Le nombre $\lceil m/\ell \rceil$ est le plus petit nombre de colonnes d'un diagramme de Young de taille m possédant ℓ lignes, on convient que $\lceil 0/0 \rceil = 0$	115
P_λ	polynôme de $k[\overline{X}]$ représentant le caractère $\chi_{\mathcal{S}_m}(V(\lambda)_m)$	115
$c(\lambda)_m$	multiplicité de $V(\lambda)_m$ dans V_m	115
$\text{rg}_s(\mathcal{V})$	rang de stabilité de \mathcal{V}	116
$\text{rg}_m(\mathcal{V})$	rang de monotonie de \mathcal{V}	116
$\text{rg}_{\text{ms}}(\mathcal{V})$	$:= \sup \{\text{rg}_m(\mathcal{V}), \text{rg}_s(\mathcal{V})\}$, rang (de monotonie et stabilité) de \mathcal{V}	116
$\mathcal{P}(\mathcal{V})$	pois de \mathcal{V}	119
$\mathcal{W}^{(?t)}$	scindages par le poids de \mathcal{W}	120
\mathcal{M}_a^H	foncteur de $\text{Mod}(k[H])$ vers $\text{Mod}(k[\text{FI}])_{\geq a}$	121
$\mathcal{M}_a = \mathcal{M}_a^{\mathcal{S}_a}$	alias de notation	121
FB	catégorie des ensembles Finis et des applications Bijectives	122
$\text{Mod}(k[\text{FB}])$	catégorie des $k[\text{FB}]$ -modules	122
$\mathcal{M}(\lambda)$	alias de $\mathcal{M}_{ \lambda }(V_\lambda)$	123
$V(\lambda)$	$:= \mathcal{M}(\lambda)^{(\geq \lambda)} / \mathcal{M}(\lambda)^{(> \lambda)}$	123
$\mathcal{V}(\mathcal{W}, n)$	$:= \bigoplus_{ \mu =t} c(\mu)_n \mathcal{V}(\mu)_{\geq n}$, où $W_n = \bigoplus_{ \mu =t} c(\mu)_n V(\mu)_n$	123
$\mathcal{S}(n)$	$: \mathcal{V}(\mathcal{W}, n) \rightarrow \mathcal{W}$, morphisme de FI-modules, l'identité en degré n	123
$[M]_t$	somme des composantes irréductibles de poids t d'un \mathcal{S}_{m+1} -module M	124
$\Phi_t := (_)_{\mathcal{S}_{m-t}}$	$: \text{Mod}(\mathcal{S}_m) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{S}_t)$, foncteur de \mathcal{S}_{m-t} -co-invariants	125
$\Phi_t(\mathcal{W})$	$k[\mathcal{S}_t][T]$ -module gradué associé au FI-module \mathcal{W}	126
$c_\lambda(m)$	$:= \mathfrak{I}_\lambda(m) \cdot \mathfrak{a}_\lambda \cdot \mathfrak{b}_\lambda$, symétriseur de Young associé à $\lambda_{[m]}$	127
$\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})$	degré de stabilité en $t \in \mathbb{N}$ d'un FI-module \mathcal{W}	128
$\text{deg-ini}_t(\mathcal{W})$	degré d'injectivité en $t \in \mathbb{N}$ d'un FI-module \mathcal{W}	128
$\text{deg-stab}(\mathcal{W})$	$\sup_{t \in \mathbb{N}} \{\text{deg-stab}_t(\mathcal{W})\}$, degré de stabilité d'un FI-module \mathcal{W}	129
$\text{rg}_m^e(\mathcal{W}), \text{rg}_{\text{ms}}^e(\mathcal{W})$	rangs étendus du FI-module \mathcal{W}	129
$\lambda \setminus n$	si $\lambda = (1^{X_1}, 2^{X_2}, \dots) \vdash m$, on pose $\lambda \setminus n = (1^{X_1+n-m}, 2^{X_2}, \dots)$	133

$\underline{\lambda}$ si $\lambda = (1^{X_1}, 2^{X_2}, 3^{X_3}, \dots)$, on pose $\underline{\lambda} = (1^0, 2^{X_2}, 3^{X_3}, \dots)$ 133

\mathcal{S}_L on a $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ et $\mathcal{S}_L := \text{Fix}_{\mathcal{S}_m}(\llbracket 1, m \rrbracket \setminus L)$ 138

L' pour $L \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $L' := L \coprod \{m+1\}$ 138

$\Upsilon^a, \Upsilon(\mathbf{a})$ et Θ^a foncteurs d'induction itérés 142

$\mathcal{T}(p+1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}(p+1, m)$ 151

$\mathcal{T}^\bullet(p+1, m)$ ensemble de tableau paramétrant $\mathcal{F}^\bullet(p+1, m)$ 151

$(_)^\bullet$: $\mathcal{T}(p+1, m) \rightarrow \mathcal{T}^\bullet(p+2, m+1)$, application qui rajoute une boîte isolée 151

$\mathcal{T}_b(I)$ ensemble des tableaux à $(|I|+b)$ boîtes dont la première colonne est $\llbracket 1, b \rrbracket$ 152

$\mathfrak{p}(\tau)$ partition de $\llbracket 1, b \rrbracket$ déterminée par le tableau $\tau \in \mathcal{T}_b(I)$ 152

Ψ_b^I : $\bigoplus_{\tau \in \mathcal{T}_b(I)} H_c(F_\tau) \rightarrow H_c(\Delta_{|I|+b}(Z^I \times F_b))$, isomorphisme 152

Ψ_τ restriction de Ψ_b^I à $H_c(F_\tau)$ 156

$\mathcal{T}_0(b, m)$ ensemble de tableaux « normaux » dans $\mathcal{T}(b, m)$ 157

\mathcal{H}_τ le stabilisateur de τ dans $\mathcal{S}_{m-b} \times \mathcal{S}_b$ 158

F_τ := $\{\bar{x} \in M_{\geq 0}^{m-(p+1)} \times F_{p+1} \mid x_i = x_{f_\tau(i)}\}$: 158

10. Calcul du caractère de \mathcal{S}_m -module de $H_c(F_m(X))$

$\chi_V \mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$ série de caractères d'un \mathcal{S}_m -module gradué V 163

$\chi_c(M)(_, T)$: $\mathcal{S}_m \rightarrow k[[T]]$, série de caractères de \mathcal{S}_m -module de $H_c(M)$ 164

$\sigma_m \in \mathcal{S}_m$ la permutation cyclique $(1, 2, \dots, m)$ 164

$C_m = \langle \sigma_m \rangle$ sous-groupe de \mathcal{S}_m engendré par σ_m 164

$\mu(_)$ fonction de Möbius 165

11. Nombres de Betti des quotients des espaces de configuration

$CF_m(X) := F_m(X)/C_m$, espace de configurations cycliques de X 176

$\phi(_)$ fonction indicatrice d'Euler 176

$BF_m(X) := F_m(X)/\mathcal{S}_m$, espace de configurations non-ordonnées de X 177

$\mathbb{Q}_{\text{class}}(\mathcal{S}_m)$ \mathbb{Q} -algèbre des fonctions $f : \mathcal{S}_m \rightarrow \mathbb{Q}$ centrales 179

$\underline{\text{deg}}$ graduation de $k[X_1, X_2, \dots]$ telle que $\underline{\text{deg}} X_k = k$ 180

$a^{\underline{X} * b} = a(a-b)(a-2b) \dots (a-(X-1)b)$, factorielle décroissante étendue 183

12. Suites spectrales de Leray

$H_{\pi!}(\pi_Y), H_{\pi!}(Y; B), H_{\pi!}(Y)$, cohomologie à support π -propre 193

$D_k^+(Y)$ catégorie dérivée des complexes de faisceaux bornés inférieurement. 194

$f^* : H_{\pi!}(Y; B) \rightarrow H_{\pi!}(Z; B)$, image-inverse en cohomologie à support π -propre 195

$\Delta_{? \ell}^{m[a]}$ notation abrégée de $\Delta_{? \ell}^{[a]} Y^m := \Delta_{? \ell} Y^m \cap (Y^{m-a} \times F_a)$ 196

$\mathcal{P}_{\pi!}(Z; U)(T)$ polynôme de Poincaré pour la cohomologie à support π -propre 199

$\mathcal{H}_{\pi!}^i(Y) := \mathbb{R}^i \pi_{a!}(\underline{k}_Y)$, faisceau de cohomologie à support π -propre 200

UY $\pi_a : Y \rightarrow F_a$ et $U \subseteq F_a$, on pose $UY := \pi_a^{-1}U$ 200

C composante connexe de F_a 201

$c : Y \rightarrow \{\text{pt}\}$ application constante 204

$\mathcal{S}_a C := \bigcup_{g \in \mathcal{S}_a} g \cdot C$ saturé d'une partie $C \subseteq F_a$ sous l'action de \mathcal{S}_a 210

14. Rappels sur les nombres de Stirling

$x^{\overline{n}} := x(x+1) \cdots (x+(n-1))$, n -ième factorielle croissante de x 227

$x^{\underline{n}} := x(x-1) \cdots (x-(n-1))$, n -ième factorielle décroissante de x 227

$\underline{s}(i, j), \overline{s}(i, j)$ nombres de Stirling de première espèce resp. signés et non signés .. 228

$\overline{S}(i, j), \underline{S}(i, j)$ nombres de Stirling de seconde espèce resp. signés et non signés ... 229

$\left[\begin{smallmatrix} m \\ \ell \end{smallmatrix} \right] = \overline{s}(i, j)$ cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble à i éléments qui sont produits d'exactly j cycles 230

$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\} = \underline{S}(i, j)$ cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}_j(E)$ de partitions d'un ensemble E à i éléments en j parties non vides 230

INDEX

Les numéros soulignés renvoient à des définitions, les italiques à des remarques importantes.

- action de \mathcal{S}_m , 82
- Alexander-Spanier, 40, 51, 62, 78
- basé
 - espace, 193
 - morphisme, 193
- Borel-Moore
 - action de \mathcal{S}_m , 82
 - cohomologie, 78
 - homologie, 78
 - image-directe, 82
 - image-inverse, 81
- caractéristique d'Euler-Poincaré, 21
 - compacte, 20
- caractère, 19, 73
 - signature, 29, 73, 83
- classe
 - de Thom, 79
 - fondamentale, 29, 77, 79, 81, 145
- cochaînes
 - à support π -propre, 194
 - d'Alexander-Spanier, 40
- cohomologie
 - à support π -propre, 193
 - de Borel-Moore, 78
 - intérieure, 23, 41
- co-invariants, 125
- complexe fondamental, 24, 56, 61
- concaténation (de suites), 56
- décomposition, 71
- degré
 - de stabilité, 118
 - de stabilité/injectivité, 128
- diagonale épaisse, 66
- diagramme de Young, 71
- dimension cohomologique, 51
- dualité de Poincaré, 79
- engendré (en degré), 113
- espace, 39
 - de configuration
 - cycliques, 33, 176
 - généralisés, 19
 - non-ordonnées, 33, 177
 - i -acyclique, 23
 - localement compact, 19
 - muni d'une classe fondamentale, 81
- extension de FI-modules, 120
- factorielle
 - croissante, 66
 - croissante/décroissante, 227
 - décroissante, 21, 24, 33
- faisceau
 - constant, 50
 - des cochaînes d'Alexander-Spanier, 40
 - Φ -mou, 40
 - localement constant, 50
- famille de caractères
 - (éventuellement) polynomiale, 114, 115
 - d'un FI-module, 114
- FB (catégorie), 122
- FI (catégorie), 110
- FI-module, 77, 110, 110
 - $\mathcal{M}(\lambda)$ et $\mathcal{V}(\lambda)$, 123
 - (sous-), 113
 - quotient, 113
 - stabilité/injectivité, 128
 - suite exacte longue, 146
- fibres de π_a , 49
- filtration régulière, 62, 90–92, 105
- foncteur
 - adjoint à gauche, 121
 - d'évaluation en \mathbf{a} , 121
 - d'induction, 73, 133
 - itérées, 75
 - d'induction tordue, 140
 - de co-invariants, 125
 - fidèle, 121, 135, 142

- ind $_{\lambda}$, [134](#), [135](#)
- pleinement fidèle, [121](#)
- Θ^a , [143](#)
- Υ^a , [142](#)
- $\Upsilon_{\ell}^{\ell+a}$, [142](#)
- fonction
 - centrale, [179](#)
 - de Möbius, [33](#), [165](#), [168](#), [170](#), [171](#), [176](#), [178](#)
 - de Morse, [217](#)
- fonteur
 - covariant, additif, exact, [30](#), [135](#), [143](#)
- formule universelle
 - des caractères, [19](#)
- graduation deg, [180](#)
- groupe des tresses, [109](#)
- homologie de Borel-Moore, [78](#)
- i*-acyclique, [41](#)
- image-directe, [78](#), [79](#), [82](#)
- image-inverse, [81](#), [81](#)
 - en cohomologie π -propre, [195](#)
- immiscible, [169](#)
- indicatrice d'Euler, [33](#), [176](#), [181](#)
- inductions itérées, [75](#)
- intégration sur les fibres, [29](#), [29](#), [77](#), [79](#), [81](#), [95](#), [102](#), [145](#)
- intérieure (cohomologie), [41](#)
- inversion
 - de Möbius, [166](#)
- Künneth, [41](#)
- Leray (dégénérescence), [20](#)
- Littlewood-Richardson, [118](#)
- monodromie, [44](#)
- monotonie (rang), [20](#)
- morphisme de transition, [111](#)
- noëthérianté, [113](#)
- nombre
 - de Betti (compact), [20](#)
 - de Stirling
 - de première espèce, [168](#)
 - de seconde espèce, [50](#), [168](#)
 - première espèce, [228](#)
 - seconde espèce, [229](#)
- opérateur d'induction, [73](#)
- partie entière par excès, [115](#)
- partition, [50](#)
 - transversalité, [60](#)
- permutations immiscibles, [169](#)
- Pieri (règles), [118](#), [123](#)
- poids
 - (d'un *Sm*-module), [119](#)
 - (d'un FI-module), [118](#), [119](#)
- polynôme
 - de Poincaré (compact), [20](#)
 - de Poincaré universel, [69](#)
 - universel, [69](#)
- produit symétrique, [178](#)
- prolongement par zéro, [40](#), [79](#)
- pseudovariété, [39](#)
- règles
 - de branchement, [118](#)
 - de Littlewood-Richardson, [118](#)
 - de Pieri, [118](#)
- rang
 - étendu, [129](#)
 - de monotonie, [20](#), [116](#)
 - de monotonie et stabilité, [116](#)
 - de stabilité de représentation, [20](#), [116](#)
 - de stationnement, [20](#)
- régulière (filtration), [62](#), [90–92](#), [105](#)
- reparamétrisation des représentations, [114](#)
- représentation de S_m
 - irréductible, [115](#)
 - standard, [115](#)
 - triviale, [115](#)
- série
 - de caractères, [33](#), [163](#), [164](#), [181](#)
 - de traces
 - d'un cycle, [164](#), [165](#)
 - d'une puissance de cycle, [166](#)
 - génératrice, [48](#)
- scindée (suite longue), [53](#)
- scindage par le poids, [120](#)
- sous-catégorie abélienne, [117](#), [149](#)
- sous-FI-module, [113](#)
 - engendré, [113](#)
- stabilité
 - FB-module (éventuelle), [122](#)
 - FI-module (éventuelle), [115](#)
 - de représentation (rang), [20](#)
- stabilité de représentation, [115](#)
 - rang, [116](#)
- Stirling (nombre)
 - première espèce, [168](#), [228](#)
 - seconde espèce, [50](#), [168](#), [229](#)
- suite
 - exacte de Gysin, [83](#)
 - exacte longue scindée, [53](#)
 - spectrale
 - basique, [31](#)
 - de Leray, [35](#)
- support de permutation, [180](#)

- symétriseur de Young, 127
- tableau de Young, 71
 - normal, [157](#)
- taille d'un diagramme, 71, 115
- théorème
 - de dégénérescence, 207
 - de scindage, 23
 - faisceaux, 200
 - local, 197
 - de stabilité d'Arnold, 109
 - des rangs
 - pour inductions itérées, 143
 - pour inductions non tordues, 135
 - pour les inductions tordues, 141
 - des suites spectrales basiques, 92
 - du caractère universel, 75
 - du polynôme de Poincaré universel, 69
 - du relèvement spectral de p_m^* , 104
- Thom-Gysin, 78
- totale- \cup -acyclique, [41](#)
- troncature des FI-modules, [111](#), 120
- type fini
 - (FB-module), [122](#)
 - (FI-module), [113](#), [118](#), 135
 - espace (sur k), [65](#)
- \cup -acyclique, [41](#)
- Young
 - diagramme, 71
 - tableau, 71

Série MÉMOIRES DE LA S.M.F.

2021

169. C. ERIGNOU – *Hydrodynamic limit for an active exclusion process*
168. V. A. DOLGUSHEV – *Stable Formality Quasi-isomorphisms for Hochschild Cochains*

2020

167. D. BENOIS – *p -adic height and p -adic Hodge theory*
166. Y. ALMOG & B. HELFFER – *The spectrum of a Schrödinger operator in a wire-like domain with a purely imaginary degenerate potential in the semiclassical limit*
165. D. ARA & G. MALTSINIOTIS – *Joint et tranches pour les ∞ -catégories strictes*
164. S. GHAZOUANI & L. PIRIO – *Moduli spaces of flat tori and elliptic hypergeometric functions*

2019

163. D. XU – *Lifting the Cartier transform of Ogus-Vologodsky module p^n*
162. J.-H. CHIENG, C.-Y. HSIAO & I.-H. TSAI – *Heat kernel asymptotics, local index theorem and trace integrals for Cauchy-Riemann manifolds with S^1 action*
161. F. JAUBERTEAU, Y. ROLLIN & S. TAPIE – *Discrete geometry and isotropic surfaces*
160. P. VIDOTTO – *Ergodic properties of some negatively curved manifolds with infinite measure*

2018

159. L. POSITSIELSKI – *Weakly curved A_∞ -algebras over a topological local ring*
158. T. LUPU – *Poisson ensembles of loops of one-dimensional diffusions*
157. M. SPITZWECK – *A commutative \mathbb{P}^1 -spectrum representing motivic cohomology over Dedekind domains*
156. C. SABBAH – *Irregular Hodge Theory*

2017

155. Y. DING – *Formes modulaires p -adiques sur les courbes de Shimura unitaires et compatibilité local-global*
154. G. MASSUYEAU, V. TURAEV – *Brackets in the Pontryagin algebras of manifolds*
153. M.P. GUALDANI, S. MISCHLER, C. MOUHOT – *Factorization of non-symmetric operators and exponential H -theorem*
152. M. MACULAN – *Diophantine applications of geometric invariant theory*
151. T. SCHOENEBERG – *Semisimple Lie algebras and their classification over p -adic fields*
150. P.G. LEFLOCH, Y. MA – *The mathematical validity of the $f(R)$ theory of modified gravity*

2016

149. R. BEUZART-PLESSIS – *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires*
148. M. MOKHTAR-KHARROUBI – *Compactness properties of perturbed sub-stochastic C_0 -semigroups on $L^1(\mu)$ with applications to discreteness and spectral gaps*
147. Y. CHITOUR, P. KOKKONEN – *Rolling of manifolds and controllability in dimension three*
146. N. KARALIOLIOS – *Global aspects of the reducibility of quasiperiodic cocycles in compact Lie groups*
145. V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, N. POPOFF – *Ground state energy of the magnetic Laplacian on corner domains*
144. P. AUSCHER, S. STAHLHUT – *Functional calculus for first order systems of Dirac type and boundary value problems*

2015

143. R. DANCHIN, P.B. MUCHA – *Critical functional framework and maximal regularity in action on systems of incompressible flows*
142. J. AYOUB – *Motifs des variétés analytiques rigides*
140/141. Y. LU, B. TEXIER – *A stability criterion for high-frequency oscillations*

2014

- 138/139. T. MOCHIZUKI – *Holonomic D-modules with Betti structures*
- 137. P. SEIDEL – *Abstract analogues of flux as symplectic invariants*
- 136. J. SJÖSTRAND – *Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials*

2013

- 135. L. PRELLI – *Microlocalization of subanalytic sheaves*
- 134. P. BERGER – *Persistence of stratification of normally expanded laminations*
- 133. L. DESIDERI – *Problème de Plateau, équations fuchsienues et problème de Riemann Hilbert*
- 132. X. BRESSAUD, N. FOURNIER – *One-dimensional general forest fire processes*

2012

- 130/131. Y. NAKKAJIMA – *Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$*
- 129. W. A. STEINMETZ-ZIKESCH – *Algèbres de Lie de dimension infinie et théorie de la descente*
- 128. D. DOLGOPYAT – *Repulsion from resonances*

2011

- 127. B. LE STUM – *The overconvergent site*
- 125/126. J. BERTIN, M. ROMAGNY – *Champs de Hurwitz*
- 124. G. HENNIART, B. LEMAIRE – *Changement de base et induction automorphe pour GL_n en caractéristique non nulle*

2010

- 123. C.-H. HSIAO – *Projections in several complex variables*
- 122. H. DE THÉLIN, G. VIGNY – *Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps*
- 121. M. REES – *A Fundamental Domain for V_3*
- 120. H. CHEN – *Convergence des polygones de Harder-Narasimhan*

2009

- 119. B. DEMANGE – *Uncertainty principles associated to non-degenerate quadratic forms*
- 118. A. SIEGEL, J. M. THUSWALDNER – *Topological properties of Rauzy fractals*
- 117. D. HÄFNER – *Creation of fermions by rotating charged black holes*
- 116. P. BOYER – *Faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Drinfeld et groupes de cohomologie du modèle de Deligne-Carayol*

2008

- 115. R. ZHAO, K. ZHU – *Theory of Bergman Spaces in the Unit Ball of \mathbb{C}^n*
- 114. M. ENOCK – *Measured quantum groupoids in action*
- 113. J. FASEL – *Groupes de Chow orientés*
- 112. O. BRINON – *Représentations p -adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*

2007

- 111. A. DJAMENT – *Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs*
- 110. S. SZABÓ – *Nahm transform for integrable connections on the Riemann sphere*
- 109. F. LESIEUR – *Measured quantum groupoids*
- 108. J. GASQUI, H. GOLDSCHMIDT – *Infinitesimal isospectral deformations of the Grassmannian of 3-planes in \mathbb{R}^6*

Mémoires de la S.M.F.

Instructions aux auteurs / *Instructions to Authors*

Les *Mémoires* de la SMF publient, en français ou en anglais, des articles longs de recherche ou des monographies de la plus grande qualité qui font au moins 80 pages. Les *Mémoires* sont le supplément du *Bulletin* de la SMF et couvrent l'ensemble des mathématiques. Son comité de rédaction est commun avec celui du *Bulletin*.

Le manuscrit doit être envoyé au format pdf au comité de rédaction, à l'adresse électronique memoires@smf.emath.fr. Les articles acceptés doivent être composés en L^AT_EX avec la classe `smfart` ou `smfbook`, disponible sur le site de la SMF <http://smf.emath.fr/> ou avec toute classe standard.

In the Mémoires of the SMF are published, in French or in English, long research articles or monographs of the highest mathematical quality, that are at least 80 pages long. Articles in all areas of mathematics are considered. The Mémoires are the supplement of the Bulletin of the SMF. They share the same editorial board.

The manuscript must be sent in pdf format to the editorial board to the email address memoires@smf.emath.fr. The accepted articles must be composed in L^AT_EX with the `smfart` or the `smfbook` class available on the SMF website <http://smf.emath.fr/> or with any standard class.

Ce mémoire présente une nouvelle approche pour l'étude de la cohomologie à supports compacts des espaces de configuration *généralisés*

$$\begin{aligned}\Delta_{\leq \ell} M^m &:= \{(x_1, \dots, x_m) \in M^m \mid \#\{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} M^m &:= \Delta_{\leq \ell} M^m \setminus \Delta_{< \ell} M^m \text{ et } F_m(M) := \Delta_m M^m,\end{aligned}$$

pour les espaces localement compacts M . L'approche comporte deux volets.

Le premier s'applique uniquement aux espaces i -acycliques, dont la classe contient les espaces contractiles non compacts, et, si X est i -acyclique, contient aussi les ouverts de X et les produits $X \times M$ par tout espace M . Pour un espace i -acyclique X , étant donnés $i, m \in \mathbb{N}$, les familles de représentations des groupes de permutations $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(F_{m-a}(X)) \mid a \leq m\}$ et $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(X^{m-a}) \mid a \leq m\}$ se trouvent entrelacées par une matrice universelle de foncteurs d'induction de la catégorie de FI-modules. Cette propriété remarquable permet de transposer certaines questions sur la première famille en termes de la seconde, où elles sont, *a priori*, plus simples à étudier. Cela permet d'exprimer le caractère du \mathcal{S}_m -module module par une formule universelle dépendant uniquement du quadruplet $(?, i, \ell, m)$ et des nombres de Betti compacts de X . La méthode nous permet également d'étendre les théorèmes de stabilité de Church aux familles $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a} X^m\}_{m \geq a}$.

Le deuxième volet décrit un procédé qui permet l'extrapolation des propriétés cohomologiques des espaces de configuration pour les espaces i -acycliques X aux espaces topologiques généraux M . L'outil principal est la *suite spectrale basique* qui converge vers $H_c(F_m(M))$ et dont la première page est constituée de représentations induites des divers $H_c(F_{m-a}(M \times \mathbb{R}))$, pour $0 \leq a \leq m$. La suite spectrale a suffisamment de functorialité pour suivre, page après page, les différents rangs de monotonie et stabilité de ses termes, permettant ainsi l'estimation de ceux de son aboutissement. Comme application du procédé, les théorèmes de stabilité de représentations connus pour les familles $\{F_m(M)\}_m$ où M est une variété topologique, sont généralisés aux familles $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a} M^m\}_{m \geq a}$, où M est une pseudovariété. En particulier, les variétés algébriques complexes, qu'elles soient lisses ou non, vérifient ces généralisations.

This memoir presents a new approach to *generalized configuration spaces*

$$\begin{aligned}\Delta_{\leq \ell} M^m &:= \{(x_1, \dots, x_m) \in M^m \mid \#\{x_1, \dots, x_m\} \leq \ell\}, \\ \Delta_{\ell} M^m &:= \Delta_{\leq \ell} M^m \setminus \Delta_{< \ell} M^m \text{ and } F_m(M) := \Delta_m M^m\end{aligned}$$

of a locally compact space M . The approach is two-fold.

The first part applies only to i -acyclic spaces, which class contains noncompact contractible spaces, and, if X is i -acyclic, contains also the open subspaces of X and the products $X \times M$ by any space M . For an i -acyclic space X , given $i, m \in \mathbb{N}$, the families of representations of symmetric groups $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(F_{m-a}(X)) \mid a \leq m\}$ and $\{\mathcal{S}_{m-a} : H_c^{i-a}(X^{m-a}) \mid a \leq m\}$ are intertwined by a universal invertible matrix of induction functors in the category of FI-modules. This notable feature allows questions about the first family to be swapped to the second, where they are, *a priori*, more tractable. In this way we were able to express the character of the \mathcal{S}_m -module by a universal formula depending only on the quadruplet $(?, i, \ell, m)$ and the compact Betti numbers of X . The method also allowed us to extend Church's stability theorems to the families $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a} X^m\}_{m \geq a}$.

The second part describes a procedure which extrapolates cohomological properties of configuration spaces of i -acyclic spaces X to general topological spaces M . The main tool is the *basic spectral sequence* which converges to $H_c(F_m(M))$ and whose first page terms are induced representations of the various $H_c(F_{m-a}(M \times \mathbb{R}))$, for $0 \leq a \leq m$. The spectral sequence keeps track, page after page, of stability ranks, thereby giving estimates of them at the abutment. As an application, Church's representation stability theorems for the family $\{F_m(M)\}_m$ where M is an oriented manifold, are generalized to the families $\mathcal{D}_?(a) := \{\Delta_{?m-a} M^m\}_{m \geq a}$, where M is no more smooth. In particular, irreducible complex algebraic varieties, whether they are smooth or not, verify these generalizations.